УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
17 января 2023 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Аналитическая механика**
по направлению
подготовки: **03.03.01 «Прикладные математика и физика»**
физтех-школа: **физики и исследований им. Ландау**
кафедра: **теоретической механики**
курс: 2
семестр: 4

лекции – 30 часов
практические (семинарские)
занятия – 30 часов
лабораторные занятия – нет

Экзамен – 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа – 45 часов

Программу и задания составили:

д.ф.-м.н., профессор А. П. Маркеев
ассистент У. В. Монахова
ассистент С. С. Ефимов
к.ф.-м.н., доцент А. В. Сахаров

Программа принята на заседании
кафедры теоретической механики
28 сентября 2022 года

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н. С. В. Соколов

1. **Малые колебания**

1.1. Линеаризация уравнений движения консервативной системы в окрестности ее положения равновесия. Нормальные координаты и нормальные колебания.

1.2. Колебания консервативной системы под действием внешних периодических сил. Резонанс в вынужденных колебаниях.

1.3. Влияние внешних периодических сил на малые колебания склерономной системы.

2. **Введение в теорию нелинейных колебаний**

2.1. Фазовая плоскость консервативной системы с одной степенью свободы. Равновесия, периодические движения, сепаратрисы.

2.2. Классификация особых точек на плоскости. Понятие об автоколебаниях, предельные циклы.

2.3. Понятие о методе нормальных форм.

2.4. Элементы теории бифуркаций. Бифуркации «смена устойчивости» и «седло-узел», бифуркация «вилки». Бифуркация рождения цикла (бифуркация Андронова–Хопфа).

2.5. Понятие о методе усреднения. Построение первого приближения по малому параметру для дифференциальных уравнений в стандартной форме.

3. **Уравнения Гамильтона. Уравнения Рауса. Скобки Пуассона**

3.1. Обобщенные импульсы. Преобразование Лежандра. Теорема Донкина о преобразовании Лежандра. Канонические уравнения Гамильтона.

3.2. Физический смысл функции Гамильтона. Уравнения Уиттекера для консервативных и обобщенно консервативных систем.

3.3. Время и энергия как канонически сопряженные переменные.

3.4. Уравнения Рауса. Понижение порядка системы дифференциальных уравнений движения при помощи уравнений Рауса в случае существования циклических координат. Приведенный потенциал.

3.5. Скобки Лагранжа. Скобки Пуассона и их свойства. Скобки Пуассона и первые интегралы. Теорема Якоби–Пуассона.

4. **Канонические преобразования**

4.1. Понятие канонического преобразования. Обобщенная симплектичность матрицы Якоби — необходимое и достаточное условие каноничности преобразования. Другие критерии каноничности преобразования (выражение их через скобки Лагранжа, через скобки Пуассона, посредством дифференциальной формы).

4.2. Инвариантность скобок Пуассона при канонических преобразованиях. Канонические преобразования и процесс движения. Теорема Лиувилля о сохранении фазового объёма.

4.3. Свободное каноническое преобразование и его производящая функция. Канонические преобразования с производящей функцией, зависящей от старых координат и новых импульсов.

5. **Метод Якоби интегрирования уравнений динамики**

5.1. Уравнение Гамильтона–Якоби. Полный интеграл. Теорема Якоби.

5.2. Уравнение Гамильтона–Якоби для систем с циклическими координатами. Уравнение Гамильтона–Якоби для консервативных и обобщенно консервативных систем. Разделение переменных.

6. **Классическая теория возмущений. Адиабатические инварианты**

6.1. Переменные действие–угол для системы с одной степенью свободы. Понятие о переменных действие–угол для систем с несколькими степенями свободы.

6.2. Классическая теория возмущений. Нерезонансный и резонансный случаи в теории возмущений. Проблема малых знаменателей. Преобразование Биркгофа.

6.3. Параметрический резонанс в линейной системе Гамильтона. Уравнение Матье.

6.4. Понятие адиабатического инварианта. Теорема Арнольда о вечном сохранении адиабатического инварианта в периодической по времени гамильтоновой системе с одной степенью свободы.

7. **Интегральные инварианты**

7.1. Понятие интегрального инварианта.

