УДК 531(075.8)
П99
ББК 22.21

Пятницкий Е.С., Трухан Н.М., Ханукаев Ю.И., Яковенко Г.Н.
Сборник задач по аналитической механике: Учеб. пособие: Для вузов. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 400 с. — ISBN 5-9221-0182-X.

Сборник содержит более тысячи шестисот задач по теоретической механике и практически охватывает все ее разделы. Помимо традиционного раздела кинематики и общих теорем динамики, большой объем сборника занимает раздел аналитической механики. Во втором издании (1-е изд. — 1980 г.) были введены новые параграфы: уравнения механики неголономных систем, устойчивость движения, дискретные модели механических систем. В третьем издании сборник переработан, добавлены новые задачи и исправлены обнаруженные опечатки и неточности.

Сборник рассчитан на студентов, аспирантов и преподавателей университетов, физико-технических и инженерно-физических вузов. Он будет также полезен студентам технических вузов при изучении теоретической механики.

Ил. 386. Библиогр. 68 назв.

Рецензент: доктор физико-математических наук *А.П. Маркеев.*

ISBN 5-9221-0182-X

© ФИЗМАТЛИТ, 2002

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к третьему изданию 5
Предисловие ко второму изданию 5
Из предисловия к первому изданию 6

1. Кинематика и динамика

		Задачи	Ответы и решения
§ 1.	Движение точки	9	295
§ 2.	Сложное движение точки	15	297
§ 3.	Плоскопараллельное движение твердого тела	24	300
§ 4.	Движение твердого тела с неподвижной точкой. Общий случай движения твердого тела	32	303
§ 5.	Динамика точки	45	308
§ 6.	Изменение импульса и момента импульса системы	49	309
§ 7.	Изменение кинетической энергии. Смешанные задачи	56	310
§ 8.	Динамика точки в центральном поле	67	313
§ 9.	Динамика относительного движения	76	315
§ 10.	Динамика систем переменного состава	82	317
§ 11.	Динамика твердого тела	90	321

2. Аналитическая механика

§ 12.	Уравнения Лагранжа	113	329
§ 13.	Электромеханические аналогии	134	334
§ 14.	Условия равновесия	142	336
§ 15.	Устойчивость равновесия консервативных систем	149	337
§ 16.	Малые колебания консервативных систем	155	338
§ 17.	Движение диссипативных систем	178	353
§ 18.	Вынужденные колебания. Частотные характеристики	184	354
§ 19.	Уравнения Гамильтона, Рауса, Уиттекера и Якоби	197	359
§ 20.	Первые интегралы. Скобки Пуассона. Теорема Нётер	206	363
§ 21.	Вариационные принципы механики	217	366

	Задачи	Ответы и решения
§ 22. Интегральные инварианты	224	366
§ 23. Канонические преобразования	234	368
§ 24. Уравнение Гамильтона–Якоби	260	377
§ 25. Методы оптимального управления в задачах механики	273	388
§ 26. Уравнения механики неголономных систем	277	390
§ 27. Устойчивость движения	282	392
§ 28. Дискретные модели механических систем	290	392

Предисловие к третьему изданию

Настоящее издание сборника выпускается по предложению издательства «Физматлит» одновременно с третьим изданием книги Ф. Р. Гантмахера «Лекции по аналитической механике», которая была положена в основу этого сборника. Сборник переработан, добавлены новые задачи и исправлены обнаруженные опечатки и неточности.

2001 г.

Предисловие ко второму изданию

За время после выхода в свет первого издания (1980 г.) «Сборник» был апробирован в учебном процессе в МФТИ и других высших учебных заведениях, как в университетах, так и в ряде технических вузов. Авторы получили письма от отечественных и зарубежных читателей и при подготовке второго издания в максимальной степени постарались учесть их замечания и пожелания.

В 1983 г. сборник был издан в Китайской Народной Республике.

В процессе работы над вторым изданием практически все разделы подверглись переработке. Введены новые разделы: уравнения механики неголономных систем, устойчивость движения, дискретные модели механических систем. Включение в сборник раздела по дискретным моделям связано с интенсивным использованием вычислительной техники для решения задач механики. При составлении разностных схем для интегрирования уравнений движения механических систем важно, чтобы дискретные модели имели те же законы сохранения, что и исходные непрерывные системы. Такой алгоритм построения дискретных моделей может быть получен, в частности, из вариационных принципов механики. Добавлено свыше трехсот новых задач. Исправлены обнаруженные опечатки и неточности. Порядок следования разделов остался прежним.

Авторы признательны читателям, приславшим свои пожелания и замечания. Глубокую благодарность авторы выражают коллегам по кафедре теоретической механики МФТИ, чьи советы и доброжелательная критика способствовали улучшению «Сборника». Авторы выражают глубокую благодарность профессору А. П. Маркееву за большой труд по рецензированию рукописи.

1995 г.

Из предисловия к первому изданию

В настоящее время отечественная литература по теоретической механике располагает такими учебными пособиями, как получившие всемирную известность «Сборник задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, «Сборник задач по теоретической механике» Н. Н. Бухгольца, И. М. Воронкова, А. П. Минакова и др. Поэтому в данном сборнике задачи по традиционным разделам механики представлены сравнительно слабо и основное внимание уделяется тем ее разделам, которые еще не нашли достаточно полного отражения в учебной литературе, в частности электромеханическим аналогиям, вариационным принципам, интегральным инвариантам, уравнениям Гамильтона, каноническим преобразованиям, методу Якоби и т. д.

При составлении сборника был использован опыт преподавания теоретической механики в Московском физико-техническом институте.

Внутри разделов задачи расположены в основном по принципу «от простого к сложному». В ответах и указаниях (там, где это целесообразно) используется векторно-матричная форма записи. В остальном применяются обычные для курсов механики обозначения; единственным исключением является запись вида $i = \overline{1, n}$ вместо традиционной $i = 1, 2, \ldots, n$.

При составлении сборника авторы использовали ряд задач из учебного пособия по теоретической механике, изданного в МФТИ, и некоторые задачи из учебников и монографий по теоретической механике. Основная часть задач составлена самими авторами.

Приведенный в конце книги список литературы, отнюдь не претендует на полноту и охватывает только те работы на русском языке, которые по содержанию наиболее близки к настоящему изданию.

Авторы искренне признательны профессору МГУ В. Г. Дёмину за обстоятельный разбор рукописи и ряд ценных замечаний.

Особую благодарность авторы выражают Г. М. Ильичевой.

1979 г.

ЗАДАЧИ

1. Кинематика и динамика

2. Аналитическая механика

1. КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА

§ 1. Движение точки

1.1. Точка движется так, что во все время движения ее ускорение направлено к неподвижному центру O. Показать, что траектория точки лежит в плоскости, проходящей через центр O.

1.2. Электрон в постоянном магнитном поле движется по винтовой линии в соответствии с уравнениями

$$x = a\cos\omega t, \quad y = a\sin\omega t, \quad z = bt.$$

Найти тангенциальную и нормальную компоненты ускорения электрона и радиус кривизны его траектории.

1.3. В поле отталкивающего центра точка движется в плоскости xy по закону $x = \alpha\,\mathrm{ch}\,\omega t + \beta\,\mathrm{sh}\,\omega t$, $y = \gamma\,\mathrm{ch}\,\omega t + \rho\,\mathrm{sh}\,\omega t$, где α, β, γ, ρ и ω — постоянные величины. Найти уравнение траектории точки и уравнение годографа скорости.

1.4. Сохраняя условие предыдущей задачи, найти радиальную w_r и трансверсальную w_φ компоненты ускорения точки.

1.5. Колечко движется по параболе $y = ax^2$ с постоянной скоростью v. Найти ускорение колечка в зависимости от его положения.

1.6. Если при переходе с прямолинейного участка $y = 0$ железнодорожного пути на криволинейный $y = f(x)$ нормальное ускорение меняется скачком, то происходит явление так называемого мягкого удара. Как должен начинаться криволинейный участок пути, чтобы такого удара не произошло?

1.7. Точка движется по плоскости так, что угол между вектором скорости и радиусом-вектором во все время движения равен α. Найти уравнение траектории точки, если в начальный момент $r(0) = r_0$, $\varphi(0) = \varphi_0$.

1.8. При движении точки ее скорость $\mathbf{v}$ и ускорение $\mathbf{w}$ связаны соотношением $\mathbf{w} = \mathbf{a} \times \mathbf{v}$, где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор. Найти уравнение траектории точки.

1.9. Сохраняя условия предыдущей задачи, показать, что при таком движении $|\mathbf{v}|$ и $|\mathbf{w}|$ остаются неизменными.

1.10. Точка описывает окружность радиуса R. Ускорение точки образует с ее скоростью постоянный угол α $(\alpha \neq \pi/2)$. За какое время скорость точки увеличится в n раз, если в начальный момент она равнялась v_0?

1.11. Точка движется в плоскости xy с постоянной по модулю скоростью $|\mathbf{v}| = u$. Вектор скорости образует с осью Ox угол $\alpha = at$ (a — постоянная величина). Определить уравнение траектории точки и модуль ее ускорения, если в начальный момент $t = 0$ точка находилась в начале координат.

1.12. Точка движется по дуге эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Вектор ускорения точки во все время движения направлен параллельно оси Oy. Найти ускорение точки в тот момент, когда ее ордината равна $b/2$, если в начальный момент $x(0) = 0$, $y(0) = b$, $v(0) = v_0$.

1.13. Точка движется в плоскости xy. Модуль скорости v точки и угол θ, составляемый скоростью с осью Ox, являются известными функциями времени t. Используя плоскость годографа вектора скорости, найти нормальную и тангенциальную компоненты ускорения точки.

1.14. Точки A и B движутся таким образом, что во все время движения расстояние между ними не изменяется. Показать, что для ускорений этих точек выполняется соотношение

$$(\mathbf{w}_A - \mathbf{w}_B) \cdot \overrightarrow{AB} = |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|^2.$$

1.15. Точка движется по плоской кривой. В каждый момент времени известны скорость $v(t)$ и кривизна траектории $k(t)$. Показать, что система дифференциальных уравнений $\dot{x} = v\cos\psi$, $\dot{y} = v\sin\psi$, $\dot{\psi} = vk$ определяет закон движения точки $x = x(t)$, $y = y(t)$.

1.16. Используя условия предыдущей задачи, найти закон движения точки $x = x(t)$, $y = y(t)$, если $v = at$, $k = t^{-1}$, $a = \mathrm{const}$ и если в начальный момент $t = 0$ известны координаты точки x_0 и y_0, а также угол β, который ее скорость составляет с осью Ox.

1.17. Самолет движется в вертикальной плоскости Oxy. С помощью приборов найдены скорость центра масс самолета $v(t)$ и нормальная перегрузка $n(t)$. (*Нормальной перегрузкой* называется отношение нормального ускорения w_n центра масс к ускорению свободного падения g.) Используя результаты, приведенные в задаче 1.15, найти закон движения центра масс этого самолета $x = x(t)$, $y = y(t)$, если $v = b\sqrt{1 + a^2b^2t^2}$, $n = ab^2/(g\sqrt{1 + a^2b^2t^2})$, где a и b — известные постоянные.

1.18. Движение точки в плоскости задано в полярных координатах $r = r(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$. Показать, что в случае постоянства секториальной скорости ($r^2\dot{\varphi} = \mathrm{const}$) вектор ускорения точки коллинеарен ее радиусу-вектору.

1.19. Планета движется по эллиптической орбите, уравнение которой в полярных координатах имеет вид: $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\varphi}$. Найти

зависимость радиальной w_r и трансверсальной w_φ компонент ускорения планеты от r, используя закон площадей $r^2\dot{\varphi} = c = \text{const}$.

1.20. В некотором приближении орбиту Меркурия можно представить плоской розеткой, уравнение которой в полярных координатах имеет вид $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\omega\varphi}$, где $\omega = \text{const} \neq 1$. Используя закон площадей $r^2\dot{\varphi} = c = \text{const}$, найти зависимость ускорения w планеты от r.

1.21. Движение точки в плоскости задается в полярной системе координат компонентами скорости $v_r = 1/r^2$ и $v_\varphi = 1/ar$, $a = \text{const}$. Найти уравнение траектории точки $r = r(\varphi)$, а также радиальную w_r и трансверсальную w_φ компоненты ее ускорения, если в начальный момент $r(0) = r_0$, $\varphi(0) = \varphi_0$.

1.22. Используя условия предыдущей задачи, найти тангенциальное и нормальное ускорения точки.

1.23. Точка движется в плоскости с постоянной радиальной скоростью $v_r = c > 0$ и радиальным ускорением $w_r = -a^2/r^3$, $a = \text{const}$. Найти уравнение траектории точки, если в начальный момент $r(0) = r_0$ и $\varphi(0) = \varphi_0$.

1.24. Найти радиус кривизны ρ траектории точки, если известны ее скорость $\mathbf{v}$ и ускорение $\mathbf{w}$.

1.25. При движении точки ее радиус-вектор $\mathbf{r}$, скорость $\mathbf{v}$ и ускорение $\mathbf{w}$ связаны соотношением $\mathbf{w} = a(\mathbf{v} \times \mathbf{r})$, $a = \text{const} > 0$. Найти радиус кривизны траектории точки как функцию $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$.

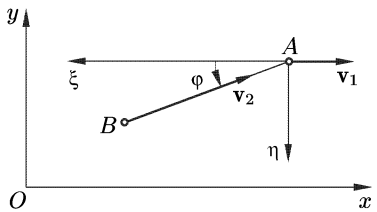
1.26. Движение точки в плоскости задано в полярных координатах $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$. Найти радиус кривизны траектории.

1.27. Доказать, что если ускорение точки имеет постоянное направление, то оно равно $w = \alpha v^3/\rho$, где α — постоянная, v — скорость точки, а ρ — радиус кривизны ее траектории.

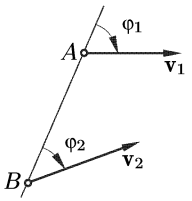
1.28. Точка движется в пространстве с постоянным ускорением $\mathbf{w}$. В начальный момент $t = 0$ она имеет скорость $\mathbf{v}_0$, образующую с ускорением угол α. Определить радиус кривизны траектории точки как функцию времени.

1.29. Самолет, изображенный на рисунке точкой A, движется горизонтально на высоте H с постоянной скоростью $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$. В момент, когда самолет пролетает над ракетной установкой, пускают самонаводящуюся ракету B, имеющую скорость $\mathbf{v}_2$ и все время направленную к точке A, $|\mathbf{v}_2| = 2|\mathbf{v}|$. Найти уравнение траектории ракеты $AB = r(\varphi)$ в системе отсчета $A\xi\eta$, движущейся с самолетом. Найти также время полета ракеты с момента вылета до поражения самолета и ее ускорение как функцию угла φ.

1.30. Точки A и B (см. рисунок) движутся в плоскости с постоянными скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ таким образом, что компоненты их скоростей, перпендикулярные соединяющей их прямой, равны: $v_1 \sin\varphi_1 =$



К задаче 1.29



К задаче 1.30

$= v_2 \sin\varphi_2$ (параллельное сближение в задаче преследования). Найти уравнение траектории точки B, закон сближения $AB = r(t)$ и время движения точек до встречи, если точка A движется по прямой.

1.31. В задаче преследования убегающий A движется по прямой с постоянной скоростью $\mathbf{v}_1$. Догоняющий B движется с постоянной скоростью $\mathbf{v}_2$, направленной по AB. Найти уравнение траектории сближения $AB = r(\varphi)$ в системе отсчета, связанной с убегающим, если $\varphi_0 \neq 0$. (См. рисунок к задаче 1.29.)

1.32. Используя условия предыдущей задачи, найти ускорение догоняющего B и радиус кривизны его траектории в зависимости от $r = AB$ и угла φ между AB и прямой, по которой движется убегающий. (См. рисунок к задаче 1.29.)

1.33. В задаче преследования скорость $\mathbf{v}_2$ догоняющего постоянна и все время направлена на цель. Удаляющаяся цель движется с постоянной скоростью $\mathbf{v}_1$ и ускорением $w = (v_1^2/l)\sin\varphi$, где $l = \text{const}$, а φ — угол между скоростью цели и скоростью догоняющего. Найти траекторию догоняющего $r(\varphi)$ в системе отсчета, связанной с целью (см. рисунок к задаче 1.29.).

1.34. В задаче преследования с упреждением догоняющий движется с постоянной по модулю скоростью $\mathbf{v}_2$ так, что угол δ между направлением его скорости и направлением на цель остается постоянным. Найти время, через которое догоняющий настигнет цель, движущуюся по прямой с постоянной скоростью $\mathbf{v}_1$.

1.35. В задаче преследования цель движется прямолинейно с постоянной скоростью $\mathbf{v}_1$. Скорость $\mathbf{v}_2$ догоняющего постоянна по модулю и все время направлена на цель. Определить нормальное ускорение догоняющего в момент совмещения его с целью в следующих случаях: а) $1 < v_2/v_1 < 2$; б) $v_2/v_1 = 2$; в) $v_2/v_1 > 2$. Рассмотреть случаи удаляющейся и приближающейся цели (см. рисунок к задаче 1.29.).

1.36. Движение точки задано в криволинейных ортогональных координатах q_1, q_2, q_3 соотношениями $q_i = q_i(t)$ $(i = \overline{1,\,3})$. Связь между этими криволинейными и декартовыми координатами выражается зависимостями $x = \varphi_1(q_1, q_2, q_3)$, $y = \varphi_2(q_1, q_2, q_3)$, $z = \varphi_3(q_1, q_2, q_3)$. Показать, что проекции ускорения на касательные к координатным линиям криволинейной системы определяются выражениями

$$w_{q_j} = \left[\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_j}\right)^2\right]^{-1/2}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right] \quad (j = \overline{1,\,3}),$$

где $v^2 = \sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_j}\right)^2\dot{q}_j^2$. (*Координатной линией* называется кривая в пространстве xyz, вдоль которой изменяется только одна из координат q_i, $i = \overline{1,\,3}$.)

1.37. Используя решение задачи 1.36, найти скорость точки и проекции ее ускорения на касательные к координатным линиям для следующих криволинейных ортогональных координат:

а) цилиндрические координаты r, φ, z: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$;

б) сферические координаты r, θ, φ: $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$;

в) координаты параболического цилиндра σ, τ, z: $x = \sigma\tau$, $y = (\tau^2 - \sigma^2)/2$, $z = z$.

г) координаты эллиптического цилиндра u, v, z: $x = a\,\mathrm{ch}\,u\cos v$, $y = a\,\mathrm{sh}\,u\sin v$, $z = z$;

д) параболические координаты σ, τ, φ: $x = \sigma\tau\cos\varphi$, $y = \sigma\tau\sin\varphi$, $z = (\tau^2 - \sigma^2)/2$;

е) координаты вытянутого эллипсоида вращения u, v, φ: $x = a\,\mathrm{sh}\,u\sin v\cos\varphi$, $y = a\,\mathrm{sh}\,u\sin v\sin\varphi$, $z = a\,\mathrm{ch}\,u\cos v$;

ж) координаты сплюснутого эллипсоида вращения u, v, φ: $x = a\,\mathrm{ch}\,u\sin v\cos\varphi$, $y = a\,\mathrm{ch}\,u\sin v\sin\varphi$, $z = a\,\mathrm{sh}\,u\cos v$.

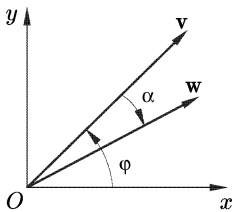
1.38. Положение точки определяется зависимостью радиуса-вектора от криволинейных ортогональных координат: $\mathbf{r} = \mathbf{f}(q_1, q_2, q_3)$. Найти радиус кривизны траектории, считая, что $q_i(t)$, $i = \overline{1,3}$, известны.

1.39. При движении точки со скоростью $\mathbf{v}(t)$ ее цилиндрические координаты изменяются во времени по линейному закону. Найти компоненты кривизны траектории.

1.40. Точка движется по координатной поверхности $q_1 = \mathrm{const}$ ортогональной системы криволинейных координат с постоянной по модулю скоростью v. Говорят, что точка движется по геодезической,

если вектор кривизны траектории направлен по нормали к поверхности $q_1 = \text{const}$. Найти уравнение геодезической.

1.41. Точка движется по поверхности сферы вдоль координатной линии φ ($r = \text{const}, \theta = \text{const}$) сферической системы координат с постоянной скоростью $\mathbf{v}$. Найти вектор кривизны траектории и указать условия, при которых траектория точки является геодезической.



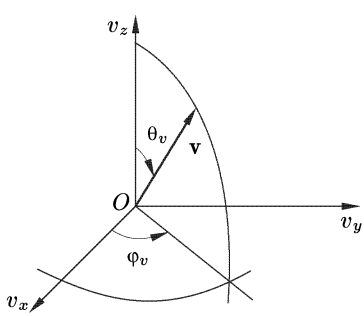
К задаче 1.42

1.42. Точка (см. рисунок) движется в плоскости так, что угол между вектором скорости и вектором ускорения постоянен. Угол φ между направлением вектора скорости $\mathbf{v}$ и неподвижной осью изменяется по заданному закону $\varphi(t)$. Найти скорость и ускорение точки как функции угла φ, если в начальный момент $t = 0$ заданы $v(0) = v_0$, $\varphi(0) = \varphi_0$.

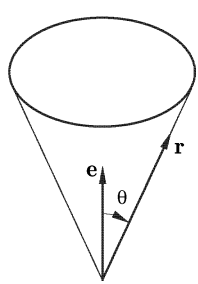
1.43. При движении точки проекция ее скорости $\mathbf{v}$ на ось Ox имеет постоянную величину u. Доказать, что ускорение точки выражается соотношением $w = v^3/u\rho$ (ρ — радиус кривизны траектории) в том и только в том случае, если траектория точки — плоская кривая.

1.44. Годограф вектора скорости точки задан в сферических координатах v, φ_v, θ_v (см. рисунок) зависимостями $v = v(t)$, $\varphi_v = \varphi_v(t)$, $\theta_v = \theta_v(t)$. Найти нормальное ускорение точки.

1.45. Выразить орты сопровождающего трехгранника ($\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$) через вектор скорости $\mathbf{v}$ и вектор ускорения $\mathbf{w}$ точки, если $\mathbf{w} \times \mathbf{v} \neq 0$, а $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} > 0$.



К задаче 1.44



К задаче 1.46

1.46. Точка движется таким образом, что ее ускорение равно $\mathbf{w} = \frac{\gamma}{r^3}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r})$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки, $\gamma = \text{const}$, $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r} \neq 0$ (см. рисунок). Показать, что точка движется по поверхности кругового конуса.

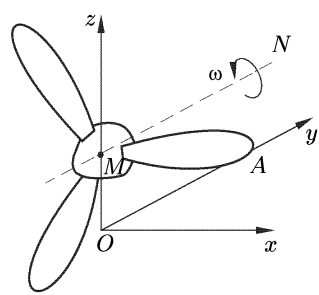
1.47. Найти кривизну траектории точки, движущейся с ускорением $\mathbf{w} = \frac{\gamma}{r^3}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r})$, где $\mathbf{r}$ — ее радиус-вектор, $\gamma = \text{const}$, если в начальный момент скорость точки равнялась $\mathbf{v}_0$.

§ 2. Сложное движение точки

2.1. В соревнованиях по ориентированию на местности n участников в начальный момент находятся на окружности радиуса R на одинаковом расстоянии друг от друга. Во время движения каждому из участников известен лишь пеленг соседа, который в начальной позиции был справа. Для того чтобы собраться на окружности радиуса r ($r < R$), участники ориентируют направление своей скорости по известному пеленгу. Найти время, через которое они соберутся на заданной окружности, если каждый из них будет двигаться с постоянной скоростью v.

2.2. При движении яхты с юга на север со скоростью v_1 ее флюгер показывает, что ветер дует с запада. Флюгер другой яхты, движущейся со скоростью v_2 с запада на восток, показывает, что ветер дует с юго-запада, образуя угол α с направлением «юг–север». Найти модуль скорости ветра и угол β между направлением «юг–север» и направлением ветра относительно неподвижного наблюдателя.

2.3. Винт самолета, установленного на вибростенде, вращается с постоянной угловой скоростью ω относительно горизонтальной оси MN (см. рисунок). Ось MN перемещается параллельно самой себе в вертикальной плоскости zy по закону $OM = a\sin\Omega t$. Найти ускорение точки A на конце лопасти, если $MA = R$.

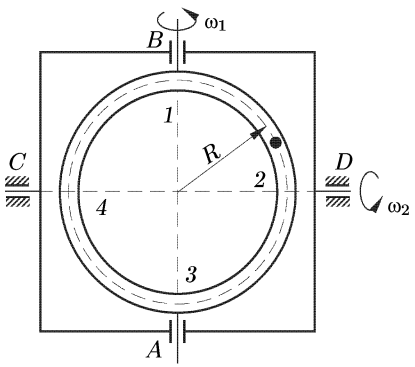


К задаче 2.3

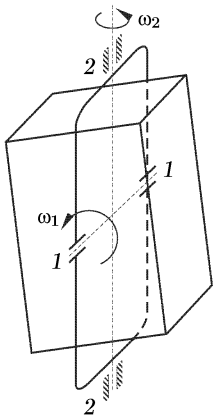
2.4. При стрельбе по движущейся цели ствол орудия длины l вращается в вертикальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω_1. Платформа, на которой установлено орудие, поворачивается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω_2. В момент вылета снаряд имеет относительно ствола скорость v_0 и ускорение w_0, причем ствол направлен под углом α к горизонту. Найти скорость и ускорение снаряда в этот момент.

2.5. Полая трубка (см. рисунок), изогнутая в форме кругового кольца радиуса R, вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 вокруг оси AB, укрепленной в рамке. Рамка в свою очередь вращается вокруг горизонтальной оси CD с постоянной угловой скоростью ω_2.

По трубке с постоянной относительной скоростью v_0 движется шарик. Найти скорость и ускорение шарика в положениях *1*, *2*, *3*, *4* в момент, когда плоскость трубки совпадает с плоскостью рамки.



