А. П. Маркеев

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Издание второе, дополненное

Допущена Министерством образования РФ
в качестве учебника для студентов
механико-математических специальностей университетов

Редакция журнала
«Регулярная и хаотическая динамика»

Ижевская
республиканская типография

1999

УДК 531(075.8)
ББК 22.21
М26

М26 **Маркеев А. П.**
Теоретическая механика: Учебник для университетов. — Москва: ЧеРо, 1999, 572 стр.

ISBN

Книга представляет собой строгое, целостное и компактное изложение основных задач и методов теоретической механики. Она значительно отличается от существующих учебников по теоретической механике как по подбору материала, так и по способу его изложения. Основное внимание уделено рассмотрению наиболее содержательных и ценных для теории и приложений разделов динамики и методов аналитической механики; статика изучается как раздел динамики, а в разделе кинематики подробно обсуждаются общие основания кинематики системы; некоторые методические идеи являются новыми в учебной литературе.

Для студентов механико-математических факультетов университетов, а также для студентов втузов, обучающихся по специальности «Механика» и «Прикладная математика», преподавателей механики, аспирантов.

Табл. 1. Ил. 177. Библиогр. 9 назв.

ISBN **ББК 22.21**

Оригинал-макет подготовлен в редакции журнала
«Регулярная и хаотическая динамика»
http://www.rcd.com.ru

© А. П. Маркеев, 1999
© Редакция журнала «Регулярная и хаотическая динамика», 1999

Оглавление

Предисловие к первому изданию 12

Предисловие ко второму изданию 14

Введение 15

I КИНЕМАТИКА

Глава I. **Кинематика точки и системы**

§ 1. Основные понятия, задачи кинематики 19

1. Пространство и время (19). 2. Материальная точка. Механическая система (20). 3. Задачи кинематики (20).

§ 2. Кинематика точки 21

4. Векторный способ задания движения точки (21). 5. Координатный способ задания движения точки (21). 6. Естественный способ задания движения точки (22). 7. Круговое движение (25). 8. Скорость и ускорение точки в полярных координатах (25). 9. Криволинейные координаты (27).

§ 3. Общие основания кинематики системы 31

10. Свободные и несвободные системы. Связи (31). 11. Ограничения, налагаемые связями на положения, скорости, ускорения и перемещения точек системы (34). 12. Действительные и виртуальные перемещения. Синхронное варьирование (37). 13. Число степеней свободы (40). 14. Обобщенные координаты (40). 15. Координатное пространство (42). 16. Обобщенные скорости и ускорения (44). 17. Псевдокоординаты (45).

§ 4. Кинематика твердого тела 47

18. Задачи кинематики твердого тела. Определение простейших перемещений (47). 19. Векторно-матричное задание движения твердого тела. Углы Эйлера (49). 20. Движение твердого тела с неподвижной точкой как ортогональное преобразование (52). 21. Основные теоремы о конечных перемещениях твердого тела (52). 22. Скорость и ускорение твердого тела при поступательном движении (56). 23. О мгновенном кинематическом состоянии твердого тела (57). 24. Скорости и ускорения точек твердого тела в общем случае движения (57). 25. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси (59). 26. Движение вокруг неподвижной точки (61). 27. Плоское движение тела (63). 28. Кинематические инварианты. Кинематический винт (69).

§ 5. Сложное движение точки 71
29. Основные определения (71). 30. Производная от вектора, заданного своими компонентами относительно подвижной системы координат (72). 31. Теорема о сложении скоростей (73). 32. Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса) (74).

§ 6. Сложное движение твердого тела 76
33. Постановка задачи (76). 34. Сложение мгновенно поступательных движений (76). 35. Сложение мгновенных вращений вокруг пересекающихся осей (77). 36. Кинематические уравнения Эйлера (78). 37. Сложение мгновенных вращений вокруг параллельных осей (79). 38. Пара вращений (80). 39. Сложение мгновенно поступательного и вращательного движений (81).

II ДИНАМИКА

Глава II. Основные понятия и аксиомы динамики

§ 1. Законы (аксиомы) Ньютона. Задачи динамики 85
40. Инерциальные системы отсчета. Принцип относительности Галилея (85). 41. Первый закон Ньютона (аксиома инерции). Сила (85). 42. Масса. Второй закон Ньютона (основная аксиома динамики) (86). 43. Третий закон Ньютона (аксиома взаимодействия материальных точек) (87). 44. Аксиома независимости действия сил (закон сложения сил) (87). 45. Активные силы и реакции связей (88). 46. Силы внешние и внутренние (89). 47. Задачи динамики. Равновесие. Статика (89).

§ 2. Главный вектор и главный момент системы сил 90
48. Главный вектор системы сил (90). 49. Момент силы относительно точки и оси (91). 50. Главный момент системы сил (92).

§ 3. Работа. Силовая функция. Идеальные связи 93
51. Работа системы сил (93). 52. Элементарная работа сил, приложенных к твердому телу (93). 53. Силовое поле. Силовая функция. Потенциал (94). 54. Элементарная работа системы сил в обобщенных координатах. Обобщенные силы (96). 55. Идеальные связи (98).

Глава III. Дифференциальные вариационные принципы механики

§ 1. Принцип Даламбера–Лагранжа 102
56. Понятие о вариационных принципах механики (102). 57. Общее уравнение динамики (принцип Даламбера–Лагранжа) (102).

§ 2. Принцип Журдена 106
58. Принцип Журдена (106).

§ 3. Принцип Гаусса 107
59. Формулировка принципа Гаусса (принципа наименьшего принуждения) (107). 60. Физический смысл принципа Гаусса (109). 61. Экстремальное свойство реакций связей (110).

Глава IV. **Статика**

§ 1. Статика произвольной механической системы 112
62. Общее уравнение статики (принцип виртуальных перемещений) (112). 63. Общее уравнение статики в обобщенных координатах (116). 64. Эквивалентные системы сил (121).

§ 2. Статика твердого тела 122
65. Необходимые и достаточные условия равновесия твердого тела (122). 66. Критерий эквивалентности систем сил, приложенных к твердому телу (124). 67. О равнодействующей. Теорема Вариньона (127). 68. Частные случаи условий равновесия твердого тела (127). 69. Равнодействующая двух параллельных сил (133). 70. Теория пар (133). 71. Теорема Пуансо (135). 72. Статические инварианты. Динамический винт (136). 73. Частные случаи приведения системы сил (137).

Глава V. **Геометрия масс**

§ 1. Центр масс. Момент инерции 140
74. Центр масс (140). 75. Момент инерции системы относительно оси. Радиус инерции (140). 76. Моменты инерции относительно параллельных осей (143).

§ 2. Тензор и эллипсоид инерции 144
77. Моменты инерции относительно осей, проходящих через одну и ту же точку (144). 78. Эллипсоид инерции. Главные оси инерции (145). 79. Свойства главных моментов инерции (148).

Глава VI. **Основные теоремы и законы динамики**

§ 1. Основные динамические величины механической системы 150
80. Количество движения системы (150). 81. Главный момент количеств движения (кинетический момент) системы (150). 82. Кинетический момент твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки (152). 83. Кинетическая энергия системы. Теорема Кёнига (154). 84. Кинетическая энергия твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки (154).

§ 2. Теоремы об изменении основных динамических величин системы 156
85. Общие замечания о теоремах и законах динамики (156). 86. Теорема об изменении количества движения (157). 87. Теорема об изменении кинетического момента (159). 88. Теорема об изменении кинетической энергии (166). 89. Основные теоремы динамики в неинерциальной системе отсчета (171).

90. О теоремах динамики для движения относительно центра масс (174).

Глава VII. **Динамика твердого тела**

§ 1. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси 177
91. Уравнение движения. Определение реакций (177). 92. Условия, при которых динамические реакции равны статическим (179). 93. Уравнение движения физического маятника (180). 94. Фазовая плоскость для уравнения движения маятника (180). 95. Некоторые сведения из теории эллиптических интегралов и эллиптических функций Якоби (184). 96. Интегрирование уравнения движения маятника (186).

§ 2. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки . . . 188
97. Дифференциальные уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Динамические уравнения Эйлера (188). 98. Первые интегралы (190). 99. Стационарные вращения твердого тела в случае Эйлера (190). 100. Движение динамически симметричного тела в случае Эйлера. Регулярная прецессия (191). 101. Геометрическая интерпретация Пуансо (193). 102. Интегрирование уравнений Эйлера (195). 103. О герполодиях (201). 104. Определение ориентации твердого тела в абсолютном пространстве для движения Эйлера–Пуансо (202). 105. Уравнения движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки и их первые интегралы (203). 106. Основная формула гироскопии (206). 107. Об элементарной теории гироскопа (210).

§ 3. Движение свободного твердого тела 214
108. Дифференциальные уравнения движения свободного твердого тела (214). 109. Плоское движение тела (218).

§ 4. Движение тяжелого твердого тела, опирающегося на горизонтальную плоскость 222
110. Общие сведения. Понятие о трении (222). 111. Волчок на абсолютно гладкой плоскости (223). 112. Влияние трения на движение волчка (226). 113. Движение однородного шара по плоскости при наличии трения (227). 114. Об уравнениях движения тяжелого тела произвольной выпуклой формы (230).

Глава VIII. **Элементы небесной механики**

§ 1. Задача двух тел 234
115. Уравнения движения (234). 116. Интеграл площадей. Второй закон Кеплера (235). 117. Интеграл энергии в задаче двух тел (237). 118. Интеграл Лапласа (237). 119. Уравнение орбиты. Первый закон Кеплера (238). 120. Зависимость характера орбиты от величины начальной скорости. Первая и вторая космические скорости (239). 121. Третий закон Кеплера (240). 122. Время

в кеплеровском движении. Уравнение Кеплера (241). 123. Кеплеровские элементы орбиты (243). 124. О задаче трех и более тел (244).

§ 2. Движение твердого тела в центральном ньютоновском гравитационном поле 245
125. Главный вектор сил тяготения. Гравитационный момент (245). 126. Уравнения движения тела относительно центра масс (249). 127. Относительное равновесие твердого тела на круговой орбите (250). 128. Плоские движения (251).

Глава IX. **Динамика системы переменного состава**

§ 1. Основные понятия и теоремы 254
129. Понятие о системе переменного состава (254). 130. Теорема об изменении количества движения (255). 131. Теорема об изменении кинетического момента (256).

§ 2. Движение материальной точки переменного состава . . . 257
132. Дифференциальное уравнение движения (257). 133. Движение ракеты вне поля сил (259). 134. Вертикальное движение ракеты в однородном поле тяжести (260).

§ 3. Уравнения движения тела переменного состава 263
135. Движение вокруг неподвижной точки (263). 136. Вращение вокруг неподвижной оси (265).

Глава X. **Дифференциальные уравнения аналитической динамики**

§ 1. Уравнения Лагранжа (второго рода) 267
137. Общее уравнение динамики в обобщенных координатах (267). 138. Уравнения Лагранжа (269). 139. Анализ выражения для кинетической энергии (271). 140. Разрешимость уравнений Лагранжа относительно обобщеных ускорений (273). 141. Уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил. Функция Лагранжа (274). 142. Теорема об изменении полной механической энергии голономной системы (275). 143. Гироскопические силы (277). 144. Диссипативные силы. Функция Рэлея (279). 145. Обобщенный потенциал (280). 146. О составлении уравнений Лагранжа для описания движения в неинерциальной системе отсчета (282). 147. Натуральные и ненатуральные системы (282).

§ 2. Канонические уравнения Гамильтона 283
148. Преобразование Лежандра. Функция Гамильтона (283). 149. Уравнения Гамильтона (285). 150. Физический смысл функции Гамильтона (286). 151. Интеграл Якоби (287). 152. Уравнения Уиттекера и Якоби (289).

§ 3. Уравнения Рауса 293
153. Функция Рауса (293). 154. Уравнения Рауса (294).

§ 4. Уравнения движения неголономных систем 295
155. Уравнения движения с множителями связей (295). 156. Уравнения Воронца (298). 157. Уравнения Чаплыгина (301). 158. Уравнения Аппеля (306). 159. Вычисление энергии ускорений. Аналог теоремы Кенига (309). 160. Энергия ускорений твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки (310).

Глава XI. **Интегрирование уравнений динамики**

§ 1. Множитель Якоби 314
161. Множитель системы уравнений. Дифференциальное уравнение для множителя (314). 162. Инвариантность множителя. Последний множитель Якоби (318). 163. Приложение теории множителя к каноническим уравнениям (324).

§ 2. Системы с циклическими координатами 326
164. Циклические координаты (326). 165. Понижение порядка системы дифференциальных уравнений движения при помощи уравнений Рауса (327).

§ 3. Скобки Пуассона и первые интегралы 334
166. Скобка Пуассона (334). 167. Теорема Якоби–Пуассона (335).

§ 4. Канонические преобразования 337
168. Понятие канонического преобразования (337). 169. Критерии каноничности преобразования (340). 170. Ковариантность уравнений Гамильтона при канонических преобразованиях (343). 171. Канонические преобразования и процесс движения (347). 172. Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема (348). 173. Свободное каноническое преобразование и его производящая функция (348). 174. О других типах производящих функций (352).

§ 5. Метод Якоби интегрирования уравнений движения 358
175. Уравнение Гамильтона–Якоби (358). 176. Уравнение Гамильтона–Якоби для систем с циклическими координатами (360). 177. Уравнение Гамильтона–Якоби для консервативных и обобщенно консервативных систем (360). 178. Характеристическая функция Гамильтона (361). 179. Разделение переменных (363). 180. Теорема Лиувилля об интегрируемости гамильтоновой системы в квадратурах (367).

§ 6. Переменные действие–угол 371
181. Случай одной степени свободы (371). 182. Переменные действие–угол в задаче о движении маятника (375). 183. О переменных действие–угол для системы с n степенями свободы (379). 184. Переменные действие–угол в задаче двух тел (381). 185. Элементы Делонэ (385).

§ 7. Канонические преобразования в теории возмущений . . . 388
186. Предварительные замечания (388). 187. Вариация постоян-

ных в задачах механики (388). 188. Классическая теория возмущений (392). 189. О линейных гамильтоновых системах дифференциальных уравнений (394). 190. Преобразование Биркгофа. Приближенное интегрирование гамильтоновой системы уравнений вблизи положения равновесия (398).

Глава XII. **Теория импульсивных движений**

§ 1. Основные понятия и аксиомы 406
191. Ударные силы и импульсы (406). 192. Аксиомы (407). 193. Главный вектор и главный момент ударных импульсов (407). 194. Задачи теории импульсивного движения (408).

§ 2. Теоремы об изменении основных динамических величин при импульсивном движении 409
195. Теорема об изменении количества движения (409). 196. Теорема об изменении кинетического момента (410). 197. Теорема об изменении кинетической энергии (412).

§ 3. Импульсивное движение твердого тела 413
198. Удар по свободному твердому телу (413). 199. Удар по телу с одной неподвижной точкой (416). 200. Удар по телу с неподвижной осью (419).

§ 4. Соударение твердых тел 423
201. Коэффициент восстановления (423). 202. Общая задача о соударении двух абсолютно гладких тел (427). 203. Изменение кинетической энергии при соударении абсолютно гладких тел (431). 204. Прямой центральный удар двух абсолютно гладких тел (431).

§ 5. Дифференциальные вариационные принципы механики в теории импульсивных движений 435
205. Общее уравнение динамики (435). 206. Принцип Журдена (438). 207. Принцип Гаусса (440).

§ 6. Теоремы Карно 444
208. Первая теорема Карно (444). 209. Вторая теорема Карно (446). 210. Кинетическая энергия потерянных скоростей в случае твердого тела (447). 211. Третья и обобщенная теоремы Карно (450).

§ 7. Теоремы Делонэ–Бертрана и Томсона 451
212. Теорема Делонэ–Бертрана (451). 213. Теорема Томсона (454).

§ 8. Уравнения Лагранжа второго рода для импульсивных движений 458
214. Обобщенные ударные импульсы (458). 215. Уравнения Лагранжа (460). 216. Случай, когда ударные импульсы возникают только из-за наложения новых связей (462).

Глава XIII. **Интегральные вариационные принципы механики**

§ 1. Принцип Гамильтона–Остроградского 467
217. Прямой и окольный пути голономной системы (467). 218. Принцип Гамильтона–Остроградского (471). 219. Принцип Гамильтона–Остроградского для систем в потенциальном поле сил (473). 220. Экстремальное свойство действия по Гамильтону (476).

§ 2. Принцип Мопертюи–Лагранжа 482
221. Изоэнергетическое варьирование (482). 222. Принцип Мопертюи–Лагранжа (483). 223. Принцип Якоби и геодезические линии в координатном пространстве (486).

Глава XIV. **Малые колебания консервативной системы около положения равновесия**

§ 1. Теорема Лагранжа об устойчивости положения равновесия 489
224. Устойчивость равновесия (489). 225. Теорема Лагранжа (490). 226. Теоремы Ляпунова о неустойчивости положения равновесия консервативной системы (492). 227. Стационарные движения консервативной системы с циклическими координатами и их устойчивость (494).

§ 2. Малые колебания 499
228. Линеаризация уравнений движения (499). 229. Главные координаты и главные колебания (502). 230. Колебания консервативной системы под влиянием внешних периодических сил (506).

Глава XV. **Устойчивость движения**

§ 1. Основные понятия и определения 514
231. Уравнения возмущенного движения. Определение устойчивости (514). 232. Функции Ляпунова (515).

§ 2. Основные теоремы прямого метода Ляпунова 517
233. Теорема Ляпунова об устойчивости движения (517). 234. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости (522). 235. Теоремы о неустойчивости (524).

§ 3. Устойчивость по первому приближению 527
236. Постановка задачи (527). 237. Теорема об устойчивости по первому приближению (529). 238. Критерий Рауса–Гурвица (532).

§ 4. Влияние диссипативных и гироскопических сил на устойчивость равновесия консервативной системы 535
239. Влияние гироскопических сил и диссипативных сил с полной диссипацией на устойчивое положение равновесия голоном-

ной системы (535). 240. Влияние гироскопических и диссипативных сил на неустойчивое равновесие (537).

§ 5. Об устойчивости гамильтоновых систем 543
241. Общие замечания (543). 242. Устойчивость линейных гамильтоновых систем с постоянными коэффициентами (544). 243. О линейных системах с периодическими коэффициентами (544). 244. Устойчивость линейных гамильтоновых систем с периодическими коэффициентами (547). 245. Алгоритм нормализации гамильтоновой системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами (549). 246. Задача о параметрическом резонансе. Линейные гамильтоновы системы, содержащие малый параметр (550). 247. Нахождение областей параметрического резонанса (553). 248. Уравнение Матье (558).

Список литературы 561

Предметный указатель 562

Предисловие к первому изданию

С развитием науки и техники узкоспециальные знания довольно быстро устаревают. Для решения возникающих принципиально новых актуальных задач научные работники и инженеры обязательно должны обладать, помимо необходимой способности к доучиванию и переучиванию, хорошей подготовкой в области фундаментальных наук. Это требует постоянного всестороннего совершенствования вузовского образования. Наиболее перспективный путь лежит именно в повышении значимости общенаучных дисциплин в учебных планах подготовки будущих научных работников и инженеров, в совершенствовании преподавания таких фундаментальных дисциплин, как физика, математика и механика.

Как фундаментальная наука теоретическая механика была и остается не только одной из дисциплин, дающей углубленные знания о природе. Она также служит средством развития у будущих специалистов необходимых творческих навыков к построению математических моделей происходящих в природе и технике процессов, к выработке способностей к научным обобщениям и выводам.

Усовершенствование курса теоретической механики надо искать в следующих двух основных направлениях. Во-первых, курс должен быть строгим, логичным, целостным и компактным; он должен позволять в краткое время изложить основные понятия и методы теоретической механики. Во-вторых, в нем не следует уделять много внимания элементарным вопросам статики и кинематики; надо сконцентрировать усилия на рассмотрении наиболее содержательных и ценных для теории и приложений разделов динамики и методов аналитической механики.

Данная книга возникла в результате продолжительной преподавательской работы автора на факультете прикладной математики Московского авиационного института им. Серго Орджоникидзе. В ее основу положены лекции, читаемые будущим инженерам-математикам. Содержание книги несколько превосходит тот материал, который излагается на лекциях.

При написании книги преследовались, главным образом, дидактические цели. В качестве будущего вероятного читателя автор видит прежде всего студента, желающего получить хорошую первоначальную подготовку по основным задачам и методам теоретической механики. Автор надеется, что эта книга может оказаться полезной преподавате-

лям механики, а также аспирантам и научным работникам в области прикладной математики и механики.

Данная книга существенно отличается от имеющихся учебников по теоретической механике для вузов как по подбору материала, так и по способу его изложения. Содержание книги хорошо видно из оглавления. Чтобы выявить методические отличия, достаточно, например, ознакомиться с изложением статики, важнейших разделов кинематики, вариационных принципов механики, теории канонических преобразований.

Трудно перечислить те учебники, монографии, статьи, под влиянием которых сложились методические взгляды автора. Очень важно здесь также влияние собственного опыта научной и преподавательской работы автора, научного и педагогического опыта его московских коллег и друзей. Список литературы, которая наиболее широко использовалась, дан в конце книги. Некоторые монографии, учебники и статьи упомянуты в подстрочных замечаниях.

Предисловие ко второму изданию

Настоящее издание книги по сравнению с первым изданием, вышедшим в 1990 г., имеет следующие отличия.

Добавлена новая глава XII «Теория импульсивных движений» и § 6 главы XI «Переменные действие–угол», расширен п. 95, посвященный эллиптическим интегралам и функциям, в § 4 главы XI добавлено несколько новых примеров канонических преобразований, а в § 5 этой же главы — новый п. 178, в котором рассматривается характеристическая функция Гамильтона.

Кроме того, устранены некоторые замеченные опечатки и погрешности изложения.

Автор благодарен читателем за внимание к первому изданию книги и за доброжелательную критику, которая вполне учтена при подготовке второго издания.

Введение

Механика — это наука о движении и взаимодействии материальных тел. Под движением понимается *механическое движение*, т. е. изменение положения тел или частей тела в пространстве с течением времени. Основанная, как и всякая физическая наука, на наблюдении и опыте, механика может быть разделена на наблюдательную (опытную) и теоретическую.

Наблюдательная (опытная) механика входит в различные отделы экспериментальной физики, астрономии, техники. В ней устанавливается связь между свойствами материальных тел, их движением и причинами, вызывающими или изменяющими движение. Эти причины называют *силами*. Упомянутая связь формулируется в виде законов движения, которые не являются математическими следствиями каких-то изначальных истин, а представляют собой индуктивные положения, основанные на большом числе согласующихся между собой опытных фактов. Эти положения представляют собой утверждения о свойствах движения материальных объектов, верные с той или иной точностью.

Теоретическая, или рациональная, механика опирается на некоторое конечное число законов, установленных в опытной механике, принимаемых за истины, не требующих доказательства — аксиомы. Эти аксиомы заменяют собой в теоретической механике индуктивные истины опытной механики. Теоретическая механика имеет дедуктивный характер. Опираясь на аксиомы как на известный и проверенный практикой и экспериментом фундамент, теоретическая механика возводит свое здание при помощи строгих математических выводов.

По Ньютону теоретическая механика «есть учение о движениях, производимых какими бы то ни было силами, и о силах, требуемых для производства каких бы то ни было движений, точно изложенное и доказанное»[1].

Теоретическая механика как часть естествознания, использующая математические методы, имеет дело не с самими реальными материальными объектами, а с их моделями. Такими моделями, изучаемыми в теоретической механике, являются материальные точки, системы материальных точек, абсолютно твердые тела, деформируемые сплошные среды. В данной книге механика сплошных сред не рассматривается.

[1]Из предисловия к первому изданию знаменитого сочинения И. Ньютона «Математические начала натуральной философии» (см.: Крылов А. Н. Собрание трудов. Т. 7, М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936, С. 2).

При изучении теоретической механики методически удобно разделить ее на кинематику и динамику; из динамики часто выделяют еще статику. В кинематике движение изучается только с геометрической точки зрения; причины, обусловливающие движение, кинематика не рассматривает. Изучением движения в связи с причинами, вызывающими или изменяющими его, занимается динамика. Как часть динамики статика изучает те условия, при которых материальные объекты могут оставаться в покое; к статике относится также разработка способов эквивалентных преобразований систем сил. Подробнее о задачах, изучаемых в кинематике, динамике и ее части — статике сказано в соответствующих главах книги.

Часть I

КИНЕМАТИКА

Глава I
Кинематика точки и системы

§ 1. Основные понятия, задачи кинематики

1. Пространство и время. Механическое движение происходит в пространстве и времени. В теоретической механике в качестве моделей реальных пространства и времени принимаются их простейшие модели — абсолютное пространство и абсолютное время, существование которых постулируется. Абсолютные пространство и время считаются независимыми одно от другого; в этом состоит основное отличие классической модели пространства и времени от их модели в теории относительности, где пространство и время взаимосвязаны.

Предполагается, что *абсолютное пространство* представляет собой трехмерное, однородное и изотропное неподвижное евклидово пространство. Наблюдения показывают, что для небольших по размерам областей реального физического пространства евклидова геометрия справедлива.

Абсолютное время в теоретической механике считается непрерывно изменяющейся величиной, оно течет от прошлого к будущему. Время однородно, одинаково во всех точках пространства и не зависит от движения материи.

Движение в его геометрическом представлении имеет относительный характер: одно тело движется относительно другого, если расстояния между всеми или некоторыми точками этих тел изменяются. Для удобства исследования геометрического характера движения в кинематике можно взять вполне определенное твердое тело, т. е. тело, форма которого неизменна, и условиться считать его неподвижным. Движение других тел по отношению к этому телу будем в кинематике называть *абсолютным движением*. В качестве неподвижного тела отсчета обычно выбирают систему трех не лежащих в одной плоскости осей (чаще всего взаимно ортогональных), называемую *системой отсчета*, которая по определению считается *неподвижной* (*абсолютной*) *системой отсчета* или *неподвижной* (*абсолютной*) *системой координат*. В кинематике этот выбор произволен. В динамике такой произвол недопустим. За единицу измерения времени принимается секунда: 1 с = 1/86 400 сут, определяемых астрономическими наблюдениями. В кинематике надо еще выбрать единицу длины, например 1 м, 1 см и т. п. Тогда основные

кинематические характеристики движения: положение, скорость, ускорение, о которых будет идти речь дальше, определяются при помощи единиц длины и времени.

Если некоторый определенный момент принять за начало отсчета времени, то всякий другой момент времени однозначно определяется соответствующим числом t, т. е. числом секунд, прошедших между начальным и рассматриваемым моментом. Это число положительно или отрицательно, смотря по тому, следует ли рассматриваемый момент времени за начальным или предшествует ему, т. е. $-\infty < t < +\infty$.

2. Материальная точка. Механическая система. Под *материальной точкой* понимается частица материи, достаточно малая для того, чтобы ее положение и движение можно было определить как для объекта, не имеющего размеров. Это условие будет выполнено, если при изучении движения можно пренебречь размерами частицы и ее вращением. Можно или нельзя принять материальный объект за материальную точку, зависит от конкретной задачи. Например, при определении положения спутника Земли в космическом пространстве очень часто целесообразно принимать его за материальную точку; если же рассматриваются задачи, связанные с ориентацией антенн, солнечных батарей, оптических приборов, установленных на спутнике, то его нельзя считать материальной точкой, так как в вопросах ориентации нельзя пренебрегать вращением спутника и его следует рассматривать как объект, имеющий конечные, хотя и малые по сравнению с расстоянием до Земли, размеры.

В теоретической механике материальная точка представляет собой геометрическую точку, наделенную по определению механическими свойствами; эти свойства будут рассмотрены в динамике. В кинематике же материальная точка отождествляется с геометрической точкой.

Геометрическое место последовательных положений движущейся точки называется ее *траекторией*. Если при $t_1 < t < t_2$ траектория — прямая линия, то движение точки прямолинейное, в противном случае криволинейное. В частности, движение точки на интервале времени $t_1 < t < t_2$ называют *круговым*, если на этом интервале траектория точки лежит на окружности.

Механической системой, или *системой материальных точек*, или, для краткости, просто *системой* мы будем называть выделенную каким-либо образом совокупность материальных точек.

3. Задачи кинематики. Задать движение точки (системы) — значит дать способ определения положения точки (всех точек, образующих систему) в любой момент времени.

Задачи кинематики состоят в разработке способов задания движе-

ния и методов определения скорости, ускорения и других кинематических величин точек, составляющих механическую систему.

§ 2. Кинематика точки

4. Векторный способ задания движения точки. Рассмотрим движение материальной точки P относительно некоторого тела, которое считается неподвижным. Пусть O — точка, принадлежащая этому телу. Радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ движущейся точки P относительно O можно задать как вектор-функцию времени: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$. С течением времени конец вектора $\boldsymbol{r}$ описывает траекторию точки (рис. 1). Производная от $\boldsymbol{r}$

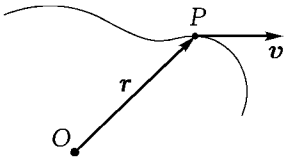

Рис. 1

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \tag{1}$$

называется *скоростью точки* P. Производная от $\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \tag{2}$$

называется *ускорением точки* P.

5. Координатный способ задания движения точки. Пусть $Oxyz$ — неподвижная декартова прямоугольная система координат, а $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — орты ее осей Ox, Oy, Oz. Тогда вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ может быть задана тремя скалярными функциями $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — координатами точки P:

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}.$$

При этом для скорости имеем выражение

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}, \tag{3}$$

где $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$, $v_z = \dot{z}$ — проекции скорости $\boldsymbol{v}$ на оси Ox, Oy, Oz.[1] Величина скорости v и ее направление определяются равенствами

$$\begin{gathered} v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \\ \cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{i}) = \frac{\dot{x}}{v}, \qquad \cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{j}) = \frac{\dot{y}}{v}, \qquad \cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{k}) = \frac{\dot{z}}{v}. \end{gathered} \tag{4}$$

[1] Производная по t какой-либо величины, являющейся функцией аргумента t, часто обозначается точкой над соответствующим символом, обозначающим эту величину.

Аналогично для ускорения $\boldsymbol{w}(t)$ получаем

$$\boldsymbol{w}(t) = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = w_x\boldsymbol{i} + w_y\boldsymbol{j} + w_z\boldsymbol{k}, \tag{5}$$

где $w_x = \ddot{x}$, $w_y = \ddot{y}$, $w_z = \ddot{z}$ — проекции $\boldsymbol{w}$ на оси Ox, Oy, Oz. И тогда

$$\begin{gathered} w = |\boldsymbol{w}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}, \\ \cos(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{i}) = \frac{\ddot{x}}{w}, \qquad \cos(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{j}) = \frac{\ddot{y}}{w}, \qquad \cos(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{k}) = \frac{\ddot{z}}{w}. \end{gathered} \tag{6}$$

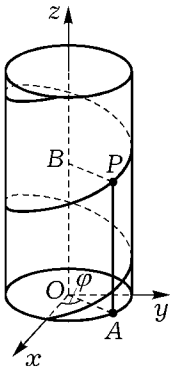

Рис. 2

Пример 1. *Задан закон движения точки P:*

$$x = a\cos bt, \qquad y = a\sin bt, \qquad z = ct,$$

где a, b, c — постоянные. Найдем траекторию, скорость и ускорение точки.

Из первых двух равенств, возведя их в квадрат и сложив, получим

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Это показывает, что точка движется по поверхности цилиндра радиуса a, ось которого совпадает с осью Oz (рис. 2).

Пусть φ — угол между проекцией OA радиуса-вектора $\overline{OP}$ на плоскость Oxy и осью Ox. Тогда

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = a\sin\varphi, \qquad \varphi = bt,$$

а $z = c\varphi/b$. Следовательно, прямая OA равномерно вращается, а точка P равномерно перемещается по образующей AP. Таким образом, точка P движется по винтовой линии.

Определим скорость точки P. Имеем

$$\dot{x} = -ab\sin bt, \qquad \dot{y} = ab\cos bt, \qquad \dot{z} = c;$$
$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{a^2b^2 + c^2}.$$

Величина скорости постоянна, но направление скорости изменяется со временем.

Найдем ускорение точки. Имеем

$$\ddot{x} = -ab^2\cos bt, \qquad \ddot{y} = -ab^2\sin bt, \qquad \ddot{z} = 0;$$
$$w = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = ab^2,$$
$$\cos(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{i}) = -\cos bt, \qquad \cos(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{j}) = -\sin bt, \qquad \cos(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{k}) = 0.$$

Ускорение имеет постоянную величину и направлено по внутренней нормали цилиндра (от P к B; отрезок PB параллелен AO).

6. Естественный способ задания движения точки. Пусть в пространстве задана кривая, по которой движется точка P. Для определения положения точки P на ее траектории возьмем произвольную точку O_1 кривой за начало отсчета дуг и зададим положительное направление отсчета (рис. 3). Каждому положению точки P поставим в соответствие свою дуговую координату σ, аналогично тому как на прямолинейной оси каждой точке отвечает своя абсцисса. Величина σ будет положительной или отрицательной в зависимости от направления отсчета дуг; при этом длина дуги O_1P равна $|\sigma|$. Если $\sigma = \sigma(t)$ — известная функция времени, то движение точки P задано. Такой способ задания движения точки называется *естественным*. При этом мы будем предполагать, что $\sigma(t)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция.

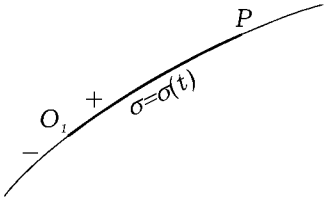

Рис. 3

Получим выражения для скорости и ускорения точки P при естественном способе задания движения. Введем естественный трехгранник, образованный единичными векторами $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$, составляющими правую тройку (рис. 4). Векторы $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{n}$ лежат в соприкасающейся плоскости траектории в точке P и направлены соответственно по касательной к траектории в сторону положительного отсчета дуг и по главной нормали траектории в сторону ее вогнутости, вектор $\boldsymbol{b}$ направлен по бинормали траектории в точке P.

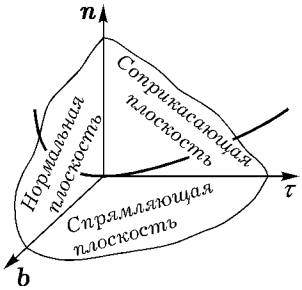

Рис. 4

Радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ точки P относительно какой-либо фиксированной точки будет сложной функцией времени: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\sigma(t))$. Из дифференциальной геометрии известно, что

$$\boldsymbol{\tau}(\sigma) = \frac{d\boldsymbol{r}}{d\sigma}, \qquad \frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{n}(\sigma), \tag{7}$$

где ρ — радиус кривизны траектории в точке P. Используя определения (1) и (2) скорости и ускорения, получаем при помощи (7)

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt} = v_\tau \boldsymbol{\tau}, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv_\tau}{dt}\boldsymbol{\tau} + v_\tau \frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d^2\sigma}{dt^2}\boldsymbol{\tau} + \frac{v_\tau^2}{\rho}\boldsymbol{n}. \tag{9}$$

Здесь введено обозначение $v_\tau = \dot{\sigma}$. Величина v_τ положительна, если точка P движется в положительном направлении отсчета дуг O_1P, и отрицательна в противном случае; $v = |v_\tau|$. Согласно (8), скорость всегда направлена по касательной к траектории.

Из (9) следует, что ускорение всегда лежит в соприкасающейся плоскости. Его можно записать в виде

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_\tau + \boldsymbol{w}_n, \qquad \boldsymbol{w}_\tau = \frac{d^2\sigma}{dt^2}\boldsymbol{\tau}, \qquad \boldsymbol{w}_n = \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}, \tag{10}$$

где $\boldsymbol{w}_\tau$ — *касательное* (*тангенциальное*) *ускорение*, а $\boldsymbol{w}_n$ — *нормальное ускорение точки*. Формулы (10) выражают теорему Гюйгенса о разложении ускорения точки на тангенциальное и нормальное. Тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения модуля скорости, а нормальное — ее направления.

Величина ускорения определяется равенством

$$w = \sqrt{w_n^2 + w_\tau^2}.$$

Если $v = \text{const}$, то движение точки называется равномерным. Движение будет ускоренным или замедленным в зависимости от того, возрастает или убывает величина скорости. Так как $v^2 = v_\tau^2 = \dot{\sigma}^2$, то $dv^2/dt = 2\dot{\sigma}\ddot{\sigma}$. Отсюда следует, что движение будет ускоренным, если знаки величин $\dot{\sigma}$ и $\ddot{\sigma}$ одинаковы, и замедленным, если их знаки противоположны. Если на интервале времени $t_1 < t < t_2$ $\ddot{\sigma} = 0$ ($w_\tau \equiv 0$), то на этом интервале движение равномерное. Если на каком-то интервале $w_n = 0$, а $v \neq 0$, то на этом интервале движение прямолинейное ($\rho = \infty$).

Замечание 1. *Из соотношений* (8) *и* (9), *в частности, следует, что если вместо одной декартовой системы координат мы возьмем другую декартову систему координат, неподвижную относительно первой, то изменится векторное уравнение* $\boldsymbol{r} = r(t)$ *движения точки* P, *но скорость и ускорение не изменятся.*

Пример 1. *Используя теорему Гюйгенса, найдем радиус кривизны эллипса*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в произвольной его точке.

Будем рассматривать эллипс как траекторию материальной точки с законом движения

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t.$$

Из равенства

$$w^2 = \frac{v^4}{\rho^2} + w_\tau^2$$

получаем такое выражение для радиуса кривизны:

$$\rho = \frac{v^2}{\sqrt{w^2 - w_\tau^2}}.$$

Учитывая, что

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t},$$

$$w = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t},$$

$$(w_\tau)^2 = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2 \sin^2 t \cos^2 t}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t},$$

получаем следующее выражение для радиуса кривизны как функции t:

$$\rho = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}{ab}.$$

В частности, в вершинах эллипса, лежащих на оси Ox (для них $t = 0,\ \pi$), $\rho = b^2/a$, а в вершинах, лежащих на оси Oy (для них $t = \pi/2,\ 3\pi/2$), $\rho = a^2/b$.

7. Круговое движение. Пусть точка движется по окружности радиуса R. Тогда (см. рис. 5) $\sigma = R\varphi$. Из (8) и (10) следует, что

$$\boldsymbol{v} = R\dot{\varphi}\boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{w}_\tau = R\ddot{\varphi}\boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{w}_n = \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n} = \dot{\varphi}^2 R\boldsymbol{n}.$$

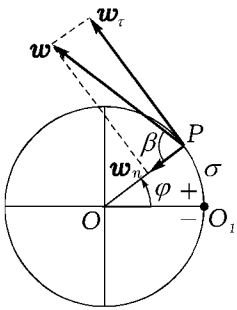

Рис. 5

Величины $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$ называются соответственно угловой скоростью и угловым ускорением радиуса OP (см. также п. 25). Введем обозначения $\dot{\varphi} = \omega$, $\ddot{\varphi} = \varepsilon$. Тогда для величины ускорения точки P получаем выражение

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Угол β между полным ускорением точки $\boldsymbol{w}$ и ее нормальным ускорением (рис. 5) находится из равенства

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{w_\tau}{w_n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.$$

При равномерном круговом движении $\varepsilon = 0$ и $\beta = 0$.

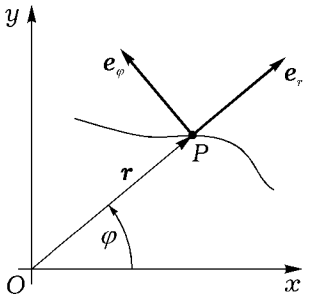

Рис. 6

8. Скорость и ускорение точки в полярных координатах. Пусть движение точки происходит в заданной плоскости. Помимо декартовых координат $x(t)$, $y(t)$ движение может быть задано, например, при помощи полярных координат (рис. 6). Пусть заданы функции $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$. Найдем скорость и ускорение точки P.

Пусть $\boldsymbol{e}_r$ — единичный вектор, направленный вдоль радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ точки P относительно O в сторону возрастания величины r, а $\boldsymbol{e}_\varphi$ — вектор, получающийся из $\boldsymbol{e}_r$ поворотом последнего на угол $\pi/2$ против часовой стрелки. Единичные векторы $\boldsymbol{e}_r$ и $\boldsymbol{e}_\varphi$ задают направления двух взаимно перпендикулярных осей: радиальной и трансверсальной соответственно. В системе координат Oxy векторы $\boldsymbol{e}_r$ и $\boldsymbol{e}_\varphi$ можно записать в следующем виде[1]:

$$\boldsymbol{e}_r' = (\cos\varphi, \sin\varphi), \quad \boldsymbol{e}_\varphi' = (-\sin\varphi, \cos\varphi). \tag{11}$$

Так как $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, то в системе координат Oxy имеем

$$\boldsymbol{v}' = (\dot{x}, \dot{y}) = (\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi,\ \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi), \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}' = (\ddot{x},\ \ddot{y}) = ((\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\cos\varphi - (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\sin\varphi, \\ (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\sin\varphi + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\cos\varphi). \end{aligned} \tag{13}$$

Проекции v_r и v_φ скорости на радиальную и трансверсальную оси называются соответственно *радиальной* и *трансверсальной скоростями.* Из (11) и (12) имеем

$$v_r = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_r) = \dot{r}, \quad v_\varphi = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_\varphi) = r\dot{\varphi}. \tag{14}$$

Для проекций ускорения аналогично получаем

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \qquad w_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}. \tag{15}$$

Пример 1. *Движение точки задано в полярных координатах:*

$$r = at,\ \varphi = bt \qquad (a, b = \text{const}).$$

Найдем траекторию, скорость и ускорение точки.

[1]Здесь, как и всюду в дальнейшем, под векторами мы понимаем векторы-столбцы. Штрихом обозначается операция транспонирования.

Исключив из данных равенств время t, получим уравнение траектории $r = a\varphi/b$. Эта кривая называется спиралью Архимеда; у нее величина радиуса-вектора пропорциональна величине полярного угла. Далее имеем

$$\dot{r} = a,\ \dot{\varphi} = b,\ \ddot{r} = 0,\ \ddot{\varphi} = 0.$$

Поэтому радиальная скорость v_r постоянна и равна a, трансверсальная скорость $v_\varphi = abt$. Для величины скорости получаем $v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = a\sqrt{1 + b^2t^2}$. Для радиального и трансверсального ускорений из (15) *получаем выражения $w_r = -ab^2t$, $w_\varphi = 2ab$. Величина ускорения определяется равенством*

$$w = \sqrt{w_r^2 + w_\varphi^2} = ab\sqrt{4 + b^2t^2}.$$

9. Криволинейные координаты. В предыдущем пункте мы видели, что движение точки по плоскости не обязательно задается только декартовыми координатами; можно, например, задавать движение в полярных координатах. Вообще, всякие три числа q_1, q_2, q_3, однозначно определяющие положение точки в пространстве, можно рассматривать как координаты этой точки. Эти числа, в отличие от прямолинейных декартовых координат, называют *криволинейными координатами.* Движение точки считается заданным, если ее криволинейные координаты q_i $(i = 1, 2, 3)$ — известные функции времени $q_i(t)$.

Связь между декартовыми и криволинейными координатами задается равенством

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_1,\ q_2,\ q_3) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \tag{16}$$

где x, y, z — функции q_1, q_2, q_3, которые считаем дважды непрерывно дифференцируемыми. Радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ — сложная функция времени: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_1(t),\ q_2(t),\ q_3(t))$.

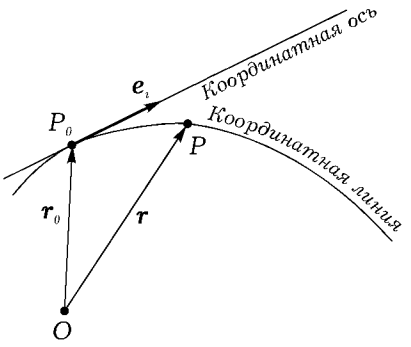

Рис. 7

Пусть P_0 — какая-либо точка в пространстве, ее криволинейные координаты обозначим q_{10}, q_{20}, q_{30}. *Первой координатной линией*, проходящей через P_0, назовем кривую $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_1,\ q_{20},\ q_{30})$, получающуюся из (16) при фиксированных q_2, q_3 и при изменении q_1 в некотором интервале. Аналогично определяются *вторая и третья координатные линии.* Касательную к i-ой

координатной линии в точке P_0 называют i-й *координатной осью*, проходящей через P_0. Единичный вектор i-й координатной оси (рис. 7) может быть записан в виде

$$\begin{gathered} \boldsymbol{e}_i = \frac{1}{H_i}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\boldsymbol{k}, \\ H_i = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}. \end{gathered} \tag{17}$$

Величины H_i называются *коэффициентами Ламе.* Производные в (17) вычисляются в точке P_0.

Если векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ взаимно ортогональны, то криволинейные координаты называют ортогональными. Мы будем рассматривать только ортогональные криволинейные координаты. Найдем проекции v_{q_i} и w_{q_i} $(i = 1,\ 2,\ 3)$ скорости $\boldsymbol{v}$ и ускорения $\boldsymbol{w}$ точки P на оси криволинейной системы координат. Из (1), (16), и (17) получаем

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3}\dot{q}_3 = v_{q_1}\boldsymbol{e}_1 + v_{q_2}\boldsymbol{e}_2 + v_{q_3}\boldsymbol{e}_3, \tag{18}$$

где величины v_{q_i} вычисляются по формулам

$$v_{q_i} = H_i\dot{q}_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{19}$$

Для нахождения величины w_{q_i}, равной скалярному произведению $\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{e}_i$, заметим, что она, согласно (2) и (17), может быть представлена в виде

$$w_{q_i} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{e}_i = \frac{1}{H_i}\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right) - \boldsymbol{v}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right)\right]. \tag{20}$$

Далее,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_i \partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_i \partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_i \partial q_3}\dot{q}_3, \tag{21}$$

а из (18) получаем

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_1 \partial q_i}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_2 \partial q_i}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_3 \partial q_i}\dot{q}_3. \tag{22}$$

Ввиду того, что $\boldsymbol{r}$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция от q_1, q_2, q_3, можно менять порядок дифференцирования по q_k

($k = 1,\ 2,\ 3$) и q_i. Поэтому из (21) и (22) следует, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_i}. \tag{23}$$

Кроме того, из (18) вытекает равенство

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}_i}. \tag{24}$$

Используя (23), (24), равенство (20) можно записать в виде

$$w_{q_i} = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{d\dot{q}_i}\right) - \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_i}\right].$$

Если теперь ввести обозначение $T = v^2/2$, то выражение для w_{q_i} можно записать в следующем окончательном виде:

$$w_{q_i} = \frac{1}{H_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right) \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{25}$$

Пример 1. *Найдем скорость и ускорение точки в цилиндрической и сферической системах криволинейных координат. В случае цилиндрической системы координат* (рис. 8) *полагаем* $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$, *и тогда*

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z; \qquad H_r = 1,\ H_\varphi = r,\ H_z = 1;$$

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}; \tag{26}$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right); \tag{27}$$

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}, \quad w_z = \ddot{z}. \tag{28}$$

В случае сферической системы координат (рис. 9) $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = \theta$, *и* $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$; $H_r = 1$, $H_\varphi = r\sin\theta$, $H_\theta = r$;

$$v_r = \dot{r},\ v_\varphi = r\sin\theta\dot{\varphi},\ v_\theta = r\dot{\theta}; \tag{29}$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right); \tag{30}$$

$$w_r = \ddot{r} - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 - r\dot{\theta}^2, \quad w_\varphi = r\sin\theta\ddot{\varphi} + 2\sin\theta\dot{r}\dot{\varphi} + 2r\cos\theta\dot{\varphi}\dot{\theta}, \tag{31}$$
$$w_\theta = r\ddot{\theta} + 2r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2.$$

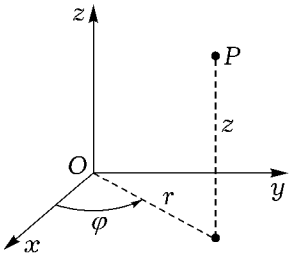

Рис. 8

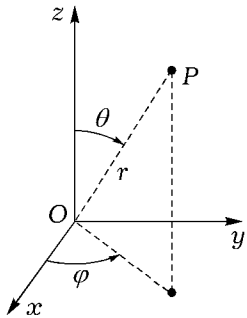

Рис. 9

Пример 2. *Пусть материальная точка движется равномерно по поверхности сферы радиуса a. Точка начинает движение на экваторе, направление ее скорости $\boldsymbol{v}$ образует с меридианами сферы постоянный угол α. Найдем уравнение траектории точки (локсодромы), а также момент времени τ, в который точка достигает полюса сферы.*

Положение точки на сфере зададим при помощи координат φ, θ (рис. 9). *Из формул* (29) *имеем*

$$v_\varphi = a\sin\theta\dot{\varphi},\ v_\theta = a\dot{\theta}.$$

Без ограничения общности примем, что движение точки начинается на оси Ox (т. е. при $t = 0$, $\varphi = 0$, $\theta = \pi/2$), угол θ во время движения уменьшается от $\pi/2$ до 0, а $\dot{\varphi} > 0$.

Так как направление скорости $\boldsymbol{v}$ пересекает меридиан $\varphi = \mathrm{const}$ под углом α, то $\operatorname{ctg}\alpha = -v_\theta/v_\varphi$, что приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = -\operatorname{ctg}\alpha\sin\theta.$$

Проинтегрировав это уравнение с учетом упомянутых выше начальных условий, получим уравнение локсодромы в виде

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = e^{-\operatorname{ctg}\alpha\varphi}.$$

Так как при $\theta = 0$ $\varphi = \infty$, то локсодрома делает около полюса бесчисленное множество витков. Однако общая длина дуги локсодромы конечна. Найдем ее. Имеем

$$ds = a\sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2} = -a\, d\theta\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = -\frac{a\, d\theta}{\cos\alpha}.$$

Так как вся дуга l локсодромы соответствует изменению θ от $\pi/2$ до 0, то $l = \dfrac{\pi a}{2\cos\alpha}$. Поскольку движение точки равномерное, то время движения τ будет равно $\dfrac{\pi a}{2v\cos\alpha}$.

§ 3. Общие основания кинематики системы

10. Свободные и несвободные системы. Связи. Рассмотрим движение системы материальных точек P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$) относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат, предполагаемой неподвижной. Состояние системы задается радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_\nu$ и скоростями $\boldsymbol{v}_\nu$ ее точек. Очень часто при движении системы положения и скорости ее точек не могут быть произвольными. Ограничения, налагаемые на величины $\boldsymbol{r}_\nu$ и $\boldsymbol{v}_\nu$, которые должны выполняться при любых действующих на систему силах, называются *связями*. Если на систему не наложены связи, то она называется *свободной*. При наличии одной или нескольких связей система называется *несвободной*.

Пример 1. *Материальная точка может двигаться только в заданной плоскости, проходящей через начало координат. Если ось Oz декартовой системы координат направить перпендикулярно плоскости, в которой движется точка, то $z = 0$ — уравнение связи.*

Пример 2. *Точка движется по сфере переменного радиуса $R = f(t)$ с центром в начале координат. Если x, y, z — координаты движущейся точки, то уравнение связи имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 - f^2(t) = 0$.*

Пример 3. *Две материальные точки P_1 и P_2 связаны нерастяжимой нитью длиной l. Связь задается соотношением $l^2 - (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)^2 \geqslant 0$.*

Пример 4. *Материальная точка может двигаться в пространстве, оставаясь внутри или на границе первого октанта. Связь задается тремя неравенствами: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.*

Пример 5 (Движение конька по льду). *Пусть конек движется по льду, расположенному в горизонтальной плоскости. Конек будем моделировать тонким стержнем, одна из точек которого, например C на рис. 10, во все время движения имеет скорость, направленную вдоль стержня. Если ось Oz направлена вертикально, x, y, z — координаты точки C, а φ — угол, который образует стержень с осью Ox, то связи задаются двумя соотношениями: $z = 0$, $\dot{y} = \dot{x}\operatorname{tg}\varphi$.*

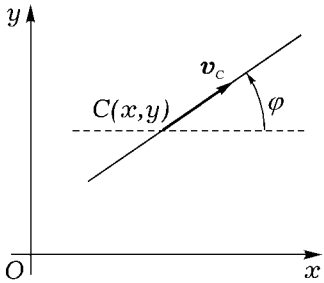

Рис. 10

В общем случае связь задается соотношением[1] $f(\boldsymbol{r}_\nu,\ \boldsymbol{v}_\nu,\ t) \geqslant 0$. Если в этом соотношении реализуется только знак равенства, то связь называется *удерживающей* (*двусторонней, неосвобождающей*). В примерах 1, 2, 5 связи удерживающие. Если же реализуется как знак равенства, так и знак строгого неравенства, то связь называется *неудерживающей* (*односторонней, освобождающей*). В примерах 3, 4 связи неудерживающие. Системы с неудерживающими связями в дальнейшем не рассматриваются.

Если уравнение связи можно записать в виде $f(\boldsymbol{r}_\nu,\ t) = 0$, не содержащем проекции скоростей точек системы, то связь называется *геометрической* (*конечной, голономной*). В примерах 1, 2 связи геометрические. Если же в уравнение связи $f(\boldsymbol{r}_\nu,\ \boldsymbol{v}_\nu,\ t) = 0$ входят проекции скоростей $\boldsymbol{v}_\nu$, то связь называется *дифференциальной* (*кинематической*). Дифференциальную связь $f(\boldsymbol{r}_\nu,\ \boldsymbol{v}_\nu,\ t) = 0$ называют *интегрируемой*, если ее можно представить в виде зависимости между координатами точек системы и временем (как в случае геометрической связи). Неинтегрируемую дифференциальную связь называют еще *неголономной связью*.

Комментарий 1. *В примере 5 дифференциальная связь $\dot{y} = \dot{x}\operatorname{tg}\varphi$ неинтегрируемая. Покажем это. Предположим противное, т. е. что x, y, φ связаны соотношением $f(x,\ y,\ \varphi,\ t) = 0$. Пусть x, y, φ отвечают реальному движению конька. Вычислим полную производную f по времени*

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\dot{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial t} \equiv 0.$$

Используя уравнение связи, $\dot{f}$ можно записать в виде

$$\dot{f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{tg}\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\right)\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\dot{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial t} \equiv 0.$$

Отсюда, ввиду независимости величин $\dot{x}$, $\dot{\varphi}$, получаем равенства

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{tg}\varphi\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

[1]Обозначением $f(\boldsymbol{r}_\nu, \boldsymbol{v}_\nu, t)$ мы пользуемся для краткой записи функции $f(r_1, \ldots,\ r_N,\ v_1, \ldots,\ v_N,\ t)$. Функция f имеет в общем случае $6N + 1$ аргументов: $3N$ координат x_ν, y_ν, z_ν точек P_ν, $3N$ проекций их скоростей $\dot{x}_\nu$, $\dot{y}_\nu$, $\dot{z}_\nu$ и время t. Функцию f предполагаем дважды непрерывно дифференцируемой.

Ввиду произвольности угла φ из этих равенств следует, что частные производные функции f по всем ее аргументам равны нулю, т. е. f не зависит от x, y, φ, t. Следовательно, предположение об интегрируемости связи $\dot{y} = \dot{x}\,\mathrm{tg}\,\varphi$ неверно.

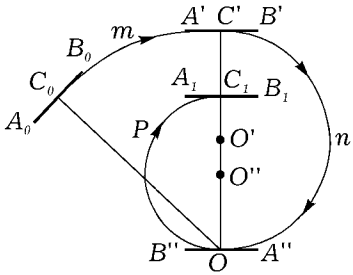

Рис. 11

Неинтегрируемость связи в рассматриваемой задаче можно показать без вычислений, а исходя только из простых геометрических соображений. Во-первых, из уравнения связи следует, что в случае ее интегрируемости в уравнение эквивалентной геометрической связи время t явно не должно входить, а угол φ обязательно должен войти, т. е. эквивалентная геометрическая связь должна записываться в виде $f(x,\ y,\ \varphi) = 0$, где функция f не должна быть тождественно равной нулю при произвольных фиксированных значениях x, y. Во-вторых, движение конька, при котором его точка C перемещается по окружности с центром, лежащим на перпендикуляре к полозу конька в точке C, не нарушает связи $\dot{y} = \dot{x}\,\mathrm{tg}\,\varphi$, так как при таком движении скорость точки C направлена вдоль полоза конька. Пусть в начальном положении конька $x = x_0$, $y = y_0$, $\varphi = \varphi_0$, а в конечном $x = x_1$, $y = y_1$, $\varphi = \varphi_1$. Если связь интегрируема и записывается в виде $f(x,\ y,\ \varphi) = 0$, то $f(x_0,\ y_0,\ \varphi_0) = 0$ и $f(x_1,\ y_1,\ \varphi_1) = 0$, так как уравнение связи должно выполняться в любом положении конька. На рис. 11 показана одна из многих возможных траекторий точки C при движении конька из начального положения в конечное. На этом рисунке $OC_0 \perp A_0B_0$, $OC' \perp A'B'$, $OC_1 \perp A_1B_1$, $O''O \perp A''B''$, $O'C' = O'O$, $O''C_1 = O''O$. Перемещение конька из начального положения в конечное происходит так, что точка C конька (обозначенная на рис. 11 в разных положениях символами C_0, C', O, C_1) сначала движется по дуге C_0mC' окружности с центром O, затем по дуге $C'nO$ окружности с центром O' и, наконец, по дуге OpC_1 окружности с центром O''. Если зафиксировать конечные координаты x_1, y_1 точки C, а конечное значение угла φ_1 изменять в некотором интервале, то в этом интервале $f(x_1,\ y_1,\ \varphi_1) \equiv 0$. Но, согласно сказанному выше, функция f не может тождественно равняться нулю при произвольных фиксированных значениях x, y. Противоречие говорит о неинтегрируемости рассматриваемой дифференциальной связи.

Если на систему материальных точек не наложены дифференциальные неинтегрируемые связи, то она называется *голономной*. Если

же среди связей, наложенных на систему, есть дифференциальные неинтегрируемые связи, то система называется *неголономной.*

В дальнейшем, при изучении движения неголономных систем, мы будем предполагать, что соответствующие им дифференциальные связи линейны относительно проекций $\dot{x}_\nu$, $\dot{y}_\nu$, $\dot{z}_\nu$ скоростей точек системы. Как геометрических, так и дифференциальных связей, наложенных на систему, может быть несколько. Таким образом, в дальнейшем мы будем изучать движение свободных механических систем или несвободных систем со связями, аналитическое представление которых имеет вид

$$f_\alpha(\boldsymbol{r}_\nu,\ t) = 0 \qquad (\alpha = 1,\ 2, \ldots,\ r), \tag{1}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{a}_{\beta\nu} \cdot \boldsymbol{v}_\nu + a_\beta = 0 \qquad (\beta = 1,\ 2, \ldots, s). \tag{2}$$

Векторы $\boldsymbol{a}_{\beta\nu}$ и скаляры a_β — заданные функции от $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2, \ldots,$ $\boldsymbol{r}_N$ и t. В частных случаях r и s могут быть равными нулю.

Геометрические связи называются *стационарными* или *склерономными*, если t не входит в их уравнения (1). Дифференциальные связи (2) называются *стационарными* или *склерономными*, если функции $\boldsymbol{a}_{\beta\nu}$ не зависят явно от t, а функции a_β тождественно равны нулю. Система называется *склерономной*, если она либо свободная, либо на нее наложены только стационарные связи. Система называется *реономной*, если среди наложенных на нее связей есть хотя бы одна нестационарная.

Комментарий 2. *В примере* 1 *рассмотрена голономная склерономная, в примере* 2 *— голономная реономная, в примере* 5 *— неголономная склерономная системы.*

11. Ограничения, налагаемые связями на положения, скорости, ускорения и перемещения точек системы. Точки несвободной системы не могут двигаться в пространстве совершенно произвольно. Их совместимые со связями (допускаемые связями) координаты, скорости, ускорения и перемещения должны удовлетворять некоторым соотношениям, вытекающим из уравнений связей (1), (2).

Пусть задан какой-то момент времени $t = t^*$. Положения системы, для которых радиусы-векторы $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu^*$ точек, образующих систему, удовлетворяют уравнениям геометрических связей (1), назовем *возможными положениями* системы для данного момента времени.

Связи налагают ограничения и на скорости точек системы. Чтобы записать эти ограничения в аналитической форме, продифференцируем обе части (1) по времени, считая $\boldsymbol{r}_\nu$ функциями t. Тогда получим

следующие дифференциальные связи, вытекающие из геометрических связей (1):

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \cdot \boldsymbol{v}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0 \qquad (\alpha = 1,\ 2, \ldots,\ r). \tag{3}$$

Совокупность векторов $\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu^*$, удовлетворяющая линейным уравнениям (2) и (3) в возможном для данного момента времени положении системы, назовем *возможными скоростями* для этого момента времени.

Для получения аналитического выражения ограничений, налагаемых связями на ускорения точек системы, продифференцируем равенства (3) и (2) по времени. Имеем[1]

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \cdot \boldsymbol{w}_\nu + \sum_{\nu,\mu=1}^{N} \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu \partial \boldsymbol{r}_\mu} \boldsymbol{v}_\mu \cdot \boldsymbol{v}_\nu + 2 \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t \partial \boldsymbol{r}_\nu} \boldsymbol{v}_\nu + \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t^2} = 0 \tag{4}$$

$$(\alpha = 1,\ 2, \ldots,\ r),$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{a}_{\beta\nu} \cdot \boldsymbol{w}_\nu + \sum_{\nu,\mu=1}^{N} \frac{\partial \boldsymbol{a}_{\beta\nu}}{\partial \boldsymbol{r}_\mu} \boldsymbol{v}_\mu \cdot \boldsymbol{v}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \boldsymbol{a}_{\beta\nu}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{v}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial a_\beta}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \cdot \boldsymbol{v}_\nu + \frac{\partial a_\beta}{\partial t} = 0 \qquad (\beta = 1,\ 2, \ldots,\ s). \tag{5}$$

Совокупность векторов $\boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{w}_\nu^*$, удовлетворяющая линейным уравнениям (4) и (5) при возможных для данного момента времени положении и скоростях точек системы, назовем *возможными ускорениями* для этого момента времени.

Заметим, что величину $3N - r - s$ следует считать положительной, так как в противном случае ограничения, налагаемые связями, были бы настолько жесткими, что согласованное со связями движение точек материальной системы было бы либо вообще невозможным, либо должно было происходить по заранее заданному закону во времени. Поэтому число линейных уравнений, определяющих проекции возможных скоростей и ускорений, превосходит число этих проекций. Следовательно, для данного момента времени существует бесконечное множество возможных скоростей $\boldsymbol{v}_\nu^*$ и возможных ускорений $\boldsymbol{w}_\nu^*$.

Пусть в данный момент времени $t = t^*$ система находится в каком-либо положении, определяемом радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu^*$, и имеет какие-то возможные скорости $\boldsymbol{v}_\nu^*$ и возможные ускорения $\boldsymbol{w}_\nu^*$. Возможному в момент $t^* + \Delta t$ положению системы отвечают радиусы-векторы $\boldsymbol{r}_\nu^* + \Delta \boldsymbol{r}_\nu$ точек системы. Величины $\Delta \boldsymbol{r}_\nu$ — *возможные перемещения* системы за время Δt из ее возможного положения, задаваемого

[1] При получении равенств (3)–(5) предполагается, что соответствующие производные функций f_α, $\boldsymbol{a}_{\beta\nu}$ и a_β существуют и непрерывны.

радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_\nu^*$ в момент $t = t^*$. Для достаточно малых Δt возможные перемещения точек системы можно[1] представить в виде суммы:

$$\Delta \boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu^* \Delta t + \frac{1}{2} \boldsymbol{w}_\nu^* (\Delta t)^2 + \ldots \qquad (\nu = 1,\ 2, \ldots,\ N). \tag{6}$$

Здесь не выписаны слагаемые, порядок которых относительно Δt выше второго. Так как множество возможных скоростей и ускорений бесконечно, то бесконечно и множество возможных перемещений.

Пренебрежем в (6) величинами выше первого порядка относительно Δt; тогда $\Delta \boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu^* \Delta t$. Если уравнения (3) и (2), которым удовлетворяют возможные скорости $\boldsymbol{v}_\nu^*$, умножить на Δt, то получим систему уравнений, которой удовлетворяют линейные по Δt возможные перемещения:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \cdot \Delta \boldsymbol{r}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \Delta t = 0 \qquad (\alpha = 1,\ 2, \ldots,\ r), \tag{7}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{a}_{\beta\nu} \cdot \Delta \boldsymbol{r}_\nu + a_\beta \Delta t = 0 \qquad (\beta = 1,\ 2, \ldots,\ s). \tag{8}$$

Функции $\boldsymbol{a}_{\beta\nu}$, a_β в (8) и частные производные в (7) вычисляются при $t = t^*$, $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu^*$.

Пример 1. *Точка P движется по неподвижной поверхности* (рис. 12). *В этом случае возможной скоростью $\boldsymbol{v}^*$ будет любой вектор, лежащий в касательной плоскости к поверхности в точке P и проходящий через эту точку. Если пренебречь в* (6) *величинами выше первого порядка относительно Δt, то $\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}^* \Delta t$. Любой вектор, построенный из точки P и лежащий в касательной плоскости, будет возможным перемещением. Если поверхность задается уравнением $f(\boldsymbol{r}) = 0$, то все возможные перемещения ортогональны нормали к поверхности, т. е. $\Delta \boldsymbol{r} \cdot \operatorname{grad} f = 0$.*

Пример 2. *Точка P движется по подвижной или деформирующейся поверхности, все точки которой имеют скорости $\boldsymbol{u}$* [2] (рис. 13). *В этом случае возможная скорость уже не лежит в касательной плоскости. Возможных перемещений опять бесконечное множество. Если пренебречь величинами порядка $(\Delta t)^2$ и выше, то все они получаются добавлением вектора $\boldsymbol{u}\Delta t$ к каждому из возможных перемещений предыдущего примера. В этом случае уже соотношение $\Delta \boldsymbol{r} \cdot \operatorname{grad} f = 0$ не выполняется при любых $\Delta \boldsymbol{r}$.*

[1] Для этого достаточно, чтобы функции $\boldsymbol{r}_\nu(t)$ имели непрерывные производные до третьего порядка включительно.

[2] Так будет, например, когда поверхность является недеформирующейся и движется поступательно со скоростью $\boldsymbol{u}$ (см. п. 22).

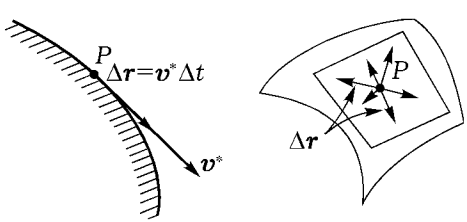

Рис. 12

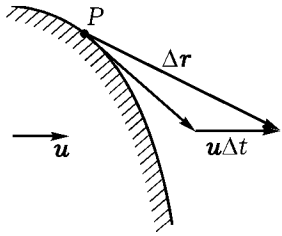

Рис. 13

12. Действительные и виртуальные перемещения. Синхронное варьирование. Пусть в момент времени $t = t^*$ система находится в положении, задаваемом радиусами-векторами ее точек $\boldsymbol{r}^*_{\nu_0}$, а скорости точек имеют некоторые конкретные возможные значения $\boldsymbol{v}^*_{\nu_0}$. Если заданы силы, действующие на систему, то, проинтегрировав систему дифференциальных уравнений движения, можно получить значения радиусов-векторов $\boldsymbol{r}_\nu$ точек системы для моментов времени t, следующих за t^*. Если обозначить dt приращение времени $t - t^*$, то приращения радиусов-векторов точек системы можно представить в виде

$$\boldsymbol{r}_\nu(t^* + dt) - \boldsymbol{r}_\nu(t^*) = \boldsymbol{v}^*_{\nu_0} dt + \frac{1}{2}\boldsymbol{w}^*_{\nu_0}(dt)^2 + \dots, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{w}^*_{\nu_0}$ — ускорения точек системы при $t = t^*$; многоточием обозначены величины выше второго порядка относительно dt. Величины (9) суть *действительные* (*истинные*) *перемещения* точек системы за время dt. Действительное перемещение, естественно, является одним из возможных. Если пренебречь членами порядка $(dt)^2$ и выше, то действительное перемещение будет дифференциалом функции $\boldsymbol{r}_\nu(t)$, т. е. $\boldsymbol{r}_\nu(t^* + dt) - \boldsymbol{r}_\nu(t^*) = d\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{v}^*_{\nu_0} dt$. В этом случае действительные перемещения удовлетворяют уравнениям, аналогичным (7) и (8):

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \cdot d\boldsymbol{r}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt = 0 \qquad (\alpha = 1,\ 2, \dots,\ r), \tag{10}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{a}_{\beta\nu} \cdot d\boldsymbol{r}_\nu + a_\beta dt = 0 \qquad (\beta = 1,\ 2, \dots,\ s). \tag{11}$$

Уравнения (10) и (11) получаются умножением обеих частей уравнений (3) и (2) на dt. Величины $\partial f_\alpha/\partial \boldsymbol{r}_\nu$, $\partial f_\alpha/\partial t$, $\boldsymbol{a}_{\beta\nu}$, a_β в (10), (11) вычисляются при $t = t^*$, $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}^*_{\nu_0}$. В дальнейшем под действительными перемещениями точек системы за время dt будем понимать их

бесконечно малые перемещения, линейные по dt; они удовлетворяют уравнениям (10), (11).

Помимо действительных перемещений, в теоретической механике принципиальное значение имеют так называемые *виртуальные перемещения*. Пусть при $t = t^*$ система занимает некоторое свое возможное положение, определяемое радиусами-векторами ее точек $\boldsymbol{r}_\nu^*$. Виртуальным перемещением системы называется совокупность величин $\delta\boldsymbol{r}_\nu$, удовлетворяющая линейным однородным уравнениям

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \cdot \delta\boldsymbol{r}_\nu = 0 \qquad (\alpha = 1,\ 2, \ldots,\ r), \tag{12}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{a}_{\beta\nu} \cdot \delta\boldsymbol{r}_\nu = 0 \qquad (\beta = 1,\ 2, \ldots,\ s), \tag{13}$$

где величины $\partial f_\alpha / \partial \boldsymbol{r}_\nu$ и $\boldsymbol{a}_{\beta\nu}$ вычислены при $t = t^*$, $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu^*$.

Остановимся на введенном понятии виртуального перемещения подробнее. Величина $\delta\boldsymbol{r}_\nu$, задается проекциями δx_ν, δy_ν, δz_ν. Так как число неизвестных δx_ν, δy_ν, δz_ν ($\nu = 1,\ 2, \ldots,\ N$) превосходит число уравнений (12), (13), которым они удовлетворяют, то количество виртуальных перемещений бесконечно. Из (10), (11) и (12), (13) следует, что для склерономной системы действительное перемещение будет одним из виртуальных.

Пусть δx_ν, δy_ν, δz_ν — бесконечно малые величины. Из (7), (8) и (12), (13) видно, что множество линейных относительно Δt возможных перемещений склерономной системы совпадает с множеством ее виртуальных перемещений. Можно сказать, что виртуальные перемещения — это возможные перемещения при «замороженных» ($t = t^* = \mathrm{const}$) связях.

Комментарий 3. *В примерах* 1 *и* 2 *п.* 11 *множества виртуальных перемещений одинаковы и представляют собой совокупность построенных из точки P векторов $\delta\boldsymbol{r}$, лежащих в проходящей через P касательной плоскости к поверхности, по которой движется материальная точка.*

Бесконечно малые приращения δx_ν, δy_ν, δz_ν называются *вариациями* величин x_ν, y_ν, z_ν. Переход при фиксированном $t = t^*$ из положения системы, определяемого радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_\nu^*$, в бесконечно близкое положение, определяемое радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_\nu^* + \delta\boldsymbol{r}_\nu$, называется *синхронным варьированием*. При синхронном варьировании мы не рассматриваем процесс движения и сравниваем допускаемые связями бесконечно близкие положения (конфигурации) системы для данного фиксированного момента времени.

Рассмотрим две совокупности возможных перемещений с одним и тем же значением величины Δt. Согласно (6),

$$\Delta_1 \boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{v}^*_{\nu_1}\Delta t + \frac{1}{2}\boldsymbol{w}^*_{\nu_1}(\Delta t)^2 + \dots,$$

$$\Delta_2 \boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{v}^*_{\nu_2}\Delta t + \frac{1}{2}\boldsymbol{w}^*_{\nu_2}(\Delta t)^2 + \dots$$

Возможные скорости $\boldsymbol{v}^*_{\nu_i}$ и возможные ускорения $\boldsymbol{w}^*_{\nu_i}$ $(i = 1,\ 2)$ удовлетворяют уравнениям (2) — (5). Подставим в (3) величины $t = t^*$, $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}^*_\nu$, $\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}^*_{\nu_1}$ и умножим обе части этого равенства на Δt, затем подставим в (3) величины $t = t^*$, $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}^*_\nu$, $\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}^*_{\nu_2}$ и снова умножим на Δt. Если теперь из первого результата вычесть второй, то получим равенства

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \cdot \left(\boldsymbol{v}^*_{\nu_1} - \boldsymbol{v}^*_{\nu_2}\right)\Delta t = 0 \qquad (\alpha = 1,\ 2, \dots,\ r). \tag{14}$$

Аналогично из (2) получаются равенства

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{a}_{\beta\nu} \cdot \left(\boldsymbol{v}^*_{\nu_1} - \boldsymbol{v}^*_{\nu_2}\right)\Delta t = 0 \qquad (\beta = 1,\ 2, \dots,\ s). \tag{15}$$

Если теперь подобную процедуру проделать с уравнениями (4) и (5) (только надо будет еще подставить $\boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{w}^*_{\nu_i}$ $(i = 1,\ 2)$, а умножить на $1/2(\Delta t)^2$), то придем к равенствам

$$\begin{gathered}\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \cdot (\boldsymbol{w}^*_{\nu_1} - \boldsymbol{w}^*_{\nu_2})\frac{(\Delta t)^2}{2} + \sum_{\nu,\mu=1}^{N} \left[\left(\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu \partial \boldsymbol{r}_\mu}\boldsymbol{v}^*_{\mu_1}\right) \cdot \boldsymbol{v}^*_{\nu_1} - \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu \partial \boldsymbol{r}_\mu}\boldsymbol{v}^*_{\mu_2}\right) \cdot \boldsymbol{v}^*_{\nu_2}\right] \frac{(\Delta t)^2}{2} + 2\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t \partial \boldsymbol{r}_\nu} \cdot (\boldsymbol{v}^*_{\nu_1} - \boldsymbol{v}^*_{\nu_2})\frac{(\Delta t)^2}{2} = 0,\end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered}\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{a}_{\beta\nu} \cdot (\boldsymbol{w}^*_{\nu_1} - \boldsymbol{w}^*_{\nu_2})\frac{(\Delta t)^2}{2} + \sum_{\nu,\mu=1}^{N} \left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{a}_{\beta\nu}}{\partial \boldsymbol{r}_\mu}\boldsymbol{v}^*_{\mu_1}\right) \cdot \boldsymbol{v}^*_{\nu_1} - \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial \boldsymbol{a}_{\beta\nu}}{\partial \boldsymbol{r}_\mu}\boldsymbol{v}^*_{\mu_2}\right) \cdot \boldsymbol{v}^*_{\nu_2}\right] \frac{(\Delta t)^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \boldsymbol{a}_{\beta\nu}}{\partial t} \cdot (\boldsymbol{v}^*_{\nu_1} - \boldsymbol{v}^*_{\nu_2})\frac{(\Delta t)^2}{2} + \\ + \sum \frac{\partial a_\beta}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \cdot (\boldsymbol{v}^*_{\nu_1} - \boldsymbol{v}^*_{\nu_2})\frac{(\Delta t)^2}{2} = 0\end{gathered} \tag{17}$$

$$(\alpha = 1,\ 2, \dots,\ r; \quad \beta = 1,\ 2, \dots,\ s).$$

Составим теперь разность двух возможных перемещений:

$$\Delta_1 \boldsymbol{r}_\nu - \Delta_2 \boldsymbol{r}_\nu = (\boldsymbol{v}^*_{\nu_1} - \boldsymbol{v}^*_{\nu_2})\Delta t + (\boldsymbol{w}^*_{\nu_1} - \boldsymbol{w}^*_{\nu_2})\frac{(\Delta t)^2}{2} + \ldots \tag{18}$$

Если $\delta \boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}^*_{\nu_1} - \boldsymbol{v}^*_{\nu_2} \neq 0$, то главная часть величины (18) линейна по Δt. Она равна $\delta \boldsymbol{v}_\nu \Delta t$ и, согласно (14), (15), удовлетворяет уравнениям (12) и (13), т. е. совокупность величин

$$\delta \boldsymbol{r}_\nu = \delta \boldsymbol{v}_\nu \Delta t \qquad (\nu = 1,\ 2, \ldots,\ N) \tag{19}$$

будет виртуальным перемещением. Синхронное варьирование (19), предполагающее $\boldsymbol{v}^*_{\nu_1} \neq \boldsymbol{v}^*_{\nu_2}$, называется *варьированием по Журдену.*

Если же $\boldsymbol{v}^*_{\nu_1} = \boldsymbol{v}^*_{\nu_2}$, но $\delta \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{w}^*_{\nu_1} - \boldsymbol{w}^*_{\nu_2} \neq 0$, то главная часть разности (18) равна $\delta \boldsymbol{w}_\nu \dfrac{(\Delta t)^2}{2}$. И, так как в (16), (17) все суммы, кроме первых, при $\boldsymbol{v}^*_{\nu_1} = \boldsymbol{v}^*_{\nu_2}$ обращаются в нуль, главная часть разности (18), согласно (16), (17) и (12), (13), будет виртуальным перемещением

$$\delta \boldsymbol{r}_\nu = \frac{1}{2}\delta \boldsymbol{w}_\nu (\Delta t)^2 \qquad (\nu = 1,\ 2, \ldots,\ N). \tag{20}$$

Такое синхронное варьирование, в котором предполагается, что $\boldsymbol{v}^*_{\nu_1} = \boldsymbol{v}^*_{\nu_2}$, а $\boldsymbol{w}^*_{\nu_1} \neq \boldsymbol{w}^*_{\nu_2}$, называется *варьированием по Гауссу.*

13. Число степеней свободы. Виртуальные перемещения δx_ν, δy_ν, δz_ν $(\nu = 1,\ 2, \ldots, N)$ удовлетворяют $r + s$ уравнениям (12), (13). Число независимых виртуальных перемещений системы называется ее *числом степеней свободы.* Число степеней свободы мы будем всюду обозначать n. Ясно, что $n = 3N - r - s$.

Пример 1. *Одна свободная точка в пространстве имеет три степени свободы.*

Пример 2. *Система, состоящая из двух точек, связанных стержнем, движущимся в плоскости, имеет три степени свободы.*

Пример 3. *Конек, движущийся по льду* (*пример* 5 *из п.* 10), *имеет две степени свободы.*

Пример 4. *Материальная точка, движущаяся по подвижной или неподвижной поверхности, имеет две степени свободы.*

Пример 5. *Система двух стержней, соединенных шарниром и движущихся в плоскости* (*ножницы*), *имеет четыре степени свободы.*

14. Обобщенные координаты. Рассмотрим несвободную систему со связями (1), (2). Будем предполагать, что r функций f_α от $3N$

аргументов x_ν, y_ν, z_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$) независимы (время t здесь рассматривается как параметр). В противном случае одна из связей противоречила бы остальным или была бы их следствием.

Наименьшее число параметров, необходимое для задания возможного положения системы, называется числом ее независимых *обобщенных координат*. Так как функции f_α ($\alpha = 1, \ldots, r$) независимы, то число обобщенных координат, которое мы будем обозначать m, равно $3N - r$. За обобщенные координаты можно принять m из $3N$ декартовых координат x_ν, y_ν, z_ν, относительно которых можно разрешить систему уравнений (1). Однако, как правило, такой выбор обобщенных координат практически мало пригоден. Можно ввести любые другие m независимых величин $q_1, q_2, \ldots, q_m$, в своей совокупности определяющих конфигурацию системы. Они могут быть расстояниями, углами, площадями и т. п., а могут и не иметь непосредственного геометрического толкования. Требуется только, чтобы они были независимы, а декартовы координаты x_ν, y_ν, z_ν точек системы можно было выразить через $q_1, q_2, \ldots, q_m$ и t:

$$\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_m, t) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N). \tag{21}$$

Эти функции, будучи подставленными в уравнения (1), обращают их в тождества. Ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \partial x_1/\partial q_1 & \ldots & \partial x_1/\partial q_m \\ \partial y_1/\partial q_1 & \ldots & \partial y_1/\partial q_m \\ \partial z_1/\partial q_1 & \ldots & \partial z_1/\partial q_m \\ & \ldots & \\ \partial x_N/\partial q_1 & \ldots & \partial x_N/\partial q_m \\ \partial y_N/\partial q_1 & \ldots & \partial y_N/\partial q_m \\ \partial z_N/\partial q_1 & \ldots & \partial z_N/\partial q_m \end{matrix} \right\| \tag{22}$$

равен m. Это следует из того, что среди $3N$ функций x_ν, y_ν, z_ν из (21) от m аргументов $q_1, q_2, \ldots, q_m$ (t — параметр) имеется m независимых, через которые могут быть выражены все остальные координаты точек системы.

Мы будем предполагать, что обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_m$ выбраны так, чтобы любое возможное положение системы могло быть получено из (21) при некоторых значениях величин $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Если это не удается сделать сразу для всех возможных положений системы, то обобщенные координаты вводятся локально, т. е. для различных совокупностей возможных положений вводятся различные системы обобщенных координат.

Функции (21) будем предполагать дважды непрерывно дифференцируемыми функциями всех своих аргументов. Кроме того, будем считать, что если система склерономна, то время t не входит в зависимости (21), чего всегда можно добиться соответствующим выбором обобщенных координат.

При исследовании конкретных эадач механики очень часто совсем нет необходимости составлять уравнения связей (1). Из физической сущности задачи обычно ясно, как надо выбрать обобщенные координаты в таком количестве, которое необходимо и достаточно для задания возможных положений системы. Если же зависимости (21) требуются при решении задачи, то они составляются, как правило, с помощью геометрических соображений.

15. Координатное пространство. Для каждого момента времени t между возможными положениями системы и точками m-мерного пространства $(q_1,\ q_2, \dots,\ q_m)$ устанавливается взаимно однозначное соответствие. Пространство $(q_1,\ q_2, \dots,\ q_m)$ называется *координатным пространством* (или пространством конфигураций). Каждому возможному положению системы отвечает некоторая точка координатного пространства, которую будем называть изображающей точкой. Движению системы соответствует движение изображающей точки в координатном пространстве.

Близость точек координатного пространства определяется естественным образом через близость соответствующих положений системы. Между положениями системы и точками координатного пространства устанавливается таким путем взаимно однозначное и непрерывное соответствие.

Пример 1 (Материальная точка движется по плоскости). *Координатное пространство — сама эта плоскость.*

Пример 2 (Система N свободных точек в пространстве). *Координатное пространство есть $3N$-мерное евклидово пространство $(x_1,\ y_1,\ z_1, \dots,\ x_N,\ y_N,\ z_N)$.*

Пример 3 (Маятник). *Положение маятника, представляющего собой твердый стержень, подвешенный за один из концов к неподвижной точке, задается углом φ* (рис. 14), *который примем за обобщенную координату. Поставим в соответствие каждому положению маятника точку на числовой оси, имеющую координату φ. Такое соответствие между положениями маятника и точками числовой оси не будет взаимно однозначным, так как разным точкам оси φ и $\varphi + 2k\pi$ $(k = \pm 1,\ \pm 2, \dots)$ соответствует одно и то же положение маятника. Однозначности можно добиться, выделив на числовой оси полуоткрытый интервал $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Но при этом нарушается непрерывность*

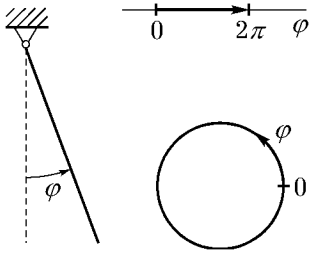

Рис. 14

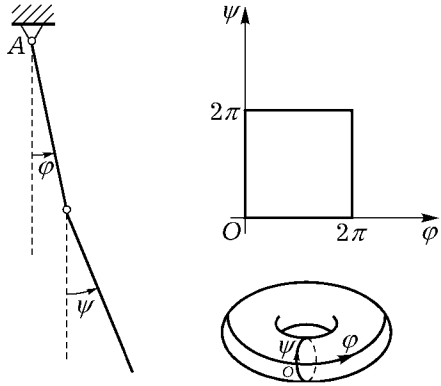

Рис. 15

соответствия, так как два близких положения маятника, для которых $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi - \varepsilon$, не будут соответствовать близким точкам на выделенном полуинтервале. Чтобы восстановить непрерывность, нужно считать точки $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$ тождественными. Наглядно это можно сделать, «склеив» точки $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$. Полученный геометрический образ — окружность и будет координатным пространством маятника.

Пример 4 (Двойной маятник). *Он состоит из двух соединенных шарниром твердых стержней, один из которых подвешен за свободный конец к неподвижной точке A* (рис. 15). *В остальном стержни могут свободно перемещаться в одной плоскости. За обобщенные координаты можно принять углы φ и ψ, образуемые стержнями с вертикальным направлением. Каждому положению маятника ставятся в соответствие два значения φ и ψ, определенных с точностью до чисел, кратных 2π. Поэтому если мы возьмем в плоскости φ, ψ квадрат со стороной 2π и отождествим в нем противоположные стороны, то получим координатное пространство двойного маятника. Наглядно это можно сделать, «склеив» противоположные стороны квадрата. После первой склейки получится цилиндр, а после второй — искомый геометрический образ — тор.*

Пример 5 (Две связанные стержнем материальные точки, движущиеся по плоскости (рис. 16)). *За обобщенные координаты можно принять декартовы координаты x, y одной из точек и угол φ, который образует стержень с осью Ox. Координатное пространство есть слой в пространстве (x, y, φ), заключенный между плоскостями $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$, противоположные точки которого отождествлены.*

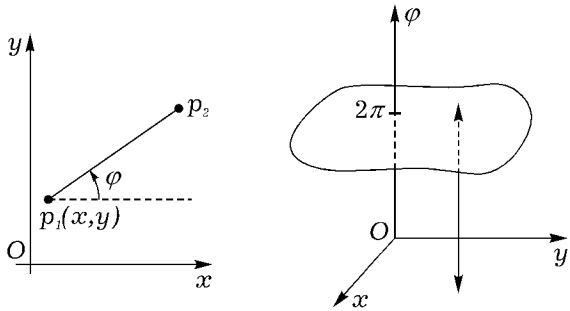

Рис. 16

Здесь, в отличие от примеров 3 и 4, наглядное отождествление плоскостей $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$ путем склеивания получить нельзя.

16. Обобщенные скорости и ускорения. При движении системы ее обобщенные координаты изменяются со временем. Величины $\dot{q}_j$ и $\ddot{q}_j$ $(j = 1, 2, \dots, m)$ называются соответственно *обобщенными скоростями* и *обобщенными ускорениями*. Скорости и ускорения точек системы в декартовой системе координат найдем, продифференцировав сложные вектор-функции времени (21):

$$\boldsymbol{v}_\nu = \dot{\boldsymbol{r}}_\nu = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t} \qquad (\nu = 1, 2, \dots, N), \tag{23}$$

$$\boldsymbol{w}_\nu = \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j}\ddot{q}_j + \sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k + 2\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j \partial t}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t^2} \qquad (\nu = 1, 2, \dots, N). \tag{24}$$

Справедливы следующие равенства, которые будут использованы в дальнейшем:

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_k}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{\partial q_k} \qquad (k = 1, 2, \dots, m). \tag{25}$$

Первое из этих равенств сразу следует из (23). Второе равенство легко проверить дифференцированием, если использовать (23) и возможность изменения порядка дифференцирования функции $\boldsymbol{r}_\nu$ по ее аргументам. Последнее возможно, так как $\boldsymbol{r}_\nu$ предполагается дважды непрерывно дифференцируемой функцией. Получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_k}\right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_k \partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_k \partial t} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t \partial q_k} = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{\partial q_k}.$$

Запишем в обобщенных скоростях уравнения (2) неголономных связей. Подставив (21) и (23) в (2), получим

$$\sum_{j=1}^{m} b_{\beta j}(q_1,\ q_2, \dots,\ q_m,\ t)\dot{q}_j + b_\beta(q_1,\ q_2, \dots,\ q_m,\ t) = 0 \qquad (\beta = 1,\ 2, \dots,\ s). \tag{26}$$

Величины $b_{\beta j}$, b_β определяются равенствами

$$b_{\beta j} = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j} \cdot \boldsymbol{a}_{\beta\nu} \quad (\beta = 1,\ 2, \dots,\ s;\ j = 1,\ 2, \dots, m),$$

$$b_\beta = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t} \cdot \boldsymbol{a}_{\beta\nu} + a_\beta \qquad (\beta = 1,\ 2, \dots,\ s).$$

Здесь в векторах $\boldsymbol{a}_{\beta\nu}$ и скалярах a_β величины $\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \dots,\ \boldsymbol{r}_N$ заменены на их выражения (21).

Для голономной системы обобщенные скорости $\dot{q}_j$ независимы и совершенно произвольны. В неголономной системе обобщенные координаты, как и в голономной системе, могут принимать произвольные значения, но при этом обобщенные скорости не будут независимы; они связаны s соотношениями (26).

Чтобы выразить виртуальные перемещения $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ точек системы через вариации δq_j обобщенных координат, надо, в соответствии с п. 12, отбросить в выражении (23) $\partial\boldsymbol{r}_\nu/\partial t$ и заменить $\dot{q}_j$ на δq_j, а $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ на $\delta\boldsymbol{r}_\nu$. Тогда получим[1]

$$\delta\boldsymbol{r}_\nu = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j}\delta q_j \qquad (\nu = 1,\ 2, \dots,\ N). \tag{27}$$

Для голономной системы вариации δq_j произвольны. В неголономной же системе они связаны соотношениями, которые получаются из (26) путем отбрасывания величин b_β и замены $\dot{q}_j$ на δq_j:

$$\sum_{j=1}^{m} b_{\beta j}\delta q_j = 0 \qquad (\beta = 1,\ 2, \dots,\ s). \tag{28}$$

Следовательно, число степеней свободы голономной системы совпадает с числом ее обобщенных координат, а число степеней свободы неголономной системы меньше числа m обобщенных координат на количество s дифференциальных неинтегрируемых связей[2].

---

[1] Вообще, для любой функции $\varphi(q_1,\ q_2, \dots,\ q_m,\ t)$ имеем $\delta\varphi = \sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{\partial\varphi}{\partial q_j}\delta q_j$.

[2] Конечно, предполагается, что связи (26) являются независимыми.

17. Псевдокоординаты. В некоторых задачах динамики, особенно при изучении движения неголономных систем, бывает удобно ввести координаты более общего вида, которые получили название псевдокоординат. Пусть n — число степеней свободы. Рассмотрим n независимых линейных комбинаций обобщенных скоростей

$$\dot{\pi}_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij}\dot{q}_j \qquad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{29}$$

Коэффициенты c_{ij} — функции $q_1,\ q_2, \ldots,\ q_m,\ t$. Величины $\dot{\pi}_i$ имеют вполне определенный смысл некоторых линейных комбинаций обобщенных скоростей, но сами символы π_i могут и не иметь смысла, т. е. правые части в равенствах (29) могут не быть полными производными по времени от каких-либо функций обобщенных координат и времени. Величины $\ddot{\pi}_i$ также осмыслены. Это — производные по времени от правых частей равенств (29). Будем называть символы π_i *псевдокоординатами*, а величины $\dot{\pi}_i$ и $\ddot{\pi}_i$ — соответственно *псевдоскоростями* и *псевдоускорениями*. Некоторые из π_i могут быть, в частности, обобщенными координатами q_i, тогда соответствующие $\dot{\pi}_i$ и $\ddot{\pi}_i$ — обобщенные скорости и обобщенные ускорения.

Величины c_{ij} будем выбирать так, чтобы определитель линейной системы из $m = n + s$ уравнений (26), (29) относительно $\dot{q}_j$ $(j = 1,\ 2, \ldots,\ m)$ был отличен от нуля. Разрешив эту систему, получим

$$\dot{q}_j = \sum_{i=1}^{n} d_{ij}\dot{\pi}_i + g_j \qquad (j = 1,\ 2, \ldots,\ m). \tag{30}$$

Псевдоскорости $\dot{\pi}_i$ могут принимать произвольные значения; если они заданы, то обобщенные скорости находятся из (30). Величины d_{ij}, g_j в (30) — функции $q_1,\ q_2, \ldots,\ q_m,\ t$.

Введем согласованное с (29) обозначение

$$\delta\pi_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij}\delta q_j \qquad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{31}$$

Формула (31) фактически является определением величин $\delta\pi_i$. Именно, $\delta\pi_i$ — это величина, равная правой части равенства (31), в которой δq_j — вариации обобщенных координат.

Из (31) и (28) находим выражение δq_j через величины $\delta\pi_i$ $(i = 1,\ 2, \ldots,\ n)$:

$$\delta q_j = \sum_{i=1}^{n} d_{ij}\delta\pi_i \qquad (j = 1,\ 2, \ldots,\ m). \tag{32}$$

Здесь величины $\delta\pi_i$ могут принимать произвольные значения.

Найдем нужные для дальнейшего выражения для виртуальных перемещений $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ точек системы через величины $\delta\pi_i$. Подставив (32) в (27), получим

$$\delta\boldsymbol{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_{\nu i}\delta\pi_i \qquad (\nu = 1,\ 2, \ldots,\ N), \tag{33}$$

где введено обозначение

$$\boldsymbol{e}_{\nu i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j} d_{ij} \qquad (\nu = 1,\ 2, \ldots,\ N; \quad i = 1,\ 2, \ldots,\ n).$$

Запишем это выражение несколько иначе. Для этого продифференцируем обе части соотношений (30) по времени и полученное выражение для $\ddot{q}_j$ подставим в формулу (24), которая примет вид

$$\boldsymbol{w}_\nu = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_{\nu i}\ddot{\pi}_i + \boldsymbol{h}_\nu \qquad (\nu = 1,\ 2, \ldots,\ N),$$

где вектор-функции $\boldsymbol{h}_\nu$ не зависят от псевдоускорений $\ddot{\pi}_i$. Отсюда следует, что

$$\boldsymbol{e}_{\nu i} = \frac{\partial \boldsymbol{w}_\nu}{\partial \ddot{\pi}_i} \qquad (\nu = 1,\ 2, \ldots,\ N; \quad i = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{34}$$

Подставив (34) в (33), получим окончательное выражение для $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ в виде

$$\delta\boldsymbol{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{w}_\nu}{\partial \ddot{\pi}_i}\delta\pi_i \qquad (\nu = 1,\ 2, \ldots,\ N). \tag{35}$$

§ 4. Кинематика твердого тела

18. Задачи кинематики твердого тела. Определение простейших перемещений. *Абсолютно твердое тело* — это такая механическая система, у которой взаимные расстояния между точками постоянны. Очень многие объекты природы и техники моделируются в теоретической механике системами, состоящими из отдельных материальных точек и абсолютно твердых тел. Отсюда вытекает важность изучения их движения. В дальнейшем абсолютно твердое тело будем для краткости называть просто *твердым телом.*

Если в декартовой прямоугольной системе координат точка P_k твердого тела имеет радиус-вектор $\boldsymbol{r}_k$, то по определению при любых i, j величины $|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j| = r_{ij}$ постоянны во все время движения. Если помимо связей, обеспечивающих постоянство расстояний r_{ij}, на твердое тело не наложено никаких других связей, то его называют *свободным твердым телом.* Иными словами: свободным называют твердое тело, на перемещение которого не наложено никаких ограничений. Свободное твердое тело является голономной склерономной системой.

Свободное твердое тело (такое, в котором есть три точки P_1, P_2, P_3, не лежащие на одной прямой) имеет шесть степеней свободы. В самом деле, в голономной системе число степеней свободы и число обобщенных координат совпадают. Число же обобщенных координат равно шести. Действительно, чтобы задать положение одной из точек, скажем P_1, нужно задать три координаты; если это сделано, то положение точки P_2 можно уже будет задать двумя параметрами, так как она может двигаться только по сфере радиусом r_{12} с центром P_1; после того как положения P_1 и P_2 зафиксированы, у точки P_3 осталась только одна степень свободы, так как точка при движении должна оставаться на окружности с радиусом, равным расстоянию от P_3 до прямой P_1P_2, и лежащей в плоскости, перпендикулярной P_1P_2. Итак, число степеней свободы твердого тела равно шести, как бы ни было велико число N образующих его точек.

Из приведенных рассуждений следует, что твердое тело с одной неподвижной точкой имеет три степени свободы; если у тела неподвижны две точки, то оно имеет одну степень свободы. Если свободное твердое тело представляет собой бесконечно тонкий стержень (или связанные им две материальные точки), то оно имеет пять степеней свободы.

Задача кинематики твердого тела состоит в разработке способов задания его движения, а также способов, позволяющих по небольшому числу кинематических характеристик, общих для всего тела, находить кинематические характеристики каждой точки тела.

Дадим нужные в дальнейшем определения простейших перемещений твердого тела. Рассмотрим два положения твердого тела, которые назовем его *начальным* и *конечным* положениями. При переходе тела из начального положения в конечное оно совершает некоторое перемещение. Будем рассматривать это перемещение, совершенно отвлекаясь от промежуточных положений, через которые тело проходит во время движения из начального положения в конечное, и от времени, в течение которого совершается этот переход. Таким образом, рассматриваемое перемещение определяется только начальным и конечным положениями тела; если конечное положение тела совпадает с его начальным положением, то никакого перемещения нет.

Перемещение твердого тела, при котором перемещения всех его точек геометрически равны, назовем *поступательным перемещением.*

Перемещение твердого тела, при котором его конечное положение получается из начального путем поворота вокруг неподвижной прямой, называется *вращением* (вокруг этой прямой), а сама неподвижная прямая называется *осью вращения.*

Винтовым перемещением называется совокупность поступательного перемещения и вращения, в которой поступательное перемещение происходит вдоль оси вращения.

19. Векторно-матричное задание движения твердого тела. Углы Эйлера. Пусть O_aXYZ — абсолютная система координат (рис. 17), O — произвольная фиксированная точка твердого тела, которую в дальнейшем будем называть *полюсом*, $OXYZ$ — система координат, получающаяся из системы координат O_aXYZ при помощи поступательного перемещения, $Oxyz$ — система координат, жестко связанная с твердым телом, изучением движения которого мы занимаемся.

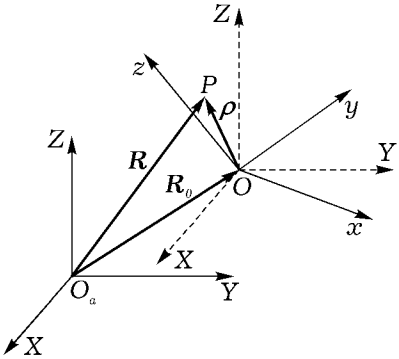

Рис. 17

Само тело на рис. 17 не изображено. Пусть P — некоторая точка тела. Векторы $\boldsymbol{R}_0$, $\boldsymbol{R}$ заданы своими компонентами в системе $OXYZ$, а вектор $\boldsymbol{\rho} = \overline{OP}$ — в системе $Oxyz$; очевидно, что $\boldsymbol{\rho}$ — постоянный вектор. Вектор $\overline{OP}$, заданный своими компонентами в системе $OXYZ$, обозначим $\boldsymbol{r}$. Имеет место соотношение

$$\boldsymbol{r} = \mathbf{A}\boldsymbol{\rho}, \tag{1}$$

где $\mathbf{A}$ — матрица перехода от системы $Oxyz$ к системе $OXYZ$.

Положение точки P тела в абсолютной системе координат задается равенством

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_0 + \mathbf{A}\boldsymbol{\rho}. \tag{2}$$

При движении твердого тела в общем случае изменяется положение полюса O, а также изменяется ориентация тела в абсолютном пространстве. Поэтому $\boldsymbol{R}_0$ и $\mathbf{A}$ в (2) — функции времени; будем их считать дважды непрерывно дифференцируемыми.

Матрица $\mathbf{A}$, задавая переход от одного ортонормированного базиса к другому, является ортогональной, т. е. $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}'$. Из последнего равенства следует, что ее элементы связаны шестью независимыми

соотношениями: сумма квадратов элементов каждой строки (столбца) равна единице и сумма попарных произведений соответствующих элементов столбцов (строк) равна нулю. Следовательно, из девяти элементов матрицы $\mathbf{A}$ независимых только три. Таким образом, матрицу $\mathbf{A}$ можно задать при помощи трех независимых параметров. В зависимости от конкретного выбора этих параметров матрица $\mathbf{A}$ будет выглядеть по-разному. Рассмотрим один из наиболее распространенных способов задания ориентации твердого тела при помощи углов Эйлера и найдем соответствующую им матрицу $\mathbf{A}$.

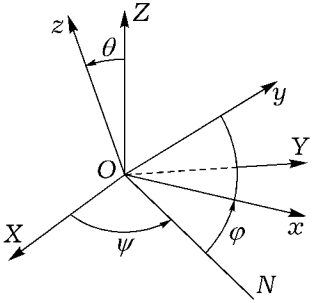

Рис. 18

Углы Эйлера вводятся следующим образом (рис. 18). Плоскость Oxy пересекается с плоскостью OXY по прямой ON, которая носит название *линии узлов*. Угол, составляемый линией узлов с осью OX, обозначается буквой ψ и называется *углом прецессии*, угол между осями Oz и OZ обозначается буквой θ и называется *углом нутации*, угол между осью Ox и линией узлов обозначается буквой φ и называется *углом собственного вращения*.

Три угла ψ, θ, φ не зависят один от другого и могут быть выбраны совершенно произвольно. Если заданы три числа, являющихся значениями углов ψ, θ, φ, то тем самым однозначно определена ориентация твердого тела в абсолютном пространстве. Обычно принимается, что $0 \leqslant \psi < 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

Переход от системы координат $OXYZ$ к системе $Oxyz$ осуществляется при помощи трех последовательных поворотов: на угол ψ вокруг OZ, на угол θ вокруг ON и на угол φ вокруг Oz. Все повороты производятся против часовой стрелки, если смотреть с конца соответствующих осей поворота.

При первом повороте мы переводим систему координат $OXYZ$ в промежуточную систему координат OX_1Y_1Z. Соответствующий переход задается матрицей $\mathbf{A_1}$:

$$\left\| \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix} \right\| = \mathbf{A}_1 \left\| \begin{matrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z \end{matrix} \right\|, \qquad \mathbf{A}_1 = \left\| \begin{matrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Второй поворот осуществляет переход от OX_1Y_1Z к еще одной промежуточной системе координат OX_1Y_2z. Соответствующую матрицу

перехода обозначим $\mathbf{A_2}$:

$$\left\| \begin{matrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z \end{matrix} \right\| = \mathbf{A}_2 \left\| \begin{matrix} X_1 \\ Y_2 \\ z \end{matrix} \right\|, \qquad \mathbf{A}_2 = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{matrix} \right\|.$$

И, наконец, третий поворот переводит систему координат OX_1Y_2z в систему координат $Oxyz$. Этому повороту соответствует матрица $\mathbf{A}_3$:

$$\left\| \begin{matrix} X_1 \\ Y_2 \\ z \end{matrix} \right\| = \mathbf{A}_3 \left\| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\|, \qquad \mathbf{A}_3 = \left\| \begin{matrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Матрица $\mathbf{A}$ перехода от системы координат $Oxyz$ к системе $OXYZ$ равна произведению матриц $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3$; ее элементы a_{ij} выражаются через углы Эйлера по следующим формулам:

$$\begin{gathered} a_{11} = \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\theta, \\ a_{12} = -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\theta, \\ a_{13} = \sin\psi\sin\theta, \quad a_{21} = \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\theta, \\ a_{22} = -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\theta, \quad a_{23} = -\cos\psi\sin\theta, \\ a_{31} = \sin\varphi\sin\theta, \quad a_{32} = \cos\varphi\sin\theta, \quad a_{33} = \cos\theta. \end{gathered} \tag{3}$$

Отметим, что при $\theta = 0$ или $\theta = \pi$ линия узлов ON и углы φ и ψ не определены, а определена только их сумма $\varphi + \psi$. Эта особенность углов Эйлера делает их малопригодными для исследования движений, при которых ось Oz тела может принимать направления, близкие прямой, проходящей через ось OZ. Избежать этих трудностей можно, применяя другие углы, определяющие ориентацию тела в абсолютном пространстве, или модифицируя углы Эйлера так, чтобы угол θ до оси Oz отсчитывался не от оси OZ, а, например, от OX или OY.

Замечание 2. *Мы видели, что конечный поворот системы $OXYZ$, переводящий ее в систему $Oxyz$, задается матрицей $\mathbf{A}$, являющейся произведением трех матриц, задающих последовательные повороты. Но, так как операция перемножения матриц не обладает свойством коммутативности, отсюда следует, что конечные повороты твердого тела некоммутативны. Это означает, что в общем случае ориентация твердого тела, получаемая им в результате двух последовательных конечных поворотов, зависит от порядка выполнения этих поворотов.*

Упражнение 1. *Привести конкретный пример некоммутативных поворотов твердого тела.*

20. Движение твердого тела с неподвижной точкой как ортогональное преобразование. Если во все время движения у твердого тела остается неподвижной одна точка O, то говорят, что тело движется вокруг точки O, или совершает *сферическое движение.*

При движении тела вокруг неподвижной точки O в формуле (2) вектор $\boldsymbol{R}_0$ постоянен. Пусть при $t = 0$ оси связанной с телом системы координат $Oxyz$ совпадают с соответствующими осями неподвижной системы координат $OXYZ$. Матрица $\mathbf{A}$ будет при этом единичной матрицей ($\mathbf{A} = \mathbf{E}$) и, согласно (1), (2), $\boldsymbol{R} = r = \boldsymbol{\rho}$, причем выписанные векторы задаются своими компонентами в одной и той же системе координат: либо $Oxyz$, либо $OXYZ$, что безразлично, так как эти системы координат при $t = 0$ совпадают. Мы будем считать, что векторы заданы в неподвижной системе $OXYZ$.

Когда тело начнет двигаться, то оно будет «переносить» с собой вектор $\boldsymbol{\rho}$, поворачивая его вокруг точки O. Через какое-то время t вектор $\boldsymbol{\rho}$ перейдет в вектор $\mathbf{r} = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{\rho}$. Последняя формула определяет преобразование пространства, в котором выбрана система координат $OXYZ$. Матрица $\mathbf{A}(t)$ ортогональна, т. е. $\mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{E}$. Отсюда и из правила нахождения определителя произведения квадратных матриц следует, что $(\det \mathbf{A})^2 = 1$. Следовательно, $\det \mathbf{A}$ может принимать только два значения $+1$ или -1, но, так как $\det \mathbf{A}$ в начальный момент равен единице, стать равным -1 при каком-либо t он не может в силу своей непрерывности по t.

Таким образом, движение твердого тела вокруг неподвижной точки задает собственное ортогональное преобразование.

21. Основные теоремы о конечных перемещениях твердого тела.

Теорема (Эйлера). *Произвольное перемещение твердого тела, имеющего неподвижную точку, можно осуществить посредством вращения вокруг некоторой оси, проходящей через эту точку.*

Доказательство.

Заметим, что утверждение теоремы Эйлера эквивалентно тому, что у матрицы $\mathbf{A}$ есть собственное значение, равное $+1$. Соответствующий собственный вектор $\boldsymbol{r}$ задает ось вращения.

Действительно, так как $\boldsymbol{r} = \mathbf{A}\boldsymbol{r}$, то направление этой оси остается неизменным при движении тела.

Пусть $f(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ — характеристический многочлен мат-

рицы $\mathbf{A}$. Чтобы показать, что $f(1) = 0$, рассмотрим следующую цепочку равенств:

$$f(1) = \det(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = \det(\mathbf{A}' - \mathbf{E}') = \det(\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{E}) =$$
$$= \det(\mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{E})) = \det(\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \det(-(\mathbf{A} - \mathbf{E})) =$$
$$= (-1)^3 \det(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = -f(1).$$

Отсюда следует, что $f(1) = 0$, и теорема доказана.

Теперь найдем упоминаемый в теореме угол поворота вокруг оси. Для этого удобно перейти от системы $OXYZ$ к системе $O\widetilde{X}\widetilde{Y}\widetilde{Z}$, у которой ось $O\widetilde{Z}$ направлена вдоль оси вращения. В этой системе матрица $\widetilde{\mathbf{A}}$, задающая поворот на угол α, имеет вид

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Замечая, что $\mathbf{A}$ и $\widetilde{\mathbf{A}}$ подобны, и пользуясь тем, что у подобных матриц суммы диагональных элементов совпадают, получаем равенство, определяющее угол поворота α:

$$1 + 2\cos\alpha = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

Теорема (Шаля). *Самое общее перемещение твердого тела разлагается на поступательное перемещение, при котором произвольно выбранный полюс переходит из своего первоначального положения в конечное, и на вращение вокруг некоторой оси, проходящей через этот полюс. Это разложение можно совершить не единственным способом, выбирая за полюс различные точки тела; при этом направление и длина поступательного перемещения будут изменяться при выборе различных полюсов, а направление оси вращения и угол поворота вокруг нее не зависят от выбора полюса.*

Доказательство.

Осуществляется простым геометрическим вычислением. На рис. 19 O_aXYZ — абсолютная система координат. Системы координат $OXYZ$ и $O_1X_1Y_1Z_1$ (не показанные на рис. 19) с началом в двух различных полюсах O и O_1 получаются из O_aXYZ поступательными перемещениями, определяемыми соответственно векторами $\boldsymbol{R}_O$ и $\boldsymbol{R}_{O_1}$. Считаем, что векторы $\boldsymbol{R}_O$ и $\boldsymbol{R}_{O_1}$ заданы своими компонентами в абсолютной системе координат O_aXYZ. Положение произвольной точки P тела в абсолютной системе координат определяется вектором $\boldsymbol{R}$. Показанные на рис. 19 векторы $\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_1$, $\overline{OO_1}$ считаем заданными их компонентами в

системе координат $Oxyz$, жестко связанной с твердым телом. Имеем равенства

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_O + \mathbf{A}\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{R}_O + \mathbf{A}(\overline{OO}_1 + \boldsymbol{\rho}_1) =$$
$$= \boldsymbol{R}_O + \mathbf{A}\overline{OO}_1 + \mathbf{A}\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{R}_{O_1} + \mathbf{A}\boldsymbol{\rho}_1.$$

Отсюда и следует справедливость теоремы Шаля. Действительно, перемещение твердого тела можно представить как поступательное, определяемое перемещением полюса, плюс вращение, задаваемое матрицей $\mathbf{A}$. Причем из предыдущего видно, что матрица $\mathbf{A}$ не зависит от выбора полюса, но из доказательства теоремы Эйлера следует, что ось вращения и угол поворота определяются только элементами матрицы $\mathbf{A}$. Поступательное же перемещение зависит от полюса. Из приведенного выше равенства видно, что для разных полюсов O и O_1 поступательные перемещения, задаваемые векторами $\boldsymbol{R}_O$ и $\boldsymbol{R}_{O_1}$, связаны соотношением $\boldsymbol{R}_{O_1} = \boldsymbol{R}_O + \mathbf{A}\overline{OO}_1$.

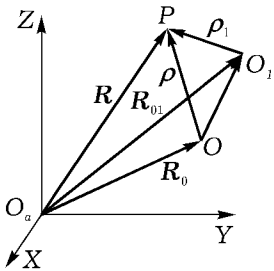

Рис. 19

Упражнение 2. *Показать, что результирующее перемещение твердого тела не зависит от порядка, в котором следуют одно за другим составляющие его поступательное перемещение и вращение.*

Теорема (Моцци). *Самое общее перемещение твердого тела является винтовым перемещением.*

Доказательство.

Разложим перемещение твердого тела на поступательное вместе с некоторым полюсом O и на вращение вокруг полюса. Согласно теореме Шаля, направление оси вращения и угол поворота вокруг нее не зависят от выбора полюса. Для удобства вычислений ось O_aZ абсолютной системы координат направим по оси вращения, и пусть в исходном положении тела соответствующие оси абсолютной O_aXYZ и связанной с твердым телом $Oxyz$ систем координат совпадают. Если α — угол поворота, то матрица $\mathbf{A}$, определяющая ориентацию тела в его конечном положении относительно абсолютной системы координат, имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Теорема Моцци будет доказана, если в теле найдется такая прямая, точки которой после перемещения тела из начального положения в конечное переместились бы только вдоль этой прямой. Действительно, выбирая тогда полюса на этой прямой, мы представим перемещение твердого тела в виде винтового перемещения, что и будет означать справедливость теоремы Моцци.

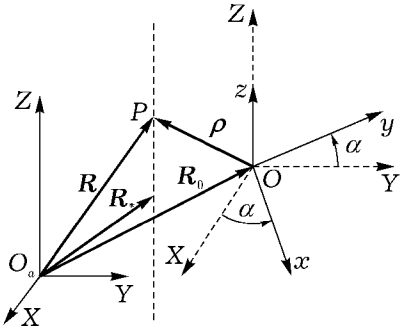

Рис. 20

Представим вектор $\boldsymbol{R}_O$ перемещения полюса (рис. 20) в виде суммы двух векторов $\boldsymbol{R}_O = \boldsymbol{R}_O^{\parallel} + \boldsymbol{R}_O^{\perp}$, где в абсолютной системе координат

$$\boldsymbol{R}_O = \begin{Vmatrix} X_O \\ Y_O \\ Z_O \end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{R}_O^{\parallel} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ Z_O \end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{R}_O^{\perp} = \begin{Vmatrix} X_O \\ Y_O \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Пусть P — точка тела с радиусом-вектором $\boldsymbol{\rho}$ относительно полюса O. В начальном положении тела $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{R}_*$. В конечном положении тела вектор $\boldsymbol{\rho}$ в абсолютной системе координат перейдет в вектор $\boldsymbol{R}_O + \mathbf{A}\boldsymbol{R}_*$. Рассмотрим прямую, параллельную оси OZ и проходящую через конец вектора $\boldsymbol{R}_*$. Если при перемещении тела точки этой прямой переместились вдоль неё самой, то $\boldsymbol{R}_O + \mathbf{A}\boldsymbol{R}_* = \boldsymbol{R}_* + \boldsymbol{R}_O^{\parallel}$. Отсюда следует, что $(\mathbf{A} - \mathbf{E})\boldsymbol{R}_* = -\boldsymbol{R}_O^{\perp}$. Если X_*, Y_*, Z_* — компоненты вектора $\boldsymbol{R}_*$ в системе O_aXYZ, то из последнего равенства следуют два скалярных уравнения, которым должны удовлетворять X_*, Y_*:

$$(\cos\alpha - 1)X_* - \sin\alpha Y_* = X_O, \quad \sin\alpha X_* + (\cos\alpha - 1)Y_* = Y_O.$$

Величина же Z_* может быть произвольной, так как третье скалярное уравнение удовлетворяется тождественно.

Определитель выписанной системы линейных уравнений равен $4\sin^2(\alpha/2)$. Он отличен от нуля, если $\alpha \neq 0,\ 2\pi$, т. е. когда перемещение отлично от поступательного. Таким образом, мы получили в теле прямую $X = X_*$, $Y = Y_*$, параллельную оси вращения, точки которой смещаются при перемещении тела вдоль нее самой.

Следствие 1 (теорема Бернулли–Шаля). *Самое общее перемещение плоской фигуры в своей плоскости есть либо поступательное перемещение, либо вращение вокруг точки. Эта точка называется центром конечного вращения.*

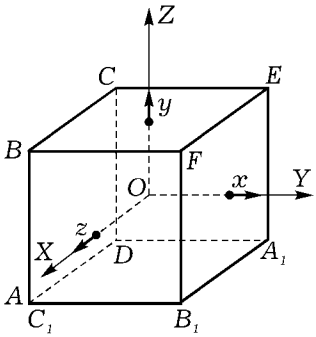

Рис. 21

Пример 1. *Пусть куб движется так, что три его вершины A, B, C переходят в новые положения A_1, B_1, C_1 — также вершины куба* (рис. 21). *Выясним, каким простейшим движением может быть достигнут этот переход.*

Так как центр куба O при указанном перемещении остался на месте, то применима теорема Эйлера. Свяжем с кубом систему координат $OXYZ$, оси которой перпендикулярны соответствующим граням куба. В результате перемещения куба оси OX, OY и OZ перейдут соответственно в оси Ox, Oy и Oz (рис. 21). *Нетрудно увидеть, что матрица* $\mathbf{A}$, *задающая перемещение* (*поворот*) *куба, будет такой:*

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Для собственного вектора $\boldsymbol{r}$ *матрицы* $\mathbf{A}$, *отвечающего собственному значению* $\lambda = 1$, *имеем* $\boldsymbol{r}' = (1,\ 1,\ 1)$. *Угол поворота определяется уравнением* $2\cos\Phi + 1 = 0$.

Таким образом, указанное перемещение куба достигается вращением вокруг диагонали DF на угол $120°$.

22. Скорость и ускорение твердого тела при поступательном движении. До сих пор при изучении перемещения твердого тела мы интересовались лишь его начальным и конечным положениями, не обращая внимания на быстроту перемещения. Теперь будем находить скорости и ускорения точек твердого тела при его движении.

Движение твердого тела в течение некоторого промежутка времени называется *поступательным*, если поступательно его перемещение между положениями, соответствующими двум произвольным моментам времени из этого промежутка. Примерами поступательных движений могут служить движение пассажирского лифта в многоэтажных жилых домах, движение ящика письменного стола при его вдвигании и выдвигании, движение кабины «колеса обозрения» в парке. В первых двух примерах поступательное движение прямолинейное (все точки тела движутся по прямым), в третьем примере — криволинейное (точки тела движутся по криволинейным траекториям — окружностям).

Так как при поступательном перемещении любые две точки тела P_1 и P_2 за время Δt имеют геометрически равные перемещения $\Delta\boldsymbol{R}_1$

и $\Delta \boldsymbol{R}_2$, то при поступательном движении все точки тела имеют равные скорости и равные ускорения. Эти одинаковые для всех точек тела скорости и ускорения называются соответственно *скоростью* и *ускорением поступательного движения* твердого тела. В дальнейшем мы увидим, что понятия скорости и ускорения твердого тела имеют смысл только для поступательного движения, так как при движении, отличном от поступательного, скорости и ускорения различных точек тела, как правило, неодинаковы.

23. О мгновенном кинематическом состоянии твердого тела. Если в данный момент времени скорости $\boldsymbol{v}$ всех точек твердого тела равны между собой, то говорят, что тело совершает *мгновенно поступательное движение* со скоростью $\boldsymbol{v}$. В частности, если $\boldsymbol{v} = 0$, то тело находится в *мгновенном покое.*

Замечание 3. *Здесь речь идет только о распределении скоростей точек тела в данный момент времени. В частности, ускорения точек тела совсем не обязаны быть одинаковыми.*

Если в данный момент времени точки некоторой прямой в твердом теле имеют скорости, равные нулю, то говорят, что тело совершает *мгновенное вращение* вокруг этой прямой, а прямую называют *мгновенной осью вращения.*

Замечание 4. *В приведенном определении речь идет только о распределении скоростей точек некоторой прямой в твердом теле. Мгновенная ось вращения, в частности, в разные моменты времени может занимать разные положения и в движущемся теле, и в абсолютном пространстве.*

Если в данный момент тело участвует в совокупности двух мгновенных движений, поступательном вдоль некоторой оси и вращении вокруг этой оси, то говорят, что тело совершает *мгновенно винтовое движение.* В дальнейшем (в п. 28) будет показано, что самое общее мгновенное движение свободного твердого тела является мгновенно винтовым.

24. Скорости и ускорения точек твердого тела в общем случае движения. Пусть O_aXYZ — неподвижная система координат (рис. 17), O — произвольно выбранный полюс, $Oxyz$ — жестко связанная с твердым телом система координат; система координат $OXYZ$ получается из O_aXYZ поступательным перемещением, определяемым вектором $\boldsymbol{R}_O$. Пусть P — некоторая точка тела, $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{r}$ — вектор $\overline{OP}$, заданный своими компонентами в системах координат $Oxyz$ и $OXYZ$ соответственно.

Теорема. *Существует единственный вектор $\boldsymbol{\omega}$, называемый угловой скоростью тела, с помощью которого скорость $\boldsymbol{v}$ точки P тела может*

быть представлена в виде

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{v}_o$ — скорость полюса O; вектор $\boldsymbol{\omega}$ от выбора полюса не зависит.

Доказательство.

Продифференцируем обе части равенства (2), учтя сначала, что вектор $\boldsymbol{\rho}$ постоянен, а затем воспользовавшись формулой (1). Получим

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{R}}_0 + \dot{\mathbf{A}}\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{v}_o + \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{r}. \tag{5}$$

Покажем, что матрица $\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}$ кососимметрическая. В самом деле, продифференцировав по времени тождество $\mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{E}$, получим $\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}' + \mathbf{A}\dot{\mathbf{A}}' = 0$. Отсюда $\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1} = -\mathbf{A}\dot{\mathbf{A}}'$. Применив операцию транспонирования к обеим частям этого равенства, имеем окончательно $(\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1})' = -\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}' = -\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}$.

Теперь введем обозначения для элементов кососимметрической матрицы $\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}$ по формуле

$$\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_Z & \omega_Y \\ \omega_Z & 0 & -\omega_X \\ -\omega_Y & \omega_X & 0 \end{Vmatrix}.$$

Если составить вектор $\boldsymbol{\omega}' = (\omega_X,\ \omega_Y,\ \omega_Z)$ с компонентами, заданными в системе координат O_aXYZ, то результат умножения матрицы $\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}$ на вектор $\boldsymbol{r}$ может быть представлен в виде векторного произведения $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$. Отсюда и из (5) следует формула (4). Попутно показана справедливость равенства (называемого *формулой Эйлера*)

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}. \tag{6}$$

Мы ввели $\boldsymbol{\omega}$, взяв предварительно в неподвижном пространстве конкретный базис, задающий систему координат O_aXYZ. Из (4) получаем, что в этой системе координат $\boldsymbol{\omega} = {}^1\!/_2 \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$. Единственность $\boldsymbol{\omega}$ при заданном полюсе O следует теперь из инвариантности вихря и независимости $\boldsymbol{v}$ от выбора базиса (см. замечание 1 в п. 6). Независимость $\boldsymbol{\omega}$ от выбора полюса получаем из того, что компоненты $\boldsymbol{\omega}$ целиком определяются элементами матрицы $\mathbf{A}$ и их производными по времени, а матрица $\mathbf{A}$ от выбора полюса не зависит (см. п. 21). Теорема доказана.

Отметим некоторые следствия, вытекающие из формулы (4).

1. *В каждый момент времени проекции скоростей любых двух точек твердого тела на прямую, проходящую через эти точки, равны между собой.* (На рис. 22 $v_1 \cos\alpha_1 = v_2 \cos\alpha_2$. Механический смысл этого равенства весьма прост: в силу того что $P_1P_2 = \text{const}$, точка P_1 не может ни «догнать» точку P_2, ни «отстать» от нее.) Доказательство следует из того, что согласно (4) $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \overline{P_1P_2}$. Отсюда $\boldsymbol{v}_1 \cdot \overline{P_1P_2} = \boldsymbol{v}_2 \cdot \overline{P_1P_2}$, или $v_1 \cos\alpha_1 = v_2 \cos\alpha_2$.

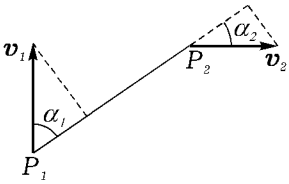

Рис. 22

2. *Скорости трех точек твердого тела, не лежащих на одной прямой, вполне определяют скорость любой точки тела.* (Очень простое геометрическое доказательство получается, если использовать следствие 1.)

3. *Если векторы скоростей трех точек твердого тела, не лежащих на одной прямой, в некоторый момент времени равны, то тело совершает мгновенно поступательное движение.*

4. *Если в данный момент времени скорости двух точек тела равны нулю, то тело либо находится в мгновенном покое, либо совершает мгновенное вращение вокруг прямой, проходящей через эти точки.*

5. *Если скорость некоторой точки тела в данный момент времени равна нулю, то тело находится либо в мгновенном покое, либо в мгновенном вращении вокруг оси, проходящей через эту точку.*

6. *Мгновенное движение твердого тела в самом общем случае разлагается на два движения: поступательное со скоростью, равной скорости произвольного полюса, и вращение вокруг оси, проходящей через этот полюс.*

Чтобы найти ускорение $\boldsymbol{w}$ точки P, продифференцируем обе части формулы (4) по времени. Получим

$$\boldsymbol{w} = \dot{\boldsymbol{v}}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}.$$

Вектор $\varepsilon = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ называется *угловым ускорением.* Учтя (6), формулу для $\boldsymbol{w}$ можно записать в виде

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_0 + \varepsilon \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}). \tag{7}$$

Вектор $\boldsymbol{w}_{\text{вр}} = \varepsilon \times \boldsymbol{r}$ называют *вращательным ускорением,* а $\boldsymbol{w}_{\text{ос}} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$ — *осестремительным ускорением.* Таким образом, ускорение произвольной точки твердого тела складывается из ускорения полюса, вращательного и осестремительного ускорений. Формула (7) носит название *формулы Ривальса.*

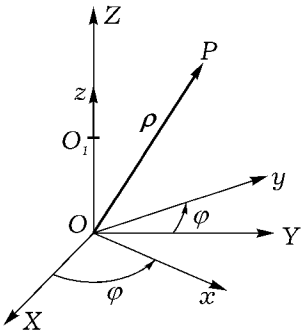

Рис. 23

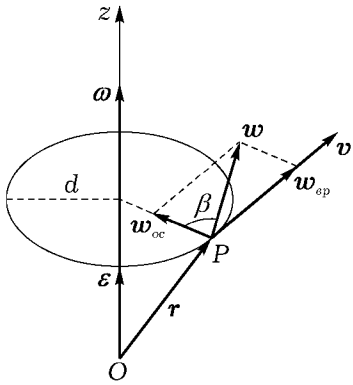

Рис. 24

25. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Пусть в твердом теле неподвижны две точки O и O_1. Прямая, проходящая через O и O_1, будет осью вращения. Ось OZ неподвижной системы координат и ось Oz системы координат $Oxyz$, жестко связанной с телом, направим по оси вращения. Ориентация тела относительно неподвижной системы координат определяется углом $\varphi(t)$ между осями OX и Ox (рис. 23). Точки тела, не принадлежащие оси вращения, движутся по окружностям с центрами на оси вращения и лежащим в плоскостях, перпендикулярных этой оси. Пусть точка P тела задана в связанной системе координат радиусом-вектором $\boldsymbol{\rho}$. Тогда

$$\boldsymbol{r} = \mathbf{A}\boldsymbol{\rho}, \qquad \mathbf{A} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & -\dot\varphi & 0 \\ \dot\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{\omega} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\varphi \end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot\varphi \end{Vmatrix}.$$

Отсюда следует, что угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ направлена по оси вращения, причем так, что если смотреть с конца вектора $\boldsymbol{\omega}$, то вращение тела видно происходящим против часовой стрелки. Угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}$ также направлено по оси вращения, причем в ту же сторону, что и $\boldsymbol{\omega}$, если $\dot\varphi\ddot\varphi > 0$, т. е. если вращение ускоренное (этот случай представлен на рис. 24), и противоположно $\boldsymbol{\omega}$, если $\dot\varphi\ddot\varphi < 0$, т. е. если вращение замедленное.

Для вычисления скорости и ускорения точки P примем начало координат O за полюс. Тогда $\boldsymbol{v}_o = 0$ и из формулы (4) имеем $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$. Вектор $\boldsymbol{v}$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Его модуль $v = \omega d = |\dot{\varphi}|d$, где d — радиус окружности, по которой движется точка P.

Учитывая, что $\boldsymbol{w}_o = 0$, из формулы Ривальса (7) получим $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$. Вращательное ускорение $\boldsymbol{w}_{\text{вр}} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}$ направлено по касательной к траектории точки P (к окружности радиуса d); его модуль $w_{\text{вр}} = \varepsilon d = |\ddot{\varphi}|d$ (рис. 24). Осестремительное ускорение $\boldsymbol{w}_{\text{ос}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$; оно лежит на перпендикуляре, проведенном к оси вращения из точки P, и направлено к оси вращения; его модуль $w_{\text{ос}} = \omega^2 d$.

Отметим, что вращательное ускорение точки P в случае вращения тела вокруг неподвижной оси является ее касательным (тангенциальным) ускорением (см. п. 6), а осестремительное ускорение является нормальным ускорением точки P. Модуль полного ускорения точки P вычисляется по формуле $w = d\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$. Угол β между направлениями осестремительного и полного ускорений вычисляется по формуле $\operatorname{tg}\beta = \varepsilon/\omega^2$.

26. Движение вокруг неподвижной точки. Пусть твердое тело имеет одну неподвижную точку O. Тогда снова $\boldsymbol{v}_o = 0$, $\boldsymbol{w}_o = 0$ и формулы для $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$ те же, что и в случае вращения тела вокруг неподвижной оси, рассмотренном в п. 25.

Таким образом, в данный момент времени скорости точек тела таковы, какими они были бы, если бы тело вращалось с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг неподвижной оси, на которой в данный момент времени лежит вектор $\boldsymbol{\omega}$. Эта ось называется *мгновенной осью вращения*, а вектор $\boldsymbol{\omega}$ — *мгновенной угловой скоростью*. Все точки мгновенной оси вращения имеют скорости, равные нулю. Мгновенная ось вращения перемещается и в теле, и в абсолютном пространстве. В связи с этим заметим, что при движении твердого тела вокруг неподвижной точки (и в общем случае движения свободного твердого тела) ω не является производной некоторого угла φ, так как нет такого направления, вокруг которого поворот на угол φ совершается.

При своем движении мгновенная ось вращения описывает в теле коническую поверхность — *подвижный аксоид*, а в абсолютном пространстве коническую поверхность — *неподвижный аксоид*. Вершины этих аксоидов совпадают с неподвижной точкой O. Аксоиды касаются один другого по образующей, совпадающей с мгновенной осью вращения. Можно показать, что при движении тела подвижный аксоид катится по неподвижному без скольжения.

Годограф вектора $\boldsymbol{\omega}$ лежит на неподвижном аксоиде. Так как $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$, то угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}$ направлено по касательной к годогра-

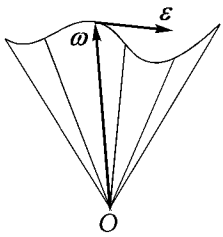

Рис. 25

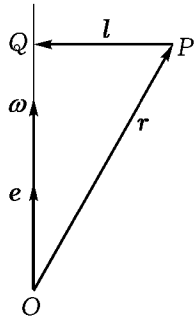

Рис. 26

фу и вовсе не обязательно по мгновенной оси вращения (рис. 25). Положим $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}$, где $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор, коллинеарный $\boldsymbol{\omega}$. Тогда $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2$, где вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \dot{\omega}\boldsymbol{e}$ направлен по мгновенной оси вращения, а $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \omega\dot{\boldsymbol{e}}$ перпендикулярен ей. Вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ характеризует изменение $\boldsymbol{\omega}$ по модулю, а $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ — по направлению. Если мгновенная ось вращения вращается вокруг точки O с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$, то $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}$.

Согласно формуле (7), ускорение $\boldsymbol{w}$ какой-либо точки P тела равно сумме вращательного и осестремительного ускорений. При этом

$$\boldsymbol{w}_{\text{вр}} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\varepsilon}_1 \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \times \boldsymbol{r}. \tag{8}$$

Вычислим осестремительное ускорение. Пусть Q — точка на мгновенной оси вращения, в которой ее пересекает опущенный на нее из точки P перпендикуляр (рис. 26). Обозначим вектор $\overline{PQ}$ буквой $\boldsymbol{l}$. Тогда

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_{\text{ос}} &= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \omega^2 \boldsymbol{e} \times (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{r}) = \\ &= \omega^2[\boldsymbol{e}(\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r}] = \omega^2(\overline{OQ} - \boldsymbol{r}) = \omega^2 \boldsymbol{l}. \end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, $\boldsymbol{w}_{\text{ос}}$ совпадает с тем нормальным ускорением, которое имела бы точка P, если бы тело вращалось вокруг мгновенной оси вращения, как вокруг неподвижной, с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$.

Следует иметь в виду, что, в отличие от случая вращения тела вокруг неподвижной оси, при вращении тела вокруг неподвижной точки $\boldsymbol{w}_{\text{вр}}$ и $\boldsymbol{w}_{\text{ос}}$ уже не обязаны быть касательной и нормальной составляющими ускорения точки P.

Упражнение 3. *Показать, что при движении твердого тела вокруг неподвижной точки вращательная компонента ускорения какой-либо точки тела совпадает с касательной, а осестремительная компонента — с нормальной в том и только в том случае, когда эта точка лежит в плоскости, содержащей* $\boldsymbol{\omega}$ *и* $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Пример 1. *Диск радиуса 3a катится без скольжения по горизонтальной плоскости, описывая окружность радиуса 4a с постоянной угловой скоростью* $\boldsymbol{\omega}_1$ *и сохраняя свою плоскость вертикальной. Найти скорость и ускорение наивысшей точки диска P.*

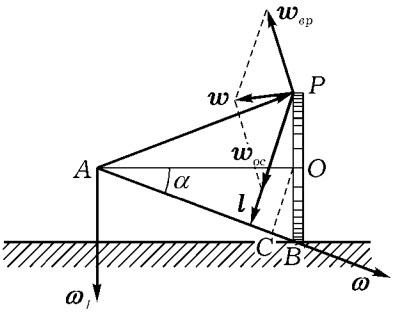

Рис. 27

Будем представлять себе диск как основание конуса, движущегося вокруг неподвижной точки A (на рис. 27 показано сечение APB этого конуса, скорость центра диска направлена перпендикулярно плоскости рисунка на читателя).

Ввиду отсутствия скольжения скорость точки B диска равна нулю. Поэтому угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ *диска направлена по AB от точки A к B. Величина угловой скорости может быть найдена из равенств*

$$v_o = \omega_1 AO = \omega OC.$$

Из $\triangle AOB$ *имеем*

$$\sin\alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos\alpha = \frac{4}{5}, \quad OC = AO\sin\alpha = \frac{12}{5}a.$$

Поэтому

$$\omega = \frac{AO}{OC}\omega_1 = \frac{5}{3}\omega_1.$$

Далее, $\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \overline{AP}$. *Скорость* $\boldsymbol{v}_P$ *перпендикулярна плоскости рисунка и направлена на читателя,* $v_P = \omega AP \sin 2\alpha = 8\omega_1 a$.

Так как модуль угловой скорости постоянен, то угловое ускорение диска определяется равенством $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}$. *Вектор* $\boldsymbol{\varepsilon}$ *перпендикулярен плоскости рисунка и направлен на читателя,* $\varepsilon = \omega_1\omega\sin(\pi/2 - \alpha) = 4\omega_1^2/3$.

Найдем теперь ускорение точки P. Имеем $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_{вр} + \boldsymbol{w}_{ос}$, *где* $\boldsymbol{w}_{вр} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \overline{AP}$, $\boldsymbol{w}_{ос} = \omega^2\boldsymbol{l}$, $w_{вр} = \varepsilon AP = 20\omega_1^2 a/3$, $w_{ос} = 40\omega_1^2 a/3$. *Вектор* $\boldsymbol{w}_{вр}$ *направлен перпендикулярно* $\overline{AP}$, *лежит в плоскости рисунка и составляет с вектором* $\boldsymbol{w}_{ос}$ *угол* $\beta = \pi - 2\alpha$. *Следовательно,*

$$w = \sqrt{w_{вр}^2 + w_{ос}^2 - 2w_{вр}w_{ос}\cos 2\alpha} = \frac{4\sqrt{97}}{3}\omega_1^2 a.$$

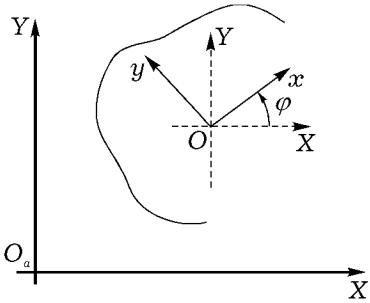

Рис. 28

27. Плоское движение тела. Движение твердого тела называют *плоским*, если все точки тела перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Пусть этой неподвижной плоскостью будет координатная плоскость O_aXY абсолютной системы координат. Каждая прямая, проведенная в теле перпендикулярно плоскости O_aXY, движется поступательно. Поэтому для определения движения этой прямой достаточно знать движение какой-либо одной ее точки. Движение же всего тела будет известно, если известно движение любого сечения тела плоскостью, параллельной неподвижной плоскости O_aXY. Следовательно, изучение плоского движения тела сводится к изучению движения плоской фигуры в ее плоскости.

Плоская фигура, вынужденная двигаться, оставаясь в своей плоскости, имеет три степени свободы. За обобщенные координаты примем две координаты X_o, Y_o полюса O и угол φ, образованный осью Ox, жестко связанной с фигурой системы координат с осью O_aX абсолютной системы координат (рис. 28).

Скорости и ускорения точек плоской фигуры могут быть найдены по формулам (4) и (7), справедливым для самого общего случая движения твердого тела. Остановимся только на некоторых специфических свойствах плоского движения.

Теорема. *Если движение плоской фигуры в ее плоскости в данный момент времени не является мгновенно поступательным, то в этот момент времени существует единственная точка C фигуры, скорость которой равна нулю. Скорости остальных точек таковы, какими они были бы при мгновенном вращении фигуры вокруг точки C.*

Доказательство.

Так как движение не является мгновенно поступательным, то $\boldsymbol{\omega} \neq 0$. В абсолютной системе координат векторы $\boldsymbol{v}_o$, $\boldsymbol{\omega}$ и неизвестный вектор $\overline{OC}$ запишем в виде

$$\boldsymbol{v}_o = \begin{Vmatrix} \dot{X}_o \\ \dot{Y}_o \\ 0 \end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{\omega} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{Vmatrix}, \qquad \overline{OC} = \begin{Vmatrix} X_c \\ Y_c \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Поскольку скорость $\boldsymbol{v}_c$ искомой точки C равна нулю, то для нахождения

ее координат получаем из формулы (4) векторное уравнение

$$\boldsymbol{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \overline{OC} = 0,$$

которое эквивалентно двум скалярным уравнениям

$$\dot{X}_o - \dot{\varphi} Y_c = 0, \qquad \dot{Y}_o + \dot{\varphi} X_c = 0,$$

откуда получаем $X_c = -\dfrac{1}{\dot{\varphi}} \dot{Y}_o$, $Y_c = \dfrac{1}{\dot{\varphi}} X_o$, или в векторной форме

$$\overline{OC} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_o}{\omega^2}. \tag{10}$$

Если теперь принять точку C за полюс, то теорема будет полностью доказана. Точка C называется *мгновенным центром скоростей.*

Формула (10) дает геометрический способ нахождения мгновенного центра скоростей, если известны угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ и скорость полюса $\boldsymbol{v}_o$. Смотря с конца вектора $\boldsymbol{\omega}$, повернем вектор $\boldsymbol{v}_o$ на угол $\pi/2$ против часовой стрелки (рис. 29), затем от точки O в направлении, которое занял повернутый вектор $\boldsymbol{v}_o$, отложим отрезок длиной v_o/ω; конец C этого отрезка и будет мгновенным центром скоростей.

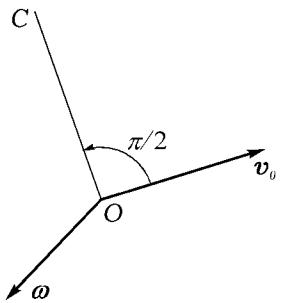

Рис. 29

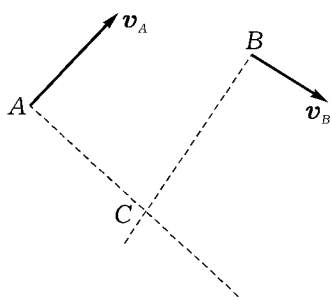

Рис. 30

Часто вектор $\boldsymbol{\omega}$ не задан, но известны скорости $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$ двух точек A и B плоской фигуры. При построении мгновенного центра скоростей здесь следует рассмотреть следующие возможности.

1) Если $\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B$, то движение мгновенно поступательное, так как из формулы $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \overline{AB}$ следует, что $\boldsymbol{\omega} = 0$ (здесь мгновенный центр «находится в бесконечности»; терминология оправдывается тем, что при $\dot{\varphi} \to 0$ величины X_c и Y_c неограниченно возрастают по модулю).

2) Если $\boldsymbol{v}_A \neq \boldsymbol{v}_B$, но скорость одной из точек, скажем точки A, равна нулю, то A и есть мгновенный центр скоростей.

3) Если векторы $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$ неколлинеарны (рис. 30), то мгновенный центр скоростей лежит на пересечении перпендикуляров, проведенных к векторам $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$ в точках A и B. Это проще всего показать, опираясь на свойство проекций скоростей двух точек твердого тела на соединяющую их прямую (см. следствие 1 п. 24). Действительно, проекции $\boldsymbol{v}_C$ на $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$ равны нулю, так как вектор $\boldsymbol{v}_A$ перпендикулярен $\overline{CA}$ и $\boldsymbol{v}_B$ перпендикулярен $\overline{CB}$. А поскольку $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$ неколлинеарны, то отсюда следует, что $\boldsymbol{v}_C = 0$.

4) Пусть $\boldsymbol{v}_A \neq \boldsymbol{v}_B$, но вектор $\boldsymbol{v}_A$ параллелен $\boldsymbol{v}_B$. Случай, когда вектор $\overline{AB}$ не перпендикулярен $\boldsymbol{v}_A$ (или $\boldsymbol{v}_B$), невозможен, так как тогда проекции $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$ на прямую, проходящую через точки A и B, не будут равными. Если же вектор $\overline{AB}$ перпендикулярен $\boldsymbol{v}_A$ (и $\boldsymbol{v}_B$), то мгновенный центр скоростей, как нетрудно проверить, лежит на пересечении прямой, проходящей через точки A и B, и прямой, проходящей через концы векторов $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$ (рис. 31).

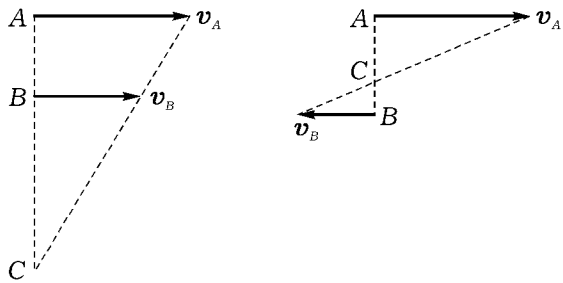

Рис. 31

При движении тела мгновенный центр скоростей перемещается и в теле, и в абсолютном пространстве. Геометрическое место его положений на неподвижной плоскости называется *неподвижной центроидой*, а геометрическое место положений мгновенного центра скоростей в самой движущейся плоской фигуре называется *подвижной центроидой*. Можно показать, что при движении тела подвижная центроида катится по неподвижной без скольжения.

Теперь рассмотрим некоторые особенности, касающиеся распределения ускорений точек твердого тела при его плоском движении.

Теорема. *Пусть плоская фигура движется в своей плоскости. Если в некоторый момент времени хотя бы одна из величин $\dot{\varphi}$ или $\ddot{\varphi}$ отлична от нуля, то в этот момент времени существует единственная точка Q фигуры, ускорение которой равно нулю.*

Доказательство.

Пусть заданы ускорение полюса $\boldsymbol{w}_O$, мгновенная угловая ско-

рость $\boldsymbol{\omega}$ и мгновенное угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}$. Требуется найти вектор $\overline{OQ}$ такой, чтобы ускорение точки Q было равно нулю. Из формулы (7) получаем векторное уравнение для $\overline{OQ}$:

$$\boldsymbol{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \overline{OQ} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overline{OQ}) = 0. \tag{11}$$

Учитывая, что в абсолютной системе координат

$$\boldsymbol{w}_O = \begin{Vmatrix} \ddot{X}_O \\ \ddot{Y}_O \\ 0 \end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{\omega} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\varphi} \end{Vmatrix}, \qquad \overline{OQ} = \begin{Vmatrix} X_Q \\ Y_Q \\ 0 \end{Vmatrix},$$

из (11) получаем систему двух линейных уравнений относительно X_Q, Y_Q:

$$\dot{\varphi}^2 X_Q + \ddot{\varphi} Y_Q = \ddot{X}_O, \qquad -\ddot{\varphi} X_Q + \dot{\varphi}^2 Y_Q = \ddot{Y}_O. \tag{12}$$

Из условия теоремы следует, что определитель системы (12) $\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4$ отличен от нуля. Поэтому она имеет единственное решение

$$X_Q = \frac{1}{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4}(\dot{\varphi}^2 \ddot{X}_O - \ddot{\varphi} \ddot{Y}_O), \qquad Y_Q = \frac{1}{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4}(\ddot{\varphi}^2 \ddot{X}_O + \dot{\varphi}^2 \ddot{Y}_O).$$

Эти формулы можно представить в векторной форме:

$$\overline{OQ} = \frac{1}{\varepsilon^2 + \omega^4}(\omega^2 \boldsymbol{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{w}_O). \tag{13}$$

Точка Q называется *мгновенным центром ускорений.*

Из (13) следует геометрический способ нахождения мгновенного центра ускорений (рис. 32). Определим угол β равенством

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

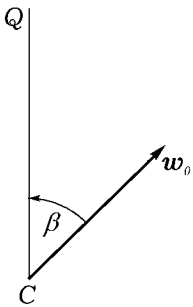

Рис. 32

Этот угол не зависит от выбора полюса и одинаков для всех точек тела. Чтобы получить точку Q, надо вектор $\boldsymbol{w}_O$ повернуть на угол β в направлении вращения фигуры, если вращение ускоренное, и в противоположном направлении, если вращение замедленное. Затем от полюса O в направлении, которое занял повернутый вектор $\boldsymbol{w}_O$, надо отложить отрезок OQ, длина которого вычисляется по формуле

$$OQ = \frac{w_O}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Конец Q этого отрезка и будет мгновенным центром ускорений. Рис. 32 соответствует ускоренному вращению фигуры против часовой стрелки.

Если мгновенный центр ускорений Q принять теперь за полюс, то ускорение любой точки P в данный момент времени может быть определено так же, как и при вращении вокруг неподвижной оси, проходящей через Q:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_{\text{вр}} + \boldsymbol{w}_{\text{ос}}, \qquad w = QP\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Пример 1. *Пусть диск катится по неподвижной прямой без скольжения и скорость его центра O постоянна* (рис. 33). *Так как при отсутствии скольжения скорость точки P диска, которой он касается неподвижной прямой, равна нулю, то мгновенный центр скоростей совпадает с точкой P. Подвижной центроидой будет обод диска, а неподвижной — прямая, по которой он катится. Так как скорость точки O постоянна, то мгновенный центр ускорений совпадает с центром диска.*

Рассмотренный пример показывает, в частности, что мгновенный центр скоростей и мгновенный центр ускорений — это, вообще говоря, разные точки.

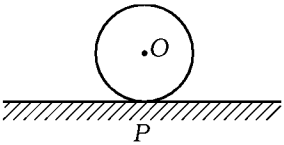

Рис. 33

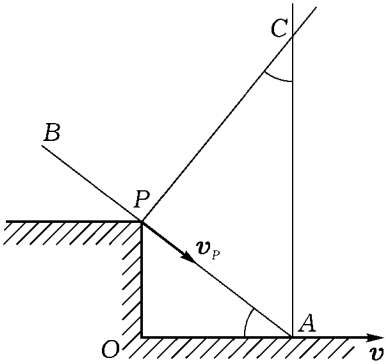

Рис. 34

Пример 2. *Тонкий стержень AB опирается своей точкой P на прямой угол, а концом A скользит по горизонтальной направляющей с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}$. Найдем абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки P в зависимости от времени, если $OP = h$ и в начальный момент времени $OA = 0$* (рис. 34).

Скорость точки P направлена вдоль стержня. Мгновенный центр скоростей C будет пересечением перпендикуляров, проведенных к стержню в его точке P и к горизонтальной оси в точке A. Пусть

$OA = x$ ($x = vt$); тогда из $\triangle AOP$ и $\triangle APC$ имеем

$$AP = \sqrt{h^2 + x^2}, \quad CP = \frac{x\sqrt{h^2 + x^2}}{h}, \quad CA = \frac{h^2 + x^2}{h}.$$

Угловая скорость стержня находится из равенства $v = \omega CA$, откуда

$$\omega = \frac{v}{CA} = \frac{vh}{h^2 + x^2} = \frac{vh}{h^2 + v^2t^2}.$$

Вектор $\boldsymbol{\omega}$ перпендикулярен плоскости рисунка и направлен к читателю. Вектор углового ускорения стержня ε также перпендикулярен плоскости рисунка, но его направление противоположно направлению $\boldsymbol{\omega}$ $\left(\text{поскольку } \dfrac{d\omega}{dt} < 0\right)$. Модуль углового ускорения определяется равенством $\varepsilon = \left|\dfrac{d\omega}{dt}\right|$, откуда

$$\varepsilon = \frac{2v^3ht}{\left(h^2 + v^2t^2\right)^2}.$$

Для модуля скорости точки P имеем

$$v_P = \omega CP = \frac{v^2t}{\sqrt{h^2 + v^2t^2}}.$$

Поскольку точка A является мгновенным центром ускорений ($v = \text{const}$), то модуль ускорения точки P вычисляется при помощи равенств

$$w_P = AP\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{v^2h\sqrt{h^2 + 4v^2t^2}}{\left(h^2 + v^2t^2\right)^{3/2}}.$$

28. Кинематические инварианты. Кинематический винт. Снова вернемся к общему случаю движения твердого тела, рассмотренному в п. 24. В формуле (4) для скорости точки P тела угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ не зависит от выбора точки P. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ называют *первым кинематическим инвариантом.* В более узком смысле мы будем называть первым кинематическим инвариантом величину $I_1 = \omega^2$. Далее, из формулы (4) следует, что для любых двух точек тела A и B скалярные произведения их скоростей $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$ на вектор $\boldsymbol{\omega}$ одинаковы. Поэтому проекция скорости точки на направление угловой скорости не зависит от выбора этой точки. Скалярное произведение скоростей точек тела на его угловую скорость называется *вторым кинематическим инвариантом*: $I_2 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\omega}$.

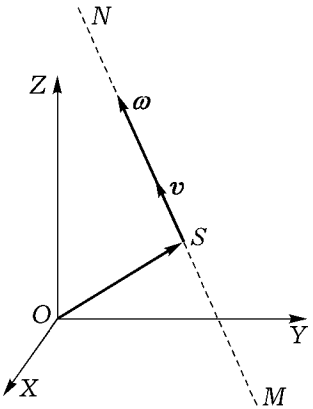

Рис. 35

Покажем, что в самом общем случае движения твердого тела, когда $I_2 \neq 0$, скорости его точек таковы, как если бы тело совершало мгновенно винтовое движение. Для этого, согласно п. 23, надо показать существование такой прямой MN, все точки которой в данный момент времени имеют скорости, направленные вдоль этой прямой и параллельные $\boldsymbol{\omega}$.

Пусть выбран какой-либо полюс O и в данный момент известны его скорость $\boldsymbol{v}_O$ и угловая скорость тела $\boldsymbol{\omega}$. Пусть они заданы своими компонентами в системе координат $OXYZ$, получающейся из абсолютной системы координат O_aXYZ при помощи поступательного перемещения (рис. 17):

$$\boldsymbol{v}_O = \begin{Vmatrix} v_{OX} \\ v_{OY} \\ v_{OZ} \end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{\omega} = \begin{Vmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{Vmatrix}.$$

Если скорость точки S тела (рис. 35) отлична от нуля и параллельна вектору $\boldsymbol{\omega}$, то

$$\boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \overline{OS} = p\,\boldsymbol{\omega} \quad (p \neq 0).$$

Это равенство является векторным уравнением прямой MN. Если X, Y, Z — координаты любой точки прямой, то это уравнение в скалярной форме запишется в виде

$$\frac{v_{OX} + (\omega_Y Z - \omega_Z Y)}{\omega_X} = \frac{v_{OY} + (\omega_Z X - \omega_X Z)}{\omega_Y} = \\ = \frac{v_{OZ} + (\omega_X Y - \omega_Y X)}{\omega_Z} = p. \tag{14}$$

Прямая (14) называется *мгновенной винтовой осью* тела. Ясно, что все точки мгновенной винтовой оси имеют одинаковые скорости, равные проекции скорости любой точки тела на направление $\boldsymbol{\omega}$. Совокупность угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела и скорости $\boldsymbol{v}$ любой точки мгновенной винтовой оси называют *кинематическим винтом*, а число p — *параметром винта*. Параметр винта выражается через кинематические инварианты по формуле

$$p = \frac{I_2}{I_1}.$$

Кинематический винт называется *правым* или *левым* в зависимости от того, положителен или отрицателен его параметр; рис. 35 соответствует правому винту.

Пример 1. *Пусть в пространстве движется твердое тело и в некоторый момент времени оказываются известными скорости* $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_C$ *трех его точек* $A(0,\ 0,\ 0)$, $B(1,\ 1,\ 0)$, $C(1,\ 1,\ 1)$; $\boldsymbol{v}_A(2,\ 1,\ -3)$, $\boldsymbol{v}_B(0,\ 3,\ -1)$, $\boldsymbol{v}_C(-1,\ 2,\ -1)$. *Найдем положение оси кинематического винта и его параметр в рассматриваемый момент времени.*

Примем точку A *за полюс. Тогда* $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \overline{AB}$, $\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \overline{AC}$. *Эти векторные равенства можно записать в виде следующей совместной системы шести линейных уравнений относительно компонент* ω_x, ω_y, ω_z *вектора* $\boldsymbol{\omega}$:

$$-\omega_z = -2,\ \omega_z = 2,\ \omega_x - \omega_y = 2,\ \omega_y - \omega_z = -3,\ \omega_z - \omega_x = 1,\ \omega_x - \omega_y = 2.$$

Решив эту систему, получим

$$\omega_x = 1,\ \omega_y = -1,\ \omega_z = 2.$$

Для кинематических инвариантов I_1 *и* I_2 *имеем такие значения:*

$$I_1 = \omega^2 = 6, \quad I_2 = \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{\omega} = -5.$$

Таким образом, в рассматриваемый момент времени тело совершает мгновенно винтовое движение, причем параметр кинематического винта равен $-5/6$. *Уравнение мгновенной винтовой оси, согласно* (14), *имеет вид*

$$\frac{2-2y-z}{1} = \frac{1+2x-z}{-1} = \frac{-3+x+y}{2} = -\frac{5}{6}.$$

§ 5. Сложное движение точки

29. Основные определения. Иногда бывает необходимо изучить движение точки одновременно по отношению к двум системам координат. Пусть система координат $Oxyz$ движется по любому заданному закону относительно абсолютной системы координат O_aXYZ (рис. 17). Это значит, что известны движение полюса O и матрица $\mathbf{A}(t)$, задающая ориентацию осей Ox, Oy, Oz относительно абсолютной системы координат. Пусть в пространстве движется точка P. Ее движение по отношению к системе координат $Oxyz$ называется *относительным движением*. Движение трехгранника $Oxyz$ относительно O_aXYZ называется *переносным движением*. Движение точки относительно системы

координат O_aXYZ, определяемое этими составляющими движениями, называется ее сложным или *абсолютным движением.* Задача состоит в установлении связи между основными кинематическими характеристиками движения точки в неподвижной и подвижной системах координат.