7.2. Универсальный интегральный инвариант Пуанкаре. Теорема, обратная теореме об универсальном интегральном инварианте Пуанкаре. Теорема Ли Хуа-чжуна.

7.3. Интегральный инвариант Пуанкаре–Картана (основной интегральный инвариант механики). Теорема, обратная теореме об интегральном инварианте Пуанкаре–Картана.

8. **Элементы теории детерминированного хаоса**

   8.1. Регулярные и хаотические аттракторы. Эргодичность и перемешиваемость. Экспоненциальное разбегание траекторий и показатели Ляпунова.

   8.2. Метод поверхностей сечения Пуанкаре.

   8.3. Логистическое (квадратичное) отображение. Сценарий перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода.

   8.4. Универсальности Фейгенбаума. Понятие о фрактальной размерности аттрактора.

9. **Интегрируемые и неинтегрируемые системы Гамильтона. Теория КАМ**

   9.1. Понятие интегрируемости гамильтоновых систем. Теорема Лиувилля об интегрируемости. Представление движения на инвариантных торах.

   9.2. Невырожденность и изоэнергетическая невырожденность интегрируемых систем.

   9.3. Формулировка основной теоремы КАМ-теории (теории Колмогорова–Арнольда–Мозера).

   9.4. Механизм разрушения инвариантных торов.

Литература

<u>*Основная*</u>

1. *Айзерман М.А.* Классическая механика. — Москва : Наука, 2005.

2. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. — 3-е изд. — Москва : Физматлит, 2001.

3. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика : учебник для университетов. — Изд. 3-е, испр. — Москва : Изд-во «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

4. *Трухан Н.М.* Теоретическая механика. Методика решения задач : учеб. пособие. — Москва : МФТИ, 2010.

Дополнительная

5. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. — Москва : Физматлит, 1974.

6. *Голдстейн Г., Пул Ч., Сафко Дж.* Классическая механика. — Москва–Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2012.

7. *Журавлёв В.Ф.* Основы теоретической механики. — 2-е изд. — Москва : Физматлит, 2001; 3-е изд. — Москва : Физматлит, 2008.

8. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. — Москва : Наука, 1988.

9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. — 5-е изд., стереотип. — Москва : Физматлит, 2012.

10. *Магницкий Н.А., Сидоров С.В.* Новые методы хаотической динамики. — Москва : УРСС, 2004.

11. *Табор М.* Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. — Москва : УРСС, 2001.

12. *Фомичев А.В.* Элементы теории бифуркаций и динамических систем. Ч. I. Ч. II. — Москва : МФТИ, 2019.

ЗАДАНИЯ

Задачи, отмеченные *, необходимо решить для получения третьего семестрового балла.

Первое задание

(срок сдачи с 6 марта по 11 марта 2023 г.)

Контрольная работа с 27 февраля по 4 марта 2023 г.

1. **Малые колебания консервативных систем**
   16.2, 16.42, 16.43, 16.69, 16.9*, 16.103*

2. **Диссипативные системы и вынужденные колебания**
   17.6, 17.11(д), 17.22*, 18.4, 18.36, 18.30*, 18.41*

   T1. В задаче 17.11(д) определите расположение корней характеристического уравнения в комплексной плоскости для различных ветвей границы области асимптотической устойчивости на плоскости (α, β).

3. **Элементы теории бифуркаций**

Т2. Рассмотрите дифференциальное уравнение, зависящее от параметра a:

$$\dot{x} = (x-a)(x^2-a).$$

Постройте все возможные фазовые портреты, которые можно получить для этого уравнения, а также интервалы изменения параметра a, соответствующие каждому из портретов.

Т3. Материальная точка массой m движется в гравитационном поле Ньютона с потенциалом $\Pi(r) = -\alpha/r$. Используя интеграл $r^2\dot{\varphi} = c$, постройте график эффективного потенциала для различных значений констант α и c. Постройте все возможные фазовые портреты системы в плоскости $(r, \dot{r})$.

