



دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده مهندسی صنایع و سیستم‌های مدیریت

پروژه برنامه‌ریزی تولید

استاد: دکتر هادی مصدق

تهیه کننده: فرید محمدزاده

پاییز ۱۴۰۳

۱.۱ مقدمه پروژه:

داده‌های زیر مقدار فروش ماشین، در سال های ۲۰۰۵-۲۰۲۲ نشان میدهد. این مقدار فروش برای کشور ژاپن، آمریکا و آلمان است.

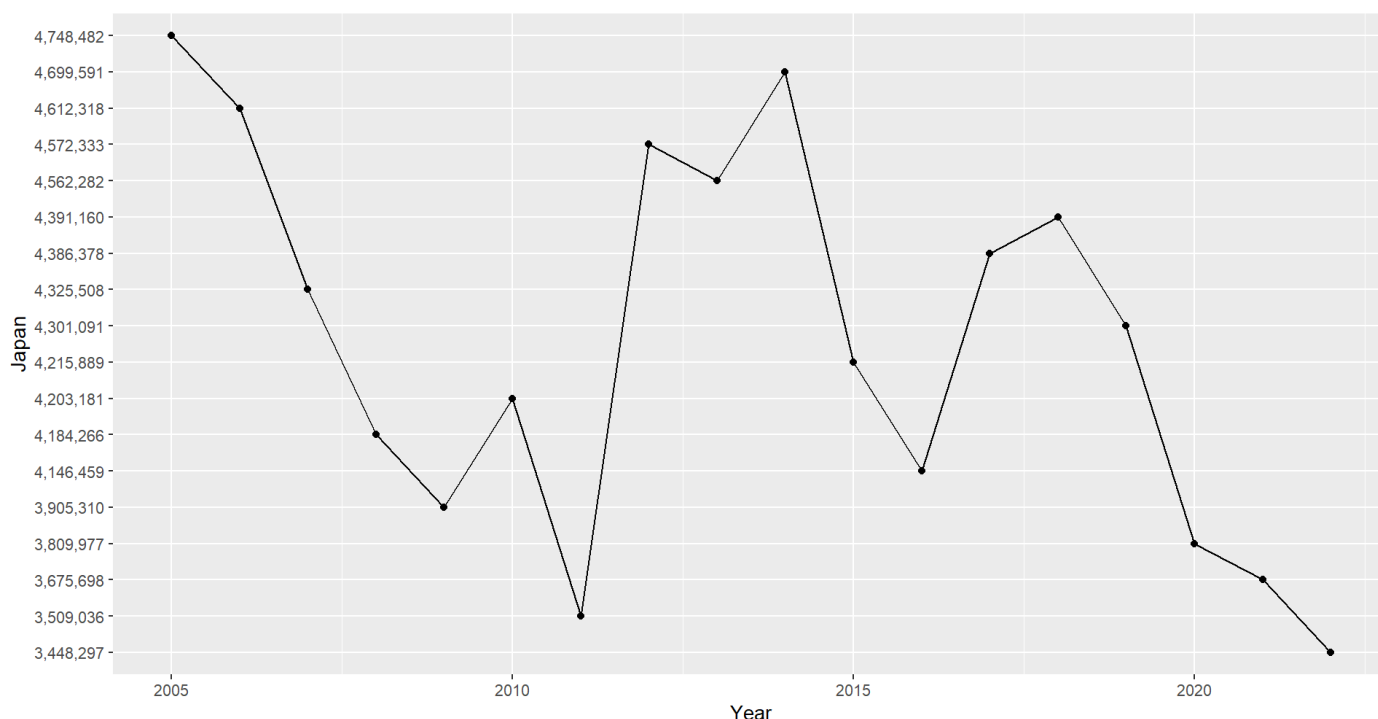
ابتدا با ۴ روش مختلف میانگین متحرک ساده، میانگین متحرک موزون، هموار سازی نمایی و رگرسیون خطی، ۶ دوره آینده (سال ۲۰۲۳ تا ۲۰۲۸) را پیش‌بینی می‌کنیم و سپس با استفاده از برنامه‌ریزی خطی مقدار بهینه تخصیص و مقدار کمینه هزینه‌ها را بدست می‌آوریم.

لازم به ذکر است که برای پیش‌بینی از زبان برنامه نویسی R و برای بهینه سازی مقدار هزینه‌ها، از زبان برنامه نویسی python (cvxpy library) استفاده شده است.

در ادامه برای مقایسه روش های پیش بینی از معیار های متعددی استفاده شده و برای تمام مدل ها مقدار tracking signal محاسبه شده است.

2013	2012	2011	2010	2009	2008	2007	2006	2005
4,562,282	4,572,333	3,509,036	4,203,181	3,905,310	4,184,266	4,325,508	4,612,318	4,748,482
2022	2021	2020	2019	2018	2017	2016	2015	2014
3,448,297	3,675,698	3,809,977	4,301,091	4,391,160	4,386,378	4,146,459	4,215,889	4,699,591

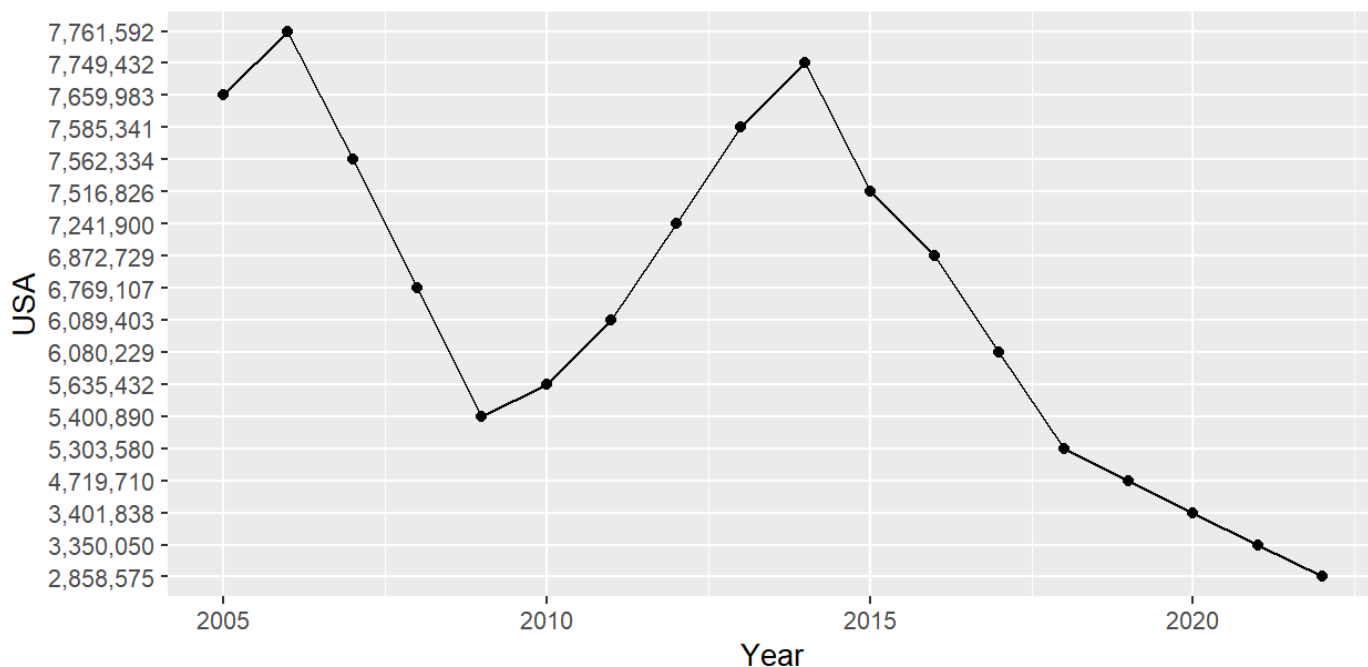
۱.۱- مقدار فروش ماشین ژاپن



۲.۱- مقدار فروش ماشین ژاپن

2013	2012	2011	2010	2009	2008	2007	2006	2005
7,585,341	7,241,900	6,089,403	5,635,432	5,400,890	6,769,107	7,562,334	7,761,592	7,659,983
2022	2021	2020	2019	2018	2017	2016	2015	2014
2,858,575	3,350,050	3,401,838	4,719,710	5,303,580	6,080,229	6,872,729	7,516,826	7,749,432

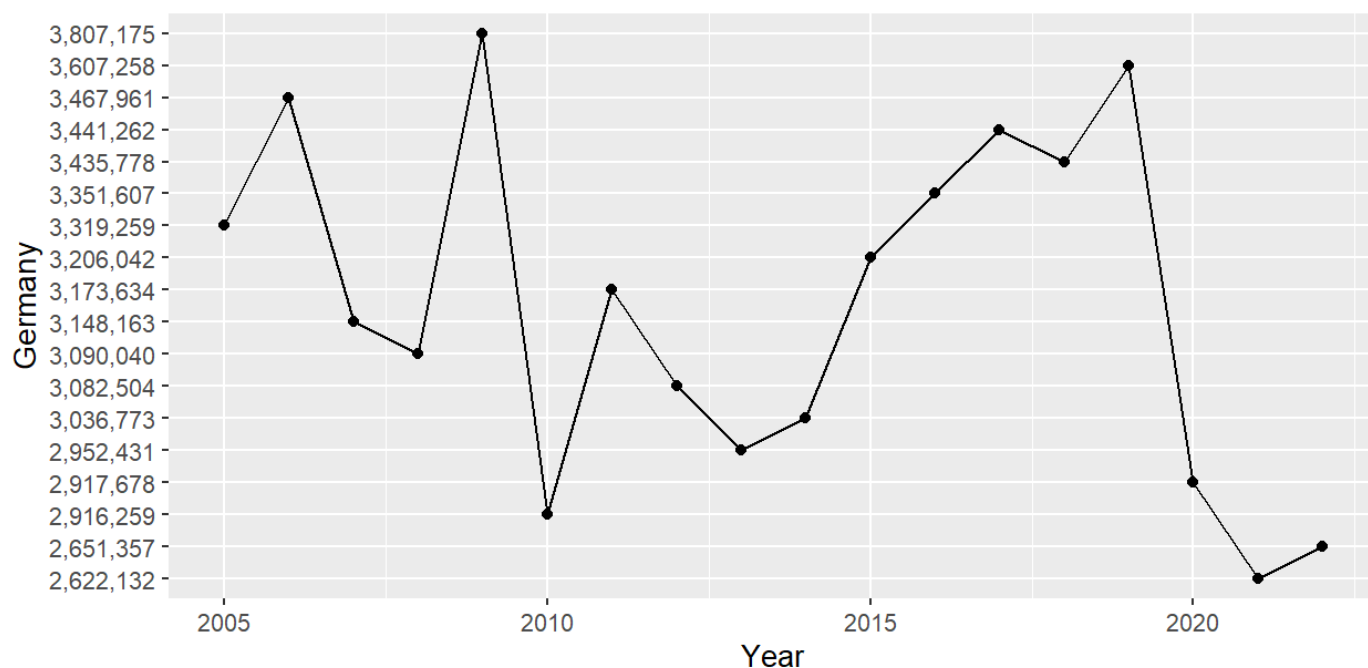
۱.۲- مقدار فروش ماشین آمریکا



۲.۲- مقدار فروش ماشین آمریکا

2013	2012	2011	2010	2009	2008	2007	2006	2005
2,952,431	3,082,504	3,173,634	2,916,259	3,807,175	3,090,040	3,148,163	3,467,961	3,319,259
2022	2021	2020	2019	2018	2017	2016	2015	2014
2,651,357	2,622,132	2,917,678	3,607,258	3,435,778	3,441,262	3,351,607	3,206,042	3,036,773

۱.۳- مقدار فروش ماشین آلمان



۲.۳- مقدار فروش ماشین آلمان

۱.۲. داده های گمشده (Missing Values):

در ابتدا در میان داده ها به دنبال داده های گمشده میگردیم تا در صورت وجود آنها را مدیریت کنیم تا در پیش بینی های خود با مشکل مواجه نشویم.

```
> # checking for missing values  
> sum(is.na(DF))  
[1] 0
```

همان طور که مشخص است در میان داده ها، داده گمشده ای وجود ندارد.

۳. پیش بینی فروش خودرو در کشور ژاپن:

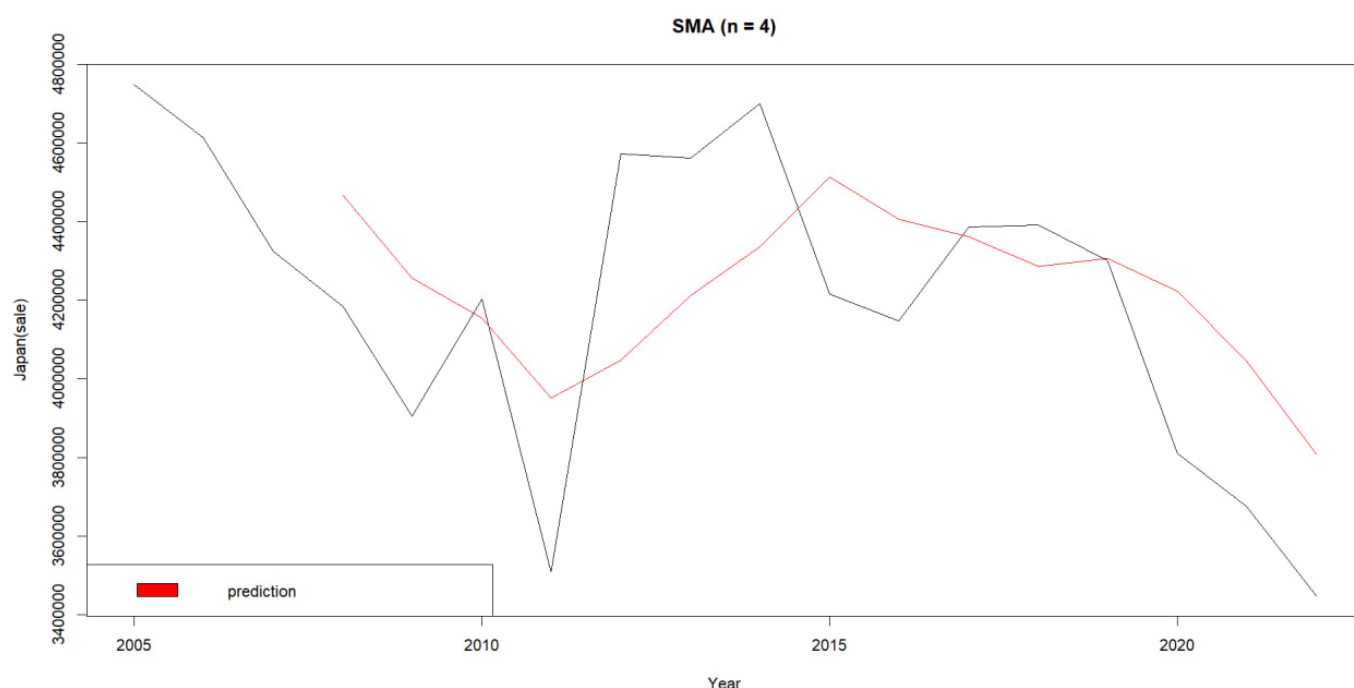
۱.۳. میانگین متحرک ساده (Simple Moving Average):