Абсолютной скоростью $\boldsymbol{v}_a$ (*абсолютным ускорением* $\boldsymbol{w}_a$) точки называется ее скорость (ускорение) относительно абсолютной системы координат O_aXYZ. *Относительной скоростью* $\boldsymbol{v}_r$ (*относительным ускорением* $\boldsymbol{w}_r$) точки называется ее скорость (ускорение) относительно системы координат $Oxyz$. *Переносной скоростью* $\boldsymbol{v}_e$ (*переносным ускорением* $\boldsymbol{w}_e$) называется скорость (ускорение) той точки P', которая неподвижна в системе координат $Oxyz$ и с которой в данный момент совпадает движущаяся точка P. Иными словами, переносная скорость (переносное ускорение) есть та скорость (ускорение), которую движущаяся точка P имела бы в данный момент, если бы она в этот момент оказалась жестко связанной с подвижной системой координат (т. е. не совершала бы относительного движения).

30. Производная от вектора, заданного своими компонентами относительно подвижной системы координат. Часто приходится встречаться с необходимостью дифференцирования вектора, заданного своими компонентами в системе координат $Oxyz$, движущейся произвольным образом. Скорость изменения этого вектора в неподвижной системе координат O_aXYZ называется его абсолютной производной, а скорость изменения вектора в системе $Oxyz$ — *относительной* или *локальной производной.* Найдем связь между этими производными.

На рис. 17 $\overline{OP} = \boldsymbol{\rho}$ — вектор, заданный в движущейся системе координат $Oxyz$. Тот же вектор $\overline{OP}$, заданный в неподвижной системе координат O_aXYZ, обозначим $\boldsymbol{r}$. Так как движение системы $Oxyz$ задано, то матрица $\mathbf{A}(t)$, определяющая ориентацию подвижной системы координат относительно неподвижной, известна и

$$\boldsymbol{r} = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{\rho}. \tag{1}$$

Вектор $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ есть абсолютная производная вектора $\overline{OP}$, а вектор $\dfrac{\tilde{d}\boldsymbol{r}}{dt} = \mathbf{A}(t)\dfrac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}$ — его относительная производная. Обе производные заданы в системе координат O_aXYZ (следует заметить, что вектор $\dfrac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}$ задан в системе координат $Oxyz$).

Из (1) получаем

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dot{\mathbf{A}}\boldsymbol{\rho} + \mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{r} + \mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\rho}}. \tag{2}$$

Но так как (см. п. 24)

$$\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость системы координат $Oxyz$ относительно O_aXYZ, то равенство (2) запишется в виде

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + \mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\rho}}. \tag{4}$$

Если учесть обозначение для относительной производной, то окончательно получим

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\widetilde{d}\boldsymbol{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}. \tag{5}$$

Этой формулой устанавливается связь между абсолютной и относительной производными вектора.

Упражнение 4. *Показать, что если угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки, неподвижна относительно тела, то она неподвижна и относительно абсолютного пространства; показать, что верно также и обратное.*

31. Теорема о сложении скоростей. Связь между относительной, переносной и абсолютной скоростями точки устанавливается следующей теоремой.

Теорема. *Абсолютная скорость точки равна сумме переносной и относительной скоростей.*

Доказательство.

Заметим, что согласно рис. 17 и формуле (1) радиус-вектор точки P в абсолютной системе координат равен $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_o + \boldsymbol{r}$. Продифференцировав $\boldsymbol{R}$ по времени и воспользовавшись равенством (4), получим такое выражение для абсолютной скорости точки P:

$$\boldsymbol{v}_a = \dot{\boldsymbol{R}} = \dot{\boldsymbol{R}}_o + \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + \mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\rho}}. \tag{6}$$

Вектор $\boldsymbol{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ есть скорость той точки подвижной системы координат, в которой в данный момент находится движущаяся точка P, т. е. является переносной скоростью $\boldsymbol{v}_e$. Вектор же $\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\rho}}$ есть относительная

скорость $\boldsymbol{v}_r$, заданная в абсолютной системе координат. Следовательно, равенство (6) можно переписать в виде

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r. \tag{7}$$

32. Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса). Для получения абсолютного ускорения точки продифференцируем сначала обе части равенства (6) по времени и воспользуемся формулой (4). Имеем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_a = \dot{\boldsymbol{v}}_a = \dot{\boldsymbol{v}}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} + \dot{\mathbf{A}}\dot{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{A}\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \\ = \boldsymbol{w}_o + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + \mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\rho}}) + \dot{\mathbf{A}}\dot{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{A}\ddot{\boldsymbol{\rho}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon}$ — угловое ускорение подвижной системы координат $Oxyz$, а вектор $\mathbf{A}\ddot{\boldsymbol{\rho}}$ есть относительное ускорение $\boldsymbol{w}_r$. Перепишем равенство (8) в виде

$$\boldsymbol{w}_a = \boldsymbol{w}_o + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{w}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\mathbf{A}}\dot{\boldsymbol{\rho}}. \tag{9}$$

Вектор $\boldsymbol{w}_o + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$ есть ускорение той точки подвижной системы координат, в которой в данный момент находится движущаяся точка P, т. е. является переносным ускорением. Далее, согласно (3), можно написать $\dot{\mathbf{A}}\dot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\rho}}$. Поэтому последние два слагаемых в (9) одинаковы и равны $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r$ каждое. Следовательно, формула (9) может быть записана в виде

$$\boldsymbol{w}_a = \boldsymbol{w}_e + \boldsymbol{w}_r + \boldsymbol{w}_c, \tag{10}$$

где $\boldsymbol{w}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r$. Вектор $\boldsymbol{w}_c$ называется *ускорением Кориоли́са.* Формула (10) выражает *теорему о сложении ускорений.*

Теорема. *Абсолютное ускорение точки равно сумме переносного, относительного и кориоли́сова ускорений.*

Можно сказать, что часть абсолютного ускорения — ускорение Кориолиса — связана с изменением абсолютной скорости, обусловленным двумя причинами: 1) влиянием переносного движения на относительную скорость (при $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ вектор $\boldsymbol{v}_r$ поворачивается относительно абсолютной системы координат за счет вращения подвижной системы координат); 2) влиянием относительного движения на переносную скорость (при $\boldsymbol{v}_r \neq 0$ положение точки в подвижной системе координат изменяется и, следовательно, изменяется переносная скорость).

Упражнение 5. *Показать, что вклад каждой из указанных причин в величину кориолисова ускорения одинаков и равен* $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r$.

Пример 1. *В плоскости движутся поступательно два стержня AB и CD с данными скоростями $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$. Построим скорость $\boldsymbol{v}$ точки P пересечения стержней.*

Абсолютная скорость точки P может быть представлена как сумма переносной скорости $\boldsymbol{v}_1$ стержня AB и относительной скорости в движении точки P по этому стержню. С другой стороны, ее можно представить как сумму переносной скорости $\boldsymbol{v}_2$ стержня CD и относительной скорости точки в ее движении по этому стержню. Отсюда следует способ построения вектора абсолютной скорости точки P: через концы векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ проведем (рис. 36) *прямые, параллельные направлениям стержней AB и CD; точка P_1 пересечения этих прямых и будет концом вектора $\overline{PP_1}$, изображающего абсолютную скорость точки P.*

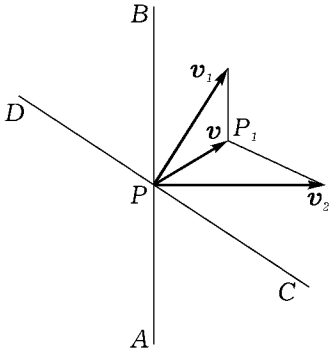

Рис. 36

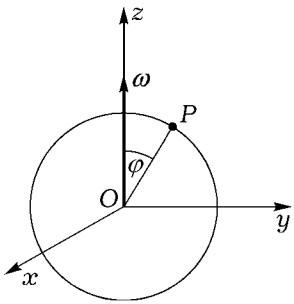

Рис. 37

Пример 2. *Точка P движется с постоянной угловой скоростью ω по окружности радиуса R, вращающейся с той же самой угловой скоростью около одного из своих диаметров. Найдем абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки как функции угла φ* (рис. 37).

Введем жестко связанную с вращающейся окружностью систему координат $Oxyz$, начало которой лежит в центре окружности; плоскость Oyz совпадает с плоскостью окружности, а ось Oz направлена вдоль вектора ее угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$.

Переносная скорость точки перпендикулярна плоскости окружности: $\boldsymbol{v}_e' = (-\boldsymbol{\omega} R\sin\varphi,\ 0,\ 0)$. Относительная скорость направлена по касательной к окружности: $\boldsymbol{v}_r{}' = (0,\ \omega R\cos\varphi,\ -\omega R\sin\varphi)$. Абсолютная скорость точки P определяется по формуле (7). *Имеем*

$$\boldsymbol{v}_a' = \omega R(-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ -\sin\varphi), \qquad v_a = \omega R\sqrt{1+\sin^2\varphi}.$$

Переносное ускорение лежит в плоскости окружности и перпендикулярно оси вращения: $\boldsymbol{w}'_e = (0,\ -\omega^2 R\sin\varphi,\ 0)$. *Относительное ускорение лежит в плоскости окружности и направлено к ее центру:* $\boldsymbol{w}'_r = (0,\ -\omega^2 R\sin\varphi,\ -\omega^2 R\cos\varphi)$. *Кориолисово ускорение* $\boldsymbol{w}_c = 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$ *перпендикулярно плоскости окружности:* $\boldsymbol{w}'_c = (-2\omega^2 R\cos\varphi,\ 0,\ 0)$. *Абсолютное ускорение точки* P *определяется по формуле* (10). *Имеем*

$$\boldsymbol{w}'_a = -\omega^2 R(2\cos\varphi,\ 2\sin\varphi,\ \cos\varphi), \qquad w_a = \omega^2 R\sqrt{4+\cos^2\varphi}.$$

§ 6. Сложное движение твердого тела

33. Постановка задачи. Пусть твердое тело движется относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$, которая, в свою очередь, движется относительно неподвижной системы координат O_aXYZ. Тогда говорят, что по отношению к системе O_aXYZ тело совершает сложное движение, которое состоит из названных двух составляющих движений. Аналогично определяется сложное движение из произвольного числа n составляющих движений.

Задача изучения сложного движения тела состоит в нахождении зависимостей между основными кинематическими характеристиками составляющих движений и сложного движения. Мы будем рассматривать только зависимости между скоростями поступательных движений и между угловыми скоростями. Для простоты ограничимся только случаем двух составляющих движений.

34. Сложение мгновенно поступательных движений. Пусть $\boldsymbol{v}_1$ — скорость мгновенно поступательного движения тела относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$, а $\boldsymbol{v}_2$ — скорость мгновенно поступательного движения системы $O_1x_1y_1z_1$ относительно O_aXYZ. Возьмем произвольную точку P тела и найдем ее абсолютную скорость $\boldsymbol{v}_a$. По теореме о сложении скоростей (п. 31)

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r. \tag{1}$$

Для любой точки P тела переносной скоростью $\boldsymbol{v}_e$ будет скорость $\boldsymbol{v}_2$, а относительной скоростью $\boldsymbol{v}_r$ будет скорость $\boldsymbol{v}_1$. Поэтому любая точка P имеет скорость

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2.$$

Так как все точки тела имеют в данный момент времени одинаковые скорости, то сложное движение тела является мгновенно поступательным.

Для случая n составляющих движений аналогично получим мгновенно поступательное движение со скоростью

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}_i.$$

35. Сложение мгновенных вращений вокруг пересекающихся осей. Пусть твердое тело совершает относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$ мгновенное вращение с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$, а система $O_1x_1y_1z_1$ вращается относительно системы O_aXYZ с мгновенной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$. Предположим, что оси составляющих мгновенных вращений пересекаются в точке A (рис. 38).

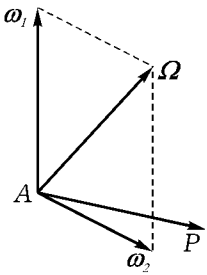

Рис. 38

Точка A имеет в данный момент времени скорость, равную нулю. Следовательно, сложное мгновенное движение представляет собой вращение вокруг оси, проходящей через точку A. Найдем его угловую скорость $\boldsymbol{\Omega}$. Возьмем произвольную точку P твердого тела. Для нахождения ее скорости надо в (1) положить $\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{\omega}_2 \times \overline{AP}$, $\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{\omega}_1 \times \overline{AP}$. Поэтому абсолютная скорость $\boldsymbol{v}_a$ точки P равна

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{\omega}_1 \times \overline{AP} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \overline{AP} = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \overline{AP}. \tag{2}$$

С другой стороны,

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{\Omega} \times \overline{AP}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) в силу произвольности $\overline{AP}$ следует, что

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2.$$

Таким образом, в смысле распределения скоростей точек твердого тела совокупность двух мгновенных вращений вокруг пересекающихся осей эквивалентна одному мгновенному вращению с угловой скоростью, равной сумме угловых скоростей составляющих вращений.

Для случая n составляющих мгновенных вращений вокруг пересекающихся осей аналогично можно получить одно эквивалентное вращение с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\Omega} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_i.$$

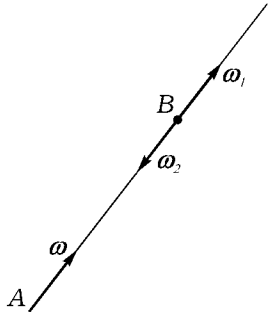

Рис. 39

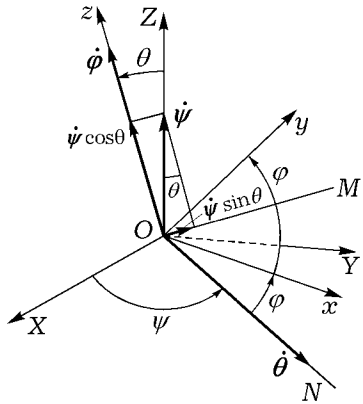

Рис. 40

Замечание 5. *Если два составляющих вращения происходят вокруг одной и той же оси с одинаковыми по модулю, но противоположно направленными угловыми скоростями, то* $\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 = 0$ *и наличие этих вращений не влияет на скорости точек тела, участвующего в сложном движении. Отсюда, в частности, следует, что* $\boldsymbol{\omega}$ *— скользящий вектор, т. е. его начало можно перемещать в любую точку линии его действия и от этого скорости точек тела не изменятся. Действительно, пусть тело вращается вокруг некоторой оси с угловой скоростью* $\boldsymbol{\omega}$. *Вектор* $\boldsymbol{\omega}$ *приложен в точке* A *оси вращения* (рис. 39). *От точки* B *оси отложим два вектора* $\boldsymbol{\omega}_1$ *и* $\boldsymbol{\omega}_2$ *такие, что* $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 = -\boldsymbol{\omega}_2$, *и рассмотрим сложное вращение тела вокруг одной оси с тремя угловыми скоростями* $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$. *Согласно сказанному выше, совокупность двух вращений с угловыми скоростями* $\boldsymbol{\omega}$ *и* $\boldsymbol{\omega}_2$ *не влияет на скорости точек тела; эти вращения могут быть исключены из системы трех вращений. Таким образом, вектор* $\boldsymbol{\omega}$ *оказался сдвинутым вдоль оси вращения на отрезок* AB *без изменения скоростей точек тела.*

36. Кинематические уравнения Эйлера. Получим выражения проекций мгновенной угловой скорости твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки, через углы Эйлера (п. 19) и их производные. Рассматриваемое тело участвует в сложном движении, состоящем из трех вращений: с угловой скоростью $\dot\psi$ вокруг оси OZ, с угловой скоростью $\dot\theta$ вокруг линии узлов ON и с угловой скоростью $\dot\varphi$ вокруг оси Oz (рис. 40). Мгновенная угловая скорость тела $\boldsymbol{\omega}$ равна сумме угловых скоростей составляющих вращений. Пусть p, q, r — проекции $\boldsymbol{\omega}$ соответственно на оси Ox, Oy, Oz, жестко связанные с телом. Выражения для p, q, r через углы Эйлера и их производные легко по-

лучить из рис. 40, на котором вспомогательная прямая OM лежит в плоскости Oxy и перпендикулярна линии узлов. Имеем

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \\ q &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \\ r &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \tag{4}$$

Соотношения (4) называются *кинематическими уравнениями Эйлера.* Они широко применяются при исследовании движения твердого тела.

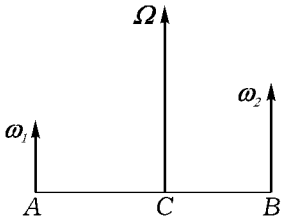

Рис. 41

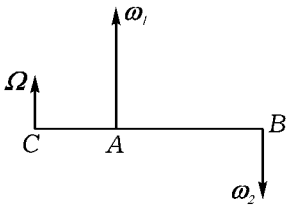

Рис. 42

37. Сложение мгновенных вращений вокруг параллельных осей. Пусть твердое тело совершает мгновенное вращение относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$ с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$, а система координат $O_1x_1y_1z_1$ вращается относительно абсолютной системы координат O_aXYZ с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$ и оси вращения параллельны. В этом случае очевидно, что в мгновенном сложном движении скорости точек тела будут такими же, как в плоском движении. Если взять какую-либо прямую в теле, параллельную мгновенным осям вращения составляющих движений, то скорости всех ее точек в данный момент времени будут одинаконы. Поэтому достаточно рассмотреть скорости точек тела, лежащих в какой-либо плоскости, перпендикулярной $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$. Пусть эта плоскость пересекает плоскость, в которой лежат $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$, по прямой AB (рис. 41 и 42).

Если векторы $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ имеют одинаковые направления, то сложное движение представляет собой мгновенное вращение с модулем угловой скорости $\Omega = \omega_1 + \omega_2$; вектор $\boldsymbol{\Omega}$ лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ (рис. 41), параллелен им, направлен в ту же сторону и делит расстояние между ними внутренним образом на части, обратно пропорциональные ω_1 и ω_2, т. е.

$$\omega_1 AC = \omega_2 BC. \tag{5}$$

Действительно, для скорости точки C имеем выражение

$$\boldsymbol{v}_c = \boldsymbol{\omega}_1 \times \overline{AC} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \overline{BC}.$$

Слагаемые векторы в правой части этого выражения параллельны и противоположно направлены. Но при выполнении равенства (5) они равны по модулю. Поэтому $\boldsymbol{v}_c = 0$. Следовательно, и все точки оси, проходящей через точку C параллельно $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$, имеют нулевые скорости. Сложное движение представляет собой мгновенное вращение вокруг этой оси.

Для нахождения угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ сложного движения достаточно рассмотреть скорость одной из точек, не лежащей на мгновенной оси вращения (скорости всех точек тела вполне определяются скоростями трех его точек, не лежащих на одной прямой; см. п. 24). Рассмотрим скорость точки B. С одной стороны, $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{\omega}_1 \times \overline{AB}$, а с другой — $\boldsymbol{v}_B = \Omega \times \overline{CB}$. Из равенства

$$\boldsymbol{\Omega} \times \overline{CB} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \overline{AB} \tag{6}$$

следует, что $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\Omega}$ параллельны и одинаково направлены. Для нахождения модуля вектора $\boldsymbol{\Omega}$ приравниваем модули обеих частей равенства (6):

$$\Omega CB = \omega_1 AB. \tag{7}$$

Но, используя (5), можно получить, что

$$AB = AC + CB = \frac{\omega_2}{\omega_1} CB + CB = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1} CB. \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует, что $\Omega = \omega_1 + \omega_2$.

Аналогично рассматривается случай противоположных направлений $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$. Примем для определенности, что $\omega_1 > \omega_2$. В этом случае сложное движение представляет собой мгновенное вращение с угловой скоростью $\Omega = \omega_1 - \omega_2$; вектор $\boldsymbol{\Omega}$ расположен в плоскости векторов $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$, направлен в сторону большей угловой скорости и делит расстояние между ними внешним образом на части, обратно пропорциональные модулям $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$, т. е. $\omega_1 AC = \omega_2 BC$ (рис. 42).

38. Пара вращений. *Пара вращений* есть совокупность двух мгновенных вращений вокруг параллельных осей с равными по модулю, но противоположно направленными мгновенными угловыми скоростями.

Плоскость, в которой лежат векторы $\boldsymbol{\omega}_1$, и $\boldsymbol{\omega}_2$ ($\boldsymbol{\omega}_1 = -\boldsymbol{\omega}_2$), составляющие пару вращений, называют *плоскостью пары*, а расстояние d между осями мгновенных вращений, соответствующими $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$, называют *плечом пары* (рис. 43). Вектор $\overline{AB} \times \boldsymbol{\omega}_2$ называют *моментом пары*.

Покажем, что твердое тело, участвующее в паре вращений, совершает мгновенно поступательное движение со скоростью, равной моменту пары. Для этого рассмотрим произвольную точку P тела и вычислим ее скорость

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \overline{AP} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \overline{BP} = \overline{AP} \times \boldsymbol{\omega}_2 - \overline{BP} \times \boldsymbol{\omega}_2 =$$
$$= (\overline{AP} - \overline{BP}) \times \boldsymbol{\omega}_2 = \overline{AB} \times \boldsymbol{\omega}_2.$$

Таким образом, пара вращений эквивалентна мгновенно поступательному движению со скоростью $\boldsymbol{v}$, равной моменту пары. Вектор $\boldsymbol{v}$ — свободный вектор, так как он может быть приложен в любой точке тела (все точки тела имеют одинаковую скорость $\boldsymbol{v}$). Скорость $\boldsymbol{v}$ перпендикулярна плоскости пары и направлена так, что наблюдатель с конца $\boldsymbol{v}$ «видит» векторы пары $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ указывающими на вращение плоскости пары против часовой стрелки. Если ввести обозначение $\omega = |\boldsymbol{\omega}_1| = |\boldsymbol{\omega}_2|$, то

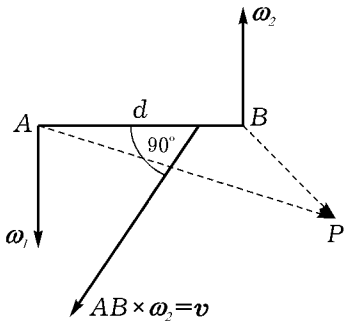

Рис. 43

$$v = \omega d. \tag{9}$$

Наоборот, всякое мгновенно поступательное движение тела может быть (бесконечным числом способов) заменено на пару вращений, плоскость которой перпендикулярна $\boldsymbol{v}$, а плечо пары d и модули $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$, равные ω, связаны соотношением (9). Направления $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ выбираются так, чтобы момент эквивалентной пары был направлен так же, как вектор $\boldsymbol{v}$.

39. Сложение мгновенно поступательного и вращательного движений. Пусть твердое тело совершает относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$ мгновенное вращение с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, а система координат $O_1x_1y_1z_1$ движется относительно абсолютной системы O_aXYZ мгновенно поступательно со скоростью $\boldsymbol{v}$. Угол между векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{v}$ равен α.

Чтобы установить характер сложного мгновенного движения тела, разложим вектор $\boldsymbol{v}$ на две составляющие $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$. Первая составляющая направлена вдоль вектора $\boldsymbol{\omega}$, а вторая перпендикулярна ему (рис. 44), $v_1 = v\cos\alpha$, $v_2 = v\sin\alpha$. Согласно п. 38, мгновенно поступательное движение можно заменить парой вращений, выбрав соответствующим образом составляющие ее угловые скорости и плечо. В рассматриваемом случае заменим $\boldsymbol{v}_2$ парой, составленной угловыми скоростями $\boldsymbol{\omega}_1 = -\boldsymbol{\omega}_2 = -\boldsymbol{\omega}$, расположив $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ в плоскос-

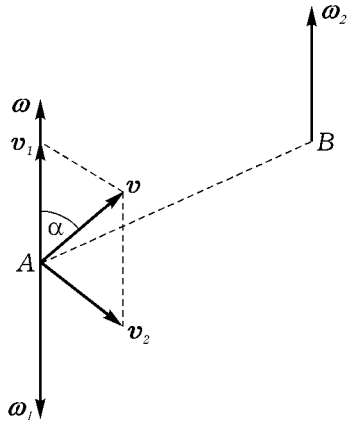

Рис. 44

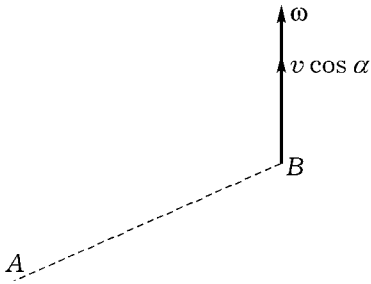

Рис. 45

ти, перпендикулярной $\boldsymbol{v}_2$, как показано на рис. 44. При этом, согласно (9), $v_2 = v \sin\alpha = AB \cdot \omega$. Мгновенные вращения вокруг одной и той же оси, проходящей через точку A с равными по модулю, но противоположно направленными угловыми скоростями $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega}_1$, могут быть отброшены, так как они не влияют на скорости точек тела (см. п. 35). Останутся только мгновенное вращение с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$ и мгновенно поступательное движение со скоростью $\boldsymbol{v}_1$, параллельной $\boldsymbol{\omega}_2$.

Следовательно, сложное движение будет мгновенно винтовым (рис. 45). Мгновенная винтовая ось смещена параллельно угловой скорости тела на расстояние $AB = \dfrac{v \sin\alpha}{\omega}$. Параметр p кинематического винта равен $\dfrac{v \cos\alpha}{\omega}$. В частном случае, когда $\alpha = 0$ (вектор $\boldsymbol{v}$ параллелен $\boldsymbol{\omega}$), нет необходимости проводить указанные выше преобразования, так как уже исходная совокупность $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{v}$ образует кинематический винт. Если $\alpha = \pi/2$ (вектор $\boldsymbol{v}$ перпендикулярен $\boldsymbol{\omega}$), то параметр кинематического винта равен нулю и сложное движение будет мгновенным вращением с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ относительно оси, проходящей через точку B и смещенной параллельно $\boldsymbol{\omega}$ от точки A на расстояние $AB = v/\omega$.

В заключение отметим, что, изучая мгновенное кинематическое состояние твердого тела, мы видели, что существуют четыре простейших мгновенных движения тела: покой, поступательное движение, вращение, мгновенно винтовое движение. Разнообразные движения тела в природе и технике получаются как непрерывная упорядоченная последовательность этих простейших мгновенных движений.

Часть II

ДИНАМИКА

Глава II
Основные понятия и аксиомы динамики

§ 1. Законы (аксиомы) Ньютона. Задачи динамики

40. Инерциальные системы отсчета. Принцип относительности Галилея. Динамика изучает движение механических систем в связи с причинами, вызывающими или изменяющими это движение. *Материальная точка* в теоретической механике представляет собой геометрическую точку, наделенную механическими свойствами. Эти свойства точки определяются законами (аксиомами) динамики, которые рассмотрены в этом параграфе. Попутно дано определение некоторых важнейших понятий, которыми оперирует теоретическая механика.

Основание теоретической механики составляют законы, или аксиомы, Ньютона. Эти аксиомы представляют собой постулаты, справедливость которых подтверждается многовековыми наблюдениями и опытом человечества.

Законы механического движения были сформулированы Ньютоном по отношению к абсолютному (неподвижному) пространству. Системы координат, неподвижные относительно этого пространства или движущиеся относительно него поступательно, равномерно и прямолинейно, называют *инерциальными системами отсчета.*

В теоретической механике считается, что инерциальные системы отсчета эквивалентны во всех механических отношениях. Иными словами, все уравнения и законы механики не зависят от конкретного выбора инерциальной системы отсчета. В этом состоит важнейший принцип механики — принцип относительности Галилея.

Все аксиомы динамики формулируются по отношению к инерциальной системе отсчета.

41. Первый закон Ньютона (аксиома инерции). Сила. Следующую аксиому динамики называют первым законом Ньютона или аксиомой инерции: *если на материальную точку не действуют силы, то она сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения.*

Остановимся подробнее на содержании этой аксиомы. Если система движется только под влиянием внутренних взаимодействий, т. е. взаи-

модействий точек, входящих в систему, то она называется *замкнутой системой.* Конечно, строго говоря, замкнутых систем в смысле данного определения не существует хотя бы потому, например, что гравитационное взаимодействие между материальными точками существует, на каком бы расстоянии одна от другой ни находились эти точки. Точность, с которой можно принять ту или иную систему материальных точек за замкнутую систему, определяется условиями конкретной задачи.

Замкнутая система, состоящая из одной материальной точки, называется *изолированной материальной точкой.* Ясно, что понятие изолированной материальной точки также является идеализированным понятием.

Аксиома инерции, фактически, постулирует существование инерциальных систем отсчета. Именно: *существуют такие системы отсчета, относительно которых изолированная материальная точка покоится или движется равномерно и прямолинейно.* Эти системы отсчета и являются инерциальными.

В действительности инерциальных систем не существует, но с большой степенью точности за инерциальную систему отсчета можно принять систему координат с началом в центре Солнечной системы и осями, направленными на «неподвижные» звезды. Для большинства технических задач за инерциальную систему отсчета принимают систему координат, жестко связанную с Землей.

Механическое действие материального объекта на данную материальную точку состоит в том, что она изменяет свое состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения. Не вдаваясь в физическую сущность причин, приводящих к появлению ускорения точки, мы говорим, что если точка движется с ускорением относительно инерциальной системы отсчета, то на нее действует сила. Именно в этом смысле мы говорим о существовании силы, приложенной к материальной точке. *Сила* есть причина возникновения ускорения точки; она является количественной мерой механического действия на точку, в результате которого возникает ускорение этой точки.

42. Масса. Второй закон Ньютона (основная аксиома динамики). Наблюдение и опыт показывают, что материальные тела обладают «врожденным» свойством, из-за которого тело «с трудом» выводится из состояния покоя или изменяет свое движение. «Способность» материальной точки «сопротивляться» изменению ее скорости называется *инертностью.*

Количественная мера инертности материальной точки, пропорциональная количеству вещества, заключенного в этой точке, называется ее *массой.* Масса представляет собой основную динамическую характе-

ристику точки. В динамике материальная точка есть геометрическая точка, обладающая инертностью, и, следовательно, с динамической стороны характеризуется своей массой.

Масса является скалярной положительной величиной, обладающей свойством аддитивности: массы материальных точек складываются арифметически.

Масса материальной точки считается постоянной величиной, не зависящей от обстоятельств движения. Это свойство массы хорошо подтверждается опытом, если скорость точки мала по сравнению со скоростью света и если не учитывать внутриатомные процессы в веществе, образующем материальную точку. За единицу массы в Международной системе единиц принимается масса эталона, хранящегося в Париже. Единица массы называется *килограммом* (кг).

Второй закон Ньютона устанавливает связь между массой материальной точки, приложенной к ней силой и возникающим при этом ускорением точки. Если m — масса точки, а $\boldsymbol{w}$ — ее ускорение в инерциальной системе отсчета, то, согласно второму закону Ньютона,

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{F}$ — сила, приложенная к точке. За единицу силы в Международной системе единиц принимается такая сила, которая, будучи приложена к материальной точке массой 1 кг, вызывает ее ускорение в инерциальной системе координат, равное 1 м/с^2. Эта единица называется *ньютоном* (Н). В дальнейшем считается, что сила $\boldsymbol{F}$ может зависеть только от положений точек системы, их скоростей и времени, но не зависит от ускорений точек.

43. Третий закон Ньютона (аксиома взаимодействия материальных точек). Следующая аксиома постулирует характер взаимодействия материальных точек. *Если одна материальная точка действует на другую, то и вторая точка действует на первую, причем силы, приложенные к каждой из них, равны по величине и направлены вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.*

44. Аксиома независимости действия сил (закон сложения сил). *Опыт показывает, что силы взаимодействия двух материальных точек не могут быть изменены возможными действиями на них других материальных точек, если положение, скорости и физическое состояние (электрическое, магнитное и т. д.) этих точек остаются неизменными. Когда точки P_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) действуют на одну и ту же точку P с силами $\boldsymbol{F}_i$, то ускорения $\boldsymbol{w}_i$, которые они вызвали бы у нее, действуя каждая отдельно, складываются.* В этом состоит аксиома независимости действия сил.

Если m — масса точки P, то согласно формуле (1), $\boldsymbol{w}_i = \frac{1}{m}\boldsymbol{F}_i$. Поэтому ускорение $\boldsymbol{w}$ точки P в соответствии с аксиомой независимости действия сил вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + \ldots + \boldsymbol{w}_k = \frac{1}{m}(\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{F}_k),$$

откуда видно, что ускорение $\boldsymbol{w}$ точки P таково, каким оно было бы, если бы к ней было приложено не k отдельных сил, а одна сила $\boldsymbol{F}$, равная сумме сил $\boldsymbol{F}_i$:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{F}_k.$$

Это и есть *закон сложения сил.* Он является эквивалентной формулировкой аксиомы независимости действия сил. Упомянутая сила, действие которой заменяет действие всех k сил $\boldsymbol{F}_i$, называется *равнодействующей* сил $\boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_k$, приложенных к точке P.

45. Активные силы и реакции связей. Рассмотрим движение системы N материальных точек P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$) относительно некоторой инерциальной системы отсчета. Пусть m_ν — масса точки P_ν, а $\boldsymbol{r}_\nu$ — ее радиус-вектор относительно начала координат. Если система свободная, то ускорения $\ddot{\boldsymbol{r}}_\nu$ образующих ее точек определяются из второго закона Ньютона $m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu$, где $\boldsymbol{F}_\nu$ — равнодействующая сил, приложенных к точке P_ν. Если же система не является свободной, то на ускорения ее точек наложены вполне определенные ограничения. Эти ограничения мы рассмотрели в п. 11. Величины

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_\nu = \frac{1}{m_\nu}\boldsymbol{F}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N)$$

не будут, вообще говоря, удовлетворять уравнениям (4) и (5) п. 11 для ускорений, т. е. ускорения $\boldsymbol{w}_\nu$ точек P_ν несвободной системы будут отличаться от их ускорений $\ddot{\boldsymbol{r}}_\nu$ в случае свободной системы. Таким образом, наличие связей приводит к возникновению у точек системы дополнительного ускорения $\boldsymbol{w}_\nu - \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu$.

Но, согласно второму закону Ньютона, всякое ускорение точки возникает за счет действия на нее некоторых сил. В рассмотренном случае эти силы обусловлены наличием связей. Их называют *реакциями связей.* Чтобы не смешивать реакции связей с остальными силами, приложенными к точкам несвободной системы, назовем эти остальные силы *активными силами.* Заметим, что здесь $\boldsymbol{F}_\nu$ — равнодействующая активных сил.

Активные силы можно также условно назвать *заданными силами*; это те из сил, приложенных к механической системе, которые сохраняются, если связи мгновенно исчезнут. Реакции связей называют иногда

пассивными силами; они заранее неизвестны и зависят не только от тех материальных приспособлений, которые реализуют связи, но и от активных сил и от движения системы.

Обозначив $\boldsymbol{R}_\nu$ равнодействующую реакций связей, приложенных к точке P_ν, согласно второму закону Ньютона получим $m_\nu(\boldsymbol{w}_\nu - \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu) = \boldsymbol{R}_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, N$). Отсюда и из равенств $m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu$ следуют уравнения движения точек системы

$$m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{R}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N). \tag{2}$$

Эти уравнения показывают, что с точки зрения динамики несвободную систему можно рассматривать как свободную, движущуюся под действием активных сил и реакций связей. В дальнейшем при изучении движения несвободных систем мы часто будем пользоваться этим положением.

В механике считается справедливым *принцип детерминированности Ньютона–Лапласа.* Согласно этому принципу движение системы материальных точек является вполне детерминированным: задание начальных положений $\boldsymbol{r}_{\nu 0}$ и скоростей $\boldsymbol{v}_{\nu 0}$ точек единственным образом определяет их дальнейшее движение, т. е. функции $\boldsymbol{r}_\nu(t)$ ($\nu = 1, 2, \ldots, N$).

46. Силы внешние и внутренние. Совокупность всех сил, приложенных к точкам P_ν материальной системы (иногда говорят «систему сил»), можно разделить на внутренние и внешние силы. *Внутренними силами* называются силы взаимодействия между точками P_ν, образующими материальную систему. Силы, возникающие благодаря воздействию на точки P_ν материальной системы других материальных точек, не входящих в эту систему, называют *внешними.*

Отметим, что деления системы сил на внутренние и внешние силы и на активные силы и реакции связей не взаимосвязаны.

47. Задачи динамики. Равновесие. Статика. Рассматривая движение систем в связи с силами, приложенными к образующим их материальным точкам, динамика ставит целью решение следующих двух *основных задач*: 1) по заданным силам найти движение системы; 2) по известному движению системы найти неизвестные силы, приложенные к точкам системы.

В динамике изучается также частный случай движения — состояние равновесия механической системы. Под состоянием *равновесия* системы понимается такое ее состояние, когда скорость $\boldsymbol{v}_\nu$ каждой точки системы равна нулю на протяжении некоторого промежутка времени, т. е. $\boldsymbol{v}_\nu \equiv 0$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$; если при $t = t_0$ $\boldsymbol{v}_\nu = 0$, то это условие эквивалентно условию $\boldsymbol{w}_\nu \equiv 0$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. В частности, если t_0

равняется нулю, а t_1 — бесконечности, то материальная система в начальный момент времени находится в состоянии равновесия и остается в нем все время.

Состояние равновесия механической системы изучается в разделе динамики, называемом *статикой*. В статике решаются две задачи: 1) найти условия равновесия механической системы; 2) решить вопрос о приведении системы сил, т. е. о замене данной системы сил другой, в частности, более простой, оказывающей то же воздействие на движение механической системы, что и исходная система сил.

§ 2. Главный вектор и главный момент системы сил

48. Главный вектор системы сил. Обозначим $\boldsymbol{F}_\nu$ равнодействующую всех сил (активных и реакций связей), приложенных к точке P_ν. Сумма

$$\boldsymbol{R} = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \tag{1}$$

называется *главным вектором* этой *системы сил*. Пусть $F_{\nu x}, F_{\nu y}, F_{\nu z}$ — компоненты силы $\boldsymbol{F}_\nu$ в декартовой системе координат $Oxyz$. Тогда компоненты R_x, R_y, R_z главного вектора и его направление определяются в соответствии с формулами

$$R_x = \sum_{\nu=1}^{N} F_{\nu x}, \quad R_y = \sum_{\nu=1}^{N} F_{\nu y}, \quad R_z = \sum_{\nu=1}^{N} F_{\nu z}; \tag{2}$$

$$\cos(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{i}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{j}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{k}) = \frac{R_z}{R}, \tag{3}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

Здесь $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — орты осей Ox, Oy, Oz.

Сила $\boldsymbol{F}_\nu$ является суммой равнодействующих всех внешних $\boldsymbol{F}_\nu^{(e)}$ и всех внутренних сил $\boldsymbol{F}_\nu^{(i)}$, т. е.

$$\boldsymbol{F}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu^{(e)} + \boldsymbol{F}_\nu^{(i)} \qquad (\nu = 1\,2, \ldots, N). \tag{4}$$

Согласно третьему закону Ньютона силы, с которыми взаимодействуют две точки системы, равны по величине и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны. Поэтому когда мы подставим выражения (4) в (1), то в получившейся сумме внутренние силы взаимно

уничтожаются. Таким образом, главный вектор внутренних сил обратится в нуль и

$$\boldsymbol{R} = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_{\nu}^{(e)}, \tag{5}$$

т. е. главный вектор $\boldsymbol{R}$ системы сил равен главному вектору $\boldsymbol{R}^{(e)}$ внешних сил.

49. Момент силы относительно точки и оси. *Моментом силы* $\boldsymbol{F}$ *относительно точки* O называется вектор

$$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки приложения силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки O. Из свойств векторного произведения следует, что модуль момента силы относительно точки равен произведению модуля силы на ее плечо, т. е. на расстояние от точки O до линии действии силы $\boldsymbol{F}$. Направлен момент по нормали к плоскости, проходящей через точку O и линию действия силы $\boldsymbol{F}$, в ту сторону, откуда «вращение», вызванное силой, происходило бы против часовой стрелки. *Линией действия силы* $\boldsymbol{F}$ мы называем прямую, на которой лежит вектор $\boldsymbol{F}$.

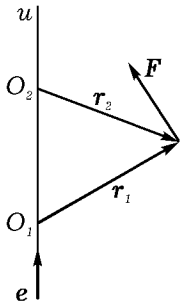

Рис. 46

Моментом силы $\boldsymbol{F}$ *относительно оси* u называется проекция на эту ось момента силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки, взятой на этой оси. Момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно оси u обозначается $m_u(\boldsymbol{F})$.

Пусть $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор оси u (рис. 46). Возьмем на этой оси точки O_1 и O_2. Тогда, согласно определению, $m_u(\boldsymbol{F}) = (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{e}$, а также $m_u(\boldsymbol{F}) = (\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{e}$. Составим разность $(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{e} - (\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{e}$. Она равна нулю, так как $(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{e} - (\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{e} = ((\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{e} = (\overline{O_1O_2} \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{e}$, а векторы $\overline{O_1O_2} \times \boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{e}$ ортогональны. Тем самым показана независимость величины $m_u(\boldsymbol{F})$ от выбора точки на оси.

Пусть F_x, F_y, F_z и x, y, z — компоненты силы $\boldsymbol{F}$ и радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ точки ее приложения соответственно в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ с началом в точке O. Тогда из (6) следует, что момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки O задается в этой системе координат компонентами

$$m_x(\boldsymbol{F}) = yF_z - zF_y, \quad m_y(\boldsymbol{F}) = zF_x - xF_z, \quad m_z(\boldsymbol{F}) = xF_y - yF_x. \tag{7}$$

Величины $m_x(\boldsymbol{F}), m_y(\boldsymbol{F})$ и $m_z(\boldsymbol{F})$ — моменты силы $\boldsymbol{F}$ относительно осей Ox, Oy и Oz. Из (7) сразу следует, что момент силы относительно оси равен нулю тогда и только тогда, когда линия действия силы и ось лежат в одной плоскости.

50. Главный момент системы сил. Пусть снова $\boldsymbol{F}_\nu$ — равнодействующая всех сил, приложенных к точке P_ν механической системы, а $\boldsymbol{r}_\nu$ — радиусы-векторы точек P_ν относительно точки O. *Главным моментом* $\boldsymbol{M}_0$ *этой системы сил относительно точки* O называется сумма

$$\boldsymbol{M}_O = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{F}_\nu. \tag{8}$$

Так же, как и для главного вектора, можно показать, что главный момент внутренних сил равен нулю и $\boldsymbol{M}_O = \sum\limits_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_\nu^{(e)})$, т. е. главный момент всех сил системы равен главному моменту $\boldsymbol{M}_O^{(e)}$ ее внешних сил.

Главным моментом M_u *системы сил относительно оси* u называется проекция на эту ось главного момента $\boldsymbol{M}_O$, вычисленного для какой-либо точки оси. Независимость величины M_u от выбора точки на оси доказывается так же, как и в случае одной силы в п. 49.

В декартовой системе координат $Oxyz$ главный момент $\boldsymbol{M}_O$ имеет компоненты, вычисляемые по формулам

$$\begin{aligned} M_x &= \sum_{\nu=1}^{N} (y_\nu F_{\nu z} - z_\nu F_{\nu y}), \\ M_y &= \sum_{\nu=1}^{N} (z_\nu F_{\nu x} - x_\nu F_{\nu z}), \\ M_z &= \sum_{\nu=1}^{N} (x_\nu F_{\nu y} - y_\nu F_{\nu x}). \end{aligned} \tag{9}$$

Величины M_x, M_y и M_z — главные моменты сил относительно осей Ox, Oy и Oz.

Направление главного момента определяется формулами

$$\begin{gathered} \cos(\boldsymbol{M}_O, \boldsymbol{i}) = \frac{M_x}{M_O}, \quad \cos(\boldsymbol{M}_O, \boldsymbol{j}) = \frac{M_y}{M_O}, \quad \cos(\boldsymbol{M}_O, \boldsymbol{k}) = \frac{M_z}{M_O}, \\ M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}. \end{gathered} \tag{10}$$

§ 3. Работа. Силовая функция. Идеальные связи

51. Работа системы сил. Пусть $\boldsymbol{F}_\nu$ — равнодействующая всех сил системы (внутренних и внешних), приложенных к точке P_ν, а $d\boldsymbol{r}_\nu$ — смещение точки P_ν вдоль ее траектории. *Элементарной работой* $d'A_\nu$ силы $\boldsymbol{F}_\nu$ на перемещении $d\boldsymbol{r}_\nu$ называется скалярное произведение

$$d'A_\nu = \boldsymbol{F}_\nu \cdot d\boldsymbol{r}_\nu = F_{\nu x}dx_\nu + F_{\nu y}dy_\nu + F_{\nu z}dz_\nu. \tag{1}$$

Элементарная работа $d'A$ всех сил системы получается путем суммирования выражений (1) по индексу ν:

$$d'A = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot d\boldsymbol{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N}(F_{\nu x}dx_\nu + F_{\nu y}dy_\nu + F_{\nu z}dz_\nu). \tag{2}$$

Символ d' указывает на то, что правые части в (1) и (2) не обязательно являются полными дифференциалами.

В выражения (1) и (2) для элементарной работы входит работа как внешних, так и внутренних сил. Обозначив через $d'A^{(e)}$ работу внешних сил, а через $d'A^{(i)}$ — работу внутренних сил, выражение (2) можно записать в виде

$$d'A = d'A^{(e)} + d'A^{(i)}.$$

Пусть точка P_ν совершает конечное перемещение из положения M_{ν_0} в положение M_{ν_1}, описывая дугу $M_{\nu_0}M_{\nu_1}$, и пусть $\boldsymbol{F}_\nu$ и $d\boldsymbol{r}_\nu$ могут быть выражены через один и тот же скалярный параметр t (который не обязательно должен быть временем) так, что положения M_{ν_0} и M_{ν_1} точки отвечают значениям t_0 и t_1 этого параметра. Тогда выражение (1) будет представлено в виде функции параметра t, умноженной на его дифференциал, и может быть проинтегрировано по t в пределах от t_0 до t_1. Результат интегрирования называется *полной работой* A_ν силы $\boldsymbol{F}_\nu$ на рассматриваемом конечном перемещении вдоль пути $M_{\nu_0}M_{\nu_1}$. Полная работа всех сил системы представляет собой сумму по ν величин A_ν.

52. Элементарная работа сил, приложенных к твердому телу. Здесь покажем, что элементарная работа системы сил, приложенных к твердому телу, определяется лишь работой внешних сил, и найдем нужное для дальнейшего выражение элементарной работы через главный вектор, главный момент внешних сил и характеристики мгновенного кинематического состояния тела.

Будем представлять себе твердое тело как механическую систему, состоящую из N ($N \geqslant 2$) отдельных точек P_ν, взаимные расстояния между которыми не изменяются. Пусть $\boldsymbol{F}_\nu$ — равнодействующая всех

сил, приложенных к точке P_ν тела, которую будем записывать в виде суммы равнодействующих $\boldsymbol{F}_\nu^{(e)} + \boldsymbol{F}_\nu^{(i)}$ всех внешних и внутренних сил, приложенных к точке P_ν.

Пусть O — произвольно выбранный полюс в твердом теле. Скорость $\boldsymbol{v}_\nu$ точки P_ν относительно неподвижной системы координат определяется по формуле (см. п. 24)

$$\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_\nu,$$

где $\boldsymbol{v}_o$ — скорость полюса, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела. Поэтому смещение точки P_ν вдоль ее траектории равно $(\boldsymbol{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_\nu)\,dt$, где dt — дифференциал времени. Для элементарной работы системы сил получим выражение

$$d'A = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot (\boldsymbol{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_\nu)\,dt = \left(\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu\right) \cdot \boldsymbol{v}_o\,dt + \sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_\nu) \cdot \boldsymbol{F}_\nu\,dt.$$

Воспользовавшись свойствами смешанного произведения, перепишем это выражение в виде

$$d'A = \left(\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu\right) \cdot \boldsymbol{v}_o\,dt + \left(\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{F}_\nu\right) \cdot \boldsymbol{\omega}\,dt.$$

Заменяя $\boldsymbol{F}_\nu$ на сумму $\boldsymbol{F}_\nu^{(e)}$ и $\boldsymbol{F}_\nu^{(i)}$ и учитывая, что главный вектор и главный момент внутренних сил равны нулю, получаем окончательно

$$d'A = \boldsymbol{R}^{(e)} \cdot \boldsymbol{v}_o\,dt + \boldsymbol{M}_o^{(e)} \cdot \boldsymbol{\omega}\,dt, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{R}^{(e)}$ и $\boldsymbol{M}_o^{(e)}$ — главный вектор и главный момент внешних сил относительно точки O.

53. Силовое поле. Силовая функция. Потенциал. Предположим, что на материальную точку, движущуюся относительно инерциальной системы отсчета, во всем пространстве или в какой-то его части действует сила, зависящая от положения точки (и, быть может, от времени), но не зависящая от скорости точки. В этом случае говорят, что в пространстве или его части задано *силовое поле*, а также, что точка движется в силовом поле. Соответствующие понятия для системы материальных точек аналогичны.

Силы, зависящие от положения, в механике встречаются очень часто. Такова, например, сила, приложенная к точке, движущейся по горизонтальной прямой под действием пружины, к которой эта точка прикреплена. Важнейшим примером силового поля в природе является

гравитационное поле: действие Солнца на планету данной массы вполне определяется в каждой точке пространства законом всемирного тяготения.

Силовое поле называется потенциальным, если существует скалярная функция U, зависящая только от координат x_ν, y_ν, z_ν точек P_ν материальной системы (и, быть может, от времени), такая, что

$$F_{\nu x} = \frac{\partial U}{\partial x_\nu},\ F_{\nu y} = \frac{\partial U}{\partial y_\nu},\ F_{\nu z} = \frac{\partial U}{\partial z_\nu}, \qquad (\nu = 1,\ 2, \ldots,\ N). \tag{4}$$

Функция U называется *силовой функцией.* Функция $\Pi = -U$ называется *потенциалом*, или *потенциальной энергией.* Функция Π определена с точностью до аддитивной постоянной. Потенциальное поле называется *нестационарным* или *стационарным* в зависимости от того, зависит функция Π явно от времени или нет.

Силы $\boldsymbol{F}_\nu$, удовлетворяющие равенствам (4), называются потенциальными.

Элементарная работа сил стационарного потенциального поля представляет собой полный дифференциал. В самом деле, из (2) и (4) получаем

$$d'A = \sum_{\nu=1}^{N} \left(\frac{\partial U}{\partial x_\nu} dx_\nu + \frac{\partial U}{\partial y_\nu} dy_\nu + \frac{\partial U}{\partial z_\nu} dz_\nu \right) = dU = -d\Pi. \tag{5}$$

Поэтому если в рассматриваемой области пространства Π является однозначной функцией от x_ν, y_ν, z_ν $(\nu = 1,\ 2, \ldots,\ N)$, то полная работа сил потенциального поля при переходе из одного положения системы в другое не зависит от путей перехода точек из их начальных положений в конечные. В частности, если все точки системы описывают замкнутые пути, то полная работа равна нулю.

Пример 1 (Однородное поле тяжести). *Пусть m — масса точки, g — ускорение свободного падения. Тогда* (рис. 47)

$$F_x = 0,\ F_y = 0,\ F_z = -mg;\ \Pi = mgz.$$

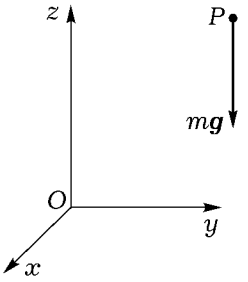

Рис. 47

Пример 2 (Силовое поле упругой пружины). *Пусть материальная точка движется вдоль оси Ox* (рис. 48) *под действием пружины, к которой она прикреплена. Если при $x = 0$ пружина не деформирована, то при малых отклонениях точки можно считать, что со стороны пружины к ней приложена сила $F = -kx$ $(k > 0)$. В этом случае $\Pi = {}^1\!/_2 kx^2$.*

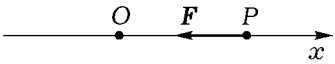

Рис. 48

Пример 3 (Центральное силовое поле). *Силовое поле называется центральным, если сила, приложенная к движущейся в нем точке, направлена вдоль прямой, проходящей через заданный центр — неподвижную точку O. Пусть при этом величина силы зависит только от расстояния от точки до центра. Так как $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = F(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$, где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки P относительно центра O, то*

$$d'A = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = F(r)\frac{\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}}{r} = \frac{1}{2}F(r)\frac{d\boldsymbol{r}^2}{r} = F(r)dr = -d\Pi.$$

Поэтому

$$\Pi = -\int F(r)dr + \text{const}. \tag{6}$$

В качестве конкретного примера найдем потенциал для движения точки массой m_2 в ньютоновском гравитационном поле точки массой m_1. В этом случае $F(r) = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}$, где γ — универсальная гравитационная постоянная. Если считать, что $\Pi = 0$ при $r = \infty$, то из (6) следует такое выражение для потенциала центрального ньютоновского силового поля:

$$\Pi = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r}. \tag{7}$$

54. Элементарная работа системы сил в обобщенных координатах. Обобщенные силы. Пусть $\boldsymbol{F}_\nu$ — равнодействующая всех сил, приложенных к точке P_ν системы ($\nu = 1, 2, \ldots, N$), а $\boldsymbol{r}_\nu$ — радиусы-векторы точек P_ν относительно начала координат. Пусть положение системы задается ее обобщенными координатами q_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Элементарную работу $d'A$ системы сил на виртуальных перемещениях $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ будем обозначать δA. Найдем выражение элементарной работы через обобщенные координаты и их вариации δq_j.

Радиусы-векторы точек P_ν являются функциями обобщенных координат и времени, а виртуальные перемещения $\delta\boldsymbol{r}_\nu$, выражаются через вариации δq_j обобщенных координат по формуле (27) п. 16. Поэтому

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_\nu\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_\nu\cdot\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_\nu\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j}\right)\delta q_j. \tag{8}$$

Введем обозначение

$$Q_j = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j} \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{9}$$

Тогда формула (8) запишется в виде

$$\delta A = \sum_{j=1}^{m} Q_j \delta q_j.$$

Величина Q_j называется *обобщенной силой*, соответствующей обобщенной координате q_j $(1,\ 2,\ \ldots,\ m)$. В общем случае обобщенные силы будут функциями обобщенных координат, скоростей и времени.

В практических задачах при вычислении обобщенных сил формулами (9), как правило, не пользуются. Обычно дают системе такое виртуальное перемещение, при котором $\delta q_k = 0$ для всех k, кроме $k = j$. Тогда $\delta A = \delta A_j = Q_j \delta q_j$ и

$$Q_j = \frac{\delta A_j}{\delta q_j}.$$

Пусть силы $\boldsymbol{F}_\nu$ потенциальные с потенциалом $\Pi = \Pi(\boldsymbol{r}_\nu,\ t)$. Тогда и обобщенные силы — потенциальные, причем им соответствует потенциал, полученный из функции $\Pi(\boldsymbol{r}_\nu,\ t)$, если в ней величины $\boldsymbol{r}_\nu$ выразить через обобщенные координаты. В самом деле, учитывая (5), имеем

$$\delta A = \sum_{j=1}^{m} Q_j \delta q_j = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = -\delta \Pi = -\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Отсюда следует, что в случае потенциальных сил обобщенные силы могут быть вычислены по формулам

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Пример 1 (Материальная точка движется вдоль оси Ox под действием силы F_x). *В этом случае $m = 1$, обобщенная координата — абсцисса x точки, $\delta A = F_x \delta x$, $Q_x = F_x$.*

Пример 2 (Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси u). *Здесь $m = 1$, за обобщениую координату примем угол φ поворота тела вокруг оси. Пусть $\boldsymbol{R}^{(e)}$ и $\boldsymbol{M}_o^{(e)}$ — главный вектор и главный момент внешних сил относительно полюса O, выбранного на оси вращения. Для подсчета величины δA воспользуемся формулой* (3) *п.* 52, *взяв*

вместо действительного перемещения виртуальное. Последнее возможно, так как твердое тело является склерономной механической системой (п. 18), а для склерономных систем действительное перемещение является одним из виртуальных (п. 12). Учитывая, что $\boldsymbol{v}_o = 0$, *получим*

$$\delta A = \boldsymbol{R}^{(e)} \cdot \boldsymbol{v}_o\, dt + \boldsymbol{M}_o^{(e)} \cdot \boldsymbol{\omega}\, dt = M_u^{(e)} \delta\varphi.$$

Следовательно,

$$Q_\varphi = M_u^{(e)}.$$

Здесь $M_u^{(e)}$ *— главный момент внешних сил относительно оси* u.

Пример 3 (Движение двойного маятника в вертикальной плоскости в поле тяжести (рис. 15)). *Пусть стержни, образующие маятник, имеют одинаковую длину* l *и одинаковую массу* m. *Эта система имеет две степени свободы. За обобщенные координаты примем углы* φ *и* ψ, *изображенные на рис. 15. Для вычисления потенциала* Π *возьмем систему координат с началом в точке* A *и с осью* Ax, *направленной вертикально вниз. Тогда, обозначая через* x_1 *и* x_2 *абсциссы центров тяжести верхнего и нижнего стержней, имеем*

$$\Pi = -mgx_1 - mgx_2.$$

Но $x_1 = \dfrac{l}{2}\cos\varphi$, $x_2 = l\cos\varphi + \dfrac{l}{2}\cos\psi$. *Поэтому*

$$\Pi = -\frac{1}{2}mgl(3\cos\varphi + \cos\psi),$$

и для обобщенных сил получаются следующие выражения:

$$Q_\varphi = -\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = -\frac{3}{2}mgl\sin\varphi, \qquad Q_\psi = -\frac{\partial\Pi}{\partial\psi} = -\frac{1}{2}mgl\sin\psi.$$

55. Идеальные связи. При движении несвободной системы на ее точки действуют реакции связей. Пусть $\boldsymbol{R}_\nu$ — равнодействующая реакций связей, действующих на точку P_ν системы ($\nu = 1, 2, \ldots, N$).

Связи называются *идеальными*, если работа δA реакций этих связей на любых виртуальных перемещениях равна нулю, т. е.

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{R}_\nu \cdot \delta\boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{10}$$

Условие идеальности связей не вытекает из их уравнений, оно вводится дополнительно. Рассмотрим несколько примеров идеальных связей.

Пример 1 (Материальная точка P движется по гладкой поверхности (движущейся или неподвижной)). *Виртуальные перемещения $\delta \boldsymbol{r}$ лежат в касательной к поверхности плоскости как в случае неподвижной, так и в случае движущейся поверхности (см. п. 12). А реакция поверхности ортогональна ей (рис. 49). Поэтому $\delta A = \boldsymbol{R} \cdot \delta \boldsymbol{r} = 0$.*

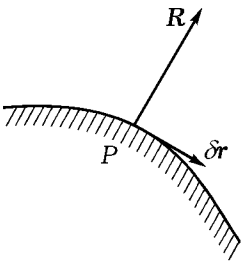

Рис. 49

Пример 2 (Свободное твердое тело). *У свободного твердого тела нет других связей, кроме тех, которые обеспечивают постоянство взаимных расстояний между точками, образующими твердое тело. Эти связи действуют на точки тела посредством сил, которые для твердого тела являются внутренними. Но, согласно п. 52, внутренние силы в случае твердого тела не совершают работу. Поэтому $\delta A = 0$.*

В дополнение к п. 18 мы можем теперь сказать, что свободное твердое тело представляет собой голономную склерономную систему с идеальными связями.

Пример 3 (Твердое тело, имеющее одну неподвижную точку (рис. 50)). *В этом случае $\delta A = 0$, так как $\delta \boldsymbol{r} = 0$ (неподвижна точка приложения реакции связи $\boldsymbol{R}$).*

Пример 4 (Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси). *Здесь $\delta A = 0$ по той же причине, что и в примере 3.*

Пример 5 (Два твердых тела, соединенных в точке O шарниром (рис. 51)). *Здесь $\boldsymbol{R}_1 = -\boldsymbol{R}_2$, $\delta \boldsymbol{r}_1 = \delta \boldsymbol{r}_2$. Поэтому $\delta A = \boldsymbol{R}_1 \cdot \delta \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{R}_2 \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R}_1 \cdot (\delta \boldsymbol{r}_1 - \delta \boldsymbol{r}_2) = 0$.*

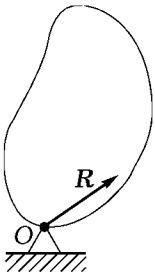

Рис. 50

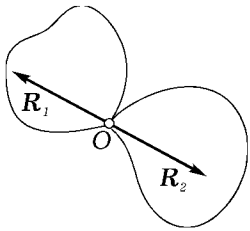

Рис. 51

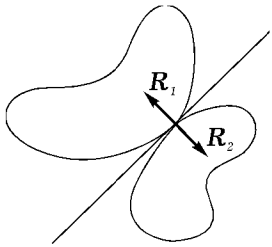

Рис. 52

Пример 6 (Два твердых тела, соприкасающихся при движении гладкими поверхностями (рис. 52)). *Относительная скорость точ-*

ки соприкосновения тел лежит в общей касательной плоскости к поверхностям тел в точке их касания. В этой же плоскости лежит разность $\delta \boldsymbol{r}_1 - \delta \boldsymbol{r}_2$ *виртуальных перемещений точек, в которых соприкасаются тела. Кроме того, как всегда,* $\boldsymbol{R}_1 = -\boldsymbol{R}_2$*, но в рассматриваемом случае реакции* $\boldsymbol{R}_1$ *и* $\boldsymbol{R}_2$ *перпендикулярны общей касательной плоскости. Поэтому* $\delta A = \boldsymbol{R}_1 \cdot \delta \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{R}_2 \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R}_1 \cdot (\delta \boldsymbol{r}_1 - \delta \boldsymbol{r}_2) = 0$.

Пример 7 (Два твердых тела, соприкасающихся при движении абсолютно шероховатыми поверхностями). *По определению это означает, что относительные скорости точек, которыми соприкасаются тела, равны нулю. Следовательно,* $\delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = 0$*, и поэтому* $\delta A = \boldsymbol{R}_1 \cdot \delta \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{R}_2 \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R}_1 \cdot \delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = 0$.

Пример 8 (Две материальные точки, соединенные натянутой идеальной нитью). *Под идеальной нитью понимается не обладающая массой нерастяжимая нить, которая не оказывает сопротивления изменению ее формы. Для определенности будем считать, что нить перекинута через неподвижный гладкий стержень* A (рис. 53). *Так как нить невесома, то ее реакции* $\boldsymbol{T}_1$ *и* $\boldsymbol{T}_2$*, приложенные к точкам* P_1 *и* P_2*, равны по модулю,* $T_1 = T_2 = T$ *(натяжение нити всюду одинаково). Найдем работу реакций на виртуальных перемещениях точек. В силу того, что нить нерастяжима,* $\delta r_1 \cos\alpha_1 = \delta r_2 \cos\alpha_2$*. Поэтому* $\delta A = \boldsymbol{T}_1 \cdot \delta \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{T}_2 \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = T_1 \delta r_1 \cos\alpha_1 - T_2 \delta r_2 \cos\alpha_2 = T(\delta r_1 \cos\alpha_1 - \delta r_2 \cos\alpha_2) = 0$.

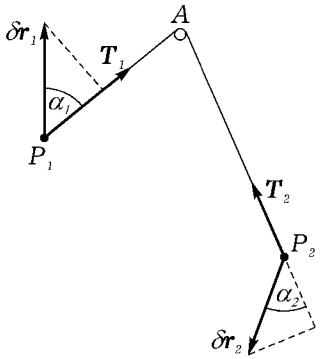

Рис. 53

Очень многие механизмы можно трактовать как сочетание простейших «деталей», рассмотренных в примерах 1–8. Однако в действительности не существует ни абсолютно гладких, ни абсолютно шероховатых поверхностей, не существует абсолютно твердых тел и нерастяжимых нитей. Поэтому в реальных ситуациях работа реакций связей отлична от нуля. Часто эта работа бывает малой и в допустимом приближении может считаться равной нулю. Этот факт и приводит в теоретической механике к выделению важнейшего класса связей, названных выше идеальными.

Однако очень часто связи нельзя считать идеальными. Такой случай встречается, например, когда при движении тела соприкасаются не абсолютно гладкими участками своих поверхностей и имеет место относительное скольжение. В этом случае, отнеся силы трения к неизвестным активным силам, можно условно считать связи идеальными.

Появление новых неизвестных требует тогда привлечения новых экспериментальных данных, например законов трения скольжения.

В дальнейшем мы будем рассматривать, как правило, только идеальные связи.

Остановимся на следующем весьма важном обстоятельстве. Упомянутая в п. 47 первая задача динамики для случая несвободной системы может быть более подробно сформулирована так. Заданы активные силы $\boldsymbol{F}_\nu$, приложенные к точкам P_ν материальной системы, массы m_ν точек, связи, возможные начальные положения $\boldsymbol{r}_{\nu_0}$ и скорости $\boldsymbol{v}_{\nu_0}$ точек системы. Требуется найти положения точек $\boldsymbol{r}_\nu$ и реакции связей $\boldsymbol{R}_\nu$ как функции времени. Таким образом, требуется найти $6N$ скалярных неизвестных.

Для решения этой задачи мы имеем $3N + r + s$ скалярных уравнений: $3N$ уравнений из векторных уравнений движения (2) п. 45 и $r + s$ уравнений связей (1), (2) п. 10. Так как число $6N$ больше $3N + r + s$ (на число степеней свободы системы $n = 3N - r - s$), то сформулированная задача неопределенна. Выделением класса систем с идеальными связями мы делаем задачу определенной, так как одно равенство (10) эквивалентно n уравнениям. Для их получения нужно в правой части равенства (10) выразить зависимые из виртуальных перемещений δx_1, δy_1, δz_1, ... , δx_N, δy_N, δz_N через независимые и затем приравнять нулю коэффициенты при этих независимых виртуальных перемещениях. Число же последних равно числу степеней свободы, т. е. n.

Глава III
Дифференциальные вариационные принципы механики

§ 1. Принцип Даламбера–Лагранжа

56. Понятие о вариационных принципах механики. Принципами называют, во-первых, некоторые основные начала, на которых может быть построена какая-либо теория, научная система и т. п., а во-вторых — законы, основные положения о чем-либо. Под принципами часто понимают также точку зрения, убеждения и т. д.

Принципы теоретической механики можно разделить на вариационные и невариационные. К *невариационным принципам* относятся, например, аксиомы динамики, обсуждавшиеся в §1 предыдущей главы, а также законы механики, например закон сохранения энергии, закон всемирного тяготения и т. п.

Вариационные принципы механики представляют собой выраженные языком математики условия, которые отличают истинное (действительное) движение системы от других кинематически возможных, т. е. допускаемых связями, движений. Вариационные принципы делятся на *дифференциальные* и *интегральные*. Первые дают критерий истинного движения для данного фиксированного момента времени, а вторые — на конечном интервале времени.

В этой главе рассматриваются дифференциальные вариационные принципы механики.

57. Общее уравнение динамики (принцип Даламбера–Лагранжа). Рассмотрим систему, состоящую из N материальных точек P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$). Система может быть как свободной, так и несвободной. В последнем случае связи, наложенные на систему, считаются удерживающими и идеальными. Пусть $\boldsymbol{F}_\nu$ и $\boldsymbol{R}_\nu$ — равнодействующие всех активных сил и реакций связей, приложенных к точке P_ν. Имеют место следующие уравнения движения (п. 45):

$$m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{R}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N), \tag{1}$$

где m_ν — масса точки P_ν, а $\boldsymbol{w}_\nu$ — ее ускорение в инерциальной системе отсчета.

Поскольку связи идеальны, то для любых виртуальных перемещений $\delta \boldsymbol{r}_\nu$ выполняется равенство

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{R}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{2}$$

Запишем уравнения (1) в виде

$$\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = -\boldsymbol{R}_\nu \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

Умножим обе части этого равенства скалярно на $\delta \boldsymbol{r}_\nu$ и произведем суммирование по ν. Тогда с учетом условия (2) получим соотношение

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu) \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{3}$$

Соотношение (3) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы движение, совместимое с идеальными связями, отвечало данной системе активных сил $\boldsymbol{F}_\nu$ $(\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$. Необходимость условия (3) мы только что показали. Предположим теперь, что некоторое совместимое со связями движение системы удовлетворяет условию (3). Тогда если положить $\boldsymbol{R}_\nu = m_\nu \boldsymbol{w}_\nu - \boldsymbol{F}_\nu$ $(\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$, то получим, что удовлетворяются равенство (2) и уравнения движения (1), полученные непосредственно из законов Ньютона.

Соотношение (3) характеризует движение всякой системы с идеальными удерживающими связями по отношению к активным силам $\boldsymbol{F}_\nu$ и соответствующим (для данного момента времени) виртуальным перемещениям. Оно получило название *общего уравнения динамики.*

Входящие в (3) произведения $m_\nu \boldsymbol{w}_\nu$ масс точек системы на их ускорения, взятые с обратным знаком, называют *силами инерции.* Применяя эту терминологию, можно сказать, что общее уравнение динамики показывает, что в любой фиксированный момент времени сумма элементарных работ активных сил и сил инерции на любых виртуальных перемещениях равна нулю.

Общее уравнение динамики получено в предположении об идеальности связей (2). Если же связи таковы, что все или часть их реакций $\boldsymbol{G}_\nu$ не удовлетворяют условию (2), то можно к системе активных сил добавить реакции $\boldsymbol{G}_\nu$, и уравнение (3) примет вид

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{G}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu) \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{4}$$

В общем случае силы $\boldsymbol{G}_\nu$ (или часть из них) неизвестны. Эта неопределенность должна компенсироваться дополнительными данными о физических свойствах и характере связей, порождающих реакции $\boldsymbol{G}_\nu$.

Важным свойством общего уравнения динамики является то, что оно не содержит реакций идеальных связей.

Соотношение (3) на самом деле является не одним уравнением, а содержит в себе число уравнений, равное n, т. е. числу степеней свободы системы, которое определяется количеством независимых виртуальных перемещений δx_1, δy_1, δz_1, ..., δx_N, δy_N, δz_N (см. п. 55). В каждом из этих n уравнений отсутствуют реакции связей.

Общее уравнение динамики (3) содержит в себе всю информацию о движении данной механической системы с идеальными удерживающими связями под действием заданных активных сил. В последующих главах оно будет положено в основу получения всех основных дифференциальных уравнений движения механических систем, голономных и неголономных.

Общее уравнение динамики называют также *дифференциальным вариационным принципом Даламбера–Лагранжа.* Вариационным принцип называется потому, что в (3) входят вариации — виртуальные перемещения. Название дифференциального принцип носит потому, что в нем сравнивается данное положение системы с ее варьированным положением в фиксированный, хотя и произвольный момент времени (синхронное варьирование, согласно п. 12).

С этой точки зрения принцип Даламбера–Лагранжа может быть сформулирован следующим образом: *истинное движение из всех кинематически возможных выделяется тем, что для него и только для него в данный момент времени сумма работ активных сил и сил инерции на любых виртуальных перемещениях равна нулю.*

Пример 1. *Две материальные точки массой m_1 и m_2 $(m_2 > m_1)$ соединены идеальной нитью, перекинутой через гладкий стержень, и движутся в поле тяжести в вертикальной плоскости* (рис. 54). *Найти ускорения точек.*

Пусть x_1 и x_2 — абсциссы точек m_1 и m_2 соответственно. Тогда из общего уравнения динамики (3) *следует, что*

$$(m_1 g - m_1 \ddot{x}_1)\delta x_1 + (m_2 g - m_2 \ddot{x}_2)\delta x_2 = 0. \tag{5}$$

Но так как нить нерастяжима, то имеет место геометрическая связь $x_1 + x_2 + \pi R = \mathrm{const}$, где R — радиус сечения стержня. Поэтому $\delta x_1 = -\delta x_2$, $\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2$, и уравнение (5) *запишется в виде*

$$[(m_2 - m_1)g - (m_1 + m_2)\ddot{x}_2]\delta x_2 = 0.$$

Отсюда в силу произвольности виртуального перемещения δx_2 получаем

$$\ddot{x}_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g.$$

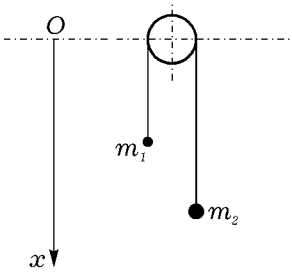

Рис. 54

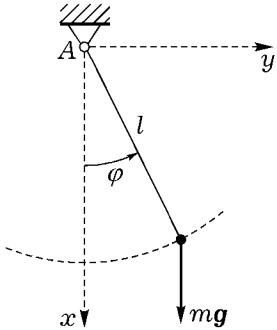

Рис. 55

Пример 2. *Найдем дифференциальное уравнение движения плоского математического маятника. Маятник будем для простоты представлять в виде точечной массы m, прикрепленной при помощи невесомого стержня длиной l к точке A, вокруг которой стержень может вращаться без трения в вертикальной плоскости. Направляя оси Ax и Ay декартовой системы координат, как показано на рис. 55, получаем*

$$x = l\cos\varphi,\ y = l\sin\varphi,$$

$$\delta x = -l\sin\varphi\,\delta\varphi,\ \delta y = l\cos\varphi\,\delta\varphi$$

$$\ddot{x} = -l\sin\varphi\,\ddot{\varphi} - l\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2,\ \ddot{y} = l\cos\varphi\,\ddot{\varphi} - l\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2,$$

$$F_x = mg,\ F_y = 0.$$

Общее уравнение динамики

$$(F_x - m\ddot{x})\delta x + (F_y - m\ddot{y})\delta y = 0$$

дает равенство

$$-ml(g\sin\varphi + l\ddot{\varphi})\delta\varphi = 0,$$

откуда, ввиду произвольности вариация $\delta\varphi$, следует дифференциальное уравнение движения маятника

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \tag{6}$$

Замечание 1. *Из общего уравнения динамики* (3) *видно, что оно* (*а, следовательно, и движение системы*) *не изменяется, если вместо системы сил* $\boldsymbol{F}_\nu$, *взять какую-либо другую систему сил* $\boldsymbol{F}_\nu^*$, *такую, чтобы элементарная работа обеих систем сил на любых одинаковых виртуальных перемещениях была одинакова, т. е.*

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu^* \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu.$$

§ 2. Принцип Журдена

58. Принцип Журдена. Представляет интерес преобразовать общее уравнение динамики таким образом, чтобы прийти к формулам, в основном эквивалентным уравнению (3) п. 57, но имеющим другую структуру. Так как уравнение (3) п. 57, по существу, содержит в себе все законы движения механических систем с идеальными удерживающими связями, то эти новые формулы не будут выражением принципов, существенно новых. Однако они могут дать новую интерпретацию, обнаруживающую общие свойства движения систем и наложенных на них связей, которые не могут быть получены из уравнения (3) п. 57 непосредственно.

Рассмотрим множество кинематически возможных движений из возможного положения $\boldsymbol{r}_\nu^*$ с различными возможными скоростями $\boldsymbol{v}_\nu^*$. Будем сравнивать их одно с другим и с действительным движением из того же положения в тот же момент времени. Так мы получаем *варьирование по Журдену* (п. 12), при котором $\delta \boldsymbol{r}_\nu = \delta \boldsymbol{v}_\nu \Delta t$, где величина $\delta \boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}_{\nu_1}^* - \boldsymbol{v}_{\nu_2}^*$ — разность возможных скоростей в сравниваемых движениях (эта величина не обязательно является бесконечно малой).

Подставляя это выражение для $\delta \boldsymbol{r}_\nu$ в общее уравнение динамики (3) и сокращая на Δt, получаем

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu) \cdot \delta \boldsymbol{v}_\nu = 0. \tag{1}$$

Формула (1) выражает *дифференциальный вариационный принцип Журдена.* Согласно этому принципу, среди сравниваемых кинематически возможных в данный момент времени движений (для которых $\boldsymbol{r}_{\nu_1}^* = \boldsymbol{r}_{\nu_2}^*$, $\delta \boldsymbol{v}_\nu \neq 0$) действительное движение выделяется тем, что для него и только для него выполнено уравнение (1).

§ 3. Принцип Гаусса

59. Формулировка принципа Гаусса (принципа наименьшего принуждения). Вариационные принципы Даламбера–Лагранжа и Журдена не связаны с понятием экстремальности. Гаусс предложил замечательную модификацию принципа Даламбера–Лагранжа, которая вводит в этот принцип понятие минимальности некоторого выражения. Эта модификация принципа Даламбера–Лагранжа получила название принципа Гаусса, или принципа наименьшего принуждения.

Для получения математической формулировки принципа Гаусса будем сравнивать в некоторый момент времени движения, в которых все точки системы имеют те же возможные положения $\boldsymbol{r}_\nu^*$ и скорости $\boldsymbol{v}_\nu^*$, что и в действительном движении. Возможные же ускорения точек системы в сравниваемых движениях будут отличаться (на величины, не обязательно являющиеся бесконечно малыми). Такой способ синхронного варьирования называется *варьированием по Гауссу* (п. 12).

Если для разности возможных ускорений $\boldsymbol{w}_{\nu_1}^* - \boldsymbol{w}_{\nu_2}^*$ в двух сравниваемых кинематически возможных движениях ввести обозначение $\delta\boldsymbol{w}_\nu$, то, согласно п. 12, $\delta\boldsymbol{r}_\nu = {}^1\!/_2\delta\boldsymbol{w}_\nu(\Delta t)^2$. Подставив это значение виртуального перемещения в общее уравнение динамики (3) п. 57 и сократив его на ${}^1\!/_2(\Delta t)^2$, получим

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu\boldsymbol{w}_\nu)\cdot\delta\boldsymbol{w}_\nu = 0. \tag{1}$$

Замечая, что массы точек m_ν, постоянны, а силы $\boldsymbol{F}_\nu$ не зависят от ускорений точек системы, уравнение (1) можно записать в виде

$$\delta Z = 0, \tag{2}$$

где введена величина

$$Z = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\left(\boldsymbol{w}_\nu - \frac{\boldsymbol{F}_\nu}{m_\nu}\right)^2, \tag{3}$$

называемая *принуждением* или *мерой принуждения*.

Согласно (2), величина Z, рассматриваемая как функция возможных ускорений, стационарна при значениях ускорений точек системы, соответствующих действительному движению.

Величина Z не только стационарна, но и минимальна на действительном движении. В самом деле, пусть $\boldsymbol{w}_{\nu_0}$ — ускорения точек системы в их действительном движении, а Z_0 — соответствующее им значение величины Z. Тогда, полагая, что в сравниваемом с действительным

кинематически возможном движении величина $\boldsymbol{w}_\nu$ равна $\boldsymbol{w}_{\nu_0} + \delta\boldsymbol{w}_{\nu_0}$, находим, что

$$Z - Z_0 = \sum_{\nu=1}^{N}(m_\nu \boldsymbol{w}_{\nu_0} - \boldsymbol{F}_\nu)\delta\boldsymbol{w}_{\nu_0} + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\delta\boldsymbol{w}_{\nu_0})^2. \tag{4}$$

Первая сумма в правой части равенства (4) обращается в нуль в силу уравнения (1), а вторая строго положительна, так как не все величины $\delta\boldsymbol{w}_{\nu_0}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$ равны нулю. Поэтому величина Z на действительном движении принимает наименьшее значение в классе возможных ускорений системы.

Таким образом, мы получили принцип Гаусса или, как часто говорят, *принцип наименьшего принуждения: среди сравниваемых кинематически возможных движений (для которых* $\boldsymbol{r}^*_{\nu_1} = \boldsymbol{r}^*_{\nu_2}$, $\boldsymbol{v}^*_{\nu_1} = \boldsymbol{v}^*_{\nu_2}$, $\delta\boldsymbol{w}_\nu \neq 0$) *действительное движение выделяется тем, что для него принуждение Z минимально.*

Пример 1. *Найдем ускорение точек m_1 и m_2 из примера* 1 *п.* 57, *применяя принцип Гаусса. Имеем*

$$Z = \frac{1}{2}m_1(-w - g)^2 + \frac{1}{2}m_2(w - g)^2,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial w} = m_1(w + g) + m_2(w - g) = 0,$$

$$w = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}g.$$

Пример 2. *Применяя принцип Гаусса, найдем дифференциальное уравнение движения математического маятника (пример* 2 *п.* 57). *Функция Z имеет вид*

$$Z = \frac{1}{2}m\left[\left(\ddot{x} - \frac{F_x}{m}\right)^2 + \left(\ddot{y} - \frac{F_y}{m}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}m(l^2\ddot{\varphi}^2 + 2gl\sin\varphi\ddot{\varphi}) + \frac{1}{2}m(l^2\dot{\varphi}^4 + 2gl\cos\varphi\dot{\varphi}^2 + g^2).$$

Из условия $\partial Z/\partial\ddot{\varphi} = 0$ следует уравнение (6) *п.* 57.

Пример 3. *Материальная точка массой m под действием активной силы $\boldsymbol{F}$ движется по гладкой поверхности, задаваемой уравнением $z = f(x, y)$. Найдем дифференциальные уравнения движения точки. Из уравнения связи имеем*

$$\ddot{z} = \frac{\partial f}{\partial x}\ddot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\ddot{y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dot{x}^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\dot{x}\dot{y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\dot{y}^2. \tag{5}$$

Нужно минимизировать величину, равную

$$(m\ddot{x} - F_x)^2 + (m\ddot{y} - F_y)^2 + (m\ddot{z} - F_z)^2,$$

где производная $\ddot{z}$ задана формулой (5). *Независимыми переменными являются $\ddot{x}$ и $\ddot{y}$. Окончательно получаем уравнение*

$$m\ddot{x} - F_x + (m\ddot{z} - F_z)\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad m\ddot{y} - F_y + (m\ddot{z} - F_z)\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

где $\ddot{z}$ следует заменить на правую часть равенства (5).

60. Физический смысл принципа Гаусса. Пусть в момент времени t точки P_ν несвободной механической системы имеют радиусы-векторы $\boldsymbol{r}_\nu$ и скорости $\boldsymbol{v}_\nu$; m_ν, как всегда, обозначает массу точки P_ν, а $\boldsymbol{F}_\nu$ — равнодействующую всех активных сил, приложенных к точке P_ν.

В момент времени $t+dt$ точка P_ν займет положение A_ν (рис. 56). При этом

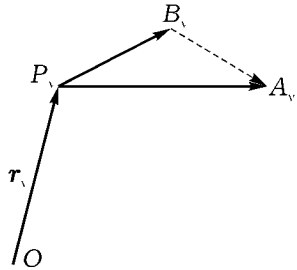

Рис. 56

$$\overline{P_\nu A_\nu} = \boldsymbol{v}_\nu dt + \frac{1}{2}\boldsymbol{w}_\nu (dt)^2 + \ldots,$$

где многоточием обозначены члены выше второго порядка относительно dt.

Если бы в момент времени t система была освобождена от связей (без изменения $\boldsymbol{F}_\nu$, m_ν, $\boldsymbol{r}_\nu$, $\boldsymbol{v}_\nu$), то движение ее точек на интервале времени dt было бы отличным от движения точек несвободной системы. Пусть B_ν — положение, которое заняла бы точка P_ν в момент времени $t + dt$. Тогда

$$\overline{P_\nu B_\nu} = \boldsymbol{v}_\nu dt + \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{F}_\nu}{m_\nu}(dt)^2 + \ldots$$

Удаление $\overline{B_\nu A_\nu}$ точки при несвободном движении от ее положения при свободном движении вызвано действием связей, принуждающих точки системы отклоняться от движения, свойственного точкам свободной системы. Математически это принуждающее воздействие связей можно характеризовать длиной вектора $\overline{B_\nu A_\nu}$. С другой стороны, для того чтобы сообщить материальной точке какое-то ускорение, необходимо воздействие тем большее, чем больше (при прочих равных условиях) ее масса. Поэтому принуждающее воздействие связей на точку естественно оценивать величиной $m_\nu \overline{B_\nu A_\nu}^2$, а для всей системы — суммой

этих величин по всем точкам P_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$. Если пренебречь членами выше четвертого порядка относительно dt, то

$$m_\nu \overline{B_\nu A_\nu}^2 = m_\nu (\overline{P_\nu A_\nu} - \overline{P_\nu B_\nu})^2 = \frac{1}{4} m_\nu (dt)^4 \left(\boldsymbol{w}_\nu - \frac{\boldsymbol{F}_\nu}{m_\nu} \right)^2.$$

Если просуммировать эти величины по всем точкам системы и отбросить несущественный множитель $\frac{1}{2}(dt)^4$, то получим принуждение для системы в виде

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\boldsymbol{w}_\nu - \frac{\boldsymbol{F}_\nu}{m_\nu} \right)^2.$$

Величина Z является мерой отклонения действительного движения системы от ее свободного движения. Так как, согласно принципу Гаусса, величина Z в действительном движении минимальна, то можно сказать, что несвободная система совершает движение, наиболее близкое к свободному.

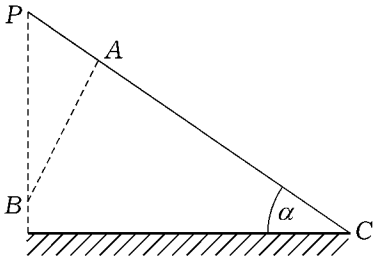

Рис. 57

Пример 1. *Материальная точка массой m движется под действием силы тяжести по гладкой прямой, наклоненной к горизонтальной плоскости под углом α* (рис. 57). *Найдем ускорение точки, пользуясь тем, что ее действительное движение наименее отклоняется от свободного движения. Пусть в начальный момент точка занимает положение P и имеет скорость, равную нулю. При свободном движении точка движется по вертикали и за время dt проходит расстояние $PB = \frac{1}{2} g (dt)^2$. В действительном несвободном движении по прямой PC точка движется с неизвестным ускорением w и за время dt проходит расстояние $PA = \frac{1}{2} w (dt)^2$. Поэтому*

$$BA^2 = \left(\frac{g(dt)^2}{2} \right)^2 + \left(\frac{w(dt)^2}{2} \right)^2 - 2 \frac{g(dt)^2}{2} \frac{w(dt)^2}{2} \sin\alpha =$$
$$= \frac{(dt)^4}{4} (w^2 - 2gw \sin\alpha + g^2).$$

Минимум этой величины достигается при $w = g \sin\alpha$. Это и есть искомое ускорение.

61. Экстремальное свойство реакций связей. Физический смысл принципа Гаусса можно выразить и в других терминах. Замечая,

что $m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{R}_\nu$, мы можем переписать выражение для принуждения в виде

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} \frac{R_\nu^2}{m_\nu}. \tag{6}$$

Условие того, что величина Z минимальна для действительного движения, приводит к экстремальному свойству реакций связей: для действительного движения реакции связей минимальны (в смысле минимума величины (6)).

Глава IV
Статика

§ 1. Статика произвольной механической системы

62. Общее уравнение статики (принцип виртуальных перемещений). Задачи статики сформулированы в п. 47. В этом параграфе кратко рассмотрим некоторые основные вопросы статики произвольной механической системы с идеальными удерживающими связями. В следующем параграфе будут подробно изучены вопросы статики твердого тела, являющегося важнейшим для приложений частным случаем механической системы.

Рассмотрим несвободную систему материальных точек P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$) со связями, задаваемыми уравнениями (1), (2) п. 10. Найдем условия, которым должны удовлетворять связи, чтобы система при $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_{\nu_0}$ могла находиться в состоянии равновесия на интервале времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Во-первых, конечно, положения точек, задаваемые радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_{\nu_0}$, должны быть возможными на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, т. е. на этом интервале должны выполняться тождества

$$f_\alpha(\boldsymbol{r}_{\nu_0}, t) \equiv 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r). \tag{1}$$

Во-вторых, из уравнений (2)–(5) п. 10, 11, задающих ограничения на скорости и ускорения точек системы, получаем при $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_{\nu_0}$, $\boldsymbol{v}_\nu = 0$, $\boldsymbol{w}_\nu = 0$ и $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ тождества

$$\begin{gathered} a_\beta(\boldsymbol{r}_{\nu_0}, t) \equiv 0, \ \frac{\partial a_\beta(\boldsymbol{r}_{\nu_0}, t)}{\partial t} \equiv 0, \ \frac{\partial f_\alpha(\boldsymbol{r}_{\nu_0}, t)}{\partial t} \equiv 0, \ \frac{\partial^2 f_\alpha(\boldsymbol{r}_{\nu_0}, t)}{\partial t^2} \equiv 0 \\ (\alpha = 1, \ldots, r; \quad \beta = 1, \ldots, s). \end{gathered} \tag{2}$$

Из (1), (2) следует, что система при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ может находиться в состоянии равновесия в каком-либо ее возможном положении $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_{\nu_0}$ только тогда, когда связи удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} f_\alpha(\boldsymbol{r}_{\nu_0}, t) = 0, \qquad a_\beta(\boldsymbol{r}_{\nu_0}, t) = 0 \\ (t_0 \leqslant t \leqslant t_1; \quad \alpha = 1, 2, \ldots, r; \quad \beta = 1, 2, \ldots, s). \end{gathered} \tag{3}$$

Пусть тождества (3) выполнены, т. е. состояние равновесия $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_{\nu_0}$ допускается связями, и пусть при $t = t_0$ имеем $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_{\nu_0}$, $\boldsymbol{v}_\nu = 0$. Будет ли система при выполнении условий (3) находиться в состоянии равновесия, зависит от приложенных к ней сил.

В основе статики механической системы лежит принцип виртуальных перемещений, или принцип Лагранжа. Сформулируем его в виде теоремы.

Теорема. *Чтобы некоторое допускаемое идеальными удерживающими связями состояние равновесия системы действительно было ее состоянием равновесия на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, необходимо и достаточно, чтобы для любого момента времени из этого интервала элементарная работа активных сил на любом виртуальном перемещении равнялась нулю, т. е. чтобы выполнялось условие*

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0 \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1). \tag{4}$$

Уравнение (4) *называется общим уравнением статики.*

Доказательство необходимости.

При доказательстве необходимости условия (4) для равновесия системы воспользуемся общим уравнением динамики

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu) \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0, \tag{5}$$

которое справедливо в любой момент времени для систем с идеальными удерживающими связями. Если при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ система находится в состоянии равновесия, то $\boldsymbol{w}_\nu = 0$ и из уравнения (5) сразу следует условие (4).

Доказательство достаточности более сложно. Мы дадим его далее в п. 158. Здесь только заметим, что это доказательство будет по существу использовать принцип полной детерминированности движения, т. е. однозначного определения движения системы по начальным положениям и скоростям образующих ее материальных точек. Следующий пример показывает, что при отсутствии полной детерминированности движения принцип виртуальных перемещений может не иметь места.

Пусть материальная точка единичной массы движется вдоль оси Ox под действием силы $F(x) = \alpha x^\beta$ $(\alpha > 0;\ 0 < \beta < 1)$. Уравнение движения точки имеет вид

$$\ddot{x} = \alpha x^\beta. \tag{6}$$

Положение равновесия $x = 0$ допускается связями; условие (4) выполнено при всех t, так как в положении равновесия $F = 0$. Тем не менее точка, находясь при $t = 0$ в начале координат и имея при этом нулевую скорость, может не оставаться в нем при $t > 0$. Действительно, при начальных условиях $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ уравнение (6) помимо решения $x \equiv 0$ имеет еще одно решение вида

$$x(t) = at^b, \tag{7}$$

где

$$a = \left[\frac{\alpha(1-\beta)^2}{2(1+\beta)}\right]^{\frac{1}{1-\beta}}, \quad b = \frac{2}{1-\beta}.$$

Отметим еще, что, так как $b > 2$, для решения (7) $\ddot{x}(0) = 0$. Это указывает на то, что, если даже ускорение точки в положении равновесия равно нулю, все равно точка может не находиться в равновесии при $t > 0$, хотя и выполнены условия (3) и (4). Игнорирование этого обстоятельства привело к тому, что во многих учебниках и научно-методических статьях доказательство достаточности принципа виртуальных перемещений либо неполно, либо ошибочно[1].

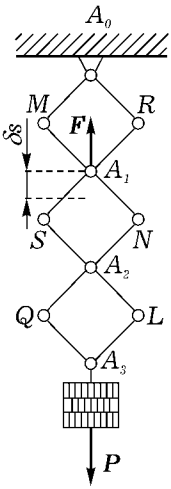

Рис. 58

Пример 1. *На рис. 58 изображен механизм, состоящий из стержней, образующих три одинаковых параллелограмма. Стержни MN, RS, SL и NQ — цельные, соединенные в точках пересечения шарнирами. Положим, что точки A_0 и A_1 соединены нитью; требуется определить ее натяжение.*

Мысленно перережем нить и заменим ее действие приложенной к точке A_1 силой $\boldsymbol{F}$. Пусть шарнир A_1 сдвинется вниз и δs — его виртуальное перемещение. Ввиду цельности стержней MN, RS, SL и NQ при виртуальном перемещении диагонали всех параллелограммов удлинятся на одну и ту же величину. Вследствие этого точка A_2 сместится вниз уже на $2\delta s$, а A_3 — на $3\delta s$.

Приравняв нулю сумму работ силы $\boldsymbol{F}$ и веса $\boldsymbol{P}$ на виртуальном перемещении, получим равенство

$$3P\delta s - F\delta s = 0.$$

[1] Довольно обширную библиографию по этому вопросу см., например, в работах: Геронимус Я. Л. О принципе виртуальных перемещений // Бюллетень Ясского Политехн. ин-та, 1963, Т. 9(13), вып. 3–4, С. 251–262; Блюмин Г. Д. О принципе виртуальных перемещений // Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 6, С. 22–28.

Отсюда, ввиду того, что $\delta s \neq 0$, *следует равенство*

$$F = 3P.$$

Пример 2 (Закон Паскаля). *Закон Паскаля описывает характер распространения давления в несжимаемой жидкости: давление на поверхность жидкости, произведенное внешними для жидкости силами, передается ею равномерно во все стороны.*

Чтобы проиллюстрировать закон Паскаля, рассмотрим сосуд, целиком заполненный несжимаемой жидкостью; в сосуде имеются три отверстия, закрытые подвижными поршнями 1, 2 *и* 3 (рис. 59). *Пусть* S_i *— площадь* i*-го поршня, а* δl_i, *— его виртуальное перемещение* ($i = 1, 2, 3$).

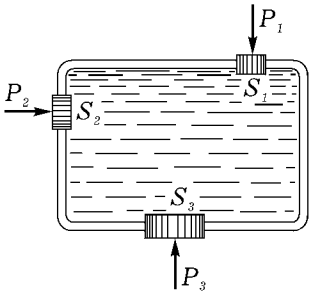

Рис. 59

Закрепим мысленно поршень 3, *тогда будут двигаться поршни* 1 *и* 2. *Определенное движение поршня* 1 *вызовет определенное движение поршня* 2. *Объем жидкости, вдавленной первым поршнем, равен* $S_1\delta l_1$; *объем жидкости, вошедшей в трубку второго поршня, равен* $S_2\delta l_2$. *Из условия несжимаемости жидкости имеем* $S_1\delta l_1 = S_2\delta l_2$.

Составим сумму работ сил $\boldsymbol{P}_1$ *и* $\boldsymbol{P}_2$ *на рассмотренном виртуальном перемещении:*

$$P_1\delta l_1 - P_2\delta l_2 = 0, \quad P_1\delta l_1 - P_2\frac{S_1}{S_2}\delta l_1 = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{P_1}{S_1} = \frac{P_2}{S_2}.$$

Аналогично, мысленно закрепляя поршень 2, *можно получить, что*

$$\frac{P_1}{S_1} = \frac{P_3}{S_3},$$

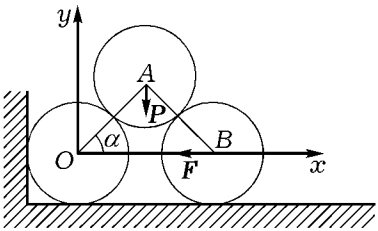

Рис. 60

т. е. давление на жидкость передается равномерно во все стороны.

Пример 3. *У стены здания положены три одинаковые трубы, как показано на рис.* 60. *Какую горизонтальную силу* $\boldsymbol{F}$ *нужно приложить к оси правой трубы, чтобы удержать трубы в равновесии, если вес каждой трубы равен* P?

Если правой нижней трубе сообщить виртуальное перемещение вдоль оси Ox, то работу совершат только две указанные на рис. 60 силы: $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{F}$. Радиусы-векторы $\boldsymbol{r}_A$ и $\boldsymbol{r}_B$ точек их приложения в системе координат Oxy задаются равенствами (a — радиус сечения труб)

$$\boldsymbol{r}'_A = (2a\cos\alpha,\ 2a\sin\alpha), \qquad \boldsymbol{r}'_B = (4a\cos\alpha,\ 0).$$

На указанном виртуальном перемещении угол α получает приращение $\delta\alpha$. Поэтому

$$\delta r'_A = 2a\,\delta\alpha(-\sin\alpha,\ \cos\alpha), \qquad \delta r'_B = 4a\,\delta\alpha(-\sin\alpha,\ 0).$$

Приравняв нулю сумму работ сил $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{F}$ на виртуальном перемещении, получим равенство

$$\boldsymbol{P}\cdot\delta\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r}_B = 0,$$

которое с учетом того, что

$$\boldsymbol{P}' = (0,\ -P), \quad \boldsymbol{F}' = (-F,\ 0),$$

можно записать в виде

$$-P\cdot 2a\cos\alpha\cdot\delta\alpha + F\cdot 4a\sin\alpha\cdot\delta\alpha = 0.$$

Отсюда при $\delta\alpha \neq 0$ получаем

$$F = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha P.$$

63. Общее уравнение статики в обобщенных координатах. Пусть $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_m$ — обобщенные координаты системы, а $Q_j(\boldsymbol{q},\ \dot{\boldsymbol{q}},\ t)$ — соответствующие им обобщенные силы. Уравнение (4) в обобщенных координатах запишется в виде

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu = \sum_{j=1}^{m} Q_j(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{0},\ t)\delta q_j = 0. \tag{8}$$

Если система голономна, то число ее обобщенных координат m совпадает с числом степеней свободы n и величины δq_j в (8) независимы. Приравнивая нулю коэффициенты при δq_j в уравнении (8), получаем, что в положении равновесия системы $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_0$ (и только в нем) обобщенные силы равны нулю:

$$Q_i = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{9}$$

Равенства (9) образуют систему n уравнений относительно неизвестных q_{10}, q_{20}, ..., q_{n0}, задающих положение равновесия системы.

Если все активные силы потенциальны, то, согласно п. 54, из (9) получаем

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{10}$$

где Π — потенциальная энергия системы. Отсюда следует, что необходимые и достаточные условия равновесия голономной системы (с идеальными удерживающими связями, в потенциальном поле сил) совпадают с необходимыми условиями экстремума потенциальной энергии в рассматриваемом положении равновесия системы.

В частности, если система движется в однородном поле тяжести, то условия (10) примут вид $\partial z_C/\partial q_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где z_C — координата центра тяжести рассматриваемой системы в неподвижной системе координат с вертикальной осью Oz, т. е. для тяжелой системы необходимые и достаточные условия равновесия совпадают с необходимыми условиями экстремальности высоты ее центра тяжести над горизонтальной плоскостью.

Если система неголономна, то величины δq_j, в (8) не будут независимы; они связаны s уравнениями (28) п. 16. Среди m величин δq_j независимыми будут только n $(n = m - s)$ из них. Пусть для определенности это будут величины δq_1, δq_2, ..., δq_n. Разрешив уравнения (28) п. 16 относительно δq_{n+1}, δq_{n+2}, ..., δq_m, получим

$$\delta q_{n+k} = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{kl} \delta q_l \qquad (k = 1, 2, \ldots, m - n = s), \tag{11}$$

где величины α_{kl} являются функциями коэффициентов $b_{\beta j}$, входящих в уравнения (28) п. 16. Уравнение (8) после подстановки в него выражений (11) и приведения подобных членов примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i' \delta q_i = 0, \tag{12}$$

где

$$Q_i' = Q_i + \sum_{p=1}^{m-n} \alpha_{pi} Q_{n+p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{13}$$

Так как величины δq_i независимы, то из (12) следует, что

$$Q_i' = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{14}$$

Равенства (14) представляют собой систему n уравнений относительно m неизвестных q_{10}, q_{20}, ..., q_{m0}, определяющих положение равновесия системы. Так как число неизвестных превышает число уравнений, то в общем случае имеем многообразие состояний равновесия, размерность которого не меньше числа s неголономных связей.

Отметим, что из (13) и (14) следует, что для неголономной системы в потенциальном поле сил некоторые или даже все частные производные потенциальной энергии в положении равновесия могут быть отличными от нуля.

Пример 1. *Пусть несвободная материальная точка с неинтегрируемой связью*

$$\dot{q}_3 = q_1\dot{q}_2$$

движется в силовом поле с потенциалом вида

$$\Pi = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2).$$

Тогда $m = 3$, $s = 1$, $n = 2$; $\alpha_{11} = 0$, $\alpha_{12} = q_1$; $Q_i = -q_i$ $(i = 1, 2, 3)$; $Q_1' = -q_1$, $Q_2' = -q_2 - q_1q_3$. *Условия равновесия* (14) *запишутся в виде двух уравнений с тремя неизвестными:*

$$q_1 = 0, \quad q_2 + q_1q_3 = 0.$$

Отсюда следует, что положения равновесия образуют одномерное многообразие

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad q_3 = q_{30},$$

где q_{30} *— произвольное число.*

Если $q_{30} \neq 0$, *то в положении равновесия производная* $\partial\Pi/\partial q_3$ *отлична от нуля.*

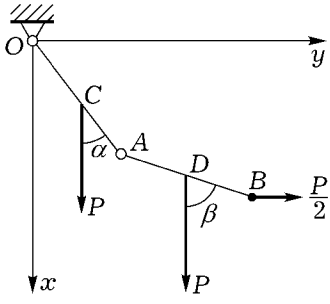

Рис. 61

Пример 2. *Два одинаковых стержня* OA *и* AB *весом* P *и длиной* $2a$ *скреплены шарниром* A. *Конец* O *стержня* OA *закреплен в неподвижном шарнире, а к концу* B *стержня* AB *приложена горизонтальная сила* $P/2$. *Оба стержня расположены в вертикальной плоскости. Требуется найти углы* α *и* β *при равновесии системы* (рис. 61).

Система имеет две степени свободы и является голономной. За обобщенные координаты примем углы α *и* β. *Найдем обобщенные силы* Q_α *и* Q_β, *отвечающие этим обобщенным координатам. В плоскости*

стержней возьмем систему координат Oxy, ось Ox которой направим вертикально вниз. Для активных сил $\boldsymbol{F}_C$, $\boldsymbol{F}_D$, $\boldsymbol{F}_B$ и радиусов-векторов $\boldsymbol{r}_C$, $\boldsymbol{r}_D$, $\boldsymbol{r}_B$ точек их приложения имеем

$$\boldsymbol{F}'_C = (P,\ 0),\ \boldsymbol{F}'_D = (P,\ 0),\ \boldsymbol{F}'_B = \left(0,\ \frac{P}{2}\right);$$

$$\boldsymbol{r}'_C = a(\cos\alpha,\ \sin\alpha), \quad \boldsymbol{r}'_D = a(2\cos\alpha + \cos\beta,\ 2\sin\alpha + \sin\beta),$$
$$\boldsymbol{r}'_B = 2a(\cos\alpha + \cos\beta,\ \sin\alpha + \sin\beta).$$

Вычислим элементарную работу активных сил на виртуальном перемещении системы, отвечающем вариациям $\delta\alpha$ и $\delta\beta$ обобщенных координат. Так как

$$\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{r}'_C &= a\delta\alpha(-\sin\alpha,\ \cos\alpha),\\
\delta\boldsymbol{r}'_D &= a(-2\sin\alpha\cdot\delta\alpha - \sin\beta\cdot\delta\beta,\ 2\cos\alpha\cdot\delta\alpha + \cos\beta\cdot\delta\beta),\\
\delta\boldsymbol{r}'_B &= 2a(-\sin\alpha\cdot\delta\alpha - \sin\beta\cdot\delta\beta,\ \cos\alpha\cdot\delta\alpha + \cos\beta\cdot\delta\beta),
\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
\delta A &= \boldsymbol{F}_C\cdot\delta\boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{F}_D\cdot\delta\boldsymbol{r}_D + \boldsymbol{F}_B\cdot\delta\boldsymbol{r}_B =\\
&= Pa[(\cos\alpha - 3\sin\alpha)\delta\alpha + (\cos\beta - \sin\beta)\delta\beta].
\end{aligned}$$

Поэтому

$$Q_\alpha = Pa(\cos\alpha - 3\sin\alpha), \quad Q_\beta = Pa(\cos\beta - \sin\beta).$$

Из условий (9) *получаем теперь, что при равновесии системы*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}, \qquad \operatorname{tg}\beta = 1.$$

Пример 3. *Тяжелое колечко надето на прут, которому придана форма кривой, определяемой уравнениями*

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1, \quad \frac{x}{6} + \frac{y}{3} + z = 1,$$

где ось Oz направлена вертикально вверх. Найдем положения равновесия колечка.

Пусть виртуальное перемещение колечка задается величинами δx, δy, δz. Продифференцировав уравнения, задающие форму прута, получим, что на виртуальном перемещении должны выполняться условия

$$x\,\delta x + 4y\,\delta y + 36z\,\delta z = 0, \quad \delta x + 2\,\delta y + 6\,\delta z = 0.$$

Для положения равновесия элементарная работа $P\delta z$ (P — вес колечка) силы тяжести должна равняться нулю. Поэтому $\delta z = 0$, и предыдущие два уравнения запишутся в виде

$$x\,\delta x + 4y\,\delta y = 0, \quad \delta x + 2\,\delta y = 0$$

или, после исключения δy,

$$(x - 2y)\,\delta x = 0.$$

Это условие должно выполняться при любых δx, следовательно,

$$x = 2y.$$

Принимая во внимание уравнения кривой, по которой изогнут прут, получим два решения:

$$1)\ x = 4,\ y = 2,\ z = -\frac{1}{3};$$
$$2)\ x = 0,\ y = 0,\ z = 1.$$

Пример 4. *Однородный стержень AD опирается концом A на вертикальную стену, а в некоторой другой точке — на ребро B* (рис. 62). *Длина стержня $2a$, расстояние точки B от стены b. Найти угол α при равновесии стержня.*

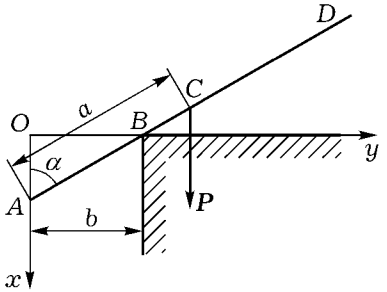

Рис. 62

Рассматриваемая система голономна и имеет одну степень свободы. Примем угол α за обобщенную координату. Потенциальная энергия $\Pi = -Px_C$, где x_C — абсцисса центра тяжести стержня:

$$x_C = b\operatorname{ctg}\alpha - a\cos\alpha.$$

Условие равновесия $\partial\Pi/\partial\alpha = 0$ дает уравнение для α:

$$-\frac{b}{\sin^2\alpha} + a\sin\alpha = 0,$$

откуда

$$\sin\alpha = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

Равновесие стержня возможно только в том случае, когда $b \leqslant a$.

64. Эквивалентные системы сил. Рассмотрим совокупность сил $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_k)$, приложенную к некоторой механической системе. Допустим, что эта совокупность сил в данной механической системе заменена на совокупность сил $(\boldsymbol{F}_1^*, \boldsymbol{F}_2^*, \ldots, \boldsymbol{F}_l^*)$. При этом количество, точки приложения, величины и направления сил в первой и второй системах могут быть различными. Движения механической системы под действием первой и второй систем сил при одинаковых начальных положениях точек системы и одинаковых их начальных скоростях могут быть одинаковыми, а могут отличаться.

Если две системы сил могут быть заменены одна другой без изменения движения (или состояния покоя) механической системы, то такие системы сил будем называть *эквивалентными.*

В частности, если добавление или отбрасывание некоторой системы сил не изменяет движение механической системы, то говорят, что эта система сил является *уравновешенной* или *эквивалентной нулю.*

Эквивалентность систем сил обозначается символом $\sim$: если две системы $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_k)$ и $(\boldsymbol{F}_1^*, \boldsymbol{F}_2^*, \ldots, \boldsymbol{F}_l^*)$ эквивалентны, то пишут $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_k) \sim (\boldsymbol{F}_1^*, \boldsymbol{F}_2^*, \ldots, \boldsymbol{F}_l^*)$.

Из общего уравнения динамики следует (см. замечание 1 в п. 57), что *две системы сил эквивалентны тогда и только тогда, когда они совершают одинаковую работу на любых (одних и тех же для обеих систем сил) виртуальных перемещениях механической системы.*

Выразим этот критерий эквивалентности через обобщенные силы. Пусть Q_j и Q_j^* $(j = 1, 2, \ldots, m)$ — обобщенные силы, отвечающие первой и второй системам сил соответственно, а δA и δA^* — элементарные работы этих систем на виртуальных перемещениях $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_m$. Составим разность

$$\delta A - \delta A^* = \sum_{j=1}^{m} (Q_j - Q_j^*)\delta q_j. \tag{15}$$

Для голономной системы величины δq_j независимы. Поэтому, приравняв нулю левую часть формулы (15), получим, что системы сил, приложенные к голономной системе, эквивалентны тогда и только тогда, когда их обобщенные силы совпадают при каком-либо выборе обобщенных координат.

В случае неголономной системы величины δq_j, зависимы. Подставив в этом случае величины (11) в (15), приведя подобные члены и приравняв результат нулю, получим, что в случае неголономной системы для эквивалентности двух систем сил необходимо и достаточно, чтобы при каком-то выборе обобщенных координат совпадали величины Q_i' и $Q_i'^*$, вычисленные для обеих систем сил по формулам (13).

Пример 1. *Материальная точка $P(x, y)$ движется в плоскости и имеет скорость, постоянно направленную на движущуюся точку $P_0(x_0(t),\ y_0(t))$. Уравнение связи имеет вид*

$$\dot{y} = \frac{y - y_0(t)}{x - x_0(t)}\dot{x}. \tag{16}$$

При непостоянных x_0, y_0 это — дифференциальная неинтегрируемая связь. Следовательно, $m = 2$, $s = 1$, $n = 1$.

Пусть к точке P приложена сила $\boldsymbol{F}(y_0(t) - y,\ -x_0(t) + x)$. Ей отвечают такие обобщенные силы ($q_1 = x$, $q_2 = y$):

$$Q_1 = y_0(t) - q_2, \qquad Q_2 = -x_0(t) + q_1.$$

Из уравнения связи (16) *следует, что*

$$\alpha_{11} = \frac{q_2 - y_0(t)}{q_1 - x_0(t)}.$$

Поэтому из формулы (13) *имеем $Q'_1 = 0$.*

Если вместо силы $\boldsymbol{F}$ к точке P приложена сила $\boldsymbol{F}^* = k\boldsymbol{F}$ ($k \neq 1$), то аналогично получим $Q'^*_1 = 0$. Поэтому силы $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}^*$ в рассматриваемой неголономной системе эквивалентны.

Если бы связь (16) *отсутствовала, то имел бы место случай голономной системы, а силы $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}^*$ не были бы эквивалентны.*

§ 2. Статика твердого тела

65. Необходимые и достаточные условия равновесия твердого тела. Пусть к твердому телу приложена система внешних сил с главным вектором $\boldsymbol{R}^{(e)}$ и главным моментом $\boldsymbol{M}_O^{(e)}$ относительно произвольно выбранного полюса. Считая твердое тело свободным, получим необходимые и достаточные условия его равновесия. Если тело несвободно, то его можно рассматривать как свободное, мысленно отбросив связи и заменив их действие на тело реакциями (п. 45). В этом случае реакции связей, которые обычно являются неизвестными, войдут в выражения для $\boldsymbol{R}^{(e)}$ и $\boldsymbol{M}_O^{(e)}$.

К свободному твердому телу, как к системе с идеальными связями, применим принцип виртуальных перемещений, дающий необходимые и достаточные условия равновесия системы с идеальными удерживающими связями. Поэтому наша задача состоит только в том, чтобы выразить общее уравнение статики (4) п. 62 через главный вектор и главный момент сил, приложенных к конкретной системе — твердому телу.

Теорема. *Для равновесия твердого тела при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ необходимо и достаточно, чтобы в момент времени t_o тело покоилось, а главный вектор $\boldsymbol{R}^{(e)}$ и главный момент внешних сил $\boldsymbol{M}_O^{(e)}$ относительно произвольно выбранного полюса O при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ равнялись нулю:*

$$\boldsymbol{R}^{(e)} = 0, \quad \boldsymbol{M}_O^{(e)} = 0. \tag{1}$$

Доказательство.

Заметим, что, так как свободное твердое тело является склерономной системой, его произвольное действительное перемещение за время dt является виртуальным. Поэтому, воспользовавшись формулой (3) п. 52, можно элементарную работу сил, приложенных к твердому телу, на его виртуальном перемещении записать в виде

$$\delta A = \boldsymbol{R}^{(e)} \cdot \boldsymbol{v}_O \, dt + \boldsymbol{M}_O^{(e)} \cdot \boldsymbol{\omega} \, dt, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{v}_o$ — скорость полюса, а $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела в момент времени t ($t_0 \leqslant t \leqslant t_1$). Так как $\boldsymbol{v}_o$ и $\boldsymbol{\omega}$ — произвольные величины, то из общего уравнения статики $\delta A = 0$ следуют равенства (1). Теорема доказана.

Если $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_k)$ — система внешних сил, приложенных к твердому телу, а x_i, y_i, z_i — координаты точек приложения силы $\boldsymbol{F}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, k$) в декартовой прямоугольной системе координат с началом в полюсе O, то необходимые и достаточные условия равновесия твердого тела (1) запишутся в скалярной форме в виде следующих шести равенств:

$$\sum_{i=1}^{k} F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{k} F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^{k} F_{iz} = 0, \tag{3}$$

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{k} (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) = 0, \\ \sum_{i=1}^{k} (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) = 0, \\ \sum_{i=1}^{k} (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

В частных случаях некоторые из шести равенств (3), (4) могут удовлетворяться тождественно.

Механическая система, у которой реакции всех наложенных связей могут быть определены из условий равновесия, получаемых в статике,

называется *статически определимой*, в противном случае — *статически неопределимой*. Если рассматриваемое в данном пункте твердое тело несвободно, то равенства (3), (4) будут системой уравнений относительно проекций реакций связей. Случай статически определимой механической системы имеет место лишь тогда, когда число неизвестных проекций не превосходит числа не удовлетворяющихся тождественно уравнений системы (3), (4).

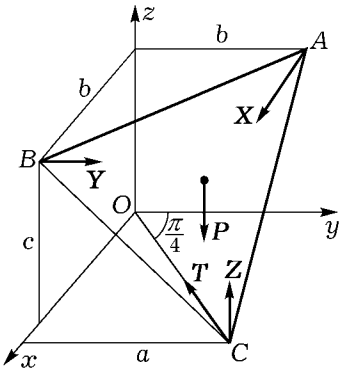

Рис. 63

Пример 1. *Однородная доска в форме равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$) весом P опирается вершинами на три координатные плоскости и привязана за точку C к точке O с помощью нити CO* (рис. 63). *Определим натяжение $\boldsymbol{T}$ нити и реакции $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Z}$ в точках A, B, C. Даны расстояния a, b, c и угол $COy = \pi/4$.*

На доску действуют пять сил: сила тяжести, натяжение нити и реакции в точках A, B, C, причем последние, ввиду отсутствия трения, перпендикулярны соответствующим координатным плоскостям.

Из геометрических соображений нетрудно получить, что центр тяжести доски имеет координаты $\dfrac{a+b}{3}$, $\dfrac{a+b}{3}$, $\dfrac{2c}{3}$.

Необходимые и достаточные условия равновесия (3), (4) *запишутся в виде следующей (совместной) системы шести линейных уравнений относительно четырех неизвестных X, Y, Z, T:*

$$-T\frac{\sqrt{2}}{2} + X = 0, \quad -T\frac{\sqrt{2}}{2} + Y = 0, \quad Z - P = 0,$$

$$Za - Yc - \frac{1}{3}P(a+b) = 0, \quad -Za + Xc + \frac{1}{3}P(a+b) = 0, \quad Yb - Xb = 0.$$

Решив эту систему, получим, что

$$X = Y = \frac{2a-b}{3c}P, \qquad Z = P, \qquad T = \frac{\sqrt{2}(2a-b)}{3c}P.$$

66. Критерий эквивалентности систем сил, приложенных к твердому телу. Критерий эквивалентности систем сил, приложенных к произвольной механической системе с идеальными удерживающими связями, получен в п. 64. Здесь получим критерий эквивалентности для систем сил, приложенных к твердому телу.

Теорема. *Для того чтобы две системы сил, приложенных к твердому телу, были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковые главные векторы и главные моменты относительно некоторого полюса.*

Доказательство.

Пусть система сил $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_k)$ имеет главный вектор $\boldsymbol{R}^{(e)}$ и главный момент $\boldsymbol{M}_O^{(e)}$, а другая система сил $(\boldsymbol{F}_1^*, \boldsymbol{F}_2^*, \ldots, \boldsymbol{F}_l^*)$ — главный вектор $\boldsymbol{R}^{*(e)}$ и главный момент $\boldsymbol{M}_O^{*(e)}$ Используя формулу (2), составим разность элементарных работ этих систем сил на одинаковых виртуальных перемещениях тела:

$$\delta A - \delta A^* = (\boldsymbol{R}^{(e)} - \boldsymbol{R}^{*(e)}) \cdot \boldsymbol{v}_O\, dt + (\boldsymbol{M}_O^{(e)} - \boldsymbol{M}_O^{*(e)}) \cdot \boldsymbol{\omega}\, dt.$$

Согласно определению, для эквивалентности систем сил необходимо и достаточно, чтобы эта разность равнялась нулю. Отсюда, ввиду произвольности $\boldsymbol{v}_O$ и $\boldsymbol{\omega}$, следует, что $\boldsymbol{R}^{(e)} = \boldsymbol{R}^{*(e)}$ и $\boldsymbol{M}_O^{(e)} = \boldsymbol{M}_O^{*(e)}$.

Получим связь между главными моментами одной и той же системы сил, вычисленными относительно разных полюсов. Согласно рис. 64, имеем

$$\boldsymbol{M}_{O_1} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{\rho}_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_{i=1}^{k} (\overline{O_1O} + \boldsymbol{r}_i) \times \boldsymbol{F}_i =$$

$$= \overline{O_1O} \times \left(\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{F}_i \right) + \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i,$$

или

$$\boldsymbol{M}_{O_1} = \boldsymbol{M}_O + \overline{O_1O} \times \boldsymbol{R}. \tag{5}$$

Таким образом, *при изменении полюса главный момент сил меняется на величину, равную моменту главного вектора (приложенного в старом полюсе) относительно нового полюса.* Отсюда следует, что если у двух систем сил главные векторы одинаковы и одинаковы главные моменты относительно какого-либо полюса, то последние одинаковы и для любого полюса.

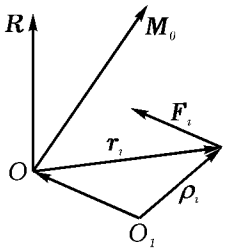

Рис. 64

Замечание 1. *При выполнении условий* (1) *система сил, приложенная к твердому телу, будет уравновешенной, или эквивалентной нулю. Это означает, что любое движение тела не изменится, если к приложенным к нему силам добавить или отбросить систему сил, удовлетворяющую равенствам* (1).

Пример 1. *По ребрам прямоугольного клина действуют силы* $\boldsymbol{F}_1$ *и* $\boldsymbol{F}_2$ (рис. 65), *которые требуется заменить эквивалентными им силами* $\boldsymbol{F}_1^*$ *и* $\boldsymbol{F}_2^*$. *Величины сил* $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_1^*$ *пропорциональны длинам соответствующих ребер клина. Найти силу* $\boldsymbol{F}_2^*$.

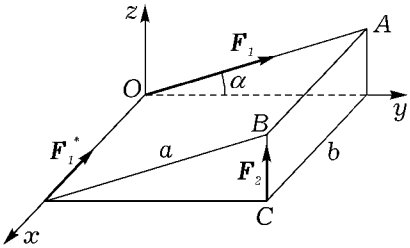

Рис. 65

Если a *и* b *— длины ребер* OA *и* AB *клина соответственно, а* f *— коэффициент пропорциональности* ($f > 0$), *то*

$$F_1 = fa, \quad F_2 = fa\sin\alpha, \quad F_1^* = fb.$$

Введем систему координат $Oxyz$, *как показано на рис.* 65. *Главный вектор и главный момент системы сил* ($\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$) *в этой системе координат имеют такие компоненты:*

$$R_x = 0, \quad R_y = fa\cos\alpha, \quad R_z = 2fa\sin\alpha,$$
$$M_x = fa^2\sin\alpha\cos\alpha, \quad M_y = -fab\sin\alpha, \quad M_z = 0.$$

Пусть F_{2x}^*, F_{2y}^*, F_{2z}^* *— компоненты искомой силы* $\boldsymbol{F}_2^*$, *а* x, y, z *— координаты точки ее приложения. Главный вектор и главный момент системы сил* ($\boldsymbol{F}_1^*$, $\boldsymbol{F}_2^*$) *имеют компоненты, задаваемые равенствами*

$$R_x^* = -fb + F_{2x}^*, \quad R_y^* = F_{2y}^*, \quad R_z^* = F_{2z}^*,$$
$$M_x^* = yF_{2z}^* - zF_{2y}^*, \quad M_y^* = zF_{2x}^* - xF_{2z}^*, \quad M_z^* = xF_{2y}^* - yF_{2x}^*.$$

Система трех уравнений, вытекающая из равенства соответствующих компонент главных векторов эквивалентных систем сил ($\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$) *и* ($\boldsymbol{F}_1^*$, $\boldsymbol{F}_2^*$), *позволяет найти компоненты силы* $\boldsymbol{F}_2^*$:

$$F_{2x}^* = fb, \quad F_{2y}^* = fa\cos\alpha, \quad F_{2z}^* = 2fa\sin\alpha.$$

Эти равенства задают направление силы $\boldsymbol{F}_2^*$ *и ее модуль*

$$F_2^* = \sqrt{F_{2x}^{*2} + F_{2y}^{*2} + F_{2z}^{*2}} = \sqrt{F_1^2 + 3F_2^2 + F_1^{*2}}.$$

Приравняв соответствующие компоненты главных моментов обеих систем сил и произведя некоторые упрощения, придем к системе уравнений, определяющей координаты x, y, z *точки приложения силы* F_2^*:

$$2y\sin\alpha - z\cos\alpha = a\sin\alpha\cos\alpha; \quad 2ax\sin\alpha - bz = ab\sin\alpha,$$
$$ax\cos\alpha - by = 0.$$

Эти уравнения определяют не одну точку приложения силы $\boldsymbol{F}_2^*$, а, как нетрудно проверить, целую прямую — линию действия этой силы:

$$\frac{2x-b}{b}=\frac{2y-a\cos\alpha}{a\cos\alpha}=\frac{z}{a\sin\alpha}.$$

Линия действия силы F_2^* проходит через вершину B клина и точку пересечения диагоналей его нижней грани.

67. О равнодействующей. Теорема Вариньона. Если система сил $(\boldsymbol{F}_1,\ \boldsymbol{F}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{F}_k)$, приложенная к твердому телу, эквивалентна одной силе $\boldsymbol{R}^*$, то эта сила называется *равнодействующей* данной системы сил.

Теорема. *Если система сил имеет равнодействующую, то эта равнодействующая $\boldsymbol{R}^*$ равна главному вектору $\boldsymbol{R}$, а ее момент относительно произвольного полюса O равен главному моменту $\boldsymbol{M}_O$ данной системы сил относительно этого полюса.*

Доказательство следует из определения равнодействующей и критерия эквивалентности двух систем сил, приложенных к твердому телу. Вторая часть приведенной теоремы носит название *теоремы Вариньона.*

68. Частные случаи условий равновесия твердого тела.

1. Из условий (1) следует, что под действием одной, не равной нулю, силы твердое тело не может находиться в равновесии (хотя бы потому, что $\boldsymbol{R}^{(e)}\neq 0$).

2. Под действием двух сил твердое тело при $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ находится в состоянии равновесия тогда и только тогда, когда оно покоится в начальный момент $t=t_0$, а силы при $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, во-первых, равны по величине и противоположно направлены, а во-вторых, имеют общую линию действия. Первое требование вытекает из условия $\boldsymbol{R}^{(e)}=0$, второе — из условия $\boldsymbol{M}_O^{(e)}=0$.

3. Если под действием трех сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ твердое тело находится в равновесии и линии действия двух сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ пересекаются, то все три силы лежат в одной плоскости и их линии действия пересекаются в одной точке. Это утверждение (которое часто называют *теоремой о трех силах)* сразу вытекает из условий (1) равновесия твердого тела. В самом деле, из условия $\boldsymbol{R}^{(e)}=0$ следует, что $\boldsymbol{F}_3=-(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)$, и поэтому сила $\boldsymbol{F}_3$ лежит в плоскости сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$. Замечая теперь, что моменты сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ относительно точки O пересечения линий их действия равны нулю, из условия $\boldsymbol{M}_O^{(e)}=0$ получаем, что линия действия силы $\boldsymbol{F}_3$ проходит через точку O.

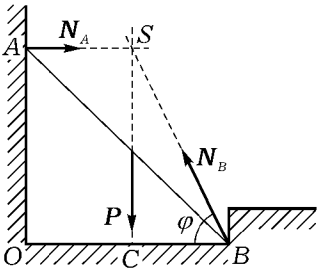

Рис. 66

Пример 1. *Однородный стержень AB длины $2l$ опирается одним концом на гладкую вертикальную стенку, а другим концом упирается в угол B, расстояние $OB = a$* (рис. 66). *Требуется найти направление реакции в точке B при равновесии стержня.*

Реакция в точке A ортогональна стенке, ее линия действия пересекает линию действия силы тяжести P в точке S. При равновесии третья сила — реакция в точке B — также проходит через точку S. Из $\triangle BCS$ находим

$$\operatorname{tg}\varphi = 2\frac{\sqrt{4l^2 - a^2}}{a}.$$

Замечание 2. *Очевидно, что при переносе вектора какой-либо силы системы вдоль линии его действия главный вектор системы сил и ее главный момент относительно заданного полюса остаются неизменными. Поэтому из критерия эквивалентности системы сил, приложенных к твердому телу, следует, что, не нарушая движения тела (и, в частности, его состояния равновесия), можно перенести точку приложения силы в произвольную точку тела, лежащую на линии действия этой силы, т. е. сила, приложенная к твердому телу, — скользящий вектор.*

4. *Системой сходящихся сил* называется система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке.

Теорема. *Система сходящихся сил имеет равнодействующую, и эта равнодействующая проходит через точку пересечения их линий действия.*

Доказательство следует из предыдущего замечания и закона сложения сил (п. 44). Пусть O — точка пересечения линий действия сил системы[1]. Тогда $\boldsymbol{M}_O^{(e)} = 0$ и условия (1) сводятся к одному векторному равенству $\boldsymbol{R}^{(e)} = 0$, которое в скалярной форме запишется в виде трех равенств (3).

Пример 2. *Полушар весом P и радиусом r привязан за край нитью к точке A гладкой вертикальной стены и опирается на стену выпуклой поверхностью в точке B* (рис. 67). *Какова длина нити, если в положении равновесия плоскость лежащего в основании большого круга об-*

[1]Может оказаться, что точка O не принадлежит твердому телу. Однако это не меняет наших рассуждений, так как точку O можно считать принадлежащей твердому телу, мысленно представив ее лежащей на одном из концов невесомого стержня, который вторым своим концом жестко прикреплен к телу.

разует с вертикалью угол $\pi/4$? Каково натяжение нити и давление полушара на стену?

На полушар действуют три силы: сила тяжести $\boldsymbol{P}$, давление стены $\boldsymbol{N}$ и натяжение нити $\boldsymbol{T}$. Линии действия сил $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{N}$ пересекаются в точке S. Согласно теореме о трех силах, в положении равновесия линия действия силы $\boldsymbol{T}$ (т. е. направление нити) также должна проходить через точку S. Таким образом, полушар находится в равновесии под действием системы сходящихся сил.

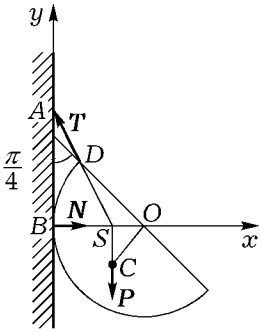

Рис. 67

В прямоугольном треугольнике OSC $\angle SOC = \pi/4$ и, так как центр тяжести C полушара отстоит от центра O окружности большого круга на расстоянии $OC = 3r/8$, $OS = OC\cos(\pi/4) = 3\sqrt{2}r/16$.

Обозначим α угол между направлением нити и вертикалью. В $\triangle ODS$ $\angle DOS = \pi/4$, $\angle OSD = \pi/2 + \alpha$, $\angle ODS = \pi/4 - \alpha$, поэтому

$$\frac{SD}{\sin(\pi/4)} = \frac{OD}{\sin(\pi/2+\alpha)} = \frac{OS}{\sin(\pi/4-\alpha)},$$

или

$$\sqrt{2}SD = \frac{r}{\cos\alpha} = \frac{3r}{8(\cos\alpha - \sin\alpha)}.$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{8}\left(\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{89}},\ \cos\alpha = \frac{8}{\sqrt{89}}\right), \qquad SD = \frac{\sqrt{178}}{16}r.$$

Из $\triangle ABS$ теперь находим длину нити

$$AD = \frac{\sqrt{89}}{10}(2-\sqrt{2})r.$$

Приравняв нулю суммы проекций сил $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{T}$ на оси системы координат Bxy, получим два уравнения, определяющих натяжение нити и давление полушара на стену:

$$T\cos\alpha = P, \qquad T\sin\alpha = N,$$

откуда найдем

$$T = \frac{\sqrt{89}}{8}P, \qquad N = \frac{5}{8}P.$$

Пример 3. *Три стержня AO, BO и CO прикреплены к вертикальной стене шарнирами и скреплены шарниром в точке O, к которой прикреплен груз весом P. Стержни AO и BO расположены в горизонтальной плоскости и образуют со стеной углы по $60°$. Третий стержень CO расположен в вертикальной плоскости, проходящей через O и середину AB, и образует со стеной угол $30°$. Определить усилия в стержнях AO, BO и CO. Весом самих стержней пренебречь.*

Для определения искомых величин рассмотрим равновесие точки (узла) O. На узел O действуют активная сила $\boldsymbol{P}$ и реакции $\boldsymbol{S}_A$, $\boldsymbol{S}_B$ и $\boldsymbol{S}_C$ стержней, образующие систему сходящихся сил, не лежащих в одной плоскости.

Условия равновесия запишем в виде равенств (3), выбрав систему координат, как показано на рис. 68. Имеем

$$\sum F_{ix} = S_A \cos 60° - S_B \cos 60° = 0,$$

$$\sum F_{iy} = -S_A \sin 60° - S_B \sin 60° - S_C \sin 30° = 0,$$

$$\sum F_{iz} = -S_C \cos 30° - P = 0.$$

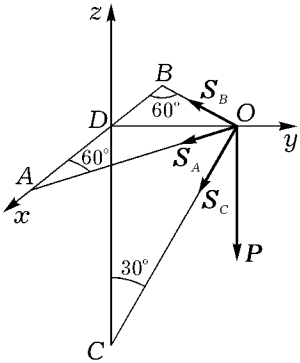

Рис. 68

Решив полученную систему уравнений, найдем

$$S_A = S_B = \frac{1}{3}P, \qquad S_C = -\frac{2\sqrt{3}}{3}P.$$

Величины S_A и S_B положительны, следовательно, реакции $\boldsymbol{S}_A$ и $\boldsymbol{S}_B$ направлены так, как показано на рис. 68 (стержни OA и OB растянуты), величина S_C отрицательна (стержень OC сжат).

5. Рассмотрим теперь равновесие твердого тела, к которому приложена плоская система сил, т. е. система сил, линии действия которых лежат в одной плоскости. Пусть этой плоскостью будет плоскость Oxy. Тогда проекции F_{iz} сил на ось Oz и координаты z_i, точек их приложения ($i = 1, 2, \ldots, k$) равны нулю и условия (3), (4) сводятся к трем равенствам

$$\sum_{i=1}^{k} F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{k} F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^{k} (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = 0. \tag{6}$$

Таким образом, *для равновесия свободного твердого тела при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ под действием плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы в момент $t = t_0$ тело покоилось, а суммы проекций сил*

на две координатные оси и сумма моментов сил относительно третьей оси при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ равнялись нулю.

Упражнение 1. *Показать, что условия равновесия твердого тела под действием плоской системы сил могут быть представлены и следующих, эквивалентных условию* (6), *формулировках: а) суммы моментов сил относительно каждой из трех произвольных, не лежащих на одной прямой, точек равны нулю* (*теорема о трех моментах*); *б) суммы моментов сил относительно каждой из двух произвольных точек и сумма проекций сил на произвольную ось, не перпендикулярную прямой, проходящей через эти точки, равны нулю.*

Пример 4. *Однородный стержень, изогнутый под прямым углом, имеющий оба колена одинаковой длины $2l$, опирается на край стола длины $AB = a = 2l/5$. Найти положение равновесия и давления N_A и N_B на края стола. Трением пренебречь.*

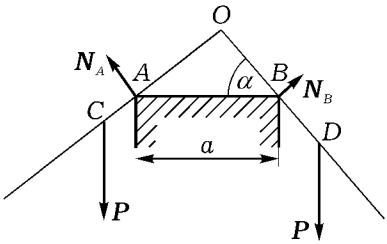

Рис. 69

Пусть положение равновесия определяется величиной α угла OBA (*рис.* 69). *Стержень находится в равновесии под действием плоской системы четырех сил, показанных на рис.* 69; *реакции в точках A и B ортогональны соответствующим коленам стержня. Приравняв нулю суммы проекций сил на оси, направленные по OC и OD, получим*

$$N_A = 2P\sin\alpha, \qquad N_B = 2P\cos\alpha.$$

Условие равенства нулю суммы моментов сил относительно точки O дает

$$\frac{2}{5}lN_A\sin\alpha + Pl\cos\alpha = \frac{2}{5}lN_B\cos\alpha + Pl\sin\alpha,$$

или

$$\frac{4}{5}(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) = \sin\alpha - \cos\alpha.$$

Последнее уравнение имеет три решения. Для первого решения

$$\sin\alpha = \cos\alpha, \qquad \alpha_1 = \frac{\pi}{4}, \qquad N_A = N_B = \sqrt{2}P.$$

Для второго и третьего решений

$$\frac{4}{5}(\sin\alpha + \cos\alpha) = 1, \quad \alpha_2 = \alpha_* = \frac{1}{2}\arcsin\frac{9}{16}, \quad \alpha_3 = \frac{\pi}{2} - \alpha_*,$$

$$N_A = \frac{P}{2}\sqrt{\frac{16 \mp 5\sqrt{7}}{2}}, \qquad N_B = \frac{P}{2}\sqrt{\frac{16 \pm 5\sqrt{7}}{2}}.$$

В последних двух равенствах верхний и нижний знаки отвечают соответственно значениям $\alpha = \alpha_2$, $\alpha = \alpha_3$.

Пример 5. *Два одинаковых однородных стержня весом* P *каждый соединены шарниром* B *и прикреплены шарнирами* A *и* C *к неподвижной опоре так, что стержень* AB *горизонтален, а стержень* BC *образует с вертикалью угол* α (рис. 70). *Определить реакции шарниров.*

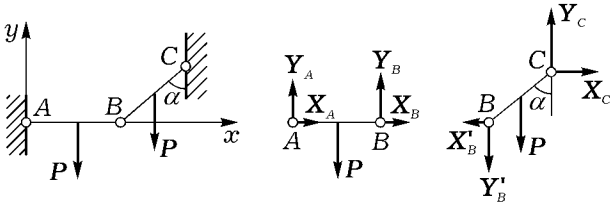

Рис. 70

Мысленно уберем шарнир B *и рассмотрим равновесие каждого из стержней в отдельности. На каждый из стержней действуют сила тяжести и реакции шарниров, которые мы представляем их компонентами в системе координат* Axy, *показанной на рис.* 70. *При этом, согласно третьему закону Ньютона, реакции* $\boldsymbol{X}'_B$, $\boldsymbol{Y}'_B$ *шарнира* B, *действующие на стержень* BC, *должны быть направлены противоположно реакциям* $\boldsymbol{X}_B$, $\boldsymbol{Y}_B$, *действующим на стержень* AB. *По величине же*

$$X'_B = X_B, \qquad Y'_B = Y_B.$$

Составим условия равновесия (6) *для каждого из стержней. Введя обозначение* $AB = BC = 2a$, *найдем для стержня* AB

$$\sum F_{ix} = X_A + X_B = 0, \qquad \sum F_{iy} = Y_A + Y_B - P = 0,$$
$$\sum m_{Az}(\boldsymbol{F}_i) = Y_B \cdot 2a - Pa = 0,$$

для стержня BC

$$\sum F_{ix} = -X_B + X_C = 0, \qquad \sum F_{iy} = -Y_B + Y_C - P = 0,$$
$$\sum m_{Bz}(\boldsymbol{F}_i) = -Pa\sin\alpha - X_C \cdot 2a\cos\alpha + Y_C \cdot 2a\sin\alpha = 0.$$

Из полученной системы шести уравнений с шестью неизвестными найдем

$$X_A = -X_B = -X_C = -P\operatorname{tg}\alpha, \quad Y_A = Y_B = \frac{1}{2}P, \quad Y_C = \frac{3}{2}P.$$

Направление реакции $\boldsymbol{X}_A$ *противоположно указанному на рисунке.*

69. Равнодействующая двух параллельных сил.

Теорема. *Две параллельные и одинаково направленные силы* $\boldsymbol{F}_1$ *и* $\boldsymbol{F}_2$ (рис. 71), *приложенные к твердому телу, имеют равнодействующую* $\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$; *эта равнодействующая лежит в плоскости сил* $\boldsymbol{F}_1$ *и* $\boldsymbol{F}_2$, *и ее линия действия делит отрезок, соединяющий точки* P_1 *и* P_2 *приложения сил, внутренним образом на части, обратно пропорциональные величинам* F_1 *и* F_2. *Две параллельные, не равные по величине и противоположно направленные силы* $\boldsymbol{F}_1$ *и* $\boldsymbol{F}_2$ *имеют равнодействующую* $\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$; *она направлена в сторону большей силы, лежит в плоскости сил* $\boldsymbol{F}_1$ *и* $\boldsymbol{F}_2$, *а линия ее действия делит отрезок* P_1P_2 *внешним образом на части, обратно пропорциональные величинам* F_1 *и* F_2.

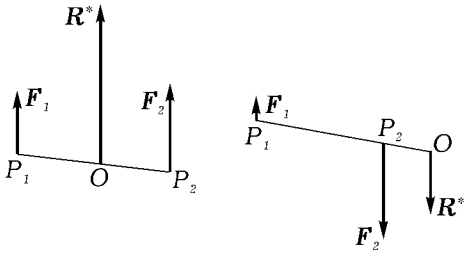

Рис. 71

Доказательство.

Если положить $\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$ и выбрать точку O так, что $F_1 \cdot OP_1 = F_2 \cdot OP_2$, то, согласно п. 66, система двух сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ будет эквивалентна системе, состоящей из одной силы $\boldsymbol{R}^*$ (т. е. $\boldsymbol{R}^*$ будет равнодействующей сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$). Действительно, обе системы сил имеют одинаковые главные векторы $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$ и одинаковые (равные нулю) главные моменты $\boldsymbol{M}_O$ относительно точки O.

70. Теория пар. Пусть параллельные силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$, приложенные к твердому телу, равны по модулю и противоположно направлены ($\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$). Такую систему сил называют *парой сил.* Плоскость, в которой лежат силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$, называют *плоскостью пары*, а расстояние d между линиями действия сил — *плечом пары* ($d \neq 0$).

Главный момент сил, составляющих пару, не зависит от точки, относительно которой он вычисляется. В самом деле, возьмем произвольную точку O пространства (рис. 72) и найдем главный момент сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ относительно этой точки:

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 =$$
$$= (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \times \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{F}_2.$$

Отсюда видно, что величина $\boldsymbol{M}_O$ не зависит от точки O.

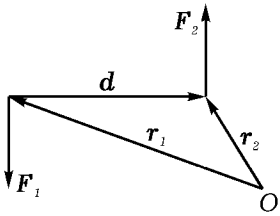

Рис. 72

Векторное произведение $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{F}_2$ называют *моментом пары.* Вектор $\boldsymbol{M}$ перпендикулярен плоскости пары и направлен так, что наблюдатель с конца вектора $\boldsymbol{M}$ «видит» векторы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ указывающими на вращение плоскости пары против часовой стрелки. Если F — модули сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$, то $M = dF$. Момент пары — это свободный вектор, и, как будет видно из последующих теорем этого пункта, он полностью определяет действие пары на твердое тело.

Теорема. *Пара сил не имеет равнодействующей.*

Доказательство.

Предположим противное, а именно предположим, что существует сила $\boldsymbol{R}^*$ такая, что $(\boldsymbol{F}_1,\ \boldsymbol{F}_2) \sim \boldsymbol{R}^*$. Возьмем произвольную точку O на линии действия силы $\boldsymbol{R}^*$. Согласно критерию эквивалентности систем сил, приложенных к твердому телу (п. 66), главный момент $\boldsymbol{M}_O$ системы сил $(\boldsymbol{F}_1,\ \boldsymbol{F}_2)$ относительно точки O должен равняться моменту силы $\boldsymbol{R}^*$ относительно той же точки, т. е. должен быть равен нулю. Но момент $\boldsymbol{M}_O$ равен моменту пары и, следовательно, отличен от нуля. Противоречие доказывает теорему.

Теорема. *Пары сил с равными моментами эквивалентны.*

Эта теорема сразу следует из теоремы п. 66 об эквивалентности систем сил, приложенных к твердому телу, так как у двух пар главные векторы равны (каждый из них равен нулю), а главные моменты (т. е. моменты пар) равны по условию.

Следствие 1. *Пару сил, приложенную к твердому телу, можно заменить другой парой в той же плоскости, если при такой замене не изменяется величина момента пары и его направление.*

Следствие 2. *Пару сил, приложенную к твердому телу, можно переносить в плоскость, параллельную плоскости пары.*

Теорема. *Совокупность нескольких пар с моментами* $\boldsymbol{M}_i$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ *эквивалентна одной паре, момент* $\boldsymbol{M}$ *которой равен сумме моментов данных пар:*

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \ldots + \boldsymbol{M}_n. \tag{7}$$

Эта теорема также является следствием теоремы п. 66 об эквивалентности систем сил, приложенных к твердому телу.

Так как для системы пар $\boldsymbol{R}^{(e)} = 0$, то условия (1) равновесия твердого тела сводятся к одному векторному равенству $\boldsymbol{M} = 0$, которое на основании формулы (7) запишется в виде трех скалярных равенств

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0. \tag{8}$$

Если все пары лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях, то условия равновесия запишутся в виде одного скалярного равенства. Например, если плоскости пар перпендикулярны оси Oz, то условием равновесия будет последнее из равенств (8).

Пример 1. *К граням многогранника приложены пары сил, моменты которых пропорциональны площадям соответствующих граней и направлены перпендикулярно соответствующим граням внутрь многогранника. Показать, что такая система сил является уравновешенной.*

Пусть S — площадь какой-либо грани, а M — модуль момента соответствующей пары. Тогда $M = kS$, где k — коэффициент пропорциональности ($k > 0$), одинаковый для всех граней.

Пару, приложенную к рассматриваемой грани, можно заменить эквивалентной системой сил, действующих по каждой из сторон грани в направлении движения часовой стрелки, если смотреть со стороны внешней нормали. Модуль каждой из этих сил равен $1/2ka$, где a — длина соответствующей стороны грани.

Если такую процедуру проделать для всех пар, приложенных к граням многогранника, то вдоль каждого ребра многогранника будут действовать две равные по модулю, но противоположно направленные силы. Следовательно, приложенная к многограннику система пар сил является уравновешенной.

71. Теорема Пуансо. В предыдущих пунктах были рассмотрены задачи о приведении системы сил, приложенных к твердому телу, в частных случаях системы сходящихся сил, параллельных сил и пар. Теперь рассмотрим задачу о приведении сил в самом общем случае.

Теорема (Пуансо). *Произвольная система сил, приложенных к твердому телу, эквивалентна системе, состоящей из одной силы, приложенной в какой-либо точке O тела (центре приведения) и равной главному вектору $\boldsymbol{R}$ данной системы сил, и одной пары, момент которой равен главному моменту $\boldsymbol{M}_O$ всех сил относительно точки O.*

Справедливость этой теоремы непосредственно следует из критерия эквивалентности систем сил, приложенных к твердому телу (п. 66).

Следствие 3 (о параллельном переносе силы). *Сила, приложенная в какой-либо точке твердого тела, эквивалентна той же силе, при-*

ложенной в другой точке этого тела, и паре, момент которой равен моменту данной силы относительно новой точки приложения.

Пример 1. *В точке $A(2,\ 2,\ 2)$ к твердому телу приложена сила $\boldsymbol{F}$ с компонентами $F_x = 1$, $F_y = -2$, $F_z = 3$. Не изменяя действия силы, перенести ее в новую точку приложении $B(-1,\ 4,\ 2)$.*

Момент данной силы относительно точки B имеет компоненты $M_x = -6$, $M_y = -9$, $M_z = -4$.

Следовательно, в результате перенесения получится сила $\boldsymbol{F}$ и пара с моментом, модуль которого $M = \sqrt{133}$, а направляющие косинусы равны

$$-\frac{6}{\sqrt{133}}, \quad -\frac{9}{\sqrt{133}}, \quad -\frac{4}{\sqrt{133}}.$$

72. Статические инварианты. Динамический винт. Главный вектор $\boldsymbol{R}$ системы сил, являясь суммой всех сил системы, не зависит от выбора центра приведения. Вектор $\boldsymbol{R}$ называют *первым статическим инвариантом.* В более узком смысле будем называть *первым статическим инвариантом* квадрат модуля вектора $\boldsymbol{R}$:

$$I_1 = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2. \tag{9}$$

Главный момент системы сил зависит от выбора центра приведения. Зависимость между главными моментами сил, приложенных к твердому телу, относительно двух различных центров приведения определяется формулой (5). Из этой формулы следует, что скалярное произведение главного момента и главного вектора системы сил не зависит от выбора центра приведения. Это произведение называют *вторым статическим инвариантом*:

$$I_2 = \boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{R}. \tag{10}$$

Из существования статических инвариантов следует, что проекция M^* главного момента системы сил на направление главного вектора не зависит от выбора центра приведения.

Совокупность силы и пары сил с моментом, коллинеарным силе, называется *динамическим винтом*, или *динамой.* По теореме Пуансо (п. 71), всякая система сил приводится к силе и паре. Возникает вопрос, нельзя ли так выбрать центр приведения, чтобы плоскость пары сил, о которой идет речь в теореме Пуансо, была перпендикулярна главному вектору, т. е. нельзя ли данную систему сил привести к динаме?

Теорема. *Если второй статический инвариант отличен от нуля, то систему сил можно привести к динаме.*

Доказательство.

Предположим, что для некоторого центра O приведения система сил приведена к силе $\boldsymbol{R}$ и паре сил с моментом $\boldsymbol{M}_O$, равным главному моменту системы сил относительно центра O. Выберем какую-либо неподвижную декартову прямоугольную систему координат с началом в точке O. Пусть R_x, R_y, R_z и M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz} — соответственно проекции главного вектора и главного момента на оси этой системы координат.

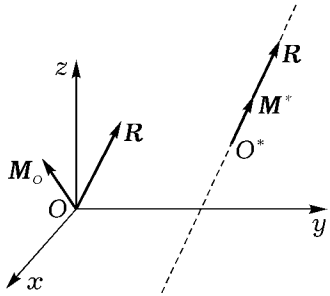

Рис. 73

Пусть O^* (рис. 73) — новый центр приведения, а x, y, z — его координаты. Чтобы убедиться в справедливости теоремы, достаточно показать, что центр приведения O^* может быть выбран так, чтобы главный момент $\boldsymbol{M}_{O^*}$ был коллинеарен $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{M}_{O^*} = p\boldsymbol{R}. \tag{11}$$

Величина p отлична от нуля, так как из (10) и (11) следует, что

$$p = \frac{I_2}{I_1},$$

а величина I_2 не равна нулю по условию теоремы.

Использовав формулу (5), перепишем условие (11) в виде равенства

$$\boldsymbol{M}_O + \overline{O^*O} \times \boldsymbol{R} = p\boldsymbol{R} \tag{12}$$

Это равенство определяет не одну точку O^*, а целую прямую, обладающую тем свойством, что для выбранного на ней центра система сил приводится к динаме. В скалярной форме уравнение (12) имеет вид

$$\frac{M_{Ox} + (zR_y - yR_z)}{R_x} = \frac{M_{Oy} + (xR_z - zR_x)}{R_y} = \frac{M_{Oz} + (yR_x - xR_y)}{R_z} = p. \tag{13}$$

Прямая (13) называется *центральной осью* системы сил. Если $p > 0$, то динамический винт называется *правым*, если $p < 0$ — *левым*.

73. Частные случаи приведения системы сил. Пусть $I_2 = 0$, а $I_1 \neq 0$. Это возможно, либо когда $\boldsymbol{M}_O = 0$, либо когда $\boldsymbol{M}_O$ и $\boldsymbol{R}$ ортогональны. Из критерия эквивалентности системы сил, приложенных к

твердому телу, следует, что в первом и во втором случаях система сил приводится к равнодействующей. Равнодействующая лежит на прямой, задаваемой уравнением (13) (при $p = 0$). В частности, если $\boldsymbol{M}_O = 0$, то равнодействующая проходит через данный центр приведения O.

Пусть теперь $I_2 = I_1 = 0$, а $\boldsymbol{M}_O \neq 0$. В этом случае система сил приводится к паре с моментом $\boldsymbol{M}_O$.

Наконец, если $I_2 = I_1 = 0$ и $\boldsymbol{M}_O = 0$, то система сил является уравновешенной.

В таблице представлены все возможные частные случаи приведения системы сил, приложенных к твердому телу. В последнем столбце таблицы для сравнения указаны соответствующие им аналоги в кинематике твердого тела.

$\boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{M}_O$	Случай приведения	Аналог в кинематике
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	динамический винт (динама)	мгновенно винтовое движение (кинематический винт)
$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$ $= 0$	равнодействующая	мгновенное вращение
$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	пара сил	мгновенно поступательное движение
$= 0$	$= 0$	$= 0$	уравновешенная система сил	покой

Упражнение 2. *Показать, что плоская система сил и система параллельных сил в пространстве не приводятся к динаме.*

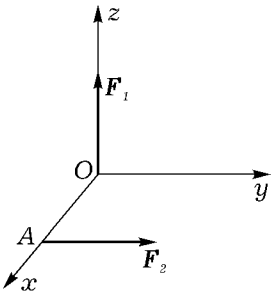

Рис. 74

Пример 1. *К твердому телу приложена система сил: $F_1 = 1$ Н, направленная по Oz, и $F_2 = 1$ Н, направленная параллельно Oy, как указано на рис. 74, где $OA = 1$ м. Привести эту систему сил к простейшему виду, а также найти наименьшую силу, которую нужно приложить к точке O, чтобы получающаяся при этом система трех сил приводилась к равнодействующей.*

Для главного вектора и главного момента имеем $\boldsymbol{R}' = (0,\ 1,\ 1)$, $\boldsymbol{M}'_O = (0,\ 0,\ 1)$. Подсчитываем кинематические инварианты: $I_1 = \boldsymbol{R}^2 = 2$, $I_2 = \boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{R} = 1$. Так как $I_2 \neq 0$, то система сил $(\boldsymbol{F}_1,\ \boldsymbol{F}_2)$

приводится к динаме. Параметр динамы $p = I_2/I_1 = 1/2$. *Для момента* $\boldsymbol{M}$ *динамы получаем* $\boldsymbol{M}' = p\boldsymbol{R}' = (0,\ 1/2,\ 1/2)$.

Уравнение (13) *центральной оси получает вид*

$$\frac{z-y}{0} = \frac{x}{1} = \frac{1-x}{1} = \frac{1}{2},$$

или $z = y$, $x = 1/2$. *Центральная ось проходит через середину отрезка* OA, *ортогональна оси* Ox *и составляет углы* $\pi/4$ *с осями* Oy *и* Oz.

Если к данной системе присоединить силу $\boldsymbol{F}_3$, $\boldsymbol{F}_3' = (X,\ Y,\ Z)$, *приложенную в начале координат, то главный момент не изменится, а для главного вектора получаем* $\boldsymbol{R}' = (X,\ Y+1,\ Z+1)$.

Условие существования равнодействующей $\boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{R} = 0$ *приводит к равенству* $Z + 1 = 0$, *откуда* $Z = -1$. *Поэтому* $\boldsymbol{F}_3' = (X,\ Y,\ -1)$, *где* X, Y *произвольны. Величина* $F_3 = \sqrt{X^2 + Y^2 + 1}$ *имеет наименьшее значение при* $X = Y = 0$. *Отсюда следует, что* $\boldsymbol{F}_3 = -\boldsymbol{F}_1$.

Глава V
Геометрия масс

§ 1. Центр масс. Момент инерции

74. Центр масс. Рассмотрим систему материальных точек P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$). Пусть m_ν — масса, а $\boldsymbol{r}_\nu$ — радиус-вектор точки P_ν относительно начала некоторой системы координат $Oxyz$.

Центром масс системы называется геометрическая точка C пространства, определяемая радиусом-вектором

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{r}_\nu}{M}, \tag{1}$$

где M — масса системы,

$$M = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu.$$

Центр масс системы называют также ее *центром инерции.*

75. Момент инерции системы относительно оси. Радиус инерции. Пусть расстояние точки P_ν до некоторой оси u равно ρ_ν. Тогда величина

$$J_u = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \rho_\nu^2$$

называется *моментом инерции системы относительно оси u.*

Момент инерции J_u можно записать в виде $M\rho^2$; положительная величина ρ называется *радиусом инерции* системы относительно оси u.

Замечание 1. *В конкретных задачах при нахождении центра масс и моментов инерции сплошных тел суммы в выражениях для $\boldsymbol{r}_C$, M, J_u переходят в интегралы.*

Упражнение 1. *Полярным моментом инерции относительно точки O называется величина*

$$J_0 = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu r_\nu^2.$$

Показать, что центр масс системы можно определить как такую точку пространства, для которой полярный момент инерции наименьший. Отсюда, в частности, следует, что положение центра масс в пространстве не зависит от конкретного выбора системы координат.

Пример 1. *Вычислим моменты инерции однородного прямоугольного параллелепипеда массой m со сторонами a, b, c относительно прямых, проходящих через центр и параллельных ребрам.*

Выберем систему координат $Oxyz$ с началом в центре параллелепипеда, оси которой параллельны соответствующим ребрам (рис. 75). *Разобьем параллелепипед на ряд элементарных масс dm в форме прямоугольных параллелепипедов со сторонами dx, dy, dz. Тогда*

$$dm = \frac{m}{abc} dx\, dy\, dz.$$

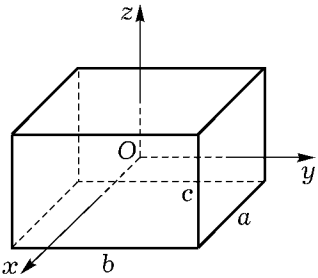

Рис. 75

Пусть x, y, z — координаты одной из таких элементарных масс.

Предварительно вычисляем интегралы:

$$\int x^2 dm = \frac{m}{abc} \int\limits_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2\, dx\, dy\, dz = \frac{m}{abc} \cdot c \cdot b \cdot \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2\, dx = \frac{1}{12} m a^2;$$

аналогично

$$\int y^2\, dm = \frac{1}{12} m b^2 \quad \text{и} \quad \int z^2\, dm = \frac{1}{12} m c^2.$$

Поэтому для искомых моментов инерции получаем

$$J_x = \int (y^2 + z^2) dm = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2),$$

$$J_y = \int (z^2 + x^2) dm = \frac{1}{12} m (c^2 + a^2),$$

$$J_z = \int (x^2 + y^2) dm = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2).$$

Чтобы получить момент инерции тонкого однородного стержня длиной a относительно оси z, перпендикулярной стержню и проходящей

через его середину, можно взять третье из этих равенств и положить в нем $b = 0$. Получим

$$J_z = ma^2/12.$$

Пример 2. *Определим момент инерции относительно оси вращения однородной цилиндрической круговой трубки массой m, внутренний радиус которой равен r, а внешний R* (рис. 76).