К задаче 2.5



К задаче 2.6

2.6. Кабина для тренировки космонавтов (см. рисунок) вращается относительно горизонтальной оси *1–1*, укрепленной в раме, которая в свою очередь вращается относительно вертикальной оси *2–2*. Угловые скорости вращения ω_1 и ω_2 относительно указанных осей постоянны. Найти ускорение точки кабины, отстоящей от оси *1–1* на расстояние l и находящейся в начальный момент на оси *2–2*, как функцию времени.

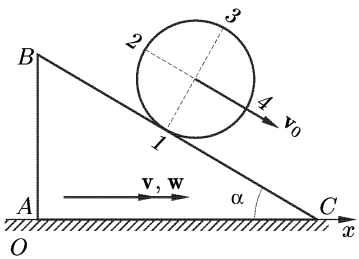
2.7. Горизонтальная плоскость xy вращается вокруг вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Из неподвижной точки O плоскости xy начинает движение точка M. Найти траекторию точки M относительно плоскости, если абсолютная скорость $\mathbf{v}$ точки постоянна. Найти также относительное ускорение w_r точки M в зависимости от $OM = l$. Рассмотреть два случая: а) $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$, б) $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} \neq 0$.

2.8. Показать, что при сложном движении точки имеют место соотношения $\dot{\mathbf{v}}_r = \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_c/2$, $\dot{\mathbf{v}}_e = \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_c/2$, где $\mathbf{v}_e$, $\mathbf{v}_r$ — переносная и относительная скорости; $\mathbf{w}_e$, $\mathbf{w}_r$, $\mathbf{w}_c$ — переносное, относительное и кориолисово ускорения.

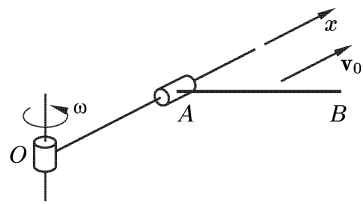
2.9. Найти условия, при которых в сложном движении точки справедливы соотношения $\dot{\mathbf{v}}_r = \mathbf{w}_r$, $\dot{\mathbf{v}}_e = \mathbf{w}_e$.

2.10. Показать, что при сложном движении точки всегда справедливо тождество $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{v}_r - \mathbf{v}_e) = \mathbf{w}_r - \mathbf{w}_e$.

2.11. Призма ABC (см. рисунок) движется поступательно вдоль оси Ox с ускорением $\mathbf{w}$, имея в данный момент скорость $\mathbf{v}$. По линии наибольшего ската BC призмы катится без скольжения цилиндр, скорость центра которого относительно призмы постоянна и равна $\mathbf{v}_0$. Радиус цилиндра R, $\angle BCA = \alpha$. Найти скорости и ускорения точек *1*, *2*, *3*, *4* цилиндра в данный момент времени.



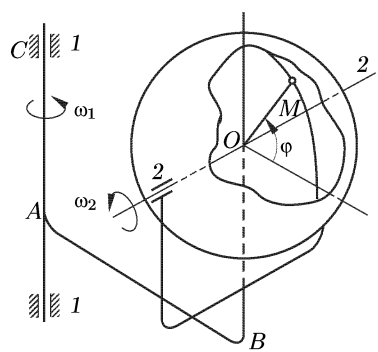
К задаче 2.11



К задаче 2.12

2.12. Направляющая Ox вращается в горизонтальной плоскости вокруг точки O с постоянной угловой скоростью ω (см. рисунок). В этой же плоскости относительно направляющей движется стержень AB с постоянной скоростью $\mathbf{v}_0$. Стержень образует прямой угол с направляющей. Найти зависимость скорости и ускорения точки B стержня от времени, если длина стержня равна l и в начальный момент точка A совпадала с точкой O.

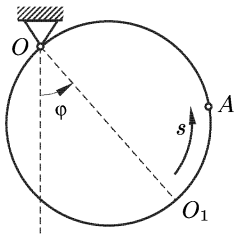
2.13. На плече AB центрифуги (см. рисунок) укреплена испытательная кабина, которая вращается вокруг горизонтальной оси *2–2*, перпендикулярной вертикальной плоскости CAB. Угловые скорости центрифуги ω_1 (относительно оси *1–1*) и кабины ω_2 постоянны, длина плеча AB равна L. Найти ускорение точки M кабины, лежащей в плоскости CAB на расстоянии $OM = l$ от оси *2–2*, в зависимости от угла φ поворота кабины.



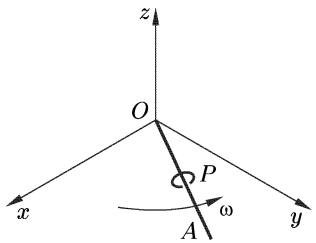
К задаче 2.13

2.14. Круговое кольцо (см. рисунок), точка O которого неподвижна, совершает колебания в своей плоскости по закону $\varphi = \varphi_0 \sin \omega t$. Радиус кольца равен R. Точка A движется по кольцу так, что $s = at^2$, где s — длина дуги O_1A. Найти скорость и ускорение точки A в момент времени $t = \pi/\omega$.

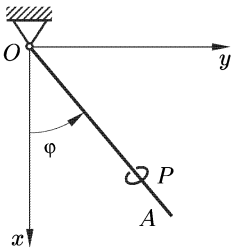
2.15. Стержень OA (см. рисунок) вращается в горизонтальной плоскости относительно вертикальной оси Oz с постоянной угловой



К задаче 2.14



К задаче 2.15

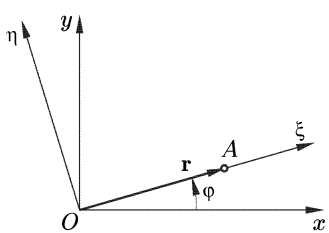


К задаче 2.16

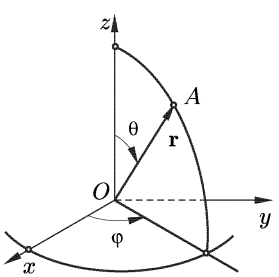
скоростью ω. Колечко P колеблется вдоль стержня по закону $OP = a(1+\sin\omega_0 t)$. Найти скорость и ускорение колечка, пренебрегая его размерами.

2.16. Стержень OA (см. рисунок) совершает колебания в плоскости xy по закону $\varphi = \varphi_0 \sin\omega t$. По стержню скользит колечко P. Пренебрегая размерами колечка, найти его скорость и ускорение, если $OP = at^2/2$.

2.17. Движение точки A в плоскости xy (см. рисунок) задано в полярных координатах $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$. Представляя движение точки A относительно плоскости xy как сложное: вместе с системой $O\xi\eta$ (переносное) и относительно $O\xi\eta$ (относительное), найти проекции скорости и ускорения точки A на оси $O\xi$ и $O\eta$.



К задаче 2.17



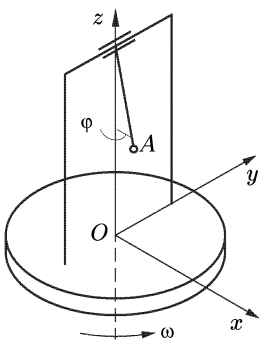
К задаче 2.18

2.18. Движение точки A (см. рисунок) задано в сферических координатах $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$, $\varphi = \varphi(t)$. Найти скорость и ускорение точки, используя разложение движения на относительное (в плоскости $\varphi = \text{const}$) и переносное (с этой плоскостью).

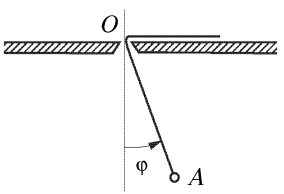
2.19. Горизонтальная платформа (см. рисунок) вращается вокруг вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω. На

платформе установлен математический маятник длины l, совершающий колебания в плоскости xz по закону $\varphi = \varphi_0 \sin \omega_0 t$. Найти скорость и ускорение точки A в момент времени $t = \pi/(2\omega_0)$.

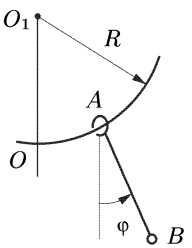
2.20. Математический маятник (см. рисунок) переменной длины колеблется в вертикальной плоскости по гармоническому закону $\varphi = \varphi_0 \sin \omega t$. Найти скорость и ускорение точки A, если длина l части OA нити уменьшается по закону $l = l_0 - at$.



К задаче 2.19



К задаче 2.20



К задаче 2.21

2.21. Точка A подвеса математического маятника AB длины l движется в вертикальной плоскости по окружности радиуса R так, что длина дуги OA равна at. Колебания маятника происходят в этой же плоскости по закону $\varphi = \varphi_0 \sin \omega t$. Найти скорость и ускорение точки B маятника в момент времени $t = \pi/\omega$.

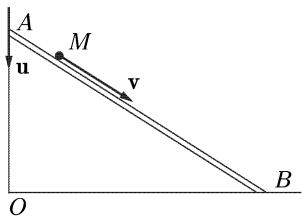
2.22. Парабола $y = ax^2$ вращается вокруг оси Oy с постоянной угловой скоростью ω. Бусинка A движется по параболе с постоянной скоростью v_0. Найти скорость и ускорение бусинки в зависимости от ее положения.

2.23. Стержень AB длины $2a$ скользит своими концами по сторонам прямого угла так, что конец A движется с постоянной скоростью u. По стержню движется шарик M с постоянной относительной скоростью v. Определить скорость и ускорение шарика M в зависимости от времени, если в начальный момент $AM = 0$, $OA = 2a$.

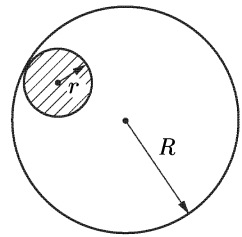
2.24. Диск радиуса R катится по неподвижному рельсу без скольжения. Скорость и ускорение центра диска равны v_0 и w_0 соответственно. Найти скорость и ускорение произвольной точки рельса в системе координат, связанной с диском.

2.25. Кольцо (см. рисунок), внутренний радиус которого равен R, обкатывает без скольжения неподвижный цилиндрический вал радиуса r. Найти скорость и ускорение центра вала в системе отсчета, связанной с кольцом, если угловая скорость кольца равна ω.

2.26. Убегающий A (см. рисунок) движется по окружности радиуса R с постоянной по модулю скоростью v_1. Догоняющий B

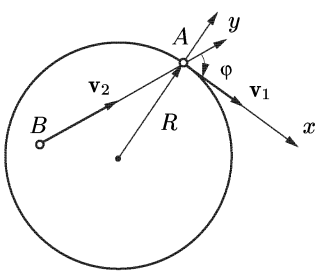


К задаче 2.23

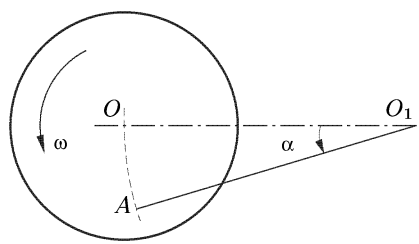


К задаче 2.25

движется с постоянной по модулю скоростью v_2, направленной по линии цели BA. Найти относительное ускорение w_r догоняющего (в системе Axy, ось Ax которой направлена по вектору скорости $\mathbf{v}_1$) в зависимости от расстояния r между A и B и угла φ между векторами $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$.



К задаче 2.26



К задаче 2.27

2.27. Пластинка в проигрывателе (см. рисунок) вращается с постоянной угловой скоростью ω. Звуковая канавка на пластинке представляет собой архимедову спираль, задаваемую уравнением $r = r_0 - k\varphi$. Найти абсолютную скорость v_a иглы и скорость v_r иглы относительно пластинки в зависимости от угла поворота α звукоснимателя ($O_1A = O_1O = l$).

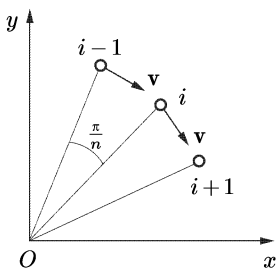
2.28. Используя условия предыдущей задачи, найти тангенциальное и нормальное ускорения иглы в зависимости от угла α.

2.29. Точка движется в плоскости со скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ и ускорением $\mathbf{w} = \mathbf{w}(t)$. Найти скорость и ускорение центра кривизны траектории точки.

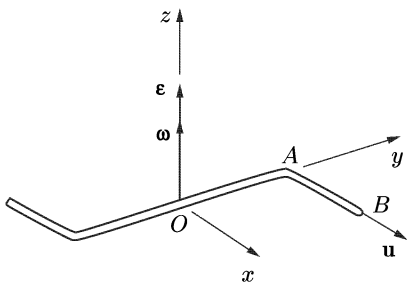
2.30. Источник, испускающий ν колебаний в единицу времени, и прибор, регистрирующий эти колебания, перемещаются относительно среды, в которой распространяются колебания, со скоростями

v_1 и v_2 соответственно. Источник и прибор движутся вдоль соединяющей их прямой; скорость распространения колебаний равна a. Найти число ν' колебаний, регистрируемых прибором в единицу времени. (Эффект Доплера.)

2.31. Используя условия задачи 2.1, найти траекторию движения какого-либо участника соревнований (см. рисунок), если в начальный момент $r(0) = r_0$, $\varphi(0) = \varphi_0$.



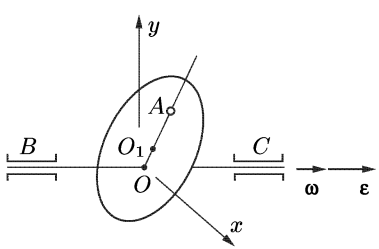
К задаче 2.31



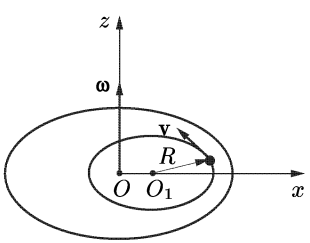
К задаче 2.32

2.32. Сегнерово колесо (см. рисунок) вращается с угловым ускорением ε, имея в данный момент угловую скорость ω. Относительная скорость истечения частиц жидкости $u = \text{const}$. Найти скорость и ускорение частиц жидкости в выходном сечении B, принимая $OA = AB = a$, $\angle OAB = 90°$.

2.33. Диск (см. рисунок), укрепленный на валу с эксцентриситетом $OO_1 = e$ под углом α, вращается вокруг оси BC с угловым ускорением ε, имея в данный момент угловую скорость ω. Точка A движется по диаметру диска, проходящему через точку O по закону $O_1A = a\sin\omega t$. Найти скорость и ускорение точки A.



К задаче 2.33

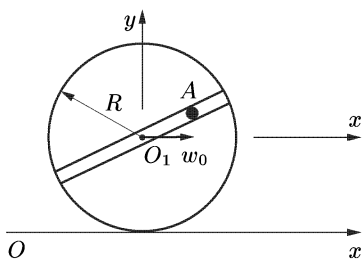


К задаче 2.34

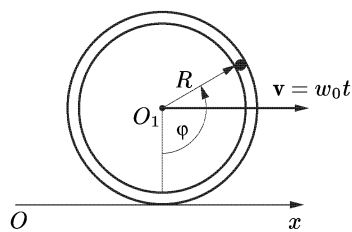
2.34. Диск (см. рисунок) вращается с постоянной угловой скоростью ω относительно вертикальной оси Oz, перпендикулярной его

плоскости. В диске имеется круговой желоб радиуса R, центр которого O_1 смещен относительно центра диска на расстояние $OO_1 = s$. По желобу с постоянной относительной скоростью $\mathbf{v}$ движется шарик в направлении, показанном на рисунке. Найти скорость и ускорение шарика в зависимости от времени, если в начальный момент шарик находится на наибольшем расстоянии от точки O.

2.35. Диск радиуса R (см. рисунок) катится без скольжения по прямой Ox. В диске имеется желоб, совпадающий с диаметром, в котором по закону $O_1A = a\sin\omega t$ движется шарик ($a \leqslant R$). Найти скорость и ускорение шарика A в зависимости от времени, если



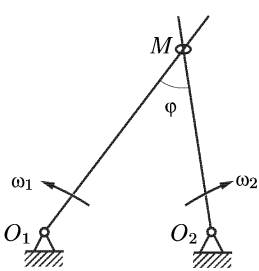
К задаче 2.35



К задаче 2.36

центр O_1 диска движется с постоянным ускорением w_0. В начальный момент скорость центра равнялась нулю, желоб был горизонтален.

2.36. Круговое кольцо радиуса R (см. рисунок) катится без скольжения по прямой Ox. В кольце движется шарик по закону $\varphi = \varphi_0 \sin\omega t$. Найти скорость и ускорение шарика, если центр кольца движется с постоянным ускорением w_0. В начальный момент центр кольца имел скорость, равную нулю. Размерами шарика пренебречь.

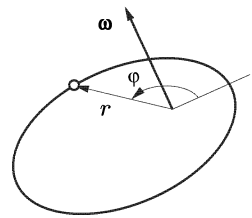


К задаче 2.37

2.37. Два стержня (см. рисунок) вращаются в плоскости вокруг своих неподвижных концов O_1 и O_2 в направлениях, указанных на рисунке. В точке M пересечения стержней находится охватывающее их колечко, которое свободно может перемещаться по стержням. Найти скорость колечка в зависимости от угла φ, если угловые скорости стержней равны ω_1 и ω_2, а расстояние колечка от концов $O_1M = a_1$, $O_2M = a_2$.

2.38. Точка (см. рисунок) движется по эллипсу, уравнение которого в полярных координатах имеет вид $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\varphi}$. Эллипс в свою

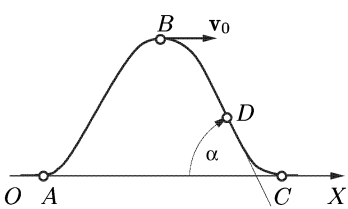
очередь вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через один из его фокусов. Найти скорость и ускорение точки в зависимости от r, если движение точки по эллипсу происходит в соответствии с законом площадей $r^2\dot{\varphi} = C$, где C — постоянная величина [1].



К задаче 2.38

2.39. Спутник движется по эллиптической орбите, плоскость которой образует постоянный угол θ с плоскостью земного экватора. Уравнение орбиты в полярных координатах имеет вид $r = p/(1 + e\cos\varphi)$, а движение по орбите происходит в соответствии с законом площадей $r^2\dot{\varphi} = C$, где C — постоянная величина. Влияние несферичности Земли на движение спутника в некотором приближении можно описать с помощью следующей модели. Эллиптическая орбита спутника вращается (как твердое тело) с постоянной угловой скоростью ω_1 относительно оси, проходящей через центр Земли перпендикулярно плоскости орбиты. Плоскость орбиты в свою очередь вращается с постоянной угловой скоростью ω_2 вокруг неподвижного в пространстве направления «юг–север», также проходящего через центр Земли. Найти скорость и ускорение спутника относительно Земли в тот момент, когда он находится в перигее орбиты. (Прецессия орбиты спутника.)

2.40. По упругой среде распространяется волна (см. рисунок), форма которой не изменяется во время движения. Скорость движения вершины волны B равна v_0. Скорости точек среды A и C (в основании волны) равны нулю. Найти скорость частиц среды в точке D волны, касательная к которой образует угол α с осью Ox.



К задаче 2.40

2.41. В условиях задачи 2.17 подсчитаны переносная $\mathbf{v}_e$ и относительная $\mathbf{v}_r$ скорости точки A. Ввести поступательно движущуюся систему координат так, чтобы скорости $\mathbf{v}_e$ и $\mathbf{v}_r$ поменялись ролями.

2.42. В условиях задачи 2.17 движение точки задано в полярных координатах следующим образом: $r = vt$, $\varphi = \omega t$ ($v = \text{const}$, $\omega = \text{const}$). Найти такую поступательно движущуюся систему координат, чтобы переносная $\mathbf{v}_e$ и относительная $\mathbf{v}_r$ скорости поменялись ролями.

[1] К такой приближенной модели приводит учет влиянии несферичности Земли на движение спутника в плоскости земного экватора.

2.43. Пусть подвижная система координат введена так, как требует вопрос задачи 2.41. Для точки A найти $\mathbf{v}_e$, $\mathbf{v}_r$, $\mathbf{w}_e$, $\mathbf{w}_r$, $\mathbf{w}_c$. Сравнить полученные выражения с результатами задачи 2.17.

§ 3. Плоскопараллельное движение твердого тела

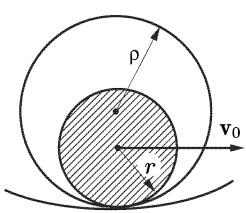
3.1. Скорости двух точек плоской фигуры, движущейся в своей плоскости, равны по модулю. Найти геометрическое место возможных положений мгновенного центра скоростей.

3.2. Плоская фигура движется в своей плоскости. Найти геометрическое место возможных положений мгновенного центра скоростей, если известно отношение $\lambda \neq 1$ скоростей двух точек фигуры, расстояние между которыми равно a.

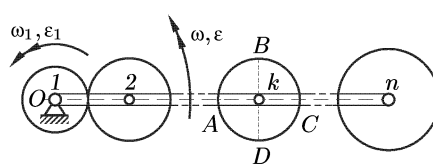
3.3. Скорости трех точек плоской фигуры, движущейся в своей плоскости, равны по модулю. Найти положение мгновенного центра скоростей.

3.4. Диск радиуса r (см. рисунок) катится внутри цилиндрической полости радиуса R, прижимая тонкий обруч радиуса ρ ($r < \rho < R$), как показано на рисунке. Проскальзывание при движении отсутствует. Найти угловую скорость обруча, если линейная скорость центра диска равна v_0.

3.5. Нерастяжимая нить наматывается на неподвижный цилиндр так, что в любой момент времени подвижная часть нити прямолинейна. Показать, что скорость любой точки подвижной части нити перпендикулярна нити.



К задаче 3.4



К задаче 3.8

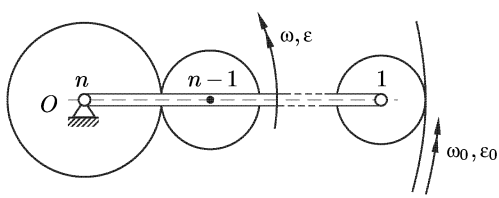
3.6. Плоская фигура движется в своей плоскости. Найти положение точки A, если известны скорость этой точки $\mathbf{v}_A$, скорость некоторой другой точки $\mathbf{v}_0$ и угловая скорость фигуры $\boldsymbol{\omega}$. Использовать полученный результат для определения положения мгновенного центра скоростей P.

3.7. Равнобедренный треугольник ACB ($AC = BC$) движется в своей плоскости так, что $|\mathbf{v}_A| = |\mathbf{v}_B| = v$. В каких пределах может меняться значение скорости вершины C, если $\angle ACB = \alpha$?

3.8. Кривошип (см. рисунок), несущий n шестеренок радиусов $r_1, r_2, \ldots, r_n$ соответственно, вращается вокруг неподвижной оси O с угловым ускорением ε и имеет угловую скорость ω. Шестеренки находятся во внешнем зацеплении друг с другом. Первая шестеренка вращается с угловой скоростью ω_1 и угловым ускорением ε_1. Найти угловую скорость и угловое ускорение остальных шестеренок.

3.9. Кривошип (см. рисунок), несущий n шестеренок радиусов $r_1, r_2, \ldots, r_n$ соответственно, вращается вокруг неподвижной оси O с угловым ускорением ε и имеет угловую скорость ω. Шестеренки находятся во внешнем зацеплении друг с другом. Первая шестеренка, кроме того, находится во внутреннем зацеплении с шестеренкой, вращающейся вокруг той же оси O с угловым ускорением ε_0 и имеющей угловую скорость ω_0. Найти угловую скорость и угловое ускорение каждой шестеренки.

3.10. Используя условия задачи 3.8, найти скорости и ускорения точек k-й шестеренки, занимающих положения A, B, C и D (см. рисунок к задаче 3.8).

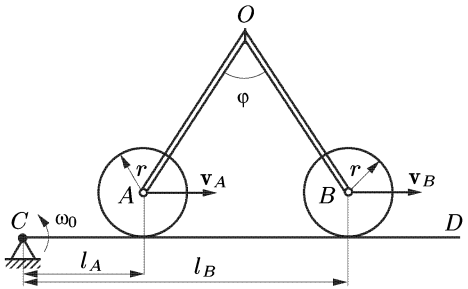


К задаче 3.9

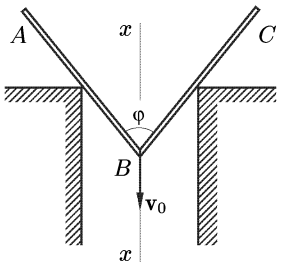
3.11. Два одинаковых диска (см. рисунок) радиуса r катятся без скольжения по прямой CD, поворачивающейся с угловой скоростью ω_0 вокруг точки C. Стержни OA и OB длины l каждый соединены шарнирами между собой и с дисками (в точках O, A и B). Найти линейную скорость точки O в зависимости от угла φ, если относительные скорости центров дисков равны v_A и v_B, а точки соприкосновения дисков с прямой CD находятся на расстояниях l_A и l_B от точки C.

3.12. Стержни AB и BC шарнирно соединены в точке B и опираются на два прямых угла, как показано на рисунке. Точка B движется по прямой xx, равноудаленной от вертикальных сторон углов. Во время движения стержни касаются вершин прямых углов. Доказать, что скорость точки касания каждого стержня вершин прямого угла

направлена вдоль стержня. Найти также скорость этой точки в зависимости от угла $\angle ABC = \varphi$, если скорость точки B равна v_0.



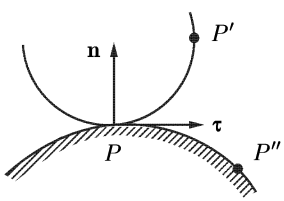
К задаче 3.11



К задаче 3.12

3.13. Показать, что при движении плоской фигуры в своей плоскости (см. рисунок) ускорение мгновенного центра скоростей P направлено по нормали $\mathbf{n}$ к центроидам.