برای مقایسه میانگین متحرک ساده با مقادیر n متفاوت، یک Data Frame ایجاد میکنیم و در داخل آن معیار های مختلف را ذخیره میکنیم تا بتوانیم با هم مقایسه کنیم.

	n	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE	ACF1
1	1	-79685.64	193957.1	110235.49	-2.0356110	2.863886	0.5816286	-0.22761740
2	2	-27639.30	128833.2	97439.30	-0.6024380	2.471801	0.4714207	0.02418158
3	3	13412.25	109032.3	82654.58	0.1748885	2.028710	0.3468579	0.10062287
4	4	39874.75	107913.4	78571.92	0.8946800	1.910683	0.3801385	-0.05270829
5	5	93808.10	132664.7	93808.10	2.2808479	2.280848	0.5000000	-0.50000000

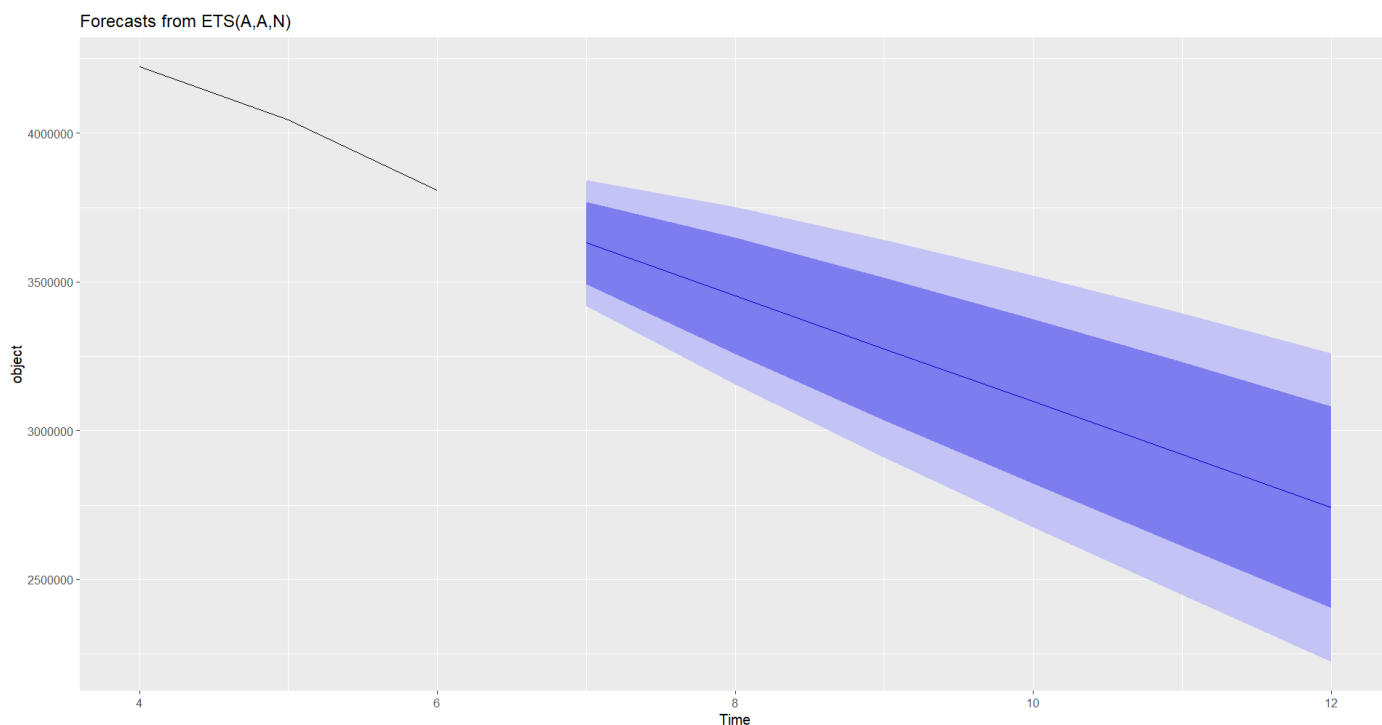
۴- جدول مقایسه شاخص های عملکرد میانگین متحرک ساده

با توجه به جدول بالا، در داده های گذشته، مدل میانگین متحرک ساده با $n = 4$ بهترین عملکرد را داشته و برای پیش بینی از آن استفاده می کنیم. نمودارهای آن به صورت زیر می باشد.



۵- میانگین متحرک ساده با $n = 4$

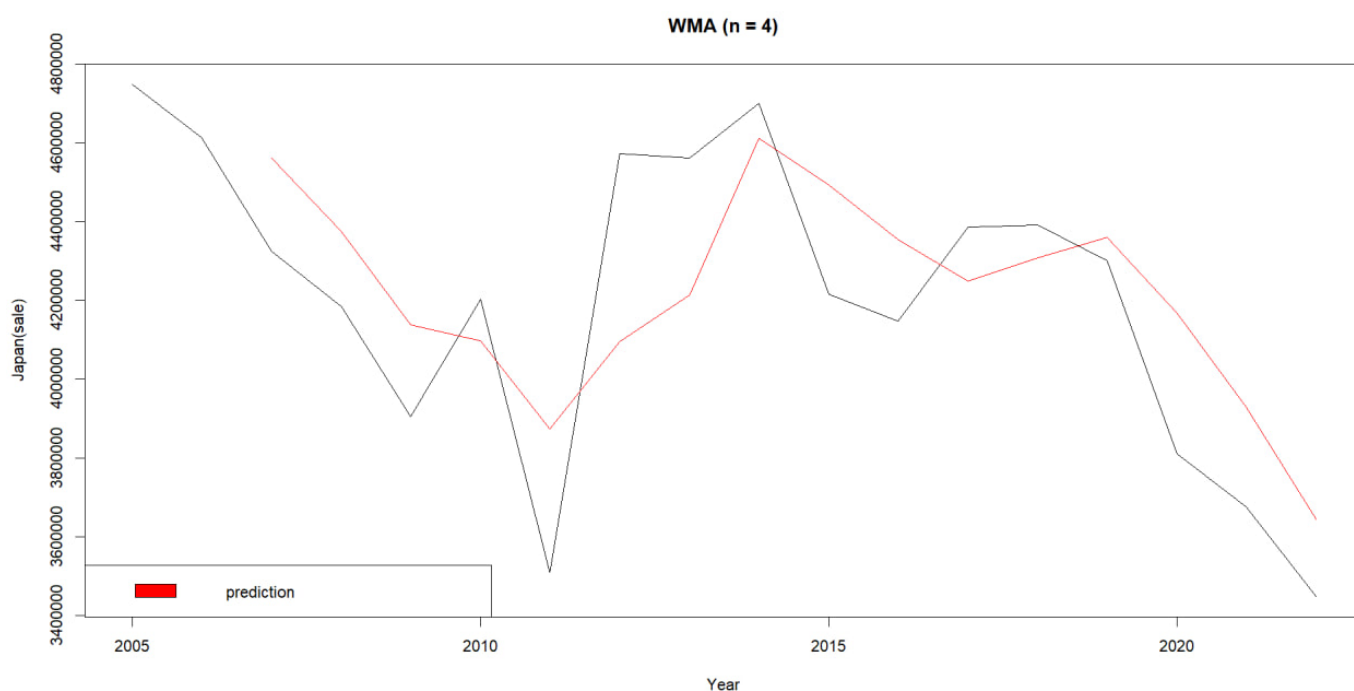
با استفاده از دستور Autoplot نمودار پیش‌بینی را با بازه‌های اطمینان ۸۰ و ۹۵ درصد ترسیم میکنیم که به صورت زیر می‌باشد.



۶- پیش‌بینی میانگین متحرک ساده با $n = 4$

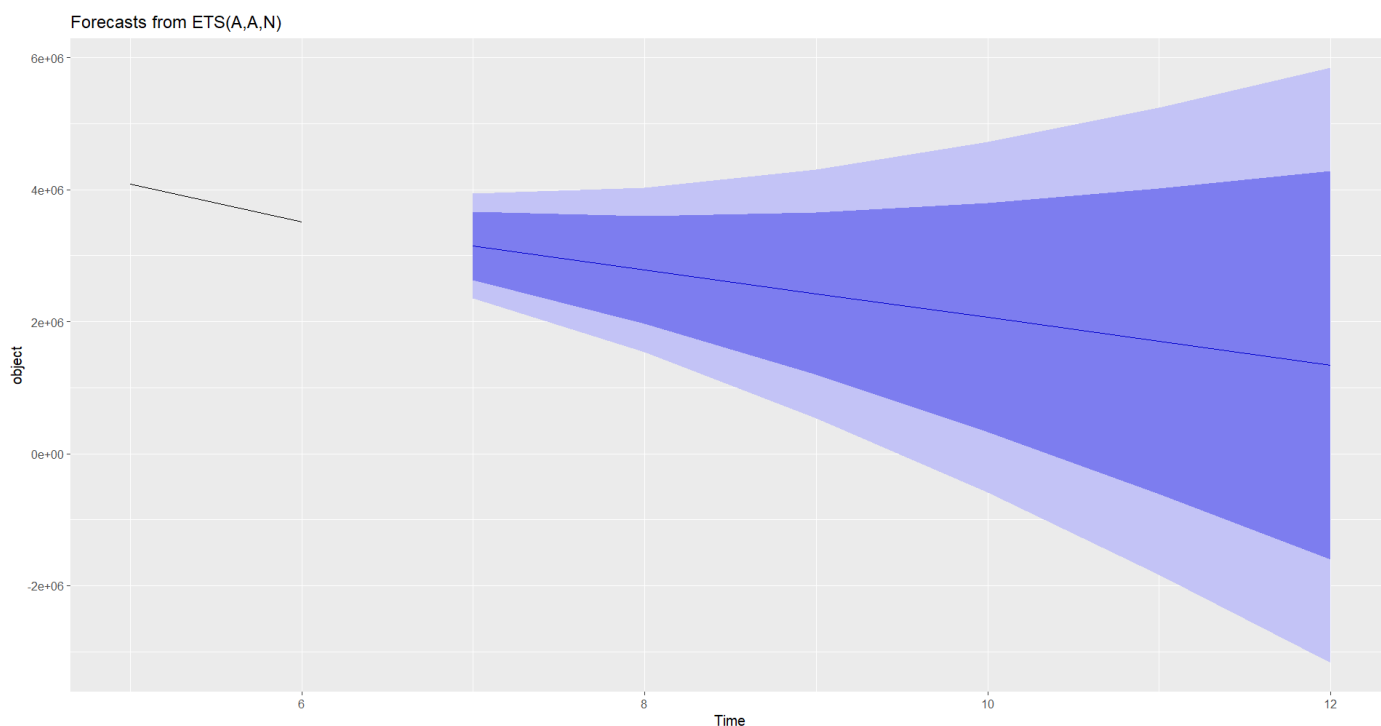
۲.۳. میانگین متحرک موزون (Weighted Moving Average):

در این روش وزن‌های ۰.۴ تا ۰.۱ را به چهار دوره انتهایی می‌دهیم و این پیش‌بینی را با $n = 4$ انجام می‌دهیم. نمودار آن به صورت زیر خواهد بود.



۷- میانگین متحرک موزون با $n = 4$

سپس با استفاده از دستور Autoplot نمودار پیش‌بینی را با بازه‌های اطمینان ۸۰ و ۹۵ درصد رسم می‌کنیم.