Т4*. Найдите все положения равновесия следующей динамической системы, зависящей от параметра a:

$$\ddot{x} + \dot{x} = x(a-1)(\sin x - a).$$

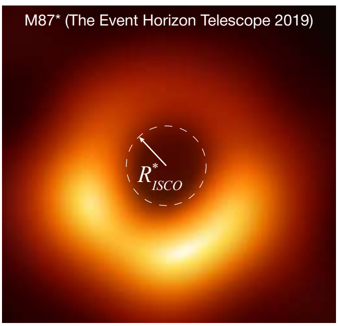
Исследуйте на устойчивость все положения равновесия, лежащие на отрезке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, и нарисуйте бифуркационную диаграмму.

Т5. Для системы

$$\dot{x} = -y + x(\mu - x^2 - y^2)(\mu - 2x^2 - 2y^2),$$
$$\dot{y} = x + y(\mu - x^2 - y^2)(\mu - 2x^2 - 2y^2)$$

постройте различные типы фазовых портретов, которые получаются, если параметр μ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$.

Т6*. Постройте бифуркационную диаграмму стационарных точек уравнения Бине для частицы в гравитационном поле чёрной дыры, используя в качестве параметра константу интеграла площадей. Определите диапазон радиусов, при которых круговые орбиты являются устойчивыми.



4. **Метод усреднения и метод нормальных форм**

   Т7. Систему уравнений

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + x_1^2 + x_2^2$$

   приведите к нормальной форме с точностью до слагаемых второй степени. Величины λ_1 и λ_2 – вещественные постоянные, причём $\lambda_2 = 2\lambda_1$.

   Т8. Используя метод нормальных форм, найдите поправки к амплитуде и частоте колебаний гармонического осциллятора, возникающие при учете дополнительных слагаемых:

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \varepsilon(2\dot{x} + \alpha x^3) = 0,$$

   где $0 < \varepsilon \ll 1$, ω, α — постоянные коэффициенты.

   Т9*. Используя метод разделения на два масштаба времени найдите изменение амплитуды a колебаний осциллятора Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x},$$

   где $0 < \varepsilon \ll 1$, ограничившись первым приближением решения $x = a\cos t + O(\varepsilon)$.

   Т10*. Приведите к нормальной форме уравнение Бине для светового луча в метрике Шварцшильда. Укажите нормализующую замену с точностью до членов третьего порядка.

Второе задание

(срок сдачи с 8 по 13 мая 2023 г.)

Контрольная работа с 1 по 6 мая 2023 г.

5. **Уравнения Гамильтона. Первые интегралы. Скобки Пуассона. Теорема Э. Нётер**

   19.5, 19.14, 19.24, 20.19, 20.57, 20.37, 19.53*, 20.32*

6. **Интегральные инварианты**

   22.16, 22.22, 22.30, 22.4*

7. **Канонические преобразования и теория возмущений**

   23.9, 23.35(в, г), 23.98, 23.31*

T11. Движение математического маятника при больших значениях постоянной интеграла энергии мало отличается от равномерного вращения и в безразмерных переменных может быть описано системой канонических дифференциальных уравнений с функцией Гамильтона:

$$H = \frac{1}{2}p^2 - \varepsilon \cos q, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

В системе делается унивалентное каноническое преобразование $q, p \to Q, P$, задаваемое производящей функцией $S_1(q, P)$ вида

$$S_1 = qP + \varepsilon S_1^{(1)}(q, P).$$

а) Подберите функцию $S_1^{(1)}$ так, чтобы в новой функции Гамильтона были уничтожены члены первой степени относительно ε.

б) Пренебрегая членами выше первой степени относительно ε, выпишите решение полученной таким путем новой системы дифференциальных уравнений движения.

в) С точностью до членов порядка ε включительно найдите явную зависимость старых переменных q, p от новых переменных Q, P.

T12*. Функция Гамильтона системы с одной степенью свободы имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(a^4 q^2 + p^2) + b^2 q^4,$$

где a и b — отличные от нуля коэффициенты. При помощи преобразования Биркгофа найдите нормальную форму этой функции в окрестности положения равновесия $q = 0$, $p = 0$ с точностью до членов четвертой степени включительно. Найдите также приближенную зависимость периода колебаний системы от значения постоянной h интеграла $H(q, p) = h$.