3.14. Найти нормальное и тангенциальное ускорения точки A плоской фигуры, движущейся в своей плоскости, если известны ускорение этой точки $\mathbf{w}_A$ и положение мгновенного центра скоростей P.



К задаче 3.13

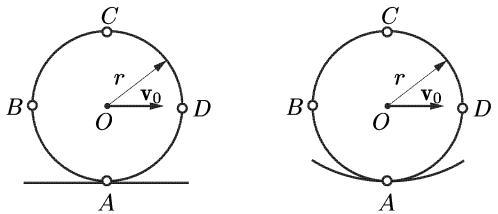
3.15. Плоская фигура движется в своей плоскости, причем ее угловая скорость равна ω. Найти радиус кривизны траектории точки A фигуры, если известны ускорение этой точки $\mathbf{w}_A$ и положение мгновенного центра скоростей P.

3.16. Угловая скорость плоской фигуры, движущейся в своей плоскости, отлична от нуля. Найти геометрическое место таких точек фигуры, для каждой из которых проекция ускорения на прямую, соединяющую точку с мгновенным центром ускорений, совпадает с нормальным ускорением точки.

3.17. Сравнить скорости и ускорения точек A, B, C, D ($AB = BC = CD = DA$) для двух движений (1) и (2) диска радиуса r (см. рисунок). В первом случае диск катится без скольжения по прямой, а во втором — по окружности радиуса $R > r$. Скорость центра диска O в обоих случаях постоянна и равна v_0.

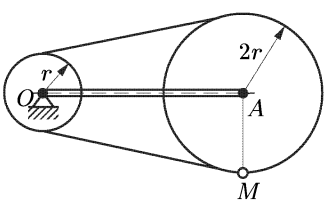
3.18. При движении плоской фигуры в своей плоскости известны ускорение $\mathbf{w}_0$ точки O фигуры, а также угловая скорость ω и угловое ускорение ε фигуры. Найти точку A, имеющую заданное ускорение $\mathbf{w}_A$ и мгновенный центр ускорений.

3.19. Найти угловую скорость ω и угловое ускорение ε плоской фигуры, движущейся в своей плоскости, если известны ускорения $\mathbf{w}_A$, $\mathbf{w}_B$ точек A и B фигуры.

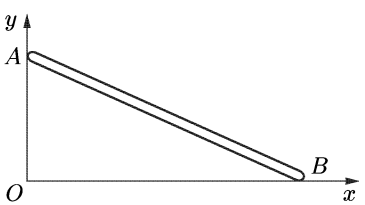


К задаче 3.17

3.20. Кривошип OA (см. рисунок) длины l вращается с угловым ускорением ε вокруг оси O неподвижной шестеренки радиуса r и несет на конце A ось другой шестеренки радиуса $R = 2r$. Шестеренки соединены между собой охватывающей их цепью. Найти скорость и ускорение точки M подвижной шестеренки в момент, когда $AM \perp OA$, если угловая скорость кривошипа в этот момент равна ω.



К задаче 3.20



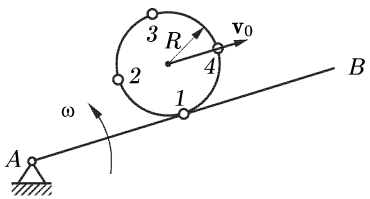
К задаче 3.21

3.21. Концы A и B стержня (см. рисунок) движутся по двум взаимно перпендикулярным прямым Ox и Oy. Скорость точки A постоянна. Показать, что ускорение любой точки стержня перпендикулярно Oy и изменяется обратно пропорционально кубу расстояний этой точки от оси Oy.

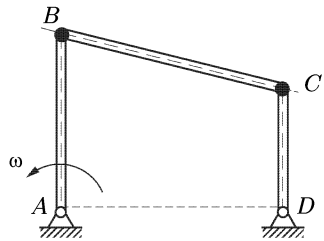
3.22. Диск радиуса R (см. рисунок) катится без скольжения по направляющей AB, вращающейся в вертикальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω. Найти скорость и ускорение точек *1*, *2*, *3* и *4* диска, если относительная скорость его центра постоянна и равна v_0. В начальный момент точка касания диска с направляющей совпадала с точкой A.

3.23. Стержни AB и CD (см. рисунок) длины R и r соответственно, соединенные шарнирами B и C со стержнем BC длины a, могут

вращаться вокруг неподвижных точек A и D, оставаясь в одной плоскости. Угловая скорость ω стержня AB постоянна. Найти ускорение точки C в тот момент, когда стержни AB и CD параллельны между собой и перпендикулярны отрезку AD.

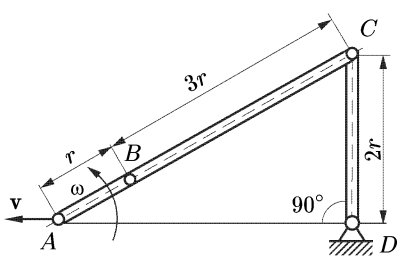


К задаче 3.22

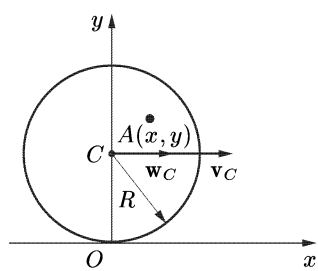


К задаче 3.23

3.24. Стержни AB, BC и CD (см. рисунок) соединены шарнирами, причем стержень CD может поворачиваться вокруг неподвижной точки D, а стержень AB вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг точки A, движущейся по прямой AD с постоянной скоростью $\mathbf{v}$. Найти скорость и ускорение точки C в момент, когда угол между стержнями AB и BC равен нулю, а угол ADC составляет $90°$.



К задаче 3.24



К задаче 3.25

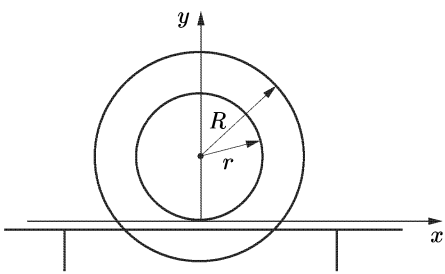
3.25. Диск радиуса R (см. рисунок) катится по прямой без скольжения. В некоторый момент времени известны скорость v_C и ускорение w_C центра C диска. Найти нормальное и тангенциальное ускорения точки $A(x, y)$ диска ($x \neq 0, y \neq 0$).

3.26. Диск радиуса R катится по прямой без скольжения. Найти геометрическое место точек диска, для которых нормальное ускорение равно нулю.

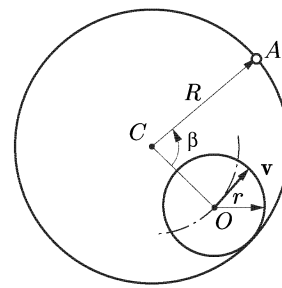
3.27. Диск радиуса R (см. рис. к задаче 3.25) катится по прямой без скольжения. Найти радиус кривизны траектории точки $A(x, y)$

диска ($x \neq 0, y \neq 0$). Показать также, что радиус кривизны траектории любой точки обода диска равен удвоенному расстоянию от этой точки до мгновенного центра скоростей.

3.28. Шкив радиуса R (см. рисунок) жестко соединен с валом радиуса r, катящимся без проскальзывания по горизонтальной прямой. Найти геометрическое место точек шкива, для которых расстояние до мгновенного центра скоростей совпадает с радиусом кривизны траектории.



К задаче 3.28



К задаче 3.30

3.29. Прямая AB обкатывает без скольжения с постоянной угловой скоростью ω неподвижную окружность радиуса R. Найти скорость и ускорение произвольной точки M прямой AB.

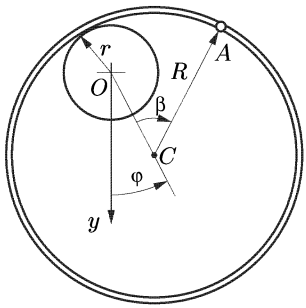
3.30. Цилиндр радиуса r (см. рисунок) катится без скольжения по внутренней поверхности неподвижного цилиндра радиуса R, причем скорость $\mathbf{v}$ центра O подвижного цилиндра постоянна. Найти скорость и ускорение точки A неподвижного цилиндра относительно системы координат, связанной с подвижным цилиндром, считая, что угол между линией центров цилиндров CO и диаметром неподвижного цилиндра, проходящим через точку A, равен β.

3.31. Обруч радиуса R (см. рисунок) обкатывает без скольжения неподвижный цилиндр радиуса r. Найти скорость и ускорение точки A обруча, если угол между линией центров OC и осью Oy равен $\varphi = \omega t$ ($\omega = \text{const}$), а положение точки A на обруче определяется углом $\angle ACO = \beta$.

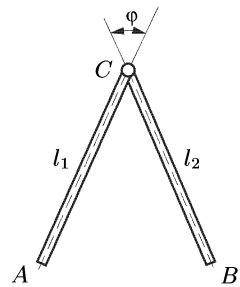
3.32. Решить предыдущую задачу в случае, когда цилиндр перемещается поступательно, причем его центр O движется по окружности $x^2 + (y - \rho)^2 = \rho^2$ с постоянной скоростью v_0. В начальный момент скорость точки O направлена по оси Oy. (Модель известного гимнастического упражнения с обручем.)

3.33. Стержни AC и BC (см. рисунок) длины l_1 и l_2 соответственно, соединенные в точке C шарниром, движутся в плоскости. Известны скорости свободных концов стержней $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_B$, а также их

ускорения $\mathbf{w}_A$ и $\mathbf{w}_B$. Найти угловые скорости и угловые ускорения стержней, если угол между ними в рассматриваемый момент времени равен φ $(0 < \varphi < \pi)$.



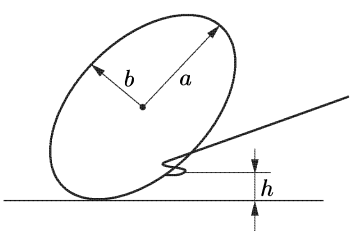
К задаче 3.31



К задаче 3.33

3.34. Эллиптическая пластинка с полуосями a и b $(a > b)$ катится без скольжения по горизонтальной прямой с постоянной угловой скоростью ω. Найти скорость центра O эллипса в зависимости от времени, считая, что в начальный момент его большая полуось была горизонтальна.

3.35. Мальчик бежит с постоянной скоростью v_0 и с помощью водила (см. рисунок) катит перед собой обод, имеющий форму эллипса с полуосями a и b $(a > b)$. Кольцо водила находится на постоянной высоте $h < b$ над землей. Найти наименьшую и наибольшую угловые скорости обода, если нет проскальзывания.



К задаче 3.35

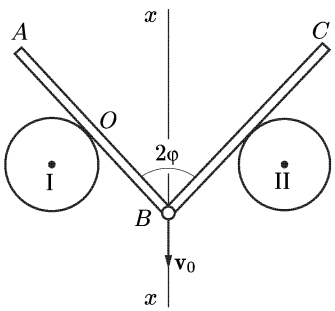
3.36. В каждый момент времени t известны скорость $\mathbf{v}(t)$ движущейся в плоскости точки и радиус кривизны ее траектории $\rho(t)$. Найти угловую скорость и угловое ускорение сопровождающего точку трехгранника $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$.

3.37. Доказать, что мгновенный центр скоростей сопровождающего трехгранника движущейся в плоскости точки в любой момент времени совпадает с центром кривизны траектории точки.

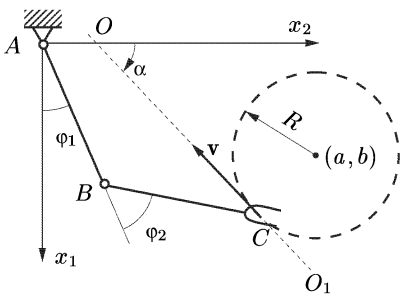
3.38. Точка B (см. рисунок) шарнирного соединения двух стержней AB и BC движется по вертикали, равноудаленной от одинаковых неподвижных цилиндров I и II, на которые стержни опираются во время движения. Доказать, что скорость той точки каждого стержня, в которой он касается цилиндра, направлена вдоль стержня. Найти

скорость точки касания стержня в зависимости от угла $\angle ABC = 2\varphi$, если скорость точки B равна $\mathbf{v}_0$.

3.39. Схват C (см. рисунок) плоского двухзвенного автоматического манипулятора ABC движется с постоянной скоростью $\mathbf{v}$ вдоль прямой OO_1, образующей с осью Ax_2 угол α. Найти угловые скорости звеньев AB и BC в зависимости от конфигурации манипулятора, т. е. от углов φ_1 и φ_2, если $AB = l_1$, $BC = l_2$.



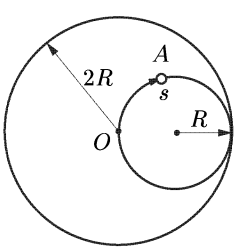
К задаче 3.38



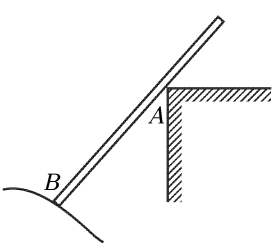
К задаче 3.39

3.40. Схват C (см. рис. к задаче 3.39) плоского двухзвенного автоматического манипулятора ABC движется с постоянной скоростью v по окружности радиуса R с центром в точке $x_1 = a$, $x_2 = b$. Найти угловые скорости звеньев AB и BC в зависимости от φ_1 и φ_2, если их длины равны l_1 и l_2 соответственно.

3.41. Обруч радиуса R (см. рисунок) катится без проскальзывания по внутренней поверхности обруча радиуса $2R$. Найти траекторию, скорость $v(s)$ и ускорение $w(s)$ $(s = OA)$ произвольной точки A подвижного обруча, если его центр движется с постоянной скоростью $\mathbf{v}$.



К задаче 3.41



К задаче 3.42

3.42. Стержень (см. рисунок) движется в плоскости, опираясь одной из своих точек на вершину угла A. Конец B стержня скользит

по некоторой кривой. Показать, что скорость точки касания стержня направлена вдоль стержня.

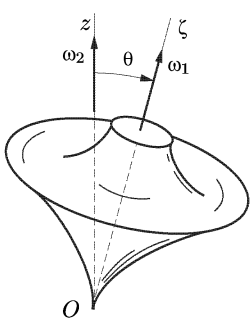
§ 4. Движение твердого тела с неподвижной точкой. Общий случай движения твердого тела

4.1. Твердое тело вращается вокруг неподвижной точки. Доказать, что если мгновенная ось занимает постоянное положение в теле, то движение является вращением вокруг неподвижной оси. Обратно, если мгновенная ось неподвижна в пространстве, то она неподвижна также и относительно тела.

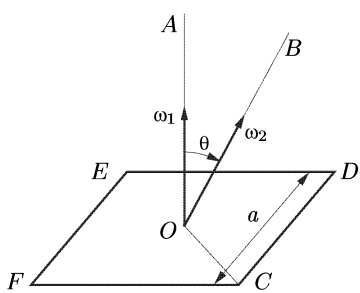
4.2. При движении твердого тела с неподвижной точкой известна компонента $\omega_\xi(t)$ угловой скорости на ось $O\xi$, жестко связанную с телом. Найти проекцию углового ускорения на эту ось.

4.3. Твердое тело вращается вокруг неподвижной точки O. В теле выбраны точки A_1, A_2, A_3 так, что векторы $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$ взаимно ортогональны, $|\overrightarrow{OA_1}| = |\overrightarrow{OA_2}| = |\overrightarrow{OA_3}| = l$. Найти скорость точки A_3, если известны скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ точек A_1 и A_2 соответственно.

4.4. Юла (см. рисунок) вращается вокруг своей оси симметрии $O\zeta$ с постоянной угловой скоростью ω_1. Ось $O\zeta$ равномерно вращается относительно вертикали Oz с угловой скоростью ω_2, так что угол θ остается постоянным (регулярная прецессия). Найти угловую скорость и угловое ускорение юлы относительно Oz.



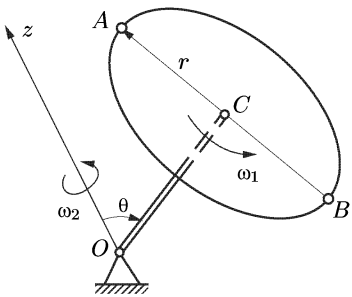
К задаче 4.4



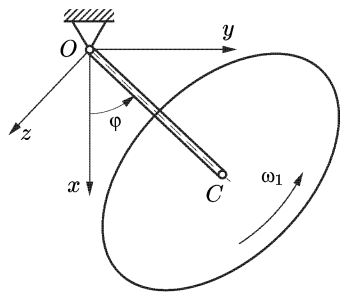
К задаче 4.5

4.5. Квадратная пластина со стороной a (см. рисунок) вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 вокруг своей оси симметрии OA, которая в свою очередь вращается с постоянной угловой скоростью ω_2 вокруг неподвижной оси OB, образуя с ней постоянный угол θ. Найти скорости и ускорения точек C, D, E и F пластины в тот момент, когда прямые OA, OB и OC лежат в одной плоскости.

4.6. Диск радиуса r (см. рисунок), насаженный под прямым углом на стержень OC длины $r\sqrt{3}$, вращается вокруг OC с постоянной угловой скоростью ω_1. Стержень OC вращается вокруг оси Oz с постоянной угловой скоростью $\omega_2 = \omega_1$, образуя с этой осью постоянный угол $\theta = 60°$. Найти скорость и ускорение диаметрально противоположных точек A и B диска в тот момент, когда эти точки лежат в плоскости zOC.



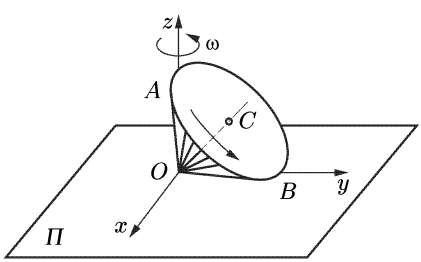
К задаче 4.6



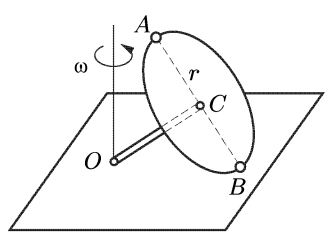
К задаче 4.7

4.7. Диск (см. рисунок), насаженный под прямым углом на стержень OC, вращается вокруг OC с постоянной угловой скоростью ω_1. Стержень в свою очередь совершает гармонические колебания в вертикальной плоскости xy по закону $\varphi = \varphi_0 \sin \omega_0 t$. Найти угловую скорость и угловое ускорение диска в зависимости от времени.

4.8. Плоскость Π (см. рисунок) вращается с постоянной угловой скоростью ω относительно неподвижной оси Oz, перпендикулярной плоскости Π. Прямой круговой конус с углом раствора $90°$ при вершине катится по плоскости Π без скольжения так, что его вершина O



К задаче 4.8



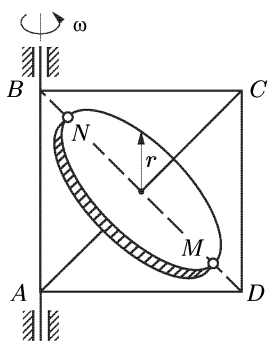
К задаче 4.10

неподвижна, а скорость центра C основания относительно плоскости равна $\mathbf{v}$. Найти мгновенную угловую скорость Ω и угловое ускорение ε конуса, если $\overrightarrow{OB} = \mathbf{l}$.

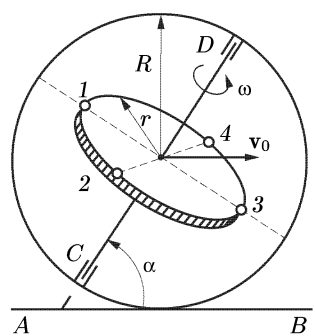
4.9. Используя условия предыдущей задачи (см. рис. к ней), найти скорость и ускорение точек A, B и C конуса.

4.10. Коническое колесо радиуса r (см. рисунок), жестко насаженное на стержень OC длины $l = r\sqrt{3}$, катится по горизонтальной плоскости без скольжения. Стержень OC описывает коническую поверхность, вращаясь вокруг неподвижной точки O (в точке O сферический шарнир) с угловым ускорением ε, имея в данный момент угловую скорость ω. Определить угловые скорость и ускорение колеса и ускорения его точек A и B.

4.11. Квадратная рама $ABCD$ ($AB = AD = a$) вращается вокруг оси AB (см. рисунок) с постоянной угловой скоростью ω. Вокруг оси AC, совпадающей с диагональю рамы, вращается (также с постоянной угловой скоростью) диск радиуса r; центр диска совпадает с центром рамы, а его плоскость перпендикулярна плоскости рамы. Какой должна быть угловая скорость вращения диска вокруг оси AC, чтобы в тот момент, когда точка M лежит на диагонали BD, мгновенная ось вращения диска совпадала с прямой AM? Найти вращательное и осестремительное ускорения точек M и N в этот момент.



К задаче 4.11



К задаче 4.12

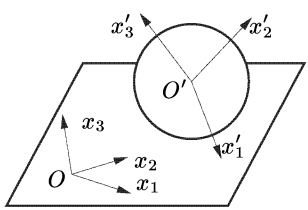
4.12. Тонкий обруч радиуса R (см. рисунок) катится без скольжения по прямой AB. Скорость центра обруча постоянна и равна v_0. В плоскости обруча укреплена ось CD, вокруг которой с постоянной угловой скоростью ω вращается перпендикулярный ей диск радиуса r, причем центры диска и обруча совпадают. Найти скорость и ускорение точек *1*, *3* диска, расположенных на концах диаметра, лежащего в плоскости обруча, и точек *2*, *4* диаметра, перпендикулярного плоскости обруча, в тот момент, когда ось CD образует угол α с прямой AB.

4.13. При движении твердого тела заданы его угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_r$ и угловое ускорение ε_r относительно некоторой подвижной системы отсчета. Известны также угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_e$ и угловое ускорение ε_e этой подвижной системы отсчета относительно неподвижной. Определить угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ и угловое ускорение ε тела.

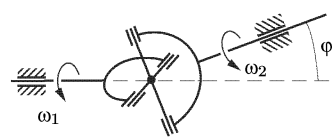
4.14. Твердое тело участвует в n вращениях относительно осей, пересекающихся в одной точке. Угловые скорости каждого вращения $\boldsymbol{\omega}_k$ $(k = \overline{1, n})$ постоянны по модулю. Выразить угловое ускорение тела через векторы $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n$, предполагая, что $\boldsymbol{\omega}_1$ — постоянный вектор.

4.15. Решить предыдущую задачу в предположении, что угловые скорости $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n$ меняются по модулю.

4.16. Шар радиуса r (см. рисунок) катится по плоскости без скольжения. Задавая ориентацию шара направляющими косинусами α_{ij}, $i, j = \overline{1, 3}$ $\left(x'_i = \sum\limits_{j=1}^{3} \alpha_{ij} x_j,\ i = \overline{1, 3}\right)$, выписать условия качения шара без скольжения.



К задаче 4.16



К задаче 4.17

4.17. Два вала (см. рисунок) соединены шарниром Кардана–Гука. Найти закон изменения коэффициента передачи $k = \omega_2/\omega_1$, если угол между осями равен φ.

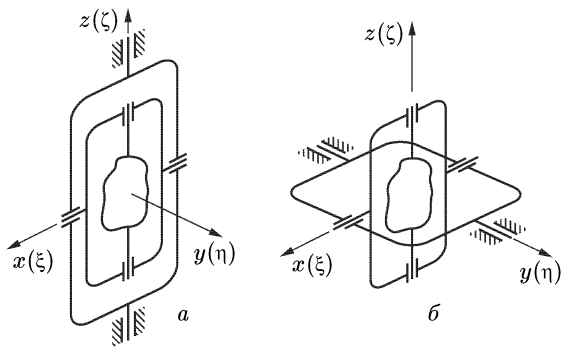
4.18. Существуют двенадцать вариантов начального расположения колец карданова подвеса (который обеспечивает вращение твердого тела вокруг неподвижной точки) относительно неподвижной системы координат: два из них (*а* и *б*) представлены на рисунке. Для этих двух вариантов выразить проекции угловой скорости твердого тела на неподвижные оси $Oxyz$ и на оси $O\xi\eta\zeta$, связанные с телом, через углы поворотов колец карданова подвеса ψ, θ, φ и их производные $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$.

4.19. При специально подобранных условиях твердое тело, имеющее неподвижную точку, движется таким образом, что проекции угловой скорости тела на оси $O\xi$ и $O\eta$ системы координат $\xi\eta\zeta$, жестко

связанной с телом, меняются во времени по закону

$$\omega_\xi = -\frac{a}{\operatorname{ch} t} = c\sin\theta\sin\varphi, \quad \omega_\eta = \frac{b}{\operatorname{ch} t} = d\sin\theta\cos\varphi,$$

где a, b, c и d — известные постоянные. Задавая положение твердого тела эйлеровыми углами ψ, θ и φ, найти траекторию следа оси $O\zeta$ на сфере единичного радиуса.



К задаче 4.18

4.20. Конус с углом 2α при вершине катится по плоскости без скольжения. Вершина конуса неподвижна. Угловая скорость конуса постоянна и равна ω. Найти скорость и ускорение точек плоскости в системе координат, связанной с конусом.

4.21. Биллиардный шар движется по плоскости так, что одно из его центральных сечений S во все время движения остается вертикальным. Показать, что вектор угловой скорости шара лежит в плоскости, перпендикулярной сечению S.

4.22. Три ортогональных орта $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ жестко связаны с твердым телом так, что орт $\mathbf{j}$ перпендикулярен некоторому сечению S. При движении твердого тела это сечение S остается вертикальным. Используя формулу

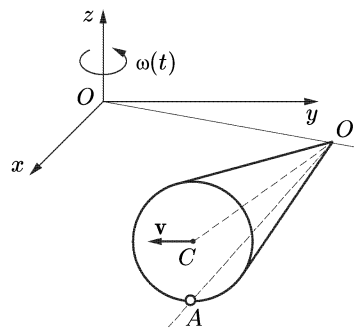
$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{i}\left(\frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{k}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{i}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j}\right),$$

показать, что $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e} + \omega_2\mathbf{j}$, где $\mathbf{e}$ — орт вертикали, а ω_1 и ω_2 — скалярные величины.