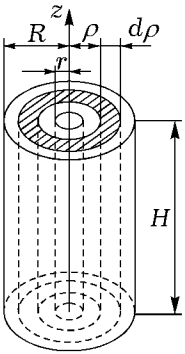

Рис. 76

За элементарную массу dm примем массу цилиндрического слоя, образуемую двумя коаксиальными цилиндрами радиусов ρ и $\rho + d\rho$. Имеем

$$dm = \frac{m}{\pi(R^2 - r^2)H} 2\pi\rho H \cdot d\rho = \frac{2m\rho\, d\rho}{R^2 - r^2},$$

$$J_z = \int \rho^2\, dm = \frac{2m}{R^2 - r^2} \int\limits_r^R \rho^3\, d\rho = \frac{1}{2} m(R^2 + r^2).$$

При $r = 0$ отсюда следует формула для момента инерции сплошного цилиндра относительно его оси:

$$J_z = mR^2/2.$$

Пример 3. *Вычислим момент инерции однородного шара массой m и радиусом R относительно диаметра.*

Поместив начало системы координат $Oxyz$ в центре шара, из симметрии фигуры заключаем, что $J_x = J_y = J_z$. Обозначим этот одинаковый для всех диаметров момент инерции шара через J. Тогда

$$3J = J_x + J_y + J_z = 2\int (x^2 + y^2 + z^2) dm.$$

За элементарную массу dm примем массу сферического слоя, образуемого двумя концентрическими сферами радиусов ρ и $\rho + d\rho$. Тогда

$$dm = \frac{m}{4/3\pi R^3} 4\pi\rho^2\, d\rho = \frac{3m}{R^3}\rho^2\, d\rho.$$

Поэтому

$$J = \frac{2}{3}\int (x^2 + y^2 + z^2) dm = \frac{2}{3} \cdot \frac{3m}{R^3} \int\limits_0^R \rho^4\, d\rho = \frac{2}{5}\, mR^2.$$

Пример 4. *Найдем момент инерции конуса относительно его оси. Масса конуса равна m, радиус основания R.*

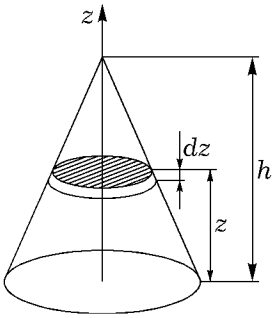

Рис. 77

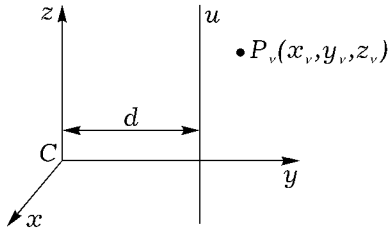

Рис. 78

За элементарную массу dm примем массу тонкого диска толщиной dz, плоскость которого параллельна основанию конуса и отстоит от него на расстоянии z (рис. 77). *Тогда*

$$dm = \frac{m}{1/3\pi R^2 h} \cdot \pi \left[\frac{(h-z)R}{h}\right]^2 dz = \frac{3m}{h^3}(h-z)^2\, dz$$

и для искомого момента инерции получаем

$$J_z = \int \frac{1}{2}\left[\frac{(h-z)R}{h}\right]^2 dm = \frac{3mR^2}{2h^5}\int_0^h (h-z)^4\, dz = \frac{3}{10}mR^2.$$

76. Моменты инерции относительно параллельных осей. Момент инерции, очевидно, зависит от выбора оси u. Найдем зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей. Сначала покажем, что если известен момент инерции J_C относительно некоторой оси, проходящей через центр масс системы, то момент инерции J_u относительно любой параллельной оси может быть найден по формуле

$$J_u = J_C + Md^2, \tag{2}$$

где d — расстояние между осями[1].

Действительно, поместим начало координат в центре масс C, направив ось Cz по оси, относительно которой известен момент инерции J_C, а ось Cy так, чтобы она пересекала ось u, параллельную оси Cz

[1]Это утверждение называется *теоремой Гюйгенса–Штейнера.*

(рис. 78). Тогда

$$J_u = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu[x_\nu^2 + (y_\nu - d)^2] = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(x_\nu^2 + y_\nu^2) -$$
$$-2d\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu y_\nu + \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\right) d^2.$$

Первая сумма в полученном выражении есть J_c, вторая сумма обращается в нуль, так как она равна My_c, а для выбранной системы координат $y_c = 0$, третья сумма равна массе системы M. Справедливость формулы (2) доказана.

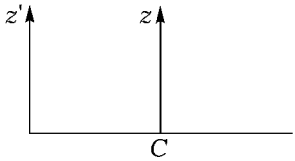

Рис. 79

Из формулы (2) следует соотношение между моментами инерции относительно любых параллельных осей u_1 и u_2.

$$J_{u_1} = J_{u_2} + M(d_1^2 - d_2^2),$$

где d_1 и d_2 — расстояния осей u_1 и u_2 от центра масс.

Пример 1. *Подсчитаем момент инерции тонкого однородного стержня длиной a и массой m относительно оси z, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец* (рис. 79).

Так как (*см. пример* 1 *п.* 75) $J_C = ma^2/12$, *то*

$$J_{z'} = J_C + m(a/2)^2 = ma^2/3.$$

§ 2. Тензор и эллипсоид инерции

77. Моменты инерции относительно осей, проходящих через одну и ту же точку. Рассмотрим ось u, проходящую через начало системы координат $Oxyz$. Косинусы углов, образуемых осью u с осями Ox, Oy, Oz, обозначим соответственно α, β, γ. Тогда (рис. 80)

$$J_u = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \rho_\nu^2 = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu[(x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2) - (x_\nu\alpha + y_\nu\beta + z_\nu\gamma)^2] =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu[(1-\alpha^2)x_\nu^2 + (1-\beta^2)y_\nu^2 + (1-\gamma^2)z_\nu^2 -$$
$$-2\alpha\beta x_\nu y_\nu - 2\alpha\gamma x_\nu z_\nu - 2\beta\gamma y_\nu z_\nu].$$

На основании тождества $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ заменяем $1 - \alpha^2$, $1 - \beta^2$, $1 - \gamma^2$ соответственно на $\beta^2 + \gamma^2$, $\alpha^2 + \gamma^2$, $\alpha^2 + \beta^2$ и приводим подобные

члены в выражении, стоящем в квадратных скобках. Получаем

$$J_u = J_x\alpha^2 + J_y\beta^2 + J_z\gamma^2 - 2J_{xy}\alpha\beta - 2J_{xz}\alpha\gamma - 2J_{yz}\beta\gamma, \tag{1}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{gathered} J_x = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(y_\nu^2 + z_\nu^2), \quad J_y = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(z_\nu^2 + x_\nu^2), \\ J_z = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(x_\nu^2 + y_\nu^2), \end{gathered} \tag{2}$$

$$J_{xy} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_\nu y_\nu, \quad J_{xz} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_\nu z_\nu, \quad J_{yz} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu y_\nu z_\nu. \tag{3}$$

Величины (2), (3), очевидно, не зависят от выбора оси u. Величины (2) называются *осевыми моментами инерции*: J_x — это момент инерции относительно оси Ox, J_y — относительно оси Oy и J_z — относительно оси Oz. Величины (3) называются *центробежными моментами инерции*. Осевой момент инерции представляет собой меру инертности системы при ее вращении вокруг соответствующей оси. Центробежные моменты инерции можно трактовать как меру неуравновешенности масс системы: они характеризуют несимметричность распределения масс относительно координатных плоскостей.

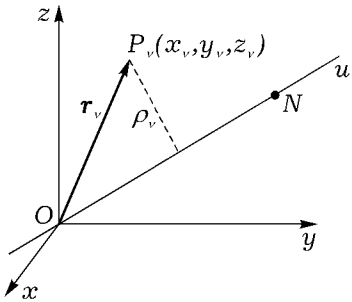

Рис. 80

Для различных точек O осевые и центробежные моменты инерции различны. Они изменяются также при повороте системы координат $Oxyz$ вокруг рассматриваемой точки O. Можно показать, что при повороте величины (2), (3) изменяются в соответствии с формулами, определяющими симметрический тензор второго ранга. Матрица $\mathbf{J}$ вида

$$\mathbf{J} = \begin{Vmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{Vmatrix} \tag{4}$$

определяет тензор второго ранга, который называют *тензором инерции* системы для точки O.

78. Эллипсоид инерции. Главные оси инерции. Формула (1) допускает наглядную геометрическую интерпретацию. На оси u отложим по обе стороны от точки O отрезки такой длины ON (рис. 80), что

$$ON = 1/\sqrt{J_u},$$

и найдем геометрическое место точек $N(x,\ y,\ z)$. Имеем

$$\alpha = \sqrt{J_u}x, \qquad \beta = \sqrt{J_u}y, \qquad \gamma = \sqrt{J_u}z.$$

Подставив эти значения α, β и γ в равенство (1), получим

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy}xy - 2J_{xz}xz - 2J_{yz}yz = 1. \tag{5}$$

Поверхность второго порядка (5) — эллипсоид. Действительно, отрезок ON имеет конечную длину, так как $J_u \geqslant \delta > 0$. Исключение составляет предельный случай, когда все точки P_ν лежат на одной прямой (например, случай бесконечно тонкого стержня). Тогда момент инерции $J_u = 0$, и эллипсоид инерции превращается в цилиндр.

Эллипсоид (5) называется *эллипсоидом инерции* системы для точки O. Если точка O совпадает с центром масс, то эллипсоид (5) называется *центральным эллипсоидом инерции.* При повороте системы координат $Oxyz$ уравнение эллипсоида инерции меняется. Главные оси эллипсоида инерции называются *главными осями инерции* системы для точки O. В системе координат $Ox_*y_*z_*$, оси которой направлены по главным осям эллипсоида инерции, уравнение (5) имеет вид

$$Ax_*^2 + By_*^2 + Cz_*^2 = 1. \tag{6}$$

В этой системе координат центробежные моменты инерции равны нулю: $J_{x_*y_*} = J_{x_*z_*} = J_{y_*z_*} = 0$. Величины A, B, C — моменты инерции относительно главных осей Ox_*, Oy_*, Oz_* соответственно. Они называются *главными моментами инерции* системы для точки O. Если точка O совпадает с центром масс, то оси Ox_*, Oy_*, Oz_* называются *главными центральными осями инерции*, а величины A, B, C — *главными центральными моментами инерции.*

Из аналитической геометрии известно, что для любого эллипсоида существуют главные оси. Величины A, B, C являются собственными значениями матрицы (4). Если они различны, то главные оси определяются однозначно. Если эллипсоид инерции для точки O является эллипсоидом вращения вокруг оси Oz_*, то за его главные оси можно принять ось Oz_* и любые две ортогональные оси, лежащие в экваториальной плоскости эллипсоида. Если $A = B = C$, то все оси, проходящие через точку O, являются для нее главными.

Если эллипсоид инерции для точки O построен, то момент инерции относительно какой-либо оси u равен $1/ON^2$, где ON — отрезок, соединяющий точку O с точкой пересечения оси u с эллипсоидом. Наибольшую величину имеет момент инерции относительно наименьшей оси эллипсоида, а наименьшую — относительно наибольшей его оси.

Замечание 2. *Пусть при каком-либо выборе системы координат $Oxyz$ не все три центробежных момента инерции равны нулю, а только два из них, например $J_{xz} = J_{yz} = 0$, а $J_{xy} \neq 0$. Покажем, что ось Oz будет главной. Чтобы убедиться в этом, надо показать, что систему координат $Oxyz$ можно повернуть на такой угол α вокруг оси Oz, что в повернутой системе координат $Ox'y'z$ уже все центробежные моменты инерции будут равны нулю. Действительно, пусть система координат $Ox'y'z$ получается из $Oxyz$ поворотом вокруг оси Oz на угол α против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси Oz. Тогда координаты точки P_ν в исходной и повернутой системах координат связаны соотношениями*

$$x'_\nu = x_\nu \cos\alpha + y_\nu \sin\alpha, \quad y'_\nu = -x_\nu \sin\alpha + y_\nu \cos\alpha, \quad z'_\nu = z_\nu. \tag{7}$$

Используя равенство (7) *и условие $J_{xz} = J_{yz} = 0$, получаем*

$$J_{x'z'} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x'_\nu z'_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (x_\nu \cos\alpha + y_\nu \sin\alpha) z_\nu =$$

$$= \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_\nu z_\nu\right) \cos\alpha + \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu y_\nu z_\nu\right) \sin\alpha = J_{xz} \cos\alpha + J_{yz} \sin\alpha = 0.$$

Аналогично получаем, что $J_{y'z'} = 0$, т. е. центробежные моменты инерции, которые были равны нулю до поворота системы координат, остаются равными нулю при любом угле поворота вокруг оси Oz. Вычислим теперь третий центробежный момент инерции:

$$J_{x'y'} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x'_\nu y'_\nu =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (x_\nu \cos\alpha + y_\nu \sin\alpha)(-x_\nu \sin\alpha + y_\nu \cos\alpha) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (x_\nu^2 - y_\nu^2)\right) \sin 2\alpha + \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_\nu y_\nu\right) \cos 2\alpha.$$

Замечая, что

$$\sum_{\nu=1}^{N} (x_\nu^2 - y_\nu^2) = J_y - J_x$$

и приравнивая $J_{x'y'}$ нулю, получаем уравнение для нахождения угла α:

$$-\frac{1}{2}(J_y - J_x)\sin 2\alpha + J_{xy}\cos 2\alpha = 0$$

Если $J_x = J_y$, то $\alpha = \pi/4$, если же $J_x \neq J_y$, то

$$\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}.$$

Таким образом, ось Oz, отвечающая общему индексу (в рассмотренном случае индексу z) равных нулю центробежных моментов инерции, является главной осью инерции для точки O.

Упражнение 2. *Показать, что если между радиусом основания R однородного прямого кругового конуса и его высотой h выполняется соотношение $R = 2h$, то эллипсоид инерции конуса для его вершины есть сфера.*

Упражнение 3. *Показать, что: а) главная ось инерции остается главной для всех своих точек тогда и только тогда, когда она является главной центральной осью инерции; б) если в системе есть ось материальной симметрии, то эта ось является главной центральной осью инерции; в) если у системы есть плоскость материальной симметрии, то любая прямая, перпендикулярная этой плоскости, является главной осью инерции системы для точки, в которой эта прямая пересекает плоскость симметрии; г) для однородного тела вращения ось вращения и любые две взаимно перпендикулярные и перпендикулярные ей оси образуют систему главных осей инерции.*

79. Свойства главных моментов инерции. Не всякий эллипсоид может служить эллипсоидом инерции. Действительно, если за оси Ox_*, Oy_*, Oz_* приняты главные оси инерции для точки O, то уравнение эллипсоида инерции имеет вид (6), где

$$A = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(y_{*\nu}^2 + z_{*\nu}^2), \quad B = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(z_{*\nu}^2 + x_{*\nu}^2),$$

$$C = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(x_{*\nu}^2 + y_{*\nu}^2).$$

Главные моменты инерции (как, впрочем, и осевые моменты инерции (2)) удовлетворяют неравенствам треугольника

$$A + B \geqslant C, \qquad A + C \geqslant B, \qquad B + C \geqslant A. \tag{8}$$

Проверим первое из этих неравенств. Имеем

$$A + B = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (x_{*\nu}^2 + y_{*\nu}^2 + 2z_{*\nu}^2) =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (x_{*\nu}^2 + y_{*\nu}^2) + 2\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu z_{*\nu}^2 = C + 2\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu z_{*\nu}^2 \geqslant C,$$

причем знак равенства возможен только для случая, когда все точки системы лежат в плоскости Ox_*y_*, т. е. когда $z_{*\nu} = 0$ для всех ν. Второе и третье неравенства из (8) проверяются аналогично.

Для графического представления области допустимых значений моментов инерции введем обозначения $\theta_A = A/B$, $\theta_C = C/B$. Неравенства (8) запишутся в виде

$$\theta_A + 1 \geqslant \theta_C, \quad \theta_A + \theta_C \geqslant 1, \quad 1 + \theta_C \geqslant \theta_A. \tag{9}$$

Область допустимых значений параметров показана на рис. 81 штриховкой. Она представляет собой бесконечную полосу, лежащую между параллельными прямыми $\theta_A + 1 = \theta_C$ и $1 + \theta_C = \theta_A$ и расположенную правее и выше прямой $\theta_A + \theta_C = 1$. Участки границы области допустимых значений параметров $\theta_A + 1 = \theta_C$, $\theta_A + \theta_C = 1$ и $1 + \theta_C = \theta_A$ отвечают системам материальных точек, лежащим соответственно в плоскостях Ox_*y_*, Ox_*z_* и Oy_*z_*. Точка $(1, 0)$ на рис. 81, точка $(0, 1)$ и бесконечно удаленные точки прямых $\theta_A + 1 = \theta_C$, $1 + \theta_C = \theta_A$ отвечают системам материальных точек, лежащим соответственно на осях Oz_*, Ox_* и Oy_*.

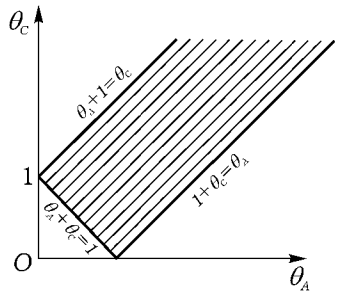

Рис. 81

Упражнение 4. *Показать, что симметрическую матрицу, образованную элементами J_{ij} $(i, j = 1, 2, 3;\ J_{ij} = J_{ji})$, можно рассматривать как матрицу тензора инерции реального твердого тела тогда и только тогда, когда одновременно выполняются неравенства*[1]

$$x_1 > 0, \qquad x_1x_2 - J_{12}^2 > 0,$$
$$x_1x_2x_3 - x_1J_{23}^2 - x_2J_{13}^2 - x_3J_{12}^2 - 2J_{12}J_{13}J_{23} > 0,$$

где

$$x_1 = \frac{J_{22} + J_{33} - J_{11}}{2}, \quad x_2 = \frac{J_{11} + J_{33} - J_{22}}{2}, \quad x_3 = \frac{J_{11} + J_{22} - J_{33}}{2}.$$

[1]См.: Пеньков В. И., Сарычев В. А. Оптимизация гравитационной системы стабилизации спутников с одностепенным подвесом на слабоэллиптической орбите, М.: Ин-т прикладной математики АН СССР, препринт № 90, 1974.

Глава VI
Основные теоремы и законы динамики

§ 1. Основные динамические величины механической системы

80. Количество движения системы. *Количеством движения* механической системы называется вектор

$$\boldsymbol{Q} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu. \tag{1}$$

Так как $M\boldsymbol{r}_C = \sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{r}_\nu$, то $M\boldsymbol{v}_C = \sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{Q}$. Таким образом,

$$\boldsymbol{Q} = M\boldsymbol{v}_C, \tag{2}$$

т. е. количество движения системы равно массе системы, умноженной на скорость ее центра масс.

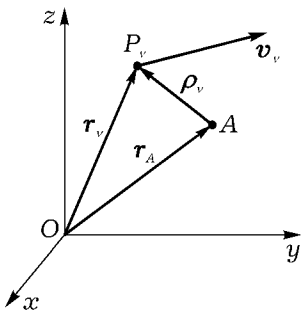

Рис. 82

81. Главный момент количеств движения (кинетический момент) системы. Пусть $\boldsymbol{\rho}_\nu$ — радиус-вектор точки P_ν системы относительно некоторой точки A, называемой *центром* (рис. 82). *Моментом количества движения* (*кинетическим моментом*) точки P_ν *относительно центра* A называется вектор $\boldsymbol{K}_{\nu A}$, определяемый по формуле

$$\boldsymbol{K}_{\nu A} = \boldsymbol{\rho}_\nu \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu.$$

Моментом количества движения (*кинетическим моментом*) *точки* P_ν *относительно оси* называется проекция на эту ось момента количества движения точки относительно любого выбранного на данной оси центра. В независимости момента количества движения относительно оси от выбора центра на этой оси можно убедиться точно так же, как в п. 49 при определении момента силы относительно оси.

Главным моментом количеств движения (*кинетическим моментом*) *системы относительно центра* A называется величина

$$\boldsymbol{K}_A = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_\nu \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu. \tag{3}$$

Главным моментом количеств движения (*кинетическим моментом*) *системы относительно оси* называется проекция на эту ось главного момента количеств движения системы относительно любого выбранного на данной оси центра.

При изменении центра кинетический момент изменяется. Найдем зависимость между его значениями для двух различных центров A и B. Пусть $\boldsymbol{\rho}_{\nu A}$ и $\boldsymbol{\rho}_{\nu A}$ — радиусы-векторы точки P_ν соответственно относительно центров A и B. Тогда

$$\boldsymbol{K}_B = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_{\nu B} \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{\rho}_{\nu A} + \overline{BA}) \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_{\nu A} \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu + \overline{BA} \times \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{K}_A + \overline{BA} \times \boldsymbol{Q}.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{K}_B = \boldsymbol{K}_A + \overline{BA} \times \boldsymbol{Q}. \tag{4}$$

Установим связь между значениями кинетического момента системы относительно какого-либо произвольного центра и относительно центра масс системы. Предварительно введем важное здесь и в дальнейшем понятие *движения системы относительно ее центра масс.* Таким движением называется движение точек системы относительно поступательно движущейся системы координат с началом в центре масс системы. Эта система координат называется еще *кениговой системой координат.*

Покажем, что абсолютный кинетический момент $\boldsymbol{K}_C$ системы относительно центра масс C равен относительному кинетическому моменту $\boldsymbol{K}_{Cr}$ относительно C. Действительно, пусть $\boldsymbol{v}_C$ — абсолютная скорость центра масс, $\boldsymbol{v}_\nu$ — абсолютная скорость точки P_ν системы, $\boldsymbol{v}_{\nu r}$ — скорость точки P_ν в ее движении относительно центра масс. В силу того что кенигова система координат движется поступательно, переносные скорости всех точек системы одинаковы и равны $\boldsymbol{v}_C$. Поэтому абсолютная скорость точки P_ν, участвующей в сложном движении, будет определяться формулой

$$\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{\nu r}. \tag{5}$$

Пусть $\boldsymbol{\rho}_{\nu r}$ — радиус-вектор точки P_ν относительно центра масс. Тогда

$$\boldsymbol{K}_{Cr} = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_{\nu r} \times m_\nu \boldsymbol{v}_{\nu r}. \tag{6}$$

Вычислим теперь абсолютный кинетический момент системы относительно точки C:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}_C &= \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_{\nu r} \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_{\nu r} \times m_\nu (\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{\nu r}) = \\ &= \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{\rho}_{\nu r} \right) \times \boldsymbol{v}_C + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_{\nu r} \times m_\nu \boldsymbol{v}_{\nu r}. \end{aligned} \tag{7}$$

Так как центр масс находится в начале кениговой системы координат ($\boldsymbol{\rho}_{Cr} = 0$), то $\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{\rho}_{\nu r} = M \boldsymbol{\rho}_{Cr} = 0$ и, следовательно, из (6), (7) вытекает, что $\boldsymbol{K}_C = \boldsymbol{K}_{Cr}$.

Замечая, что

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_{\nu r} = M \boldsymbol{v}_{Cr} = 0,$$

т. е. количество движения системы в ее движении относительно центра масс равно нулю, из (4) получаем, что кинетический момент системы в ее движении относительно центра масс одинаков для всех точек пространства и, согласно предыдущему, равен $\boldsymbol{K}_C$.

Поэтому абсолютный кинетический момент системы относительно центра O равен сумме ее относительного кинетического момента (одинакового для всех точек пространства) и момента вектора $\boldsymbol{Q}$ относительно центра O в предположении, что он приложен в центре масс системы.

82. Кинетический момент твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки. Примем неподвижную точку O тела за начало системы координат $Oxyz$, оси которой неподвижны относительно тела. Пусть $\boldsymbol{\rho}_\nu$ — радиус-вектор точки P_ν тела относительно начала координат, его проекции на оси Ox, Oy, Oz обозначим x_ν, y_ν, z_ν. Проекции мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела на те же оси обозначим p, q, r.

Вычислим кинетический момент тела относительно точки O. Учитывая, что скорость $\boldsymbol{v}_\nu$ точки P_ν равна $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_\nu$, имеем

$$\boldsymbol{K}_O = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_\nu \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_\nu \times m_\nu (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{\rho}_\nu \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_\nu).$$

Используя формулу $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$ для двойного векторного произведения трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, выражение для $\boldsymbol{K}_O$ можно переписать в виде

$$\boldsymbol{K}_O = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \rho_\nu^2 \boldsymbol{\omega} - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\rho}_\nu) \boldsymbol{\rho}_\nu =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2) \boldsymbol{\omega} - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (p x_\nu + q y_\nu + r z_\nu) \boldsymbol{\rho}_\nu.$$

Отсюда получаем следующее выражение для проекции K_{Ox} вектора $\boldsymbol{K}_O$ на ось Ox:

$$K_{Ox} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2) p - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (p x_\nu + q y_\nu + r z_\nu) x_\nu =$$

$$= \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (y_\nu^2 + z_\nu^2) \right) p - \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_\nu y_\nu \right) q - \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_\nu z_\nu \right) r.$$

Аналогично можно выписать выражения для проекций K_{Oy} и K_{Oz}. Учтя формулы (2), (3) п. 77 для осевых и центробежных моментов инерции, окончательно получим

$$\begin{aligned} K_{Ox} &= J_x p - J_{xy} q - J_{xz} r, \\ K_{Oy} &= -J_{xy} p + J_y q - J_{yz} r, \\ K_{Oz} &= -J_{xz} p - J_{yz} q + J_z r. \end{aligned} \tag{8}$$

Эти формулы можно записать более компактно, использовав матрицу $\mathbf{J}$, определяющую тензор инерции тела для точки O (см. п. 77):

$$\boldsymbol{K}_O = \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}. \tag{9}$$

В частном случае, когда оси Ox, Oy, Oz представляют собой главные оси инерции тела для точки O, матрица $\mathbf{J}$ диагональна; ее диагональными элементами служат главные моменты инерции тела для точки O, т. е. $J_x = A$, $J_y = B$, $J_z = C$. В этом случае

$$K_{Ox} = Ap, \quad K_{Oy} = Bq, \quad K_{Oz} = Cr. \tag{10}$$

Если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси, например вокруг оси Oz, то $p = q = 0$ и, согласно (8),

$$K_{Ox} = -J_{xz} r, \quad K_{Oy} = -J_{yz} r, \quad K_{Oz} = J_z r. \tag{11}$$

Из (11) видно, что при вращении тела вокруг неподвижной оси направления оси вращения и кинетического момента тела, вообще говоря, различны. Они совпадают тогда и только тогда, когда ось вращения является главной осью инерции тела.

83. Кинетическая энергия системы. Теорема Кёнига. *Кинетической энергией* системы называется величина T, определяемая по формуле

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2. \tag{12}$$

При вычислении кинетической энергии очень часто используется следующее утверждение.

Теорема (Кёнига). *Кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии, которую имела бы материальная точка, расположенная в центре масс системы и имеющая массу, равную массе системы, и кинетической энергии движения системы относительно центра масс.*

Доказательство.

Согласно (5) и (12), имеем

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{\nu r})^2 = \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\right) v_C^2 + \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_{\nu r}\right)\cdot \boldsymbol{v}_C + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_{\nu r}^2 = \\ &= \frac{1}{2}Mv_C^2 + M\boldsymbol{v}_{Cr}\cdot \boldsymbol{v}_C + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_{\nu r}^2. \end{aligned}$$

Так как относительная скорость центра масс $\boldsymbol{v}_{Cr}$ равна нулю, то отсюда следует, что

$$T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_{\nu r}^2. \tag{13}$$

Теорема доказана.

84. Кинетическая энергия твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки. Пусть $Oxyz$ — жестко связанная с телом система координат с началом в его неподвижной точке O и пусть мгновенная угловая скорость тела $\boldsymbol{\omega}$ направлена вдоль оси u, косинусы

углов которой с осями Ox, Oy, Oz соответственно равны α, β, γ. Тогда проекции $\boldsymbol{\omega}$ на оси Ox, Oy, Oz вычисляются по формуле

$$p = \omega\alpha, \qquad q = \omega\beta, \qquad r = \omega\gamma. \tag{14}$$

Если d_ν — расстояние от точки P_ν до оси u, то $v_\nu = \omega d_\nu$ и для кинетической энергии тела имеем выражение

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu d_\nu^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}J_u\omega^2, \tag{15}$$

где J_u — момент инерции тела относительно оси u. Подставив в (15) выражение для J_u из формулы (1) п. 77 и воспользовавшись формулами (14), получим окончательно

$$T = \frac{1}{2}(J_x p^2 + J_y q^2 + J_z r^2) - J_{xy}pq - J_{xz}pr - J_{yz}qr. \tag{16}$$

Если оси Ox, Oy, Oz представляют собой главные оси инерции тела для точки O, то формула (16) принимает вид

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \tag{17}$$

где A, B, C — моменты инерции тела относительно осей Ox, Oy, Oz.

Для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, например вокруг оси Oz, формула (16) сильно упрощается. Так как в этом случае $p = q = 0$, $|r| = \omega$, то

$$T = \frac{1}{2}J_z\omega^2. \tag{18}$$

Замечание 1. *Между мгновенной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ твердого тела и его кинетическим моментом относительно неподвижной точки O существует простое геометрическое соответствие. Действительно, из формул* (8) *и* (16) *следует, что*

$$T = \frac{1}{2}(\boldsymbol{K}_O \cdot \boldsymbol{\omega}). \tag{19}$$

Так как кинетическая энергия движущегося тела положительна, то отсюда следует, что угол между векторами $\boldsymbol{K}_O$ и $\boldsymbol{\omega}$ будет всегда острым. Используя (19), *можно также геометрическим путем найти направление одного из двух векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{K}_O$, когда задано направление другого.*

Упражнение 1. *Пусть известен эллипсоид инерции тела для неподвижной точки O и задана мгновенная угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$. Найти направление и модуль кинетического момента $\boldsymbol{K}_O$ тела относительно точки O.*

§ 2. Теоремы об изменении основных динамических величин системы

85. Общие замечания о теоремах и законах динамики. Рассмотрим движение системы материальных точек P_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$ в некоторой инерциальной системе координат. Пусть m_ν — масса точки P_ν, а $\boldsymbol{\rho}_\nu$ — ее радиус-вектор относительно начала координат. Если система несвободна, то ее можно рассматривать как свободную, если помимо активных сил, приложенных к точкам системы, учесть реакции связей. Если затем все силы, приложенные к системе, разбить на внешние и внутренние, то из аксиом Ньютона получим дифференциальные уравнения движения рассматриваемой механической системы в виде

$$m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu^{(e)} + \boldsymbol{F}_\nu^{(i)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{w}_\nu$ — ускорение точки P_ν в инерциальной системе отсчета, а $\boldsymbol{F}_\nu^{(e)}$ и $\boldsymbol{F}_\nu^{(i)}$ — соответственно равнодействующие всех внешних и внутренних сил системы, приложенных к точке P_ν.

Для исследования движения надо при заданных начальных условиях проинтегрировать систему уравнений (1) и найти зависимость $\boldsymbol{r}_\nu$ от времени. Это в большинстве случаев невозможно, особенно если число уравнений (1) велико.

Однако при практическом исследовании движения очень часто нет необходимости изучать систему (1), а достаточно знать изменение со временем некоторых величин, общих для всей материальной системы и являющихся функциями координат и скоростей точек системы (и, быть может, времени). Если такая функция при движении системы остается постоянной, то она называется *первым интегралом уравнений движения* (1). Использование первых интегралов позволяет упростить задачу исследования движения системы, а иногда и решить ее до конца.

Самый распространенный прием получения первых интегралов уравнений (1) основан на изучении поведения основных динамических величин системы: количества движения, кинетического момента, кинетической энергии. Изменение этих величин во времени описывается основными теоремами динамики, являющимися непосредственными следствиями уравнений (1). Утверждения, описывающие условия, при которых некоторые из основных динамических величин остаются постоянными, называются законами сохранения.

86. Теорема об изменении количества движения. Сложив почленно уравнения (1), получим

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu^{(e)} + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu^{(i)}. \tag{2}$$

Первая сумма в правой части равенства (2) равна главному вектору $\boldsymbol{R}^{(e)}$ внешних сил системы, а вторая сумма равна нулю, так как по третьему закону Ньютона внутренние силы попарно равны и противоположны. Принимая во внимание постоянство массы каждой из точек системы, равенство (2) можно записать в виде

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \boldsymbol{R}^{(e)}. \tag{3}$$

Это равенство выражает теорему об изменении количества движения системы: *производная по времени от количества движения системы равна главному вектору всех внешних сил системы.*

Эту теорему можно представить в интегральной форме. Проинтегрировав обе части равенства (3) от t_1 до t_2, получим

$$\Delta \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_2 - \boldsymbol{Q}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{R}^{(e)} dt. \tag{4}$$

Интеграл в правой части формулы (4) называется *импульсом внешних сил* системы за время $t_2 - t_1$. Таким образом, *приращение количества движения за конечное время равно импульсу внешних сил за это время.*

Дифференциальной форме теоремы об изменении количества движения можно придать другую формулировку. Так как $\boldsymbol{Q} = M\boldsymbol{v}_C$, где M — масса системы, а $\boldsymbol{v}_C$ — скорость центра масс, то формула (3) с учетом постоянства массы M может быть представлена в виде равенства

$$M\frac{d\boldsymbol{v}_C}{dt} = \boldsymbol{R}^{(e)}. \tag{5}$$

Это равенство означает, что *центр масс системы движется так же, как двигалась бы материальная точка, масса которой равнялась бы массе системы, под действием силы, равной главному вектору всех внешних сил системы.* Это утверждение называют теоремой о движении центра масс (центра инерции).

Если система замкнута, то $\boldsymbol{R}^{(e)} = 0$ и из (3) следует закон сохранения количества движения: *при движении замкнутой системы ее количество движения* $\boldsymbol{Q}$ *постоянно.* На основании равенства (5) закон сохранения количества движения можно сформулировать еще так: *скорость* $\boldsymbol{v}_C$ *центра масс замкнутой системы постоянна.* Ясно, что эти утверждения справедливы и для системы, не являющейся замкнутой, если только $\boldsymbol{R}^{(e)} = 0$ во все время движения.

Проектируя вектор $\boldsymbol{Q}$ на оси координат, получаем из закона сохранения количества движения три первых интеграла:

$$Q_x = c_1, \quad Q_y = c_2, \quad Q_z = c_3,$$

или

$$\dot{x}_C = c_1', \quad \dot{y}_C = c_2', \quad \dot{z}_C = c_3',$$

где Q_x, Q_y, Q_z и $\dot{x}_C$, $\dot{y}_C$, $\dot{z}_C$ — проекции на оси Ox, Oy, Oz соответственно количества движения и скорости центра масс системы, а c_i, c_i' $(i = 1,\ 2,\ 3)$ — произвольные постоянные.

Если проекция главного вектора внешних сил на какую-нибудь одну ось, например на ось Ox, равна нулю, то имеем один первый интеграл

$$Q_x = \text{const} \qquad \text{или} \qquad \dot{x}_C = \text{const}.$$

Пример 1. *Два человека стоят на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости на расстоянии a друг от друга. Один из них бросает мяч массой m, другой подхватывает его через t секунд. С какой скоростью начнет скользить по плоскости бросивший мяч, если его масса равна M?*

Так как плоскость абсолютно гладкая, то горизонтальная составляющая главного вектора внешних сил (силы тяжести и реакции плоскости) равна нулю. Следовательно, проекция количества движения системы, состоящей из мяча и человека, бросившего мяч, на плоскость будет постоянна (равна нулю, так как в начальный момент времени система покоилась).

Пусть v — скорость, с которой начнет скользить человек после бросания мяча. Замечая, что горизонтальная составляющая абсолютной скорости центра масс мяча равна a/t, получаем равенство

$$Mv - m\frac{a}{t} = 0.$$

Отсюда

$$v = \frac{ma}{Mt}.$$

Пример 2. *Две притягивающиеся по некоторому закону точки одинаковой массы могут скользить без трения одна по оси Ox, а другая — по перпендикулярной ей оси Oy* (рис. 83). *Точки начинают движение из состояния покоя. Показать, что при любом законе притяжения они одновременно окажутся в начале координат.*

Внешними силами, действующими на рассматриваемую систему из двух материальных точек, являются реакции $\boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{N}_2$ осей Ox и Oy; эти реакции ортогональны соответствующим осям. Ввиду того что каждая из точек вынуждена двигаться только вдоль своей координатной оси, имеем $N_1 = F\cos\alpha$, $N_2 = F\sin\alpha$, где F — модуль силы притяжения точек. Главный вектор $\boldsymbol{R}^{(e)}$ внешних сил имеет компоненты $-N_2$, $-N_1$, т. е. $\boldsymbol{R}^{(e)}$ коллинеарен вектору $\overline{CO}$, имеющему начало в центре масс C точек, а конец в начале координат. Так как при $t = 0$ система покоилась, то, согласно теореме о движении центра масс, точка C при $t > 0$ будет двигаться вдоль неизменной прямой, проходящей через точку O и начальное положение центра масс. Поэтому материальные точки одновременно достигнут начала координат.

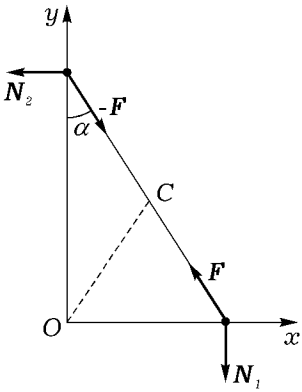

Рис. 83

87. Теорема об изменении кинетического момента. Пусть $\boldsymbol{v}_\nu$ — скорость точки P_ν системы в инерциальной системе отсчета, а $\boldsymbol{r}_\nu$ — ее радиус-вектор относительно начала координат (рис. 82). Возьмем произвольную точку A пространства, которая может и не совпадать с какой-либо материальной точкой системы во все время движения. Точка A может быть неподвижной, а может совершать произвольное движение; обозначим $\boldsymbol{v}_A$ ее скорость в выбранной инерциальной системе отсчета. Пусть $\boldsymbol{\rho}_\nu$ — радиус-вектор точки P_ν, относительно точки A. Тогда кинетический момент системы относительно точки A вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{K}_A = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_\nu \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu. \tag{6}$$

Продифференцировав обе части равенства (6) по времени и воспользо-

вавшись постоянством величин m_ν и уравнениями (1), получим

$$\frac{d\boldsymbol{K}_A}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{d\boldsymbol{\rho}_\nu}{dt} \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_\nu \times m_\nu \boldsymbol{w}_\nu =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{N} \frac{d\boldsymbol{\rho}_\nu}{dt} \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_\nu \times \left(\boldsymbol{F}_\nu^{(e)} + \boldsymbol{F}_\nu^{(i)}\right).$$

Последняя сумма в этом равенстве равна главному моменту $\boldsymbol{M}_A^{(e)}$ внешних сил относительно точки A (см. п. 50). Учитывая еще, что, согласно рис. 82, $\dfrac{d\boldsymbol{\rho}_\nu}{dt} = \dfrac{d\boldsymbol{r}_\nu}{dt} - \dfrac{d\boldsymbol{r}_A}{dt} = \boldsymbol{v}_\nu - \boldsymbol{v}_A$, а также что $\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu = M\boldsymbol{v}_C$, получаем

$$\frac{d\boldsymbol{K}_A}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{v}_\nu - \boldsymbol{v}_A) \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu + \boldsymbol{M}_A^{(e)} =$$
$$= \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu\right) \times \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{M}_A^{(e)} = M\boldsymbol{v}_C \times \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{M}_A^{(e)}.$$

Таким образом,

$$\frac{d\boldsymbol{K}_A}{dt} = M\boldsymbol{v}_C \times \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{M}_A^{(e)}. \tag{7}$$

Если точка A неподвижна, то во все время движения системы $\boldsymbol{v}_A = 0$ и уравнение (7), выражающее теорему об изменении кинетического момента относительно произвольно движущегося центра, принимает следующую часто встречающуюся форму:

$$\frac{d\boldsymbol{K}_A}{dt} = \boldsymbol{M}_A^{(e)}. \tag{8}$$

Уравнение (8) представляет собой теорему об изменении кинетического момента для неподвижного центра: *производная по времени от кинетического момента системы относительно неподвижного центра равна главному моменту внешних сил системы относительно этого центра.*

Эту теорему можно представить в интегральной форме. Проинтегрировав обе части равенства (8) от t_1 до t_2, получим

$$\Delta\boldsymbol{K}_A = \boldsymbol{K}_{A_2} - \boldsymbol{K}_{A_1} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_A^{(e)} dt. \tag{9}$$

Интеграл в правой части этой формулы называется *импульсом моментов внешних сил* за время $t_2 - t_1$. Таким образом, *приращение вектора кинетического момента системы относительно неподвижного центра за конечное время равно импульсу моментов внешних сил относительно этого центра за это время.*

Если система замкнута, то $\boldsymbol{M}_A^{(e)} = 0$ и из равенства (8) следует закон сохранения кинетического момента: *при движении замкнутой системы ее кинетический момент относительно любого неподвижного центра постоянен*:

$$\boldsymbol{K}_A = \text{ const.} \tag{10}$$

Если K_{Ax}, K_{Ay}, K_{Az} — проекции вектора $\boldsymbol{K}_A$ на соответствующие оси координат, то из (10) следуют три первых интеграла:

$$K_{Ax} = c_1, \qquad K_{Ay} = c_2, \qquad K_{Az} = c_3,$$

где c_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ — произвольные постоянные. Эти интегралы существуют не только в случае замкнутой системы, но и тогда, когда система не замкнута, но для некоторого неподвижного центра A $\boldsymbol{M}_A^{(e)} = 0$ во все время движения.

Отметим еще, что если $\boldsymbol{M}_A^{(e)} = 0$ во все время движения, то интеграл (10) существует не только когда центр A неподвижен, но и в более общем случае, когда во все время движения радиусы-векторы $\boldsymbol{r}_A$ и $\boldsymbol{r}_C$ точки A и центра масс системы C относительно начала координат связаны соотношением $\boldsymbol{r}_A = \alpha \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{a}$, где скалярная величина α и вектор $\boldsymbol{a}$ постоянны. Действительно, в этом случае $\boldsymbol{v}_A = \alpha \boldsymbol{v}_C$ и первое слагаемое в правой части равенства (7) тождественно равно нулю. Поэтому при $\boldsymbol{M}_A^{(e)} = 0$ существует интеграл (10).

Рассмотренный выше случай неподвижного центра A получается отсюда при $\alpha = 0$. Если же $\alpha = 1$ и $a = 0$, то $\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_C$ и уравнение (7) примет вид

$$\frac{d\boldsymbol{K}_C}{dt} = \boldsymbol{M}_C^{(e)}, \tag{11}$$

откуда следует, что теорема об изменении кинетического момента системы для неподвижного центра A и для центра масс C имеют одинаковый вид: в левой части уравнения стоит производная от кинетического момента относительно точки (A или C), а в правой — главный момент внешних сил относительно этой точки. Отметим, что абсолютный кинетический момент $\boldsymbol{K}_C$ системы относительно центра масс в левой части уравнения (11) можно заменить на равный ему (см. п. 82) кинетический момент $\boldsymbol{K}_{Cr}$ системы в ее движении относительно центра масс.

Пусть u — некоторая неизменная ось или ось неизменного направления, проходящая через центр масс системы. Для кинетического момента K_u системы относительно этой оси из (8) и (11) следует дифференциальное уравнение

$$\frac{dK_u}{dt} = M_u^{(e)}, \tag{12}$$

где $M_u^{(e)}$ — главный момент внешних сил относительно оси u. Если он во все время движения равен нулю, то имеем первый интеграл

$$K_u = \text{ const}. \tag{13}$$

Последний вывод допускает обобщение. Именно, справедливо следующее утверждение. *Пусть $M_u^{(e)}$ равен нулю во все время движения. Тогда для существования первого интеграла* (13) *необходимо и достаточно, чтобы проекции скорости центра масс системы и скорости какой-нибудь точки A оси u на плоскость, перпендикулярную этой оси, были во все время движения параллельны.* Действительно, пусть $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси u. Умножая обе части равенства (7) скалярно на вектор $\boldsymbol{e}$ и учитывая его постоянство по величине и направлению, получаем

$$\frac{d(\boldsymbol{K}_A \cdot \boldsymbol{e})}{dt} = M(\boldsymbol{v}_C \times \boldsymbol{v}_A) \cdot \boldsymbol{e} + \boldsymbol{M}_A^{(e)} \cdot \boldsymbol{e}.$$

Но $\boldsymbol{K}_A \cdot \boldsymbol{e} = K_u$, $\quad \boldsymbol{M}_A^{(e)} \cdot \boldsymbol{e} = M_u^{(e)}$, поэтому последнее равенство можно переписать в виде

$$\frac{dK_u}{dt} = M(\boldsymbol{v}_C \times \boldsymbol{v}_A) \cdot \boldsymbol{e} + M_u^{(e)}.$$

Если $M_u^{(e)} \equiv 0$, то величина K_u будет постоянной тогда и только тогда, когда $(\boldsymbol{v}_C \times \boldsymbol{v}_A) \cdot \boldsymbol{e} \equiv 0$. Если за направление оси Oz принять направление оси u, то последнее условие эквивалентно тождеству

$$\frac{\dot{x}_A}{\dot{y}_A} = \frac{\dot{x}_C}{\dot{y}_C},$$

означающему параллельность проекций скоростей точек A и C на плоскость, перпендикулярную оси u, что и требовалось доказать.

Пример 1. *Вдоль образующей однородного круглого конуса массой M, ось которого неподвижна и занимает вертикальное положение, а вершина обращена вверх, просверлен тонкий канал. Конусу сообщают угловую*

скорость ω_0 вокруг его оси и одновременно с этим опускают в верхнее отверстие канала шарик массы m, не сообщая ему начальной скорости. Какова будет угловая скорость конуса в тот момент, когда шарик выскочит из канала?

Так как внешние силы системы конус — шарик не создают момента относительно оси конуса, то кинетический момент K_z относительно оси остается постоянным. В начальный момент времени

$$K_z = J_z\omega_0,$$

а в момент, когда шарик выскакивает из канала,

$$K_z = J_z\omega + mR^2\omega.$$

Здесь R — радиус основания конуса, а $J_z = \frac{3}{10}MR^2$ — его момент инерции относительно оси. Из равенства

$$J_z\omega_0 = J_z\omega + mR^2\omega$$

находим

$$\omega = \frac{3M}{3M + 10m}\omega_0.$$

Пример 2. *На гладкой горизонтальной плоскости находится твердое тело, имеющее вид тонкого кругового кольца массой M и радиусом R. Вдоль по кольцу движется точка A массой m с постоянной по модулю относительной скоростью $\boldsymbol{v}$. Определить движение этой системы по плоскости, если в начальный момент и кольцо, и точка находились в покое.*

Так как горизонтальная составляющая главного вектора внешних сил равна нулю и в начальный момент времени центр масс C всей системы покоился, то и в последующем движении системы он будет оставаться в покое. Расстояния точки C будут (рис. 84): *от центра O кольца*

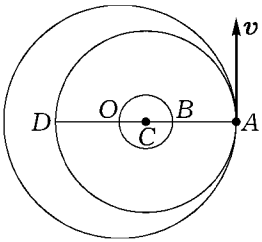

Рис. 84

$$OC = \frac{m}{M + m}R,$$

от точки A

$$AC = \frac{M}{M + m}R.$$

Таким образом, и центр O кольца, и материальная точка A будут двигаться по концентрическим окружностям с центром в точке C, причем

и O, и A будут всегда находиться в диаметрально противоположных по отношению к C точках своих траекторий.

Чтобы определить угловую скорость ω вращения кольца, воспользуемся тем, что, в силу равенства нулю главного момента внешних сил относительно неподвижной вертикальной оси Cz, кинетический момент системы относительно этой оси постоянен (равен нулю, так как в начальный момент времени система покоилась). Имеем:

$$J_C\omega + m(v + \omega \cdot AC) \cdot AC = 0,$$

где J_C — момент инерции кольца относительно оси C_z. Так как момент инерции J_O кольца относительно параллельной C_z оси Oz, очевидно, равен MR^2, то, согласно п. 76,

$$J_C = MR^2 + M \cdot OC^2.$$

Воспользовавшись еще выписанными выше выражениями для AC и OC, получим окончательно

$$\omega = -\frac{v}{R} \cdot \frac{m(M+m)}{M^2 + 3mM + 2m^2}.$$

Знак минус в полученном выражении для ω указывает на то, что вращение кольца происходит по часовой стрелке, если смотреть со стороны положительного направления оси Cz.

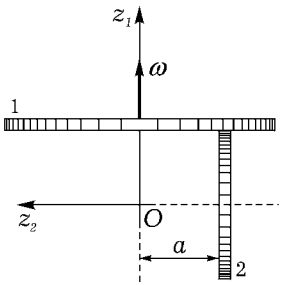

Рис. 85

Пример 3. *Два тонких однородных диска 1 и 2, массы и радиусы которых равны соответственно m_1, r_1 и m_2, r_2, могут вращаться вокруг их ортогональных осей Oz_1 и Oz_2 (рис. 85). Диск 1 раскрутили до угловой скорости ω и привели затем в контакт с невращающимся диском 2, причем расстояние между точкой соприкосновения и осью диска 1 равно a. Через некоторое время (за счет трения) диски начнут вращаться без проскальзывания. Найти установившиеся угловые скорости дисков.*

Для решения задачи используем интегральную форму теоремы об изменении кинетического момента. При $t = 0$ кинетические моменты K_{z_1} и K_{z_2} дисков 1 и 2 будут соответственно равны:

$$K_{z_1} = J_{z_1}\omega, \qquad K_{z_2} = 0,$$

а в момент времени Δt, равный продолжительности процесса установления движения дисков,

$$K_{z_1} = J_{z_1}\omega_1, \qquad K_{z_2} = J_{z_2}\omega_2.$$

Здесь ω_i — модуль установившейся угловой скорости, а $J_{z_i} = \frac{1}{2}m_i r_i^2$ — момент инерции i-го диска относительно оси Oz_i ($i = 1,\ 2$). Приращения кинетических моментов первого и второго дисков соответственно равны $J_{z_1}(\omega_1 - \omega)$ и $J_{z_2}\omega_2$. Изменение кинетических моментов вызвано действием силы трения в точке контакта дисков в течение времени Δt. Сила трения, модуль которой F одинаков для обоих дисков, тормозит первый диск и ускоряет второй. Согласно равенству (9), *имеем*

$$\frac{1}{2}m_1 r_1^2(\omega_1 - \omega) = -a\int\limits_0^{\Delta t} F dt, \qquad \frac{1}{2}m_2 r_2^2\omega_2 = r_2\int\limits_0^{\Delta t} F dt.$$

Добавив сюда еще уравнение

$$\omega_1 a = \omega_2 r_2,$$

выражающее условие отсутствия скольжения в установившемся режиме движения дисков, получим систему трех уравнений относительно угловых скоростей дисков ω_1, ω_2 и модуля импульса силы трения $\int\limits_0^{\Delta t} F\,dt$. Решив ее, найдем:

$$\omega_1 = \frac{m_1 r_1^2}{m_1 r_1^2 + m_2 a^2}\omega, \quad \omega_2 = \frac{m_1 a r_1^2}{r_2(m_1 r_1^2 + m_2 a^2)}\omega.$$

Пример 4. *Диск массой m и радиусом a катится по горизонтальной плоскости без скольжения. Центр тяжести C диска находится на расстоянии b от его геометрического центра O, момент инерции диска относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через точку C, равен J_C. Пусть φ — угол между отрезком OC и вертикалью* (рис. 86). *Составить дифференциальное уравнение, описывающее изменение угла φ со временем.*

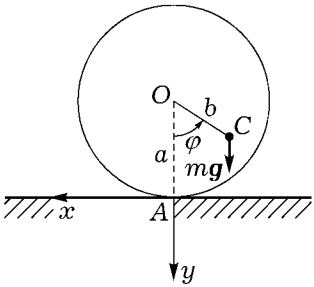

Рис. 86

Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента в форме (7). *За*

точку A примем геометрическую точку, которая принадлежит следу (прямой линии), вычерчиваемому точкой касания диска с плоскостью. В силу отсутствия скольжения для скорости точки A в системе координат $Axyz$ (оси Ax, Ay показаны на рисунке, ось Az направлена перпендикулярно плоскости рисунка на читателя) имеем: $\boldsymbol{v}'_A = (a\dot{\varphi},\ 0,\ 0)$. Вектор $\overline{AC}$ имеет компоненты: $-b\sin\varphi$, $-a + b\cos\varphi$, 0; $AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$. Для угловой скорости диска $\boldsymbol{\omega}$, скорости его центра масс $\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{\omega}\times\overline{AC}$ и кинетического момента $\boldsymbol{K}_A$ диска относительно точки A имеем:

$$\boldsymbol{\omega}' = (0,\ 0,\ \dot{\varphi}), \quad \boldsymbol{v}'_C = ((a - b\cos\varphi)\dot{\varphi},\ -b\sin\varphi\dot{\varphi},\ 0),$$

$$\boldsymbol{K}'_A = (0,\ 0,\ (J_C + mAC^2)\dot{\varphi}).$$

Момент внешних сил относительно точки A создает только сила тяжести:

$$\boldsymbol{M}_A^{(e)} = (0,\ 0,\ -mgb\sin\varphi).$$

Проектирование обеих частей векторного уравнения (7) на ось Az приводит к искомому уравнению, описывающему изменение угла φ во времени:

$$[J_C + m(a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi)]\ddot{\varphi} + mab\sin\varphi\dot{\varphi}^2 + mgb\sin\varphi = 0.$$

88. Теорема об изменении кинетической энергии. Пусть точки P_ν системы переместились так, что их радиусы-векторы $\boldsymbol{r}_\nu$ в инерциальной системе отсчета получили приращения $d\boldsymbol{r}_\nu$. Найдем, как при этом изменилась кинетическая энергия системы T. Так как

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu^2,$$

то для дифференциала кинетической энергии имеем такое выражение:

$$dT = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu \cdot d\boldsymbol{v}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu \cdot \frac{d\boldsymbol{v}_\nu}{dt}\, dt =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_\nu \cdot \boldsymbol{v}_\nu\, dt = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_\nu \cdot d\boldsymbol{r}_\nu.$$

Принимая во внимание дифференциальные уравнения (1), перепишем

последнее равенство в виде

$$dT = \sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{F}_\nu^{(e)} + \boldsymbol{F}_\nu^{(i)}) \cdot d\boldsymbol{r}_\nu =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu{}^{(e)} \cdot d\boldsymbol{r}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu{}^{(i)} \cdot d\boldsymbol{r}_\nu = d'A^{(e)} + d'A^{(i)}.$$

Таким образом,

$$dT = d'A^{(e)} + d'A^{(i)}. \tag{14}$$

Последнее равенство выражает теорему об изменении кинетической энергии системы: *дифференциал кинетической энергии системы равен элементарной работе всех сил системы.*

Подчеркнем, что, в отличие от двух рассмотренных выше основных теорем динамики, в теореме об изменении кинетической энергии речь идет о всех силах системы: как внешних, так и внутренних. Тот факт, что силы, с которыми взаимодействуют две точки системы, равны по величине и противоположно направлены, не приводит к равенству нулю работы $d'A^{(i)}$ внутренних сил системы, так как при подсчете работы важны и перемещения точек, а они у двух взаимодействующих точек не обязательно одинаковы. Как мы видели в п. 52, для твердого тела работа внутренних сил равна нулю, поэтому для него равенство (14) принимает более простой вид

$$dT = d'A^{(e)}. \tag{15}$$

Проинтегрировав обе части равенства (14) от t_1 до t_2, получим интегральную форму теоремы об изменении кинетической энергии

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \int_{t_1}^{t_2} d'A^{(e)} + \int_{t_1}^{t_2} d'A^{(i)}, \tag{16}$$

т. е. *приращение кинетической энергии системы за конечное время равно работе всех сил системы за то же время.*

Пусть все силы системы (внешние и внутренние) потенциальны и их потенциал Π не зависит явно от времени. В этом случае (п. 53) элементарная работа сил системы будет полным дифференциалом

$$d'A^{(e)} + d'A^{(i)} = -d\Pi. \tag{17}$$

Из (17) и (14) следует, что тогда $dT + d\Pi = 0$.

Сумма кинетической и потенциальнои энергий называется *полной механической энергией* системы. Из последнего равенства следует, что

$$E = T + \Pi = h = \text{ const}, \tag{18}$$

т. е. *если все силы системы потенциальны и потенциал не зависит от времени, то при движении системы ее полная механическая энергия постоянна.* Это — *закон сохранения механической энергии.* Равенство (18) называется *интегралом энергии.*

Следует иметь в виду, что для справедливости закона сохранения механической энергии требование о том, чтобы все силы системы были потенциальными, не обязательно. Достаточно потребовать, чтобы потенциальными были силы, работа которых на действительном перемещении системы отлична от нуля. Например, работа реакций стационарных идеальных связей равна нулю, и если остальные силы системы потенциальны и потенциал не зависит явно от времени, то для такой системы справедлив закон сохранения механической энергии.

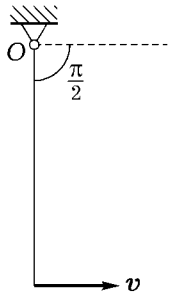

Рис. 87

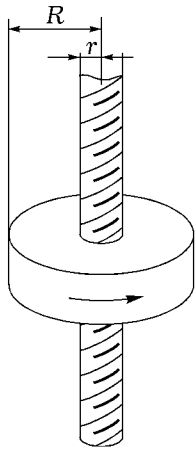

Рис. 88

Пример 1. *Тонкий однородный стержень длиной l вращается на шарнире O в вертикальной плоскости* (рис. 87). *Какую скорость v нужно сообщить нижнему концу стержня, чтобы угол наибольшего отклонения стержня от вертикали равнялся $\pi/2$? Помимо силы тяжести и реакции шарнира на стержень действует постоянный момент $m_{\text{сопр}}$, препятствующий вращению стержня.*

Если нижний конец имеет начальную скорость v, то угловая скорость стержня в начале движения равна v/l. Пусть m — масса стерж-

ня. Тогда момент инерции стержня относительно оси вращения равен $\frac{1}{3}ml^2$, *а кинетическая энергия стержня в начальный момент равна* $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\cdot(v/l)^2$.

При переходе стержня в горизонтальное положение сила тяжсcти совершит работу, равную $-mgl/2$, *а силы сопротивления вращению — работу* $-(\pi/2)m_{\text{сопр}}$. *Принимая во внимание интегральную форму теоремы об изменении кинетической энергии, получим*

$$\frac{1}{6}mv^2 = \frac{1}{2}mgl + \frac{\pi}{2}m_{\text{сопр}},$$

откуда

$$v = \sqrt{3(gl + \pi m_{\text{сопр}}/m)}.$$

Пример 2. *На вертикально поставленный винт надета массивная гайка. Ей сообщена угловая скорость* ω *такого направления, что гайка начинает подниматься. На какую высоту поднимется гайка? Трение отсутствует. Шаг винта* h, *его радиус* r, *радиус гайки* R (рис. 88).

Пусть v *— скорость движения гайки вдоль оси винта в начале движения. Она найдется из пропорции*

$$\frac{v}{h} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Примем, что гайка имеет форму цилиндра с осевым отверстием радиуса r. *Если* m *— масса гайки, то ее момент инерции* J *относительно оси винта будет определяться равенством*

$$J = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2).$$

Пусть высота подъема гайки H, *тогда из интеграла энергии имеем*

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\omega h}{2\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m(R^2 + r^2)\omega^2 = mgH,$$

откуда

$$H = \frac{\omega^2}{4g}\left(R^2 + r^2 + \frac{h^2}{2\pi^2}\right).$$

Пример 3. *Цилиндр, который может вращаться вокруг вертикальной оси* AB, *имеет на своей поверхности винтовой желоб; в него вложен шарик массой* m, *который можно считать материальной точкой. Найти относительную скорость* u *шарика в его движении по желобу и угловую скорость* ω *цилиндра при движении системы под действием силы тяжести, полагая, что масса цилиндра равна массе шарика, радиус цилиндра* a *и угол* α *наклона касательной к винтовой нарезке равен* $\pi/4$. *Найти также давление шарика на желоб* (рис. 89).

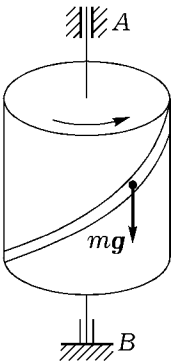

Рис. 89

Если шарик пройдет по вертикали расстояние z, то его потенциальная энергия уменьшится на величину mgz. Приравняв ее кинетической энергии системы, будем иметь

$$mgz = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}ma^2\omega^2 + \\ + \frac{1}{2}m\left[\left(a\omega - u\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(u\sin\frac{\pi}{4}\right)^2\right],$$

или

$$2gz = \frac{3}{2}a^2\omega^2 - \sqrt{2}a\omega u + u^2.$$

Второе уравнение для определения неизвестных ω и u получим из теоремы об изменении кинетического момента. Так как внешние силы не дают момента относительно вертикальной оси и в начальный момент вся система была неподвижна, то кинетический момент системы относительно оси AB постоянен и равен нулю:

$$\frac{1}{2}ma^2\omega + m\left(a\omega - u\cos\frac{\pi}{4}\right)a = 0,$$

откуда

$$3a\omega - \sqrt{2}u = 0.$$

Решая совместно полученные уравнения для u и ω, находим

$$u = \sqrt{3gz}, \qquad \omega = \frac{\sqrt{6gz}}{3a}.$$

Пусть N — давление шарика на желоб. Составим уравнение (14) *только для одного цилиндра:*

$$d\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}ma^2\omega^2\right) = N\cos\frac{\pi}{4}\cdot a\,d\varphi,$$

или, так как $d\varphi = \omega\,dt$,

$$ma\,d\omega = \sqrt{2}N\,dt.$$

Но

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dz}\frac{dz}{dt} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{g}{6z}}u\sin\frac{\pi}{4},$$

и, следовательно,

$$N = \frac{ma}{\sqrt{2}}\frac{1}{a}\sqrt{\frac{g}{6z}}\sqrt{3gz}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}mg.$$

89. Основные теоремы динамики в неинерциальной системе отсчета. Будем теперь изучать движение механической системы в произвольно движущейся неинерциальной системе отсчета. Абсолютное ускорение $\boldsymbol{w}_\nu$ точки P_ν системы найдем при помощи теоремы о сложении ускорений (п. 32):

$$\boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{w}_{\nu r} + \boldsymbol{w}_{\nu e} + \boldsymbol{w}_{\nu c} \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ N). \tag{19}$$

Здесь $\boldsymbol{w}_{\nu r}$ и $\boldsymbol{w}_{\nu e}$ — относительное и переносное ускорения точки P_ν, а $\boldsymbol{w}_{\nu c}$ — ее кориолисово ускорение; $\boldsymbol{w}_{\nu c} = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\nu r}$, где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость неинерциальной системы координат относительно инерциальной, а $\boldsymbol{v}_{\nu r}$ — относительная скорость точки P_ν. Подставив выражение (19) для абсолютного ускорения в уравнения (1), получим

$$m_\nu \boldsymbol{w}_{\nu r} = \boldsymbol{F}_\nu^{(e)} + \boldsymbol{F}_\nu^{(i)} + \boldsymbol{j}_{\nu e} + \boldsymbol{j}_{\nu c} \quad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{20}$$

где $\boldsymbol{j}_{\nu e} = -m_\nu \boldsymbol{w}_{\nu e}$, $\boldsymbol{j}_{\nu c} = -m_\nu \boldsymbol{w}_{\nu c} = -2m_\nu \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\nu r}$; величину $\boldsymbol{j}_{\nu e}$ называют *переносной*, а $\boldsymbol{j}_{\nu c}$ — *кориолисовой силами инерции.*

Таким образом, второй закон Ньютона может быть применен в неинерциальной системе отсчета, если к силам, приложенным к точкам системы, добавить еще переносные и кориолисовы силы инерции.

Но полученные в п. 86–88 теоремы динамики вытекали из уравнений (1). Следовательно, все сформулированные выше теоремы динамики будут верны и в неинерциальной системе отсчета, если к силам, приложенным к системе, добавить переносные и кориолисовы силы инерции для ее точек. При этом силы инерции следует формально относить к внешним силам.

Например, теорема об изменении количества движения в неинерциальной системе отсчета выглядит так:

$$\frac{d\boldsymbol{Q}_r}{dt} = \boldsymbol{R}^{(e)} + \boldsymbol{J}_e + \boldsymbol{J}_c, \tag{21}$$

где $\boldsymbol{Q}_r = \sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_{\nu r}$, $\boldsymbol{R}^{(e)}$ — главный вектор внешних сил, приложенных к системе, $\boldsymbol{J}_e = \sum\limits_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{j}_{\nu e}$ — главный вектор переносных сил инерции, $\boldsymbol{J}_c = \sum\limits_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{j}_{\nu c}$ — главный вектор кориолисовых сил инерции.

Теорема об изменении кинетического момента в неинерциальной системе отсчета записывается в виде (для неподвижного относительно неинерциальной системы центра A)

$$\frac{d\boldsymbol{K}_{Ar}}{dt} = \boldsymbol{M}_A^{(e)} + \boldsymbol{M}_{AJ_e} + \boldsymbol{M}_{AJ_c}. \tag{22}$$

Здесь $\boldsymbol{K}_{Ar} = \sum\limits_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_\nu \times m_\nu \boldsymbol{v}_{\nu r}$, $\boldsymbol{\rho}_\nu$ — радиус-вектор точки P_ν относительно центра A, $\boldsymbol{M}_A^{(e)}$ — главный момент внешних сил, приложенных к системе, относительно точки A, $\boldsymbol{M}_{AJ_e}$ и $\boldsymbol{M}_{AJ_c}$ — главные моменты переносных и кориолисовых сил инерции относительно точки A.

Теорема об изменении кинетической энергии T_r системы, соответствующей ее движению в неинерциальной системе координат, будет такой:

$$dT_r = d'A^{(e)} + d'A^{(i)} + d'A_{J_e}. \tag{23}$$

Здесь

$$T_r = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_{\nu r}^2, \tag{24}$$

$d'A^{(e)}$, $d'A^{(i)}$ — элементарная работа внешних и внутренних сил, приложенных к системе, на относительных перемещениях $d\boldsymbol{\rho}_\nu$ ее точек, а $d'A_{J_e}$ — элементарная работа переносных сил инерции на тех же перемещениях. В (23) отсутствует работа кориолисовых сил инерции: эта работа равна нулю, так как кориолисова сила инерции для каждой точки P_ν перпендикулярна ее относительному перемещению $d\boldsymbol{\rho}_\nu$.

Пример 1. *При вращении сосуда, наполненного жидкостью, вокруг вертикальной оси жидкость отбрасывается к стенкам и внутри сосуда образуется воронкообразная полость, ограниченная поверхностью вращения* (рис. 90). *Определить форму этой поверхности.*

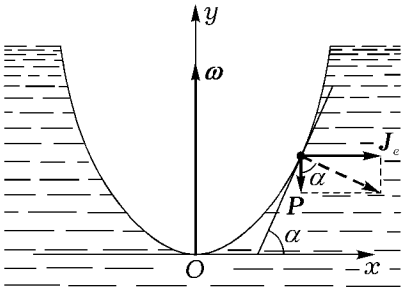

Рис. 90

Рассмотрим какую-нибудь частицу жидкости массой m, расположенную на ее поверхности; координаты частицы обозначим x и y (рис. 90). *Задача состоит в нахождении зависимости y от x.*

Во вращающейся вместе с жидкостью системе координат Oxy частица покоится. Следовательно, равнодействующая силы тяжес-

ти $P = mg$ *и переносной силы инерции* $J_e = m\omega^2 x$ (ω — *угловая скорость вращения жидкости*) *ортогональна поверхности жидкости. Из рис.* 90 *находим, что*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{J_e}{P} = \frac{\omega^2 x}{g}.$$

Но $\operatorname{tg}\alpha = dy/dx$, *поэтому*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2}{g}x.$$

Решив это дифференциальное уравнение (с начальным условием $y(0) = 0$), *получим*

$$y = \frac{\omega^2}{2g}x^2.$$

Следовательно, воронка, образующаяся при вращении сосуда, представляет собой параболоид вращения.

Пример 2. *Материальная точка положена на гладкую горизонтальную плоскость* Oxy, *вращающуюся вокруг неподвижной вертикальной оси* Oz *с постоянной угловой скоростью* ω. *Точке сообщена некоторая начальная скорость, лежащая в этой плоскости. Показать, что в относительном движении точки имеют место следующие равенства:*

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2(x^2 + y^2) = \text{const}, \qquad (a)$$

$$x\dot{y} - \dot{x}y + \omega(x^2 + y^2) = \text{const}. \qquad (б)$$

Во вращающейся системе координат имеем

$$\boldsymbol{\omega}' = (0,\ 0,\ \omega), \quad \boldsymbol{v}'_r = (\dot{x},\ \dot{y},\ 0), \quad \boldsymbol{w}'_e = (-\omega^2 x,\ -\omega^2 y,\ 0).$$

Кинетическая энергия точки в ее относительном движении определяется равенством

$$T_r = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

Для переносной и кориолисовой сил инерции имеем соответственно (m — *масса материальной точки*):

$$\boldsymbol{j}'_e = m\omega^2(x,\ y,\ 0), \qquad \boldsymbol{j}'_c = 2m\omega(\dot{y},\ -\dot{x},\ 0).$$

Из выражения для переносной силы инерции видно, что она является потенциальной с потенциалом, определяемым по формуле

$$\Pi_r = -\frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2).$$

Внешние силы (сила тяжести и реакция плоскости) перпендикулярны плоскости Oxy, в которой происходит движение точки и, следовательно, работы не совершают. Поэтому из (23) *следует, что в относительном движении справедлив интеграл энергии:* $T_r + \Pi_r = \text{const}$, *т. е.*

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) = \text{const}.$$

Этот интеграл с точностью до множителя $m/2$ *совпадает с доказываемым равенством* (*а*).

Чтобы показать справедливость равенства (*б*), *воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента* (22), *приняв за центр* A *точку* O. *Обе части векторного равенства* (22) *будем проектировать на ось* Oz.

Моменты внешних сил относительно оси Oz *равны нулю. Переносная сила инерции проходит через точку* O *и, следовательно, тоже не создает момента относительно* Oz. *Для момента* M_z *кориолисовой силы инерции получаем*

$$M_z = -2m\omega(x\dot{x} + y\dot{y}).$$

Замечая, что проекция на ось Oz *кинетического момента точки в ее относительном движении равна* $m(x\dot{y} - \dot{x}y)$, *получаем из* (22)

$$m\frac{d}{dt}(x\dot{y} - \dot{x}y) = -2m\omega(x\dot{x} + y\dot{y}),$$

или

$$\frac{d}{dt}(x\dot{y} - \dot{x}y) + \omega\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = 0.$$

Отсюда следует справедливость равенства (*б*) *на стр.* 173.

90. О теоремах динамики для движения относительно центра масс. В предыдущем пункте мы видели, что основные теоремы динамики в неинерциальной системе отсчета можно записать в той же форме, что и в инерциальной. Отличие заключается только в том, что в формулах, выражающих основные теоремы, появляются добавочные члены, обусловленные неинерциальностью системы отсчета.

Но существует подвижная система отсчета, являющаяся в общем случае неинерциальной, такая, что для движения в этой системе отсчета теоремы об изменении кинетического момента и кинетической энергии выглядят точно так же, как и в инерциальной системе. Этой подвижной системой отсчета является кенигова система координат, т. е. (см. п. 81) поступательно движущаяся система координат с началом в

центре масс механической системы. Для теоремы об изменении кинетического момента мы это видели в п. 87. Рассмотрим теперь теорему об изменении кинетической энергии.

Из равенств (20), (24) и из того, что переносное ускорение $\boldsymbol{w}_{\nu e}$ для всех точек одинаково и равно ускорению центра масс $\boldsymbol{w}_C$, получаем

$$dT_r = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_{\nu r} \cdot d\boldsymbol{v}_{\nu r} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_{\nu r} \cdot d\boldsymbol{\rho}_\nu =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{F}_\nu^{(e)} + \boldsymbol{F}_\nu^{(i)} + \boldsymbol{j}_{\nu e} + \boldsymbol{j}_{\nu c}) \cdot d\boldsymbol{\rho}_\nu =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu^{(e)} \cdot d\boldsymbol{\rho}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu^{(i)} \cdot d\boldsymbol{\rho}_\nu - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_{\nu e} \cdot d\boldsymbol{\rho}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{j}_{\nu c} \cdot d\boldsymbol{\rho}_\nu =$$

$$= d'A^{(e)} + d'A^{(i)} - \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu d\boldsymbol{\rho}_\nu \right) \cdot \boldsymbol{w}_C + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{j}_{\nu c} \cdot d\boldsymbol{\rho}_\nu.$$

Последняя сумма в этом равенстве обращается в нуль, так как кориолисова сила инерции $\boldsymbol{j}_{\nu c}$ перпендикулярна $d\boldsymbol{\rho}_\nu$. Сумма $\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{\rho}_\nu$ равна нулю из-за выбора начала системы координат в центре масс системы; следовательно, сумма $\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu d\boldsymbol{\rho}_\nu$ также равна нулю. Поэтому окончательно имеем следующее выражение для дифференциала кинетической энергии движения системы относительно центра масс:

$$dT_r = d'A^{(e)} + d'A^{(i)}. \tag{25}$$

Таким образом, теорема об изменении кинетической энергии выглядит точно так же, как и в случае инерциальной системы отсчета. Отличие заключается только в том, что элементарная работа внешних и внутренних сил системы вычисляется на перемещениях точек их приложения по отношению к центру масс.

Пример 1. *Рассмотрим произвольную механическую систему, движущуюся в пустоте в однородном поле тяжести. Перенеся все силы системы в ее центр масс C, получим равнодействующую $\boldsymbol{P}$, равную общему весу системы. На основании теоремы о движении центра масс* (п. 86) *мы можем сказать, что точка C будет описывать некоторую параболу.*

Момент внешних сил относительно осей кениговой системы координат равен нулю. Поэтому кинетический момент $\boldsymbol{K}_C$ системы относительно центра масс остается постоянным во все время движения.

Далее, так как точка приложения равнодействующей внешних сил — веса $\boldsymbol{P}$ *системы неподвижна в кёниговой системе координат (совпадает с ее началом), то работа внешних сил на относительных перемещениях системы равна нулю. Поэтому, согласно* (25)*, кинетическая энергия* T_r *в относительном движении изменяется только вследствие действия внутренних сил. В частности, если рассматриваемая механическая система является твердым телом, то кинетическая энергия остается постоянной.*

Глава VII
Динамика твердого тела

§ 1. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

91. Уравнение движения. Определение реакций. Рассмотрим твердое тело, имеющее две неподвижные точки O и O_1 (рис. 91).

Пусть $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}_1$ — реакции связи в точках O и O_1, $\boldsymbol{R}$ — главный вектор активных сил, а $\boldsymbol{M}_O$ — главный их момент относительно точки O.

Примем точку O за начало неподвижной системы координат $OXYZ$, ось OZ которой направим по оси OO_1. С телом жестко свяжем систему координат $Oxyz$; ее ось Oz направлена вдоль оси OO_1. Тело имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем угол φ, образуемый осями OX и Ox.

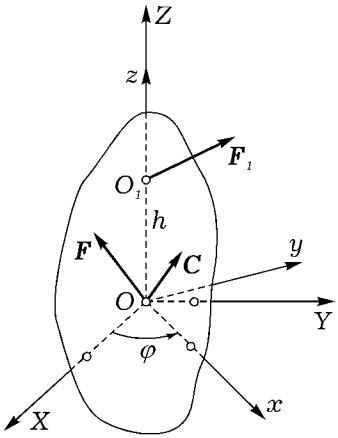

Рис. 91

Чтобы получить уравнения, описывающие движение твердого тела, воспользуемся теоремами об изменении количества движения и момента количеств движения. Обе части соответствующих этим теоремам уравнения (5) п. 86 и уравнения (8) п. 87 спроектируем на оси вращающейся системы координат $Oxyz$. Для этого воспользуемся формулой (5) п. 30, связывающей абсолютную и относительную производные вектора. Получим:

$$M\frac{\tilde{d}\boldsymbol{v}_C}{dt} + M\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_1, \tag{1}$$

$$\frac{\tilde{d}\boldsymbol{K}_O}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K}_O = \boldsymbol{M}_O + \overline{OO_1} \times \boldsymbol{F}_1. \tag{2}$$

Здесь M — масса тела, $\boldsymbol{\omega}$ — его угловая скорость, $\boldsymbol{v}_C$ — скорость центра масс тела; реакция $\boldsymbol{F}$ не вошла в уравнение (2), так как ее момент

относительно точки O равен нулю. Пусть в связанной с телом системе координат

$$\boldsymbol{R} = \begin{Vmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{M}_O = \begin{Vmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{F} = \begin{Vmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{F}_1 = \begin{Vmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \end{Vmatrix},$$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{Vmatrix} p \\ q \\ r \end{Vmatrix}, \qquad \overline{OC} = \begin{Vmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{K}_O = \begin{Vmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{Vmatrix}.$$

Очевидно, что $p = 0$, $q = 0$, $r = \dot{\varphi}$, и из формул (8) п. 82 следует, что $K_x = -J_{xz}\dot{\varphi}$, $K_y = -J_{yz}\dot{\varphi}$, $K_z = J_z\dot{\varphi}$, где J_{xz}, J_{yz} — центробежные, а J_z — осевой моменты инерции тела для точки O.

Принимая во внимание, что $\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{\omega} \times \overline{OC}$ и обозначая буквой h расстояние между неподвижными точками тела O и O_1, получим скалярную форму векторных уравнении (1) и (2) в виде

$$\begin{aligned} -My_C\ddot{\varphi} - Mx_C\dot{\varphi}^2 &= R_x + F_x + F_{1x}, \\ Mx_C\ddot{\varphi} - My_C\dot{\varphi}^2 &= R_y + F_y + F_{1y}, \\ 0 &= R_z + F_z + F_{1z}, \\ -J_{xz}\ddot{\varphi} + J_{yz}\dot{\varphi}^2 &= M_x - hF_{1y}, \\ -J_{yz}\ddot{\varphi} - J_{xz}\dot{\varphi}^2 &= M_y + hF_{1x}, \\ J_z\ddot{\varphi} &= M_z. \end{aligned} \tag{3}$$

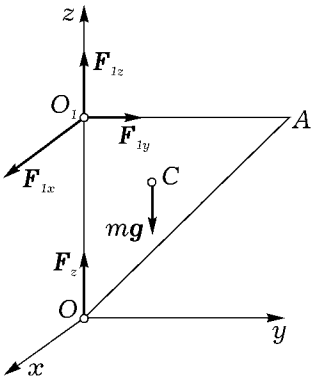

Рис. 92

Последнее уравнение не содержит реакций и является дифференциальным уравнением вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Остальные пять уравнений служат для нахождения реакций. Последняя задача является неопределенной. Действительно, из третьего уравнения системы (3) видно, что нельзя отдельно найти продольные реакции F_z и F_{1z}, а можно определить лишь их сумму. Эта сумма не зависит от характера вращательного движения тела. Поперечные реакции F_x, F_{1x}, F_y, F_{1y} находятся из первого, второго, четвертого и пятого уравнений системы (3); они зависят от вращения тела.

Пример 1. *Равнобедренный прямоугольный треугольпиик OO_1A вращается вокруг вертикальной оси, к которой он подвешен катетом*

$OO_1 = a$ (рис. 92). *Какова должна быть угловая скорость вращения, чтобы боковое давление на нижнюю опору O равнялось нулю? Треугольник считать тонкой однородной пластинкой.*

Для решения задачи воспользуемся уравнениями (3). *В рассматриваемом случае*

$$x_C = 0, \qquad y_C = a/3, \qquad h = a,$$

$J_{xz} = 0$, *а для* J_{yz} *получаем*

$$J_{yz} = \int yz\, dm = \frac{2m}{a^2} \int\limits_0^a z \left(\int\limits_0^z y\, dy \right) dz =$$

$$= \frac{m}{a^2} \int\limits_0^a z^3\, dz = \frac{1}{4} m a^2.$$

Далее,

$$R_x = R_y = 0, \quad R_z = -mg, \quad M_x = -\frac{1}{3} mga, \quad M_y = M_z = 0.$$

Учитывая еще, что по условию задачи $F_x = F_y = 0$, *получаем уравнения* (3) *в виде*

$$-\frac{1}{3} ma\ddot{\varphi} = F_{1x}, \quad -\frac{1}{3} ma\dot{\varphi}^2 = F_{1y}, \quad 0 = -mg + F_z + F_{1z},$$

$$\frac{1}{4} ma^2\dot{\varphi}^2 = -\frac{1}{3} mga - aF_{1y}, \quad -\frac{1}{4} ma^2\ddot{\varphi} = aF_{1x}, \quad J_z\ddot{\varphi} = 0.$$

Из последнего уравнения следует, что $\dot{\varphi} = \omega = \mathrm{const}$, *т. е. вращение треугольника происходит с постоянной угловой скоростью.*

Исключив из второго и четвертого уравнений величину F_{1y}, *придем к соотношению, определяющему величину угловой скорости. Окончательно найдем, что*

$$\omega = 2\sqrt{g/a}.$$

92. Условия, при которых динамические реакции равны статическим. Если в первом, втором, четвертом и пятом уравнениях системы (3) положить $\dot{\varphi} = 0$, $\ddot{\varphi} = 0$, то получим систему уравнений для определения поперечных статических реакций. Если же тело вращается, то либо $\dot{\varphi}$, либо $\ddot{\varphi}$, либо та и другая из этих величин не будут равными нулю. Поэтому левые части упомянутых уравнений в общем случае не будут тождественно равными нулю во все время движения и, следовательно, динамические реакции отличаются от статических.

Найдем условия, при которых динамические реакции равны статическим. Приравнивая нулю левые части первого, второго, четвертого и пятого уравнений системы (3), получим следующие две пары равенств:

$$y_C\ddot{\varphi} + x_C\dot{\varphi}^2 = 0, \qquad -y_C\dot{\varphi}^2 + x_C\ddot{\varphi} = 0. \tag{4}$$

$$J_{xz}\ddot{\varphi} - J_{yz}\dot{\varphi}^2 = 0, \qquad J_{xz}\dot{\varphi}^2 + J_{yz}\ddot{\varphi} = 0. \tag{5}$$

Равенства (4) и (5) можно рассматривать как однородные системы линейных уравнений соответственно относительно x_C, y_C и J_{xz}, J_{yz}. Определители этих систем одинаковы и равны величине $\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4$. Если тело вращается, то эта величина не может быть тождественно равной нулю. Поэтому равенства (4) и (5) удовлетворяются только при выполнении условий

$$x_C = y_C = 0, \qquad J_{xz} = J_{yz} = 0.$$

Таким образом, *динамические реакции при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси равны статическим тогда и только тогда, когда ось вращения является главной центральной осью инерции тела.*

93. Уравнение движения физического маятника. *Физическим маятником* называется твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси под действием силы тяжести. Выберем неподвижную систему координат $OXYZ$ так, чтобы ее ось OZ совпадала с осью вращения маятника, а ось OY была направлена вертикально вниз. Связанную с маятником систему координат $Oxyz$ выберем так, чтобы центр масс маятника лежал на оси Oy, а оси Oz и OZ совпадали. Тогда если a — расстояние от центра тяжести до оси вращения, то $M_z = -mga\sin\varphi$, и из последнего уравнения системы (3) получим дифференциальное уравнение движения физического маятника в виде

$$\ddot{\varphi} + \frac{mga}{J_z}\sin\varphi = 0. \tag{6}$$

Сравнивая это уравнение с уравнением движения плоского математического маятника, которое задается равенством (6) п. 57, находим, что физический маятник будет колебаться по такому же закону, что и математический маятник длиной

$$l = \frac{J_z}{ma}. \tag{7}$$

Величину l, определяемую по формуле (7), называют *приведенной длиной* физического маятника.

94. Фазовая плоскость для уравнения движения маятника. Для выяснения общих свойств движения систем с одной степенью

свободы очень удобен метод фазовой плоскости. Рассмотрим его на примере анализа дифференциального уравнения

$$\ddot{x} = f(x). \tag{8}$$

Будем считать, что правая часть этого уравнения удовлетворяет условию существования и единственности его решения.

Можно считать, что уравнение (8) описывает движение в системе с одной степенью свободы, в которой x играет роль обобщенной координаты, а кинетическая и потенциальная энергия определены равенствами

$$T = \frac{1}{2}\dot{x}^2, \qquad \Pi = -\int f(x)\,dx.$$

Полная механическая энергия $E = T + \Pi$ постоянна во все время движения, т. е. уравнение (8) имеет первый интеграл

$$E(x,\ \dot{x}) \equiv \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \Pi(x) = h = \text{ const}. \tag{9}$$

Уравнение (8) эквивалентно системе двух уравнений

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = f(x). \tag{10}$$

Плоскость с координатами x, y называется *фазовой плоскостью* уравнения (8). Точки фазовой плоскости называются *фазовыми точками.* В каждой точке плоскости, где определена функция $f(x)$, система (10) задает вектор с компонентами $\dot{x}$, $\dot{y}$; этот вектор называется *фазовой скоростью.* Решение системы (10) задает движение фазовой точки по фазовой плоскости, причем скорость движения фазовой точки равна фазовой скорости в том месте плоскости, где в данный момент находится точка. Кривая, которую описывает фазовая точка, называется *фазовой кривой.* В частных случаях фазовая кривая может состоять из одной точки. Такие точки называются *положениями равновесия.* Вектор фазовой скорости в положении равновесия равен нулю.

Интеграл (9) позволяет легко находить фазовые кривые. На каждой фазовой кривой значение полной механической энергии E постоянно, поэтому каждая фазовая кривая целиком принадлежит одному уровню энергии $E(x,\ \dot{x}) = h$.

Запишем интеграл (9) в виде

$$\dot{x}^2 = 2(h - \Pi(x)). \tag{11}$$

Совокупность фазовых кривых обладает следующими свойствами, которые полезно иметь в виду при анализе уравнения (8).

1. При данном h фазовые кривые могут располагаться только в той части фазовой плоскости, где выполняется неравенство $\Pi(x) \leqslant h$. Эту часть плоскости называют *областью возможности движения*. Неравенство $\Pi(x) \leqslant h$ следует из того, что для реальных движений правая часть формулы (11) не может быть отрицательной, так как ее левая часть есть квадрат вещественной величины.

2. Как видно из системы (10), положения равновесия лежат на оси x фазовой плоскости, причем в положении равновесия $x = x_*$, где x_* — критическая точка потенциальной энергии, т. е. такая точка, в которой $d\Pi/dx = 0$.

3. Если $x = x_*$ является точкой локального минимума функции $\Pi(x)$, причем $d^2\Pi/dx^2 > 0$ при $x = x_*$, то точка $(x_*,\ 0)$ на фазовой плоскости будет особой точкой типа центр для системы (10). Если же $x = x_*$ — точка локального максимума и в ней $d^2\Pi/dx^2 < 0$, то $(x_*,\ 0)$ — особая точка типа седло.

4. Совокупность фазовых кривых симметрична относительно оси x. Это свойство вытекает из формулы (11) ввиду четности входящих в нее величин относительно $\dot{x}$.

5. В точках оси x, отличных от положений равновесия, фазовые кривые ортогональны оси x. Это свойство сразу видно из системы (10), так как в этих точках $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = f(x) \neq 0$.

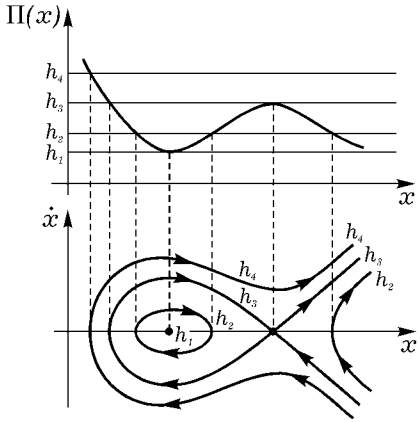

Рис. 93

Перечисленные свойства позволяют по виду графика функции $\Pi(x)$ сразу делать выводы о характере движения, описываемого уравнением (8). На рис. 93 для примера показаны график потенциальной энергии и соответствующие фазовые кривые. Направления движения фазовой точки показаны стрелками. При $h = h_1$ есть положение равновесия типа центр. Это положение равновесия окружено замкнутыми фазовыми кривыми. При $h > h_3$ фазовые кривые разомкнуты. На уровне энергии $h = h_3$ есть положение равновесия типа седло. На уровне $h = h_3$ расположена также фазовая кривая, начинающаяся вблизи седловой точки и при $t \to \infty$ входящая в эту точку. Эта кривая отделяет область, где расположены замкнутые кривые, окружающие точку типа центр, от разомкнутых фазовых кривых, соответствующих значениям h, большим h_3. Такие кривые, которые раз-

деляют области с различным характером поведения фазовых кривых, называют *сепаратрисами.*

Построим фазовую плоскость для дифференциального уравнения (6), описывающего движение маятника. Для кинетической и потенциальной энергии маятника имеем выражения

$$T = \frac{1}{2}J_z\dot{\varphi}^2, \qquad \Pi = -mga\cos\varphi.$$

Если положить $\omega_0^2 = g/l$, $\Pi^* = -\omega_0^2\cos\varphi$, то интеграл энергии $T + \Pi =$ const запишется в виде

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \Pi^* = h = \text{ const}. \tag{12}$$

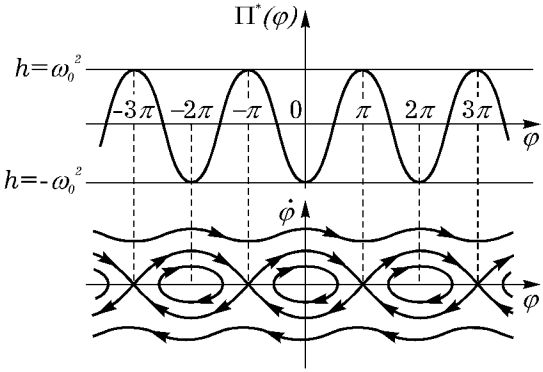

Рис. 94

График функции $\Pi^*(\varphi)$ и фазовые кривые представлены на рис. 94. Картина фазовых кривых периодична по φ с периодом 2π. При $h < -\omega_0^2$ движение невозможно. При $h = -\omega_0^2$ маятник находится в положении равновесия, когда его центр масс занимает самое низкое из возможных положений. На фазовой плоскости φ, $\dot{\varphi}$ этому положению равновесия соответствуют точки, в которых $\varphi = 2k\pi \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$, а $\dot{\varphi} = 0$. Это точки типа центр. Они окружены замкнутыми фазовыми кривыми, соответствующими колебаниям маятника. Колебательным движениям маятника соответствуют значения h, удовлетворяющие неравенству $-\omega_0^2 < h < \omega_0^2$.

При $h = \omega_0^2$ возможны два типа движений. Один соответствует положению равновесия маятника, когда его центр масс занимает наивысшее возможное положение. Этому равновесию на фазовой плоскости соответствуют точки $\varphi = \pi + 2k\pi \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$, $\dot{\varphi} = 0$. Это точки типа седло. Для другого типа движений при $h = \omega_0^2$ центр масс

маятника асимптотически при $t \to \infty$ стремится занять наивысшее положение. Асимптотическим движениям на фазовой плоскости соответствуют кривые, соединяющие точки типа седло. Эти кривые являются сепаратрисами.

При $h > \omega_0^2$ движение маятника будет вращательным. Для этого движения абсолютная величина угла φ монотонно возрастает. Этим движениям на фазовой плоскости соответствуют незамкнутые кривые. Сепаратрисы разделяют области колебательных и вращательных движений.

95. Некоторые сведения из теории эллиптических интегралов и эллиптических функций Якоби. В этой главе и в некоторых других разделах книги будут использоваться так называемые эллиптические интегралы и эллиптические функции. Дадим здесь необходимые определения и понятия.

Интеграл

$$u = F(\varphi,\ k) = \int\limits_0^{\varphi} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} \tag{13}$$

называется *эллиптическим интегралом первого рода.* Величина k называется *модулем эллиптического интеграла.* Обычно считается, что k удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant k < 1$.

Интеграл

$$E(\varphi,\ k) = \int\limits_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}\, dx \tag{14}$$

называется *эллиптическим интегралом второго рода.*

Величина

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2},\ k\right) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} \tag{15}$$

называется *полным эллиптическим интегралом первого рода*, а величина

$$E(k) = E\left(\frac{\pi}{2},\ k\right) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}\, dx \tag{16}$$

— *полным эллиптическим интегралом второго рода.*

При малых k интегралы (15), (16) представляются в виде сходящихся рядов по степеням k:

$$K = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 + \dots\right), \tag{17}$$

$$E = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{64}k^4 - \dots\right). \tag{18}$$

Из (13) и (14) можно получить следующее выражение для производных эллиптических интегралов по модулю k:

$$\frac{\partial F(\varphi,\ k)}{\partial k} = \frac{1}{k'^2}\left(\frac{E(\varphi,\ k) - k'^2 F(\varphi,\ k)}{k} - \frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\right), \tag{19}$$

$$\frac{\partial E(\varphi,\ k)}{\partial k} = \frac{E(\varphi,\ k) - F(\varphi,\ k)}{k}, \tag{20}$$

где $k'^2 = 1 - k^2$, k' — *дополнительный модуль.*

Если в равнствах (19) и (20) положить $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то получим производные по k от полных эллиптических интегралов (15) и (16):

$$\frac{dK}{dk} = \frac{E(k) - k'^2 K(k)}{kk'^2}, \quad \frac{dE}{dk} = \frac{E(k) - K(k)}{k}. \tag{21}$$

Функция, являющаяся результатом обращения эллиптического интеграла первого рода, называется *амплитудой* и обозначается так:

$$\varphi = \operatorname{am} u. \tag{22}$$

Функции $z = \operatorname{sn}(u,\ k)$ (*эллиптический синус*) и $z = \operatorname{cn}(u,\ k)$ (*эллиптический косинус*) определяются так:

$$z = \operatorname{sn}(u,\ k) = \sin\varphi = \sin\operatorname{am} u \quad \text{и} \quad z = \operatorname{cn}(u,\ k) = \cos\varphi = \cos\operatorname{am} u. \tag{23}$$

Так как $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ имеют период 2π по φ, то согласно (13) и (15), эллиптические синус и косинус имеют по u период, равный $4K(k)$.

Функция *дельта амплитуды* $z = \operatorname{dn}(u,\ k)$ определяется так:

$$z = \operatorname{dn}(u,\ k) = \frac{d\varphi}{du} = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} = \sqrt{1 - k^2\operatorname{sn}^2(u,\ k)}. \tag{24}$$

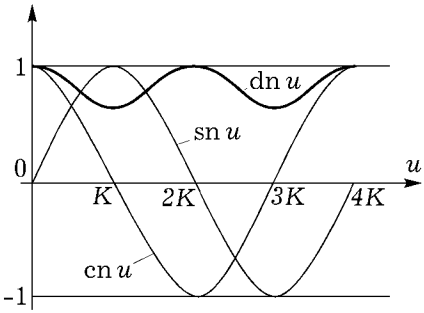

Рис. 95

Функция дельта амплитуды имеет период $2K(k)$ по u. Функции $\varphi = \operatorname{am} u$, $z = \operatorname{sn}(u,\ k)$, $z = \operatorname{cn}(u,\ k)$, $z = \operatorname{dn}(u,\ k)$ аналитичны относительно k и при $k \to 0$ стремятся соответственно к функциям $\varphi = u$, $z = \sin u$, $z = \cos u$, $z = 1$.

Эллиптические функции Якоби удовлетворяют следующим легко проверяемым тождествам:

$$\begin{gathered} \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1, \\ \operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1. \end{gathered} \tag{25}$$

Справедливы следующие формулы дифференцирования эллиптических функций:

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \operatorname{sn} u &= \operatorname{cn} u \cdot \operatorname{dn} u, \\ \frac{d}{du} \operatorname{cn} u &= -\operatorname{sn} u \cdot \operatorname{dn} u, \\ \frac{d}{du} \operatorname{dn} u &= -k^2 \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{cn} u. \end{aligned} \tag{26}$$

Графики эллиптических функций Якоби представлены на рис. 95.

96. Интегрирование уравнения движения маятника. Рассмотрим три случая в соответствии с возможными значениями константы h в интеграле (12).

1. $-\omega_0^2 < h < \omega_0^2$. В этом случае, как показано в п. 94, маятник совершает колебания. Пусть β — максимальный угол, на который отклоняется маятник от своего вертикального положения, соответствующего значению φ, равному нулю. Тогда $h = -\omega_0^2 \cos\beta$ и интеграл (12) запишется в виде

$$\dot{\varphi}^2 = 2\omega_0^2(\cos\varphi - \cos\beta). \tag{27}$$

Положим $k_1 = \sin(\beta/2)$ и сделаем замену переменных

$$\sin(\varphi/2) = k_1 \sin\psi. \tag{28}$$

Тогда интеграл энергии (27) примет следующий вид:

$$\dot{\psi}^2 = \omega_0^2(1 - k_1^2 \sin^2\psi). \tag{29}$$

Если принять, что при $t = 0$ $\varphi = 0$, то отсюда получаем

$$\omega_0 t = \int\limits_0^{\psi} \frac{dx}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 x}} = F(\psi,\ k_1), \tag{30}$$

т. е. $\psi = \mathrm{am}(\omega_0 t)$. Поэтому из (23) и (28) имеем окончательно

$$\varphi = 2 \arcsin(k_1 \operatorname{sn} \omega_0 t). \tag{31}$$

Функция φ периодична по t с периодом τ, вычисляемым, согласно п. 95, по формуле

$$\tau = 4K(k_1)/\omega_0. \tag{32}$$

Воспользовавшись разложением (17), получим, что при небольшом значении максимального угла отклонения β маятника от вертикали имеем приближенное значение периода

$$\tau = 2\pi\sqrt{l/g}, \tag{33}$$

что совпадает с известным значением периода малых колебаний маятника. При учете двух первых членов разложения τ в ряд по β получаем более точное значение периода

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\beta^2}{16}\right). \tag{34}$$

Если $\beta \to \pi$, то $k_1 \to 1$ и период колебаний τ неограниченно возрастает.

2. $h > \omega_0^2$. В этом случае маятник находится в режиме вращения. Пусть при $t = 0$ $\varphi = 0$, $\dot\varphi = \dot\varphi_0$. Тогда $h = {}^1\!/_2\dot\varphi_0^2 - \omega_0^2$ и интеграл (12) запишется в виде

$$\dot\varphi^2 = \dot\varphi_0^2\left(1 - k_2^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right), \tag{35}$$

где введено обозначение

$$k_2^2 = 4\frac{\omega_0^2}{\dot\varphi_0^2}. \tag{36}$$

Так как $h > \omega_0^2$, то $\dot\varphi_0^2 > 4\omega_0^2$ и, следовательно, $k_2^2 < 1$. Из (35) имеем

$$\frac{\dot\varphi_0}{2} t = F\left(\frac{\varphi}{2},\ k_2\right) = \int\limits_0^{\varphi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k_2^2 \sin^2 x}}. \tag{37}$$

Следовательно,

$$\varphi = 2\,\mathrm{am}(\dot{\varphi}_0 t/2). \tag{38}$$

Если начальная угловая скорость велика, т. е. $\dot{\varphi}_0^2 \gg \omega_0^2$, то приближенно $\varphi = \dot{\varphi}_0 t$ и вращение маятника мало отличается от равномерного.

3. $h = \omega_0^2$. Этот случай соответствует асимптотическим движениям маятника. Интеграл энергии (12) в этом случае дает соотношение

$$\dot{\varphi}^2 = 4\omega_0^2 \cos^2(\varphi/2). \tag{39}$$

Если при $t = 0$ $\varphi = 0$ и $\dot{\varphi} > 0$, то отсюда после интегрирования получаем

$$\varphi = -\pi + 4\,\mathrm{arctg}(e^{\omega_0 t}). \tag{40}$$

§ 2. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки

97. Дифференциальные уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Динамические уравнения Эйлера. Пусть при движении тела одна из его точек O все время остается неподвижной. Для получения уравнений движения тела воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента. Если $\boldsymbol{K}_O$ и $\boldsymbol{M}_O^{(e)}$ — кинетический момент тела и главный момент внешних сил относительно неподвижной точки O, то, согласно п. 87,

$$\frac{d\boldsymbol{K}_O}{dt} = \boldsymbol{M}_O^{(e)}. \tag{1}$$

Пусть $Oxyz$ — подвижная система координат, жестко связанная с телом, а p, q, r — проекции угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела на ее оси. Тогда компоненты вектора $\boldsymbol{K}_O$ выражаются через величины p, q, r и элементы тензора инерции тела для точки O — по формулам (8) п. 82.

Если абсолютную производную вектора $\boldsymbol{K}_O$ выразить через его локальную производную, то уравнение (1) запишется в виде

$$\frac{\tilde{d}\boldsymbol{K}_O}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K}_O = \boldsymbol{M}_O^{(e)}. \tag{2}$$

Пусть M_x, M_y, M_z — проекции вектора $\boldsymbol{M}_O^{(e)}$ на оси Ox, Oy, Oz.

Тогда векторное уравнение (2) запишется в виде следующих скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} &J_x\dot{p} - J_{xy}\dot{q} - J_{xz}\dot{r} + (J_z - J_y)qr + J_{yz}(r^2 - q^2) + p(J_{xy}r - J_{xz}q) = M_x, \\ &-J_{xy}\dot{p} + J_y\dot{q} - J_{yz}\dot{r} + (J_x - J_z)rp + J_{xz}(p^2 - r^2) + q(J_{yz}p - J_{xy}r) = M_y, \\ &-J_{xz}\dot{p} - J_{yz}\dot{q} + J_z\dot{r} + (J_y - J_x)pq + J_{xy}(q^2 - p^2) + r(J_{xz}q - J_{yz}p) = M_z. \end{aligned} \tag{3}$$

Эти уравнения существенно упрощаются, если оси Ox, Oy, Oz — главные оси инерции тела для точки O. В этом случае $J_{xy}=J_{xz}=J_{yz}=0$, а J_x, J_y, J_z являются главными моментами инерции: $J_x = A$, $J_y = B$, $J_z = C$. Уравнения (3) примут вид

$$\begin{aligned} &A\dot{p} + (C - B)qr = M_x, \\ &B\dot{q} + (A - C)rp = M_y, \\ &C\dot{r} + (B - A)pq = M_z. \end{aligned} \tag{4}$$

Уравнения (4) называются *динамическими уравнениями Эйлера.* Если M_x, M_y, M_z — функции p, q, r, t, то уравнения (4) образуют замкнутую систему уравнений, интегрирование которой даст зависимость величин p, q, r от времени t и начальных условий p_0, q_0, r_0. После этого из кинематических уравнений Эйлера (см. п. 36)

$$\begin{aligned} &p = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \\ &q = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \\ &r = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} \end{aligned} \tag{5}$$

можно найти углы ψ, θ, φ как функции времени и начальных условий.

Таким образом, в рассматриваемом случае решение задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки распадается на две последовательные задачи интегрирования систем трех уравнений первого порядка. В общем же случае величины M_x, M_y, M_z являются функциями времени, углов Эйлера и их производных. Тогда уравнения (4) и (5) надо интегрировать совместно.

Наиболее простым и очень важным случаем является тот, когда момент внешних сил относительно неподвижной точки равен нулю. Тогда говорят, что имеет место *случай Эйлера* движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Этот случай, очевидно, возможен, когда внешних сил нет совсем или тогда, когда внешние силы, приложенные к телу, приводятся к равнодействующей, проходящей через неподвиж-

ную точку. В случае Эйлера уравнения (4) принимают вид

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr &= 0, \\ B\dot{q} + (A - C)rp &= 0, \\ C\dot{r} + (B - A)pq &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Ниже мы рассмотрим движение тела в случае Эйлера подробно.

98. Первые интегралы. Так как в случае Эйлера главный момент внешних сил $\boldsymbol{M}_O^{(e)}$ относительно точки O равен нулю, то из уравнения (1) следует, что

$$\boldsymbol{K}_O = \text{ const}, \tag{7}$$

т. е. кинетический момент $\boldsymbol{K}_O$ тела относительно точки O имеет неизменное направление в неподвижной системе отсчета и величина его постоянна.

Так как Ap, Bq, Cr — проекции вектора $\boldsymbol{K}_O$ на главные оси инерции тела Ox, Oy, Oz, а K_O^2 — квадрат длины вектора $\boldsymbol{K}_O$, то из (7) следует первый интеграл

$$K_O^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \text{const}. \tag{8}$$

Из теоремы об изменении кинетической энергии можно получить, что кинетическая энергия тела также постоянна. Действительно, так как

$$dT = \boldsymbol{M}_O^{(e)} \cdot \boldsymbol{\omega}\, dt + \boldsymbol{R}^{(e)} \cdot \boldsymbol{v}_O\, dt,$$

а $\boldsymbol{v}_O = 0$ и $\boldsymbol{M}_O^{(e)} = 0$, то $dT = 0$. Поэтому существует первый интеграл

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \text{const}. \tag{9}$$

Существование первых интегралов (8) и (9) можно установить и непосредственно из системы уравнении (6). Действительно, если первое уравнение системы (6) умножить на Ap, второе — на Bq, а третье — на Cr и результаты сложить, то получим $A^2p\dot{p} + B^2q\dot{q} + C^2r\dot{r} = 0$, откуда следует первый интеграл (8). Если же первое, второе и третье уравнения умножить соответственно на p, q, r, то после сложения получим $Ap\dot{p} + Bq\dot{q} + Cr\dot{r} = 0$, откуда вытекает первый интеграл (9).

99. Стационарные вращения твердого тела в случае Эйлера. Будем называть *стационарным вращением* такое движение твердого тела, при котором его угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ постоянна относительно тела (а следовательно, и относительно неподвижной системы отсчета;

см. п. 30). Для стационарного вращения величины p, q, r постоянны. Для их определения из системы (6) получим такие уравнения:

$$(C - B)qr = 0, \quad (A - C)rp = 0, \quad (B - A)pq = 0. \tag{10}$$

Отсюда следует, что стационарное вращение тела может происходить только вокруг главной оси инерции тела для точки O, причем величина угловой скорости тела может быть произвольной.

В самом деле, если $A = B = C$, то уравнения (10) удовлетворяются при любых p, q, r, т. е. вращение тела происходит вокруг оси, имеющей произвольное направление. Но при $A = B = C$ эллипсоид инерции для точки O превращается в сферу, и поэтому любая ось, проходящая через точку O, становится главной осью инерции тела.

Если два из моментов инерции равны, например $A = B$, то уравнения (10) удовлетворяются при $p = q = 0$ и любом r (вращение вокруг главной оси инерции Oz), а также при $r = 0$ и любых p и q (вращение вокруг любой оси, проходящей через точку O, лежащей в экваториальной плоскости эллипсоида инерции и, следовательно, являющейся главной осью инерции).

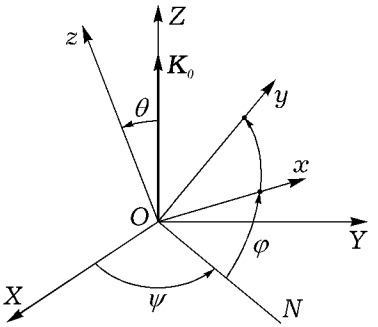

Рис. 96

Если величины A, B и C различны, то уравнения (10) могут иметь только такие решения, для которых две из величин p, q, r равны нулю, а третья произвольна, т. е. снова вращение происходит вокруг главной оси инерции.

100. Движение динамически симметричного тела в случае Эйлера. Регулярная прецессия. Будем называть тело *динамически симметричным*, если два его главных момента инерции для точки O равны, например $A = B$. Ось Oz тогда будем называть *осью динамической симметрии.* Исследуем движение динамически симметричного тела в случае Эйлера.

Неподвижную систему координат $OXYZ$ выберем так, чтобы ее ось OZ была направлена по вектору $\boldsymbol{K}_O$ (который в случае Эйлера постоянен). Для проекций Ap, Aq, Cr вектора $\boldsymbol{K}_O$ на оси связанной с телом системы координат $Oxyz$, образованной главными осями инерции, получаем такие выражения (рис. 96):

$$Ap = K_O \sin\theta \sin\varphi, \quad Aq = K_O \sin\theta \cos\varphi, \quad Cr = K_O \cos\theta. \tag{11}$$

Из последнего уравнения системы (6) при $A = B$ следует, что

$$r = r_0 = \text{const}, \tag{12}$$

т. е. проекция угловой скорости тела на ось его динамической симметрии постоянна. Из (12) и третьего из равенств (11) получаем

$$\cos\theta = Cr_0/K_O = \text{const}, \tag{13}$$

т. е. угол нутации постоянен.

При $\theta = \theta_0 = \text{const}$, $r = r_0 = \text{const}$ кинематические уравнения Эйлера (5) запишутся в виде

$$p = \dot\psi \sin\theta_0 \sin\varphi, \quad q = \dot\psi \sin\theta_0 \cos\varphi, \quad r_0 = \dot\psi \cos\theta_0 + \dot\varphi. \tag{14}$$

Подставив выражение для p из (14) в первое из равенств (11), получим

$$\dot\psi = K_O/A = \omega_2 = \text{const}. \tag{15}$$

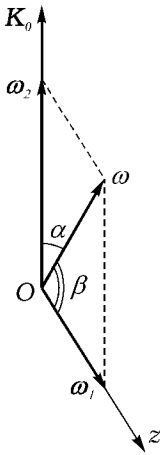

Рис. 97

Величина ω_2 называется *угловой скоростью прецессии.* Последнее из равенств (14) позволяет теперь найти величину $\dot\varphi$. Получаем, воспользовавшись формулами (13) и (15),

$$\begin{aligned} \dot\varphi &= r_0 - \dot\psi\cos\theta_0 = r_0 - \frac{K_O}{A}\cos\theta_0 = \\ &= r_0 - \frac{C}{A}r_0 = \frac{A-C}{A}r_0 = \omega_1 = \text{const}. \end{aligned} \tag{16}$$

Величина ω_1 называется *угловой скоростью собственного вращения.*

Движение твердого тела вокруг неподвижной точки, состоящее из его вращения вокруг оси, неизменно связанной с телом, и движения, при котором эта ось вращается вокруг пересекающей ее оси, неподвижной в рассматриваемой системе отсчета, называют *прецессией.* Прецессия называется *регулярной*, если вращение тела вокруг неизменно связанной с ним оси и вращение самой этой оси происходят с постоянными по модулю угловыми скоростями.

Таким образом, динамически симметричное тело в случае Эйлера совершает регулярную прецессию. В этой прецессии ось симметрии тела описывает круговой конус с осью $\boldsymbol{K}_O$ и углом при вершине $2\theta_0$, движение оси симметрии вокруг $\boldsymbol{K}_O$ происходит с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$; одновременно тело вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$ вокруг оси симметрии.

Пример 1. *Покажем, что при движении твердого тела вокруг неподвижной точки по инерции при условии $A = B < C$ угол между образующей и осью неподвижного аксоида не может быть больше* $19°28'$.

Из соотношений (13), (15) *и* (16) *следует, что при $A < C$ постоянный угол между угловыми скоростями собственного вращения и прецессии $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ тупой* (рис. 97).

Пусть α — угол между угловой скоростью тела $\boldsymbol{\omega}$ и вектором $\boldsymbol{\omega}_2$; он равен углу между образующей и осью неподвижного аксоида. Буквой β обозначим угол между векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega}_1$. Из того, что при регулярной прецессии угол нутации θ и модули угловых скоростей ω_1 и ω_2 постоянны, следует, что величины ω, α и β также постоянны. Имеют место соотношения

$$\cos\beta = \frac{r_0}{\omega} < 0, \quad \sin\beta = \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{\omega^2}} = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\omega}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{r_0} < 0;$$

$$\cos\theta = \frac{Cr_0}{K_O} < 0, \quad \sin\theta = \sqrt{1 - \frac{C^2 r_0^2}{K_0^2}} = \frac{A\sqrt{p^2+q^2}}{K_O},$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{A}{C}\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{r_0} < 0.$$

Поэтому

$$\operatorname{tg}\beta = \gamma \operatorname{tg}\theta.$$

Здесь $\gamma = C/A$. По условию задачи $C > A$, и так как моменты инерции всегда удовлетворяют неравенству $A + B \geqslant C$ (см. п. 79), *из которого при $A = B$ следует, что $2A \geqslant C$, то величина γ удовлетворяет условию $1 < \gamma \leqslant 2$. Теперь несложно получить следующую цепочку соотношений:*

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\theta - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\beta} = (1-\gamma)\frac{\operatorname{tg}\theta}{1+\gamma\operatorname{tg}^2\theta} =$$

$$= \frac{\gamma - 1}{2\sqrt{\gamma}}\frac{2\sqrt{\gamma}|\operatorname{tg}\theta|}{1 + (\sqrt{\gamma}\operatorname{tg}\theta)^2} \leqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{\gamma} - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Отсюда следует, что угол α между образующей и осью неподвижного аксоида удовлетворяет неравенству $\alpha \leqslant \operatorname{arctg}(\sqrt{2}/4) = 19°28'$.

101. Геометрическая интерпретация Пуансо. Пуансо дал замечательную геометрическую интерпретацию движения твердого тела в случае Эйлера. Эта интерпретация очень наглядна и позволяет довольно просто выявить качественный характер движения твердого тела в

случае Эйлера. Поэтому само движение тела в этом случае называют *движением Эйлера–Пуансо.*

Пусть P — точка пересечения мгновенной оси вращения с поверхностью эллипсоида инерции тела для точки O (рис. 98)

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

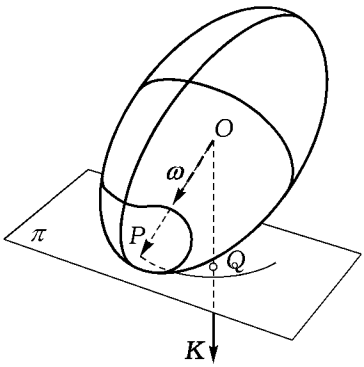

Рис. 98

Обозначим π плоскость, касательную к эллипсоиду инерции в точке P. Ее называют *плоскостью Пуансо.* Отметим следующие свойства (рис. 98) рассматриваемого движения.

1. Величина угловой скорости ω пропорциональна длине радиуса-вектора точки P относительно O.

Действительно, так как векторы $\overline{OP}$ и $\boldsymbol{\omega}$ коллинеарны, то $\overline{OP} = \lambda\boldsymbol{\omega}$, и надо только показать, что λ — постоянная величина. Подставив координаты точки P: $x_P = \lambda p$, $y_P = \lambda q$, $z_P = \lambda r$ в уравнение эллипсоида инерции и воспользовавшись интегралом (9), получим

$$\lambda^2(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = 1,$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2T}} = \text{const}.$$

2. Плоскость π перпендикулярна кинетическому моменту $\boldsymbol{K}_O$. Для доказательства достаточно заметить, что вектор $\boldsymbol{N}$, равный градиенту функции $Ax^2 + By^2 + Cz^2$, вычисленному в точке P, направлен по нормали к плоскости π. Но

$$\boldsymbol{N} = \left\| \begin{matrix} 2Ax_P \\ 2By_P \\ 2Cz_P \end{matrix} \right\| = 2\lambda \left\| \begin{matrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{matrix} \right\| = 2\lambda\boldsymbol{K}_O.$$

3. Проекция OQ радиуса-вектора $\overline{OP}$ на направление кинетического момента $\boldsymbol{K}_O$ есть величина постоянная.

В самом деле, воспользовавшись формулой (19) п. 84 и интегралом (8), получим

$$OQ = \frac{\boldsymbol{K}_O \cdot \overline{OP}}{K_O} = \lambda\frac{\boldsymbol{K}_O \cdot \boldsymbol{\omega}}{K_O} = \lambda\frac{2T}{K_O} = \frac{\sqrt{2T}}{K_O} = \text{const}.$$

Но кинетический момент $\boldsymbol{K}_O$ имеет неизменное направление и, согласно второму свойству, перпендикулярен плоскости π. Поэтому плоскость π, ввиду постоянства ее расстояния от неподвижной точки O, сохраняет неизменное положение в пространстве.

Таким образом, приходим к следующей, полученной Пуансо, геометрической интерпретации движения твердого тела в случае Эйлера: *эллипсоид инерции для неподвижной точки катится без скольжения по плоскости, неподвижной в пространстве; эта плоскость перпендикулярна кинетическому моменту; угловая скорость тела пропорциональна длине радиуса-вектора точки касания, а по направлению с ним совпадает.*

Движение эллипсоида по плоскости π происходит без скольжения, так как точка P лежит на мгновенной оси вращения, и поэтому ее скорость равна нулю.

При движении тела точка P на эллипсоиде инерции вычерчивает кривую, которая называется *полодией.* Соответствующая кривая на плоскости π называется *герполодией.* Так как точка P лежит на мгновенной оси вращения, то ясно, что полодия служит направляющей подвижного аксоида, а герполодия — направляющей неподвижного аксоида для движения твердого тела вокруг неподвижной точки (см. п. 26).

102. Интегрирование уравнений Эйлера. В п. 99 и 100 уравнения Эйлера (6) рассматривались в частных предположениях о движении тела или его геометрии масс. Получим теперь аналитическое решение уравнений (6) в общем случае. Будем для определенности считать, что $A > B > C$.

Из первых интегралов (8) и (9) выразим величины p^2 и r^2 через q^2, A, B, C и постоянные T, K_O:

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{1}{A(C-A)}\left[(2TC - K_O^2) - B(C-B)q^2\right], \\ r^2 &= \frac{1}{C(C-A)}\left[(K_O^2 - 2TA) - B(B-A)q^2\right]. \end{aligned} \tag{17}$$

Определяемые отсюда значения p и r подставим во второе уравнение системы (6). Получим дифференциальное уравнение для q с разделяющимися переменными

$$\begin{gathered} \frac{dq}{dt} = \pm\frac{1}{B\sqrt{AC}}\times \\ \times\sqrt{[(2TC - K_O^2) - B(C-B)q^2]\,[(K_O^2 - 2TA) - B(B-A)q^2]}. \end{gathered} \tag{18}$$

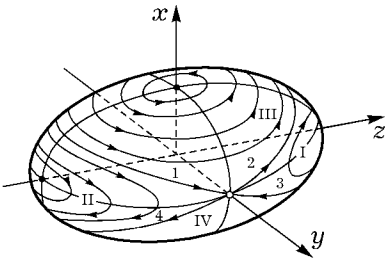

Рис. 99

Если это уравнение проинтегрировано, то функции p и r найдутся из равенств (17). При этом при извлечении квадратных корней перед радикалами возможны два знака: плюс или минус. Конкретный выбор этих знаков делается при помощи уравнений (6).

Рассмотрим три случая, соответствующих различным соотношениям между постоянными T и K_O.

1. $2TB > K_O^2 \geqslant 2TC$. В этом случае величина r всегда отлична от нуля и полодии заключают в себе наибольшую ось Oz эллипсоида инерции. Все полодии расположены на эллипсоиде инерции в областях, обозначенных на рис. 99 цифрами I и II. Для интегрирования уравнения (18) сделаем замену переменных

$$q = \pm\sqrt{\frac{K_O^2 - 2TC}{B(B-C)}}\sin\lambda,$$

$$\tau = \sqrt{\frac{(B-C)(2TA - K_O^2)}{ABC}}t$$

и введем положительный параметр $k^2 < 1$ согласно формуле

$$k^2 = \frac{(A-B)(K_O^2 - 2TC)}{(B-C)(2TA - K_O^2)}.$$

В новых переменных уравнение (18) запишется в виде

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \sqrt{1 - k^2\sin^2\lambda}. \tag{19}$$

Пусть при $t = 0$ $q = 0$. Тогда из (19), согласно п. 95, получаем $\lambda = \operatorname{am}\tau$. Решение уравнений Эйлера (6) в рассматриваемом случае записывается через эллиптические функции Якоби в виде

$$p = \mp\sqrt{\frac{K_O^2 - 2TC}{A(A-C)}}\operatorname{cn}(\tau,\ k), \qquad q = \pm\sqrt{\frac{K_O^2 - 2TC}{B(B-C)}}\operatorname{sn}(\tau,\ k)$$

$$r = \sqrt{\frac{2TA - K_O^2}{C(A-C)}}\operatorname{dn}(\tau,\ k). \tag{20}$$

Здесь одновременно берутся либо только верхние, либо только нижние знаки. Решение (20) соответствует полодиям, расположенным на рис. 99 в области I. Для получения решения, соответствующего полодиям, расположенным в области II, надо в формулах (20) величину q оставить без изменения, а у p и r одновременно изменить знаки.

Направление движения по полодиям показано на рис. 99 стрелками. Если $K_O^2 = 2TC$, то полодии вырождаются в две точки, совпадающие с вершинами эллипсоида, лежащими на оси Oz. Они соответствуют стационарным вращениям твердого тела вокруг оси Oz.

2. $2TA \geqslant K_O^2 > 2TB$. В этом случае величина p во все время движения отлична от нуля. Полодии заключают в себе наименьшую ось эллипсоида инерции Ox и расположены на эллипсоиде инерции в областях, обозначенных на рис. 99 цифрами III и IV. Сделаем замену переменных

$$q = \pm\sqrt{\frac{2TA - K_O^2}{B(A-B)}}\sin\lambda, \qquad \tau = \sqrt{\frac{(A-B)(K_O^2 - 2TC)}{ABC}}t.$$

Тогда, если ввести параметр $k^2 < 1$ по формуле

$$k^2 = \frac{(B-C)(2TA - K_O^2)}{(A-B)(K_O^2 - 2TC)},$$

то уравнение (18) примет вид (19), и если принять, что при $t = 0$ $q = 0$, то решение уравнений (6), соответствующее полодиям из области III на рис. 99, будет иметь вид

$$p = \sqrt{\frac{K_O^2 - 2TC}{A(A-C)}}\,\mathrm{dn}(\tau,\ k), \qquad q = \pm\sqrt{\frac{2TA - K_O^2}{B(A-B)}}\,\mathrm{sn}(\tau,\ k),$$
$$r = \mp\sqrt{\frac{2TA - K_O^2}{C(A-C)}}\,\mathrm{cn}(\tau,\ k). \tag{21}$$

Здесь одновременно берутся либо только верхние, либо только нижние знаки. Чтобы получить решения уравнений (6), соответствующие полодиям, расположенным в области IV на рис. 99, нужно величину q оставить такой же, как и в (21), а у p и r одновременно изменить знаки.

Если $K_O^2 = 2TA$, то полодии вырождаются в точки, лежащие на оси Ox и отвечающие стационарным вращениям тела вокруг оси Ox.

Заметим, что в двух рассмотренных случаях величины p, q, r — периодические функции времени, поэтому полодии представляют собой замкнутые кривые. Отметим также, что картина расположения

полодий на эллипсоиде инерции симметрична относительно его главных плоскостей. Каждому движению твердого тела соответствует одна вполне конкретная полодия. Какая именно, зависит от начальных значений величин p, q, r.

Рассмотрим еще третий случай, являющийся промежуточным между двумя рассмотренными.

3. $K_O^2 = 2TB$. Равенства (17) принимают вид

$$p^2 = \frac{(B-C)}{A(A-C)}(2T - Bq^2), \quad r^2 = \frac{(A-B)}{C(A-C)}(2T - Bq^2). \tag{22}$$

Из (22) следует, что $A(A-B)p^2 = C(B-C)r^2$. Учитывая свойство 1 движения Эйлера–Пуансо (п. 101), получаем, что в рассматриваемом случае полодии лежат в плоскостях

$$x = \pm\sqrt{\frac{C(B-C)}{A(A-B)}}z, \tag{23}$$

проходящих через среднюю ось эллипсоида инерции. Сечения эллипсоида инерции плоскостями (23) будут эллипсами, на которых лежат полодии двух типов. Во-первых, это полодии-точки, расположенные на оси Oy и соответствующие стационарным вращениям тела вокруг средней оси эллипсоида инерции с произвольной угловой скоростью. А во-вторых, есть четыре полодии, представляющие собой дуги эллипсов, соединяющих упомянутые полодии-точки. Эти четыре полодии обозначены на рис. 99 цифрами 1, 2, 3 и 4. Они являются на эллипсоиде инерции сепаратрисами, разделяющими области I, II, III, IV с отличающимся характером поведения полодий. Если положить

$$\tau = \sqrt{\frac{2T(A-B)(B-C)}{ABC}}t,$$

то уравнение (18) в рассматриваемом случае примет следующий вид:

$$\frac{dq}{d\tau} = \pm\frac{1}{\sqrt{2TB}}(2T - Bq^2). \tag{24}$$

Пусть при $t = 0$ $q = 0$. Тогда из уравнения (24) и равенств (22) с использованием известных соотношений между гиперболическими функциями

$$\operatorname{ch}^2\tau - \operatorname{sh}^2\tau = 1, \qquad \operatorname{th}\tau = \frac{\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}\tau}$$

получим, что решение уравнений Эйлера (6), соответствующее полодии 1 на рис. 99, имеет вид

$$p = \sqrt{\frac{2T(B-C)}{A(A-C)}}\,\frac{1}{\operatorname{ch}\tau}, \quad q = \sqrt{\frac{2T}{B}}\operatorname{th}\tau, \quad r = -\sqrt{\frac{2T(A-B)}{C(A-C)}}\,\frac{1}{\operatorname{ch}\tau}. \tag{25}$$

Решение уравнений (6), соответствующее полодии 3, получается из формул (25), если в них изменить знаки у величин p, r. Решения, соответствующие полодиям 2 и 4, получаются из (25), если изменить знаки соответственно у q, r и q, p.

Поведение гиперболических функций, входящих в формулы (25), показано на рис. 100.

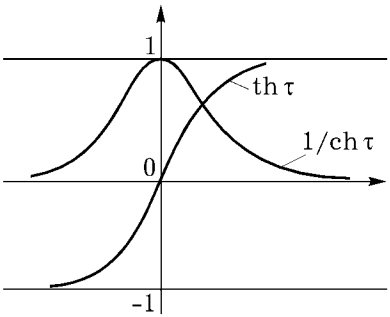

Рис. 100

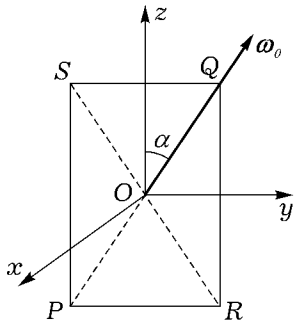

Рис. 101

Пример 1. *Однородная прямоугольная пластинка движется по инерции вокруг неподвижной точки, совпадающей с ее центром масс. В начальный момент времени $t = 0$ пластинка приведена во вращение с угловой скоростью ω_0 вокруг диагонали PQ* (рис. 101). *Обозначая α угол между диагоналями, показать, что через промежуток времени t', равный*

$$\frac{2K(\sin\alpha)}{\omega\sqrt{\cos 2\alpha}},$$

где K — полный эллиптический интеграл первого рода, $\sin\alpha$ — модуль эллиптического интеграла, пластинка будет вращаться вокруг другой диагонали RS.

Пусть $QS = b$, $QR = c$ и $b < c$. Оси Oy и Oz системы координат $Oxyz$ перпендикулярны соответствующим сторонам пластинки, а Ox перпендикулярна ее плоскости. Эти оси являются главными цен-

тральными осями инерции пластинки. Согласно п. 75 (*пример* 1), *имеем*

$$A = J_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2), \qquad B = J_y = \frac{1}{12}mc^2,$$

$$C = J_z = \frac{1}{12}mb^2.$$

Если диагональ пластинки равна d, *то* $b = d\sin\alpha, \quad c = d\cos\alpha$ *и*

$$A = \frac{1}{12}md^2, \quad B = \frac{1}{12}md^2\cos^2\alpha, \quad C = \frac{1}{12}md^2\sin^2\alpha.$$

При $t = 0$ $p = 0$, $q = \omega_0\sin\alpha$, $r = \omega_0\cos\alpha$, *поэтому*

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \frac{1}{12}md^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\cdot\omega_0^2,$$

$$K_O^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \frac{1}{144}m^2d^4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\cdot\omega_0^2.$$

Так как при $b < c$ *угол* α *не превосходит* $\pi/4$, *то, как нетрудно проверить непосредственным вычислением, справедливы неравенства* $A > B > C$ *и* $2TB > K_O^2 > 2TC$. *Следовательно, мы имеем дело с первым из рассмотренных выше случаев движения Эйлера–Пуансо.*

Опираясь на проведенное выше исследование этого случая, после несложных вычислений найдем:

$$\begin{aligned} p(t) &= -\sin\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}\cdot\omega_0\cdot\mathrm{cn}[\tau + K(k),\ k],\\ q(t) &= \sin\alpha\cdot\omega_0\cdot\mathrm{sn}[\tau + K(k),\ k],\\ r(t) &= \omega_0\cdot\mathrm{dn}[\tau + K(k),\ k]. \end{aligned}$$

Здесь $\tau = \sqrt{\cos 2\alpha}\cdot\omega_0\cdot t,\ k = \sin\alpha$.

При получении выписанного решения $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ *динамических уравнений Эйлера* (6) *в формулах* (20) *взяты верхние знаки, а величина* τ *заменена на* $\tau + K(k)$, *что отвечает конкретным начальным условиям в рассматриваемой задаче о движении пластинки. Полодия, соответствующая выписанному решению, лежит на эллипсоиде инерции в области* I (рис. 99).

При $t = t'$ *имеем*

$$\tau = \sqrt{\cos 2\alpha}\cdot\omega_0\cdot t' = 2K(k);$$

поскольку (рис. 95) $\mathrm{cn}[3K(k),\ k] = 0,\ \mathrm{sn}[3K(k),\ k] = -1,\ \mathrm{dn}[3K(k),\ k] = \sqrt{1-k^2}$, *то*

$$p(t') = 0, \qquad q(t') = -\omega_0\sin\alpha, \qquad r(t') = \omega_0\cos\alpha.$$

Отсюда следует, что при $t = t'$ *пластинка вращается вокруг диагонали* RS.

103. О герполодиях. Из рис. 98 видно, что $QP = \sqrt{OP^2 - OQ^2}$. Так как, согласно п. 101, $OP = \omega/\sqrt{2T}$, $OQ = \sqrt{2T}/K_O$, то

$$QP = \sqrt{\frac{\omega^2}{2T} - \frac{2T}{K_O^2}}. \tag{26}$$

Эта формула позволяет выявить некоторые общие свойства герполодий.

Для каждого из стационарных вращении $\omega =$ const, и герполодия представляет собой точку, совпадающую с точкой Q.

Рассмотрим общий случай движения. Пусть $A > B > C$. Тогда для движений тела, которым отвечают полодии, расположенные в областях I–IV на рис. 99, величина $\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ имеет минимум ω_1 и максимум ω_2. Согласно (26), величина QP также будет иметь минимум ρ_1 и максимум ρ_2. Поэтому герполодия заключена между двумя концентрическими окружностями с центром в точке Q (рис. 102 и 103).

Отметим без доказательства, что герполодия не имеет ни точек перегиба, ни точек возврата и всегда обращена вогнутостью в сторону точки Q, в которой вектор кинетического момента $\boldsymbol{K}_O$ пересекает плоскость Пуансо π.

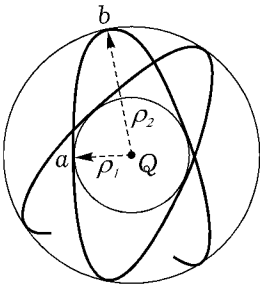

Рис. 102

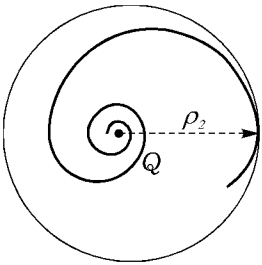

Рис. 103

В противоположность полодиям (из областей I–IV), которые являются замкнутыми кривыми, герполодии, хотя и состоят из симметричных участков, представляют собой, вообще говоря, незамкнутые кривые. Герполодия поочередно касается окружностей $\rho_1 =$ const и $\rho_2 =$ const. Моменты касания соответствуют переходу вектора $\boldsymbol{\omega}$ через главные плоскости эллипсоида инерции. Дуга герполодии ab (рис. 102) соответствует четверти дуги полодии. После того как точка P придет снова в то же положение на эллипсоиде и, следовательно, опишет полную полодию, радиус-вектор $\overline{QP}$ повернется на угол 4α, где α — угол,

образованный отрезками Qa и Qb на рис. 102. Если отношение α/π — рациональное число, то герполодия будет замкнутой, в противном случае она будет незамкнутой. Каждой из полодий 1–4 (рис. 99), существующих в случае $K_O^2 = 2TB$, соответствует герполодия, являющаяся спиралью, навивающейся на точку Q (рис. 103). Эта спираль бесконечно много раз обходит точку Q. Однако ее общая длина конечна, так как она равна длине соответствующей дуги полодии.

Если эллипсоид инерции есть эллипсоид вращения, то как полодия, так и герполодия представляют собой окружности.

104. Определение ориентации твердого тела в абсолютном пространстве для движения Эйлера–Пуансо. После того как в п. 102 величины p, q, r были определены как функции времени, можно из кинематических уравнений Эйлера (5) найти углы ψ, θ, φ, определяющие ориентацию твердого тела относительно неподвижной системы координат $OXYZ$. Задача сильно упрощается, если, как и в п. 100, ось OZ направить вдоль неизменного кинетического момента $\boldsymbol{K}_O$ (рис. 96). При таком выборе неподвижной системы координат проекции Ap, Bq, Cr вектора $\boldsymbol{K}_O$ на оси связанной с телом системы главных осей инерции Ox, Oy, Oz вычисляются, согласно рис. 96, по формулам

$$Ap = K_O \sin\theta \sin\varphi, \quad Bq = K_O \sin\theta \cos\varphi, \quad Cr = K_O \cos\theta. \tag{27}$$

Эти соотношения позволяют сразу определить углы θ и φ как функции времени при известных функциях p, q, r:

$$\cos\theta = \frac{Cr}{K_O}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{Ap}{Bq}. \tag{28}$$

Для нахождения угла ψ сначала получим величину $\dot{\psi}$ из первых двух уравнений (5):

$$\dot{\psi} = \frac{p\sin\varphi + q\cos\varphi}{\sin\theta}.$$

Если затем в это выражение подставить величины $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, полученные из первых двух равенств (27), то оно запишется в виде

$$\dot{\psi} = \frac{Ap^2 + Bq^2}{K_O \sin^2\theta}.$$

Воспользовавшись теперь третьим из равенств (27) и формулой (8), окончательно получим

$$\dot{\psi} = K_O \frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B^2q^2}. \tag{29}$$

Отсюда угол ψ найдется квадратурой. Так как правая часть формулы (29) положительна, то угол ψ монотонно возрастает во всех трех возможных случаях движения, рассмотренных в п. 102, т. е. при любой возможной зависимости функций p, q, r от времени.

Если движение тела не является стационарным вращением или асимптотическим движением, то, согласно п. 102, величины p, q, r представляют собой периодические функции времени. Когда значение t увеличивается на период, то синусы и косинусы углов θ и φ принимают свои первоначальные значения. Значения же $\sin\psi$ и $\cos\psi$ через период, вообще говоря, изменяются, так как за период угол ψ увеличивается на некоторую постоянную величину. Это следует из (21). Действительно, пусть τ_* — период по времени функций p и q. Тогда из (29) имеем $\dot\psi(t+\tau_*) = \dot\psi(t)$ и, интегрируя, получим

$$\psi(t+\tau_*) = \psi(t) + c,$$

где c — постоянная интегрирования.

Если число $c/(2\pi)$ не рационально, то твердое тело никогда не возвратится к своей первоначальной ориентации в абсолютном пространстве. Если же $\frac{c}{2\pi} = \frac{m}{n}$, где m, n — целые числа ($n \neq 0$), то движение твердого тела периодическое, с периодом, равным $n\tau_*$.

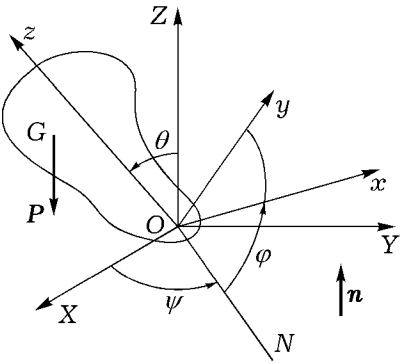

Рис. 104

105. Уравнения движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки и их первые интегралы. Рассмотрим движение твердого тела вокруг неподвижной точки O в однородном поле тяжести. Ось OZ неподвижной системы координат направим вертикально вверх. С движущимся телом жестко свяжем систему координат $Oxyz$, оси которой направим вдоль главных осей инерции тела для неподвижной точки O. Координаты центра тяжести G в системе координат $Oxyz$ обозначим a, b, c. Ориентацию тела относительно неподвижной системы координат будем определять при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ, которые вводятся обычным образом (рис. 104).

Моменты инерции тела относительно осей Ox, Oy, Oz обозначим A, B, C, а силу тяжести $\boldsymbol{P}$.

Пусть единичный вектор $\boldsymbol{n}$ вертикальной оси OZ имеет в связанной с телом системе координат $Oxyz$ компоненты γ_1, γ_2, γ_3. Величи-

ны γ_1, γ_2 и γ_3 равны множителям при $\dot{\psi}$ в выражениях для p, q, и r в кинематических уравнениях Эйлера (5):

$$\gamma_1 = \sin\theta\sin\varphi, \quad \gamma_2 = \sin\theta\cos\varphi, \qquad \gamma_3 = \cos\theta. \tag{30}$$

Вектор $\boldsymbol{n}$ постоянен в неподвижной системе координат, поэтому его абсолютная производная равна нулю: $d\boldsymbol{n}/dt = 0$. Учитывая связь абсолютной и локальной производных вектора (п. 30), последнее уравнение можно записать в виде

$$\frac{\tilde{d}\boldsymbol{n}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{n} = 0, \tag{31}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела. Уравнение (31) называется *уравнением Пуассона.* Обозначая, как обычно, p, q, r проекции $\boldsymbol{\omega}$ на оси Ox, Oy, Oz, векторное уравнение Пуассона можно записать в виде следующих трех скалярных уравнений:

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2. \tag{32}$$

Внешними силами, действующими на тело, являются сила тяжести и реакция точки O. Последняя не создает момента относительно точки O, а момент $\boldsymbol{M}_O$ силы тяжести $\boldsymbol{P}$ относительно точки O равен $\overline{OG} \times \boldsymbol{P}$. Учитывая, что $\boldsymbol{P} = -P\boldsymbol{n}$, можно написать

$$\boldsymbol{M}_O = P\boldsymbol{n} \times \overline{OG}. \tag{33}$$

Если M_x, M_y, M_z — проекции $\boldsymbol{M}_O$ на оси Ox, Oy, Oz, то из (33) получим

$$M_x = P(\gamma_2 c - \gamma_3 b), \quad M_y = P(\gamma_3 a - \gamma_1 c), \quad M_z = P(\gamma_1 b - \gamma_2 a). \tag{34}$$

Таким образом, динамические уравнения (4) имеют вид

$$\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= P(\gamma_2 c - \gamma_3 b), \\ B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp &= P(\gamma_3 a - \gamma_1 c), \\ C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= P(\gamma_1 b - \gamma_2 a). \end{aligned} \tag{35}$$

Уравнения (32), (35) образуют замкнутую систему шести дифференциальных уравнений, описывающую движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.

Если из системы уравнений (32), (35) величины $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ найдены как функции времени, то функции $\theta(t)$, $\varphi(t)$ находятся из (30), а для нахождения функции $\psi(t)$ нужно воспользоваться любым из кинематических уравнений Эйлера (5).

Таким образом, основная задача состоит в интегрировании системы уравнений (32), (35). Анализ этой системы и составляет главную сложность задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.

Укажем три первых интеграла системы (32), (35). Один из них следует из того, что модуль вектора $\boldsymbol{n}$ постоянен и равен единице:

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \tag{36}$$

Еще один интеграл следует из теоремы об изменении кинетического момента. В самом деле, так как внешние силы — сила тяжести и реакция точки O — не создают момента относительно вертикальной оси, то (см. п. 87) проекция кинетического момента $\boldsymbol{K}_O$ тела на вертикаль постоянна, т. е. $\boldsymbol{K}_O \cdot \boldsymbol{n} = \text{const}$. В подвижной системе координат вектор $\boldsymbol{K}_O$ имеет компоненты Ap, Bq, Cr, поэтому последнее равенство может быть записано в виде

$$Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \text{const}. \tag{37}$$

Замечая далее, что работа реакции точки O равна нулю, сила тяжести является потенциальной и потенциал Π не зависит от времени, получим, что во время движения тела его полная механическая энергия $E = T + \Pi$ постоянна (см. п. 88).

Принимая, что потенциальная энергия равна нулю, когда центр тяжести тела находится в горизонтальной плоскости OXY, получим, что $\Pi = Ph$, где h — взятое со знаком расстояние от центра тяжести тела до плоскости OXY; $h = \overline{OG} \cdot \boldsymbol{n} = a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3$. И так как $T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$, то интеграл энергии запишется в виде

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + P(a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3) = \text{const}. \tag{38}$$

Если воспользоваться теорией множителя Якоби, то можно показать[1], что для того, чтобы интегрирование системы (32), (35) можно было свести к квадратурам при любых начальных условиях, достаточно помимо выписанных трех первых интегралов (36)–(38) найти еще один независимый от них интеграл.

[1] См. п. 162.

К настоящему времени показано, что четвертый алгебраический первый интеграл относительно p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3 существует только в следующих трех случаях, а именно: в случаях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской.

В случае Эйлера тело произвольно, но его центр тяжести находится в неподвижной точке O, т. е. $a = b = c = 0$. Этот случай подробно изучен в п. 98–104.

В случае Лагранжа эллипсоид инерции тела для неподвижной точки является эллипсоидом вращения, а центр тяжести находится на оси вращения, т. е., например, выполняются равенства $A = B$, $a = b = 0$. Как следует из последнего уравнения системы (35), в этом случае четвертым алгебраическим первым интегралом будет проекция угловой скорости тела на ось динамической симметрии: $r = \mathrm{const}$.

В случае Ковалевской эллипсоид инерции для точки O является эллипсоидом вращения, например вокруг оси Oz, моменты инерции удовлетворяют соотношению $A = B = 2C$, а центр тяжести тела лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции, т. е. в наших обозначениях $c = 0$.

Для эллипсоида инерции, являющегося эллипсоидом вращения, любая ось, проходящая через точку O и лежащая в экваториальной плоскости, служит главной осью инерции. Поэтому будем для простоты вычислений считать, что ось Ox проходит через центр тяжести, т. е. $b = 0$. Тогда динамические уравнения Эйлера (35) в случае Ковалевской принимают вид

$$2\frac{dp}{dt} - qr = 0, \quad 2\frac{dq}{dt} + rp = \alpha\gamma_3, \quad \frac{dr}{dt} = -\alpha\gamma_2 \quad \left(\alpha = \frac{Pa}{C}\right), \tag{39}$$

и четвертый алгебраический первый интеграл, как нетрудно убедиться непосредственным дифференцированием, опираясь на уравнения (32), (39), имеет вид

$$(p^2 - q^2 - \alpha\gamma_1)^2 + (2pq - \alpha\gamma_2)^2 = \mathrm{const}. \tag{40}$$

Найдено и подробно исследовано также много случаев, когда существуют частные алгебраические интегралы, позволяющие свести интегрирование системы (32), (35) к квадратурам. Но эти интегралы существуют не для всех, а только для некоторых специфически выбранных начальных условий[1].

106. Основная формула гироскопии. Твердое тело, движущееся вокруг фиксированной в нем точки, для которой эллипсоид инерции

[1] См.: Горр Г. В., Кудряшова Л. В., Степанова Л. А. Классические задачи динамики твердого тела, Киев: Наукова думка, 1978.

тела является эллипсоидом вращения, называют *гироскопом*. В п. 100 мы видели, что если момент внешних сил относительно неподвижной точки O равен нулю, то гироскоп совершает регулярную прецессию вокруг неизменного кинетического момента $\boldsymbol{K}_O$.

Но для того, чтобы гироскоп совершал регулярную прецессию, вовсе не обязательно, чтобы момент внешних сил относительно неподвижной точки был равен нулю. Рассмотрим этот вопрос подробно. Пусть $OXYZ$ — неподвижная система координат с началом в неподвижной точке O тела, а $Oxyz$ — система координат, оси которой направлены по главным осям инерции тела для точки O. Пусть A, B, C — моменты инерции тела относительно осей Ox, Oy, Oz и $A = B$. Динамические уравнения Эйлера (4) в этом случае будут такими:

$$\begin{aligned} &A\frac{dp}{dt} + (C - A)qr = M_x, \\ &A\frac{dq}{dt} - (C - A)rp = M_y, \\ &C\frac{dr}{dt} = M_z. \end{aligned} \tag{41}$$

Углы Эйлера ψ, θ, φ вводим обычным образом; кинематические уравнения Эйлера имеют вид (5).

Найдем условия, при выполнении которых гироскоп может совершать регулярную прецессию вокруг оси OZ с заданными постоянными значениями угла нутации ($\theta = \theta_0$), угловой скорости собственного вращения ($\dot\varphi = \omega_1$) и угловой скорости прецессии ($\dot\psi = \omega_2$). Иными словами, надо найти, каким должен быть момент внешних сил $\boldsymbol{M}_O$ относительно точки O, чтобы была возможна регулярная прецессия гироскопа с заданными величинами θ_0, ω_1, ω_2.

Для заданных величин θ, $\dot\varphi$, $\dot\psi$ кинематические уравнения Эйлера (5) принимают вид

$$p = \omega_2 \sin\theta_0 \sin\varphi, \quad q = \omega_2 \sin\theta_0 \cos\varphi, \quad r = \omega_2 \cos\theta_0 + \omega_1. \tag{42}$$

Последнее из равенств (42) показывает, что r — постоянная величина. Поэтому третье из уравнений (41) дает

$$M_z = 0. \tag{43}$$

Подставив величины p, q, r из формул (42) в первое из уравнений (41), можно найти M_x. Имеем

$$M_x = A\omega_2 \sin\theta_0 \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} + (C - A)\omega_2 \sin\theta_0 \cos\varphi(\omega_2 \cos\theta_0 + \omega_1).$$

Подставив сюда вместо производной $d\varphi/dt$ ее значение ω_1, получим

$$M_x = \omega_2\omega_1 \sin\theta_0 \cos\varphi \left[C + (C - A)\frac{\omega_2}{\omega_1}\cos\theta_0\right]. \tag{44}$$

Аналогично, из формул (42) и второго из уравнений (41) получим

$$M_y = -\omega_2\omega_1 \sin\theta_0 \sin\varphi \left[C + (C - A)\frac{\omega_2}{\omega_1}\cos\theta_0\right]. \tag{45}$$

Замечая, что в системе координат $Oxyz$ вектор $\boldsymbol{\omega}_1$ имеет компоненты $0,\ 0,\ \omega_1$, а вектор $\boldsymbol{\omega}_2$ — компоненты $\omega_2 \sin\theta_0 \sin\varphi,\ \omega_2 \sin\theta_0 \cos\varphi,\ \omega_2 \cos\theta_0$, можно три формулы (43)–(45) записать в виде одного векторного равенства

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1 \left[C + (C - A)\frac{\omega_2}{\omega_1}\cos\theta_0\right]. \tag{46}$$

Отсюда видно, что вектор $\boldsymbol{M}_O$ постоянен по модулю и параллелен линии узлов ON.

Формула (46) называется *основной формулой гироскопии.* Она позволяет по заданным моментам инерции A, C, углу нутации θ_0 и векторам угловых скоростей $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$ найти момент $\boldsymbol{M}_O$, необходимый для осуществления регулярной прецессии.

Отметим, что, в отличие от случая Эйлера, рассмотренного в п. 100, здесь кинетический момент $\boldsymbol{K}_O$ не остается постоянным; он движется в соответствии с теоремой об изменении кинетического момента

$$\frac{d\boldsymbol{K}_O}{dt} = \boldsymbol{M}_O. \tag{47}$$

Последней формуле можно дать весьма удобную и широко распространенную интерпретацию: *скорость конца вектора $\boldsymbol{K}_O$ равна $\boldsymbol{M}_O$* (теорема Резаля).

Пример 1. *Центру основания однородного кругового конуса массой m, высотой h и с углом при вершине 2α, вершина O которого закреплена и который может катиться без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости, сообщается горизонтальная скорость $\boldsymbol{v}$. Найти равнодействующую (величину, направление и точку приложения) реакции плоскости и реакции в неподвижной точке, возникающих во время дальнейшего движения конуса.*

Пусть (рис. 105) *G — центр масс конуса, R — радиус его основания, а C и A — его моменты инерции относительно оси симметрии и оси, проходящей через вершину и перпендикулярной оси симметрии. Тогда* $OG = \frac{3}{4}h$, $C = \frac{3}{10}mR^2$, $A = \frac{3}{20}m(R^2 + 4h^2)$.

Но $R = O_1L = h\operatorname{tg}\alpha$, *поэтому* $C = \frac{3}{10}mh^2tg^2\alpha$, $A = \frac{3}{20}mh^2(4+\operatorname{tg}^2\alpha)$. *Кроме того,* $O_1K = h\sin\alpha$, $QG = \frac{3}{4}h\cos\alpha$.

Пусть вектор скорости центра основания конуса перпендикулярен плоскости рис. 105 *и направлен на читателя. Так как движение происходит без скольжения, то мгновенная ось вращения конуса направлена вдоль его образующей* OL. *Величина угловой скорости найдется из равенств* $v_{O_1} = v = \omega \cdot O_1K$. *Получим*

$$\omega = \frac{v}{h\sin\alpha}.$$

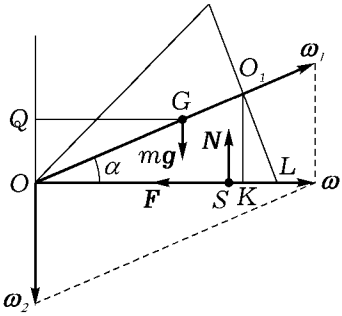

Рис. 105

Конус совершает регулярную прецессию; угловые скорости $\boldsymbol{\omega}_1$ *и* $\boldsymbol{\omega}_2$ *собственного вращения и прецессии направлены как показано на рисунке. Для их величин находим*

$$\omega_1 = \frac{\omega}{\cos\alpha} = \frac{v}{h\sin\alpha\cos\alpha},$$

$$\omega_2 = \omega\operatorname{tg}\alpha = \frac{v}{h\cos\alpha}.$$

Угол нутации θ (*угол между* $\boldsymbol{\omega}_1$ *и* $\boldsymbol{\omega}_2$) *равен* $\pi/2+\alpha$.

Прецессия совершается под действием силы тяжести, реакции плоскости и реакции в неподвижной точке O. *Момент* $\boldsymbol{M}_O$ *этих сил может быть вычислен по основной формуле гироскопии* (46). *Используя найденные выше значения величин* A, C, ω_1, ω_2 *и* θ, *найдем модуль этого момента:*

$$M_O = \omega_2\omega_1\cos\alpha\left[C-(C-A)\frac{\omega_2}{\omega_1}\sin\alpha\right] = \frac{3}{20}\frac{mv^2\sin\alpha}{\cos^3\alpha}(1+5\cos^2\alpha).$$

Вектор $\boldsymbol{M}_O$ *перпендикулярен плоскости рис.* 105 *и направлен на читателя. Отсюда, с учетом того, что сила тяжести направлена вертикально, следует, что искомая равнодействующая реакций плоскости и неподвижной точки* O *лежит в плоскости рисунка. Пусть равнодействующая приложена в точке* S *образующей конуса* OL. *Разложим ее на вертикальную составляющую* $\boldsymbol{N}$ *и составляющую* $\boldsymbol{F}$, *направленную по образующей.*

Величины N *и* F *найдем, применяя теорему о движении центра инерции* (п. 86). *Вертикальное ускорение центра тяжести равно нулю, поэтому* $N = mg$; *сила же* $\boldsymbol{F}$ *вызывает нормальное ускорение центра*

тяжести при его движении по окружности радиусом QG:

$$F = m \cdot \omega_2^2 \cdot QG = \frac{3}{4}\frac{mv^2}{h\cos\alpha}.$$

Далее, сумма моментов сил $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{N}$ и $m\boldsymbol{g}$ относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку O, должна равняться

$$N \cdot OS - mg \cdot QG = M_O.$$

Отсюда получаем расстояние точки S от вершины конуса:

$$OS = \frac{3}{4}h\cos\alpha + \frac{3}{20}\frac{v^2\sin\alpha}{g\cos^3\alpha}(1 + 5\cos^2\alpha).$$

107. Об элементарной теории гироскопа. У гироскопов, применяемых в современной технике, угловая скорость собственного вращения обычно значительно превосходит угловую скорость прецессии, т. е. $\omega_1 \gg \omega_2$. Если в этом случае пренебречь вторым членом в квадратных скобках в формуле (46), то получим

$$\boldsymbol{M}_O = C\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1. \tag{48}$$

Эта формула лежит в основе элементарной, или приближенной, теории гироскопа и называется *приближенной формулой гироскопии*[1].

Формула (48) сразу следует из теоремы Резаля, если сделать основное допущение элементарной теории гироскопа, состоящее в том, что у быстро вращающегося гироскопа в любой момент времени мгновенная угловая скорость и кинетический момент направлены по оси динамической симметрии, причем

$$\boldsymbol{K}_O = C\boldsymbol{\omega}_1. \tag{49}$$

Отметим некоторые свойства быстро вращающегося гироскопа. Пусть гироскоп закреплен так, что его центр тяжести совпадает с неподвижной точкой O. Такой гироскоп называют *уравновешенным*. Пусть он вращается вокруг оси симметрии с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$. Так как в данном случае ось симметрии является главной центральной осью инерции, то кинетический момент $\boldsymbol{K}_O$ гироскопа направлен по оси симметрии, причем $\boldsymbol{K}_O = C\boldsymbol{\omega}_1$. Последнее равенство является не приближенным, а точным. Если момент внешних сил относительно центра тяжести равен нулю, то вектор $\boldsymbol{K}_O$ постоянен, и ось гироскопа сохраняет свое начальное направление в неподвижной системе координат.

[1] Если угол нутации θ_0 равен $\pi/2$, то формула (48) дает не приближенное, а точное значение для $\boldsymbol{M}_O$ независимо от того, выполняется неравенство $\omega_1 \gg \omega_2$ или нет.

Предположим, что к оси гироскопа приложена сила $\boldsymbol{F}$, момент которой относительно точки O равен M (рис. 106). Согласно формуле (47), вектор $\boldsymbol{K}_O$ (а следовательно, и ось симметрии гироскопа, так как их направления по предположению совпадают) будет отклоняться, но не в сторону действия силы, а в ту сторону, куда направлен вектор $\boldsymbol{M}$ (т. е. перпендикулярно силе). В этом состоит одно из интереснейших свойств быстро вращающегося гироскопа.

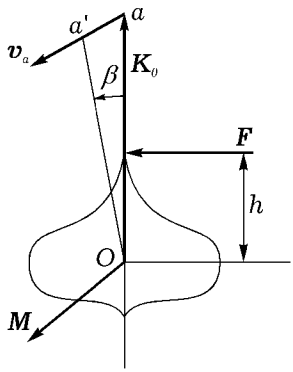

Рис. 106

Если действие силы $\boldsymbol{F}$ прекращается, то и ось гироскопа перестает отклоняться. Это тоже очень интересное свойство, так как в обычных условиях тело с прекращением действия силы продолжает свое движение по инерции.

