BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Mardi 17 juin 2025

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (5 points)

On compte quatre groupes sanguins dans l'espèce humaine : A, B, AB et O.

Chaque groupe sanguin peut présenter un facteur rhésus. Lorsqu'il est présent, on dit que le rhésus est positif, sinon on dit qu'il est négatif.

Au sein de la population française, on sait que :

- 45 % des individus appartiennent au groupe A, et parmi eux 85 % sont de rhésus positif ;
- 10 % des individus appartiennent au groupe B, et parmi eux 84 % sont de rhésus positif ;
- 3 % des individus appartiennent au groupe AB, et parmi eux 82 % sont de rhésus positif.

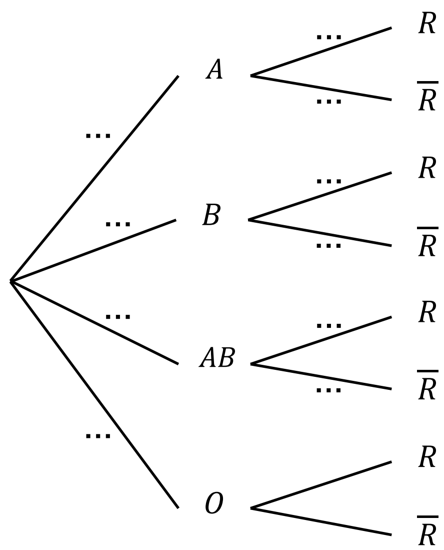
On choisit au hasard une personne dans la population française.

On désigne par :

- A l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin A » ;
- B l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin B » ;
- AB l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin AB » ;
- O l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin O » ;
- R l'évènement « La personne choisie a un facteur rhésus positif ».

Pour un événement quelconque E, on note $\bar{E}$ l'événement contraire de E et $P(E)$ la probabilité de E.

1. Recopier l'arbre ci-contre en complétant les dix pointillés.



2. Montrer que $P(B \cap R) = 0{,}084$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

3. On précise que $P(R) = 0{,}8397$.
Montrer que $P_O(R) = 0{,}83$.

4. On dit qu'un individu est « donneur universel » lorsque son sang peut être transfusé à toute personne sans risque d'incompatibilité.
Le groupe O de rhésus négatif est le seul vérifiant cette caractéristique.
Montrer que la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans la population française soit donneur universel est de $0{,}0714$.

5. Lors d'une collecte de sang, on choisit un échantillon de 100 personnes dans la population d'une ville française. Cette population est suffisamment grande pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 100 personnes associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon.

a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
b. Déterminer à 10^{-3} près la probabilité qu'il y ait au plus 7 donneurs universels dans cet échantillon.
c. Montrer que l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X est égale à $7{,}14$ et que sa variance $V(X)$ est égale à $6{,}63$ à 10^{-2} près.

6. Lors de la semaine nationale du don du sang, une collecte de sang est organisée dans N villes françaises choisies au hasard numérotées $1, 2, 3, \dots, N$ où N est un entier naturel non nul.
On considère la variable aléatoire X_1 qui à chaque échantillon de 100 personnes de la ville 1 associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon.
On définit de la même manière les variables aléatoires X_2 pour la ville 2, …, X_N pour la ville N.

On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes et qu'elles admettent la même espérance égale à $7{,}14$ et la même variance égale à $6{,}63$.
On considère la variable aléatoire $M_N = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_N}{N}$.

a. Que représente la variable aléatoire M_N dans le contexte de l'exercice ?
b. Calculer l'espérance $E(M_N)$.
c. On désigne par $V(M_N)$ la variance de la variable aléatoire M_N.
Montrer que $V(M_N) = \frac{6{,}63}{N}$.
d. Déterminer la plus petite valeur de N pour laquelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que :