4.23. При движении прямой (оси Ox) известны ускорения $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$ точек с координатами x_1 и x_2 соответственно. Найти ускорение точки этой прямой с произвольным значением координаты x.

4.24. Конус с углом 2α при вершине движется по неподвижной плоскости, касаясь ее одной из своих образующих. Движение происходит таким образом, что ось кинематического винта во все время движения направлена по линии касания конуса с плоскостью. Составить дифференциальные уравнения движения вершины конуса, если заданы мгновенная угловая скорость конуса $\omega(t)$ и скорость его вершины $v(t)$. Для случая, когда ω и v постоянны, найти траекторию вершины конуса.

4.25. Горизонтальная плоскость (см. рисунок) вращается вокруг вертикальной оси Oz с угловой скоростью $\omega(t)$. Конус, вершина O_1 которого неподвижна относительно плоскости, катится по ней без скольжения. Центр основания конуса C движется равномерно относительно плоскости со скоростью $\mathbf{v}$. Найти угловую скорость и угловое ускорение конуса. Высота конуса h, угол при вершине 2β.



К задаче 4.25

4.26. Используя условия предыдущей задачи, найти скорость и ускорение точки A конуса, в которой его основание касается плос- кости ($OO_1 = l$).

4.27. Векторы скоростей всех точек твердого тела отложены от общего начала. Найти геометрическое место концов этих векторов.

4.28. Известны скорости $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ трех точек твердого тела, не лежащих на одной прямой. Найти угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ тела.

4.29. При движении твердого тела известны ускорение точки O тела $\mathbf{w}_O$, угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ и угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}$, причем $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon} \neq 0$. Найти точку, ускорение которой равно заданному вектору $\mathbf{w}$.

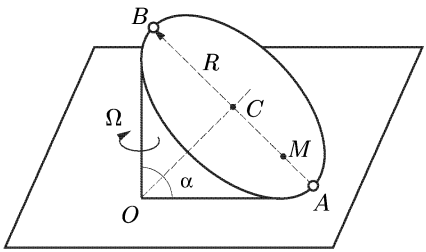
4.30. Твердое тело вращается вокруг неподвижной точки с угловым ускорением $\boldsymbol{\varepsilon}$, имея в данный момент угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$. Показать, что вращательная компонента ускорения какой-либо точки тела совпадает с касательной, а осестремительная компонента — с нормальной в том и только в том случае, когда эта точка лежит в плоскости, содержащей векторы $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\omega}$.

4.31. Показать, что вектор угловой скорости сопровождающего трехгранника $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ лежит в спрямляющей плоскости $\boldsymbol{\tau}\mathbf{b}$.

4.32. Точка движется по закону $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Найти угловую скорость сопровождающего трехгранника $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$.

4.33. Конус с неподвижной вершиной O (см. рисунок) и углом при вершине $\alpha = \pi/2$ катится без скольжения по горизонтальной плос-

кости так, что ось симметрии $OC = h$ вращается вокруг вертикали с постоянной угловой скоростью Ω. Найти вращательное и осестремительное, а также касательное и нормальное ускорения точки B.



К задаче 4.33

4.34. Круговой конус с прямым углом при вершине и радиусом основания, равным R (см. рис. к задаче 4.33), катится без скольжения по горизонтальной плоскости так, что скорость центра основания постоянна и равна v. Вдоль прямолинейного канала, проведенного из вершины O конуса в центр C его основания, равномерно движется точка со скоростью, также равной v. Определить ускорение этой точки в момент, когда она попадет в центр основания.

4.35. Круговой конус с прямым углом при вершине и радиусом основания R (см. рис. к задаче 4.33) катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Вершина конуса неподвижно закреплена. Центр основания конуса C движется равноускоренно со скоростью $v = wt$. По желобу, совпадающему с диаметром основания, по закону $CM = R\sin\omega t$ движется точка M. Найти ускорение точки M в момент времени $t = \pi/\omega$, если в этот момент желоб лежит в плоскости OCA.

4.36. При движении твердого тела с неподвижной точкой O известны его угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ и угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}$, причем $|\boldsymbol{\omega}| = \mathrm{const}$. Найти касательное $\mathbf{w}_\tau$ и нормальное $\mathbf{w}_n$ ускорения произвольной точки тела.

4.37. Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ твердого тела с неподвижной точкой задана проекциями $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$ на оси, жестко связанные с телом. Найти угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}$ тела.

4.38. При движении твердого тела, имеющего неподвижную точку O, углы Эйлера меняются по закону $\psi = \omega t$, $\theta = \pi/3$, $\varphi = 2\omega t$. Определить ускорение точек M и N тела, если $\overrightarrow{OM} \parallel \boldsymbol{\omega}$, а $\overrightarrow{ON} \parallel \boldsymbol{\varepsilon}$, где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — угловое ускорение тела. Расстояния $OM = ON = r$.

4.39. При движении твердого тела орты $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ подвижной системы координат, жестко связанной с телом, выражаются через орты $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \boldsymbol{\tau}_3$ неподвижной системы отсчета равенствами $\mathbf{e}_i = \sum\limits_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\boldsymbol{\tau}_j$,

$\boldsymbol{\tau}_j = \sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_{ij}\mathbf{e}_i$, где α_{ij} — заданные функции времени. Показать, что мгновенная угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ твердого тела может быть представлена в форме

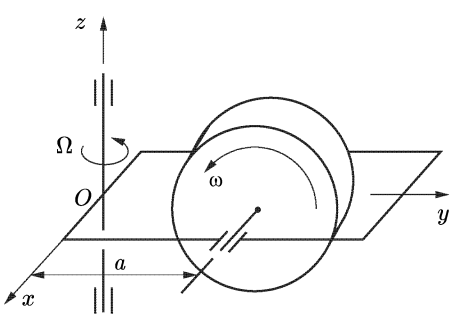
$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{3i}\dot{\alpha}_{2i}\mathbf{e}_1 + \sum_{i=1}^{3} \alpha_{1i}\dot{\alpha}_{3i}\mathbf{e}_2 + \sum_{i=1}^{3} \alpha_{2i}\dot{\alpha}_{1i}\mathbf{e}_3.$$

4.40. При движении твердого тела известны скорость $\mathbf{v}_A$ точки A тела и направление вектора скорости точки B этого тела, задаваемое единичным ортом $\mathbf{e}$. Найти модуль скорости точки B, если $\mathbf{v}_A \times \mathbf{e} \neq 0$.

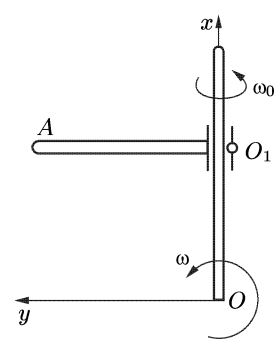
4.41. Гайка накручивается на неподвижный болт. Известны скорости $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_B$ $(\mathbf{v}_A \neq \mathbf{v}_B)$ двух точек гайки и направление оси болта. Найти угловую скорость ω гайки и скорость v ее геометрического центра.

4.42. При движении тела с одной неподвижной точкой известны скорости $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_B$ двух точек A и B тела. Найти угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$, если скорости точек A и B удовлетворяют одному из условий: а) $\mathbf{v}_A \times \mathbf{v}_B \neq 0$; б) $\mathbf{v}_B = \alpha\mathbf{v}_A$ (α — произвольная константа).

4.43. Испытательная платформа (см. рисунок) вращается вокруг оси Oz, перпендикулярной ее плоскости, с угловой скоростью Ω. На платформе укреплен гироскоп, ротор которого вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, лежащей в плоскости платформы и параллельной оси Ox. Найти кинематический винт гироскопа, если расстояние между осью Oz и осью ротора равно a.



К задаче 4.43

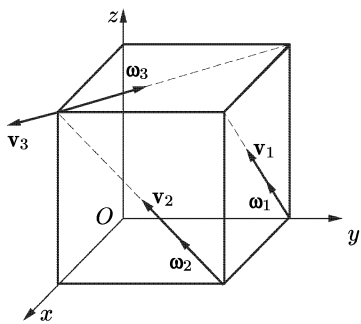


К задаче 4.44

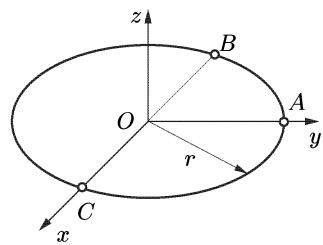
4.44. Точка O_1 стержня O_1A (см. рисунок) скользит с постоянной скоростью v_0 вдоль стержня Ox, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω около центра O (ось вращения перпендикулярна плоскости рисунка). Стержень O_1A вращается вокруг стержня Ox

с постоянной относительной угловой скоростью ω_0. Найти кинематический винт стержня O_1A.

4.45. Тело участвует одновременно в трех винтовых движениях, оси которых расположены по диагоналям граней куба, как показано на рисунке. Найти результирующее движение тела, если $|\boldsymbol{\omega}_i| = \omega$, $|\mathbf{v}_i| = v$. Ребро куба равно a.



К задаче 4.45



К задаче 4.46

4.46. В момент метания диска радиуса r (см. рисунок) его плоскость горизонтальна, а три его точки A, B, C имеют скорости $v_A = 0$, $v_B = v$, $v_C = \sqrt{2}v$, причем вектор скорости $\mathbf{v}_B$ лежит в плоскости диска. Показать, что скорости точек диска в этот момент распределены так, как если бы происходило вращение вокруг некоторой оси. Найти угловую скорость ω и направление оси вращения.

4.47. Координаты точек тела и их скоростей заданы в некоторой системе координат. Точки $A(a,0,0)$, $B(a,a,a)$, $C(0,0,a)$ тела имеют в рассматриваемый момент скорости $\mathbf{v}_A(v,-v,2v)$, $\mathbf{v}_B(v,0,v)$ и $\mathbf{v}_C(v,0,2v)$. Найти кинематический винт тела.

4.48. В некоторой системе координат точки $A(a,0,0)$, $B(0,a,0)$, $C(0,0,a)$ твердого тела имеют в рассматриваемый момент скорости $\mathbf{v}_A(0,v,v)$, $\mathbf{v}_B(0,v,v)$, $\mathbf{v}_C(-v,0,0)$. Найти кинематический винт тела.

4.49. Известно, что скорости точек A, B и C твердого тела в некоторый момент удовлетворяют соотношению $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B \neq \mathbf{v}_C$. При каком условии, наложенном на векторы $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_C$, скорости точек тела будут распределены так, как если бы происходило вращение вокруг некоторой оси? Найти также модуль и направление угловой скорости вращения.

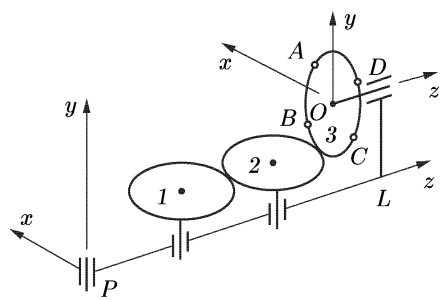
4.50. Доказать, что при любом движении угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ твердого тела связана с распределением скоростей его точек равенством $\boldsymbol{\omega} = (1/2)\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}$.

4.51. Поле скоростей $v_i = v_i(x_1,\ x_2,\ x_3)$ $(i = \overline{1,3})$ твердого тела задано в некоторой системе отсчета. Каким условиям должны удовлетворять функции $v_i(x_1,\ x_2,\ x_3)$ $(i = \overline{1,3})$, чтобы в теле существовала прямая, скорости точек которой равны нулю.

4.52. Поле скоростей $v_i = v_i(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)$ твердого тела задано в системе $Ox_1x_2x_3$. Показать, что равенство $\mathbf{v}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$ выполняется тождественно по x_1, x_2 и x_3, если оно выполняется хотя бы в одной точке.

4.53. В постоянном магнитном поле электрон движется по винтовой линии $x = a\cos bt$, $y = a\sin bt$, $z = ct$. Найти кинематический винт натурального триэдра точки.

4.54. Водило PLO (см. рисунок), несущее оси трех колес, вращается с ускорением $\boldsymbol{\varepsilon}_0$. В рассматриваемый момент его угловая скорость равна $\boldsymbol{\omega}_0$. Колеса находятся в зацеплении, как показано на рисунке. Радиусы колес равны $a\sqrt{2}$. Первое колесо вращается относительно водила с угловым ускорением $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, имея в данный момент угловую скорость $\boldsymbol{\omega}_1$. Методом сложного движения найти скорость и ускорение точек A, B, C, D третьего колеса, используя в качестве подвижной системы координат систему $Oxyz$ с началом в центре третьего колеса, которая: а) вращается вместе с водилом, б) движется поступательно, и в рассматриваемый момент ось Oz параллельна плечу PL. Точки имеют координаты $A(a,a,0)$, $B(a,-a,0)$, $C(-a,-a,0)$, $D(-a,a,0)$. Длина плеча $PL = l$.



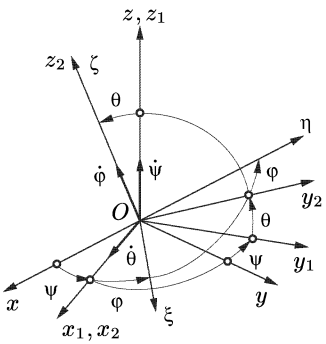
К задаче 4.54

4.55. Прямой круговой конус с образующей длины l и неподвижной вершиной O (см. рис. к задаче 4.33) катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Вдоль образующей конуса вырезан желоб. По желобу движется точка M по закону $OM = f(t)$. Найти ускорение точки M в тот момент, когда желоб занимает вертикальное положение, если скорость центра основания конуса равна $v_0(t)$.

4.56. Ориентация осей $O\xi$, $O\eta$ и $O\zeta$, жестко связанных с твердым телом, относительно поступательно движущейся системы отсчета $Oxyz$ может быть задана таблицей направляющих косинусов, т. е. ортогональной матрицей $A(t)$. Показать, что угловое перемещение твердого тела в системе $Oxyz$ из начального положения в конечное может быть осуществлено одним поворотом (теорема Эйлера).

Указание. При решении воспользоваться тем фактом, что орт $\mathbf{u}$ оси конечного поворота должен удовлетворять уравнению $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

4.57. Из начального положения в конечное тело переводят последовательными поворотами вокруг осей, связанных с телом (см. рисунок). Сравнить результирующие повороты двух последовательностей $A_\theta A_\psi$ и $A_\psi A_\theta$, где



К задаче 4.57

$$A_\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

4.58. Две неподвижные пересекающиеся оси l_1 и l_2 заданы ортами $\mathbf{i}_1$ и $\mathbf{i}_2$. Рассматриваются два движения твердого тела. В первом движении тело поворачивают на малый угол φ вокруг оси l_1, затем из нового положения на такой же угол φ вокруг оси l_2. Во втором движении перемещения тела отличаются порядком поворотов: сначала на угол φ вокруг оси l_2, затем — на угол φ вокруг оси l_1. Показать, что перевод тела из конечного положения в первом случае в конечное положение во втором можно осуществить (с точностью до $o(\varphi^2)$) поворотом тела на угол φ^2 вокруг оси l_3, заданной ортом $\mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_1$.

4.59. Показать, что для скалярной и векторной частей кватернионного произведения n векторов справедливы соотношения

$$\operatorname{sqal}(\lambda_1 \circ \lambda_2 \circ \ldots \circ \lambda_n) = (-1)^n \operatorname{sqal}(\lambda_n \circ \lambda_{n-1} \circ \ldots \circ \lambda_1),$$

$$\operatorname{vect}(\lambda_1 \circ \lambda_2 \circ \ldots \circ \lambda_n) = (-1)^{n+1} \operatorname{vect}(\lambda_n \circ \lambda_{n-1} \circ \ldots \circ \lambda_1).$$

4.60. Показать, что кватернионное уравнение $\Lambda \circ X - X \circ \Lambda = 1$ не имеет решений ни при каких значениях Λ.

4.61. Найти все решения следующих кватернионных уравнений:

а) $X^2 + aX + b = 0$, где a и b — скаляры;

б) $\Lambda \circ X^2 = X \circ \Lambda$, где Λ — известный кватернион;

в) $\Lambda \circ X^2 = X \circ \Lambda^2$, где Λ — известный ненулевой кватернион.

4.62. Пусть $R = r_0 + \overline{r}$ — некоторый кватернион. Показать, что преобразование $\Lambda \circ R \circ \Lambda^{-1} = R'$, задаваемое кватернионом Λ, не изменяет скалярную часть кватерниона R, т. е. $R' = r_0 + \overline{r}'$, где $\overline{r}'$ определяется соотношением $\overline{r}' = \Lambda \circ \overline{r} \circ \Lambda^{-1}$.

4.63. Показать, что преобразование $\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{r} \circ \boldsymbol{\lambda}$, задаваемое вектором $\boldsymbol{\lambda}$ с $|\boldsymbol{\lambda}| = 1$, представляет собой зеркальное отражение вектора $\mathbf{r}$ относительно плоскости, перпендикулярной $\boldsymbol{\lambda}$.

4.64. Показать, что последовательность двух преобразований $\mathbf{r}' = \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{r} \circ \boldsymbol{\lambda}$ и $\mathbf{r}'' = \boldsymbol{\mu} \circ \mathbf{r}' \circ \boldsymbol{\mu}$ $(|\boldsymbol{\lambda}| = 1,\ |\boldsymbol{\mu}| = 1)$, представляющих собой зеркальное отражение векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ относительно плоскостей, перпендикулярных $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\mu}$ соответственно, эквивалентна вращению вектора $\mathbf{r}$ вокруг линии пересечения этих плоскостей на двойной угол между ними.

4.65. Поворот твердого тела задается двумя последовательными вращениями вокруг осей $O\xi_1$ и $O\xi_2$, заданных в неподвижной системе координат. Показать, что результирующее преобразование будет тем же самым, если вначале выполнить второй поворот вокруг оси $O\xi_2$, а затем первый вокруг оси $O\xi_1'$, преобразованной вторым поворотом.

4.66. Поворот твердого тела задается углами Эйлера ψ, θ и φ. Найти угол и ось конечного поворота тела с помощью кватернионов.

4.67. С твердым телом связана прямоугольная система координат $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Вращение тела задается тремя последовательными поворотами вокруг оси $O\mathbf{e}_1$ на угол $60°$, вокруг оси $O\mathbf{e}_2$ на угол $90°$ и вокруг оси $O\mathbf{e}_3$ на угол $60°$. Найти ось и угол результирующего поворота тела.

4.68. В условиях предыдущей задачи определить положение радиуса-вектора $\mathbf{r}$ точки тела в неподвижной системе координат после поворота, если в связанной системе координаты этой точки равны $(1,\ 0,\ 1)$. В начальном положении тела подвижная и неподвижная системы совпадали.

4.69. Последовательными поворотами вокруг собственных осей тело повернули на угол $180°$ вокруг оси $O\mathbf{e}_1$ и на угол $90°$ вокруг оси $O\mathbf{e}_2$. Другое такое же тело из того же начального положения повернули на угол $90°$ вокруг оси $O\mathbf{e}_2$ и на угол $180°$ вокруг оси $O\mathbf{e}_1$. Найти параметры Родрига–Гамильтона относительного положения тел.

4.70. Тонкий однородный диск (см. рис. к задаче 11.84), центр O которого неподвижен, обкатывает без скольжения неподвижный конус с углом $90°$ при вершине. Угловая скорость линии касания постоянна и равна Ω. Найти угол и положение оси конечного поворота диска в момент времени $t = \pi/\Omega$.

4.71. Конус с углом при вершине $90°$ (см. рис. к задаче 4.33) катится без скольжения по плоскости. Известна угловая скорость оси конуса Ω. Найти кватернион, связывающий начальное положение конуса с текущим.

4.72. Твердое тело с одной неподвижной точкой совершает регулярную прецессию. Проекции вектора мгновенной угловой скорости

тела на связанные с ним оси удовлетворяют условиям $p^2(t)+q^2(t) = p_0^2+q_0^2$, $r(t)=r_0$. Угол нутации равен $\pi/4$. Найти закон движения тела в параметрах Родрига–Гамильтона.

4.73. Два близких положения системы координат, жестко связанной с телом, задаются кватернионами $\Lambda(t)$ и $\Lambda(t+dt)$. Используя теорему сложения поворотов $\Lambda(t+dt)=\delta\Lambda\circ\Lambda(t)$, показать, что уравнения Пуассона (уравнения кинематики твердого тела) имеют вид $\dot{\Lambda}=\boldsymbol{\omega}\circ\Lambda/2$, где $\boldsymbol{\omega}$ — мгновенная угловая скорость тела.

4.74. Показать, что уравнения Пуассона $\dot{\Lambda}=\boldsymbol{\omega}\circ\Lambda/2$ имеют первый интеграл: $||\Lambda(t)||=\mathrm{const}$.

4.75. С твердым телом связана прямоугольная система координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. Сначала тело поворачивается вокруг некоторой оси $O\xi$ на угол α, затем вокруг оси $O\mathbf{e}_1$ на угол 90°, и вокруг оси $O\mathbf{e}_2$ на угол 90°. В результате тело заняло первоначальное положение. Найти ось $O\xi$ и угол α первого поворота.

4.76. Рассматривается движение твердого тела с неподвижной точкой. Используя для радиуса-вектора $\mathbf{r}$ произвольной точки соотношение $\mathbf{r}=\Lambda\circ\mathbf{r}_0\circ\widetilde{\Lambda}$ (где $\mathbf{r}_0$ — начальное положение произвольной точки тела, Λ — нормированный кватернион, задающий положение тела) и выражение для скорости произвольной точки тела в виде $\dot{\mathbf{r}}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$, получить кинематические уравнения Пуассона в кватернионах.

4.77. В системе координат x_1, x_2, x_3 точка движется по закону $x_1=e^t\sin t$, $x_2=e^t\cos t$, $x_3=e^t$. Определить матрицу поворота, описывающую ориентацию естественного трехгранника $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$.

4.78. В условиях предыдущей задачи найти компоненты угловой скорости естественного трехгранника по ортам $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ и ортам системы координат x_1, x_2, x_3.

4.79. Материальная точка движется с постоянной скоростью по винтовой линии $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$. Матрица поворота, описывающая ориентацию естественного трехгранника относительно системы координат x, y, z, имеет вид

$$S=\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -at & -\sin t & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Определить параметры Родрига–Гамильтона и угол результирующего поворота трехгранника.

4.80. В динамике корабля используются углы ψ, θ, φ, которые определяют последовательные повороты тела относительно его осей Oy, Ox, Oz. Определить параметры Родрига–Гамильтона.

4.81. Выразить параметры Родрига–Гамильтона через углы ψ, θ, φ, определяющие поворот тела относительно его осей Oy, Oz, Ox соответственно, которые используются в динамике летательных аппаратов.

4.82. Твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Начальное положение тела относительно некоторой системы отсчета x_1, x_2, x_3 определяется кватернионом $\Lambda(0)$. Найти текущие значения параметров Родрига–Гамильтона, если проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на оси Ox_1, Ox_2 и Ox_3 постоянны.

4.83. Твердое тело совершает регулярную прецессию. При помощи кватернионов показать, что если угловые скорости прецессии $\dot{\psi}$ и собственного вращения $\dot{\varphi}$ несоизмеримы (т. е. отношение $\dot{\psi}/\dot{\varphi}$ является иррациональным числом, что представляет случай общего положения), то тело никогда не возвратится в исходное положение.

4.84. Показать, что при условии несоизмеримости угловых скоростей прецессии и собственного вращения твердого тела для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой момент времени $t > 0$, что для кватерниона $\Lambda(t)$, задающего положение тела, справедливо неравенство $||\Lambda(t) - 1|| < \varepsilon$, т. е. положение тела будет сколь угодно близко к начальному.

§ 5. Динамика точки

5.1. Частица массы m движется по закону $x = a\sin\omega t$, $y = a\cos\omega t$, $z = \rho t$ (винтовая линия). Показать, что такое движение может происходить под действием силы $\mathbf{F} = -m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})$, где $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$, $\mathbf{v}$ — скорость частицы, а $\mathbf{k}$ — орт оси Oz.

5.2. Точка массы m движется в плоскости под действием постоянной по модулю силы $\mathbf{F}$, образующей постоянный угол α с направлением вектора скорости. Найти уравнение движения точки в полярных координатах, если ее начальная скорость равна v_0.

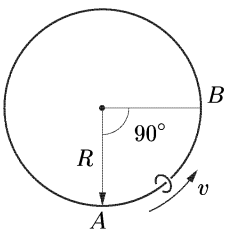
5.3. Колечко может скользить по шероховатому (коэффициент трения равен f) проволочному круговому кольцу радиуса R, расположенному в горизонтальной плоскости. В начальном положении колечку сообщили скорость v_0. Найти такое значение v_0, чтобы колечко вернулось в начальное положение с нулевой скоростью.

5.4. Колечко A может двигаться по проволочной кривой, закрепленной в вертикальной плоскости xy (ось Oy направлена вертикально вверх). Коэффициент трения между колечком и кривой равен f. Составить уравнение движения колечка по кривой, считая,

что кривая задана уравнениями $x = x(s)$, $y = y(s)$, где s — длина дуги OA.

5.5. Колечко (см. рисунок) может двигаться по вертикальной окружности радиуса R. Коэффициент трения при этом движении равен f. Какую скорость надо сообщить колечку в наинизшей точке A, чтобы оно достигло точки B?

5.6. Колечко может двигаться по параболе $y = ax^2/2$ (ось Oy направлена по вертикали вверх). Коэффициент трения при этом движении равен f. Какую скорость надо сообщить колечку в нижнем положении, чтобы оно достигло высоты h?