۸- پیش‌بینی میانگین متحرک موزون با $n = 4$

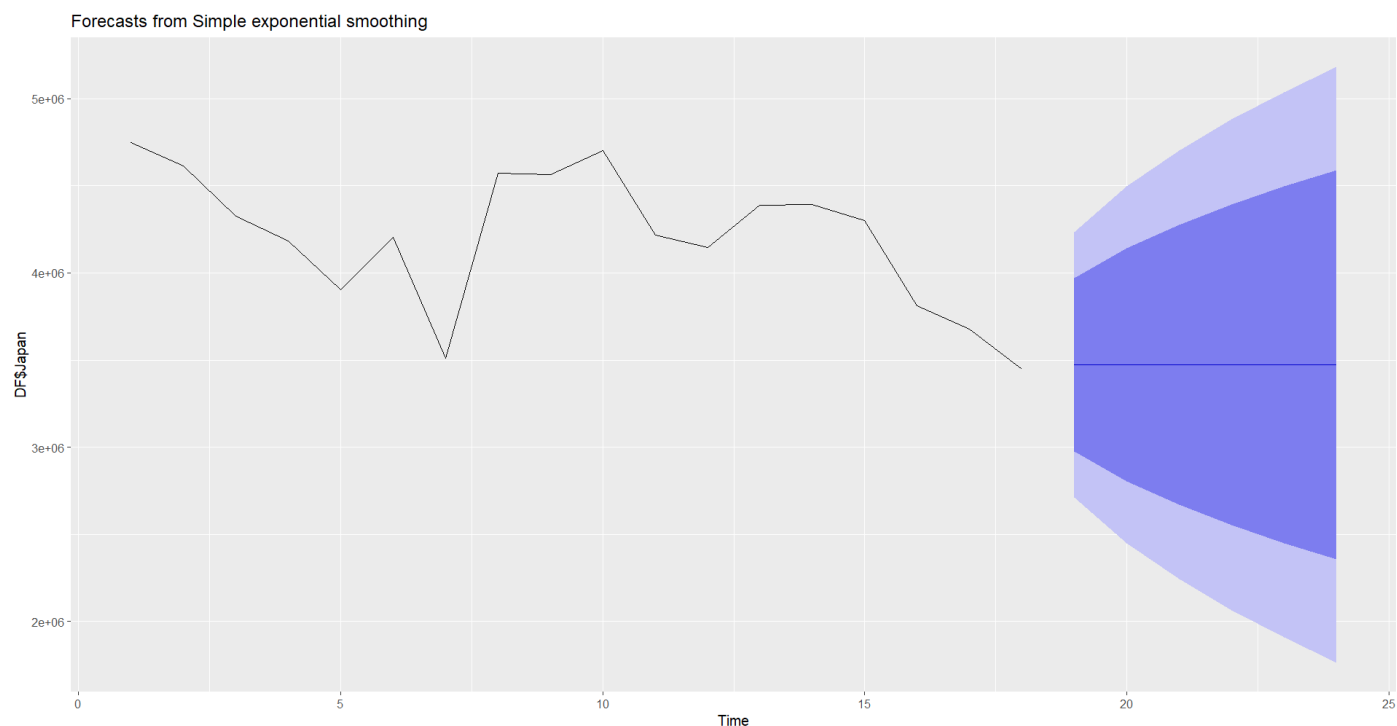
۳.۳. هموار سازی نمایی ساده (Single Exponential Smoothing):

در این روش برای پیدا کردن مقدار Alpha بهینه از یک جدول استفاده می‌کنیم و مقادیر شاخص‌های متفاوت را در آن ذخیره می‌کنیم. جدول آن به صورت زیر است.

	alpha	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE	ACF1
1	0.1	-80019.95	390679.9	313029.5	-2.796624	7.836144	1.1117634	0.33163198
2	0.3	-109553.07	378711.9	318348.1	-3.392217	7.921580	1.1306533	0.23520152
3	0.5	-102183.13	364625.0	308321.1	-3.094651	7.606310	1.0950409	0.09600738
4	0.7	-90012.77	358460.9	294683.3	-2.707549	7.230455	1.0466047	-0.08181422
5	0.9	-77725.40	365426.7	274730.9	-2.352185	6.733740	0.9757412	-0.27599018

۹- جدول مقایسه شاخص‌های عملکرد هموار سازی نمایی

همانگونه که مشخص است مقدار $\text{Alpha} = 0.9$ بهینه است و برای پیش‌بینی از آن استفاده می‌کنیم و نمودار پیش‌بینی آن به صورت زیر است.



۱۰- پیش‌بینی هموار سازی نمایی

۴.۳. رگرسیون خطی (Linear Regression):

```
> prediction = lm(DF$Japan~Year)
> prediction
```

در ابتدا مقدار ضرایب رگرسیون را به دست می‌آوریم و سپس

```
Call:
lm(formula = DF$Japan ~ Year)
```

نتایج رگرسیون را تحلیل می‌کنیم.

Coefficients:

```
(Intercept)      Year
 74146273      -34736
```

در ابتدا مقدار p_value را تحلیل می‌کنیم.

این مقدار کمتر از ۰.۰۵ است در نتیجه در سطح معناداری ۹۵ درصد

میتوانیم فرض صفر را رد کنیم به این معنی که رگرسیون برازش مناسبی

```
> summary(prediction)
```

انجام داده است.

```
Call:
lm(formula = DF$Japan ~ Year)
```

Residuals:

```
      Min       1Q   Median       3Q      Max
-783207 -201549   45243   298597   511556
```

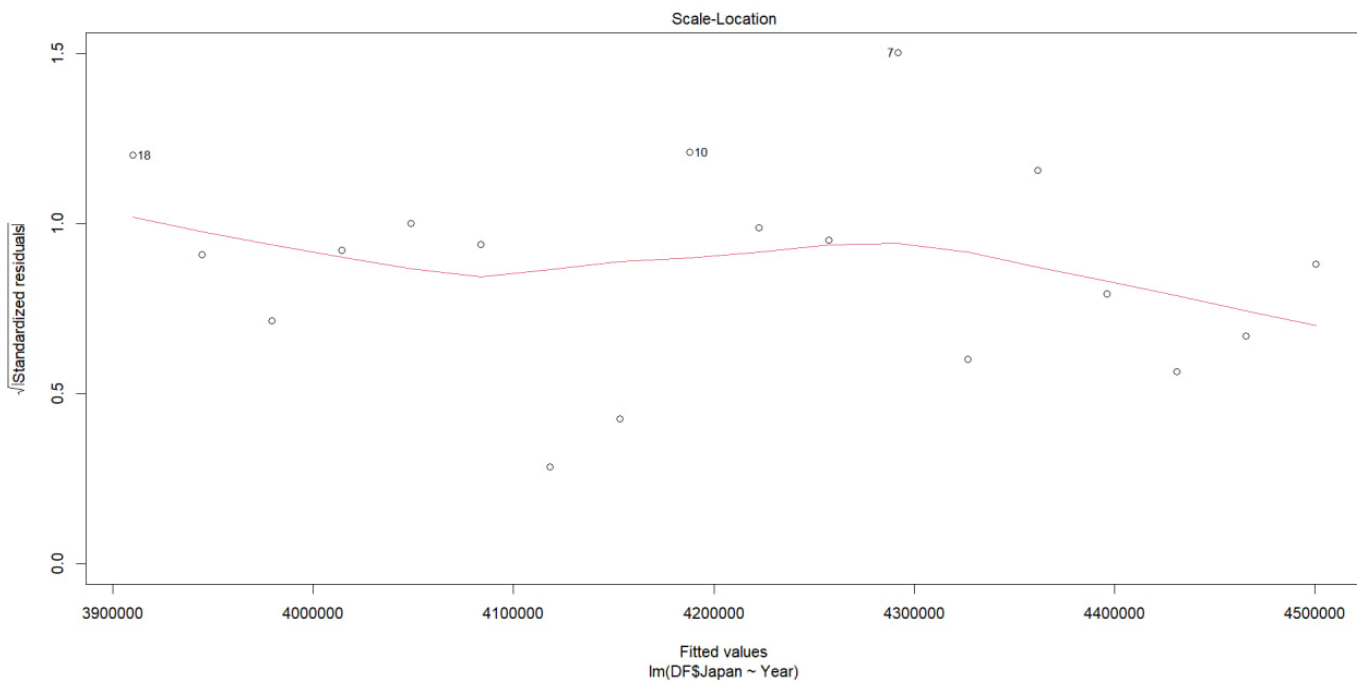
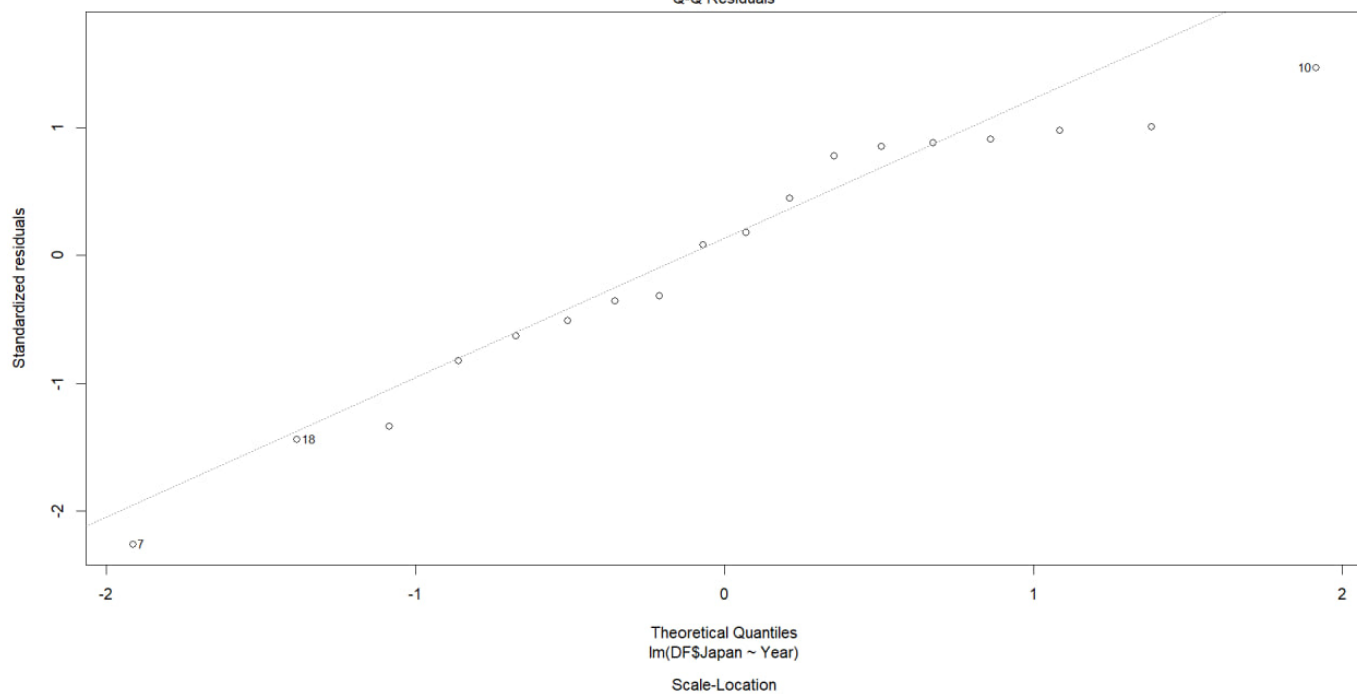
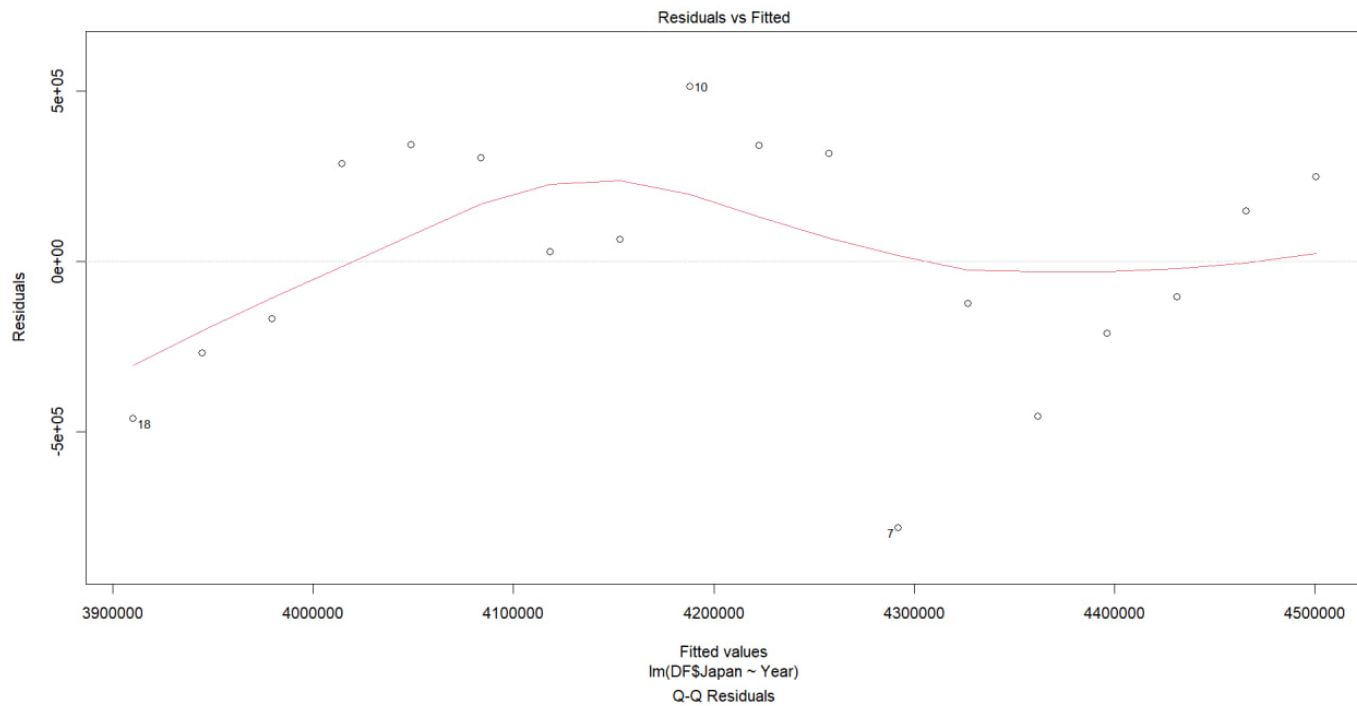
Coefficients:

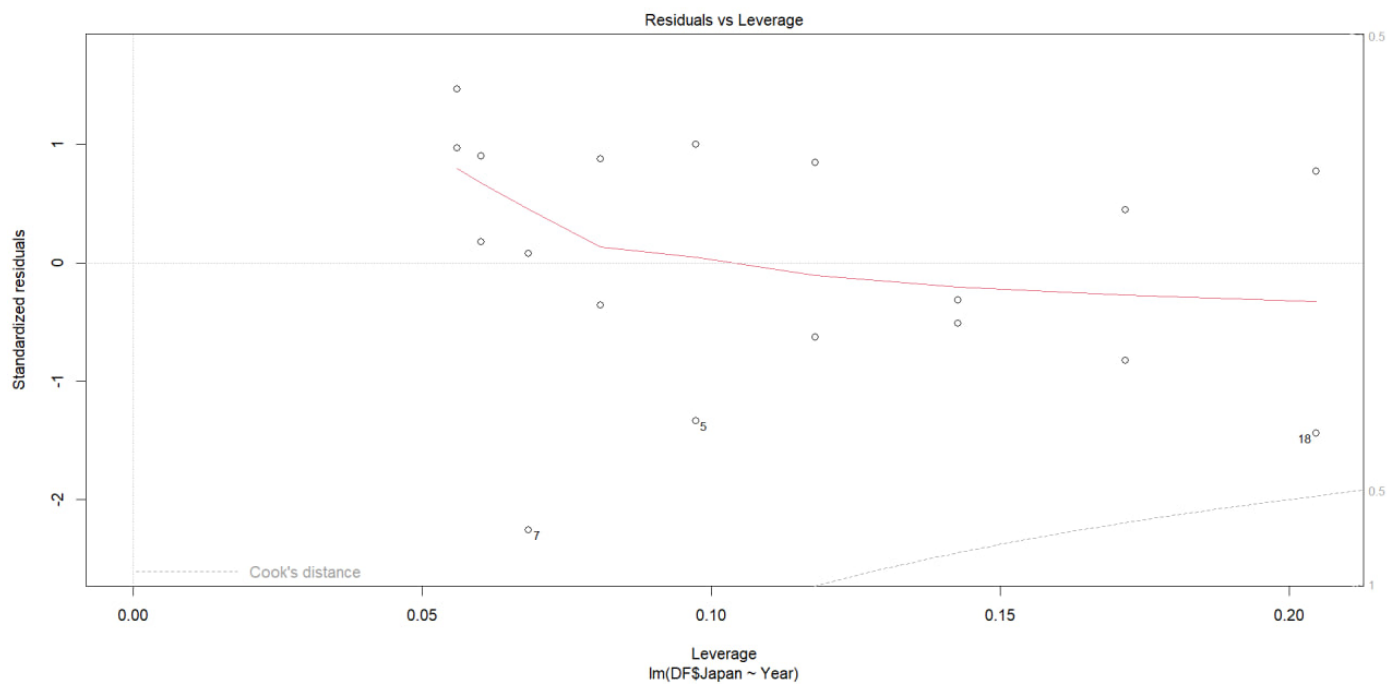
```
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 74146273   32840332   2.258  0.0383 *
Year        -34736     16310    -2.130  0.0491 *
```

```
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
Residual standard error: 359000 on 16 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.2209,    Adjusted R-squared:  0.1722
F-statistic: 4.536 on 1 and 16 DF,  p-value: 0.04907
```