$$P(7 < M_N < 7{,}28) \geq 0{,}95.$$

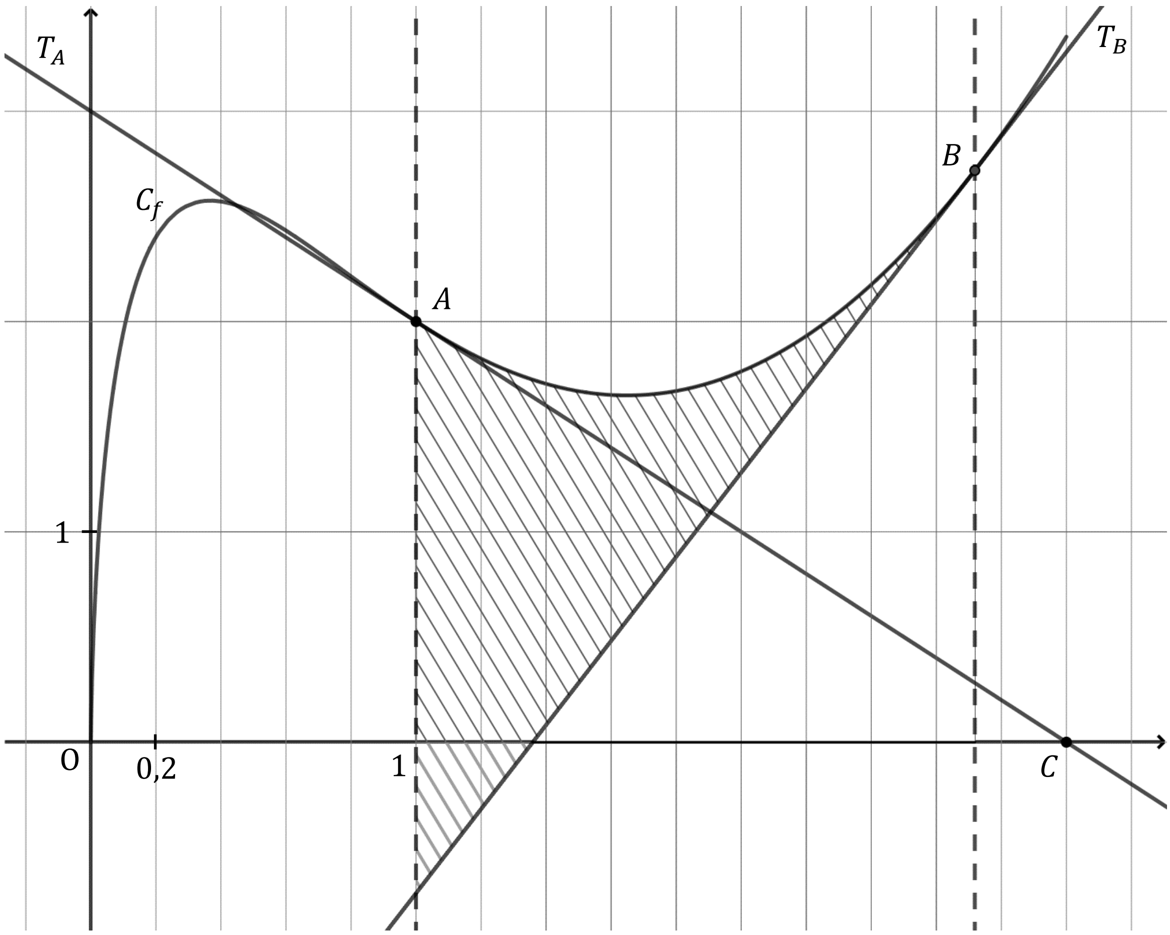
Exercice 2 (6 points)

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. On admet qu'elle est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Dans un repère orthogonal, on a tracé ci-dessous :

- la courbe représentative de f, notée C_f, sur l'intervalle $]0\,;3]$;
- la droite T_A, tangente à C_f au point $A(1\,;2)$;
- la droite T_B, tangente à C_f au point $B(\mathrm{e}\,;\mathrm{e})$.

On précise par ailleurs que la tangente T_A passe par le point $C(3\,;0)$.



Partie A : Lectures graphiques

On répondra aux questions suivantes en les justifiant à l'aide du graphique.

1. Déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.

2. Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle dans l'intervalle $]0\,;3]$?