К задаче 5.5

5.7. Камень отпущен без начальной скорости на высоте H над Землей. Пренебрегая силами сопротивления, найти время, по истечении которого камень достигнет высоты h, если сила притяжения меняется с высотой по закону $mR^2g/(R+z)^2$, где R — радиус Земли, а z — расстояние до ее поверхности. В выражении для времени перейти к пределу при $R \to \infty$ (случай однородного поля тяжести).

5.8. Точка массы m движется без трения по прямой Ox под действием силы $F = F(x)$. Найти в квадратурах закон движения точки, считая $\dot{x}_0 > 0$ и $F(x) \geqslant 0$.

5.9. Парашютист массы m прыгает с самолета, летящего горизонтально на высоте H со скоростью v. По какой траектории движется парашютист при затяжном прыжке (до момента раскрытия парашюта), если сила сопротивления воздуха $F = -\beta v$, где v — скорость парашютиста, а изменение ускорения свободного падения с высотой не учитывается? Из полученного уравнения предельным переходом $\beta \to 0$ найти уравнение траектории в отсутствие сил сопротивления.

5.10. На высоте H над Землей точке массы m сообщается начальная скорость v_0, направленная вертикально вниз. Найти скорость точки на высоте h, если на нее действует сила сопротивления $F = -\beta v^2$, а сила притяжения меняется с высотой по закону $mR^2g/(R+z)^2$, где R — радиус Земли, а z — расстояние до ее поверхности.

5.11. Точка массы m движется по прямой Ox в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости ($F = -\beta v^2$). Найти закон движения точки (в квадратурах), если на нее, кроме того, действует сила $\Phi = \Phi(x) \geqslant 0$ и в начальный момент $\dot{x}_0 > 0$.

5.12. Точка массы m падает вертикально (изменение ускорения свободного падения с высотой не учитывается) без начальной скорости в среде, сила сопротивления которой $F = -f(v)$. Найти

зависимость скорости от времени, если $F = -\alpha v - \beta v^2$, где α и β — положительные постоянные величины. Найти предельное (при $t \to \to \infty$) значение скорости в этом случае.

5.13. В однородном магнитном поле на электрон действует лоренцева сила $\mathbf{F} = \dfrac{e}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{H})$, где $\mathbf{H}$ — напряженность поля, e — заряд электрона, $\mathbf{v}$ — его скорость, а c — скорость света. Найти траекторию движения электрона, считая, что напряженность поля $\mathbf{H}$ направлена по оси Oz.

5.14. Над поверхностью Земли действует однородное магнитное поле, вектор напряженности $\mathbf{H}$ которого горизонтален. Найти уравнения движения частицы массы m и заряда e под действием магнитного поля и однородного поля тяжести (дрейф частицы в однородном магнитном поле под действием тяготения). В начальный момент $\mathbf{r}(0) = = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$. Провести анализ решения при $\mathbf{H} \to 0$.

5.15. При условиях предыдущей задачи частице, находящейся на поверхности Земли, сообщают вертикальную скорость v_0. Найти наибольшую высоту подъема частицы $z_{\max}$, ее полную энергию в наивысшей точке и работу, совершенную действующими силами при этом подъеме.

5.16. При условиях задачи 5.14 частица начинает движение на высоте h от Земли со скоростью v_0, направленной вертикально вниз. При каких значениях h частица не упадет на Землю?

5.17. Над поверхностью Земли действует постоянное по времени электрическое поле, вектор напряженности $\mathbf{E}$ которого направлен вертикально вверх, причем $|\mathbf{E}|$ меняется с высотой по закону $|\mathbf{E}| = = E_0(1 + z/z_0)^{-2}$. До какой высоты H поднимется точка массы m и заряда e, если она подброшена вверх на высоте z_0 с начальной скоростью v_0?

5.18. Найти движение частицы массы m под действием силы $\mathbf{F} = = \dfrac{eq}{cr^3}(\mathbf{v} \times \mathbf{r})$, если в начальный момент $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ и скорость частицы $\mathbf{v}_0$. Так двигалась бы частица электрического заряда e под действием силы Лоренца $\mathbf{F} = \dfrac{e}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{H})$ в магнитном поле монополя с магнитным зарядом q. Напряженность такого поля равна $\mathbf{H} = q\mathbf{r}/r^3$.

5.19. При условиях предыдущей задачи частица движется по круговому конусу с углом $2\theta_0$ при вершине. Показать, что в сферических координатах r, θ, φ траекторию $r = r(\varphi)$ частицы можно найти из уравнения $\dfrac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} + \dfrac{1}{r}\sin\theta_0 = 0$. Величина θ_0 и положение конуса определяются начальными условиями.

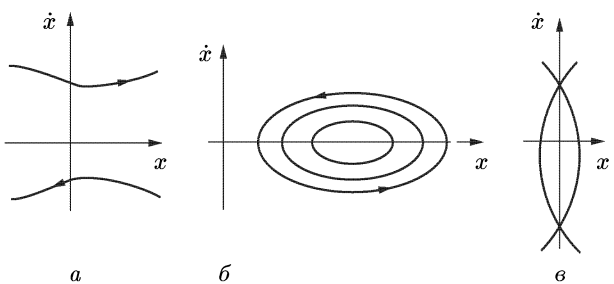
5.20. Излучение электромагнитных волн движущимися зарядами приводит к потере ими энергии. Эту потерю энергии возможно описать, вводя «силы трения», так что в нерелятивистском случае ($v \ll c$) уравнение движения заряда e $\left(\text{с учетом лоренцевых сил торможения } \mathbf{f} = \dfrac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}\right)$ можно представить в виде [1])

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}.$$

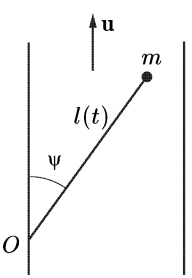
Объяснить, почему в этом уравнении сила $\mathbf{f}$ играет роль диссипативного члена.

Указание. Воспользоваться теоремой о вириале.

5.21. Материальная точка (см. рисунок) движется без трения по оси Ox под действием силы $F = F(x)$, зависящей от положения точки. Доказать, что фазовые траектории точки на плоскости $\dot{x}x$ могут быть только кривыми трех типов: либо скорость точки не



К задаче 5.21



К задаче 5.22

изменяет своего направления во все время движения (рис. *а*); либо происходит одно изменение направления скорости (рис. *б*); либо, наконец, движение точки периодическое (рис. *в*).

5.22. Спиннингист, стоящий в точке O на берегу реки (см. рисунок), наматывает леску так, что ее длина меняется по известному закону $l(t)$. Леска предполагается горизонтальной и соприкасающейся

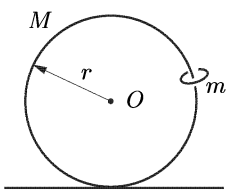
---

[1]) Это уравнение имеет ограниченное применение, так как в отсутствие внешнего поля ($\mathbf{E} = 0, \mathbf{H} = 0$) оно имеет решение $v = \exp\left[\dfrac{3mc^3}{2e^2}t\right]$, приводящее к абсурдному выводу о неограниченном «самоускорении» заряда при выходе из поля. Поэтому выражение для лоренцевой силы торможения применимо лишь в том случае, когда она оказывается малой по сравнению с силами внешнего поля (подробнее см. [39]).

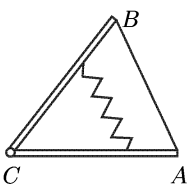
с водой только в точке соединения с блесной массы m. Составить дифференциальное уравнение, описывающее изменение угла ψ между леской и скоростью реки $\mathbf{u}$. При решении считать, что взаимодействие между водой и блесной происходит по одному из законов: а) вязкое трение $\mathbf{F} = -\beta\mathbf{v}$, б) трение скольжения $\mathbf{F} = -\mu\mathbf{v}/v$, где $\mathbf{v}$ — скорость блесны относительно воды.

§ 6. Изменение импульса и момента импульса системы

6.1. Найти траекторию колечка массы m (см. рисунок), которое скользит без трения по обручу массы M и радиуса r, касающемуся гладкой горизонтальной плоскости. В начальный момент система находилась в покое.



К задаче 6.1



К задаче 6.2

6.2. Два одинаковых однородных стержня AC и BC (см. рисунок), соединенные шарниром C и сжатой пружиной, лежат на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. Вследствие действия сжатой пружины стержни стремятся разойтись, чему препятствует нить AB. Какую траекторию опишет точка A при обрыве нити AB, если в начальный момент система находилась в покое?

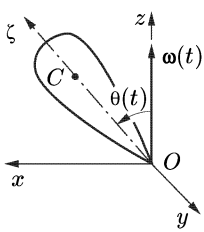
6.3. Система состоит из двух материальных точек, массы которых m_1 и m_2. Точки взаимно отталкиваются силой, пропорциональной расстоянию между ними, коэффициент пропорциональности равен $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$. При движении точки остаются в горизонтальной плоскости xy. В начальный момент $t = 0$ $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = a(m_1 + m_2)/m_1$, $y_2 = 0$, $\dot{x}_1 = \dot{y}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = 0$, $\dot{y}_2 = b(m_1 + m_2)/m_1$. Найти движение точек в поступательно движущейся системе отсчета $C\tilde{x}\tilde{y}$, начало которой совпадает с центром инерции.

6.4. Доска массы M может скользить по горизонтальному шероховатому полу. По доске движется точка массы m. Коэффициент трения между точкой и доской равен f. Какому условию должен удовлетворять коэффициент трения f_1 между доской и полом, чтобы доска оставалась в покое, если она покоилась в начальный момент?

6.5. Зонд, несущий контейнер с приборами, опускается вертикально в атмосфере с ускорением w_0; масса зонда вместе с контейнером равна M. В некоторый момент времени контейнер отделяется, в результате чего зонд начинает подниматься с ускорением $2w_0$. Найти массу m контейнера. Сопротивлением воздуха пренебречь.

6.6. Плоская фигура массы m движется поступательно в своей плоскости со скоростью $\mathbf{v}$. В некоторый момент времени точка фигуры, лежащая на прямой, проведенной через центр инерции параллельно вектору скорости, закрепляется. Найти импульс ударных сил.

6.7. Шарик массы m находится на гладкой горизонтальной плоскости. В начальный момент времени ему сообщается скорость v под углом α к горизонту, после чего он начинает подпрыгивать над плоскостью. Коэффициент восстановления при ударе равен λ $(0 < \lambda < 1)$. Найти время, по истечении которого шарик перестанет подпрыгивать, а также расстояние, пройденное шариком по горизонтали за это время.



К задаче 6.8

6.8. При движении волчка массы m (см. рисунок) точка O неподвижна; плоскость $z\zeta$, проходящая через вертикальную ось Oz и ось симметрии $O\zeta$ волчка, вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}(t)$; угол θ между осями Oz и $O\zeta$ меняется по заданному закону $\theta(t)$. Определить силу реакции в точке O, если расстояние от центра масс C волчка до точки O равно l.

6.9. Показать, что при определении положения центра инерции системы материальных точек любую подсистему можно заменить одной точкой, масса которой равна массе подсистемы и которая расположена в центре инерции этой подсистемы.

6.10. Используя утверждение предыдущей задачи, методом выделения подсистем показать, что при наличии у твердого тела

а) плоскости материальной симметрии;

б) оси материальной симметрии;

в) центра материальной симметрии

центр инерции тела лежит соответственно а) в плоскости симметрии; б) на оси симметрии; в) в центре симметрии.

Могут ли быть у тела непересекающиеся оси симметрии?

6.11. Доказать, что в любой системе материальных точек в каждый момент времени можно выбрать такие точки системы, числом не более четырех, что если этим точкам приписать надлежащим образом подобранные массы, то их центр инерции будет совпадать с центром инерции исходной системы.

6.12. Материальные точки m_i $(i = \overline{1, N})$ имеют декартовы координаты a_i, b_i, c_i. Показать, что функция

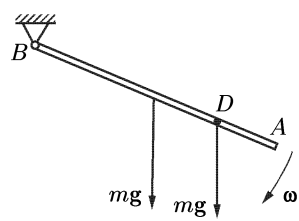
$$\varphi(x, y, z,) = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 + (z - c_i)^2\right]$$

достигает абсолютного минимума в точке, совпадающей с центром инерции системы. Какой вид имеет функция $\varphi(x, y, z)$ для твердого тела, плотность которого распределена по закону $\rho(x, y, z)$?

6.13. Однородный круговой конус поставлен основанием на гладкий горизонтальный стол. Конусу сообщается угловая скорость ω_0 так, что скорости точек его оси симметрии равны нулю. Чему будет равна угловая скорость конуса, если по его образующей от вершины до основания опустится шарик, масса которого в k раз меньше массы конуса?

6.14. Два одинаковых шарика могут двигаться без трения по сторонам прямого угла, расположенного в горизонтальной плоскости. Шарики несут заряды разных знаков и начинают движение из состояния покоя. Показать, что они одновременно окажутся в вершине угла.

6.15. По сторонам прямого угла xOy, расположенного в горизонтальной плоскости, могут скользить без трения шарики A и B масс m_1 и m_2 соответственно. Шарики взаимодействуют друг с другом по некоторому закону. Силы взаимодействия направлены по прямой, соединяющей шарики. Найти зависимость между координатами x_A и y_B во время движения, если в начальный момент шарики покоились, $x_A(0) = x_0$, $y_B(0) = y_0$ $(x_0 > 0,\ y_0 > 0)$.



К задаче 6.16

6.16. Однородная палочка AB длины $2a$ (см. рисунок) шарнирно закреплена в точке B. От конца B палочки начинает двигаться материальная точка D, масса m которой равна массе палочки. В начальный момент палочка находилась в горизонтальном положении; получив толчок, она начинает вращаться в вертикальной плоскости по часовой стрелке. Определить, за какое время точка D достигнет конца A палочки, если она движется таким образом, что угловая скорость ω палочки остается постоянной.

6.17. Неоднородный диск радиуса R может свободно вращаться в горизонтальной плоскости вокруг своего центра. Сидящая на краю неподвижного диска лягушка совершает прыжок в направлении хорды, в результате которого она приземляется в ту же точку диска,

а диск поворачивается на угол α. Считая массы диска и лягушки равными, найти радиус инерции диска.

6.18. Однородный диск массы m может катиться без скольжения по горизонтальной прямой. К центру диска прикладывается горизонтальная сила, в результате чего центр диска начинает колебаться по синусоидальному закону с амплитудой a и частотой ω. Найти зависимость силы трения от времени.

6.19. При прохождении электронного пучка через фокусирующее устройство расстояние каждой частицы от оси пучка изменяется в α раз. Скорость частицы в пучке до фокусирующего устройства равна $\mathbf{v}_1 = v_{\varphi_1}\mathbf{e}_\varphi + v_z\mathbf{e}_z$, а после фокусировки $\mathbf{v}_2 = v_{\varphi_2}\mathbf{e}_\varphi + v_z\mathbf{e}_z$ ($\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ — орты цилиндрической системы координат, ось Oz которой направлена по оси пучка). Найти отношение $v_{\varphi_1}/v_{\varphi_2}$ считая, что в процессе фокусировки на частицы действуют только радиальные силы.

6.20. Доказать, что момент импульса $\mathbf{K}_A$ системы материальных точек относительно полюса A связан с кинетическим моментом импульса $\mathbf{K}_B$ этой системы относительно полюса B равенством $\mathbf{K}_B = \mathbf{K}_A + \overrightarrow{BA} \times \mathbf{P}$, где $\mathbf{P} = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i\mathbf{v}_i = m\mathbf{v}_C$ — импульс системы.

6.21. Однородный диск вращается вокруг неподвижной оси AB, проходящей через центр диска. Доказать, что кинетический момент диска относительно любой оси, параллельной оси AB, равен кинетическому моменту диска относительно самой оси AB.

6.22. Движение системы материальных точек относительно системы отсчета x, y, z представлено как сумма двух движений: движения относительно системы ξ, η, ζ с началом в центре инерции C и соответствующего переносного движения. Показать, что момент импульса абсолютного движения системы относительно полюса O выражается равенством $\mathbf{K}_O = \mathbf{K}_O^{(e)} + \mathbf{K}_C^{(r)}$, где $\mathbf{K}_O^{(e)}$ — момент импульса системы относительно полюса O в ее переносном движении, а $\mathbf{K}_C^{(r)}$ — момент импульса системы относительно центра инерции в ее относительном движении.

6.23. Плоская фигура движется в своей плоскости. В момент времени t^* некоторая точка фигуры закрепляется. Показать, что момент импульса относительно этой точки сразу после закрепления совпадает с моментом импульса относительно этой же точки в момент времени t^*.

Указание. При решении задачи пренебречь величинами, имеющими порядок времени удара.

6.24. При движении плоской фигуры массы m в своей плоскости в некоторый момент времени закрепляется точка A, имеющая в этот момент скорость $\mathbf{v}_A$. Угловая скорость фигуры непосредственно пе-

ред закреплением равна $\boldsymbol{\omega}$. Найти угловую скорость $\boldsymbol{\omega}_1$ после закрепления, считая известными положение центра инерции C и момент инерции фигуры J относительно оси, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости.

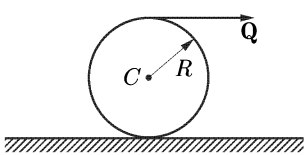
6.25. Доказать, что при качении без скольжения однородного шара по горизонтальной плоскости сохраняется угловая скорость верчения. (Угловой скоростью верчения называется проекция абсолютной угловой скорости шара на направление нормали к плоскости.)

6.26. Показать, что при качении без скольжения произвольного выпуклого твердого тела по горизонтальной плоскости угловая скорость верчения, вообще говоря, не сохраняется.

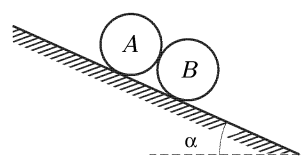
6.27. Используя теоремы об изменении импульса и момента импульса, доказать, что силы реакции невесомого нерастяжимого стержня, связывающего две материальные точки, направлены по стержню в противоположные стороны и равны по абсолютному значению.

Указание. Предполагая скорость и ускорение точек стержня ограниченными, в уравнениях движения устремить массу стержня к нулю.

6.28. Однородный цилиндр (см. рисунок) радиуса R и веса mg катится по шероховатой горизонтальной плоскости (коэффициент трения скольжения $f = 1/8$) под действием постоянной горизонтальной силы Q. Найти ускорение центра C цилиндра и угловое ускорение цилиндра в двух случаях: а) $Q = mg/3$; б) $Q = mg$.



К задаче 6.28



К задаче 6.29

6.29. По шероховатой наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом (см. рисунок), катятся без скольжения цилиндры A и B, имеющие одинаковые радиусы r и одинаковые массы m, но различные моменты инерции: момент инерции относительно оси материальной симметрии цилиндра B равен mr^2, а цилиндра A равен γmr^2 $(0 < \gamma \leqslant 1)$. Коэффициент трения скольжения между цилиндрами равен f. Определить ускорение центров, а также силу давления цилиндра A на цилиндр B.

6.30. В упражнении с обручем гимнастка сообщает центру однородного кругового обруча радиуса r горизонтальную скорость v_0 и закручивает его с угловой скоростью ω_0. Коэффициент трения

между обручем и полом равен f (во время движения обруч не подпрыгивает). Как должны быть связаны величины v_0 и ω_0 для того, чтобы обруч вернулся в исходное положение за время t, определяемое музыкальным сопровождением?

6.31. По однородному диску радиуса R и массы M, лежащему на гладком горизонтальном столе, ползет жук массы m. Траекторией относительного движения жука является окружность радиуса r. Найти траекторию абсолютного движения жука, если в начальный момент диск и жук находились в покое. Рассмотреть два случая: а) центр окружности совпадает с центром диска; б) окружность проходит через центр диска.

6.32. По плоской фигуре, свободно лежащей на гладком горизонтальном столе, начинает двигаться материальная точка, перемещаясь из положения A в положение B по некоторой траектории, не проходящей через центр инерции C фигуры. В начальный момент система находилась в покое. Показать, что угол α поворота фигуры относительно стола меньше угла $\varphi = \angle ACB$, под которым видна относительная траектория точки из центра инерции фигуры.

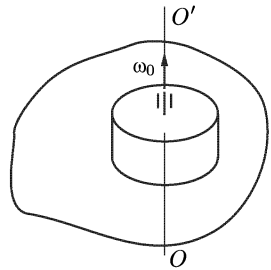
6.33. По плоской фигуре массы M, лежащей на гладком горизонтальном столе, начинает двигаться точка A массы m. В начальный момент система находилась в покое. Траектория относительного движения точки задается уравнением $R = f(\varphi)$, где $R = AC$ — расстояние от точки до центра инерции C фигуры, а φ — угол между AC и осью $C\xi$, жестко связанной с фигурой. Составить уравнения для определения траектории точки C относительно стола, если центральный момент инерции фигуры равен J.

6.34. Пластина массы m может двигаться в неподвижной плоскости xy. Положение пластины задается координатами x, y полюса P и углом φ, который прямая, соединяющая полюс P с центром масс C пластины, образует с осью Ox. Составить уравнения плоскопараллельного движения пластины в переменных x, y, φ, если момент инерции пластины относительно оси, проходящей через полюс P перпендикулярно плоскости пластины, равен J, а $PC = l$.

6.35. Тонкая пластина массы m движется в своей плоскости. Показать, что момент импульса пластины относительно какой-либо ее точки A определяется равенством $\mathbf{K}_A = J_A\boldsymbol{\omega} + m(\overrightarrow{AC} \times \mathbf{v}_A)$, где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость, J_A — момент инерции пластины относительно оси, проходящей через точку A перпендикулярно ее плоскости; $\overrightarrow{AC}$ — радиус-вектор центра масс пластины.

6.36. Ось OO' маховика (см. рисунок), установленного на космической станции, неподвижна относительно станции и проходит через ее центр масс и через центр масс маховика. Маховик раскрутили от

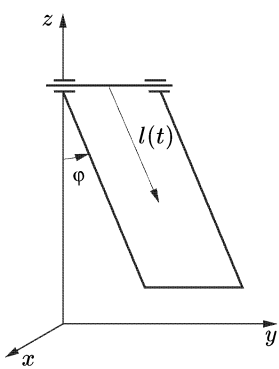
нулевой до некоторой угловой скорости ω_0, которая была определена с помощью датчика, жестко связанного со станцией. Найти абсолютную угловую скорость Ω станции, если в начальный момент система покоилась; моменты инерции станции и маховика относительно оси OO' равны соответственно J_1 и J_2.



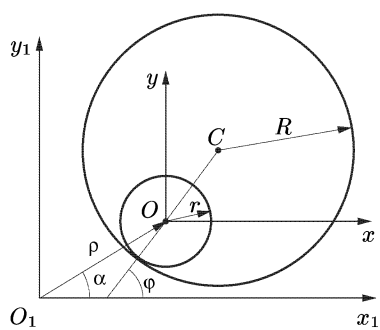
К задаче 6.36

6.37. Решить предыдущую задачу (см. рис. к ней) в предположении, что ось OO' проходит через центр масс маховика и не проходит через центр масс станции. Моменты инерции станции и маховика относительно оси, проходящей через центр масс C системы параллельно оси OO', равны J_1 и J соответственно. Момент инерции маховика относительно оси OO' равен J_2.

6.38. Человек раскачивается на качелях, приседая и вставая (см. рисунок). Расстояние от центра масс системы «человек-качели» до оси подвеса качелей является известной дифференцируемой функцией времени $l(t) = l_0 + f(t)$. Составить дифференциальное уравнение, определяющее закон изменения угла $\varphi(t)$ отклонения качелей от вертикали, если момент инерции системы относительно оси подвеса равен $J(t) = J_0 + F(t)$.



К задаче 6.38



К задаче 6.40

6.39. По какому закону нужно изменять длину $l(t)$ плоского математического маятника, чтобы маятник двигался по закону $\varphi(t) = \omega t$, где $\omega = \text{const}$.

6.40. Известное упражнение с обручем (хула-хуп) можно описать с помощью следующей упрощенной модели. Цилиндр A радиуса r (см. рисунок) совершает поступательное движение. Его центр O

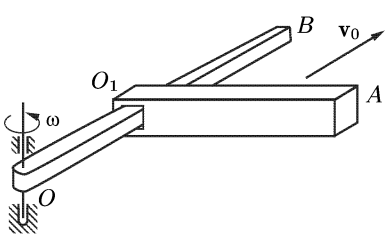
движется по окружности радиуса ρ с центром в точке O_1 по закону $\alpha = \alpha(t)$. Однородный обруч радиуса R и массы m обкатывает без скольжения цилиндр A. Составить уравнение движения обруча, считая, что вся система расположена на гладкой горизонтальной плоскости. Найти также условие, при котором обеспечивается контакт между обручем и цилиндром.

6.41. В модели упражнения с обручем, описанной в предыдущей задаче (см. рисунок к ней), центр O цилиндра A движется по окружности радиуса ρ с постоянной скоростью v. Показать, что в системе xOy уравнение движения обруча совпадает с уравнением движения математического маятника длины $2g\rho(R-r)/v^2$.

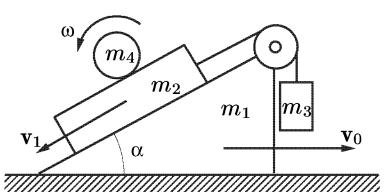
6.42. В модели упражнения с обручем, описанной в задаче 6.40 (см. рисунок к ней), центр O цилиндра A движется равномерно по окружности радиуса ρ со скоростью v. Показать, что уравнение движения обруча допускает решения, которым соответствуют вращения обруча с постоянной угловой скоростью ω. Найти величину ω и показать, что при таких движениях условие наличия контакта между цилиндром и обручем не нарушается.

§ 7. Изменение кинетической энергии. Смешанные задачи

7.1. Однородный стержень OB длины l и массы M (см. рисунок) вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной стержню и проходящей через точку O. Вдоль OB с постоянной относительной скоростью $\mathbf{v}_0$ движется однородный стержень O_1A длины a и массы m так, что стержни все время находятся в одной плоскости. В начальный момент точки O и O_1 совпадали. Найти кинетическую энергию системы как функцию времени.