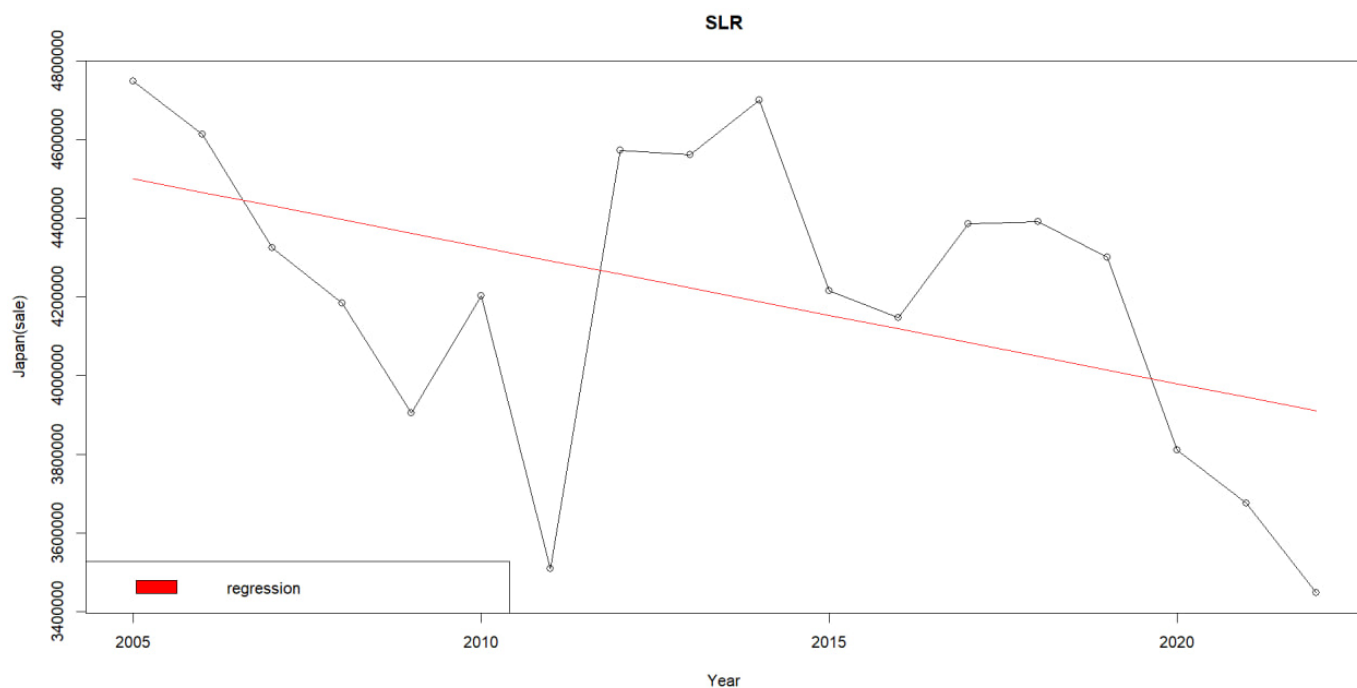
نمودار های خروجی از رگرسیون به صورت زیر می‌باشد





۱۱- رگرسیون خطی

نمودار رگرسیون نیز به صورت زیر می باشد.



۱۲- پیش بینی رگرسیون خطی

۵.۳. نتایج پیش‌بینی‌ها از فروش خودرو در کشور ژاپن:

	Year	SMA	WMA	SES	SLR
1	2023	3631096	3837481	3472880	3875411
2	2024	3453426	3700722	3472880	3840675
3	2025	3275756	3563964	3472880	3805939
4	2026	3098086	3427205	3472880	3771204
5	2027	2920416	3290446	3472880	3736468
6	2028	2742746	3153688	3472880	3701732

۱۳- نتیجه مقایسه مدل‌های متفاوت

روش پیش‌بینی رگرسیون دارای شاخص‌های مناسب تری است. عموماً رگرسیون‌ها برای داده‌های رونددار استفاده می‌شوند و روش‌های پیش‌بینی نظیر میانگین متحرک یا هموار سازی نمایی برای داده‌های استاتیک کاربرد دارند، چرا که مدل‌های رگرسیونی روندها را بهتر نشان می‌دهند.

در ادامه به طور خلاصه پیش‌بینی فروش آلمان و آمریکا ارائه می‌شود.

۱.۴. پیش‌بینی فروش خودرو کشور آمریکا و آلمان:

۲.۴. میانگین متحرک ساده (Simple Moving Average):

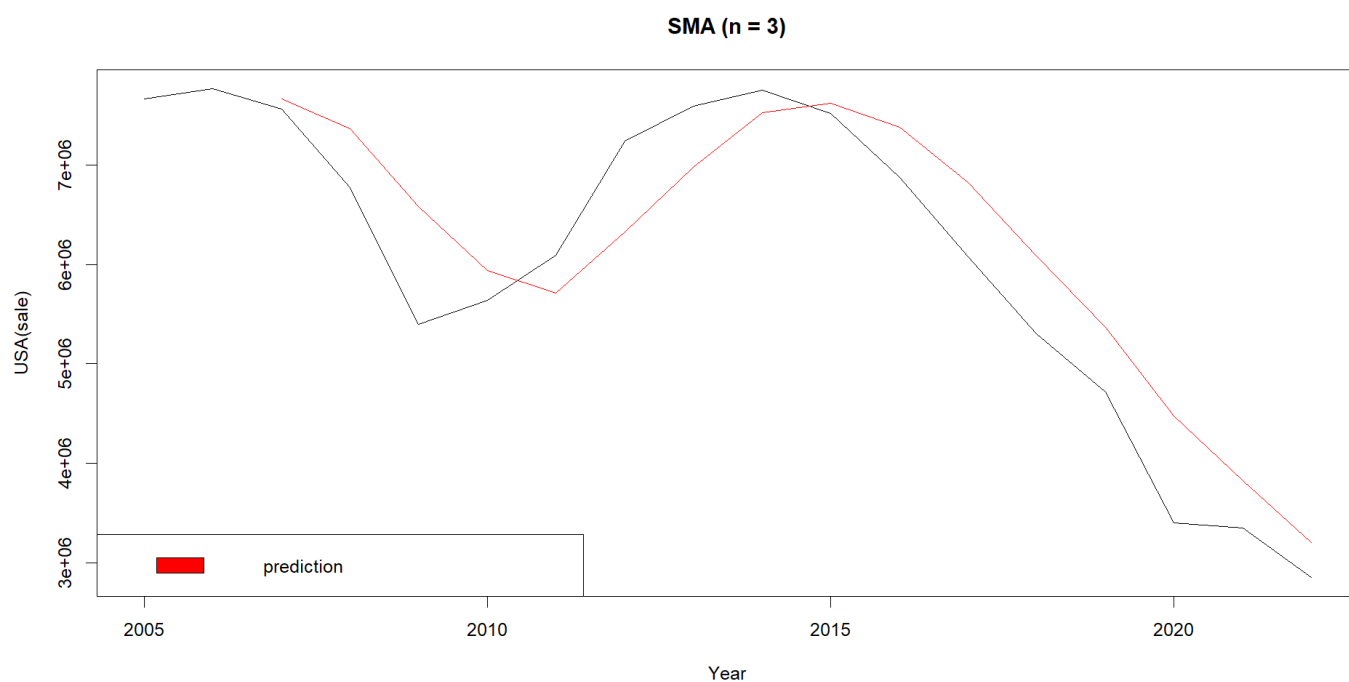
جدول مقایسه میانگین متحرک ساده با n های متفاوت به شرح زیر است.

	n	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE	ACF1
1	1	210992.8	461802.6	408512.9	3.645649	9.451924	0.6340111	0.10588937
2	2	174060.5	371854.8	322950.5	3.343810	7.333238	0.4992295	0.19148500
3	3	224308.9	446525.2	231691.8	4.201240	4.394315	0.3211472	-0.07415597
4	4	227514.9	394067.4	227515.3	4.665690	4.665701	0.3517020	-0.16666585
5	5	-322165.4	455610.7	322165.4	-8.204376	8.204376	0.5000000	-0.50000000

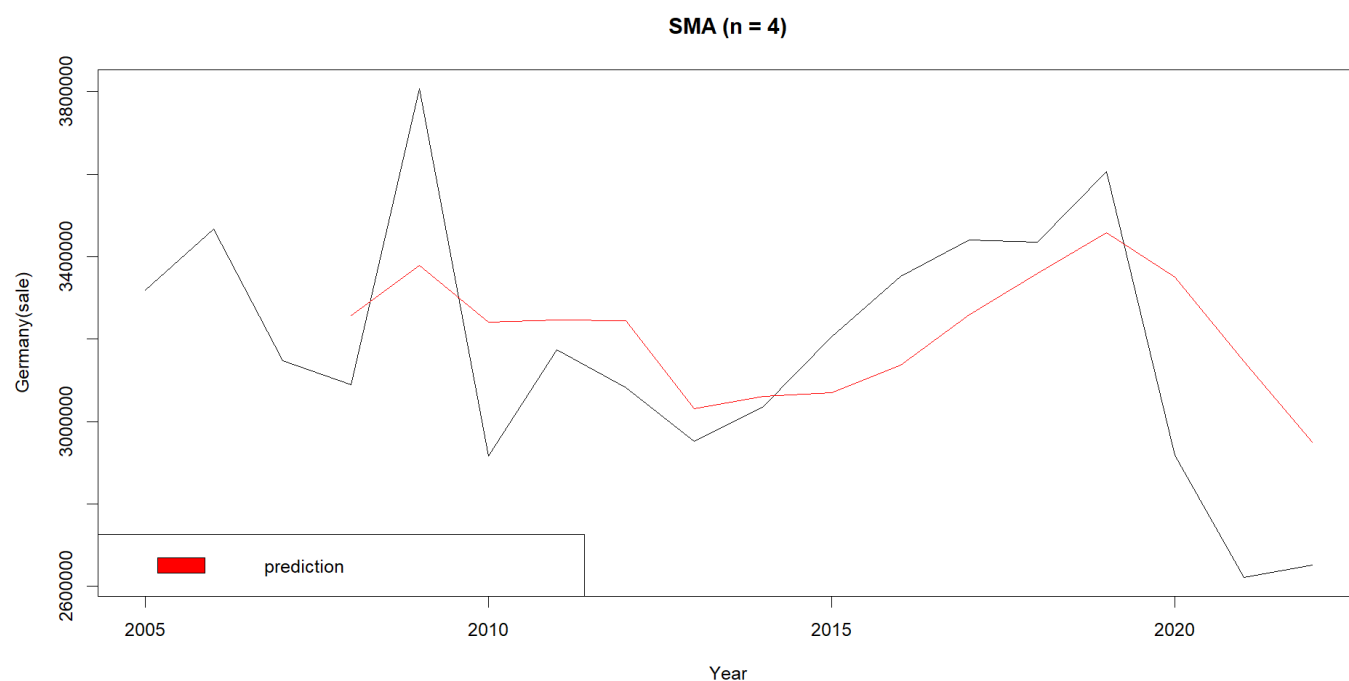
۱۴- جدول مقایسه شاخص‌های عملکرد میانگین متحرک ساده (آمریکا)

	▲	n	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE	ACF1
1		1	-126166.83	312163.0	198552.50	-4.689070	6.813816	0.8333333	-0.1005699
2		2	-100604.49	241012.4	206362.62	-3.162889	6.983940	0.8529394	-0.2300888
3		3	56224.37	129910.8	117313.96	1.446523	3.683918	0.4604297	0.2428551
4		4	68260.81	118231.2	68260.86	2.037335	2.037337	0.3405485	-0.1666665
5		5	-78990.50	111709.4	78990.50	-2.592538	2.592538	0.5000000	-0.5000000