8. **Уравнение Гамильтона–Якоби**
24.5, 24.41, 24.61, 24.77*

9. **Интегрируемые гамильтоновы системы**
В следующих задачах покажите, что система интегрируема по Лиувиллю, а также определите топологию ее инвариантного многообразия:
19.2, 19.28, 19.17*, 19.29*

10. Адиабатические инварианты

T13. Математический маятник находится на гладкой плоскости, образующей угол α с горизонтом. Как изменяется амплитуда a малых колебаний маятника при медленном изменении угла α?

T14. Упругий шарик подпрыгивает в поле тяжести над горизонтальной плитой. Ускорение свободного падения g медленно изменяется. Как меняется высота h подскока шарика над плитой?

T15*. Материальная точка скользит без трения по горизонтальной поверхности круглого стола. Края стола ограничены бортиками, с которыми точка соударяется абсолютно упруго. Радиус стола медленно уменьшается со временем, при этом его центр остаётся неподвижным.

1) Во сколько раз изменится интервал времени Δt между последовательными ударами точки о бортики к тому моменту, как кинетическая энергия точки E возрастёт в два раза?

2) Во сколько раз изменится абсолютная величина импульса частицы p к тому моменту, как радиус стола уменьшится в два раза?

11. Элементы теории детерминированного хаоса и КАМ-теории

T16. Для гамильтоновой системы

$$H = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \varepsilon \left(I_1 + \sum_{k_1, k_2} a_k \sin\left(k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2\right) \right),$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, k_1, k_2 — целые числа не равные нулю, $a_k = e^{-|\boldsymbol{k}|}$, покажите, что
1) если отношение $(\omega_1 + \varepsilon)/\omega_2$ иррациональное, то I_1, I_2 отличаются на величину ε от постоянных значений,
2) если отношение $(\omega_1 + \varepsilon)/\omega_2$ рациональное, то I_1, I_2 неограниченно растут.

T17. Покажите, что в гамильтоновой системе

$$H = H_0\left(I_1, I_2\right) + \varepsilon H_1\left(I_1, I_2, \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2\right),$$

где α_1 и α_2 — постоянные коэффициенты, имеется первый интеграл вида $I = \alpha_2 I_1 - \alpha_1 I_2$. Найдите канонические переменные, в которых I играет роль импульса. Запишите гамильтониан H в этих переменных.

T18*. Для каждой из гамильтоновых систем H_0 оцените меру множества траекторий устойчивых к возмущениям εH_1, $0 < \varepsilon \ll 1$.

1) $H_0 = 42I_1^2 + I_1 I_2 + 42I_2^2, \quad H_1 = 2I_1 \sin(3\varphi_1 - 18\varphi_2)$,

2) $H_0 = 42I_1^2 + I_1 I_2 - I_2^2, \quad H_1 = 3I_2 \cos(2\varphi_1 + 14\varphi_2)$,

3) $H_0 = 36I_1^2 + 12I_1 I_2 + I_2^2$,

$$H_1 = \left(42I_1^2 + 13I_1 I_2 + I_2^2\right)\cos^3(\varphi_1 - 6\varphi_2),$$

4) $H_0 = 49I_1^2 - 14I_1 I_2 + I_2^2 + 6I_1 + I_2, \quad H_1 = 4I_2 \sin^3(3\varphi_1 + 21\varphi_2)$.

Постройте графики линий уровня гамильтониана $H_0\,(I_1, I_2)$ и отложите на них линии $\omega_1 : \omega_2 = \mathrm{const}$. Для каждого случая, в котором имеется неустойчивость, укажите хотя бы одну траекторию, уходящую бесконечно далеко от исходной точки $(I_1(0), I_2(0))$ при $t \to \infty$.

T19*. Системы Лоренца задается уравнениями

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy,$$

где σ, r, b — положительные постоянные коэффициенты. Найдите положения равновесия. Покажите, что при $r = 1$ и

$$r = \sigma\frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1}$$

в системе происходят бифуркации, и опишите их. Численно постройте фазовый портрет для значений $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$.

Номера задач взяты из сборника *Пятницкий Е.С., Трухан Н.М., Ханукаев Ю.И., Яковенко Г.Н.* Сборник задач по аналитической механике. — 4-е изд. — Москва : МФТИ, 2018.