К задаче 7.1

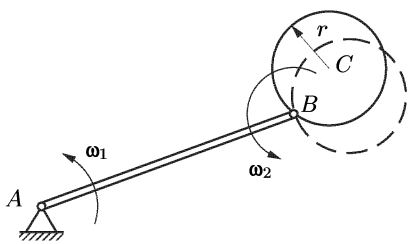


К задаче 7.2

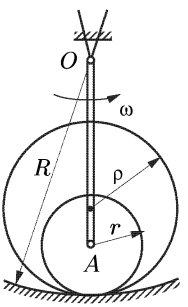
7.2. Клин массы m_1 с углом α при вершине (см. рисунок) движется горизонтально со скоростью $\mathbf{v}_0$. Доска массы m_2 движется

вдоль наклонной грани клина с относительной скоростью $\mathbf{v}_1$ и тянет груз массы m_3, движущийся по вертикальной грани клина. По доске с угловой скоростью ω катится без проскальзывания однородный цилиндр массы m_4 и радиуса r. Найти кинетическую энергию системы.

7.3. Однородный стержень AB массы M и длины l (см. рисунок) вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 вокруг неподвижной оси A. Однородный диск радиуса r и массы m, соединенный со стержнем шарниром в точке B, вращается относительно стержня с угловой скоростью ω_2. Найти кинетическую энергию системы, если в начальный момент центр диска C лежал на продолжении отрезка AB, а вращение стержня и диска происходят в одной плоскости.



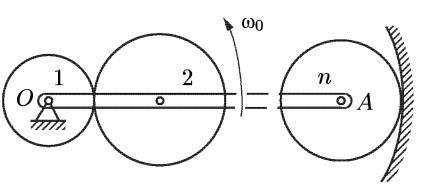
К задаче 7.3



К задаче 7.4

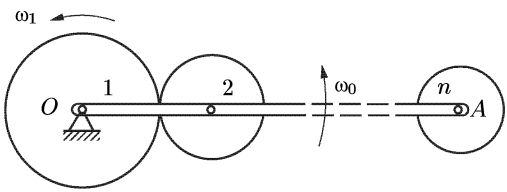
7.4. Однородный стержень OA длины l и массы M (см. рисунок) вращается с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси O и в точке A соединен шарниром с однородным диском радиуса r и массы m. Диск катится без проскальзывания внутри цилиндрической полости радиуса $R = l + r$, прижимая к ней тонкий обруч радиуса ρ и массы μ, как показано на рисунке. Найти кинетическую энергию системы.

7.5. Кривошип OA массы M (см. рисунок) вращается вокруг неподвижной оси O с угловой скоростью ω_0 и несет n шестеренок массы m_1, $m_2, \ldots$ $\ldots, m_n$ и радиуса r_1, $r_2, \ldots, r_n$ соответственно. Последняя шестеренка находится во внутреннем зацеплении с неподвижной шестерней, центр которой совпадает с точкой O. Найти кинетическую энергию системы, считая шестеренки однородными дисками, а кривошип однородным стержнем.

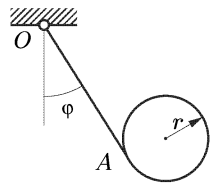


К задаче 7.5

7.6. Кривошип OA массы M (см. рисунок) вращается вокруг неподвижной оси O с угловой скоростью ω_0 и несет n шестеренок массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и радиуса $r_1, r_2, \ldots, r_n$ соответственно. Ведущая шестеренка 1 вращается независимо от кривошипа вокруг той же оси O с угловой скоростью ω_1. Найти кинетическую энергию системы, считая шестеренки однородными дисками, а кривошип однородным стержнем.



К задаче 7.6



К задаче 7.7

7.7. Однородный круглый цилиндр радиуса r и массы m (см. рисунок), обмотанный нерастяжимой нитью, подвешен к неподвижной точке O. Под действием силы тяжести цилиндр опускается, разматывая нить и раскачиваясь вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O. Найти импульс p, момент импульса K_A относительно точки A и кинетическую энергию T цилиндра в зависимости от угла φ, расстояния $OA = l$ и их производных.

7.8. Система, состоящая из n материальных точек массы m_1, $m_2, \ldots, m_n$, движется относительно некоторой системы отсчета x, y, z. Как следует ввести подвижную систему отсчета ξ, η, ζ, чтобы независимо от характера движения системы материальных точек связь между кинетической энергией абсолютного движения T_a (по отношению к x, y, z) и энергией относительного движения T_r (по отношению к ξ, η, ζ) выражалась соотношением $T_a = T_r + T_e$, где T_e — кинетическая энергия переносного движения системы? Иначе говоря, при каких условиях кинетическая энергия сложного движения системы точек равна сумме кинетических энергий каждого движения по отдельности?

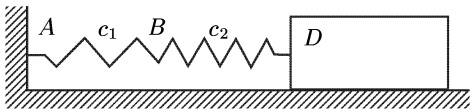
7.9. Найти работу силы $\mathbf{F} = \alpha(y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k})$ ($\alpha = \text{const}$), точка приложения которой перемещается вдоль отрезка винтовой линии

$$\mathbf{r} = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j} + bt\mathbf{k} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

7.10. Свободное твердое тело движется под действием некоторой системы сил, главный вектор которой равен $\mathbf{R}$, а главный момент относительно некоторой точки O тела, равен $\mathbf{M}_0$. Показать, что элементарная работа сил, приложенных к свободному твердому телу,

определяется соотношением $\delta A = \mathbf{R}\,d\mathbf{r}_0 + \mathbf{M}_0\boldsymbol{\omega}\,dt$, где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела, а $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор точки O.

7.11. Показать, что потенциальная энергия пружины (см. рисунок), состоящей из двух последовательно соединенных частей AB



К задаче 7.11

и BD с жесткостями c_1 и c_2 соответственно, совпадает с потенциальной энергией пружины жесткости $c = c_1c_2/(c_1 + c_2)$. Решить аналогичную задачу для параллельно соединенных пружин.

В задачах 7.12–7.15 силовое поле задано проекциями силы поля на оси декартовой системы координат. Выяснить, потенциально ли поле, и, если оно потенциально, найти потенциал.

7.12. $F_x = yz\sin\omega t$, $F_y = xz\sin\omega t$, $F_z = xy\sin\omega t$.

7.13. $F_x = -\dfrac{y}{(x-y)^2}$, $F_y = \dfrac{x}{(x-y)^2}$, $F_z = 0$.

7.14. $F_x = yz\cos(xyz) + t\exp[-(x+y+z)t]$,
$F_y = xz\cos(xyz) + t\exp[-(x+y+z)t]$,
$F_z = xy\cos(xyz) + t\exp[-(x+y+z)t]$.

7.15. $F_x = \dfrac{\alpha x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $\quad F_y = \dfrac{\alpha y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$,

$F_z = \dfrac{\alpha z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \qquad (\alpha = \text{const})$.

7.16. Для каких функций $f_1(r)$, $f_2(r)$, $f_3(r)$ $\left(r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$ силовое поле $F_x = f_1(r)$, $F_y = f_2(r)$, $F_z = f_3(r)$ будет потенциальным?

7.17. Материальная точка движется в центральном поле общего вида $\mathbf{F}(\mathbf{r},t) = \dfrac{f(x,y,z,t)\mathbf{r}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки. Показать, что сила $\mathbf{F}(\mathbf{r},t)$ потенциальна в том и только в том случае, когда силу $f(x,y,z,t)$ можно представить в виде $\varphi(x^2+y^2+z^2,t)$.

7.18. Гравитационный потенциал тела произвольной формы задается функцией $\Pi(x,y,z)$. Показать, что в каждой точке (x,y,z), лежащей вне тела, функция $\Pi(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2\Pi = 0$, где $\nabla^2\Pi(x,y,z) = \dfrac{\partial^2\Pi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Pi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\Pi}{\partial z^2}$.

7.19. Силовое поле задано при помощи «направляющей» плоскости $ax + by + cz = 0$ так, что в каждой точке пространства вектор силы $\mathbf{F}$ перпендикулярен этой плоскости, а сила $F = F(\rho)$ является известной функцией расстояния ρ точки от этой плоскости. Показать, что поле потенциально, и найти его потенциал.

7.20. Массе m, находящейся в состоянии покоя, сообщается скорость $\mathbf{v}$. Как изменится совершаемая работа, если скорость массы увеличивается на ту же величину $\mathbf{v}$, но от начального значения $\mathbf{v}_0$?

7.21. Мотоциклист увеличивает свою скорость сначала с 55 до 60 км/ч, а затем с 60 до 65 км/ч. Сравнить величины совершаемой при этом работы.

7.22. Материальная точка массы m прикреплена к концу нерастяжимой нити и вместе с ней движется по гладкой горизонтальной плоскости. Нить наматывается на неподвижный цилиндр, ось которого вертикальна. Показать, что если нить во все время движения напряжена, то скорость точки постоянна по величине.

7.23. Точка массы m движется по прямой Ox в силовом поле с потенциалом $\Pi = \psi(t)\varphi(x)$. Показать, что если в некоторый момент времени $t = t_0$ выполняется условие $\psi(t_0) \geqslant \Delta > 0$ и $\dot{\psi}(t) \geqslant 0$, при всех $t \geqslant t_0$, то полная энергия точки удовлетворяет неравенству $E \leqslant E_0\psi(t)/\psi(t_0)$, где $E_0 = E(x_0, t_0)$.

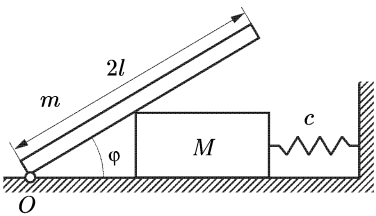
7.24. Используя условия предыдущей задачи, показать, что если $\dot{\psi}(t) \leqslant 0$ и $\psi(t) > 0$ при всех значениях t, то полная энергия $E(t)$ удовлетворяет неравенству $E(t) \geqslant E_0\psi(t)/\psi(t_0)$.

7.25. Два одинаковых шара массы m и радиуса r притягиваются один к другому с силой, зависящей только от расстояния между центрами шаров. В начальный момент шары покоились, а расстояние между их центрами равнялось a. Рассмотреть два случая движения: 1) шары движутся навстречу друг другу, 2) один из шаров неподвижно закреплен. Показать, что отношение t_2/t_1 промежутков времени от начала движения до момента соприкосновения шаров равно $\sqrt{2}$.

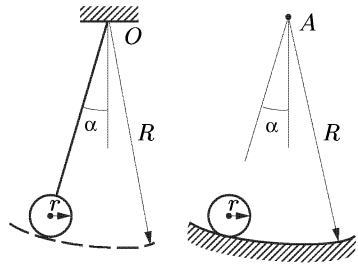
7.26. Каждый элемент бесконечно тонкого однородного неподвижного обруча радиуса R и общей массы M притягивает материальную точку P, лежащую на перпендикуляре к плоскости обруча, проходящем через его центр O. Силы притяжения описываются законом всемирного тяготения. Определить скорость, с которой точка P пересечет плоскость обруча, если в начальный момент расстояние OP было равно l, а точка покоилась.

7.27. Тяжелый однородный стержень длины $2l$ и массы m (см. рисунок), закрепленный шарниром O, опирается на параллелепипед массы M и высоты a. Параллелепипед соединен пружиной жесткости c с неподвижной стенкой и может двигаться по гладкой горизонтальной плоскости. В начальный момент система находилась

в покое, стержень составлял с горизонтом угол φ_0, а пружина была ненапряжена. Найти скорость v параллелепипеда в зависимости от угла φ.



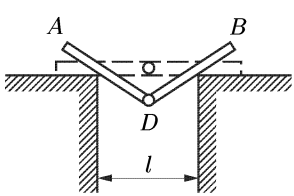
К задаче 7.27



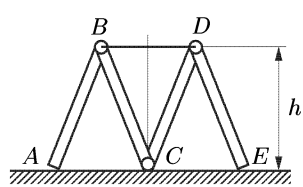
К задаче 7.28

7.28. Физический маятник состоит из однородного шара радиуса r (см. рисунок), подвешенного на невесомом стержне к точке O; нижняя точка шара описывает окружность радиуса R. Другой такой же шар положен в круговой желоб радиуса R и катится по нему без проскальзывания. В начальный момент центры шаров находятся на одном уровне и начинают движение без начальной скорости. Найти отношение наибольших скоростей центров шаров. При каком соотношении между радиусами R и r эти скорости будут одинаковыми?

7.29. Однородные стержни AD и BD (см. рисунок), шарнирно соединенные в точке D, опираются на два гладких угла. Длина каждого стержня равна расстоянию между опорами l. В начальный момент стержни горизонтальны и расположены симметрично относительно опор, а затем (после малого начального толчка) приходят в движение за счет собственного веса, причем точка D перемещается по вертикали. Определить скорость точки D в тот момент, когда концы A и B стержней достигнут угловых точек.



К задаче 7.29

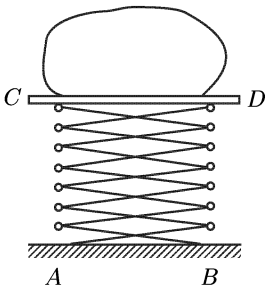


К задаче 7.30

7.30. «Гармошка» $ABCDE$ (см. рисунок) из четырех шарнирно соединенных однородных стержней длины l каждый стоит на гладком горизонтальном полу и удерживается в равновесии стяжкой BD.

После разрыва стяжки гармошка начинает падать. Найти зависимость скорости точки B от ее высоты h над полом, если в начальный момент эта высота была равна h_0.

7.31. Подъемник состоит из площадки CD и $2n$ одинаковых стержней длины $2l$, соединенных шарнирами, как показано на рисунке. Для подъема груза концы A и B нижних стержней стягиваются. В тот момент, когда груз находился на высоте H_0, тяга AB разорвалась, так что концы A и B оказались свободно опертыми. Пренебрегая трением, найти скорость груза как функцию его высоты H, если вес площадки с грузом равен P_1, а общий вес стержней — P_2.



К задаче 7.31

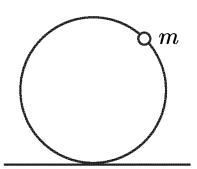
7.32. Как изменятся импульс p и кинетическая энергия T плоской фигуры массы m, движущейся в своей плоскости, если в некоторый момент времени закрепить центр инерции фигуры?

7.33. Плоская фигура движется в своей плоскости. В некоторый момент времени точку фигуры, совпадающую с мгновенным центром скоростей, закрепляют. Как изменятся импульс, момент импульса и кинетическая энергия фигуры в результате закрепления?

7.34. Однородный металлический диск вращается по инерции вокруг неподвижной оси. От внешнего источника к диску подводится некоторое количество теплоты, в результате чего диск нагревается. Объяснить, что произойдет с угловой скоростью и кинетической энергией диска.

7.35. Математический маятник массы m отклоняется на угол φ_0 и отпускается без начальной скорости. Найти силу натяжения N нити в зависимости от угла φ.

7.36. К однородному круговому обручу массы M (см. рисунок), который может катиться без проскальзывания по горизонтальной плоскости, жестко прикреплена точечная масса m. В начальный момент обруч покоился и масса занимала наивысшее положение, а затем пренебрежимо малый импульс вывел систему из положения равновесия. Показать, что при движении обруч подпрыгнет только в том случае, когда отношение масс удовлетворяет неравенству $m/M \geqslant 13$.



К задаче 7.36

7.37. Тело массы m лежит на гладком горизонтальном столе и прикреплено к концу нити, проходящей через небольшое отверстие в столе. На втором вертикально свисающем конце нити прикреплено тело массы M. В начальный момент телу m,

находящемуся на расстоянии a от отверстия, сообщена скорость v_0 в плоскости стола перпендикулярно нити. Доказать, что скорость тела m будет снова перпендикулярна нити в тот момент, когда расстояние тела от отверстия совпадает с положительным корнем уравнения $x^2 - \frac{mv_0^2}{2Mg}x - \frac{mv_0^2}{2Mg}a = 0$.

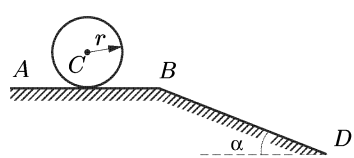
7.38. Однородный стержень длины a может свободно вращаться в пространстве вокруг своего шарнирно закрепленного конца. В начальный момент его приводят в горизонтальное положение и сообщают угловую скорость ω_0 относительно вертикальной оси. Найти наименьшее значение $\varphi_{\min}$ угла φ между стержнем и вертикалью во время движения, а также приближенное значение $\varphi_{\min}$ при $\omega_0 \gg \sqrt{g/a}$.

7.39. Как изменится угол $\varphi_{\min}$ в условиях предыдущей задачи, если в начальный момент стержень образует с вертикалью угол φ_0?

7.40. Неоднородный тонкий стержень OA длины l и массы m может свободно вращаться в пространстве вокруг своего шарнирно закрепленного конца O. Центр масс стержня находится на расстоянии a от точки O; момент инерции стержня относительно перпендикулярной ему оси, проходящей через точку O, равен J. Составить уравнение, которому удовлетворяет наименьшая и наибольшая высота конца A стержня, если в начале движения известны момент импульса K стержня относительно вертикальной оси, проходящей через точку O, и его полная энергия E. Найти пределы изменения высоты конца A, если в начальный момент стержень был горизонтален, а вектор его угловой скорости вертикален.

7.41. Однородный круговой цилиндр массы M и радиуса R поставлен на гладкую горизонтальную плоскость так, что его ось вертикальна. На боковой поверхности цилиндра вырезан гладкий винтовой желоб с углом подъема α. В желоб вкладывается шарик массы m. Найти угловую скорость цилиндра в зависимости от вертикального смещения шарика, считая, что в начальный момент цилиндр и шарик покоились. Размерами шарика пренебречь.

7.42. Шар радиуса r (см. рисунок) катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости AB, переходя с этой плоскости на плоскость BD, образующую угол α с горизонтом. Достигнув угловой точки B, шар начинает поворачиваться вокруг нее. В начальный момент скорость центра C шара равна v_0. Найти наибольшее значение угла α, при котором шар, переходя на наклонную плоскость, не будет делать скачка. (Отрыв шара происходит в тот момент, когда проекция силы реакции опоры

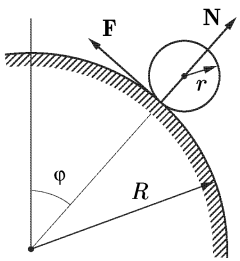


К задаче 7.42

в угловой точке на нормаль к траектории центра шара обращается в нуль.)

7.43. Решить предыдущую задачу при дополнительном предположении, что плоскость AB образует угол $\beta < \alpha$ с горизонтом, причем в начальный момент точка касания шара с плоскостью находилась на расстоянии l от точки B и скорость центра шара равнялась v_0.

7.44. Однородный цилиндр радиуса r и массы m (см. рисунок) свободно скатывается с неподвижного цилиндра радиуса R. Цилиндр начинает движение из состояния покоя в результате малого импульса. Коэффициент трения скольжения равен f. Найти все значения угла φ, при которых качение происходит без проскальзывания. Для этих значений угла φ найти скорости точек оси цилиндра $v(\varphi)$, нормальную силу реакции $N(\varphi)$ и силу трения $F(\varphi)$, если $\varphi_0 = 0$.



К задаче 7.44

7.45. Используя условия предыдущей задачи, доказать, что катящийся без проскальзывания цилиндр не может оторваться от неподвижного цилиндра при конечном значении f раньше, чем начнется качение с проскальзыванием.

Указание. Найти значение угла, которое соответствовало бы отрыву при качении без проскальзывания, и показать, что при всех конечных значениях f оно превышает значение угла, при котором начинается проскальзывание.

7.46. Однородный стержень длины $2l$ начинает движение из состояния покоя, свободно опираясь на гладкие стороны прямого угла. В начальный момент стержень составлял угол α_0 с горизонтальной стороной угла. Найти скорость v_C центра стержня в тот момент, когда стержень займет горизонтальное положение.

7.47. Однородная эллиптическая пластина с полуосями a и b ($a > b$) может катиться в вертикальной плоскости без проскальзывания по горизонтальной прямой. В начальный момент большая полуось горизонтальна. Какую угловую скорость ω_0 нужно сообщить пластине в начальном положении, чтобы в момент, когда большая полуось образует с горизонтом угол $\pi/4$, угловая скорость пластины равнялась $\omega_0/2$?

7.48. Однородный шар массы m поднят на высоту h над гладким горизонтальным столом и отпущен без начальной скорости. Считая удар шара о стол абсолютно упругим, найти среднее значение кинетической энергии.

7.49. При помощи теоремы о вириале найти среднее значение кинетической энергии одномерного движения точки массы m, на ко-

торую действует гармоническая сила $F = A\cos\omega t$, если в начальный момент скорость точки равнялась нулю.

7.50. Непосредственным вычислением показать, что в соответствии с теоремой о вириале средние за период значения кинетической и потенциальной энергии гармонического осциллятора равны.

7.51. Используя теорему о вириале, показать, что при финитном движении материальной точки в поле всемирного тяготения полная энергия всегда отрицательна.

7.52. Система, состоящая из N материальных точек, совершает движение в конечной области пространства с конечными скоростями. Потенциальная энергия системы $\Pi(x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_N, z_1, \ldots \ldots, z_N)$ является однородной функцией степени k:

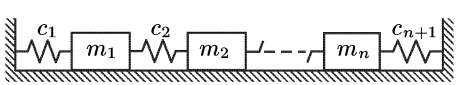
$$\Pi(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_N, \lambda y_1, \ldots, \lambda y_N, \lambda z_1, \ldots, \lambda z_N) = \\ = \lambda^k \Pi(x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_N, z_1, \ldots, z_N).$$

Используя теорему о вириале и закон сохранения полной энергии, показать, что средние значения кинетической и потенциальной энергии имеют вид $\overline{T} = Ek/(k+2)$, $\overline{\Pi} = 2E/(k+2)$, где E — полная энергия системы. Рассмотреть случаи $k = 2$ (осциллятор) и $k = -1$ (ньютоновское взаимодействие).

7.53. Материальная точка массы m движется по гладкой горизонтальной кривой под действием постоянной силы, направленной по касательной к траектории движения. Найти среднее (за время движения τ) значение кинетической энергии как функцию начальной и конечной скоростей $v_0 = v(t_0)$ и $v_1 = v(t_0 + \tau)$. Сравнить это значение $\overline{T}$ со значениями кинетической энергии в момент времени $\tau/2$ и в момент времени t', когда точка находится на полпути между начальным и конечным положениями.

7.54. Используя условия предыдущей задачи и считая, что действующая на точку сила равна F, найти момент времени t_1, в который значение кинетической энергии совпадает с ее средним значением $\overline{T}$.

7.55. Грузы массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$ (см. рисунок) лежат на гладком горизонтальном полу и связаны между собой и с неподвижными



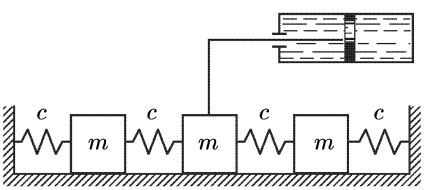
К задаче 7.55

стенками пружинами жесткости $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$. Используя теорему о вириале, показать, что средние значения кинетической $\overline{T}$ и потенциальной $\overline{\Pi}$ энергий связаны соотношением $\overline{T} = \overline{\Pi}$.

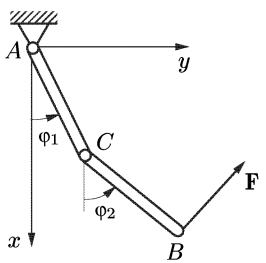
7.56. В условиях предыдущей задачи на каждый груз действует сила сопротивления, пропорциональная его скорости. Показать, что среднее значение кинетической и потенциальной энергий равно нулю.

7.57. Три одинаковых груза массы m (см. рисунок) соединены между собой и со стенками одинаковыми пружинами жесткости c. На средний груз действует сила сопротивления, пропорциональная его скорости, $F = -\beta v_2$. В начальный момент, когда все грузы покоились, крайним грузам были сообщены скорости, равные v_0 и направленные в противоположные стороны. Используя теорему о вириале, найти средние значения кинетической и потенциальной энергий.

7.58. При помощи теоремы о вириале найти среднее давление, оказываемое газом на стенки сосуда, пренебрегая межмолекулярными взаимодействиями и считая, что средняя кинетическая энергия одной молекулы равна ε. В единице объема содержится n молекул газа, а стенки сосуда являются абсолютно гладкими.



К задаче 7.57



К задаче 7.59

7.59. Двойной плоский маятник ACB (см. рисунок) состоит из двух одинаковых стержней длины l. На точку B нижнего стержня действует постоянная сила F, направленная под прямым углом к стержню CB. Выяснить, является ли сила F потенциальной.

7.60. Показать, что в условиях задачи 7.28 отношение между радиусами шаров R и r, при котором наибольшие скорости их центров одинаковы, не зависит от момента инерции шара, если шары неоднородны, а центры масс совпадают с их геометрическими центрами.

7.61. Движение системы материальных точек представляется как суперпозиция двух движений: относительно некоторой системы отсчета $\xi_1\xi_2\xi_3$ и движение вместе с этой системой. Показать, что кинетическая энергия T_a абсолютного движения выражается равенством $T_a = T_e + T_r + \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{p}_r + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}_{0r}$, где T_e — кинетическая энергия переносного движения, T_r — кинетическая энергия относительного движения, $\mathbf{v}_0$ — скорость начала системы отсчета $\xi_1\xi_2\xi_3$, $\boldsymbol{\omega}$ — ее угловая скорость относительно неподвижной системы, $\mathbf{p}_r$ — импульс

системы при относительном движении, $\mathbf{K}_{0r}$ — момент импульса относительного движения системы.