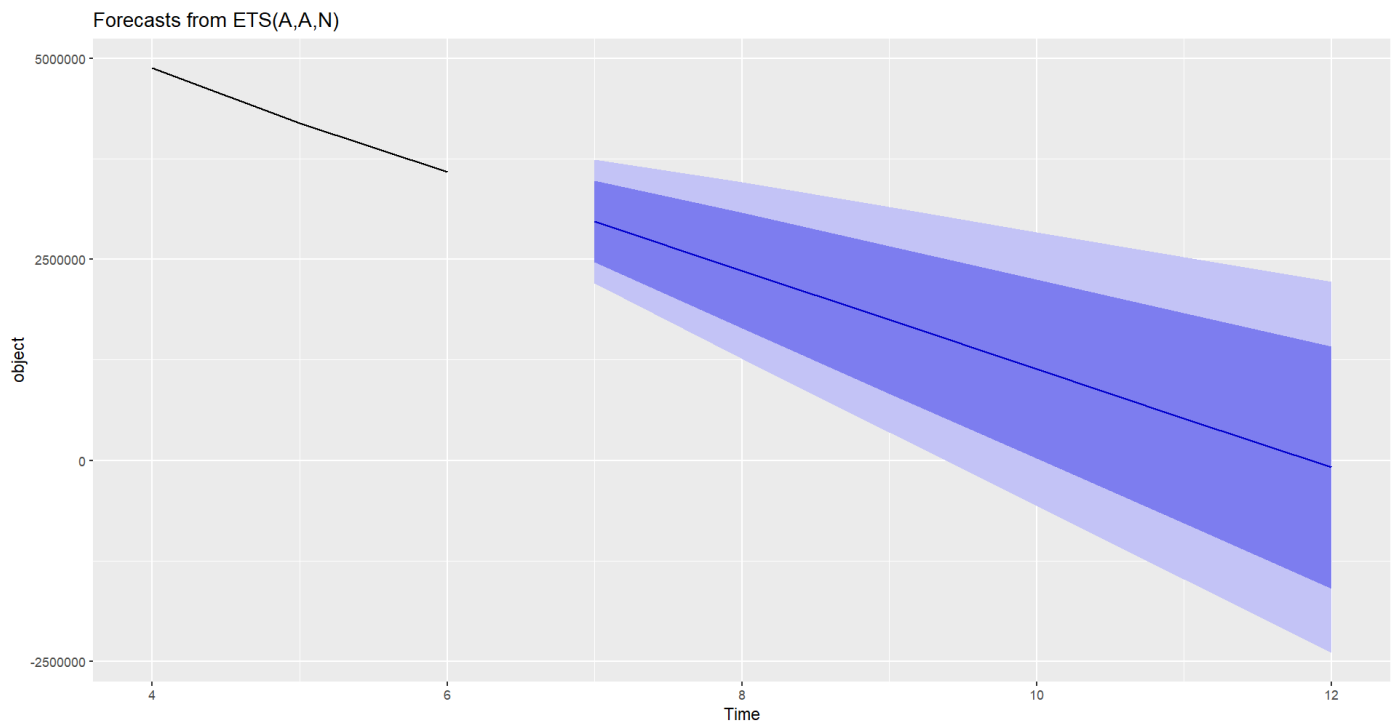
۱۵- جدول مقایسه شاخص های عملکرد میانگین متحرک ساده (آلمان)



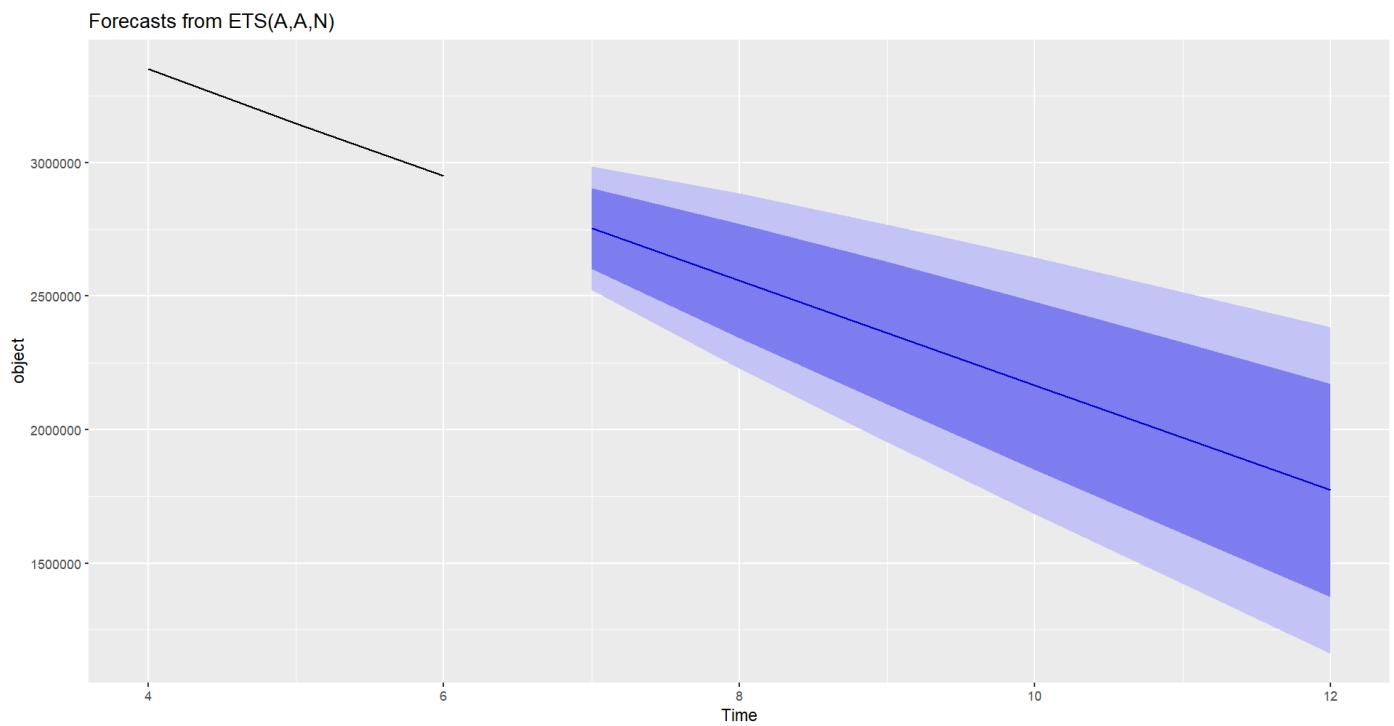
۱۶- میانگین متحرک ساده با $n = 3$



۱۷- میانگین متحرک ساده با $n = 4$

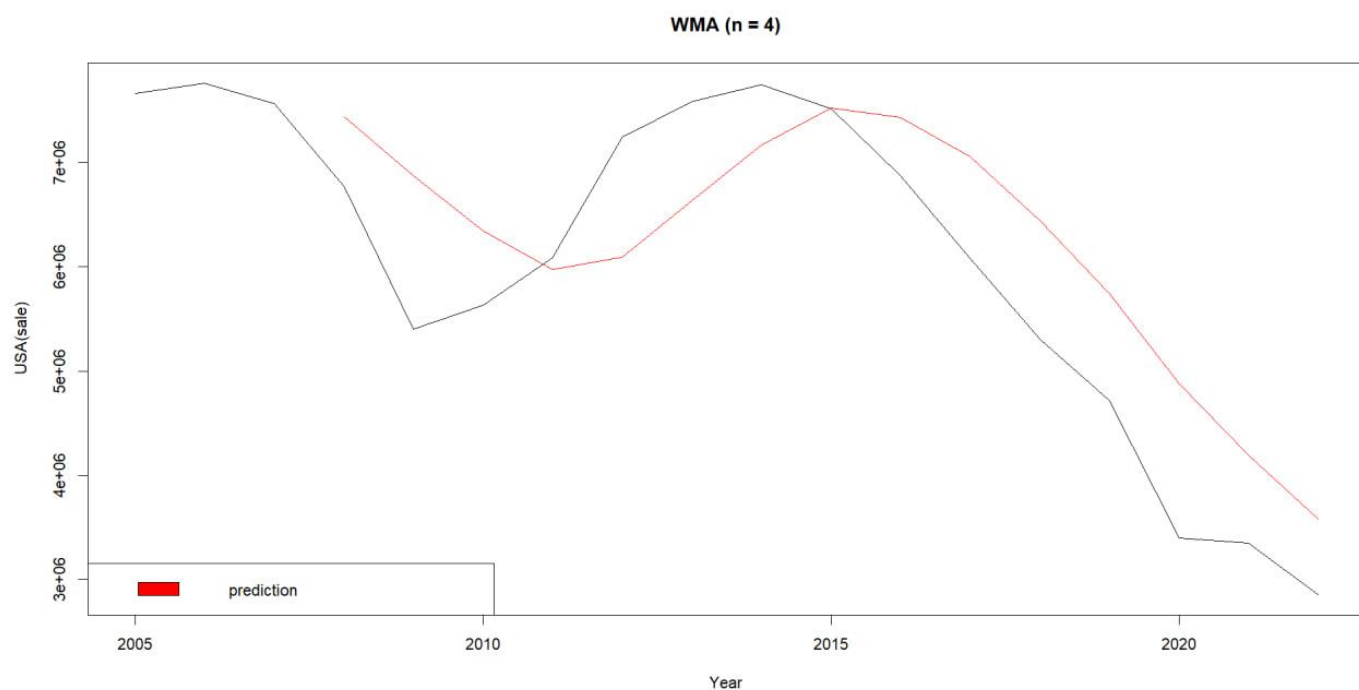


۱۸- پیش‌بینی میانگین متحرک ساده با $n = 4$ (آمریکا)

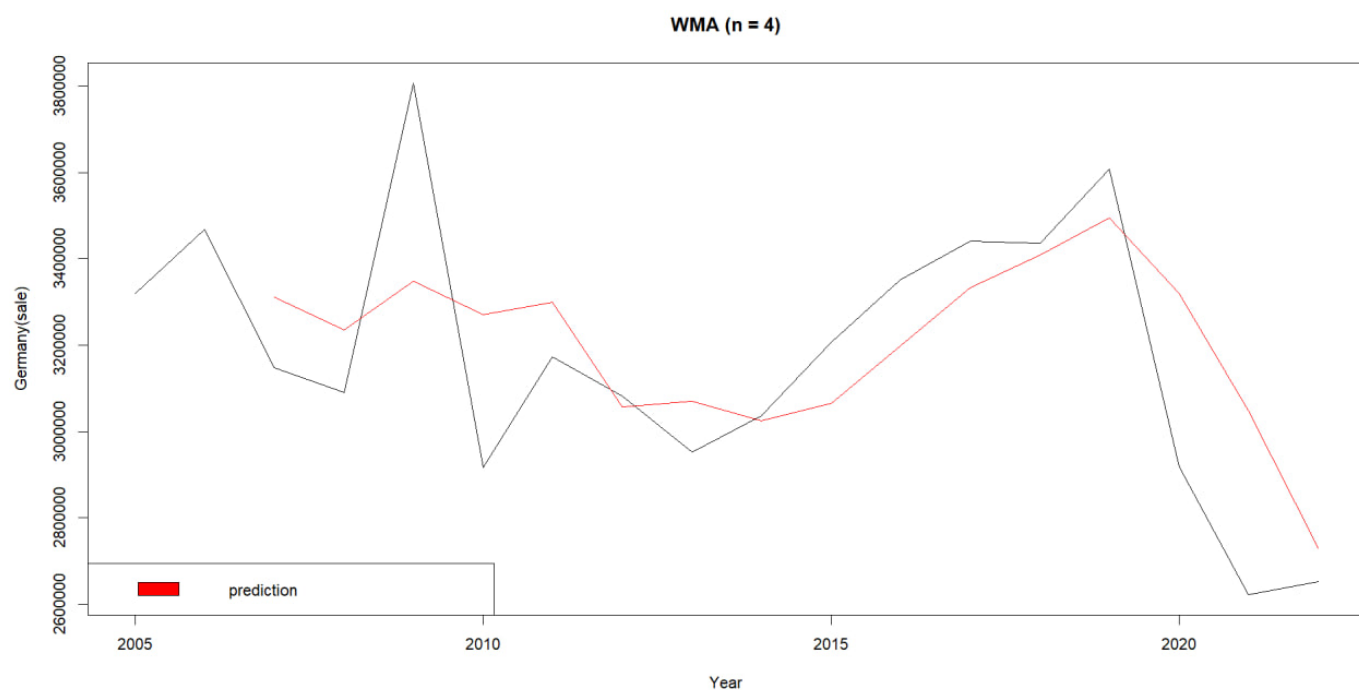


۱۹- پیش‌بینی میانگین متحرک ساده با $n = 3$ (آلمان)

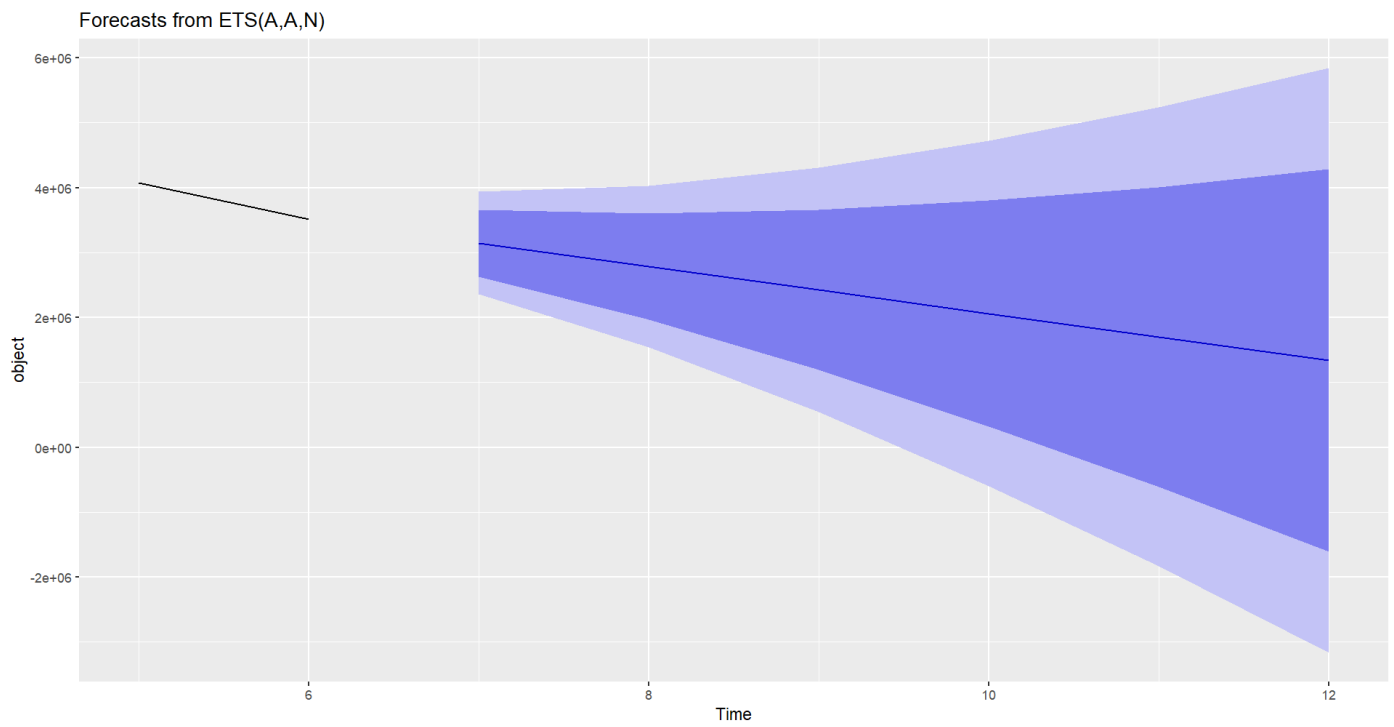
۳.۴. میانگین متحرک موزون (Weighted Moving Average):