Пусть на быстро вращающийся гироскоп в течение малого промежутка времени τ действует сила $\boldsymbol{F}$, причем величина $F\tau$ является конечной. Если плечо этой силы относительно точки O равно h, то $M = Fh$. Конец a вектора $\boldsymbol{K}_O$ приобретает скорость $\boldsymbol{v}_a$, модуль которой, согласно теореме Резаля, равен Fh. Точка a за время τ переместится на расстояние $aa' = v_a\tau = Fh\tau$. Учитывая, что Oa равняется $C\omega_1$, получаем, что ось гироскопа за время τ повернется на малый угол β, определяемый равенством

$$\beta = \frac{aa'}{Oa} = \frac{Fh\tau}{C\omega_1}. \tag{50}$$

Так как $Fh\tau$ — конечная величина, а $C\omega_1$ — большая, то угол β будет малым.

Отсюда следует, что при кратковременном действии сил ось гироскопа практически сохраняет свое первоначальное положение в пространстве.

При длительном воздействии силы $\boldsymbol{F}$ указанное свойство гироскопа не будет сохраняться продолжительно. Увеличением кинетического момента гироскопа $C\omega_1$ можно только увеличить промежуток времени, по истечении которого отклонение оси гироскопа от ее первоначального направления не будет превосходить определенного значения.

В технике характерным режимом работы гироскопа является работа в условиях длительно действующих постоянных или медленно меняющихся моментов, которые при наличии достаточного кинетического момента гироскопа сообщают ему весьма медленную прецессию. Это медленное изменение положения оси гироскопа является важнейшим

(но не единственным) свойством гироскопа, широко используемым на практике.

Рассмотрим гироскоп, вращающийся вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$. Пусть гироскоп совершает прецессию за счет того, что тело, на котором он установлен, вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$. Необходимый для прецессии момент $\boldsymbol{M}_O$ создается силами давления, действующими со стороны тела на гироскоп. Этот момент может быть вычислен по основной формуле гироскопии (46). По третьему закону Ньютона гироскоп давит на тело, на котором он установлен, с такими же по величине, но противоположно направленными силами. Эти силы создают момент $\boldsymbol{M}_{\text{гир}}$, воздействующий на тело, вынуждающее гироскоп совершать прецессию. Этот момент называют *гироскопическим моментом.* Очевидно, что $\boldsymbol{M}_{\text{гир}} = -\boldsymbol{M}_O$. В рамках приближенной теории гироскопа имеем

$$\boldsymbol{M}_{\text{гир}} = C\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2. \tag{51}$$

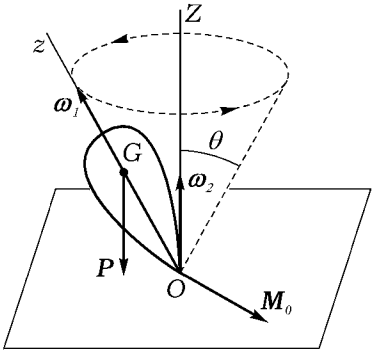

Рис. 107

В заключение, опираясь на элементарную теорию гироскопа, рассмотрим задачу о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Лагранжа (см. п. 105). Пусть динамически симметричное твердое тело весом P имеет неподвижную точку O (рис. 107). В начальный момент оно расположено так, что ось симметрии Oz составляет угол θ с вертикалью. Пусть тело закручено вокруг оси симметрии с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$, направленной как показано на рис. 107. Момент $\boldsymbol{M}_O$ силы тяжести $\boldsymbol{P}$ при любом направлении оси Oz горизонтален. Следовательно, вертикальная ось OZ является осью прецессии. Ось гироскопа движется по поверхности конуса с углом при вершине, равным 2θ. Направление движения указано на рис. 107 стрелками.

Угловую скорость прецессии найдем из формулы (48). Момент $\boldsymbol{M}_O$ имеет величину $P \cdot OG \cdot \sin\theta$. Согласно (48), эта величина должна равняться $C\omega_1\omega_2 \sin\theta$. Приравняв эти два значения для M_O, получим

$$\omega_2 = \frac{P \cdot OG}{C\omega_1}. \tag{52}$$

Угловая скорость прецессии не зависит от угла θ.

Таким образом, быстро вращающееся тяжелое твердое тело в случае Лагранжа совершает регулярную прецессию. Полученный вывод является приближенным. Он получен в предположениях элементарной теории гироскопов. В действительности движение гироскопа отличается от регулярной прецессии. В частности, угол θ не обязательно постоянен, он может изменяться в некотором интервале; колебательное движение оси симметрии гироскопа называется *нутацией*.

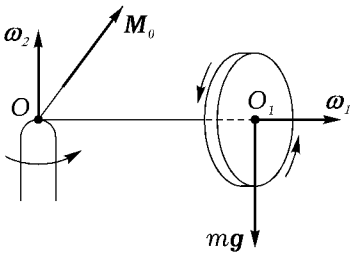

Рис. 108

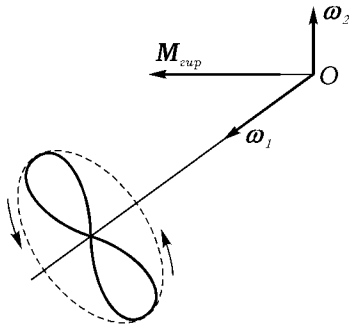

Рис. 109

Пример 1. *Гироскоп состоит из колеса радиусом $R = 0{,}1$ м, делающего $n = 100$ оборотов в секунду. Рама гироскопа, не изображенная на рис. 108, свободно вращается вокруг неподвижной точки O, расстояние которой OO_1 от колеса гироскопа равно $0{,}2$ м. Считая колесо однородным диском и пренебрегая массой рамы, определить направление и угловую скорость прецессионного движения, которое начнет совершать гироскоп, если будет предоставлен самому себе при горизонтальном положении плеча OO_1. Ускорение свободного падения принять равным $10\,\text{м/с}^2$.*

Момент силы тяжести $\boldsymbol{M}_O$ горизонтален, перпендикулярен OO_1 и направлен как показано на рис. 108, его величина $M_O = mg \cdot OO_1$, где m — масса колеса. Согласно формуле (46), для указанного на рисунке направления вращения колеса момент $\boldsymbol{M}_O$ вызовет регулярную прецессию гироскопа с угловой скоростью прецессии $\boldsymbol{\omega}_2$, направленной вертикально вверх.

Для подсчета величины угловой скорости прецессии можно воспользоваться либо основной формулой гироскопии (46), либо формулой (48) приближенной теории гироскопа (у нас $\theta = \pi/2$, и поэтому эти формулы совпадают). Получим

$$C\omega_1\omega_2 = mg \cdot OO_1.$$

Учитывая, что $C = 1/2mR^2$, *находим отсюда*

$$\omega_2 = \frac{mg \cdot OO_1}{C\omega_1} = \frac{mg \cdot OO_1}{1/2mR^2 \cdot 2\pi n} = \frac{2}{\pi}.$$

В рамках приближенной теории гироскопа $\theta = \mathrm{const}$ *и точка* O_1 *будет описывать горизонтальную окружность в направлении, указанном стрелкой. При этом величина угловой скорости плеча* OO_1 *равна* $\frac{2}{\pi}\frac{1}{c}$.

Пример 2. *Модель аэроплана, летящая со скоростью* v, *совершает поворот по горизонтальной окружности радиусом* ρ. *Момент инерции пропеллера и мотора относительно их общей оси вращения равен* C. *Пропеллер и мотор вращаются с угловой скоростью* ω_1. *Найти момент гироскопических давлений.*

Угловая скорость прецессии вертикальна и по величине равна v/ρ, *угол нутации* θ *равен* $\pi/2$. *Согласно* (46), *находим*

$$\boldsymbol{M}_{\text{гир}} = C\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2, \qquad M_{\text{гир}} = \frac{Cv\omega_1}{\rho}.$$

Гироскопический момент $\boldsymbol{M}_{\text{гир}}$ *горизонтален. Гироскопические же давления вертикальны, и при направлении вращения пропеллера, указанном на рис.* 109, *гироскопические давления при повороте авиамодели влево от курса стремятся поднять ее носовую часть вверх.*

§ 3. Движение свободного твердого тела

108. Дифференциальные уравнения движения свободного твердого тела. Пусть требуется найти движение свободного твердого тела относительно неподвижной системы координат O_aXYZ. Согласно теореме Шаля (п. 21), любое движение твердого тела можно рассматривать как совокупность поступательного движения, определяемого движением произвольной точки тела (полюса), и движения тела вокруг этой точки как неподвижной. При описании движения полюс желательно выбрать так, чтобы его движение определялось наиболее просто. Из основных теорем динамики следует, что за полюс удобно взять центр масс. Действительно, согласно теореме о движении центра масс, последний движется как материальная точка, к которой приложены все внешние силы системы, а теоремы об изменении кинетического момента и кинетической энергии для движения вокруг центра масс (см. определение этого понятия в п. 81) формулируются точно так же, как и для движения вокруг неподвижной точки.

Пусть M — масса тела, $\boldsymbol{v}_C$ — скорость центра масс, $\boldsymbol{K}_C$ — кинетический момент тела в его движении относительно центра масс, т. е. (см. п. 81) относительно системы координат, которая имеет начало в центре масс тела и движется поступательно. Если $\boldsymbol{R}^{(e)}$ и $\boldsymbol{M}_C^{(e)}$ — главный вектор и главный момент внешних сил относительно точки C, то из теоремы о движении центра инерции (п. 86) и теоремы об изменении кинетического момента (п. 87) имеем два векторных дифференциальных уравнения

$$M\frac{d\boldsymbol{v}_C}{dt} = \boldsymbol{R}^{(e)}, \qquad \frac{d\boldsymbol{K}_C}{dt} = \boldsymbol{M}_C^{(e)}. \tag{1}$$

Если X_C, Y_C, Z_C — координаты центра масс тела в неподвижной системе координат O_aXYZ, а R_x, R_y, R_z — проекции вектора $\boldsymbol{R}^{(e)}$ на оси O_aX, O_aY, O_aZ, то первое уравнение из (1) запишется в виде следующих скалярных уравнений:

$$M\frac{d^2X_C}{dt^2} = R_X, \qquad M\frac{d^2Y_C}{dt^2} = R_Y, \qquad M\frac{d^2Z_C}{dt^2} = R_Z. \tag{2}$$

Пусть $CXYZ$ — поступательно движущаяся кенигова система координат, а $Cxyz$ — система координат, жестко связанная с движущимся телом. Если p, q, r — проекции угловой скорости тела на оси Cx, Cy, Cz, а M_x, M_y, M_z — компоненты вектора $\boldsymbol{M}_C^{(e)}$ в системе координат $Cxyz$, то второе уравнение из (1) запишется в виде уравнений (3) п. 97:

$$\begin{gathered}
J_x\frac{dp}{dt} - J_{xy}\frac{dq}{dt} - J_{xz}\frac{dr}{dt} + (J_z - J_y)qr + J_{yz}(r^2 - q^2) + \\
+p(J_{xy}r - J_{xz}q) = M_x, \\
-J_{xy}\frac{dp}{dt} + J_y\frac{dq}{dt} - J_{yz}\frac{dr}{dt} + (J_x - J_z)rp + J_{xz}(p^2 - r^2) + \\
+q(J_{yz}p - J_{xy}r) = M_y, \\
-J_{xz}\frac{dp}{dt} - J_{yz}\frac{dq}{dt} + J_z\frac{dr}{dt} + (J_y - J_x)pq + J_{xy}(q^2 - p^2) + \\
+r(J_{xz}q - J_{yz}p) = M_z.
\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} — компоненты тензора инерции тела для центра масс в системе координат $Cxyz$. Если оси Cx, Cy, Cz — главные оси инерции тела для центра масс, то уравнения (3) упрощаются и принимают вид динамических уравнений Эйлера (4) п. 97.

В уравнениях (3) величины p, q, r можно заменить на их выражения, задаваемые кинематическими уравнениями Эйлера

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \\ q &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \\ r &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \tag{4}$$

Углы Эйлера, задающие взаимную ориентацию систем координат $Cxyz$ и $CXYZ$, вводятся обычным образом.

Уравнения (2)–(4) образуют систему дифференциальных уравнений, описывающую движение свободного твердого тела. В общем случае правые части уравнений (2), (3) зависят от величин X_C, Y_C, Z_C, ψ, θ, φ, их первых производных и времени, и в этом случае систему уравнений (2)–(4) надо решать совместно.

Но в простых случаях возможно раздельное интегрирование систем (2) и (3)–(4). Например, пусть свободное твердое тело движется в однородном поле тяжести. Единственной внешней силой, действующей на тело, является сила тяжести, приложенная в центре масс и направленная по вертикали вниз. Если ось O_aZ направить по вертикали вверх, то уравнения (2) примут вид

$$\frac{d^2X_C}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2Y_C}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2Z_C}{dt^2} = -g,$$

где g — ускорение свободного падения. Отсюда следует, что при произвольных начальных условиях центр масс тела будет двигаться по параболе. А так как момент $\boldsymbol{M}_C$ силы тяжести относительно центра масс равен нулю, то движение тела вокруг центра масс будет движением Эйлера–Пуансо.

Если твердое тело несвободно, то величины X_C, Y_C, Z_C, ψ, θ, φ и, может быть, их производные связаны некоторыми соотношениями. Уравнения движения по-прежнему имеют вид (2)–(4), но в правые части уравнений (2) и (3) войдут реакции связей.

Пример 1. *В момент метания диска его плоскость занимает горизонтальное положение, а центр диска находится на высоте h над поверхностью Земли. Центру диска сообщена горизонтальная скорость $\boldsymbol{v}_0$, а сам диск закручен с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0$, составляющей угол $\delta = \pi/4$ с его плоскостью. Векторы $\boldsymbol{v}_0$ и $\boldsymbol{\omega}_0$ лежат в неподвижной вертикальной плоскости O_aYZ* (рис. 110). *Считая диск тонкой однородной пластинкой, найти его движение. Влиянием воздуха пренебречь.*

В неподвижной системе координат O_aXYZ, плоскость O_aXY которой совпадает с горизонтальной поверхностью Земли, а ось O_aZ вер-

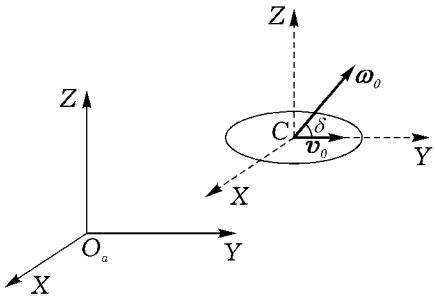

Рис. 110

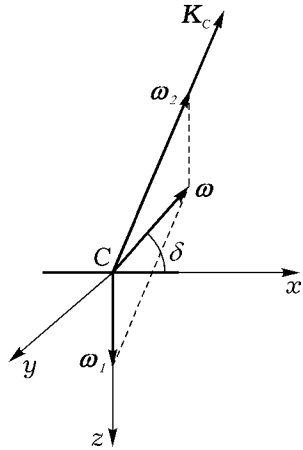

Рис. 111

тикальна, центр масс диска C движется по параболе

$$X_C(t) = 0, \qquad Y_C(t) = v_0 t + Y_C(0), \qquad Z_C(t) = h - \frac{gt^2}{2}.$$

Движение диска относительно кениговой системы координат $CXYZ$, оси которой параллельны соответствующим осям системы координат O_aXYZ, является регулярной прецессией. Оси жестко связанной с диском системы координат $Cxyz$, образованной главными центральными осями инерции диска, направим так, чтобы в момент метания диска $t = 0$ ось Cx совпадала с осью CY, ось Cy совпадала с осью CX, а направление оси Cz было бы противоположно направлению оси CZ кениговой системы координат (см. рис. 110 и 111).

Для главных центральных моментов инерции диска имеем: $J_z = 2J_x = 2J_y = 1/2mR^2$ (m — масса диска, R — его радиус). Так как $J_z > J_x$, то угол θ между векторами $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$, согласно п. 100, *тупой* (рис. 111).

На рис. 111 *показана ориентация вектора $\boldsymbol{\omega}$ относительно диска при $t = 0$; имеем: $p = \omega_0 \cos\delta$, $q = 0$, $r = r_0 = -\omega_0 \sin\delta$. Поэтому для неизменного модуля кинетического момента диска $\boldsymbol{K}_C$ получаем:*

$$K_C = \sqrt{J_x^2 p^2 + J_y^2 q^2 + J_z^2 r^2} = J_x \omega_0 \sqrt{1 + 3\sin^2\delta}.$$

Формулы (13), (15) *и* (16) *п.* 100 *дают:*

$$\cos\theta = \frac{J_z r_0}{K_C} = -\frac{2\sin\delta}{\sqrt{1+3\sin^2\delta}}, \quad \omega_2 = \frac{K_C}{J_x} = \omega_0\sqrt{1+3\sin^2\delta},$$
$$\omega_1 = \frac{J_x - J_z}{J_x} r_0 = \omega_0 \sin\delta.$$

Вектор $\boldsymbol{K}_C$ *задает ось прецессии. Он имеет неизменное направление в пространстве: лежит в плоскости* CYZ *и составляет с горизонтальной осью* CY *постоянный угол, равный* $\theta - \pi/2$. *Для единичного вектора* $\boldsymbol{e}$, *направленного вдоль* $\boldsymbol{K}_C$, *получаем в системе координат* $CXYZ$:

$$\boldsymbol{e}' = \left(0,\ \frac{\cos\delta}{\sqrt{1+3\sin^2\delta}},\ \frac{2\sin\delta}{\sqrt{1+3\sin^2\delta}}\right).$$

Подставив в полученные выражения заданное значение угла δ, *равное* $\pi/4$, *получим, что в кениговой системе координат диск совершает регулярную прецессию:*

$$\theta = \pi - \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \dot\psi = \omega_2 = \frac{\sqrt{10}}{2}\omega_0, \quad \dot\varphi = \omega_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0;$$

ось прецессии определяется вектором $\boldsymbol{e}' = (0,\ 1/\sqrt{5},\ 2/\sqrt{5})$.

109. Плоское движение тела. Пусть все точки тела движутся параллельно плоскости O_aXY. Получим дифференциальные уравнения, описывающие это плоское движение тела. Без ограничения общности можно считать, что центр масс тела движется в плоскости O_aXY, поэтому $Z_c \equiv 0$. Также можно считать, что оси Cx, Cy связанной с телом системы координат $Cxyz$ движутся в плоскости O_aXY, т. е. ось Cz перпендикулярна этой плоскости. Тогда, полагая $\theta \equiv 0$, $\psi \equiv 0$, из кинематических уравнений Эйлера (4) имеем

$$p \equiv 0, \qquad q \equiv 0, \qquad r = \dot\varphi. \tag{5}$$

Подставив $Z_C \equiv 0$ в уравнения (2), а выражения (5) для p, q, r в уравнения (3), получим

$$M\frac{d^2X_C}{dt^2} = R_X, \quad M\frac{d^2Y_C}{dt^2} = R_Y, \quad R_Z = 0. \tag{6}$$

$$\begin{gathered} -J_{xz}\frac{d^2\varphi}{dt^2} + J_{yz}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = M_x, \quad -J_{yz}\frac{d^2\varphi}{dt^2} - J_{xz}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = M_y, \\ J_z\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z. \end{gathered} \tag{7}$$

Последнее уравнение из (6) и первые два уравнения из (7) налагают ограничения на геометрию масс тела, внешние силы и частично на начальные условия, при выполнении которых плоское движение тела возможно. Остальные три уравнения

$$M\frac{d^2X_C}{dt^2} = R_X, \qquad M\frac{d^2Y_C}{dt^2} = R_Y, \qquad J_z\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_Z \tag{8}$$

являются дифференциальными уравнениями плоского движения твердого тела.

Пример 1. *Тело совершает плоское движение под действием постоянной во величине и направлению силы* $\boldsymbol{F}$. *Линия действия силы лежит в плоскости, проходящей через центр масс тела и параллельной плоскости его движения* (рис. 112). *Определить движение тела.*

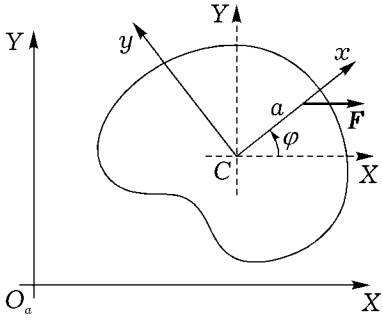

Рис. 112

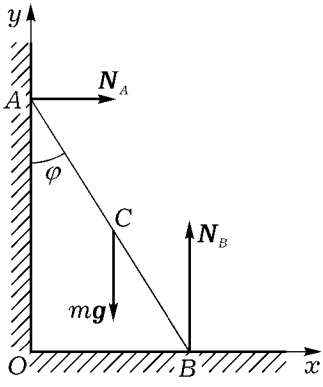

Рис. 113

Пусть m *— масса тела,* a *— расстояние от центра масс до точки приложения силы,* J *— момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс тела и перпендикулярной плоскости движения.*

Напишем уравнения движения тела (8). *Направление оси* O_aX *выберем так, чтобы оно совпадало с направлением силы* $\boldsymbol{F}$ (рис. 112). *Тогда*

$$m\ddot{X}_C = F, \qquad m\ddot{Y}_C = 0, \qquad J\ddot{\varphi} = -Fa\sin\varphi.$$

Из первых двух уравнений следует, что центр масс тела будет (*при* $\dot{Y}_C(0) \neq 0$) *двигаться по параболе*

$$X_C(t) = \frac{Ft^2}{2m} + \dot{X}_C(0)t + X_C(0), \qquad Y_C(t) = \dot{Y}_C(0)t + Y_C(0);$$

если $\dot{Y}_C(0) = 0$, *то центр масс движется с постоянным ускорением* F/m *вдоль прямой, параллельной оси* O_aX, *и за время* t *пройдет путь* $s = \dfrac{Ft^2}{2m} + \dot{X}_C(0)t$.

Одновременно тело вращается относительно центра масс; это вращение описывается третьим из написанных уравнений движения тела. Сравнивая это уравнение с уравнением движения математического маятника (уравнение (6) *п.* 57), *видим, что относительно центра масс тело движется как математический маятник длиной* $l = Jg/(Fa)$.

Пример 2. *Тонкий однородный стержень приставлен одним концом к гладкой вертикальной стене, а другим концом опирается на гладкий горизонтальный пол* (рис. 113). *Стержень пришел в движение из состояния покоя, когда он составлял угол* α *с вертикалью. Вычислить начальные давления на стену и пол.*

Движение стержня происходит под действием силы тяжести mg *и реакций* $\boldsymbol{N}_A$ *и* $\boldsymbol{N}_B$ *стены и пола;* $\boldsymbol{N}_A$ *имеет горизонтальное, а* $\boldsymbol{N}_B$ *— вертикальное направления. Пусть* a *— длина стержня, а* x, y *— координаты его центра тяжести* C *в показанной на рис.* 113 *системе координат* Oxy. *Дифференциальные уравнения движения стержня имеют вид*

$$m\ddot{x} = N_A, \quad m\ddot{y} = N_B - mg, \quad \frac{1}{12}ma^2\ddot{\varphi} = -\frac{1}{2}N_A a\cos\varphi + \frac{1}{2}N_B a\sin\varphi.$$

Но

$$x = \frac{1}{2}a\sin\varphi, \quad y = \frac{1}{2}a\cos\varphi;$$
$$\ddot{x} = \frac{a}{2}(\cos\varphi\cdot\ddot{\varphi} - \sin\varphi\dot{\varphi}^2), \quad \ddot{y} = -\frac{a}{2}(\sin\varphi\cdot\ddot{\varphi} + \cos\varphi\cdot\dot{\varphi}^2).$$

Поэтому из первых двух уравнений движения стержня имеем

$$N_A = \frac{1}{2}ma(\cos\varphi\cdot\ddot{\varphi} - \sin\varphi\cdot\dot{\varphi}^2), \quad N_B = mg - \frac{1}{2}ma(\sin\varphi\cdot\ddot{\varphi} + \cos\varphi\cdot\dot{\varphi}^2).$$

Подставив эти выражения для N_A *и* N_B *в третье из уравнений движения стержня и учтя, что при* $t = 0$ $\varphi = \alpha$, $\dot{\varphi} = 0$, *получим, что при* $t = 0$

$$\ddot{\varphi} = \frac{3g}{2a}\sin\alpha.$$

Следовательно, искомые начальные значения величин N_A *и* N_B *будут такими:*

$$N_A = \frac{3}{4}mg\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$N_B = mg\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2\alpha\right).$$

Пример 3. *Неоднородный диск катится по неподвижной горизонтальной плоскости так, что скольжение отсутствует, а плоскость диска все время остается в фиксированной вертикальной плоскости (см. пример 4 п. 87). Масса диска равна m, радиус a, центр масс C находится на расстоянии b от геометрического центра, момент инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр масс, равен J_C. Используя теорию плоского движения, получим дифференциальные уравнения движения диска.*

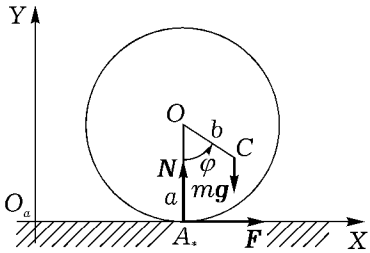

Рис. 114

Движение диска происходит под действием силы тяжести и реакции плоскости, которая приложена в точке A_* диска, в которой происходит его касание с плоскостью; разложим реакцию на две составляющие: вертикальную $\boldsymbol{N}$ и горизонтальную $\boldsymbol{F}$ (рис. 114).

Уравнения (8) *в рассматриваемой задаче будут иметь вид*

$$m\ddot{X}_C = F,$$
$$m\ddot{Y}_C = N - mg,$$
$$J_C\ddot{\varphi} = F(a - b\cos\varphi) - Nb\sin\varphi.$$

Из условия отсутствия скольжения (скорость точки A_* равна нулю) следует, что во все время движения должны выполняться равенства

$$\dot{X}_C = -(a - b\cos\varphi)\dot{\varphi}, \quad \dot{Y}_C = b\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}.$$

Следовательно,

$$\ddot{X}_C = -(a - b\cos\varphi)\cdot\ddot{\varphi} - b\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}^2, \quad \ddot{Y}_C = b\sin\varphi\cdot\ddot{\varphi} + b\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}^2.$$

Поэтому первые два из трех дифференциальных уравнений движения диска дают зависимость составляющих реакции плоскости от φ, $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$:

$$N = mg + mb(\sin\varphi\cdot\ddot{\varphi} + \cos\varphi\cdot\dot{\varphi}^2), \quad F = -m[(a - b\cos\varphi)\ddot{\varphi} + b\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}^2].$$

Подставив эти выражения для N и F в третье из дифференциальных уравнений движения диска, придем к уравнению, описывающему изменение угла φ во времени:

$$[J_C + m(a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi)]\ddot{\varphi} + mab\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 + mgb\sin\varphi = 0.$$

В примере 4 п. 87 это уравнение было получено при помощи теоремы об изменении кинетического момента.

§ 4. Движение тяжелого твердого тела, опирающегося на горизонтальную плоскость

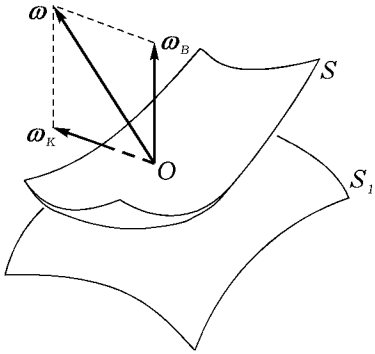

Рис. 115

110. Общие сведения. Понятие о трении. Пусть жесткая поверхность S движется, касаясь неподвижной поверхности S_1 (рис. 115). Считаем, что поверхности S и S_1 выпуклы, а их касание происходит в одной точке O. При движении поверхности S точка O, вообще говоря, перемещается как по S, так и по S_1. Предполагается, что в каждый момент времени через точку O можно провести единственную касательную плоскость к S и S_1. Очевидно, что скорость $\boldsymbol{v}_O$ точки O, которой поверхность S касается S_1, лежит в общей касательной плоскости, проходящей через O. Если $\boldsymbol{v}_O = 0$, то говорят о движении без скольжения. Если же $\boldsymbol{v}_O \neq 0$, то говорят о движении со скольжением, а $\boldsymbol{v}_O$ называют *скоростью скольжения.*

Примем точку O за полюс. Тогда движение поверхности S в каждый момент времени можно представить как совокупность поступательного движения со скоростью $\boldsymbol{v}_O$ и вращения с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг точки O. Разложим вектор $\boldsymbol{\omega}$ на две составляющие $\boldsymbol{\omega}_B$ и $\boldsymbol{\omega}_K$, где вектор $\boldsymbol{\omega}_B$ перпендикулярен общей касательной плоскости, а $\boldsymbol{\omega}_K$ лежит в ней; $\boldsymbol{\omega}_B$ называют *угловой скоростью верчения* поверхности S, а $\boldsymbol{\omega}_K$ — *угловой скоростью качения.*

Если $\boldsymbol{v}_O = 0$, то говорят, что поверхность S катится по поверхности S_1; если при этом $\boldsymbol{\omega}_B = 0$, $\boldsymbol{\omega}_K \neq 0$, то имеет место чистое качение S по S_1, а если $\boldsymbol{\omega}_K = 0$, $\boldsymbol{\omega}_B \neq 0$, то поверхность S совершает верчение. Когда $\boldsymbol{v}_O \neq 0$, а $\boldsymbol{\omega}_B = 0$, $\boldsymbol{\omega}_K = 0$, то говорят, что S скользит по S_1. В общем случае, когда $\boldsymbol{v}_O \neq 0$, $\boldsymbol{\omega}_B \neq 0$, $\boldsymbol{\omega}_K \neq 0$, поверхность S скользит, вертится и катится по S_1.

Действие S_1 на S проявляется в следующем. 1) На поверхность S действует сила $\boldsymbol{N}$, перпендикулярная общей касательной плоскости и направленная от S_1 к S; эта сила называется *нормальной реакцией*; для реальных движений $N \geqslant 0$. 2) На S действует сила трения $\boldsymbol{F}$, лежащая в общей касательной плоскости. Согласно законам трения Кулона, величина F не превосходит своего максимально возможного значения, равного kN, где k — коэффициент трения. При этом если $\boldsymbol{v}_O = 0$, то $F < kN$. Величину $\boldsymbol{F}$ в этом случае называют *силой трения по-*

коя. При $\boldsymbol{v}_O \neq 0$ имеет место равенство $F = kN$, а $\boldsymbol{F}$ называют *силой трения скольжения*[1].

Иногда приемлема такая идеализация, что поверхности можно считать абсолютно гладкими. Это означает, что величина k настолько мала, что величиной силы трения в рассматриваемой задаче можно пренебречь. Если поверхность S_1 абсолютно гладкая, то ее воздействие на S сводится к нормальной реакции $\boldsymbol{N}$.

В действительности тела соприкасаются не в одной точке, а по очень малой площадке. Тогда воздействие S на S_1 уже нельзя считать приводящимся к одной силе (являющейся геометрической суммой нормальной реакции и силы трения). Согласно теореме Пуансо (п. 71), совокупность сил, действующих на S в каждой точке площадки касания, в общем случае будет приводиться к силе и паре. Упомянутая сила снова может быть разложена на сумму нормальной реакции и силы трения, и пару удобно представить также в виде совокупности двух пар. Одна из них имеет момент, коллинеарный $\boldsymbol{\omega}_B$, а другая — коллинеарный $\boldsymbol{\omega}_K$. Первая пара является парой трения верчения, а вторая — парой трения качения. Трение верчения и трение качения обычно малы по сравнению с трением скольжения, и в прикладных задачах часто учитывается только трение скольжения.

111. Волчок на абсолютно гладкой плоскости. Пусть эллипсоид инерции твердого тела для его центра масс представляет собой эллипсоид вращения. Задача о движении волчка по плоскости состоит в исследовании движения этого тела в поле тяжести в предположении, что одна из точек тела, лежащая на оси динамической симметрии, движется по горизонтальной плоскости. Будем считать, что волчок имеет настолько острый конец, что его можно принять за острие, оканчивающееся точкой D. При движении волчка его точка D все время остается на неподвижной горизонтальной плоскости (рис. 116).

Будем считать, что плоскость является абсолютно гладкой. Тогда ее воздействие на волчок сводится к реакции $\boldsymbol{N}$, имеющей вертикальное направление. Так как активная сила — сила тяжести — также направлена по вертикали, то на основании теоремы о движении центра инерции (п. 86) получаем, что проекция центра масс G на горизонтальную плоскость движется равномерно и прямолинейно. Без ограничения общности будем считать ее неподвижной; тогда центр масс движется по заданной вертикали.

Выберем неподвижную систему $OXYZ$ так, чтобы ось OZ была вертикальной и проходила через центр масс волчка, а плоскость OXY

[1] Следует иметь в виду, что трение представляет собой весьма сложное явление, поэтому законы Кулона имеют только приближенный характер.

совпадала с горизонтальной плоскостью, на которую при движении опирается волчок своей точкой D (рис. 116).

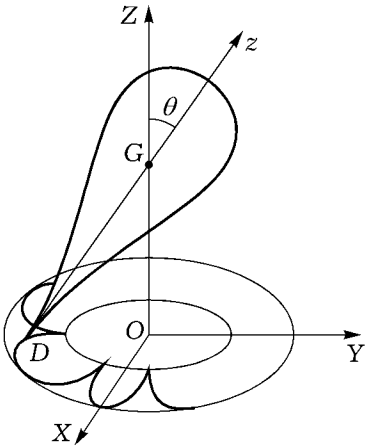

Рис. 116

Ориентация волчка относительно неподвижной системы координат задается углами Эйлера ψ, θ, φ.

Пусть m — масса волчка, l — расстояние от центра масс G до точки D, которой волчок касается плоскости, C — момент инерции волчка относительно оси динамической симметрии Gz, A и B ($A = B$) — моменты инерции волчка относительно двух любых жестко связанных с волчком взаимно перпендикулярных и перпендикулярных Gz осей Gx и Gy. Для расстояния h центра масс волчка от опорной плоскости имеем выражение: $h = l\cos\theta$.

Так как $A = B$ и внешние силы (реакция плоскости и сила тяжести) не создают момента относительно оси Gz, то из третьего уравнения системы динамических уравнений Эйлера (формулы (4) п. 97) следует, что проекция r угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ волчка на ось его динамической симметрии является постоянной, т. е. имеет место первый интеграл

$$r = r_0 = \text{const}. \tag{9}$$

Пусть, как обычно, p и q — проекции $\boldsymbol{\omega}$ на оси Gx и Gy. Так как внешние силы направлены вертикально и, следовательно, не создают момента относительно вертикальной оси OZ, то из теоремы об изменении кинетического момента (п. 87) вытекает постоянство проекции кинетического момента волчка относительно центра масс на вертикаль:

$$Ap\gamma_1 + Aq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \text{const},$$

где величины γ_1, γ_2, γ_3 вычисляются по формулам (30) п. 105. Используя кинематические уравнения Эйлера (формулы (5) п. 97) и соотношение (9), последнее равенство можно записать в виде

$$A\sin^2\theta\dot{\psi} + Cr_0\cos\theta = \text{const}. \tag{10}$$

Далее, поскольку связь, наложенная на волчок ($h = l\cos\theta$), стационарна и идеальна, а активные силы имеют потенциал $\Pi = mgh$, не зависящий

явно от времени, то полная механическая энергия постоянна (п. 88):

$$E = T + \Pi = \text{const}.$$

Здесь T — кинетическая энергия волчка, которая, согласно теореме Кенига (п. 83), вычисляется по формуле

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}A(p^2 + q^2) + \frac{1}{2}Cr^2,$$

где $v_G = \dot{h}$ — скорость центра масс волчка. Используя кинематические уравнения Эйлера, соотношение (9) и равенство $\dot{h} = -l\sin\theta\dot{\theta}$, запишем интеграл энергии в виде

$$(A + ml^2\sin^2\theta)\dot{\theta}^2 + A\sin^2\theta\dot{\psi}^2 + 2mgl\cos\theta = \text{const}. \tag{11}$$

Интегралы (9)–(11) позволяют свести решение задачи о движении волчка к квадратурам. Мы не будем исследовать движение во всей полноте, а рассмотрим только один частный случай. Пусть в начальный момент волчок закручен вокруг оси симметрии и поставлен на плоскость без начальной скорости центра масс и пусть в начальный момент ось симметрии волчка наклонена к вертикали под углом θ_0. Это означает, что при $t = 0$ выполнены равенства

$$\dot{\psi} = 0, \qquad \dot{\theta} = 0, \qquad \theta = \theta_0, \qquad \dot{\varphi} = r_0.$$

Кроме того, как мы предположили с самого начала, проекция центра масс на плоскость OXY имеет скорость, равную нулю.

Для таких начальных данных интегралы (10) и (11) можно переписать в следующем виде:

$$A\sin^2\theta\dot{\psi} = Cr_0(\cos\theta_0 - \cos\theta), \tag{12}$$

$$(A + ml^2\sin^2\theta)\dot{\theta}^2 + A\sin^2\theta\dot{\psi}^2 = 2mgl(\cos\theta_0 - \cos\theta). \tag{13}$$

Из (12) находим

$$\dot{\psi} = \frac{Cr_0(\cos\theta_0 - \cos\theta)}{A\sin^2\theta}. \tag{14}$$

Используя (14), интеграл (13) можно записать в виде

$$A\sin^2\theta(A + ml^2\sin^2\theta)\dot{\theta}^2 = f(\theta), \tag{15}$$

где

$$f(\theta) = (\cos\theta_0 - \cos\theta)[2Amgl\sin^2\theta - C^2r_0^2(\cos\theta_0 - \cos\theta)]. \tag{16}$$

Левая часть равенства (15) неотрицательна. Поэтому угол θ может принимать только такие значения, для которых $f(\theta) \geqslant 0$. Отсюда следует, что $\theta \geqslant \theta_0$, так как при $\theta < \theta_0$ функция $f(\theta)$ представляет собой произведение двух сомножителей, имеющих противоположные знаки. Угол θ колеблется между θ_0 и значением θ_1, являющимся ближайшим к θ_0 корнем уравнения $f(\theta) = 0$. Отметим, что $\theta_1 < \pi$, так как $f(\pi) = -(1+\cos\theta_0)^2 C^2 r_0^2 < 0$. Таким образом, при движении волчка выполняются неравенства $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1 < \pi$. Длина отрезка OD (рис. 116) все время удовлетворяет неравенствам

$$l\sin\theta_0 \leqslant OD \leqslant l\sin\theta_1.$$

Поэтому траектория точки D на опорной плоскости заключена между двумя концентрическими окружностями радиусов $l\sin\theta_0$ и $l\sin\theta_1$ с центром в точке O.

Из (14) следует, что когда θ принимает во время движения свое начальное значение θ_0, то $\dot{\psi} = 0$. Отсюда вытекает, что траектория точки D имеет на внутренней окружности радиуса $l\sin\theta_0$ точки возврата (рис. 116).

Если начальная угловая скорость r_0 вращения волчка вокруг оси симметрии велика, то угол θ мало отличается от своего начального значения. Действительно, приравняв нулю квадратную скобку в выражении (16) для функции $f(\theta_1)$, получим, что с погрешностью порядка $1/r_0^3$ угол θ_1 будет вычисляться по формуле

$$\theta_1 = \theta_0 + \frac{2Amgl\sin\theta_0}{C^2 r_0^2}.$$

Отсюда видно, что θ_1, а следовательно, и θ сколь угодно близки к θ_0, если величина r_0 достаточно велика.

112. Влияние трения на движение волчка. В действительности неподвижная плоскость, на которую опирается волчок, не является абсолютно гладкой, а волчок заканчивается не острием, а поверхностью вращения, более или менее заостренной, так что точка касания D волчка и плоскости не лежит на оси симметрии. По этим причинам движение волчка будет иным, нежели то движение, которое описано в п. 111.

Один из самых интересных эффектов влияния силы трения состоит в том, что эта сила может приблизить ось симметрии волчка к вертикали. Рассмотрим этот эффект с качественной стороны, опираясь на теорему об изменении кинетического момента. Пусть волчок быстро вращается вокруг оси симметрии и без начальной скорости центра масс поставлен на плоскость так, что его ось симметрии составляет с вертикалью некоторый ненулевой острый угол θ_0.

Кинетический момент $\boldsymbol{K}$ волчка относительно центра масс в начальный момент направлен как показано на рис. 117. Пусть D — точка ножки волчка, которой он касается опорной плоскости. Ножка теперь уже не принимается за острие. Сила трения $\boldsymbol{F}$ направлена в сторону, противоположную скорости точки D. Момент $\boldsymbol{M}$ силы трения относительно центра масс направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через центр масс G и вектор $\boldsymbol{F}$. Вектор $\boldsymbol{M}$ можно представить в виде суммы $\boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2$, где вектор $\boldsymbol{M}_1$ перпендикулярен $\boldsymbol{K}$, а вектор $\boldsymbol{M}_2$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{K}$, но (в ситуации, представленной на рис. 117) направлен противоположно $\boldsymbol{K}$. По теореме об изменении кинетического момента скорость конца вектора $\boldsymbol{K}$ равна $\boldsymbol{M}$. Отсюда следует, что вектор $\boldsymbol{K}$, уменьшаясь по величине (из-за наличия составляющей $\boldsymbol{M}_2$ момента силы трения), стремится занять вертикальное положение (из-за наличия составляющей $\boldsymbol{M}_1$ момента силы трения). Таким образом, вектор $\boldsymbol{K}$, а вместе с ним и ось симметрии волчка под влиянием трения стремятся к вертикали. Если действие трения будет достаточно продолжительным, то ось волчка может в конце концов занять строго вертикальное положение и останется в этом положении неподвижной. В этом случае говорят, что волчок «спит».

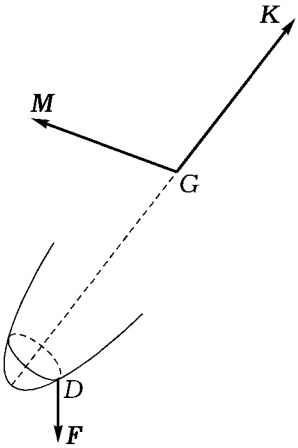

Рис. 117

113. Движение однородного шара по плоскости при наличии трения. Пусть однородный шар массой m и радиусом a движется по неподвижной шероховатой горизонтальной плоскости. Введем две системы координат: неподвижную $OXYZ$ с вертикальной осью OZ и началом O, совпадающим с произвольной точкой опорной плоскости, и поступательно движущуюся $GXYZ$ с началом в центре масс шара G и осями, параллельными соответствующим осям неподвижной системы координат (рис. 118).

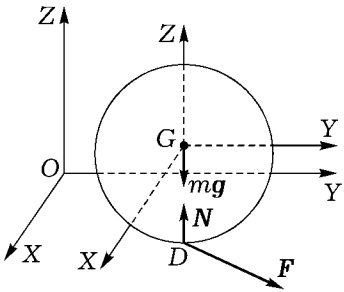

Рис. 118

Реакцию плоскости $\boldsymbol{R}$ представим в виде суммы двух сил: $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}$, где $\boldsymbol{N}$ — нормальная реакция плоскости, а $\boldsymbol{F}$ — сила трения. Если $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость шара, а $\boldsymbol{v}_G$ — скорость центра масс,

то скорость $\boldsymbol{v}_D$ точки D шара, которой он касается плоскости, вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{v}_D = \boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \overline{GD}. \tag{17}$$

Сила трения скольжения определяется соотношением

$$\boldsymbol{F} = -kN\boldsymbol{u}, \tag{18}$$

где k — коэффициент трения, $\boldsymbol{u}$ — единичный вектор, направленный вдоль скорости точки D: $\boldsymbol{v}_D = v_D\boldsymbol{u}$.

Из теоремы о движении центра инерции имеем

$$m\frac{d\boldsymbol{v}_G}{dt} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R}. \tag{19}$$

Пусть $\boldsymbol{K}_G$ — кинетический момент шара относительно центра масс. Тогда, учитывая, что момент инерции однородного шара радиусом a и массой m относительно любого диаметра равен $\frac{2}{5}ma^2$, имеем

$$\boldsymbol{K}_G = \frac{2}{5}ma^2\boldsymbol{\omega}. \tag{20}$$

Теорема об изменении кинетического момента для движения относительно центра масс дает уравнение

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{5}{2ma^2}\overline{GD} \times \boldsymbol{R}. \tag{21}$$

Пусть X_G, Y_G, Z_G — координаты центра масс в системе $OXYZ$, а F_X, F_Y — проекции силы трения на оси OX и OY. Уравнения (11) в скалярной форме запишутся в виде

$$\frac{d^2X_G}{dt^2} = \frac{1}{m}F_X, \quad \frac{d^2Y_G}{dt^2} = \frac{1}{m}F_Y, \quad \frac{d^2Z_G}{dt^2} = -g + \frac{1}{m}N. \tag{22}$$

Так как $Z_G = a = \text{const}$, то последнее из этих уравнений даст $N = mg$, т. е. нормальная реакция плоскости равна весу шара, причем этот вывод не зависит от того, скользит шар по плоскости ($\boldsymbol{v}_D \neq 0$) или нет ($\boldsymbol{v}_D = 0$).

Если ω_X, ω_Y, ω_Z — проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на оси GX, GY, GZ, то векторное уравнение (21) дает следующие три скалярных уравнения:

$$\frac{d\omega_X}{dt} = \frac{5}{2ma}F_Y, \quad \frac{d\omega_Y}{dt} = -\frac{5}{2ma}F_X, \quad \frac{d\omega_Z}{dt} = 0. \tag{23}$$

Последнее из этих уравнений показывает, что при движении шара проекция его угловой скорости на вертикаль остается постоянной. Это заключение имеет место независимо от наличия или отсутствия скольжения шара.

Пусть в начальный момент $\boldsymbol{v}_D \neq 0$, т. е. имеется скольжение. Так как $N = mg$, то из (18) получаем, что при наличии скольжения шара сила трения постоянна по величине: $F = kmg$. Покажем, что она постоянна и по направлению. Для этого продифференцируем обе части равенства (17) по времени и воспользуемся уравнениями (19), (21) и равенствами $\boldsymbol{R} = -m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}$, $\overline{GD} = \frac{a}{g}\boldsymbol{g}$. Получим

$$\frac{d\boldsymbol{v}_D}{dt} = \frac{7}{2m}\boldsymbol{F}. \tag{24}$$

Заменив здесь $\boldsymbol{v}_D$ на $v_D\boldsymbol{u}$, а $\boldsymbol{F}$ — на правую часть равенства (18), получим

$$\frac{dv_D}{dt}\boldsymbol{u} + v_D\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = -\frac{7}{2}kg\boldsymbol{u}. \tag{25}$$

Так как $\boldsymbol{u}$ — единичный вектор, то вектор $d\boldsymbol{u}/dt$ перпендикулярен $\boldsymbol{u}$. Поэтому из (25) следует, что

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dv_D}{dt} = -\frac{7}{2}kg. \tag{26}$$

Таким образом, вектор $\boldsymbol{u}$ имеет постоянное направление и, следовательно, сила трения постоянна:

$$\boldsymbol{F} = -kmg\boldsymbol{u}. \tag{27}$$

Величина скорости точки D, согласно (26), изменяется во времени по закону

$$v_D(t) = v_D(0) - \frac{7}{2}kgt. \tag{28}$$

Если обозначить через α постоянный угол, который составляет скорость точки D с осью OX, то из первых двух уравнений (22), получим

$$\begin{aligned} X_G(t) &= -\frac{1}{2}kg\cos\alpha \cdot t^2 + \dot{X}_G(0)t + X_G(0), \\ Y_G(t) &= -\frac{1}{2}kg\sin\alpha \cdot t^2 + \dot{Y}_G(0)t + Y_G(0). \end{aligned} \tag{29}$$

Первые два уравнения из (23) дают

$$\omega_X(t) = \omega_X(0) - \frac{5kg\sin\alpha}{2a}t, \qquad \omega_Y(t) = \omega_Y(0) + \frac{5kg\cos\alpha}{2a}t. \tag{30}$$

Из (29) следует, что если в начальный момент скорость центра масс и скорость точки касания не коллинеарны, то на стадии движения со скольжением центр шара движется по параболе. Согласно (28), такое движение происходит до момента $t = t_*$ где

$$t_* = \frac{2v_D(0)}{7kg}. \tag{31}$$

При $t = t_*$ имеем $\boldsymbol{v}_D = 0$; скольжение прекращается и начинается стадия качения шара (с верчением). Так как $\boldsymbol{v}_D = 0$, то из (24) следует, что на стадии качения сила трения равна нулю. Из (22) тогда получаем, что центр масс движется по прямой. Согласно (23), угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ шара при качении постоянна по величине и направлению. Точка D на плоскости движется по прямой, а на поверхности шара — по неизменной окружности, плоскость которой перпендикулярна вектору $\boldsymbol{\omega}$.

При переходе в режим качения центр шара движется по касательной к параболе (29). Если эта касательная составляет тупой угол с начальной скоростью центра шара, то шар может повернуть назад: явление, хорошо известное игрокам на бильярде.

114. Об уравнениях движения тяжелого тела произвольной выпуклой формы. Пусть тело движется по неподвижной горизонтальной плоскости, опираясь на нее одной точкой своей выпуклой поверхности, не имеющей заострений и ребер. Движение происходит в поле тяжести.

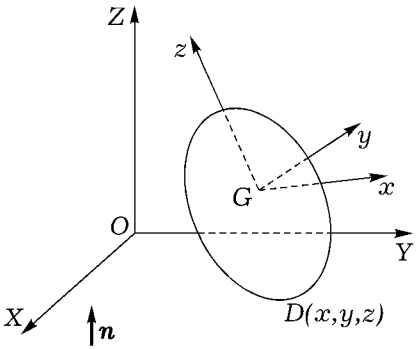

Рис. 119

Движение тела будем изучать по отношению к неподвижной системе координат $OXYZ$ с началом в некоторой точке опорной горизонтальной плоскости и осью OZ, направленной вертикально вверх (рис. 119). Единичный вектор этой оси обозначим $\boldsymbol{n}$. С движущимся телом жестко свяжем систему координат $Gxyz$ с началом в центре масс тела и осями, направленными вдоль главных центральных осей инерции. Радиус-вектор $\boldsymbol{\rho}$ точки D, которой тело касается плоскости, относительно центра масс имеет в

системе координат $Gxyz$ компоненты x, y, z. Уравнение поверхности, ограничивающей тело, в системе координат $Gxyz$ запишем в виде

$$f(x,\ y,\ z) = 0, \tag{32}$$

выбрав знак функции f так, чтобы совпадающий с $\boldsymbol{n}$ единичный вектор внутренней нормали к поверхности (32) в точке D вычислялся по формуле

$$\boldsymbol{n} = -\frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}. \tag{33}$$

Пусть m — масса тела, g — ускорение свободного падения, $\boldsymbol{v}$ — скорость центра масс, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела, $\boldsymbol{K}$ — его кинетический момент относительно центра масс, а $\boldsymbol{R}$ — реакция плоскости. Уравнения движения тела можно записать в виде двух векторных уравнений:

$$\dot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = -g\boldsymbol{n} + \frac{1}{m}\boldsymbol{R} \tag{34}$$

и

$$\dot{\boldsymbol{K}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K} = \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{R}, \tag{35}$$

выражающих теоремы об изменении количества движения и кинетического момента. В (34), (35) точкой обозначается дифференцирование по времени в подвижной системе координат $Gxyz$.

Вектор $\boldsymbol{n}$ постоянен относительно неподвижной системы координат $OXYZ$, поэтому он удовлетворяет уравнению Пуассона (см. п. 105)

$$\dot{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{n} = 0. \tag{36}$$

Уравнения (34)–(36) справедливы и для движения без скольжения, и для случая движения со скольжением при наличии трения, и для абсолютно гладкой плоскости. Дополнительные к (34)–(36) уравнения, отражающие характер взаимодействия тела и плоскости, для каждого из этих случаев различны.

Пусть движение происходит без скольжения. Тогда скорость точки D касания тела и плоскости равна нулю. Это приводит к такому векторному уравнению связи:

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = 0. \tag{37}$$

Уравнения (34)–(37) с учетом (32), (33) представляют собой полную систему уравнений, позволяющую определить двенадцать неизвестных

величии: v_x, v_y, v_z, p, q, r, x, y, z, R_x, R_y, R_z — компонент векторов $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{R}$ в подвижной системе координат $Gxyz$.

Из теоремы об изменении кинетической энергии следует, что при отсутствии скольжения полная механическая энергия тела постоянна, т. е.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{\omega}) - mg(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{n}) = \text{const}. \tag{38}$$

Пусть теперь плоскость абсолютно гладкая. Тогда реакция $\boldsymbol{R}$ ортогональна плоскости:

$$\boldsymbol{R} = N\boldsymbol{n}. \tag{39}$$

Уравнение связи выражает условие того, что скорость точки D тела направлена горизонтально и имеет вид

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) = 0. \tag{40}$$

Пусть X_G, Y_G, Z_G — координаты центра масс в неподвижной системе $OXYZ$. Соотношение (40) может быть также представлено в форме равенства

$$\dot{Z}_G = -\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}), \tag{41}$$

которое, как нетрудно видеть, является следствием геометрической связи $Z_G = -(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{n})$.

Уравнения (34), записанные в системе координат $OXYZ$, имеют вид

$$\ddot{X}_G = 0, \quad \ddot{Y}_G = 0, \quad \ddot{Z}_G = -g + \frac{N}{m}. \tag{42}$$

Из первых двух уравнений следует, что в случае абсолютно гладкой плоскости проекция центра масс тела на опорную плоскость движется равномерно и прямолинейно. А третье уравнение с учетом соотношений (41) и (36) позволяет найти выражение для величины нормальной реакции:

$$N = mg - m\boldsymbol{n} \cdot [\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})]. \tag{43}$$

Уравнения (35), (36) с учетом (32), (33), (39), (43) образуют систему уравнений для нахождения шести неизвестных p, q, r, x, y, z. Когда эти величины найдены, реакция и закон движения центра масс тела по вертикали определяются из (43) и (42) .

Отметим, что в случае абсолютно гладкой плоскости помимо интеграла энергии (38) и указанных выше интегралов, связанных с движением проекции центра масс на опорную плоскость, есть еще интеграл, выражающий постоянство проекции кинетического момента тела на вертикаль:

$$\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{n} = \text{const}. \tag{44}$$

Этот интеграл следует из теоремы об изменении кинетического момента, так как внешние силы, действующие на тело (сила тяжести и реакция плоскости), направлены вертикально и не создают момента относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс тела.

Рассмотрим теперь случай движения тела со скольжением при наличии трения, подчиняющегося законам Кулона. Пусть $\boldsymbol{v}_D = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$ — скорость точки D шара и $\boldsymbol{v}_D \neq 0$. Тогда реакцию плоскости $\boldsymbol{R}$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{R} = N\boldsymbol{n} + \boldsymbol{F}, \tag{45}$$

где $N\boldsymbol{n}$ — нормальная реакция плоскости, а $\boldsymbol{F}$ — сила трения, которая при заданном коэффициенте трения k определяется равенством

$$\boldsymbol{F} = -kN\frac{\boldsymbol{v}_D}{v_D}. \tag{46}$$

Уравнение связи, как и в случае абсолютно гладкой плоскости, записывается в виде равенства (41), а величина нормальной реакции вычисляется по формуле (43).

При исследовании движения во всех трех рассмотренных случаях следует иметь в виду, что величина нормальной реакции плоскости должна быть неотрицательной. В противном случае возможен подскок тела над плоскостью.

Глава VIII
Элементы небесной механики

§ 1. Задача двух тел

115. Уравнения движения. *Небесная механика* изучает движение небесных объектов, естественных и искусственных, под действием сил гравитационного взаимодействия тел, сил сопротивлений, вызываемых наличием пылевых, газовых и других сред, сил светового давления и т. п. Важнейшей для приложений задачей небесной механики является задача двух тел, а точнее — задача двух материальных точек.

Задача двух тел состоит в следующем. В пустом пространстве движутся две материальные точки, притягивающиеся одна к другой по закону всемирного тяготения Ньютона. Заданы начальные положения точек и их скорости. Требуется найти положения точек для любого последующего момента времени.

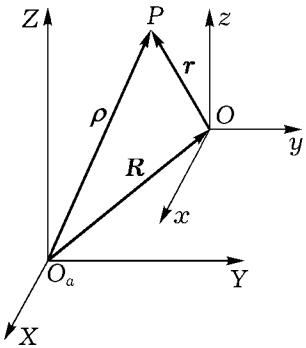

Рис. 120

Эта задача является основной в проблеме движения планет Солнечной системы и искусственных спутников Земли, Луны и планет, так как в большинстве случаев силы взаимного притяжения планет, силы притяжения спутника Земли планетами, силы сопротивления космической среды, силы светового давления и т. п. малы по сравнению с силами гравитационного притяжения планеты и Солнца или спутника и Земли.

Замечательно то, что интегрирование дифференциальных уравнений движения в задаче двух тел сводится к квадратурам. Для получения уравнений движения введем инерциальную систему координат O_aXYZ; ее начало совпадает, например, с центром масс Солнечной системы, а оси направлены на неподвижные звезды. Положения материальных точек P и O задаются их радиусами-векторами $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{R}$ соответственно (рис. 120). С точкой O свяжем поступательно движущуюся систему координат $Oxyz$, оси которой параллельны соответствующим осям системы O_aXYZ. Положение точки P относительно точки O задается радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$.

Пусть M и m — массы точек O и P соответственно, а γ — универсальная гравитационная постоянная. Со стороны точки O на точку P действует сила $\boldsymbol{F}$, определяемая законом всемирного тяготения:

$$\boldsymbol{F} = -\gamma \frac{mM}{r^3} \boldsymbol{r}.$$

Со стороны же точки P на точку O действует сила $-\boldsymbol{F}$. Радиусы-векторы $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{R}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{dt^2} = -\gamma \frac{M}{r^3} \boldsymbol{r}, \qquad \frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} = \gamma \frac{m}{r^3} \boldsymbol{r}.$$

Так как $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{R}$, то отсюда следует, что

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\gamma \frac{M}{r^3} \boldsymbol{r} - \gamma \frac{m}{r^3} \boldsymbol{r} = -\gamma(m+M) \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Если ввести обозначение $k = \gamma(m+M)$, то получим

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -k \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}. \tag{1}$$

Это уравнение определяет движение точки P относительно точки O. Если вектор-функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ найдена, то определение движения относительно системы координат O_aXYZ не представляет труда. Действительно, пусть C — центр масс точек P и O. Так как точки P и O образуют замкнутую систему, то, согласно теореме о движении центра масс, точка C движется равномерно и прямолинейно; ее скорость полностью определяется начальными скоростями точек O и P. Если $\boldsymbol{R}_C$ — радиус-вектор центра масс, то

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{R}_C + \frac{M}{m+M} \boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_C - \frac{m}{m+M} \boldsymbol{r}.$$

116. Интеграл площадей. Второй закон Кеплера. Дифференциальное уравнение (1) описывает движение точки P в подвижной системе координат $Oxyz$. Это уравнение можно (а для дальнейшего очень удобно) интерпретировать как дифференциальное уравнение движения точки P относительно неподвижного притягивающего центра O под действием центральной силы, равной $-mk\boldsymbol{r}/r^3$.

Согласно теореме об изменении кинетического момента, момент количества движения точки P относительно точки O остается постоянным. Отсюда следует, что

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{c}. \tag{2}$$

Это соотношение носит название *интеграла площадей*. В нем $\boldsymbol{v} = \dot{r}$ — скорость точки P относительно точки O, $\boldsymbol{c}$ — векторная константа интеграла площадей.

Проекции вектора $\boldsymbol{c}$ на оси системы координат $Oxyz$ определяются по формулам

$$c_x = y\dot{z} - \dot{y}z, \qquad c_y = z\dot{x} - \dot{z}x, \qquad c_z = x\dot{y} - \dot{x}y, \tag{3}$$

в которых правые части вычисляются для любого (например, начального) момента времени.

Если $c_x = c_y = c_z = 0$, то, очевидно, движение точки P происходит по прямой, проходящей через точку O. Если же хотя бы одна из величин (3) отлична от нуля, то вектор $\boldsymbol{r}$ во все время движения лежит в одной и той же фиксированной плоскости, которая перпендикулярна вектору $\boldsymbol{c}$. Уравнение этой плоскости имеет вид

$$c_x x + c_y y + c_z z = 0. \tag{4}$$

Таким образом, орбита точки P является плоской кривой. Плоскость орбиты однозначно определяется вектором $\boldsymbol{c}$, или начальным положением $\boldsymbol{r}_0$ и скоростью $\boldsymbol{v}_0$ точки P относительно точки O.

Выясним геометрический смысл интеграла площадей. Введем систему координат $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$, совместив плоскость $O\tilde{x}\tilde{y}$ с плоскостью орбиты. Тогда $c_{\tilde{x}} = c_{\tilde{y}} = 0$, $c_{\tilde{z}} = \tilde{x}\dot{\tilde{y}} - \dot{\tilde{x}}\tilde{y}$ $\left(c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} = |c_{\tilde{z}}|\right)$. Пусть θ — угол, который радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ составляет с осью $O\tilde{x}$. Тогда

$$\tilde{x} = r\cos\theta, \qquad \tilde{y} = r\sin\theta,$$
$$\dot{\tilde{x}} = \dot{r}\cos\theta - \dot{\theta}r\sin\theta, \quad \dot{\tilde{y}} = \dot{r}\sin\theta + \dot{\theta}r\cos\theta.$$

Отсюда и из выражения для $c_{\tilde{z}}$ получаем полярную форму интеграла площадей:

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = c_{\tilde{z}}. \tag{5}$$

Пусть теперь P и P' (рис. 121) — положения, которые занимает точка P в моменты t и $t + \Delta t$, где Δt — малая величина. Для площади криволинейного треугольника OPP' с точностью до величин первого порядка малости включительно относительно $\Delta\theta$ имеем выражение

$$\Delta S = \frac{1}{2}r^2\Delta\theta.$$

Разделив обе части этого равенства на Δt и устремив Δt к нулю, получим

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}. \tag{6}$$

Производная dS/dt в механике называется *секторной скоростью.* Из (5) и (6) для нее получаем выражение

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}c_{\tilde{z}}.$$

Таким образом, секторная скорость точки P постоянна. В этом состоит геометрический смысл интеграла площадей.

Отсюда следует второй закон Кеплера: *площади, заметенные радиусом-вектором, идущим от Солнца к планете, пропорциональны промежуткам времени, в которые они были заметены.*

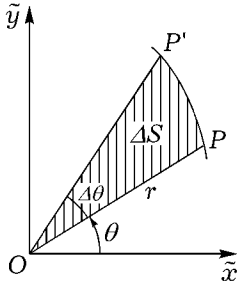

Рис. 121

117. Интеграл энергии в задаче двух тел. Кинетическая и потенциальная энергия точки P в ее движении относительно притягивающего центра O определяются равенствами

$$T = \frac{1}{2}mv^2, \quad \Pi = -\frac{mk}{r}.$$

Так как других сил, помимо потенциальных, нет и потенциал Π не зависит от времени, то полная механическая энергия $E = T + \Pi$ постоянна. Таким образом, в задаче двух тел существует интеграл энергии, который запишем в виде

$$v^2 - \frac{2k}{r} = h \quad (h = \text{const}). \tag{7}$$

Константа энергии h определяется начальным положением и скоростью точки P:

$$h = v_0^2 - \frac{2k}{r_0}.$$

Из интеграла (7) следует, что при удалении точки P от точки O ее скорость убывает, а при приближении к точке O — возрастает. Если $h \geqslant 0$, то точка P может уйти от точки O на сколь угодно большое расстояние. Если же $h < 0$, то, как следует из (7), расстояние r между точками P и O не может превзойти величину $2k/|h|$, т. е. движение точки P происходит в ограниченной части пространства.

118. Интеграл Лапласа. Из (1) и (2) следует равенство

$$\boldsymbol{c} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{k}{r^3}(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) \times \boldsymbol{r}. \tag{8}$$

Но так как

$$\boldsymbol{c} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{v})$$

и

$$(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) \times \boldsymbol{r} = \dot{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}) = \dot{\boldsymbol{r}} r^2 - \boldsymbol{r} r \dot{r} = r^3 \frac{r\dot{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}\dot{r}}{r^2} = r^3 \frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right),$$

равенство (8) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{v}) = -k \frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{v} + k\frac{\boldsymbol{r}}{r} = -\boldsymbol{f}. \tag{9}$$

Соотношение (9) называется *интегралом Лапласа*, а вектор $\boldsymbol{f}$ — *вектором Лапласа*. Знак минус в правой части (9) введен для удобства дальнейшего использования интеграла (9).

Из соотношения (9) сразу следует, что

$$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{f} = 0, \tag{10}$$

т.е. вектор Лапласа ортогонален векторной константе площадей и, следовательно, лежит в плоскости орбиты.

Модуль вектора Лапласа можно выразить через величину k и постоянные h, c интегралов энергии и площадей. В самом деле, учитывая ортогональность векторов $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{v}$, из (9) имеем

$$f^2 = k^2 \frac{\boldsymbol{r}^2}{r^2} + c^2 v^2 + \frac{2k}{r}(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{r}. \tag{11}$$

Используя свойства смешанного произведения векторов и равенство (2), получаем

$$(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{r} = -(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c} = -c^2.$$

Отсюда и из (7) следует, что соотношение (11) может быть записано в виде

$$f^2 = k^2 + hc^2. \tag{12}$$

119. Уравнение орбиты. Первый закон Кеплера. При помощи интеграла Лапласа и интеграла площадей можно получить уравнение орбиты точки P.

Из (9) сразу следует, что при $\boldsymbol{c} = 0$ орбита точки будет прямолинейной: $\boldsymbol{r} = -\frac{r}{k}\boldsymbol{f}$. Пусть $\boldsymbol{c} \neq 0$. Умножим обе части интеграла Лапласа (9) скалярно на $\boldsymbol{r}$. Получим равенство

$$\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{v}) + \frac{k}{r}(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}) = -(\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{r}).$$

Но, так как $\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{v}) = -c^2$, это равенство можно записать в виде

$$-c^2 + kr = -fr\cos\nu, \tag{13}$$

где ν — угол между радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$ точки P и вектором Лапласа $\boldsymbol{f}$ (рис. 122). Угол ν называется *истинной аномалией.*

Если ввести обозначения

$$e = \frac{f}{k}, \quad p = \frac{c^2}{k}, \tag{14}$$

то из (13) получим уравнение орбиты точки P в виде

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\nu}. \tag{15}$$

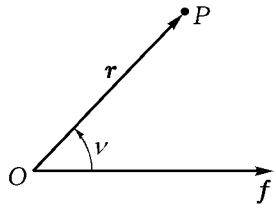

Рис. 122

Соотношение (15) представляет собой уравнение конического сечения, фокус которого находится в точке O. Величина p — параметр, e — эксцентриситет орбиты. Орбита точки P относительно точки O будет либо эллипсом ($e < 1$), либо параболой ($e = 1$), либо гиперболой ($e > 1$). При $e = 0$ орбита будет окружностью.

Для орбит планет справедлив первый закон Кеплера: *планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.*

120. Зависимость характера орбиты от величины начальной скорости. Первая и вторая космические скорости. Пусть орбита точки P не является прямолинейной, т. е. $c \neq 0$. Если задано начальное расстояние r_0 точки P от точки O, то характер орбиты точки P вполне определяется величиной ее скорости v_0. Рассмотрим зависимость эксцентриситета орбиты от величины v_0.

Из (12) и (14) получаем выражение для эксцентриситета

$$e = \sqrt{1 + h\frac{c^2}{k^2}}.$$

Но константа энергии h равна $v_0^2 - 2k/r_0$. Отсюда следует, что орбита будет эллиптической ($e < 1$), если $h < 0$. Это означает, что $v_0 < \sqrt{2k/r_0}$. Скорости, удовлетворяющие этому неравенству, называются *эллиптическими скоростями.*

Если $h = 0$, т. е. $v_0 = \sqrt{2k/r_0}$, то $e = 1$, и орбита будет параболой. Скорость $v_0 = \sqrt{2k/r_0}$ называется *параболической.* Она является наименьшей скоростью, которую надо сообщить точке P, находящейся на расстоянии r_0 от точки O, чтобы она удалилась на сколь угодно большое расстояние от точки O.

Орбита будет гиперболической ($e > 1$), если $h > 0$, т. е. $v_0 > \sqrt{2k/r_0}$. Такие скорости называются *гиперболическими.*

Первая космическая скорость v_I — это круговая скорость у поверхности Земли. Найдем ее величину. Пусть m — масса спутника, M — масса Земли, γ — универсальная гравитационная постоянная, g_0 — ускорение свободного падения у поверхности Земли. Тогда

$$\frac{mv_I^2}{r_0} = mg_0 = \gamma\frac{mM}{r_0^2}. \tag{16}$$

Так как $m \ll M$, то можно считать, что $k = \gamma(m + M) \simeq \gamma M$. Поэтому из (16) следует, что приближенно

$$v_I = \sqrt{g_0 r_0} = \sqrt{\frac{k}{r_0}}.$$

Принимая радиус Земли r_0 равным 6371 км, а величину g_0 равной 9,82 м/с^2, получим, что $v_I \simeq 7{,}91$ км/с.

Вторая космическая скорость v_{II} — это параболическая скорость у поверхности Земли, т. е.

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2k}{r_0}} = \sqrt{2}v_I \simeq 11{,}2 \text{ км/с}.$$

121. Третий закон Кеплера. Пусть орбита точки P представляет собой эллипс с полуосями a и b. Из аналитической геометрии известно, что величины a и b выражаются через параметр эллипса и его эксцентриситет посредством формул

$$a = \frac{p}{1 - e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}. \tag{17}$$

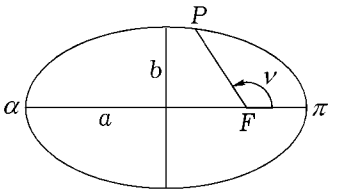

Рис. 123

Ближайшая к фокусу точка эллиптической орбиты называется *перицентром*, а наиболее удаленная от фокуса — *апоцентром.* Перицентр и апоцентр обозначены на рис. 123 буквами π и α.

За время, равное периоду T обращения точки P по орбите, радиус-вектор $\overline{FP}$ заметет всю площадь эллипса. Учитывая, что площадь эллипса равна πab и что, согласно интегралу площадей, секторная скорость точки P постоянна и равна $c/2$, получаем равенство

$$\pi ab = \frac{1}{2}cT. \tag{18}$$

Но из (14) и (17) следует, что $c = \sqrt{pk}$ и $p = b^2/a$. Поэтому из равенства (18) вытекает следующее выражение для периода обращения точки P:

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{k}}. \tag{19}$$

Величина $n = 2\pi/T$ является средней угловой скоростью вращения радиуса-вектора $\overline{FP}$, в астрономии ее называют *средним движением.* Согласно (19),

$$n = \frac{\sqrt{k}}{a^{3/2}}. \tag{20}$$

Рассмотрим две точки P_1 и P_2 массой m_1 и m_2. Если пренебречь взаимным притяжением этих точек, то каждая из них будет двигаться вокруг точки O по коническому сечению. Пусть орбиты точек будут эллиптическими. Тогда для периодов их обращения имеем выражения

$$T_1 = \frac{2\pi a_1^{3/2}}{\sqrt{\gamma(m_1 + M)}}, \quad T_2 = \frac{2\pi a_2^{3/2}}{\sqrt{\gamma(m_2 + M)}}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{m_2 + M}{m_1 + M}\frac{a_1^3}{a_2^3}. \tag{21}$$

При $m_1 \ll M$ и $m_2 \ll M$ это соотношение переходит в следующее приближенное равенство:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}. \tag{22}$$

Равенство (22) выражает третий закон Кеплера: *квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы их больших полуосей.*

122. Время в кеплеровском движении. Уравнение Кеплера. В предыдущих пунктах определен геометрический характер орбиты точки P. Орбита является коническим сечением и находится в плоскости, перпендикулярной векторной константе площадей $\boldsymbol{c}$. Положение самой орбиты в этой плоскости однозначно определяется вектором Лапласа $\boldsymbol{f}$, который проходит через точку O, являющуюся фокусом конического сечения, и направлен на перицентр π.

Чтобы закончить решение задачи двух тел, осталось найти закон движения точки P по ее орбите. Будем считать, что орбита является эллиптической. Из интеграла площадей имеем $r^2\dot{\nu} = c$. Отсюда, из уравнения орбиты (15) и равенств (14), (17) и (20) получаем

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{c}{r^2} = \frac{c}{p^2}(1 + e\cos\nu)^2 = \frac{\sqrt{k}}{p^{3/2}}(1 + e\cos\nu)^2 =$$
$$= \frac{n}{(1 - e^2)^{3/2}}(1 + e\cos\nu)^2.$$

Пусть τ — время прохождения точки P через перицентр. Тогда из последнего уравнения получаем неявную зависимость $\nu = \nu(t)$:

$$\int\limits_0^{\nu} \frac{d\nu}{(1 + e\cos\nu)^2} = \frac{n}{(1 - e^2)^{3/2}}(t - \tau). \tag{23}$$

Если отсюда найдена функция $\nu = \nu(t)$, то закон движения точки по орбите известен.

Найденное решение задачи двух тел зависит от шести произвольных постоянных. За них могут быть приняты константа τ и пять из семи констант $c_x, c_y, c_z, h, f_x, f_y, f_z$, связанных двумя соотношениями (10) и (12).

Нахождение зависимости $\nu = \nu(t)$ из трансцендентного уравнения (23) представляет собой довольно трудную задачу. Введем вместо ν новую переменную E, через которую ν выражается очень просто, а зависимость $E = E(t)$ определяется уравнением, хотя тоже трансцендентным, но значительно более простым, нежели уравнение (23).

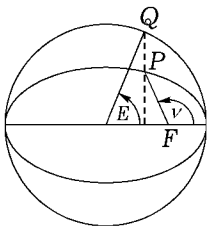

Рис. 124

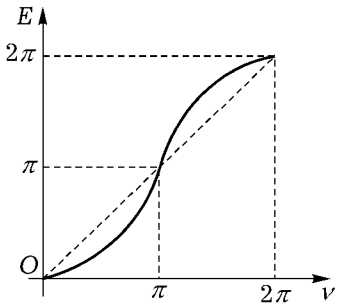

Рис. 125

Связь между E и ν зададим равенством

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}. \tag{24}$$

Величина E называется *эксцентрической аномалией.* Можно показать, что она имеет следующий геометрический смысл. Через точку P проведем (рис. 124) перпендикуляр к большой полуоси орбиты до его пересечения в точке Q с окружностью, построенной на большой оси как на диаметре. Угол, который составляет отрезок, соединяющий центр эллипса и точку Q, с большой полуосью орбиты и будет эксцентрической аномалией E. Зависимость E от ν представлена на рис. 125. Из (24) следует, что

$$d\nu = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E}dE, \qquad 1+e\cos\nu = \frac{1-e^2}{1-e\cos E}.$$

Используя эти соотношения, получаем такое выражение для интеграла из левой части равенства (23):

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\nu}\frac{d\nu}{(1+e\cos\nu)^2} &= \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}}\int\limits_0^{E}(1-e\cos E)\,dE = \\ &= \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}}(E-e\sin E).\end{aligned} \tag{25}$$

Введем обозначение $n(t-\tau) = M$; величину M в астрономии называют *средней аномалией.* Тогда из (23) и (25) имеем следующее уравнение:

$$E - e\sin E = M. \tag{26}$$

Оно называется *уравнением Кеплера.*

123. Кеплеровские элементы орбиты. Решение задачи двух тел зависит от шести произвольных постоянных, определяемых начальными условиями движения. Их можно вводить по-разному и не обязательно именно так, как это было сделано в предыдущих пунктах в процессе решения задачи двух тел. Рассмотрим произвольные постоянные, которые носят название кеплеровских элементов орбиты и очень широко используются в небесной механике. За кеплеровские элементы принимаются следующие шесть величин, однозначно определяемых по начальным условиям: Ω, i, p, e, ω, τ.

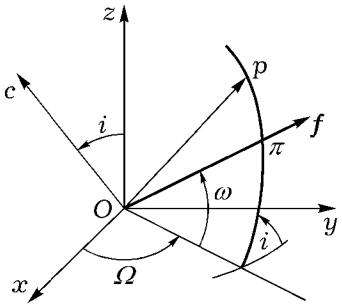

Рис. 126

Смысл величин p, e, τ ясен из предыдущих пунктов: p — параметр орбиты, e — ее эксцентриситет, τ — время прохождения через перицентр. Величина Ω — это угол, который составляет с осью Ox линия пересечения плоскости орбиты с плоскостью Oxy (рис. 126); величина Ω называется *долготой восходящего узла.* Элемент i представляет собой угол между плоскостью орбиты и плоскостью Oxy; величину i называют *наклонением орбиты.* Параметр ω определяет положение орбиты в ее плоскости, он называется *угловым расстоянием перицентра от узла* и равен углу между направлением из точки O на перицентр и линией пересечения плоскости орбиты с плоскостью Oxy.

124. О задаче трех и более тел. Задача n тел ($n \geqslant 2$) состоит в следующем. В пустоте находятся n материальных точек, взаимодействующих по закону всемирного тяготения Ньютона. Заданы начальные положения и скорости точек. Требуется найти положения всех точек как функции времени. Эта задача не решена до сих пор. Более того, показано, что даже в случае трех тел помимо классических интегралов, существование которых следует из общих теорем об изменении количества движения, кинетического момента и кинетической энергии, дифференциальные уравнения движения не имеют других интегралов, которые выражались бы через алгебраические или через однозначные трансцендентные функции координат и скоростей точек.

Для небесной механики и космодинамики наиболее важна так называемая *ограниченная задача трех* тел. Она состоит в изучении движения точки малой массы под действием притяжения двух конечных масс в предположении, что точка малой массы не влияет на движение точек конечных масс. Тем самым в ограниченной задаче трех тел точки конечных масс движутся по орбитам, определяемым задачей двух тел, так что движение этих двух точек известно. Таким образом, анализ ограниченной задачи трех тол сводится к исследованию движения только одной точки малой массы. Конечно, эта задача значительно проще *общей* (неограниченной) *задачи трех тел.* Но и она не интегрируется (точнее, не проинтегрирована) в квадратурах.

§ 2. Движение твердого тела в центральном ньютоновском гравитационном поле

125. Главный вектор сил тяготения. Гравитационный момент. В обычных, «земных» задачах механики, связанных с ее применениями к устройствам, функционирующим вблизи или на поверхности Земли, силы притяжения, приложенные к двум материальным точкам равных масс, считаются равными и по величине, и по направлению. Это приводит к известному положению о совпадении центра масс и центра тяжести и, как следствие, к равенству нулю главного момента сил тяготения (гравитационного момента) относительно центра масс.

В действительности силы притяжения различных точек тела Землей, как правило, не будут параллельными, так как они направлены к ее центру[1]. Кроме того, разные точки тела находятся, вообще, на разных расстояниях от центра Земли. По этим причинам силы тяготения не обязательно должны приводиться к равнодействующей, проходящей через центр масс тела: возможен еще и гравитационный момент относительно центра масс. Появление гравитационного момента можно пояснить очень простым примером. Пусть две точки P_1 и P_2 одинаковых масс соединены жестким стержнем пренебрежимо малой массы. Пусть O — середина стержня (центр масс точек P_1 и P_2), а O_* — притягивающий центр (рис. 127). Пусть $O_*P_1 > O_*P_2$, тогда если h_1 — плечо силы $\boldsymbol{F}_1$, а h_2 — плечо силы $\boldsymbol{F}_2$ относительно точки O, то из сравнения площадей треугольников O_*P_1O и O_*P_2O получим

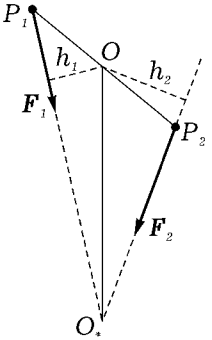

Рис. 127

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{O_*P_1}{O_*P_2} > 1.$$

Отсюда и из неравенства $F_2 > F_1$, справедливого при $O_*P_1 > O_*P_2$, следует, что $F_2h_2 > F_1h_1$. Таким образом, появляется момент, стремящийся расположить стержень P_1P_2 вдоль прямой O_*O.

В обычных «земных» условиях гравитационные моменты малы по сравнению с другими воздействиями. В задачах же небесной механики

[1] Мы предполагаем, что Земля представляет собой либо однородный, либо неоднородный шар, в каждой точке которого плотность зависит только от расстоянии этой точки до центра шара. Можно показать, что в этом случае гравитационное поле Земли такое же, какое создавалось бы материальной точкой, обладающей массой Земли и помещенной в ее геометрическом центре.

они часто играют решающую роль. Например, движение Луны относительно центра масс почти полностью определяется гравитационными моментами, обусловленными притяжением Земли.

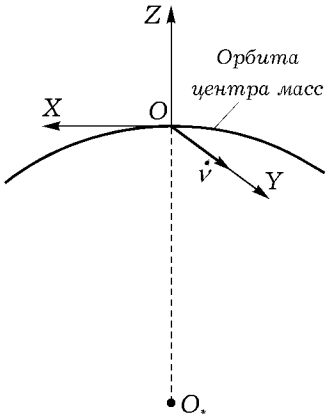

Рис. 128

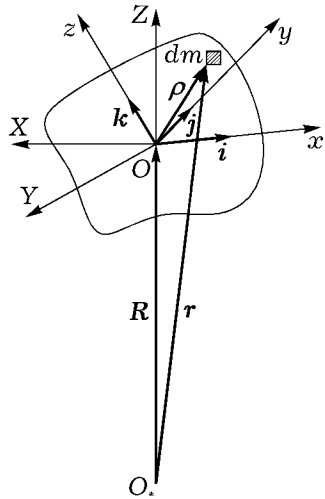

Рис. 129

Рассмотрим задачу о движении свободного твердого тела в центральном ньютоновском гравитационном поле. В соответствии с п. 108 для получения дифференциальных уравнений движения нужно знать главный вектор сил тяготения и их гравитационный момент относительно центра масс тела.

Пусть $OXYZ$ — система координат с началом в центре масс тела и осью OZ, направленной по прямой, соединяющей притягивающий центр O_* и центр масс O тела (рис. 128). Ось OY направлена по бинормали к траектории центра масс в ту сторону, откуда его движение видно совершающимся против часовой стрелки, ось OX дополняет оси OY и OZ до правой прямоугольной системы координат. Систему координат $OXYZ$ обычно называют *орбитальной.*

Пусть $\boldsymbol{R}$ — радиус-вектор центра масс тела относительно притягивающего центра, а $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор выделенного в теле малого элемента массой dm (рис. 129). Сила притяжения элемента dm определяется по формуле

$$d\boldsymbol{F} = -\gamma \frac{M\,dm}{r^3}\boldsymbol{r}, \tag{1}$$

где γ — универсальная гравитационная постоянная, а M — масса при-

тягивающего центра O_*. Главный вектор $\boldsymbol{F}$ сил притяжения тела получается из (1) путем интегрирования по всему объему тела. Произведем вычисления, считая линейные размеры тела много меньшими расстояния от центра масс тела до притягивающего центра. Это предположение вполне приемлемо для естественных и искусственных спутников планет.

Пусть $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор элемента dm, а X, Y, Z — его компоненты в орбитальной системе координат. Тогда

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}+\boldsymbol{\rho}, \quad r = R\sqrt{1 + 2\frac{Z}{R} + \frac{\rho^2}{R^2}}. \tag{2}$$

Если пренебречь величинами порядка $(\rho/R)^2$ и выше, то из (2) получим разложение величины $1/r^3$ в ряд Тейлора в виде

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{R^3}\left(1 - \frac{3Z}{R}\right). \tag{3}$$

Теперь надо величину $\boldsymbol{r}$ из (2) и величину $1/r^3$ из (3) подставить в формулу (1) и произвести интегрирование по всему объему тела. При этом следует учесть, что так как центр масс тела находится в начале координат, то

$$\int X\,dm = \int Y\,dm = \int Z\,dm = 0.$$

Произведя интегрирование, получим, что с упомянутой точностью главный вектор сил тяготения задается формулой

$$\boldsymbol{F} = -\gamma\frac{Mm}{R^3}\boldsymbol{R},$$

где m — масса тела. Отсюда следует, что если пренебречь величинами порядка $(\rho/R)^2$ и выше, то размеры тела не влияют на величину и направление главного вектора сил тяготения. Следовательно, в рассматриваемом приближении можно считать, что центр масс движется по коническому сечению. Это движение подробно изучено в предыдущем параграфе.

Найдем теперь гравитационный момент. Пусть $Oxyz$ — система координат, жестко связанная с твердым телом; ее оси направлены по главным центральным осям инерции тела (рис. 129). Ориентацию твердого тела относительно орбитальной системы координат будем определять при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ. Элементы a_{ij} матрицы перехода от системы координат $Oxyz$ к системе $OXYZ$ выражаются через углы Эйлера по формулам (3) п. 19.

На основании формулы (1) для главного момента $\boldsymbol{M}_O$ сил тяготения относительно центра масс получаем выражение

$$\boldsymbol{M}_O = \int \boldsymbol{\rho} \times d\boldsymbol{F} = -\gamma M \int \frac{\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{r}}{r^3} dm, \tag{4}$$

где интегрирование производится по всему объему тела. Вычисление интеграла (4) проведем, используя систему координат $Oxyz$. В этой системе

$$\boldsymbol{\rho} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{R} = R(a_{31}\boldsymbol{i} + a_{32}\boldsymbol{j} + a_{33}\boldsymbol{k}), \tag{5}$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{\rho} = (x + Ra_{31})\boldsymbol{i} + (y + Ra_{32})\boldsymbol{j} + (z + Ra_{33})\boldsymbol{k}, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{r} = R[(ya_{33} - za_{32})\boldsymbol{i} + (za_{31} - xa_{33})\boldsymbol{j} + (xa_{32} - ya_{31})\boldsymbol{k}]. \tag{7}$$

Если в разложении величины $1/r^3$ в ряд Тейлора пренебречь величинами порядка $(\rho/R)^2$ и выше, то получим

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{R^3}\left[1 - \frac{3}{R}(xa_{31} + ya_{32} + za_{33})\right]. \tag{8}$$

С той же точностью из (7) и (8) получаем

$$\begin{gathered}\frac{\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{1}{R^2}\left[1 - \frac{3}{R}(xa_{31} + ya_{32} + za_{33})\right][(ya_{33} - za_{32})\boldsymbol{i} + \\ +(za_{31} - xa_{33})\boldsymbol{j} + (xa_{32} - ya_{31})\boldsymbol{k}].\end{gathered} \tag{9}$$

Подставим это выражение в формулу (4) и произведем интегрирование. Так как оси Ox, Oy, Oz являются главными центральными осями инерции тела, то выполняются равенства

$$\begin{gathered}\int x\,dm = \int y\,dm = \int z\,dm = 0, \\ \int xy\,dm = \int xz\,dm = \int yz\,dm = 0.\end{gathered} \tag{10}$$

Произведя интегрирование и учтя равенства (10), получим

$$\begin{gathered}\boldsymbol{M}_O = \frac{3\gamma M}{R^3}\int[(y^2 - z^2)a_{32}a_{33}\boldsymbol{i} + (z^2 - x^2)a_{33}a_{31}\boldsymbol{j} + \\ +(x^2 - y^2)a_{31}a_{32}\boldsymbol{k}]dm.\end{gathered} \tag{11}$$

Замечая, что

$$\int (y^2 - z^2)dm = C - B, \qquad \int (z^2 - x^2)dm = A - C,$$

$$\int (x^2 - y^2)dm = B - A,$$

где A, B и C — моменты инерции тела относительно осей Ox, Oy и Oz соответственно, получаем из (11) такие выражения для проекций M_x, M_y, M_z гравитационного момента на оси Ox, Oy, Oz связанной с телом системы координат:

$$M_x = \frac{3\gamma M}{R^3}(C - B)a_{32}a_{33}, \qquad M_y = \frac{3\gamma M}{R^3}(A - C)a_{33}a_{31},$$
$$M_z = \frac{3\gamma M}{R^3}(B - A)a_{31}a_{32}. \tag{12}$$

Отметим, что выражения (12) являются приближенными. В них отброшены величины, порядок которых не ниже $(\rho/R)^2$.

126. Уравнения движения тела относительно центра масс. Для получения уравнений движения тела относительно центра масс используем динамические уравнения Эйлера

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = M_x, \qquad B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp = M_y,$$
$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq = M_z. \tag{13}$$

Величины M_x, M_y, M_z вычисляются по формулам (12), в которых величина R имеет вид

$$R = \frac{p'}{1 + e\cos\nu}, \tag{14}$$

где p' и e — параметр и эксцентриситет орбиты, ν — истинная аномалия, представляющая собой угол между радиусом-вектором $\boldsymbol{R}$ центра масс тела и линией, проходящей через притягивающий центр O_* и перицентр орбиты. Согласно п. 122, величина ν удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\sqrt{k}}{p'^{3/2}}(1 + e\cos\nu)^2. \tag{15}$$

Так как масса тела m много меньше массы притягивающего центра, то можно считать, что $k = \gamma M$.

Выразим проекции p, q, r абсолютной угловой скорости тела на оси Ox, Oy, Oz через углы Эйлера, их производные и угловую скорость (15) движения центра масс по орбите. Для этого заметим, что твердое тело участвует в сложном движении: оно вращается относительно орбитальной системы координат $OXYZ$, а орбитальная система координат за счет движения центра масс по орбите вращается вокруг оси OY. Проекции угловой скорости первого из указанных вращений получаются из кинематических уравнений Эйлера, а угловая скорость второго вращения направлена по оси OY и равна $\dot{\nu}$. Поэтому

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\nu}a_{21}, \\ q &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\nu}a_{22}, \\ p &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} + \dot{\nu}a_{23}, \end{aligned} \tag{16}$$

где величины a_{ij} определены равенствами (3) п. 19.

Система семи уравнений (13), (15) и (16) с учетом равенств (12), (14) и формул (3) п. 19 является замкнутой системой дифференциальных уравнений, описывающей движение твердого тела относительно центра масс. Эти уравнения или их модификации широко используются при изучении движения искусственных спутников Земли.

Если в (13) и (16), использовав (15), ввести вместо времени t новую независимую переменную — истинную аномалию ν, то получим систему, состоящую из шести уравнений первого порядка. Если затем величины p, q, r из (16) подставить в (13), то придем к трем уравнениям второго порядка относительно углов Эйлера ψ, θ, φ.

Отметим еще, что если орбита центра масс эллиптическая и a — большая полуось орбиты, то согласно п. 120–122

$$\begin{aligned} \frac{d\nu}{dt} &= \frac{n}{(1-e^2)^{3/2}}(1+e\cos\nu)^2, \\ \frac{\gamma M}{R^3} &= \frac{n^2}{(1-e^2)^3}(1+e\cos\nu)^3, \end{aligned} \tag{17}$$

где постоянная n есть среднее движение центра масс, $n = \sqrt{\gamma M}/a^{3/2}$; на круговой орбите ($e = 0$) n будет угловой скоростью вращения радиуса-вектора $\boldsymbol{R}$.

127. Относительное равновесие твердого тела на круговой орбите. Если центр масс тела движется по круговой орбите, то существуют движения, отвечающие положениям относительного равновесия. Относительным равновесием тела мы называем такое его движение, когда оно покоится в орбитальной системе координат, т. е. для таких

движений $\psi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$. Одно из таких движений определяется равенствами

$$\psi = 0, \quad \theta = 0, \quad \varphi = 0. \tag{18}$$

Длл этого движения оси Ox, Oy и Oz связанной с телом системы координат направлены вдоль осей OX, OY и OZ орбитальной системы координат соответственно.

Чтобы убедиться в существовании решения (18), заметим, что из уравнений (16) и формул (3) п. 19 следует, что на круговой орбите при $\psi = \theta = \varphi = 0$ имеем $a_{ij} = \delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера), $p = 0$, $r = 0$, $q = n = \text{const}$. Отсюда следует, что для решения (18) гравитационные моменты (12) обращаются в нуль и уравнения (13) тождественно удовлетворяются.

Можно показать, что существуют двадцать четыре геометрически различных положения равновесия. Они соответствуют всевозможным случаям совпадения главных центральных осей инерции спутника с осями орбитальной системы координат. С механической точки зрения (в рамках исследования задач динамики тела в гравитационном поле) существенно лишь то, какая из главных центральных осей инерции тела лежит вдоль данного направления. Очевидно, что из двадцати четырех геометрически различных положений равновесия механически различных существует только шесть: для каждого из трех положений одной из осей инерции (по радиусу-вектору центра масс, по касательной и по нормали к орбите) существует два различных положения другой оси инерции (что автоматически влечет два различных положения третьей оси инерции).

Можно также показать, что если гравитационный момент определяется согласно приближенным выражениям (12), то не существует положений относительного равновесия, для которых главные центральные оси инерции тела не совпадали бы с осями орбитальной системы координат.

Для движений, соответствующих положениям относительного равновесия, вектор абсолютной угловой скорости тела направлен по нормали к плоскости орбиты, а величина абсолютной угловой скорости тела равна величине угловой скорости n кругового движения центра масс тела, т. е. период вращения тела равен периоду движения центра масс. Отсюда следует, что тело все время обращено к притягивающему центру одной и той же своей стороной. В природе примером такого движения является движение Луны (она «смотрит» на Землю одной стороной) и многих спутников планет, в технике — большое количество искусственных спутников Земли.

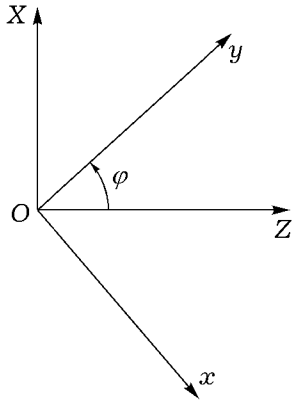

Рис. 130

128. Плоские движения. Дифференциальные уравнения движения твердого тела в центральном ньютоновском гравитационном поле допускают решения, которые отвечают плоским движениям тела. Для таких движений одна из главных центральных осей инерции тела все время перпендикулярна плоскости орбиты центра масс.

Получим дифференциальное уравнение плоских движений. Пусть для рассматриваемых движений главная ось инерции Oz тела перпендикулярна плоскости орбиты, т. е. во все время движения

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \psi = \pi. \tag{19}$$

Тогда формулы (3) п. 19 переходят в следующие:

$$\begin{aligned} &a_{11} = -\cos\varphi, && a_{12} = \sin\varphi, && a_{13} = 0,\\ &a_{21} = 0, && a_{22} = 0, && a_{23} = 1,\\ &a_{31} = \sin\varphi, && a_{32} = \cos\varphi, && a_{33} = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Для движения (19) оси инерции тела Ox и Oy лежат в плоскости орбиты. Их расположение относительно осей OX и OZ орбитальной системы координат показано на рис. 130.

Из (12), (16) и (17) получаем, что при выполнении равенств (19) имеют место соотношения

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad r = \dot\varphi + \dot\nu, \tag{21}$$

$$\begin{gathered} M_x = 0, \qquad M_y = 0,\\ M_z = \frac{3n^2}{(1-e^2)^3}(1+e\cos\nu)^3(B-A)\sin\varphi\cos\varphi. \end{gathered} \tag{22}$$

Подставив (21) и (22) в систему (13), получим, что первые два ее уравнения удовлетворяются тождественно, а третье запишется в виде

$$C(\ddot\varphi + \ddot\nu) = 3\frac{n^2}{(1-e^2)^3}(1+e\cos\nu)^3(B-A)\sin\varphi\cos\varphi. \tag{23}$$

Это уравнение вместе с первым из соотношений (17)

$$\dot\nu = \frac{n}{(1-e^2)^{3/2}}(1+e\cos\nu)^2 \tag{24}$$

образует систему двух дифференциальных уравнений, описывающих плоские движения твердого тела. Удобнее, однако, вместо двух уравнений (23), (24) рассматривать одно дифференциальное уравнение, которое получается из уравнения (23), если в нем при помощи (24) ввести вместо времени t новую независимую переменную — истинную аномалию ν. Имеем соотношения

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{d\nu}\dot{\nu} = \frac{n}{(1-e^2)^{3/2}}\frac{d\varphi}{d\nu}(1+e\cos\nu)^2,$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{n}{(1-e^2)^{3/2}}\left[-\frac{d\varphi}{d\nu}\cdot 2e\sin\nu(1+e\cos\nu)\dot{\nu} + (1+e\cos\nu)^2\frac{d^2\varphi}{d\nu^2}\dot{\nu}\right] =$$

$$= \frac{n^2}{(1-e^2)^3}(1+e\cos\nu)^3\left[(1+e\cos\nu)\frac{d^2\varphi}{d\nu^2} - 2e\sin\nu\frac{d\varphi}{d\nu}\right],$$

$$\ddot{\nu} = \frac{d\dot{\nu}}{d\nu}\cdot\dot{\nu} = -\frac{2n^2e\sin\nu}{(1-e^2)^3}(1+e\cos\nu)^3.$$

Подставив $\ddot{\varphi}$ и $\ddot{\nu}$ в уравнение (23), получим

$$C\frac{n^2}{(1-e^2)^3}(1+e\cos\nu)^3\left[(1+e\cos\nu)\frac{d^2\varphi}{d\nu^2} - 2e\sin\nu\frac{d\varphi}{d\nu} - 2e\sin\nu\right] =$$

$$= 3\frac{n^2}{(1-e^2)^3}(1+\cos\nu)^3(B-A)\sin\varphi\cos\varphi.$$

Отсюда следует дифференциальное уравнение плоских движений твердого тела в центральном ньютоновском силовом поле[1]

$$(1+e\cos\nu)\frac{d^2\varphi}{d\nu^2} - 2e\sin\nu\frac{d\varphi}{d\nu} + 3\frac{A-B}{C}\sin\varphi\cos\varphi = 2e\sin\nu. \qquad (25)$$

Пусть орбита центра масс тела является круговой. Если ввести обозначение $2\varphi = \alpha$, то при $e = 0$ из (25) получим уравнение, описывающее плоские движения тела на круговой орбите в виде

$$\frac{d^2\alpha}{d\nu^2} + 3\frac{A-B}{C}\sin\alpha = 0 \qquad (\nu = nt). \qquad (26)$$

Если $A > B$, то уравнение (26) будет уравнением движения физического маятника. Его движение подробно исследовано в п. 93–96. Если же $A < B$, то мы снова можем получить уравнение маятника, если вместо замены переменной $2\varphi = \alpha$ сделаем замену $2\varphi = \alpha + \pi$. Если $A = B$, то $\ddot{\varphi} = 0$, т. е. тело равномерно вращается вокруг нормали к плоскости орбиты с произвольной угловой скоростью.

[1]Это уравнение впервые получено в статье: Белецкий В. В. О либрации спутника. В сб.: Искусственные спутники Земли, 1959, вып. 3, М.: Изд–во АН СССР, с. 13 – 31.

Глава IX
Динамика системы переменного состава

§ 1. Основные понятия и теоремы

129. Понятие о системе переменного состава. До сих пор мы считали неизменными как массы m_ν точек P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$), составляющих систему, так и число N точек системы. Но в природе и технике часто бывает так, что в некоторые моменты времени какие-либо точки выходят из рассматриваемой материальной системы или входят в нее. В результате этого состав системы, т. е. совокупность точек, образующих данную систему, а значит, вообще говоря, и ее масса будут со временем изменяться.

Будем говорить, что данная механическая система является *системой переменного состава*, если либо масса системы, либо материальные точки, из которых она состоит, либо то и другое меняются со временем.

Случаи движения системы переменного состава можно встретить во многих явлениях природы. Так, например, масса Земли возрастает вследствие падения на нее метеоритов. Масса падающего метеорита уменьшается, так как частицы метеорита отрываются от него, благодаря воздействию атмосферы, или сгорают. У плавающей льдины, вследствие ее таяния, масса убывает и возрастает при замерзании льда или из-за падения снежинок на ее поверхность. Примерами систем переменного состава в технике могут служить: движущийся транспортер, на который в некоторые моменты кладут (или с которого снимают) грузы; ракеты различных систем, масса которых изменяется в процессе сгорания топлива; реактивный самолет, масса которого увеличивается за счет воздуха, засасываемого в его двигатель, и уменьшается при отбрасывании продуктов сгорающего топлива.

Почти все выводы, полученные в предыдущих главах, о движении механических систем опирались на второй закон Ньютона, устанавливающий зависимость между ускорением точки и действующей на нее силой. Однако второй закон Ньютона справедлив только для точки постоянного состава. Динамика систем переменного состава требует особого рассмотрения.

Примем следующее предположение о математической модели системы переменного состава: малы и массы отделяющихся или присоединяющихся к системе точек, и промежутки времени между двумя их по-

следовательными присоединениями или отделениями. Это предположение дает возможность принять идеализацию, при которой масса $M_1(t)$ вышедших из системы точек и масса $M_2(t)$ вошедших в систему точек — непрерывные и дифференцируемые функции времени.

Если масса $M(t)$ системы при $t = 0$ равнялась M_0, то с течением времени она меняется по закону

$$M(t) = M_0 - M_1(t) + M_2(t),$$

где M_1, M_2 — неубывающие неотрицательные функции времени и $M(t)$ непрерывна и дифференцируема.

Материальной точкой переменного состава мы будем называть частицу переменного состава, настолько малую, что ее положение и движение можно определить как для объекта, не имеющего размеров.

130. Теорема об изменении количества движения. Пусть некоторая совокупность материальных точек движется относительно инерциальной системы координат $Oxyz$. Рассмотрим замкнутую поверхность S, которая перемещается относительно $Oxyz$ и деформируется. Материальные точки при своем движении могут входить в область пространства, ограниченную поверхностью S, и могут выходить из нее.

Обозначим G систему переменного состава, образованную материальными точками, находящимися внутри поверхности S. Количество движения рассматриваемой системы обозначим $\boldsymbol{Q}$.

Зафиксируем момент времени $t = t'$ и обозначим G^* систему постоянного состава, образованную теми и только теми материальными точками, которые в момент t' заполняли объем, ограниченный поверхностью S. Количество движения системы G^* обозначим $\boldsymbol{Q}^*$. Так как при $t = t'$ системы G и G^* совпадают, то в этот момент

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^*. \tag{1}$$

В момент времени $t'' = t' + \Delta t$ количества движения систем G и G^* будут иметь соответственно значения $\boldsymbol{Q} + \Delta\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{Q}^* + \Delta\boldsymbol{Q}^*$. На рис. 131 сплошной линией показано положение поверхности S в момент t'', а штриховой — положение поверхности, ограничивающей объем, заполненный в тот же момент t'' теми материальными точками, которые образуют систему G^*. Очевидно, что

$$\boldsymbol{Q} + \Delta\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^* + \Delta\boldsymbol{Q}^* - \Delta\boldsymbol{Q}_1 + \Delta\boldsymbol{Q}_2, \tag{2}$$

где $\Delta\boldsymbol{Q}_1$ — сумма количеств движения в момент t'' тех материальных точек, которые за время Δt вышли из объема, ограниченного поверхностью S, а $\Delta\boldsymbol{Q}_2$ — сумма количеств движения в момент t'' точек,

вошедших за время Δt в объем, ограниченный этой поверхностью. На рис. 131 эти точки заполняют соответственно объемы G_1 и G_2.

Из (1) и (2) получаем

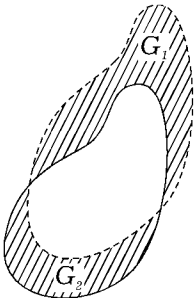

Рис. 131

$$\Delta \boldsymbol{Q} = \Delta \boldsymbol{Q}^* - \Delta \boldsymbol{Q}_1 + \Delta \boldsymbol{Q}_2. \tag{3}$$

Пусть $\boldsymbol{R}^{(e)}$ — главный вектор внешних сил, приложенных к системе G (а следовательно, и к системе G^*) в момент времени t'. Поскольку система G^* является системой постоянного состава, то к ней применима теорема об изменении количества движения, т. е.

$$\frac{d\boldsymbol{Q}^*}{dt} = \boldsymbol{R}^{(e)}. \tag{4}$$

Разделив обе части равенства (3) на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим с учетом равенства (4)

$$\frac{dQ}{dt} = \boldsymbol{R}^{(e)} + \boldsymbol{F}, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$, а

$$\boldsymbol{F}_1 = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{Q}_1}{\Delta t}, \qquad \boldsymbol{F}_2 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{Q}_2}{\Delta t}. \tag{6}$$

Векторные величины $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ имеют размерность силы. Условимся называть эти величины *реактивными силами.* Реактивная сила $\boldsymbol{F}_1$ возникает за счет отделения материальных точек от рассматриваемой системы, а $\boldsymbol{F}_2$ — за счет присоединения точек.

Таким образом, теорема об изменении количества движения системы переменного состава выглядит так же, как и в случае систем постоянного состава; надо только в число внешних сил системы включить еще добавочную (реактивную) силу $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$.

131. Теорема об изменении кинетического момента. Пусть A — неподвижная точка в инерциальной системе координат $Oxyz$, $\boldsymbol{M}_A^{(e)}$ — главный момент внешних сил и $\boldsymbol{K}_A$ — кинетический момент системы G относительно точки A. Совершенно аналогично п. 130 можно показать, что

$$\frac{d\boldsymbol{K}_A}{dt} = \boldsymbol{M}_A^{(e)} + \boldsymbol{M}_A^{(F)}, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{M}_A^{(F)} = \boldsymbol{M}_{A1}^{(F)} + \boldsymbol{M}_{A2}^{(F)}$ — дополнительный момент, возникающий за счет того, что система G является системой переменного состава:

$$\boldsymbol{M}_{A1}^{(F)} = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{K}_{A1}}{\Delta t}, \qquad \boldsymbol{M}_{A2}^{(F)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{K}_{A2}}{\Delta t}. \tag{8}$$

Здесь $\Delta \boldsymbol{K}_{A1}$ — сумма моментов количеств движения при $t = t''$ тех материальных точек, которые за время Δt вышли из объема, ограниченного поверхностью S, а $\Delta \boldsymbol{K}_{A2}$ — аналогичная величина для точек, вошедших внутрь поверхности S.

§ 2. Движение материальной точки переменного состава

132. Дифференциальное уравнение движения. Пусть материальная точка P переменного состава движется относительно инерциальной системы отсчета $Oxyz$. Масса точки P изменяется со временем вследствие одновременного отделения и присоединения к ней малых частиц материи, размерами которых можно пренебречь.

Пусть $\boldsymbol{u}_1$ — абсолютная скорость (скорость относительно $Oxyz$) частицы, которая отделяется от точки P в момент времени t', а $\boldsymbol{u}_2$ — абсолютная скорость частицы, которая присоединяется к P в этот момент. Пусть ΔM_1 и ΔM_2 — соответственно массы отделяющейся и присоединяющейся частиц. Тогда, применяя обозначения предыдущего пункта, имеем следующие равенства, справедливые с точностью до членов первого порядка малости включительно относительно Δt и ΔM_i $(i = 1,\ 2)$:

$$\Delta \boldsymbol{Q}_1 = \Delta M_1 \boldsymbol{u}_1, \qquad \Delta \boldsymbol{Q}_2 = \Delta M_2 \boldsymbol{u}_2,$$

и, следовательно, согласно формулам (6) п. 130,

$$\boldsymbol{F}_1 = -\frac{dM_1}{dt}\boldsymbol{u}_1, \qquad \boldsymbol{F}_2 = \frac{dM_2}{dt}\boldsymbol{u}_2. \tag{1}$$

Здесь, как и в п. 129, $M_1(t)$ и $M_2(t)$ представляют собой суммарную массу всех частиц, отделившихся от точки P и, соответственно, присоединившихся к ней за время t, прошедшее от момента $t = 0$, когда масса точки P была равна M_0.

Пусть $\boldsymbol{v}$ — абсолютная скорость точки P. Тогда ее количество движения вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{Q} = M\boldsymbol{v}. \tag{2}$$

Подставив (1) и (2) в уравнение (5) п. 130, получим

$$\frac{dM}{dt}\boldsymbol{v} + M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{R} - \frac{dM_1}{dt}\boldsymbol{u}_1 + \frac{dM_2}{dt}\boldsymbol{u}_2,$$

где $\boldsymbol{R}$ — равнодействующая сил, приложенных к точке P. Используя соотношение $M = M_0 - M_1 + M_2$, это равенство можно переписать в виде

$$-\frac{dM_1}{dt}\boldsymbol{v} + \frac{dM_2}{dt}\boldsymbol{v} + M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{R} - \frac{dM_1}{dt}\boldsymbol{u}_1 + \frac{dM_2}{dt}\boldsymbol{u}_2.$$

Перенеся первые два слагаемых левой части в правую часть равенства, окончательно получим

$$M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{R} - \frac{dM_1}{dt}(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{v}) + \frac{dM_2}{dt}(\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{v}). \tag{3}$$

Уравнение (3) является дифференциальным уравнением движения точки переменного состава и называется *обобщенным уравнением Мещерского.*

Отметим, что $\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_{1r}$ — скорость отделяющихся частиц относительно точки P. Аналогично $\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_{2r}$ — скорость присоединяющихся частиц относительно точки P.

Пусть имеет место только отделение частиц. Тогда $M_2 \equiv 0$, $M(t) = M_0 - M_1(t)$ и $dM/dt = -dM_1/dt$. В этом случае уравнение (3) принимает вид

$$M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{R} + \frac{dM}{dt}\boldsymbol{u}_{1r}. \tag{4}$$

Уравнение (4) называется *уравнением Мещерского.* Из него видно, что эффект отделения частиц эквивалентен действию на точку P добавочной силы $\boldsymbol{F}_1 = \dfrac{dM}{dt}\boldsymbol{u}_{1r}$ (называемой *реактивной силой*). Аналогично можно рассмотреть и эффект присоединения частиц к точке P. Реактивная сила численно равна произведению величины dM/dt (называемой *секундным расходом массы*) на относительную скорость отделения (или присоединения) частиц к точке переменного состава P. В случае отделения частиц реактивная сила направлена противоположно вектору $\boldsymbol{u}_{1r}$ относительной скорости отделяющихся частиц, а в случае присоединения частиц реактивная сила и относительная скорость $\boldsymbol{u}_{2r}$ имеют одинаковые направления.

Пусть имеет место только отделение частиц от точки P переменного состава. Если абсолютная скорость $\boldsymbol{u}_1$ отделяющихся частиц равна нулю, то уравнение Мещерского (4) примет вид

$$M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{R} - \frac{dM}{dt}\boldsymbol{v},$$

или

$$\frac{d(M\boldsymbol{v})}{dt} = \boldsymbol{R},$$

т. е. если абсолютная скорость отделяющихся частиц равна нулю, то производная по времени от количества движения точки P переменного состава равна равнодействующей приложенных к ней сил. Если же относительная скорость $\boldsymbol{u}_{1r}$ отделяющихся частиц равна нулю, то из (4) получаем

$$M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{R},$$

т. е. если относительная скорость отделяющихся частиц равна нулю, то уравнение движения точки P переменного состава записывается формально в том же виде, что и уравнения движения точки постоянного состава.

133. Движение ракеты вне поля сил. Пусть точка P переменного состава движется в безвоздушном пространстве вне поля сил. Движение точки моделирует, например, движение ракеты в космическом пространстве, если ракету принять за точку и пренебречь силами сопротивления космической среды, гравитационным притяжением, силами светового давления и т. п. Тогда $\boldsymbol{R} = 0$ и из равенства (4) получаем векторное уравнение движения ракеты

$$M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dM}{dt}\boldsymbol{u}_r, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{u}_r$ — относительная скорость отделения продуктов сгорания топлива. Будем считать, что скорость $\boldsymbol{u}_r$ постоянна и имеет направление, противоположное скорости $\boldsymbol{v}$ ракеты. Тогда ракета будет двигаться по прямой линии, имеющей направление вектора $\boldsymbol{v}$. Примем эту прямую за ось Ox (рис. 132). Проектируя обе части равенства (5) на ось Ox, получаем

$$M\frac{dv}{dt} = -\frac{dM}{dt}u_r, \tag{6}$$

где u_r — величина относительной скорости $\boldsymbol{u}_r$. Полагая, что при $t = 0$ масса ракеты равна M_0, а ее скорость равна v_0, и интегрируя (6), получаем

$$v(t) = v_0 + u_r \ln\frac{M_0}{M(t)}. \tag{7}$$

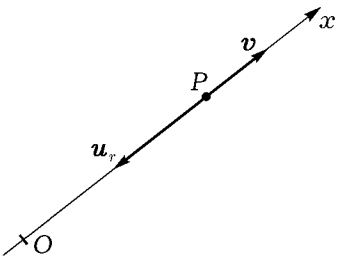

Рис. 132

Отсюда видно, что скорость ракеты в данный момент времени зависит от отношения начальной массы к текущему ее значению. Пусть $M_{\text{Т}}$ — начальная масса топлива, а $M_{\text{К}}$ — конечная масса ракеты после того, как израсходовано все топливо (т. е. масса корпуса ракеты, полезных грузов и оборудования). Тогда $M_0 = M_{\text{К}} + M_{\text{Т}}$, и для скорости ракеты, которую она приобретет в конце процесса сгорания топлива, получаем из (7) следующее выражение, называемое *формулой Циолковского*:

$$v_{\text{К}} = v_0 + u_r \ln\left(1 + \frac{M_{\text{Т}}}{M_{\text{К}}}\right). \tag{8}$$

Иэ этой формулы следует, что предельная скорость ракеты $v_{\text{К}}$ зависит только от относительного запаса топлива и относительной скорости истечения продуктов его сгорания. От закона изменения массы ракеты (режима работы двигателя) предельная скорость ракеты не зависит; если задано отношение $M_{\text{Т}}/M_{\text{К}} = Z$ (называемое *числом Циолковского*), то предельная скорость будет вполне определенной независимо от того, быстро или медленно происходило сгорание топлива.

Путь, пройденный ракетой на активном участке траектории, зависит от закона сгорания топлива. Полагая, что $x = 0$ при $t = 0$, из (7) получаем

$$x = v_0 t + u_r \int_0^t \ln \frac{M_0}{M(t)}\, dt. \tag{9}$$

134. Вертикальное движение ракеты в однородном поле тяжести. Пусть ракета движется вертикально вверх в однородном поле тяжести при отсутствии сопротивления среды. Ракету принимаем за материальную точку. Начальная скорость ракеты равна нулю, начальная масса M_0. Относительная скорость $\boldsymbol{u}_r$ отделения продуктов сгорания топлива постоянна и направлена вертикально вниз. Требуется найти скорость ракеты и высоту ее подъема как функции времени, считая, что закон изменения массы ракеты со временем задан.

На ракету действует внешняя сила — сила тяжести, направленная вертикально вниз. Примем прямую, по которой движется ракета, за ось Oz (рис. 133). Проектируя обе части уравнения (4) на ось Oz, получаем

$$M\frac{dv}{dt} = -Mg - \frac{dM}{dt}u_r.$$

Интегрируя это уравнение, находим зависимость скорости ракеты от времени

$$v = u_r \ln \frac{M_0}{M(t)} - gt. \tag{10}$$

Если положить, что при $t = 0$ $z = 0$, то, проинтегрировав (10), найдем, что зависимость высоты подъема ракеты от времени задается формулой

$$z = u_r \int\limits_0^t \ln \frac{M_0}{M(t)}\, dt - \frac{gt^2}{2}. \tag{11}$$

Пусть масса ракеты изменяется по экспоненциальному закону:

$$M = M_0 e^{-\alpha t}, \tag{12}$$

где α — постоянный положительный коэффициент, характеризующий быстроту сгорания топлива. Масса M_1 отброшенных продуктов сгорания возрастает по закону

$$M_1 = M_0(1 - e^{-\alpha t}).$$

Для величины F_1 реактивной силы, согласно первой из формул (1) п. 132, получаем выражение

$$F_1 = \alpha M_0 e^{-\alpha t} u_r = \alpha u_r M,$$

т. е. величина αu_r есть ускорение, сообщаемое ракете за счет реактивной силы.

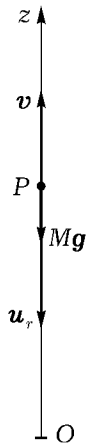

Рис. 133

Для закона изменения массы (12) из (10) и (11) получаем

$$v = (\alpha u_r - g)t, \qquad z = \frac{1}{2}(\alpha u_r - g)t^2. \tag{13}$$

Отсюда, в частности, следует, что вертикальный подъем ракеты возможен только при $\alpha u_r > g$. Это означает, что ускорение ракеты за счет реактивной силы должно быть больше ускорения свободного падения.

Пусть запас топлива M_T задан. Из (12) найдем время t_K сгорания топлива. Так как в конце процесса сгорания $M = M_K$, то из (12) получаем

$$M_K = M_0 e^{-\alpha t_K}.$$

Учитывая, что $M_0 = M_K + M_T$ и вводя обозначение $\beta = \ln(1+M_T/M_K)$, получаем отсюда

$$t_K = \frac{\beta}{\alpha}. \tag{14}$$

Из (13) следует, что скорость v_K ракеты в конце процесса сгорания топлива и длина z_K активного участка траектории ракеты определяются формулами

$$v_K = \beta\left(u_r - \frac{g}{\alpha}\right), \qquad z_K = \frac{\alpha u_r - g}{2\alpha^2}\beta^2. \tag{15}$$

После сгорания топлива, т. е. при $t > t_K$, масса ракеты остается постоянной, и, имея при $t = t_K$ скорость v_K, она пройдет до наибольшей высоты подъема расстояние

$$s = \frac{v_K^2}{2g} = \frac{\beta^2}{2g}\left(u_r - \frac{g}{\alpha}\right)^2. \tag{16}$$

Для полной высоты подъема $h = z_K + s$ из (15) и (16) получаем выражение

$$h = \frac{\beta^2 u_r}{2}\left(\frac{u_r}{g} - \frac{1}{\alpha}\right). \tag{17}$$

Отсюда следует, что при возрастании α растет и наибольшая высота подъема ракеты. Наибольшая высота $h_{\max}$ соответствует случаю $\alpha = \infty$, т. е. случаю мгновенного сгорания топлива. При этом

$$h_{\max} = \frac{\beta^2 u_r^2}{2g}. \tag{18}$$

Найдем, при каком значении α длина z_K активного участка будет наибольшей. Из (15) имеем

$$\frac{\partial z_K}{\partial \alpha} = \beta^2\frac{2g - \alpha u_r}{2\alpha^3}, \qquad \frac{\partial^2 z_K}{\partial \alpha^2} = \beta^2\frac{\alpha u_r - 3g}{\alpha^4}. \tag{19}$$

Отсюда следует, что при $\alpha = 2g/u_r$, т. е когда ускорение, сообщаемое ракете реактивной силой, вдвое больше ускорения свободного падения, величина z_K будет максимальной. Из (15) находим, что

$$z_{K\max} = \frac{\beta^2 u_r^2}{8g}.$$

При этом для высоты h подъема ракеты, согласно (17), получаем

$$h = \frac{\beta^2 u_r^2}{4g},$$

т. е. при наибольшей длине активного участка траектории ракеты полная высота ее подъема вдвое меньше наибольшей возможной высоты, задаваемой равенством (18).

§ 3. Уравнения движения тела переменного состава

135. Движение вокруг неподвижной точки. *Твердым телом переменного состава будем* называть такую механическую систему, которая образована материальными точками P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$), расстояние между которыми остается постоянным, причем хотя бы одна из точек P_ν является материальной точкой переменного состава.

Если $m_\nu(t)$ — масса точки P_ν, то

$$m_\nu(t) = m_\nu(0) - m_{\nu 1}(t) + m_{\nu 2}(t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N), \tag{1}$$

где $m_{\nu 1}(t)$ ($m_{\nu 2}(t)$) — суммарная масса частиц, потерянных точкой P_ν за время t (соответственно присоединившихся к точке P_ν). Неотрицательные неубывающие функции $m_{\nu 1}(t)$, $m_{\nu 2}(t)$ считаем непрерывными и дифференцируемыми.

Пусть твердое тело переменного состава имеет одну неподвижную точку O. Для получения дифференциальных уравнений движения тела воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента системы переменного состава. Пусть система координат $Oxyz$ жестко связана с телом, а $\boldsymbol{K}_O$ — кинетический момент тела относительно точки O. Если $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела, то из равенства (7) п. 131 получаем

$$\frac{\tilde{d}\boldsymbol{K}_O}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K}_O = \boldsymbol{M}_O^{(e)} + \boldsymbol{M}_O^{(F)}, \tag{2}$$

где $\tilde{d}/dt$ означает локальную (в системе $Oxyz$) производную, $\boldsymbol{M}_O^{(e)}$ — главный момент внешних сил относительно точки O, $\boldsymbol{M}_O^{(F)}$ — дополнительный момент, возникающий за счет того, что тело имеет переменный состав.

Найдем вектор $\boldsymbol{M}_O^{(F)}$. Пусть $\Delta m_{\nu 1}$ — масса частиц, отделившихся от точки P_ν, $\Delta m_{\nu 2}$ — масса частиц, присоединившихся к точке P_ν за время Δt. Если $\boldsymbol{u}_{\nu 1}$ и $\boldsymbol{u}_{\nu 2}$ — абсолютные скорости отделяющихся

и присоединяющихся частиц в момент времени t, то с точностью до членов первого порядка малости относительно $\Delta m_{\nu 1}$, $\Delta m_{\nu 2}$, Δt имеем

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{K}_{O1} &= \sum_{\nu=1}^{N} \Delta m_{\nu 1} \boldsymbol{\rho}_\nu \times \boldsymbol{u}_{\nu 1}, \\ \Delta \boldsymbol{K}_{O2} &= \sum_{\nu=1}^{N} \Delta m_{\nu 2} \boldsymbol{\rho}_\nu \times \boldsymbol{u}_{\nu 2}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\rho}_\nu$ — радиус-вектор материальной точки P_ν относительно неподвижной точки O тела. Из (3) и формул (8) п. 131 получаем

$$\boldsymbol{M}_O^{(F)} = -\sum_{\nu=1}^{N} \frac{dm_{\nu 1}}{dt} \boldsymbol{\rho}_\nu \times \boldsymbol{u}_{\nu 1} + \sum_{\nu=1}^{N} \frac{dm_{\nu 2}}{dt} \boldsymbol{\rho}_\nu \times \boldsymbol{u}_{\nu 2}. \tag{4}$$

Пусть $\boldsymbol{v}_\nu$ — скорость точки тела P_ν, а $\boldsymbol{u}_{\nu 1}^{(r)}$ и $\boldsymbol{u}_{\nu 2}^{(r)}$ — соответственно скорости присоединяющейся и отделяющейся частиц относительно точки P_ν. Тогда $\boldsymbol{u}_{\nu i} = \boldsymbol{v}_\nu + \boldsymbol{u}_{\nu i}^{(r)}$ $(i = 1, 2)$, что позволяет записать равенство (4) в таком виде:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_O^{(F)} = &\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_\nu \times \left(-\frac{dm_{\nu 1}}{dt} \boldsymbol{u}_{\nu 1}^{(r)} + \frac{dm_{\nu 2}}{dt} \boldsymbol{u}_{\nu 2}^{(r)} \right) + \\ &+ \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_\nu \times \left(-\frac{dm_{\nu 1}}{dt} + \frac{dm_{\nu 2}}{dt} \right) \boldsymbol{v}_\nu. \end{aligned} \tag{5}$$

При помощи соотношения (1) это равенство приводится к виду

$$\boldsymbol{M}_O^{(F)} = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_\nu \times \left(-\frac{dm_{\nu 1}}{dt} \boldsymbol{u}_{\nu 1}^{(r)} + \frac{dm_{\nu 2}}{dt} \boldsymbol{u}_{\nu 2}^{(r)} \right) + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_\nu \times \frac{dm_\nu}{dt} \boldsymbol{v}_\nu. \tag{6}$$

Согласно уравнению (3) п. 132, первая сумма в (6) представляет собой главный момент $\boldsymbol{M}_O^{(r)}$ реактивных сил относительно точки O. Замечая, что $\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_\nu$ и проводя преобразования, совершенно аналогичные преобразованиям, проведенным в п. 82, получим, что вторая сумма в (6) равна $\dfrac{d\mathbf{J}}{dt}\boldsymbol{\omega}$, где $\mathbf{J}$ — матрица тензора инерции тела для точки O (которая является функцией времени). Таким образом, дополнительный момент $\boldsymbol{M}_O^{(F)}$, появляющийся за счет того, что рассматриваемое тело является системой переменного состава, может быть представлен в форме

$$\boldsymbol{M}_O^{(F)} = \boldsymbol{M}_O^{(r)} + \frac{d\mathbf{J}}{dt}\boldsymbol{\omega}. \tag{7}$$

Согласно формуле (9) п. 82, кинетический момент тела $\boldsymbol{K}_O$ может быть записан в виде $\boldsymbol{K}_O = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$. Отсюда и из равенств (2), (7) получаем

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{J}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}_O^{(e)} + \boldsymbol{M}_O^{(r)} + \frac{d\mathbf{J}}{dt}\boldsymbol{\omega},$$

или

$$\mathbf{J}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}_O^{(e)} + \boldsymbol{M}_O^{(r)}. \tag{8}$$

Если J_x, J_y, J_z и J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} — осевые и центробежные моменты инерции, а p, q, r — проекции угловой скорости тела на оси Ox, Oy, Oz, то векторное уравнение (8) запишется в виде трех скалярных уравнений (3) п. 97, в правых частях которых появятся дополнительные слагаемые $M_x^{(r)}$, $M_y^{(r)}$, $M_z^{(r)}$, являющиеся проекциями момента реактивных сил на оси Ox, Oy, Oz. В общем случае, когда момент внешних сил зависит от ориентации тела в пространстве, при исследовании движения тела вокруг неподвижной точки к этим уравнениям надо добавить еще три кинематических уравнения Эйлера.

Если в процессе отбрасывания и присоединения частиц оси Ox, Oy, Oz остаются главными осями инерции, то скалярная форма уравнения (8) примет форму динамических уравнений Эйлера:

$$\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= M_x + M_x^{(r)}, \\ B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp &= M_y + M_y^{(r)}, \\ C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= M_z + M_z^{(r)}, \end{aligned} \tag{9}$$

где A, B, C — моменты инерции тела (зависящие от времени) относительно осей Ox, Oy, Oz, а M_x, M_y, M_z — проекции главного момента внешних сил на эти оси.

136. Вращение вокруг неподвижной оси. Пусть Oz — неподвижная ось, вокруг которой вращается тело переменного состава. Тогда $p \equiv 0$, $q \equiv 0$, $r = \omega_z(t)$. Для получения уравнения движения тела спроектируем обе части векторного уравнения (8) на ось Oz. Получим

$$J_z\frac{d\omega_z}{dt} = M_z + M_z^{(r)}. \tag{10}$$

Это и будет дифференциальным уравнением вращения твердого тела вокруг неподвижной оси Oz. От соответствующего уравнения для тела

постоянного состава оно отличается наличием в правой части дополнительного слагаемого $M_z^{(r)}$, являющегося проекцией момента реактивных сил на ось Oz, и тем, что момент инерции J_z тела относительно этой оси является переменной величиной.

Пример 1. *Тело, имеющее форму кольца радиусом r, вращается под действием постоянного момента M вокруг неподвижной вертикальной оси, совпадающей с осью симметрии. Когда тело приобрело угловую скорость ω_0, потребовалось затормозить его. Для таких целей на внешнем ободе кольца на противоположных концах диаметра установлены два реактивных двигателя. Относительная скорость истечения газов в двигателях направлена по касательной к ободу кольца и равна u; секундный расход топлива равен q, начальный момент инерции тела с топливом равен J_0. Требуется найти расход топлива, необходимый для полного торможения тела.*

Согласно (10), *дифференциальное уравнение, описывающее вращение тела, будет таким:*

$$(J_0 - qr^2 t)\frac{d\omega}{dt} = M - qur. \tag{11}$$

Торможение вращения тела возможно, если величина реактивного момента достаточно велика ($qur > M$). Решив уравнение (11), *получим зависимость угловой скорости тела от времени:*

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{qur - M}{qr^2}\ln\left(1 - \frac{qr^2}{J_0}t\right).$$

Из уравнения $\omega(\tau) = 0$ найдем время τ торможения вращения тела, а затем по формуле $m = q\tau$ вычислим необходимый расход топлива. В результате получим

$$m = \frac{J_0}{r^2}\left(1 - e^{-\frac{qr^2\omega_0}{qur-M}}\right).$$

Глава X
Дифференциальные уравнения аналитической динамики

§ 1. Уравнения Лагранжа (второго рода)

137. Общее уравнение динамики в обобщенных координатах. Рассмотрим систему N материальных точек P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$). Если система несвободна, то наложенные на нее связи предполагаются удерживающими и идеальными. Пусть $\delta \boldsymbol{r}_\nu$ — виртуальное перемещение точки P_ν, m_ν — ее масса, $\boldsymbol{w}_\nu$ — ускорение в инерциальной системе координат, а $\boldsymbol{F}_\nu$ — равнодействующая всех активных сил, приложенных к точке P_ν. Тогда имеет место общее уравнение динамики (п. 57)

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu) \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{1}$$

В том случае, когда все или некоторые из связей не идеальны, к величинам $\boldsymbol{F}_\nu$ следует добавить часть $\boldsymbol{G}_\nu$ равнодействующей реакций связей, действующих на точку P_ν, которая не удовлетворяет условию идеальности. После этого изучаемую систему можно формально рассматривать как систему с идеальными связями.

Общее уравнение динамики (1) мы принимаем за исходное при получении основных дифференциальных уравнений аналитической динамики, которым посвящена данная глава. Фактически все изучаемые ниже уравнения движения материальных систем являются только различными формами записи уравнения (1), к которым оно приводится при тех или иных предположениях о характере активных сил, действующих на систему, и о наложенных на нее связях.

Пусть на систему наложено r геометрических и s кинематических неинтегрируемых связей. Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_m$ — обобщенные координаты системы. Их число m равно $3N - r$. Тогда радиусы-векторы $\mathbf{r}_\nu$ точек P_ν относительно начала инерциальной системы координат записываются в виде функций аргументов $q_1, q_2, \ldots, q_m, t$

$$\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_m, t), \tag{2}$$

которые предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми. Если система склерономна, то обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_m$ можно выбрать так, чтобы функции $\boldsymbol{r}_\nu$ не зависели от t. Из (2) получаем (см. п. 16)

$$\boldsymbol{v}_\nu = \dot{\boldsymbol{r}}_\nu = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N), \tag{3}$$

$$\delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j}\delta q_j \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N). \tag{4}$$

Запишем общее уравнение динамики (1) в обобщенных координатах. Для элементарной работы активных сил имеем выражение

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{m} Q_j \delta q_j, \tag{5}$$

где Q_j — обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_j. Она в общем случае является функцией q_l, $\dot{q}_l$ и t $(l = 1, 2, \ldots, m)$.

Преобразуем выражение для элементарной работы сил инерции на виртуальном перемещении системы. Пользуясь формулой (4) и меняя порядок суммирования, получаем предварительно

$$\begin{aligned} -\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu &= -\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{d\dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{dt} \cdot \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j}\delta q_j = \\ &= -\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{d\dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{dt} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \end{aligned} \tag{6}$$

Но

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{d\dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{dt} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j} \right) - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, m).$$

Последнее равенство при помощи формул (25) п. 16 можно записать в виде

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{d\dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{dt} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{\partial q_j} \tag{7}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, m).$$

Если использовать выражение для кинетической энергии системы

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu^2,$$

то равенство (7) можно переписать в виде

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{d\dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{dt}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{8}$$

Подставив (8) в формулу (6), получим выражение для элементарной работы сил инерции в виде

$$-\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = -\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right)\delta q_j. \tag{9}$$

Подставим теперь выражения (5) и (9) в соотношение (1) и умножим обе части получившегося равенства на -1. В результате получим *общее уравнение динамики в обобщенных координатах*:

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right)\delta q_j = 0. \tag{10}$$

138. Уравнения Лагранжа. Пусть система голономна. Тогда величины δq_j $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ независимы и число обобщенных координат равно числу степеней свободы системы $(m = n)$. В силу независимости величин δq_j уравнение (10) удовлетворяется тогда и только тогда, когда равны нулю коэффициенты при всех δq_j. Поэтому уравнение (10) эквивалентно следующей системе n уравнений:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{11}$$

Уравнения (11) называются *уравнениями Лагранжа второго рода*[1]. Они образуют систему n уравнений второго порядка относительно n функций $q_i(t)$. Порядок этой системы равен $2n$. Заметим, что это наименьший возможный порядок дифференциальных уравнений движения рассматриваемой системы, так как начальные значения величин q_i, $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ могут быть произвольными.

[1]Уравнения (11) для краткости мы часто будем называть просто уравнениями Лагранжа.

Для получения уравнений Лагранжа надо выразить кинетическую энергию T системы через обобщенные координаты и скорости, найти обобщенные силы и произвести указанные в (11) дифференцирования функции $T\ (q_j,\ \dot{q}_j,\ t)$ по обобщенным координатам, обобщенным скоростям и времени. Заметим, что форма уравнений Лагранжа не зависит от выбора обобщенных координат $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n$. При другом их выборе изменились бы только функции T и Q_i, а сама форма уравнений (11) осталась бы той же. В связи с этим говорят, что уравнения Лагранжа второго рода обладают свойством *ковариантности.*

В уравнениях Лагранжа не содержатся реакции идеальных связей. Если же нужно найти реакции связей, то надо после интегрирования уравнений Лагранжа подставить функции $q_i(t)$ в выражения (2), и тогда равнодействующая $\boldsymbol{R}_\nu$ реакций связей, приложенных к точке P_ν, найдётся из соотношений

$$\boldsymbol{R}_\nu = m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu - \boldsymbol{F}_\nu(\boldsymbol{r}_\nu,\ \dot{\boldsymbol{r}}_\nu,\ t).$$

Пример 1 (Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси u). *Здесь $n = 1$. За обобщенную координату примем угол φ поворота тела вокруг оси u. Обобщенная сила Q_φ равняется главному моменту $M_u^{(e)}$ внешних сил относительно оси u (см. пример 2 п. 54). Кинетическая энергия тела равна*

$$T = \frac{1}{2} J_u \dot{\varphi}^2,$$

где J_u — момент инерции тела относительно оси u. Имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J_u \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J_u \ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

имеет вид

$$J_u \ddot{\varphi} = M_u^{(e)}.$$

Пример 2 (Уравнения движения сферического маятника). *Сферический маятник представляет собой материальную точку, которая движется в однородном поле тяжести, оставаясь на сфере постоянного радиуса. Будем считать, что точка имеет массу m и закреплена на одном из концов невесомого стрежня длиной l; другой конец стержня при помощи шарнира прикреплен к неподвижной точке O так, что стержень может иметь произвольное направление в пространстве* (рис. 134). *Трением пренебрегаем.*

Сферический маятник имеет две степени свободы. За обобщенные координаты примем сферические координаты φ, θ точки m. Так как расстояние точки m до начала координат постоянно и равно l, то, согласно формуле (30) *п.* 9, *для кинетической энергии имеем выражение*

$$T = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2). \qquad (12)$$

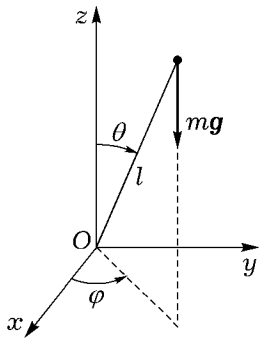

Рис. 134

Для нахождения обобщенной силы Q_φ дадим точке виртуальное перемещение по параллели. Тогда $\delta A_\varphi = 0$ и, следовательно, $Q_\varphi = 0$. Чтобы найти обобщенную силу Q_θ, дадим точке виртуальное перемещение по меридиану. Тогда $\delta A_\theta = mg\sin\theta \cdot l\delta\theta = Q_\theta\delta\theta$. Отсюда $Q_\theta = mgl\sin\theta$.

Для координат θ и φ (после деления обеих частей уравнений Лагранжа на постоянные множители) получаем такие уравнения:

$$\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 - \frac{g}{l}\sin\theta = 0, \qquad \frac{d}{dt}(\sin^2\theta\dot{\varphi}) = 0. \qquad (13)$$

139. Анализ выражения для кинетической энергии. Рассмотрим структуру выражения для кинетической энергии системы, записанной через обобщенные координаты и скорости. Используя формулу (3), кинетическую энергию можно представить в виде

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu^2 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t}\right)^2 = \\ = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_{j=1}^{m} a_j\dot{q}_j + a_0, \end{aligned} \qquad (14)$$

где введены обозначения

$$a_{jk} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_k}, \; a_j = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t}, \; a_0 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t}\right)^2. \qquad (15)$$

Величины a_{jk}, a_j, a_0 — функции от $q_1, q_2, \ldots, q_m, t$.

Формула (14) показывает, что кинетическая энергия является многочленом второй степени относительно обобщенных скоростей и представима в виде

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \qquad (16)$$

где

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k, \qquad T_1 = \sum_{j=1}^{m} a_j\dot{q}_j, \qquad T_0 = a_0.$$

В случае склерономной системы $\partial \boldsymbol{r}_\nu/\partial t = 0$ ($\nu = 1, 2, \ldots, N$) и из (15) следует, что $a_j = 0$, $a_0 = 0$ ($j = 1, 2, \ldots, m$). Поэтому

$$T = T_2 = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k, \tag{17}$$

т. е. кинетическая энергия склерономной системы является квадратичной формой обобщенных скоростей, причем коэффициенты a_{jk} в (17) не зависят явно от времени.

Покажем, что квадратичная форма T_2 является невырожденной. Это означает, что определитель, составленный из ее коэффициентов, отличен от нуля при любых $q_1, q_2, \ldots, q_m, t$:

$$\det \left\| a_{jk} \right\|_{j,k=1}^{m} \neq 0. \tag{18}$$

В самом деле, из того, что квадратичная форма T_2 может быть записана в виде

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j}\dot{q}_j \right)^2, \tag{19}$$

сразу следует, что она неотрицательна: $T_2 \geqslant 0$.

Докажем теперь, что она может обратиться в нуль только тогда, когда все $\dot{q}_j$ ($j = 1, 2, \ldots, m$) равны нулю. Допустим, что это не так, т. е. что T_2 может равняться нулю при некоторых значениях обобщенных скоростей $\dot{q}_1^*, \dot{q}_2^*, \ldots, \dot{q}_m^*$, среди которых есть отличные от нуля. Тогда каждое выражение, заключенное в скобки в формуле (19), должно обратиться в нуль, т. е.

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j}\dot{q}_j^* = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N).$$

В скалярной форме эти векторные равенства запишутся в виде

$$\sum_{j=1}^{m} \dot{q}_j^* \frac{\partial x_\nu}{\partial q_j} = 0, \qquad \sum_{j=1}^{m} \dot{q}_j^* \frac{\partial y_\nu}{\partial q_j} = 0, \qquad \sum_{j=1}^{m} \dot{q}_j^* \frac{\partial z_\nu}{\partial q_j} = 0, \tag{20}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, N).$$

Равенства (20) показывают, что столбцы матрицы (22) п. 14 линейно зависимы, т. е. ранг этой матрицы меньше m. Согласно п. 14, это невозможно, если величины $q_1, q_2, \ldots, q_m$ являются обобщенными координатами.

Таким образом, квадратичная форма T_2 определенно-положительна. Из критерия Сильвестра тогда следует, что определитель, составленный из ее коэффициентов, положителен. Следовательно, справедливо неравенство (18).

Замечание 1. *Если при данном выборе обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_m$ для некоторых положений системы неравенство* (18) *не выполняется, то это означает, что при исследовании движения системы вблизи этих положений величины $q_1, q_2, \ldots, q_m$ в качестве обобщенных координат малопригодны. В окрестности таких положений системы целесообразно вводить другие обобщенные координаты.*

Комментарий 1. *В качестве примера рассмотрим движение твердого тела вокруг неподвижной точки O. Пусть A, B, C — главные моменты инерции, а p, q, r — проекции угловой скорости тела на его главные оси инерции для точки O. Кинетическая энергия тела вычисляется по формуле*

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2). \tag{21}$$

В качестве обобщенных координат примем углы Эйлера ψ, θ, φ, вводимые обычным образом (п. 19). *Найдем величину T при значении угла θ, равном* 0 *или π. Использовав кинематические уравнения Эйлера* (п. 36), *получим из* (21)

$$T = \frac{1}{2}\Big[(A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi)\dot\theta^2 + C(\dot\varphi \pm \dot\psi)^2\Big], \tag{22}$$

где знаки плюс и минус отвечают значениям θ, равным 0 *и π соответственно. Определитель квадратичной формы* (22) *равен нулю. Следовательно, при значениях θ, близких* 0 *или π, вводимые обычным образом углы Эйлера неудобны для описания движения тела. Этот факт уже отмечался в п.* 19.

140. Разрешимость уравнений Лагранжа относительно обобщеных ускорений. Используя структуру (16) выражения кинетической энергии, уравнения Лагранжа (11) можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ddot q_k = g_i \qquad (i = 1, 2. \ldots, n), \tag{23}$$

где функции g_i не зависят от обобщенных ускорений. Из предыдущего пункта следует, что определитель линейной относительно $\ddot{q}_i$ системы уравнений (23) отличен от нуля, поэтому она разрешима и имеет единственное решение

$$\ddot{q}_i = G_i(q_k,\ \dot{q}_k,\ t). \tag{24}$$

Как известно из теории дифференциальных уравнений, при некоторых ограничениях на G_i (например, при существовании непрерывных частных производных у функций G_i, которое в механике всегда предполагается) система уравнений (24) имеет единственное решение при произвольных начальных данных: $q_i = q_i^0$, $\dot{q}_i = \dot{q}_i^0$, при $t = t_0$ ($i = 1,\ 3,\ \ldots,\ n$). Таким образом, уравнения Лагранжа удовлетворяют условию детерминированности движения (см. п. 45).

141. Уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил. Функция Лагранжа. Пусть обобщенные силы Q_i вычисляются по формулам

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где потенциал (потенциальная энергия) Π есть функция $q_1, q_2, \ldots, q_n, t$.

Уравнения Лагранжа (11) в случае потенциальных сил имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Положим $L = T - \Pi$, тогда эти уравнения примут вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{25}$$

Функция L называется *функцией Лагранжа* (*лагранжианом, кинетическим потенциалом*).

Используя выражение (16), функцию Лагранжа можно представить в виде многочлена второй степени относительно обобщенных скоростей

$$L = L_1 + L_2 + L_0, \tag{26}$$

где

$$L_2 = T_2, \quad L_1 = T_1, \quad L_0 = T_0 - \Pi. \tag{27}$$

Замечание 2. *Для получения дифференциальных уравнений движения* (25) *голономной системы в потенциальном поле сил надо знать только одну функцию — функцию Лагранжа L. Уравнения Лагранжа не*

изменятся, если к функции L добавить полную производную по времени от произвольной дважды непрерывно дифференцируемой функции f от обобщенных координат и времени:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

В самом деле, из последнего равенства имеем следующие два соотношения:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\frac{df}{dt}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial t},$$

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{df}{dt}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial q_k \partial q_i}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i}.$$

Правые части этих равенств одинаковы, так как f дважды непрерывно дифференцируема, и поэтому возможно изменение порядка ее дифференцирования по $(q_i,\ q_k,\ t)$. Поэтому если в (25) вместо L подставить $L + \dfrac{df}{dt}$, то величины $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\dfrac{df}{dt}\right)$ и $\dfrac{\partial}{\partial q_i}\left(\dfrac{df}{dt}\right)$ взаимно уничтожатся, и уравнения Лагранжа останутся неизменными.

142. Теорема об изменении полной механической энергии голономной системы. Пусть помимо потенциальных сил к системе приложены также некоторые непотенциальные силы. Часть обобщенных сил, соответствующую непотенциальным силам, обозначим через Q_i^*. Тогда

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^* \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

и уравнения Лагранжа (11) примут вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^* \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{28}$$

Найдем производную по времени от кинетической энергии $T(q_k,\ \dot{q}_k,\ t)$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial q_i}\dot{q}_i\right) + \frac{\partial T}{\partial t} = \\ &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial t}. \end{aligned} \tag{29}$$

Далее воспользуемся выражением (16) и *теоремой Эйлера об однородных функциях.* Согласно этой теореме, для однородной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ k-й степени справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = kf.$$

Применяя эту теорему к функции (16), получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T_2 + T_1.$$

Используя еще уравнения (28), запишем равенство (29) в виде

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}(2T_2 + T_1) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{n} Q_i^* \dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial t},$$

или

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}(2T_2 + 2T_1 + 2T_0) - \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) + \\ + \frac{d\Pi}{dt} - \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} Q_i^* \dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Так как $2T_2 + 2T_1 + 2T_0 = 2T$, то отсюда вытекает следующее выражение для производной по времени от полной механической энергии системы $E = T + \Pi$:

$$\frac{dE}{dt} = N^* + \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) + \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial t}, \tag{30}$$

где

$$N^* = \sum_{i=1}^{n} Q_i^* \dot{q}_i. \tag{31}$$

Величина N^* называется *мощностью непотенциальных сил.*

Формула (30) выражает *теорему об изменении полной механической энергии голономной системы.* Рассмотрим некоторые ее частные случаи.

1. Пусть система склерономна. Тогда $T_1 = 0$, $T_0 = 0$, $\partial T/\partial t = 0$ и

$$\frac{dE}{dt} = N^* + \frac{\partial \Pi}{\partial t}. \tag{32}$$

2. Пусть система склерономна и потенциал не зависит явно от времени. В этом случае $\partial\Pi/\partial t = 0$ и из (32) получаем

$$\frac{dE}{dt} = N^*. \tag{33}$$

3. Пусть система удовлетворяет следующим требованиям: а) она склерономна, б) все силы системы потенциальны, в) потенциал не зависит явно от времени. Система, удовлетворяющая этим трем условиям, называется *консервативной*. Для нее

$$\frac{dE}{dt} = 0, \tag{34}$$

т. е. полная механическая энергия консервативной системы не изменяется при движении системы; имеет место интеграл энергии

$$E = T + \Pi = h = \text{const}.$$

143. Гироскопические силы. Непотенциальные силы называются *гироскопическими*, если их мощность равна нулю.

Из равенства (33) следует, что для склерономной системы, у которой потенциал Π не зависит явно от времени, интеграл энергии существует и при наличии гироскопических сил.

Пусть непотенциальные силы линейны относительно обобщенных скоростей

$$Q_i^* = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik}\dot{q}_k \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Матрицу, составленную из коэффициентов γ_{ik}, считаем кососимметрической, т. е. $\gamma_{ik} = -\gamma_{ki}$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Тогда силы Q_i^* гироскопические, а кососимметричность матрицы коэффициентов γ_{ik} является необходимым и достаточным условием гироскопичности сил Q_i^*.

В самом деле, замечая, что у кососимметрической матрицы диагональные элементы γ_{ii} $(i = 1,\ 2, \ldots,\ n)$ всегда равны нулю, получаем

$$N^* = \sum_{i=1}^{n} Q_i^*\dot{q}_i = \sum_{i,k=1}^{n} \gamma_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k = 0.$$

Прежде чем переходить к рассмотрению примеров, обратим внимание на следующее. Имеет место равенство

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \boldsymbol{v}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t}.$$

Замечая, что

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} = Q_i$$

и что в случае склерономной системы $\partial \boldsymbol{r}_\nu / \partial t = 0$, получаем отсюда

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \boldsymbol{v}_\nu = \sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i.$$

Поэтому в случае склерономной системы равенство $N^* = 0$ выражает условие гироскопичности

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu^* \cdot \boldsymbol{v}_\nu = 0$$

непотенциальных сил $\boldsymbol{F}_\nu^*$, приложенных к точкам материальной системы.

Пример 1. *Покажем, что силы, приложенные к вращающемуся гироскопу и обеспечивающие его регулярную прецессию, являются гироскопическими (отсюда и происходит термин «гироскопические силы»). Пусть O — неподвижная точка гироскопа, $\boldsymbol{\omega}_1$ — его угловая скорость собственного вращения, а $\boldsymbol{\omega}_2$ — угловая скорость прецессии. Согласно п.* 106, *главный момент $\boldsymbol{M}_O$ сил, приложенных к гироскопу, вычисляется по формуле*

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1 \left[C + (C - A) \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos\theta_0 \right],$$

где C и A — моменты инерции гироскопа (относительно оси симметрии и относительно перпендикулярной ей главной оси, проходящей через неподвижную точку O гироскопа), θ_0 — постоянное значение угла нутации.

Для элементарной работы сил, приложенных к гироскопу (являющемуся склерономной системой), имеем такое выражение:

$$\delta A = \boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{\omega}\, dt = \boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{\omega}_1\, dt + \boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{\omega}_2\, dt = 0.$$

Таким образом, силы, обеспечивающие регулярную прецессию гироскопа, имеют мощность, равную нулю, и, следовательно, являются гироскопическими.

Пример 2. *Кориолисовы силы инерции в склерономной системе являются гироскопическими. В самом деле, пусть m_ν — масса точки P_ν, $\boldsymbol{v}_\nu$ — ее скорость в неинерциальной системе координат, а $\boldsymbol{\omega}$ — угловая*

скорость вращения этой системы координат относительно некоторой инерциальной системы координат. Тогда кориолисова сила инерции $\boldsymbol{j}_{\nu c}$ *для точки* P_ν *вычисляется по формуле*

$$\boldsymbol{j}_{\nu c} = -2m_\nu(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_\nu).$$

Для склерономной системы действительное перемещение $d\boldsymbol{r}_\nu$ *является одним из виртуальных. Поэтому для элементарной работы кориолисовых сил инерции имеем выражение*

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{j}_{\nu c} \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{j}_{\nu c} \cdot d\boldsymbol{r}_\nu =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{j}_{\nu c} \cdot \boldsymbol{v}_\nu \, dt = -2 \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_\nu) \cdot \boldsymbol{v}_\nu \, dt.$$

Следовательно, мощность кориолисовых сил инерции равна нулю и они являются гироскопическими.

144. Диссипативные силы. Функция Рэлея. Непотенциальные силы называются *диссипативными*, если их мощность отрицательна или равна нулю ($N^* \leqslant 0$, причем $N^* \not\equiv 0$).

Из равенства (33) следует, что для склерономной системы, у которой потенциал П не зависит явно от времени, при наличии диссипативных сил

$$\frac{dE}{dt} \leqslant 0,$$

т. е. полная механическая энергия системы убывает во время движения. Саму систему в этом случае называют *диссипативной*. Иногда говорят, что происходит рассеивание, или диссипация, энергии. Отсюда и возник термин «диссипативные силы».

Если мощность диссипативных сил N^* будет определенно-отрицательной функцией обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) [1], то диссипация называется *полной*. Если же N^* — знакопостоянная отрицательная функция[2], то диссипация называется *неполной* или *частичной*.

Пусть задана положительная квадратичная форма

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \qquad (b_{ik} = b_{ki}),$$

[1]Это означает, что при $|\dot{q}_i| < \varepsilon$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), где ε — достаточно малое положительное число, $N^* \leqslant 0$, причем N^* обращается в нуль только тогда, когда все обобщенные скорости равны нулю.

[2]То есть в окрестности $|\dot{q}_i| < \varepsilon$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) при сколь угодно малом ε справедливо неравенство $N^* \leqslant 0$ и N^* может обращаться в нуль не только тогда, когда все $\dot{q}_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$).

такая, что непотенциальные силы Q_i^* задаются соотношениями

$$Q_i^* = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_k \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{35}$$

Тогда для склерономной системы мощность N^* непотенциальных сил равна

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu^* \cdot \boldsymbol{v}_\nu = \sum_{i=1}^{n} Q_i^* \dot{q}_i = -2R \leqslant 0. \tag{36}$$

Функция R называется *диссипативной функцией Рэлея.* Из (33) и (36) следует, что в случае склерономной системы с потенциалом, не зависящим явно от времени,

$$\frac{dE}{dt} = -2R,$$

т. е. скорость убывания полной механической энергии системы равна удвоенной функции Рэлея.

В качестве примера рассмотрим склерономную систему, к каждой точке которой приложена сила сопротивления, пропорциональная скорости этой точки:

$$\boldsymbol{F}_\nu = -k\boldsymbol{v}_\nu \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{37}$$

где $k > 0$. Мощность этих сил будет равна

$$N^* = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \boldsymbol{v}_\nu = -2R,$$

где

$$R = \frac{1}{2}k\sum_{\nu=1}^{N} v_\nu^2. \tag{38}$$

145. Обобщенный потенциал. Пусть существует функция V от обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени такая, что обобщенные силы Q_i определяются по формулам

$$Q_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{39}$$

Тогда функция V называется *обобщенным потенциалом.*

Если положить $L = T - V$, то уравнения Лагранжа (11) запишутся в той же форме (25), какую они имели в случае обычного потенциала сил.

Из (39) следует, что

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + f_i,$$

где функции f_i не зависят от обобщенных ускорений. Но в теоретической механике обычно рассматриваются только такие силы, которые не зависят от ускорений. Поэтому обобщенный потенциал V должен быть линейной функцией от обобщенных скоростей:

$$V = V_1 + V_0, \qquad V_1 = \sum_{i=1}^{n} A_i \dot{q}_i, \tag{40}$$

где V_0, A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — функции обобщенных координат и времени.

Из (39) и (40) находим выражение для обобщенных сил:

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{dA_i}{dt} - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{k=1}^{n} A_k \dot{q}_k + V_0\right) = \\ &= -\frac{\partial V_0}{\partial q_i} + \frac{\partial A_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial A_i}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k. \end{aligned} \tag{41}$$

Если $\partial A_i/\partial t = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, т. е. линейная часть V_1 обобщенного потенциала не зависит явно от времени, то обобщенные силы складываются из потенциальных сил $-\partial V_0/\partial q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и гироскопических сил

$$Q_i^* = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} \dot{q}_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{42}$$

где

$$\gamma_{ik} = -\gamma_{ki} = \frac{\partial A_i}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{43}$$

Если к тому же система склерономна и часть V_0 обобщенного потенциала не зависит от времени, то, согласно п. 143, при движении системы величина $T + V_0$ остается постоянной (однако $T + V \neq \mathrm{const}$).

Отметим, что в случае существования обобщенного потенциала функция Лагранжа является многочленом второй степени относительно обобщенных скоростей и представима в виде $L = L_2 + L_1 + L_0$, где

$$L_2 = T_2, \quad L_1 = T_1 - V_1, \quad L_0 = T_0 - V_0. \tag{44}$$

Квадратичная часть функции L совпадает с квадратичной частью кинетической энергии, и уравнения Лагранжа, как и в случае существования обычного потенциала Π, разрешимы относительно обобщенных ускорений.

Упражнение 1. *Показать, что сумма переносных и кориолисовых сил инерции всех точек системы всегда имеет обобщенный потенциал.*

146. О составлении уравнений Лагранжа для описания движения в неинерциальной системе отсчета. При получении уравнений движения системы относительно неинерциальной системы координат можно применять различные способы. Укажем два из них.

Первый способ не связан с теорией относительного движения. Здесь задача формулируется без введения сил инерции. Кинетическая энергия абсолютного движения системы выражается через относительные обобщенные координаты и относительные скорости точек системы. Обобщенные силы вычисляются обычным способом (для заданных активных сил). В этом способе силы инерции учитываются автоматически самой процедурой выписывания уравнений Лагранжа.

Второй способ основан на теории относительного движения. Задачу формулируют, вводя переносные и кориолисовы силы инерции. Кинетическую энергию здесь надо вычислять для относительного движения, а при подсчете обобщенных сил, помимо заданных активных сил, учитываются и силы инерции.

Если в первом и втором из указанных способов за обобщенные координаты приняты одни и те же величины, то мы придем к одним и тем же уравнениям движения. В конкретной задаче бывает ясно, какой из способов предпочтительнее. Конечно, возможны и другие способы получения уравнений Лагранжа, описывающих движение системы относительно неинерциальной системы координат.

147. Натуральные и ненатуральные системы. Системы, в которых силы имеют обычный $\Pi(q_i, t)$ или обобщенный $V(q_i, \dot{q}_i, t)$ потенциал, называются *натуральными*. В таких системах функции Лагранжа L вводится как разность $T - \Pi$ или $T - V$ и является многочленом второй степени относительно обобщенных скоростей, причем

гессиан функции Лагранжа

$$\det\left\|\frac{\partial^2 L}{\partial\dot q_i\partial\dot q_k}\right\|_{i,k=1}^n = \det\left\|\frac{\partial^2 T}{\partial\dot q_i\partial\dot q_k}\right\|_{i,k=1}^n = \det\|a_{ik}\|_{i,k=1}^n \neq 0 \qquad (45)$$

и уравнения Лагранжа разрешимы относительно обобщенных ускорений.