7.62. Звенья AC и BC плоского двузвенного автоматического манипулятора (см. рис. к задаче 7.59) вращаются с постоянными угловыми скоростями ω_1 и ω_2. Найти кинетическую энергию манипулятора, если в начальный момент звенья были расположены вдоль оси Ox. Звенья считать одинаковыми однородными стержнями массы m и длины l.

7.63. Однородный стержень длины l и массы m, один конец которого закреплен с помощью шарового шарнира O, отклоняют от вертикали на угол φ_0 и сообщают ему угловую скорость ω_0 вокруг вертикальной оси. Найти зависимость абсолютной угловой скорости стержня Ω от угла φ, а также компоненты силы реакции в шарнире O.

§ 8. Динамика точки в центральном поле

8.1. Тело отпущено без начальной скорости на высоте H над Землей. Найти зависимость скорости тела от его текущей высоты h. Исследовать случаи $H/R_З \ll 1$ и $H/R_З \gg 1$, где $R_З$ — радиус Земли.

8.2. Показать, что в поле любой центральной притягивающей силы за счет надлежащего выбора начальных данных можно реализовать круговую орбиту произвольного радиуса R. Показать, что скорость движения по этой орбите постоянна.

8.3. Найти высоту искусственного спутника Земли, если он все время находится над одной и той же точкой экватора.

8.4. Найти уравнение траектории материальной точки массы m в центральном поле с потенциалом $\Pi(r) = -\alpha/r$, $\alpha > 0$, если момент импульса точки равен K, а полная энергия — E.

8.5. Помимо центральной силы $\mathbf{F}_1$, направленной к неподвижному центру, на точку массы m действует сила $\mathbf{F}_2 = -\beta\mathbf{v}$, где скалярный коэффициент β зависит от времени, расстояния r до центра и от скорости v точки, причем функция $\beta(t, r, v)$ ограничена. Показать, что траектория точки будет представлять собой плоскую кривую.

8.6. Из бесконечности по направлению к звезде S летит метеорит, имеющий на бесконечности скорость $v_\infty > 0$ и прицельное расстояние $\rho > 0$. Может ли метеорит стать спутником звезды?

8.7. Гравитирующая звезда достаточно большой массы M ($M > 2M_\odot$, $M_\odot$ — масса Солнца) при остывании сжимается под действием сил тяготения. Найти зависимость второй космической скорости v_{II} для звезды от ее текущего радиуса r. Найти также то значение

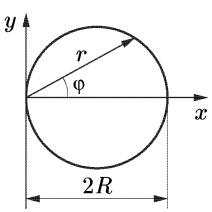
радиуса r^*, при котором вторая космическая скорость станет равной скорости света c (так называемый гравитационный радиус) [1].

8.8. Спутник движется вокруг Земли по эллиптической орбите с эксцентриситетом e. Найти отношение максимального и минимального значений угловой скорости радиус-вектора спутника.

8.9. Спутник Земли переведен с круговой орбиты радиуса r_1 на круговую орбиту радиуса r_2. Как при этом изменятся кинетическая, потенциальная и полная энергии спутника?

8.10. Спутник Земли массы m движется по эллиптической орбите с параметром p_0 и эксцентриситетом e_0. В некоторый момент времени спутнику сообщается радиальный импульс $\Delta q = m\Delta\dot{r}_0$. Определить параметры новой орбиты спутника, если в момент действия импульса он находился на расстоянии r_0 от центра притяжения и имел радиальную скорость $\dot{r}_0$. Найти также приближенное значение поправки к эксцентриситету Δe при малом импульсе Δq.

8.11. Материальная точка (см. рисунок) движется в центральном поле под действием силы $F_r = -\alpha m/r^5$. При каком начальном моменте импульса траектория представляет собой окружность $r = 2R\cos\varphi$? Показать, что в случае $F_r \neq -\alpha m/r^5$ такая траектория точки невозможна.



К задаче 8.11

8.12. Материальная точка притягивается к неподвижному центру массы M по закону Ньютона. Показать, что при движении точки имеет место векторный закон сохранения (интеграл Лапласа) $(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\times\mathbf{v}+\gamma M\mathbf{r}/r = \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор.

8.13. Определить совокупность начальных данных, при которых в задаче двух тел расстояние между телами во время движения остается ограниченным.

8.14. Две точки массы m_1 и m_2 взаимодействуют по закону всемирного тяготения. Найти величины начальных скоростей точек, при которых расстояние между ними во время движения не будет изменяться.

8.15. К двум взаимодействующим точечным массам m_1 и m_2 приложены зависящие только от времени внешние силы $\mathbf{F}_1(t)$ и $\mathbf{F}_2(t)$ соответственно. Показать, что такая задача двух тел может быть сведена к задаче о движении в центральном поле точечной массы,

[1] Впервые величину r^* нашел Лаплас, используя закон всемирного тяготения Ньютона и полагая $v_{\text{II}} = c$. Вычисления r^* на основе общей теории относительности дают то же самое значение r^* (см., например, [39]).

на которую действует дополнительная сила

$$\Phi(t) = \frac{m_2\mathbf{F}_1 - m_1\mathbf{F}_2}{m_1 + m_2}.$$

8.16. Какова должна быть зависимость внешних сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ от переменных $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\dot{\mathbf{r}}_1$, $\dot{\mathbf{r}}_2$, t ($\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — радиус-векторы точек в инерциальной системе отсчета), чтобы было справедливо утверждение предыдущей задачи?

8.17. Две гравитирующие массы m_1 и m_2 совершают финитное движение. Показать, что минимальное и максимальное расстояния между ними являются корнями квадратного уравнения

$$E_0x^2 + \gamma m_1 m_2 x - \frac{m_1 + m_2}{2m_1m_2}K_0^2 = 0,$$

где E_0 и K_0 — энергия и кинетический момент системы, а γ — постоянная тяготения. Из указанного уравнения найти условие, при котором реализуются круговые орбиты.

8.18. Два одинаковых шарика массы m могут двигаться без трения по сторонам прямого угла $\angle xOy$, расположенного в горизонтальной плоскости. Шарики имеют заряды q и $-q$. Показать, что такая система моделирует плоское движение материальной точки массы m в поле центральной силы $F = -\alpha/r^2$ $(\alpha = q^2)$.

8.19. Показать, что если известно уравнение $r = r(\varphi)$ траектории точки в поле центральной силы, то можно найти проекцию силы на направление радиуса и квадрат скорости точки при помощи следующих соотношений (формул Бине):

$$f_r(r) = -\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r}\right], \quad v^2 = c^2\left[\left(\frac{d(1/r)}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right],$$

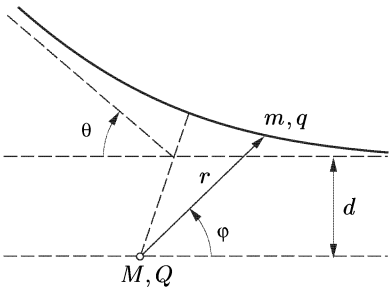
где $c = r^2\dot{\varphi}$ — удвоенная секториальная скорость.

8.20. В каком центральном поле точка движется по траектории $r = p/[1 + e\cos\omega(\varphi - \varphi_0)]$ (при иррациональном значении ω — незамкнутая розетка)? В этом уравнении постоянные ω, p, e и φ_0 определяются из начальных условий, причем $\omega = \sqrt{1 + \beta m/K_0^2}$, $p = \omega^2K_0^2/(m\alpha)$, K_0 — начальный момент импульса, а постоянные α и β не зависят от начальных условий.

8.21. Опыт Резерфорда по рассеянию частиц основан на результате решения следующей задачи. Частица массы m (см. рисунок) и положительного заряда q (в опыте Резерфорда α-частица) пролетает мимо тяжелого ядра массы M заряда Q. Невозмущенная скорость

частицы (на бесконечности) равна v_∞, а прицельное расстояние равно d. Найти угол θ отклонения траектории частицы, когда она снова уйдет в бесконечность.

8.22. Комета массы m (см. рис. к задаче 8.21) движется в поле тяготения звезды S массы M ($M \gg m$), имея невозмущенную скорость (на бесконечности) v_∞ и прицельное расстояние d. Найти уравнение траектории кометы и определить угол θ, на который отклоняется ее траектория, когда она снова удаляется в бесконечность.



К задаче 8.21

8.23. С какой начальной скоростью v_0, образующей угол α с горизонтом, нужно запустить снаряд с полюса, чтобы он попал на экватор? Землю считать однородным шаром, гравитационное поле которого совпадает с полем точки, помещенной в центре Земли и имеющей массу Земли. Найти также наивыгоднейший угол запуска α_0 (с точки зрения минимизации потребной начальной энергии).

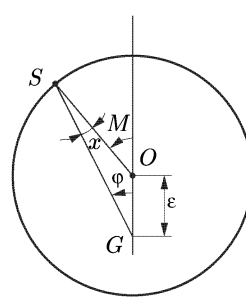
8.24. С Северного полюса Земли запускается снаряд так, что направление начальной скорости v_0 составляет угол α с горизонтом. Какой должна быть величина v_0, чтобы место падения снаряда имело географическую широту φ (широта отсчитывается от экватора, причем в северном полушарии $\varphi > 0$, а в южном — $\varphi < 0$)?

8.25. Используя условия предыдущей задачи, выразить эксцентриситет e и параметр p орбиты снаряда через углы α и φ. При каких значениях α снаряд может попасть на заданную широту φ_0?

8.26. Используя условия задачи 8.24, найти такой угол α_0, чтобы снаряд упал на широте φ с минимальной скоростью. Найти эксцентриситет e и параметр p соответствующей орбиты.

8.27. Найти уравнение траектории частицы массы m в поле центральной силы с потенциалом

$$\Pi(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2} \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$$

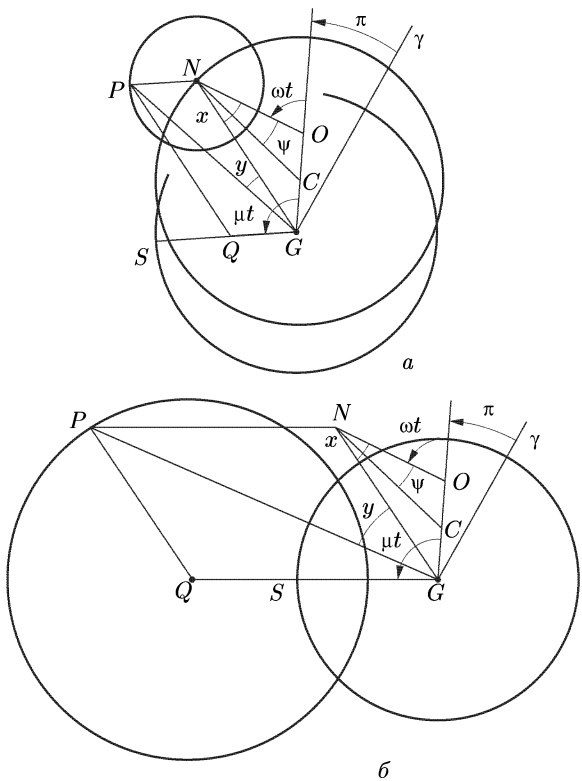


К задаче 8.28

8.28. Для объяснения наблюдаемого неравномерного годичного движения Солнца по долготе Гиппарх (II в. до н. э.) использовал гипотезу простого эксцентриситета, состоящую в том, что Солнце S (см. рисунок) равномерно вращается по круговой орбите единичного

радиуса вокруг центра O, отстоящего от Земли G на некоторое расстояние ε. Используя разложение истинной аномалии φ через среднюю аномалию M для эллиптической траектории с эксцентриситетом $e = 0,01675$, $\varphi = M - 2e\sin M + (5/4)e^2 \sin 2M - \ldots$, найти наибольшую ошибку в определении истинной аномалии древними.

8.29. Суть планетного механизма Птолемея (II в. н. э.), объясняющего неравномерность перемещения по долготе внешних планет (Марс, Юпитер, Сатурн) относительно Солнца, состоит в том, что



К задаче 8.29

каждая планета P (см. рисунок) движется по круговой орбите (эпициклу) радиуса $a\delta$ вокруг центра N, также перемещающегося по круговой орбите радиуса a (рисунок *а*), центр C которой находится на расстоянии $a\varepsilon/2$ от Земли G. При этом прямая ON (точка O лежит на прямой GC на расстоянии $a\varepsilon/2$ от точки C согласно гипотезе бисекции эксцентриситета) вращается с постоянной угловой скоростью ω. Считается, что Солнце обращается вокруг Земли со средней

скоростью μ ($\mu > \omega$) и направление от Земли на среднее Солнце S всегда параллельно направлению от центра эпицикла к планете, $GS \parallel NP$ [1]. Сравнить видимую геоцентрическую долготу Сатурна $\lambda = \angle\gamma GP = 309°4'$ (наблюдения Птолемея 22.12.138 г. н. э. в Александрии) с расчетной, если серия предшествующих наблюдений позволила определить: $\varepsilon = 0,114$, $\delta = 0,108$, $\Pi = 233°$, $\omega t = 86°33'$, $(\mu - \omega)t = 275°6'$.

8.30. Обращение планетного механизма, проведенное Коперником (1543 г.), хорошо объясняет промежуточная система Тихо Браге (1577 г.). Поскольку никакими методами определения линейных размеров в планетной системе астрономия древних не располагала, Тихо Браге совместил со средним Солнцем S все точки $Q_1 - Q_S$ в системе Птолемея (см. предыдущую задачу). Поэтому все планеты у Тихо Браге обращаются вокруг Солнца, а Солнце — вокруг Земли. Обращение же кинематики, проведенное Коперником, сводится к остановке Солнца и включению в движение Земли. При этом вся структура планетной системы, развитая древними, не только не претерпевает каких-либо коренных изменений, а лишь упрощается; накопленные же экспериментальные данные только получают другую интерпретацию. Объяснить физический смысл величин δ_i — радиусов эпициклов.

8.31. Тело состоит из двух одинаковых материальных точек масс m, соединенных невесомым нерастяжимым стержнем длины $2l$. Показать, что в поле всемирного тяготения возможно следующее движение: притягивающий центр O и движущиеся точки лежат на одной прямой, а траектория каждой точки — окружность. Расстояние $OC = R$, а C — центр масс точек.

8.32. При каком соотношении между R и l в результате схлопывания масс из предыдущей задачи в одну, общая масса будет иметь вторую космическую скорость?

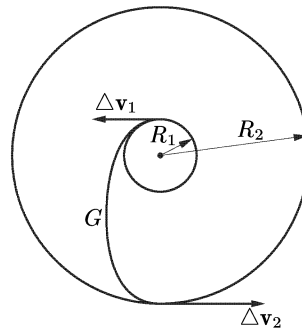
8.33. Спутник Земли массы m движется по эллиптической орбите. Найти полную энергию спутника, если большая полуось его орбиты равна a.

8.34. Чтобы перевести спутник с круговой орбиты радиуса R_1 (см. рисунок) на круговую орбиту радиуса R_2, ему последовательно сообщаются два касательных импульса, вызывающих изменение скорости спутника на $\Delta\mathbf{v}_1$ и $\Delta\mathbf{v}_2$ соответственно. Найти значения Δv_1

[1] Для внутренних планет (Меркурий, Венера) центр эпицикла Птолемей помещает в точке Q на прямой, соединяющей наблюдателя со средним Солнцем (рисунок *б*). Скорость обращения планет в этом эпицикле ω больше средней скорости Солнца ($\mu < \omega$).

и Δv_2, если в результате действия первого импульса спутник переходит на промежуточную эллиптическую орбиту (эллипс Гомана).

8.35. Материальная точка массы m притягивается к неподвижному центру силой $\mathbf{F} = -f(r)\mathbf{r}/r$. В начальный момент скорость точки $\mathbf{v}_0$ направлена перпендикулярно радиус-вектору $\mathbf{r}_0$. Найти траекторию точки, если в начальный момент $mv_0^2 = f(r_0)r_0$.



К задаче 8.34

8.36. Искусственный спутник Земли выведен на эллиптическую орбиту, апогей которой находится на расстоянии H от поверхности Земли, а перигей — на расстоянии h. Найти элементы орбиты спутника (эксцентриситет e и параметр p).

8.37. Искусственный спутник Земли массы m движется по эллиптической орбите, удаляясь от поверхности Земли на расстояние H в апогее и на расстояние h в перигее. Найти полную энергию E спутника и его кинетический момент K.

8.38. Материальная точка массы m движется под действием силы $\mathbf{F} = -f(r)\mathbf{r}/r - \beta\dot{\mathbf{r}}$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, а $\beta = \text{const}$. Найти закон изменения кинетического момента $\mathbf{K}_0(t)$.

8.39. Искусственный спутник Земли массы m с начальной энергией E_0 движется по эллиптической орбите. Найти зависимость скорости спутника от его высоты над поверхностью планеты.

8.40. В плотных слоях атмосферы на спутник массы m действует сила сопротивления $\mathbf{F} = -\beta\mathbf{v}$. Найти зависимость секториальной скорости спутника от длины дуги s его траектории, если $\beta = kv$, а начальное значение секториальной скорости $c/2$.

8.41. В каком центральном поле траектория материальной точки определяется уравнением $\dfrac{d^2}{d\varphi^2}\left(\dfrac{1}{r}\right) - \omega^2\dfrac{1}{r} = 0$, где ω — постоянная величина.

8.42. На материальную точку массы m, движущуюся в поле центральной силы, дополнительно действует сила сопротивления $\mathbf{F} = -\beta\mathbf{v}$, где β — постоянная величина. Найти зависимость секториальной скорости точки от времени.

8.43. В условиях предыдущей задачи секториальная скорость спутника уменьшается по экспоненциальному закону. Найти угловую скорость вращения $\dot{\varphi}$ радиус-вектора спутника в плоскости орбиты.

8.44. Материальная точка движется в центральном поле, потенциал которого $\Pi = \alpha/r^2$. Найти уравнение траектории точки.

8.45. Найти уравнение траектории заряженной частицы массы m в поле неподвижного положительного заряда Q. Заряд частицы положителен и равен q.

8.46. Дифференциальное уравнение траектории материальной точки массы m в центральном поле имеет вид $\dfrac{d^2}{d\varphi^2}\left(\dfrac{1}{r}\right)+\psi(r)=0$, где $\psi(r)$ — заданная функция. Найти зависимость силы от r.

8.47. Найти в квадратурах уравнение траектории материальной точки массы m в поле центральной силы $F=-\dfrac{\alpha}{r^2}\psi(\varphi)$, зависящей от полярного угла φ.

8.48. Материальная точка массы m движется в поле центральной силы $F=-\dfrac{\alpha}{r^2}\psi(\varphi)-\dfrac{\beta}{r^3}$, зависящей от полярного угла φ. Найти уравнение траектории точки в квадратурах.

8.49. Спутнику, который движется по круговой орбите радиуса R со скоростью v, сообщается импульс чистого прижатия, в результате чего возникает радиальная составляющая скорости, равная Δv и направленная к центру. Найти эксцентриситет e новой орбиты и угол φ между радиус-вектором в точке приложения импульса и направлением на перигей. Показать, что параметр p при этом не изменится.

8.50. Спутнику, движущемуся со скоростью v по круговой орбите радиуса R, сообщается импульс торможения, в результате которого скорость изменилась на величину Δv. Найти параметр p, эксцентриситет e новой орбиты и угол φ между радиус-вектором в точке приложения импульса и направлением на перигей новой орбиты.

8.51. Два одинаковых спутника Земли движутся по круговым орбитам одинакового радиуса R. Одному спутнику сообщается импульс торможения, уменьшающий скорость на Δv, а другому — равный по модулю импульс чистого прижатия, в результате которого возникает радиальная составляющая скорости Δv, направленная к центру. Для новых орбит сравнить высоты r_1 и r_2 спутников в точке перигея.

8.52. Искусственный спутник Земли движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e_0 и параметром p_0. В некоторый момент спутнику сообщается касательный импульс $\Delta\mathbf{q}=\lambda m\mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ — скорость спутника в этот момент. Найти параметры новой орбиты спутника, если в момент приложения импульса спутник находился на расстоянии H от поверхности Земли, а угол между вектором скорости $\mathbf{v}$ и радиус-вектором был равен β.

8.53. Искусственный спутник Земли массы m движется по эллиптической орбите $r=p/(1+e\cos\varphi)$. Для поворота орбиты в ее плоскости, т. е. для поворота большой полуоси орбиты на угол ψ используются два касательных импульса q_1 и q_2. Полагая, что после

первого импульса спутник выходит на промежуточную круговую орбиту, найти импульсы и минимальное время между моментами их приложения.

8.54. Космический корабль движется со скоростью v по круговой орбите, плоскость которой образует угол φ с плоскостью экватора. В какой точке траектории и какой импульс скорости Δv нужно сообщить космическому кораблю, чтобы форма и размеры орбиты не изменились, а ее плоскость повернулась на угол $45°$ вокруг линии пересечения орбиты с плоскостью экватора?

8.55. Спутник массы m выведен на круговую орбиту вокруг Земли в разреженные слои атмосферы. Вследствие торможения атмосферой спутник начинает снижаться и двигаться по спиралевидной кривой, близкой к круговой. Считая, что угол α между вектором скорости $\mathbf{v}$ и трансверсальной составляющей скорости не меняется при движении спутника, т. е. $d\alpha/d\varphi = 0$ (φ — полярный угол), показать, что вследствие торможения атмосферой линейная скорость спутника, движущегося по орбите, близкой к круговой, возрастает так, как если бы он разгонялся тормозящей силой (парадокс спутника).

8.56. Эксцентрическая аномалия E (угол в параметрическом уравнении эллипса) связана с истинной аномалией φ (полярный угол в уравнении конического сечения) соотношениями:

$$\cos\varphi = \frac{(\cos E - e)}{(1 - e\cos E)}, \quad \sin\varphi = \frac{\sin E\sqrt{1-e^2}}{(1 - e\cos\varphi)}.$$

Показать, что зависимость эксцентрической аномалии E от времени определяется уравнением Кеплера: $E - e\sin E = n(t - t_0)$, где $n = 2\pi/T$ — средняя угловая скорость обращения, а T — период.

8.57. При исследовании проблемы N тел вводят в рассмотрение так называемый момент инерции системы $J = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i$, где $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор i-го тела. Если величина J ограничена, то система совершает финитное движение, если при $t \to \infty$ величина J возрастает неограниченно, то система совершает инфинитное движение. Найти выражение для d^2J/dt^2 и, используя его, показать, что в задаче N тел движение будет инфинитным, если начальное значение полной энергии E_0 системы положительно.

8.58. На какую высоту над экватором Земли должен быть выведен спутник, чтобы он стал стационарным спутником, служащим для обеспечения трансляционных межконтинентальных систем связи? Землю считать однородным шаром радиуса $R = 6380$ км.

8.59. Твердое тело массы m находится в гравитационном поле неподвижного центра O. Известны: $\mathbf{R} = \overrightarrow{OC}$, где C — центр масс тела;

$\mathbf{e}_k$ — орты, задающие главные центральные оси; I_k — моменты инерции относительно $\mathbf{e}_k$, $k=\overline{1,3}$. Вычислить гравитационный потенциал П и момент $\mathbf{M}_C$ гравитационных сил относительно центра масс C. При вычислении пренебречь членами более высокого порядка, чем a^2/R^2, где a — максимальный размер тела.

8.60. Однородный тонкий стержень длины $2l$ притягивается по закону всемирного тяготения к центру O. Найти точку приложения равнодействующей гравитационных сил, считая $l \ll R = OC$, где C — центр масс стержня.

§ 9. Динамика относительного движения

9.1. Движущееся твердое тело содержит полость, целиком заполненную однородной несжимаемой жидкостью. Показать, что в движении относительно системы координат, жестко связанной с твердым телом, кинетический момент жидкости не зависит от выбора полюса.

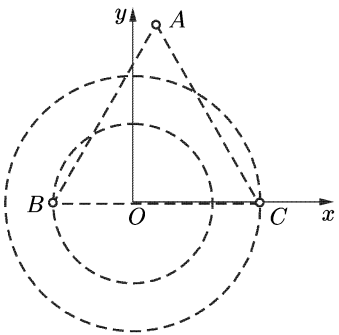
9.2. Космическая станция равномерно вращается вокруг своей оси симметрии. Ось вращения поступательно перемещается с постоянным по модулю и направлению ускорением $\mathbf{w}$. Показать, что в отсутствие внешних непотенциальных сил для материальной точки, находящейся внутри станции, в системе координат, связанной со станцией, имеет место закон сохранения механической энергии. (Потенциальная энергия точки состоит из потенциальной энергии внешних сил и потенциальной энергии переносной силы инерции.)

9.3. Два небесных тела B и C (см. рисунок) движутся вокруг общего центра инерции O по окружностям, лежащим в одной плоскости. Известны радиусы окружностей r_1 и r_2 и массы тел m_1 и m_2. В плоскости орбит вводится вращающаяся система координат xOy, начало которой находится в центре инерции O, а ось Ox направлена на одно из тел. Показать, что если космический корабль попадет в точку A плоскости орбит, находящуюся на одинаковом расстоянии r_1+r_2 от обоих тел (треугольник ABC равносторонний), с нулевой относительной скоростью, то он останется там навсегда.

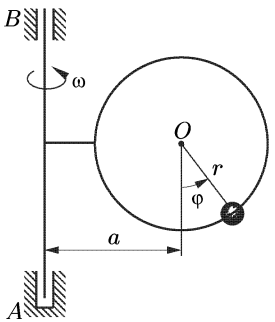
9.4. Гладкая проволочная окружность радиуса R вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг своего вертикального диаметра. Найти положения относительного равновесия тяжелого колечка, надетого на эту окружность.

9.5. Гладкое кольцо радиуса r (см. рисунок), плоскость которого вертикальна, вращается с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси AB, находящейся на расстоянии a от центра кольца O. По кольцу может скользить тяжелая бусинка. Найти угловую скорость, при которой положение относительного равновесия бусинки будет определяться заданным углом φ_0, если $a + r\sin\varphi_0 \neq 0$. Найти

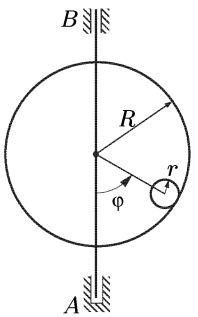
относительную скорость бусинки в зависимости от угла φ, если в начальный момент ее скорость относительно кольца была равна нулю, а угол φ равнялся φ_0.