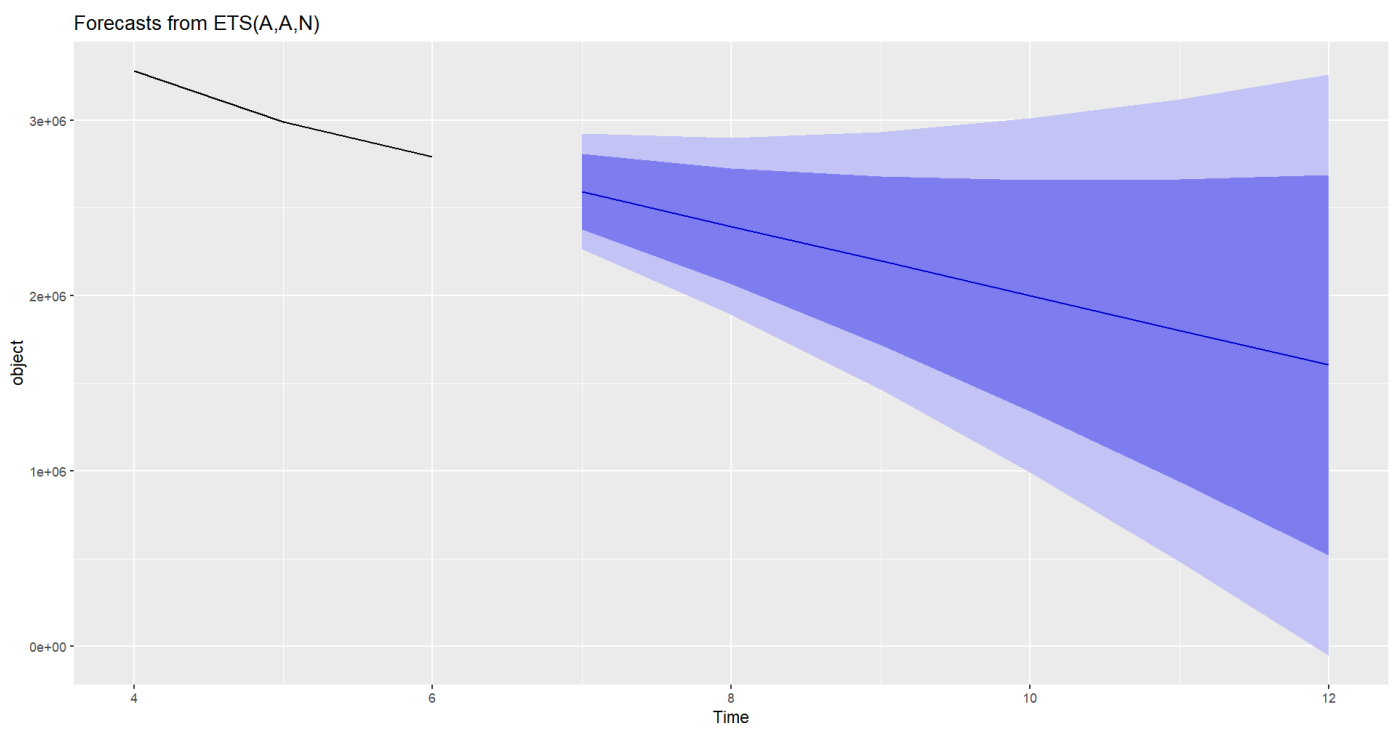
۲۰- میانگین متحرک ساده با $n = 4$ (آمریکا)



۲۱- میانگین متحرک ساده با $n = 4$ (آلمان)



۲۲- پیش‌بینی میانگین متحرک موزون با $n = 4$ (آمریکا)



۲۳- پیش‌بینی میانگین متحرک موزون با $n = 4$ (آلمان)

۳.۳. هموار سازی نمایی ساده (Single Exponential Smoothing):

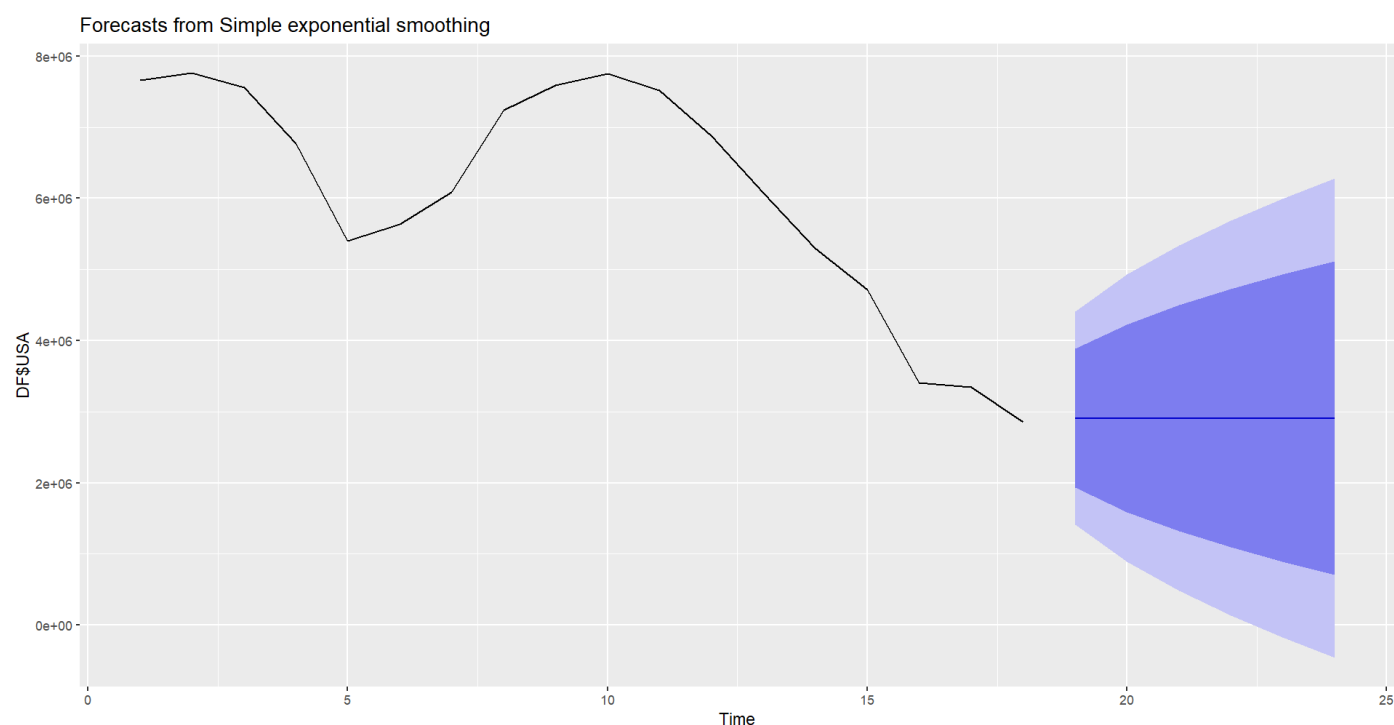
جدول مقایسه هموار سازی نمایی با alpha های متفاوت به شرح زیر است.

	alpha	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE	ACF1
1	0.1	-501385.6	1535223.1	1259984.6	-17.775379	27.75442	2.207831	0.7737102
2	0.3	-578595.9	1226367.1	1041390.1	-15.975920	22.10041	1.824795	0.7625272
3	0.5	-460060.0	997716.9	832872.1	-11.910596	16.92721	1.459415	0.7215263
4	0.7	-364114.9	834469.4	683499.4	-8.998867	13.41789	1.197674	0.6475634
5	0.9	-293344.1	721028.6	574065.3	-7.045325	11.03154	1.005916	0.5405999

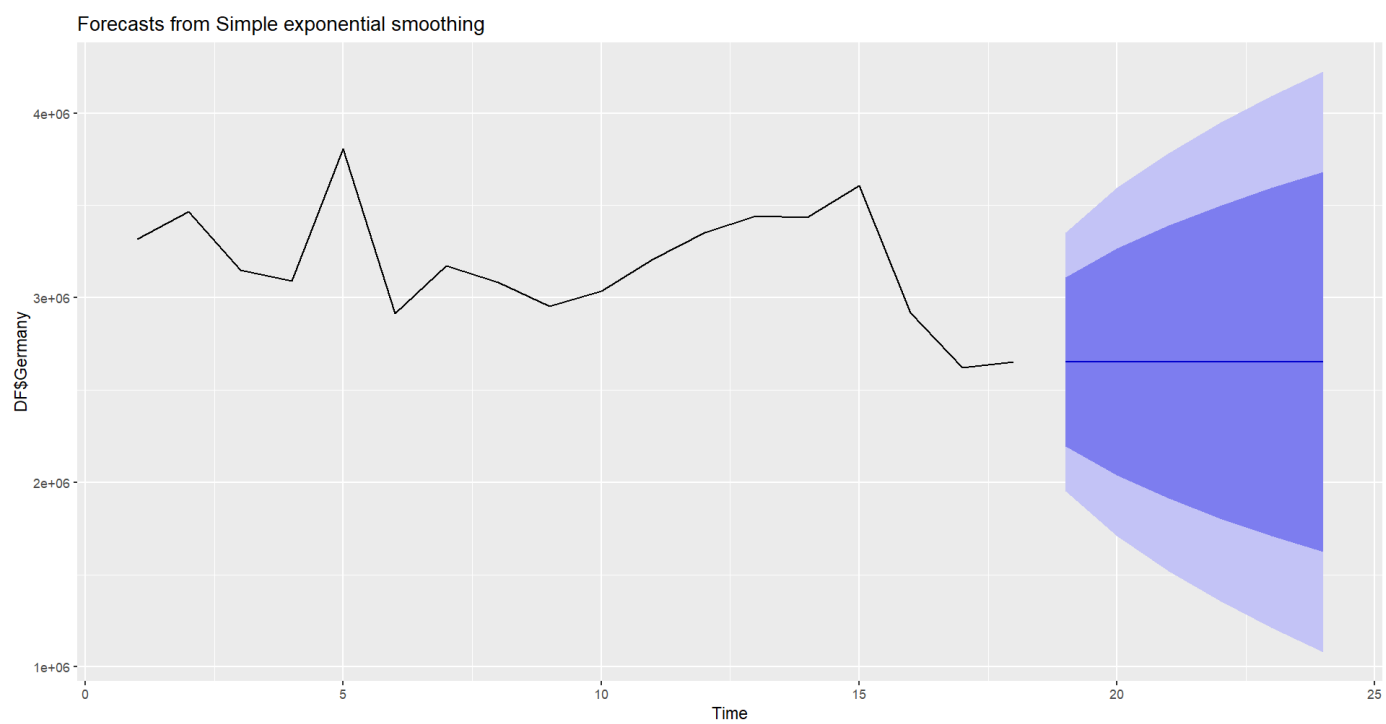
۲۴- جدول مقایسه شاخص های عملکرد هموار سازی نمایی (آمریکا)

	alpha	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE	ACF1
1	0.1	-46923.58	313631.4	262970.4	-2.435713	8.507317	1.0412492	0.237634929
2	0.3	-65029.88	318264.4	266086.7	-2.968830	8.635433	1.0535883	0.150761037
3	0.5	-60352.70	317485.2	247611.3	-2.743150	8.013559	0.9804339	0.007005602
4	0.7	-51657.53	321670.3	236140.1	-2.384619	7.596007	0.9350127	-0.168160592
5	0.9	-41887.89	336598.0	233488.6	-2.007572	7.460305	0.9245141	-0.329400807

۲۵- جدول مقایسه شاخص های عملکرد هموار سازی نمایی (آلمان)