В дальнейшем, если не будет оговорено особо, мы будем рассматривать более общие системы, в которых функция Лагранжа L не обязательно определяется как разность кинетической энергии и потенциала и в этом смысле является произвольной функцией $L(q_i,\ \dot q_i,\ t)$. Будем лишь требовать, чтобы гессиан этой функции относительно обобщенных скоростей не был равен нулю:

$$\det\left\|\frac{\partial^2 L}{\partial\dot q_i\partial\dot q_k}\right\|_{i,k=1}^n \neq 0. \qquad (46)$$

Такие системы будем называть *ненатуральными.* Требование (46) аналогично неравенству (45) и нужно для обеспечения разрешимости уравнений Лагранжа относительно обобщенных ускорений.

§ 2. Канонические уравнения Гамильтона

148. Преобразование Лежандра. Функция Гамильтона. В уравнениях Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad (1)$$

описывающих движение голономной системы в потенциальном поле сил, функция L зависит от переменных $q_i,\ \dot q_i,\ t$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Эти переменные задают момент времени и кинематическое состояние системы, т. е. положения и скорости ее точек. Переменные $q_i,\ \dot q_i,\ t$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ называют *переменными* Лагранжа.

Но состояние системы можно задавать и при помощи других параметров. За такие параметры можно принять величины $q_i,\ p_i,\ t$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где p_i — *обобщенные импульсы,* определяемые равенствами

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial\dot q_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (2)$$

Переменные $q_i,\ p_i,\ t$ называют *переменными Гамильтона.*

Гессиан функции L относительно переменных $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ отличен от нуля (см. неравенства (45), (46) п. 147). Замечая, что он равен якобиану правых частей равенств (2), на основании теоремы о неявной функции получаем, что эти равенства разрешимы относительно переменных $\dot{q}_i$:

$$\dot{q}_i = \varphi_i(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Следовательно, переменные Лагранжа могут быть выражены через переменные Гамильтона и наоборот.

Гамильтон предложил записывать уравнения движения в переменных q_i, p_i, t. В этих переменных уравнения Лагранжа (1) переходят в разрешенную относительно производных систему $2n$ уравнений первого порядка, имеющую замечательно симметричную форму записи. Эти уравнения называют *уравнениями Гамильтона* (или *каноническими уравнениями*). Переменные q_i и p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ называются *канонически сопряженными.*

Прежде чем получать уравнения Гамильтона, введем некоторые вспомогательные определения. Пусть дана функция $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, гессиан которой отличен от нуля:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_k} \right\|_{i,k=1}^{n} \neq 0. \tag{4}$$

Перейдем от переменных x_1, x_2, $\ldots$, x_n к новым переменным $y_1, y_2, \ldots, y_n$ по формулам

$$y_i = \frac{\partial X}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Преобразованием Лежандра функции $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется функция новых переменных $Y(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, определяемая равенством

$$Y = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - X, \tag{6}$$

в правой части которого переменные x_i выражены через новые переменные y_i при помощи уравнений (5)[1].

В курсах математического анализа показывается[2], что преобразование Лежандра имеет обратное, причем если X при преобразовании

[1]Эти уравнения в силу условия (4) разрешимы относительно x_i $(i=1, 2, \ldots, n)$.

[2]См., например, гл. 6 книги: Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. – М.: Наука, 1966.

Лежандра переходит в Y, то преобразование Лежандра от Y будет снова X.

Преобразование Лежандра функции $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ по переменным $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ есть функция

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L(q_j, \dot{q}_j, t). \tag{7}$$

в которой величины $\dot{q}_i$ выражены через q_j, p_j, t при помощи уравнений (2); при этом при проведении преобразования величины q_i, t играют роль параметров. Функция H называется *функцией Гамильтона.*

149. Уравнения Гамильтона. Полный дифференциал функции Гамильтона вычисляется по формуле

$$dH = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \tag{8}$$

С другой стороны, полный дифференциал правой части равенства (7), вычисленный при условиях (2), будет таким:

$$dH = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \, dp_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{9}$$

Так как при переходе к новым переменным значение полного дифференциала не меняется, то правые части равенств (8) и (9) равны. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{10}$$

а также

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{11}$$

Но согласно (1) и (2), $\dot{p}_i = \dfrac{\partial L}{\partial q_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Поэтому из (10) получаем уравнения движения

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{12}$$

Эти уравнения называются *уравнениями Гамильтона* (или *каноническими уравнениями*).

Отметим, что попутно мы получили равенство (11), означающее, что если функция Лагранжа не зависит явно от времени, то и функция Гамильтона также не зависит от времени, и наоборот. Аналогично, из равенств (10) следует, что если функция L не зависит от какой-либо из обобщенных координат, то и функция H от этой координаты не зависит, и наоборот.

Пример 1. *Получим гамильтонову форму уравнений движения математического маятника, рассмотренного в примере 2 п. 57. Для кинетической и потенциалной энергии имеем выражения* (см. рис. 55)

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2, \qquad \Pi = -mgl\ \cos\varphi.$$

Поэтому

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl\ \cos\varphi.$$

Из равенства

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}$$

находим

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{ml^2}p_\varphi.$$

Используя формулу (7), *находим функцию Гамильтона*

$$H = p_\varphi\dot{\varphi} - L = \frac{1}{2ml^2}p_\varphi^2 - mgl\ \cos\varphi.$$

Канонические уравнения (12) *имеют вид*

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{1}{ml^2}p_\varphi, \qquad \frac{dp_\varphi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial\varphi} = -mgl\ \sin\varphi.$$

150. Физический смысл функции Гамильтона. Пусть система натуральна. Тогда $L = L_2 + L_1 + L_0$ и, согласно формулам (2) и (7),

$$H = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(L_2 + L_1 + L_0)}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i - (L_2 + L_1 + L_0),$$

но по теореме Эйлера об однородных функциях

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L_2}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i = 2L_2, \qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L_1}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i = L_1,$$

поэтому

$$H = (2L_2 + L_1) - (L_2 + L_1 + L_0) = L_2 - L_0. \tag{13}$$

Пусть $T = T_2 + T_1 + T_0$. Если силы имеют обычный потенциал Π, то $L_0 = T_0 - \Pi$ и, согласно (13),

$$H = T_2 - T_0 + \Pi. \tag{14}$$

Если же силы имеют обобщенный потенциал $V = V_1 + V_0$, то $L_0 = T_0 - V_0$ и

$$H = T_2 - T_0 + V_0. \tag{15}$$

Пусть система натуральна и склерономна; тогда $T_1 = 0$, $T_0 = 0$ и $T = T_2$. В том случае, когда силы имеют обычный потенциал,

$$H = T + \Pi, \tag{16}$$

т. е. для натуральной склерономной системы с обычным потенциалом сил функция Гамильтона H представляет собой полную механическую энергию. В этом и состоит физический смысл функции Гамильтона.

Отметим также, что в случае склерономной натуральной системы с обобщенным потенциалом сил

$$H = T + V_0. \tag{17}$$

151. Интеграл Якоби. Найдем полную производную функции Гамильтона по времени. Используя уравнения (12), получим тождество

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t},$$

т. е. полная производная функции Гамильтона по времени тождественно равна ее частной производной:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{18}$$

Система называется *обобщенно консервативной*, если ее функция Гамильтона не зависит явно от времени. В этом случае $\partial H/\partial t \equiv 0$ и в силу тождества (18) $dH/dt \equiv 0$, т. е. при движении системы

$$H\,(q_i,\ p_i) = h, \tag{19}$$

где h — произвольная постоянная. Функцию H называют *обобщенной полной энергией*, а равенство (19) — *обобщенным интегралом энергии.*

В случае натуральной системы с обычным потенциалом сил функция Гамильтона вычисляется по формуле (14) и, если она не зависит от времени,

$$T_2 - T_0 + \Pi = h. \tag{20}$$

Соотношение (20), где h — произвольная постоянная, называют *интегралом Якоби.*

Если система консервативна, т. е. она склерономна и силы имеют потенциал, не зависящий от времени, то $T_0 = 0$, $T_1 = 0$, $T = T_2$ и интеграл Якоби запишется в виде

$$E = T + \Pi = h. \tag{21}$$

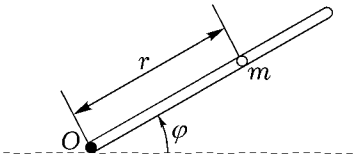

Рис. 135

Таким образом, консервативная система является частным случаем обобщенно консервативной и в рассматриваемом частном случае обобщенный интеграл энергии переходит в обычный.

Пример 1. *Гладкая трубка вращается в горизонтальной плоскости с заданной постоянной угловой скоростью ω. Внутри трубки движется шарик массой m.*

Будем считать, что шарик можно принять за материальную точку. Угол φ, который составляет ось трубки с некоторым неизменным направлением в горизонтальной плоскости, известен ($\varphi = \omega t$). Положение шарика будем задавать координатой r — расстоянием до оси вращения трубки (рис. 135).

Потенциальная энергия шарика постоянна; примем, что $\Pi = 0$. *Для кинетической энергии шарика имеем выражение*

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2),$$

т. е.

$$T_2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2, \qquad T_1 = 0, \qquad T_0 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2.$$

Имеет место интеграл Якоби (20), *который в рассматриваемом примере запишется в виде*

$$H = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = h = \text{const}.$$

Было бы ошибкой принять за интеграл полную механическую энергию $E = T + \Pi$, так как рассматриваемая система (шарик во вращающейся трубке) не является консервативной.

152. Уравнения Уиттекера и Якоби. Пусть движение системы описывается каноническими уравнениями (12). Если функция Гамильтона не зависит явно от времени, то существует обобщенный интеграл энергии

$$H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = h, \tag{22}$$

где h — произвольная постоянная, определяемая начальными условиями, $h = H(q_1^0, \ldots, q_n^0, p_1^0, \ldots, p_n^0)$. В $2n$-мерном пространстве $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ [1] уравнение (22) задает гиперповерхность. Будем рассматривать только такие движения, которые соответствуют этой гиперповерхности. Иначе говоря, рассмотрим движение системы на фиксированном изоэнергетическом уровне $H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = h$.

Покажем, что движение изучаемой системы на изоэнергетическом уровне описывается системой дифференциальных уравнений, порядок которой равен $2n - 2$, причем эта система уравнений может быть записана в виде канонических уравнений. Предположим, что в некоторой области фазового пространства выполняется неравенство $\partial H/\partial p_1 \neq 0$. Тогда в этой области равенство (22) разрешимо относительно p_1:

$$p_1 = -K(q_1, q_2, \ldots, q_n, \quad p_2, \ldots, p_n, h). \tag{23}$$

Перепишем систему уравнений (12), отделив два уравнения, соответствующих значению i, равному единице, от остальных $(2n-2)$-х уравнений

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \qquad \frac{dq_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \tag{24}$$

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \qquad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \qquad (j = 2, 3, \ldots, n). \tag{25}$$

Разделив почленно уравнения (25) на первое из уравнений (24), получим

$$\frac{dq_j}{dq_1} = \frac{\dfrac{\partial H}{\partial p_j}}{\dfrac{\partial H}{\partial p_1}}, \qquad \frac{dp_j}{dq_1} = -\frac{\dfrac{\partial H}{\partial q_j}}{\dfrac{\partial H}{\partial p_1}}, \qquad (j = 2, 3, \ldots, n). \tag{26}$$

[1] Это пространство называют *фазовым пространством.*

Подставив величину p_1, задаваемую равенством (23), в левую часть интеграла (22) и продифференцировав полученное тождество по переменной q_j, получим

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} - \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial K}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 2,\ 3,\ \ldots,\ n). \tag{27}$$

Аналогично получим, что

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial K}{\partial p_j} = 0 \qquad (j = 2,\ 3,\ \ldots,\ n). \tag{28}$$

Преобразуя правые части уравнений (26) с использованием равенств (27) и (28), находим окончательно

$$\frac{dq_j}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \qquad \frac{dp_j}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_j}, \qquad (j = 2,\ 3,\ \ldots,\ n). \tag{29}$$

Уравнения (29) описывают движение системы при $H = h = \text{const}$ и называются *уравнениями Уиттекера*. Они имеют форму канонических уравнений; роль функции Гамильтона играет функция K из (23), а роль времени — координата q_1.

Интегрирование уравнений Уиттекера (29) дает

$$\begin{gathered} q_j = q_j(q_1,\ h,\ c_1,\ \ldots,\ c_{2n-2}), \\ p_j = p_j(q_1,\ h,\ c_1,\ \ldots,\ c_{2n-2}), \qquad (j = 2,\ 3,\ \ldots,\ n), \end{gathered} \tag{30}$$

где $c_1,\ \ldots,\ c_{2n-2}$ — произвольные постоянные. Если эти выражения для q_j, p_j подставить в равенство (23), то получим

$$p_1 = f_1(q_1,\ h,\ c_1,\ \ldots,\ c_{2n-2}), \tag{31}$$

Равенства (30), (31) задают геометрический характер движения: они определяют уравнения траекторий в фазовом пространстве (точнее, на гиперповерхности фазового пространства $H = h$). Чтобы найти зависимость движения от времени, воспользуемся первым из двух уравнений (24). Если в его правую часть подставить величины p_1, q_j, p_j из (30) и (31), то получим

$$\frac{dq_1}{dt} = g_1(q_1,\ h,\ c_1,\ \ldots,\ c_{2n-2}),$$

откуда

$$t = \int \frac{dq_1}{g_1} + c_{2n-1}. \tag{32}$$

Разрешив уравнение (32) относительно q_1, получим

$$q_1 = q_1(t,\ h,\ c_1,\ \ldots,\ c_{2n-1}). \tag{33}$$

Уравнения Уиттекера (29) имеют структуру уравнений Гамильтона. Их можно записать в виде уравнений типа Лагранжа. Пусть гессиан функции K по переменным p_j отличен от нуля:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 K}{\partial p_j \partial p_l} \right\|_{j,l=2}^{n} \neq 0. \tag{34}$$

Пусть P — преобразование Лежандра функции K по переменным p_j $(j = 2,\ 3,\ \ldots,\ n)$. Тогда

$$P = P(q_2,\ \ldots,\ q_n,\ q_2',\ \ldots,\ q_n',\ q_1,\ h) = \sum_{j=2}^{n} q_j' p_j - K, \tag{35}$$

где $q_j' = dq_j/dq_1$. Величины p_j в (35) выражаются через $q_2',\ \ldots,\ q_n'$ из уравнений

$$q_j' = \frac{\partial K}{\partial p_j} \qquad (j = 2,\ 3,\ \ldots,\ n),$$

т. е. из первых $n-1$ уравнений системы (29).

При помощи функции P уравнения (29) могут быть записаны в следующей эквивалентной форме:

$$\frac{d}{dq_1}\frac{\partial P}{\partial q_j'} - \frac{\partial P}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 2,\ 3,\ \ldots,\ n). \tag{36}$$

Это уравнения типа Лагранжа. Они называются *уравнениями Якоби.* Роль функции Лагранжа в уравнениях Якоби играет функция P, а роль времени, как и в уравнениях Уиттекера (29), — координата q_1.

Преобразуем выражение (35) для функции P, учитывая равенства (7), (23) и соотношение $q_1' \equiv 1$:

$$P = \sum_{j=2}^{n} p_j q_j' + p_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i' = \frac{1}{\dot q_1}\sum_{i=1}^{n} p_i \dot q_i = \frac{1}{\dot q_1}(L + H). \tag{37}$$

Пусть система консервативна. Тогда $L = T - \Pi$, $H = T + \Pi$ и из (37) следует, что

$$P = \frac{2T}{\dot q_1}. \tag{38}$$

Но в консервативной системе

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k = \dot{q}_1^2 G(q_1, \ldots, q_n, q_2', \ldots, q_n'), \tag{39}$$

где

$$G = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}q_i'q_k'.$$

Из интеграла энергии $T + \Pi = h$ и равенства (39) находим, что

$$\dot{q}_1 = \sqrt{\frac{h - \Pi}{G}}.$$

И из (38), (39) получаем окончательное выражение для функции P в случае консервативной системы:

$$P = 2\sqrt{(h - \Pi)G}. \tag{40}$$

Пример 1. *Найдем уравнения Уиттекера и Якоби, описывающие движение точки массой m в однородном поле тяжести. Пусть ось Oz неподвижной системы координат $Oxyz$ направлена вертикально вверх. Тогда*

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \qquad \Pi = mgz,$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz,$$

$$p_x = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}, \quad p_z = m\dot{z},$$

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + mgz.$$

Считая величину $\dot{x}$ положительной, из уравнения $H = h$ получаем $p_x = -K$, где

$$K = -\sqrt{2m(h - mgz) - p_y^2 - p_z^2}.$$

Уравнения Уиттекера (29) *будут такими:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p_y}{\sqrt{2m(h - mgz) - p_y^2 - p_z^2}},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{p_z}{\sqrt{2m(h - mgz) - p_y^2 - p_z^2}}, \qquad \frac{dp_y}{dx} = 0,$$

$$\frac{dp_z}{dx} = -\frac{m^2 g}{\sqrt{2m(h - mgz) - p_y^2 - p_z^2}}.$$

Так как рассматриваемая система консервативна, то функция P может быть вычислена по формуле (40). *Получаем*

$$G = \frac{1}{2}m(1 + y'^2 + z'^2).$$

Тогда

$$P = \sqrt{2m(h - mgz)(1 + y'^2 + z'^2)},$$

и уравнения Якоби (36) *запишутся в виде*

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{h - mgz}{1 + y'^2 + z'^2}} \cdot y'\right) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{h - mgz}{1 + y'^2 + z'^2}} \cdot z'\right) + \frac{mg}{2}\sqrt{\frac{1 + y'^2 + z'^2}{h - mgz}} = 0.$$

§ 3. Уравнения Рауса

153. Функция Рауса. Для описания состояния голономной системы в данный момент времени t Раус предложил комбинацию переменных Лагранжа и Гамильтона. *Переменными Рауса* являются величины

$$q_i,\ \dot{q}_i; \quad q_\alpha,\ p_\alpha; \quad t \quad (i = 1, 2, \ldots, k; \quad \alpha = k + 1, \ldots, n),$$

где k — произвольное фиксированное число, меньшее n. Предположим, что гессиан функции Лагранжа по переменным $\dot{q}_\alpha$ $(\alpha = k + 1, \ldots, n)$ отличен от нуля:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha\, \partial \dot{q}_\beta} \right\|_{\alpha,\beta=k+1}^{n} \neq 0. \tag{1}$$

Для натуральной системы

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} \right\|_{\alpha,\beta=k+1}^{n} = \det \left\| \frac{\partial^2 T_2}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} \right\|_{\alpha,\beta=k+1}^{n} = \det \left\| a_{\alpha\beta} \right\|_{\alpha,\beta=k+1}^{n}. \tag{2}$$

Последний определитель в равенстве (2) отличен от нуля (положителен), так как T_2 — определенно-положительная квадратичная форма от обобщенных скоростей и к ней применим критерий Сильвестра. Следовательно, для натуральной системы неравенство (1) всегда выполнено. В случае ненатуральной системы это неравенство является дополнительным к условию (46) п. 147 ограничением на функцию L.

Обобщенные импульсы p_α определяются обычным образом при помощи равенств

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \qquad (\alpha = k+1, \ldots, n). \tag{3}$$

Функцией Рауса $R(q_1, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k, p_{k+1}, \ldots, p_n, t)$ называется преобразование Лежандра функции L по переменным $\dot{q}_{k+1}, \ldots \dot{q}_n$, т. е.

$$R = \sum_{\alpha=k+1}^{n} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L(q_i, q_\alpha, \dot{q}_i, \dot{q}_\alpha, t), \tag{4}$$

где $\dot{q}_\alpha$ $(\alpha = k+1, \ldots, n)$ выражены через $q_i, q_\alpha, \dot{q}_i, p_\alpha, t$ из уравнений (3).

154. Уравнения Рауса. Полный дифференциал функции Рауса вычисляется по формуле

$$dR = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial R}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \sum_{\alpha=k+1}^{n} \left(\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial R}{\partial p_\alpha} dp_\alpha \right) + \frac{\partial R}{\partial t} dt. \tag{5}$$

С другой стороны, вычислив полный дифференциал правой части равенства (4) при условии (3), получим

$$dR = -\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \sum_{\alpha=k+1}^{n} \left(\dot{q}_\alpha dp_\alpha - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{6}$$

Сравнение правых частей равенств (5) и (6) приводит к равенствам

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{7}$$

$$\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{\partial R}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha \qquad (\alpha = k+1, \ldots, n), \tag{8}$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{9}$$

Но для нашей системы справедливы уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{10}$$

Из (7) и (10) следует, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k), \tag{11}$$

а равенства (3), (8) и (10) дают:

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial R}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} \qquad (\alpha = k+1,\ \ldots,\ n). \tag{12}$$

Совокупность уравнений (11) и (12) образует систему *уравнений Рауса.* Она состоит из k уравнений (11) второго порядка, имеющих структуру уравнений Лагранжа второго рода, и $2(n-k)$ уравнений (12) первого порядка, обладающих структурой уравнений Гамильтона.

Уравнения Рауса находят широкое применение при исследовании движения систем с циклическими координатами (см. далее п. 165).

§ 4. Уравнения движения неголономных систем

155. Уравнения движения с множителями связей. Пусть на систему наложено s дифференциальных неинтегрируемых связей, заданных равенствами (26) п. 16:

$$\sum_{j=1}^{m} b_{\beta j}(q_1, \ldots, q_m, t)\dot{q}_j + b_\beta(q_1, \ldots, q_m, t) = 0 \quad (\beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ s). \tag{1}$$

Тогда в общем уравнении динамики (см. п. 137)

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right)\delta q_j = 0 \tag{2}$$

величины δq_j не могут быть произвольными. Они связаны s независимыми соотношениями

$$\sum_{j=1}^{m} b_{\beta j}\delta q_j = 0 \qquad (\beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ s), \tag{3}$$

и число степеней свободы системы равно $n = m - s$.

Для вывода уравнений движения воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа. Каждое из s равенств (3) умножим на свой неопределенный скалярный множитель λ_β и результаты вычтем из (2). Тогда получим

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j - \sum_{\beta=1}^{s}\lambda_\beta b_{\beta j}\right)\delta q_j = 0. \tag{4}$$

В силу независимости равенств (3) ранг матрицы, составленной из коэффициентов $b_{\beta j}$ ($\beta = 1, 2, \ldots, s$; $j = 1, 2, \ldots, m$), равен s. Следовательно, хотя бы один из ее миноров порядка s отличен от нуля. Для определенности будем считать, что

$$\det \left\| b_{\beta, n+k} \right\|_{\beta, k=1}^{s} \neq 0. \tag{5}$$

Тогда величины $\delta q_1, \ldots, \delta q_n$ можно принять за независимые, а δq_{n+k} ($k = 1, \ldots, s$) однозначно выражаются через них из равенств (3).

Выберем величины λ_β ($\beta = 1, 2, \ldots, s$) так, чтобы коэффициенты при $\delta q_{n+1}, \ldots, \delta q_m$ в выражении (4) обратились в нуль. При условии (5) это сделать можно, и притом единственным способом. При таком выборе величин λ_β в выражении (4) будут содержаться только независимые вариации δq_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), и, следовательно, коэффициенты при них должны равняться нулю.

Таким образом, приходим к следующим m уравнениям:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{\beta=1}^{s} \lambda_\beta b_{\beta j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{6}$$

К ним еще надо присоединить s уравнений связей (1). Тогда получим систему $m + s$ уравнений для определения величин q_j, λ_β ($j = 1, 2, \ldots, m$; $\beta = 1, 2, \ldots, s$). Величины λ_β называются *множителями связей*. Слагаемые $\sum\limits_{\beta=1}^{s} \lambda_\beta b_{\beta j}$ в уравнениях (6) представляют собой обобщенные реакции связей,

Пример 1. *В качестве примера рассмотрим движение конька по горизонтальной поверхности льда (см. пример 5 из п. 10 и рис. 10) в предположении, что трение отсутствует. Пусть C — центр масс конька. Положение конька зададим тремя обобщенными координатами x, y, φ, смысл которых ясен из рис. 10. Неинтегрируемая связь задается уравнением*

$$\dot{x} \operatorname{tg} \varphi - \dot{y} = 0. \tag{7}$$

Если m — масса конька, а J_C — его момент инерции относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс, то кинетическая энергия вычисляется по формуле

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J_C \dot{\varphi}^2. \tag{8}$$

Уравнения (6) *принимают вид*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} &= Q_x + \lambda \operatorname{tg}\varphi, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} &= Q_y - \lambda, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_\varphi. \end{aligned} \tag{9}$$

Так как трения нет, а потенциальная энергия Π *конька постоянна, то обобщенные силы* Q_x, Q_y, Q_φ *равны нулю. Уравнения* (9) *с учетом выражения* (8) *запишутся в виде*

$$m\ddot{x} = \lambda \operatorname{tg}\varphi, \quad m\ddot{y} = -\lambda, \quad \ddot{\varphi} = 0. \tag{10}$$

Пусть в начальный момент центр масс конька находится в начале координат и конек расположен вдоль оси Ox, *т. е. при* $t = 0$ *имеем* $x = 0$, $y = 0$, $\varphi = 0$. *Пусть, далее, в начальный момент скорость центра масс равна* v_0, *а угловая скорость конька* ω_0, *т. е.* $\dot{x} = v_0$, $\dot{\varphi} = \omega_0$. *Из уравнения связи* (7) *находим тогда, что при* $t = 0$ $\dot{y} = 0$. *Третье уравнение системы* (10) *при этих начальных условиях дает*

$$\varphi = \omega_0 t, \tag{11}$$

т. е. конек движется, равномерно вращаясь вокруг вертикали.

Исключив теперь величину λ *из первых двух уравнений системы* (10), *получим*

$$\ddot{x} + \operatorname{tg}\omega_0 t\ddot{y} = 0.$$

Используя уравнение связи (7), *исключаем отсюда величину* $\ddot{y}$. *Тогда с учетом равенства* (11) *получим уравнение относительно* x:

$$\ddot{x} + \omega_0 \operatorname{tg}\omega_0 t\dot{x} = 0. \tag{12}$$

Из (7), (11) *и* (12) *с учетом начальных условий найдем*

$$x = \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t, \qquad y = \frac{v_0}{\omega_0}(1 - \cos\omega_0 t). \tag{13}$$

Отсюда следует, что центр масс конька равномерно со скоростью v_0 *движется по окружности радиусом* v_0/ω_0, *центр которой находится на оси* Oy (рис. 136).

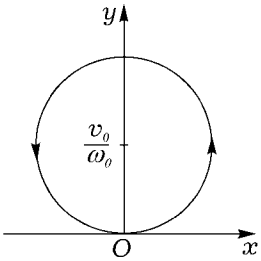

Рис. 136

Множитель связи λ можно найти теперь из (13) *и второго из уравнений системы* (10):

$$\lambda = -m\omega_0 v_0 \cos\omega_0 t. \qquad (14)$$

При известной величине λ можно найти реакцию $\boldsymbol{R}$ связи. Для ее проекций R_x, R_y из (10), (11) *получаем выражения*

$$R_x = \lambda \operatorname{tg}\omega_0 t, \qquad R_y = -\lambda.$$

Подставив в них значение λ из формулы (14), *получим*

$$R_x = -m\omega_0 v_0 \sin\omega_0 t, \qquad R_y = m\omega_0 v_0 \cos\omega_0 t.$$

Реакция $\boldsymbol{R}$ имеет постоянную величину $m\omega_0 v_0$ и направлена к центру окружности, по которой движется центр масс конька.

156. Уравнения Воронца. Система уравнений (1), (6) помимо функций q_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ содержит еще s дополнительных неизвестных — множителей связей λ_β $(\beta = 1, 2, \ldots, s)$. Число уравнений в системе (1), (6) равно $m + s = n + 2s$, т. е. превышает число степеней свободы на удвоенное количество неинтегрируемых связей.

Большое количество уравнений в системе (1), (6) и наличие в ней множителей связей ведет к значительным сложностям при исследовании движения. К тому же, когда целью исследования является только нахождение движения, т. е. определение зависимостей $q_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, вычисление величин λ_β, позволяющих найти реакции связей, является совершенно излишней процедурой.

Для неголономных систем со связями (1) П. В. Воронец получил уравнения, которые по форме близки к уравнениям Лагранжа второго рода и свободны от упомянутых недостатков. Выведем эти уравнения, предполагая, что система склерономна.

В случае склерономной системы величины b_β в уравнениях связей (1) равны нулю, а коэффициенты $b_{\beta j}$ не зависят от времени. Среди m обобщенных скоростей есть n независимых; пусть это будут обобщенные скорости $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$. Тогда из (1) находим

$$\dot{q}_{n+k} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki}\dot{q}_i \quad (k = 1, 2, \ldots, s = m - n), \qquad (15)$$

где α_{ki} — функции от $q_1, q_2, \ldots, q_m$.

Когда система неголономна, то величины

$$A_{ij}^{(k)} = \left(\frac{\partial \alpha_{ki}}{\partial q_j} + \sum_{\mu=1}^{s} \frac{\partial \alpha_{ki}}{\partial q_{n+\mu}} \alpha_{\mu j}\right) - \left(\frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial q_i} + \sum_{\mu=1}^{s} \frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial q_{n+\mu}} \alpha_{\mu i}\right) \tag{16}$$

не могут все одновременно быть тождественно равными нулю[1]. Уравнения движения, содержащие множители связей, запишутся в виде

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i - \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \alpha_{ki} \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}} - \frac{\partial T}{\partial q_{n+k}} = Q_{n+k} + \lambda_k \qquad (k = 1, 2, \dots, s). \end{aligned} \tag{17}$$

Эти уравнения должны рассматриваться совместно с уравнениями связей (15).

Обозначим Θ функцию, получающуюся в результате исключения при помощи равенств (15) величин $\dot q_{n+k}$ $(k = 1, 2, \dots, s)$ из выражения для кинетической энергии T:

$$T(q_1, \dots, q_m, \dot q_1, \dots, \dot q_m, t) = \Theta(q_1, \dots, q_m, \dot q_1, \dots, \dot q_n, t).$$

Согласно (15), справедливо равенство

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot q_i} + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}} \alpha_{ki} \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} + \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ki} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}} + \sum_{k=1}^{s} \frac{d\alpha_{ki}}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}}. \tag{18}$$

Заменив здесь величины $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}$ и $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}}$ на их выражения из уравнений (17), получим, что члены, содержащие множители связей, взаимно уничтожаются, и равенство (18) запишется в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i + \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ki} \frac{\partial T}{\partial q_{n+k}} + \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ki} Q_{n+k} + \sum_{k=1}^{s} \frac{d\alpha_{ki}}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}}. \tag{19}$$

[1]Если бы это было не так, то для всех k имели бы место равенства $q_{n+k} = f_k(q_1, q_2, \dots, q_m)$, т. е. система не была бы неголономной. Действительно, условия $A_{i,j}^{(k)} = 0$ $(i\ j = 1, 2, \dots, n;\ k = 1, 2, \dots, s)$ суть записанные с учетом равенств (15) условия того, что величина $dq_{n+k} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ki} dq_i$ является полным дифференциалом.

Учитывая, что в соответствии с (15)

$$\frac{\partial\Theta}{\partial q_l} = \frac{\partial T}{\partial q_l} + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial q_l} \dot q_j \right) \qquad (l = 1, 2, \ldots, n),$$

из равенства (19) получаем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial\Theta}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial q_i} \dot q_j \right) + Q_i + \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ki} \frac{\partial\Theta}{\partial q_{n+k}} -$$
$$- \sum_{\mu=1}^{s} \alpha_{\mu i} \left(\sum_{k=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial q_{n+\mu}} \dot q_j \right) \right) + \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ki} Q_{n+k} + \sum_{k=1}^{s} \frac{d\alpha_{ki}}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}} \tag{20}$$

или

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial\Theta}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ki} \left(Q_{n+k} + \frac{\partial\Theta}{\partial q_{n+k}} \right) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}} \left[\frac{d\alpha_{ki}}{dt} - \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial q_i} + \sum_{\mu=1}^{s} \frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial q_{n+\mu}} \alpha_{\mu i} \right) \dot q_j \right]. \tag{21}$$

Замечая, что выражение, заключенное в квадратные скобки в соотношении (21), тождественно равно величине

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^{(k)} \dot q_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, s),$$

где величины $A_{ij}^{(k)}$ определены равенствами (16), и вводя для импульсов обозначение

$$\theta_k = \frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, s), \tag{22}$$

получаем окончательно уравнения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial\Theta}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ki} \left(Q_{n+k} + \frac{\partial\Theta}{\partial q_{n+k}} \right) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{s} \theta_k \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^{(k)} \dot q_j \right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{23}$$

Эти уравнения называются *уравнениями Воронца*. Они должны рассматриваться совместно с уравнениями связей (15). Полученная система уравнений движения неголономной системы не содержит множителей связей. Число уравнений равно $n+s$, т. е. совпадает с числом обобщенных координат.

157. Уравнения Чаплыгина. Пусть кинетическая энергия T, коэффициенты α_{ki} ($k=1, 2, \ldots, s$; $i=1, 2, \ldots, n$) в уравнениях связей и обобщенные силы Q_l ($l=1, 2, \ldots, m$) не зависят от обобщенных координат q_{n+k} ($k=1, 2, \ldots, s$). Тогда уравнения (23) запишутся в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot q_i}-\frac{\partial\Theta}{\partial q_i}=Q_i+\sum_{k=1}^{s}\alpha_{ki}Q_{n+k}+\sum_{k=1}^{s}\theta_k\left(\sum_{j=1}^{n}A_{ij}^{(k)}\dot q_j\right) \qquad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{24}$$

где

$$A_{ij}^{(k)}=\frac{\partial\alpha_{ki}}{\partial q_j}-\frac{\partial\alpha_{kj}}{\partial q_i} \qquad (i, j=1, 2, \ldots, n;\ k=1, 2, \ldots, s). \tag{25}$$

Если в выражениях для обобщенных сил Q_l ($l=1, 2, \ldots, m$) и импульсов θ_k ($k=1, 2, \ldots, s$) при помощи уравнений связей (15) исключить обобщенные скорости $\dot q_{n+k}$ ($k=1, 2, \ldots, s$), то получим систему уравнений относительно q_i ($i=1, 2, \ldots, n$), которую можно интегрировать независимо от уравнений связей (15). Эти уравнения впервые были получены Чаплыгиным и носят его имя.

После интегрирования уравнений (24) остальные координаты $q_{n+1}, \ldots, q_m$ найдутся из (15) при помощи квадратур.

Если обобщенные силы потенциальны и потенциал Π не зависит от обобщенных координат q_{n+k}, то уравнения (24) примут вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot q_i}-\frac{\partial\Theta}{\partial q_i}=-\frac{\partial\Pi}{\partial q_i}+\sum_{k=1}^{s}\theta_k\left(\sum_{j=1}^{n}A_{ij}^{(k)}\dot q_j\right) \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{26}$$

Пример 1 (Качение диска по неподвижной горизонтальной плоскости). *Пусть однородный круговой диск катится без скольжения по неподвижной горизонтальной плоскости, опираясь на нее одной точкой своего края. Движение отнесем к неподвижной системе координат $OXYZ$ с началом в некоторой точке O опорной плоскости; ось OZ направлена вертикально вверх* (рис. 137). *Пусть $GXYZ$ — поступательно движущаяся система координат, оси которой параллельны соответствующим осям системы $OXYX$. Система координат $Gxyz$*

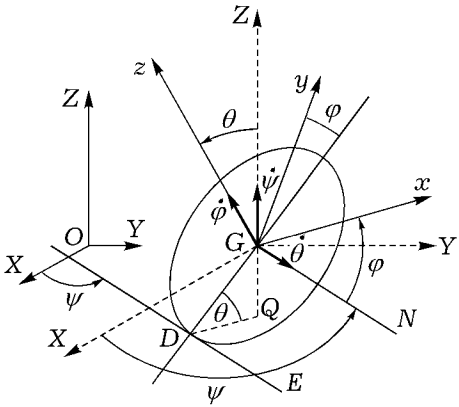

Рис. 137

жестко связана с диском: ее ось Gz перпендикулярна плоскости диска. За обобщенные координаты примем три угла Эйлера и две координаты x, y проекции Q центра тяжести G на опорную плоскость в системе $OXYZ$. Третья координата z центра тяжести есть его расстояние до опорной плоскости. Из рис. 137 *видно, что*

$$z = \rho \sin\theta, \tag{27}$$

где ρ — радиус диска.

Кинетическая и потенциальная энергия диска определяются выражениями

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \qquad \Pi = mg\rho\sin\theta,$$

где m — масса диска, g — ускорение свободного падения, p, q, r — проекция угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ диска на оси Gx, Gy, Gz, являющиеся его главными центральными осями инерции, A, B, C — моменты инерции диска относительно осей Gx, Gy, Gz, причем

$$A = B = \frac{1}{4}m\rho^2, \qquad C = \frac{1}{2}m\rho^2,$$

а p, q, r задаются кинематическими уравнениями Эйлера

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \\ q &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \\ r &= \dot{\psi}\cos\theta + \varphi. \end{aligned} \tag{28}$$

Принимая во внимание, что, согласно (27),

$$\dot{z} = \rho\dot{\theta}\cos\theta, \tag{29}$$

выражение для кинетической энергии диска можно записать в виде

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{8}m\rho^2(1 + 4\cos^2\theta)\dot{\theta}^2 + \\ + \frac{1}{8}m\rho^2\sin^2\theta\dot{\psi}^2 + \frac{1}{4}m\rho^2(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})^2. \end{aligned} \tag{30}$$

Уравнения связей получим из условия отсутствия скольжения. Если скольжения нет, то скорость $\boldsymbol{v}_D$ *точки диска, которой он касается опорной плоскости, равна нулю. Поэтому*

$$\boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \overline{GD} = 0, \tag{31}$$

где $\boldsymbol{v}_G$ *— скорость центра тяжести,* $\overline{GD}$ *— радиус-вектор точки* D *относительно* G.

На рис. 137 *прямая* DE *является касательной к диску в точке* D. *Она параллельна линии узлов* GN. *Прямая* DG *перпендикулярна* DE, *лежит в плоскости, проходящей через оси* GZ *и* Gz, *и составляет угол* φ *с осью* Gy. *В системе координат* $OXYZ$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}'_G &= (\dot{x},\, \dot{y},\, \dot{z}), \\ \overline{GD}' &= \rho(\cos\theta\sin\psi,\, -\cos\theta\cos\psi,\, -\sin\theta), \\ \boldsymbol{\omega}' &= (\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta,\, \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta,\, \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta). \end{aligned} \tag{32}$$

Третья компонента векторной правой части равенства (31) *тождественно равна нулю в силу равенства* (29). *Приравнивание нулю первых компонент дает уравнения связей*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \rho[\dot{\theta}\sin\psi\sin\theta - (\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\cos\psi], \\ \dot{y} &= -\rho[\dot{\theta}\cos\psi\sin\theta + (\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\sin\psi]. \end{aligned} \tag{33}$$

Так как Π, T *и уравнения связей не содержат обобщенных координат* x, y, *то уравнения движения диска могут быть записаны в форме уравнений Чаплыгина.*

Для удобства вычислений введем временно обозначения

$$q_1 = \theta,\ q_2 = \varphi,\ q_3 = \psi,\ q_4 = x,\ q_5 = y.$$

Тогда в обозначениях п. 156, 157 *имеем*

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \rho\sin q_1\sin q_3, & \alpha_{12} &= -\rho\cos q_3, \\ \alpha_{13} &= -\rho\cos q_1\cos q_3, & \alpha_{21} &= -\rho\sin q_1\cos q_3, \\ \alpha_{22} &= -\rho\sin q_3, & \alpha_{23} &= -\rho\cos q_1\sin q_3. \end{aligned}$$

Отсюда и из (25) *следует, что*

$$A_{23}^{(1)} = -A_{32}^{(1)} = \rho \sin q_3, \qquad A_{23}^{(2)} = -A_{32}^{(2)} = -\rho \cos q_3.$$

Остальные величины $A_{ij}^{(k)}$ $(i, j = 1, 2, 3;\ k = 1, 2)$ *тождественно равны нулю.*

Для обобщенных импульсов θ_1, θ_2 *имеем выражения*

$$\theta_1 = m\dot{x} = m\rho(\sin q_1 \sin q_3 \dot{q}_1 - \cos q_3 \dot{q}_2 - \cos q_1 \cos q_3 \dot{q}_3),$$
$$\theta_2 = m\dot{y} = -m\rho(\sin q_1 \cos q_3 \dot{q}_1 + \sin q_3 \dot{q}_2 + \cos q_1 \sin q_3 \dot{q}_3).$$

Если теперь возвратиться к исходным обозначениям, то уравнения Чаплыгина запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} &= -mg\rho \cos\theta, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} &= m\rho^2 \sin\theta\dot{\theta}\dot{\psi}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial \Theta}{\partial \psi} &= -m\rho^2 \sin\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}. \end{aligned} \tag{34}$$

Здесь Θ *есть кинетическая энергия* (30), *в которой величины* $\dot{x}$, $\dot{y}$ *исключены при помощи уравнений связей* (33):

$$\Theta = \frac{5}{8}m\rho^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{8}m\rho^2 \sin^2\theta\dot{\psi}^2 + \frac{3}{4}m\rho^2(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})^2. \tag{35}$$

Подставив функцию Θ *в* (34), *получим систему уравнений движения*

$$\begin{gathered} \ddot{\theta} + \sin\theta\cos\theta\dot{\psi}^2 + \frac{6}{5}\sin\theta\dot{\varphi}\dot{\psi} + \frac{4}{5}\frac{g}{\rho}\cos\theta = 0, \\ \frac{d}{dt}(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) = \frac{2}{3}\sin\theta\dot{\theta}\dot{\psi}, \\ \frac{d}{dt}[(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\cos\theta + \frac{1}{6}\sin^2\theta\dot{\psi}] = -\frac{2}{3}\sin\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}. \end{gathered} \tag{36}$$

Если эта система проинтегрирована, то движение центра тяжести диска найдется при помощи конечного соотношения (27) *и двух квадратур из* (33).

Уравнения движения (36) *допускают частные решения, для которых* $\theta = \theta_0 = \mathrm{const}$. *При этом*

$$\dot{\varphi} = \omega_1 = \mathrm{const}, \qquad \dot{\psi} = \omega_2 = \mathrm{const}, \tag{37}$$

а угол θ_0 удовлетворяет следующему соотношению, вытекающему из первого уравнения системы (36):

$$\cos\theta_0 \sin\theta_0 \omega_2^2 + \frac{6}{5}\sin\theta_0 \omega_1 \omega_2 + \frac{4}{5}\frac{g}{\rho}\cos\theta_0 = 0. \tag{38}$$

Если $\theta_0 = \pi/2$, то это уравнение переходит в условие $\omega_1\omega_2 = 0$. Отсюда следует, что существуют следующие движения диска:

$$\theta_0 = \pi/2, \qquad \omega_1 = 0, \qquad \omega_2 \neq 0, \tag{39}$$

$$\theta_0 = \pi/2, \qquad \omega_1 \neq 0, \qquad \omega_2 = 0, \tag{40}$$

$$\theta_0 = \pi/2, \qquad \omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 0, \tag{41}$$

В движении (39) *диск вращается с произвольной постоянной угловой скоростью ω_2 вокруг одного из своих диаметров, который неподвижен и занимает вертикальное положение. В движении* (40) *диск катится по прямой, при этом плоскость диска вертикальна, а центр тяжести движется с произвольной постоянной скоростью $|\omega_1\rho|$. Движение* (41) *соответствует покою диска в вертикальной плоскости.*

В общем случае, когда $\theta_0 \neq \pi/2$, величины ω_1, ω_2, θ_0 связаны между собой соотношением (38), *которое, следовательно, определяет двухпараметрическое семейство движений диска. Для этих движений из уравнений связей* (33) *получаем*

$$x = \alpha - \rho\frac{\omega_2\cos\theta_0 + \omega_1}{\omega_2}\sin\psi, \quad y = \beta + \rho\frac{\omega_2\cos\theta_0 + \omega_1}{\omega_2}\cos\psi,$$

где α и β — постоянные интегрирования, определяемые по начальным условиям, а $\psi = \omega_2 t + \psi_0$. Отсюда и из (27) *следует, что центр тяжести диска движется по окружности, расположенной в горизонтальной плоскости и имеющей центр в точке $(\alpha, \beta, \rho\sin\theta_0)$; радиус этой окружности*

$$R = \rho\left|\frac{\omega_2\cos\theta_0 + \omega_1}{\omega_2}\right|.$$

Отсюда и из рис. 137 *следует, что точка D касания во время движения диска описывает на опорной плоскости OXY окружность с центром в точке (α, β) и радиусом, равным $\rho|\omega_1/\omega_2|$.*

В самом общем случае аналитическое исследование движения диска приводится к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка и квадратурам. Чтобы показать это, заметим, что $\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi = r$, и, рассматривая промежуток времени, на котором $\dot\theta \neq 0$, перейдем во втором и третьем уравнениях системы (36)

к новой независимой переменной θ. Тогда получим

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{2}{3}\sin\theta\dot{\psi}, \quad \frac{d}{d\theta}\left(r\cos\theta + \frac{1}{6}\sin^2\theta\dot{\psi}\right) = -\frac{2}{3}\sin\theta(r - \dot{\psi}\cos\theta). \quad (42)$$

Исключив из этих уравнений величину $\dot{\psi}$, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\frac{dr}{d\theta} - \frac{4}{3}r = 0,$$

которое, если положить $u = \cos^2\theta$, принимает вид

$$u(1-u)\frac{d^2r}{du^2} + \frac{1}{2}(1-3u)\frac{dr}{du} - \frac{1}{3}r = 0.$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка представляет собой известное из теории дифференциальных уравнении гипергеометрическое уравнение Гаусса. Его интегрирование дает величину r как функцию угла θ. Из первого уравнения системы (42) *и равенства $\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} = r$ определяются затем $\dot{\psi}$ и $\dot{\varphi}$ как функции угла θ. Таким образом, задача нахождения углов Эйлера сводится к нахождению θ как функции времени, так как $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ найдутся при известной функции $\theta(t)$ посредством квадратур.*

Зависимость $\theta(t)$ также получается посредством квадратур. Действительно, уравнения (34) *имеют интеграл энергии*

$$\Theta + \Pi = h = \text{const}. \quad (43)$$

Это следует из того (см. п. 143), *что уравнения* (34) *можно рассматривать как уравнения движения склерономной системы под действием гироскопических сил $Q_\varphi = m\rho^2\sin\theta\dot{\theta}\dot{\psi}$, $Q_\psi = -m\rho^2\sin\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}$ и потенциальной силы $Q_\theta = -mg\rho\cos\theta$ с потенциалом, не зависящим от времени.*

Подставив в равенство (43) *величины $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$ как функции угла θ и разрешив его относительно $\dot{\theta}$, получим $\dot{\theta}$ как функцию θ. Отсюда t выразится через θ при помощи одной квадратуры, обратив которую найдем $\theta = \theta(t)$.*

158. Уравнения Аппеля. Аппель предложил уравнения движения, которые не содержат множителей связей и применимы как к голономным, так и к неголономным системам с неинтегрируемыми связями вида (1). Получим эти уравнения в псевдокоординатах (см. п. 17). Пусть псевдоскорости $\dot{\pi}_i$ определены по формулам (29) п. 17:

$$\dot{\pi}_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij}(q_1, q_2, \ldots, q_m, t)\dot{q}_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \quad (44)$$

Для получения уравнений Аппеля выразим в псевдокоординатах общее уравнение динамики

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu)\cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{45}$$

Подставив в равенство

$$\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{j=1}^{m} Q_j \delta q_j,$$

где Q_j — обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_j, вместо величин δq_j их выражения через $\delta\pi_i$ по формулам (32) п. 17, получим элементарную работу активных сил в виде

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{j=1}^{m} Q_j \sum_{i=1}^{n} d_{ij}\delta\pi_i = \sum_{i=1}^{n}\Pi_i \delta\pi_i, \tag{46}$$

где

$$\Pi_i = \Pi_i(q_1, \ldots, q_m, \dot\pi_i, \ldots, \dot\pi_n, t) = \sum_{j=1}^{m} d_{ij}Q_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{47}$$

Величины Π_i называются *обобщенными силами, соответствующими псевдокоординатам* π_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Для получения элементарной работы сил инерции в псевдокоординатах получим, при помощи равенств (35) п. 17, следующее выражение:

$$\begin{aligned} -\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu &= -\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_\nu \cdot \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{w}_\nu}{\partial \ddot\pi_i}\delta\pi_i = \\ &= -\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_\nu \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}_\nu}{\partial \ddot\pi_i}\right)\delta\pi_i. \end{aligned} \tag{48}$$

Если ввести функцию S по формуле

$$S = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_\nu^2, \tag{49}$$

то равенство (48) можно записать так:

$$-\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial \ddot\pi_i}\delta\pi_i. \tag{50}$$

Функция S называется *энергией ускорений.* В общем случае она является функцией от $q_1, \ldots, q_m, \dot{\pi}_1, \ldots, \dot{\pi}_n, \ddot{\pi}_1, \ldots, \ddot{\pi}_n, t$.

Из равенств (46) и (50) следует, что общее уравнение динамики (45) в псевдокоординатах имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_i} - \Pi_i \right) \delta\pi_i = 0. \tag{51}$$

Так как величины $\delta\pi_i$ могут принимать произвольные значения, то отсюда следуют уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_i} = \Pi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{52}$$

Эти уравнения называются *уравнениями Аппеля.* Они должны рассматриваться совместно с s уравнениями связей (1) и n соотношениями (44), вводящими псевдоскорости.

Аналогично тому, как в п. 140 доказана разрешимость уравнений Лагранжа относительно обобщенных ускорений $\ddot{q}_i$, можно показать, что уравнения Аппеля (52) разрешимы относительно псевдоускорений $\ddot{\pi}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Кроме того, уравнения (1) и (44), по самому выбору псевдоскоростей, разрешимы относительно $\dot{q}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ (см. уравнения (30) п. 17). Таким образом, приходим к $m + n$ уравнениям, разрешенным относительно производных неизвестных функций $q_1, \ldots, q_m, \dot{\pi}_1, \ldots, \dot{\pi}_n$. Если заданы начальные значения $q_1^0, \ldots, q_m^0, \dot{\pi}_1^0, \ldots, \dot{\pi}_n^0$, то, при не очень обременительных для механики условиях на силы, дальнейшее движение системы будет однозначно определено. Но по величинам $q_1^0, \ldots, q_m^0, \dot{\pi}_1^0, \ldots, \dot{\pi}_n^0$ из формул (30) п. 17 однозначно определяются совместимые со связями (1) начальные значения обобщенных скоростей $\dot{q}_1^0, \ldots, \dot{q}_m^0$. А по величинам $q_j^0, \dot{q}_j^0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ однозначно определяются совместимые со связями начальные положения и начальные скорости точек системы в декартовой системе координат. Отсюда следует, что если заданы не противоречащие конечным и дифференциальным связям положения и скорости точек системы, то дальнейшее их движение однозначно определено.

Если в качестве величин $\dot{\pi}_i$ приняты обобщенные скорости $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то соответствующие обобщенные силы Π_i равны величинам Q'_i, вычисляемым по формулам (13) п. 63. Энергия ускорений S в этом случае будет функцией от $q_1, \ldots, q_m, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, \ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_n, t$, и уравнения Аппеля

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} = Q'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{53}$$

вместе с уравнениями связей (1) образуют систему уравнений, определяющих движение рассматриваемой неголономной системы. Число уравнений равно $n + s = m$, т. е., как и в случае уравнений Воронца, совпадает с числом обобщенных координат. Если система голономна, то $m = n$, $Q'_i = Q_i$, и уравнения (53) будут просто другой формой записи уравнений Лагранжа второго рода.

Для получения уравнений Аппеля нужно вычислить функцию S — энергию ускорений, определяемую по формуле (49). Это довольно громоздкая процедура. Поэтому, как правило, выписывание уравнений Аппеля является более трудоемкой процедурой по сравнению с получением уравнений Воронца и Чаплыгина, где вместо S надо вычислять кинетическую энергию T.

В качестве примера используем уравнения Аппеля для доказательства достаточности условий принципа виртуальных перемещений для равновесия системы (п. 62).

Пусть условия (3) и (4) п. 62 выполнены и при $t = t_0$ имеем $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_{\nu 0}$, $\boldsymbol{v}_\nu = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$. Покажем, что тогда на всем промежутке времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ система находится в состоянии равновесия, т. е. для этого промежутка времени $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_{\nu 0}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$.

Из (44), (46) и условия (4) п. 62 следует, что при $\boldsymbol{r}_\nu \equiv \boldsymbol{r}_{\nu 0}$ $\Pi_i(q_{10}, \ldots, q_{m0}\ 0, \ldots, 0, t) \equiv 0$ для $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ (здесь $q_{10}, \ldots, q_{m0}$ — значения обобщенных координат, отвечающие положению равновесия, задаваемому в декартовой системе координат радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_{\nu 0}$ точек системы). С другой стороны, величины

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_i} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_\nu \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}_\nu}{\partial \ddot{\pi}_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

при $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_{\nu 0}$ также равны нулю, так как тогда $\boldsymbol{w}_\nu \equiv 0$. Следовательно, уравнения Аппеля (52) имеют частное решение $q_j = q_{j0}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, отвечающее положению равновесия $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_{\nu 0}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$.

Достаточность условий принципа виртуальных перемещений следует теперь из принципа детерминированности движения Ньютона — Лапласа (см. п. 45), так как, согласно этому принципу, принимаемому в классической механике, движение системы однозначно определяется положениями и скоростями ее точек в начальный момент времени.

159. Вычисление энергии ускорений. Аналог теоремы Кенига. Пусть $\boldsymbol{w}_C$ — абсолютное ускорение центра масс, $\boldsymbol{w}_\nu$ — абсолютное ускорение точки P_ν системы, а $\boldsymbol{w}_{\nu r}$ — ускорение этой точки в ее движении относительно центра масс. Тогда для всех точек системы

$$\boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{w}_C + \boldsymbol{w}_{\nu r}. \tag{54}$$

Вычислим энергию ускорений

$$S = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_\nu^2. \tag{55}$$

Подставив (54) в формулу (55), получим

$$S = \frac{1}{2}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\right)\boldsymbol{w}_C^2 + \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_{\nu r}\right)\cdot \boldsymbol{w}_C + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_{\nu r}^2. \tag{56}$$

Так как $\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu = M$, а $\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_{\nu r} = M\boldsymbol{w}_{Cr} = 0$, то из (56) получаем

$$S = \frac{1}{2}Mw_C^2 + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu w_{\nu r}^2, \tag{57}$$

т. е. *энергия ускорений системы равна сумме энергии ускорений, которую имела бы материальная точка, расположенная в центре масс системы и имеющая массу, равную массе системы, и энергии ускорений в движении системы относительно центра масс.*

Полученное утверждение является аналогом теоремы Кенига для кинетической энергии (см. п. 83).

160. Энергия ускорений твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки. Пусть $Oxyz$ — жестко связанная с телом система координат, начало которой совпадает с неподвижной точкой O тела. Оси Ox, Oy, Oz направлены по главным осям инерции тела для точки O. Положение частицы m_ν тела определяется ее радиусом-вектором $\boldsymbol{r}_\nu$, $\boldsymbol{r}'_\nu = (x_\nu, y_\nu, z_\nu)$. Пусть $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела, $\boldsymbol{\omega}' = (p, q, r)$, а $\boldsymbol{\varepsilon}$ — его угловое ускорение. Так как абсолютная производная вектора $\boldsymbol{\omega}$ совпадает с его относительной производной, то

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = (\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}). \tag{58}$$

Согласно п. 24, ускорение частицы m_ν определяется по формуле

$$\boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_\nu + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_\nu),$$

или

$$\boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_\nu + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\cdot \boldsymbol{r}_\nu) - \boldsymbol{r}_\nu\omega^2. \tag{59}$$

Отсюда получаем выражения для проекций ускорения $\boldsymbol{w}_\nu$ на оси Ox, Oy, Oz:

$$\begin{aligned} w_{\nu x} &= -x_\nu(q^2+r^2) + y_\nu(qp-\dot r) + z_\nu(pr+\dot q), \\ w_{\nu y} &= -y_\nu(r^2+p^2) + z_\nu(rq-\dot p) + x_\nu(qp+\dot r), \\ w_{\nu z} &= -z_\nu(p^2+q^2) + x_\nu(pr-\dot q) + y_\nu(rq+\dot p). \end{aligned} \tag{60}$$

Если N — число частиц, на которые мы мысленно разбили тело, то выражение для энергии ускорений имеет вид

$$S = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(w_{\nu x}^2 + w_{\nu y}^2 + w_{\nu z}^2).$$

Подставим сюда выражения (60) и произведем некоторые преобразования с учетом того, что Ox, Oy, Ox — главные оси инерции и, следовательно,

$$J_{xy} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_\nu y_\nu = 0,\ J_{xz} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_\nu z_\nu = 0,\ J_{yz} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu y_\nu z_\nu = 0.$$

Если еще в S отбросить несущественные для уравнений Аппеля слагаемые, не зависящие от p, q, r, то получим

$$\begin{aligned} S = {} & \frac{1}{2}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_\nu^2\right)(\dot r^2 + 2qp\dot r + \dot q^2 - 2pr\dot q) + \\ & + \frac{1}{2}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu y_\nu^2\right)(\dot p^2 + 2rq\dot p + \dot r^2 - 2qp\dot r) + \\ & + \frac{1}{2}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu z_\nu^2\right)(\dot q^2 + 2pr\dot q + \dot p^2 - 2rq\dot p). \end{aligned}$$

или

$$S = \frac{1}{2}(A\dot p^2 + B\dot q^2 + C\dot r^2) + (C-B)qr\dot p + (A-C)rp\dot q + (B-A)pq\dot r, \tag{61}$$

где A, B, C — моменты инерции тела относительно осей Ox, Oy, Oz соответственно.

Пример 1 (Вывод динамических уравнений Эйлера при помощи уравнений Аппеля). *Пусть M_x, M_y, M_z — проекции момента $\boldsymbol{M}_O$ внешних сил относительно точки O на оси Ox, Oy, Oz. В качестве*

псевдоскоростей примем величины $\dot{\pi}_1 = p$, $\dot{\pi}_2 = q$, $\dot{\pi}_3 = r$. *Для элементарной работы внешних сил имеем выражение*

$$\delta A = \boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{\omega}\, dt = M_x p\, dt + M_y q\, dt + M_z r\, dt = M_x \delta\pi_1 + M_y \delta\pi_2 + M_z \delta\pi_3.$$

Поэтому обобщенные силы Π_i, *соответствующие псевдокоординатам* π_i, *вычисляются по формулам*

$$\Pi_1 = M_x, \quad \Pi_2 = M_y, \quad \Pi_3 = M_z. \tag{62}$$

Уравнения (52) *с учетом выражений* (61) *и* (62) *непосредственно приводят к динамическим уравнениям Эйлера* (*см. уравнения* (4) *п.* 97).

Пример 2 (Качение шара по плоскости). *Пусть однородный шар движется по неподвижной горизонтальной плоскости без скольжения. Движение шара отнесем к неподвижной системе координат* $OXYZ$ *с началом в некоторой точке* O *плоскости, ось* OZ *направим вертикально вверх. Пусть* ω_X, ω_Y, ω_Z — *проекции угловой скорости шара на оси* OX, OY, OZ, *а* p, q, r — *проекции того же вектора на оси* Gx, Gy, Gz *жестко связанной с шаром системы координат с началом в центре шара.*

Пусть x, y, z — *координаты центра шара в системе* $OXYZ$; $z = a$, *где* a — *радиус шара. Условие отсутствия скольжения* (*равенство нулю скорости точки* D *шара, которой он касается плоскости*) *приводит к соотношениям*

$$\dot{x} = \omega_Y a, \qquad \dot{y} = -\omega_X a. \tag{63}$$

Момент инерции шара относительно любого диаметра равен $\frac{2}{5}ma^2$, *где* m — *масса шара. Из* (57) *и* (61) *получаем выражение для энергии ускорений:*

$$S = \frac{1}{2}m(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2) + \frac{1}{5}ma^2(\dot{p}^2 + \dot{q}^2 + \dot{r}^2). \tag{64}$$

Введем псевдоскорости по формулам

$$\dot{\pi}_1 = \omega_X, \qquad \dot{\pi}_2 = \omega_Y, \qquad \dot{\pi}_3 = \omega_Z. \tag{65}$$

Из (63) *тогда получим*

$$\ddot{x} = a\ddot{\pi}_2, \qquad \ddot{y} = -a\ddot{\pi}_1. \tag{66}$$

Пусть ε — *угловое ускорение шара. Тогда, замечая, что*

$$\dot{p}^2 + \dot{q}^2 + \dot{r}^2 = \varepsilon^2 = \dot{\omega}_X^2 + \dot{\omega}_Y^2 + \dot{\omega}_Z^2 = \ddot{\pi}_1^2 + \ddot{\pi}_2^2 + \ddot{\pi}_3^2$$

и пользуясь равенствами (66), *получаем из* (64) *такое окончательное выражение для энергии ускорений:*

$$S = \frac{1}{10} m a^2 [7(\ddot{\pi}_1^2 + \ddot{\pi}_2^2) + 2\ddot{\pi}_3^2].$$

Так как обобщенные силы Π_i $(i = 1, 2, 3)$ *равны нулю, то из уравнений Аппеля* $\partial S / \partial \ddot{\pi}_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ *следует, что* $\ddot{\pi}_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, *или* $\omega_X = \mathrm{const}$, $\omega_Y = \mathrm{const}$, $\omega_Z = \mathrm{const}$. *Таким образом, из уравнений Аппеля сразу следует, что угловая скорость при движении остается неизменной. Другим способом этот вывод получен в п.* 113.

Глава XI
Интегрирование уравнений динамики

§ 1. Множитель Якоби

161. Множитель системы уравнений. Дифференциальное уравнение для множителя. В данной главе будут получены некоторые общие утверждения, относящиеся к интегрированию уравнений динамики. Сначала рассмотрим нужные в дальнейшем вспомогательные вопросы теории дифференциальных уравнений.

Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_k}{X_k}, \tag{1}$$

где X_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — заданные функции переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Всякая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, которая постоянна при $x_1, x_2, \ldots, x_k$, удовлетворяющих системе (1), называется ее *первым интегралом.* Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — первый интеграл, то дифференциал df в силу (1) тождественно равен нулю, т. е.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_k}dx_k = 0$$

в силу уравнений (1). Это означает, что необходимое и достаточное условие того, что функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ является первым интегралом, записывается в виде равенства

$$X(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1}X_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}X_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_k}X_k = 0. \tag{2}$$

Обозначение $X(f)$ введено для краткости записи. Очевидно, что если $f_1, f_2, \ldots, f_l$ $(l \leqslant k-1)$ — первые интегралы, то и любая функция $F(f_1, f_2, \ldots, f_l)$ тоже будет первым интегралом системы (1). Если известны l независимых первых интегралов

$$f_1 = c_1,\ f_2 = c_2,\ \ldots,\ f_l = c_l \qquad (c_j = \text{const};\ j = 1, 2, \ldots, l), \tag{3}$$

то их можно использовать для понижения порядка системы (1) на l единиц. В самом деле, если $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_l$ независимы, то ранг матрицы

$$\left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_l}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_l}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_l}{\partial x_k} \end{matrix}\right\| \tag{4}$$

равен l. Не ограничивая общности, будем тогда считать, что отличен от нуля определитель l-го порядка, составленный из первых l столбцов матрицы (4), т. е. якобиан функций $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_l$ по переменным $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_l$:

$$\frac{\partial(f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_l)}{\partial(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_l)} = \left|\begin{matrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_l} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_l} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_l}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_l}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_l}{\partial x_l} \end{matrix}\right| \neq 0. \tag{5}$$

При выполнении этого неравенства соотношения (3) можно разрешить относительно величин $x_1, x_2, \ldots, x_l$, в результате чего эти величины выразятся через переменные $x_{l+1}, \ldots, x_k$ и константы $c_1, c_2, \ldots, c_l$. Подставив их в функции $X_{l+1}, \ldots, X_k$ и обозначив получающиеся в результате этой подстановка функции $X^*_{l+1}, \ldots, X^*_k$, где X^*_j $(j = l+1, \ldots, k)$ — функции от $x_{l+1}, \ldots, x_k$ и $c_1, c_2, \ldots, c_l$, мы сведем систему (1) к системе уравнений

$$\frac{dx_{l+1}}{X^*_{l+1}} = \ldots = \frac{dx_k}{X^*_k},$$

порядок которой на l единиц меньше порядка исходной системы (1). Система (1) может иметь только $k-1$ независимых первых интегралов. Если они известны, то соотношения

$$f_1 = c_1,\ f_2 = c_2,\ \ldots,\ f_{k-1} = c_{k-1} \tag{6}$$

дают общий интеграл системы дифференциальных уравнений (1). Всякий же другой интеграл f будет функцией независимых интегралов $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_{k-1}$. Для доказательства этого утверждения на-

до проверить, что якобиан функций $f,\ f_1,\ \ldots,\ f_{k-1}$ по переменным $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$ равен нулю:

$$\frac{\partial(f,\ f_1,\ \ldots,\ f_{k-1})}{\partial(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k)} = 0. \tag{7}$$

Действительно, если $f,\ f_1,\ \ldots,\ f_{k-1}$ — первые интегралы, то

$$X(f) = X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_k\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0,$$

$$X(f_1) = X_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \ldots + X_k\frac{\partial f_1}{\partial x_k} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X(f_{k-1}) = X_1\frac{\partial f_{k-1}}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial f_{k-1}}{\partial x_2} + \ldots + X_k\frac{\partial f_{k-1}}{\partial x_k} = 0.$$

Эта система k линейных однородных уравнений относительно $X_1, X_2, \ldots, X_k$ должна иметь нетривиальное решение. Следовательно, выполняется равенство (7). Что и требовалось доказать.

Разложив якобиан, стоящий в левой части равенства (7), по элементам первой строки, представим это равенство в виде

$$\Delta_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \Delta_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \Delta_k\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0, \tag{8}$$

где Δ_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)$ есть алгебраическое дополнение i-го элемента первой строки якобиана.

Условие (8) означает, что f — функция первых интегралов $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_{k-1}$. Если f — первый интеграл, то выполнено условие (8), а если выполнено (8), то f — функция $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_{k-1}$ и, следовательно, является первым интегралом. Поэтому равенство (8) является необходимым и достаточным условием того, что (при известных первых интегралах $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_{k-1}$) f есть первый интеграл. Последнее означает, что условия (2) и (8) эквивалентны. Поэтому соответствующие коэффициенты при производных $\partial f/\partial x_i$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)$ в равенствах (2) и (8) пропорциональны, т. е. существует функция $M(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_k)$ такая, что

$$\Delta_i = MX_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k). \tag{9}$$

Функция M называется *множителем Якоби* или просто *множителем* системы уравнений (1).

В равенство (9) входят интегралы $f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}$. Однако можно получить дифференциальное уравнение для M, которое не содержит $f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}$. Покажем, что множитель M удовлетворяет линейному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial(MX_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(MX_2)}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial(MX_k)}{\partial x_k} = 0. \tag{10}$$

В самом деле, если в соответствии с (9) вместо величин MX_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ подставить в (10) их выражения Δ_i, то после проведения содержащихся в (10) дифференцирований получим, что левая часть равенства (10) представляет собой совокупность слагаемых, каждое из которых есть произведение производной второго порядка вида $\partial^2 f_s/\partial x_i \partial x_j$ $(i \neq j)$ на $k-2$ частных производных первого порядка. Поэтому, чтобы показать справедливость равенства (10), достаточно убедиться в том, что его левая часть не содержит ни одной производной второго порядка. Возьмем, например, производную $\partial^2 f_1/\partial x_1 \partial x_2$. Она содержится в двух слагаемых. В одном слагаемом при $\partial^2 f_1/\partial x_1 \partial x_2$ будет коэффициент при $\partial f_1/\partial x_2$ в Δ_1, т. е. определитель

$$\frac{\partial(f_2, f_3, \ldots, f_{k-1})}{\partial(x_3, x_4, \ldots, x_k)}, \tag{11}$$

а во втором — коэффициент при $\partial f_1/\partial x_1$ в Δ_2, т. е. определитель (11), взятый с противоположным знаком. Следовательно, сумма упомянутых слагаемых равна нулю. То же самое справедливо и для остальных слагаемых.

Любое решение уравнения (10) принято называть *множителем*. Справедливо следующее утверждение: *частное двух множителей является первым интегралом системы* (1).

В самом деле, пусть M_1 и M_2 — множители, т. е. решения уравнения (10). Тогда справедливы равенства

$$\sum_{i=1}^{k} \left(M_1 \frac{\partial X_i}{\partial x_i} + X_i \frac{\partial M_1}{\partial x_i} \right) = 0, \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \left(M_2 \frac{\partial X_i}{\partial x_i} + X_i \frac{\partial M_2}{\partial x_i} \right) = 0. \tag{13}$$

Умножив первое из этих равенств на $-M_2$, а второе на M_1 и сложив результаты, получим

$$\sum_{i=1}^{k} X_i \left(M_1 \frac{\partial M_2}{\partial x_i} - M_2 \frac{\partial M_1}{\partial x_i} \right) = M_1^2 \sum_{i=1}^{k} X_i \frac{\partial \left(\frac{M_2}{M_1} \right)}{\partial x_i} = M_1^2 X \left(\frac{M_2}{M_1} \right) = 0.$$

Следовательно, M_2/M_1 действительно является первым интегралом. Верно и обратное: *произведение какого-либо множителя на первый интеграл системы уравнений* (1) *также является множителем.* В этом легко убедиться непосредственной проверкой.

Для дальнейшего приложения теории множителя к уравнениям динамики важно заметить, что из (10) следует, что если $\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0$, то $M = 1$ является множителем.

162. Инвариантность множителя. Последний множитель Якоби. Сделаем в системе уравнений (1) замену переменных, введя вместо $x_1, x_2, \ldots, x_k$ переменные $y_1, y_2, \ldots, y_k$ по формулам

$$x_i = x_i(y_1, y_2, \ldots, y_k) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{14}$$

Будем считать, что якобиан

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_k)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_k)} \tag{15}$$

отличен от нуля. Тогда замена переменных (14) является обратимой. Для получения преобразованной системы уравнений введем вспомогательную переменную t так, чтобы каждое из отношений dx_i/X_i равнялось ее дифференциалу dt. Тогда система (1) запишется так:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_k) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{16}$$

Рассматривая каждую из величин y_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ как сложную функцию t: $y_i(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t))$, имеем

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} X_j = X(y_i).$$

Выраженную через $y_1, y_2, \ldots, y_k$ величину $X(y_i)$ обозначим Y_i. Тогда в новых переменных система уравнений (1) будет такой:

$$\frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2} = \ldots = \frac{dy_k}{Y_k}. \tag{17}$$

Отметим, что выражение $X(f)$ инвариантно в том смысле, что

$$X(f) = \sum_{j=1}^{k} Y_j \frac{\partial f}{\partial y_j} = Y(f). \tag{18}$$

В самом деле,

$$X(f) = \sum_{i=1}^{k} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{k} X_i \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{k} X_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f}{\partial y_j} = \sum_{j=1}^{k} Y_j \frac{\partial f}{\partial y_j} = Y(f).$$

Равенство (18) показывает, в частности, что интеграл исходной системы уравнений (1), будучи записанным в новых переменных, является интегралом преобразованной системы (17).

Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}$ — независимые первые интегралы системы (1) и f — произвольная функция, а M_0 — какой-либо множитель, удовлетворяющий тождеству[1]

$$M_0 X(f) = \frac{\partial(f, f_1, \ldots, f_{k-1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_k)}. \tag{19}$$

Умножив обе части этого тождества на определитель (15), получим

$$M_0 \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_k)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_k)} X(f) = \frac{\partial(f, f_1, \ldots, f_{k-1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_k)} \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_k)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_k)}.$$

Если воспользоваться инвариантностью выражения $X(f)$ и правилом умножения функциональных определителей[2], то последнее равенство можно записать так:

$$M_0 \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_k)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_k)} Y(f) = \frac{\partial(f, f_1, \ldots, f_{k-1})}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_k)}.$$

Отсюда следует, что функция

$$M_0^* = M_0 \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_k)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_k)} \tag{20}$$

является множителем преобразованной системы уравнений (17). Пусть теперь M — произвольный множитель, т. е. какое-либо решение уравнения в частных производных (10), а M_0 — множитель из тождества (19). Согласно п. 160,

$$M = M_0 F,$$

[1] См. определение множителя системы уравнений (1) при помощи равенств (2), (7)–(9).

[2] См. гл. 3 книги: Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 1, ч. 1, М.; Л.: ГТТИ, 1933.

где F — первый интеграл системы уравнений (1) (а также и системы (17)). Умножив обе части этого равенства на определитель (15) и воспользовавшись формулой (20), получим

$$M\frac{\partial(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k)}{\partial(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k)} = M_0\frac{\partial(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k)}{\partial(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k)}F = M_0^*F. \qquad (21)$$

Но мы показали, что M_0^* — множитель для переменных $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k$. А так как F — первый интеграл, то, согласно п. 161, функция M_0^*F также является множителем.

Таким образом, мы доказали теорему об инвариантности множителя: *если M — множитель для переменных $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$, то его произведение на якобиан* (15) *есть множитель для новых переменных $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k$.*

Свойство инвариантности является основным для практического применения теории множителя. Предположим, что известны $k-2$ независимых первых интеграла системы дифференциальных уравнений (1)

$$f_j = c_j \quad (c_j = \text{const};\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k-2),$$

т. е. для получения общего интеграла недостает одного первого интеграла.

Введем новые переменные $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k$ по формулам

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = f_1, \ldots, \quad y_k = f_{k-2}.$$

Тогда при $i \geqslant 3$ $Y_i = X(y_i)$ и в новых переменных система уравнений (1) станет такой:

$$\frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2} = \frac{dy_3}{0} = \ldots = \frac{dy_k}{0}, \qquad (22)$$

т. е. сводится к одному уравнению

$$Y_2dy_1 - Y_1dy_2 = 0, \qquad (23)$$

в котором $y_3, \ldots, y_k$ рассматриваются как постоянные.

Если бы был известен множитель M для переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$, то, согласно теореме об инвариантности множителя, функция

$$M^* = M\frac{\partial(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k)}{\partial(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k)} \qquad (24)$$

была бы множителем для переменных $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k$, т. е. удовлетворяла бы уравнению

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial(M^*Y_i)}{\partial y_i} = 0,$$

которое с учетом того, что $Y_i = 0$ при $i \geqslant 3$, имеет вид

$$\frac{\partial(M^*Y_1)}{\partial y_1} + \frac{\partial(M^*Y_2)}{\partial y_2} = 0. \tag{25}$$

Последнее равенство означает, что функция M^* является интегрирующим множителем Эйлера для уравнения (23), т. е. выражение $M^*(Y_2 dy_1 - Y_1 dy_2)$ будет полным дифференциалом. Следовательно, недостающий первый интеграл может быть записан в виде

$$\int M^*(Y_2 dy_1 - Y_1 dy_2) = \text{const}.$$

Функция M^* носит название *последнего множителя*, или *последнего множителя Якоби.*

Таким образом, если для системы (1) известен какой-либо множитель, то ее интегрирование требует нахождения не $k-1$, а лишь $k-2$ независимых первых интегралов. Нахождение последнего недостающего интеграла сводится к квадратуре.

Пример 1 (Качение неоднородного шара по плоскости[1]). *Рассмотрим движение шара по неподвижной горизонтальной плоскости. Шар считаем неоднородным, его центр масс совпадает с геометрическим центром, движение происходит без скольжения.*

Движение отнесем к системе $Gxyz$, образованной главными центральными осями инерции. Пусть a — радиус, A, B, C — моменты инерции относительно осей Gx, Gy, Gz, а m — масса шара. Если $\boldsymbol{v}' = (v_x,\ v_y,\ v_z)$ — скорость центра шара, а $\boldsymbol{\omega}' = (p,\ q,\ r)$ — угловая скорость, $\boldsymbol{n}' = (\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3)$ — единичный вектор, направленный вертикально вверх, то условие отсутствия скольжения (равенство нулю абсолютной скорости точки D шара, которой он касается плоскости) запишется в виде

$$\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{n}. \tag{26}$$

Уравнение движения шара получим в форме уравнений Аппеля. Энергия ускорений вычисляется по формуле (см. п. 159, 160)

$$\begin{gathered} S = \frac{1}{2}mw^2 + \frac{1}{2}(A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2) + \\ + (C-B)qr\dot{p} + (A-C)rp\dot{q} + (B-A)pq\dot{r}, \end{gathered} \tag{27}$$

[1]Эта задача решена С. А. Чаплыгиным в его работе «О катании шара по горизонтальной плоскости» (см.: Чаплыгин С. А. Собр. соч. Т. 1, М.; Л.: Гостехиздат, 1948.— С. 76–101).

где $\boldsymbol{w}' = (w_x,\ w_y,\ w_z)$ *— ускорение центра шара. Из* (26) *получаем*

$$\boldsymbol{w} = a[\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{n} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{n})]$$

или

$$\begin{aligned} w_x &= a[\dot{q}\gamma_3 - \dot{r}\gamma_2 + q\dot{\gamma}_3 - r\dot{\gamma}_2 + p\omega_n - \gamma_1\omega^2], \\ w_y &= a[\dot{r}\gamma_1 - \dot{p}\gamma_3 + r\dot{\gamma}_1 - p\dot{\gamma}_3 + q\omega_n - \gamma_2\omega^2], \\ w_z &= a[\dot{p}\gamma_2 - \dot{q}\gamma_1 + p\dot{\gamma}_2 - q\dot{\gamma}_1 + r\omega_n - \gamma_3\omega^2]. \end{aligned} \tag{28}$$

Здесь $\omega_n = p\gamma_1 + q\gamma_2 + r\gamma_3$ *— проекция вектора* $\boldsymbol{\omega}$ *на вертикаль.*

Принимая величины p, q, r *за псевдоскорости* $\dot{\pi}_1$, $\dot{\pi}_2$, $\dot{\pi}_3$ *и замечая, что обобщенные силы* Π_1, Π_2, Π_3 *равняются нулю, из уравнений Аппеля получаем*

$$\begin{aligned} A_1\dot{p} + (A_3 - A_2)qr &= ma^2\gamma_1(\dot{p}\gamma_1 + \dot{q}\gamma_2 + \dot{r}\gamma_3), \\ A_2\dot{q} + (A_1 - A_3)rp &= ma^2\gamma_2(\dot{p}\gamma_1 + \dot{q}\gamma_2 + \dot{r}\gamma_3), \\ A_3\dot{r} + (A_2 - A_1)pq &= ma^2\gamma_3(\dot{p}\gamma_1 + \dot{q}\gamma_2 + \dot{r}\gamma_3), \end{aligned} \tag{29}$$

где $A_1 = A + ma^2$, $A_2 = B + ma^2$, $A_3 = C + ma^2$.

Уравнения (29) *совместно с уравнениями Пуассона* (см. п. 114)

$$\dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2 \tag{30}$$

образуют замкнутую систему уравнений, описывающую движение шара относительно его центра масс. Если она проинтегрирована, то траектория центра масс находится из уравнений (26) *при помощи квадратур. Покажем, что интегрирование системы уравнений* (29), (30) *сводится к квадратурам.*

Уравнения (29), (30) *имеют интеграл энергии*

$$\frac{1}{2}(A_1p^2 + A_2q^2 + A_3r^2) - \frac{1}{2}ma^2\omega_n^2 = h = \text{const}. \tag{31}$$

Интегралами будут также величина вектора кинетического момента шара относительно точки D *касания его с плоскостью*

$$(A_1p - ma^2\gamma_1\omega_n)^2 + (A_2q - ma^2\gamma_2\omega_n)^2 + (A_3r - ma^2\gamma_3\omega_n)^2 = \text{const} \tag{32}$$

и проекция этого вектора на вертикаль

$$A_1p\gamma_1 + A_2q\gamma_2 + A_3r\gamma_3 - ma^2\omega_n = \text{const}. \tag{33}$$

Кроме того, существует очевидный геометрический интеграл

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \tag{34}$$

Интеграл (31) *следует из теоремы об изменении кинетической энергии* (*см. п.* 88; *левая часть* (31) *есть кинетическая энергия шара: она постоянна, так как работа внешних сил, приложенных к шару, равна нулю*). *Существование интегралов* (32) *и* (33) *следует из теоремы об изменении кинетического момента в ее общей форме* (*см. формулу* (7) *п.* 87). *Действительно, момент внешних сил* (*силы тяжести и реакции плоскости*) *относительно точки касания шара и плоскости равен нулю. А так как скорость «геометрической точки», которая «вычерчивает след» шара на плоскости, очевидно, равна скорости центра масс шара, то из теоремы об изменении кинетического момента следует, что кинетический момент* $\boldsymbol{K}_D$ *шара относительно точки касания остается во все время движения неизменным. Но, воспользовавшись формулой* (4) *п.* 81, *легко получить, что*

$$\boldsymbol{K}_D' = (A_1 p - ma^2\gamma_1\omega_n,\ A_2 q - ma^2\gamma_2\omega_n,\ A_3 r - ma^2\gamma_3\omega_n).$$

Отсюда и следуют интегралы (32) *и* (33). *В существовании упомянутых интегралов можно убедиться и непосредственно, вычислив полные производные по времени от правых частей равенств* (31)–(33) *в силу уравнений движения* (29), (30) *и убедившись, что эти производные тождественно равны нулю.*

Указанных четырех интегралов достаточно, чтобы интегрирование системы (29), (30) *можно было свести к квадратурам. Чтобы в этом убедиться, достаточно найти множитель Якоби* M. *Разрешив уравнения* (29) *относительно производных, получим*

$$\begin{aligned} \dot p &= \frac{1}{A_1}[(A_2 - A_3)qr + \gamma_1\varphi], \\ \dot q &= \frac{1}{A_2}[(A_3 - A_1)rp + \gamma_2\varphi], \\ \dot r &= \frac{1}{A_3}[(A_1 - A_2)pq + \gamma_3\varphi], \end{aligned} \tag{35}$$

где

$$\varphi = \frac{1}{f}\left(\frac{A_2 - A_3}{A_1}\gamma_1 qr + \frac{A_3 - A_1}{A_2}\gamma_2 rp + \frac{A_1 - A_2}{A_3}\gamma_3 pq\right), \tag{36}$$

$$f = \frac{1}{ma^2} - \left(\frac{\gamma_1^2}{A_1} + \frac{\gamma_2^2}{A_2} + \frac{\gamma_3^2}{A_3}\right). \tag{37}$$

Множитель M удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial p}(M\dot{p}) + \frac{\partial}{\partial q}(M\dot{q}) + \frac{\partial}{\partial r}(M\dot{r}) + \frac{\partial}{\partial \gamma_1}(M\dot{\gamma}_1) + \frac{\partial}{\partial \gamma_2}(M\dot{\gamma}_2) + \frac{\partial}{\partial \gamma_3}(M\dot{\gamma}_3) = 0,$$

где $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$, $\dot{\gamma}_1$, $\dot{\gamma}_2$, $\dot{\gamma}_3$ — правые части уравнений (35) *и* (30). *Учитывая* (30), *уравнение для множителя можно преобразовать к такой форме:*

$$\dot{M} + M\left(\frac{\partial \dot{p}}{\partial p} + \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial r}\right) = 0. \tag{38}$$

Подставив в выражение, стоящее в скобках, правые части уравнений (35) *и произведя необходимые дифференцирования, получим уравнение* (38) *в виде*

$$f\dot{M} + M\left(\frac{r\gamma_2 - q\gamma_3}{A_1}\gamma_1 + \frac{p\gamma_3 - r\gamma_1}{A_2}\gamma_2 + \frac{q\gamma_1 - p\gamma_2}{A_3}\gamma_3\right) = 0.$$

Учитывая (30) *и* (37), *имеем окончательно*

$$2f\dot{M} - M\dot{f} = 0.$$

Интегрирование этого уравнения дает такое выражение для множителя: $M = c\sqrt{f}$ (c — произвольная постоянная). Из теории последнего множителя Якоби следует теперь, что интегрирование систем дифференциальных уравнений (29), (30) *сводится к квадратурам.*

Упражнение 1. *Показать, что для построения общего интеграла уравнений* (32), (35) *п.* 105 *помимо трех интегралов* (36), (37) *и* (38) *достаточно найти еще только один первый интеграл.*

163. Приложение теории множителя к каноническим уравнениям. Пусть движение материальной системы описывается каноническими уравнениями Гамильтона:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{39}$$

В симметричной форме эта система уравнений запишется в виде

$$\frac{dq_1}{\dfrac{\partial H}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dq_n}{\dfrac{\partial H}{\partial p_n}} = \frac{dp_1}{-\dfrac{\partial H}{\partial q_1}} = \ldots = \frac{dp_n}{-\dfrac{\partial H}{\partial q_n}} = \frac{dt}{1}. \tag{40}$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial H}{\partial p_1}\right)+\ldots+\frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_n}\right)+\frac{\partial}{\partial p_1}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_1}\right)+\ldots+$$
$$+\frac{\partial}{\partial p_n}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_n}\right)+\frac{\partial(1)}{\partial t}=0,$$

то для канонической системы уравнений существует множитель $M=1$ (см. замечание в конце п. 161).

Так как для системы (39) множитель известен, то для построения ее общего интеграла достаточно знать не $2n$, а $2n-1$ первых интегралов. Построение $2n$-го интеграла сводится к квадратуре.

Отметим еще одну возможность упрощения задачи интегрирования канонической системы уравнений. Пусть функция Гамильтона H не зависит явно от времени. Тогда, отбрасывая в уравнениях (40) последнюю дробь, содержащую dt, получим систему из $2n-1$ уравнений, которая по-прежнему имеет множитель $M=1$. Поэтому для построения ее общего интеграла достаточно знать $2n-2$ первых интеграла. Но так как в рассматриваемом случае материальная система является обобщенно консервативной, то один интеграл нам известен заранее. Это обобщенный интеграл энергии $H=h=\text{const}$ (см. п. 151). Поэтому для построения общего интеграла достаточно знать еще $2n-3$ первых интеграла. Если, например, $n=2$, то кроме интеграла энергии $H=h$ достаточно найти еще только один первый интеграл.

Пример 1 (Ограниченная задача трех тел (см. п. 124)). *Пусть точка P малой массы движется под действием притяжения двух точек S и J конечных масс, не оказывая влияния на движение последних. Будем считать, что точка J движется относительно точки S по круговой орбите, а точка P движется в плоскости этой орбиты (т. е. рассматривается так называемая плоская круговая ограниченная задача трех тел).*

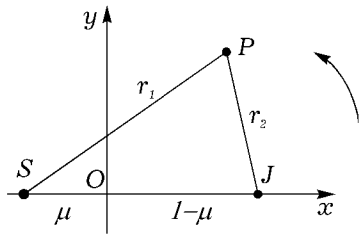

Рис. 138

Выберем единицы измерения так, чтобы сумма масс точек S и J, неизменное расстояние между ними и период их обращения по орбитам равнялись единице. Пусть m — масса точки P, а $1-\mu$ и μ — массы точек S и J соответственно.

Движение точки P будем рассматривать во вращающейся системе координат Oxy с началом в центре масс точек S и J и осью Ox, направленной на точку J (рис. 138). *Обозначая x, y координаты точ-*

ки P и применяя теорему о сложении скоростей (п. 31), *получаем для проекций абсолютной скорости точки P следующие выражения:*

$$v_x = \dot{x} - y, \quad v_y = \dot{y} + x.$$

Кинетическая энергия точки P вычисляется по формуле

$$T = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = T_2 + T_1 + T_0, \tag{41}$$

где

$$T_2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad T_1 = m(x\dot{y} - \dot{x}y), \quad T_0 = \frac{1}{2}m(x^2 + y^2). \tag{42}$$

Потенциальная энергия точки P определяется выражением

$$\Pi = -m\frac{1-\mu}{r_1} - m\frac{\mu}{r_2}, \quad r_1^2 = (x+\mu)^2 + y^2, \quad r_2^2 = (x-1+\mu)^2 + y^2. \tag{43}$$

Уравнения движения точки P могут быть записаны в форме канонических уравнений Гамильтона. Функция Гамильтона явно от времени не зависит, поэтому существует обобщенный интеграл энергии — интеграл Якоби:

$$T_2 - T_0 + \Pi = h = \text{const}. \tag{44}$$

Так как число степеней свободы $n = 2$, то для построения общего интеграла недостает одного первого интеграла.

§ 2. Системы с циклическими координатами

164. Циклические координаты. Крайне важным источником упрощения интегрирования дифференциальных уравнении движения является наличие циклических координат. Рассмотрим этот вопрос для голономных систем, движущихся в потенциальном поле сил. Пусть система имеет n степеней свободы, а q_1, $q_2, \ldots$, q_n — ее обобщенные координаты. Координата q_α называется циклической, если она не входит в функцию Лагранжа, т. е. если $\partial L/\partial q_\alpha = 0$ [1].

[1] Как следует из п. 148, 153, $\dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\dfrac{\partial R}{\partial q_\alpha}$, поэтому если координата циклическая, то она не входит также и в функции Гамильтона и Рауса; верно и обратное.

Теорема. *Пусть q_α — циклическая координата. Тогда соответствующий ей импульс — первый интеграл: $p_\alpha = c_\alpha = \mathrm{const}$, при этом изменение остальных координат со временем такое же, как в системе с $n-1$ степенью свободы, в которой c_α играет роль параметра.*

Доказательство.

Доказательство проще всего провести, используя гамильтонову форму уравнений движения

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где $H = H(q_1, \ldots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_{\alpha-1}, p_\alpha, p_{\alpha+1}, \ldots, p_n, t)$. Если в (1) $i = \alpha$, то $\partial H/\partial q_\alpha = 0$ и $dp_\alpha/dt = 0$. Поэтому $p_\alpha = c_\alpha = \mathrm{const}$. Положив в (1) $p_\alpha = c_\alpha$, придем к системе уравнений $(2n-2)$-го порядка

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq \alpha), \tag{2}$$

в которой $H = H(q_1, \ldots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_{\alpha-1}, c_\alpha, p_{\alpha+1}, \ldots, p_n, t)$.

Интегрирование уравнений (2) дает

$$q_i = q_i(t, c_\alpha, c_1, \ldots, c_{2n-2}), \quad p_i = p_i(t, c_\alpha, c_1, \ldots, c_{2n-2}), \tag{3}$$

где $c_1, \ldots, c_{2n-2}$ — произвольные постоянные. Зависимость циклической координаты q_α от времени определяется одним из уравнений системы (1)

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \tag{4}$$

в котором правая часть выражена через t и $2n-1$ постоянных $c_\alpha, c_1, \ldots, c_{2n-2}$ при помощи подстановки в нее функций (3). Интегрирование уравнения (4) дает

$$q_\alpha = \int \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\, dt + c,$$

где c — $2n$-я произвольная постоянная.

Аналогично, если не одна, а l обобщенных координат являются циклическими, то первыми интегралами будут l обобщенных импульсов и порядок системы дифференциальных уравнений (1) может быть понижен на $2l$ единиц.

165. Понижение порядка системы дифференциальных уравнений движения при помощи уравнений Рауса. Пусть q_α

$(\alpha = k+1, \ldots, n)$ — циклические координаты. Тогда имеем $n-k$ первых интегралов

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = c_\alpha = \text{const} \quad (\alpha = k+1, \ldots, n). \tag{5}$$

Пусть гессиан функции Лагранжа по переменным $\dot{q}_\alpha$ отличен от нуля:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} \right\|_{\alpha,\beta=k+1}^{n} \neq 0. \tag{6}$$

Составим функцию Рауса (п. 153)

$$R = \sum_{\alpha=k+1}^{n} c_\alpha \dot{q}_\alpha - L, \tag{7}$$

где $\dot{q}_\alpha$ выражены через q_i, $\dot{q}_i$, c_α и t $(i = 1, 2, \ldots, k;\ \alpha = k+1, \ldots, n)$ из уравнений (5)[1]. Функция Рауса не содержит обобщенных скоростей, отвечающих циклическим координатам:

$$R = R(q_i,\ \dot{q}_i,\ c_\alpha,\ t) \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ k;,\ \alpha = k+1, \ldots,\ n). \tag{8}$$

Поэтому часть системы уравнений Рауса

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ k) \tag{9}$$

описывает изменение нециклических координат со временем и может интегрироваться независимо от другой ее части

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial R}{\partial c_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = 0 \quad (\alpha = k+1, \ldots,\ n), \tag{10}$$

соответствующей циклическим координатам.

Проинтегрировав систему уравнений (9), имеющую порядок $2k$, получим

$$q_i = q_i(t,\ c_\alpha,\ c_1,\ c_1', \ldots,\ c_k,\ c_k') \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{11}$$

где c_i, c_i' $(i = 1,\ 2, \ldots,\ k)$ — произвольные постоянные. Затем из первых $n-k$ уравнений системы (10) находим зависимости циклических координат от времени

$$q_\alpha = \int \frac{\partial R}{\partial c_\alpha}\, dt + c_\alpha' \quad (\alpha = k+1, \ldots,\ n), \tag{12}$$

[1] При выполнении условия (6) уравнения (5) разрешимы относительно $\dot{q}_\alpha$.

где в функции $\partial R/\partial c_\alpha$ величины q_i заменены на их выражения (11).

Описанная в п. 164, 165 процедура понижения порядка системы дифференциальных уравнений движения является одним из наиболее эффективных и практически важных способов, применяемых при интегрировании уравнений движения. Всякая симметрия задачи, допускающая такой выбор обобщенных координат, чтобы некоторые из них q_α были циклическими, приводит к существованию первых интегралов $p_\alpha = \mathrm{const}$ и, как мы видели, позволяет свести исследование движения к рассмотрению системы с меньшим числом обобщенных координат. Для обобщенно консервативных систем с двумя степенями свободы наличие одной циклической координаты позволяет свести интегрирование уравнений движения к квадратурам (см. п. 164).

Пример 1 (Движение сферического маятника). *Сферический маятник (см. пример 2 п. 138) имеет две степени свободы. Если за обобщенные координаты принять углы θ и φ (рис. 134), то для кинетической и потенциальной энергии будем иметь выражения*

$$T = \frac{1}{2}ml^2(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\dot\varphi^2), \quad \Pi = mgl\cos\theta.$$

Так как функция Лагранжа

$$L = \mathrm{T} - \Pi = \frac{1}{2}ml^2(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\dot\varphi^2) - mgl\cos\theta$$

не содержит φ, то эта обобщенная координата циклическая. Ей соответствует первый интеграл

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = ml^2\sin^2\theta\dot\varphi = ml^2\omega_0\alpha, \tag{13}$$

где α — произвольная безразмерная постоянная; обозначение $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ введено для удобства.

Так как из (13) следует, что

$$\dot\varphi = \frac{\omega_0}{\sin^2\theta}\alpha, \tag{14}$$

то для функции Рауса

$$R = p_\varphi\dot\varphi - L$$

получаем выражение

$$R = -\frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2\omega_0^2\alpha^2}{\sin^2\theta} + mgl\cos\theta. \tag{15}$$

Уравнения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial R}{\partial \theta} = 0$$

отвечают системе с одной степенью свободы, которой соответствуют кинетическая и потенциальная энергия, определяемые равенствами

$$T^* = \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2, \quad \Pi^* = mgl\cos\theta + \frac{1}{2}\frac{ml^2\omega_0^2\alpha^2}{\sin^2\theta}.$$

Эта система называется приведенной системой, а функция Π^* *— приведенным потенциалом, или потенциалом Рауса.*

Приведенная система имеет интеграл энергии

$$\frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 + mgl\cos\theta + \frac{1}{2}\frac{ml^2\omega_0^2\alpha^2}{\sin^2\theta} = \frac{1}{2}ml^2\omega_0^2\beta, \tag{16}$$

где β *— безразмерная постоянная.*

Введем обозначение $u = \cos\theta$. *Тогда* $\dot u = -\sin\theta\dot\theta$ *и из* (16) *следует, что*

$$\frac{1}{\omega_0^2}\dot u^2 = G(u), \tag{17}$$

где $G(u)$ *— многочлен третьей степени,*

$$G(u) = (1-u^2)(\beta - 2u) - \alpha^2, \tag{18}$$

который можно также записать в форме

$$G(u) = 2(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3), \tag{19}$$

где u_1, u_2, u_3 *— корни уравнения* $G(u) = 0$.

Заметим, что $G(+\infty) = +\infty$, $G(\pm 1) = -\alpha^2 < 0$ *(если* $\alpha \neq 0$*),* $G(-\infty) = -\infty$. *Так как* $G(u)$ *— непрерывная функция, то хотя бы один из корней, например* u_3, *должен быть не меньше единицы. Но на отрезке* $-1 \leqslant u \leqslant +1$ *должны быть значения* u, *при которых функция* $G(u)$ *положительна или хотя бы обращается в нуль, так как в противном случае равенство* (17) *невозможно для действительных значений* u. *Величина же* u *обязательно должна быть действительной, так как движение маятника,безусловно, физически существует. Отсюда следует, что функция* $G(u)$ *имеет ровно два вещественных корня* u_1, u_2 *на отрезке* $-1 \leqslant u \leqslant +1$ *и один корень* $u_3 \geqslant 1$. *График функции* $G(u)$ *должен быть таким, как показано на рис.* 139.

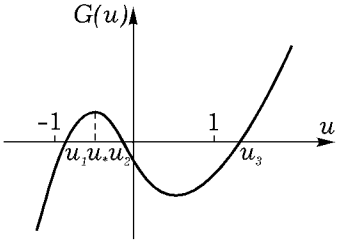

Рис. 139

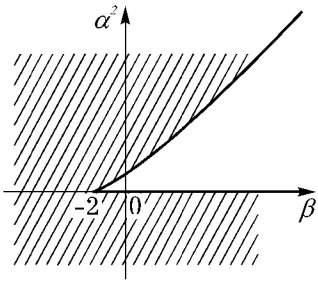

Рис. 140

Так как для реального движения $G(u) \geqslant 0$, то интересующий нас интервал изменения u определяется неравенством $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$. Ему соответствует область изменения угла θ: $\theta_2 \leqslant \theta \leqslant \theta_1$, отвечающая реальному движению маятника.

Рассмотрим движение, отвечающее различным значениям постоянных α и β. Сразу отметим, что из условий $G(u) \geqslant 0$ и $-1 \leqslant u \leqslant +1$ следует, что величина β не может быть совсем произвольной, а должна удовлетворять неравенству $\beta \geqslant -2$. Если $\beta = -2$, то постоянная α может быть только равной нулю, что соответствует положению равновесия маятника, когда он занимает вертикальное положение ($u = -1$, т. е. $\theta = \pi$).

Функция $G(u)$ имеет максимум в точке

$$u = u_* = \frac{1}{6}(\beta - \sqrt{\beta^2 + 12}), \tag{20}$$

причем

$$G(u_*) = f(\beta) - \alpha^2,$$

где

$$f(\beta) = \frac{1}{54}[(\beta^2 + 12)^{3/2} + 36\beta - \beta^3]. \tag{21}$$

Для реального движения необходимо, чтобы выполнялось неравенство $G(u_*) \geqslant 0$, т. е. чтобы

$$0 \leqslant \alpha^2 \leqslant f(\beta). \tag{22}$$

На рис. 140 значения параметров α, β, удовлетворяющие неравенству (22), соответствуют точкам, лежащим в незаштрихованной области плоскости или на ее границе. Верхняя граница области задается уравнением $\alpha^2 = f(\beta)$; она касается оси $O\beta$ в точке $(-2,\ 0)$, а при $\beta \to \infty$ имеет асимптоту $\alpha^2 = \beta$.

Для классификации движения маятника рассмотрим последовательно три возможных случая.

1) $\alpha = 0$. *Из* (14) *следует, что в этом случае* $\varphi = \varphi_0 = \mathrm{const}$, *и мы приходим к задаче о движении математического маятника в плоскости* $\varphi = \varphi_0$. *Эта задача подробно изучена в п.* 93–96.

2) $0 < \alpha^2 < f(\beta)$. *В этом случае угол* θ *изменяется в промежутке* $\theta_2 \leqslant \theta \leqslant \theta_1$. *На сфере радиусом* l *с центром в точке подвеса маятника значения* $\theta = \theta_1$ *и* $\theta = \theta_2$ *выделяют два круга, лежащих в параллельных плоскостях* $z = z_1 = l\cos\theta_1$ *и* $z = z_2 = l\cos\theta_2$. *Материальная точка, закрепленная на конце стержня, движется по сфере между плоскостями* $z = z_1$ *и* $z = z_2$, *попеременно касаясь этих плоскостей* (рис. 141).

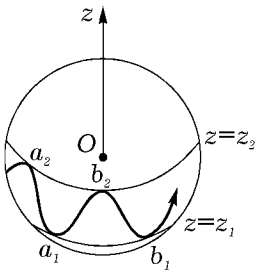

Рис. 141

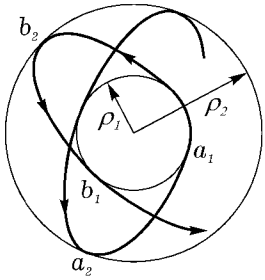

Рис. 142

При этом среднее положение точки всегда находится ниже горизонтальной плоскости, проходящей через точку O *подвеса маятника* (рис. 134), *т. е.* $u_1 + u_2 < 0$. *Чтобы убедиться в этом, приравняем коэффициенты при первой степени и в тождестве* (19). *Получим*

$$2(u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3) = -2,$$

откуда

$$u_3 = -\frac{1 + u_1u_2}{u_1 + u_2}.$$

Но так как $u_3 > 0$, *а* $|u_1u_2| < 1$, *то отсюда сразу следует, что* $u_1 + u_2 < 0$.

Из уравнения (14) *видно, что угол* φ *в рассматриваемом случае либо монотонно возрастает (если* $\alpha > 0$), *либо монотонно убывает (если* $\alpha < 0$). *На рис.* 142 *показана проекция траектории материальной точки на плоскость* Oxy *для движения, соответствующего рис.* 141, *когда обе плоскости* $z = z_1$ *и* $z = z_2$ *лежат ниже точки подвеса маятника (принято, что* $\alpha > 0$). *Эта проекция поочередно касается окружностей радиусов* $\rho_1 = l\sin\theta_1$ *и* $\rho_2 = l\sin\theta_2$ *и напоминает собой движе-*

ние по эллипсу, большая полуось которого вращается в горизонтальной плоскости в направлении движения.

Для интегрирования уравнения (17) *сделаем замену переменных*

$$u = u_1 + (u_2 - u_1)\sin^2 v. \tag{23}$$

Отсюда и из (17), (19) *получаем дифференциальное уравнение для новой переменной* v

$$\dot{v}^2 = \frac{1}{2}\omega_0^2(u_3 - u_1)(1 - k^2\sin^2 v), \tag{24}$$

где

$$k^2 = \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1} \quad (0 \leqslant k^2 \leqslant 1).$$

Если момент времени, когда $u = u_1$, *принять за начальный, то из* (24) *получаем*

$$\tau = \int\limits_0^v \frac{d\omega}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\omega}} = F(v,\ k), \tag{25}$$

где $F(v,\ k)$ — *эллиптический интеграл первого рода* (см. п. 95), *а*

$$\tau = \omega_0\sqrt{\frac{u_3 - u_1}{2}}\,t.$$

Тогда из (23) *следует, что*

$$u = u_1 + (u_2 - u_1)sn^2\tau. \tag{26}$$

Так как эллиптическая функция $sn\,\tau$ *имеет период* $4K(k)$, *где* $K(k)$ — *полный эллиптический интеграл первого рода, то* $sn^2\tau$ *имеет период, вдвое меньший. Поэтому* $u = u_1$ *для* $\tau = 2nK(k)$ *и* $u = u_2$ *для* $\tau = (2n+1)K(k)$ $(n = 1,\ 2, \ldots)$. *Следовательно, угол* θ *периодически колеблется между значениями* θ_1 *и* θ_2. *Период* $\varkappa$ *этих колебаний вычисляется по формуле*

$$\varkappa = \frac{2\sqrt{2}K(k)}{\omega_0\sqrt{u_3 - u_1}}. \tag{27}$$

Когда угол θ *найден как функция времени, зависимость* $\varphi(t)$ *находится из уравнения* (14) *при помощи одной квадратуры.*

3) $\alpha^2 = f(\beta)$. *В этом случае корни* u_1 *и* u_2 *многочлена* $G(u)$ *совпадают, причем* $u_1 = u_2 = u_*$, *и мы приходим к задаче о коническом*

маятнике. Угол θ при движении постоянен, $\theta = \theta_* = \arccos u_* > \frac{\pi}{2}$. Материальная точка движется по окружности радиусом $l \sin\theta_*$ в горизонтальной плоскости $z = z_* = l\cos\theta_* < 0$; время ее обращения по окружности равно $2\pi\sqrt{-\frac{g}{z_*}}$. Стержень, на котором закреплена точка, описывает поверхность конуса с осью симметрии Oz.

§ 3. Скобки Пуассона и первые интегралы

166. Скобка Пуассона. Пусть u и v — дважды непрерывно дифференцируемые функции от $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t$. Выражение

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right) \tag{1}$$

называют *скобкой Пуассона* функций u и v.

Отметим основные свойства скобки Пуассона. Пусть u, v, w — дважды непрерывно дифференцируемые функции переменных $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t$. Тогда

1) $(u, v) = -(v, u)$,

2) $(cu, v) = c(u, v) \quad (c = \text{const})$,

3) $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$,

4) $\frac{\partial}{\partial t}(u, v) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + \left(u, \frac{\partial v}{\partial t}\right)$,

5) $((u, v), w) + ((v, w), u) + ((w, u), v) = 0$.

Первые четыре свойства непосредственно вытекают из определения (1) скобки Пуассона. Пятое свойство, называемое *тождеством Пуассона*, более громоздко для доказательства, хотя также несложно. Для сокращения выкладок можно использовать то обстоятельство, что каждое слагаемое в левой части тождества 5 есть произведение частной производной второго порядка на две частные производные первого порядка. Поэтому, чтобы показать, что левая часть тождественно равна нулю, достаточно убедиться в том, что она не содержит ни одной производной второго порядка, например, от функции u (так как u, v, w входят в тождество 5 симметрично).

Вторые производные от u могут дать первое и третье слагаемые в 5. Их сумму на основании свойств 1 и 2 можно записать в виде

$$((u, v), w) + ((w, u), v) = (w, (v, u)) - (v, (w, u)).$$

Теперь уже нетрудно непосредственным вычислением проверить, что правая часть этого равенства не содержит вторых производных от функции u.

167. Теорема Якоби–Пуассона. Пусть переменные q_i, p_i удовлетворяют дифференциальным уравнениям Гамильтона

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{2}$$

Для того чтобы функция $f(q_i,\ p_i,\ t)$ была первым интегралом, необходимо и достаточно, чтобы ее полная производная по времени, в силу уравнений (2), тождественно равнялась нулю: $df/dt \equiv 0$. Выразим это условие через скобку Пуассона. В силу (2) имеем

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right).$$

Применяя обозначение (1) для скобки Пуассона, необходимое и достаточное условие того, что f — первый интеграл, можно записать в виде равенства

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f,\ H) = 0. \tag{3}$$

Имеет место следующее замечательное утверждение.

Теорема (Якоби–Пуассона). *Если f_1 и f_2 — первые интегралы системы (2), то их скобка Пуассона $(f_1,\ f_2)$ также будет первым интегралом этой системы.*

Доказательство.

Пусть f_1 и f_2 — первые интегралы. Тогда, согласно (3),

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + (f_1,\ H) = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t} + (f_2,\ H) = 0, \tag{4}$$

а нужно доказать, что

$$\frac{\partial (f_1,\ f_2)}{\partial t} + ((f_1,\ f_2),\ H) = 0. \tag{5}$$

Преобразуем левую часть этого равенства. По свойству 4 скобок Пуассона имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}(f_1, f_2) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}, f_2\right) + \left(f_1, \frac{\partial f_2}{\partial t}\right).$$

Если теперь производные $\partial f_1/\partial t$ и $\partial f_2/\partial t$ заменить на их выражения из равенства (4) и затем воспользоваться свойствами 1 и 2 скобок Пуассона, то получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(f_1, f_2) = -((f_1, H), f_2) - (f_1, (f_2, H)) = ((H, f_1), f_2) + ((f_2, H), f_1).$$

Подставляя это выражение в левую часть равенства (5), получаем ее в виде

$$((H, f_1), f_2) + ((f_2, H), f_1) + ((f_1, f_2), H).$$

Из свойства 5 скобок Пуассона следует, что последнее выражение тождественно равно нулю, что и доказывает справедливость теоремы Якоби–Пуассона.

Пример 1 (Движение материальной точки под действием притяжения к заданному центру O). *Пусть $Oq_1q_2q_3$ — неподвижная прямоугольная декартова система координат, а $\Pi(r)$, где $r^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$, — потенциал силы притяжения. Если массу точки принять за единицу, то для функции Гамильтона имеем выражение*

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \Pi(r).$$

Пусть

$$f_1 = q_2p_3 - q_3p_2, \quad f_2 = q_3p_1 - q_1p_3.$$

Проверка показывает, что $(f_1,\ H) = 0$ и $(f_2,\ H) = 0$, т. е. f_1 и f_2 — первые интегралы. Они представляют собой проекции момента количества движения материальной точки относительно центра O (этот момент постоянен, так как рассматриваемое силовое поле является центральным) на оси Oq_1 и Oq_2. Согласно теореме Якоби–Пуассона, функция $(f_1,\ f_2)$ тоже должна быть первым интегралом. Имеем

$$(f_1,\ f_2) = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_i}\frac{\partial f_2}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i}\frac{\partial f_2}{\partial q_i}\right) = q_1p_2 - q_2p_1.$$

Полученный интеграл есть проекция момента количества движения на ось Oq_3.

Может показаться, что теорема Якоби–Пуассона всегда позволяет по двум известным первым интегралам найти еще один первый интеграл, затем еще один и так далее до тех пор, пока не будет получено количество первых интегралов, необходимое для построения общего интеграла системы (2). Это далеко не так. На практике скобка Пуассона часто может быть либо константой, либо функцией известных первых интегралов.

Для того чтобы можно было надеяться получить из двух первых интегралов много или даже все первые интегралы, недостающие для построения общего интеграла, надо, чтобы хотя бы один из двух известных исходных первых интегралов был характерен для рассматриваемой частной задачи, чтобы он как можно полнее отражал физическую сущность именно данной задачи. Если за исходные первые интегралы брать интегралы, вытекающие из основных, общих для всех систем теорем динамики, то вряд ли в общем случае можно надеяться на эффективное применение теоремы Якоби–Пуассона.

§ 4. Канонические преобразования

168. Понятие канонического преобразования. Рассмотрим гамильтонову систему дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме

$$\frac{d\boldsymbol{z}}{dt} = \mathbf{J}H'_{\boldsymbol{z}} \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{z}$ — $2n$-мерный вектор-столбец, $\boldsymbol{z}' = (\boldsymbol{q}', \boldsymbol{p}')$, $\quad \boldsymbol{q}' = (q_1, \ldots, q_n)$, $\boldsymbol{p}' = (p_1, \ldots, p_n)$,

$$\mathbf{J} = \begin{Vmatrix} 0 & \mathbf{E}_n \\ -\mathbf{E}_n & 0 \end{Vmatrix}, \tag{2}$$

$\mathbf{E}_n$ — единичная матрица n-го порядка. $H = H(\boldsymbol{z},\ t)$ — функция Гамильтона, $H_{\boldsymbol{z}}$ — матрица-строка размером $1 \times 2n$,

$$H_{\boldsymbol{z}} = (H_{\boldsymbol{q}},\ H_{\boldsymbol{p}}) = (H_{q_1}, \ldots,\ H_{q_n},\ H_{p_1}, \ldots,\ H_{p_n}).$$

Легко видеть, что

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}, \quad \mathbf{J}^2 = -\mathbf{E}_{2n}, \quad \det \mathbf{J} = 1. \tag{3}$$

Получение решений системы уравнений (1) часто оказывается очень сложным делом. Поэтому надо искать какие-то пути, упрощающие исследование движения. Например, в §2 показано, что наличие одной циклической координаты позволяет понизить порядок системы (1) на две единицы. Это указывает на то, что удачный выбор обобщенных координат может существенно облегчить исследование движения, а иногда позволяет провести его во всей необходимой полноте. С такой ситуацией мы встретились в п. 165 при анализе движения сферического маятника.

В некоторой области фазового пространства $q_1, q_2, \ldots, q_n$, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ рассмотрим обратимую, дважды непрерывно дифференцируемую замену переменных $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p} \to \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}$, содержащую время t в качестве параметра:

$$Q_i = Q_i(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t), \quad P_i = P_i(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t), \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

или, если ввести обозначение $\boldsymbol{\zeta}' = (\boldsymbol{Q}', \boldsymbol{P}')$, $\boldsymbol{Q}' = (Q_1, \ldots, Q_n)$, $\boldsymbol{P}' = (P_1, \ldots, P_n)$,

$$\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{z}, t). \tag{5}$$

Может случиться, что в новых переменных система уравнений (1) будет иметь более простую структуру и ее интегрирование будет проще интегрирования исходной системы. В новых переменных уравнения движения могут уже не быть гамильтоновыми. Мы, однако, будем далее рассматривать только такие преобразования (4), которые не нарушают гамильтововой формы уравнений движения. Это будут канонические преобразования. Ниже мы дадим определение канонических преобразований, получим критерии каноничности и укажем способ нахождения функции Гамильтона, отвечающей преобразованным уравнениям.

Практический смысл канонических преобразований состоит в упрощении уравнений движения, в выборе таких новых координат в фазовом пространстве, которые более удобны для решения задачи о движении системы, нежели исходные старые координаты. Метод канонических преобразований является широко распространенным и эффективным методом исследования гамильтоновых уравнений.

Пусть $\mathbf{M}$ — матрица Якоби преобразования (4),

$$\mathbf{M} = \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial \boldsymbol{z}} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}} & \dfrac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}} & \dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial Q_1}{\partial q_n} & \dfrac{\partial Q_1}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial Q_1}{\partial p_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial Q_n}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial Q_n}{\partial q_n} & \dfrac{\partial Q_n}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial Q_n}{\partial p_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial P_1}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial P_1}{\partial q_n} & \dfrac{\partial P_1}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial P_1}{\partial p_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial P_n}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial P_n}{\partial q_n} & \dfrac{\partial P_n}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{Vmatrix}. \tag{6}$$

Преобразование (4) называется *каноническим*, если существует такое постоянное число $c \neq 0$, что матрица Якоби (6) удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{M}'\mathbf{J}\mathbf{M} = c\mathbf{J}, \tag{7}$$

где матрица $\mathbf{J}$ определена равенством (2). Число c называется *валентностью канонического преобразования*; если $c = 1$, то преобразование называется *унивалентным*.

Замечание 1. *Матрицы* $\mathbf{M}$, *удовлетворяющие тождеству* (7) *при* $c = 1$, *называются симплектическими; если же в* (7) $c \neq 1$, *то матрица* $\mathbf{M}$ *называется обобщенно симплектической* (*с валентностью* c). *Так как, согласно* (3), $\det \mathbf{J} = 1$, *то из равенства* (7) *на основании теоремы об умножении определителей получаем*

$$\det \mathbf{M} = \pm c^n,$$

т. е. обобщенно симплектические матрицы являются невырожденными.

Замечание 2. *Пусть в фазовом пространстве последовательно выполнены два канонических преобразования:* $\zeta_1 = \zeta_1(z,\ t)$ *с валентностью* c_1 *и* $\zeta_2 = \zeta_2(\zeta_1,\ t)$ *с валентностью* c_2. *Тогда результирующее преобразование* $\zeta = \zeta(z,\ t) \equiv \zeta_2(\zeta_1(z,\ t),\ t)$ *тоже будет каноническим, и его валентность* c *равна произведению* $c_1 c_2$.

В самом деле, по условию

$$\mathbf{M}_1'\mathbf{J}\mathbf{M}_1 = c_1\mathbf{J}, \quad \mathbf{M}_1 = \partial\zeta_1/\partial z$$

и

$$\mathbf{M}_2'\mathbf{J}\mathbf{M}_2 = c_2\mathbf{J}, \quad \mathbf{M}_2 = \partial\zeta_2/\partial\zeta_1.$$

Поэтому

$$\mathbf{M} = \frac{\partial\zeta}{\partial z} = \frac{\partial\zeta_2}{\partial\zeta_1}\cdot\frac{\partial\zeta_1}{\partial z} = \mathbf{M}_2\mathbf{M}_1,$$

а следовательно,

$$\mathbf{M}'\mathbf{J}\mathbf{M} = (\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1)'\mathbf{J}(\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1) = \mathbf{M}_1'\mathbf{M}_2'\mathbf{J}\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1 =$$
$$= \mathbf{M}_1' c_2\mathbf{J}\mathbf{M}_1 = c_2\mathbf{M}_1'\mathbf{J}\mathbf{M}_1 = c_2 c_1\mathbf{J}.$$

Отсюда, согласно определению (7) канонического преобразования, следует доказываемое утверждение.

Пусть, далее, задано каноническое преобразование $\zeta = \zeta(z,\ t)$ с валентностью c. Тогда обратное преобразование $z = z(\zeta,\ t)$ также будет каноническим, а его валентность равна $1/c$.

Действительно, умножив обе части тождества (7) слева на матрицу $(\mathbf{M}')^{-1}$, а справа — на матрицу $\mathbf{M}^{-1}$, получим

$$\frac{1}{c}\mathbf{J} = (\mathbf{M}')^{-1}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}. \tag{8}$$

Учитывая перестановочность операций транспонирования и взятия обратной матрицы, приходим к равенству

$$(\mathbf{M}^{-1})'\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{c}\mathbf{J}. \tag{9}$$

Так как матрицей Якоби обратного преобразования $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(\boldsymbol{\zeta},\ t)$ является матрица $\mathbf{M}^{-1}$, то отсюда следует, что это преобразование каноническое и имеет валентность $1/c$.

Отметив еще, что тождественное преобразование $Q_i = q_i, P_i = p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, очевидно, будет каноническим, приходим к выводу, что совокупность всех канонических преобразований образует группу. Унивалентные преобразования составляют ее подгруппу.

169. Критерии каноничности преобразования. Равенство (7) позволяет легко проверить, является преобразование (4) каноническим или нет. Приведем еще некоторые критерии каноничности. Они эквивалентны условию (7) и могли бы быть приняты за определение каноничности преобразования (4).

Сначала введем понятие скобки Лагранжа и дадим критерий каноничности в терминах этих скобок. Пусть заданы $2n$ функций φ_j, ψ_j $(j = 1,\ 2, \ldots,\ n)$ от двух переменных x, y и еще, может быть, от некоторых других переменных. Тогда *скобкой Лагранжа* для этих функций называется величина

$$[x,\ y] = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}\frac{\partial \psi_j}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right). \tag{10}$$

Теорема. *Если в качестве φ_j, ψ_j принять функции Q_j, P_j из* (4), *то необходимое и достаточное условие каноничности преобразования* (4) *запишется в виде*

$$[q_i,\ q_k] = 0, \quad [p_i,\ p_k] = 0, \quad [q_i,\ p_k] = c\delta_{ik} \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{11}$$

Здесь δ_{ik} — символ Кронекера ($\delta_{ik} = 1$ при $i = k$ и $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$), а c — валентность канонического преобразования.

Доказательство.

Доказательство получается при помощи непосредственной проверки. В самом деле, левая часть равенства (7) может быть записана в виде следующей блочной матрицы:

$$\mathbf{M}'\mathbf{J}\mathbf{M} = \left\| \begin{matrix} \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)' \dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}} - \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)' \dfrac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}} & \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)' \dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}} - \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)' \dfrac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}} \\ \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)' \dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}} - \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)' \dfrac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}} & \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)' \dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}} - \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)' \dfrac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}} \end{matrix} \right\|. \tag{12}$$

Вычисления, проведенные для левого верхнего блока этой матрицы с учетом обозначения (10), дают

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)' \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)' \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}} = \left\| \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} - \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right) \right\|_{i,\, k=1}^{n} = \\ = \left\| [q_i,\ q_k] \right\|_{i,\, k=1}^{n}.$$

Проведя аналогичные вычисления для остальных блоков матрицы (12), убеждаемся, что равенство (7) может быть записано в виде

$$\left\| \begin{matrix} \left\| [q_i,\ q_k] \right\|_{i,\, k=1}^{n} & \left\| [q_i,\ p_k] \right\|_{i,\, k=1}^{n} \\ -\left\| [q_i,\ p_k] \right\|_{i,\, k=1}^{n} & \left\| [p_i,\ p_k] \right\|_{i,\, k=1}^{n} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & c\mathbf{E} \\ -c\mathbf{E} & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{13}$$

Для доказательства теоремы теперь достаточно заметить, что равенства (11) и (13) эквивалентны.

Получим теперь критерий каноничности преобразования (4), использующий скобки Пуассона.

Теорема. *Для того чтобы преобразование* (4) *было каноническим, необходимо и достаточно, чтобы скобки Пуассона функций* Q_j, P_j *от переменных* $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t$ *удовлетворяли равенствам*

$$(Q_i,\ Q_k) = 0, \quad (P_i,\ P_k) = 0, \quad (Q_i,\ P_k) = c\delta_{ik} \quad (i,\ k = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{14}$$

Доказательство.

Доказательство проводится при помощи непосредственной проверки эквивалентности равенств (14) и равенства (7), положенного в основу определения каноничности преобразования (4). Возьмем от обеих частей равенства (8) обратные матрицы и учтем, что, согласно (3), $\mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}$. Тогда придем к равенству

$$\mathbf{MJM}' = c\mathbf{J}, \tag{15}$$

которое эквивалентно равенству (7). Левая часть последнего равенства может быть представлена в виде блочной матрицы

$$\mathbf{MJM}' = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}} \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)' - \dfrac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}} \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)' & \dfrac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}} \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)' - \dfrac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}} \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)' \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}} \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)' - \dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}} \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)' & \dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}} \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)' - \dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}} \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)' \end{matrix} \right\|. \tag{16}$$

Непосредственные вычисления показывают, что левый верхний блок этой матрицы может быть представлен в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)' - \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)' = \left\| \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\frac{\partial Q_k}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\frac{\partial Q_k}{\partial q_j}\right)\right\|_{i,\,k=1}^{n} =$$

$$= \|(Q_i,\ Q_k)\|_{i,\,k=1}^{n}\,.$$

Аналогичные вычисления для остальных блоков матрицы (16) позволяют записать равенство (15) в следующей форме:

$$\left\| \begin{matrix} \|(Q_i,\ Q_k)\|_{i,\,k=1}^{n} & \|(Q_i,\ P_k)\|_{i,\,k=1}^{n} \\ -\|(Q_i,\ P_k)\|_{i,\,k=1}^{n} & \|(P_i,\ P_k)\|_{i,\,k=1}^{n} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & c\mathbf{E} \\ -c\mathbf{E} & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{17}$$

Отсюда следует, что равенства (14) и (7) эквивалентны, что и доказывает теорему.

Приведенные критерии каноничности, как и само определение (7), позволяют по явно заданному преобразованию (4) решить, является оно каноническим или нет. Для дальнейшего построения теории канонических преобразований очень важен следующий критерий каноничности.

Теорема. *Для каноничности преобразования* (4) *необходимо и достаточно, чтобы существовала отличная от нуля постоянная c такая, что выражение*

$$c\sum_{k=1}^{n} p_k \delta q_k - \sum_{k=1}^{n} P_k \delta Q_k \tag{18}$$

является полным дифференциалом некоторой функции $F(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p},\ t)$.

При этом под полными дифференциалами δF и δQ_k $(k = 1,\ 2, \ldots, n)$ понимаются дифференциалы, соответствующие изменению переменных $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{p}$; величина t считается параметром.

Доказательство.

Для доказательства этой теоремы достаточно показать, что условия того, что выражение (18) есть полный дифференциал, эквивалентно равенствам (11). Из (4) имеем

$$\delta Q_k = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial Q_k}{\partial p_i}\delta p_i\right) \quad (k = 1,\ 2, \ldots,\ n).$$

Подставив эти дифференциалы в выражение (18) и изменив порядок суммирования, получим это выражение в виде

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i \delta q_i + Y_i \delta p_i), \tag{19}$$

где приняты обозначения

$$X_i = cp_i - \sum_{l=1}^{n} P_l \frac{\partial Q_l}{\partial q_i}, \quad Y_i = -\sum_{l=1}^{n} P_l \frac{\partial Q_l}{\partial p_i} \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{20}$$

Условие того, что выражение (19) есть полный дифференциал, записывается в виде совокупности равенств

$$\frac{\partial X_i}{\partial q_k} = \frac{\partial X_k}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial Y_i}{\partial p_k} = \frac{\partial Y_k}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial X_i}{\partial p_k} = \frac{\partial Y_k}{\partial q_i} \quad (i,\ k = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{21}$$

Непосредственное вычисление, использующее обозначения (20), показывает, что равенства (21) запишутся соответственно в виде

$$[q_i,\ q_k] = 0, \quad [p_i,\ p_k] = 0, \quad [q_i,\ p_k] = c\delta_{ik} \quad (i,\ k = 1,\ 2, \ldots,\ n).$$

Так как эти равенства совпадают с равенствами (11), то отсюда следует справедливость доказываемой теоремы.

170. Ковариантность уравнений Гамильтона при канонических преобразованиях. Если преобразование (4) является каноническим, то в новых переменных система уравнений (1) снова будет иметь гамильтонову форму. Более точно, имеет место следующее утверждение.

Теорема. *При каноническом преобразовании* (4) *любая гамильтонова система дифференциальных уравнений* (1) *переходит снова в гамильтонову систему* (*вообще говоря, с другой функцией Гамильтона* $\mathcal{H}(\zeta,\ t)$)

$$\frac{d\zeta}{dt} = \mathbf{J}\mathcal{H}'_\zeta. \tag{22}$$

Доказательство.

Действительно, из (5) и (1) имеем

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mathbf{M}\mathbf{J}H'_z + \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \tag{23}$$

Но

$$H'_z = \left(H_\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)' = (H_\zeta \mathbf{M})' = \mathbf{M}'H'_\zeta.$$

Поэтому, учитывая тождество (15), равенство (23) можно записать в виде

$$\frac{d\zeta}{dt} = \mathbf{J}cH'_\zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \tag{24}$$

Покажем, что если преобразование (4) каноническое, то

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mathbf{J} W'_{\zeta}, \tag{25}$$

где W — некоторая функция переменных ζ, t. В самом деле, опираясь на соотношения (3) и (6), получаем из (25) следующую цепочку равенств:

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)' = -W_{\zeta}\mathbf{J}, \quad \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)' \mathbf{J} = W_{\zeta}, \quad \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)' \mathbf{J}\mathbf{M} = W_{\zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \boldsymbol{z}} = W_{\boldsymbol{z}},$$

т. е. соотношение (25) эквивалентно равенству

$$W_{\boldsymbol{z}} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)' \mathbf{J}\mathbf{M}, \tag{26}$$

где W рассматривается как функция переменных $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{p}$, t. В скалярной форме равенство (26) запишется в виде $2n$ соотношений

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial Q_j}{\partial t}\frac{\partial P_j}{\partial q_k} - \frac{\partial Q_j}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial t}\right) \equiv \Phi_k \quad (k = 1,\ 2, \ldots,\ n),$$

$$\frac{\partial W}{\partial p_l} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial P_j}{\partial p_l}\frac{\partial Q_j}{\partial t} - \frac{\partial P_j}{\partial t}\frac{\partial Q_j}{\partial p_l}\right) \equiv \Psi_l \quad (l = 1,\ 2, \ldots,\ n),$$

где обозначения Φ_k, Ψ_l для производных функции W введены для краткости записи. Величины Φ_k и Ψ_l являются производными по q_k и p_l от некоторой функции W в том и только в том случае, когда выполнены условия

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial \Psi_k}{\partial p_i} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial p_k}, \quad \frac{\partial \Phi_k}{\partial p_i} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial q_k} \quad (i,\ k = 1,\ 2, \ldots,\ n).$$

Эти условия, как показывают непосредственные вычисления, могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}[q_i,\ q_k] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}[p_i,\ p_k] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}[q_i,\ p_k] = 0 \quad (i,\ k = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{27}$$

Так как преобразование (4) каноническое, то имеют место равенства (11), откуда вытекает справедливость равенств (27), а следовательно, и равенства (25).

Таким образом, уравнение (24) может быть записано в виде

$$\frac{d\zeta}{dt} = \mathbf{J}(cH'_\zeta + W'_\zeta).$$

Если обозначить $\mathcal{H}$ функцию $cH + W$, то последнее уравнение примет гамильтонову форму

$$\frac{d\zeta}{dt} = \mathbf{J}\mathcal{H}'_\zeta.$$

Роль новой функции Гамильтона играет функция $\mathcal{H}$. Теорема доказана.

Приведем некоторые простые, но практически важные примеры канонических преобразований. Старую и новую функции Гамильтона обозначим соответственно $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ и $\mathcal{H}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, t)$.

Пример 1. *Тождественное преобразование*

$$Q_j = q_j, \quad P_j = p_j \quad (j = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{28}$$

Это унивалентное каноническое преобразование; при этом $\mathcal{H} = H(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, t)$.

Пример 2. *Преобразование*

$$Q_j = p_j, \quad P_j = q_j \quad (j = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{29}$$

Это каноническое преобразование с валентностью $c = -1$. *Оно меняет ролями обобщенные координаты и обобщенные импульсы. При этом*

$$\mathcal{H} = -H(\boldsymbol{P},\ \boldsymbol{Q}, t).$$

Пример 3. *Преобразование*

$$Q_j = \alpha q_j, \quad P_j = \beta p_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n; \alpha = \mathrm{const}, \beta = \mathrm{const}, \alpha\beta \neq 0). \tag{30}$$

Это преобразование каноническое, и

$$\mathcal{H} = \alpha\beta H\left(\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{Q},\ \frac{1}{\beta}\boldsymbol{P},\ t\right).$$

Пример 4. *Преобразование*

$$Q_j = \alpha p_j, \quad P_j = \beta q_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n; \alpha = \mathrm{const}, \beta = \mathrm{const}, \alpha\beta \neq 0). \tag{31}$$

Это преобразование также каноническое, а

$$\mathcal{H} = -\alpha\beta H\left(\frac{1}{\beta}\boldsymbol{P}, \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{Q},\ t\right).$$

Примеры 2 и 4 показывают, что при канонических преобразованиях может исчезнуть различие между координатами и импульсами. Применение названий «импульс» и «координата» может стать чисто условным. Поэтому для пары переменных Q_i и P_i, очень удобно название «канонически сопряженные переменные».

Пример 5. *Перенос начала координат в фазовом пространстве*

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{f}(t), \quad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{g}(t) \tag{32}$$

представляет собой унивалентное каноническое преобразование. При этом новые переменные $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{P}$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений с функцией Гамильтона

$$\mathcal{H} = H(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{f}(t),\ \boldsymbol{P} + \boldsymbol{g}(t),\ t) + \frac{d\boldsymbol{g}}{dt} \cdot \boldsymbol{Q} - \frac{d\boldsymbol{f}}{dt} \cdot \boldsymbol{P}, \tag{33}$$

где точкой обозначено скалярное произведение векторов.

Пример 6. *Преобразование*

$$q_j = \sqrt{2r_j}\sin\varphi_j, \quad p_j = \sqrt{2r_j}\cos\varphi_j \quad (j = 1,\ 2, \ldots,\ n) \tag{34}$$

является унивалентным каноническим преобразованием. Оно осуществляет переход от пары канонически сопряженных переменных q_j, p_j, играющих роль декартовых координат на плоскости, к паре канонически сопряженных переменных φ_j, r_j (φ_j — «координата», r_j — «импульс»), имеющих характер полярных координат.

Если старая функция Гамильтона имела вид

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (q_j^2 + p_j^2), \tag{35}$$

то уравнениям для переменных φ_j, r_j соответствует функция Гамильтона

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j r_j. \tag{36}$$

Пример 7. *Преобразование*

$$Q_j = q_j - ip_j, \quad P_j = q_j + ip_j \quad (j = 1,\ 2, \ldots,\ n), \tag{37}$$

где i — мнимая единица ($i^2 = -1$), осуществляет переход к комплексно сопряженным переменным. Оно является каноническим с валентностью $2i$ и

$$\mathcal{H} = 2iH\left(\frac{\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}}{2},\ \frac{\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q}}{2i},\ t\right). \tag{38}$$

Если, например, старая функция Гамильтона имеет вид (35), *то*

$$\mathcal{H} = i\sum_{j=1}^{n} \lambda_j Q_j P_j. \tag{39}$$

171. Канонические преобразования и процесс движения. Очень важным примером канонического преобразования служит процесс движения, описываемого гамильтоновой системой дифференциальных уравнений.

Пусть для гамильтоновой системы (1) при $t = 0$ $\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{z}_0' = (\boldsymbol{q}_0', \boldsymbol{p}_0')$. Тогда вектор-функция $\boldsymbol{\zeta}' = \boldsymbol{\zeta}'(\boldsymbol{z}_0, t) = (\boldsymbol{q}'(\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{p}_0, t), \boldsymbol{p}'(\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{p}_0, t))$ удовлетворяет тождеству

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = \mathbf{J}H_{\zeta}'. \tag{40}$$

Она задает преобразование фазового пространства $\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{p}_0 \to \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}$.

Теорема. *Преобразование фазового пространства, задаваемое движениями гамильтоновой системы, является унивалентным каноническим преобразованием.*

Доказательство.

Надо убедиться в том, что матрица Якоби $\mathbf{M} = \partial\boldsymbol{\zeta}/\partial\boldsymbol{z}_0$ удовлетворяет тождеству (7) при $c = 1$, т. е.

$$\mathbf{M}'\mathbf{J}\mathbf{M} = \mathbf{J}. \tag{41}$$

Для этого найдем дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют матрицы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}'$. Продифференцировав обе части тождества (40) по $\boldsymbol{z}_0$, получим

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\boldsymbol{\zeta}}{\partial\boldsymbol{z}_0} = \mathbf{J}H_{\zeta\zeta}\frac{\partial\boldsymbol{\zeta}}{\partial\boldsymbol{z}_0},$$

или

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{J}H_{\zeta\zeta}\mathbf{M}. \tag{42}$$

Транспонируя обе части этого равенства и учитывая соотношения (3) и симметричность матрицы $H_{\zeta\zeta}$, получим

$$\frac{d\mathbf{M}'}{dt} = \mathbf{M}'H_{\zeta\zeta}'\mathbf{J}' = -\mathbf{M}'H_{\zeta\zeta}\mathbf{J}. \tag{43}$$

Учитывая (42) и (43), вычислим теперь производную по времени от матрицы $\mathbf{M}'\mathbf{J}\mathbf{M}$. Имеем

$$\frac{d(\mathbf{M}'\mathbf{J}\mathbf{M})}{dt} = \frac{d\mathbf{M}'}{dt}\mathbf{J}\mathbf{M} + \mathbf{M}'\mathbf{J}\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\mathbf{M}'H_{\zeta\zeta}\mathbf{J}\mathbf{J}\mathbf{M} + \mathbf{M}'\mathbf{J}\mathbf{J}H_{\zeta\zeta}\mathbf{M}.$$

Если теперь заметить, что, согласно равенствам (3), $\mathbf{J}^2 = -\mathbf{E}_{2n}$, то это выражение можно представить и виде

$$\frac{d(\mathbf{M}'\mathbf{J}\mathbf{M})}{dt} = \mathbf{M}'H_{\zeta\zeta}\mathbf{M} - \mathbf{M}'H_{\zeta\zeta}\mathbf{M} \equiv 0.$$

Отсюда следует, что матрица $\mathbf{M}'\mathbf{J}\mathbf{M}$ постоянна. Но при $t = 0$ она, очевидно, равна $\mathbf{J}$. Поэтому при всех t имеет место равенство (41). Теорема доказана.

172. Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема. Пусть G_0 — некоторая область фазового пространства $q_1, \ldots, q_n$, $p_1, \ldots, p_n$. Из каждой ее точки $q_{10}, \ldots, q_{n0}$, $p_{10}, \ldots, p_{n0}$ как из начальной «выпустим» траекторию системы уравнений (1). Пусть G_t — совокупность точек $\boldsymbol{q} = q(q_0, p_0, t)$, $\boldsymbol{p} = p(q_0, p_0, t)$ в момент времени t, V_0 — объем области G_0, а V_t — объем области G_t.

Теорема (Лиувилля). *При движении гамильтоновой системы фазовый объем остается постоянным, т. е. $V_t = V_0$ при любом t.*

Доказательство.

Имеем равенства

$$\begin{aligned} V_0 &= \int\limits_{G_0}\!\!\ldots\!\int dq_{10}\ldots dq_{n0}dp_{10}\ldots dp_{n0}, \\ V_t &= \int\limits_{G_t}\!\!\ldots\!\int dq_1\ldots dq_n dp_1\ldots dp_n. \end{aligned} \tag{44}$$

В интеграле, входящем во второе из этих равенств, перейдем от переменных $q_1, \ldots, q_n$, $p_1, \ldots, p_n$ к переменным $q_{10}, \ldots, q_{n0}$, $p_{10}, \ldots, p_{n0}$. Тогда, как известно из курса математического анализа,

$$V_t = \int\limits_{G_0}\!\!\ldots\!\int |\det \mathbf{M}|\, dq_{10}\ldots dq_{n0}dp_{10}\ldots dp_{n0}, \tag{45}$$

где (в обозначениях предыдущего пункта) $\mathbf{M} = \partial\zeta/\partial\boldsymbol{z}_0$. Матрица $\mathbf{M}$ удовлетворяет равенству (41). Так как $\det\mathbf{J} = 1$, то из него следует, что $\det\mathbf{M} = \pm 1$. Но при $t = 0$, очевидно, $\mathbf{M} = \mathbf{E}_{2n}$ и $\det\mathbf{M} = \det\mathbf{E}_{2n} = +1$. Отсюда, ввиду непрерывности $\mathbf{M}$, получаем, что и при любых t $\det\mathbf{M} = +1$. Поэтому из (44) и (45) следует, что $V_t = V_0$. Теорема доказана.

173. Свободное каноническое преобразование и его производящая функция. Пусть преобразование (4) каноническое и в некоторой области фазового пространства удовлетворяет условию

$$\det\frac{\partial\boldsymbol{Q}}{\partial\boldsymbol{p}} \neq 0. \tag{46}$$

Тогда преобразование (4) называется *свободным каноническим преобразованием.*

При выполнении условия (46) из первых n равенств (4) можно выразить $\boldsymbol{p}$ через $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{Q}$ и t. Тогда выражение (18) может быть записано в виде

$$c\sum_{k=1}^{n} p_k \delta q_k - \sum_{k=1}^{n} P_k \delta Q_k = \delta F(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{Q},\ t),\ t) = \delta S(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{Q},\ t), \qquad (47)$$

где S — функция F, в которой $\boldsymbol{p}$ заменено на $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{Q},\ t)$.

Из равенства (47) вытекают соотношения

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = cp_i, \quad \frac{\partial S}{\partial Q_i} = -P_i \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n). \qquad (48)$$

Функция S называется *производящей функцией свободного канонического преобразования* (4).

Очевидно, что верно и обратное утверждение: если заданы дважды непрерывно дифференцируемая функция $S(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{Q},\ t)$ и число $c \neq 0$, то при условии

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial Q_i \partial q_k} \right\|_{i,\ k=1}^{n} \neq 0 \qquad (49)$$

формулы (48) задают свободное каноническое преобразование с валентностью c.

При условии (49) формулы (48) можно представить в виде (4). В самом деле, условие (49) означает, что первые n равенств из соотношений (48) можно разрешить относительно Q_i. Сделав это, получим $Q_i = Q_i(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p},\ t)$. Подставив эти функции в левые части последних n равенств из (48), получим $P_i = P_i(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p},\ t)$.

В п. 170 мы получили уравнение (24) и показали, что его можно записать в гамильтоновой форме. Осуществим эту запись, используя производящую функцию S. В (24) H представляет собой старую функцию Гамильтона, выраженную через новые переменные, а

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)' = \left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}'(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p},\ t)}{\partial t},\ \frac{\partial \boldsymbol{P}'(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p},\ t)}{\partial t}\right). \qquad (50)$$

В первых n равенствах соотношений (48) величину $\boldsymbol{Q}$ заменим на ее выражение $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p},\ t)$. В результате эти равенства станут тождествами относительно старых переменных $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{p}$, t. Продифференцировав их по t, получим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial t} + \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial t} = 0 \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n).$$

Меняя здесь порядок дифференцирования и пользуясь последними n равенствами из (48), имеем

$$-\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial Q_k}{\partial t} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_i} = 0 \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n).$$

Применяя векторно-матричные обозначения, запишем эти равенства в виде

$$-\frac{\partial \boldsymbol{Q}'}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}} + \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \boldsymbol{q}} = 0,$$

или

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}'}{\partial t} = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \boldsymbol{q}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{P}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{P}} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right). \tag{51}$$

Далее, последние n равенств из (48) дают

$$\frac{\partial \boldsymbol{P}'}{\partial t} = -\frac{\partial^2 S}{\partial \boldsymbol{Q} \partial t} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{Q}} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right). \tag{52}$$

Из (50) и (51), (52) получаем

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mathbf{J} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial S}{\partial t} \right)'.$$

Следовательно, уравнение (24) имеет вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mathbf{J} \left(cH + \frac{\partial S}{\partial t} \right)'_{\zeta}, \tag{53}$$

и новая функция Гамильтона

$$\mathcal{H} = cH + \frac{\partial S}{\partial t}, \tag{54}$$

где H и S должны быть выражены через $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{P}$, t.

Таким образом, если заданы производящая функция $S(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{Q},\ t)$ и валентность c канонического преобразования, то связь старых и новых переменных определяется из равенств (48), а функция Гамильтона, отвечающая преобразованной к новым переменным $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{P}$ системе (1), вычисляется по формуле (54). Мы видим, что при преобразовании системы (1) к новым переменным нужно все вычисления проводить не с $2n$ функциями (4), а с двумя функциями S и H. Ясно, насколько это важно при рассмотрении конкретных задач, особенно при большом числе степеней свободы n.

Можно заранее задать структуру новой функции Гамильтона $\mathcal{H}(\boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{P},\ t)$ и пытаться так подобрать производящую функцию S, чтобы удовлетворялось равенство (54), которое, с учетом формул (48), записывается в виде

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{Q},\ t)}{\partial t} + cH\left(\boldsymbol{q},\ \frac{1}{c}\left(\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{q}}\right)',\ t\right) = \mathcal{H}\left(\boldsymbol{Q},\ -\left(\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{q}}\right)',\ t\right). \qquad (55)$$

Можно, например, потребовать, чтобы какие-то (или даже все) «координаты» Q_i $(i = 1,\ 2, \ldots,\ n)$ не входили в новую функцию Гамильтона. И если удастся так подобрать S, чтобы удовлетворялось уравнение (55), то среди новых переменных в рассматриваемой задаче будут циклические «координаты», что позволяет (см. п. 164) понизить порядок системы дифференциальных уравнений движения на величину $2k$ (k — число циклических координат). А если все координаты циклические, то задача сводится к элементарным квадратурам, так как тогда $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\boldsymbol{P},\ t)$, и уравнения движения в новых переменных имеют вид

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} = f_i(\boldsymbol{P},\ t), \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i} = 0 \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n),$$

и, если Q_{i0}, P_{i0} — начальные значения величин Q_i, P_i, отсюда следует, что

$$Q_i = \int\limits_0^t f_i(\boldsymbol{P}_0,\ t)\ dt + Q_{i0}, \quad P_i = P_{i0} \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n).$$

Таким образом, мы имеем вполне определенный метод упрощения уравнений движения, который приводит к новой постановке задачи интегрирования уравнений динамики (1) — поиску функции S, удовлетворяющей уравнению в частных производных (55).

Пример 1. *Канонические преобразования примеров* 1, 3, 5 *п.* 170 *не являются свободными. В них переменные* $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{Q}$ *зависимы и свободно задаваться не могут.*

Пример 2. *Остальные канонические преобразования, рассмотренные в примерах п.* 170, *являются свободными, причем для преобразования* (29)

$$c = -1, \quad S = -\sum_{j=1}^{n} q_j Q_j, \qquad (56)$$

для преобразования (31)

$$c = -\alpha\beta, \quad S = -\beta \sum_{j=1}^{n} q_j Q_j, \qquad (57)$$

для преобразования (34)

$$c = 1, \quad S = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} q_j^2 \operatorname{ctg}\varphi_j \tag{58}$$

и для преобразования (37)

$$c = 2i, \quad S = \sum_{j=1}^{n}(q_j^2 - 2q_jQ_j + \frac{1}{2}Q_j^2). \tag{59}$$

174. О других типах производящих функций. Мы видели, что не все канонические преобразования являются свободными, и поэтому не каждое каноническое преобразование можно задать при помощи производящей функции вида $S(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{Q},\ t)$. Однако можно перейти к иным типам производящих функций. Пусть, например, преобразование (4) таково, что

$$\det\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}} \neq 0. \tag{60}$$

Тогда из последних n равенств (4) можно выразить $\boldsymbol{p}$ через $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{P}$ и t и можно получить производящую функцию S_1 канонического преобразования (4), зависящую не от $(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{Q},\ t)$, как это было в случае свободного преобразования, а от переменных $(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{P},\ t)$ [1]. В самом деле, перепишем (18) в виде

$$c\sum_{k=1}^{n} p_k\delta q_k - \sum_{k=1}^{n} P_k\delta Q_k - \sum_{k=1}^{n} Q_k\delta P_k + \sum_{k=1}^{n} Q_k\delta P_k = \delta F(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p},\ t)$$

или

$$c\sum_{k=1}^{n} p_k\delta q_k + \sum_{k=1}^{n} Q_k\delta P_k = \delta\left(F(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p},\ t) + \sum_{k=1}^{n} Q_kP_k\right).$$

Последнее равенство можно окончательно записать в виде

$$c\sum_{k=1}^{n} p_k\delta q_k + \sum_{k=1}^{n} Q_k\delta P_k = \delta S_1(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{P},\ t), \tag{61}$$

[1] Следует иметь в виду, что если каноническое преобразование свободное, то для него производящая функция не обязательно есть функция S от $(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{Q},\ t)$. Неравенства (46) и (60) могут, например, выполняться одновременно, и тогда для свободного канонического преобразования в качестве производящей функции можно также взять функцию S_1 от $(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{P},\ t)$.

где через S_1 обозначена функция $F + \sum\limits_{k=1}^{n} Q_k P_k$, в которой величины Q_k заменены на их выражения из первых n равенств (4), а переменная $\boldsymbol{p}$ заменена затем на ее значение $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{P},\ t)$, получающееся из последних n равенств (4).

Из (61) следует, что

$$\frac{\partial S_1}{\partial q_i} = cp_i, \quad \frac{\partial S}{\partial P_i} = Q_i \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{62}$$

И в точности так же, как и для свободного канонического преобразования, можно получить выражение для функции Гамильтона преобразованной системы (1)

$$\mathcal{H} = cH + \frac{\partial S_1}{\partial t}, \tag{63}$$

где H и $\partial S_1/\partial t$ должны быть записаны в новых переменных. Верно и обратное: если заданы число $c \neq 0$ и дважды непрерывно дифференцируемая функция $S_1(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{P},\ t)$, удовлетворяющая условию

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S_1}{\partial q_i \partial P_k} \right\|_{i,\ k=1}^{n} \neq 0, \tag{64}$$

то формулы (62) задают каноническое преобразование с валентностью, равной c. При условии (64) формулы (62) можно записать в виде равенств (4).

Мы рассмотрели два типа производящих функций $S(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{Q},\ t)$ и $S_1(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{P},\ t)$. Эти функции наиболее часто применяются при интегрировании (точном или приближенном) уравнений динамики. Но $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{P}$ тоже не всегда можно принять за независимые переменные. Однако[1] если заданы $2n$ независимых функций Q_i, P_i от $2n$ независимых переменных q_i, p_i, то из $4n$ величин Q_i, P_i, q_i, p_i $(i = 1,\ 2, \ldots,\ n)$ всегда можно выбрать $2n$ независимых так, чтобы при соответствующей нумерации переменных производящая функция U зависела от величин

$$q_1, \ldots, q_l, \quad p_{l+1}, \ldots, p_n, \quad Q_1, \ldots, Q_k, \quad P_{k+1}, \ldots, P_n \quad (l \geqslant 0, k \leqslant n), \tag{65}$$

и, быть может, от времени (в наборе $2n$ переменных (65) отсутствуют пары канонически сопряженных переменных q_i, p_i или Q_j, P_j). При

[1] См. § 29 книги: Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике, М.: Наука, 1966.

этом каноническая замена переменных и новая функция Гамильтона определяются по формулам

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = cp_i, \quad \frac{\partial U}{\partial p_g} = -cq_g, \quad \frac{\partial U}{\partial Q_j} = -P_j, \quad \frac{\partial U}{\partial P_h} = Q_h, \tag{66}$$

$$\begin{gathered} \mathcal{H} = cH + \frac{\partial U}{\partial t} \quad (i = 1, \dots, l;\ g = l+1, \dots, n; \\ j = 1, \dots, k;\ h = k+1, \dots, n). \end{gathered} \tag{67}$$

Пример 1. *Тождественное преобразование* (28)

$$Q_j = q_j, \quad P_j = p_j \quad (j = 1,\ 2, \dots,\ n)$$

задается производящей функцией

$$S_1 = \sum_{j=1}^{n} q_j P_j, \tag{68}$$

при этом $c = 1$.

Пример 2. *Для преобразования* (30)

$$c = \alpha\beta, \quad S_1 = \alpha \sum_{j=1}^{n} q_j P_j. \tag{69}$$

Пример 3. *Для канонического преобразования* (32), *определяющего перенос начала координат в фазовом пространстве,*

$$c = 1, \quad S_1 = \sum_{j=1}^{n} q_j P_j + \sum_{j=1}^{n} (g_j(t) q_j - f_j(t) P_j). \tag{70}$$

Пример 4. *Пусть задана произвольная дифференцируемая обратимая замена обобщенных координат* $\boldsymbol{q} \to \boldsymbol{Q}$, *определяемая формулами*

$$Q_i = f_i(q_1, \dots,\ q_n,\ t) \quad (i = 1,\ 2, \dots,\ n). \tag{71}$$

При этом преобразовании новые координаты выражаются только через старые координаты (но не импульсы). Оно является частным случаем канонических преобразований. Действительно, если положить $c = 1$ *и*

$$S_1 = \sum_{j=1}^{n} P_j f_j(q_1, \dots,\ q_n,\ t), \tag{72}$$

то, согласно формулам (62), *новые и старые импульсы связаны соотношениями*

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} P_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{73}$$

Пример 5. *Рассмотрим важный частный случай предыдущего примера: переход к вращающейся системе координат. Пусть*

$$\boldsymbol{Q} = \mathbf{A}\boldsymbol{q}, \tag{74}$$

где $\mathbf{A}$ *— ортогональная матрица* ($\mathbf{A}' = \mathbf{A}^{-1}$), *которая не обязательно постоянна. Непосредственным вычислением нетрудно показать, что формулы* (74) *вместе с заменой переменных*

$$\boldsymbol{P} = \mathbf{A}\boldsymbol{p} \tag{75}$$

определяют унивалентное каноническое преобразование. Согласно формуле (72), *этому преобразованию соответствует производящая функция*

$$S_1 = \boldsymbol{P} \cdot \mathbf{A}\boldsymbol{q}. \tag{76}$$

Примечательно, что обобщенные импульсы преобразуются по тем же формулам, что и обобщенные координаты.

Новая функция Гамильтона $\mathcal{H}(\boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{P}, t)$ *вычисляется по старой* $H(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p},\ t)$ *в соответствии с равенством* (63):

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{P}, t) = H(\mathbf{A}'\boldsymbol{Q},\ \mathbf{A}'\boldsymbol{P},\ t) + \frac{\partial S_1}{\partial t}. \tag{77}$$

Если матрица $\mathbf{A}$ *постоянна, то* $\partial S_1/\partial t \equiv 0$. *Если же* $\mathbf{A}$ *не будет постоянной матрицей, то*

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = \boldsymbol{P}\frac{d\mathbf{A}}{dt}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{P} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Q}. \tag{78}$$

Так как $\mathbf{A}$ *— ортогональная матрица, то произведение* $\dfrac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{A}^{-1}$ (см. п. 24) *— кососимметрическая матрица. Пусть*

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{A}^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Если ввести вектор $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3)$, *то*

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{Q}$$

и формула (78) *может быть записана в виде*

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = \boldsymbol{P} \cdot [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{Q}] = \boldsymbol{\omega} \cdot [\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{P}].$$

Таким образом, окончательно получаем функцию Гамильтона, соответствующую движению во вращающейся системе координат:

$$\mathcal{H} = H(\mathbf{A}'\boldsymbol{Q},\ \mathbf{A}'\boldsymbol{P},\ t) + \boldsymbol{\omega} \cdot [\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{P}]. \tag{79}$$

Пример 6 (Переход от декартовых координат к полярным). *Пусть*

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{80}$$

Если взять $c = 1$, *а*

$$S_1 = p_x r\cos\varphi + p_y r\sin\varphi,$$

то из равенств

$$p_r = \frac{\partial S_1}{\partial r} = p_x\cos\varphi + p_y\sin\varphi, \quad p_\varphi = \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} = -p_x r\sin\varphi + p_y r\cos\varphi$$

находим

$$p_x = p_r\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{r}p_\varphi, \quad p_y = p_r\sin\varphi + \frac{\cos\varphi}{r}p_\varphi. \tag{81}$$

Формулы (80), (81) *задают унивалентное каноническое преобразование* $x,\ y,\ p_x,\ p_y \to r,\ \varphi,\ p_r,\ p_\varphi$. *Если, например,*

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \Pi(\sqrt{x^2+y^2}), \tag{82}$$

то

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\varphi^2) + \Pi(r). \tag{83}$$

Пример 7 (Переход от декартовых координат к сферическим).
Если

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta, \tag{84}$$

то, положив $c = 1$, *а*

$$S_1 = p_x r \sin\theta \cos\varphi + p_y r \sin\theta \sin\varphi + p_z r \cos\theta,$$

из соотношений

$$p_r = \frac{\partial S_1}{\partial r}, \quad p_\varphi = \frac{\partial S_1}{\partial \varphi}, \quad p_\theta = \frac{\partial S_1}{\partial \theta}$$

получим

$$\begin{aligned} p_x &= \sin\theta\cos\varphi p_r - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}p_\varphi + \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}p_\theta, \\ p_y &= \sin\theta\sin\varphi p_r + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}p_\varphi + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}p_\theta, \\ p_z &= \cos\theta p_r - \frac{\sin\theta}{r}p_\theta. \end{aligned} \tag{85}$$

Равенства (84), (85) *задают унивалентное каноническое преобразование* x, y, z, p_x, p_y, $p_z \to r$, φ, θ, p_r, p_φ, p_θ. *Например, для*

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Pi\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right), \tag{86}$$

имеем

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta} + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) + \Pi(r). \tag{87}$$

Пример 8. *Пусть задана некоторая дифференцируемая обратимая замена обобщенных импульсов:*

$$p_i = g_i(P_1, P_2, \ldots, P_n, t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad \det\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{P}} \neq 0. \tag{88}$$

Формулы (88) *задают связь старых и новых импульсов* (*но не координат*).