3. Quel est le signe de $f''(0,2)$?

Partie B : Etude de la fonction f

On admet dans cette partie que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x(2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2)$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$.
En déduire que C_f ne coupe pas l'axe des abscisses.

2. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$.
On admettra que la limite de f en 0 est égale à 0.

3. On admet que pour tout x appartenant à $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$.

- **a.** Montrer que pour tout x appartenant à $]0\,;+\infty[$, $f''(x) = \frac{1}{x}(4\ln x + 1)$.
- **b.** Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et préciser la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion.
- **c.** Montrer que la courbe C_f est au-dessus de la tangente T_B sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

Partie C : Calcul d'aire

1. Justifier que la tangente T_B a pour équation réduite $y = 2x - \mathrm{e}$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\; dx = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$.

3. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine hachuré sur la figure, délimité par la courbe C_f, la tangente T_B, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
On admet que $\int_1^{\mathrm{e}} x(\ln x)^2\, dx = \frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$.
En déduire la valeur exacte de $\mathcal{A}$ en unité d'aire.

Exercice 3 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

1. On considère les points $A(-1\,;\,0\,;\,5)$ et $B(3\,;\,2\,;\,-1)$.

Affirmation 1 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (OAB).

2. On considère :

- la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 15 + k \\ y = 8 - k \\ z = -6 + 2k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$;

- la droite d' de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 4s \\ y = 2 + 4s \\ z = 1 - 6s \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

Affirmation 3 : Les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + z + 1 = 0$.
Affirmation 4 : La distance du point $C(2\,;\,-1\,;2)$ au plan $\mathcal{P}$ est égale à $2\sqrt{3}$.

Exercice 4 (5 points)

Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée posidonie, sur le fond de la baie de l'Alycastre, près de l'île de Porquerolles.
La zone étudiée est d'une superficie totale de 20 hectares (ha), et au premier juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 ha de cette zone.

Partie A : étude d'un modèle discret

Pour tout entier naturel n, on note u_n la superficie de la zone, en hectare, recouverte par la posidonie au premier juillet de l'année $2024 + n$. Ainsi, $u_0 = 1$.

Une étude conduite sur cette superficie a permis d'établir que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = -0{,}02u_n^2 + 1{,}3u_n.$$

1. Calculer la superficie que devrait recouvrir la posidonie au premier juillet 2025 d'après ce modèle.

2. On note h la fonction définie sur $[0\,;20]$ par $h(x) = -0{,}02x^2 + 1{,}3x$.
On admet que h est croissante sur $[0\,;20]$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.
b. En déduire que la suite (u_n) converge. On note L sa limite.
c. Justifier que $\mathrm{L} = 15$.

3. Les biologistes souhaitent savoir au bout de combien de temps la surface recouverte par la posidonie dépassera les 14 hectares.

a. Sans aucun calcul, justifier que, d'après ce modèle, cela se produira.

b. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'en fin d'exécution, il affiche la réponse à la question des biologistes.

```
def seuil():
   n=0
   u=1
   while .................. :
      n= ..........
      u= ..........
   return n
```

Partie B : étude d'un modèle continu

On souhaite décrire la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie au cours du temps avec un modèle continu.

Dans ce modèle, pour une durée t, en année, écoulée à partir du premier juillet 2024, la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie est donnée par $f(t)$, où f est une fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ vérifiant :

- $f(0) = 1$;
- f ne s'annule pas sur $[0\,;\,+\infty[$;
- f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$;
- f est solution sur $[0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle $(E_1) : y' = 0{,}02y(15 - y)$.

On admet qu'une telle fonction f existe ; le but de cette partie est d'en déterminer une expression.
On note f' la fonction dérivée de f.

1. Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(t) = \frac{1}{f(t)}$.
Montrer que g est solution de l'équation différentielle $(E_2) : y' = -0{,}3y + 0{,}02$.

2. Donner les solutions de l'équation différentielle (E_2).

3. En déduire que pour tout $t \in [0\,;+\infty[$:

$$f(t) = \frac{15}{14\mathrm{e}^{-0{,}3t} + 1}.$$

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

5. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $f(t) > 14$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.