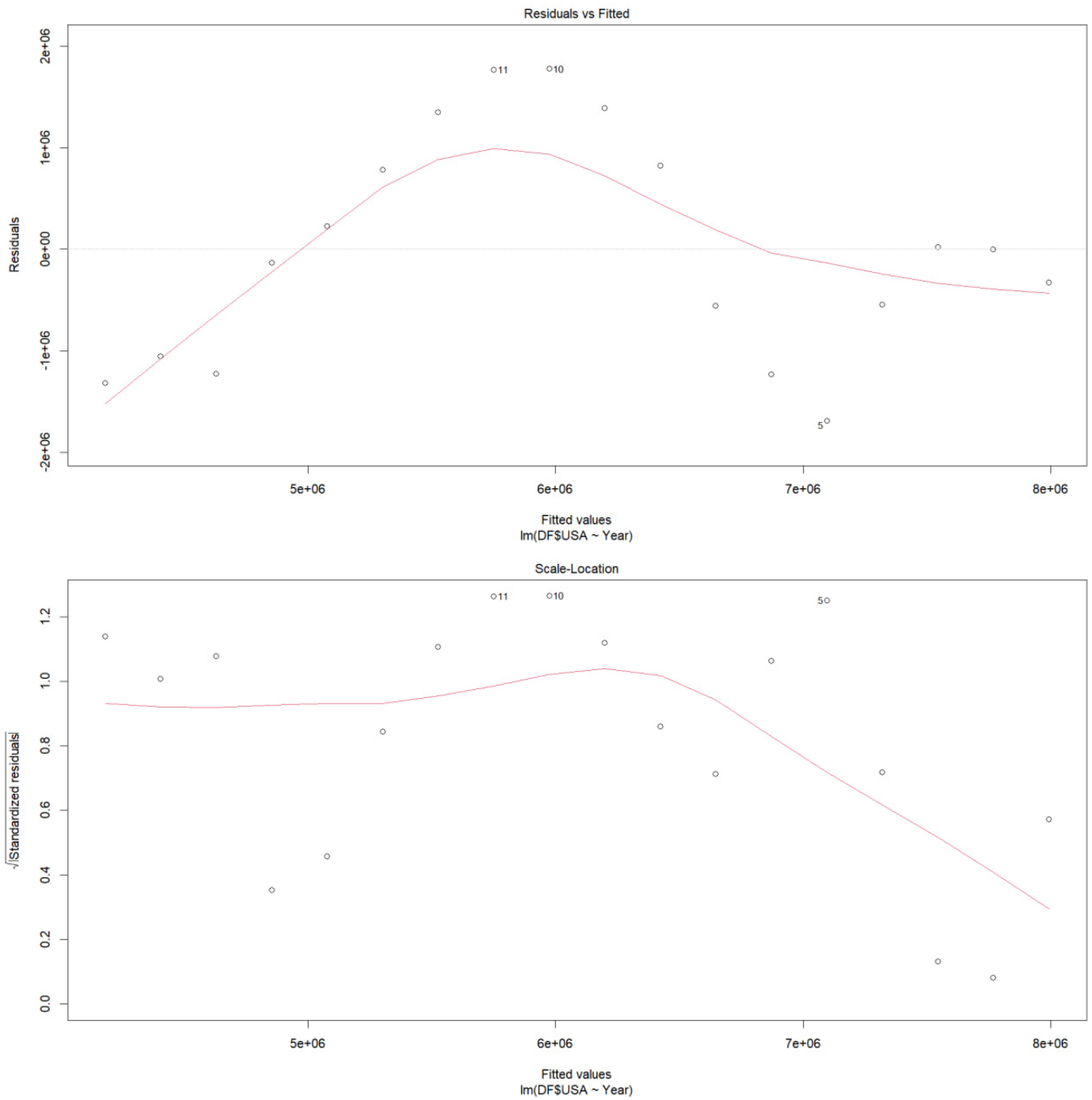


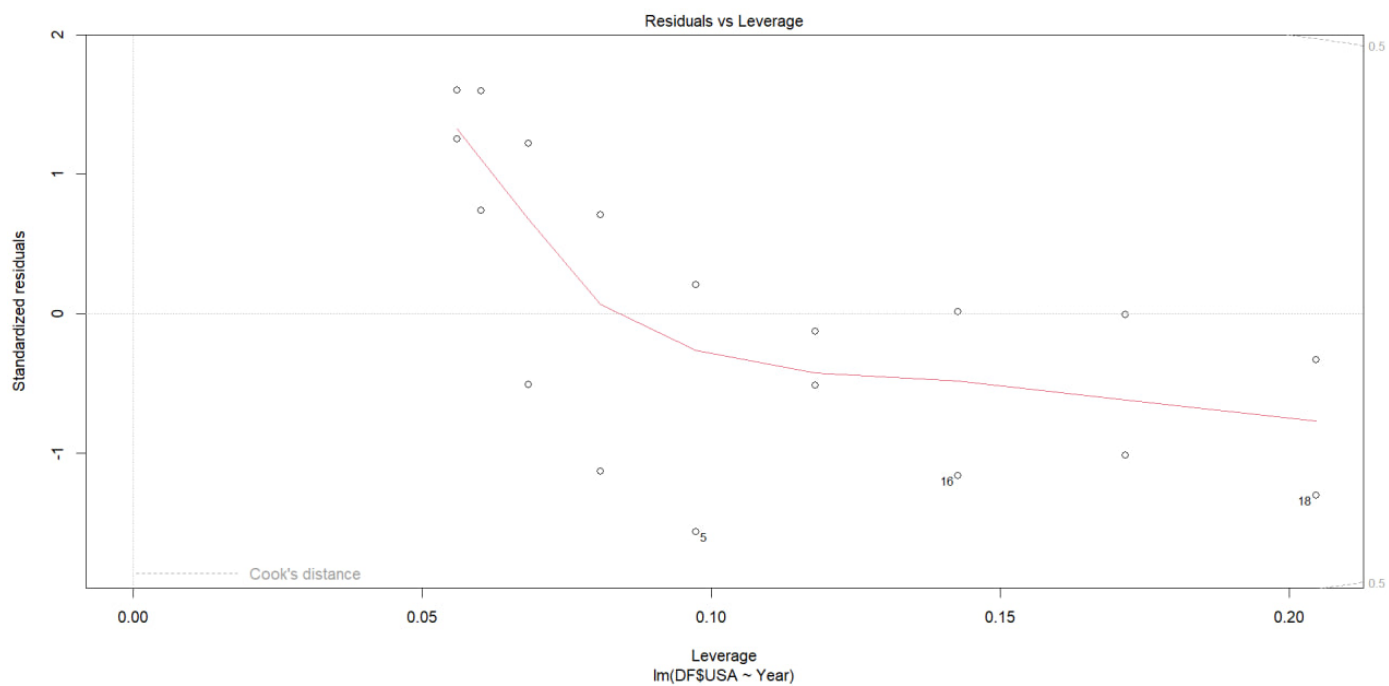
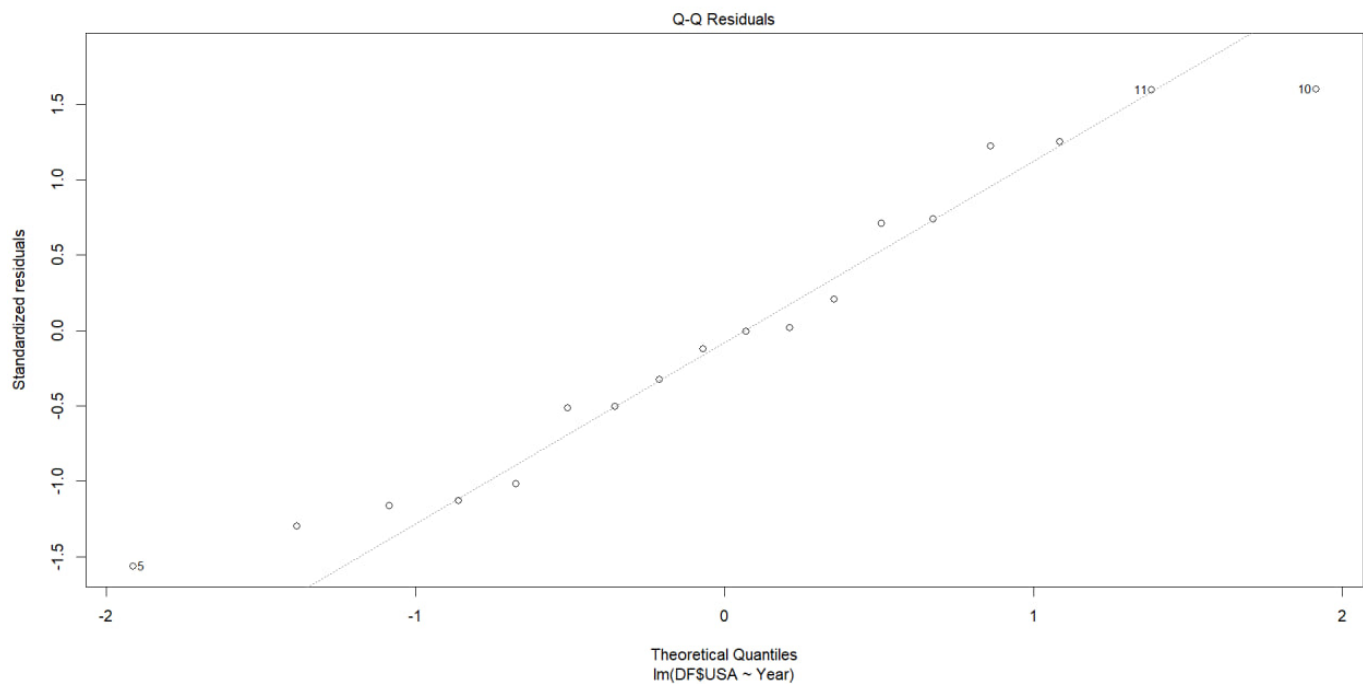
۲۶- پیش بینی هموار سازی نمایی (آمریکا)



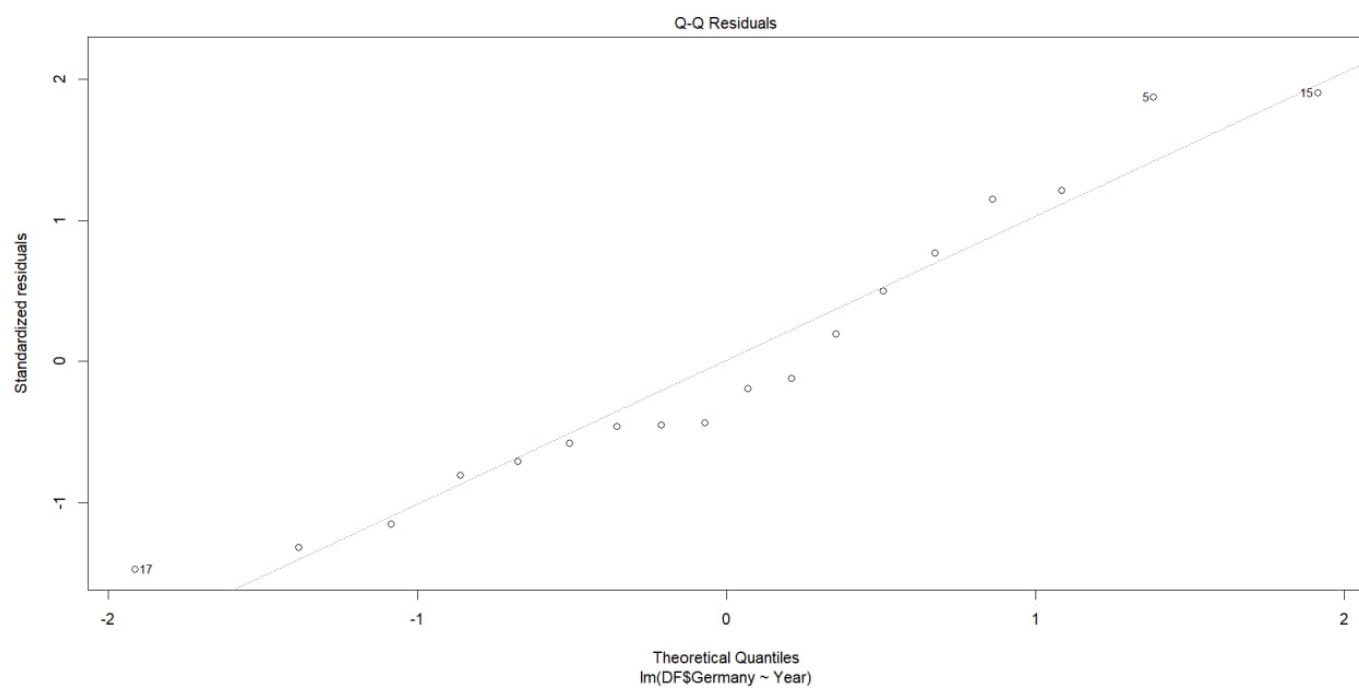
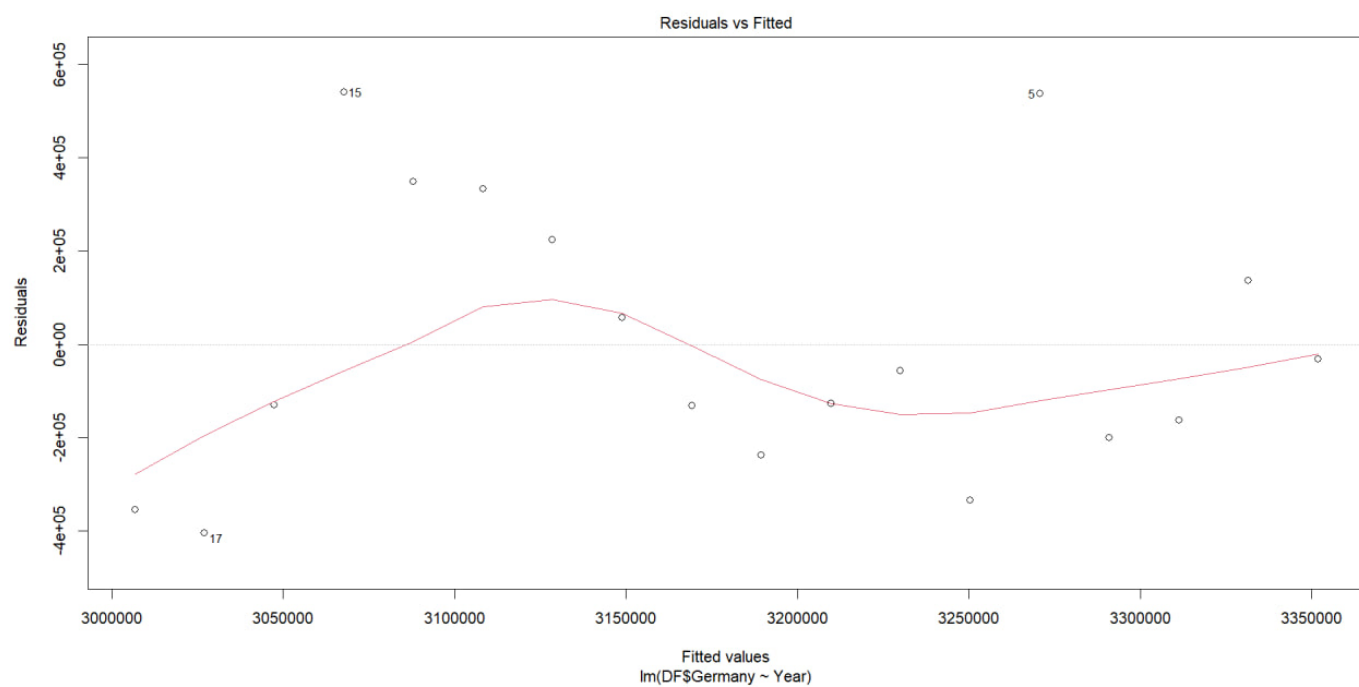
۲۷- پیش‌بینی هموار سازی نمایی (آمریکا)