Положим $c = 1$, *а*

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} q_k g_k(P_1, P_2, \ldots, P_n, t). \tag{89}$$

Тогда из формул (62) *находим соотношения*

$$Q_i = \frac{\partial S_1}{\partial P_i} = \sum_{k=1}^{n} q_k \frac{\partial g_k}{\partial P_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{90}$$

Эти соотношения представляют собой линейную неоднородную систему уравнений относительно $q_1,\ q_2, \ldots,\ q_n$. *Определитель системы — это транспонированный якобиан из* (88). *Так как он отличен от нуля, то система уравнений* (90) *однозначно определяет величины* $q_1,\ q_2, \ldots,\ q_n$ *как функции* $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{P}$ *и* t:

$$q_i = h_i(Q_1,\ Q_2, \ldots,\ Q_n,\ P_1,\ P_2, \ldots,\ P_n,\ t) \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{91}$$

Формулы (88) *и* (91) *задают унивалентное каноническое преобразование.*

§ 5. Метод Якоби интегрирования уравнений движения

175. Уравнение Гамильтона–Якоби. Теория канонических преобразований приводит нас к методу Якоби интегрирования канонической системы уравнений движения

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{1}$$

Если эту систему подвергнуть свободному унивалентному каноническому преобразованию, определяемому уравнениями

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial Q_i} = -P_i \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n), \tag{2}$$

где производящая функция S имеет в качестве аргументов величины $q_1, \ldots, q_n,\ Q_1, \ldots, Q_n,\ t$, то, согласно п. 173, система уравнений (1) примет вид

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i}, \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i} \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n), \tag{3}$$

где новая функция Гамильтона $\mathcal{H}$ определяется равенством

$$\mathcal{H} = H(q_i,\ p_i,\ t) + \frac{\partial S(q_i,\ Q_i,\ t)}{\partial t}, \tag{4}$$

в правой части которого величины q_i, p_i (после вычисления частной производной $\partial S/\partial t$) должны быть выражены через Q_j, P_j на основании уравнений (2).

Если функция S выбрана так, что $\mathcal{H} \equiv 0$, то уравнения (3) сразу интегрируются:

$$Q_i = \alpha_i \quad P_i = \beta_i \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n), \tag{5}$$

где α_i, β_i — произвольные постоянные. Если функция S удовлетворяет условию (49) п. 173, то из (2) находится зависимость исходных переменных от времени t и $2n$ произвольных постоянных α_i, β_i:

$$q_i = q_i(t,\ \alpha_j,\ \beta_j), \quad p_i = p_i(t,\ \alpha_j,\ \beta_j). \tag{6}$$

Функция S, согласно (2) и (4), должна при этом удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i,\ \frac{\partial S}{\partial q_i},\ t\right) = 0. \tag{7}$$

Это уравнение в частных производных называется *уравнением Гамильтона–Якоби.* В нем S есть функция $q_1,\ q_2, \ldots,\ q_n$ и t; величины $Q_1,\ Q_2, \ldots,\ Q_n$ рассматриваются как параметры.

Общее решение уравнения в частных производных зависит от произвольных функций. Такое решение называется *общим интегралом* этого уравнения. Однако в приложениях к решению задач механики главную роль играет не общий, а полный интеграл уравнения (7). *Полным интегралом* уравнения (7) называется его решение $S(q_i,\ \alpha_i,\ t)$, зависящее от n произвольных постоянных $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_n$ и удовлетворяющее условию

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_k} \right\|_{i,\ k=1}^{n} \neq 0. \tag{8}$$

Таким образом, мы получаем следующий способ интегрирования уравнений движения (1), основанный на рассмотрении уравнения (7).

Теорема (Якоби). *Если $S(q_i,\ \alpha_i,\ t)$ — полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби (7), содержащий n произвольных постоянных $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_n$, то решение (6) уравнений (1) находится из соотношений*

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = -\beta_i \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n), \tag{9}$$

где β_i — произвольные постоянные.

Теорема Якоби позволяет свести интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1) к нахождению полного интеграла уравнения (7) в частных производных. Вторая задача, конечно, не проще первой, а даже более сложна. Но оказывается, что метод Якоби является весьма эффективным среди существующих методов нахождения точных решений системы (1). Он также является одним из наиболее мощных методов приближенного интегрирования канонических уравнений.

Общего метода нахождения полного интеграла уравнения Гамильтона–Якоби (7) при произвольной функции H не существует. Остановимся только на некоторых частных способах нахождения полного интеграла.

176. Уравнение Гамильтона–Якоби для систем с циклическими координатами. Пусть координаты $q_{k+1}, \dots, q_n$ — циклические. Тогда

$$H = H(q_1, \dots, q_k, p_1, \dots, p_k, p_{k+1}, \dots, p_n, t).$$

Полный интеграл уравнения (7) ищем в виде

$$S = \alpha_{k+1} q_{k+1} + \dots + \alpha_n q_n + S^*(q_1, \dots, q_k, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t). \tag{10}$$

Подставив (10) в (7), получим уравнение для S^*

$$\frac{\partial S^*}{\partial t} + H(q_1, \dots, q_k, \frac{\partial S^*}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S^*}{\partial q_k}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n, t) = 0. \tag{11}$$

Таким образом, нахождение полного интеграла уравнения (7) приводит к рассмотрению уравнения (11), в котором S^* зависит уже не от $(n+1)$-й переменной, а от $(n-k+1)$-й, т. е. число независимых переменных уменьшилось на число циклических координат.

177. Уравнение Гамильтона–Якоби для консервативных и обобщенно консервативных систем. Пусть функция Гамильтона не зависит явно от времени:

$$H = H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n).$$

Тогда существует обобщенный интеграл энергии $H = h$, где h — произвольная постоянная. В уравнении (7) положим

$$S = -ht + V, \tag{12}$$

где функция V не зависит от t. Для нее получаем уравнение

$$H(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_n}) = h. \tag{13}$$

Это уравнение и будет уравнением Гамильтона–Якоби для консервативных и обобщенно консервативных систем. Из (13) находим $V = V(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, h)$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ — произвольные постоянные, не зависящие от h. Из (12) имеем выражение для S:

$$S = -ht + V(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, h). \tag{14}$$

Если функция S удовлетворяет условию (8) ($\alpha_n = h$), то (14) — полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби (7) и равенства (9) дают соотношения

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i \ (i = 1,\ 2, \dots,\ n), \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = -\beta_i \ (i = 1,\ 2, \dots,\ n-1), \tag{15}$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = t - \beta_n, \tag{16}$$

где $\beta_1, \dots,\ \beta_n$ — произвольные постоянные.

Последние $n-1$ соотношений в (15) — геометрические: они дают траектории в n-мерном координатном пространстве $q_1, \dots,\ q_n$. Вместе с равенством (16) эти соотношения дают и закон движения по траекториям. Первые n соотношений в (15) служат для определения импульсов p_i ($i = 1,\ 2, \dots,\ n$).

178. Характеристическая функция Гамильтона. Функцию V, входящую в правую часть равенства (14), называют *характеристической функцией Гамильтона.* Она удовлетворяет уравнению (13) и была введена в п. 177 как не зависящая от времени часть производящей функции S, задающей свободное каноническое преобразование, приводящее функцию Гамильтона $H(q_1, \dots,\ q_n,\ p_1, \dots,\ p_n)$ консервативной или обобщенно консервативной системы к функции $\mathcal{H} \equiv 0$.

Но функцию $V(q_1, \dots,\ q_n,\ \alpha_1, \dots,\ \alpha_{n-1},\ h)$ можно рассмотреть как производящую функцию некоторого канонического преобразования, свойства которого отличны от свойств преобразования, осуществляемого функцией S. Рассмотрим унивалентное каноническое преобразование, при котором новые импульсы P_i будут постоянными α_i ($i = 1,\ 2, \dots,\ n$), причем $\alpha_n = h$. Пусть соответствующей производящей функцией будет $V(q_1, \dots,\ q_n,\ P_1, \dots,\ P_{n-1},\ P_n)$. Согласно п. 174, старые и новые переменные связаны соотношениями вида (62):

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial V}{\partial P_i} = \frac{\partial V}{\partial \alpha_i}. \tag{17}$$

Так как $H = h = \alpha_n$, то отсюда следует уравнение

$$H(q_1, \dots,\ q_n,\ \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots,\ \frac{\partial V}{\partial q_n}) = h,$$

которое совпадает с уравнением (13). Но функция V не зависит от t, поэтому из равенства (63) п. 174 имеем такое выражение для новой функции Гамильтона

$$\mathcal{H} = P_n. \tag{18}$$

Таким образом, характеристическая функция Гамильтона задает каноническое преобразование, приводящее функцию $H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ к такой форме, когда все новые обобщенные координаты Q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ являются циклическими.

В новых переменных

$$\frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i} = 0 \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n), \tag{19}$$

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} = \delta_{in}, \tag{20}$$

где δ_{in} — символ Кронекера.

Поэтому

$$P_i = \alpha_i = \text{const}, \quad Q_i = -\beta_i = \text{const} \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n-1),$$

$$P_n = h = \text{const}, \quad Q_n - t = -\beta_n = \text{const},$$

что, в силу (17), находится в соответствии с формулами (15), (16).

Замечание 3. *Выбор величин α_i, входящих в характеристическую функцию Гамильтона, в качестве новых импульсов является в некоторой степени произвольным. Постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ не имеют, вообще говоря, определенного физического смысла, а просто представляют собой набор постоянных, появляющихся в процессе нахождения полного интеграла уравнения Гамильтона–Якоби.*

Применим к импульсам $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ произвольное дифференцируемое обратимое преобразование $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \to \alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*$:

$$\alpha_1 = g_1(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*), \ldots, \alpha_n = g_n(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*). \tag{21}$$

Замене импульсов (21) можно поставить в соответствие унивалентное каноническое преобразование Q_i, $\alpha_i \to Q_i^*$, α_i^* всех канонически сопряженных переменных $(i = 1,\ 2, \ldots,\ n)$. Для этого (см. пример 8 п. 174) достаточно взять производящую функцию в виде

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} Q_k g_k(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*).$$

В новых переменных функция Гамильтона будет иметь вид

$$\mathcal{H} = g_n(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*). \tag{22}$$

Преимущество новых импульсов α_i^* состоит в том, что они могут быть увязаны с физической сущностью задачи. Один частный случай выбора новых импульсов вместо величин α_i рассмотрен далее в §6.

179. Разделение переменных. Известны замечательные случаи, когда полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби (7) может быть найден при помощи разделения переменных. Метод разделения переменных состоит в том, что решение уравнения (7) ищется в виде суммы функций, каждая из которых зависит только от одной из переменных $q_1, \ldots, q_n$ и времени (и, конечно, произвольных постоянных):

$$S = S_0(t) + S_1(q_1,\ t) + S_2(q_2,\ t) + \ldots + S_n(q_n,\ t). \tag{23}$$

К сожалению, не существует простого критерия, позволяющего в общем случае по структуре функции Гамильтона судить о возможности разделения переменных в уравнении (7) [1]. Мы укажем только два простейших случая разделения переменных для консервативной или обобщенно консервативной системы.

1°. Пусть

$$H = H(f_1(q_1,\ p_1), \ldots,\ f_n(q_n,\ p_n)), \tag{24}$$

т. е. функция Гамильтона зависит от n функций f_i, каждая из которых зависит только от одной пары «своих» канонически сопряженных переменных q_i, p_i. Будем предполагать, что

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_i} \neq 0 \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{25}$$

Уравнение Гамильтона–Якоби (13) имеет вид

$$H\left(f_1\left(q_1,\ \frac{\partial V}{\partial q_1}\right), \ldots, f_n\left(q_n,\ \frac{\partial V}{\partial q_n}\right)\right) = h. \tag{26}$$

Положим

$$f_i\left(q_i,\ \frac{\partial V}{\partial q_i}\right) = \alpha_i \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{27}$$

При условии (25) равенства (27) можно разрешить относительно $\partial V/\partial q_i$:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = g_i(q_i,\ \alpha_i). \tag{28}$$

Тогда

$$V = \sum_{i=1}^{n} \int g_i(q_i,\ \alpha_i)\ dq_i,$$

[1] Исследование этого вопроса содержится в работе: Яров-Яровой М. С. Об интегрировании уравнения Гамильтона–Якоби методом разделения переменных // ПММ, 1963, Т. 27, вып. 6, С. 973-987.

а функция

$$S = -ht + \sum_{i=1}^{n} \int g_i(q_i,\ \alpha_i)\ dq_i \tag{29}$$

является решением уравнения Гамильтона–Якоби (7). Величина h в (29) есть функции произвольных постоянных $\alpha_1, \dots,\ \alpha_n$:

$$h = H(\alpha_1, \dots,\ \alpha_n). \tag{30}$$

Так как

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_k} = \frac{\partial g_i}{\partial \alpha_k} \quad (i,\ k = 1,\ 2, \dots,\ n),$$

а согласно (27) и (28)

$$\frac{\partial g_i}{\partial \alpha_k} = \frac{1}{\partial f_i / \partial p_i} \delta_{ik}, \tag{31}$$

то условие (8), записываемое в рассматриваемом случае в виде неравенства

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial \alpha_i} \neq 0,$$

очевидно, удовлетворяется. Следовательно, функция (29) будет полным интегралом уравнения (7).

2°. Пусть функция H выражается последовательно «функцией от функции», где каждая функция f_i зависит от предыдущей функции f_{i-1} и «своей» пары канонически сопряженных переменных $q_i,\ p_i$:

$$H = f_n(f_{n-1},\ q_n,\ p_n), \quad f_{n-1} = f_{n-1}(f_{n-2},\ q_{n-1},\ p_{n-1})$$

и т. д., т. е. функция Гамильтона имеет такую структуру:

$$H = f_n\{\dots f_3\{f_2[f_1(q_1,\ p_1),\ q_2,\ p_2],\ q_3,\ p_3\}, \dots,\ q_n,\ p_n\}. \tag{32}$$

Будем считать, что

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_i} \neq 0 \quad (i = 1,\ 2, \dots,\ n). \tag{33}$$

Для получения решения уравнения (13) положим

$$f_1\left(q_1,\ \frac{\partial V}{\partial q_1}\right) = \alpha_1,\ f_2\left(\alpha_1,\ q_2,\ \frac{\partial V}{\partial q_2}\right) = \alpha_2,\ \dots,$$

$$f_n\left(\alpha_{n-1},\ q_n,\ \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = \alpha_n = h.$$

При условии (33) эти равенства можно разрешить относительно производных $\partial V/\partial q_i$ $(i = 1,\ 2, \ldots,\ n)$. Получим

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = g_1(q_1,\ \alpha_1),\ \frac{\partial V}{\partial q_2} = g_2(q_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2), \ldots,\ \frac{\partial V}{\partial q_n} = g_n(q_n,\ \alpha_{n-1},\ \alpha_n).$$

Функция

$$S = -\alpha_n t + \sum_{i=1}^{n} \int g_i(q_i,\ \alpha_{i-1},\ \alpha_i)\ dq_i \tag{34}$$

будет решением уравнения (7). Легко проверить, что неравенство (8) при условии (33) выполнено, поэтому функция (34) будет полным интегралом уравнения (7).

Мы рассмотрели весьма частные случаи, когда специальная структура функции Гамильтона позволяет дать общий конструктивный способ построения общего интеграла уравнения Гамильтона–Якоби. Следует, однако, отметить, что указанные способы разделения переменных применимы к таким важным задачам механики, как задача о гармоническом осцилляторе, задача о движении физического маятника, задача двух тел, задача о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Лагранжа и др.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1 (Свободное вертикальное падение материальной точки у поверхности Земли). *Пусть ось Oq направлена вертикально вниз. Если m — масса точки, то*

$$H = \frac{1}{2m}p^2 - mgq,$$

где p — импульс, соответствующий обобщенной координате q, g — ускорение свободного падения.

Если

$$\frac{1}{2m}p^2 - mgq = h = \alpha,$$

то

$$p = \sqrt{2m(\alpha + mgq)} \tag{35}$$

и полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 - mgq = 0$$

запишется в виде

$$S = -\alpha t + \int \sqrt{2m(\alpha + mgq)}\, dq.$$

В соответствии с формулами (9) *имеем*

$$\frac{\partial S}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha} = -\beta.$$

Первое из этих соотношений дает равенство (35), *а из второго получаем*

$$-t + \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dq}{\sqrt{\alpha + mgq}} = -\beta,$$

или

$$-t + \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{\sqrt{\alpha + mgq}}{g} = -\beta. \tag{36}$$

Произвольные постоянные α *и* β *находятся из начальных условий. Пусть при* $t = 0$ *имеем* $q = 0$, $\dot{q} = 0$. *Тогда из* (35), (36) *и равенства* $p = m\dot{q}$ *следует, что* $\alpha = \beta = 0$ *и*

$$q = \frac{gt^2}{2}, \quad p = mgt.$$

Пример 2 (Движение стержня, опирающегося на горизонтальную плоскость и вертикальную ось). *Пусть в однородном поле тяжести движется бесконечно тонкий однородный стержень длиной* $2l$ *и массой* m. *Нижний конец стержня перемещается по гладкой горизонтальной плоскости, а верхний его конец на рассматриваемой стадии движения опирается на гладкую вертикальную ось* OZ (рис. 143). *Найдем полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби в этой задаче.*

Пусть q_1 — *угол между проекцией стержня на плоскость* OXY *и осью* OX, *а* q_2 — *угол, который образует стержень с вертикалью. Со стержнем жестко свяжем систему координат* $Gxyz$, *оси которой направлены по его главным центральным осям инерции, причем ось* Gy *лежит в плоскости, проходящей через стержень и вертикаль* OZ. *Для кинетической и потенциальной энергии имеем выражения*

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + \frac{1}{2}mv_G^2,$$
$$\Pi = mgl\cos q_2,$$

где A, B, C — *моменты инерции стержня относительно осей* Gx, Gy, Gz, *а* p, q, r — *проекции его угловой скорости на эти оси,* v_G — *скорость центра масс стержня,* g — *ускорение свободного падения.*

Имеем $A = B = \frac{1}{3}ml^2$, *а* $C = 0$ *ввиду того, что стержень бесконечно тонкий. Далее,*

$$p = \dot{q}_2, \quad q = \dot{q}_1 \sin q_2,$$

$$v_G^2 = l^2(\sin^2 q_2 \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2),$$

поэтому

$$T = \frac{2}{3}ml^2(\sin^2 q_2 \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2).$$

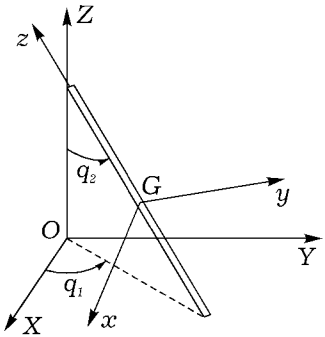

Рис. 143

При помощи функции Лагранжа $L = T - \Pi$ *находим обобщенные импульсы*

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{4}{3}ml^2 \sin^2 q_2 \dot{q}_1, \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \frac{4}{3}ml^2 \dot{q}_2.$$

Так как рассматриваемая система консервативна, то функция Гамильтона имеет вид $H = T + \Pi$ *и для нее получаем следующее выражение:*

$$H = \frac{3}{8ml^2}\left(\frac{p_1^2}{\sin^2 q_2} + p_2^2\right) + mgl\cos q_2.$$

Положим

$$p_1 = \alpha_1, \quad \frac{3}{8ml^2}\left(\frac{\alpha_1^2}{\sin^2 q_2} + p_2^2\right) + mgl\cos q_2 = \alpha_2.$$

Тогда полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби будет иметь вид

$$S = -\alpha_2 t + \alpha_1 q_1 + \int \sqrt{\frac{8ml^2}{3}(\alpha_2 - mgl\cos q_2) - \frac{\alpha_1^2}{\sin^2 q_2}}\, dq_2.$$

180. Теорема Лиувилля об интегрируемости гамильтоновой системы в квадратурах. В п. 163 при помощи теории множителя показано, что для построения общего интеграла системы

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n), \tag{37}$$

где $H = H(q_i,\ p_i,\ t)$, достаточно найти $2n - 1$ первых интегралов. Построение же $2n$-го интеграла сводится к квадратурам. Изложенный в п.п. 175–179 метод Якоби интегрирования системы (37) позволяет

получить существенно более сильный результат: во многих случаях для сведения интегрирования системы (37) к квадратурам достаточно знать только n ее первых интегралов.

Говорят, что функции $u_1,\ u_2, \dots,\ u_l$ от $q_1, \dots,\ q_n,\ p_1, \dots,\ p_n,\ t$ находятся в инволюции друг к другу или что они образуют систему в инволюции, если все скобки Пуассона $(u_i,\ u_k)$ $(i,\ k = 1,\ 2, \dots, l)$ тождественно равны нулю.

Теорема (Лиувилля). *Пусть система уравнений* (37) *имеет n первых интегралов*

$$f_i(q_1, \dots,\ q_n,\ p_1, \dots,\ p_n,\ t) = \alpha_i = \text{const} \quad (i = 1,\ 2, \dots,\ n), \tag{38}$$

находящихся в инволюции, т. е.

$$(f_r,\ f_s) = 0 \quad (r,\ s = 1,\ 2, \dots,\ n), \tag{39}$$

причем

$$\frac{\partial(f_1, \dots,\ f_n)}{\partial(p_1, \dots,\ p_n)} \neq 0. \tag{40}$$

Тогда интегрирование системы (37) *сводится к квадратурам.*

Доказательство.

Заметим сначала, что при условии (40) уравнения (38) можно разрешить относительно обобщенных импульсов. В результате получим

$$p_i = \varphi_i(q_1, \dots,\ q_n,\ \alpha_1, \dots,\ \alpha_n,\ t) \quad (i = 1,\ 2, \dots,\ n). \tag{41}$$

Покажем, что при выполнении условий теоремы имеют место равенства

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i} \quad (i,\ k = 1,\ 2, \dots,\ n). \tag{42}$$

Заменив в равенствах (38) величины p_i на их значения φ_i из (41) и продифференцировав затем r-ое из получившихся тождеств по q_i, получим

$$\frac{\partial f_r}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_r}{\partial p_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i} = 0.$$

Умножив обе части этого тождества на производную $\partial f_s / \partial p_i$ и произведя затем суммирование по i, придем к соотношению

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_r}{\partial q_i} \frac{\partial f_s}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_r}{\partial p_k} \frac{\partial f_s}{\partial p_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i} = 0 \quad (r,\ s = 1,\ 2, \dots,\ n). \tag{43}$$

Аналогично, умножив на $\partial f_r/\partial p_k$ обе части тождества, получающегося в результате дифференцирования по q_k s-го из равенств (38) (при $p_i = \varphi_i$) и произведя затем суммирование по k, получим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_r}{\partial p_k}\frac{\partial f_s}{\partial q_k} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_r}{\partial p_k}\frac{\partial f_s}{\partial p_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} = 0.$$

Если здесь в первой сумме изменить индекс суммирования k на индекс i и поменять порядок суммирования в двойной сумме, то придем к соотношению

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_r}{\partial p_i}\frac{\partial f_s}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_r}{\partial p_k}\frac{\partial f_s}{\partial p_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} = 0 \quad (r,\ s = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{44}$$

Вычитая почленно равенства (43) и (44) и учитывая условия (39), получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_r}{\partial p_k}\frac{\partial f_s}{\partial p_i}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i}\right) = 0 \quad (r,\ s = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{45}$$

Возьмем n из этих соотношений, соответствующих какому-то фиксированному значению r, и запишем их в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_s}{\partial p_i} x_i = 0 \quad (s = 1,\ 2, \ldots,\ n), \tag{46}$$

где

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_r}{\partial p_k}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i}\right).$$

Система уравнений (46) при условии (40) имеет только тривиальное решение, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_r}{\partial p_k}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i}\right) = 0 \quad (i,\ r = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{47}$$

Взяв теперь n из этих соотношений, соответствующих фиксированному значению i, совершенно аналогично покажем, что все выражения, заключенные в круглые скобки в (47), равны нулю, т. е. справедливы равенства (42).

Теперь обозначим H^* функцию Гамильтона H из (37), в которой величины p_i заменены их значениями φ_i из (41). Покажем, что

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = -\frac{\partial H^*}{\partial q_i} \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{48}$$

Имеем из (37),(41) и (42)

$$-\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{dp_i}{dt} = \frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_j}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i} = -\frac{\partial H^*}{\partial q_i},$$

и справедливость равенства (48) доказана.

Равенства (42) и (48) являются необходимыми и достаточными условиями существования такой функции S от q_1, $q_2, \dots$, q_n, t и от постоянных $\alpha_1, \dots$, α_n, что

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \varphi_i, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H^*. \tag{49}$$

Из математического анализа известно, что нахождение такой функции S требует только квадратур, т. е. вычисления интегралов от известных функций.

Равенства (49) показывают, что функция S удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби, соответствующему системе (37). Покажем, что S будет полным интегралом этого уравнения. Для этого надо проверить выполнимость неравенства (8), которое, в силу первых n равенств (49), приводится к виду

$$\det \left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_k} \right\|_{i,\, k=1}^{n} \neq 0. \tag{50}$$

Эти неравенства представляют собой необходимые и достаточные условия разрешимости уравнений (41) относительно $\alpha_1, \dots$, α_n. Но уравнения (41) эквивалентны исходным интегралам (38), которые при получении уравнений (41) уже разрешены относительно $\alpha_1, \dots$, α_n. Следовательно, неравенство (50) выполнено и S — полный интеграл.

При известном полном интеграле S интегрирование уравнений (37) завершается рассмотрением соотношений (9).

Следует отметить, что далеко не каждая система (37) приводится к квадратурам. Обычно нельзя найти необходимого количества первых интегралов. И не потому, что их нахождение технически сложно, а потому, что существуют причины принципиального характера, препятствующие интегрируемости[1].

[1] Подробное изложение этой проблемы можно найти в статье: Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // УМН, 1983, Т. 38, вып. 1, С. 3–67.

§ 6. Переменные действие–угол

181. Случай одной степени свободы. Продолжим начатое в п. п. 177–179 изучение некоторых вопросов, связанных с интегрированием консервативных и обобщенно консервативных систем. Будем изучать системы, движения которых обладают описанным ниже свойством периодичности. Для таких систем Делонэ предложил специальный выбор постоянных импульсов α_i^* $(i = 1, 2, \ldots, n)$ в характеристической функции Гамильтона п. 178. Эти новые импульсы представляют собой n независимых функций от набора величин α_i, появляющихся при нахождении полного интеграла уравнения Гамильтона–Якоби. Они называются *действиями* (точные определения см. далее) и ниже чаще всего будут обозначаться I_i. Канонически сопряженные к ним координаты w_i называются *угловыми переменными.* Переменные действие–угол I_i, w_i весьма удобны для описания движений, обладающих свойством периодичности. Они находят широкое применение в теории возмущений.

Чтобы понять сущность метода Делонэ, целесообразно сначала рассмотреть случай системы с одной степенью свободы. Фазовое пространство такой системы является двумерной плоскостью q, p, и периодические движения могут быть двух различных типов.

В движениях первого типа функции $q(t)$, $p(t)$ являются периодическими функциями с одним и тем же периодом. Точка, изображающая движение в фазовой плоскости, описывает замкнутую кривую. В этом случае говорят, что имеет место случай колебаний. Примером могут служить колебания маятника, рассмотренные в п. п. 93–96. На рис. 94 им отвечают замкнутые фазовые кривые, окружающие особые точки типа центр.

В движениях второго типа сама величина $q(t)$ не является периодической функцией, но когда она увеличивается или уменьшается на величину q_0, конфигурация системы не меняется. Здесь фазовые кривые $p = p(q)$ незамкнуты и имеют период q_0 по q. Периодические движения второго типа называют вращениями. Простейшим примером может служить движение твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Координата q здесь является углом поворота тела, и ее изменение на величину $q_0 = 2\pi$ не изменяет положения тела. На рис. 94 случаю вращений отвечают незамкнутые фазовые кривые, заполняющие части плоскости, лежащие выше и ниже сепаратрис.

Пусть $H = H(q, p)$ — функция Гамильтона системы с одной степенью свободы, причем $\dfrac{\partial H}{\partial p} \neq 0$. Тогда, согласно п. 177–179, характеристическая функция Гамильтона $V = V(q, \alpha)$, где $\alpha = h$ — постоянная

интеграла $H = h$. Из формул (17) п. 178 имеем

$$p = \frac{\partial V}{\partial q}. \tag{1}$$

Вместо α введем величину I по формуле

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p\, dq, \tag{2}$$

где интеграл берется по полному циклу изменения q (цикла колебания или вращения, смотря по тому, какому случаю отвечает фазовая кривая, определяемая уравнением $H(q,\ p) = h$). Величина I называется *переменной действие.* Из (2) видно, что I — это поделенная на 2π площадь, ограниченная замкнутой фазовой кривой, в случае колебаний или площадь, заключенная между фазовой кривой и отрезком оси q длины q_0, в случае вращений.

Подставив (1) в (2), получим

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial V(q,\ \alpha)}{\partial q} dq, \tag{3}$$

т. е. $I = I(\alpha)$. При условии $\dfrac{dI}{d\alpha} \neq 0$ из (3) находим $\alpha = \alpha(I)$. И тогда (см. п. 178) получаем новую функцию Гамильтона $H = \alpha(I)$. Производящая функция унивалентного канонического преобразования $q, p \to w, I$, вводящего переменные действие–угол, будет функцией $q,\ I\colon V = V(q,\ \alpha(I))$. *Угловая переменная* w определяется равенством

$$w = \frac{\partial V}{\partial I}. \tag{4}$$

Таким образом, алгоритм введения переменных действие–угол в гамильтоновой системе с одной степенью свободы выглядит так. Из уравнения $H(q,\ p) = h$ находим функцию $p = p(q,\ h)$, а затем вычисляем переменную I как функцию h:

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p(q,\ h)\, dq. \tag{5}$$

Обращение функции $I = I(h)$ дает $h = h(I)$. Производящая функция $V(q,\ I)$, задающая замену $q, p \to w, I$, определяется равенством

$$V(q,\ I) = \int p(q,\ h(I))\, dq. \tag{6}$$

Неявно замена $q, p \to w, I$ задается формулами

$$p = \frac{\partial V}{\partial q}, \quad w = \frac{\partial V}{\partial I}. \tag{7}$$

Новая функция Гамильтона

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(I) = h(I). \tag{8}$$

В переменных действие–угол уравнения движения будут такими:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w} = 0, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = \omega(I). \tag{9}$$

Отсюда следует, что

$$I = I_0 = \text{ const}, \quad w = \omega(I_0)t + w_0. \tag{10}$$

Величина ω называется частотой рассматриваемого периодического движения. Существенно то, что процедура получения величины ω не потребовала ничего, кроме квадратур и разрешения уравнений относительно некоторых переменных.

Отметим, что когда координата q совершает полный цикл изменения (в случае колебаний или вращений), то угловая переменная w возрастает на 2π. В самом деле, обозначая через Δw приращение w за цикл изменения q, имеем, с учетом (4),

$$\Delta w = \oint \frac{\partial w}{\partial q}\, dq = \oint \frac{\partial^2 V}{\partial I \partial q}.$$

Вынеся производную по I за знак интеграла и приняв во внимание формулу (3), получим

$$\Delta w = \frac{\partial}{\partial I} \oint \frac{\partial V}{\partial q} dq = \frac{\partial}{\partial I}(2\pi I) = 2\pi.$$

Это поясняет название величины w угловой переменной. За один цикл величина w изменяется на 2π, и налицо полная аналогия с вращением тела вокруг оси (частота ω — аналог угловой скорости тела, w — аналог угла его поворота вокруг оси).

Пример 1 (Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси). *Будем считать, что моменты внешних сил отсутствуют. Тогда, если A — момент инерции тела относительно оси вращения, а φ — угол его поворота вокруг оси, то*

$$T = \frac{1}{2}A\dot{\varphi}^2, \quad \Pi = 0; \quad p_\varphi = A\dot{\varphi}, \quad H = \frac{p_\varphi^2}{2A}.$$

Считая, что $\dot{\varphi} > 0$, *из уравнения* $H = h$ *находим* $p_\varphi = \sqrt{2Ah}$ *и, следовательно,*

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p_\varphi\, d\varphi = \frac{\sqrt{2Ah}}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \sqrt{2Ah};$$

$$V = \int p_\varphi\, d\varphi = I\varphi, \quad w = \frac{\partial V}{\partial I} = \varphi, \quad p_\varphi = \frac{\partial V}{\partial \varphi} = I;$$

$$\mathcal{H} = \frac{I^2}{2A}, \quad \omega = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = \frac{I}{A}.$$

Пример 2 (Гармонический осциллятор частоты ω). *Функцию Гамильтона возьмем в виде*

$$H = \frac{1}{2}\omega\left(q^2 + p^2\right).$$

Из уравнения $H = h$ *имеем* $p = \pm\sqrt{\frac{2h}{\omega} - q^2}$. *Если в правой части равенства*

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p\, dq$$

сделать замену $q = \sqrt{\frac{2h}{\omega}}\sin x$, *то получим*

$$I = \frac{h}{\pi\omega}\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 x\, dx = \frac{h}{\omega},$$

то есть

$$\mathcal{H} = \omega I.$$

Для производящей функции замены $q, p \to w, I$ *имеем выражение*

$$V = \pm\int\sqrt{\frac{2h}{\omega} - q^2}\, dq = \pm\int\sqrt{2I - q^2}\, dq.$$

Из формул (7) *находим замену, вводящую переменные действие–угол, в виде*

$$q = \sqrt{2I}\sin w, \quad p = \sqrt{2I}\cos w. \tag{11}$$

С заменой (11) *мы уже встречались ранее в примере* 6 *п.* 170.

182. Переменные действие–угол в задаче о движении маятника. Задача о движении маятника подробно исследована в п. п. 93–96. Несколько изменяя принятые там обозначения, напишем дифференциальное уравнение, описывающее движения маятника, в виде

$$\ddot{q} + \omega_0^2 \sin q = 0. \tag{12}$$

Это уравнение второго порядка может быть представлено в виде системы двух гамильтоновых дифференциальных уравнений первого порядка с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}p^2 - \omega_0^2 \cos q. \tag{13}$$

Для введения переменных действие–угол случай колебаний и вращений маятника надо рассмотреть отдельно.

В случае колебний константа интеграла энергии $H = h$ удовлетворяет неравенствам $-\omega_0^2 < h < \omega_0^2$. Пусть β — амплитуда колебаний. Тогда, если $k_1 = \sin\dfrac{\beta}{2}$, то

$$h = 2\omega_0^2 k_1^2 - \omega_0^2, \tag{14}$$

а действие I вычисляется по формуле

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p\,dq = 4\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\beta} p\,dq, \tag{15}$$

причем в последнем интеграле

$$p = 2\omega_0\sqrt{k_1^2 - \sin^2\frac{q}{2}}. \tag{16}$$

Введя вместо q переменную ψ по формуле

$$\psi = \arcsin\left(\frac{1}{k_1}\sin\frac{q}{2}\right), \tag{17}$$

выражение (15) можно переписать в виде

$$I = \frac{8\omega_0}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k_1^2\cos^2\psi}{\sqrt{1 - k_1^2\sin^2\psi}}\,d\psi = \frac{8\omega_0}{\pi}\left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k_1^2\sin^2\psi}\,d\psi - \right.$$
$$\left. - (1 - k_1^2)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k_1^2\sin^2\psi}}\right], \tag{18}$$

т. е.

$$I = \frac{8\omega_0}{\pi}\left[E(k_1) - (1 - k_1^2)K(k_1)\right], \tag{19}$$

где K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

Равенство (19) определяет I как функцию k_1. Продифференцировав обе его части по k_1, получим, при учете формул (21) п. 95,

$$\frac{\partial I}{\partial k_1} = \frac{8\omega_0}{\pi} k_1 K(k_1). \tag{20}$$

Отсюда видно, что $\dfrac{\partial I}{\partial k_1} \neq 0$ и, следовательно, на основании теоремы о неявной функции, равенство (19) разрешимо относительно k_1, причем для производной функции k_1 по I имеем выражение

$$\frac{\partial k_1}{\partial I} = \frac{\pi}{8\omega_0 k_1 K(k_1)}. \tag{21}$$

Новая функция Гамильтона $\mathcal{H}$ зависит только от I, она определяется из (14) и (19). Отбросив несущественную постоянную $-\omega_0^2$, получим, что

$$\mathcal{H} = 2\omega_0^2 k_1^2, \tag{22}$$

где $k_1 = k_1(I)$ — обратная к $I(k_1)$ функция, определяемая из (19).

Из (21), (22) находится частота колебаний

$$\omega_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k_1} \cdot \frac{\partial k_1}{\partial I} = \frac{\pi\omega_0}{2K(k_1)}. \tag{23}$$

Для периода колебаний $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega_1}$ получаем выражение $\tau = \dfrac{4K(k_1)}{\omega_0}$, совпадающее с выражением, полученным в п. 96.

Для производящей функции (6) канонического преобразования $q,\ p \to w,\ I$ после замены переменных (17) получаем выражение

$$V(q, I) = 4\omega_0\left[E(\psi, k_1) - (1 - k_1^2)F(\psi, k_1)\right], \tag{24}$$

где F и E — эллиптические интегралы первого и второго рода (см. п. 95), ψ определена равенством (17), а $k_1 = k_1(I)$ — равенством (19).

Для угловой переменной w, согласно второй формуле из (7), имеем выражение

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial I} = \frac{\partial V}{\partial k_1}\frac{\partial k_1}{\partial I}. \tag{25}$$

Дифференцирование обеих частей формулы (24) по k_1 дает равенство

$$\frac{\partial V}{\partial k_1} = 4\omega_0 \left[\frac{\partial E}{\partial k_1} + \frac{\partial E}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial k_1} + 2k_1 F - (1-k_1^2)\left(\frac{\partial F}{\partial k_1} + \frac{\partial F}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial k_1}\right)\right]. \quad (26)$$

Но из (17) следует, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial k_1} = -\frac{\sin\psi}{k_1\cos\psi}. \quad (27)$$

Используя эту формулу и соотношения (13), (14), (19) и (20) из п. 95, равенство (26) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial V}{\partial k_1} = 4\omega_0 k_1 F(\psi, k_1). \quad (28)$$

Учитывая (21) и (28), из формулы (25) находим, что

$$\frac{2K(k_1)w}{\pi} = F(\psi, k_1) = \int\limits_0^{\psi} \frac{dx}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2 x}},$$

т. е.

$$\psi = \operatorname{am}\frac{2K(k_1)w}{\pi}. \quad (29)$$

Теперь из (16), (17) и (29) получаем каноническое преобразование $q,\ p, \to w,\ I$, вводящее переменные действие–угол в случае колебаний маятника

$$\begin{aligned} q &= 2\arcsin\left[k_1 \operatorname{sn}\left(\frac{2K(k_1)}{\pi}w,\ k_1\right)\right], \\ p &= 2\omega_0 k_1 \operatorname{cn}\left(\frac{2K(k_1)}{\pi}w,\ k_1\right). \end{aligned} \quad (30)$$

Это каноническое преобразование унивалентно и 2π-периодично по w. Оно преобразует функцию Гамильтона (13) к виду (22).

Теперь рассмотрим случай вращений, когда переменная h интеграла энергии удовлетворяет неравенству $h > \omega_0^2$. Так как при замене p на $-p$, а q на $-q$ функция Гамильтона (13) не изменяется, то будем рассматривать только случай вращений при положительных p. Пусть при $t = 0$ имеем $q = 0,\ p = p_0 > 0$. Тогда

$$h = \frac{1}{2}p_0^2 - \omega_0^2 = \frac{2\omega_0^2}{k_2^2} - \omega_0^2, \quad (31)$$

где

$$k_2^2 = \frac{4\omega_0^2}{p_0^2} = \frac{2\omega_0^2}{\omega_0^2 + h} \quad (0 < k_2 < 1), \tag{32}$$

а фазовая кривая $p = p(q,\ h)$ задается уравнением

$$p = \frac{2\omega_0}{k_2}\sqrt{1 - k_2^2 \sin^2 \frac{q}{2}}. \tag{33}$$

Для действия I имеем такое выражение:

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p\, dq = \frac{\omega_0}{\pi k_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 - k_2^2 \sin^2 \frac{q}{2}}\, dq,$$

или, если воспользоваться четностью подынтегрального выражения и сделать замену $q = 2x$,

$$I = \frac{4\omega_0}{\pi k_2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k_2^2 \sin^2 x}\, dx,$$

т. е.

$$I = \frac{4\omega_0 E(k_2)}{\pi k_2}. \tag{34}$$

Принимая во внимание формулы (21) п. 95, из (34) находим

$$\frac{\partial I}{\partial k_2} = -\frac{4\omega_0 K(k_2)}{\pi k_2^2}.$$

Так как $\dfrac{\partial I}{\partial k_2} \neq 0$, то равенство (34) разрешимо относительно k_2, причем для производной функции k_2 по I имеем выражение

$$\frac{\partial k_2}{\partial I} = -\frac{\pi k_2^2}{4\omega_0 K(k_2)}. \tag{35}$$

Новая функция Гамильтона определяется из (31) и (34). Отбросив несущественную постоянную $-\omega_0^2$, получим

$$\mathcal{H} = \frac{2\omega_0^2}{k_2^2}, \tag{36}$$

где $k_2 = k_2(I)$ — функция, обратная функции $I(k_2)$ из (34).

Учитывая (35), для частоты ω_2 вращений получим такое же выражение:

$$\omega_2 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k_2}\frac{\partial k_2}{\partial I} = \frac{\pi\omega_0}{k_2 K(k_2)}. \tag{37}$$

За промежуток времени, равный $\frac{2\pi}{\omega_2}$, величина q получает приращение 2π.

Для производящей функции (6) получаем выражение

$$V(q,\ I) = \frac{4\omega_0}{k_2} E\left(\frac{q}{2},\ k_2\right). \tag{38}$$

Угловая переменная w вводится при помощи равенства

$$w = \frac{\partial V}{\partial I} = \frac{\partial V}{\partial k_2}\frac{\partial k_2}{\partial I},$$

которое, при учете формул (35) и выражения (20) п. 95, преобразуется к виду

$$\frac{K(k_2)w}{\pi} = F\left(\frac{q}{2},\ k_2\right).$$

Отсюда и из (33) находим

$$q = 2\,\mathrm{am}\left(\frac{K(k_2)w}{\pi}\right), \quad p = \frac{2\omega_0}{k_2}\,\mathrm{dn}\left(\frac{K(k_2)w}{\pi}\right). \tag{39}$$

Здесь $k_2 = k_2(I)$ из (34). Формулы (39) задают унивалентное каноническое преобразование $q,\ p \to w,\ I$, приводящее функцию Гамильтона (13) к виду (36).

183. О переменных действие–угол для системы с n степенями свободы. Ограничимся лишь случаем, когда уравнение (13) п. 177, определяющее характеристическую функцию Гамильтона V, является уравнением с разделяющимися переменными. Тогда

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i(q_i,\ \alpha_1,\ \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1},\ h). \tag{40}$$

Отсюда и из формул (17) п. 178 получим

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{\partial V_i}{\partial q_i} = p_i(q_i,\ \alpha_1,\ \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1},\ h) \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{41}$$

Эти уравнения задают проекции траектории в $2n$-мерном фазовом пространстве $q_1,\ q_2,\ldots,\ q_n, p_1,\ p_2,\ldots,\ p_n$ на плоскости $q_i,\ p_i$ $(i = 1,\ 2,\ldots,\ n)$. Будем предполагать, что движение в каждой из плоскостей обладает свойством периодичности, т. е. в плоскости $q_i,\ p_i$ кривая (41) замкнута или периодична по q_i с некоторым периодом q_{i0}.

Так как в случае (40) происходит полное разделение переменных, то при фиксированных величинах $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots\alpha_{n-1},\ h$ движения в плоскостях $q_i,\ p_i\quad (i = 1,\ 2,\ldots,\ n)$ независимы и каждое из них можно исследовать, как это было сделано в п. 181 в случае одной степени свободы. Имеем

$$I_i = \frac{1}{2\pi}\oint p_i\,dq_i = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{\partial V}{\partial q_i}\,dq_i \quad (i = 1,\ 2,\ldots,\ n), \tag{42}$$

где интеграл берется по полному циклу периодического движения (колебания или вращения, смотря по тому, какой случай имеет место). Равенства (42) определяют n функций $I_i = I_i(\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots\alpha_{n-1},\ h)$. Эти функции независимы в силу независимости пар $q_i,\ p_i\quad (i = 1,\ 2,\ldots,\ n)$. Величины $I_1,\ I_2,\ldots,\ I_n$ можно принять за новые импульсы (вместо $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots\alpha_{n-1},\ h$). Тогда

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= f_1(I_1,\ I_2,\ldots,\ I_n), & \alpha_2 &= f_2(I_1,\ I_2,\ldots,\ I_n),\ldots,\\ \alpha_{n-1} &= f_{n-1}(I_1,\ I_2,\ldots,\ I_n), & \alpha_n &= f_n(I_1,\ I_2,\ldots,\ I_n). \end{aligned}$$

Если эти величины подставить в (40), то получим

$$V = V(q_1,\ldots,\ q_n,\ I_1,\ldots,\ I_n).$$

Соотношения

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i},\ w_i = \frac{\partial V}{\partial I_i} \quad (i = 1,\ 2,\ldots,\ n) \tag{43}$$

неявно задают унивалентное каноническое преобразование от исходных переменных $q_i,\ p_i$ к переменным действие–угол $I_i,\ w_i$. Новая функция Гамильтона имеет вид

$$\mathcal{H} = f_n(I_1,\ I_2,\ldots,\ I_n). \tag{44}$$

Все новые координаты (углы w_i) являются циклическими.

В новых переменных уравнения движения будут такими:

$$\frac{dI_i}{dt} = 0,\ \frac{dw_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_i} = \omega_i(I_1,\ I_2,\ldots,\ I_n) \quad (i = 1,\ 2,\ldots,\ n),$$

где ω_i — частота периодического движения (в плоскости $q_i,\ p_i$).

Как видим, метод Делонэ позволяет получить все частоты движения путем изучения функций H и V, при этом не требуется полное исследование движения системы.

Покажем, что i-я угловая переменная w_i за полный цикл изменения j-й координаты q_j получает приращение

$$\Delta w_i = 2\pi\delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Действительно, используя формулы (42) и (43), находим

$$\Delta w_i = \oint \frac{\partial w_i}{\partial q_j}\, dq_j = \oint \frac{\partial^2 V}{\partial I_i \partial q_j}\, dq_j = \frac{\partial}{\partial I_i} \oint \frac{\partial V}{\partial q_j}\, dq_j = \frac{\partial}{\partial I_i}(2\pi I_j) = 2\pi\delta_{ij}.$$

Замечание 4. *Если координата q_i циклическая, то соответствующий ей импульс p_i постоянен, и траектория в плоскости q_i, p_i будет прямой линией. Тогда движение в плоскости q_i, p_i можно считать периодическим (вращательного типа) с любым периодом q_{i0}. Удобно принять $q_{i0} = 2\pi$. Тогда*

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i\, dq_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_i\, dq_i = \frac{1}{2\pi} p_i \int_0^{2\pi} dq_i = p_i,$$

т. е. переменная действие I_i в случае циклической координаты q_i совпадает с импульсом p_i.

184. Переменные действие–угол в задаче двух тел. Задача двух тел изучалась в §1 гл. 8. Здесь будут рассмотрены переменные действие–угол в этой задаче. Будем использовать обозначения из §1 гл. 8. Орбиту считаем эллиптической (или, в частности, круговой). Расстояние r точки P от притягивающего центра O удовлетворяет неравенствам $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, где $r_1 = a(1-e)$, $r_2 = a(1+e)$ (a — большая полуось орбиты, e — ее эксцентриситет). Отсюда и из формул §1 гл. 8 следует, что

$$r_1 + r_2 = 2a, \quad r_1 r_2 = a^2(1-e^2) = ap = \frac{ac^2}{k}, \tag{45}$$

где p — параметр орбиты, c — константа интеграла площадей, величина k определена в п. 115.

Уравнению (1) п. 115 задачи двух тел соответствуют уравнения Лагранжа второго рода с функцией Лагранжа $L = T - \Pi$, где $T = \frac{1}{2}v^2$,

$\Pi = -\frac{k}{r}$. Для квадрата v^2 скорости точки P имеем в сферических координатах (см. рис. 9) выражение (30) п. 9. Поэтому

$$L = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r},$$

обобщенные импульсом вычисляются по формулам

$$p_r = \dot{r}, \quad p_\varphi = r^2 \sin^2\theta\dot{\varphi}, \quad p_\theta = r^2\dot{\theta}, \tag{46}$$

а функция Гамильтона $H = T + \Pi$ имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta} + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) - \frac{k}{r}. \tag{47}$$

Координата φ циклическая. Поэтому $p_\varphi = \alpha_\varphi = \text{const}$, а характеристическая функция Гамильтона имеет вид

$$V = \alpha_\varphi\varphi + \int p_\theta\, d\theta + \int p_r\, dr, \tag{48}$$

причем

$$p_\theta^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta} = \alpha_\theta^2 = \text{const}, \quad p_r^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{r^2} - \frac{2k}{r} = 2\alpha_3 = \text{const}. \tag{49}$$

Постоянная $2\alpha_3$ равна константе h интеграла энергии (7) из п. 117 и для эллиптической орбиты отрицательна.

Из (49) получаем выражение для величины p_r^2:

$$p_r^2 = 2\alpha_3 + \frac{2k}{r} - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2} \equiv -\frac{2\alpha_3(r - r_1)(r_2 - r)}{r^2}. \tag{50}$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях r в обеих частях последнего тождества дает соотношения между постоянными α_θ, α_3 и величинами r_1, r_2:

$$r_1 + r_2 = -\frac{k}{\alpha_3}, \quad r_1 r_2 = -\frac{\alpha_\theta^2}{2\alpha_3}. \tag{51}$$

Сравнивая первые формулы из (45) и (51), получаем соотношение

$$a = -\frac{k}{2\alpha_3}. \tag{52}$$

Сравнение же вторых формул из (45) и (51) при учете соотношения (52) приводит к равенству

$$\alpha_\theta = c, \tag{53}$$

т. е. постоянная α_θ в (49) равна константе интеграла площадей.

Введем переменные действие I_r, I_φ, I_θ. Так как φ циклическая координата, то, согласно замечанию предыдущего пункта, имеем

$$I_\varphi = p_\varphi = \alpha_\varphi. \tag{54}$$

Величины I_θ I_r определяются равенствами:

$$I_\theta = \frac{1}{2\pi}\oint p_\theta\, d\theta, \quad I_r = \frac{1}{2\pi}\oint p_r\, dr. \tag{55}$$

Для вычисления первого из интегралов (55) заметим[1], что в сферических координатах справедливо соотношение

$$2T = p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} + p_\theta\dot{\theta}. \tag{56}$$

Если же в плоскости орбиты ввести полярные координаты r, ν (ν — истинная аномалия), то $2T = \dot{r}^2 + r^2\dot{\nu}^2$, $p_r = \dot{r}$, $p_\nu = r^2\dot{\nu}$. Для импульса p_ν, при учете интеграла площадей $r^2\dot{\nu} = c$ и формулы (53), имеем равенства $p_\nu = c = \alpha_\theta$. Принимая это во внимание, выражение для удвоенной кинетической энергии $2T = p_r\dot{r} + p_\nu\dot{\nu}$ можно записать в виде

$$2T = p_r\dot{r} + \alpha_\theta\dot{\nu}. \tag{57}$$

Из сравнения правых частей формул (56) и (57), при учете равенств (54), следует, что

$$p_\theta d\theta = \alpha_\theta d\nu - I_\varphi d\varphi. \tag{58}$$

За один оборот точки P по орбите угол θ совершает полный цикл его колебания, а углы ν и φ изменяются на 2π. Поэтому, принимая в расчет формулу (58), для первого из интегралов (55) получаем выражение $I_\theta = \alpha_\theta - I_\varphi$, т. е.

$$\alpha_\theta = I_\varphi + I_\theta. \tag{59}$$

Величина p_r во втором из интегралов (55) положительна, когда r увеличивается от r_1 до r_2, и отрицательна при уменьшении r от r_2 до r_1.

[1]См.: Голдстейн Г. Классическая механика. М.: Наука, 1975.

Принимая это во внимание и учитывая соотношения (50), выражение для I_r можно записать в виде

$$I_r = \frac{\sqrt{-2\alpha_3}}{\pi} \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{(r-r_1)(r_2-r)}}{r}\, dr. \tag{60}$$

Для вычисления интеграла в правой части этой формулы введем вместо r новую переменную $x(r)$ по формуле

$$r = \frac{r_1 + r_2 x^2}{1+x^2}.$$

Тогда

$$r - r_1 = \frac{(r_2-r_1)x^2}{1+x^2}, \quad r_2 - r = \frac{r_2-r_1}{1+x^2}, \quad dr = \frac{2(r_2-r_1)x}{(1+x^2)^2}dx,$$
$$x(r_1) = 0, \quad x(r_2) = +\infty.$$

Поэтому

$$I_r = \frac{2\sqrt{-2\alpha_3}(r_2-r_1)^2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{x^2}{(r_1+r_2x^2)(1+x^2)^2}\, dx. \tag{61}$$

Подынтегральное выражение в (61) можно представить в виде

$$\frac{x^2}{(r_1+r_2x^2)(1+x^2)^2} =$$
$$= \frac{1}{r_2-r_1}\left[\frac{r_1}{r_2-r_1}\cdot\frac{1}{1+x^2} - \frac{r_1r_2}{r_2-r_1}\cdot\frac{1}{r_1+r_2x^2} + \frac{1}{(1+x^2)^2}\right].$$

Но

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}, \quad \int\limits_0^\infty \frac{dx}{r_1+r_2x^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{r_1r_2}}, \quad \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4},$$

поэтому после интегрирования и несложных преобразований формулу (61) можно записать в виде

$$I_r = \frac{\sqrt{-2\alpha_3}}{2}(r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1r_2}). \tag{62}$$

Принимая во внимание выражения (51) для $r_1 + r_2$ и $r_1 r_2$ и учитывая равенство (59), формуле (62) можно придать следующую форму:

$$I_r = \frac{k}{\sqrt{-2\alpha_3}} - (I_\varphi + I_\theta). \tag{63}$$

Но, согласно (47) и (49), $H = \alpha_3$. Поэтому, учитывая унивалентность канонического преобразования, вводящего переменные действие–угол, из (63) получаем следующее выражение для функции Гамильтона, записанной в переменных I_r, I_φ, I_θ:

$$\mathcal{H} = -\frac{k^2}{2(I_r + I_\varphi + I_\theta)^2}. \tag{64}$$

Угловые переменные, отвечающие переменным действие I_r, I_φ, I_θ, обозначим через w_r, w_φ, w_θ. Так как $\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_r} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_\varphi} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_\theta}$, то соответствующие им частоты ω_r, ω_φ, ω_θ равны. Этого и следовало ожидать, так как изучаемое движение материальной точки по эллиптической орбите является периодическим (см. п. 121).

185. Элементы Делонэ. Введем новые переменные I_i, w_i ($i = 1, 2, 3$), имеющие более ясный геометрический и механический смысл, нежели переменные I_r, I_φ, I_θ, w_r, w_φ, w_θ. Для этого сделаем замену переменных по формулам:

$$w_1 = w_\varphi - w_\theta, \quad w_2 = w_\theta - w_r, \quad w_3 = w_r, \tag{65}$$

$$I_1 = I_\varphi, \quad I_2 = I_\varphi + I_\theta, \quad I_3 = I_r + I_\varphi + I_\theta. \tag{66}$$

При помощи какого-либо из критериев п. 169 можно проверить, что равенства (65), (66) задают унивалентное каноническое преобразование. В новых переменных функция Гамильтона принимает вид:

$$\mathcal{H} = -\frac{k^2}{2I_3^2}. \tag{67}$$

Выясним смысл переменных I_i, w_i ($i = 1, 2, 3$). Из (52) и (67) с учетом того, что $H = \alpha_3$, находим

$$I_3 = \sqrt{ka}. \tag{68}$$

Далее имеем

$$\frac{dw_3}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_3} = \frac{k^2}{I_3^3} = \frac{k^2}{(ka)^{3/2}} = \frac{\sqrt{k}}{a^{3/2}} = n,$$

где n — среднее движение (см. формулу (20) п. 121). То есть w_3 — это, с точностью до константы, средняя аномалия $n(t-\tau)$ (см. п. 122; τ — это время прохождения точки P через перицентр). Полагая эту константу равной нулю, получаем, что

$$w_3 = n(t-\tau). \tag{69}$$

Теперь рассмотрим пару канонически сопряженных переменных I_2, w_2. Из (53), (59) и (66) следут, что $I_2 = c$, т. е. I_2 — это величина кинетического момента точки P относительно притягивающего центра. Но из (45) видно, что $c = \sqrt{ka(1-e^2)}$. Поэтому

$$I_2 = \sqrt{ka(1-e^2)}. \tag{70}$$

Так как $\dfrac{dw_2}{dt} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_2} = 0$, то w_2 представляет собой некоторый постоянный угол, отсчитываемый в плоскости орбиты. Положим

$$w_2 = \omega, \tag{71}$$

где (см. п. 123) ω — угловое расстояние перицентра от узла.

И, наконец, рассмотрим переменные I_1, w_1. Согласно (54) и (66), $I_1 = \alpha_\varphi$, т. е. I_1 — это проекция кинетического момента точки P на ось Oz (см. рис. 9 и 126). Учитывая еще, что $\dfrac{dw_1}{dt} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_1} = 0$, получаем, что w_1 — это некоторый постоянный угол, отсчитываемый в плоскости Oxy. Примем, что w_1 совпадает с долготой восходящего узла Ω. Таким образом (см. рис. 126 и формулу (70)):

$$I_1 = c\cos i = I_2 \cos i = \sqrt{ka(1-e^2)}\cos i, \quad w_1 = \Omega, \tag{72}$$

где i — наклонение орбиты.

Введенные канонически сопряженные переменные I_1, I_2, I_3, w_1, w_2, w_3 называются *каноническими переменными Делонэ* или, кратко, *элементами Делонэ*. Следуя Делонэ, для них часто используются обозначения H, G, L, h, g, l (не путать обозначения H, L, h элементов Делонэ с обозначениями функций Гамильтона, Лагранжа и константы интеграла энергии!). Элементы Делонэ связаны с обычными элементами орбиты Ω, i, a, e, ω, τ следующими получаемыми из (68)–(72) соотношениями:

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{ka}, & l &= n(t-\tau), \\ G &= \sqrt{ka(1-e^2)}, & g &= \omega, \\ H &= \sqrt{ka(1-e^2)}\cos i, & h &= \Omega. \end{aligned} \tag{73}$$

В переменных Делонэ функция Гамильтона задачи двух тел записывается в виде

$$\mathcal{H} = -\frac{k^2}{2L^2}. \tag{74}$$

Две системы канонических элементов Пуанкаре. Для многих приложений (например, связанных с исследованием движения планет) целесообразно иметь канонически сопряженные переменные, среди которых есть такие, которые малы для малых значений эксцентриситетов и наклонений орбит. Пуанкаре ввел две системы таких переменных. Их называют элементами Пуанкаре.

Первая система элементов Пуанкаре Λ, Γ, Z, λ, γ, z связана с элементами Делонэ при помощи унивалентного канонического преобразования вида:

$$\begin{aligned} &\Lambda = L, && \Gamma = L - G, && Z = G - H, \\ &\lambda = l + g + h, && \gamma = -g - h, && z = -h. \end{aligned} \tag{75}$$

Отсюда и из (73) получаем выражения элементов Λ, Γ, Z, λ, γ, z через обычные элементы кеплеровской орбиты:

$$\begin{aligned} &\Lambda = \sqrt{ka}, && \lambda = n(t - \tau) + \omega + \Omega, \\ &\Gamma = \sqrt{ka}(1 - \sqrt{1 - e^2}), && \gamma = -\omega - \Omega, \\ &Z = \sqrt{ka(1 - e^2)}(1 - \cos i), && z = -\Omega. \end{aligned} \tag{76}$$

Для орбиты малого эксцентриситета и наклонения элементы Γ и Z будут величинами порядка e^2 и i^2 соответственно.

Во *второй системе элементов Пуанкаре* величины Λ, λ — те же канонически сопряженные переменные, что и в первой системе, а остальные четыре элемента определяются формулами (ξ, p — импульсы, η, q — координаты):

$$\begin{aligned} &\xi = \sqrt{2\Gamma}\cos\gamma, && \eta = \sqrt{2\Gamma}\sin\gamma, \\ &p = \sqrt{2Z}\cos z, && q = \sqrt{2Z}\sin z. \end{aligned} \tag{77}$$

Для орбиты малого эксцентриситета и наклонения величины ξ, η и p, q имеет порядок e и i соответственно.

И для первой, и для второй систем канонических элементов Пуанкаре функция Гамильтона задачи двух тел имеет вид

$$\mathcal{H} = -\frac{k^2}{2\Lambda^2}. \tag{78}$$

§ 7. Канонические преобразования в теории возмущений

186. Предварительные замечания. Точное интегрирование дифференциальных уравнений движения реальной механической системы возможно только в очень редких случаях. Эти случаи являются скорее исключением, чем правилом. Поэтому разработано много методов, позволяющих проводить приближенное исследование систем, уравнения движения которых не могут быть решены точно, но в то же время некоторая упрощенная задача, называемая невозмущенной задачей, допускает точное решение. Совокупность этих методов образует теорию возмущений, которая находит самое широкое применение во всех областях науки и техники, где рассматриваются процессы, описываемые дифференциальными уравнениями.

В теории возмущений предполагается, что различие между реальной (возмущенной) системой и ее упрощенной (невозмущенной) моделью можно рассматривать как малые возмущения. Возмущения появляются, например, за счет того, что к основным силам, приложенным к точкам механической системы, добавляются некоторые другие силы, являющиеся в определенном смысле малыми по сравнению с основными силами. Например, если пренебречь влиянием Солнца и считать Землю и Луну материальными точками, то невозмущенной задачей о движении Луны вокруг Земли будет задача двух тел (материальных точек). Влияние притяжения Солнца и отличие Земли и Луны от точечных масс можно считать малыми и отнести к возмущающим воздействиям, которые можно учесть методами теории возмущений.

Бывает и так, что уравнения движения механической системы очень сложны и получить их точное решение нельзя, но можно подобрать другую систему, которая в определенном смысле почти такая же, как и исходная, но ее уравнения движения могут быть проинтегрированы точно. Различие между исходной и таким образом подобранной системой приводит к появлению малых возмущений.

В механике тщательно изучаются системы, уравнения движения которых точно интегрируются. Это связано с тем, что интегрируемые задачи часто используются в качестве невозмущенных в более сложных, но реальных и нужных задачах.

Методы теории возмущений позволяют исследовать движение механических систем, как правило, на конечном (хотя иногда и очень большом) интервале времени.

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые вопросы применения канонических преобразований в теории возмущений систем, движение которых описывается дифференциальными уравнениями Гамильтона.

187. Вариация постоянных в задачах механики. Предположим, что в уравнениях движения механической системы

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n) \tag{1}$$

функция Гамильтона $H(q_i,\ p_i,\ t)$ может быть представлена в виде суммы

$$H = H_0 + H_1, \tag{2}$$

причем дифференциальные уравнения (1) с функцией $H = H_0$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i} \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n) \tag{3}$$

могут быть проинтегрированы в замкнутой форме. Пусть решение системы (3) записано в виде

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(q_{10}, \ldots,\ q_{n0},\ p_{10}, \ldots,\ p_{n0},\ t), \\ p_i &= p_i(q_{10}, \ldots,\ q_{n0},\ p_{10}, \ldots,\ p_{n0},\ t), \end{aligned} \tag{4}$$

где q_{i0} и p_{i0} — значения величин q_i, p_i в начальный момент $t = 0$. Для интегрирования уравнений (1) сделаем в них замену переменных по формулам (4), принимая величины q_{i0}, p_{i0} за новые переменные. Так мы приходим к проблеме вариации произвольных постоянных в задачах механики, описываемых каноническими уравнениями Гамильтона (1).

Формулы (4) задают (см. п. 171) унивалентное каноническое преобразование. Это преобразование имеет обратное:

$$\begin{aligned} q_{i0} &= q_{i0}(q_1, \ldots,\ q_n,\ p_1, \ldots,\ p_n,\ t), \\ p_{i0} &= p_{i0}(q_1, \ldots,\ q_n,\ p_1, \ldots,\ p_n,\ t), \end{aligned} \tag{5}$$

которое также является унивалентным каноническим преобразованием. Следовательно, скобки Пуассона функций (5) удовлетворяют равенствам (см. п. 169)

$$(q_{i0},\ q_{k0}) = 0, \quad (p_{i0},\ p_{k0}) = 0, \quad (q_{i0},\ p_{k0}) = \delta_{ik}. \tag{6}$$

Кроме того, функции (5), являясь интегралами системы (3), удовлетворяют, согласно п. 167, равенствам

$$\frac{\partial q_{i0}}{\partial t} + (q_{i0},\ H_0) = 0, \quad \frac{\partial p_{i0}}{\partial t} + (p_{i0},\ H_0) = 0. \tag{7}$$

Найдем производные по времени новых переменных q_{i0}, p_{i0} в силу уравнений движения (1). Дифференцируя выражения (5) и учитывая равенства (7) и (2), получаем

$$\begin{aligned}\frac{dq_{i0}}{dt} &= \frac{\partial q_{i0}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial q_{i0}}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial q_{i0}}{\partial p_k}\frac{dp_k}{dt}\right) = \frac{\partial q_{i0}}{\partial t} + (q_{i0},\ H) = \\ &= -(q_{i0},\ H_0) + (q_{i0},\ H) = (q_{i0},\ H - H_0) = (q_{i0},\ H_1),\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\frac{dp_{i0}}{dt} &= \frac{\partial p_{i0}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial p_{i0}}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial p_{i0}}{\partial p_k}\frac{dp_k}{dt}\right) = \frac{\partial p_{i0}}{\partial t} + (p_{i0},\ H) = \\ &= -(p_{i0},\ H_0) + (p_{i0},\ H) = (p_{i0},\ H - H_0) = (p_{i0},\ H_1).\end{aligned} \tag{9}$$

Пусть H_1^* — это функция H_1, в которой сделана замена переменных (4). Тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_1}{\partial q_k} &= \sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial H_1^*}{\partial q_{l0}}\frac{\partial q_{l0}}{\partial q_k} + \frac{\partial H_1^*}{\partial p_{l0}}\frac{\partial p_{l0}}{\partial q_k}\right), \\ \frac{\partial H_1}{\partial p_k} &= \sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial H_1^*}{\partial q_{l0}}\frac{\partial q_{l0}}{\partial p_k} + \frac{\partial H_1^*}{\partial p_{l0}}\frac{\partial p_{l0}}{\partial p_k}\right).\end{aligned} \tag{10}$$

Используя эти равенства и соотношения (6), имеем

$$\begin{aligned}(q_{i0},\ H_1) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial q_{i0}}{\partial q_k}\frac{\partial H_1}{\partial p_k} - \frac{\partial q_{i0}}{\partial p_k}\frac{\partial H_1}{\partial q_k}\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial q_{i0}}{\partial q_k}\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial H_1^*}{\partial q_{l0}}\frac{\partial q_{l0}}{\partial p_k} + \frac{\partial H_1^*}{\partial p_{l0}}\frac{\partial p_{l0}}{\partial p_k}\right) - \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial q_{i0}}{\partial p_k}\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial H_1^*}{\partial q_{l0}}\frac{\partial q_{l0}}{\partial q_k} + \frac{\partial H_1^*}{\partial p_{l0}}\frac{\partial p_{l0}}{\partial q_k}\right) = \\ &= \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial H_1^*}{\partial q_{l0}}(q_{i0},\ q_{l0}) + \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial H_1^*}{\partial p_{l0}}(q_{i0},\ p_{l0}) = \frac{\partial H_1^*}{\partial p_{i0}}.\end{aligned} \tag{11}$$

Аналогично

$$(p_{i0},\ H_1) = \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial H_1^*}{\partial q_{l0}}(p_{i0},\ q_{l0}) + \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial H_1^*}{\partial p_{l0}}(p_{i0},\ p_{l0}) = -\frac{\partial H_1^*}{\partial q_{i0}}. \tag{12}$$

Соотношения (11), (12) позволяют записать уравнения (8), (9) в виде

$$\frac{dq_{i0}}{dt} = \frac{\partial H_1^*}{\partial p_{i0}}, \quad \frac{dp_{i0}}{dt} = -\frac{\partial H_1^*}{\partial q_{i0}} \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{13}$$

Таким образом, если $H = H_0$, то величины q_{i0}, p_{i0} постоянны, а уравнения, описывающие их изменение, в системе с функцией Гамильтона $H_0 + H_1$ имеют каноническую форму, причем соответствующая функция Гамильтона H_1^* получается подстановкой в «возмущающую» функцию H_1 величин q_i, p_i определяемых по формулам (4), отвечающим решению задачи Коши для «невозмущенной» задачи с функцией Гамильтона H_0.

Задачу о вариации произвольных постоянных для системы (1) можно рассмотреть и иначе. Пусть решение «невозмущенной» системы (3) найдено при помощи уравнения Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H_0(q_i,\ \frac{\partial S}{\partial q_i},\ t) = 0. \tag{14}$$

Пусть $S = S(q_1, \dots,\ q_n,\ \alpha_1, \dots,\ \alpha_n,\ t)$ — полный интеграл этого уравнения. Сделаем в уравнениях (1) каноническую замену переменных по формулам (9) п. 175, принимая полный интеграл S за производящую функцию

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = -\beta_i \quad (i = 1,\ 2, \dots,\ n). \tag{15}$$

При такой замене переменных роль новых координат играют величины $\alpha_1, \dots,\ \alpha_n$, а роль новых импульсов — величины $\beta_1, \dots,\ \beta_n$. Новая функция Гамильтона $\mathcal{H}(\alpha_1, \dots,\ \alpha_n,\ \beta_1, \dots,\ \beta_n,\ t)$ вычисляется по формуле (см. п. 173)

$$\mathcal{H} = H_0 + H_1 + \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Принимая во внимание уравнение (14), имеем отсюда $\mathcal{H} = H_1^*$, где теперь H_1^* — это функция H_1, выраженная через переменные α_i, β_i, t согласно равенствам (15). Таким образом, новые переменные α_i, β_i $(i = 1,\ 2, \dots,\ n)$, которые постоянны, если $H_1 \equiv 0$, в «возмущенной» системе удовлетворяют каноническим уравнениям

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial H_1^*}{\partial \beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{\partial H_1^*}{\partial \alpha_i} \quad (i = 1,\ 2, \dots,\ n). \tag{16}$$

Для получения решения системы (1) нужно из равенств (15) найти функции

$$q_i = q_i(\alpha_1, \dots,\ \alpha_n,\ \beta_1, \dots,\ \beta_n,\ t), \quad p_i = p_i(\alpha_1, \dots,\ \alpha_n,\ \beta_1, \dots,\ \beta_n,\ t)$$

и подставить в них величины α_i, β_i, являющиеся решениями дифференциальных уравнений (16).

Следует отметить, что при получении уравнений (13) и (16) нигде не предполагалась малость «возмущения» H_1. Однако изложенное выше решение задачи вариации произвольных постоянных наиболее полезно, когда величина H_1 мала по сравнению с H_0, например, если функция H_1 имеет порядок малости ε и требуется найти решение системы (1) при малых значениях ε.

188. Классическая теория возмущений. Пусть функция Гамильтона H в системе (1) может быть представлена в виде ряда по степеням малого параметра ε:

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 + \dots \tag{17}$$

Будем считать, что при $\varepsilon = 0$ система (1) интегрируема (т. е. мы можем получить ее общий интеграл), а канонически сопряженные переменные q_i, p_i выбраны так, что функция Гамильтона H_0, соответствующая невозмущенной задаче, зависит только от импульсов, т. е.

$$H_0 = H_0(p_1, \dots, p_n).$$

Так будет, например, в случае, когда невозмущенная система (1) интегрируется методом Якоби при помощи разделения переменных, а ее движения обладают свойством периодичности. Тогда p_i это переменная действие (см. п. 183), а возмущение $H - H_0$, записанное в переменных действие–угол, будет 2π-периодическим по угловым переменным $q_1, \dots, q_n$.

Невозмущенная система (1)

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i} = \omega_i(p_1, \dots, p_n), \qquad \frac{dp_i}{dt} = 0 \tag{18}$$

сразу интегрируется:

$$p_i = p_{i0} = \text{const}, \quad q_i = \omega_i(p_{10}, \dots, p_{n0})t + q_{i0}. \tag{19}$$

Для приближенного исследования движения при малых, но отличных от нуля значениях ε в механике разработан специальный аппарат теории возмущений, основанный на применении канонических преобразований. Для простоты ограничимся здесь случаем консервативной или обобщенно консервативной системы с одной степенью свободы ($n = 1$) [1]. Функция Гамильтона (17) имеет вид

$$H = H_0(p) + \varepsilon H_1(q, p) + \dots, \tag{20}$$

[1] Следует, однако, иметь в виду, что при $n \geqslant 2$ в теории возмущений возникают принципиальные трудности, которых нет в случае одной степени свободы. См.: Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН, 1963, Т. 18, вып. 6, С. 91-192.

где H_1 можно представить в виде ряда Фурье

$$H_1 = \overline{H}_1(p) + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(p)\cos kq + b_k(p)\sin kq). \tag{21}$$

Здесь $\overline{H}_1(p)$ — среднее значение функции H_1:

$$\overline{H}_1(p) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} H_1(q,\ p)\ dq.$$

Будем искать каноническое преобразование $q,\ p \to q^*,\ p^*$, приводящее функцию Гамильтона (20) к виду

$$\mathcal{H} = H_0^*(p^*) + \varepsilon^2 H_2^*(q^*,\ p^*) + \ldots . \tag{22}$$

Искомое преобразование близко к тождественному и задается формулами (см. п. 174)

$$q^* = \frac{\partial S_1}{\partial p^*}, \quad p = \frac{\partial S_1}{\partial q}, \tag{23}$$

где

$$S_1(q,\ p^*) = qp^* + \varepsilon S_1^{(1)}(q,\ p^*). \tag{24}$$

Неизвестную пока функцию $S_1^{(1)}$ подберем так, чтобы в новых переменных функция Гамильтона имела вид (22).

Подставив (24) в (23), получим соотношения

$$q^* = q + \varepsilon\frac{\partial S_1^{(1)}(q,\ p^*)}{\partial p^*}, \quad p = p^* + \varepsilon\frac{\partial S_1^{(1)}(q,\ p^*)}{\partial q}.$$

Отсюда с точностью до членов порядка ε включительно находим замену переменных $q,\ p \to q^*,\ p^*$ в явной форме:

$$q = q^* - \varepsilon\frac{\partial S_1^{(1)}(q^*,\ p^*)}{\partial p^*}, \quad p = p^* + \varepsilon\frac{\partial S_1^{(1)}(q^*,\ p^*)}{\partial q^*}. \tag{25}$$

Так как валентность преобразования равна единице, а функция S_1 не зависит явно от t, то, согласно формуле (63) п. 174, новая функция

Гамильтона $\mathcal{H}$ получается из старой функции H, если в последней величины q, p заменить их выражениями через новые переменные. Подставив q, p из (25) в функцию (20), получим

$$\mathcal{H} = H_0(p^*) + \varepsilon\overline{H}_1(p^*) +$$

$$+ \varepsilon\left[\omega(p^*)\frac{\partial S_1^{(1)}(q^*,\, p^*)}{\partial q^*} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(p^*)\cos kq^* + b_k(p^*)\sin kq^*)\right] + \ldots \tag{26}$$

Здесь

$$\omega(p) = \frac{\partial H_0(p)}{\partial p}. \tag{27}$$

Чтобы $\mathcal{H}$ имела вид (22), нужно в функции (26) уничтожить зависимые от q^* члены порядка ε. Для этого надо положить

$$S_1^{(1)}(q^*,\, p^*) = \frac{1}{\omega(p^*)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k(p^*)\cos kq^* - a_k(p^*)\sin kq^*}{k}. \tag{28}$$

При таком выборе функции $S_1^{(1)}$ выражение, заключенное в квадратные скобки в формуле (26), тождественно равно нулю и новая функция Гамильтона будет иметь вид (22), причем

$$H_0^*(p^*) = H_0(p^*) + \varepsilon\overline{H}_1(p^*). \tag{29}$$

Если теперь в функции (22) отбросить члены выше первого порядка малости по ε, то соответствующая система уравнений

$$\frac{dq^*}{dt} = \frac{\partial H_0^*(p^*)}{\partial p^*}, \quad \frac{dp^*}{dt} = 0$$

сразу же интегрируется. Подставив ее решение в формулы преобразования (25), получим приближенное решение возмущенной системы исходных переменных q, p.

Мы рассмотрели теорию возмущений в первом приближении по ε. Аналогично можно рассмотреть и более высокие приближения.

189. О линейных гамильтоновых системах дифференциальных уравнений. Пусть в системе (1) функция Гамильтона не зависит от времени и система допускает решение, для которого величины q_i, $p_i (i = 1,\, 2, \ldots,\, n)$ постоянны. Это решение отвечает положению равновесия механической системы, имеющей уравнения движения (1).

Так как перенос начала координат является каноническим преобразованием (см. пример 5 п. 170), то, не ограничивая общности, можно считать, что это положение равновесия отвечает началу координат в фазовом пространстве $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$.

В следующем пункте мы покажем, как, используя канонические преобразования, можно получить приближенное описание движения рассматриваемой системы вблизи ее положения равновесия. Для этого предварительно рассмотрим некоторые вопросы, связанные с линейными дифференциальными уравнениями Гамильтона с постоянными коэффициентами.

Линейную гамильтонову систему дифференциальных уравнений можно записать в виде

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \mathbf{JH}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}' = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}), \tag{30}$$

где x_k, x_{n+k}, $(k = 1, 2, \dots, n)$ — канонически сопряженные переменные (x_k — координаты, x_{n+k} — импульсы). Как и в п. 168, здесь принято обозначение

$$\boldsymbol{J} = \begin{Vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_n \\ -\mathbf{E}_n & \mathbf{0} \end{Vmatrix} \quad (\mathbf{J}' = \mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J},\ \mathbf{J}^2 = -\mathbf{E}_{2n},\ \det \mathbf{J} = 1).$$

В системе (30) $\mathbf{H}$ — вещественная симметрическая матрица порядка $2n$. Будем предполагать ее постоянной.

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{JH} - \lambda\mathbf{E}_{2n}) = 0. \tag{31}$$

Теорема. *Характеристический многочлен $p(\lambda)$ — четная функция λ.*

Доказательство.

Доказательство вытекает из цепочки равенств:

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{JH} - \lambda\mathbf{E}_{2n}) = \det(\mathbf{JH} - \lambda\mathbf{E}_{2n})' = \det(\mathbf{H}'\mathbf{J}' - \lambda\mathbf{E}_{2n}) =$$

$$= \det(-\mathbf{HJ} - \lambda\mathbf{E}_{2n}) = \det(\mathbf{J}^2\mathbf{HJ} + \lambda\mathbf{JE}_{2n}\mathbf{J}) = \det \mathbf{J}(\mathbf{JH} + \lambda\mathbf{E}_{2n})\mathbf{J} =$$

$$= \det \mathbf{J} \cdot \det(\mathbf{JH} + \lambda\mathbf{E}_{2n}) \det \mathbf{J} = \det(\mathbf{JH} + \lambda\mathbf{E}_{2n}) = p(-\lambda).$$

Таким образом, уравнение (31) содержит только четные степени λ. Поэтому если у него есть корень $\lambda = a$, то обязательно будет и корень $\lambda = -a$. Будем рассматривать только тот случай, когда уравнение (31) имеет только простые чисто мнимые корни. Обозначим

их $\lambda_k = i\sigma_k$, $\lambda_{n+k} = -i\sigma_k$ (i — мнимая единица, $k = 1, 2, \dots, n$). Назовем *нормальной формой* системы уравнений (30) такую систему канонических дифференциальных уравнений, которой соответствует функция Гамильтона[1]

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \sigma_k (y_k^2 + y_{n+k}^2). \tag{32}$$

Найдем вещественное линейное унивалентное каноническое преобразование $x_j \to y_j$ ($j = 1, 2, \dots, 2n$), приводящее систему (30) к ее нормальной форме:

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \mathbf{J}\mathbf{H}^*\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}' = (y_1, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{2n}), \tag{33}$$

где, в соответствии с (32), $\mathbf{H}^*$ — вещественная диагональная матрица, элементы которой определены равенствами $h_{kk}^* = h_{n+k,\, n+k}^* = \sigma_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) Пусть

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{A}\boldsymbol{y} \tag{34}$$

— искомое преобразование. Из (30), (33) и (34) следует, что постоянная матрица $\mathbf{A}$ должна удовлетворять матричному уравнению

$$\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{H}^* = \mathbf{J}\mathbf{H}\mathbf{A}. \tag{35}$$

Ввиду каноничности преобразования (34) матрица $\mathbf{A}$ должна быть симплектической, т. е. она должна удовлетворять также и такому матричному уравнению:

$$\mathbf{A}'\mathbf{J}\mathbf{A} = \mathbf{J}. \tag{36}$$

Чтобы найти нормализующее преобразование (34), надо из бесчисленного множества решений уравнения (35) выбрать хотя бы одно вещественное, удовлетворяющее уравнению (36).

Решение уравнения (35) будем искать в виде $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C}$, где

$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} i\mathbf{E}_n & \mathbf{E}_n \\ -i\mathbf{E}_n & \mathbf{E}_n \end{Vmatrix}. \tag{37}$$

Тогда из (35) получаем уравнение для матрицы $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B}\mathbf{D} = \mathbf{J}\mathbf{H}\mathbf{B}, \tag{38}$$

[1]Функция Гамильтона (32) отвечает механической системе, образованной n не связанными один с другим гармоническими осцилляторами; их частоты равны $|\sigma_k|$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

где $\mathbf{D}$ — диагональная форма матрицы $\mathbf{JH}$. Для ее диагональных элементов имеют место равенства $d_{kk} = -d_{n+k,\,n+k} = i\sigma_k$ $(k = 1,\ 2, \ldots,\ n)$. Таким образом, матрица $\mathbf{B}$ приводит матрицу $\mathbf{JH}$ к диагональной форме. Она строится следующим образом[1]. Ее столбцами служат собственные векторы матрицы $\mathbf{JH}$. Именно, пусть k-й столбец матрицы $\mathbf{B}$ есть собственный нектор $\boldsymbol{e}_k$, соответствующий собственному числу $\lambda_k = i\sigma_k$, а $(n+k)$-й столбец есть собственный вектор $\boldsymbol{e}_{n+k}$, соответствующий собственному числу $\lambda_{n+k} = -i\sigma_k$ $(k = 1,\ 2, \ldots,\ n)$.

Собственные векторы определяются с точностью до множителя. Примем этот множитель вещественным и одинаковым для векторов $\boldsymbol{e}_k$ и $\boldsymbol{e}_{n+k}$. Кроме того, соответствующие компоненты этих векторов выберем комплексно сопряженными. Такой выбор собственных векторов обеспечивает вещественность матрицы $\mathbf{A}$. Произвольные множители собственных векторов определяются из условия их нормировки, которое получим из условия (36) каноничности преобразования (34).

Подставив $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$ в уравнение (36), получим

$$\mathbf{C}'\mathbf{B}'\mathbf{JBC} = \mathbf{J}. \tag{39}$$

Обозначим матрицу $\mathbf{B}'\mathbf{JB}$ через $\mathbf{F}$, ее элемент f_{ml} равен скалярному произведению векторов $\boldsymbol{e}_m$ и $\mathbf{J}\boldsymbol{e}_l$:

$$f_{ml} = (\boldsymbol{e}_m \cdot \mathbf{J}\boldsymbol{e}_l).$$

Так как для любых двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ справедливо равенство $(\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{J}\boldsymbol{b}) = -(\mathbf{J}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$, то матрица $\mathbf{F}$ кососимметрическая. Покажем еще, что $f_{ml} = 0$, если $|m-l| \neq n$. Для этого рассмотрим очевидное равенство

$$(\boldsymbol{e}_m \cdot \mathbf{J}^2\mathbf{H}\boldsymbol{e}_l) = (\boldsymbol{e}_m \cdot \mathbf{HJ}^2\boldsymbol{e}_l).$$

Преобразуя его левую и правую части, имеем последовательно

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{e}_m \cdot \mathbf{J}^2\boldsymbol{H}\boldsymbol{e}_l) &= (\mathbf{J}'\mathbf{H}'\boldsymbol{e}_m \cdot \mathbf{J}\boldsymbol{e}_l),\\
(\boldsymbol{e}_m \cdot \mathbf{JJH}\boldsymbol{e}_l) &= -(\mathbf{JH}\boldsymbol{e}_m \cdot \mathbf{J}\boldsymbol{e}_l),\\
(\boldsymbol{e}_m \cdot \mathbf{J}\lambda_l\boldsymbol{e}_l) &= -(\lambda_m\boldsymbol{e}_m \cdot \mathbf{J}\boldsymbol{e}_l).
\end{aligned}$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$(\lambda_m + \lambda_l)f_{ml} = 0. \tag{40}$$

Так как, согласно упорядочению собственных чисел, введенному при построении матрицы $\mathbf{B}$, $\lambda_m + \lambda_l = 0$ только в случае $|m-l| = n$, то из

[1] См., например: Гантмахер Ф. Р. Теория матриц, М,: Наука, 1967.

равенства (40) следует, что $f_{ml} = 0$, если $|m - l| \neq n$. Таким образом, матрица $\mathbf{B}'\mathbf{J}\mathbf{B}$ имеет такую структуру:

$$\mathbf{B}'\mathbf{J}\mathbf{B} = \begin{Vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G} \\ -\mathbf{G} & \mathbf{0} \end{Vmatrix}, \tag{41}$$

где $\mathbf{G}$ — диагональная матрица порядка n с элементами $g_{kk} = (\boldsymbol{e}_k \cdot \mathbf{J}\boldsymbol{e}_{n+k})$. Ни один из элементов g_{kk} не равняется нулю, так как в противном случае определитель матрицы (41) равнялся бы нулю, а

$$\det\ \mathbf{B}'\mathbf{J}\mathbf{B} = \det \mathbf{B}'\ \det \mathbf{J}\ \det \mathbf{B} = (\det \mathbf{B})^2 \neq 0,$$

так как матрица $\mathbf{B}$ составлена из собственных векторов, соответствующих различным собственным числам матрицы $\mathbf{J}\mathbf{H}$.

Пусть $\boldsymbol{r}_k$ и $\boldsymbol{s}_k$ — действительная и мнимая части собственного вектора, соответствующего собственному числу λ_k. Тогда, учитывая комплексную сопряженность соответствующих компонент векторов $\boldsymbol{e}_k$ и $\boldsymbol{e}_{n+k}$, получим для элементов матрицы $\mathbf{G}$ выражения

$$g_{kk} = -2i(\boldsymbol{r}_k \cdot \mathbf{J}\boldsymbol{s}_k) \quad (k = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{42}$$

Из равенств (37), (39) и (41) следует такое условие, обеспечивающее симплектичность матрицы $\mathbf{A}$:

$$4(\boldsymbol{r}_k \cdot \mathbf{J}\boldsymbol{s}_k) = 1. \tag{43}$$

Это равенство является, с одной стороны, условием нормировки собственного вектора $\boldsymbol{e}_k$, а с другой — условием выбора знака σ_k в функции Гамильтона (32), который до сих пор был не определен. Действительно, приравняв в обеих частях уравнения $\mathbf{J}\mathbf{H}\boldsymbol{e}_k = i\sigma_k\boldsymbol{e}_k$ $(\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{r}_k + i\boldsymbol{s}_k)$ действительную и мнимую части, получим систему уравнений для $\boldsymbol{r}_k$ и $\boldsymbol{s}_k$:

$$\mathbf{J}\mathbf{H}\boldsymbol{r}_k = -\sigma_k\boldsymbol{s}_k, \quad \mathbf{J}\mathbf{H}\boldsymbol{s}_k = \sigma_k\boldsymbol{r}_k.$$

При одновременном изменении знаков σ_k и компонент вектора $\boldsymbol{r}_k$ эта система уравнений не изменяется. Знак же скалярного произведения $(\boldsymbol{r}_k \cdot \mathbf{J}\boldsymbol{s}_k)$ изменяется на противоположный. Поэтому равенству (43) можно всегда удовлетворить выбором знака σ_k в функции Гамильтона (32) и соответствующей нормировкой собственного вектора $\boldsymbol{e}_k$.

Произведя некоторые вычисления, получим, что k-м столбцом искомой матрицы $\mathbf{A}$ будет вектор $-2\boldsymbol{s}_k$, а $(n+k)$-м — вектор $2\boldsymbol{r}_k$.

190. Преобразование Биркгофа. Приближенное интегрирование гамильтоновой системы уравнений вблизи положения равновесия. Пусть начало координат фазового пространства отвечает

положению равновесия консервативной или обобщенно консервативной системы с n степенями свободы. Предположим, что функция Гамильтона является аналитической в некоторой окрестности начала координат и ее разложение в ряд начинается с квадратичных членов:

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots, \tag{44}$$

где H_m — однородный многочлен (форма) степени m относительно координат и импульсов. Аддитивная постоянная (равная значению функции Гамильтона в положении равновесия) не влияет на уравнения движения и в разложении (44) отброшена.

Пусть характеристическое уравнение, соответствующее линеаризованной системе уравнений движения, задаваемой функцией Гамильтона H_2, имеет только простые чисто мнимые корни $\pm i\sigma_k$, $(k = 1, 2, \dots, n)$. Тогда, как показано в предыдущем пункте, подходящим выбором канонически сопряженных переменных функцию H_2 можно представить в виде правой части равенства (32). Если еще сделать каноническую замену переменных[1]

$$q_k = y_k - iy_{n+k}, \quad p_k = y_k + iy_{n+k} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \tag{45}$$

то квадратичная часть ряда (44) будет иметь вид

$$H_2 = i\sum_{k=1}^{n} \sigma_k q_k p_k. \tag{46}$$

Движение линеаризованной системы представляет собой суперпозицию колебаний n гармонических осцилляторов с частотами $|\sigma_k|$, $(k = 1, 2, \dots, n)$. Если в разложении (44) формы H_m при $m \geqslant 3$ не равны тождественно нулю, то уравнения движения нелинейны. Чтобы исследовать движение в этом случае, упростим функцию Гамильтона (44) при помощи канонической замены переменных, носящей название *преобразования Биркгофа.*

Сделаем каноническую замену переменных q_k, $p_k \to q'_k$, p'_k, задаваемую формулами

$$q'_k = q_k + \frac{\partial S_3}{\partial p'_k}, \quad p_k = p'_k + \frac{\partial S_3}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \tag{47}$$

где форму третьей степени $S_3(q_k, p'_k)$ попытаемся подобрать так, чтобы в новых переменных функция Гамильтона не содержала членов третьей степени относительно q'_k, p'_k, $(k = 1, 2, \dots, n)$.

[1] Сравните с примером 7 п. 170.

Функция $H_3(q_k,\ p_k)$ в (44) может быть записана в виде

$$H_3 = \sum_{\nu_1+\ldots+\mu_n=3} h_{\nu_1,\ldots,\,\mu_n} q_1^{\nu_1}\ldots q_n^{\nu_n} p_1^{\mu_1}\ldots p_n^{\mu_n}, \tag{48}$$

где коэффициенты $h_{\nu_1,\ldots,\,\mu_n}$ постоянны. Величины $\nu_1,\ldots,\ \mu_n$ — целые неотрицательные числа. Функцию S_3 ищем в виде, аналогичном (48):

$$S_3 = \sum_{\nu_1+\ldots+\mu_n=3} s_{\nu_1,\ldots,\,\mu_n} q_1^{\nu_1}\ldots q_n^{\nu_n} p_1'^{\mu_1}\ldots p_n'^{\mu_n}, \tag{49}$$

где постоянные коэффициенты $s_{\nu_1,\ldots,\,\mu_n}$ подлежат выбору из условия обращения в нуль членов третьей степени в новой функции Гамильтона.

Из (47) следует, что старые переменные $q_k,\ p_k$ являются аналитическими функциями в окрестности начала координат $q_k' = 0,\ p_k' = 0$ и представляются рядами

$$q_k = q_k' - \frac{\partial S_3(q_k',\ p_k')}{\partial p_k'} + \ldots, \quad p_k = p_k' + \frac{\partial S_3(q_k',\ p_k')}{\partial q_k'} + \ldots, \tag{50}$$

где обозначенные многоточием члены имеют степени выше второй относительно $q_k',\ p_k',\ (k = 1,\ 2,\ldots,\ n)$. Подставив эти выражения в функцию (44), получим новую функцию Гамильтона в виде

$$H' = i\sum_{k=1}^{n} \sigma_k q_k' p_k' + i\sum_{k=1}^{n} \sigma_k \left(q_k' \frac{\partial S_3}{\partial q_k'} - p_k' \frac{\partial S_3}{\partial p_k'} \right) + H_3(q_k',\ p_k') + \ldots,$$

где многоточием обозначены члены выше третьей степени относительно $q_k',\ p_k'$.

Таким образом, квадратичная часть функции Гамильтона сохранила свою форму, а члены третьей степени H_3' приняли вид

$$H_3' = i\sum_{k=1}^{n} \sigma_k \left(q_k' \frac{\partial S_3}{\partial q_k'} - p_k' \frac{\partial S_3}{\partial p_k'} \right) + H_3(q_k',\ p_k').$$

Положим $H_3' \equiv 0$. Принимая во внимание формулы (48), (49) и приравнивая в этом тождестве нулю коэффициент при $q_1'^{\,\nu_1}\ldots q_n'^{\,\nu_n} \times$ $\times\, p_1'^{\,\mu_1}\ldots p_n'^{\,\mu_n}$, получим уравнения для нахождения $s_{\nu_1,\ldots,\,\mu_n}$:

$$[\sigma_1(\nu_1-\mu_1)+\ldots+\sigma_n(\nu_n-\mu_n)]s_{\nu_1,\ldots,\,\mu_n} = ih_{\nu_1,\ldots,\,\mu_n}. \tag{51}$$

Справедливо соотношение

$$|\nu_1-\mu_1|+\ldots+|\nu_n-\mu_n| \leqslant \nu_1+\mu_1+\ldots+\nu_n+\mu_n = 3.$$

Отсюда и из (51) следует, что если величины $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ таковы, что для целых чисел $k_1, \ldots, k_n$, удовлетворяющих условию $0 < |k_1| + \ldots + |k_n| \leqslant 3$, выполняется неравенство[1]

$$k_1\sigma_1 + \ldots + k_n\sigma_n \neq 0, \tag{52}$$

то выбрав величины $s_{\nu_1, \ldots, \mu_n}$ согласно формулам

$$s_{\nu_1, \ldots, \mu_n} = \frac{ih_{\nu_1, \ldots, \mu_n}}{\sigma_1(\nu_1 - \mu_1) + \ldots + \sigma_n(\nu_n - \mu_n)},$$

получим новую функцию Гамильтона H' такой, что в ней будут отсутствовать члены третьей степени по q'_k, p'_k.

Можно было бы попытаться аналогичным образом при помощи еще одного канонического преобразования q'_k, $p'_k \to q''_k$, p''_k уничтожить члены четвертой степени H''_4 в функции Гамильтона H''. Это, однако, не удастся сделать, и в новой функции Гамильтона останутся некоторые члены четвертой степени, имеющие вполне определенную структуру.

Если в системе нет резонанса до четвертого порядка включительно, т. е. неравенство (52) удовлетворяется при $0 < |k_1| + \ldots + |k_n| \leqslant 4$, то в функции Гамильтона H'' можно уничтожить все члены четвертой степени, кроме тех, которые содержат q''_k и p''_k в одинаковых степенях. Действительно, уравнение (51) неразрешимо, если $\nu_k = \mu_k$ при всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда в H''_4 останется совокупность одночленов вида

$$\sum_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n=2} h_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(q''_1p''_1)^{\nu_1} \ldots (q''_np''_n)^{\nu_n}.$$

И, вообще, методом математической индукции нетрудно показать, что если в системе нет резонансов до порядка l включительно, т. е.

$$k_1\sigma_1 + \ldots + k_n\sigma_n \neq 0, \quad 0 < |k_1| + \ldots + |k_n| \leqslant l,$$

то существует каноническое преобразование $q_k = q^*_k + \ldots$, $p_k = p^*_k + \ldots$, задаваемое сходящимися в окрестности начала координат степенными рядами, такое, что функция Гамильтона (44), выраженная через q^*_k, p^*_k, имеет вид

$$H^* = \overline{H} + \widetilde{H}(q^*_k, p^*_k), \tag{53}$$

где $\overline{H}$ — многочлен степени не большей $l/2$ от n произведений $q^*_1p^*_1, \ldots, q^*_np^*_n$, а $\widetilde{H}$ — сходящийся ряд по степеням q^*_k, p^*_k, начинающийся с членов, степень которых не меньше $l + 1$. В этом случае говорят,

[1] В таких случаях говорят, что в системе нет резонансов до третьего порядка включительно.

что функция Гамильтона приведена к нормальной форме Биркгофа с точностью до членов степени l включительно.

Представление функции Гамильтона в виде (53) можно эффективно использовать для приближенного интегрирования канонических дифференциальных уравнений движения. Для этого пренебрежем в (53) членами $\widetilde{H}$, которые имеют более высокую степень относительно q_k^*, p_k^*, нежели функция $\overline{H}$. Тогда $H^* = \overline{H}$. Замечательно, что система канонических уравнений с функцией Гамильтона $H^* = \overline{H}(q_1^*p_1^*, \dots, q_n^*p_n^*)$ сразу интегрируется. Действительно, положим $\tau_k = q_k^*p_k^*$. Тогда уравнения с функцией Гамильтона $\overline{H}$ запишутся в виде

$$\frac{dq_k^*}{dt} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \tau_k} q_k^*, \quad \frac{dp_k^*}{dt} = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial \tau_k} p_k^*, \quad (k = 1,\ 2, \dots,\ n). \tag{54}$$

Отсюда следует, что $d\tau_k/dt = 0$, т. е. $\tau_k = c_k = \mathrm{const}$ $(k = 1,\ 2, \dots,\ n)$. Подставив эти значения τ_k в уравнения (54), получим

$$\frac{dq_k^*}{dt} = \Lambda_k q_k^*, \quad \frac{dp_k^*}{dt} = -\Lambda_k p_k^*, \tag{55}$$

где Λ_k есть значение производной $\partial\overline{H}/\partial\tau_k$ при $\tau_k = c_k$. Из (55) следует, что

$$\begin{gathered} q_k^*(t) = q_k^*(0)e^{\Lambda_k t}, \quad p_k^*(t) = p_k^*(0)e^{-\Lambda_k t}, \\ (q_k^*(0)p_k^*(0) = c_k;\ k = 1,\ 2, \dots,\ n). \end{gathered} \tag{56}$$

Приближенное решение исходных уравнений получится из равенств (56) при помощи формул указанного выше канонического преобразования Биркгофа, выражающих старые переменные через новые. Несложно проверить, что в рассматриваемом случае чисто мнимых корней характеристического уравнения линеаризованной системы уравнений движения величины Λ_k $(k = 1,\ 2, \dots,\ n)$ также будут чисто мнимыми, $\Lambda_k = i\Omega_k$ $(k = 1,\ 2, \dots,\ n)$, и, следовательно, старые переменные будут рядами синусов и косинусов аргументов, кратных $\Omega_k t$.

Если в системе вообще нет резонансов, то преобразование Биркгофа можно применить для нормализации функции Гамильтона до сколь угодно высокой степени $(l \to \infty)$. Нормализованная во всех степенях функция Гамильтона зависит только от переменных $(q_k^*p_k^*)$ $(k = 1,\ 2, \dots,\ n)$. Тогда преобразованная система уравнений движения может быть проинтегрирована, причем для этого не надо пренебрегать в ее правых частях никакими членами. Казалось бы, что это должно означать локальную (в окрестности положения равновесия) интегрируемость уравнений движения. Однако это не так. Дело в том, что пре-

образование Биркгофа, нормализующее функцию Гамильтона во всех степенях, будет, как правило, расходящимся[1].

В последние десятилетия разработаны новые способы применения канонических преобразований в теории возмущений, например метод Депри–Хори. С алгоритмической точки зрения он выгодно отличается от изложенных классических методов. Например, его применение не требует одной из самых громоздких процедур — обращения рядов, а формулы метода задаются рекуррентно, и необходимые преобразования могут быть достаточно просто реализованы на вычислительной машине[1].

Пример 1 (Колебания математического маятника). *Функция Гамильтона может быть (см. пример в п. 149) записана в виде*

$$H = \frac{1}{2ml^2}p_\varphi^2 - mgl\cos\varphi.$$

Для удобства введем безразмерные переменные φ', p'_φ, t' по формулам

$$\varphi' = \varphi, \quad p'_\varphi = \frac{p_\varphi}{ml\sqrt{gl}}, \quad t' = \sqrt{\frac{g}{l}}t. \tag{57}$$

Замена φ, $p_\varphi \to \varphi'$, p'_φ — каноническое преобразование с валентностью $c = \dfrac{1}{ml\sqrt{gl}}$ (см. пример 3 в п. 170). Учитывая еще, что введение вместо времени t новой независимой переменной t' приводит к делению функции Гамильтона на $\sqrt{g/l}$, получим, что уравнениям движения в безразмерных переменных (57) отвечает функция Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}{p_\varphi}'^2 - \cos\varphi'. \tag{58}$$

Рассмотрим движение маятника в окрестности его положения равновесия $\varphi = 0$. В этом случае φ' и p'_φ — малые величины. Разлагая функцию (58) в ряд по степеням φ', p'_φ и отбрасывая несущественный для уравнений движения постоянный член, получаем

$$H = \frac{1}{2}({p_\varphi}'^2 + \varphi'^2) - \frac{1}{24}\varphi'^4 + \dots, \tag{59}$$

[1]Изложение современного состояния задачи нормализации систем дифференциальных уравнений и подробную библиографию см. в исследовании: Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнении // Труды Московского математического общества. 1971, Т. 25, С. 119–262; 1972, Т. 26, С. 199–239.

[1]См., например: Джакалья Г. Е. О. Методы теории возмущений для нелинейных систем, М.: Наука, 1979.

где многоточием обозначены члены выше четвертой степени относительно φ', $p_\varphi{}'$. Если в разложении (59) *пренебречь всеми неквадратичными членами, то уравнения движения станут линейными. В этом линейном приближении движение маятника представляет собой гармонические колебания. Чтобы выявить влияние нелинейностей в уравнениях движения, учтем в разложении* (59) *член* — $(1/24)\varphi'^4$ *и для приближенного исследования нелинейных колебаний используем преобразование Биркгофа.*

Сделав замену переменных (каноническую, с валентностью $c = 2i$)

$$q = \varphi' - ip_\varphi{}', \quad p = \varphi' + ip'_\varphi, \tag{60}$$

получим

$$H = H_2 + H_4 + \dots,$$

где

$$H_2 = iqp, \quad H_4 = -\frac{i}{192}(q^4 + 4q^3p + 6q^2p^2 + 4qp^3 + p^4).$$

Несложные вычисления показывают, что преобразование Биркгофа $q,\ p \to q^*,\ p^*$, задаваемое производящей функцией $qp^* + S_4(q,\ p^*)$, где

$$S_4 = \frac{1}{768}q^4 + \frac{1}{96}q^3p^* - \frac{1}{96}qp^{*3} - \frac{1}{768}p^{*4},$$

приводит функцию Гамильтона к виду

$$H^* = i(q^*p^*) - \frac{i}{32}(q^*p^*)^2, \tag{61}$$

причем переменные q, p выражаются через q^*, p^* по формулам

$$q = q^* - \frac{1}{192}(2q^{*3} - 6q^*p^{*2} - p^{*3}), \quad p = p^* + \frac{1}{192}(q^{*3} + 6q^{*2}p^* - 2p^{*3}). \tag{62}$$

В формулах (61), (62) *отброшены члены, степень которых выше степени оставшихся членов.*

Канонические уравнения с функцией Гамильтона (61) *интегрируются. Если q_0^*, p_0^* — начальные значения величин q^*, p^*, то*

$$q^* = q_0^* e^{i\Omega t'}, \quad p^* = p_0^* e^{-i\Omega t'}, \tag{63}$$

где введено обозначение

$$\Omega = 1 - \frac{1}{16}(q_0^*\ p_0^*). \tag{64}$$

Приближенное решение задачи о нелинейных колебаниях маятника получается теперь из формул (57), (60), (62), *выражающих исходные величины* φ, p_φ *через новые переменные, в которых записано решение* (63).

Пусть момент $t = 0$ *соответствует максимальному углу отклонения* β *маятника от вертикали. Тогда из формул* (57), (60), (62) *следует, что с точностью до квадратов величины* β *включительно*

$$\Omega = 1 - \frac{1}{16}\beta^2.$$

С той же точностью для периода τ *нелинейных колебаний маятника получаем выражение*

$$\tau = \frac{2\pi}{\Omega}\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\beta^2\right),$$

которое совпадает с выражением, полученным в п. 96 (*формула* (28)) *при помощи разложения в ряд точного значения периода колебаний маятника, записанного через полный эллиптический интеграл первого рода.*

Глава XII
Теория импульсивных движений

§ 1. Основные понятия и аксиомы

191. Ударные силы и импульсы. Рассмотрим механическую систему, состоящую из N материальных точек P_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$. До сих пор мы изучали такие движения, в которых скорости точек P_ν изменялись непрерывно как по величине, так и по направлению. Но на практике иногда приходится встречаться с явлениями, когда точки материальной системы, начиная с некоторого момента $t = t_0$, в течение очень малого промежутка времени τ скачком изменяют скорости, а система за тот же промежуток не меняет заметно своего положения. В таких случаях говорят, что *система испытывает удар.* Примером может служить движение брошенного в стену и отскочившего от нее упругого мяча.

Явление удара вызывается силами большой величины, действующими на систему в течение столь малого промежутка времени τ, что точки системы не успевают переместиться сколь-нибудь заметным образом. Такие силы называют *ударными.*

Движение системы под действием ударных сил называют *импульсивным движением.* При аналитическом представлении импульсивного движения промежуток времени τ, в течение которого оно происходит, считается бесконечно малым. При этом модуль импульса $\boldsymbol{I}_\nu$ ударной силы $\boldsymbol{F}_\nu$, приложенной к точке P_ν (он называется *ударным импульсом*),

$$\boldsymbol{I}_\nu = \int\limits_{t_0}^{t_0+\tau} \boldsymbol{F}_\nu \, dt \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N), \tag{1}$$

считается конечной величиной. Так как точки системы во все время удара τ имеют конечные скорости, то при $\tau \to 0$ их перемещениями можно пренебречь. Ускорение же $\boldsymbol{w}_\nu$ точки P_ν под действием ударной силы бесконечно велико, и поэтому оно не может служить кинематической характеристикой импульсивного движения. С кинематической точки зрения в импульсивных движениях, помимо момента t_0 и положения точек P_ν, нужно рассматривать лишь векторы скоростей точек

в момент, непосредственно предшествующий, и в момент, непосредственно следующий за t_0. Эти скорости называют *скоростью до удара* и *скоростью после удара*. Примем для них обозначения $\boldsymbol{v}_\nu^-$ и $\boldsymbol{v}_\nu^+$.

192. Аксиомы. Пусть $\boldsymbol{F}_\nu$ — равнодействующая всех сил, действующих на точку P_ν, m_ν — масса этой точки, предполагаемая постоянной, а $\boldsymbol{w}_\nu$ — абсолютное ускорение точки. Из уравнения $m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu$ посредством интегрирования по времени от t_0 до $t_0 + \tau$ получим равенства

$$m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-) = \boldsymbol{I}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N). \tag{2}$$

В правых частях этих равенств содержатся только импульсы ударных сил, так как обычные силы, т. е. силы, имеющие конечную величину, дают при $\tau \to 0$ пренебрежимо малые импульсы. Следовательно, на скачкообразное изменение скоростей точек системы при ударах обычные силы не влияют. Например, при ударе мяча о стену влиянием силы тяжести на импульсивное движение мяча можно пренебречь.

Соотношения (2) утверждают, что приращение количества движения точки за время удара равно ударному импульсу.

При действии ударных сил на несвободную систему возникают, вообще говоря, ударные реакции связей. Поэтому изменение скорости каждой точки системы определяется не только импульсами приложенных к ней (активных) ударных сил, но также и ударными импульсами реакций связей.

Соотношение (2) является основным в теории импульсивных движений. Оно заменяет основную аксиому динамики (второй закон Ньютона). Роль ускорения в (2) играет приращение скорости $\Delta \boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-$, а роль силы — ударный импульс $\boldsymbol{I}_\nu$.

В теории импульсивных движений принимается еще ряд аксиом, аналогичных обычным аксиомам динамики: ударные импульсы, сообщаемые друг другу двумя материальными точками, равны по величине и направлены вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны; два ударных импульса, приложенных к точке, складываются по правилу параллелограмма; полный ударный импульс для каждой точки системы складывается из ударных импульсов активных сил и ударных импульсов реакций связей.

193. Главный вектор и главный момент ударных импульсов. При исследовании импульсивных движений системы материальных точек P_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$ часто целесообразно подразделять ударные импульсы на внешние и внутренние. Внешние и внутренние ударные импульсы — это соответственно импульсы внешних и внутренних ударных сил системы. При таком подразделении импульсов основное

уравнение (2) импульсивного движения системы можно записать в следующем виде:

$$m_\nu \Delta \boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{I}_\nu^{(e)} + \boldsymbol{I}_\nu^{(i)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N), \tag{3}$$

где $\boldsymbol{I}_\nu^{(e)}$ — сумма внешних ударных импульсов, а $\boldsymbol{I}_\nu^{(i)}$ — сумма внутренних ударных импульсов, действующих на точку P_ν системы.

Сумма всех ударных импульсов системы

$$\boldsymbol{S} = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{I}_\nu \tag{4}$$

называется *главным вектором ударных импульсов.*

Пусть $\boldsymbol{r}_\nu$ — радиус-вектор точки P_ν относительно точки O. Сумма моментов ударных импульсов относительно точки O

$$\boldsymbol{L}_0 = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{I}_\nu \tag{5}$$

называется *главным моментом ударных импульсов* относительно этой точки.

Слагаемые, содержащие внутренние импульсы, входят в правые части выражений (4), (5) попарно и взаимно уничтожаются. Поэтому

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}^{(e)} = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{I}_\nu^{(e)}, \quad \boldsymbol{L}_0 = \boldsymbol{L}_0^{(e)} = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{I}_\nu^{(e)}, \tag{6}$$

т. е. главный вектор и главный момент всех ударных импульсов системы равен соответственно главному вектору $\boldsymbol{S}^{(e)}$ и главному моменту $\boldsymbol{L}_0^{(e)}$ внешних ударных импульсов.

194. Задачи теории импульсивного движения. Цель исследования импульсивного движения состоит в определении кинематического состояния системы после удара, если известно ее состояние до удара. При этом иногда целесообразно различать две основные задачи: 1) по заданным ударным импульсам определить изменение скоростей точек системы; 2) по заданному изменению скоростей точек системы определить ударные импульсы. Иногда требуется также определить ударные импульсы реакций связей.

§ 2. Теоремы об изменении основных динамических величин при импульсивном движении

195. Теорема об изменении количества движения. Сложив уравнения (3) п. 193 и учтя постоянство масс m_ν, получим равенство

$$\Delta\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{I}_\nu^{(e)} + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{I}_\nu^{(i)}$$

или

$$\Delta \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{S}^{(e)}, \tag{1}$$

т. е. *изменение количества движения системы при ударе равно главному вектору внешних ударных импульсов.*

Так как $\boldsymbol{Q} = M\boldsymbol{v}_C$, где M — масса системы, $M = \sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu = \text{const}$, а $\boldsymbol{v}_C$ — скорость центра инерции, то равенство (1) можно переписать в таком виде:

$$M\Delta \boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{S}^{(e)}, \tag{2}$$

т. е. *импульсивное движение центра инерции системы происходит так же, как импульсивное движение материальной точки, масса которой равна массе системы и к которой приложены все внешние ударные импульсы, действующие на систему.*

Пример 1. *Снаряд, летевший со скоростью v, разорвался в воздухе на два осколка равных масс. Скорость первого осколка направлена под углом α к направлению первоначального движения и имеет величину $2v$. Найти скорость второго осколка.*

Так как внешних ударных импульсов нет, то вектор первоначального количества движения снаряда равен сумме векторов количеств движения осколков. Пусть m — масса снаряда, а β — угол между вектором $\boldsymbol{v}_2$ скорости второго осколка и направлением движения снаряда. Из рис. 144 легко получить, что $v_2 = 4v\sin\frac{\alpha}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$.

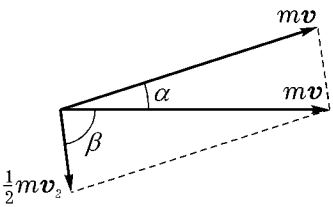

Рис. 144

Заметим, что при решении не потребовалось предположения об отсутствии аэродинамических сил и силы тяжести, потому что эти силы не являются ударными.

196. Теорема об изменении кинетического момента. Пусть A — произвольная точка пространства, подвижная или неподвижная, а $\boldsymbol{\rho}_\nu$ — радиус-вектор точки P_ν системы относительно A. Умножим обе части равенства (3) п. 193 слева векторно на $\boldsymbol{\rho}_\nu$ и результаты просуммируем. Тогда, учитывая постоянство m_ν и тот факт, что $\boldsymbol{\rho}_\nu$ не меняется во время удара, получаем соотношение

$$\Delta\left(\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{\rho}_\nu\times m_\nu\boldsymbol{v}_\nu\right)=\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{\rho}_\nu\times\boldsymbol{I}_\nu^{(e)}+\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{\rho}_\nu\times\boldsymbol{I}_\nu^{(i)}.$$

Сумма в левой части представляет собой абсолютный кинетический момент $\boldsymbol{K}_A$ системы относительно центра A. Поэтому, учитывая равенства (5) и (6) из п. 193, последнее соотношение можно записать в виде

$$\Delta\boldsymbol{K}_A=\boldsymbol{L}_A^{(e)}, \tag{3}$$

т. е. *изменение кинетического момента системы относительно любого центра равно главному моменту внешних ударных импульсов относительно этого центра.*

Пример 1. *Два шкива радиусов r_1 и r_2 вращаются вокруг параллельных осей с угловыми скоростями ω_1 и ω_2* (рис. 145), *причем $\omega_1 r_1>\omega_2 r_2$. На шкивы намотана ненатянутая лента. В некоторый момент лента натягивается, вследствие чего происходит удар. Требуется определить послеударные угловые скорости Ω_1 и Ω_2 шкивов и величину I ударного импульса силы натяжения ленты, считая, что после удара лента остается натянутой. Моменты инерции шкивов относительно их осей вращения равны J_1 и J_2.*

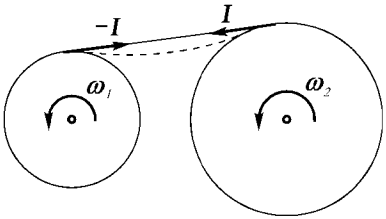

Рис. 145

Применяя формулу (3) *к вращению первого шкива и учитывая, что ударный импульс реакции оси вращения не создает момента относительно этой оси, имеем*

$$J_1(\Omega_1-\omega_1)=-Ir_1. \tag{4}$$

Для второго шкива получим

$$J_2(\Omega_2-\omega_2)=Ir_2. \tag{5}$$

Но так как лента остается натянутой, то

$$\Omega_1 r_1=\Omega_2 r_2. \tag{6}$$

Из (4)–(6) *находим*

$$\frac{\Omega_1}{r_2} = \frac{J_1 r_2 \omega_1 + J_2 r_1 \omega_2}{J_1 r_2^2 + J_2 r_1^2} = \frac{\Omega_2}{r_1}, \quad I = \frac{J_1 J_2 (\omega_1 r_1 - \omega_2 r_2)}{J_1 r_2^2 + J_2 r_1^2}.$$

Если шкивы первоначально вращаются в противоположные стороны, то в результате натяжения ленты возможно прекращение их вращения, причем одновременное. Это произойдет, если выполнено равенство $J_1 r_2 \omega_1 + J_2 r_1 \omega_2 = 0$

Пример 2. *Находящемуся в покое тонкому однородному стержню массы* m *и длины* l *при помощи удара по одному из его концов сообщен импульс* I *в перпендикулярном к стержню направлении* (рис. 146). *Найти послеударное кинематическое состояние стержня.*

Пусть v_0 — *скорость центра масс стержня, а* ω — *его угловая скорость после удара. Из формул* (2) *и* (3) *получаем два уравнения*

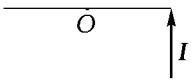

Рис. 146

$$mv_0 = I, \quad \frac{1}{12} m l^2 \omega = I \frac{l}{2},$$

отсюда находим

$$v_0 = \frac{I}{m}, \quad \omega = \frac{6I}{ml}. \tag{7}$$

Пример 3. *Найти послеударное кинематическое состояние стержня предыдущего примера, если один из его концов шарнирно закреплен* (рис. 147).

В этом случае после удара стержень вращается вокруг точки A. *Из формулы* (3) *получаем уравнение для нахождения угловой скорости вращения* ω:

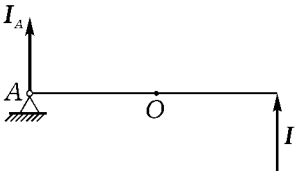

Рис. 147

$$\frac{1}{3} m l^2 \omega = I l,$$

отсюда

$$\omega = \frac{3I}{ml}. \tag{8}$$

Можно найти и неизвестный ударный импульс I_A *шарнира. Из* (2) *имеем*

$$mv_0 = I + I_A,$$

но $v_0 = \omega \frac{l}{2} = \frac{3I}{2m}$. *Поэтому* $I_A = mv_0 - I = \frac{1}{2} I$.

197. Теорема об изменении кинетической энергии. Пусть T^- и T^+ — величины кинетической энергии системы до и после удара:

$$T^- = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu^{-2}, \quad T^+ = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu^{+2}. \tag{9}$$

Имеет место следующая

Теорема. *Изменение кинетической энергии при импульсивном движении равно сумме скалярных произведений каждого ударного импульса на полусумму скоростей точки его приложения непосредственно перед ударом и после него:*

$$T^+ - T^- = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{I}_\nu^{(e)} \cdot \frac{\boldsymbol{v}_\nu^- + \boldsymbol{v}_\nu^+}{2} + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{I}_\nu^{(i)} \cdot \frac{\boldsymbol{v}_\nu^- + \boldsymbol{v}_\nu^+}{2}. \tag{10}$$

Доказательство.

Умножим каждое из уравнений (3) п. 193 скалярно на $\boldsymbol{v}_\nu^+$. Получим равенства

$$m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-) \cdot \boldsymbol{v}_\nu^+ = \boldsymbol{I}_\nu^{(e)} \cdot \boldsymbol{v}_\nu^+ + \boldsymbol{I}_\nu^{(i)} \cdot \boldsymbol{v}_\nu^+ \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N).$$

Если в левых частях этих равенств сомножитель $\boldsymbol{v}_\nu^+$ представить в виде

$$\boldsymbol{v}_\nu^+ = \frac{1}{2}\Big[(\boldsymbol{v}_\nu^+ + \boldsymbol{v}_\nu^-) + (\boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-)\Big],$$

а затем произвести суммирование равенств по ν, то после простых преобразований и учета обозначений (9) придем к соотношению

$$T^- - T^+ = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu^- - \boldsymbol{v}_\nu^+)^2 - \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{I}_\nu^{(e)} \cdot \boldsymbol{v}_\nu^+ - \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{I}_\nu^{(i)} \cdot \boldsymbol{v}_\nu^+. \tag{11}$$

Теперь умножим уравнения (3) п. 193 на $\boldsymbol{v}_\nu^-$, в левых частях получающихся равенств представим сомножитель $\boldsymbol{v}_\nu^-$ в виде

$$\boldsymbol{v}_\nu^- = \frac{1}{2}\Big[(\boldsymbol{v}_\nu^+ + \boldsymbol{v}_\nu^-) - (\boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-)\Big]$$

и произведем суммирование по ν. Тогда получим такое соотношение:

$$T^+ - T^- = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-)^2 + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{I}_\nu^{(e)} \cdot \boldsymbol{v}_\nu^- + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{I}_\nu^{(i)} \cdot \boldsymbol{v}_\nu^-. \tag{12}$$

После вычитания равенства (11) из равенства (12) и деления на 2 приходим к доказываемому соотношению (10).

Пример 1. *Найдем изменение кинетической энергии стержня в примерах* 2 *и* 3 *предыдущего параграфа.*

Учитывая, что в твердом теле внутренние силы не совершают работы и что перед ударом стержень покоился, из (10) *получаем* $T^+ = \frac{1}{2}Iv$, *где* v — *величина послеударной скорости той точки стержня, к которой приложена ударная сила.*

В примере 2 *получаем* $v = v_0 + \omega\frac{l}{2} = \frac{I}{m} + \frac{6I}{ml}\frac{l}{2} = \frac{4I}{m}$ *и* $T^+ = \frac{2I^2}{m}$. *В примере же* 3 *имеем* $v = \omega l = \frac{3I}{ml}l = \frac{3I}{m}$ *и* $T^+ = \frac{3I^2}{2m}$.

Замечание 1. *Равенства* (11) *и* (12) *по существу представляют собой еще две различные формы теоремы об изменении кинетической энергии при импульсивном движении.*

Дадим их словесное выражение.

Векторы $\boldsymbol{v}_\nu^- - \boldsymbol{v}_\nu^+$ и $\boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-$ называют соответственно *потерянной* и *приобретенной скоростями*, а величину

$$T_* = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu^- - \boldsymbol{v}_\nu^+)^2 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-)^2 \tag{13}$$

— кинетической энергией потерянных (или приобретенных) скоростей. Приращение $T^+ - T^-$ называют еще приобретенной, а величину $T^- - T^+$ — потерянной кинетической энергией при импульсивном движении. Используя эту терминологию, соотношение (11) можно прочитать следующим образом: *потеря кинетической энергии равна кинетической энергии потерянных скоростей, уменьшенной на сумму работ внешних и внутренних ударных сил, если считать, что точки их приложения имеют в течение всего времени удара постоянные скорости, равные их послеударным скоростям.*

А соотношение (12) означает, что *приобретенная кинетическая энергия равна кинетической энергии приобретенных скоростей, увеличенной на сумму работ внешних и внутренних ударных сил, если считать, что точки их приложения имеют в течение всего времени удара постоянные скорости, равные их доударным скоростям.*

§ 3. Импульсивное движение твердого тела

198. Удар по свободному твердому телу. Изучим влияние заданных ударных импульсов на движение твердого тела. Так как кинематическое состояние тела вполне определяется вектором скорости

какой-либо его точки и вектором угловой скорости, то задача об импульсивном движении свободного твердого тела сводится к нахождению изменений этих двух векторов за время удара.

Чтобы сделать вычисления наиболее простыми, возьмем за начало координат центр масс G тела, а за оси координат примем главные центральные оси инерции тела. Введем обозначения: S_x, S_y, S_z, L_x, L_y, L_z и p, q, r — проекции главного вектора $\boldsymbol{S}^{(e)}$, главного момента $\boldsymbol{L}_G^{(e)}$ внешних ударных импульсов относительно центра масс и вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела на указанные оси; m — масса; A, B, C — главные центральные моменты инерции тела; величины Ap, Bq, Cr будут проекциями вектора $\boldsymbol{K}_G$ кинетического момента тела относительно центра масс.

Теоремы об изменении количества движения и кинетического момента, согласно равенствам (2) и (3) предыдущего параграфа, дают два векторных уравнения

$$m\Delta \boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{S}^{(e)}, \quad \Delta \boldsymbol{K}_G = \boldsymbol{L}_G^{(e)}. \tag{1}$$

Отсюда получаем выражения для проекций приращений вектора скорости центра масс $\Delta \boldsymbol{v}_G$ и вектора угловой скорости $\Delta \boldsymbol{\omega}$:

$$v_{Gx}{}^+ - v_{Gx}{}^- = \frac{S_x}{m}, \quad v_{Gy}{}^+ - v_{Gy}{}^- = \frac{S_y}{m}, \quad v_{Gz}{}^+ - v_{Gz}{}^- = \frac{S_z}{m}, \tag{2}$$

$$p^+ - p^- = \frac{L_x}{A}, \quad q^+ - q^- = \frac{L_y}{B}, \quad r^+ - r^- = \frac{L_z}{C}. \tag{3}$$

Если тело совершает плоское движение, например, параллельно плоскости Oxy, то из шести соотношений (2), (3) остаются только три:

$$v_{Gx}{}^+ - v_{Gx}{}^- = \frac{S_x}{m}, \quad v_{Gy}{}^+ - v_{Gy}{}^- = \frac{S_y}{m}, \quad r^+ - r^- = \frac{L_z}{C}. \tag{4}$$

Упражнение 1. *Показать, что первоначально покоящееся тело в его импульсивном движении относительно центра масс начнет вращаться вокруг радиуса-вектора той точки центрального эллипсоида инерции, в которой плоскость, касательная к поверхности эллипсоида, перпендикулярна главному моменту ударных импульсов относительно центра масс.*

Найдем изменение кинетической энергии твердого тела под действием заданных ударных импульсов. Согласно теореме Кёнига (см. п. 83, 84), имеем такое выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

Подставив в это выражение сначала значения $\boldsymbol{v}_G^+$, $\boldsymbol{\omega}^+$ векторов скорости центра масс и угловой скорости тела после удара, а затем их значения $\boldsymbol{v}_G^-$, $\boldsymbol{\omega}^-$ до удара и вычтя почленно полученные равенства, найдем, на основании уравнений (2), (3)

$$T^+ - T^- = \boldsymbol{S}^{(e)} \cdot \frac{\boldsymbol{v}_G^+ + \boldsymbol{v}_G^-}{2} + \boldsymbol{L}^{(e)} \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}^+ + \boldsymbol{\omega}^-}{2}. \tag{5}$$

Величины $\boldsymbol{v}_G^+$ и $\boldsymbol{\omega}^+$ можно отсюда исключить опять же при помощи уравнений (2), (3). В результате получим следующее выражение для изменения кинетической энергии тела через главный вектор $\boldsymbol{S}^{(e)}$ и главный момент $\boldsymbol{L}_G^{(e)}$ заданных ударных импульсов и через величины $\boldsymbol{v}_G^-$, $\boldsymbol{\omega}^-$, которые определяют доударное кинематическое состояние твердого тела:

$$T^+ - T^- = \frac{1}{2}\left(\frac{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}{m} + \frac{L_x^2}{A} + \frac{L_y^2}{B} + \frac{L_z^2}{C}\right) + \boldsymbol{S}^{(e)} \cdot \boldsymbol{v}_G^- + \boldsymbol{L}_G^{(e)} \cdot \boldsymbol{\omega}^-. \tag{6}$$

Упражнение 2. *Неподвижное свободное твердое тело приводят к вращению относительно центра масс при помощи пары ударных сил. Величина импульсивного момента пары равна L. Главные центральные моменты инерции тела удовлетворяют неравенствам $A > B > C$. Показать, что максимально возможное значение приобретаемой телом кинетической энергии равно $\frac{L^2}{2C}$, а вектор момента пары должен быть при этом коллинеарен наибольшей оси центрального эллипсоида инерции тела.*

Пример 1. *Горизонтальным кием ударяют бильярдный шар в его меридианной плоскости* (рис. 148). *На какой высоте h над центром шара следует сообщить удар, чтобы после удара шар двигался без скольжения?*

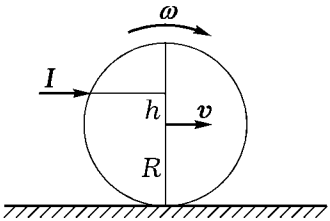

Рис. 148

Пусть m — масса шара, R — его радиус, I — величина ударного импульса. Если v — скорость центра, а ω — угловая скорость шара после удара, то справедливы уравнения

$$mv = I, \quad \frac{2}{5}mR^2\omega = Ih. \tag{7}$$

(*Реакция плоскости конечна и не дает вклада в ударный импульс*). *Из* (7) *и условия* $v = \omega R$ *отсутствия скольжения находим* $h = \frac{2}{5}R$.

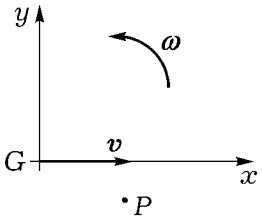

Рис. 149

Пример 2. *Твердое тело, имеющее форму пластинки, совершает произвольное движение в своей плоскости. Точку* P *пластинки внезапно останавливают* (*шарнирно закрепляют*). *Где должна находиться точка* P, *чтобы пластинка остановилась?*

Пусть $\boldsymbol{v}$ — *скорость центра масс* G, *а* $\boldsymbol{\omega}$ — *угловая скорость пластинки в момент, непосредственно предшествующий закреплению точки* P. *Для удобства вычислений ось* Gx *направим вдоль вектора* $\boldsymbol{v}$, *координаты точки* P *обозначим через* x, y (рис. 149).

Так как Gz — *главная центральная ось инерции, то для описания импульсивного движения применимы уравнения* (4). *В этих уравнениях* $L_z = xS_y - yS_x$, *где* S_x, S_y — *компоненты ударного импульса, возникающего при закреплении точки* P.

Учитывая, что $v_{Gx}^- = v$, $v_{Gy}^- = v_{Gx}^+ = v_{Gy}^+ = 0$, $r^- = \omega$, $r^+ = 0$, *из уравнений* (4) *находим* $S_x = -mv$, $S_y = 0$, x — *произвольная величина, а* $y = -\frac{C\omega}{mv}$. *Следовательно, точка* P *должна лежать в полуплоскости* $y < 0$ *на прямой, параллельной направлению скорости центра масс и отстоящей от него на расстоянии* $\frac{C\omega}{mv}$.

Пусть в точке Q покоящегося тела приложен ударный импульс $\boldsymbol{I}$. Из уравнений (1), (2) тогда получаем $\boldsymbol{v}_G^+ = \frac{\boldsymbol{I}}{m}$, $\boldsymbol{K}_G^+ = \overline{GQ} \times \boldsymbol{I}$. Отсюда следует, что послеударное кинематическое состояние первоначально покоящегося тела не вполне произвольно: скорость центра масс и кинетический момент относительно центра масс должны быть ортогональными.

Упражнение 3. *Из сказанного выше сразу следует, что если свободное твердое тело движется так, что* $\boldsymbol{K}_G \cdot \boldsymbol{v}_G \neq 0$, *то его нельзя остановить одним импульсом. Показать, что если* $\boldsymbol{K}_G \cdot \boldsymbol{v}_G = 0$ *и* $\boldsymbol{v}_G \neq 0$, *то тело можно остановить, приложив к нему единственный импульс. Каковы будут его величина и линия действия?*

199. Удар по телу с одной неподвижной точкой. Неподвижную точку O примем за начало координат, а оси x, y, z совместим с главными осями инерции тела для точки O; через $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{L}$ обозначим главный вектор и главный момент ударных импульсов активных сил.

Задача состоит в нахождении приращения $\Delta\boldsymbol{\omega}$ вектора угловой скорости тела и ударного импульса реакции, который может возникнуть в точке O.

Проекции приращения вектора угловой скорости определяются уравнениями (3), в которых теперь A, B, C — главные моменты инерции тела относительно точки O.

Ударный импульс $\boldsymbol{I}'$ реакции в точке O определяется первым из уравнений (1), которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$m\Delta\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{I}'. \tag{8}$$

Так как положение центра масс при ударе не меняется, то $\Delta\boldsymbol{v}_G = \Delta\boldsymbol{\omega} \times \overline{OG}$. Поэтому на основании уравнения (8) заключаем, что

$$\boldsymbol{I}' = m\Delta\boldsymbol{\omega} \times \overline{OG} - \boldsymbol{S}. \tag{9}$$

Рассмотрим частный случай, когда на тело действует единственный активный ударный импульс $\boldsymbol{I}$, приложенный в точке P. Тогда $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{I}$, а $\boldsymbol{L} = \overline{OP} \times \boldsymbol{I}$. Поставим следующий вопрос: возможно ли, и при каких условиях, чтобы заданный активный импульс $\boldsymbol{I}$ не вызывал ударной реакции связи. Этот вопрос требует ответа, когда, например, необходимо посредством удара привести тело в движение вокруг неподвижной точки, но нет уверенности в достаточной прочности связи.

Пусть x_G, y_G, z_G — известные координаты центра масс, а x, y, z — координаты точки P приложения неизвестного импульса $\boldsymbol{I}$. При $\boldsymbol{I}' = 0$ из (9) и (3) получим три уравнения:

$$\begin{aligned}
&\frac{z_G}{B}\Big(zI_x - xI_z\Big) - \frac{y_G}{C}\Big(xI_y - yI_x\Big) = \frac{I_x}{m},\\
&\frac{x_G}{C}\Big(xI_y - yI_x\Big) - \frac{z_G}{A}\Big(yI_z - zI_y\Big) = \frac{I_y}{m},\\
&\frac{y_G}{A}\Big(yI_z - zI_y\Big) - \frac{x_G}{B}\Big(zI_x - xI_z\Big) = \frac{I_z}{m}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Эти уравнения линейны и однородны относительно неизвестных проекций импульса $\boldsymbol{I}$, поэтому величина I этого импульса может быть произвольной. Кроме того, $\boldsymbol{I}$ определяется еще с точностью до изменения его направления на противоположное.

Так как по смыслу задачи $\boldsymbol{I} \neq 0$, то определитель системы (10)

должен равняться нулю:

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{yy_G}{C} + \dfrac{zz_G}{B} - \dfrac{1}{m} & -\dfrac{xy_G}{C} & -\dfrac{xz_G}{B} \\ -\dfrac{yx_G}{C} & \dfrac{zz_G}{A} + \dfrac{xx_G}{C} - \dfrac{1}{m} & -\dfrac{yz_G}{A} \\ -\dfrac{zx_G}{B} & -\dfrac{zy_G}{A} & \dfrac{xx_G}{B} + \dfrac{yy_G}{A} - \dfrac{1}{m} \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Отсюда следует, что геометрическим местом возможного положения точек P в общем случае является поверхность третьего порядка. Импульс, приложенный в любой точке этой поверхности, не вызывает ударной реакции связи. Линия действия импульса $\boldsymbol{I}$ определяется из уравнений (10), если в них подставить координаты x, y, z выбранной точки указанной поверхности.

В некоторых частных случаях поверхность (11) может вырождаться в более простые поверхности. Пусть, например, ось OG, проходящая через неподвижную точку O и центр масс тела, будет главной осью инерции. Если ее принять за ось Oz, то $x_G = y_G = 0$, и уравнение (11) получит вид

$$D = -\frac{1}{m}\left(\frac{zz_G}{B} - \frac{1}{m}\right)\left(\frac{zz_G}{A} - \frac{1}{m}\right) = 0,$$

т. е. точка P должна лежать на одной из двух плоскостей, перпендикулярных главной оси инерции Oz и расположенных по ту же сторону от точки O, что и центр масс:

$$z = \frac{B}{mz_G}, \quad z = \frac{A}{mz_G}. \tag{12}$$

Из уравнений (10) тогда следует, что (при $A \neq B$) импульс $\boldsymbol{I}$ должен быть параллелен оси Ox в первом случае и оси Oy во втором. Для динамически симметричного тела ($A = B$) плоскости (12) сливаются в одну, а импульс $\boldsymbol{I}$ имеет произвольное направление в этой плоскости.

Пример 1. *Твердое тело вращается вокруг неподвижной точки O. В некоторый момент времени, когда угловая скорость тела равна $\boldsymbol{\omega}^-$, в нем внезапно закрепляется вторая точка O_1, так, что после этого тело может только вращаться вокруг оси u, проходящей через точки O и O_1. Найти угловую скорость тела в этом вращении.*

Обозначим через α, β, γ косинусы углов, образуемых осью u с осями Ox, Oy, Oz. Кинетический момент тела относительно оси u перед

закреплением точки O_1 равен $Ap^-\alpha + Bq^-\beta + Cr^-\gamma$, а после закрепления имеет (см. п. 77, 82) *величину $\left(A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2\right)\omega^+$. Но ударные импульсы реакций в точках O и O_1 не создают момента относительно оси u. Следовательно, кинетический момент тела относительно этой оси не изменяется во время удара. Поэтому*

$$\omega^+ = \frac{Ap^-\alpha + Bq^-\beta + Cr^-\gamma}{A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2}.$$

200. Удар по телу с неподвижной осью. Пусть твердое тело вращается вокруг оси, проходящей через его неподвижные точки O и O_1 (рис. 150). К телу прикладывается ударная сила с импульсом $\boldsymbol{I}$. Требуется найти изменение угловой скорости вращения тела, а также ударные импульсы реакций в точках O и O_1.

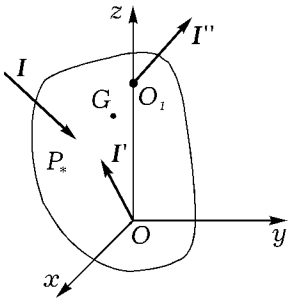

Рис. 150

Пусть $Oxyz$ — система координат с началом в точке O, ось Oz которой направлена по оси вращения, а ось Ox перпендикулярна направлению ударного импульса, так что вектор $\boldsymbol{I}$ задается компонентами 0, I_y, I_z. Центр масс G и точка P_* приложения импульса имеют соответственно координаты x_G, y_G, z_G и x_*, y_*, z_*, вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ задается компонентами 0, 0, r. Для компонентов ударных импульсов $\boldsymbol{I}'$ и $\boldsymbol{I}''$ реакций в точках O и O_1 примем обозначения I'_x, I'_y, I'_z и I''_x, I''_y, I''_z соответственно. Матрица $\mathbf{J}$ тензора инерции тела для точки O имеет вид (4) п. 77. Расстояние между точками O и O_1 обозначим через h.

Из теорем об изменении кинетического момента и количества движения имеем

$$m\Delta\boldsymbol{\omega} \times \overline{OG} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{I}' + \boldsymbol{I}'', \quad \mathbf{J}\Delta\boldsymbol{\omega} = \overline{OP_*} \times \boldsymbol{I} + \overline{OO_1} \times \boldsymbol{I}''.$$

В скалярной форме эти соотношения запишутся в виде следующих шести уравнений:

$$-my_G\Delta r = I'_x + I''_x, \tag{13}$$

$$mx_G\Delta r = I_y + I'_y + I''_y, \tag{14}$$

$$0 = I_z + I'_z + I''_z, \tag{15}$$

$$-J_{xz}\Delta r = y_*I_z - z_*I_y - hI''_y, \tag{16}$$

$$-J_{yz}\Delta r = -x_*I_z + hI''_x, \tag{17}$$

$$J_z\Delta r = x_*I_y. \tag{18}$$

Из последнего уравнения определяется изменение угловой скорости Δr. Если ударный импульс $\boldsymbol{I}$ и ось вращения тела не лежат в одной плоскости, то величина Δr отлична от нуля. Остальные пять уравнений (13)–(17) служат для нахождения шести проекций ударных импульсов реакций в точках O и O_1. Эта задача является неопределенной: нельзя найти отдельно величины I'_z и I''_z, а можно определить только их сумму.

Полагая, что $\Delta r \neq 0$, рассмотрим задачу об определении условий, при выполнении которых ударные импульсы реакций в точках O и O_1 не возникают. При $\boldsymbol{I}' = \boldsymbol{I}'' = 0$ из (15) следует, что $I_z = 0$, т. е. направление ударного импульса параллельно оси Oy. А из (13) получаем, что $y_G = 0$. Следовательно, центр масс лежит в плоскости, проходящей через ось вращения и перпендикулярную направлению импульса. Если $x_G = 0$, т. е. центр масс лежит на оси вращения, то (см. (14)) поставленная задача не имеет решения: при $\boldsymbol{I} \neq 0$ всегда будут возникать ударные реакции.

Пусть $x_G \neq 0$. Из (14) и (16) имеем $J_{xz} - mx_G z_* = 0$, или

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_\nu (z_\nu - z_*) = 0. \tag{19}$$

А из (17) следует равенство $J_{yz} = 0$, что в сочетании с условием $y_G = 0$ дает соотношение

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu y_\nu (z_\nu - z_*) = 0. \tag{20}$$

Равенства (19) и (20) означают (см. п. 78), что ось вращения является главной осью инерции тела для своей точки с координатами 0, 0, z_*.

Таким образом, произвольный по величине ударный импульс не вызывает ударных импульсов реакций в точках O и O_1 только тогда, когда ось вращения является главной осью инерции тела. Если это условие выполнено, то импульс должен быть перпендикулярен плоскости, проходящей через ось вращения и центр масс тела, причем он должен лежать в плоскости, перпендикулярной оси и проходящей через ту ее точку, для которой она является главной осью инерции.

Наконец из (14) и (18) находим

$$x_* = \frac{J_z}{mx_G}, \tag{21}$$

что окончательно определяет линию действия ударного импульса. Ее называют *осью удара*, а точку, в которой она пересекает плоскость, проходящую через ось вращения и центр масс — *центром удара*.

Пример 1 (Случай пластинки). *Рассмотрим плоскую фигуру, которая может вращаться вокруг некоторой оси Oz, лежащей в ее плоскости* (рис. 151). *Для любой оси Oz можно найти центр удара. Это следует из того, что ось Oz всегда является главной осью инерции для одной из своих точек. Чтобы показать справедливость сказанного, перейдем к системе координат $O'x'y'z$, смещенной относительно исходной системы $Oxyz$ на вектор $\overline{OO'}$, имеющий в системе $Oxyz$ компоненты* 0, 0, z_*. *Ось Ox (и ось $O'x'$) лежит в плоскости пластинки. Тогда $J_{y'z} = 0$, так как для каждой частицы P_ν тела имеем $y'_\nu = 0$. Величина же $J_{x'z}$ будет равна нулю, если z_* выбрать в соответствии с формулой* (19): $z_* = \dfrac{J_{xz}}{mx_G}$.

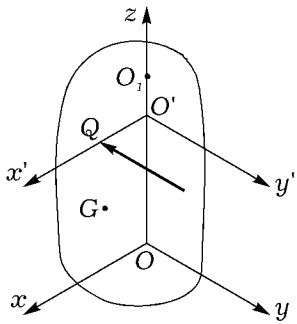

Рис. 151

Теперь, если импульс $\boldsymbol{I}$ перпендикулярен плоскости пластинки и точка Q его приложения лежит на оси $O'x'$, причем абсцисса x' точки Q определяется (в соответствии с формулой (21)) *равенством $x' = \dfrac{J_z}{mx_G}$, то Q — центр удара. Например, для однородной двери ширины a центр удара находится на середине высоты на расстоянии $\dfrac{2}{3}a$ от оси.*

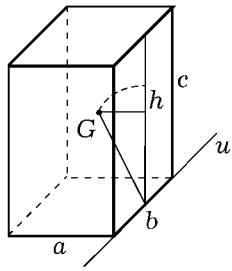

Рис. 152

Пример 2. *Тяжелый однородный параллелепипед с ребрами a, b, c скользит по гладкой горизонтальной плоскости так, что ребро длины c вертикально* (рис. 152). *Направление скоольжения перпендикулярно ребру длины b. Внезапно это ребро задерживается препятствием и становится неподвижным. Найдем, при какой скорости движения v произойдет опрокидывание параллелепипеда.*

Послеударное движение параллелепипеда является вращением вокруг оси u, содержащей остановленное ребро. Так как кинетический момент относительно этой оси за время удара не изменяется, то

$$\frac{1}{2}mvc = J_u\omega, \tag{22}$$

где m — масса, ω — послеударная угловая скорость параллелепипеда,

J_u — его момент инерции относительно оси u. Согласно п. 75, 76

$$J_u = \frac{1}{3}m\left(a^2 + c^2\right). \tag{23}$$

Для опрокидывания параллелепипеда необходимо и достаточно, чтобы его центр тяжести при своем движении по окружности радиуса $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2}$ пересек вертикальную плоскость, проходящую через ось u. При этом он поднимется над своим первоначальным положением на высоту

$$h = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+c^2} - c\right). \tag{24}$$

Опрокидывание произойдет, если

$$\frac{1}{2}J_u\omega^2 > mgh. \tag{25}$$

Из (22)–(25) *находим*

$$v^2 > \frac{4g\left(a^2+c^2\right)\left(\sqrt{a^2+c^2}-c\right)}{3c^2}.$$

Пример 3. *Стержень AB шарнирно закреплен концом A, а вторым концом шарнирно соединен со стержнем BC* (рис. 153). *Стержни покоятся и составляют прямую линию. Определить характер послеударного движения и ударные импульсы реакций в шарнирах A и B вследствие импульса $\boldsymbol{I}$, приложенного к стержню BC под прямым углом на расстоянии a от шарнира B. Стержни считать тонкими и однородными, масса каждого стержня равна m, длина l.*

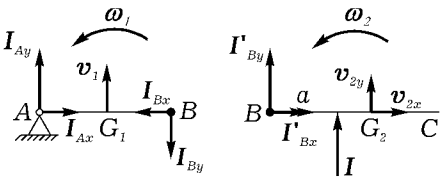

Рис. 153

Мысленно уберем шарнир B и рассмотрим импульсивное движение каждого из стержней в отдельности под действием заданного импульса $\boldsymbol{I}$ и ударных импульсов $\boldsymbol{I}_A$ и $\boldsymbol{I}_B$ реакций в шарнирах. Обозначим через $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ послеударные скорости центров масс G_1 и G_2 стержней AB и BC соответственно, а через ω_1 и ω_2 их угловые скорости. Так как послеударное движение стержня AB будет вращением вокруг точки A,

то вектор $\boldsymbol{v}_1$ *перпендикулярен стержню, причем* $v_1 = \dfrac{\omega_1 l}{2}$. *Упомянутые векторные величины показаны на рис.* 153 *их компонентами в системе координат* Axy, *ось* Ax *которой направлена вдоль стержней.*

Из теорем об изменении количества движения и кинетического момента, примененных к каждому из стержней, получаем следующие шесть уравнений:

$$I_{Ax} - I_{Bx} = 0, \quad \frac{1}{2}m\omega_1 l = I_{Ay} - I_{By}, \quad \frac{1}{3}ml^2\omega_1 = -I_{By}l,$$

$$mv_{2x} = I'_{Bx}, \quad mv_{2y} = I + I'_{By}, \quad \frac{1}{12}ml^2\omega_2 = -I\left(\frac{l}{2} - a\right) - I'_{By}\frac{l}{2}. \tag{26}$$

Еще два уравнения получим, приравняв векторы послеударной скорости шарнира, рассматривая его как точку, принадлежащую с одной стороны стержню AB, *а с другой — стержню* BC:

$$0 = v_{2x}, \quad \omega_1 l = v_{2y} - \frac{1}{2}\omega_2 l. \tag{27}$$

Но так как

$$I'_{Bx} = I_{Bx}, \quad I'_{By} = I_{By}, \tag{28}$$

то имеем систему десяти уравнений (26)–(28) *для нахождения десяти неизвестных. Решив эту систему, получим*

$$\omega_1 = \frac{6I\,(2l - 3a)}{7ml^2}, \ \omega_2 = \frac{6I\,(8a - 3l)}{7ml^2}, \ v_{2x} = 0, \ v_{2y} = \frac{3I\,(2a + l)}{7ml},$$

$$I_{Ax} = 0, \ I_{Ay} = \frac{(2l - 3a)I}{7l}, \ I_{Bx} = I'_{Bx} = 0, \ I_{By} = I'_{By} = -\frac{2(2l - 3a)I}{7l}.$$

Отсюда, в частности, видно, что: 1) *если* $a = \dfrac{5}{11}l$, *то* $\omega_1 = \omega_2$ *и в послеударном движении стержни составляют прямую линию*; 2) *стержень* AB *остается в покое, если* $a = \dfrac{2l}{3}$, *т. е. если импульс* $\boldsymbol{I}$ *приложен в центре удара стержня* BC, *соответствующем оси вращения, проходящей через шарнир* B.

§ 4. Соударение твердых тел

201. Коэффициент восстановления. Пусть два движущихся тела B_1 и B_2 в момент времени $t = t_0$ соприкасаются точками O_1 и O_2

своих поверхностей (рис. 154) и в этот момент относительная скорость точек O_1 и O_2 не лежит в общей касательной плоскости. Тогда происходит соударение тел. В точке контакта возникают ударные силы, приложенные к каждому из тел, они имеют одинаковые модули и противоположное направление.

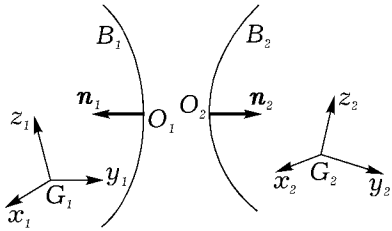

Рис. 154

Будем считать, что тела абсолютно гладкие. Тогда ударные силы и их импульсы $\boldsymbol{I}_1$ и $\boldsymbol{I}_2$ перпендикулярны общей касательной плоскости к поверхностям соударяющихся тел B_1 и B_2. Пусть $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор общей нормали к поверхностям тел в точке их контакта, направленный внутрь второго тела, а $\boldsymbol{n}_k$ — единичная нормаль к телу B_k в его точке O_k, направленная внутрь тела. Тогда очевидно, что

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_2 = -\boldsymbol{n}_1, \ \boldsymbol{I}_k = I\boldsymbol{n}_k \quad (k = 1, 2), \tag{1}$$

где I — модуль ударного импульса.

Величина I заранее неизвестна. Это отличает рассматриваемую задачу о соударении двух тел от рассмотренной в предыдущем параграфе задачи об импульсивном движении твердого тела под действием заданных ударных импульсов. Задача о соударении тел состоит в нахождении послеударного кинематического состояния тел и величины ударного импульса при известном доударном кинематическом состоянии тел. Но, оказывается, что даже в простейших случаях соударения тел число неизвестных превосходит число уравнений, выражающих общие теоремы динамики. Поэтому необходимы дополнительные физические предположения.

Гипотеза об абсолютной твердости тел здесь оказывается недостаточной. Надо предположить, что тела претерпевают малые изменения своей формы вблизи их точки соприкосновения. Сам процесс удара подразделяется на две фазы. В течение первой фазы от $t = t_0$ до $t = t_0 + \tau_1$ происходит сближение тел вдоль их общей нормали, причем модуль проекции на нормаль относительной скорости точек O_1 и O_2 уменьшается до нуля, чем и определяется окончание первой фазы удара. В конце первой фазы деформация тел максимальна. Затем начинается

вторая фаза. Проекция на нормаль относительной скорости точек O_1 и O_2 при $t = t_0 + \tau_1$ изменяет знак и при $t > t_0 + \tau_1$ возрастает по модулю; тела, восстанавливая свою форму, удаляются друг от друга вдоль общей нормали. При $t = t_0 + \tau_1 + \tau_2$ их соприкосновение будет происходить в одной точке, тела отделяются друг от друга, чем и заканчивается вторая фаза удара, а вместе с ней и весь процесс соударения тел.

Наблюдения показывают, что абсолютная величина проекции на нормаль относительной скорости точек O_1 и O_2, вообще говоря, не достигает своей исходной (доударной) величины. Полное исследование описанного процесса соударения тел требует подробного рассмотрения их физических свойств и весьма сложного математического анализа, что выходит за рамки теоретической механики. Упрощая сложный характер явления, принимают следующее кинематическое предположение, высказанное еще Ньютоном: *отношение абсолютной величины проекции на общую нормаль к поверхностям тел относительной скорости точек контакта тел после удара к ее значению до удара есть некоторая постоянная величина, не зависящая ни от относительной скорости, ни от размеров тел, а лишь от их материала.*

Это отношение называется *коэффициентом восстановления.* В дальнейшем оно будет обозначаться через æ. Пусть $\boldsymbol{v}_{Ok}^-$ и $\boldsymbol{v}_{Ok}^+$ — векторы скоростей точки O_k до и после соударения ($k = 1,\ 2$). Тогда

$$\left(\boldsymbol{v}_{O_1}^+ - \boldsymbol{v}_{O_2}^+\right) \cdot \boldsymbol{n} = -æ\left(\boldsymbol{v}_{O_1}^- - \boldsymbol{v}_{O_2}^-\right) \cdot \boldsymbol{n}. \tag{2}$$

Учитывая соотношения (1), равенство (2) можно записать также в следующей форме:

$$\boldsymbol{v}_{O_1}^+ \cdot \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{v}_{O_2}^+ \cdot \boldsymbol{n}_2 = -æ\left(\boldsymbol{v}_{O_1}^- \cdot \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{v}_{O_2}^- \cdot \boldsymbol{n}_2\right). \tag{3}$$

Коэффициент восстановления характеризует, насколько восстанавливается нормальная составляющая относительной скорости после удара. Как правило, полного восстановления не происходит. Поэтому $0 \leqslant æ \leqslant 1$. Если $æ = 0$, то удар называется *абсолютно неупругим.* В этом случае процесс соударения состоит только из первой фазы; когда тела достигнут максимального сближения, восстановления их формы не происходит и оба тела движутся как одно целое. При $æ = 1$ удар называется *абсолютно упругим.* Здесь во второй фазе удара происходит полное восстановление формы тел, нормальная составляющая относительной скорости точек контакта достигает доударной абсолютной величины. Промежуточные случаи $0 < æ < 1$, характерные для реальных физических тел, называют *неупругим ударом.*

При использовании гипотезы (2) следует иметь в виду, что она является первым (иногда очень грубым) приближением к действительным закономерностям, описывающим соударение реальных тел[1].

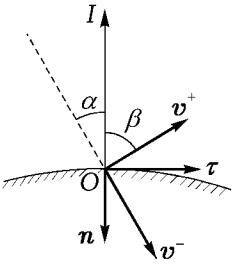

Рис. 155

Пример 1. *В качестве примера использования гипотезы Ньютона* (2) *рассмотрим задачу о соударении материальной точки с неподвижной абсолютно гладкой поверхностью.*

Пусть перед соударением точка имеет скорость $\boldsymbol{v}^-$, *образующую с внешней нормалью к поверхности угол падения* α (*см. рис.* 155, *где* O — *точка, в которой происходит соударение,* $\boldsymbol{\tau}$ — *единичный вектор касательной к кривой, являющейся пересечением поверхности и плоскости, проходящей через векторы нормали* $\boldsymbol{n}$ *и доударной скорости* $\boldsymbol{v}^-$). *Масса* m *точки и коэффициент восстановления* æ *заданы. Требуется найти модуль послеударной скорости точки* $\boldsymbol{v}^+$, *угол отражения* β *и величину* I *ударного импульса.*

Теорема об изменении количества движения дает два уравнения:

$$\begin{gathered} v^+ \sin\beta - v^- \sin\alpha = 0, \\ m(v^+ \cos\beta + v^- \cos\alpha) = I. \end{gathered} \tag{4}$$

Из соотношения (2) *получаем недостающее третье уравнение:*

$$v^+ \cos\beta = æ v^- \cos\alpha. \tag{5}$$

Из (4), (5) *находим*

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{æ}\operatorname{tg}\alpha, \quad v^+ = v^-\sqrt{\sin^2\alpha + æ^2\cos^2\alpha}, \quad I = m(1+æ)v^-\cos\alpha. \tag{6}$$

Из (4)–(6) *следует, что: касательные составляющие скорости до и после удара равны между собой; при абсолютно неупругом ударе материальная точка после удара имеет только касательную составляющую; при абсолютно упругом ударе угол падения равен углу отражения, а модуль скорости не изменяется* ($\alpha = \beta$, $v^+ = v^-$); *при неупругом ударе угол падения меньше угла отражения* ($\beta > \alpha$); *при абсолютно упругом ударе ударный импульс в два раза больше импульса при абсолютно неупругом ударе.*

[1]Обсуждение этого вопроса можно найти в книге: Пановко Я. Г. Введение в теорию механического удара.— М.: Наука, 1977. Современные математические модели теории механического удара и их критический анализ содержатся в монографии: Иванов А. П. Динамика систем с механическими соударениями. — М.: Международная программа образования, 1997.

Пример 2. *Однородный стержень, который может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр тяжести, находится в равновесии. На один из концов стержня со скоростью v падает шар массы m. Длина стержня $2a$, масса M. Коэффициент восстановления равен æ. Принимая шар за материальную точку, определим послеударное кинематическое состояние стержня и шара.*

Пусть v^+ — скорость шара, а ω^+ — угловая скорость стержня после удара. Из теоремы об изменении кинетического момента (относительно центра тяжести стержня) следует равенство

$$mva = mv^+a + \frac{1}{3}Ma^2\omega^+, \tag{7}$$

а из того, что удар абсолютно упругий, имеем

$$v^+ - \omega^+a = -æv. \tag{8}$$

Из уравнений (7), (8) *находим:*

$$v^+ = \frac{3m - æM}{3m + M}v, \quad \omega^+ = \frac{3(1 + æ)mv}{(3m + M)a}.$$

202. Общая задача о соударении двух абсолютно гладких тел. С центром масс тела B_k ($k = 1, 2$) свяжем систему координат $G_kx_ky_kz_k$, направив ее оси по главным центральным осям инерции тела (рис. 154). Через A_k, B_k C_k обозначим соответствующие главные моменты инерции тела, а через m_k — его массу. В системе координат $G_kx_ky_kz_k$ точка O_k имеет координаты x_k, y_k, z_k, а вектор нормали $\boldsymbol{n}_k$ задается направляющими косинусами α_k, β_k, γ_k. Пусть $\boldsymbol{\omega}_k$ — вектор угловой скорости тела B_k, а $\boldsymbol{v}_k$ — скорость его центра масс G_k. Задача состоит в определении послеударных значений этих векторов, если известны их доударные значения. Приращения $\Delta\boldsymbol{\omega}_k = \boldsymbol{\omega}_k^+ - \boldsymbol{\omega}_k^-$ и $\Delta\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{v}_k^+ - \boldsymbol{v}_k^-$ зададим в системе координат $G_kx_ky_kz_k$ соответственно компонентами Δp_k, Δq_k, Δr_k и Δv_{x_k}, Δv_{y_k}, Δv_{z_k}. Момент $\boldsymbol{M}_k = \overline{G_kO_k} \times \boldsymbol{I}_k$ ударного импульса $\boldsymbol{I}_k$ относительно центра масс G_k имеет в системе координат $G_kx_ky_kz_k$ компоненты $M_{x_k} = I\xi_k$, $M_{y_k} = I\eta_k$, $M_{z_k} = I\zeta_k$, где $\xi_k = y_k\gamma_k - z_k\beta_k$, $\eta_k = z_k\alpha_k - x_k\gamma_k$, $\zeta_k = x_k\beta_k - y_k\alpha_k$.

Из теоремы об изменении кинетического момента и количества движения имеем двенадцать уравнений

$$A_k\Delta p_k = I\xi_k, \qquad B_k\Delta q_k = I\eta_k, \qquad C_k\Delta r_k = I\zeta_k,$$

$$m_k\Delta v_{x_k} = I\alpha_k, \quad m_k\Delta v_{y_k} = I\beta_k, \quad m_k\Delta v_{z_k} = I\gamma_k \quad (k = 1, 2).$$

Отсюда находим послеударные значения кинематических величин тела B_k:

$$p_k^+ = p_k^- + I\frac{\xi_k}{A_k}, \quad q_k^+ = q_k^- + I\frac{\eta_k}{B_k}, \quad r_k^+ = r_k^- + I\frac{\zeta_k}{C_k}, \tag{9}$$

$$v_{x_k}^+ = v_{x_k}^- + I\frac{\alpha_k}{m_k}, \quad v_{y_k}^+ = v_{y_k}^- + I\frac{\beta_k}{m_k}, \quad v_{z_k}^+ = v_{z_k}^- + I\frac{\gamma_k}{m_k}. \tag{10}$$

Из (10), в частности, следует, что касательные составляющие скоростей центров масс тел при ударе не изменяются.

В равенствах (9), (10) содержится неизвестная величина I ударного импульса. Если найти ее через известные величины, а затем подставить в (9), (10), то тем самым общая задача о соударении двух абсолютно гладких тел будет решена.

Величину I найдем при помощи соотношения (3). Для этого, заметив, что $\boldsymbol{v}_{O_k}^+ = \boldsymbol{v}_k^+ + \boldsymbol{\omega}_k^+ \times \overline{G_kO_k}$, $\boldsymbol{v}_{O_k}^- = \boldsymbol{v}_k^- + \boldsymbol{\omega}_k^- \times \overline{G_kO_k}$ и воспользовавшись свойствами смешанного произведения векторов, находим равенство

$$\left(\boldsymbol{v}_{O_k}^+ - \boldsymbol{v}_{O_k}^-\right) \cdot \boldsymbol{n}_k = \Delta\boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{n}_k + \left(\overline{G_kO_k} \times \boldsymbol{n}_k\right) \cdot \Delta\boldsymbol{\omega}_k,$$

которое при помощи соотношений (9), (10) можно записать в виде

$$\left(\boldsymbol{v}_{O_k}^+ - \boldsymbol{v}_{O_k}^-\right) \cdot \boldsymbol{n}_k = I\left(\frac{1}{m_k} + \frac{\xi_k^2}{A_k} + \frac{\eta_k^2}{B_k} + \frac{\zeta_k^2}{C_k}\right) \quad (k = 1,\ 2).$$

Отсюда после суммирования по k получаем равенство

$$\left(\boldsymbol{v}_{O_1}^+ - \boldsymbol{v}_{O_1}^-\right) \cdot \boldsymbol{n}_1 + \left(\boldsymbol{v}_{O_2}^+ - \boldsymbol{v}_{O_2}^-\right) \cdot \boldsymbol{n}_2 = \mu^2 I, \tag{11}$$

где введено обозначение

$$\mu^2 = \sum_{k=1}^{2}\left(\frac{1}{m_k} + \frac{\xi_k^2}{A_k} + \frac{\eta_k^2}{B_k} + \frac{\zeta_k^2}{C_k}\right). \tag{12}$$

Из уравнений (11) и (3) находим

$$I = -\frac{1+æ}{\mu^2}\left(\boldsymbol{v}_{O_1}^- \cdot \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{v}_{O_2}^- \cdot \boldsymbol{n}_2\right). \tag{13}$$

Заметим, что величина $-\left(\boldsymbol{v}_{O_1}^- \cdot \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{v}_{O_2}^- \cdot \boldsymbol{n}_2\right)$ представляет собой доударную проекцию скорости точки O_1 контакта тела B_1 относительно точки контакта тела B_2 на внутреннюю нормаль $\boldsymbol{n}$ тела B_2. Обозначим

ее через u_{rn}. Так как перед соударением оба тела стремились сблизиться, то эта величина положительна. Таким образом,

$$I = \frac{1+æ}{\mu^2} u_{rn}, \tag{14}$$

причем все величины, входящие в правую часть этого равенства, известны.

Подставив I из (14) в (9) и (10), получим полное решение рассматриваемой задачи о соударении двух абсолютно гладких тел.

Замечание 2 (Динамическое истолкование коэффициента восстановления). *Пусть* $\boldsymbol{v}_k^{(1)}$, $\boldsymbol{\omega}_k^{(1)}$ *и* $\boldsymbol{v}_{O_k}^{(1)}$ $(k = 1, 2)$ — *соответственно векторы скоростей центров масс тел* B_k, *их угловых скоростей и скоростей точек контакта* O_k *тел в момент* $t = t_0 + \tau_1$ *окончания первой фазы удара. В этот момент выполняется равенство*

$$\boldsymbol{v}_{O_1}^{(1)} \cdot \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{v}_{O_2}^{(1)} \cdot \boldsymbol{n}_2 = 0, \tag{15}$$

означающее, что при $t = t_0 + \tau_1$ *проекция скорости точки* O_1 *относительно точки* O_2 *на общую нормаль к поверхностям тел равняется нулю.*

Пусть $I^{(1)}$ *и* $I^{(2)}$ — *величины ударных импульсов, приложенных к телам, за время первой и второй фаз удара соответственно. Тогда*

$$I^{(1)} + I^{(2)} = I \tag{16}$$

и, кроме того, имеют место равенства (9), (10), *в которых верхний индекс* + *надо заменить на индекс* (1), *а вместо* I *написать* $I^{(1)}$.

Величина $I^{(1)}$ *находится из соотношения* (15). *Проведя выкладки, совершенно аналогичные выкладкам, проведенным выше при получении формулы* (14) *из соотношения* (3), *найдем*

$$I^{(1)} = \frac{u_{rn}}{\mu^2},$$

и тогда из (14) *и* (16) *получаем, что*

$$I^{(2)} = \frac{æ}{\mu^2} u_{rn}.$$

Таким образом, $\dfrac{I^{(2)}}{I^{(1)}} = æ$, *т. е. при соударении двух абсолютно гладких тел отношение величин импульсов ударных сил, возникающих между телами во второй и первой фазах удара, равняется величине коэффициента восстановления.*

Пример 1 (Удар о стенку (о неподвижную преграду)). *Пусть неподвижной преградой будет тело B_2. Полагая $\boldsymbol{v}_2^- = 0$, $\boldsymbol{\omega}_2^- = 0$ и устремляя величины m_2, A_2, B_2, C_2 к бесконечности, из* (12) *находим* (*индекс* (1) *у величин, относящихся к телу B_1, опускаем*)

$$\mu^2 = \frac{1}{m} + \frac{(y\gamma - z\beta)^2}{A} + \frac{(z\alpha - x\gamma)^2}{B} + \frac{(x\beta - y\alpha)^2}{C}. \tag{17}$$

Величина u_{rn} будет проекцией скорости точки контакта O_1 тела B_1 со стеной на внешнюю нормаль к телу в точке O_1. Величина импульса вычисляется по формулам (14), (17). *Соотношения* (9), (10) *можно переписать в виде*

$$p^+ = p^- + I\frac{(y\gamma - z\beta)}{A}, \quad q^+ = q^- + I\frac{(z\alpha - x\gamma)}{B},$$
$$r^+ = r^- + I\frac{(x\beta - y\alpha)}{C}, \quad \boldsymbol{v}^+ = \boldsymbol{v}^- + \frac{I}{m}\boldsymbol{n}_1.$$

Пример 2. *Однородное колесо радиуса R катится без скольжения по горизонтальной плоскости, оставаясь в вертикальной плоскости. Оно ударяется некоторой точкой своего обода о неподвижное препятствие высоты $h < R$. Удар происходит без трения, коэффициент восстановления равен æ. Покажем, что если $h > \left(1 - \sqrt{\frac{æ}{1+æ}}\right) R$, то колесо не преодолеет препятствие, как бы ни была велика до удара скорость центра колеса.*

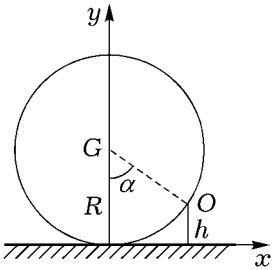

Рис. 156

Пусть α — угол между вертикалью и радиусом колеса, соединяющим центр колеса G с наивысшей точкой препятствия O (рис. 156), *v — величина скорости центра колеса перед ударом, а v_x^+, v_y^+ — проекции его скорости после удара. Приложенный к колесу ударный импульс $\boldsymbol{I}$, ввиду отсутствия трения, направлен по радиусу $\overline{OG}$. Поэтому за время удара угловая скорость колеса не изменяется.*

Так как скольжение отсутствует, то непосредственно перед ударом скорость точки контакта колеса с препятствием задается компонентами v $(-v\cos\alpha,\ -v\sin\alpha)$. Из теоремы об изменении количества движения при ударе и гипотезы Ньютона (2) *имеем систему трех уравнений* (m *— масса колеса*):

$$m(v_x^+ - v) = -I\sin\alpha, \quad mv_y^+ = I\cos\alpha, \quad v_x^+\sin\alpha - v_y^+\cos\alpha = -æv\sin\alpha,$$

решив которую, получим

$$I = m(1+æ)v\sin\alpha, \quad v_x^+ = v[1-(1+æ)\sin^2\alpha], \quad v_y^+ = (1+æ)v\sin\alpha\cos\alpha.$$

Колесо не преодолеет препятствие и отскочит назад, если $v_x^+ < 0$ (*если* $v_x^+ = 0$, *то колесо взлетит вверх вдоль оси* Gy), *т. е. если* $(1+æ)\sin^2\alpha > 1$. *Но так как* $\sin^2\alpha = \dfrac{[R^2-(R-h)^2]}{R^2}$, *то это означает, что должно выполняться условие*

$$\left(\frac{h}{R}-1\right)^2 < \frac{æ}{1+æ}.$$

Отсюда и следует доказываемое неравенство.

203. Изменение кинетической энергии при соударении абсолютно гладких тел. Для каждого из тел B_k по формуле (6) §3 имеем

$$\Delta T_k = T_k^+ - T_k^- = \frac{1}{2}\left(\frac{I_k^2}{m_k} + \frac{M_{x_k}^2}{A_k} + \frac{M_{y_k}^2}{B_k} + \frac{M_{z_k}^2}{C_k}\right) + (\boldsymbol{I}_k\cdot\boldsymbol{v}_k^- + \boldsymbol{M}_k\cdot\boldsymbol{\omega}_k^-).$$

Используя обозначения п. 202, это выражение можно переписать в виде

$$\Delta T_k = \frac{I^2}{2}\left(\frac{1}{m_k} + \frac{\xi_k^2}{A_k} + \frac{\eta_k^2}{B_k} + \frac{\zeta_k^2}{C_k}\right) + I(\boldsymbol{v}_k^- + \boldsymbol{\omega}_k^- \times \overline{G_kO_k})\cdot\boldsymbol{n}_k.$$

Замечая, что $\boldsymbol{v}_k^- + \boldsymbol{\omega}_k^- \times \overline{G_kO_k} = \boldsymbol{v}_{O_k}^-$, производя суммирование и учитывая обозначение (12), находим изменение кинетической энергии системы двух тел

$$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 = \frac{1}{2}I^2\mu^2 + I(\boldsymbol{v}_{O_1}^-\cdot\boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{v}_{O_2}^-\cdot\boldsymbol{n}_2).$$

Принимая во внимание равенства (13) и (14), последнее выражение можно записать в следующем окончательном виде:

$$\Delta T = -\frac{(1-æ^2)}{2\mu^2}u_{rn}^2. \tag{18}$$

Суммарная кинетическая энергия тела не изменяется только в случае абсолютно упругого удара ($æ = 1$). В остальных случаях происходит потеря кинетической энергии ($\Delta T < 0$).

204. Прямой центральный удар двух абсолютно гладких тел. Назовем линией удара прямую, проходящую через точку соприкосновения тел при ударе перпендикулярно их общей касательной плоскости (на рис. 154 нормали $\boldsymbol{n}_k$ к поверхносятм тел B_k лежат на линии удара). Удар называется *прямым*, если скорости $\boldsymbol{v}_k^-$ центров масс до удара направлены параллельно линии удара. Из упомянутой выше неизменности касательной составляющей скоростей $\boldsymbol{v}_k$ следует, что при прямом ударе скорости $\boldsymbol{v}_k^+$ центров масс тел после удара будут параллельны линии удара.

Удар называется *центральным*, если центры масс тел перед ударом лежат на линии удара. При центральном ударе моменты $\boldsymbol{M}_k = \overline{G_kO_k} \times \boldsymbol{I}_k$ ударного импульса относительно центров масс G_k тел равны нулю (величины ξ_k, η_k, ζ_k, в (9) обращаются в нуль). Поэтому, согласно (9), при центральном ударе угловые скорости $\boldsymbol{\omega}_k$ обоих тел остаются неизменными.

Рассмотрим задачу о соударении двух абсолютно гладких тел, предполагая, что удар является прямым и центральным. В этом случае центры масс тел лежат на линии удара, а их скорости направлены вдоль этой линии как до, так и после удара. Так как еще и угловые скорости тел при ударе не изменяются, то задача о прямом центральном ударе сводится к нахождению изменений проекций скоростей центров масс тел на линию удара. Простейшим примером задачи о прямом центральном ударе двух тел может служить задача о соударении двух одинаковых шаров, центры масс которых движутся вдоль одной прямой.

За положительное направление на линии удара примем направление $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_2$ внутренней нормали к поверхности тела B_2. Пусть v_k^- и v_k^+ $(k = 1,\ 2)$ — проекции на линию удара скоростей центров масс тел B_k до и после удара. Для того, чтобы удар произошел, необходимо, чтобы до удара относительная скорость центра масс одного из тел, например, B_1, была направлена к центру масс второго тела $(v_1^- > v_2^-)$.

Так как $\xi_k = \eta_k = \zeta_k = 0$, то формула (12) принимает вид

$$\mu^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{19}$$

Подставляя это значение μ^2 в выражение (14) и замечая, что в рассматриваемом случае

$$u_{rn} = v_1^- - v_2^-, \tag{20}$$

получаем величину ударного импульса при прямом центральном ударе:

$$I = (1 + æ)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1^- - v_2^-). \tag{21}$$

Применяя теорему об изменении количества движения к каждому из тел, получаем два равенства

$$m_1(v_1^+ - v_1^-) = -I, \quad m_2(v_2^+ - v_2^-) = I.$$

Отсюда, принимая во внимание формулу (21), находим проекции послеударных скоростей центров масс тел на линию удара:

$$\begin{aligned} v_1^+ &= \frac{(m_1 - æm_2)v_1^- + m_2(1 + æ)v_2^-}{m_1 + m_2}, \\ v_2^+ &= \frac{m_1(1 + æ)v_1^- + (m_2 - æm_1)v_2^-}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \tag{22}$$

Изменение кинетической энергии за время удара вычисляется по формуле (18) при учете равенств (19) и (20):

$$\Delta T = -\frac{1}{2}(1 - æ^2)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1^- - v_2^-)^2. \tag{23}$$

Рассмотрим частные случаи.

а) *Абсолютно упругий удар* ($æ = 1$). Из (23) следует, что в этом случае нет потери кинетической энергии ($\Delta T = 0$), а формулы (22), (21) дают следующие выражения для послеударных скоростей центров масс тел и ударного импульса:

$$v_1^+ = \frac{(m_1 - m_2)v_1^- + 2m_2 v_2^-}{m_1 + m_2}, \quad v_2^+ = \frac{(m_2 - m_1)v_2^- + 2m_1 v_1^-}{m_1 + m_2}, \tag{24}$$

$$I = 2\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1^- - v_2^-) \tag{25}$$

Если, кроме того, массы тел равны, то $v_1^+ = v_2^-$, $v_2^+ = v_1^-$, т. е. центр масс каждого из тел будет иметь послеударную скорость, какую имел центр масс другого тела до удара. Таким путем происходит перенос количеств движения при столкновении молекул идеального газа.

б) *Абсолютно неупругий удар* ($æ = 0$). Из (22) получаем

$$v_1^+ = v_2^+ = \frac{m_1 v_1^- + m_2 v_2^-}{m_1 + m_2}, \tag{26}$$

т. е. скорости центров масс тел после удара становятся одинаковыми. При этом происходит потеря кинетической энергии; по формуле (23) находим

$$\Delta T = -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1^- - v_2^-)^2. \tag{27}$$

Согласно (21), ударный импульс определяется выражением

$$I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1^- - v_2^-),$$

т. е. он в два раза меньше, чем при абсолютно упругом ударе.

Пример 1 (Прямой центральный удар о неподвижную стенку). *Пусть стенка есть тело B_2. Полагая $v_2^- = 0$ и устремляя m_2 к бесконечности, находим из (21)–(23), что в этом случае:*

$$v_1^+ = -æ v_1^-, \quad v_2^+ = 0, \quad I = (1 + æ) m_1 v_1^-, \quad \Delta T = -\frac{1}{2}(1 - æ^2) m_1 v_1^{-2}$$

Пример 2 (О некоторых практических приложениях формулы (23)). *Пусть тело B_2 неподвижно ($v_2^- = 0$) и надо привести его в движение, ударяя по нему телом B_1. Кинетическая энергия тела B_1 перед ударом приобретается за счет мускульных усилий человека и будет равна $\frac{1}{2} m_1 v_1^{-2}$. Пусть это количество кинетической энергии T задано. Положим*

$$\eta = \frac{|\Delta T|}{T} = (1 - æ^2)\frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

При заданных величинах æ и m_2 величина η будет функцией от m_1.

Если мы хотим придать телу B_2 наибольшую возможную скорость, то надо уменьшать потери $|\Delta T|$, т. е. увеличивать возможную массу m_1 тела B_1. Выгоднее, например, забивая гвоздь, пользоваться тяжелым молотком, сообщая ему малую скорость, чем более легким при бóльшей скорости.

Совсем другая ситуация возникнет, когда надо будет разрушить тело B_2. Здесь надо увеличивать величину $|\Delta T|$, т. е. увеличивать η. Это означает, что надо уменьшать m_1. Например, ковать лучше более легким молотком, сообщая ему (при заданной величине T) бóльшую скорость.

Пример 3. *Найдем необходимое и достаточное условие того, что при прямом центральном ударе двух поступательно движущихся тел B_1 и B_2 тело B_1 после удара остановилось.*

Из первой формулы (22) следует, что таким условием будет выполнение равенства

$$(m_1 - æ m_2) v_1^- + m_2 (1 + æ) v_2^- = 0.$$

Отсюда, в частности, следует: а) если $v_2^- = 0$, то $æ = \frac{m_1}{m_2}$; б) если до удара скорости тел были равны по модулю и противоположны по направлению ($v_2^- = -v_1^-$), то $\frac{m_1}{m_2} = 1 + 2æ$.

Упражнение 4 (Косой удар двух шаров). *При соударении двух шаров удар является центральным, но он не обязательно будет прямым, так как скорости центров масс шаров могут не быть направлены по общей линии центров. В общем случае это будет косой удар двух шаров. Показать, что при косом соударении двух однородных абсолютно гладких шаров их угловые скорости и проекции скоростей центров масс на общую касательную плоскость не изменяются, а проекции на линию удара изменяются как при прямом центральном ударе.*

§ 5. Дифференциальные вариационные принципы механики в теории импульсивных движений

205. Общее уравнение динамики. Рассмотрим систему N материальных точек P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$). Состояние системы в некоторой неподвижной прямоугольной декартовой системе координат задается радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_\nu$ и скоростями $\boldsymbol{v}_\nu$ ее точек. Система предполагается свободной или несвободной со связями вида (1), (2) из §3 главы 1. Импульсивное движение возникает из-за того, что к точкам системы прикладываются ударные импульсы $\boldsymbol{I}_\nu$, либо накладываются новые связи, либо снимаются некоторые (или все) из старых связей, либо из-за того, что и то, и другое, и третье осуществляется одновременно.

Ограничения на скорости точек системы задаются (см. равенства (2), (3) из §3 главы 1) равенствами вида

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{B}_{\gamma\nu} \cdot \boldsymbol{v}_\nu + b_\gamma = 0 \; (\gamma = 1, 2, \ldots, l). \tag{1}$$

Векторы $\boldsymbol{B}_{\gamma\nu}$ и скаляры b_γ — заданные непрерывно дифференцируемые функции $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n$ и t. Через l в (1) обозначено общее количество связей системы, голономных и неголономных. Если удар вызван заданными ударными импульсами и при ударе структура системы не изменяется, то l равно числу $r + s$ голономных и неголономных связей системы. Если же при ударе изменяется структура системы (изменяется количество связей), то число l отличается от величины $r + s$.

Если связи стационарные, то величины b_γ в (1) тождественно равны нулю, а вектор-функции $\boldsymbol{B}_{\gamma\nu}$ явно не зависят от t.

В дальнейшем также будут рассматриваться связи, для которых величина b_γ в (1) тождественно равна нулю, но вектор-функции $\boldsymbol{B}_{\gamma\nu}$ зависят явно от t. Эти связи линейны и однородны по компонентам

векторов скоростей точек системы. Наряду с движениями с возможными скоростями $\boldsymbol{v}_\nu^*$ они допускают движения, для которых скорости всех точек системы имеют противоположные направления $-\boldsymbol{v}_\nu^*$. По этой причине такие связи называют *обратимыми*[1].

Пример 1. *Связь, рассмотренная в примере п. 64, является обратимой нестационарной связью.*

Виртуальные перемещения $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ точек системы определяются следующими уравнениями (см. уравнения (12), (13) из §3 главы 1):

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{B}_{\gamma\nu} \cdot \delta\boldsymbol{r}_\nu = 0 \ (\gamma = 1,\ 2, \ldots,\ l). \tag{2}$$

Ввиду кратковременности процесса удара вектор-функции $\boldsymbol{B}_{\gamma\nu}$ в уравнениях (2) можно считать постоянными. Отсюда следует, что векторы виртуальных перемещений $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ могут считаться независящими от времени на промежутке времени удара от $t = t_0$ до $t = t_0 + \tau$.

Пусть $\boldsymbol{R}_\nu$ — равнодействующая реакций связей, приложенных к точке P_ν. Все связи системы будем предполагать идеальными во все время удара, т. е считаем, что равенство (10) п. 55 справедливо для любого момента времени из промежутка от t_0 до $t_0 + \tau$.

Обозначим через $\boldsymbol{I}_{\nu R}$ ударный импульс реакций связей, приложенных к точке P_ν,

$$\boldsymbol{I}_{\nu R} = \int\limits_{t_0}^{t_0+\tau} \boldsymbol{R}_\nu \, dt.$$

Тогда интегрирование по t от t_0 до $t_0 + \tau$ обеих частей равенства (10) п. 55, при учете постоянства величин $\delta\boldsymbol{r}_\nu$, приводит к соотношению

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{I}_{\nu R} \cdot \delta\boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{3}$$

Пусть $\boldsymbol{I}_\nu$ — ударный импульс активных сил, приложенных к точке P_ν. Тогда равенства (3) п. 192 можно записать в виде

$$m_\nu \Delta\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{I}_\nu + \boldsymbol{I}_{\nu R} \ (\nu = 1,\ 2, \ldots,\ N). \tag{4}$$

Переписав равенства (4) в виде $\boldsymbol{I}_\nu - m_\nu \Delta\boldsymbol{v}_\nu = -\boldsymbol{I}_{\nu R}$, умножив каждое из них скалярно на $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ и произведя суммирование по ν, получим при

[1]Эти связи называют также *катастатическими*. См., например: Парс Л. А. Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971.

учете равенства (3) следующее соотношение:

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\boldsymbol{I}_\nu - m_\nu \Delta \boldsymbol{v}_\nu)\cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{5}$$

Это соотношение является *общим уравнением динамики в теории импульсивных движений.*

Величины $-m_\nu \Delta \boldsymbol{v}_\nu = -m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-)$ можно назвать *ударными импульсами сил инерции.* И уравнение (5) может быть прочитано следующим образом: *истинное послеударное состояние системы выделяется из всех кинематически возможных тем, что для него и только для него сумма работ активных ударных импульсов и ударных импульсов сил инерции на любых виртуальных перемещениях равна нулю.*

Остановимся подробнее на смысле величин $\delta \boldsymbol{r}_\nu$, входящих в соотношение (5). Если при ударе структура системы не меняется, то величины $\delta \boldsymbol{r}_\nu$ сохраняют свой обычный смысл: они удовлетворяют уравнениям (12), (13) §3 главы 1 (или эквивалентным им уравнениям (2) данного пункта). Если же при ударе структура системы изменяется, то ситуация несколько сложнее. Поясним это. Пусть $\delta \boldsymbol{r}_\nu^-$ — совокупность виртуальных перемещений непосредственно перед ударом и пусть в момент времени $t = t_0$ на систему наложена новая идеальная связь, сохраняющаяся и после удара. В системе с изменившейся структурой будет новая совокупность виртуальных перемещений $\delta \boldsymbol{r}_\nu^+$. Из-за наложения новой связи совокупность виртуальных перемещений $\delta \boldsymbol{r}_\nu^-$ будет, очевидно, шире совокупности $\delta \boldsymbol{r}_\nu^+$. И для того чтобы в соотношении (5) иметь виртуальные перемещения, пригодные во время всего ударного процесса от $t = t_0$ до $t = t_0 + \tau$, надо в (5) положить $\delta \boldsymbol{r}_\nu = \delta \boldsymbol{r}_\nu^+$. Иное дело, когда идеальная связь во время удара снимается. В этом случае совокупность виртульных перемещений $\delta \boldsymbol{r}_\nu^-$ системы с доударной структурой у́же совокупности $\delta \boldsymbol{r}_\nu^+$, и в (5) следут принять $\delta \boldsymbol{r}_\nu = \delta \boldsymbol{r}_\nu^-$.

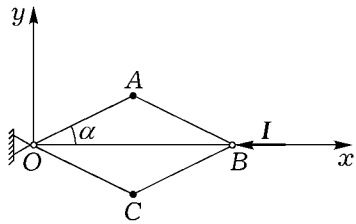

Рис. 157

Пример 2. *Дан ромб $OABC$, образованный четырьмя шарнирно соединенными невесомыми стержнями* (см. рис. 157). *Шарнир O неподвижно закреплен. В шарнирах A и C помещены точечные массы величины m. По направлению диагонали BO к ромбу прикладывается ударный импульс $\boldsymbol{I}$. Считая угол α заданным, найдем послеударные скорости шарниров A и C.*

Общее уравнение динамики (5) *записывается в виде*

$$\boldsymbol{I}\cdot\delta\boldsymbol{r}_B - m\Delta\boldsymbol{v}_A\cdot\delta\boldsymbol{r}_A - m\Delta\boldsymbol{v}_C\cdot\delta\boldsymbol{r}_C = 0. \tag{6}$$

Пусть l *— длина каждого из стержней. Из рис.* 157 *имеем:*

$$\begin{gathered}\boldsymbol{r}'_A = l(\cos\alpha,\ \sin\alpha), \quad \boldsymbol{r}'_B = 2l(\cos\alpha,\ 0),\\ \boldsymbol{r}'_C = l(\cos\alpha,\ -\sin\alpha), \quad \boldsymbol{I}' = (-\boldsymbol{I},\ 0).\end{gathered} \tag{7}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{r}'_A &= l\delta\alpha(-\sin\alpha,\ \cos\alpha),\\ \delta\boldsymbol{r}'_B &= -2l\delta\alpha(\sin\alpha,\ 0),\\ \delta\boldsymbol{r}'_C &= -l\delta\alpha(\sin\alpha,\ \cos\alpha).\end{aligned} \tag{8}$$

Пусть $\boldsymbol{v}'_A = (v_{Ax},\ v_{Ay})$, $\boldsymbol{v}'_C = (v_{Cx},\ v_{Cy})$. *Тогда*

$$m\Delta\boldsymbol{v}'_A = m(v_{Ax},\ v_{Ay}), \quad m\Delta\boldsymbol{v}'_C = m(v_{Cx},\ v_{Cy}). \tag{9}$$

Переписанное с учетом равенств (7)–(9) *соотношение* (6) *после сокращения на* $l\delta\alpha$ *приводит к уравнению*

$$2I\sin\alpha + m(v_{Ax} + v_{Cx})\sin\alpha - m(v_{Ay} - v_{Cy})\cos\alpha = 0. \tag{10}$$

Но из (7) *следует, что* $v_{Ax} = -l\sin\alpha\dot\alpha$, $v_{Ay} = l\cos\alpha\dot\alpha$, $v_{Cx} = -l\sin\alpha\dot\alpha$, $v_{Cy} = -l\cos\alpha\dot\alpha$. *Отсюда вытекают еще три уравнения*

$$v_{Ax} = v_{Cx}, \quad v_{Ax} = \operatorname{tg}\alpha\, v_{Cy}, \quad v_{Ay} = -v_{Cy}. \tag{11}$$

Из системы (10), (11) *получим искомые проекции векторов послеударных скоростей шарниров* A *и* C*:*

$$v_{Ax} = v_{Cx} = -\frac{I\sin^2\alpha}{m}, \quad v_{Ay} = -v_{Cy} = \frac{I\sin 2\alpha}{2m}.$$

206. Принцип Журдена. Так как при ударе координаты точек системы неизменны, а меняются лишь их скорости, то для решения задач теории импульсивных движений более приемлем принцип Журдена (см. §2 главы 3), а не общее уравнение динамики в форме (5). Приняв такую точку зрения, соотношение (5) следует заменить равенством

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\boldsymbol{I}_\nu - m_\nu\Delta\boldsymbol{v}_\nu)\cdot\delta\boldsymbol{v}_\nu = 0, \tag{12}$$

где по-прежнему $\Delta \boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-$, а конечные вариации скоростей $\delta \boldsymbol{v}_\nu$ (в силу равенств (2) п. 205 и (19) из §3 главы 1) удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{B}_{\gamma\nu} \cdot \delta \boldsymbol{v}_\nu = 0 \ (\gamma = 1,\ 2, \ldots,\ l). \tag{13}$$

Соотношение (12) выражает принцип Журдена в теории импульсивных движений: *послеударное состояние системы выделяется среди кинематически возможных тем, что для него и только для него выполняется соотношение* (12).

Для дальнейшего использования принципа Журдена рассмотрим подробнее вариации $\delta \boldsymbol{v}_\nu$, входящие в равенство (12). Ограничимся случаем, когда все связи системы являются обратимыми. Тогда величины b_γ в (1) тождественно равны нулю, а кинематически возможные скорости точек системы определяются из уравнений:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{B}_{\gamma\nu} \cdot \boldsymbol{v}_\nu = 0 \ (\gamma = 1,\ 2, \ldots,\ l). \tag{14}$$

Если при ударе структура системы не изменяется, то уравнения (13), определяющие вариации скоростей $\delta \boldsymbol{v}_\nu$, с точностью до обозначения неизвестных совпадают с уравнениями (14), которым удовлетворяют сами скорости $\boldsymbol{v}_\nu$ точек системы. Поэтому в соотношении (12) вместо $\delta \boldsymbol{v}_\nu$ можно написать $\boldsymbol{v}_\nu$, считая вектор $\boldsymbol{v}_\nu$ любой кинематически возможной скоростью. Соответственно принцип Журдена может быть записан в виде соотношения

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{I}_\nu - m_\nu \Delta \boldsymbol{v}_\nu) \cdot \boldsymbol{v}_\nu = 0, \tag{15}$$

где $\Delta \boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-$, а $\boldsymbol{v}_\nu$ — скорость точки P_ν системы в любом состоянии движения, совместимом со связями.

Пусть во время удара на систему наложены новые идеальные обратимые связи. Тогда в (15) $\boldsymbol{v}_\nu$ — любой вектор скорости, допустимый для системы с наложенными связями.

Если же во время удара происходит снятие идеальной обратимой связи, то в (15) $\boldsymbol{v}_\nu$ — любой вектор скорости, допустимый для системы до снятия связи.

Упражнение 5. *Рассмотрим покоящуюся систему с идеальными обратимыми связями. Пусть* $\boldsymbol{v}_\nu^{(1)}$ *и* $\boldsymbol{v}_\nu^{(2)}$ *— скорости точек системы после*

приложения ударных импульсов $\boldsymbol{I}_\nu^{(1)}$ *и* $\boldsymbol{I}_\nu^{(2)}$ *соответственно. Показать, что после приложения суммарного импульса* $\boldsymbol{I}_\nu = \boldsymbol{I}_\nu^{(1)} + \boldsymbol{I}_\nu^{(2)}$ *точки системы приобретают скорости* $\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu^{(1)} + \boldsymbol{v}_\nu^{(2)}$, *т. е. суперпозиция импульсов влечет за собой суперпозицию скоростей.*

Пример 1. *При помощи принципа Журдена найдем послеударную угловую скорость* ω *стержня из примера* 3 *п.* 196 (рис. 147).

Положив $\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu^+$ *и учтя, что* $\boldsymbol{v}_\nu^- = 0$, *а послеударная скорость конца стержня, к которому приложен импульс, равна* ωl, *получим соотношение* (15) *в форме равенства* $I\omega l - \sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^{+2} = 0$. *Это равенство можно переписать в виде* $I\omega l = 2T$, *где* $T = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\omega^2$ — *послеударная кинетическая энергия стержня. Отсюда получаем* $\omega = \dfrac{3I}{ml}$.

207. Принцип Гаусса. Рассмотрим систему с идеальными связями. Возможные скорости ее точек определяются системой уравнений (1). Пусть к точкам P_ν системы в момент $t = t_0$ прилагаются заданные активные ударные импульсы $\boldsymbol{I}_\nu$, или на систему накладываются новые идеальные связи вида (1), или же осуществляется и то и другое одновременно.

Пусть, как обычно, $\boldsymbol{v}_\nu^-$ и $\boldsymbol{v}_\nu^+$ — векторы скоростей точек системы непосредственно до и после удара, а $\boldsymbol{v}_\nu$ — вектор любой кинематически возможной скорости точки P_ν в момент $t = t_0 + \tau$ окончания удара.

Пусть

$$G = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\boldsymbol{v}_\nu - \boldsymbol{v}_\nu^- - \frac{\boldsymbol{I}_\nu}{m_\nu}\right)^2. \tag{16}$$

Величина $G = G(\boldsymbol{v}_\nu)$ является функцией от кинематически возможных скоростей $\boldsymbol{v}_\nu$ точек системы в ее послеударном состоянии.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема (Робена). *Состояние системы после удара будет таким, для которого функция* $G(\boldsymbol{v}_\nu)$ *имеет наименьшее значение по сравнению с ее значениями, отвечающими всем кинематически возможным послеударным скоростям системы.*

Это утверждение аналогично принципу наименьшего принуждения Гаусса в случае конечных сил (см. §3 главы 3), функция (16) является аналогом принуждения Z.

Доказательство.

Положим $\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu^+ + \delta\boldsymbol{v}_\nu$ и рассмотрим разность $G(\boldsymbol{v}_\nu) - G(\boldsymbol{v}_\nu^+)$.

Имеем

$$G(\boldsymbol{v}_\nu) - G(\boldsymbol{v}_\nu^+) = \sum_{\nu=1}^{N}(m_\nu \Delta \boldsymbol{v}_\nu - \boldsymbol{I}_\nu)\cdot \delta \boldsymbol{v}_\nu + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\delta \boldsymbol{v}_\nu)^2, \qquad (17)$$

где $\Delta \boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-$.

Так как $\boldsymbol{v}_\nu$ и $\boldsymbol{v}_\nu^+$ кинематически возможны после удара, то вариации скоростей $\delta \boldsymbol{v}_\nu$ удовлетворяют уравнениям (13) и справедливо соотношение (12). Следовательно, первая сумма в правой части равенства (17) равна нулю. А так как не все величины $\delta \boldsymbol{v}_\nu$ равны нулю, то из (17) следует, что $G(\boldsymbol{v}_\nu) > G(\boldsymbol{v}_\nu^+)$. Это и требовалось доказать.

Упражнение 6 (Экстремальное свойство ударных импульсов реакций связей). *Пусть $\boldsymbol{I}_{\nu R}$ — ударные импульсы реакций связей. Показать, что для действительного послеударного состояния системы величина*

$$G = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}\frac{I_{\nu R}^2}{m_\nu}$$

имеет минимальное значение по сравнению с ее значениями для всех кинематически возможных послеударных состояний системы.

Рассмотрим частный случай, когда активные ударные импульсы отсутствуют. Положив в (16) $\boldsymbol{I}_\nu = 0$, получим, что тогда функция

$$G = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\boldsymbol{v}_\nu - \boldsymbol{v}_\nu^-)^2 \qquad (18)$$

имеет минимум при действительных значениях послеударных скоростей $\boldsymbol{v}_\nu^+$ из совокупности скоростей $\boldsymbol{v}_\nu$, кинематически возможных для системы с наложенными связями.

Пример 1. *Два одинаковых тонких однородных стержня AB и BC массы m и длины l каждый соединены шарниром B и находятся в покое, составляя одну прямую. Определить послеударное кинематическое состояние стержней вследствие ударного импульса $\boldsymbol{I}$, сообщенного точке C под прямым углом к стержням* (рис. 158).

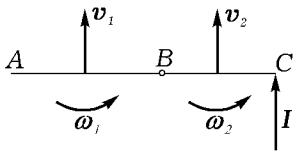

Рис. 158

Кинематическое состояние стержней AB и BC вполне определяется скоростями v_1 и v_2 их центров масс и угловыми скоростями ω_1 и ω_2. Учитывая, что до удара стержни покоились ($\boldsymbol{v}_\nu^- = 0$) и пренебрегая в (16) *не зависящими от v_i, ω_i ($i = 1,\ 2$) слагаемыми, выражение*

для функции G можно записать в виде

$$G = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2 - \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{v}_\nu \cdot \boldsymbol{I}_\nu. \tag{19}$$

Пусть T — суммарная кинетическая энергия стержней, а u — скорость точки C после удара. Тогда из (19) *получаем*

$$G = T - Iu = \frac{1}{2}m\left(v_1^2 + v_2^2\right) + \frac{1}{24}ml^2\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) - Iu. \tag{20}$$

Так как точка B принадлежит как стержню AB, так и стержню BC, то имеет место кинематическое равенство:

$$v_1 + \omega_1\frac{l}{2} = v_2 - \omega_2\frac{l}{2}. \tag{21}$$

Кроме того,

$$u = v_2 + \omega_2\frac{l}{2}. \tag{22}$$

С учетом равенств (21), (22) *выражение* (20) *для функции G принимает вид*

$$\begin{aligned} G = \frac{1}{2}m\left[v_2 - (\omega_1 + \omega_2)\frac{l}{2}\right]^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \\ + \frac{1}{24}ml^2\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) - I\left(v_2 + \omega_2\frac{l}{2}\right). \end{aligned} \tag{23}$$

Условия экстремума функции G дают три уравнения:

$$\frac{\partial G}{\partial v_2} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \omega_1} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \omega_2} = 0. \tag{24}$$

Из системы четырех уравнений (21), (24) *находим:*

$$v_1 = -\frac{I}{4m}, \quad \omega_1 = -\frac{3I}{2ml}, \quad v_2 = \frac{5I}{4m}, \quad \omega_2 = \frac{9I}{2ml}.$$

Отрицательные знаки у v_1 и ω_1 показывают, что действительные направления скорости центра масс стержня AB и направление его вращения противоположны направлениям, указанным на рис. 158.

Пример 2. *Материальная точка массы m покоится на абсолютно гладкой поверхности, задаваемой уравнением $f(x,\ y,\ z) = 0$. К точке прикладывается ударный импульс $\boldsymbol{I} = (I_x,\ I_y,\ I_z)$. Найдем скорость точки после удара.*

Для функции (16) *имеем выражение*

$$G = \frac{1}{2}m\left[\left(\dot{x} - \frac{I_x}{m}\right)^2 + \left(\dot{y} - \frac{I_y}{m}\right)^2 + \left(\dot{z} - \frac{I_z}{m}\right)^2\right]. \tag{25}$$

Уравнение связи $f(x,\ y,\ z) = 0$ *дает соотношение*

$$\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z} = 0. \tag{26}$$

Имеем задачу на условный экстремум: нужно найти точку экстремума функции (25), *если переменные* $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ *связаны соотношением* (26). *Воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа. Пусть*

$$F = G - \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z}\right),$$

где λ *— неопределенный множитель. Условия экстремеума* $\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \dfrac{\partial F}{\partial \dot{y}} = \dfrac{\partial F}{\partial \dot{z}} = 0$ *дают три соотношения*

$$m\dot{x} = I_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \quad m\dot{y} = I_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \quad m\dot{z} = I_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{27}$$

Вместе с соотношением (26) *они образуют систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных* $\dot{x} = \dot{x}^+$, $\dot{y} = \dot{y}^+$, $\dot{z} = \dot{z}^+$ *и* λ.

Отметим, что величины $\lambda\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\lambda\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\lambda\dfrac{\partial f}{\partial z}$ *являются проекциями ударного импульса реакции связи на соответствующие координатные оси.*

Пример 3. *Тонкий однородный стержень длины* l, *занимающий горизонтальное положение, падает поступательно вниз. Он встречает точечное препятствие, отстоящее от концов стержня на расстояниях* $\frac{3}{4}l$ *и* $\frac{1}{4}l$ (рис. 159). *Скорость стержня перед ударом равна* v. *Предполагая удар абсолютно неупругим, найдем послеударное кинематическое состояние стержня.*

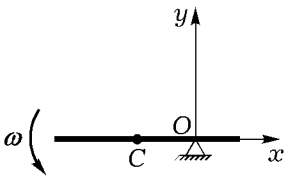

Рис. 159

Кинематическое состояние стержня после удара полностью определяется его угловой скоростью ω. *Активных ударных импульсов нет.*

Импульсивное движение возникает только из-за наложения новой связи, внезапной остановки точки O стержня. Так как для каждой точки стержня $\boldsymbol{v}_\nu^- = \boldsymbol{v}$, *то для функции* G *из* (18) *имеем такое выражение:*

$$G = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2 - \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu\right)\cdot \boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\right) v^2. \qquad (28)$$

Пусть m *— масса стержня,* $\boldsymbol{v}_C$ *— послеударная скорость его центра масс, а* J_0 *— момент инерции стержня относительно точки* O. *Тогда* $\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu = m$, $\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu = m\boldsymbol{v}_C$, *а* $\frac{1}{2}\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2 = \frac{1}{2}J_0\omega^2$ *— кинетическая энергия стержня после удара, и функцию* (28) *можно представить в виде*

$$G = \frac{1}{2}J_0\omega^2 - m\boldsymbol{v}_C\cdot\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}mv^2.$$

Но $J_0 = \dfrac{7ml^2}{48}$, $\boldsymbol{v}' = (0,\ -v)$, $\boldsymbol{v}_C' = (0,\ -\omega\frac{l}{4})$. *Поэтому имеем такое окончательное выражение для функции* G

$$G = \frac{m}{96}(7\omega^2 l^2 - 24\omega v l + 48v^2).$$

Из условия $\dfrac{\partial G}{\partial \omega} = 0$ *находим* $\omega = \dfrac{12v}{7l}$.

§ 6. Теоремы Карно

208. Первая теорема Карно. Рассмотрим движение системы, связи которой идеальны и обратимы (в частности, стационарны). В некоторый момент $t = t_0$ на систему накладываются новые связи, которые также являются идеальными и обратимыми. Активных ударных импульсов нет. Импульсивное движение возникает только за счет наложения новых связей. Найдем изменение кинетической энергии системы за время удара.

Имеет место следующая (первая) теорема Карно:

Теорема. *Если внезапно наложенные идеальные обратимые связи сохраняются после удара вместе с ранее существовавшими идеальными обратимыми связями, то потерянная в результате наложения новых связей кинетическая энергия равна кинетической энергии потерянных скоростей.*

Доказательство.

Можно было бы применить результаты п. 197, где рассмотрена общая теорема об изменении кинетической энергии при импульсивном движении, но удобнее воспользоваться принципом Журдена (см. п. 206).

Так как $\boldsymbol{I}_\nu = 0$, то соотношение (15) п. 206, справедливое для систем с идеальными обратимыми связями, можно записать в виде

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu^- - \boldsymbol{v}_\nu^+)\cdot \boldsymbol{v}_\nu = 0. \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{v}_\nu$ — любой вектор скорости точки P_ν, кинематически возможный для системы с наложенными связями. Следовательно, $\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu^+$, и из соотношения (1) следует, что

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu^- - \boldsymbol{v}_\nu^+)\cdot \boldsymbol{v}_\nu^+ = 0. \tag{2}$$

Но так как $(\boldsymbol{v}_\nu^- - \boldsymbol{v}_\nu^+)\cdot \boldsymbol{v}_\nu^+ = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{v}_\nu^{-2} - \boldsymbol{v}_\nu^{+2} - (\boldsymbol{v}_\nu^- - \boldsymbol{v}_\nu^+)^2\right]$, то равенство (2) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu^{-2} - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu^{+2} - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu^- - \boldsymbol{v}_\nu^+)^2 = 0,$$

или, при обозначениях (9), (13) п. 197, $T^- - T^+ - T_* = 0$, т. е.

$$T^- - T^+ = T_*, \tag{3}$$

что и доказывает первую теорему Карно.

Эту теорему можно трактовать как теорему об изменении кинетической энергии за время первой фазы удара. Как видно из (3), за первую фазу удара кинетическая энергия системы всегда уменьшается.

Пример 1. *Два одинаковых шара движутся поступательно вдоль одной прямой со скоростями v_1 и v_2. В некоторый момент времени шары соприкасаются и происходит абсолютно неупругий удар. После удара шары образуют одно тело, движущееся вдоль исходной прямой со скоростью v. Найдем величину v при помощи первой теоремы Карно. Пусть m — масса каждого из шаров. Тогда*

$$T^- = \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2), \quad T^+ = mv^2, \quad T_* = \frac{1}{2}m(v_1 - v)^2 + \frac{1}{2}m(v_2 - v)^2.$$

Из уравнения (3) *находим*

$$v = \frac{1}{2}(v_1 + v_2).$$

Последнее равенство, очевидно, выражает неизменность количества движения системы двух шаров при ударе. Оно могло быть также получено из формул (22) *п.* 204 *при* $\varkappa = 0$ *и* $m_1 = m_2$.

209. Вторая теорема Карно. Пусть у системы с идеальными обратимыми связями в некоторый момент $t = t_0$ происходит внезапное снятие связей (одной, нескольких или даже всех). Активных ударных импульсов нет. Если моменту $t = t_0$ предшествовала фаза деформации, то при снятии связей возникают ударные импульсы реакций связей и происходит увеличение кинетической энергии системы. Имеет место следующая (вторая) теорема Карно:

Теорема. *Кинетическая энергия, приобретенная при снятии связей, равна кинетической энергии приобретенных скоростей.*

Доказательство.

Как и в п. 208, используем принцип Журдена. Теперь в уравнении (1) $\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu^-$ — любой вектор скорости, кинематически возможный для системы до снятия связей. Следовательно, справедливо соотношение

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-) \cdot \boldsymbol{v}_\nu^- = 0. \tag{4}$$

Но имеет место тождество

$$(\boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-) \cdot \boldsymbol{v}_\nu^- = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{v}_\nu^{+2} - \boldsymbol{v}_\nu^{-2} - (\boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-)^2\right].$$

Поэтому из (4) следует равенство

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu^{+2} - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu^{-2} - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-)^2 = 0.$$

Принимая во внимание обозначения (9), (13) п. 197, это равенство можно переписать в виде $T^+ - T^- - T_* = 0$ или в виде

$$T^+ - T^- = T_*. \tag{5}$$

Отсюда и следует справедливость доказываемой теоремы.

Вторую теорему Карно можно трактовать как теорему об изменении кинетической энергии за время второй фазы удара (если она существует). Из (5) следует, что за вторую фазу удара кинетическая энергия системы всегда увеличивается.

Пример 1. *Снаряд, движущийся поступательно со скоростью v, разрывается на два осколка равных масс. После взрыва один из осколков имеет скорость v_1 и сохраняет направление первоначального движения снаряда. При помощи второй теоремы Карно найдем скорость v_2 второго осколка.*

Пусть m — масса снаряда. Тогда

$$T^- = \frac{1}{2}mv^2, \quad T^+ = \frac{1}{4}m(v_1^2 + v_2^2), \quad T_* = \frac{1}{4}m(v_1 - v)^2 + \frac{1}{4}m(v_2 - v)^2,$$

и из уравнения (5) *находим, что* $v_2 = 2v - v_1$.

Величину v_2 можно было бы также найти из условия постоянства количества движения: $mv = \frac{m}{2}v_1 + \frac{m}{2}v_2$.

210. Кинетическая энергия потерянных скоростей в случае твердого тела. Получим формулу для вычисления кинетической энергии потерянных скоростей в случае тела, совершающего произвольные движения в пространстве. Пусть $Gxyz$ — система координат, образованная главными центральными осями инерции тела, A, B и C — моменты инерции тела относительно осей Gx, Gy и Gz; p, q, r — проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости тела на эти оси, m — масса тела, $\boldsymbol{v}_G$ — скорость центра масс. Радиус-вектор $\overline{GP_\nu}$ точки тела P_ν в системе координат $Gxyz$ задается компонентами x_ν, y_ν, z_ν. Для скорости $\boldsymbol{v}_\nu$ точки P_ν имеем выражение $\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \overline{GP_\nu}$. Поэтому для компонент вектора $\boldsymbol{v}_\nu^- - \boldsymbol{v}_\nu^+$ потерянной скорости точки P_ν имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned} v_{\nu x}^- - v_{\nu x}^+ &= (v_{Gx}^- - v_{Gx}^+) + (q^- - q^+)z_\nu - (r^- - r^+)y_\nu, \\ v_{\nu y}^- - v_{\nu y}^+ &= (v_{Gy}^- - v_{Gy}^+) + (r^- - r^+)x_\nu - (p^- - p^+)z_\nu, \\ v_{\nu z}^- - v_{\nu z}^+ &= (v_{Gz}^- - v_{Gz}^+) + (p^- - p^+)y_\nu - (q^- - q^+)x_\nu. \end{aligned} \tag{6}$$

Для кинетической энергии потерянных скоростей всех точек тела имеем выражение

$$T_* = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left[(v_{\nu x}^- - v_{\nu x}^+)^2 + (v_{\nu y}^- - v_{\nu y}^+)^2 + (v_{\nu z}^- - v_{\nu z}^+)^2\right]. \tag{7}$$

Но, согласно выбору системы координат $Gxyz$, имеют место равенства

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu y_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu z_\nu = 0, \tag{8}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_\nu y_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu y_\nu z_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu z_\nu x_\nu = 0, \tag{9}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (y_\nu^2 + z_\nu^2) = A, \ \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (z_\nu^2 + x_\nu^2) = B, \ \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2) = C. \tag{10}$$

Учитывая эти равенства и выражения (6), получаем из (7) следующую окончательную формулу:

$$T_* = \frac{1}{2} m (\boldsymbol{v}_G^- - \boldsymbol{v}_G^+)^2 + \frac{1}{2}\left[A(p^- - p^+)^2 + B(q^- - q^+)^2 + C(r^- - r^+)^2\right]. \tag{11}$$

В случае вращения твердого тела вокруг неподвижной точки O совершенно аналогично можно получить формулу

$$T_* = \frac{1}{2}\left[A(p^- - p^+)^2 + B(q^- - q^+)^2 + C(r^- - r^+)^2\right], \tag{12}$$

где теперь A, B, C — главные моменты инерции тела для точки O, а p, q, r — проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на соответствующие главные оси инерции Ox, Oy, Oz.

Рассмотрим еще случай вращения тела вокруг неподвижной оси u. Пусть эта ось проходит через точку O тела, являющуюся неподвижной. Косинусы углов, образуемых осью u и главными осями инерции Ox, Oy и Oz, обозначим через α, β и γ соответственно. Тогда $p = \omega\alpha$, $q = \omega\beta$, $r = \omega\gamma$ и формула (12) записывается в виде

$$T_* = \frac{1}{2}(A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2)(\omega^- - \omega^+)^2.$$

Но, согласно формуле (1) п. 77, имеем $A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = J_u$, где J_u — момент инерции тела относительно оси вращения. Поэтому

$$T_* = \frac{1}{2} J_u (\omega^- - \omega^+)^2. \tag{13}$$

Пример 1. *При помощи первой теоремы Карно найдем угловую скорость стержня после удара в задаче из примера* 3 *п.* 207.

Для до и послеударной кинетической энергии стержня имеем следующие выражения:

$$T^- = \frac{1}{2}mv^2, \quad T^+ = \frac{1}{2}\cdot\frac{7ml^2}{48}\omega^2. \tag{14}$$

Кинетическую энергию потерянных скоростей вычисляем по формуле (11):

$$T_* = \frac{1}{2}m\left(v - \omega\frac{l}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\omega^2. \tag{15}$$

Подстановка выражений (14), (15) *в равенство* (3) *дает уравнение относительно* ω. *Решив его, получим, что*

$$\omega = \frac{12v}{7l}.$$

Пример 2. *При помощи теоремы Карно вычислим угловую скорость тела* ω^+ *в примере из п.* 199.

Используя обозначения п. 199 *и формулу* (12), *запишем уравнение* (3) *в виде*

$$(Ap^{-2} + Bq^{-2} + Cr^{-2}) - (A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2)\omega^{+2} =$$
$$= A(p^- - \alpha\omega^+)^2 + B(q^- - \beta\omega^+)^2 + C(r^- - \gamma\omega^+)^2.$$

Отсюда получаем

$$\omega^+ = \frac{Ap^-\alpha + Bq^-\beta + Cr^-\gamma}{A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2}.$$

Пример 3. *Найдем послеударные угловые скорости шкивов в примере* 1 *п.* 196.

Имеем

$$T^- = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2, \quad T^+ = \frac{1}{2}J_1\Omega_1^2 + \frac{1}{2}J_2\Omega_2^2.$$

Величину T_* *находим по формуле* (13):

$$T_* = \frac{1}{2}J_1(\omega_1 - \Omega_1)^2 + \frac{1}{2}J_2(\omega_2 - \Omega_2)^2.$$

Учитывая еще, что $\Omega_1 r_1 = \Omega_2 r_2$, *из уравнения* (3) *получаем*

$$\Omega_1 = \frac{J_1 r_2\omega_1 + J_2 r_1\omega_2}{J_1 r_2^2 + J_2 r_1^2} r_2.$$

211. Третья и обобщенная теоремы Карно. У систем с идеальными обратимыми связями кинетическая энергия за обе фазы удара, как правило, уменьшается; исключением является случай только абсолютно упругого удара, когда она остается без изменений. В этом состоит так называемая *третья теорема Карно.* Мы не останавливаемся на ее доказательстве в общем случае. Отметим только, что в частном случае соударения двух абсолютно гладких тел эта теорема была получена ранее в п. 203.

Формулу (18) п. 203 можно записать в несколько иной форме, выразив ее правую часть только через кинетическую энергию потерянных скоростей T_* и коэффициент восстановления æ. С этой целью по формуле (11) п. 210 находим

$$T_* = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} m_k(\boldsymbol{v}_k^- - \boldsymbol{v}_k^+)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\left[A_k(p_k^- - p_k^+)^2 + \right.$$
$$\left. + B_k(q_k^- - q_k^+)^2 + C_k(r_k^- - r_k^+)^2\right].$$

С учетом равенств (9), (10) и (12) из п. 202 это выражение преобразуется к виду

$$T_* = \frac{1}{2}\mu^2 I^2. \tag{16}$$

Учитывая равенство (14) п. 202, из формулы (18) п. 203 имеем

$$T^- - T^+ = \frac{1-æ^2}{2\mu^2}\left(\frac{I\mu^2}{1+æ}\right)^2 = \frac{1-æ}{2(1+æ)}\mu^2 I^2.$$

Отсюда, принимая во внимание равенство (16), окончательно находим, что

$$T^- - T^+ = \frac{1-æ}{1+æ}T_*, \tag{17}$$

т. е. *потеря кинетической энергии за полное время удара равна* $\frac{1-æ}{1+æ}$*-ой доле кинетической энергии потерянных скоростей за это время.* Это утверждение называют *обобщенной теоремой Карно.*

Упражнение 7. *Непосредственным вычислением убедиться в справедливости обобщенной теоремы Карно в задаче о соударении материальной точки с неподвижной абсолютно гладкой поверхностью* (*пример* 1 *из п.* 201) *и в задаче о прямом центральном ударе двух тел* (п. 204).

§ 7. Теоремы Делонэ–Бертрана и Томсона

212. Теорема Делонэ–Бертрана. Рассмотрим систему материальных точек P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$) с идеальными обратимыми связями. Первоначально она покоится, но в некоторый момент внезапно приводится в движение заданной системой ударных импульсов $\boldsymbol{I}_\nu$. В результате удара точка P_ν получает скорость $\boldsymbol{v}_\nu^{(1)}$, а система приобретает кинетическую энергию $T^{(1)}$. Наложим теперь на систему новые дополнительные связи, также идеальные и обратимые. Тогда точки P_ν системы под действием тех же импульсов $\boldsymbol{I}_\nu$ приобретают, вообще говоря, другие скорости $\boldsymbol{v}_\nu^{(2)}$, а система — кинетическую энергию $T^{(2)}$.

Новые скорости $\boldsymbol{v}_\nu^{(2)}$ являются кинематически возможными как для системы с увеличенным числом связей, так и для первоначальной системы. Поэтому из принципа Журдена, согласно соотношению (15) п. 206, следует справедливость следующих двух равенств:

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\boldsymbol{I}_\nu - m_\nu \boldsymbol{v}_\nu^{(1)}) \cdot \boldsymbol{v}_\nu^{(2)} = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{N}(\boldsymbol{I}_\nu - m_\nu \boldsymbol{v}_\nu^{(2)}) \cdot \boldsymbol{v}_\nu^{(2)} = 0.$$

Из этих равенств следует, что

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu^{(1)} - \boldsymbol{v}_\nu^{(2)}) \cdot \boldsymbol{v}_\nu^{(2)} = 0,$$

или

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu {v_\nu^{(1)}}^2 - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu {v_\nu^{(2)}}^2 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu^{(1)} - \boldsymbol{v}_\nu^{(2)})^2,$$

т. е.

$$T^{(1)} - T^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu^{(1)} - \boldsymbol{v}_\nu^{(2)})^2 > 0.$$

Последнее соотношение означает, что для систем с идеальными обратимыми связями имеет место следующее утверждение.

Теорема (Делонэ–Бертрана). *Если точки материальной системы получают заданные импульсы, то кинетическая энергия в возникающем движении будет больше, чем кинетическая энергия, которую приобрела бы система при тех же импульсах, если бы к первоначальным связям системы были добавлены новые связи.*

Иными словами, добавление новых связей при тех же импульсах приводит к *уменьшению* послеударной величины кинетической энергии.

Пример 1. *Иллюстрацией к теореме могут служить примеры* 2 *и* 3 *из п.* 196 (*см. также п.* 197). *Для свободного стержня имеем* $T^{(1)} = \frac{2I^2}{m}$. *Если же один из концов стержня закрепить, то* $T^{(2)} = \frac{3I^2}{2m}$. *Поэтому* $\frac{T^{(1)}}{T^{(2)}} = \frac{4}{3}$, *т. е.* (*при заданном импульсе* $\boldsymbol{I}$) *наложение связи* (*закрепление конца стержня*) *уменьшило кинетическую энергию.*

Содержание теоремы Делонэ–Бертрана можно выразить еще следующим образом. Рассмотрим кинематическое состояние системы после действия заданных ударных импульсов как одно из кинематических состояний системы с увеличенным числом связей. Тогда среди бесконечного множества таких состояний системы истинное послеударное кинематическое состояние выделяется тем, что *для него кинетическая энергия имеет максимальное значение при тех же импульсах.*

Пример 2. *Определим при помощи теоремы Делонэ–Бертрана послеударное кинематическое состояние стержня в примере* 2 *п.* 196.

Кинематическое состояние стержня вполне определится, если найти его послеударную угловую скорость ω *и положение мгновенного центра скоростей.*

Мысленно наложим на стержень новую связь, шарнирно «закрепив» его в точке, лежащей слева от центра масс стержня на расстоянии x *от него* (рис. 146). *Согласно теореме Делонэ–Бертрана, истинное положение мгновенного центра скоростей после удара найдется из условий максимума кинетической энергии как функции* x *при заданной величине импульса* I.

Теорема об изменении кинетического момента дает следующее соотношение между ω *и* x:

$$J\omega = I\left(\frac{l}{2} + x\right), \quad J = \frac{1}{12}ml^2 + mx^2. \tag{1}$$

Для кинетической энергии стержня $T = \frac{J\omega^2}{2}$ *с учетом* (1) *имеем выражение*

$$T = \frac{3I^2}{2m}f(x), \quad f(x) = \frac{(l+2x)^2}{l^2 + 12x^2}. \tag{2}$$

Из условия $\frac{dT}{dx} = 0$ *находим* $x = \frac{l}{6}$ *и из* (1) *получаем* $\omega = \frac{6I}{ml}$.

Пусть $\boldsymbol{v}_\nu$ — кинематически возможные послеударные скорости точек первоначально покоящейся системы. Согласно теореме об изменении кинетической энергии при импульсивном движении, величины $\boldsymbol{v}_\nu$

и ударные импульсы $\boldsymbol{I}_\nu$ связаны равенством (см. формулу (10) п. 197):

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2 = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{I}_\nu \cdot \boldsymbol{v}_\nu. \tag{3}$$

Поэтому теореме Делонэ–Бертрана можно дать такую формулировку: *кинетическая энергия, сообщаемая системе с идеальными обратимыми связями заданными импульсами $\boldsymbol{I}_\nu$, есть максимум при условии* (3).

Пример 3 (См. также п. 198). *К покоящемуся свободному твердому телу приложены ударные импульсы с главным вектором $\boldsymbol{S}^{(e)}$ и главным моментом $\boldsymbol{L}^{(e)}$ относительно центра масс тела. Определим кинематическое состояние тела после удара при помощи теоремы Делонэ–Бертрана.*

Пусть m — масса тела, A, B, C — его главные центральные моменты инерции, $\boldsymbol{v}_G$ и $\boldsymbol{\omega}$ — скорость центра масс тела и его угловая скорость после удара. В системе координат $Gxyz$, образованной главными центральными осями инерции, имеем: $\boldsymbol{S}^{(e)\prime} = (S_x,\ S_y,\ S_z)$, $\boldsymbol{L}^{(e)\prime} = (L_x,\ L_y,\ L_z)$, $\boldsymbol{v}_G{}' = (v_{Gx},\ v_{Gy},\ v_{Gz})$, $\boldsymbol{\omega}' = (p,\ q,\ r)$. В соответствии с теоремой Делонэ–Бертрана, в послеударном состоянии тела величина

$$T = \frac{1}{2}m(v_{Gx}^2 + v_{Gy}^2 + v_{Gz}^2) + \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) \tag{4}$$

является максимальной при условии (3), *которое в рассматриваемом случае, согласно формуле* (5) *п.* 198, *может быть записано в виде*

$$S_x v_{Gx} + S_y v_{Gy} + S_z v_{Gz} + L_x p + L_y q + L_z r = 2T. \tag{5}$$

Для решения задачи об условном экстремуме используем метод неопределенных множителей Лагранжа. Составим функцию

$$F = T - \lambda(S_x v_{Gx} + S_y v_{Gy} + S_z v_{Gz} + L_x p + L_y q + L_z r - 2T) =$$

$$= (1 + 2\lambda)T - \lambda(S_x v_{Gx} + S_y v_{Gy} + S_z v_{Gz} + L_x p + L_y q + L_z r).$$

Приравняв нулю частные производные функции F по v_{Gx}, v_{Gy}, v_{Gz}, p, q, r, получаем следующие уравнения:

$$\begin{gathered}(1+2\lambda)mv_{Gx} = \lambda S_x, \quad (1+2\lambda)mv_{Gy} = \lambda S_y, \quad (1+2\lambda)mv_{Gz} = \lambda S_z,\\ (1+2\lambda)Ap = \lambda L_x, \qquad (1+2\lambda)Bq = \lambda L_y, \qquad (1+2\lambda)Cr = \lambda L_z.\end{gathered} \tag{6}$$

Из (5) *и* (6) *находим* $\lambda = -1$, *а*

$$v_{Gx} = \frac{S_x}{m}, \quad v_{Gy} = \frac{S_y}{m}, \quad v_{Gz} = \frac{S_z}{m},$$
$$p = \frac{L_x}{A}, \qquad q = \frac{L_y}{B}, \qquad r = \frac{L_z}{C},$$

что находится в соответствии с формулами (2) *и* (3) *п.* 198.

213. Теорема Томсона. Как мы видели в предыдущем пункте, теорема Делонэ–Бертрана позволяет свести задачу об импульсивном движении системы с идеальными обратимыми связями к задаче о нахождении максимума некоторой функции. Теорема Томсона, изучаемая ниже, сводит задачу об импульсивном движении к рассмотрению некоторого минимума.

Пусть точки P_ν первоначально покоящейся системы под действием ударных импульсов $\boldsymbol{I}_\nu$ приобретают скорости $\boldsymbol{v}'_\nu$. Если к системе приложить другие ударные импульсы, то ее состояние после удара будет, как правило, иным, нежели в первом случае: если $\boldsymbol{v}''_\nu$ — скорости точек системы во втором случае, то, вообще говоря, равенство $\boldsymbol{v}'_\nu = \boldsymbol{v}''_\nu$ не будет выполняться для всех точек P_ν. Пусть при этом новые импульсы таковы, что новые скорости $\boldsymbol{v}''_\nu$ удовлетворяют равенству

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{I}_\nu \cdot \boldsymbol{v}''_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{I}_\nu \cdot \boldsymbol{v}'_\nu. \tag{7}$$

Напишем уравнение (15) п. 206 для системы импульсов $\boldsymbol{I}_\nu$ и двух систем кинематически возможных скоростей $\boldsymbol{v}'_\nu$ и $\boldsymbol{v}''_\nu$:

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{I}_\nu - m_\nu \boldsymbol{v}'_\nu) \cdot \boldsymbol{v}'_\nu = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{I}_\nu - m_\nu \boldsymbol{v}'_\nu) \cdot \boldsymbol{v}''_\nu = 0.$$

Отсюда на основании условия (7) получаем равенство

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\boldsymbol{v}''_\nu - \boldsymbol{v}'_\nu) \cdot \boldsymbol{v}'_\nu = 0,$$

которое тождественными преобразованиями приводится к виду

$$\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v''^2_\nu - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v'^2_\nu = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\boldsymbol{v}''_\nu - \boldsymbol{v}'_\nu)^2,$$

т. е.

$$T'' - T' = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\boldsymbol{v}''_\nu - \boldsymbol{v}'_\nu)^2 > 0.$$

Это означает, что для рассматриваемой системы материальных точек справедливо следующее утверждение.

Теорема (Томсона). *Кинетическая энергия, которую приобретает система в действительности от приложенных импульсов, будет наименьшей из всех тех кинетических энергий, которые сообщили бы системе всевозможные импульсы, удовлетворяющие условию* (7).

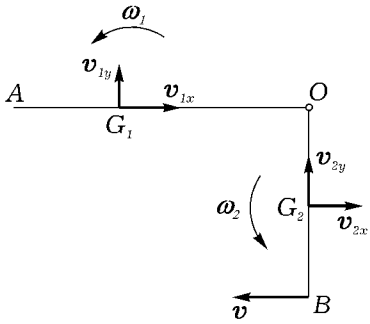

Рис. 160

Доказательство.

Предположим, что находящаяся в покое система материальных точек P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$) приводится в движение неизвестными ударными импульсами, приложенными к некоторым заданным точкам системы $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ($n < N$), причем эти точки приобретают данные скорости $\boldsymbol{v}'_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$). К остальным точкам системы не приложено никаких активных ударных импульсов, их послеударные скорости обусловлены только наличием связей. В этом случае условию (7) можно удовлетворить, если новые импульсы подобрать так, чтобы выполнялись условия $\boldsymbol{v}''_\nu = \boldsymbol{v}'_\nu$ для $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Теореме Томсона можно, следовательно, дать такую формулировку: *если некоторые точки системы внезапно приведены в движение с заданными скоростями, то кинетическая энергия, приобретенная системой, меньше, чем кинетическая энергия во всяком другом кинематически возможном состоянии, при котором указанные точки системы имеют заданные скорости.*

Пример 1. *Два одинаковых тонких однородных стержня AO и OB массы m и длины l каждый шарнирно соединены в точке O и находятся в покое перпендикулярно один другому. Концу B стержня OB внезапно сообщается скорость $\boldsymbol{v}$, параллельная направлению OA* (рис. 160). *Определить кинематическое состояние стержней после удара.*

При заданной скорости точки B послеударное кинематическое состояние стержней AO и OB вполне определяется их угловыми скоростями ω_1 и ω_2. Пусть $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ — скорости центров масс G_1 и G_2 стержней после удара. Тогда

$$T = \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2) + \frac{1}{24}ml^2(\omega_1^2 + \omega_2^2).$$

Но из кинематических соотношений $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \overline{G_1O} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \overline{BO}$

и $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \overline{BG_2}$ *следуют равенства*

$$v_{1x} = -v - \omega_2 l, \quad v_{1y} = -\omega_1 \frac{l}{2}, \quad v_{2x} = -v - \omega_2 \frac{l}{2}, \quad v_{2y} = 0,$$

поэтому

$$T = \frac{1}{2} m \left[(v + \omega_2 l)^2 + \omega_1^2 \frac{l^2}{4} + (v + \omega_2 \frac{l}{2})^2 \right] + \frac{1}{24} m l^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2).$$

Из уравнений

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \omega_2} = 0$$

находим $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = -\dfrac{9v}{8l}$. *Таким образом, непосредственно после удара стержень* AO *находится в состоянии мгновенного поступательного движения, а стержень* AO *вращается по часовой стрелке с угловой скоростью* $\dfrac{9v}{8l}$.

Пример 2. *К заданной точке свободного твердого тела приложен импульс, сообщающий этой точке данную скорость. Определить послеударное состояние тела.*

Как и в последнем примере п. 212, *за начало координат примем центр масс* G *тела, а за оси* Gx, Gy, Gz — *главные центральные оси инерции. Кинетическая энергия* T *тела после удара вычисляется по формуле* (4) *п.* 212. *Пусть* a, b, c — *координаты точки приложения импульса, а* v_x, v_y, v_z — *заданные проекции вектора ее скорости на координатные оси. Тогда*

$$v_x = v_{Gx} + qc - rb, \quad v_y = v_{Gy} + ra - pc, \quad v_z = v_{Gz} + pb - qa. \tag{8}$$

Нахождение величин v_{Gx}, v_{Gy}, v_{Gz}, p, q, r, *доставляющих минимум функции* T *при условиях* (8), *приводит к уравнениям*

$$m v_{Gx} = \lambda_x, \quad m v_{Gy} = \lambda_y, \quad m v_{Gz} = \lambda_z, \tag{9}$$

$$Ap = b\lambda_z - c\lambda_y, \quad Bq = c\lambda_x - a\lambda_z, \quad Cr = a\lambda_y - b\lambda_x, \tag{10}$$

где λ_x, λ_y, λ_z — *неопределенные множители Лагранжа, которые определяются вместе с величинами* v_{Gx}, v_{Gy}, v_{Gz}, p, q, r *из системы девяти уравнений* (8)–(10).

Отметим, что из формул (2), (3) *п.* 198 *и уравнений* (9), (10) *следует, что* λ_x, λ_y, λ_z — *проекции неизвестного вектора ударного импульса на оси* Gx, Gy, Gz.

Теореме Томсона можно дать истолкование, близкое по форме к данному в предыдущем пункте истолкованию теоремы Делонэ–Бертрана. Будем рассматривать послеударное кинематическое состояние системы, заданным точкам которой сообщены заданные скорости, как одно из послеударных состояний системы с увеличенным числом связей. Тогда среди бесконечного множества таких состояний истинное послеударное состояние выделяется тем, что *оно дает наименьшую кинетическую энергию при тех же скоростях заданных точек системы.*

Иными словами, добавление новых связей при тех же скоростях заданных точек системы приводит к *увеличению* ее послеударной кинетической энергии.

Сравнив теоремы Делонэ–Бертрана и Томсона, получим, что если заданы ударные импульсы, приложенные в данных точках системы, то послеударное состояние системы может быть найдено при решении задачи максимума кинетической энергии, если же заданы скорости точек приложения импульсов, то послеударное состояние находится как решение задачи минимума кинетической энергии при добавлении новых связей.

Пример 3. *Для иллюстрации рассмотрим два тонких однородных стержня AB и BC, связанных шарнирно в точке B. Стержни покоятся и составляют одну прямую* (рис. 158). *Внезапно точке C сообщается скорость $\boldsymbol{v}$ в направлении, перпендикулярном BC. На основании вычислений, проведенных в примере* 1 *п.* 207, *можно получить, что при этом система из двух стержней приобретет кинетическую энергию $T^{(1)} = \frac{1}{7}mv^2$.*

Теперь мысленно проведем второй эксперимент. Закрепим шарнирно точку A и приведем точку C в движение с прежней скоростью $\boldsymbol{v}$. Использовав вычисления примера 3 *п.* 200, *получим, что в этом случае приобретенная кинетическая энергия $T^{(2)} = \frac{7}{48}mv^2$.*

И, наконец, рассмотрим третий эксперимент. Кроме точки A закрепим шарнирно еще и точку B, а точке C опять сообщим ту же скорость $\boldsymbol{v}$. Здесь после удара стержень AB остается в покое, и приобретенная кинетическая энергия $T^{(3)}$ равна послеударной кинетической энергии стержня BC. Согласно примеру из п. 197, *имеем $T^{(3)} = \frac{1}{6}mv^2$.*

Так как $\frac{1}{7} < \frac{7}{48} < \frac{1}{6}$, то $T^{(1)} < T^{(2)} < T^{(3)}$, т. е., в соответствии с теоремой Томсона, наложение связей при неизменной скорости точки C приводит к увеличению послеударной кинетической энергии.

Если же в трех рассмотренных экспериментах одинаковым будет ортогональный BC ударный импульс $\boldsymbol{I}$, то приобретенная кинетичес-

кая энергия будет, соответственно, такой: $T^{(1)} = \frac{7I^2}{4m}$, $T^{(2)} = \frac{12I^2}{7m}$, $T^{(3)} = \frac{3I^2}{2m}$. *Так как* $\frac{7}{4} > \frac{12}{7} > \frac{3}{2}$, *то* $T^{(1)} > T^{(2)} > T^{(3)}$, *т. е., в согласии с теоремой Делонэ–Бертрана, наложение новых связей привело к уменьшению послеударной кинетической энергии.*

Пример 4. *При помощи теоремы Томсона найдем положение мгновенного центра скоростей тонкого однородного стержня, правому концу которого сообщена скорость* $\boldsymbol{v}$ *перпендикулярно стержню* (рис. 146).

Эта задача рассмотрена в предыдущем пункте при помощи теоремы Делонэ–Бертрана. Здесь используем аналогичный подход. На стержень мысленно наложим связь, «закрепив» его при помощи шарнира в точке, отстоящей от центра масс O *на расстоянии* x. *Тогда послеударная угловая скорость задается равенством* $\omega = \frac{2v}{l+2x}$. *Момент инерции* J *относительно оси вращения вычисляется по формуле* (1). *Для кинетической энергии стержня в его послеударном состоянии получим выражение*

$$T = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{6}mv^2 g(x), \quad g(x) = \frac{l^2 + 12x^2}{(l+2x)^2}. \tag{11}$$

Согласно теореме Томсона, искомая величина x *доставляет минимум величине кинетической энергии. Это дает* $x = \frac{l}{6}$, *что совпадает с результатом предыдущего пункта.*

Сравнивая формулы (2) *и* (11), *видим, что* $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, *т. е. теоремы Делонэ–Бертрана и Томсона привели к рассмотрению экстремума одной и той же функции от* x.

§ 8. Уравнения Лагранжа второго рода для импульсивных движений

214. Обобщенные ударные импульсы. Рассмотрим голономную систему материальных точек P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$) с идеальными связями. Пусть она имеет n степеней свободы, а $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — ее обобщенные координаты. В некоторый момент времени t_0 к системе прикладываются ударные силы, имеющие за время удара τ ударные импульсы $\boldsymbol{I}_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, N$). Задача об импульсивном движении системы в обобщенных координатах состоит в нахождении значений $\dot{q}_i^+$ обобщенных скоростей после удара по известным их значениям $\dot{q}_i^-$ непосредственно перед ударом. Для решения этой задачи могут быть использованы уравнения Лагранжа второго рода (см. п. 138).

Введем понятие обобщенных ударных импульсов, аналогичное понятию обобщенных сил (п. 54). Рассмотрим элементарную работу

$$\delta L = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{I}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu, \tag{1}$$

совершаемую ударными импульсами на любом виртуальном перемещении системы. Величины $\delta \boldsymbol{r}_\nu$ выражаются через вариации обобщенных координат δq_i по формуле (27) п. 16. Поэтому выражению (1) можно придать такой вид:

$$\delta L = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{I}_\nu \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{I}_\nu \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \right) \delta q_i. \tag{2}$$

Введя обозначение

$$J_i = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{I}_\nu \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \ (i = 1,\ 2, \ldots,\ n), \tag{3}$$

равенство (2) можно записать в виде

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} J_i \delta q_i. \tag{4}$$

Величина J_i называется *обобщенным ударным импульсом*, соответствующим обобщенной координате q_i $(i = 1,\ 2, \ldots,\ n)$.

Принимая во внимание равенство (1) п. 191, из формулы (3) получаем такое выражение для обобщенного ударного импульса

$$J_i = \sum_{\nu=1}^{N} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \boldsymbol{F}_\nu \, dt \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i}.$$

Но величины $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i}$ во время удара изменяются пренебрежимо мало и при интегрировании их можно считать постоянными. Поэтому последнее равенство можно переписать так

$$J_i = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \left(\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \right) dt.$$

Согласно формуле (9) п. 54, выражение в круглых скобках есть обобщенная сила Q_i, соответствующая обобщенной координате q_i. Следовательно,

$$J_i = \int\limits_{t_0}^{t_0+\tau} Q_i\, dt \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{5}$$

215. Уравнения Лагранжа. Проинтегрируем обе части уравнения (11) п. 138 по времени на промежутке, соответствующем продолжительности удара τ. Тогда, учитывая формулы (5) и тот факт, что интегралы от конечных величин $\dfrac{\partial T}{\partial q_i}$ за время удара пренебрежимо малы, получаем соотношения:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)^+ - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)^- = J_i \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n), \tag{6}$$

где, как обычно, верхними индексами $-$ и $+$ обозначены значения соответствующих величин до и после удара.

Соотношения (6) образуют систему n уравнений Лагранжа второго рода для импульсивных движений. Неизвестными являются величины $\dot{q}_1^+,\ \dot{q}_2^+, \ldots, \dot{q}_n^+$. В отличие от уравнений Лагранжа (11) п. 138 для движения под действием конечных сил, уравнения (6) являются алгебраическими (причем линейными), а не дифференциальными.

Пример 1. *Материальная точка массы m движется вдоль оси Ox со скоростью v. К ней прикладывается ударный импульс $\boldsymbol{I}$, направленный вдоль оси Ox. Найдем послеударную скорость точки.*

Результат сразу же следует из основного соотношения в теории импульсивных движений (см. формулу (2) *п.* 192). *Но в иллюстративных целях решим эту задачу при помощи уравнений Лагранжа* (6).

Из (1) имеем $\delta L = I\delta x$, т. е. $J_x = I$. Но $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$, поэтому, согласно (6), *имеем уравнение $(m\dot{x})^+ - (m\dot{x})^- = J_x = I$. Следовательно, $\dot{x}^+ = v + \dfrac{I}{m}$.*

Пример 2. *Двойной маятник, образованный двумя тонкими однородными стержнями длины l и массы m каждый, находится в покое, причем центры тяжести стержней находятся на одной вертикали ниже точки A подвеса стержней (это значит, что на рис.* 15 *имеем $\varphi = \psi = 0$). Ему сообщается горизонтальный ударный импульс $\boldsymbol{I}$, приложенный к нижнему стержню на расстоянии a от шарнира, соединяющего стержни. Найти угловые скорости каждого из стержней после удара.*

Сложив кинетические энергии стержней, образующих маятник, получим

$$T = \frac{1}{2}ml^2\left[\frac{4}{3}\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi - \psi) + \frac{1}{3}\dot{\psi}^2\right]. \tag{7}$$

В системе координат Axy, ось Ax которой направлена вертикально вниз, а ось Ay горизонтальна и лежит в плоскости рис. 15, имеем $\boldsymbol{I}' = (0,\ I)$, а радиус-вектор $\boldsymbol{r}' = (x,\ y)$ точки приложения импульса имеет компоненты $x = l\cos\varphi + a\cos\psi$, $y = l\sin\varphi + a\sin\psi$. Для элементарной работы (1) импульса $\boldsymbol{I}$ на виртуальном перемещении $\delta\boldsymbol{r}' = (\delta x,\ \delta y)$ получаем следующее выражение

$$\delta L = \boldsymbol{I}\cdot\delta\boldsymbol{r} = I\delta y = Il\cos\varphi\delta\varphi + Ia\cos\psi\delta\psi.$$

Следовательно,

$$J_\varphi = Il\cos\varphi, \quad J_\psi = Ia\cos\psi. \tag{8}$$

Уравнения Лагранжа (6) будут такими:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)^+ - \left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)^- = J_\varphi, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}}\right)^+ - \left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}}\right)^- = J_\psi. \tag{9}$$

Принимая во внимание формулы (7), (8) и тот факт, что $\dot{\varphi}^- = \dot{\psi}^- = 0$, а при ударе $\varphi = \psi = 0$, уравнения (9) можно записать в следующем виде:

$$8\dot{\varphi}^+ + 3\dot{\psi}^+ = \frac{6I}{ml}, \quad 3\dot{\varphi}^+ + 2\dot{\psi}^+ = \frac{6Ia}{ml^2}.$$

Отсюда получим искомые величины послеударных угловых скоростей стержней:

$$\dot{\varphi}^+ = \frac{6I(2l - 3a)}{7ml^2}, \quad \dot{\psi}^+ = \frac{6I(8a - 3l)}{7ml^2}.$$

В примере 3 п. 200 этот же результат получен при помощи теорем об изменении количества движения и кинетического момента.

Пример 3. *Тонкий однородный стержень AB длины l и массы m движется в плоскости Oxy* (рис. 161). *В некоторый момент времени он ударяется об ось Ox своим концом A. Во время удара стержень составляет с осью Ox угол α, компоненты скорости его центра масс равны $\dot{x}^-$, $\dot{y}^-$, а угловая скорость равна $\dot{\varphi}^-$. Считая ось Ox абсолютно гладкой, а удар абсолютно упругим, найти послеударное кинематическое состояние стержня.*

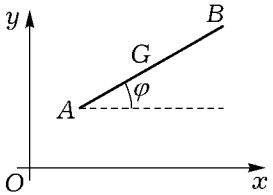

Рис. 161

Если x, y — координаты центра масс стержня, а $\dot\varphi$ — его угловая скорость, то

$$T = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2) + \frac{1}{24}ml^2\dot\varphi^2. \qquad (10)$$

Пусть $\boldsymbol{I}$ — неизвестный ударный импульс оси Ox. Ввиду отсутствия трения он параллелен оси Oy. Для элементарной работы ударного импульса на виртуальном перемещении стержня имеем следующее выражение:

$$\delta L = I\,\delta y - I\frac{l}{2}\cos\alpha\,\delta\varphi.$$

Отсюда следует, что

$$J_x = 0, \quad J_y = I, \quad J_\varphi = -I\frac{l}{2}\cos\alpha. \qquad (11)$$

Уравнения Лагранжа (6) *имеют вид:*

$$m(\dot x^+ - \dot x^-) = 0, \quad m(\dot y^+ - \dot y^-) = I, \quad \frac{1}{12}ml^2(\dot\varphi^+ - \dot\varphi^-) = -\frac{1}{2}Il\cos\alpha. \qquad (12)$$

Они представляют собой систему трех уравнений относительно четырех неизвестных $\dot x^+$, $\dot y^+$, $\dot\varphi^+$, I. Недостающее уравнение получается из условия того, что удар является абсолютно неупругим. Это условие означает, что скорость точки A после удара не имеет составляющей вдоль оси Oy, т. е.

$$\dot y^+ = \frac{1}{2}l\cos\alpha\dot\varphi^+. \qquad (13)$$

Из системы (12), (13) *находим, что*

$$\begin{aligned} &\dot x^+ = \dot x^-, && \dot y^+ = \frac{(l\dot\varphi^- + 6\cos\alpha\dot y^-)\cos\alpha}{2(1+3\cos^2\alpha)},\\ &\dot\varphi^+ = \frac{l\dot\varphi^- + 6\cos\alpha\dot y^-}{l(1+3\cos^2\alpha)}, && I = \frac{m(l\cos\alpha\dot\varphi^- - 2\dot y^-)}{2(1+3\cos^2\alpha)}. \end{aligned} \qquad (14)$$

216. Случай, когда ударные импульсы возникают только из-за наложения новых связей. Правые части уравнений (6) содержат как активные ударные импульсы, так и, вообще говоря, импульсы ударных реакций новых идеальных связей, накладываемых на систему

во время удара (если, конечно, такие связи есть). Но часто в задаче об импульсивном движении систем надо узнать лишь послеударное кинематическое состояние системы и не требуется нахождение импульсов ударных реакций связей. Рассмотрим алгоритм Аппеля, позволяющий получать уравнения Лагранжа импульсивного движения, не содержащие ударные импульсы новых связей, накладываемых на систему.

Рассмотрим голономную систему с n степенями свободы. Активные ударные импульсы отсутствуют. Удар вызывается тем, что в некоторый момент времени t_0 на систему накладывается $n-k$ новых идеальных связей. Эти связи могут в момент $t=t_0+\tau$ окончания удара сохраниться, а могут и исчезнуть. Первоначально существующие связи тоже идеальны, они существуют во время удара и после него.

Обобщенные координаты $q_1,\ q_2,\ldots,\ q_n$ всегда можно выбрать так, чтобы новые связи задавались уравнениями

$$q_{k+1}=0,\ q_{k+2}=0,\ldots,\ q_n=0. \tag{15}$$

Эти уравнения выполняются во время удара. В послеударном состоянии уравнения (15) выполняются, если только вновь наложенные связи сохраняются после удара.

Принтегрируем обе части общего уравнения динамики (см. соотношение (10) п. 137, в котором $m=n$) по времени от $t=t_0$ до $t=t_0+\tau$. Учитывая формулы (5) и тот факт, что во время удара величины δq_i можно считать не зависящими от t, а интегралы от конечных величин $\dfrac{\partial T}{\partial q_i}$ пренебрежимо малы, получаем следующее равенство:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right)^{+}-\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right)^{-}-J_i\right]\delta q_i=0. \tag{16}$$

Так как активных ударных импульсов нет, а первоначальные связи сохраняются во время удара, то обобщенные ударные импульсы $J_1,\ J_2,\ldots,\ J_k$ равны нулю, а $J_{k+1},\ J_{k+2},\ \ldots,\ J_n$ определяются только ударными реакциями новых связей.

До удара вариации $\delta q_1,\ \delta q_2,\ldots,\delta q_n$ произвольны. Выберем их так, чтобы они задавали виртуальное перемещение и для системы с наложенными на нее новыми связями. В соответствие с уравнениями (15) тогда следует считать, что $\delta q_{k+1}=\delta q_{k+2}=\ldots=\delta q_n=0$, а величины $\delta q_1,\ \delta q_2,\ldots,\ \delta q_k$ будут произвольными. При таком выборе вариаций из соотношений (16) следуют уравнения

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right)^{+}=\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right)^{-}\qquad (i=1,\ 2,\ldots,\ k), \tag{17}$$

т. е. справедливо следующее утверждение.

Теорема (Аппеля). *Производные от кинетической энергии по обобщенным скоростям, отвечающим обобщенным координатам, не обращающимся в нуль во время удара, не изменяются во время удара.*

В уравнениях (17) $q_{k+1} = q_{k+2} = \dots = q_n = 0$, но соответствующие обобщенные скорости $\dot{q}_{k+1}$, $\dot{q}_{k+2}, \dots$, $\dot{q}_n$ вовсе не обязаны быть равными нулю как до удара, так и после него. Они после удара равны нулю лишь тогда, когда вновь наложенные связи сохраняются после удара, в этом случае k неизвестных $\dot{q}_1^+$, $\dot{q}_2^+, \dots$, $\dot{q}_k^+$ находятся из k линейных уравнений (17). В других же случаях мы имеем k уравнений (17) относительно n неизвестных $\dot{q}_1^+$, $\dot{q}_2^+, \dots$, $\dot{q}_n^+$ и, как и в случае удара, не являющегося абсолютно неупругим, надо вводить дополнительные предположения о поведении системы после удара.

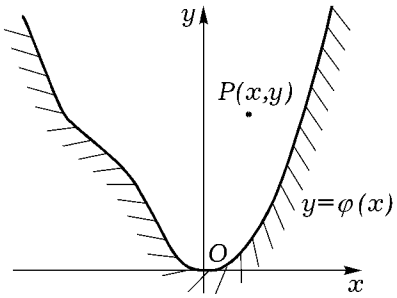

Рис. 162

Пример 1. *Материальная точка P движется в вертикальной плоскости над циллиндрической поверхностью, образующая которой горизонтальна; на рис. 162 изображено сечение $y = \varphi(x)$ этой поверхности плоскостью $z = 0$, перпендикулярной образующей. В некоторый момент времени точка соударяется с поверхностью. Перед ударом вектор ее скорости $\boldsymbol{v}^{-\prime} = (\dot{x}^-, \dot{y}^-)$. Считая поверхность абсолютно гладкой, а удар абсолютно упругим, найдем скорость $\boldsymbol{v}^{+\prime} = (\dot{x}^+, \dot{y}^+)$ точки P после удара.*

За обобщенные координаты точки примем величины

$$q_1 = x, \quad q_2 = y - \varphi(x). \tag{18}$$

При ударе на точку накладывается новая связь $q_2 = 0$.

Из (18) *имеем*

$$\dot{x} = \dot{q}_1, \quad \dot{y} = \varphi' \dot{q}_1 + \dot{q}_2, \tag{19}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по x. Следовательно,

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m \left[(1 + \varphi'^2) \dot{q}_1^2 + 2\varphi' \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2 \right]. \tag{20}$$

Из (17) *имеем уравнение*

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right)^+ = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right)^-,$$

которое при учете формулы (20) *записывается в виде*

$$(1+\varphi'^2)(\dot q_1^+ - \dot q_1^-) + \varphi'(\dot q_2^+ - \dot q_2^-) = 0. \tag{21}$$

Недостающее уравнение следует из предположения об абсолютной упругости удара:

$$\dot q_2^+ = -\dot q_2^-. \tag{22}$$

Решив систему уравнений (21), (22), *получим*

$$\dot q_1^+ = \dot q_1^- + \frac{2\varphi'\dot q_2^-}{1+\varphi'^2}, \quad \dot q_2^+ = -\dot q_2^-. \tag{23}$$

Отсюда и из равенств (19) *находим*

$$\dot x^+ = \frac{1-\varphi'^2}{1+\varphi'^2}\dot x^- + \frac{2\varphi'}{1+\varphi'^2}\dot y^-, \quad \dot y^+ = \frac{2\varphi'}{1+\varphi'^2}\dot x^- - \frac{1-\varphi'^2}{1+\varphi'^2}\dot y^-. \tag{24}$$

Если обозначить через α *угол между касательной к кривой* $y=\varphi(x)$ *в точке соударения и осью* Ox, *то* $\varphi' = \operatorname{tg}\alpha$ *и равенства* (24) *можно записать более компактно:*

$$\dot x^+ = \cos 2\alpha \dot x^- + \sin 2\alpha \dot y^-,$$
$$\dot y^+ = \sin 2\alpha \dot x^- - \cos 2\alpha \dot y^-.$$

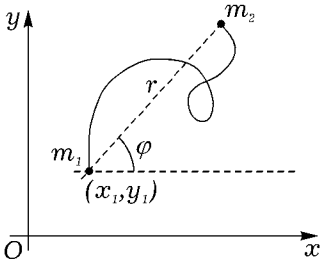

Рис. 163

Пример 2. *Две материальные точки масс* m_1 *и* m_2, *связанные невесомой нерастяжимой нитью длины* l, *движутся в плоскости* Oxy. *В некоторый момент нить натягивается. Зная состояние движения до удара, найти послеударное кинематическое состояние точек.*

Пусть x_i, y_i — *координаты точки массы* m_i $(i=1,\ 2)$, *а* φ, r — *полярные координаты, определяющие положение второй точки относительно первой* (рис. 163). *В качестве обобщенных координат примем величины*

$$q_1 = x_1, \quad q_2 = y_1, \quad q_3 = \varphi, \quad q_4 = l - r. \tag{25}$$

При ударе на систему точек накладывается связь $q_4 = 0$.

Учтя, что $x_2 = x_1 + r\cos\varphi$, $\quad y_2 = y_1 + r\sin\varphi$, *для кинетической энергии системы*

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot x_1^2 + \dot y_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot x_2^2 + \dot y_2^2)$$

можно получить следующее выражение

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}m_2\left[(l - q_4)^2\dot{q}_3^2 + \dot{q}_4^2 - \right.$$
$$\left. -2(l - q_4)\dot{q}_3(\dot{q}_1 \sin q_3 - \dot{q}_2 \cos q_3) - 2\dot{q}_4(\dot{q}_1 \cos q_3 + \dot{q}_2 \sin q_3)\right]. \tag{26}$$

Введя обозначение $\Delta\dot{q}_i = \dot{q}_i^+ - \dot{q}_i^-$ $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ *и выписав уравнения* (17) *для* $i = 1,\ 2,\ 3$, *получим*

$$\begin{gathered}(m_1 + m_2)\Delta\dot{q}_1 - m_2(l - q_4)\sin q_3\Delta\dot{q}_3 - m_2\cos q_3\Delta\dot{q}_4 = 0,\\ (m_1 + m_2)\Delta\dot{q}_2 + m_2(l - q_4)\cos q_3\Delta\dot{q}_3 - m_2\sin q_3\Delta\dot{q}_4 = 0,\\ \sin q_3\Delta\dot{q}_1 - \cos q_3\Delta\dot{q}_2 - (l - q_4)\Delta\dot{q}_3 = 0.\end{gathered} \tag{27}$$

Уравнения (27) *представляют собой систему трех уравнений относительно четырех неизвестных* $\dot{q}_i^+$ $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$. *Недостающее уравнение получим, приняв гипотезу о том, что до и послеударные величины* $\dot{r}^-$ *и* $\dot{r}^+$ *связаны соотношением* $\dot{r}^+ = -æ\dot{r}^-$, *или, на основании последнего из равенств* (25), $\dot{q}_4^+ = -æ\dot{q}_4^-$. *Это приводит к уравнению*

$$\Delta\dot{q}_4 = -(1 + æ)\dot{q}_4^-. \tag{28}$$

Принимая во внимание обозначения (25) *и считая, что во время удара угол* φ *равен* α, *из системы уравнений* (27), (28) *находим*

$$\begin{gathered}\dot{x}_1^+ = \dot{x}_1^- + \frac{(1 + æ)m_2\cos\alpha}{m_1 + m_2}\dot{r}^-,\\ \dot{y}_1^+ = \dot{y}_1^- + \frac{(1 + æ)m_2\sin\alpha}{m_1 + m_2}\dot{r}^-, \quad \dot{\varphi}^+ = \dot{\varphi}^-.\end{gathered} \tag{29}$$

Глава XIII
Интегральные вариационные принципы механики

§ 1. Принцип Гамильтона–Остроградского

217. Прямой и окольный пути голономной системы. В гл. III мы изучали дифференциальные вариационные принципы механики, которые дают критерий, позволяющий выделить истинное (действительное) движение механической системы среди других кинематически возможных ее движений для данного момента времени. В этой главе будут рассмотрены некоторые интегральные вариационные принципы. В отличие от дифференциальных принципов, интегральные вариационные принципы механики дают критерий истинного движения системы не для одного момента времени, а для некоторого конечного промежутка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Они характеризуют движение системы в целом, на всем этом промежутке времени.

Как и в гл. III, будем предполагать, что рассматриваемая механическая система или свободна, или подчинена идеальным удерживающим связям, но ограничимся только голономными системами[1]. Пусть a_ν и b_ν — возможные положения точки P_ν системы ($\nu = 1, 2, \ldots, N$) в моменты времени $t = t_0$ и $t = t_1$ соответственно. Положение системы в момент $t = t_0$ назовем ее *начальным*, а в момент $t = t_1$ — *конечным положениями*. Предположим, что в момент $t = t_0$ можно так выбрать скорости точек системы, что при $t = t_1$ точки P_ν займут их конечные положения. Совокупность траекторий, которые будут описаны точками системы при их перемещении из начальных положений a_ν в их конечные положения b_ν, образуют *истинный* (*действительный*) путь системы. Его также называют *прямым путем системы*.

На прямом пути точка P_ν системы описывает кривую γ_ν, соединяющую точки a_ν и b_ν. Совокупность соединяющих точки a_ν и b_ν кривых γ'_ν, бесконечно близких к соответствующим кривым γ_ν и таких,

[1] Вопрос о применимости интегральных вариационных принципов механики к неголономным системам имеет длительную и непростую историю. Библиографию по этому вопросу и основные результаты см. в статье: Румянцев В. В. Об интегральных принципах для неголономных систем // ПММ, 1982, Т. 46, вып. 1, С. 3–12.

что движение точки P_ν по кривой γ'_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$) может происходить без нарушения связей, *называют окольным путем системы.* На рис. 164 сплошная линия соответствует прямому пути, а штриховые — окольным. Всюду в дальнейшем будем считать, что движение всех точек P_ν по окольным путям начинается одновременно при $t = t_0$ и оканчивается при $t = t_1$, т. е. движение системы по окольному пути начинается и оканчивается в те же моменты времени, что и движение но прямому пути.

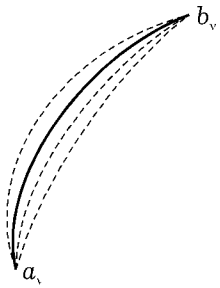

Рис. 164

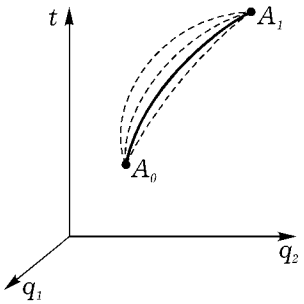

Рис. 165

Для голономной системы прямые и окольные пути удобно представлять в расширенном координатном пространстве, где координатами являются обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и время t. Пусть точка A_0 этого пространства отвечает начальному положению системы, а A_1 — ее конечному положению. Движениям системы из ее начального положения в конечное будут отвечать кривые, соединяющие точки A_0 и A_1. На рис. 165 (для $n = 2$) сплошной линией показан прямой путь системы, а штриховыми линиями — окольные пути. В расширенном координатном пространстве за окольный путь может быть принята любая бесконечно близкая к прямому пути кривая, соединяющая точки A_0 и A_1; любая такая кривая представляет собой кинематически возможный путь, так как обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$ всегда выбираются именно так, что геометрические связи, наложенные на систему, удовлетворяются тождественно (п. 14), а других связей у голономной системы нет.

Отметим, что задача о построении прямого пути, соединяющего начальную и конечную точки A_0 и A_1, не является простой. Она приводит к рассмотрению краевой задачи для системы дифференциальных уравнений порядка $2n$, описывающей движение изучаемой механической системы. Если точка A_0 соответствует значениям обобщенных координат $q_1^0, q_2^0, \ldots, q_n^0$, а точка A_1 — значениям $q_1^1, q_2^1, \ldots, q_n^1$, то ре-

шение $q_i(t)$ дифференциальных уравнений движения должно удовлетворять краевым условиям

$$q_i(t_0) = q_i^0, \quad q_i(t_1) = q_i^1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Краевая задача может иметь единственное решение, а может не иметь ни одного решения; она может иметь несколько или даже бесконечное множество решений.

Если точки A_0 и A_1 достаточно близки, то решение упомянутой задачи либо единственно, либо она имеет только конечное число решений. Для наших целей второй случай сводится к первому в том смысле, что среди конечного числа прямых путей можно взять какой-то один и рассмотреть его окрестность, достаточно малую, чтобы она не содержала точек других прямых путей, отвечающих значениям t из интервала $t_0 < t < t_1$. Окольные пути затем следует проводить именно в этой малой окрестности выбранного прямого пути.

При достаточном удалении точки A_1 от точки A_0 может оказаться, что краевая задача имеет решения, соответствующие бесконечно близким прямым путям, проходимым механической системой за одно и то же время $t_1 - t_0$. В этом случае точки A_0 и A_1 расширенного координатного пространства называют *сопряженными кинетическими фокусами.*

Рассмотрим, например, одномерный гармонический осциллятор, движение которого описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{q} + q = 0.$$

Через точки $(0, 0)$ и $(0, \pi)$ расширенного координатного пространства q, t проходят бесконечно близкие один к другому прямые пути, задаваемые равенством

$$q = c \sin t,$$

где c — произвольная постоянная. Точки $(0, 0)$ и $(0, \pi)$ — сопряженные кинетические фокусы. Напротив, через точки $(0, 0)$ и (q^1, t_1) при $q^1 > 0$, $t_1 < \pi$ можно провести только один прямой путь.

Мы будем рассматривать не вполне произвольные окольные пути, а те из них, которые получаются из прямого пути при помощи синхронного варьирования.

Пусть g_ν — положение, которое занимает в момент времени t точка P_ν системы при ее движении по прямому пути γ_ν, соединяющему начальное и конечное положения a_ν и b_ν этой точки (рис. 166). В момент времени t дадим точке P_ν произвольное виртуальное перемещение $\delta \boldsymbol{r}_\nu$ из ее положения g_ν. Тогда точка P_ν займет положение g'_ν. Если эту

процедуру проделать для всех положений g_ν точки P_ν на кривой γ_ν при $t_0 < t < t_1$ и через получающиеся при варьировании точки g'_ν провести кривую, соединяющую положения a_ν и b_ν, то эта кривая и будет окольным путем. Соответствующие одна другой точки g_ν и g'_ν на прямом и окольном путях проходятся в одни и те же моменты времени. В декартовых координатах положение точки P_ν на прямом пути задается радиусом-вектором $\boldsymbol{r}_\nu(t)$, а на окольном — радиусом-вектором $\boldsymbol{r}_\nu(t)+\delta\boldsymbol{r}_\nu(t)$, где вектор-функции $\delta\boldsymbol{r}_\nu(t)$ удовлетворяют условию $\delta\mathbf{r}_\nu(t_0) = 0$, $\delta\boldsymbol{r}_\nu(t_1) = 0$, $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$. Кроме того, будем предполагать, что $\delta\boldsymbol{r}_\nu(t)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция.

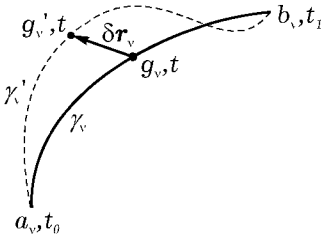

Рис. 166

Нам потребуется сравнить между собой не только прямой и окольный пути, но и скорости $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ точек P_ν на прямом пути с соответствующими их скоростями $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu + \delta\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ на окольном пути для одного и того же момента времени. Покажем, что операции синхронного варьирования и дифференцирования по времени перестановочны, т. е.

$$\delta\dot{\boldsymbol{r}}_\nu = \frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{r}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N). \tag{1}$$

В самом деле, по определению скорости, на окольном пути имеем

$$\dot{\boldsymbol{r}}_\nu + \delta\dot{\boldsymbol{r}}_\nu = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_\nu + \delta\boldsymbol{r}_\nu) = \dot{\boldsymbol{r}}_\nu + \frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{r}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N),$$

откуда и следует равенство (1). Аналогично, если в расширенном координатном пространстве прямой путь задается уравнениями

$$q_i = q_i(t),\ q_i(t_0) = q_i^0,\ q_i(t_1) = q_i^1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

то окольные пути получаются из прямого при помощи виртуальных перемещений $\delta q_i(t)$ и задаются уравнениями

$$q_i = q_i(t) + \delta q_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

где

$$\delta q_i(t_0) = 0, \quad \delta q_i(t_1) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Величины $\delta q_i(t)$ предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями t. Они удовлетворяют равенствам, аналогичным (1):

$$\delta\dot{q}_i = \frac{d}{dt}\delta q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

218. Принцип Гамильтона–Остроградского. Итак, рассмотрим прямой путь голономной системы и совокупность окольных путей, получающихся из прямого пути при помощи синхронного варьирования и совпадающих с ним в начальный и конечный моменты времени t_0 и t_1.

Пусть m_ν — масса точки P_ν, а $\boldsymbol{F}_\nu$ — равнодействующая всех активных сил, приложенных к этой точке. Интегрирование общего уравнения динамики

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu)\cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0 \tag{6}$$

дает равенство

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_\nu\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu\,dt - \sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\int\limits_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{w}_\nu\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu\,dt = 0. \tag{7}$$

Рассмотрим разность между значениями кинетической энергии системы в момент времени t на окольном и прямом путях

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu(\dot{\boldsymbol{r}}_\nu + \delta\dot{\boldsymbol{r}}_\nu)^2 - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\dot{\boldsymbol{r}}_\nu^2.$$

С точностью до величин первого порядка малости включительно относительно $|\delta\boldsymbol{r}_\nu|$ для этой разности получаем выражение

$$\delta T = \sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\dot{\boldsymbol{r}}_\nu\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}_\nu.$$

Отсюда

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\delta T\,dt = \sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\int\limits_{t_0}^{t_1}\dot{\boldsymbol{r}}_\nu\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}_\nu\,dt. \tag{8}$$

Используя равенство (1) и производя интегрирование по частям, преобразуем это соотношение к виду

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\delta T\,dt = \sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\int\limits_{t_0}^{t_1}\dot{\boldsymbol{r}}_\nu\cdot d\delta\boldsymbol{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\dot{\boldsymbol{r}}_\nu\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu\Bigg|_{t_0}^{t_1} - \sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\int\limits_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{w}_\nu\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu\,dt.$$

Но так как $\delta\boldsymbol{r}_\nu(t_0) = \delta\boldsymbol{r}_\nu(t_1) = 0$, то окончательно имеем

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\delta T\,dt = -\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\int\limits_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{w}_\nu\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu\,dt. \tag{9}$$

Это соотношение позволяет переписать равенство (7) в следующем окончательном виде:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\delta T + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu \right) dt = 0. \tag{10}$$

Равенство (10) является математическим выражением принципа Гамильтона–Остроградского, который заключается в том, что *интеграл* (10) *равен нулю, если величины* $\delta \boldsymbol{r}_\nu(t)$ *соответствуют синхронному варьированию прямого пути и* $\delta \boldsymbol{r}_\nu(t_0) = \delta \boldsymbol{r}_\nu(t_1) = 0$.

Таким образом, на прямом пути голономной системы интеграл (10) равен нулю. Покажем, что, наоборот, если на каком-то кинематически возможном пути интеграл (10) равен нулю, то этот путь — прямой. Для этого достаточно убедиться в том, что из принципа Гамильтона–Остроградского (10) вытекают уравнения Лагранжа второго рода.

Замечая, что

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{i=1}^{N} Q_i \delta q_i,$$

где Q_i — обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_i, и что

$$\delta T = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right),$$

перепишем равенство (10) в виде

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i \right) \delta q_i \right] dt = 0. \tag{11}$$

Используя соотношения (5), интегрируя по частям и учитывая, что $\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0$, имеем

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} d\delta q_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_1} - \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i dt = - \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i dt.$$

Поэтому равенство (11) переходит в следующее:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right) \delta q_i \, dt = 0. \tag{12}$$

Величины δq_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ независимы и произвольны. Используя это, покажем, что каждое из выражений в круглых скобках в формуле (12) равно нулю. Для этого положим, что $\delta q_1 = \ldots = \delta q_{k-1} = \delta q_{k+1} = \ldots = \delta q_n = 0$, а $\delta q_k \neq 0$. Тогда равенство (12) сводится к равенству

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right) \delta q_k \, dt = 0. \tag{13}$$

Пусть[1] выражение в круглых скобках в формуле (13) не равно нулю при $t = t_*$ из интервала $t_0 < t < t_1$. Тогда в силу непрерывности существует окрестность $-\varepsilon + t_* < t < t_* + \varepsilon$, лежащая в интервале $t_0 < t < t_1$, в которой круглая скобка из (13) сохраняет знак. Произвольную функцию $\delta q_k(t)$ выберем так, чтобы она вне окрестности $-\varepsilon + t_* < t < t_* + \varepsilon$ была равна нулю, а в самой этой окрестности сохраняла знак. Тогда равенство (13) перепишется в виде

$$\int\limits_{t_*-\varepsilon}^{t_*+\varepsilon} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right) \delta q_k dt = 0.$$

Но так как при упомянутом выборе функции $\delta q_k(t)$ подынтегральное выражение сохраняет знак в окрестности $-\varepsilon + t_* < t < t_* + \varepsilon$, то последнее равенство невозможно. Отсюда следует, что при всех t из интервала $t_0 < t < t_1$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k.$$

Проведенные рассуждения справедливы для любого k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Поэтому из принципа Гамильтона — Остроградского следуют уравнения Лагранжа второго рода. Следовательно, этот принцип может быть положен в основу динамики голономных систем.

219. Принцип Гамильтона–Остроградского для систем в потенциальном поле сил. В потенциальном поле сил

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = -\delta \Pi, \tag{14}$$

[1] Приводимое далее доказательство обращения в нуль выражения в круглых скобках формулы (13) является стандартным. Оно лежит в основе доказательства так называемой *основной леммы вариационного исчисления* (см. лемму 1 в §3 учебника: Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление, М. : Физматгиз, 1961).

где $\Pi = \Pi(q_1, \ldots, q_n, t)$ — потенциальная энергия системы. Тогда формула (10) дает

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta \Pi)\, dt = 0.$$

Так как функция Лагранжа имеет вид $L = T - \Pi$, то отсюда следует, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L\, dt = 0. \tag{15}$$

Рассмотрим интеграл

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt. \tag{16}$$

Этот интеграл называется *действием по Гамильтону.* Так как L — функция q_i, $\dot{q}_i$, t, то для вычисления величины S нужно задать функции $q_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ в промежутке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, т. е. действие S является функционалом, зависящим от движения системы.

Используя обозначение (16) и учитывая неизменность t_0 и t_1 при переходе от прямого пути к окольному и от окольного пути к другому окольному, перепишем равенство (15) в виде

$$\delta S = 0. \tag{17}$$

Это равенство выражает принцип Гамильтона–Остроградского для голономной системы в случае существования потенциала сил: *среди всех (сравниваемых) путей прямой путь выделяется тем, что для него действие по Гамильтону имеет стационарное значение (т. е. первая вариация δS на прямом пути равна нулю).*

Будет ли действие принимать экстремальное значение на прямом пути, т. е. будет ли значение интеграла (16), вычисленное на прямом пути, наименьшим или наибольшим по сравнению с его значениями на окольных путях? Ответ на этот вопрос будет получен в следующем пункте, а сейчас рассмотрим пример, показывающий, что в некоторых случаях действие по Гамильтону на прямом пути имеет меньшее значение, нежели на окольном.

Пример 1 (Движение материальной точки в однородном поле тяжести[1]). *Пусть материальная точка массой m брошена под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Пусть движение происходит в плоскости Oxz. Траекторией точки будет парабола*

$$z = v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2, \qquad x = v_0 \cos\alpha t. \tag{18}$$

В момент времени

$$t_1 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}, \tag{19}$$

где g — ускорение свободного падения, материальная точка пересечет ось Ox в точке B (рис. 167), *причем пройденное ею расстояние вдоль оси Ox*

$$OB = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}. \tag{20}$$

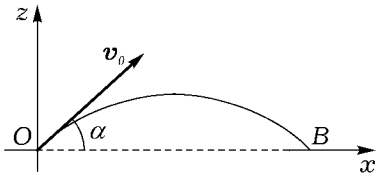

Рис. 167

Таким образом, в рассматриваемом примере на прямом пути точка описывает в плоскости Oxz параболу за время t_1.

Это движение будем сравнивать с прямолинейным равномерным движением точки из положения O в положение B. Окольный путь будет отрезком OB оси Ox. Так как в принципе Гамильтона–Остроградского время движения из начального положения системы в ее конечное положение для прямого и окольного путей должно быть одинаковым, то в рассматриваемом равномерном прямолинейном движении скорость v должна быть равна $v_0 \cos\alpha$.

Для обоих движений

$$\Pi = mgz. \tag{21}$$

Для параболического движения

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - mgz = \frac{1}{2}m(v_0^2 - 4v_0 \sin\alpha gt + 2g^2t^2),$$

для прямолинейного движения

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \cos^2\alpha.$$

[1] См.: Слудский Ф. А. Заметка о начале наименьшего действия // Вариационные принципы механики/Под ред. Л. С. Полака, М.; Физматгиз, 1959. С. 388–391.

Для параболического движения

$$S = \int_0^{t_1} L\,dt = \frac{mv_0^3 \sin\alpha}{g}\left(1 - \frac{4}{3}\sin^2\alpha\right), \tag{22}$$

а для движения по прямой

$$S = \frac{mv_0^3 \sin\alpha}{g}(1 - \sin^2\alpha). \tag{23}$$

При любом α (в том числе и при достаточно малых α, когда прямой и окольные пути могут быть сколь угодно близкими) величина (22) *меньше величины* (23), *т. е. действие по Гамильтону на прямом пути меньше, чем на окольном.*

220. Экстремальное свойство действия по Гамильтону. Рассмотрим окрестность начального положения системы, достаточно малую, чтобы в ней отсутствовали сопряженные кинетические фокусы. Тогда можно считать (п. 217), что за заданное время $t_1 - t_0$ система может перейти из своего начального положения в конечное положение, расположенное в выбранной окрестности, только по одному прямому пути. Покажем, что в этом случае действие по Гамильтону на прямом пути будет наименьшим по сравнению с его значениями на окольных путях системы.

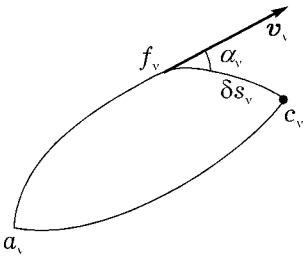

Рис. 168

Для доказательства воспользуемся геометрическим методом Жуковского[1]. Траектории точек P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$) системы будем рассматривать в трехмерном евклидовом пространстве. Пусть a_ν — начальное положение точки P_ν, а f_ν и c_ν — ее положения на каких-либо двух различных кинематически возможных путях, по которым система за одно и то же время $t - t_0$ переходит из начального положения в положение, отвечающее моменту времени t (рис. 168). При этом $t_0 < t < t_1$, а промежуток времени $t - t_0$, вообще говоря, мал, чтобы за время $t - t_0$ система не могла выйти из выбранной малой окрестности ее начального положения.

Пусть $[af]$ и $[ac]$ — действия по Гамильтону на этих путях системы,

[1] См.: Жуковский Н. Е. О начале наименьшего действия // Собр. соч. Т. 1. М.; Л.: Гостехизат,1948. С. 51–57.

т. е.

$$[af] = \int\limits_{t_0}^{t} (T - \Pi)\, dt, \quad [ac] = \int\limits_{t_0}^{t} (T - \Pi)\, dt, \tag{24}$$

причем первый и второй интегралы вычисляются на путях, по которым точки P_ν переходят из положений a_ν в положения f_ν и c_ν соответственно. Для разности $[ac] - [af]$ с точностью до величин первого порядка включительно относительно $|\delta \boldsymbol{r}_\nu|$ и $|\delta \dot{\boldsymbol{r}}_\nu|$ имеем выражение

$$[ac] - [af] = \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{\nu=1}^{N} \left(m_\nu \boldsymbol{v}_\nu \cdot \delta \dot{\boldsymbol{r}}_\nu - \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu \right) dt,$$

где $\boldsymbol{v}_\nu$ и $\partial \Pi / \partial \boldsymbol{r}_\nu$ вычисляются на пути $a_\nu f_\nu$. Учитывая, что $\boldsymbol{F}_\nu = -\partial \Pi / \partial \boldsymbol{r}_\nu$, интегрируя по частям и пользуясь тем, что $\delta \boldsymbol{r}_\nu(t_0) = 0$, имеем

$$[ac] - [af] = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu(t) \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu) \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu \, dt.$$

Учитывая общее уравнение динамики (6), это соотношение можно переписать окончательно в таком виде:

$$[ac] - [af] = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu \cos \alpha_\nu \delta s_\nu. \tag{25}$$

Здесь $\boldsymbol{v}_\nu$ — скорость точки P_ν в момент времени t, когда она занимает положение f_ν, α_ν — угол между $\boldsymbol{v}_\nu$ и $\delta \boldsymbol{r}_\nu$, а δs_ν — длина дуги $f_\nu c_\nu$.

Пусть b_ν — положение точки P_ν, в конечный момент времени t_1 движения системы, а γ_ν и γ'_ν — кривые, по которым перемещается точка P_ν при движении системы соответственно по прямому и любому из окольных путей (рис. 169). Сравним действие по Гамильтону на прямом и окольном путях. Для этого возьмем на пути γ'_ν точку c_ν, отвечающую моменту времени t, где $t_0 < t < t_1$, а также бесконечно близкую ей точку e_ν, отвечающую моменту $t + dt$. Проведем траектории $a_\nu c_\nu$ для некоторого вспомогательного действительного движения точек P_ν, при котором они за время $t - t_0$ приходят из начальных положений a_ν в их положения c_ν, расположенные на кривой γ'_ν, отвечающей окольному пути. Аналогично, пусть кривые $a_\nu e_\nu$ будут траекториями еще одного вспомогательного движения, при котором точки P_ν за время $t + dt - t_0$ приходят из положений a_ν в положения e_ν на кривой γ'_ν. И вообще проведем траектории таких вспомогательных действительных движений для всех положений точек P_ν на кривой γ'_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$).

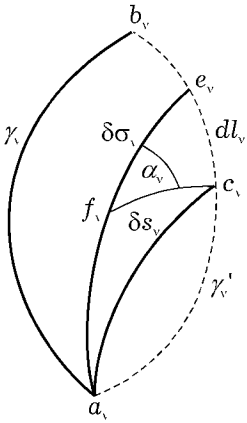

Рис. 169

Пусть f_ν — положение, которое занимает точка P_ν в момент времени t при ее движении по вспомогательной действительной траектории $a_\nu e_\nu$. Таким образом, дуги $a_\nu f_\nu$ и $a_\nu c_\nu$ двух вспомогательных действительных траекторий и дуга $a_\nu c_\nu$, являющаяся частью кривой γ_ν', отвечающей окольному пути, проходятся точкой P_ν за одно и то же время $t - t_0$. Поэтому дуга $f_\nu e_\nu$ на вспомогательной траектории и дуга $c_\nu e_\nu$ кривой γ_ν' проходятся также за одинаковое время, причем это время равно dt.

Обозначим длины дуг $f_\nu e_\nu$ и $c_\nu e_\nu$ соответственно $d\sigma_\nu$ и dl_ν. Из бесконечно малого треугольника $c_\nu f_\nu e_\nu$ (рис. 169) получим

$$dl_\nu^2 = d\sigma_\nu^2 + \delta s_\nu^2 - 2d\sigma_\nu \delta s_\nu \cos\alpha_\nu.$$

Умножим обе части этого равенства на m_ν и просуммируем по всем точкам системы. Замечая затем, что по предположению в рассматриваемой малой окрестности начального положения системы кинетических фокусов нет и, следовательно, среди величин δs_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$) хотя бы одна отлична от нуля, получаем неравенство

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu dl_\nu^2 > \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu d\sigma_\nu^2 - 2\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu d\sigma_\nu \cos\alpha_\nu \delta s_\nu. \tag{26}$$

Если T' — кинетическая энергия системы при ее движении по окольному пути, а T — кинетическая энергия системы при движении ее точек P_ν по дугам $f_\nu e_\nu$, отвечающим вспомогательному действительному движению, то

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu dl_\nu^2 = 2T'dt^2, \quad \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu d\sigma_\nu^2 = 2Tdt^2. \tag{27}$$

Так как $d\sigma_\nu/dt = v_\nu$, то, используя формулы (27), неравенство (26) можно написать в виде

$$T'\,dt > T\,dt - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu \cos\alpha_\nu \delta s_\nu. \tag{28}$$

Вычтем из обеих частей величину Πdt и воспользуемся равенством (25). Получим

$$(T' - \Pi)dt > (T - \Pi)dt + [af] - [ac]. \tag{29}$$

Так как

$$(T - \Pi)dt = [fe], \qquad [fe] + [af] - [ac] = [ae] - [ac],$$

то правая часть неравенства (29) равна дифференциалу dS действия по Гамильтону при переходе от одной действительной траектории к другой, когда время движения увеличивается на dt. Поэтому

$$(T' - \Pi)dt > dS. \tag{30}$$

Интегрируя это неравенство от $t = t_0$ до $t = t_1$ и вводя обозначения $S_{\text{пр}}$ и $S_{\text{ок}}$ для действия по Гамильтону на прямом и окольном путях системы, получим

$$S_{\text{ок}} > S_{\text{пр}}. \tag{31}$$

Таким образом показано, что *если начальное и конечное положения системы достаточно близки, то действие по Гамильтону на прямом пути имеет минимальное значение по сравнению с его значениями на окольных путях, проходимых за то же время*[1].

Пусть точки A_0 и A_1 расширенного координатного пространства отвечают начальному и конечному положениям системы (рис. 165). Если точки A_0 и A_1 достаточно близки, то действие S на прямом пути имеет минимум. Выясним, насколько близкими должны быть точки A_0 и A_1, чтобы на прямом пути действие оставалось минимальным[2]. На прямом пути A_0A_1 первая вариация δS действия по Гамильтону всегда равна нулю. Если точка A_1 близка к точке A_0, то в силу минимальности действия вторая вариация $\delta^2 S$ на прямом пути положительна[3]. Будем удалять точку A_1 от точки A_0.

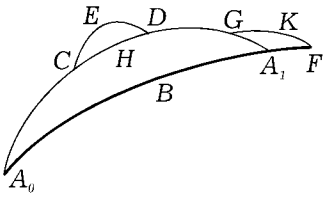

Рис. 170

Пусть t_1^* — то значение t_1, при котором вариация $\delta^2 S$, вычисленная на окольном пути A_0HA_1, в первый раз обращается в нуль (рис. 170). Следовательно, действия по Гамильтону на путях A_0HA_1 и A_0BA_1 равны с точностью до членов второго порядка включительно относительно величин $|\delta q_i|$, $|\delta \dot{q}_i|$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$S_{A_0HA_1} = S_{A_0BA_1}. \tag{32}$$

[1] По этой причине принцип Гамильтона–Остроградского часто называют *принципом наименьшего действия.*

[2] См. шестую лекцию в книге: Якоби К. Лекции по динамике. М.;Л.: ОНТИ, 1936, а также гл. 12 книги: Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1960.

[3] Мы не рассматриваем те исключительные случаи, когда вопрос об экстремальности S решается с привлечением вариаций более высокого порядка.

Покажем, что на самом деле A_0HA_1 — прямой путь, т. е. A_0 и A_1 — сопряженные кинетические фокусы. Предположим, что это не так, т. е. что путь A_0HA_1 не является прямым. Тогда возьмем на нем точки C и D и соединим их прямым путем CED. По доказанному выше для достаточно близких точек C и D

$$S_{CED} < S_{CHD}. \tag{33}$$

Отсюда и из (32) следует, что

$$S_{A_0CEDA_1} < S_{A_0CHDA_1} = S_{A_0BA_1}. \tag{34}$$

Это неравенство противоречит предположению о том, что A_1 есть первое положение на прямом пути A_0BA_1, при котором вторая вариация $\delta^2 S$ обращается в нуль при надлежащем выборе окольного пути, проходящего через A_0 и A_1.

Проведенное рассуждение показывает, что *если конечная точка A_1 лежит перед кинетическим фокусом, сопряженным с начальной точкой A_0, то действие по Гамильтону на прямом пути A_0A_1 имеет минимум.*

Пусть теперь A_1 — сопряженный кинетический фокус для точки A_0, а конечная точка прямого пути F лежит за точкой A_1 (рис. 170). Здесь уже действие на прямом пути A_0BA_1F не будет минимальным. Для доказательства укажем такой окольный путь, на котором действие по Гамильтону меньше, чем на пути A_0BA_1F. Для этого на ранее построенном прямом пути A_0HA_1 возьмем точку G, настолько близкую к F, чтобы действие на соединяющем эти точки прямом пути GKF было минимальным. Тогда

$$S_{GKF} < S_{GA_1} + S_{A_1F}. \tag{35}$$

Отсюда и из (32) получаем

$$\begin{aligned} S_{A_0HGKF} &= S_{A_0HG} + S_{GKF} < S_{A_0HG} + S_{GA_1} + S_{A_1F} = \\ &= S_{A_0HA_1} + S_{A_1F} = S_{A_0BA_1} + S_{A_1F} = S_{A_0BA_1F}, \end{aligned}$$

т. е. действие на построенном окольном пути меньше, чем на прямом. Поэтому действие на прямом пути не имеет минимума. Оно не может иметь и максимума, так как на малых участках прямого пути A_0BA_1F действие минимально. Таким образом, если фокус, сопряженный с начальной точкой, лежит перед конечной точкой прямого пути, то действие по Гамильтону не имеет на прямом пути ни минимума, ни максимума.

Пример 1 (Движение материальной точки по инерции на сфере). *Пусть точка движется, оставаясь все время на неподвижной сфере и никакие активные силы на точку не действуют. Если m — масса точки, а R — радиус сферы, то в сферических координатах* (рис. 134)

$$T = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2), \qquad \Pi = 0.$$

На прямом пути выполняются уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \text{const}$$

(φ — *циклическая координата*). *Так как $L = T - \Pi = T$, то отсюда следует, что*

$$\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 = 0, \quad \sin^2\theta\dot{\varphi} = \sin^2\theta_0\dot{\varphi}_0. \tag{36}$$

Без ограничения общности можно считать, что на прямом пути вектор $\boldsymbol{v}$ начальной скорости точки направлен по меридиану ($\varphi = \text{const}$), *т. е.* $\dot{\varphi}_0 = 0$. *Тогда из* (36) *следует, что во все время движения*

$$\dot{\varphi} = 0, \qquad \dot{\theta} = \text{const}$$

и, следовательно, $v^2 = R^2\dot{\theta}^2 = \text{const}$. *Это означает, что прямой путь представляет собой дугу большого круга, по которой точка движется с постоянной скоростью* $v = v_{\text{пр}}$. *При этом*

$$L = \frac{1}{2}mv^2$$

и

$$S_{\text{пр}} = \int\limits_{t_0}^{t_1} L\,dt = \frac{mv_{\text{пр}}^2}{2}(t_1 - t_0) = \frac{ml_{\text{пр}}^2}{2(t_1 - t_0)}, \tag{37}$$

где $l_{\text{пр}}$ — длина дуги, пройденной точкой на прямом пути за время $t_1 - t_0$.

Кинетическим фокусом, сопряженным с произвольной начальной точкой A, является диаметрально противоположная точка A^* на сфере, так как два больших круга, проходящих через A, пересекаются только в A^*.

Пусть скорость движения по окольному пути, соединяющему две точки A и B, постоянна и равна $v_{\text{ок}}$. Тогда

$$S_{\text{ок}} = \frac{ml_{\text{ок}}^2}{2(t_1 - t_0)}. \tag{38}$$

Из (37), (38) *и рассмотренного выше экстремального свойства действия по Гамильтону следует, что проходящая через A и B дуга большого круга является кратчайшей среди кривых, соединяющих A и B, если точка A^* не лежит на этой дуге, т. е. если дуга меньше половины окружности большого круга.*

Упражнение 1. *В примере п.* 217 *построить окольный путь, на котором действие по Гамильтону меньше, чем на прямом пути.*

§ 2. Принцип Мопертюи–Лагранжа

221. Изоэнергетическое варьирование. Рассмотрим голономную консервативную или обобщенно консервативную систему. Ее функция Гамильтона не зависит от времени, и существует обобщенный интеграл энергии

$$H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = h. \tag{1}$$

Движение системы будем представлять в n-мерном координатном пространстве $q_1, \ldots, q_n$ [1]. Пусть A_0 и A_1 — точки этого пространства, задаваемые соответственно координатами q_i^0 и q_i^1 $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Пусть в начальный момент времени $t = t_0$ система занимает положение, отвечающее точке A_0, и обобщенные скорости $\dot{q}_i$ (а, следовательно, и обобщенные импульсы p_i) могут быть выбраны так, что при $t = t_1$ система займет положение, отвечающее точке A_1. Проходящую через точки A_0 и A_1 кривую

$$q_i = q_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

вдоль которой удовлетворяются дифференциальные уравнения движения, назовем *прямым путем системы* (см. рис. 171, где $n = 3$). На прямом пути функция Гамильтона постоянна и равна h, где величина h определяется начальными условиями.

Наряду с прямым путем рассмотрим другие кинематически возможные пути, бесконечно близкие к прямому. Эти пути будем называть *окольными путями*, если они: 1) проходят через одни и те же начальные и конечные положения A_0 и A_1; 2) вдоль каждого окольного пути функция Гамильтона постоянна и равна величине h, отвечающей прямому пути.

[1] А не в расширенном $(n+1)$-мерном координатном пространстве, как это было при изучения принципа Гамильтона–Остроградского в предыдущем параграфе.

При таком изоэнергетическом варьировании время $t_1 - t_0$ перехода системы из начального положения в конечное не обязательно одинаково для прямого и окольных путей. Пусть, например, материальная точка массой m движется в отсутствие сил в плоскости Oxy. За движение по прямому пути примем прямолинейное движение вдоль оси Ox. В начальный момент времени $t = 0$ точка находится в начале координат O. Тогда на прямом пути $x = \sqrt{\frac{2h}{m}}t$. Из интеграла энергии $\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = h$ следует,

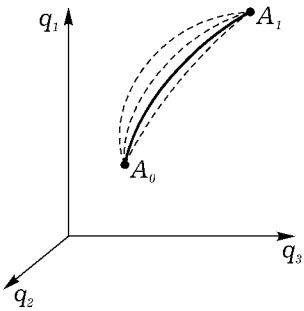

Рис. 171

что на окольном пути выполняется неравенство $\dot{x} \leqslant \sqrt{\frac{2h}{m}}$. Следовательно, по окольному пути невозможно прийти за одинаковое время t_1 в то же положение, что и на прямом пути, если постоянная h одинакова для прямого и окольного путей.

Рассматриваемый в этом параграфе принцип Мопертюи–Лагранжа дает критерий, позволяющий выделить прямой путь среди всех окольных, удовлетворяющих упомянутым выше свойствам 1 и 2.

222. Принцип Мопертюи–Лагранжа. При заданной константе энергии h уравнения движения консервативной или обобщенно консервативной системы могут быть записаны в форме уравнений Якоби (см. уравнения (36) п. 152). Эти уравнения имеют форму уравнений Лагранжа второго рода, где в качестве функции Лагранжа L выступает функция Якоби P, а роль независимой переменной играет обобщенная координата q_1. По аналогии с действием S по Гамильтону введем[1] *действие по Лагранжу*:

$$W = \int\limits_{q_1^0}^{q_1^1} P\, dq_1. \tag{3}$$

В предыдущем параграфе показано, что уравнения Лагранжа второго рода эквивалентны принципу Гамильтона–Остроградского, выражающемуся в стационарности действия по Гамильтону на прямом пути системы (см. равенство (17) п. 219). Аналогично, уравнения Якоби эк-

[1]См. §20 книги: Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966.

вивалентны условию стационарности действия по Лагранжу

$$\delta W = 0. \tag{4}$$

Равенство (4) выражает принцип Мопертюи–Лагранжа, заключающийся в том, что *среди всех кинематически возможных путей, удовлетворяющих условиям, описанным в предыдущем пункте, прямой путь выделяется тем, что для него действие по Лагранжу имеет стационарное значение.*

Вопрос об экстремальных свойствах действия по Лагранжу решается точно так же, как и для принципа Гамильтона–Остроградского при помощи рассмотрения сопряженных кинетических фокусов.

Отметим, что в интеграле (3) полностью исключено время, и принцип (4) содержит только геометрические элементы. В такой форме принцип Мопертюи–Лагранжа впервые был представлен Якоби. Поэтому приведенную выше формулировку принципа Мопертюи–Лагранжа часто называют *принципом наименьшего действия Якоби.*

Пусть система консервативна. Тогда функция Якоби P вычисляется по формуле (38) п. 152 и действие по Лагранжу может быть преобразовано к виду

$$W = \int\limits_{q_1^0}^{q_1^1} \frac{2T}{\dot{q}_1} dq_1 = \int\limits_{t_0}^{t_1} 2T\, dt. \tag{5}$$

При применении принципа Мопертюи–Лагранжа в форме (4), (5) следует помнить, что в (5) время t_1 не фиксируется, а может изменяться при переходе от прямого пути к окольному и от одного окольного пути к другому окольному. Кроме того, полная энергия $T + \Pi$ одна и та же на всех сравниваемых путях.

Выражение (5) для действия по Лагранжу можно записать иначе:

$$W = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2\, dt = \sum_{\nu=1}^{N} \int\limits_{s_\nu^0}^{s_\nu^1} m_\nu v_\nu\, ds_\nu, \tag{6}$$

т. е. *для консервативной системы действие по Лагранжу равно сумме работ количеств движения точек системы на соответствующих их перемещениях.*

Пример 1 (Движение материальной точки по инерции на гладкой поверхности[1]). *Пусть материальная точка массой m движется по гладкой неподвижной поверхности под влиянием начального толчка в*

[1] См. упомянутую книгу К. Якоби «Лекции по динамике».

отсутствие поля сил ($\Pi = 0$). *Тогда* $v = v_0 = \text{const}$ *и из* (6) *получаем, что*

$$W = mv_0 l,$$

где l — *пройденный точкой путь. Из принципа Якоби следует, что* $\delta l = 0$, *т. е. движение точки на поверхности происходит по геодезической кривой*[1].

Если начальная и конечная точки A_0 *и* A_1 *близки одна к другой, то действие* W *минимально и геодезическая является кратчайшей кривой, лежащей на поверхности и соединяющей точки* A_0 *и* A_1.

Вопрос о минимальности действия решается в каждом конкретном случае при помощи привлечения кинетических фокусов. Если точка движется по развертывающейся поверхности (т. е. по поверхности, которую после изгибания можно наложить на плоскость), например по конусу или цилиндру, то действие W *на прямом пути обязательно будет минимальным, так как на плоскости прямые, проходящие через одну и ту же точку, никогда вновь не пересекаются (и, следовательно, кинетические фокусы отсутствуют).*

Пример 2 (Движение материальной точки в однородном поле тяжести[2]). *Эта задача была рассмотрена в п.* 219 *для иллюстрация принципа Гамильтона–Остроградского. Здесь мы ее применяем для иллюстрации принципа Мопертюи–Лагранжа, что поможет яснее представить разницу между этими принципами.*

Прямой путь представляет собой параболу, задаваемую уравнением (18) *п.* 219. *За окольный путь опять примем отрезок* OB, *лежащий на оси* Ox (рис. 167). *Угол* α *считаем малым, так что прямой и окольный пути близки один к другому. Для обоих движений* $\Pi = mgz$.

Так как полная механическая энергия $T + \Pi$ *должна быть одинаковой для прямого и окольного путей, то начальные скорости точки для обоих движений одинаковы и равны* v_0. *Но если на прямом пути время* t_1 *движения точки определяется равенством* (19) *п.* 219, *то для окольного пути оно будет иным и вычисляется по формуле*

$$t_1 = \frac{OB}{v_0} = \frac{2v_0 \sin\alpha \cos\alpha}{g}. \tag{7}$$

Для параболического движения

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(v_0^2 - 2v_0 \sin\alpha g t + g^2 t^2),$$

[1] *Геодезическая кривая* характеризуется тем, что ее длина имеет стационарное значение по сравнению с длинами других кривых, имеющих с геодезической одни и те же концы.

[2] См. упомянутую работу Ф. В. Слудского «Заметка о начале наименьшего действия».

а для прямолинейного движения

$$T = \frac{1}{2} m v_0^2.$$

Действие по Лагранжу для движения по параболе

$$W = 2 \int_0^{t_1} T\, dt = \frac{2 m v_0^3 \sin\alpha}{g} \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 \alpha\right), \tag{8}$$

а для движения по прямой

$$\begin{aligned} W &= \frac{2 m v_0^3 \sin\alpha}{g} \cos\alpha = \frac{2 m v_0^3 \sin\alpha}{g} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{2 m v_0^3 \sin\alpha}{g} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha - \frac{1}{8} \sin^4 \alpha - \ldots\right), \end{aligned} \tag{9}$$

где многоточием обозначены члены выше четвертой степени относительно $\sin\alpha$.

При достаточно малых значениях α *величина* (8) *меньше величины* (9), *т. е. действие по Лагранжу на прямом пути меньше, чем на окольном.*

223. Принцип Якоби и геодезические линии в координатном пространстве. Рассмотрим консервативную систему с n степенями свободы. Ее кинетическая энергия — определенно положительная квадратичная форма обобщенных скоростей

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(q_1, \ldots, q_n)\, \dot{q}_i\, \dot{q}_k. \tag{10}$$

Пусть P и P' — две близкие точки координатного пространства $q_1, \ldots, q_n$, задаваемые наборами координат $q_1, \ldots, q_n$ и $q_1 + dq_1, \ldots, q_n + dq_n$. Введем в координатном пространстве метрику, определив квадрат расстояния ds^2 между точками P и P' при помощи удвоенной кинетической энергии

$$ds^2 = 2T\, dt^2 = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(q_1, \ldots, q_n)\, dq_i\, dq_k. \tag{11}$$

Отсюда следует, что

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \tag{12}$$

т. е. в метрике (11) кинетическая энергия системы равна кинетической энергии изображающей точки в координатном пространстве[1], если считать, что изображающая точка обладает массой, равной единице.

Пусть система движется по инерции, т. е. $\Pi = 0$. Из интеграла энергии $T + \Pi = h =$ const и формулы (12) тогда следует, что

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2h}, \tag{13}$$

т. е. в метрике (11) движению консервативной системы по инерции отвечает равномерное движение изображающей точки в координатном пространстве, причем скорость ее движения равна $\sqrt{2h}$.

Для этого движения действие по Лагранжу

$$W = 2\int\limits_{t_0}^{t_1} T\,dt = 2h(t_1 - t_0) = \sqrt{2h}l, \tag{14}$$

где $l = \sqrt{2h}(t_1 - t_0)$ — длина кривой, пройденной изображающей точкой за время $t_1 - t_0$. Из принципа Якоби следует, что $\delta l = 0$, т. е. задача о нахождении траектории свелась к задаче дифференциальной геометрии о нахождении геодезической линии в координатном пространстве с метрикой (11).

Пусть теперь движение системы происходит в потенциальном поле ($\Pi \neq 0$). Тогда функция Якоби P может быть вычислена по формуле (40) п. 152. Поэтому

$$W = \int\limits_{q_1^0}^{q_1^1} P\,dq_1 = 2\int\limits_{q_1^0}^{q_1^1} \sqrt{(h-\Pi)G}dq_1 = \sqrt{2}\int\limits_{q_1^0}^{q_1^1} \sqrt{(h-\Pi)\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\,dq_i\,dq_k}. \tag{15}$$

Область возможности движения в координатном пространстве определяется неравенством $\Pi \leqslant h$, которое получается из интеграла энергии $T + \Pi = h$ и определенной положительности кинетической энергии. При $\Pi \leqslant h$ вместо метрики (11) введем в координатном пространстве другую метрику, определив квадрат расстояния $d\sigma^2$ между двумя близкими точками P и P' по формуле

$$d\sigma^2 = (h - \Pi)\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\,dq_i\,dq_k. \tag{16}$$

[1]Которое теперь является n-мерным римановым пространством с линейным элементом ds, определенным по формуле (11).

На границе области возможности движения метрика (16) имеет особенность: чем ближе кривая к границе, тем меньше ее длина; в частности, длина любой кривой, лежащей на самой границе, равна нулю. Если $\Pi < h$, то метрика (16) не имеет особенностей. Из (15) получаем

$$W = \sqrt{2}\sigma,$$

где σ — длина дуги, пройденной изображающей точкой в координатном пространстве с метрикой (16). И нахождение траекторий снова свелось к нахождению геодезических линий в координатном пространстве (теперь в метрике (16)).

Глава XIV
Малые колебания консервативной системы около положения равновесия

§ 1. Теорема Лагранжа об устойчивости положения равновесия

224. Устойчивость равновесия. Рассмотрим голономную консервативную систему, положение которой задается обобщенными координатами $q_1, \ldots, q_n$ (n — число степеней свободы). Как показано в п. 63, некоторое положение системы тогда и только тогда является ее положением равновесия, когда в этом положении все обобщенные силы равны нулю:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где Π — потенциальная энергия системы, которая в случае консервативной системы явно от времени не зависит. Без ограничения общности будем считать, что в положении равновесия все обобщенные координаты равны нулю.

Если систему вывести из положения равновесия, сообщив ее точкам какие-то малые начальные отклонения от положений равновесия и малые начальные скорости, то в последующем движении точки системы либо все время остаются вблизи положений равновесия, либо удаляются от этих положений. В первом случае положение равновесия будет устойчивым, а во втором — неустойчивым.

Дадим строгое определение устойчивого положения равновесия. Положение равновесия $q_1 = q_2 = \ldots = 0$ называется *устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для всех $t > t_0$ выполняются неравенства

$$|q_i(t)| < \varepsilon, \quad |\dot{q}_i(t)| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

при условии, что в начальный момент $t = t_0$

$$|q_i(t_0)| < \delta, \quad |\dot{q}_i(t_0)| < \delta. \tag{3}$$

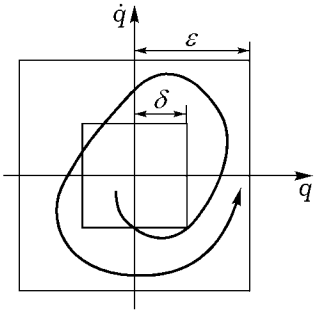

Рис. 172

Это определение удобно геометрически интерпретировать в $2n$-мерном пространстве состояний q_i, $\dot{q}_i$. На рис. 172 для случая $n = 1$ изображены две окрестности, задаваемые неравенствами (2) и (3). В случае устойчивости любое движение, начинающееся в момент $t = t_0$ внутри квадрата со стороной 2δ, будет происходить все время внутри квадрата со стороной 2ε.

Устойчивость положения равновесия можно исследовать, зная потенциальную энергию системы.

225. Теорема Лагранжа. Достаточные условия устойчивости положения равновесия консервативной системы дает теорема Лагранжа.

Теорема. *Если в положении равновесия консервативной системы потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то это положение равновесия устойчиво.*

Доказательство.

Как уже отмечалось, без ограничения общности можно считать, что в положении равновесия $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$. В силу того что потенциальная энергия $\Pi(q_1, \ldots, q_n)$ определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной, примем, что $\Pi(0, \ldots, 0) = 0$. Так как в положении равновесия функция Π имеет строгий локальный минимум, то существует такое число $\eta > 0$, что в окрестности

$$|q_i| < \eta \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

выполняется строгое неравенство

$$\Pi(q_1, \ldots, q_n) > \Pi(0, \ldots, 0) = 0, \tag{5}$$

если хотя бы одна из величин q_i не равна нулю.

Будем предполагать также, что за обобщенные координаты $q_1, \ldots, q_n$ приняты такие независимые параметры, определяющие положение системы, что определитель (18) п. 139 (при $m = n$) отличен от нуля для всех q_i из окрестности (4), если η — достаточно малая величина. Тогда кинетическая энергия

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(q_1, \ldots, q_n)\, \dot{q}_i \dot{q}_k \tag{6}$$

является определленно положительной функцией обобщенных скоростей, и, следовательно, полная механическая энергия системы

$$E = T + \Pi \tag{7}$$

при выполнении неравенства (4) строго положительна, если только не все величины q_i, $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ равны нулю. А так как при $q_i = \dot{q}_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ имеем $E = 0$, то функция E в начале координат $2n$-мерного пространства состояний q_i, $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ имеет строгий локальный минимум, равный нулю.

Пусть ε — любое число, удовлетворяющее ограничениям $0 < \varepsilon < \eta$. Рассмотрим окрестность, задаваемую неравенствами (2). Граница этой окрестности является замкнутым множеством точек, и непрерывная функция E достигает на ней своей точной нижней грани a. Так как, кроме того, на границе окрестности (2) все значения E положительны, то на ней

$$E \geqslant a > 0.$$

В силу того что в начале координат $q_i = 0$, $\dot{q}_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ непрерывная функция E имеет строгий локальный минимум, равный нулю, можно найти такое δ $(0 < \delta \leqslant \varepsilon)$, что в окрестности

$$|q_i| < \delta, \quad |\dot{q}_i| < \delta \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

будет выполняться неравенство

$$E < a. \tag{9}$$

Пусть теперь функции $q_i = q_i(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям движения системы. Если начальные данные удовлетворяют неравенствам (3), то во все время движения выполняются неравенства (2). Действительно, при условии (3) начальная полная энергия $E_0 < a$, а так как при движении консервативной системы ее полная энергия постоянна, то при всех $t \geqslant t_0$ имеем $E < a$. Поэтому точка $q_i(t)$, $\dot{q}_i(t)$, изображающая движение системы в пространстве q_i, $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, не может достигнуть границы окрестности (2), на которой $E \geqslant a$, а поэтому всегда остается внутри этой окрестности. Теорема доказана.

Отметим, что приведенные выше доказательства следуют соображениям, содержащимся в первом строгом и полном доказательстве теоремы Лагранжа, предложенном Дирихле. Эти соображения послужили одним из основных источников для решения общей задачи об устойчивости движения[1].

[1] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. Т. 2. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 7–263.

Замечание 1. *Предположим, что изучаемая механическая система неконсервативна, но получается из консервативной добавлением гироскопических или диссипативных сил или тех и других вместе. Пусть им отвечают обобщенные силы $Q_i^*(q_j, \dot{q}_j)$. Тогда мощность непотенциальных сил*

$$N^* = \sum_{i=1}^{n} Q_i^*(q_j, \dot{q}_j)\dot{q}_i \leqslant 0. \tag{10}$$

Покажем, что обобщенные силы Q_i^*, удовлетворяющие условию (10), обращаются в нуль, когда все обобщенные скорости равны нулю. Действительно, пусть при каких-либо значениях $q_{i0} (i = 1, 2, \ldots, n)$ обобщенных координат хотя бы одна из обобщенных сил Q_k^* не равна нулю, т. е. $Q_k^*(q_{i0}, 0) \neq 0$. Но тогда в силу непрерывности существовала бы окрестность точки $q_i = q_{i0}$, $\dot{q}_i = 0$, в которой функция $Q_k^*(q_j, \dot{q}_j)$ не была бы равной нулю и, следовательно, ее значения имели бы один и тот же знак. Но ввиду независимости величин q_i и $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ их значения в указанной окрестности можно выбрать так, что

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i^*(q_j, \dot{q}_j)\dot{q}_i > 0,$$

а это противоречит условию (10). Из сказанного, в частности, следует, что при наличии гироскопических и диссипативных сил положение равновесия сохранится.

Так как интеграл энергии $E = T + \Pi = \text{const}$ существует и при гироскопических силах (в отсутствие диссипативных сил; см. п. 142), то приведенное выше доказательство теоремы Лагранжа остается без изменений и при наличии гироскопических сил. Если же существуют диссипативные силы (или диссипативные и гироскопические силы одновременно), то, согласно п. 142,

$$\frac{dE}{dt} = N^* \leqslant 0,$$

т. е. при движении системы ее полная энергия E не превосходит своего начального значения E_0. Но если $E_0 < a$, то во все время движения $E < a$ и опять при всех $t \geqslant t_0$ справедливы неравенства (2).

Таким образом, *при добавлении к консервативной системе гироскопических и диссипативных сил теорема Лагранжа остается справедливой.*

226. Теоремы Ляпунова о неустойчивости положения равновесия консервативной системы. Теорема Лагранжа дает достаточные условия устойчивости положения равновесия. Вопрос о том,

будет ли неустойчивым положение равновесия консервативной системы, если в этом положении потенциальная энергия не имеет минимума, является очень сложным, и до сих пор на него не получено исчерпывающего ответа[1]. Первые строгие результаты в решении этого вопроса получены Ляпуновым. Дадим без доказательства две его теоремы[2]. Функцию $\Pi(q_1, \ldots, q_n)$ предполагаем аналитической в окрестности положения равновесия.

Теорема 1. *Если потенциальная энергия консервативной системы в положении равновесия не имеет минимума и это узнается уже по членам второго порядка в разложении функции* Π *в ряд в окрестности положения равновесия без необходимости рассматривания членов высших порядков, то положение равновесия неустойчиво.*

Теорема 2. *Если в положении равновесия потенциальная энергия имеет максимум и это узнается по членам наименее высокого порядка, которые действительно присутствуют в разложении этой функции в ряд в окрестности положения равновесия, то это положение равновесия неустойчиво*[3].

Пример 1 (Устойчивость равновесия тяжелого твердого тела на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости). *Пусть тело ограничено произвольной выпуклой поверхностью* σ *и общая нормаль (вертикаль) к горизонтальной плоскости и к поверхности* σ *в некоторой ее точке* D^* *содержит центр тяжести тела* G. *Тогда тело на плоскости может находиться в состоянии равновесия, причем в точке* D^* *поверхность тела соприкасается с плоскостью.*

Обозначим $Gxyz$ *жестко связанную с телом систему координат, ось* Gz *которой содержит отрезок прямой* D^*G, *а оси* Gx *и* Gy *направлены параллельно линиям кривизны поверхности тела в точке* D^*. *Тогда уравнение поверхности тела в окрестности точки* D^* *запишется в виде*

$$f \equiv -h - z + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{r_1} + \frac{y^2}{r_2}\right) + \cdots = 0. \tag{11}$$

[1] Обзор полученных результатов содержится в монографии: Карапетян А. В., Румянцев В. В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем. М.: ВИНИТИ, 1983. (Итоги науки и техники. Сер. Общая механика: Т. 6).

[2] Доказательство можно найти в работе: Ляпунов А. М. О неустойчивости равновесия в некоторых случаях, когда функция сил не есть максимум // Собр. соч. Т. 2. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 391–400.

[3] Для применимости теоремы 2 в конкретных задачах необходимо, чтобы разложение функции Π начиналось с однородной функции (формы) $\Pi_k(q_1, \ldots, q_n)$ четной степени k, а функция Π_k должна быть отрицательной в некоторой окрестности положения равновесия (исключая само эти положение).

Здесь x, y, z — координаты точки D поверхности σ, которой тело касается плоскости при малом его отклонении от положения равновесия (рис. 119), *h — расстояние центра тяжести тела от опорной горизонтальной плоскости в положении равновесия* ($x = y = 0$, $z = -h$), *r_1 и r_2 — главные радиусы кривизны поверхности тела в точке D^*; так как поверхность σ выпуклая и целиком находится выше опорной плоскости, то величины r_1, r_2 положительны. Многоточие в уравнении* (11) *обозначает совокупность членов, порядок которых относительно x, y выше порядка членов, выписанных явно.*

Потенциальная энергия тела вычисляется по формуле

$$\Pi = mgl, \tag{12}$$

где $l = -(\boldsymbol{n} \cdot \overline{GD})$ — расстояние от центра тяжести до касательной плоскости к поверхности тела, а $\boldsymbol{n}$ — единичная внутренняя нормаль в точке D. Из уравнения (11) *и формулы* (25) *п.* 114 *имеем следующие выражения для компонент вектора $\boldsymbol{n}$:*

$$\gamma_1 = -\frac{x}{r_1} + \cdots, \quad \gamma_2 = -\frac{y}{r_2} + \cdots, \quad \gamma_3 = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2}\right) + \cdots \tag{13}$$

Учитывая, что $\overline{GD'} = (x,\ y,\ z)$, и пренебрегая в выражении для Π несущественной аддитивной постоянной mgh, получаем из (11)–(13)

$$\Pi = \frac{1}{2}mg\left(\frac{r_1 - h}{r_1^2}x^2 + \frac{r_2 - h}{r_2^2}y^2\right) + \cdots \tag{14}$$

Отсюда и из теоремы Лагранжа следует, что если центр тяжести тела находится ниже обоих главных центров кривизны поверхности тела в точке его касания с опорной плоскостью, то положение равновесия устойчиво. Если же центр тяжести лежит выше хотя бы одного из главных центров кривизны, то, согласно теоремам 1 *и* 2 *Ляпунова, имеет место неустойчивость.*

227. Стационарные движения консервативной системы с циклическими координатами и их устойчивость. Пусть в голономной системе с n степенями свободы обобщенные координаты q_α ($\alpha = k+1, \ldots, n$) являются циклическими. Остальные обобщенные координаты q_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) называются (при наличии циклических координат) *позиционными.* Потенциальная энергия Π и коэффициенты a_{ik} кинетической энергии

$$T = T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

будут функциями только от позиционных координат.

Согласно п. 164, существуют первые интегралы, отвечающие циклическим координатам:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_\alpha} = c_\alpha = \text{const} \qquad (\alpha = k+1, \ldots, n), \tag{15}$$

где $L = T - \Pi$ — функция Лагранжа.

Считая, что гессиан (6) п. 165 отличен от нуля, составим функцию Рауса

$$R = \sum_{\alpha=k+1}^{n} c_\alpha \dot{q}_\alpha - L \tag{16}$$

и выразим ее через позиционные координаты q_i, их производные $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ и постоянные c_α $(\alpha = k+1, \ldots, n)$. Введем обозначение

$$R^* = -R + \Pi. \tag{17}$$

Тогда уравнения Рауса запишутся в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R^*}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{18}$$

Функция R^* может быть представлена в виде суммы

$$R^* = R_2^* + R_1^* + R_0^*, \tag{19}$$

где R_2^* — квадратичная форма производных позиционных координат[1],

$$R_2^* = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(q_1, \ldots, q_k)\dot{q}_i\dot{q}_j. \tag{20}$$

Функция R_1^* линейна относительно $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ [2]:

$$R_1^* = \sum_{i=1}^{k} a_i^*(q_1, \ldots, q_k, c_\alpha) = \dot{q}_i \qquad (\alpha = k+1, \ldots, n), \tag{21}$$

[1]Можно показать, что R_2^* — определенно-положительная квадратичная форма относительно $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. См., например: Гантмахер Ф. Г. Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966, гл. 7, а также: Меркин Д. Р. Гироскопические системы. М.: Наука, 1974, гл. 1,

[2]Если выражение кинетической энергии не содержит произведений позиционных скоростей $\dot{q}_i$ на циклические скорости $\dot{q}_\alpha$, т. е. если $a_{i\alpha} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k;$ $\alpha = k+1, \ldots, n)$, то функция R_1^* тождественно равна нулю. В этом случае рассматриваемая система называется *гироскопически несвязанной*.