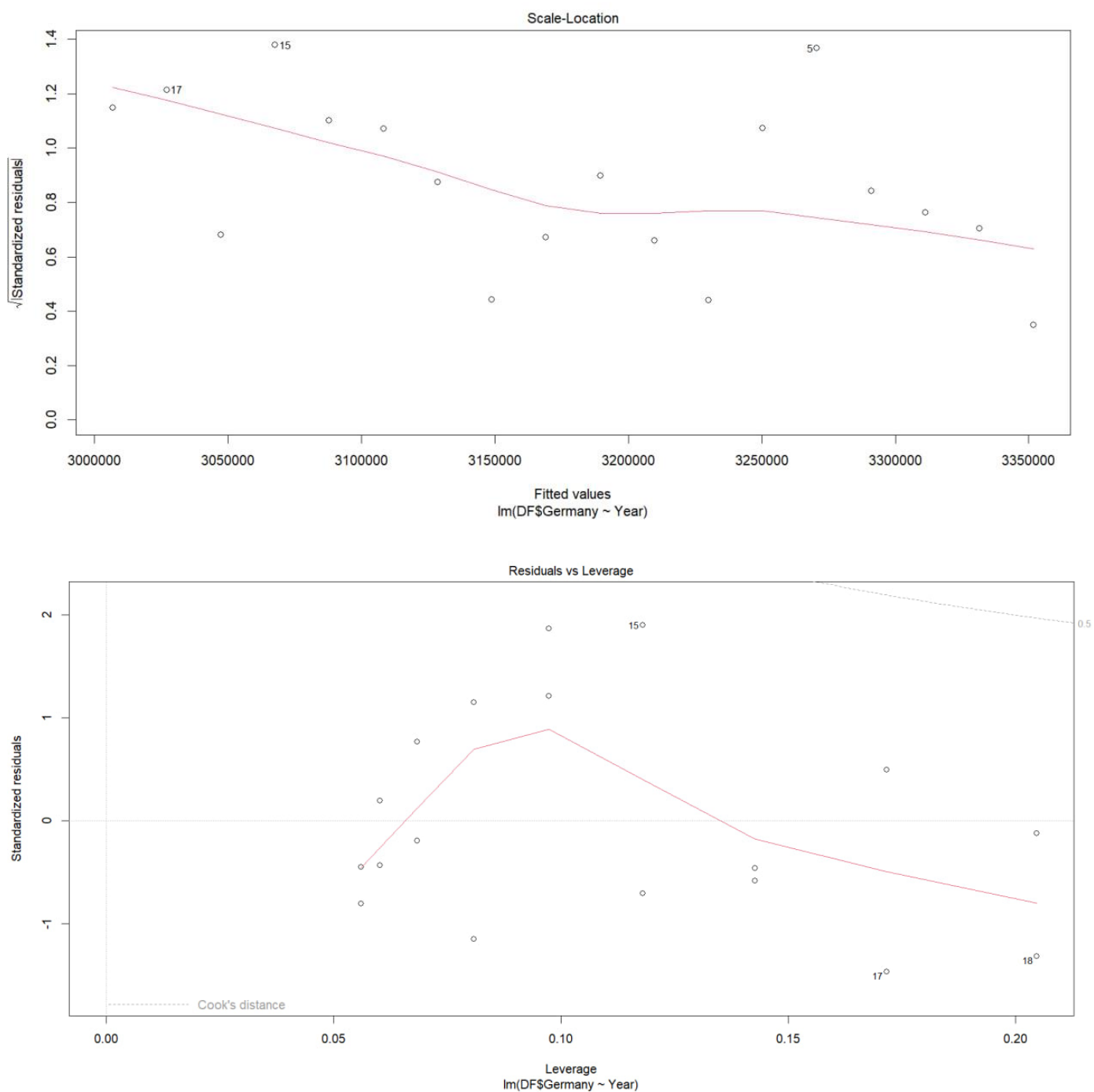
۵.۳. رگرسیون خطی (Linear Regression):





۲۸- رگرسیون خطی (آمریکا)





۲۹- رگرسیون خطی (آلمان)

۶.۳. نتایج پیش‌بینی‌ها از فروش خودرو در کشورهای آمریکا و آلمان:

در پیش‌بینی فروش دو کشور آمریکا و آلمان نیز به علت شاخص های بهتر، از رگرسیون خطی استفاده شده است. جدول آنها به صورت زیر است.

	Year	SMA	WMA	SES	SLR
1	2023	2971292.6	3175888.8	2909625	3875411
2	2024	2360041.9	2487474.7	2909625	3840675
3	2025	1748791.3	1799060.6	2909625	3805939
4	2026	1137540.6	1110646.4	2909625	3771204
5	2027	526289.9	422232.3	2909625	3736468
6	2028	-84960.8	-266181.8	2909625	3701732

۳۰- نتیجه مقایسه مدل های متفاوت (آمریکا)

	Year	SMA	WMA	SES	SLR
1	2023	2753501	3012055	2652062	2986438
2	2024	2557396	2893834	2652062	2966138
3	2025	2361291	2775614	2652062	2945837
4	2026	2165186	2657394	2652062	2925536
5	2027	1969080	2539174	2652062	2905235
6	2028	1772975	2420954	2652062	2884935

۳۱- نتیجه مقایسه مدل های متفاوت (آلمان)

۱.۴. مدل بهینه سازی:

تابع هدف مدل بهینه سازی به شرح زیر است.

$$\text{Minimize } \sum_{t \in T} [c_t \times X_t + c'_t \times o_t + h_t \times I_t^+ + \pi_t \times I_t^- + \lambda_t \times \Delta_t^+ + \omega_t \times \Delta_t^- + s_t \times w_t + e_t \times w_t^+ + e'_t \times w_t^-]$$

محدودیت های آن به شرح زیر است.

$$X_t \leq m \times w_t \quad t \in T$$

$$o_t \leq n \times w_t \quad t \in T$$

$$I_t = I_{t-1} + X_t + o_t - D_t \quad t \in T$$

$$X_t = X_{t-1} + \Delta_t^+ - \Delta_t^- \quad t \in T$$

$$I_t = I_t^+ - I_t^- \quad t \in T$$

$$w_t = w_{t-1} + w_t^+ - w_t^- \quad t \in T$$

$$X_t, I_t^+, I_t^-, I_t, w_t, w_t^+, w_t^-, o_t, \Delta_t^+, \Delta_t^- \geq 0 \quad t \in T$$

$$X_t, I_t^+, I_t^-, w_t^+, w_t^-, o_t, \Delta_t^+, \Delta_t^- \text{ integer} \quad t \in T$$

$$I_t^+ \times I_t^- = 0 \quad t \in T$$

$$I_t = I_0 + \sum_{t \in T} (X_t + o_t - D_t) \quad t \in T$$

$$X_t = X_0 + \sum_{t \in T} (\Delta_t^+ - \Delta_t^-) \quad t \in T$$

$$w_t = w_0 + \sum_{t \in T} (w_t^+ - w_t^-) \quad t \in T$$

مجموعه‌ها و اندیس‌ها	
t	مجموعه دوره‌ها $t \in \{1, 2, \dots, Lp\}$
پارامترها	
D_t	تقاضای محصول در دوره t
m	تعداد محصول تولیدی با هر اپراتور در زمان عادی (واحد محصول)
n	تعداد محصول تولیدی با هر اپراتور در زمان اضافه کاری (واحد محصول)
λ_t	هزینه افزایش در مقدار تولید از دوره $t-1$ به دوره t به ازای هر محصول
ω_t	هزینه کاهش در مقدار تولید از دوره $t-1$ به دوره t به ازای هر محصول
e_t	هزینه افزایش در سطح نیروی کار از دوره $t-1$ به دوره t به ازای هر نفر
e'_t	هزینه کاهش در سطح نیروی کار از دوره $t-1$ به دوره t به ازای هر نفر
s_t	دستمزد پرسنل در زمان عادی (به ازای هر نفر)
c_t	هزینه تولید به ازای هر واحد محصول در زمان عادی دوره t
c'_t	هزینه تولید به ازای هر واحد محصول در زمان اضافه کاری دوره t
h_t	هزینه نگهداری موجودی در دوره t به ازای واحد محصول در انتهای دوره
π_t	هزینه کمبود در دوره t به ازای واحد محصول در انتهای دوره
متغیرها	
X_t	میزان تولید در زمان عادی دوره t
o_t	میزان تولید در زمان اضافه کار دوره t
Δ_t^+	تعداد افزایش در سطح تولید از دوره $t-1$ به دوره t
Δ_t^-	تعداد کاهش در سطح تولید از دوره $t-1$ به دوره t
I_t	موجودی خالص در انتهای دوره t
I_t^+	سطح موجودی در دست در انتهای دوره t
I_t^-	میزان کمبود در انتهای دوره t
w_t	سطح نیروی کار در دوره t
w_t^+	میزان افزایش در سطح نیروی کار از دوره $t-1$ به دوره t
w_t^-	میزان کاهش در سطح نیروی کار از دوره $t-1$ به دوره t

۲.۴. مقادیر بهینه:

مقادیر بهینه برای ژاپن به صورت زیر است: (این بهینه سازی با کتابخانه **cvxpy** انجام شده است)

The optimal values for Japan are as below:

```
X1: 0.0
X2: 2884935.0
X3: 2884935.0
X4: 2884935.0
X5: 2884935.0
X6: 2884935.0
I_positive1: 0.0
I_positive2: 0.0
I_positive3: 0.0
I_positive4: 0.0
I_positive5: 0.0
I_positive6: 0.0
I_negative1: 0.0
I_negative2: 0.0
I_negative3: 0.0
I_negative4: 0.0
I_negative5: 0.0
I_negative6: 0.0
I1: 0.0
I2: 0.0
I3: 0.0
I4: 0.0
I5: 0.0
I6: 0.0
W_positive1: 0.0
W_positive2: 0.0
W_positive3: 0.0
W_positive4: 0.0
W_positive5: 0.0
W_positive6: 0.0
W_negative1: 0.0
W_negative2: 0.0
W_negative3: 0.0
W_negative4: 0.0
W_negative5: 0.0
W_negative6: 0.0
W1: 288.96
W2: 288.96
W3: 288.96
W4: 288.96
W5: 288.96
W6: 288.96
O1: 0.0
O2: 81203.0
O3: 60902.0
O4: 40601.0
O5: 20300.0
O6: 0.0
delta_positive1: 0.0
delta_positive2: 2884935.0
delta_positive3: 0.0
delta_positive4: 0.0
delta_positive5: 0.0
delta_positive6: 0.0
```


delta_negative1: 0.0
delta_negative2: 0.0
delta_negative3: 0.0
delta_negative4: 0.0
delta_negative5: 0.0
delta_negative6: 0.0

مقدار بهینه تابع هدف:

25087865014.37

مقادیر بهینه برای آمریکا:

The optimal values for USA are as below:

X1: 0.0
X2: 2884935.0
X3: 2884935.0
X4: 2884935.0
X5: 2884935.0
X6: 2884935.0
I_positive1: 0.0
I_positive2: 0.0
I_positive3: 0.0
I_positive4: 0.0
I_positive5: 0.0
I_positive6: 0.0
I_negative1: 0.0
I_negative2: 0.0
I_negative3: 0.0
I_negative4: 0.0
I_negative5: 0.0
I_negative6: 0.0
I1: 0.0
I2: 0.0
I3: 0.0
I4: 0.0
I5: 0.0
I6: 0.0
W_positive1: 0.0
W_positive2: 0.0
W_positive3: 0.0
W_positive4: 0.0
W_positive5: 0.0
W_positive6: 0.0
W_negative1: 0.0
W_negative2: 0.0
W_negative3: 0.0
W_negative4: 0.0
W_negative5: 0.0
W_negative6: 0.0
W1: 288.96
W2: 288.96
W3: 288.96
W4: 288.96
W5: 288.96
W6: 288.96
O1: 0.0
O2: 81203.0
O3: 60902.0
O4: 40601.0
O5: 20300.0
O6: 0.0
delta_positive1: 0.0

delta_positive2: 2884935.0
delta_positive3: 0.0
delta_positive4: 0.0
delta_positive5: 0.0
delta_positive6: 0.0
delta_negative1: 0.0
delta_negative2: 0.0
delta_negative3: 0.0
delta_negative4: 0.0
delta_negative5: 0.0
delta_negative6: 0.0

مقدار بهینه تابع هدف:

20780499350.81

مقادیر بهینه برای آلمان:

The optimal values are as below:

X1: 0.0
X2: 2884935.0
X3: 2884935.0
X4: 2884935.0
X5: 2884935.0
X6: 2884935.0
I_positive1: 0.0
I_positive2: 0.0
I_positive3: 0.0
I_positive4: 0.0
I_positive5: 0.0
I_positive6: 0.0
I_negative1: 0.0
I_negative2: 0.0
I_negative3: 0.0
I_negative4: 0.0
I_negative5: 0.0
I_negative6: 0.0
I1: 0.0
I2: 0.0
I3: 0.0
I4: 0.0
I5: 0.0
I6: 0.0
W_positive1: 0.0
W_positive2: 0.0
W_positive3: 0.0
W_positive4: 0.0
W_positive5: 0.0
W_positive6: 0.0
W_negative1: 0.0
W_negative2: 0.0
W_negative3: 0.0
W_negative4: 0.0
W_negative5: 0.0
W_negative6: 0.0
W1: 288.96
W2: 288.96
W3: 288.96
W4: 288.96
W5: 288.96

W6: 288.96
O1: 0.0
O2: 81203.0
O3: 60902.0
O4: 40601.0
O5: 20300.0
O6: 0.0
delta_positive1: 0.0
delta_positive2: 2884935.0
delta_positive3: 0.0
delta_positive4: 0.0
delta_positive5: 0.0
delta_positive6: 0.0
delta_negative1: 0.0
delta_negative2: 0.0
delta_negative3: 0.0
delta_negative4: 0.0
delta_negative5: 0.0
delta_negative6: 0.0

مقدار بهینه تابع هدف:

20780499350.81

۳.۴. تحلیل حساسیت:

در صورتی که مقادیر مختلفی در دو پارامتر تابع هدف (هزینه تولید در زمان عادی و اضافه کاری) در مسئله بهینه سازی کشور ژاپن ضرب شوند تحلیل حساسیت آن به صورت زیر خواهد بود

The optimal value with coef of 1.0 is 25087866240.46
The optimal value with coef of 1.2 is 30218483014.55
The optimal value with coef of 1.4 is 35358891757.75
The optimal value with coef of 1.5999999999999999 is 40466211473.64
The optimal value with coef of 1.7999999999999998 is 45567760710.17
The optimal value with coef of 1.9999999999999998 is 50649686037.77
The optimal value with coef of 2.1999999999999997 is 55735379532.25