R_0^* зависит только от позиционных координат и величин c_α.

Используя представление (19), запишем уравнения Рауса (18) в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_2^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R_2^*}{\partial q_i} = -\frac{\partial(\Pi - R_0^*)}{\partial q_i} - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial R_1^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R_1^*}{\partial q_i}\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{22}$$

Из равенства (21) следует, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_1^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R_1^*}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{k} \gamma_{ij}^* \dot{q}_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{23}$$

где

$$\gamma_{ij}^* = \frac{\partial a_i^*}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j^*}{\partial q_i}, \quad \gamma_{ij}^* = -\gamma_{ji}^* \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, k), \tag{24}$$

т. е. выражение во второй круглой скобке правой части (22) приводит к появлению гироскопических сил, линейных относительно позиционных скоростей.

Итак, уравнения (22) можно рассматривать как дифференциальные уравнения движения некоторой приведенной системы с k степенями свободы, кинетическая энергия которой равна R_2^*, а обобщенные силы состоят из гироскопических сил и потенциальных сил, производных от потенциала $\Pi^* = \Pi - R_0^*$. Потенциал Π^* приведенной системы называют *приведенным потенциалом* (*приведенной потенциальной энергией*), или *потенциалом Рауса*. Если исходная система является гироскопически несвязанной, то в приведенной системе гироскопические силы отсутствуют.

Стационарными движениями исходной консервативной системы с циклическими координатами называются такие ее движения, при которых позиционные координаты q_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ и циклические скорости $\dot{q}_\alpha$ $(\alpha = k+1, \ldots, n)$ постоянны. Из (15) и (22) следует, что стационарные движения существуют в том и только в том случае, когда отвечающие им значения позиционных координат удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{25}$$

т. е. стационарные движения исходной системы соответствуют положениям равновесия приведенной системы.

Пусть для каких-либо значений постоянных $c_\alpha = c_{\alpha 0}$ система уравнений (25) имеет решение $q_i = q_{i0} = \text{const}$. Тогда в стационарном движении $q_i = q_{i0}$, $\dot{q}_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, $c_\alpha = c_{\alpha 0}$ $(\alpha = k+1, \ldots n)$. Допустим, что в начальный момент времени $t = t_0$ величины q_i, $\dot{q}_i$ мало отличаются от их значений, отвечающих стационарному движению. Будут ли тогда величины $q_i - q_{i0}, \dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ оставаться малыми для всех $t \geqslant t_0$? Иными словами, будет ли рассматриваемое стационарное движение устойчиво по отношению к переменным q_i, $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$? Ответ на этот вопрос можно получить, используя теорему Лагранжа.

Так как наличие гироскопических сил не нарушает закона сохранения полной энергии, то для приведенной системы существует интеграл $E^* = R_2^* + \Pi^*$. Если теперь в п. 225 заменить E на E^* и повторить рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы Лагранжа, то придем к следующей теореме Рауса об устойчивости стационарных движений голономной консервативной системы с циклическими координатами.

Теорема. *Если в стационарном движении потенциальная энергия $\Pi^*(q_1, \ldots, q_k, c_{\alpha 0})$ приведенной системы имеет строгий локальный минимум, то это движение устойчиво по отношению к переменным q_i, $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.*

Замечание 2. *Применяя теорему Лагранжа, мы фиксировали постоянные c_α, оставляя их такими же, как и в самом стационарном движении. Ляпунову принадлежит существенное дополнение к теореме Рауса, которое допускает малое изменении постоянных c_α. Именно, если Π^* имеет минимум как при $c_\alpha = c_{\alpha 0}$, так и при значениях $c_\alpha = c_{\alpha 0} + \mu_\alpha$ $(|\mu_\alpha| \ll 1,\ \alpha = k+1, \ldots, n)$, причем позиционные координаты $q_{i0}(c_\alpha)$ в точке минимума Π^* непрерывны как функции c_α, то стационарное движение устойчиво по отошению к возмущениям величин q_i, $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$* [1].

Пример 1 (Устойчивость вращения диска вокруг вертикали). *Пусть круговой однородный диск рндиусом ρ и массой m движется в однородном поле тяжести по абсолютно гладкой горизонтальной плоскости, касаясь ее одной точкой своего края. Как отмечалось в п. 114, при движении твердого тела по абсолютно гладкой плоскости проекция его центра масс на плоскость движется равномерно и прямолинейно. Без ограничения общности можно считать ее неподвижной; тогда центр масс тела будет двигаться по заданной вертикали. Ориентацию диска относительно неподвижной системы координат зададим при по-*

[1] Подробности см. в упомянутой монографии А. В. Карапетяна и В. В. Румянцева.

мощи углов Эйлера (рис. 137). *Кинетическая и потенциальная энергия диска определяются формулами* (см. п. 157)

$$T = \frac{1}{8}m\rho^2(1+4\cos^2\theta)\dot\theta^2 + \frac{1}{8}m\rho^2\sin^2\theta\dot\psi^2 + \frac{1}{4}m\rho^2(\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi)^2,$$

$$\Pi = mg\rho\sin\theta.$$

Переменные ψ и φ будут циклическими координатами. Им соответствуют первые интегралы ($L = T - \Pi$) :

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = \frac{1}{4}m\rho^2\sin^2\theta\dot\psi + \frac{1}{2}m\rho^2(\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi)\cos\theta = c_\psi = \text{const}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = \frac{1}{2}m\rho^2(\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi) = c_\varphi = \text{const}. \tag{27}$$

Приведенная система имеет одну степень свободы, а функция (19) *имеет вид*

$$R^* = \frac{1}{8}m\rho^2(1+4\cos^2\theta)\dot\theta^2 - 2\frac{(c_\psi - c_\varphi\cos\theta)^2}{m\rho^2\sin^2\theta} - \frac{c_\varphi^2}{m\rho^2}.$$

Если отбросить последнее слагаемое, несущественное для уравнений движения, то для потенциальной энергии приведенной системы имеем выражение

$$\Pi^* = mg\rho\sin\theta + 2\frac{(c_\psi - c_\varphi\cos\theta)^2}{m\rho^2\sin^2\theta}. \tag{28}$$

Существует такое движение, при котором один из диаметров диска расположен вертикально, а сам диск вращается вокруг этого диаметра с произвольной по величине постоянной угловой скоростью. Для этого движения

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \dot\varphi = 0, \quad \dot\psi = \omega = \text{const}, \tag{29}$$

причем

$$c_\psi = \frac{1}{4}m\rho^2\omega, \quad c_\varphi = 0. \tag{30}$$

Подставляя в функцию Π^* значения постоянных c_ψ и c_φ из (30), *полагая $\theta = \frac{\pi}{2} + q$ и разлагая Π^* в ряд по степеням q, получаем* (*несущественную постоянную в функции Π^* отбрасываем*)

$$\Pi^* = \frac{1}{8}(m\rho^2\omega^2 - 4mg\rho)q^2 + \frac{1}{24}(2m\rho^2\omega^2 + mg\rho)q^4 + \cdots \tag{31}$$

При выполнении неравенства

$$|\omega| \geqslant 2\sqrt{\frac{g}{\rho}} \tag{32}$$

функция Π^* *имеет строгий локальный минимум в точке* $q = 0$. *Поэтому, согласно теореме Рауса, при условии* (32) *стационарное движение диска* (29) *устойчиво. Если же неравенство* (32) *не выполняется, то функция* Π^* *в точке* $q = 0$ *не имеет минимума, и это узнается по членам второго порядка в разложении* (31). *Следовательно, согласно теореме* 1 *Ляпунова* (см. п. 226), *при невыполнении неравенства* (32) *имеет место неустойчивость*[1].

§ 2. Малые колебания

228. Линеаризация уравнений движения. Пусть консервативная система имеет положение равновесия, в котором все обобщенные координаты q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ равны нулю. Предполагая потенциальную энергию системы $\Pi(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ аналитической функцией в окрестности положения равновесия, разложим ее в ряд Тейлора

$$\Pi = \Pi(0, 0, \ldots, 0) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right)_0 q_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_k}\right)_0 q_i q_k + \ldots, \tag{1}$$

где индексом 0 отмечены значения производных функции Π в положении равновесия, т. е. при $q_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Без ограничения общности можно считать, что $\Pi\,(0, 0 \ldots, 0) = 0$. Первая сумма в разложении (1) равна нулю, так как в положении равновесия все обобщенные силы равны нулю:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, если ввести обозначения

$$c_{ik} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i\, \partial q_k}\right)_0,$$

[1] Впрочем, для доказательства неустойчивости при выполнении неравенства (32) применима и теорема 2 Ляпунова из п. 226, так как при этом функция Π^* в точке $q = 0$ имеет максимум, и это узнается по членам наинизшего (в нашем случае — второго) порядка в разложении (31).

то разложение потенциальной энергии в ряд будет начинаться с квадратичной формы, имеющей постоянные коэффициенты:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} q_i q_k + \dots \tag{2}$$

Здесь многоточие обозначает совокупность членов, порядок которых относительно величин q_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ больше второго. Будем предполагать, что квадратичная форма

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} q_i q_k \tag{3}$$

является определенно-положительной. Тогда точка $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$ будет точкой строгого локального минимума функции $\Pi\,(q_1, q_2, \dots, q_n)$ и, следовательно, согласно теореме Лагранжа, положение равновесия устойчиво.

В силу устойчивости положения равновесия величины q_i, $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ будут малыми во все время движения, если достаточно малы их начальные значения. Используя малость величин q_i, $\dot{q}_i$, можно упростить дифференциальные уравнения движения системы вблизи ее положения равновесия. Для этого можно заменить полные уравнения движения приближенными, сохраняя в них только линейные члены относительно q_i, $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ и отбрасывая все нелинейные члены. Кинетическая энергия системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(q_1, q_2, \dots, q_n)\, \dot{q}_i\, \dot{q}_k.$$

Будем считать, что функции $a_{ik}\,(q_1, \dots, q_n)$ аналитические в окрестности положения равновесия, и запишем их в виде рядов

$$a_{ik}(q_1, q_2, \dots, q_n) = a_{ik} + \dots$$

Здесь многоточие обозначает совокупность членов первого и более высоких порядков относительно q_i $(i = 1, 2, \dots, n)$, $a_{ik} = a_{ik}(0, 0, \dots, 0)$ — постоянные коэффициенты. Функция T запишется в виде ряда

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k + \dots, \tag{4}$$

где многоточие обозначает члены не ниже третьего порядка относительно q_i, $\dot{q}_i$ $(1, 2, \dots, n)$. Будем считать, что выбор обобщенных

координат сделан так, что в положении равновесия определитель (18) п. 139 (при $m = n$) отличен от нуля. Тогда квадратичная форма

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k}\,\dot{q}_i\dot{q}_k \tag{5}$$

будет определенно-положительной относительно $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Уравнения движения запишем в виде уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Рассматривая эти уравнения при малых значениях величин q_i, $\dot{q}_i$, заменим в функции Лагранжа $L = T - \Pi$ величины T и Π их разложениями (4) и (2). Тогда получим уравнения движения в виде

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\ddot{q}_k + c_{ik}q_k) + \ldots = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

где многоточием обозначена совокупность членов второго и более высоких порядков. Если их отбросить, то придем к линейной системе с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\ddot{q}_k + c_{ik}q_k) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

Эти линейные уравнения получаются из уравнений (6), если считать, что в функции Лагранжа величины T и Π заменены их приближенными выражениями (5) и (3). Теория малых колебаний консервативной системы вблизи устойчивого положения равновесия опирается на такую линеаризацию и рассматривает приближенные выражения (5) и (3) для T и Π как точные.

Когда говорят «малые колебания», то обычно имеют в виду движения, описываемые системой дифференциальных уравнений, полученной в результате линеаризации полных (нелинейных) уравнений движения. В случае движений в окрестности положения равновесия консервативной системы линеаризация сводится, как мы видим, к получению T и Π в виде квадратичных форм (5) и (3).

Для упрощения записи уравнения (8) удобно представить в

векторно-матричной форме. Пусть

$$\boldsymbol{q} = \begin{Vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Тогда

$$T = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{q}} \cdot \dot{\boldsymbol{q}}), \qquad \Pi = \frac{1}{2}(\mathbf{C}\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{q}), \tag{9}$$

и уравнения (8) запишутся в виде

$$\mathbf{A}\ddot{\boldsymbol{q}} + \mathbf{C}\boldsymbol{q} = 0. \tag{10}$$

229. Главные координаты и главные колебания. Выясним структуру решений уравнений (8) (или (10)), описывающих малые колебания в окрестности положения равновесия. Для этого рассмотрим пару квадратичных форм

$$(\mathbf{A}\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{q}) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} q_i q_k, \qquad (\mathbf{C}\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{q}) = \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} q_i q_k. \tag{11}$$

Обе эти формы определенно-положительны. Из линейной алгебры известно[1], что если даже одна из форм (11) была бы определенно-положительной (за такую форму мы будем принимать первую из квадратичных форм (11)), то существует вещественная неособенная замена переменных

$$\boldsymbol{q} = \mathbf{U}\boldsymbol{\theta} \quad (\det \mathbf{U} \neq 0,\ \boldsymbol{\theta}' = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)), \tag{12}$$

приводящая к сумме квадратов сразу обе квадратичные формы (11):

$$(\mathbf{A}\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{q}) = \sum_{j=1}^{n} \theta_j^2, \qquad (\mathbf{C}\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{q}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \theta_j^2. \tag{13}$$

[1] См., например, гл. VI книги: Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1975.

При этом величины λ_j с точностью до порядка следования однозначно определяются первоначальными квадратичными формами и не зависят от выбора замены переменных (12). В нашем случае все λ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ положительны в силу того, что Π определенно-положительна.

Отметим, что если в окрестности точки $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$ координатного пространства $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ввести евклидову структуру при помощи удвоенной кинетической энергии $2T$, т. е. принять за скалярное произведение векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ величину $(\mathbf{A}\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})$, то преобразование (12) можно выбрать ортогональным в смысле этой евклидовой структуры. Это означает, что, если $\boldsymbol{u}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ — j-й столбец матрицы $\mathbf{U}$, т. е. замена переменных (12) имеет вид

$$\boldsymbol{q} = \sum_{j=1}^{n} \theta_j \boldsymbol{u}_j, \tag{14}$$

то выполняется условие нормировки

$$(\mathbf{A}\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij}, \tag{15}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера ($\delta_{ij} = 1$, если $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$). Так как обобщенные скорости $\dot{q}_i$ и $\dot{\theta}_j$ связаны теми же соотношениями, что и обобщенные координаты q_i и θ_j:

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \mathbf{U}\dot{\boldsymbol{\theta}},$$

то в первой из формул (13) можно величины q_i заменить на $\dot{q}_i$, а величины θ_j, на $\dot{\theta}_j$. В новых переменных кинетическая и потенциальная энергия имеют вид

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \dot{\theta}_j^2, \qquad \Pi = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \theta_j^2. \tag{16}$$

Обобщенные координаты θ_j называются *главными*, или *нормальными координатами*. В главных координатах уравнения движения (8) запишутся в виде n не связанных одно с другим уравнений второго порядка

$$\ddot{\theta}_j + \lambda_j \theta_j = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{17}$$

Так как все λ_j положительны, то каждое из этих уравнений описывает колебания гармонического осциллятора:

$$\theta_j = c_j \sin(\omega_j t + \alpha_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{18}$$

Здесь $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$ — частоты колебаний, c_j, α_j — произвольные постоянные.

Из (14) и (18) получаем общее решение уравнений (8) (или (10))

$$\boldsymbol{q} = \sum_{j=1}^{n} c_j \boldsymbol{u}_j \sin(\omega_j t + \alpha_j). \tag{19}$$

Эта формула охватывает все решения системы (8). Пусть среди постоянных c_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ отлична от нуля только одна постоянная c_k. Тогда из (19) получаем

$$\boldsymbol{q}_k = c_k \boldsymbol{u}_k \sin(\omega_k t + \alpha_k). \tag{20}$$

Это решение описывает колебание системы, которое называют k-м *главным*, или *нормальным колебанием*. Вектор $\boldsymbol{u}_k$ называют *амплитудным вектором k-го главного колебания* . В k-м главном колебании все обобщенные координаты совершают гармонические колебания с одной и той же частотой ω_k, отношение амплитуд колебаний отдельных обобщенных координат определяется отношением соответствующих компонент амплитудных векторов.

При практическом нахождении решения (19) можно поступать следующим образом. Ищем решение системы (10) в виде

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{u} \sin(\omega t + \alpha).$$

Подставив это выражение для $\boldsymbol{q}$ в уравнение (10) и сократив затем на $\sin(\omega t + \alpha)$, получим уравнение для амплитудного вектора $\boldsymbol{u}$

$$(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{A})\boldsymbol{u} = 0 \qquad (\lambda = \omega^2). \tag{21}$$

Чтобы это уравнение имело нетривиальное решение относительно компонент амплитудного вектора $\boldsymbol{u}$, надо потребовать, чтобы величина λ удовлетворяла уравнению

$$\det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{A}) = 0. \tag{22}$$

Это уравнение называется *уравнением частот*, или *вековым уравнением*. Из предыдущего изложения теории главных колебаний следует, что оно имеет только положительные решения; каждому корню λ_j этого уравнения соответствует амплитудный вектор $\boldsymbol{u}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, причем если какой-либо корень λ_k уравнения (22) будет кратным, то всегда можно найти ровно столько соответствующих ему линейно независимых амплитудных векторов, какова его кратность. Амплитудные векторы из уравнения (21) находятся с точностью до произвольного постоянного множителя. Их нормировка (если она требуется) производится в соответствии с условием (15).

Пример 1 (Малые колебания двойного маятника). *Рассмотрим двойной маятник, движущийся в вертикальной плоскости в поле тяжести* (рис. 15). *Потенциальная энергия маятника найдена в примере* 3 *п.* 54:

$$\Pi = -\frac{1}{2}mgl(3\cos\varphi + \cos\psi).$$

Кинетическая энергия вычисляется по формуле (*см. пример* 2 *п.* 215)

$$T = \frac{1}{2}ml^2\left[\frac{4}{3}\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi - \psi) + \frac{1}{3}\dot{\psi}^2\right].$$

Существует положение равновесия маятника, когда оба стержня занимают вертикальное положение, а $\varphi = \psi = 0$. *В этом положении потенциальная энергия маятника минимальна и равновесие устойчиво. Исследуем малые колебания маятника вблизи этого положения равновесия.*

Если отбросить несущественное постоянное слагаемое $-2mgl$ *в разложении функции* Π *в ряд в окрестности положения равновесия* $\varphi = \psi = 0$ *и сохранить только члены второго порядка малости, то получим*

$$\Pi = \frac{1}{2}mgl\left(\frac{3}{2}\varphi^2 + \frac{1}{2}\psi^2\right).$$

Аналогично, учитывая только члены второго порядка малости в разложении кинетической энергии в ряд, имеем

$$T = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{4}{3}\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}\dot{\psi} + \frac{1}{3}\dot{\psi}^2\right).$$

Если ввести обозначение $\boldsymbol{q}' = (\varphi, \psi)$, *то матрицы* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{C}$ *в выражениях* (9) *будут такими:*

$$\mathbf{A} = ml^2\begin{Vmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{C} = mgl\begin{Vmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{Vmatrix}.$$

Уравнение частот (22) *может быть записано в виде*

$$7\lambda^2 - 42\left(\frac{g}{l}\right)\lambda + 27\left(\frac{g}{l}\right)^2 = 0.$$

Оно имеет корни

$$\lambda_1 = 3\left(1 + \frac{2\sqrt{7}}{7}\right)\frac{g}{l}, \qquad \lambda_2 = 3\left(1 - \frac{2\sqrt{7}}{7}\right)\frac{g}{l}. \tag{23}$$

Частоты ω_j главных колебаний вычисляются по формулам $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$ $(j = 1, 2)$. Из уравнения (21) и условий нормировки (15) получаем следующие выражения для амплитудных векторов $\boldsymbol{u}_j$, отвечающих частотам ω_j $(j = 1, 2)$:

$$\boldsymbol{u}_1 = \varkappa \begin{Vmatrix} -1-\sqrt{7} \\ 5+\sqrt{7} \end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \varkappa \begin{Vmatrix} -1+\sqrt{7} \\ 5-\sqrt{7} \end{Vmatrix} \left(\varkappa = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{3}{7m}}\right). \quad (24)$$

Таким образом, общее решение уравнений малых колебаний двойного маятника будет таким:

$$\begin{Vmatrix} \varphi \\ \psi \end{Vmatrix} = c_1 \begin{Vmatrix} -1-\sqrt{7} \\ 5+\sqrt{7} \end{Vmatrix} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + c_2 \begin{Vmatrix} -1+\sqrt{7} \\ 5-\sqrt{7} \end{Vmatrix} \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \quad (25)$$

где c_j, α_j $(j = 1, 2)$ — произвольные постоянные.

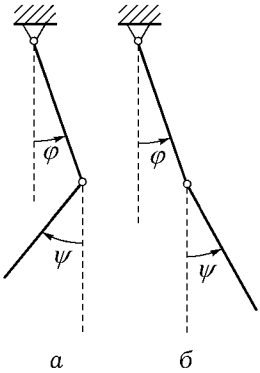

Рис. 173

Первое и второе главные колебания отвечают значениям постоянных $c_1 \neq 0$, $c_2 = 0$ и $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$ соответственно. Отношения k_j $(j = 1, 2)$ амплитуд колебаний углов φ и ψ в первом и втором главных колебаниях и направления отклонений стержней от вертикали характеризуются величинами

$$k_1 = -\frac{1+\sqrt{7}}{5+\sqrt{7}} = \frac{1-2\sqrt{7}}{9} \simeq -0,48,$$

$$k_2 = -\frac{1-\sqrt{7}}{5-\sqrt{7}} = \frac{1+2\sqrt{7}}{9} \simeq 0,70,$$

которые называются коэффициентами форм главных колебаний. При первом главном колебании (с большей частотой ω_1) стержни в любой момент времени будут отклонены от вертикали в разные стороны (рис. 173, а), *а при втором главном колебании (с меньшей частотой ω_2) — в одну и ту же сторону* (рис. 173, б).

230. Колебания консервативной системы под влиянием внешних периодических сил.

Пусть к точкам консервативной системы приложены внешние силы, которым отвечают обобщенные силы $Q_i = Q_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Влияние этих сил на колебания системы вблизи устойчивого положения равновесия удобно исследовать, если воспользоваться главными

координатами $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$, введенными в предыдущем пункте. Силам $Q_i(t)$ в координатах q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ отвечают обобщенные силы $\Theta_j(t)$ в главных координатах $\theta_j (j = 1, 2, \ldots, n)$. Для нахождения величин $\Theta_j(t)$ приравняем выражение для элементарной работы сил в координатах q_i и θ_j:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = \sum_{j=1}^{n} \Theta_j \delta\theta_j, \tag{26}$$

но согласно замене переменных (12)

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}\theta_j, \qquad \delta q_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}\delta\theta_j.$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i \sum_{j=1}^{n} u_{ij}\delta\theta_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} u_{ij} Q_i \right) \delta\theta_j. \tag{27}$$

Из равенств (26) и (27) следует, что

$$\Theta_j(t) = \sum_{i=1}^{n} u_{ij} Q_j(t) \quad (j = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{28}$$

В нормальных координатах малые колебания консервативной системы с учетом внешних сил будут описываться уравнениями

$$\ddot{\theta}_j + \omega_j^2 \theta_j = \Theta_j(t) \quad (j = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{29}$$

Пусть внешние силы $Q_i(t)$ — периодические функции времени с периодом $2\pi/\Omega$ и такие, что обобщенные силы (28) представимы в виде рядов Фурье

$$\Theta_j = \sum_{k=0}^{\infty} b_{jk} \sin(k\Omega t + \alpha_{jk}) \quad (j = 1,\ 2, \ldots,\ n) \tag{30}$$

Здесь b_{jk}, α_{jk} $(j = 1,\ 2, \ldots,\ n;\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$ — постоянные величины.

Общее решение уравнений (29) (при $k\Omega \neq \omega_j$) имеет вид

$$\theta_j = c_j \sin(\omega_j t + \alpha_j) + \theta_j^*(t), \tag{31}$$

где c_j, α_j — произвольные постоянные, а через $\theta_j^*(t)$ обозначены слагаемые

$$\theta_j^* = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{jk}}{\omega_j^2 - k^2\Omega^2} \sin(k\Omega t + \alpha_{jk}) \quad (j = 1,\ 2, \ldots,\ n), \tag{32}$$

которые появились в общем решении из-за наличия внешних периодических сил.

Из (14) и (31) получаем

$$\boldsymbol{q} = \sum_{j=1}^{n} c_j \boldsymbol{u}_j \sin(\omega_j t + \alpha_j) + \sum_{j=1}^{n} \theta_j^*(t) \boldsymbol{u}_j. \tag{33}$$

Первая сумма в (33) представляет свободные колебания, а вторая — вынужденные колебания системы, возникающие из-за влияния внешних периодических сил.

Если же при каком-либо значении числа k окажется, что $k\Omega = \omega_j$ для некоторого j, то при $b_{jk} \neq 0$ решение в форме (31), (32) непригодно, так как в сумме (32) будет слагаемое с нулевым знаменателем. Говорят, что в этом случае имеет место резонанс в вынужденных колебаниях системы.

Каким будет решение уравнения (29) при резонансе? Для примера рассмотрим одно уравнение вида

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = a \sin \omega t. \tag{34}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\theta = c \sin(\omega t + \alpha) + \theta^*(t), \tag{35}$$

где c, α — произвольные постоянные, а

$$\theta^*(t) = -\frac{a}{2\omega} t \cos \omega t. \tag{36}$$

Функция $\theta^*(t)$ является неограниченной. Колебания, описываемые уравнением (34), уже не будут малыми. А потому для описания движения вблизи положения равновесия уравнения (34) должны быть заменены другими уравнениями, учитывающими отброшенные при линеаризации нелинейные члены в полных уравнениях движения. Так в данном конкретном примере мы приходим к необходимости теории нелинейных колебаний.

Пример 1 (Плоские колебания твердого тела на эллиптической орбите). *Дифференциальное уравнение, описывающее плоские движения твердого тела в центральном ньютоновском гравитационном поле, имеет вид* (см. п. 128)

$$(1+e\cos\nu)\frac{d^2\varphi}{d\nu^2}-2e\sin\nu\frac{d\varphi}{d\nu}+3\frac{A-B}{C}\sin\varphi\cos\varphi=2e\sin\nu, \tag{37}$$

где A и B — моменты инерции тела относительно его главных центральных осей инерции Ox и Oy, которые для плоских движений все время расположены в плоскости орбиты, C — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости орбиты; φ — угол между осью Oy и осью OZ, направленной вдоль радиуса-вектора центра масс тела относительно притягивающего центра, e — эксцентриситет орбиты, $0\leqslant e<1$.

На круговой орбите существует положение равновесия твердого тела в орбитальной системе координат, отвечающее решению $\varphi=0$ уравнения (37) *при $e=0$. При условии $A>B$ положение равновесия устойчиво. Предполагая это условие выполненным, рассмотрим малые плоские колебания твердого тела вблизи положения $\varphi=0$, вызываемые эллиптичностью орбиты. Эксцентриситет орбиты считаем малой величиной.*

Линеаризуя уравнение (37), *получаем*

$$(1+e\cos\nu)\frac{d^2\varphi}{d\nu^2}-2e\sin\nu\frac{d\varphi}{d\nu}+\omega_0^2\varphi=2e\sin\nu. \tag{38}$$

Здесь введено обозначение $\omega_0^2=3\dfrac{A-B}{C}$. Так как моменты инерции удовлетворяют неравенству треугольника $A-B\leqslant C$ и по предположению $A>B$, то

$$0<\omega_0^2\leqslant 3. \tag{39}$$

Вынужденные колебания спутника, описываемые дифференциальным уравнением (38), *ищем в виде ряда по степеням e*

$$\varphi^*=e\varphi_1+e^2\varphi_2+\ldots \tag{40}$$

Подставив это разложение в уравнение (38) *и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях e в его обеих частях, получим линейные неоднородные дифференциальные уравнения для функций φ_1, $\varphi_2,\ldots$. Для функции φ_1 имеем уравнение*

$$\frac{d^2\varphi_1}{d\nu^2}+\omega_0^2\varphi_1=2\sin\nu. \tag{41}$$

Из (40), (41) *находим решение, описывающее вынужденные колебания тела, в виде*

$$\varphi^* = \frac{2e}{\omega_0^2 - 1} \sin \nu + \ldots \tag{42}$$

Эти колебания вызваны неравномерностью движения центра масс тела по эллиптической орбите. В динамике спутников они носят название эксцентриситетных колебаний.

Утверждение о существовании эксцентриситетных колебаний (42) *мы делаем здесь без обоснования. Можно, однако, строго показать*[1], *что при* $\omega_0 \neq 1$ *нелинейное уравнение* (37) *действительно имеет решение, аналитическое по* e *при достаточно малых* e *и переходящее при* $e = 0$ *в положение равновесия* $\varphi = 0$, *причем разложение этого решения в ряд начинается с члена первой степени по* e, *явно выписанного в формуле* (42).

При $\omega_0 = 1$ *имеет место резонанс в вынужденных колебаниях. Решение* (42), *полученное при помощи линеаризации, не имеет смысла при резонансе, и для исследования движения тела вблизи положения* $\varphi = 0$ *надо использовать нелинейное уравнение движения* (37). *Будем считать, что* ω_0 *мало отличается от единицы:*

$$\omega_0 = 1 + \mu \quad (0 \leqslant |\mu| \ll 1). \tag{43}$$

В уравнении (37) *сделаем*[2] *замену переменных* $\varphi = \varepsilon\xi$, *где* $\varepsilon = e^{1/3}$. *Подставим это значение* φ *в уравнение* (37) *и представив обе его части в виде рядов по степеням* ε, *получим* (*после деления обеих частей на* ε) *такое уравнение:*

$$\frac{d^2\xi}{d\nu^2} + \omega_0^2\xi = \varepsilon^2 \left(\frac{2}{3}\omega_0^2\xi^3 + 2\sin\nu\right) + \ldots, \tag{44}$$

где многоточие обозначает члены выше второго порядка малости относительно ε.

---

[1]См.: Сарычев В. А. Вопросы ориентации искусственных спутников. М.: ВИНИТИ, 1978. — (Итоги науки и техники. Сер. «Исследование космического пространства»; Т. 11).

[2]Мы не даем здесь обоснования исследования колебаний при резонансе и в случае, близком к резонансному. О строгом обосновании излагаемой процедуры см. статьи: Маркеев А. П., Чеховская Т. Н. О резонансных периодических решениях гамильтоновых систем, рождающихся из положения равновесия // ПММ. 1982. Т. 46, вып. 1. С. 27–33.; Холостова О. В. О движении гамильтоновой системы с одной степенью свободы при резонансе в вынужденных колебаниях // Известия РАН. МТТ, 1996, № 3, С. 167–175.

Для приближенного исследования этого уравнения будем применять теорию возмущений (см. § 7 гл. XI). *Положим*

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{\omega_0}} q, \quad \frac{d\xi}{d\nu} = \sqrt{\omega_0} p. \tag{45}$$

Тогда уравнение (44) *может быть записано в эквивалентной форме в виде канонических уравнений с функцией Гамильтона* (q — *координата*, p — *импульс*)

$$H = \frac{1}{2}\omega_0(q^2 + p^2) - \varepsilon^2 \left(\frac{1}{6} q^4 + \frac{2 \sin \nu}{\sqrt{\omega_0}} q \right) + \ldots \tag{46}$$

Введем новые канонически сопряженные переменные Q, P *при помощи унивалентного канонического преобразования* (см. пример 6 п. 170)

$$q = \sqrt{2P} \sin Q, \quad p = \sqrt{2P} \cos Q. \tag{47}$$

Тогда

$$\begin{aligned} H = \omega_0 P - \varepsilon^2 \Big\{ & \frac{1}{12} P^2 (3 - 4 \cos 2Q + \cos 4Q) + \\ & + \sqrt{\frac{2P}{\omega_0}} [\cos(Q - \nu) - \cos(Q + \nu)] \Big\} + \ldots \end{aligned} \tag{48}$$

Для упрощения уравнений движения введем переменные Q^*, P^* *при помощи близкого к тождественному унивалентного канонического преобразования* Q, $P \to Q^*$, P^*, *задаваемого при помощи производящей функции*

$$QP^* + \varepsilon^2 S_2(Q, P^*, \nu) + \ldots$$

Новая функция Гамильтона H^* *определяется по формуле* (см. п. 174)

$$H^* = H + \varepsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial \nu} + \ldots,$$

в правой части которой старые переменные Q, P *должны быть заменены на их выражения через новые переменные* Q^*, P^*, *получаемые из равенств*

$$Q^* = Q + \varepsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial P^*} + \ldots, \quad P = P^* + \varepsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial Q} + \ldots \tag{49}$$

Вычисления показывают, что если функцию S_2 *взять в виде*

$$S_2 = -\sqrt{\frac{2P^*}{\omega_0}} \frac{1}{\omega_0 + 1} \sin(Q + \nu) - \frac{1}{48\omega_0} P^{*2} (8 \sin 2Q - \sin 4Q),$$

то

$$H^* = \omega_0 P^* - \varepsilon^2 \left[\frac{1}{4} P^{*2} + \sqrt{\frac{2P^*}{\omega_0}} \cos(Q^* - \nu) \right] + \ldots \tag{50}$$

Сделаем еще одну каноническую замену Q^*, $P^* \to \Psi$, R *по формулам*

$$Q^* = \Psi + \nu, \quad P^* = R. \tag{51}$$

Тогда, учитывая равенство (43) *и пренебрегая членами выше второго порядка малости относительно* ε *и* μ, *получаем приближенное выражение для новой функции Гамильтона в виде*

$$\mathcal{H} = \mu R - \varepsilon^2 \left(\frac{1}{4} R^2 + \sqrt{2R} \cos \Psi \right). \tag{52}$$

Соответствующая приближенная система дифференциальных уравнений второго порядка, описывающая плоское движение твердого тела при резонансе или в случае, близком к резонансному, имеет вид

$$\frac{d\Psi}{d\nu} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial R} = \mu - \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} R + \frac{1}{\sqrt{2R}} \cos \Psi \right), \quad \frac{dR}{d\nu} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Psi} = -\varepsilon^2 \sqrt{2R} \sin \Psi. \tag{53}$$

Эта система уравнений имеет первый интеграл $\mathcal{H} = h = const$ *и, следовательно, интегрируется в квадратурах.*

Если $\omega_0 = 1$ (*т. е.* $\mu = 0$), *то при описании движения тела в рамках линеаризованных уравнений движения мы получаем, что отклонение тела от его равновесного положения* $\varphi = 0$ *неограниченно возрастает со временем, так как уравнение* (41) *имеет частное решение вида* (36) (*при* $\omega = \omega_0$, $a = 2$). *При нелинейной трактовке задачи о движении твердого тела при резонансе ситуация иная. В самом деле, пусть в начальный момент* $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$. *Тогда* (*с погрешностью, порядок которой не ниже чем* ε^3) *и* $R = 0$ *при* $t = 0$. *Следовательно, в интеграле* $\mathcal{H} = h$ *постоянная* h *равна нулю и во все время движения*

$$\frac{1}{4} R^2 + \sqrt{2R} \cos \Psi = 0.$$

Учитывая, что $|\cos \Psi| \leqslant 1$, *получаем отсюда, что* $R \leqslant R_{max} = 2^{5/3}$. *Если учесть цепочку замен переменных, при помощи которых исходное уравнение движения* (37) *приведено к приближенной системе* (53), *то получим, что отклонение угла* φ *от его равновесного значения* $\varphi = 0$ *не превосходит величины* $\sqrt{2R_{max}} e^{1/3} = 2\sqrt[3]{2e}$.

Решения $R = R_0 = \text{const}$, $\Psi = \Psi_0 = \text{const}$ *системы* (53) *отвечают* 2π*-периодическим колебаниям спутника в исходных переменных. Из* (53) *следует, что* Ψ_0 *может равняться только 0 или* π, *а величина* R_0 *может быть найдена из уравнения третьей степени*

$$u^3 + 3cu^2 + 2b = 0 \quad (u = \sqrt{2R_0}\cos\Psi_0). \tag{54}$$

Здесь

$$c = -\frac{4\mu}{3\varepsilon^2} = -\frac{4\mu}{3e^{2/3}}, \quad b = 2.$$

Уравнение (54) *имеет один или три вещественных корня в зависимости от того, положителен или отрицателен дискриминант* $D = b^2 + c^3$ *этого уравнения*[1]. *Отсюда следует, что при выполнении неравенства*

$$e > \frac{4\sqrt{3}}{9}\mu^{3/2} \tag{55}$$

существует одно, а при обратном знаке в неравенстве (55) — *три периодических движения твердого тела, переходящих при* $e = 0$ *в его равновесное положение* $\varphi = 0$ *в орбитальной системе координат*[2].

Отметим, что при точном резонансе, когда $\mu = 0$, *существует только одно* 2π*-периодическое колебание тела и, согласно* (54), *амплитуда этого колебания равна* $\sqrt[3]{4e}$.

[1] См. гл. 9 книги: Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука,1975.

[2] Условие (55) иным путем получено в гл. 2 монография: Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.

Глава XV
Устойчивость движения

§ 1. Основные понятия и определения

231. Уравнения возмущенного движения. Определение устойчивости. Пусть уравнения движения механической системы представлены в виде системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(y_1,\ y_2, \dots,\ y_m,\ t) \quad (i = 1,\ 2, \dots,\ m), \tag{1}$$

правые части которых удовлетворяют условиям существования и единственности решения.

Рассмотрим движение механической системы, которому отвечает некоторое частное решение системы (1)

$$y_i^* = f_i(t) \quad (i = 1,\ 2, \dots,\ m) \tag{2}$$

при начальных условиях

$$y_{i0} = f_i(t_0) \quad (i = 1,\ 2, \dots,\ m). \tag{3}$$

Нас интересует вопрос о движении системы при отклонении начальных условий y_{i0} от значений (3). Решением этого вопроса занимается теория устойчивости движения, элементы которой излагаются в этой главе.

Движение системы, описываемое функциями (2), будем называть *невозмущенным движением.* Все другие движения механической системы, возможные для нее при тех же силах, что и рассматриваемое движение, описываемое формулами (2), будем называть *возмущенными движениями.* Разности

$$x_i = y_i - f_i(t) \quad (i = 1,\ 2, \dots,\ m) \tag{4}$$

значений y_i для возмущенного и невозмущенного движений называются *возмущениями.*

Если в уравнениях (1) сделать замену переменных по формулам (4), то получим уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1,\ x_2, \dots,\ x_m,\ t) \quad (i = 1,\ 2, \dots,\ m), \tag{5}$$

которые называются *дифференциальными уравнениями возмущенного движения.* Очевидно, что

$$X_i = Y_i(x_1 + f_1(t),\ x_2 + f_2(t), \dots,\ x_m + f_m(t),\ t) - \\ - Y_i(f_1(t),\ f_2(t), \dots,\ f_m(t),\ t).$$

Уравнения (5) имеют частное решение $x_i \equiv 0$ $(i = 1,\ 2, \dots,\ m)$, отвечающее невозмущенному движению (2). Если функции X_i явно не зависят от t, то невозмущенное движение будем называть *установившимся*, в противном случае — *неустановившимся.*

Примем следующее определение Ляпунова. Невозмущенное движение называется *устойчивым* по отношению к переменным y_i $(i = 1,\ 2, \dots,\ m)$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для всех возмущенных движений, для которых в начальный момент времени t_0 выполняются неравенства

$$|x_i(t_0)| < \delta \quad (i = 1,\ 2, \dots,\ m), \tag{6}$$

при всех $t > t_0$ выполняются неравенства

$$|x_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1,\ 2, \dots,\ m). \tag{7}$$

Дадим еще определение асимптотической устойчивости в смысле Ляпунова. Невозмущенное движение называется *асимптотически устойчивым* по отношению к переменным y_i $(i = 1,\ 2, \dots,\ m)$, если оно устойчиво и число δ можно выбрать настолько малым, что для всех возмущенных движений, удовлетворяющих неравенствам (6), будут выполняться условия

$$\lim_{t \to \infty} x_i(t) = 0 \quad (i = 1,\ 2, \dots,\ m). \tag{8}$$

232. Функции Ляпунова. Наиболее эффективным методом исследования устойчивости движения является прямой метод Ляпунова. Этот метод не предполагает нахождения тех или иных решений уравнений возмущенного движения, а связан с отысканием некоторых функций V переменных $x_1,\ x_2, \dots,\ x_m,\ t$ и изучением свойств самих этих функций и их производных. Функции V будем в дальнейшем называть *функциями Ляпунова.* В основе прямого метода Ляпунова лежат соображения, использованные Дирихле в его доказательстве теоремы Лагранжа об устойчивости положения равновесия консервативной системы (см. п. 225).

Для простоты будем изучать только установившиеся движения. Функции $X_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ в уравнениях возмущенного движения (5) считаем непрерывными в области

$$|x_i| < H \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{9}$$

где H — некоторая постоянная, и такими, что уравнения (5) при начальных значениях x_{i0} из области (9) допускают единственное решение.

В области $|x_i| < h$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, где h — достаточно малое положительное число, будем рассматривать функции $V(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, предполагая их непрерывно дифференцируемыми, однозначными и обращающимися в нуль в начале координат $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$.

Производной dV/dt функции V в силу уравнений возмущенного движения (5) называется выражение

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i. \tag{10}$$

Следовательно, dV/dt будет также функцией переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$, которая непрерывна в области $|x_i| < h$ и обращается в нуль при $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$.

Кроме того, функции V могут обладать более специальными свойствами. Введем некоторые определения.

Функцию $V(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ назовем *определенно-положительной* в области $|x_i| < h$, если всюду в этой области, кроме начала координат (где функция V равна нулю), выполняется неравенство $V > 0$. Если же выполняется неравенство $V < 0$, то функция V называется *определенно-отрицательной*. В том и другом случае функция V называется *знакоопределенной*.

Если в области $|x_i| < h$ функция V может принимать значения только одного знака ($V \geqslant 0$ или $V \leqslant 0$), но может обращаться в нуль не только в начале координат, то она называется *знакопостоянной* (*положительной* или *отрицательной*).

Если в области $|x_i| < h$ функция V может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то она называется *знакопеременной* в этой области.

Например, при $m = 2$ функция $V = x_1^2 - x_2^2$ знакопеременна, а функция $V = x_1^2 + x_2^2$ определенно-положительна; функция же $V = x_1^2$ знакопостоянна, так как она обращается в нуль на оси Ox_2, а вне этой оси положительна.

Как узнать, будет функция V знакоопределенной или нет? Если V представляет собой квадратичную форму, то знакоопределенность ее

можно установить при помощи известного критерия Сильвестра. Если V — форма нечетной степени, то она, очевидно, будет знакопеременной функцией. В приложениях V часто бывает аналитической функцией в области $|x_i| < h$, если h — достаточно малая величина. В таких случаях при решении вопроса о знакоопределенности функции бывает полезно следующее легко доказываемое утверждение [1]: если величина h достаточно мала, то в области $|x_i| < h$ знакоопределенность и знакопеременность формы сохраняются при добавлении к ней любой совокупности членов более высокого порядка.

При достаточно малых значениях $|c|$ поверхность $V(x_1, x_2, \dots x_m) = c$, где V — знакоопределенная функция, является замкнутой поверхностью, содержащей внутри себя начало координат. Для доказательства примем для определенности, что V определенно-положительна, и обозначим a точную нижнюю грань функции V на границе области $|x_i| < h$. Так как функция V определенно-положительна, то $a > 0$. Итак, на границе области $|x_i| < h$ $V \geqslant a$. Рассмотрим теперь значения функции V на непрерывной кривой, соединяющей начало координат с какой-либо точкой, лежащей на границе области $|x_i| < h$. В начале этой кривой $V = 0$, а в конце кривой значения функции не меньше чем a. В силу непрерывности функции V в некоторой точке рассматриваемой кривой V обязательно принимает значение c, если только $c < a$, что и будем предполагать. Это означает, что выбранная кривая пересекает поверхность $V = c$. Так как рассматриваемая кривая может быть произвольной, то отсюда следует, что поверхность $V = c$ замкнута и окружает начало координат.

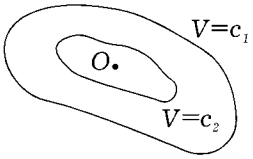

Рис. 174

Если V — определенно-положительная функция и $c_1 > c_2$, то поверхность $V = c_2$ находится внутри поверхности $V = c_1$, причем, в силу однозначности функции V, эти поверхности не имеют общих точек (рис. 174). Если $c \to 0$, то семейство замкнутых поверхностей $V = c$ стягивается в точку, совпадающую с началом координат.

Отметим, что если V будет знакопостоянной или знакопеременной функцией, то поверхности $V = c$ при достаточно малых c разомкнуты.

§ 2. Основные теоремы прямого метода Ляпунова

233. Теорема Ляпунова об устойчивости движения . В этом параграфе рассмотрены теоремы, составляющие основу прямого мето-

[1] См., например, §7 книги; Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.

да Ляпунова в теории устойчивости движения. Будем изучать только установившиеся движения. Сначала рассмотрим теорему Ляпунова об устойчивости.

Теорема. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует знакоопределенная функция V, производная которой $\dot{V}$ в силу этих уравнений является или знакопостоянной функцией противоположного знака с V, или тождественно равной нулю, то невозмущенное движение устойчиво.*

Доказательство.

Пусть, например, V определенно-положительна. Тогда в окрестности

$$|x_i| < h \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ m), \tag{1}$$

где h — достаточно малая величина, точка $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$ будет точкой строгого локального минимума функции V. Так как $\dot{V} \leqslant 0$, то на траекториях уравнений возмущенного движения в области (1) V будет невозрастающей функцией. Дальнейшее доказательство сводится к почти дословному повторению рассуждений, проведенных в п. 225 при доказательстве теоремы Лагранжа.

Теорема Ляпунова дает достаточные условия устойчивости движения. Применение этой теоремы требует знания функции V, обладающей вполне определенными свойствами. Общих методов построения таких функций нет. Однако во многих практически важных случаях функцию V можно построить, если известны первые интегралы уравнений возмущенного движения. Например, при доказательстве теоремы Лагранжа об устойчивости положения равновесия консервативной системы в качестве функции V годилась полная механическая энергия системы E.

Пусть $U_1,\ U_2, \ldots,\ U_k$ — первые интегралы уравнений возмущенного движения. Без ограничения общности можно считать, что функции $U_j(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_m)$ $(j = 1,\ 2, \ldots,\ k)$ обращаются в нуль в начале координат $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$. Пусть ни одна из функций U_j не является знакоопределенной. Будем искать[1] функцию Ляпунова в виде связки первых интегралов U_j $(j = 1,\ 2, \ldots,\ k)$:

$$V = \lambda_1 U_1 + \ldots + \lambda_k U_k + \mu_1 U_1^2 + \cdots + \mu_k U_k^2,$$

где $\lambda_j,\ \mu_j$ $(j = 1,\ 2, \ldots,\ k)$ — неопределенные постоянные. Ясно, что V будет первым интегралом уравнений возмущенного движения.

[1] См.: Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. По вопросу о методе интегральных связок Четаева см. также работу: Пожарицкий Г. К. О построении функции Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения // ПММ. 1958. Т. 22, вып. 2. С. 145–154.

Если постоянные λ_j, μ_j удастся выбрать так, чтобы функция V была определенно-положительной, то она будет удовлетворять всем условиям теоремы Ляпунова об устойчивости движения. При этом в тех случаях, когда первые интегралы U_j ($j = 1, 2, \ldots, k$) могут быть найдены из каких-либо общих соображений (например, при помощи основных теорем динамики), отпадает необходимость составления самих уравнений возмущенного движения, что существенно упрощает исследование.

Пример 1 (Устойчивость стационарных вращений твердого тела в случае Эйлера). *Как показано в п. 99, при стационарных вращениях твердого тела в случае Эйлера вращение происходит с постоянной по величине угловой скоростью вокруг любой из главных осей инерции тела для неподвижной точки. Изучим устойчивость движения, в котором*

$$p = \omega = \text{const}, \quad q = 0, \quad r = 0. \tag{2}$$

Движение (2) *соответствует вращению вокруг оси, отвечающей моменту инерции A. Как показано в п. 98, динамические уравнения Эйлера имеют два первых интеграла*

$$U_1 = 2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2, \quad U_2 = K_0^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2. \tag{3}$$

Введем возмущения x, y, z по формулам

$$p = \omega + x, \quad q = y, \quad r = z. \tag{4}$$

Уравнения возмущенного движения будут иметь первые интегралы

$$U_1 = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A\omega x, \quad U_2 = A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 + 2A^2\omega x, \tag{5}$$

Последние выражения получены путем подстановки p, q, r из (4) *в интегралы* (3) *и отбрасыванием несущественных постоянных в получившихся выражениях для U_1 и U_2.*

Функцию V возьмем в виде

$$V = U_1^2 + U_2^2. \tag{6}$$

Ясно, что значения функции V неотрицательны при любых x, y, z. Покажем, что если A — наименьший или наибольший из моментов инерции, то функция V определенно-положительна. Для этого достаточно показать, что при малых x, y, z система уравнений

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0 \tag{7}$$

имеет единственное решение $x = y = z = 0$ *Из системы* (7) *следует, что*

$$AU_1 - U_2 \equiv B(A-B)y^2 + C(A-C)z^2 = 0.$$

Если A *— наименьший или наибольший из моментов инерции, то последнее равенство возможно только когда* $y = z = 0$. *Из* (7) *тогда следует, что* $x = 0$ *или* $x = -2\omega$, *и при достаточно малых* x, y, z *система* (7) *имеет единственное решение* $x = y = z = 0$.

Следовательно, стационарные вращения твердого тела в случае Эйлера вокруг оси наименьшего или наибольшего из моментов инерции устойчивы в смысле Ляпунова по отношению к возмущениям величин p, q, r. *Этот факт хорошо иллюстрируется картиной расположения полодий на эллипсоиде инерции* (см. рис. 99): *вблизи осей* Ox *и* Oz *эллипсоида инерции, отвечающих наибольшему и наименьшему моментам инерции, полодии являются замкнутыми кривыми, охватывающими соответствующие оси. Напротив, вблизи оси* Oy, *отвечающей среднему по величине моменту инерции, полодии не охватывают этой оси, и при малом возмущении стационарного вращения вокруг оси* Oy *вектор угловой скорости с течением времени покидает окрестность этой оси. Ниже в п.* 235 *мы строго докажем неустойчивость стационарного вращения вокруг оси среднего по величине момента инерции тела.*

Пример 2 (Устойчивость вращения тяжелого тела вокруг неподвижной точки в случае Лагранжа[1]). *Движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки описывается системой дифференциальных уравнений* (32), (35) *п.* 105. *В случае Лагранжа* $A = B$, $a = b = 0$ *и уравнения движения имеют четыре первых интеграла*

$$\begin{aligned} U_1 &= A(p^2+q^2) + Cr^2 + 2Pc\gamma_3 = \text{const}, \\ U_2 &= A(p\gamma_1 + q\gamma_2) + Cr\gamma_3 = \text{const}, \\ U_3 &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \\ U_4 &= r = \text{const}. \end{aligned} \tag{8}$$

Уравнения движения имеют частное решение

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = r_0 = \text{const}, \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \tag{9}$$

которому отвечает вращение твердого тела вокруг вертикально расположенной оси Oz *с постоянной угловой скоростью* r_0. *Рассмотрим устойчивость такого движения тела по отношению к возмущениям величин* p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3. *Положим*

$$p = x_1, \quad q = x_2, \quad r = r_0 + x_3, \quad \gamma_1 = x_4, \quad \gamma_2 = x_5, \quad \gamma_3 = 1 + x_6.$$

[1] См.: Четаев Н. Г. Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа // ПММ.—1954.—Т. 18, вып. 1. — С. 123–124.

Отсюда и из (8) *получаем, что дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют следующие первые интегралы:*

$$\begin{aligned} U_1 &= A(x_1^2 + x_2^2) + C(x_3^2 + 2r_0x_3) + 2Pcx_6 = \text{const}, \\ U_2 &= A(x_1x_4 + x_2x_5) + C(x_3x_6 + x_3 + r_0x_6) = \text{const}, \\ U_3 &= x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + 2x_6 = \text{const}, \\ U_4 &= x_3 = \text{const}. \end{aligned} \tag{10}$$

Для получения условий устойчивости ищем функцию Ляпунова V в виде квадратичной связки первых интегралов (10) (λ — *неопределенная вещественная постоянная*)

$$V = U_1 + 2\lambda U_2 - (Pc + Cr_0\lambda)U_3 + \frac{C(C-A)}{A}U_4^2 - 2(r_0 + \lambda)CU_4.$$

Функцию V можно представить в виде суммы трех квадратичных форм:

$$V = f(x_1,\ x_4) + f(x_2,\ x_5) + f(\frac{C}{A}x_3,\ x_6), \tag{11}$$

где

$$f(x,\ y) = Ax^2 + 2\lambda Axy - (Pc + Cr_0\lambda)y^2. \tag{12}$$

Из критерия Сильвестра получаем, что квадратичная форма (12) *определенно-положительна при выполнении неравенства*

$$A\lambda^2 + Cr_0\lambda + Pc < 0, \tag{13}$$

которое для вещественных λ может удовлетворяться только тогда, когда

$$C^2r_0^2 > 4APc. \tag{14}$$

При условии (14) *постоянную λ можно подобрать так, чтобы удовлетворялось неравенство* (13). *Тогда квадратичные формы в выражении* (11) *будут определенно-положительными, каждая относительно «своих» переменных, а функция V будет определенно-положительна относительно всех переменных x_i* ($i = 1,\ 2, \ldots,\ 6$). *Таким образом, согласно теореме Ляпунова, условие* (14) *будет достаточным для устойчивости движения* (9) *по отношению к возмущениям величин p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3.*

Условие (14) *называют условием Маиевского–Четаева. Отметим, что если $c < 0$ («висящее» твердое тело; центр масс расположен ниже*

точки подвеса), то условие (14) *всегда выполнено, а если* $c > 0$, *то для выполнения условия* (14) *требуется, чтобы угловая скорость вращения тела вокруг вертикали превосходила величину, равную* $\dfrac{\sqrt{4APc}}{C}$.

234. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. Ляпунов получил следующую теорему, дающую достаточные условия асимптотической устойчивости движения.

Теорема. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует знакоопределенная функция* $V(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, *производная которой* $\dot{V}$ *в силу этих уравнений есть знакоопределенная функция противоположного знака с* V, *то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.*

Прежде чем доказывать эту теорему, обратим внимание на дополнительное, по сравнению с теоремой предыдущего пункта, условие, которое обеспечивает асимптотическую устойчивость невозмущенного движения. Это условие состоит в том, что производная $\dot{V}$ должна быть знакоопределенной функцией противоположного с V знака. В предыдущем же пункте функция $\dot{V}$ была лишь знакопостоянной.

Переходя к доказательству, заметим сначала, что если условия сформулированной теоремы выполнены, то выполнены и условия теоремы Ляпунова из предыдущего пункта, а значит, невозмущенное движение устойчиво. Согласно определению асимптотической устойчивости, нам надо только доказать, что всякое возмущенное движение, для которого начальные возмущения достаточно малы, асимптотически приближается к невозмущенному, т. е. что

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = 0. \tag{15}$$

Без ограничения общности будем считать, что функция V определенно-положительна; тогда в области (1) $V \geqslant 0$, а $\dot{V} \leqslant 0$, причем знаки равенства возможны только при $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$. Рассмотрим какое-либо возмущенное движение, которому отвечают настолько малые начальные значения $x_{i0} = x_i(t_0)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, что поверхность $V = V_0$, где $V_0 = V(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{m0})$, лежит в области

$$|x_i| < \varepsilon, \tag{16}$$

где $\varepsilon < h$. Такой выбор величин x_{i0} всегда возможен ввиду непрерывности функции V. Покажем, что тогда возмущенные движения $x_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ удовлетворяют условиям (15), т. е. невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

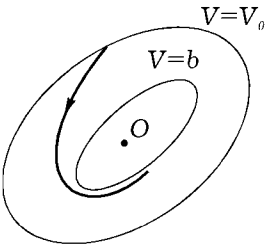

Рис. 175

Действительно, при $\varepsilon < h$ в области (16) функция $\dot{V}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$ остается отрицательной, не обращаясь в нуль ни при каких значениях t. Это следует из того, что, в силу единственности решения уравнений возмущенного движения при заданных начальных условиях, функции $x_i(t)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ не могут все одновременно обратиться в нуль при каком-либо значении $t = t^*$; в противном случае было бы два разных решения с нулевыми значениями при $t = t^*$: рассматриваемое и тривиальное $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$. Так как $\dot{V} < 0$, то функция $V(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$ монотонно убывает, оставаясь положительной. Но так как функция V ограниченная, то существует предел

$$\lim_{t\to\infty} V(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) = b \geqslant 0.$$

В m-мерном пространстве $x_1, x_2, \dots, x_m$ траектория уравнений возмущенного движения стремится к поверхности $V = b$, оставаясь вне ее (рис. 175).

Покажем, что $b = 0$, т. е. поверхность $V = b$ вырождается в точку $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$ и, следовательно, невозмущенное движение асимптотически устойчиво. Предположим обратное, т. е. что $b \neq 0$. Пусть $-d$ — точная верхняя грань функции $\dot{V}$ в замкнутой области, границами которой являются поверхности $V = b$ и $V = V_0$, т. е. в этой области

$$\dot{V} \leqslant -d. \tag{17}$$

Отсюда следует, что

$$V(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) = V_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{V}\, dt \leqslant V_0 - d(t - t_0), \tag{18}$$

но это невозможно, так как при выполнении неравенства (18) определенно-положительная функция $V(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$ для достаточно больших t должна была бы стать отрицательной. Противоречие доказывает теорему.

Пример 1 (Асимптотическая устойчивость равновесия твердого тела, имеющего неподвижную точку, в среде с сопротивлением). *Пусть тело вращается вокруг неподвижной точки O в среде, создающей*

момент сопротивления

$$\boldsymbol{M}_0 = -f(\omega)\cdot\boldsymbol{\omega}, \tag{19}$$

где $f(\omega) > 0$. *Если существуют другие силы, приложенные к твердому телу, то их главный момент относительно точки* O *считаем равным нулю. Динамические уравнения Эйлера имеют вид*

$$\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr &= -f(\omega)p, \\ B\frac{dq}{dt} + (A-C)rp &= -f(\omega)q, \\ C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq &= -f(\omega)r. \end{aligned} \tag{20}$$

Уравнения (20) *имеют частное решение* $p = q = r = 0$, *отвечающее покою тела. Рассмотрим устойчивость этого частного движения тела по отношению к переменным* p, q, r.

Так как в невозмущенном движении $p = q = r = 0$, *то уравнения* (20) *будут дифференциальными уравнениями возмущенного движения. В качестве функции Ляпунова возьмем кинетическую энергию тела*

$$V = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2). \tag{21}$$

Для производной функции V *получаем выражение*

$$\dot{V} = -f(\omega)(p^2 + q^2 + r^2). \tag{22}$$

Так как V *— определенно-положительная, а* $\dot{V}$ *— определенно-отрицательная функции, то, согласно теореме Ляпунова, равновесие твердого тела в среде, создающей момент сопротивления* (9), *асимптотически устойчиво по отношению к переменным* p, q, r.

235. Теоремы о неустойчивости. В этом пункте рассмотрены три теоремы о неустойчивости движения, полученные Ляпуновым и Четаевым. Исторически сначала были получены две теоремы Ляпунова. Эти теоремы были обобщены Четаевым, получившим теорему, которая нашла широкое применение при решении задачи об устойчивости в конкретных задачах механики, а также в теоретических исследованиях вопросов устойчивости. Мы сначала изложим теорему Четаева и затем выведем из нее обе теоремы Ляпунова о неустойчивости движения.

Переходя к изложению теорем, заметим, что для обнаружения неустойчивости невозмущенного движения достаточно установить существование хотя бы одной траектории уравнений возмущенного движения, отвечающей сколь угодно малым значениям начальных возмущений и покидающей в некоторый момент времени окрестность начала

координат, определяемую неравенствами (1), в которых h — некоторая заданная величина.

Введем определение. *Областью* $V > 0$ назовем какую-либо область окрестности (1), в которой $V(x_1, x_2, \dots, x_m) > 0$. Поверхность $V = 0$ назовем *границей области* $V > 0$.

Теорема (Четаева о неустойчивости). *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует функция $V(x_1, x_2, \dots, x_m)$ такая, что в сколь угодно малой окрестности (1) существует область $V > 0$ и во всех точках области $V > 0$ производная $\dot{V}$ в силу этих уравнений принимает положительные значения, то невозмущенное движение неустойчиво.*

Доказательство.

Зададимся окрестностью (1) начала координат. Выберем начальную точку $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}$ какой-либо траектории уравнений возмущенного движения в области $V > 0$. Так как граница области $V > 0$ проходит через точку $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$, то начальную точку можно взять сколь угодно близко к началу координат (см. рис. 176, где $m = 2$).

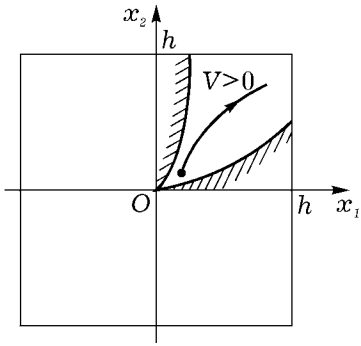

Рис. 176

Так как по условию теоремы в области $V > 0$ производная $\dot{V}$ положительна, то вдоль выбранной траектории функция V монотонно возрастает. Следовательно, при $t > t_0$ будем иметь

$$V(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) > V_0 > 0,$$

где $V_0 = V(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})$. Поэтому траектория, начавшаяся в точке $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}$, не может выйти из области $V > 0$ через ее границу $V = 0$. Покажем, что с течением времени траектория выйдет из окрестности (1). Предположим обратное, т. е. что траектория при всех t остается внутри окрестности (1). Но тогда она должна находиться в области $V > 0$. Но это невозможно. Действительно, функция V, как непрерывная и не зависящая явно от t, будет в области (1) при достаточно малых h ограничена, т. е.

$$V \leqslant L, \tag{23}$$

где L — некоторое положительное число. В области G, являющейся пересечением областей $V > 0$ и $V > V_0$, функция $\dot{V}$ положительна и

тоже ограничена. Пусть l — точная нижняя грань функции $\dot{V}$ в этой области. Тогда при всех $t > t_0$

$$\dot{V} \geqslant l > 0. \tag{24}$$

Отсюда следует, что

$$V(x_1(t),\ x_2(t), \dots,\ x_m(t)) \geqslant V_0 + l(t - t_0),$$

т. е. с течением времени функция V неограниченно возрастает, а это противоречит неравенству (23). Противоречие доказывает теорему.

Функцию V, удовлетворяющую теореме Четаева о неустойчивости, называют *функцией Четаева.*

Пример 1 (Неустойчивость стационарного вращения твердого тела в случае Эйлера вокруг оси среднего по величине момента инерции[1]). *Рассмотрим устойчивость вращения* (2) *твердого тела в случае Эйлера, предполагая, что ось вращения отвечает среднему по величине главному моменту инерции тела для неподвижной точки O. Для определенности будем считать, что $C > A > B$ и $\omega > 0$.*

Введя возмущения x, y, z по формулам (4), *из динамических уравнении Эйлера получим дифференциальные уравнения возмущенного движения в виде*

$$\dot{x} = \frac{B - C}{A} yz, \quad \dot{y} = \frac{C - A}{B}(\omega + x)z, \quad \dot{z} = \frac{A - B}{C}(\omega + x)y. \tag{25}$$

Производная функции $V = yz$ в силу уравнений (25) *будет такой:*

$$\dot{V} = (\omega + x)\left(\frac{C - A}{B} z^2 + \frac{A - B}{C} y^2\right). \tag{26}$$

Если $\omega + x > 0$, то в области $V > 0$, определяемой неравенствами $y > 0, z > 0$, производная $\dot{V}$ положительна. На основании теоремы Четаева отсюда следует вывод о неустойчивости вращения тела вокруг оси, отвечающей среднему по величине моменту инерции.

Теперь получим теоремы Ляпунова о неустойчивости.

Теорема (Первая теорема Ляпунова о неустойчивости движения). *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует функция $V(x_1,\ x_2, \dots,\ x_m)$ такая, что ее производная $\dot{V}$ в силу этих уравнений есть функция знакоопределенная, а сама функция V не является знакопостоянной, противоположного с $\dot{V}$ знака, то невозмущенное движение неустойчиво.*

[1] См. уже упомянутую книгу Н. Г. Четаева «Устойчивость движения. Работы по аналитической механике».

Доказательство.

Достаточно заметить, что при условиях теоремы 2 выполняются условия теоремы Четаева о неустойчивости. Действительно, пусть функция $\dot{V}$ определенно-положительна. Тогда, в силу того, что V не является знакопостоянной функцией, противоположного с $\dot{V}$ знака, существует область $V > 0$, расположенная сколь угодно близко к началу координат, и в этой области $\dot{V} > 0$.

Теорема (Вторая теорема Ляпунова о неустойчивости движения). *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует функция V такая, что ее производная, в силу этих уравнений, в области* (1) *может быть представлена в виде*

$$\dot{V} = æV + W, \tag{27}$$

где æ — положительная постоянная, а W или тождественно обращается в нуль, или представляет собой знакопостоянную функцию, и если в последнем случае функция V не является знакопостоянной, противоположного с W знака, то невозмущенное движение неустойчиво.

Доказательство.

Как и в предыдущем случае, для доказательства теоремы 3 достаточно проверить, что при выполнении ее условий выполняются также и условия теоремы Четаева о неустойчивости.

Если W тождественно равна нулю, то из (27) сразу следует, что функция $\dot{V}$ положительна в области $V > 0$, которая обязательно существует в сколь угодно малой окрестности начала координат (при необходимости, когда, например, функция V определенно-отрицательна, надо вместо V взять функцию $-V$). Следовательно, если $W \equiv 0$, то условия теоремы Четаева выполнены.

Пусть теперь W не равна тождественно нулю и для определенности будем ее считать знакопостоянной (положительной). Тогда, в силу того, что V не является знакопостоянной, противоположного с W знака, в любой сколь угодно малой окрестности начала координат существует область $V > 0$. Но из (27) при $W \geqslant 0$ следует, что во всей окрестности (1)

$$\dot{V} \geqslant æV.$$

Следовательно, в области $V > 0$ производная $\dot{V}$ положительна. Поэтому и в этом случае условия теоремы Четаева выполнены.

§ 3. Устойчивость по первому приближению

236. Постановка задачи. Будем рассматривать устойчивость установившихся движений. Дифференциальные уравнения возмущен-

ного движения запишем в виде

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \mathbf{A}\boldsymbol{x} + \mathbf{X}(\boldsymbol{x}), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{x}$ — вектор-столбец, $\boldsymbol{x}' = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$; $\mathbf{A}$ — постоянная квадратная матрица m-го порядка; $\mathbf{X}$ — вектор-функция от $x_1, x_2, \ldots, x_m$, $\mathbf{X}' = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$; функции $X_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ будем считать аналитическими в окрестности начала координат $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$, причем их разложения в ряды начинаются с членов не ниже второго порядка малости относительно $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

В приложениях вопрос об устойчивости движения очень часто исследуется при помощи уравнений первого приближения

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \mathbf{A}\boldsymbol{x}, \tag{2}$$

которые получаются из полных уравнений возмущенного движения (1), если в последних отбросить нелинейные относительно $x_1, x_2, \ldots, x_m$ члены.

Рассмотрим уравнения (2) подробнее. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — корни характеристического уравнения[1]

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0, \tag{3}$$

а $\boldsymbol{h}_j$ — собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, отвечающий корню λ_j.

Если матрица $\mathbf{A}$ приводится к диагональной форме, то существуют m линейно независимых собственных векторов и общее решение системы (1) имеет вид[2]

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{m} c_j \boldsymbol{h}_j e^{\lambda_j t}, \tag{4}$$

где c_j — произвольные постоянные.

Если же матрица $\mathbf{A}$ к диагональной форме не приводится, то общее решение системы (2) будет записываться в виде

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{m} c_j \boldsymbol{k}_j e^{\lambda_j t}, \tag{5}$$

[1] Среди величин $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ могут быть и равные.

[2] См., например, гл. 2 учебника: Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970.

где компоненты векторов $\boldsymbol{k}_j$ являются многочленами относительно t. Например, общее решение системы

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = \lambda x_2$$

имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\| = c_1 \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\| e^{\lambda t} + c_2 \left\| \begin{matrix} t \\ 1 \end{matrix} \right\| e^{\lambda t}.$$

Если бы уравнения возмущенного движения были линейными, то по их общему решению, (4) или (5), вопрос об устойчивости невозмущенного движения решался бы очень просто; в частности, необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости была бы отрицательность вещественных частей всех корней характеристического уравнения; при наличии же хотя бы одного корня с положительной вещественной частью движение было бы неустойчивым.

Но, как правило, уравнения возмущенного движения нелинейны. Поэтому возникает задача об определении условий, при которых выводы об устойчивости, полученные из анализа уравнений первого приближения (2), справедливы и для полных уравнений возмущенного движения (1) при любых нелинейных членах X_1, $X_2, \ldots$, X_m. Эта задача была полностью решена Ляпуновым.

237. Теорема об устойчивости по первому приближению. Один из основных результатов, полученных Ляпуновым при решении задачи об устойчивости по первому приближению, можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. *Если все корни характеристического уравнения* (3) *имеют отрицательные вещественные части, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво независимо от нелинейных членов в* (1). *Если же среди корней характеристического уравнения есть хотя бы один с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво — тоже независимо от нелинейных членов в* (1).

Доказательство.

Если в уравнениях (1) сделать замену переменных по формуле

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{C}\boldsymbol{y} \quad (\det \mathbf{C} \neq 0), \tag{6}$$

то они станут такими:

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \mathbf{B}\boldsymbol{y} + \mathbf{Y}(\boldsymbol{y}), \tag{7}$$

где $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$, а $\mathbf{Y}(\boldsymbol{y}) = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{X}(\mathbf{C}\boldsymbol{y})$. Матрицу $\mathbf{C}$ (которая, вообще говоря, комплексная) выберем так, чтобы матрица $\mathbf{B}$ была нормальной

жордановой формой матрицы $\mathbf{A}$, т. е. чтобы матрица $\mathbf{B}$ состояла из одной или нескольких жордановых клеток, расположенных по ее главной диагонали, а все элементы, не входящие в жордановы клетки, равнялись бы нулю[1]:

$$\mathbf{B} = \left\| \begin{array}{cccc} \boxed{\mathbf{J}_1} & & & \\ & \boxed{\mathbf{J}_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\mathbf{J}_m} \end{array} \right\|, \quad \mathbf{J}_k = \left\| \begin{array}{cccccc} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{array} \right\|$$

В уравнениях (7) сделаем еще одну вспомогательную замену переменных по формулам

$$y_j = \mu^j z_j \quad (j = 1,\ 2, \dots,\ m),$$

где μ — положительное, вообще говоря, малое число; условие для более конкретного его выбора будет видно из дальнейшего. В переменных $z_1,\ z_2, \dots,\ z_m$ система (7) запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \lambda_1 z_1 + \mu a_1 z_2 + Z_1, \\ \frac{dz_2}{dt} &= \qquad\quad \lambda_2 z_2 + \mu a_2 z_3 + Z_2, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dz_m}{dt} &= \qquad\qquad\quad \lambda_m z_m + Z_m. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь a_j, равняется 0 или 1; $Z_1,\ Z_2, \dots,\ Z_m$ — нелинейные члены относительно переменных $z_1,\ z_2, \dots,\ z_m$, являющихся, вообще говоря, комплексными.

Пусть r_j и s_j — действительная и мнимая части корня λ_j характеристического уравнения (3), т. е. $\lambda_j = r_j + is_j$ $(j = 1,\ 2, \dots,\ m)$; здесь i — мнимая единица.

а) Пусть $r_j < 0$ для всех $j = 1,\ 2, \dots,\ m$. Для доказательства асимптотической устойчивости невозмущенного движения рассмотрим функцию

$$V = \sum_{j=1}^{m} z_j \overline{z}_j, \tag{9}$$

[1]См. гл. 6 книги: Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.

где чертой обозначена комплексно сопряженная величина. Функция (9) является определенно-положительной функцией исходных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Для ее производной в силу уравнений (8) получаем выражение

$$\dot{V} = 2\sum_{j=1}^{m} r_j z_j \overline{z}_j + \mu F + \sum_{j=1}^{m} (\overline{z}_j Z_j + z_j \overline{Z}_j), \tag{10}$$

где F — вещественная квадратичная форма, которая тождественно равна нулю, если все коэффициенты a_j в системе (8) равны нулю, т. е. если матрица A приводится к диагональной форме.

Функция (10) является вещественной функцией исходных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Так как $r_j < 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, то квадратичная часть функции $\dot{V}$ будет определенно-отрицательной функцией, если число μ достаточно мало. А так как последняя сумма в правой части выражения (10) содержит совокупность членов не ниже третьего порядка, то и вся функция V при достаточно малых μ будет определенно-отрицательной.

На основании теоремы Ляпунова об асимпотической устойчивости получаем отсюда вывод об асимптотической устойчивости невозмущенного движения, если вещественные части всех корней характеристического уравнения отрицательны.

б) Пусть теперь $r_1 > 0$, $r_2 > 0, \ldots, r_k > 0$, $r_{k+1} \leqslant 0, \ldots, r_m \leqslant 0$. Для доказательства неустойчивости невозмущенного движения воспользуемся второй теоремой Ляпунова о неустойчивости. Пусть

$$V = -\sum_{j=1}^{k} z_j \overline{z}_j + \sum_{j=k+1}^{m} z_j \overline{z}_j. \tag{11}$$

Ее производную в силу уравнений (8)

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -2\sum_{j=1}^{k} r_j z_j \overline{z}_j + 2\sum_{j=k+1}^{m} r_j z_j \overline{z}_j + \mu G - \\ & - \sum_{j=1}^{k} (\overline{z}_j Z_j + z_j \overline{Z}_j) + \sum_{j=k+1}^{m} (\overline{z}_j Z_j + z_j \overline{Z}_j) \end{aligned}$$

можно записать в виде

$$\dot{V} = æV + W, \tag{12}$$

где æ — пока неопределенное положительное число, а

$$W = \sum_{j=1}^{k}(æ - 2r_j)z_j\overline{z}_j + \sum_{j=k+1}^{m}(2r_j - æ)z_j\overline{z}_j + \mu G - \\ - \sum_{j=1}^{k}(\overline{z}_j Z_j + z_j\overline{Z}_j) + \sum_{j=k+1}^{m}(\overline{z}_j Z_j + z_j\overline{Z}_j). \tag{13}$$

Здесь G — квадратичная форма, появляющаяся в выражении для $\dot{V}$ тогда, когда не все коэффициенты a_j в системе (8) равны нулю.

Выберем число æ так, чтобы для $j = 1, 2, \ldots, k$ выполнялись неравенства $0 < æ < 2r_j$. Тогда при достаточно малых μ функция W будет определенно-отрицательной. Но функция V, очевидно, знакопеременная и, следовательно, не является знакопостоянной, противоположного с W знака. На основании второй теоремы Ляпунова о неустойчивости получаем отсюда вывод о том, что при наличии хотя бы одного корня характеристического уравнения с положительной вещественной частью невозмущенное движение неустойчиво. Теорема доказана.

Замечание 1. *Ляпунов также показал*[1], *что если у характеристического уравнения* (3) *нет ни одного корня с положительной вещественной частью, но есть корни, у которых вещественная часть равна нулю, то можно так подобрать нелинейные члены в уравнениях возмущенного движения* (1), *чтобы имела место устойчивость или неустойчивость, по желанию.*

Все случаи, которые могут представиться при решении задачи об устойчивости, можно разбить на некритические и критические. В некритических случаях вопрос об устойчивости решается рассмотрением уравнений первого приближения (2). В критических случаях уравнений первого приближения недостаточно: для решения задачи об устойчивости обязательно требуется привлечение нелинейных членов в уравнениях возмущенного движения (1). Из доказанной выше теоремы следует, что критическими будут те и только то случаи, когда характеристическое уравнение (2) не имеет корней с положительными вещественными частями, но имеет корни с вещественными частями, равными нулю.

238. Критерий Рауса–Гурвица. Для практического использования теоремы об устойчивости по первому приближению важно определить знаки вещественных частей характеристического уравнения. В частности, желательно иметь критерий, позволяющий по коэффициен-

[1] Ляпунов А. М. К вопросу об устойчивости движения // Собр. соч. Т. 2, М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 267–271.

там характеристического уравнения определить, будут ли все его корни иметь отрицательные вещественные части или нет.

Запишем характеристическое уравнение (3) в виде

$$a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\lambda + a_m = 0. \tag{14}$$

Коэффициенты a_0, $a_1, \ldots$, a_m, этого уравнения — вещественные числа. Не ограничивая общности, будем в дальнейшем считать, что старший коэффициент a_0 положителен.

Получим сначала одно очень простое необходимое условие отрицательности вещественных частей всех корней λ_1, $\lambda_2, \ldots$, λ_m уравнения (14): *для того чтобы при* $a_0 > 0$ *все корни уравнения* (14) *имели отрицательные вещественные части, необходимо, чтобы все его коэффициенты были положительны.* Доказательство этого утверждения непосредственно вытекает из формул Виета:

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{a_0} &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m), \\ \frac{a_2}{a_0} &= \lambda_1\lambda_2 + \ldots + \lambda_{m-1}\lambda_m, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \frac{a_m}{a_0} &= (-1)^m\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m. \end{aligned} \tag{15}$$

Но положительность всех коэффициентов уравнения (14) не является достаточным условием того, что его корни имеют отрицательные вещественные части. Необходимое и достаточное условие дается критерием Рауса–Гурвица. Сформулируем соответствующую теорему, не приводя ее доказательства[1]. Назовем *матрицей Гурвица* квадратную матрицу m-го порядка

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_m \end{Vmatrix}. \tag{16}$$

Эта матрица строится следующим образом: по ее главной диагонали стоят коэффициенты a_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ в порядке возрастания значений индекса i; в каждом столбце элементы, стоящие выше главной диагонали, расположены так, что соответствующие им коэффициенты a_j

[1] Доказательство см., например, в гл. 16 книги: Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.; Наука, 1967.

идут в порядке последовательного возрастания индекса j на единицу, а ниже главной диагонали — в порядке последовательного убывания индекса j; те места матрицы, куда при таком правиле образования ее элементов следовало бы вписать коэффициенты a_j для $j < 0$ или $j > m$, заполняются нулями.

Составим главные миноры матрицы (16) (*определители Гурвица*)

$$\Delta_1 = a_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \ldots,\ \Delta_m = a_m \Delta_{m-1}. \quad (17)$$

Теорема (Критерий Рауса–Гурвица). *Для того чтобы все корни уравнения* (14) *с вещественными коэффициентами и положительным старшим коэффициентом* a_0 *имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \ldots, \quad \Delta_m > 0. \quad (18)$$

Отметим, также без доказательства, что если при $a_0 > 0$ хотя бы одно из неравенств (18) имеет противоположный смысл, то уравнение (14) имеет корни, вещественные части которых положительны.

Рассмотрим простейшие частные случаи (везде предполагается, что $a_0 > 0$).

Пример 1 (Уравнение первой степени ($m = 1$)).

$$a_0\lambda + a_1 = 0.$$

Условия (18) *сводятся к неравенству*

$$a_1 > 0. \quad (19)$$

Пример 2 (Уравнение второй степени ($m = 2$)).

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0.$$

Определители Гурвица (17) *будут такими:*

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = a_1 a_2.$$

Условия (18) *запишутся в виде неравенств*

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0. \quad (20)$$

Пример 3 (Уравнение третьей степени).

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0.$$

Здесь

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3, \quad \Delta_3 = a_3 \Delta_2,$$

и условия (18) *означают, что*

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0. \tag{21}$$

Эти неравенства показывают, что при $m > 2$ положительности коэффициентов уравнения (14) *недостаточно для того, чтобы все его корни имели отрицательные вещественные части: при $m = 3$ нужно еще потребовать выполнения неравенства $a_1 a_2 > a_0 a_3$.*

Пример 4 (Уравнение четвертой степени).

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0. \tag{22}$$

Определители Гурвица имеют вид

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3, \quad \Delta_3 = a_3 \Delta_2 - a_4 a_1^2, \quad \Delta_4 = a_4 \Delta_3.$$

Условия отрицательности вещественных корней уравнения (22) *запишутся, как нетрудно проверить, в виде неравенств*

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0, \quad a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_4 a_1^2 > 0. \tag{23}$$

§ 4. Влияние диссипативных и гироскопических сил на устойчивость равновесия консервативной системы

239. Влияние гироскопических сил и диссипативных сил с полной диссипацией на устойчивое положение равновесия голономной системы. В п. 225 отмечалось, что при добавлении к консервативной голономной системе гироскопических и диссипативных сил теорема Лагранжа об устойчивости положения равновесия консервативной системы при наличии строгого локального минимума потенциальной энергии остается справедливой, т. е. устойчивое при одних потенциальных силах положение равновесия системы остается устойчивым и при наличии гироскопических и диссипатипных сил. Это утверждение содержит только часть результатов, полученных Томсоном, Тэтом и Четаевым в задаче о влиянии гироскопических и диссипативных сил на устойчивость положения равновесия голономной консервативной системы. В данном параграфе рассмотрим другие теоремы Томсона–Тэта–Четаева.

Теорема. *Если в некотором изолированном положении равновесия потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то при добавлении гироскопических сил и диссипативных сил с полной диссипацией это положение равновесия становится асимптотически устойчивым.*

Доказательство.

Без ограничения общности будем считать, что в положении равновесия все обобщенные координаты q_i равны нулю. Для доказательства теоремы возьмем функцию V, совпадающую с полной механической энергией системы $E = T + \Pi$. По условию теоремы она будет определенно-положительной в окрестности начала координат $2n$-мерного пространства состояний q_i, $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Из условия теоремы следует, что

$$\dot{V} = N^*(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{i=1}^{n} Q_i^*(q_j, \dot{q}_j)\dot{q}_i \leqslant 0, \tag{1}$$

где Q_i^* — непотенциальная обобщенная сила, отвечающая обобщенной координате q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, и знак равенства достигается только при $\dot{q}_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Из знакоопределенности функции V и неравенства (1) на основании теоремы Ляпунова об устойчивости получаем, что положение равновесия устойчиво. Для доказательства асимптотической устойчивости теперь достаточно убедиться в том, что если начальная точка траектории взята достаточно близко к началу координат $q_i = 0$, $\dot{q}_i = 0$, то при $t \to \infty$ имеем $q_i \to 0$, $\dot{q}_i \to 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть движение происходит в столь малой окрестности начала координат, что последняя не содержит других положений равновесия, кроме $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$, а мощность N^* непотенциальных сил является определенно-отрицательной функцией обобщенных скоростей. Выбор такой окрестности всегда возможен в силу изолированности и устойчивости положения равновесия $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$.

Приращение ΔV на любом конечном интервале времени Δt отрицательно, так как $N^* = 0$ только при $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \ldots = \dot{q}_n = 0$, и в выбранной окрестности вне начала координат эти равенства не могут иметь места в течение конечного времени Δt, так как начало координат является изолированным положением равновесия. Действительно, если бы на интервале Δt выполнялись равенства $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \ldots = \dot{q}_n = 0$, но не все q_i были бы равны 0, то, как показано в п. 225, все гироскопические и диссипативные силы $Q_i^*(q_j, \dot{q}_j)$ были бы равны нулю и из уравнений Лагранжа второго рода (28) п. 142 следовало бы,

что $\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ вне начала координат, т. е. изучаемое положение равновесия не было бы изолированным. Таким образом, в достаточно малой окрестности начала координат функция V монотонно убывает. С возрастанием t она стремится к некоторому неотрицательному пределу b. Аналогично п. 234 можно показать, что случай $b \neq 0$ невозможен и, следовательно, $V \to 0$ при $t \to \infty$. Но так как V — знакоопределенная функция величин q_i, $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то отсюда следует, что $q_i \to 0$, $\dot{q}_i \to 0$, при $t \to \infty$. Теорема доказана.

240. Влияние гироскопических и диссипативных сил на неустойчивое равновесие. Пусть положение равновесия консервативной системы неустойчиво. Нельзя ли добавлением диссипативных сил стабилизировать его, т. е. нельзя ли так подобрать диссипативные силы, чтобы неустойчивое при наличии одних потенциальных сил положение равновесия стало устойчивым или даже, может быть, асимптотически устойчивым? Ответ на этот вопрос отрицательный.

Введем некоторые вспомогательные понятия. Как и в задаче о малых колебаниях, будем считать, что кинетическая энергия консервативной системы в окрестности положения равновесия является определенно-положительной квадратичной формой относительно обобщенных скоростей:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,\, k=1}^{n} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \tag{2}$$

где a_{ik} — постоянные коэффициенты. Пусть, далее, потенциальная энергия в окрестности положения равновесия $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$ разлагается в ряд по степеням $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и квадратичная часть этого ряда не равна тождественно нулю. Тогда считаем, что

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,\, k=1}^{n} c_{ik} q_i q_k, \tag{3}$$

где c_{ik} — постоянные величины. Квадратичные формы (2) и (3) можно одновременно привести к сумме квадратов при помощи вещественной линейной замены переменных $\boldsymbol{q} \to \boldsymbol{\theta}$ (см., например, п. 229, где рассматривались главные координаты и главные колебания консервативной системы в окрестности положения равновесия). В новых переменных

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \dot{\theta}_i^2, \qquad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \theta_i^2. \tag{4}$$

Величины λ_i Пуанкаре предложил называть *коэффициентами устойчивости.* Если, как в п. 229, функция (3) определенно-положительна, то все величины λ_i положительны и положение равновесия устойчиво. Если же хотя бы одна из величин λ_i отрицательна, то положение равновесия неустойчиво[1]. Число отрицательных коэффициентов устойчивости называется *степенью неустойчивости.* В дальнейшем важна будет не сама степень неустойчивости, а ее четность или нечетность. Пусть $\mathbf{C}$ — матрица квадратичной формы (3). Тогда $\det \mathbf{C} = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$. Отсюда следует, что если $\det \mathbf{C} > 0$, то степень неустойчивости четная (или равняется нулю), а если $\det \mathbf{C} < 0$, то степень неустойчивости нечетная.

Теорема 1. *Если среди коэффициентов устойчивости хотя бы один является отрицательным, то изолированное положение равновесия не может быть стабилизировано диссипативными силами с полной диссипацией.*

Доказательство.

Пусть $V = -E = -T - \Pi$. Тогда

$$\dot{V} = -N^* \geqslant 0, \tag{5}$$

где N^* — мощность диссипативных сил, являющаяся по условию теоремы определенно-отрицательной функцией обобщенных скоростей.

Приращение ΔV на любом конечном интервале времени Δt положительно; это показывается совершенно аналогично тому, как показана отрицательность ΔV в теореме предыдущего пункта. Далее, так как среди величин λ_i, есть хотя бы одна отрицательная, то в любой сколь угодно малой окрестности начала координат $2n$-мерного пространства состояний q_i, $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ существует область $V > 0$. Дальнейшие рассуждения аналогичны проведенным в п. 235 при доказательстве теоремы Четаева о неустойчивости.

Итак, диссипативными силами с полной диссипацией стабилизации добиться невозможно. А нельзя ли стабилизировать положение равновесия при помощи гироскопических сил? Частичный ответ на этот вопрос содержится в следующей теореме. Будем рассматривать гироскопические силы, линейные относительно обобщенных скоростей.

[1] И не только в первом приближении, а для полных нелинейных уравнений возмущенного движения, что следует из теоремы об устойчивости по первому приближению, так как при наличии отрицательных коэффициентов λ_i среди корней характеристического уравнения есть и положительные корни. Заметим, что это является также доказательством сформулированной (но не доказанной) в п. 226 первой теоремы Ляпунова о неустойчивости положения равновесия консервативной системы.

Теорема 2. *Если степень неустойчивости изолированного положения равновесия консервативной системы нечетна, то стабилизация его добавлением гироскопических сил невозможна, если же степень неустойчивости четна, то гироскопическая стабилизация возможна.*

Доказательство.

Для доказательства невозможности гироскопической стабилизации при нечетной степени неустойчивости достаточно рассмотреть линеаризованную систему уравнений возмущенного движения и показать, что ее характеристическое уравнение и при наличии гироскопических сил имеет хотя бы один положительный корень.

В переменных θ_i $(i = 1,\ 2, \ldots,\ n)$ уравнения движения имеют вид

$$\ddot{\theta}_i + \lambda_i \theta_i = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} \dot{\theta}_k \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n), \tag{6}$$

где $\gamma_{ik} = -\gamma_{ki}$ — постоянные величины. Характеристическое уравнение системы (6) будет таким:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^2 + \lambda_1 & -\gamma_{12}\lambda & \ldots & -\gamma_{1n}\lambda \\ \gamma_{12}\lambda & \lambda^2 + \lambda_2 & \ldots & -\gamma_{2n}\lambda \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{1n}\lambda & \gamma_{2n}\lambda & \ldots & \lambda^2 + \lambda_n \end{vmatrix} = 0.$$

При $\lambda \to +\infty$ имеем $\Delta(\lambda) \to +\infty$. Но $\Delta(0) = \lambda_1\ \lambda_2 \ldots\ \lambda_n$ и в силу нечетности степени неустойчивости $\Delta(0) < 0$. Следовательно, характеристическое уравнение имеет хотя бы один положительный корень и, согласно теореме п. 237 об устойчивости по первому приближению, положение равновесия $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$ неустойчиво независимо от нелинейных членов в уравнениях возмущенного движения, т. е. если степень неустойчивости нечетна, то стабилизация гироскопическими силами невозможна.

Чтобы показать возможность гироскопической стабилизации в случае четной степени неустойчивости, рассмотрим простой пример. Пусть движение системы с двумя степенями свободы описывается такими дифференциальными уравнениями:

$$\ddot{q}_1 + \lambda_1 q_1 - \gamma \dot{q}_2 = 0, \quad \ddot{q}_2 + \lambda_2 q_2 + \gamma \dot{q}_1 = 0, \tag{7}$$

где $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \gamma$ — постоянные величины, $\lambda_i < 0$ $(i = 1,\ 2)$. Последние слагаемые в уравнениях (7) представляют собой гироскопические силы; если они равны нулю, то положение равновесия $q_1 = q_2 = 0$ неустойчиво, а степень неустойчивости равна двум. Покажем, что гироскопические силы, т. е. величину γ в (7), можно подобрать так, что положение равновесия станет устойчивым.

Характеристическое уравнение линейной системы (7) имеет вид

$$\begin{vmatrix} \lambda^2+\lambda_1 & -\gamma\lambda \\ \gamma\lambda & \lambda^2+\lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda^4 + (\lambda_1+\lambda_2+\gamma^2)\lambda^2 + \lambda_1\lambda_2 = 0. \tag{8}$$

Нетрудно убедиться, что при выполнении неравенства

$$|\gamma| > \sqrt{-\lambda_1} + \sqrt{-\lambda_2} \tag{9}$$

корни уравнения (8) чисто мнимые и различны, и, следовательно, при условии (9) положение равновесия $q_1 = q_2 = 0$ устойчиво.

Теорема 3. *Если изолированное положение равновесия консервативной системы имеет отличную от нуля степень неустойчивости, то оно остается неустойчивым при добавлении гироскопических сил и диссипативных сил с полной диссипацией.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Из рассмотренных в этом параграфе теорем следует, что: 1) добавление диссипативных сил не нарушает устойчивости или неустойчивости изолированного положения равновесия консервативной системы; 2) добавление же гироскопических сил, не нарушая устойчивости положения равновесия, в некоторых случаях (при четной степени неустойчивости) может стабилизировать неустойчивое положение равновесия; 3) однако если неустойчивое положение равновесия стабилизировано гироскопическими силами, то при добавлении диссипативных сил с полной диссипацией положение равновесия снова будет неустойчивым.

Устойчивость, существующую при одних потенциальных силах, называют *вековой*, а устойчивость, полученную с помощью гироскопических сил,— *временной*.

Пример 1 (Устойчивость поступательного движения твердого тела на круговой орбите). *Пусть твердое тело обладает динамической симметрией ($A = B$), а его центр масс движется по круговой орбите в центральном ньютоновском гравитационном поле. Согласно п.* 126 *уравнения движения тела относительно центра масс могут быть записаны в виде*

$$\begin{gathered} A\frac{dp}{dt} + (C-A)qr = 3n^2(C-A)a_{32}a_{33}, \\ A\frac{dq}{dt} - (C-A)rp = -3n^2(C-A)a_{33}a_{31}, \\ \frac{dr}{dt} = 0, \end{gathered} \tag{10}$$

где

$$
\begin{aligned}
p &= \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi + n a_{21}, \\
q &= \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi + n a_{22}, \\
r &= \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi + n a_{23}.
\end{aligned} \tag{11}
$$

В уравнениях (10) *и* (11) n *— среднее движение центра масс тела по орбите, а величины* a_{ij} *выражаются через углы Эйлера* ψ, θ, φ *по формулам* (3) *п.* 19.

Из третьего уравнения системы (10) *следует, что имеет место интеграл*

$$r = r_0 = \mathrm{const}.$$

Уравнения движения имеют частное решение

$$\theta = \pi/2, \quad \psi = \pi. \tag{12}$$

Для этого частного решения

$$p = 0, \quad q = 0, \quad \dot\varphi = -n + r_0. \tag{13}$$

Будем считать, что постоянная r_0 *равна нулю; тогда частное решение* (12) *отвечает поступательному движению твердого тела в абсолютном пространстве (в орбитальной же системе координат тело вращается вокруг оси динамической симметрии с угловой скоростью* $\dot\varphi = -n$).

Рассмотрим устойчивость этого движения тела по отношению к переменным ψ, θ, $\dot\psi$, $\dot\theta$. *Пусть*

$$\theta = \frac{\pi}{2} + q_1, \quad \psi = \pi + q_2, \quad \dot\theta = \dot q_1, \quad \dot\psi = \dot q_2.$$

Произведя линеаризацию первых двух уравнений системы (10) *и разрешив их относительно старших производных, получим*

$$q_1'' = (4 - 3\alpha) q_1 + 2 q_2', \quad q_2'' = q_2 - 2 q_1'. \tag{14}$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по переменной $\nu = nt$ *и введено обозначений* $\alpha = C/A$. *Так как моменты инерции удовлетворяют неравенству треугольника* $A + B \geqslant C$, *то* $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$.

Первые слагаемые в правых частях уравнений (14) *являются потенциальными силами, порождаемыми потенциалом*

$$\Pi = -\frac{1}{2}(4 - 3\alpha) q_1^2 - \frac{1}{2} q_2^2, \tag{15}$$

а последние слагаемые представляют собой гироскопические силы.

Если бы гироскопические силы отсутствовали, то положение равновесия $q_1 = q_2 = 0$ *(оно отвечает невозмущенному движению* (12)*) было бы неустойчивым, причем при* $\alpha < 4/3$ *степень неустойчивости четная, а при* $4/3 < \alpha \leqslant 2$ *нечетная. Поэтому из теоремы* 2 *следует, что при* $4/3 < \alpha \leqslant 2$ *гироскопическая стабилизация невозможна, и, следовательно, в этом случае движение* (12) *неустойчиво по Ляпунову.*

Из той же теоремы 2 *следует, что при* $\alpha < 4/3$ *гироскопическая стабилизация в принципе возможна. Чтобы узнать, осуществляется ли она в рассматриваемой задаче, при заданных конкретных гироскопических силах, рассмотрим характеристическое уравнение системы* (14)

$$\lambda^4 + (3\alpha - 1)\lambda^2 + (4 - 3\alpha) = 0. \tag{16}$$

При выполнении системы неравенств

$$3\alpha - 1 > 0, \quad 4 - 3\alpha > 0, \quad (3\alpha - 1)^2 - 4(4 - 3\alpha) > 0 \tag{17}$$

корни уравнения (16) *будут чисто мнимыми и, следовательно, движение* (12) *будет устойчиво в линейном приближении по отношению к переменным* ψ, θ, $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$. *Если же хотя бы одно из неравенств* (17) *имеет противоположный смысл, то у уравнения* (16) *будут корни с положительными вещественными частями и движение* (12) *неустойчиво по Ляпунову.*

Система неравенств (17), *как нетрудно проверить, приводится к виду*

$$1 < \alpha < \frac{4}{3}. \tag{18}$$

Следовательно, в нашей конкретной задаче в случае четной степени неустойчивости при выполнении условия (18) *гироскопическая стабилизация осуществляется, а при* $\alpha < 1$ *— нет.*

Таким образом, показано, что поступательное движение твердого тела на круговой орбите при $\alpha < 1$ *и* $\alpha > 4/3$ *неустойчиво по Ляпунову, а при* $1 < \alpha < 4/3$ *оно устойчиво в линейном приближении. Более детальное исследование позволяет показать, что на самом деле при выполнении условия* (18) *движение будет устойчиво по Ляпунову не только в линейном приближении, но и в рамках полных нелинейных уравнений возмущенного движения*[1].

[1] См.: Маркеев А. П. Резонансные эффекты и устойчивость стационарных вращений спутника // Космические исследования. 1967. Т. 5, № 3. С. 365–375.

§ 5. Об устойчивости гамильтоновых систем

241. Общие замечания. Пусть дифференциальные уравнения возмущенного движения записываются и виде системы уравнений Гамильтона

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1,\ 2, \dots,\ n). \tag{1}$$

Считаем, что функция Гамильтона аналитична в окрестности точки $q_j = p_j = 0$ $(j = 1,\ 2, \dots,\ n)$ и представима в виде ряда

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots, \tag{2}$$

где H_m — формы степени m относительно q_j, p_j $(j = 1,\ 2, \dots,\ n)$, коэффициенты которых постоянны или 2π-периодичны по t. К рассмотрению системы (1) приводят многие задачи об устойчивости движения в потенциальном поле сил.

Решение задачи об устойчивости невозмущенного движения (ему отвечает решение $q_j = p_j = 0$ $(j = 1,\ 2, \dots,\ n)$ системы (1)) зависит от свойств функции Гамильтона. Очень просто вопрос об устойчивости решается в том случае, когда время t не содержится в уравнениях (1), а функция H является знакоопределенной в окрестности точки $q_j = p_j = 0$ $(j = 1,\ 2, \dots,\ n)$. В этом случае функция H будет интегралом системы (1) и невозмущенное движение устойчиво. Этот вывод непосредственно следует из теоремы Ляпунова об устойчивости; для применения этой теоремы в качестве функции Ляпунова V можно принять функцию H.

Если же функция H не является знакоопределенной или зависит от времени, то задача об устойчивости становится весьма сложной. Для системы (1) справедлива теорема Лиувилля о сохранении фазового объема, поэтому невозмущенное движение не может быть асимптотически устойчивым; в системах, описываемых дифференциальными уравнениями Гамильтона, возможна либо устойчивость, либо неустойчивость. Следовательно, если линеаризованные уравнения не дают строгого решения вопроса об устойчивости (как, например, в случае установившихся движений при наличии у характеристического уравнения хотя бы одного корня с положительной вещественной частью), то возникает необходимость рассмотрения нелинейных членов в уравнениях (1), т. е. мы имеем критический случай теории устойчивости.

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые вопросы теории устойчивости движения в системах, описываемых гамильтоновыми дифференциальными уравнениями. При этом ограничимся случаем,

когда уравнения возмущенного движения (1) линейные[1]. Часто вместо термина «устойчивость невозмущенного движения» мы будем применять термин «устойчивость системы (1)» или просто «устойчивость гамильтоновой системы».

242. Устойчивость линейных гамильтоновых систем с постоянными коэффициентами. Запишем линейную гамильтонову систему дифференциальных уравнений в матричной форме (см. п. 189)

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \mathbf{JH}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}' = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}), \tag{3}$$

где x_k, x_{n+k} $(k = 1, 2, \dots, n)$ — канонически сопряженные переменные (x_k — координаты, x_{n+k} — импульсы). Квадратная матрица $\mathbf{J}$ порядка $2n$ имеет вид

$$\mathbf{J} = \begin{Vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_n \\ -\mathbf{E}_n & \mathbf{0} \end{Vmatrix} \quad (\mathbf{J}' = \mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J},\ \mathbf{J}^2 = -\mathbf{E}_{2n},\ \det \mathbf{J} = 1). \tag{4}$$

В системе (3) $\mathbf{H}$ — вещественная симметрическая матрица порядка $2n$. Она либо постоянна, либо является непрерывной 2π-периодической по t.

Пусть матрица $\mathbf{H}$ в системе (3) постоянна. Рассмотрим характеристическое уравнение

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{JH} - \lambda\mathbf{E}_{2n}) = 0. \tag{5}$$

Как показано в п. 189, многочлен $p(\lambda)$ — четная функция λ. Поэтому если уравнение (5) имеет корень $\lambda = a$ с отличной от нуля вещественной частью, то система (3) неустойчива, так как либо сам этот корень, либо противоположный ему по знаку корень $\lambda = -a$ имеет положительную вещественную часть. Согласно теореме об устойчивости по первому приближению (п. 237), в этом случае неустойчива и полная нелинейная система уравнений возмущенного движения (1).

Таким образом, для устойчивости системы (3) необходимо, чтобы корни ее характеристического уравнения (5) были чисто мнимыми. Это условие будет и достаточным, если дополнительно потребовать, чтобы матрица $\mathbf{JH}$ приводилась к диагональной форме.

243. О линейных системах с периодическими коэффициентами. Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}' = (x_1, \dots, x_m), \tag{6}$$

[1]Теория устойчивости нелинейных гамильтоновых систем изложена в работах: Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН, 1963. Т. 18, вып. 6. С. 91–192; Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973; Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978.

где $\mathbf{A}(t)$ — непрерывная, 2π-периодическая по t вещественная матрица. Структура решений системы (6) описывается следующей теоремой Флоке.

Теорема. *Для системы* (6) *фундаментальная матрица решений* $\mathbf{X}(t)$, *нормированная условием* $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}_m$, *представима в виде*

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{Y}(t)e^{\mathbf{B}t} \tag{7}$$

где $\mathbf{B}$ *— постоянная матрица, а* $\mathbf{Y}(t)$ *— непрерывно дифференцируемая,* 2π*-периодическая по* t *матрица.*

Доказательство.

Заметим прежде всего, что так как $\mathbf{X}(t)$ — фундаментальная матрица решений уравнений (6), то, в силу 2π-периодичности матрицы $\mathbf{A}(t)$, фундаментальной будет также матрица $\mathbf{X}(t+2\pi)$. А это означает, что справедливо равенство

$$\mathbf{X}(t+2\pi) = \mathbf{X}(t)\mathbf{C}, \tag{8}$$

где $\mathbf{C}$ — постоянная матрица. Положив в равенстве (8) $t = 0$, получим, что $\mathbf{C} = \mathbf{X}(2\pi)$. Таким образом,

$$\mathbf{X}(t+2\pi) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}(2\pi). \tag{9}$$

Так как $\mathbf{X}(t)$ — фундаментальная матрица решений, то $\det \mathbf{X}(2\pi) \neq 0$, и, следовательно, для матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$, как и для всякой невырожденной матрицы, существует логарифм[1] и поэтому она представима в виде:

$$\mathbf{X}(2\pi) = e^{2\pi\mathbf{B}}. \tag{10}$$

Теперь положим

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t)e^{-\mathbf{B}t}. \tag{11}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}(t+2\pi) &= \mathbf{X}(t+2\pi)e^{-2\pi\mathbf{B}-\mathbf{B}t} = \\ &= \mathbf{X}(t)\mathbf{X}(2\pi)e^{-2\pi\mathbf{B}}e^{-\mathbf{B}t} = \mathbf{X}(t)e^{-\mathbf{B}t} = \mathbf{Y}(t).\end{aligned}$$

Таким образом, матрица $\mathbf{Y}(t)$ 2π-периодична, а из (11) следует, что она непрерывно дифференцируема. Из (11) следует также, что фундаментальная матрица решений $\mathbf{X}(t)$ представима в виде (7). Теорема Флоке доказана.

[1] См. гл. 8 книги: Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.

Для дальнейшего введем некоторые определения. Собственные числа λ_j матрицы $\mathbf{B}$ называются *характеристическими показателями* системы (6). Собственные числа ρ_j матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$ называются *мультипликаторами* системы (6). Из формулы (10) следует, что

$$\rho_j = e^{2\pi\lambda_j}, \tag{12}$$

или

$$\lambda_j = \frac{1}{2\pi}(\ln|\rho_j| + i\arg\rho_j + i2k\pi) \quad (k = 0,\ \pm1,\ \pm2, \dots). \tag{13}$$

Характеристическое уравнение матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$, т. е. уравнение

$$\det(\mathbf{X}(2\pi) - \rho\mathbf{E}_m) = 0, \tag{14}$$

называется *характеристическим уравнением* системы (6). Отметим без доказательства[1] два утверждения о характеристическом уравнении (14): 1) характеристическое уравнение не зависит от выбора фундаментальной матрицы решений; 2) характеристическое уравнение не изменится, если систему (6) подвергнуть невырожденному линейному преобразованию с 2π-периодической матрицей.

Система (6) называется *приводимой*, если существует замена переменных

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{L}(t)\boldsymbol{y}, \tag{15}$$

такая, что система (6) преобразуется в систему с постоянными коэффициентами, а 2π-периодическая матрица $\mathbf{L}(t)$ — непрерывно дифференцируемая, ограниченная при всех t, и такими же свойствами обладает обратная матрица $\mathbf{L}^{-1}(t)$. Имеет место следующая теорема Ляпунова.

Теорема. *Линейная система* (6) *с непрерывной периодической матрицей* $\mathbf{A}(t)$ *приводима.*

Доказательство.

Примем за матрицу $\mathbf{L}(t)$ преобразования (15) матрицу $\mathbf{Y}(t)$, определенную равенством (11). Она непрерывно дифференцируема и ограничена при всех t вместе со своей обратной. Остается только показать, что преобразованная система будет системой с постоянными коэффициентами. В этом легко убедиться, подставив

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{X}(t)e^{-\mathbf{B}t}\boldsymbol{y} \tag{16}$$

[1] Доказательство можно найти, например, в гл. 5 книги: Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.

в систему (6). Произведя выкладки, получим

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \mathbf{B}\boldsymbol{y}. \tag{17}$$

Из формулы (17) видно, что характеристические показатели суть корни характеристического уравнения преобразованной системы.

Ясно, что задачи об устойчивости систем (6) и (17) эквивалентны. Поэтому система (6) устойчива тогда и только тогда, когда все ее мультипликаторы принадлежат замкнутому единичному кругу $|\rho| \leqslant 1$, причем в случае существования кратных мультипликаторов, лежащих на окружности $|\rho| = 1$, матрица $\boldsymbol{X}(2\pi)$ приводится к диагональной форме.

244. Устойчивость линейных гамильтоновых систем с периодическими коэффициентами. Пусть в системе (3) матрица $\boldsymbol{H}$ является непрерывной 2π-периодической по t, вещественной симметрической матрицей. Задача об устойчивости линейных гамильтоновых систем обладает рядом специфических особенностей по сравнению с задачей об устойчивости общих линейных систем, рассмотренных в предыдущем пункте. Эти особенности вытекают из теоремы Ляпунова–Пуанкаре о характеристическом уравнении гамильтоновых систем с периодическими коэффициентами.

Прежде чем сформулировать теорему, введем определение. Уравнение

$$f(z) \equiv a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1} z + a_m = 0 \quad (a_0 \neq 0) \tag{18}$$

называется *возвратным*, если коэффициенты его, равноотстоящие от крайних членов, равны между собой, т. е. если в (18) $a_k = a_{m-k}$. Для возвратного уравнения имеет место тождество

$$f(z) \equiv z^m f\left(\frac{1}{z}\right) \quad (z \neq 0). \tag{19}$$

И наоборот, если имеет место тождество (19), то уравнение (18) возвратное. Из тождества (19) следует, что возвратное уравнение нечетной степени обязательно имеет своим корнем число $z = -1$. Если m — четное число, то при помощи подстановки

$$\omega = z + \frac{1}{z}$$

возвратное уравнение сводится к уравнению степени $m/2$ относительно ω.

Имеют место следующие легко проверяемые свойства корней возвратного уравнения: если у него есть корень $z = 1$, то кратность этого корня четная; если есть корень $z = -1$, то его кратность четная при четном m и нечетная при нечетном m; если уравнение имеет корень $z_k \neq \pm 1$, то оно имеет и взаимно обратный корень $z_l = 1/z_k$ той же кратности.

Теорема (Ляпунова–Пуанкаре). *Характеристическое уравнение* (14) *линейной гамильтоновой системы* (3) *с* 2π*-периодической по* t *матрицей* $\mathbf{H}(t)$ *возвратное.*

Доказательство.

Так как преобразование фазового пространства, задаваемое движениями гамильтоновой системы, является унивалентным каноническим преобразованием, то (см. п. 171) матрица $\mathbf{X}(t)$ фундаментальных решений системы (3) является симплектической, т. е. при всех t справедливо равенство

$$\mathbf{X}'\mathbf{J}\mathbf{X} = \mathbf{J}. \tag{20}$$

Так как $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}_{2n}$, то из (20) следует, что при всех t, в том числе и при $t = 2\pi$, $\det \mathbf{X} = 1$.

Рассмотрим следующую цепочку тождеств:

$$f(\rho) \equiv \det(\mathbf{X}(2\pi) - \rho\mathbf{E}_{2n}) = \det \mathbf{X}(2\pi)(\mathbf{E}_{2n} - \rho\boldsymbol{X}^{-1}(2\pi)) \equiv$$

$$\equiv \det(\mathbf{E}_{2n} - \rho\mathbf{J}^{-1}\mathbf{X}'(2\pi)\mathbf{J}) = \det \mathbf{J}^{-1} \det(\mathbf{E}_{2n} - \rho\mathbf{X}'(2\pi)) \det \mathbf{J} \equiv$$

$$\equiv \det(\mathbf{E}_{2n} - \rho\mathbf{X}(2\pi))' \equiv \det(\mathbf{E}_{2n} - \rho\mathbf{X}(2\pi)) \equiv$$

$$\equiv \rho^{2n} \det\Big(\mathbf{X}(2\pi) - \frac{1}{\rho}\mathbf{E}_{2n}\Big) \equiv \rho^{2n} f\Big(\frac{1}{\rho}\Big).$$

Отсюда следует, что характеристическое уравнение (14) возвратное, и теорема Ляпунова–Пуанкаре доказана.

Укажем важнейшие следствия этой теоремы.

Следствие 1. *Линейная гамильтонова система* (3) *устойчива тогда и только тогда, когда все ее мультипликаторы* ρ_j *расположены на единичной окружности* $|\rho| = 1$ *и матрица* $\mathbf{X}(2\pi)$ *приводится к диагональной форме.*

Следствие 2. *Мультипликаторы* ρ_j *и* $1/\rho_j$ *имеют одинаковую кратность.*

Следствие 3. *Если характеристическое уравнение* (14) *имеет корень* $\rho = 1$ *или* $\rho = -1$, *то эти корни имеют четную кратность.*

245. Алгоритм нормализации гамильтоновой системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами. Снова рассмотрим систему (3), предполагая матрицу $\mathbf{H}(t)$ вещественной и непрерывной 2π-периодической по t. Согласно теореме Ляпунова, система (3) приводима. Но матрица $\mathbf{L}(t)$ замены переменных (15), приводящей систему (3) к системе с постоянными коэффициентами, определяется неоднозначно. Опишем алгоритм построения такой матрицы $\mathbf{L}(t)$, чтобы соответствующее ей преобразование (15) было вещественным, каноническим, 2π-периодическим по t и приводило бы систему (3) к нормальной форме. Будем предполагать, что характеристические показатели λ_k системы (3) чисто мнимые ($\lambda_k = i\sigma_k$, где i — мнимая единица, σ_k — вещественные числа). Мультипликаторы $\rho_k = \exp(i2\pi\sigma_k)$, $\rho_{n+k} = \exp(-i2\pi\sigma_k)$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ считаем различными. Как и в п. 189 в случае линейной гамильтовой системы с постоянными коэффициентами, нормальной формой 2π-периодической по t системы (3) мы называем такую линейную систему, которой отвечает функция Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \sigma_k (y_k^2 + y_{n+k}^2). \tag{21}$$

Ограничимся только описанием алгоритмической части процедуры построения матрицы $\mathbf{L}(t)$ [1]. Пусть $\mathbf{X}(t)$ — фундаментальная матрица системы (3), нормированная условием $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}_{2n}$, а $\boldsymbol{r}_k$ и $\boldsymbol{s}_k$ — действительная и мнимая части собственного вектора матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$, соответствующего мультипликатору ρ_k. Векторы $\boldsymbol{r}_k$ и $\boldsymbol{s}_k$ удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}(2\pi) - \cos 2\pi\sigma_k \mathbf{E}_{2n})\boldsymbol{r}_k + \sin 2\pi\sigma_k \boldsymbol{s}_k = 0, \\ -\sin 2\pi\sigma_k \boldsymbol{r}_k + (\mathbf{X}(2\pi) - \cos 2\pi\sigma_k \mathbf{E}_{2n})\boldsymbol{s}_k = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Из этой системы векторы $\boldsymbol{r}_k$ и $\boldsymbol{s}_k$ определяются с точностью до постоянного множителя. Нормируем их так, чтобы выполнялось равенство

$$4(\boldsymbol{r}_k \cdot \mathbf{J}\boldsymbol{s}_k) = 1 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \tag{23}$$

Такая нормировка всегда возможна. При проведении нормировки в случае необходимости (как и в п. 188) следует соответствующим образом выбирать знаки величин σ_k в функции Гамильтона (21) нормализованной системы.

[1] Более подробное изложение можно найти в статье: Маркеев А. П. О нормализации гамильтоновой системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // ПММ. 1972. Т, 36, вып. 5. С. 805–810.

После нормировки векторов $\boldsymbol{r}_k$ и $\boldsymbol{s}_k$ образуем постоянную квадратную матрицу $\mathbf{P}$ порядка $2n$. Ее k-м столбцом возьмем вектор $-2\boldsymbol{s}_k$ а $(n+k)$-м — вектор $2\boldsymbol{r}_k$.

Образуем, далее, квадратную матрицу $\mathbf{Q}(t)$ порядка $2n$. Она имеет такую структуру:

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{Vmatrix} \mathbf{D_1}(t) & -\mathbf{D}_2(t) \\ \mathbf{D_2}(t) & \mathbf{D}_1(t) \end{Vmatrix}, \tag{24}$$

где $\mathbf{D}_1(t)$ и $\mathbf{D}_2(t)$ — диагональные матрицы вида

$$\mathbf{D_1}(t) = \begin{Vmatrix} \cos\sigma_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \cos\sigma_n t \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{D_2}(t) = \begin{Vmatrix} \sin\sigma_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \sin\sigma_n t \end{Vmatrix}. \tag{25}$$

Матрица $\mathbf{L}(t)$ искомого нормализующего преобразования (15) записывается в виде произведения трех матриц

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{P}\mathbf{Q}(t). \tag{26}$$

Фактическое построение матрицы (26) возможно, как правило, только на вычислительной машине.

246. Задача о параметрическом резонансе. Линейные гамильтоновы системы, содержащие малый параметр. В приложениях матрица $\mathbf{H}(t)$ системы (3) обычно зависит от одного или нескольких параметров. Задача о параметрическом резонансе дли системы (3) состоит в определении тех значений параметров, при которых ее характеристическое уравнение (14) имеет корни (мультипликаторы) с модулями, большими единицы. Иными словами, эта задача состоит в нахождении тех значений параметров, при которых система (3) неустойчива. Ограничимся рассмотрением того частного случая, когда функция Гамильтона H, соответствующая системе (3), представляется в виде сходящегося ряда по степеням малого параметра ε:

$$H = H^{(0)} + \varepsilon H^{(1)} + \varepsilon^2 H^{(2)} + \dots, \tag{27}$$

где $H^{(0)}$, $H^{(1)}$, $H^{(2)}, \dots$ — квадратичные формы переменных x_1, $x_2, \dots$, x_{2n}, причем коэффициенты формы $H^{(0)}$ постоянны, а коэффициенты форм $H^{(1)}$, $H^{(2)}, \dots$ — непрерывные вещественные функции t с общим периодом 2π. Кроме того, коэффициенты форм $H^{(0)}$, $H^{(1)}$, $H^{(2)}, \dots$ зависят от одного или нескольких параметров.

Рассмотрим зависимость мультипликаторов системы (3) (а следовательно, и ее характеристических показателей) от малого параметра ε. Так как правые части системы (3) аналитичны по ε, то и фундаментальная матрица решений $X(t, \varepsilon)$ также аналитична по ε. Отсюда следует, что коэффициенты характеристического уравнения (14) — аналитические функции ε. Но мультипликаторы (и характеристические показатели) не обязательно аналитичны. Они будут обязательно аналитическими, если характеристическое уравнение при $\varepsilon = 0$ имеет только простые корни. Если же при $\varepsilon = 0$ уравнение (14) имеет кратные корни, то аналитичность его корней относительно ε при $\varepsilon \neq 0$ может не иметь места. Отметим, однако, что независимо от наличия при $\varepsilon = 0$ кратных корней корни уравнения (14) при $\varepsilon \neq 0$, во всяком случае, непрерывны по ε.[1]

При $\varepsilon = 0$ система уравнений (3) имеет постоянные коэффициенты. Как установлено в п. 242, при наличии хотя бы одного корня характеристического уравнения (5) с отличной от нуля вещественной частью система (3) неустойчива. В этом случае уравнение (14) при $\varepsilon = 0$ имеет хотя бы один корень, модуль которого больше единицы. Ввиду непрерывности мультипликаторов относительно ε характеристическое уравнение (14) при достаточно малых ε также имеет корень, модуль которого превосходит единицу, и, следовательно, система (3) при достаточно малых ε неустойчива. Как видим, в этом случае задача о параметрическом резонансе проста и неинтересна.

Пусть теперь при $\varepsilon = 0$ характеристическое уравнение (5) системы (3) имеет только чисто мнимые корни $\pm i\sigma_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда уравнение (14) при $\varepsilon = 0$ имеет только такие корни (мультипликаторы), модули которых равны единице. Изучим поведение мультипликаторов при малых ε, отличных от нуля.

Сначала рассмотрим случай, когда при $\varepsilon = 0$ нет кратных мультипликаторов, т. е. когда, согласно (12), выполняются неравенства

$$\sigma_k \pm \sigma_l \neq N \quad (k, l = 1, 2, \ldots, n;\ N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{28}$$

В силу непрерывности мультипликаторов, они останутся некратными и при достаточно малых ε, отличных от нуля. Кроме того, при достаточно малых ε мультипликаторы не могут иметь модулей, больших единицы. Этот важный вывод является простым следствием теоремы Ляпунова–Пуанкаре о характеристическом уравнении (14) системы (3) (п. 244). Согласно этой теореме, мультипликаторы расположены симметрично относительно единичной окружности. При малых ε мультипликаторы не могут сойти с окружности, не нарушив указанной симметрии.

[1] См. по этому поводу монографию: Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956.

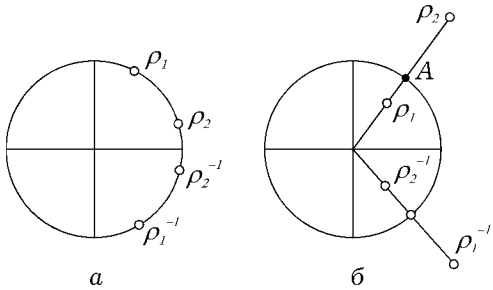

Рис. 177

Действительно, рассмотрим для наглядности случай $n = 2$. Характеристическое уравнение (14) будет уравнением четвертого порядка. Пусть ρ_j $(j = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ — его корни при $\varepsilon = 0$. Будем изображать их на комплексной плоскости ρ (рис. 177, *а*). Пусть при малых ε один из корней, например ρ_1, сошел с окружности и стал по модулю больше единицы. Из-за вещественности коэффициентов уравнения (14) комплексно сопряженный корень ρ_1^{-1} с необходимостью сместился бы в точку, симметричную относительно вещественной оси. А так как число всех корней равно четырем и смещения корней ρ_2, ρ_2^{-1} при малых ε малы, то у сместившегося корня ρ_1 не оказалось бы обратного по величине, что противоречит теореме Ляпунова–Пуанкаре.

Таким образом, если при $\varepsilon = 0$ кратные мультипликаторы отсутствуют или, что то же, выполняются условия (28), то система (3) при достаточно малых значениях ε устойчива.

Если же при $\varepsilon = 0$ существуют кратные мультипликаторы, расположенные в некоторой точке A единичной окруж ности, то при $\varepsilon \neq 0$ они могут, вообще говоря, сойти с окружности. При этом они могут расположиться как изображено на рис. 177, б, и симметрия мультипликаторов относительно единичной окружности не будет нарушена. Но смещение мультипликаторов с единичной окружности происходит не всегда, и, следовательно, в случае кратных мультипликаторов система не обязательно неустойчива при $\varepsilon \neq 0$. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Предположим, что характеристические показатели $i\sigma_k$ при $\varepsilon = 0$ таковы, что все величины σ_k $(k = 1,\ 2, \ldots,\ n)$ различны. Тогда, согласно п. 189, при $\varepsilon = 0$ систему (3) при помощи линейной вещественной канонической замены переменных можно привести к нормальпой форме. В новых переменных функция $H^{(0)}$ приведется к форме (21) и

функция Гамильтона (27) запишется в виде

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \sigma_k (y_k^2 + y_{n+k}^2) + \varepsilon H^{(1)} + \varepsilon^2 H^{(2)} + \dots, \tag{29}$$

где $H^{(1)}$, $H^{(2)}, \dots$ — квадратичные формы от новых переменных y_1, $y_2, \dots$, y_{2n} с непрерывными 2π-периодическими по t коэффициентами. Задачи о параметрическом резонансе в старых и новых переменных эквивалентны. Но теперь существенно, что величины σ_k в (29) имеют вполне определенные знаки, полученные в процессе нормализации системы (3) при $\varepsilon = 0$.

Сформулируем без доказательства[1] следующее утверждение.

Теорема. *Для достаточно малых ε линейная система с функцией Гамильтона* (29) *устойчива тогда и только тогда, когда величины σ_j не связаны соотношениями*

$$\sigma_k + \sigma_l = N \quad (k, l = 1,\ 2, \dots,\ n;\ N = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \dots). \tag{30}$$

Иными словами, знак минус в соотношениях (28) *можно опустить, а при выполнении хотя бы одного из равенств* (30) *всегда можно так подобрать функции $H^{(1)}$, $H^{(2)}, \dots$ в* (29), *что система будет неустойчива.*

247. Нахождение областей параметрического резонанса. Пусть величины σ_k в функции Гамильтона (29) зависят от некоторого параметра α. И пусть при $\alpha = \alpha_0$ выполняется хотя бы одно из соотношений

$$\sigma_k + \sigma_l = N \quad (k, l = 1,\ 2, \dots,\ n;\ N = \pm 1,\ \pm 2, \dots). \tag{31}$$

Когда равенство (31) выполняется при $k = l$, т. е. когда

$$2\sigma_k = N, \tag{32}$$

то говорят, что имеет место *простой* резонанс. Параметрический резонанс, для которого в (31) $k \neq l$, называется *комбинационным*. Покажем, что при условии (31) для сколь угодно малых значений ε может существовать область неустойчивости, и найдем ее границы с точностью до первой степени ε включительно. Будем предполагать, что $n = 2$ и что при $\varepsilon = 0$ выполняется одно из резонансных соотношений (31).

[1] Доказательство можно найти в статье: J. Moser. New aspects in the theory of stability of Hamiltonian system // Comm. Pure Appl. Math. 1958. V. 11, № 1. P. 81–114 и в монографии: Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения.— М.: Наука, 1972.

Пусть в (29) квадратичная форма $H^{(1)}$ записана в виде

$$H^{(1)} = \sum_{\nu=2} h_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t) y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} y_3^{\mu_1} y_4^{\mu_2} \quad (\nu = \nu_1 + \nu_2 + \mu_1 + \mu_2). \tag{33}$$

Будем считать, что функции $h_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t)$ в их представлении в виде рядов Фурье не содержат нулевых гармоник; в противном случае часть $H^{(1)}$, не зависящую от t, мы включили бы в $H^{(0)}$. Найдем область изменения параметра α вблизи резонансного значения α_0, для которой линейная система дифференциальных уравнений, соответствующая функции Гамильтона (29), неустойчива. Предполагаем, что при $\alpha = \alpha_0$ выполнено неравенство

$$\frac{d(\sigma_k + \sigma_l)}{d\alpha} \neq 0.$$

Будем применять методы теории возмущений, рассмотренные в §7 гл. XI. Нахождение областей неустойчивости основано на нескольких следующих одно за другим канонических преобразованиях, приводящих функцию Гамильтона (29) к некоторой простейшей форме, отражающей резонансный характер задачи и позволяющей весьма просто построить искомые области неустойчивости.

Сначала введем комплексно сопряженные канонические переменные q_k, p_k $(k = 1,\ 2)$ по формулам

$$\begin{aligned} q_1 &= y_3 + iy_1, \qquad & q_2 &= y_4 + iy_2, \\ p_1 &= y_3 - iy_1, \qquad & p_2 &= y_4 - iy_2. \end{aligned} \tag{34}$$

Новая функция Гамильтона равна $2iH$. Разлагая $\sigma_k(\alpha)$ в ряд в окрестности точки α_0, получаем

$$\begin{aligned} 2iH &= i\sigma_1(\alpha_0) q_1 p_1 + i\sigma_2(\alpha_0) q_2 p_2 + \\ &+ i(\alpha - \alpha_0)\left(\frac{d\sigma_1}{d\alpha_0} q_1 p_1 + \frac{d\sigma_2}{d\alpha_0} q_2 p_2\right) + \varepsilon \sum_{\nu=2} a_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} + \ldots \end{aligned} \tag{35}$$

Здесь многоточием обозначены члены не ниже второго порядка малости относительно ε и $\alpha - \alpha_0$. Комплекснозначные коэффициенты $a_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ линейным образом выражаются через $h_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$.

Сделаем замену переменных q_k, $p_k \to q'_k$, p'_k согласно формулам

$$q'_k = \frac{\partial S}{\partial p'_k}, \quad p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} \quad (k = 1,\ 2), \tag{36}$$

где производящая функция S имеет вид

$$S = q_1 p_1' + q_2 p_2' + \varepsilon W = q_1 p_1' + q_2 p_2' + \varepsilon \sum_{\nu=2} w_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} {p_1'}^{\mu_1} {p_2'}^{\mu_2}. \tag{37}$$

Функции $w_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ подберем 2π-периодическими по t и такими, чтобы в новой функции Гамильтона

$$H' = 2iH + \frac{\partial S}{\partial t} \tag{38}$$

члены порядка ε приняли по возможности наиболее простой вид. Из (36) и (37) получаем явный вид преобразования $q_k,\ p_k \to q_k',\ p_k'$ с точностью до членов порядка ε включительно:

$$q_k = q_k' - \varepsilon \frac{\partial W}{\partial p_k'}, \quad p_k = p_k' + \varepsilon \frac{\partial W}{\partial q_k'} \quad (k = 1,\ 2), \tag{39}$$

где в функции W переменные q_k заменены на q_k'. Из (35) и (37)–(39) получаем выражение для коэффициента при первой степени ε в H'

$$\begin{gathered} \sum_{\nu=2} {a'}_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t) {q_1'}^{\nu_1} {q_2'}^{\nu_2} {p_1'}^{\mu_1} {p_2'}^{\mu_2} \equiv \\ \equiv DW + \sum_{\nu=2} a_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t) {q_1'}^{\nu_1} {q_2'}^{\nu_2} {p_1'}^{\mu_1} {p_2'}^{\mu_2}, \end{gathered} \tag{40}$$

где

$$DW = i \sum_{k=1}^{2} \sigma_k \left(q_k' \frac{\partial W}{\partial q_k'} - p_k' \frac{\partial W}{\partial p_k'} \right).$$

Приравняв в тождестве (40) коэффициенты при ${q_1'}^{\nu_1} {q_2'}^{\nu_2} {p_1'}^{\mu_1} {p_2'}^{\mu_2}$, получим дифференциальное уравнение для $w_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$:

$$\begin{gathered} \frac{dw_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}}{dt} + i[\sigma_1(\nu_1 - \mu_1) + \sigma_2(\nu_2 - \mu_2)] w_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = \\ = {a'}_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} - a_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}. \end{gathered} \tag{41}$$

Если ввести обозначение

$$b = \sigma_1(\nu_1 - \mu_1) + \sigma_2(\nu_2 - \mu_2) \tag{42}$$

и для простоты записи у функций, входящих в уравнение (41), не писать индексы, то его общее решение может быть записано в виде

$$w(t) = w(0) e^{-ibt} + e^{-ibt} \int_0^t e^{ibx} (a' - a)\, dx. \tag{43}$$

Из (43) видно, что если число b не целое, то при любой функции $a'(t)$ решение $w(t)$ уравнения (41) 2π-периодическое при условии

$$w(0) = \frac{1}{1 - e^{i2\pi b}} \int\limits_0^{2\pi} e^{ibt}(a - a')\, dt.$$

Таким образом, если число b не целое, то в (40) можно положить $a'(t) \equiv 0$.

Если же число b целое, то при $a'(t) \equiv 0$ периодического решения уравнения (41), вообще говоря, не существует. Для существования периодического решения следует функцию $a'(t)$ выбрать вполне определенным образом, именно надо положить, что

$$a'(t) = ce^{-ibt},$$

где

$$c = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{ibt} a(t)\, dt, \tag{44}$$

и периодическое решение уравнения (41) будет иметь вид

$$w(t) = w(0)e^{-ibt} + e^{-ibt} \int\limits_0^{t} (c - a(x)e^{ibx})\, dx$$

при произвольном значении $w(0)$.

Пусть при $\alpha = \alpha_0$ имеет место комбинационный резонанс

$$\sigma_1(\alpha_0) + \sigma_2(\alpha_0) = N.$$

Согласно изложенному выше, полученная после преобразования (36) функция Гамильтона (38) может быть приведена к виду

$$H' = i\sigma_1(\alpha_0)q_1'p_1' + i\sigma_2(\alpha_0)q_2'p_2' + i(\alpha - \alpha_0)\left(\frac{d\sigma_1}{d\alpha_0}q_1'p_1' + \frac{d\sigma_2}{d\alpha_0}q_2'p_2'\right) + \\ + \varepsilon(c_{1100}e^{-iNt}q_1'q_2' + c_{0011}e^{iNt}p_1'p_2') + \ldots \tag{45}$$

Теперь введем вещественные переменные φ_k, r_k по формулам

$$q_k' = \sqrt{2r_k}e^{i\varphi_k}, \quad p_k' = \sqrt{2r_k}e^{-i\varphi_k} \quad (k = 1, 2). \tag{46}$$

Замена переменных q'_k, $p'_k \to \varphi_k$, r_k (φ_k — координаты, r_k — импульсы), задаваемая этими формулами, является каноническим преобразованием с валентностью $1/(2i)$. В переменных φ_k, r_k функция Гамильтона примет вид

$$\begin{aligned} H^* = \sigma_1(\alpha_0)r_1 + \sigma_2(\alpha_0)r_2 + (\alpha - \alpha_0)\left(\frac{d\sigma_1}{d\alpha_0}r_1 + \frac{d\sigma_2}{d\alpha_0}r_2\right) + \\ + \varepsilon\sqrt{r_1 r_2}[\beta\cos(\varphi_1 + \varphi_2 - Nt) + \gamma\sin(\varphi_1 + \varphi_2 - Nt)] + \ldots \end{aligned} \tag{47}$$

Постоянные величины β, γ, содержащиеся в (47), выражаются через коэффициенты Фурье, отвечающие N-й гармонике некоторой линейной комбинации функций $h_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t)$, входящих в функцию Гамильтона (29). Вычисления, проведенные согласно каноническим преобразованиям (34), (39) и (46), дают следующие выражения для величин β, γ:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[(h_{0011} - h_{1100})\cos Nt + (h_{1001} + h_{0110})\sin Nt]\,dt, \\ \gamma &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[(h_{1001} + h_{0110})\cos Nt - (h_{0011} - h_{1100})\sin Nt]\,dt. \end{aligned} \tag{48}$$

Сделаем еще одно каноническое преобразование φ_k, $r_k \to \Psi_k$, R_k:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \sigma_1(\alpha_0)t + \Psi_1, & \varphi_2 &= \sigma_2(\alpha_0)t + \Psi_2 + \theta, \\ r_1 &= R_1, & r_2 &= R_2, \end{aligned} \tag{49}$$

где

$$\sin\theta = -\frac{\beta}{\delta}, \quad \cos\theta = -\frac{\gamma}{\delta}, \quad \delta = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}.$$

Изменение переменных Ψ_k, R_k со временем будет описываться дифференциальными уравнениями, задаваемыми функцией Гамильтона

$$\widetilde{H} = (\alpha - \alpha_0)\left(\frac{d\sigma_1}{d\alpha_0}R_1 + \frac{d\sigma_2}{d\alpha_0}R_2\right) + \varepsilon\delta\sqrt{R_1 R_2}\sin(\Psi_1 + \Psi_2) + \ldots \tag{50}$$

Из соответствующей канонической системы дифференциальных уравнений с точностью до членов первого порядка относительно ε и $\alpha - \alpha_0$ включительно имеем

$$\begin{aligned} \frac{dR_1}{dt} = \frac{dR_2}{dt} &= -\varepsilon\delta\sqrt{R_1 R_2}\cos(\Psi_1 + \Psi_2), \\ \frac{d(\Psi_1 + \Psi_2)}{dt} &= (\alpha - \alpha_0)\frac{d(\sigma_1 + \sigma_2)}{d\alpha_0} + \frac{1}{2}\varepsilon\delta\frac{R_1 + R_2}{\sqrt{R_1 R_2}}\sin(\Psi_1 + \Psi_2). \end{aligned} \tag{51}$$

Ясно, что в первом приближении по ε и $\alpha - \alpha_0$ задача об устойчивости по отношению к переменным y_j ($j = 1, 2, 3, 4$) в исходной системе с функцией Гамильтона (29) эквивалентна задаче об устойчивости по отношению к переменным R_1, R_2 в системе (51). Покажем, что в первом приближении по ε область параметрического резонанса (область неустойчивости) задается неравенствами

$$-\frac{\varepsilon\delta}{\left|\dfrac{d(\sigma_1+\sigma_2)}{d\alpha_0}\right|} + \alpha_0 < \alpha < \alpha_0 + \frac{\varepsilon\delta}{\left|\dfrac{d(\sigma_1+\sigma_2)}{d\alpha_0}\right|} \tag{52}$$

и что при невыполнении этих неравенств имеет место устойчивость.

Действительно, второе утверждение следует из того, что функция $V = (R_1 - R_2)^2 + \tilde{H}^2$ является интегралом системы (51), который, как нетрудно видеть, будет знакоопределенным по переменным R_1 и R_2, если неравенства (52) не выполняются. Следовательно, согласно теореме Ляпунова об устойчивости, система (51) устойчива по отношению к переменным R_1, R_2. Утверждение о неустойчивости следует из существования при выполнении неравенств (52) неограниченно растущего со временем частного решения системы (51):

$$R_1(t) = R_2(t) = R_2(0)e^{\varepsilon\delta\sqrt{1-d^2}t}, \quad \Psi_1 + \Psi_2 = \pi + \arcsin d,$$
$$\left(d = \frac{\alpha-\alpha_0}{\varepsilon\delta}\frac{d(\sigma_1+\sigma_2)}{d\alpha_0}\right).$$

Случай простого параметрического резонанса, например $2\sigma_1 = N$, рассматривается аналогично. Область неустойчивости задается неравенствами

$$-\frac{\varepsilon\delta}{\left|\dfrac{d\sigma_1}{d\alpha_0}\right|} + \alpha_0 < \alpha < \alpha_0 + \frac{\varepsilon\delta}{\left|\dfrac{d\sigma_2}{d\alpha_0}\right|}, \tag{53}$$

где $\delta = \sqrt{\beta^2+\gamma^2}$, а

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[(h_{0020}-h_{2000})\cos Nt + h_{1010}\sin Nt]\,dt, \\ \gamma &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[h_{1010}\cos Nt - (h_{0020}-h_{2000})\sin Nt]\,dt. \end{aligned} \tag{54}$$

248. Уравнение Матье. *Уравнением Матье* называют дифференциальное уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\alpha + \beta\cos t)x = 0, \tag{55}$$

где α и β — постоянные величины. Это уравнение часто встречается в различных задачах механики, например в теории движения Луны, в задаче трех тел, в теории колебании упругих систем и т. п. Поэтому уравнение Матье изучено очень подробно[1].

Мы рассмотрим уравнение Матье для случая, когда оно мало отличается от дифференциального уравнения гармонического осциллятора:

$$\frac{d^2x}{dt} + (\omega^2 + \varepsilon\cos t)x = 0 \quad (0 \leqslant \varepsilon \ll 1). \tag{56}$$

При $\varepsilon = 0$ уравнение описывает колебания с собственной частотой ω. Согласно предыдущему пункту, при $\varepsilon \neq 0$ в плоскости параметров ω, ε могут возникать области неустойчивости, причем для малых значений ε области неустойчивости исходят из тех точек оси $\varepsilon = 0$, которые отвечают целым или полуцелым значениям частоты собственных колебаний:

$$2\omega = N \quad (N = 1,\ 2,\ 3, \ldots). \tag{57}$$

Например, если качели в процессе их раскачивания моделировать маятником с периодически изменяющейся длиной, то интенсивное раскачивание качелей (т. е. неустойчивость их вертикального положения равновесия) возникает, когда удвоенная частота собственных колебаний маятника кратна частоте изменения его длины. На практике обычно наблюдается случай, когда в формуле (57) $N = 1$, т. е. когда частота изменения длины маятника вдвое больше частоты его собственных колебаний.

Используя общие формулы для областей параметрического резонанса, полученные в предыдущем пункте, найдем в первом приближении по ε области неустойчивости, отвечающие резонансу

$$2\omega = 1. \tag{58}$$

Если ввести импульс p_x, отвечающий координате x, по формуле $p_x = \dot{x}$, то уравнение (56) будет эквивалентно канонической системе двух уравнений с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}({p_x}^2 + \omega^2x^2)\frac{1}{2}\varepsilon\cos t x^2. \tag{59}$$

[1] См., например: Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М.: ИЛ, 1953; Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967.

Введем новые переменные q и p при помощи канонического преобразования

$$p_x = \sqrt{\omega}p, \quad x = \frac{1}{\sqrt{\omega}}q. \tag{60}$$

Новая функция Гамильтона запишется в виде

$$H = \frac{1}{2}\omega(p^2 + q^2) + \frac{\varepsilon}{2\omega}\cos t q^2. \tag{61}$$

Из формул (53), (54), в которых $N = 1$, а

$$h_{2000} = \frac{1}{2\omega}\cos t, \quad h_{0020} = h_{1010} = 0,$$

получаем область неустойчивости в первом приближении по ε:

$$-\frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2} < \omega < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon. \tag{62}$$

Пример 1 (Устойчивость эксцентриситетных колебаний твердого тела на эллиптической орбите). *В п. 230 найдены плоские периодические колебания твердого тела, вызванные эллиптичностью орбиты его центра масс. В обозначениях п. 128, 230 эти колебания имеют вид*

$$\varphi^* = \frac{2e}{\omega^2 - 1}\sin\nu + \ldots \quad (\omega_0 \neq 1), \tag{63}$$

где многоточием обозначены члены выше первого порядка относительно эксцентриситета орбиты e.

Для исследования устойчивости движения (63) введем возмущение x по формуле

$$\varphi = \varphi^* + \frac{x}{1 + e\cos\nu}. \tag{64}$$

Подставив это значение φ в уравнение (37) п. 230 и произведя его линеаризацию относительно x, получим, что с точностью до первой степени e линейное уравнение возмущенного движения будет иметь вид уравнения Матье

$$\frac{d^2x}{d\nu^2} + [\omega_0^2 + e(1 - \omega_0^2)\cos\nu]x = 0. \tag{65}$$

При значении ω_0, близком $1/2$, возникает область неустойчивости. В соответствии с формулой (62) она задается неравенствами[1]

$$-\frac{3}{8}e + \frac{1}{2} < \omega_0 < \frac{1}{2} + \frac{3}{8}e. \tag{66}$$

[1] Совершенно из других соображений область неустойчивости (66) получена в гл. 2 книги: Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.

Список литературы

[1] Аппель П. *Теоретическая механика*: В 2-х т. М.: Физматгиз, 1960.

[2] Бухгольц Н. Н. *Основной курс теоретической механики*: В 2-х ч. М.: Наука, 1972.

[3] Валле Пуссен Ш. Ж. *Лекции по теоретической механике.* М.: ИЛ, т. 1, 1948; т. 2, 1949.

[4] Гантмахер Ф. Р. *Лекции по аналитической механике.* М.: Наука, 1966.

[5] Ламб Г. *Теоретическая механика.* Т. 2. М.: Гостехиздат, 1935.

[6] Леви–Чивита Т., Амальди У. *Курс теоретической механики.* Т. 2, ч. 2. М.: ИЛ, 1951.

[7] Ляпунов А. М. *Лекции по теоретической механике.* Киев. Наукова думка, 1982.

[8] Раус Э. *Динамика системы твердых тел.* Т. 1. М.: Наука, 1983.

[9] Суслов Г. К. *Теоретическая механика.* М.: Гостехиздат, 1946.

Предметный указатель

Аксиома взаимодействия 87
— динамики основная 86
— инерции 85, 86
— независимости действия сил 87, 88
Аксоид неподвижный 61
— подвижный 61
Амплитуда 185
Аномалия истинная 239
— средняя 243
— эксцентрическая 243
Апоцентр 240

Валентность канонического преобразования 339
Вариация 38
Варьирование изоэнергетическое 482
— по Гауссу 40, 107
— по Журдену 40, 106
— синхронное 38
Вектор Лапласа 238
— амплитудный главного колебания 504
— главный 90
— — сил тяготения 247
— — ударных импульсов 408
Верчение 222, 223
Винт динамический 136
— — левый 137
— — правый 137
— кинематический 70
— — левый 71
— — правый 71
Возмущение 514
Вращение 49
— мгновенное 57
— стационарное 190
Время абсолютное 19

Герполодия 195
Гироскоп 207
— уравновешенный 210

Движение Эйлера–Пуансо 194
— абсолютное 19, 72
— возмущенное 514
— замедленное 24
— импульсивное 406
— криволинейное 20
— круговое 20
— мгновенно винтовое 71
— — поступательное 57, 59
— механическое 15
— невозмущенное 514
— — неустановившееся 515
— — установившееся 515
— — устойчивое 515
— — — ассимптотически 515
— относительно центра масс 151
— относительное 71
— переносное 71
— плоское 64
— поступательное 56
— прямолинейное 20
— равномерное 24
— сложное 71, 72
— среднее 241
— стационарное 496
— сферическое 52
— ускоренное 24
Действие по Гамильтону 474
— по Лагранжу 484

Дельта амплитуды 185
Динама 136
Динамика 16
Диссипация неполная 279
— полная 279
Длина приведенная физического маятника 180
Долгота восходящего узла 244

Задача двух тел 234
— трех тел общая 244
——— ограниченная 244, 325
— динамики основная вторая 89
——— первая 89
Закон Кеплера второй 237
—— первый 239
—— третий 241
— Ньютона второй 87
—— первый 85
—— третий 87
— Паскаля 115
— сложения сил 87, 88
— сохранения количества движения 158
—— энергии 168
—— кинетического момента 161
— трения Кулона 222

Импульс внешних сил 157
— моментов внешних сил 161
— обобщенный 283
— ударный 406
—— обобщенный 459
—— сил инерции 437
Инвариант кинематический второй 69
—— первый 69
— статический второй 136
—— первый 136
Инертность 86
Интеграл Лапласа 237
— Якоби 288
— общий 359
— первый 156, 314
— площадей 236
— полный 359
— эллиптический второго рода 184
—— второго рода полный 184
—— первого рода 184
—— первого рода полный 184
— энергии в задаче двух тел 237
—— обобщенный 288

Качение 222
Килограмм 87
Кинематика 19
Ковариантность 270
Колебание главное 504
Колебания малые 501
— нормальные 504
— эксцентриситетные 510
Количество движения 150
Координаты главные 503
— криволинейные 27
—— ортогональные 28
— нормальные 503
— обобщенные 41
— позиционные 494
Косинус эллиптический 185
Коэффициент восстановления 425
— устойчивости 538
— форм главных колебаний 506
Коэффициенты Ламе 28
Кривая геодезическая 485
— фазовая 181
Критерий Рауса–Гурвица 534

Лагранжиан 274
Линия действия силы 91
— координатная 27
— узлов 50

Масса 86
Матрица Гурвица 533

— симплектическая 339
—— обобщенно 339
Маятник сферический 329
— физический 180
Мера принуждения 107
Метод Ляпунова прямой 517
Механика 15
— небесная 234
— опытная 15
— теоретическая 15
Множитель 316, 317
— последний 321
—— Якоби 321
— связи 296
— Якоби 316
Модуль эллиптического интеграла 184
— дополнительный 185
Момент гироскопический 212
— главный сил тяготения 245
—— системы сил относительно оси 92
—— системы сил относительно точки 92
—— ударных импульсов 408
— гравитационный 245, 246
— инерции главный центральный 146
—— осевой 145
—— относительно оси 140
—— полярный 140
—— центробежный 145
— инерции главный 146
— кинетический системы относительно оси 151
——— относительно точки 91
——— относительно центра 151
—— точки относительно оси 150
—— точки относительно центра 150
— количества движения системы относительно оси главный 151
——— системы относительно центра главный 151
——— точки относительно оси 150
— пары сил 134
— пары вращений 80
— силы относительно оси 91
Мощность непотенциальных сил 276
Мультипликатор 546

Наклонение орбиты 244
Нить идеальная 100
Нутация 213
Ньютон 85, 87

Область возможности движения 182
Определитель Гурвица 534
Ось винтовая мгновенная 70
— вращения 49
—— мгновенная 57, 61
— динамической симметрии 191
— инерции главная 146
——— центральная 146
— координатная 28
— удара 420
— центральная 137

Пара вращений 80
— сил 133
Параметр винта 70
Переменные Гамильтона 283
— Лагранжа 283
— Рауса 293
— действие–угол 371
—— для задачи двух тел 381
—— для маятника 375
— канонически сопряженные 284
Перемещение винтовое 49
— виртуальное 37, 38
— возможное 35

— действительное 37
— поступательное 49
Перицентр 240
Плечо пары вращений 80
—— сил 133
Плоскость Пуансо 194
— пары вращений 80
—— сил 133
— фазовая 181
Поверхность абсолютно гладкая 223
Показатели характеристические 546
Покой мгновенный 57
Поле силовое 94
—— потенциальное 95
——— нестационарное 95
——— стационарное 95
—— центральное 96
Полодия 195
Положение возможное 34
— конечное 467
— начальное 467
— равновесия 181, 489
—— неустойчивое 489
—— устойчивое 489
Полюс 49
Потенциал 95
— Рауса 330, 496
— кинетический 274
— обобщенный 280
— приведенный 330, 496
Преобразование Биркгофа 398, 399
— Лежандра 283, 284
— каноническое 338, 341
—— свободное 349
—— унивалентное 339
Прецессия 191, 192
— регулярная 192
Принуждение 107
Принцип Гамильтона–Остроградского 467, 472, 474
— Гаусса 107, 108
—— в теории импульсивных движений 440
— Даламбера–Лагранжа 102, 104
— Журдена 106
—— в теории импульсивных движении 439
— Лагранжа 113
— Мопертюи–Лагранжа 482, 484
— вариационный 102
—— дифференциальный 102
—— интегральный 102
— виртуальных перемещений 113
— детерминированности Ньютона–Лапласа 89
— наименьшего действия 479
—— Якоби 484
— наименьшего принуждения 108
— относительности Галилея 85
Производная абсолютная 72
— локальная 72
— относительная 72
Пространство абсолютное 19
— конфигураций 42
— координатное 42
— фазовое 289
Псевдокоординаты 46
Псевдоскорость 46
Псевдоускорение 46
Путь действительный 467
— истинный 467
— окольный 468, 482
— прямой 467, 482

Работа полная 93
— элементарная 93
Равновесие 89, 489
— тела на орбите относительное 250
Равнодействующая 88, 127
Радиус инерции 140

Расстояние угловое перицентра от узла 244
Расход массы секундный 258
Реакция нормальная 222
Реакция связи 88
Резонанс 508
— параметрический комбинационный 553
—— простой 553

Связь 31
— геометрическая 32
— голономная 32
— двусторонняя 32
— дифференциальная 32
— идеальная 98
— интегрируемая 32
— катастатическая 436
— кинематическая 32
— конечная 32
— неголономная 32
— неосвобождающая 32
— неудерживающая 32
— обратимая 436
— односторонняя 32
— освобождающая 32
— склерономная 34
— стационарная 34
— удерживающая 32
Сепаратриса 183
Сила 15, 85
— активная 88
— внешняя 89
— внутренняя 89
— гироскопическая 277
— диссипативная 279
— заданная 88
— инерции 103
—— кориолисова 171
—— переносная 171
— обобщенная 97
—— соответствующая псевдокоординатам 307
— пассивная 89
— потенциальная 95
— реактивная 256, 258
— трения 222
—— покоя 223
—— скольжения 223
— ударная 406
Силы сходящиеся 128
Синус эллиптический 185
Система гироскопически несвязанная 495
— голономная 33
— диссипативная 279
— замкнутая 86
— консервативная 277
— координат кенигова 151
—— неподвижная 19
—— орбитальная 246
— координат абсолютная 19
— материальных точек 20
— механическая 20
— натуральная 282
— неголономная 34
— ненатуральная 283
— несвободная 31
— обобщенно консервативная 287
— отсчета 19
—— абсолютная 19
—— инерциальная 85
—— неподвижная 19
— переменного состава 254
— приведенная 330
— приводимая 546
— реономная 34
— свободная 31
— сил 89
—— статически неопределимая 124
——— определимая 124
—— сходящихся 128

—— уравновешенная 121
—— эквивалентная нулю 121
— склерономная 34
Системы сил эквивалентные 121
Скобка Лагранжа 340
— Пуассона 334
Скольжение 195
Скорость 21
— абсолютная 72
— верчения 222
— возможная 35
— гиперболическая 240
— качения 222
— космическая вторая 240
—— первая 240
— обобщенная 44
— относительная 72
— параболическая 239
— переносная 72
— поступательного движения 57
— потерянная 413
— прецессии 192
— приобретенная 413
— радиальная 26
— секторная 237
— скольжения 222
— собственного вращения 192
— трансверсальная 26
— угловая 25
—— мгновенная 61
— фазовая 181
— эллиптическая 239
Спираль Архимеда 27
Статика 16, 89
Степени свободы системы 40
Степень неустойчивости 538
Сферический маятник 270

Тело абсолютно твердое 47
— твердое 47
—— динамически симметричное 191
—— переменного состава 263
—— свободное 48
Тензор инерции 144, 145
Теорема Аппеля 464
— Бернулли–Шаля 55
— Вариньона 127
— Гюйгенса–Штейнера 143
— Гюйгенса 24
— Делонэ–Бертрана 451
— Карно вторая 446
—— обобщенная 450
—— первая 444
—— третья 450
— Кенига 154
— Кориолиса 74
— Лагранжа 490
— Лиувилля 348, 368
— Ляпунова о неустойчивости вторая 527
—— о неустойчивости первая 526
—— о приводимости 546
—— об устойчивости 517
——— асимптотической 522
——— по первому приближению 529
— Ляпунова–Пуанкаре 548
— Моцци 54
— Пуансо 135
— Рауса 497
— Резаля 208
— Робена 440
— Томсона 455
— Флоке 545
— Четаева о неустойчивости 525
— Шаля 53
— Эйлера 52
—— об однородных функциях 276
— Якоби 359
— Якоби–Пуассона 335
— о движении центра масс 157
— о сложении ускорений 74
— о трех моментах 131

— о трех силах 127
— об изменении кинетического момента 159, 160
—— в неинерциальной системе отсчета 171
—— при импульсивном движении 410
— об изменении кинетической энергии 167
—— в неинерциальной системе отсчета 172
—— при импульсивном движении 412
— об изменении количества движения 157
—— в неинерциальной системе отсчета 171
—— при импульсивном движении 409
— об изменении полной механической энергии голономной системы 276
— об инвариантности множителя 320
Теоремы Ляпунова о неустойчивости равновесия 492
— Томсона–Тэта–Четаева 535, 538, 540
Теория возмущений 388
— гироскопа элементарная 210
Тождество Пуассона 334
Точка изображающая 42
— материальная 20, 85
—— изолированная 86
—— переменного состава 255
— фазовая 181
Траектория точки 20
Трение 222

Углы Эйлера 50
Угол нутации 50
— прецессии 50
— собственного вращения 50
Удар 406
— абсолютно неупругий 425
— абсолютно упругий 425
— неупругий 425
— прямой 432
— центральный 432
Уравнение Гамильтона–Якоби 358
—— для консервативных и обобщенно консервативных систем 360
—— для систем с циклическими координатами 360
— Кеплера 243
— Матье 559
— Мещерского 258
—— обобщенное 258
— Пуассона 204
— вековое 504
— возвратное 547
— динамики общее 103
——— в обобщенных координатах 269
——— в теории импульсивных движений 437
— статики общее 113
— характеристическое 546
— частот 504
Уравнения Воронца 301
— Гамильтона 284, 285
— Лагранжа второго рода 269
—— для импульсивных движений 460
— Рауса 293
— Уиттекера 290
— Чаплыгина 301
— Эйлера динамические 189
—— кинематические 79
— Якоби 291
— возмущенного движения 515
— канонические 284, 285
Уравнения Аппеля 308

Ускорение 21
— Кориолиса 74
— абсолютное 72
— возможное 35
— вращательное 59
— касательное 24
— нормальное 24
— обобщенное 44
— осестремительное 59
— относительное 72
— переносное 72
— поступательного движения 57
— тангенциальное 24
— угловое 25, 59
Условие Маиевского–Четаева 521
Устойчивость 515
— асимптотическая 515
— вековая 540
— временная 540

Фокусы кинетические сопряженные 469
Форма нормальная уравнений Гамильтона 396
Формула Ривальса 59
— Циолковского 260
— Эйлера 58
— гироскопии основная 208
— — приближенная 210
Функция Гамильтона 285, 343, 353
— — характеристическая 361
— Лагранжа 274
— Ляпунова 515
— Рауса 293
— Рэлея диссипативная 280
— знакоопределенная 516
— знакопеременная 516
— знакопостоянная 516
— определенно-отрицательная 516
— определенно-положительная 516
— производящая свободного канонического преобразования 349
— силовая 95

Центр 150
— инерции 140
— конечного вращения 55
— масс 140
— скоростей мгновенный 65
— удара 420
— ускорений мгновенный 67
Центроида 66
— неподвижная 66
— подвижная 66

Число степеней свободы системы 40
— Циолковского 260

Эквивалентность систем сил 121, 124
Элементы орбиты Делонэ 385
— — кеплеровские 243
— — Пуанкаре 387
Эллипсоид инерции 146
— центральный 146
Энергия кинетическая 154
— — потерянных скоростей 413
— — приобретенных скоростей 413
— полная 168
— — обобщенная 288
— потенциальная 95
— — приведенная 496
— ускорений 308, 310