К задаче 9.3



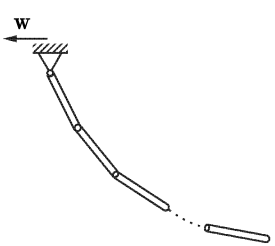
К задаче 9.5



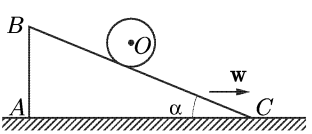
К задаче 9.6

9.6. По внутренней стороне шероховатового круглого обруча радиуса R (см. рисунок) может катиться без проскальзывания однородный диск массы m и радиуса r. Обруч вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг своего вертикального диаметра AB. Найти положения относительного равновесия диска. Составить дифференциальное уравнение движения диска и убедиться, что величина $3\dot{\varphi}^2 + \omega^2 \cos 2\varphi - 4g \cos\varphi/(R - r)$ сохраняется во времени.

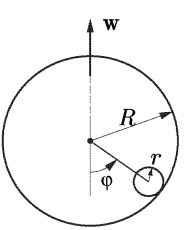
9.7. Маятник состоит из n одинаковых однородных стержней, соединенных цилиндрическими шарнирами (см. рисунок). Точка подвеса маятника движется по горизонтальной прямой с постоянным ускорением $\mathbf{w}$. Найти положение относительного равновесия маятника.



К задаче 9.7



К задаче 9.8



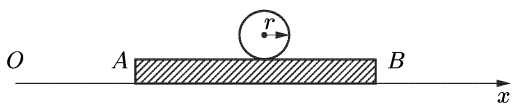
К задаче 9.9

9.8. Клин ABC (см. рисунок) движется вдоль горизонтальной прямой с постоянным ускорением $\mathbf{w}$. На наклонную грань BC клина, образующую угол α с горизонтом, помещается с нулевой относитель-

ной скоростью однородный цилиндр, который может катиться по этой грани без проскальзывания. Каково должно быть ускорение клина для того, чтобы центр O цилиндра двигался вверх по клину?

9.9. Однородный диск радиуса r (см. рисунок) может катиться без проскальзывания по внутренней стороне вертикального обруча радиуса R, поступательно движущегося вверх с постоянным ускорением $\mathbf{w}$. Найти зависимость относительной скорости v центра диска от угла φ, если в начальный момент $\varphi = \varphi_0$ и $v = v_0$.

9.10. Шероховатая доска AB (см. рисунок) колеблется вдоль горизонтальной оси Ox по закону $OA = a\sin\omega t$. По доске может катиться без проскальзывания однородный диск массы m и радиуса r. В начальный момент $t_0 = 0$ скорость центра диска относительно доски была равна нулю. Показать, что за конечное время диск упадет с доски.

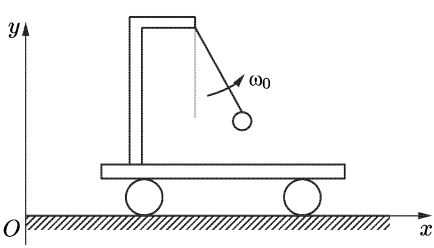


К задаче 9.10

9.11. Точка A подвеса математического маятника длины l совершает вертикальные колебания по закону $OA = a\sin\omega t$. Составить уравнение движения маятника и убедиться в том, что это уравнение допускает решения $\varphi(t) \equiv 0$ и $\varphi(t) \equiv \pi$.

9.12. Точка подвеса математического маятника длины l движется по горизонтальной прямой Ox по закону $at^2/2 + A\sin\omega t$. Составить уравнение движения маятника относительно системы координат, поступательно движущейся вдоль оси Ox по закону $at^2/2$.

9.13. Математический маятник установлен на тележке (см. рисунок), которая может двигаться вдоль горизонтальной направляющей Ox. Ось подвеса маятника перпендикулярна направлению движения тележки, так что маятник может вращаться в вертикальной плоскости xy. В начальный момент маятнику, находящемуся в наинизшем положении, сообщается угловая скорость ω_0. По какому закону должна меняться скорость тележки $v(t)$, чтобы при $0 < t < \pi/(2\omega_0)$ маятник поворачивался вокруг оси подвеса с постоянной угловой скоростью?

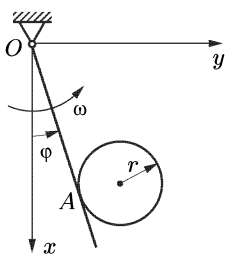


К задаче 9.13

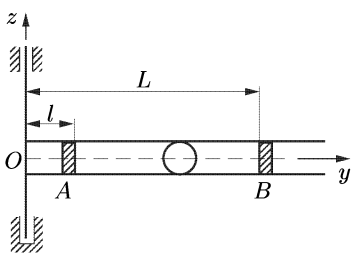
9.14. Найти выражение для силы F, которую следует приложить к тележке для того, чтобы реализовать движение, описанное в предыдущей задаче. (Масса тележки M, масса маятника m, его длина l. Массой колес и трением пренебречь.)

9.15. По гладкой горизонтальной плоскости, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Oz, под действием силы притяжения $\mathbf{F}$ к центру O движется материальная точка A массы m. Считая, что $F = -\mu/r^2$, где $r = AO$, найти относительную скорость точки как функцию r, если в начальный момент $v = v_0$, а $r = r_0$.

9.16. Невесомый стержень (см. рисунок), конец O которого шарнирно закреплен, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг горизонтальной оси Oz, перпендикулярной плоскости рисунка. По стержню катится без проскальзывания диск радиуса r и массы m. Найти силу трения и силу нормальной реакции со стороны стержня на диск в зависимости от угла φ поворота стержня и расстояния l от точки O до точки A касания диска со стержнем. В начальный момент точки O и A совпадали, а диск покоился относительно стержня.



К задаче 9.16



К задаче 9.17

9.17. Внутри гладкой горизонтальной трубки (см. рисунок), вращающейся вокруг вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω и перегороженной в точках A и B ($OA = l$, $OB = L$, $l < L$), может скользить без трения шарик. В начальный момент шарик находился у перегородки A и имел относительную скорость $\mathbf{v}_0$, направленную от оси вращения. Пренебрегая размерами шарика, найти период его колебаний относительно трубки, считая удар о перегородку абсолютно упругим. Построить фазовую диаграмму (траекторию на фазовой плоскости $y\dot{y}$).

9.18. Используя условия предыдущей задачи, но считая, что удар шарика о перегородки не является абсолютно упругим, построить (качественно) фазовую диаграмму движения шарика. При каких значениях коэффициента восстановления k шарик после первого удара о перегородку B не вернется к перегородке A?

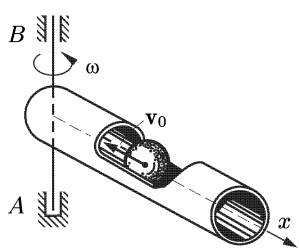
9.19. Колечко насажено на гладкую проволоку, расположенную в горизонтальной плоскости Π и изогнутую по кривой $r = f(\varphi)$. Плоскость вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Oz. Найти закон движения колечка, если при $t = 0$ заданы $r = r_0$ и $v = v_0$.

9.20. Вдоль гладкого стержня AB, вращающегося в вертикальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω вокруг своего конца A, может скользить надетое на стержень тяжелое колечко. Найти закон движения $x = x(t)$ колечка относительно стержня, если в момент времени $t = 0$ стержень занимал нижнее вертикальное положение и $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

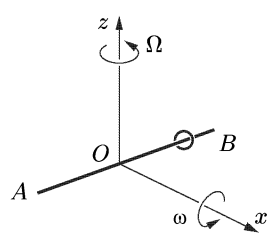
9.21. Шарик массы m помещен в шероховатую трубку. Динамический коэффициент трения скольжения шарика о трубку равен f. Можно ли при помощи этой системы моделировать эффект вязкого трения, т. е. реализовать силу сопротивления, пропорциональную относительной скорости $F = -kv$? Размеры шарика пренебрежимо малы, трубка прямолинейна.

9.22. Используя решение предыдущей задачи, предложить схему прибора для определения коэффициента трения скольжения в условиях невесомости.

9.23. Горизонтальная трубка (см. рисунок) вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси AB, проходящей через ось трубки. Шарику массы m, находящемуся в трубке на расстоянии x_0 от оси вращения, сообщается относительная скорость $\mathbf{v}_0$. Пренебрегая размерами шарика и считая, что на него действует сила сопротивления $F = -kv$, найти закон движения $x = x(t)$ шарика относительно трубки, а также начальную скорость $\mathbf{v}_0$, которую нужно сообщить шарику, чтобы он достиг оси вращения.



К задаче 9.23



К задаче 9.25

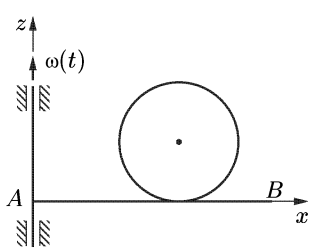
9.24. Однородный диск может катиться без проскальзывания по горизонтальной направляющей Ox, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Oy. Найти закон относительного движения диска.

9.25. Стержень AB (см. рисунок) вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг горизонтальной оси Ox, проходящей перпендикулярно стержню через его точку O. Ось Ox в свою очередь вращается вокруг неподвижной вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью Ω. Составить уравнение движения колечка, насаженного на стержень, выбрав в качестве координаты x_1 расстояние колечка от точки O стержня и приняв коэффициент трения между колечком и стержнем равным f.

9.26. Материальная точка массы m движется относительно произвольной неинерциальной системы отсчета по закону $\mathbf{r}(t)$. Доказать, что переносная сила инерции потенциальна в том и только в том случае, когда угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ системы является постоянным вектором. Подсчитать потенциальную энергию переносных сил инерции, если начало неинерциальной системы имеет ускорение $\mathbf{w}$.

9.27. По горизонтальной плоскости, вращающейся с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси, движется плоская фигура. Показать, что в системе отсчета, жестко связанной с плоскостью, переносные и кориолисовы силы инерции точек фигуры приводятся к равнодействующим, проходящим через центр масс фигуры.

9.28. Плоская фигура массы m движется по плоскости, которая вращается с переменной угловой скоростью $\omega = \int\limits_0^t \varepsilon(\tau)\,d\tau$ вокруг неподвижной оси, перпендикулярной плоскости и не проходящей через центр масс фигуры. Показать, что в системе отсчета, жестко связанной с плоскостью, как переносные, так и кориолисовы силы инерции точек фигуры приводятся к одной силе (равнодействующей). На каком расстоянии h от центра масс находится линия действия равнодействующей переносных сил инерции, если момент инерции фигуры относительно оси, проходящей через ее центр масс перпендикулярно плоскости, равен J и расстояние от оси вращения плоскости до центра масс фигуры равно a?

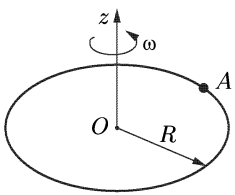


К задаче 9.29

9.29. Однородный диск (см. рисунок) может катиться без проскальзывания по горизонтальной направляющей AB, которая вращается с угловой скоростью $\omega(t)$ вокруг вертикальной оси Az, проходящей через конец A направляющей. Составить дифференциальное уравнение движения диска во вращающейся системе отсчета и проинтегрировать его в случае $\omega(t) = \omega_0 = \mathrm{const}$.

9.30. В Земле прорыта шахта, направление которой в каждой точке совпадает с направлением отвеса в этой точке. Определить форму шахты с учетом вращения Земли. Землю считать однородным шаром.

9.31. Горизонтальное кольцо радиуса R вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. По кольцу может скользить колечко. С какой относительной скоростью нужно толкнуть колечко, чтобы оно могло совершить k оборотов по кольцу, если коэффициент трения скольжения равен f?



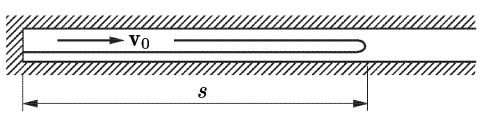
К задаче 9.32

9.32. Под действием некоторой системы сил шарик массы m (см. рисунок) движется так, что скорости всех его точек параллельны плоскости, которая вращается с угловой скоростью $\omega(t)$ вокруг неподвижной оси, лежащей в этой плоскости. Составить дифференциальные уравнения движения тела относительно плоскости.

9.33. Решить предыдущую задачу в предположении, что плоскость вращается вокруг оси, перпендикулярной к ней.

§ 10. Динамика систем переменного состава

10.1. Тонкая гибкая нерастяжимая нить длины L (см. рисунок), сложенная пополам, уложена в тонкой горизонтальной гладкой трубке. Один конец нити закреплен, и примыкающая к нему половина нити покоится, а частицам второй половины сообщается начальная скорость v_0. Найти время t, за которое нить распрямится, и длину s

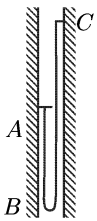


К задаче 10.1

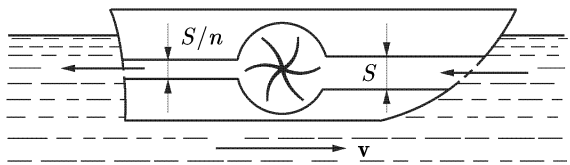
покоящейся части нити в тот момент, когда скорость точки изгиба будет равна некоторой заданной величине, скажем, скорости звука a («эффект кнута»).

10.2. Тонкая гибкая нерастяжимая нить ABC (см. рисунок) уложена в вертикальной гладкой трубке достаточно малого диаметра. Концы A и C нити закреплены, а точка B занимает наинизшее положение, причем $BC = s_0$. В некоторый момент конец C отпускают без начальной скорости. Найти зависимость скорости v подвижной части нити от ее длины s.

10.3. Тяжелая однородная цепь уложена на краю стола на высоте H от пола. Длина цепи много больше высоты H. В некоторый момент времени один из концов цепи соскальзывает и она начинает падать, причем в движение последовательно вовлекается звено за звеном. Пренебрегая размерами звеньев, найти закон движения цепи.



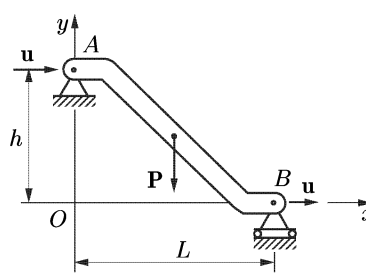
К задаче 10.2



К задаче 10.4

10.4. Реактивное судно (см. рисунок) приводится в движение насосом, который всасывает воду через входное отверстие горизонтального канала и выбрасывает ее в противоположном направлении. Относительная скорость воды на входе u, площадь входного отверстия S, площадь выходного отверстия S/n. Масса судна с находящейся в нем водой равна m. Определить время разгона судна от скорости v_0 до v_1, считая, что на него действует сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости, $F = -kv^2$. (Задача И. В. Мещерского.)

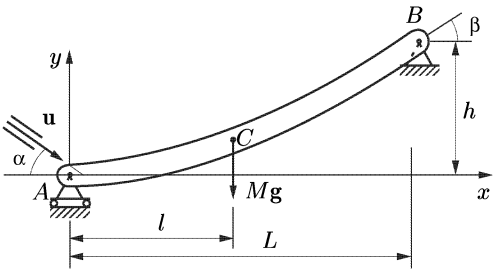
10.5. Эскалатор (см. рисунок) пропускает стационарный пассажиропоток постоянной плотности μ; скорости потока на входе и на выходе относительно эскалатора горизонтальны и равны $\mathbf{u}$. В точке B опора установлена на катки. Определить силу реакции опор A и B, если расстояние между ними составляет L по горизонтали и h по вертикали; общий вес системы равен P, а ее центр масс совпадает с серединой эскалатора.



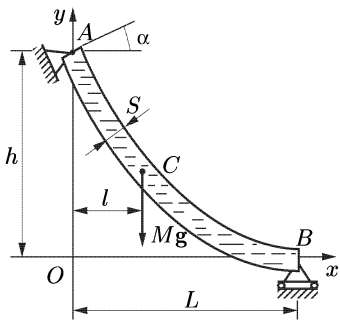
К задаче 10.5

10.6. На ленту транспортера (см. рисунок), движущуюся с постоянной скоростью v, подается песок с постоянной относительной скоростью u под углом α к начальному горизонтальному участку транспортера. Конечный участок транспортера наклонен под углом β к горизонту. В точке A лента опирается на катки. Масса M транспортера с песком и масса m песка, сбрасываемого с транспортера в секунду, постоянны. Центр масс C загруженного транспортера находится от левой опоры на расстоянии l по

горизонтали. Найти силу реакции опор A и B, если расстояние между ними составляет L по горизонтали и h по вертикали.



К задаче 10.6



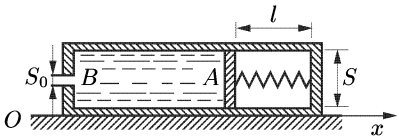
К задаче 10.7

10.7. Входное сечение изогнутой трубы постоянного сечения S (см. рисунок), закрепленной в вертикальной плоскости, образует угол α с горизонтом; выходное сечение вертикально. По трубе течет вода с постоянной скоростью u. В точке B труба опирается на катки. Центр масс C трубы с водой находится от опоры A на расстоянии l по горизонтали. Масса трубы с находящейся в ней водой равна M. Найти силу реакции опор, если расстояние между ними составляет L по горизонтали и h по вертикали.

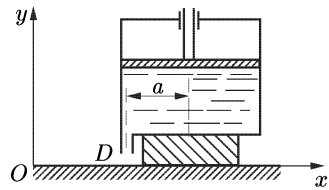
10.8. Рулон бумаги катится, разматываясь по горизонтальной плоскости, причем размотавшийся слой бумаги остается в покое. Толщина бумаги δ много меньше радиуса r рулона, так что в каждый момент рулон можно считать цилиндром. В начальный момент времени радиус рулона равен r_0 и его центр имеет скорость v_0. Найти зависимость скорости центра рулона от его радиуса и закон изменения радиуса во времени на том интервале движения, когда $r \gg \delta$. При решении задачи считать, что размотавшийся слой бумаги не оказывает влияния на движение рулона, т. е. что в точке контакта рулона с плоскостью сила реакции равна весу рулона и направлена вертикально вверх.

10.9. Цилиндрическая труба сечения S и массы m_0 (см. рисунок) лежит на гладкой горизонтальной направляющей Ox. Под действием сжатых пружин поршень A выталкивает жидкость плотности ρ через отверстие B площади S_0. Найти положение центра инерции частиц жидкости, вылетевших из трубы к моменту времени t, в зависимости от закона движения поршня $l = l(t)$ и закона движения трубы $x = x(t)$, считая, что вылетевшие частицы сохраняют ту горизонтальную составляющую скорости, которую они имели в момент вылета.

Аналогично просуммировав по точкам трубы, частицам жидкости в трубе и вылетевшим частицам жидкости, записать в конечной форме закон движения центра инерции системы и получить из него уравнение движения трубы. Масса поршня пренебрежимо мала, длина трубы равна L.



К задаче 10.9

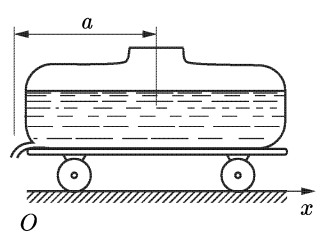


К задаче 10.10

10.10. Цилиндрический сосуд массы M (см. рисунок) заполнен жидкостью плотности ρ и закрыт сверху поршнем площади S. При опускании поршня жидкость вытекает через вертикальную трубку D. Расстояние от оси трубки до оси цилиндра равно a. Сосуд может двигаться поступательно вдоль гладкой горизонтальной направляющей Ox. При движении поршня уровень жидкости в сосуде меняется по закону $h = h(t)$, причем функция $h(t)$ удовлетворяет условиям $h(t_0) = h_0$, $h(t_1) = 0$, $\dot{h}(t_0) = 0$, $\dot{h}(t_1) = 0$, т. е. вся жидкость вытекает из сосуда за время $t_1 - t_0$ без ударов в начальный и конечный моменты времени. Составить уравнение движения сосуда, считая, что частицы вытекшей жидкости сохраняют ту горизонтальную составляющую скорости, которую они имели в момент отделения от трубки.

10.11. По какому закону $h = h(t)$ должен двигаться поршень в условиях задачи 10.10, чтобы на интервале времени $0 \leqslant t \leqslant \sqrt{(a/w_0)}\arccos[M/(M + \rho S h_0)]$ сосуд двигался с постоянным ускорением w_0?

10.12. Жидкость плотности ρ (см. рисунок) вытекает из цистерны массы M через трубку, отстоящую от центра инерции цистерны на расстояние a по горизонтали. Ось трубки вертикальна, и частицы вытекшей жидкости сохраняют ту горизонтальную составляющую скорости, которую они имели в момент отделения от крана. Во все время движения уровень жидкости в цистерне остается горизонтальным, а центр инерции находится на той же вертикали, что и центр инерции цистерны.



К задаче 10.12

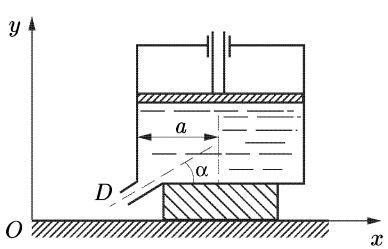
Пренебрегая массой колес и трением, найти скорость движения цистерны в зависимости от времени, если масса жидкости в цистерне меняется по закону

$$m = \frac{m_0}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi t}{t_1}\right), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

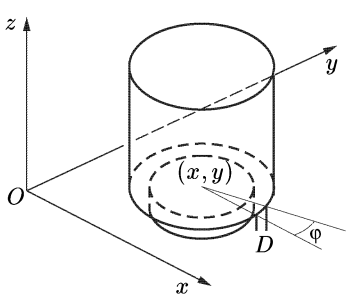
10.13. Решить задачу 10.10, считая, что ось трубки D, через которую вытекает жидкость, направлена под углом α к горизонту, а площадь поперечного сечения трубки равна S_0. Рассматривая сосуд как точку переменной массы, составить уравнение движения системы в форме уравнений Мещерского и сравнить его с полученным уравнением движения. При каком законе $h(t)$ изменения уровня жидкости уравнение Мещерского будет совпадать с точным уравнением движения сосуда?

10.14. Используя условия предыдущей задачи, найти зависимость скорости поршня $\dot{h}$ от высоты h, при которой сосуд будет двигаться с постоянным ускорением w_0.

10.15. Цилиндрический сосуд массы M (см. рисунок) заполнен жидкостью плотности ρ, вытекающей через трубку D. Трубка длины l с выходным сечением площади S вращается в вертикальной плоскости так, что угол между осью трубки и горизонтом меняется по заданному закону $\alpha = \alpha(t)$. Расстояние между центром вращения трубки и осью цилиндра равно a. Масса жидкости в сосуде меняется по закону $m = m(t)$. Сосуд может двигаться поступательно вдоль гладкой горизонтальной направляющей Ox в плоскости вращения трубки. Составить уравнение движения сосуда, если при его движении центр инерции остающейся в сосуде жидкости находится на оси сосуда, а частицы вытекшей жидкости сохраняют ту горизонтальную составляющую скорости, которую они имели в момент отделения от трубки.



К задаче 10.15

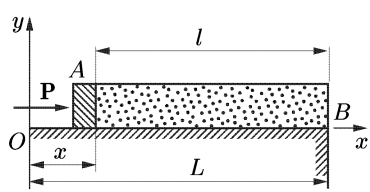


К задаче 10.16

10.16. Цилиндрический сосуд массы M и радиуса r (см. рисунок) заполнен жидкостью и может двигаться по гладкой горизонтальной плоскости; момент инерции цилиндра относительно его оси равен J. Жидкость вытекает через вертикальную трубку D в днище цилиндра, ось которой отстоит на расстояние a от оси цилиндра. Истечение жидкости происходит таким образом, что ее масса в сосуде меняется по закону $m = m(t)$, причем функция $m(t)$ удовлетворяет условиям $m(t_0) = m_0$, $m(t_1) = 0$, $\dot{m}(t_0) = \dot{m}(t_1) = 0$, т. е. вся жидкость вытекает из сосуда за время $t_1 - t_0$ без ударов в начальный и конечный моменты времени. Составить уравнения движения сосуда, считая, что находящуюся в сосуде жидкость в каждый момент времени можно рассматривать как твердое цилиндрическое тело, движущееся вместе с сосудом (иначе говоря, считая, что горизонтальная составляющая скорости частиц находящейся в сосуде жидкости относительно стенок сосуда равна нулю), а частицы вытекшей жидкости сохраняют ту горизонтальную составляющую скорости, которую они имели в момент отделения от трубки.

10.17. Решить предыдущую задачу, считая, что ось трубки горизонтальна и направлена по касательной к стенке сосуда; площадь выходного сечения трубки равна S и жидкость имеет плотность ρ.

10.18. Работу бульдозера, сталкивающего сыпучий материал в яму, можно схематически представить следующей простейшей моделью. К бруску A массы m (см. рисунок), который толкает слой сыпучего материала постоянной линейной плотности ρ, прикладывается постоянная сила P. В начальный момент правая сторона бруска находится на расстоянии L от края горизонтальной площадки B, по которой происходит движение, и скорость бруска равна нулю. Считая, что при движении толщина слоя не меняется и трение отсутствует, найти время t движения бруска A до края площадки B.



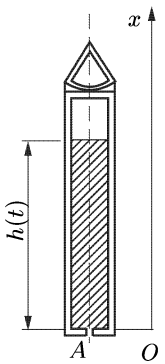
К задаче 10.18

10.19. Используя условия предыдущей задачи, учесть силу трения между слоем сыпучего материала и площадкой, считая ее пропорциональной нормальному давлению материала (коэффициент трения f постоянен). Найти скорость v бруска в тот момент, когда он достигнет края горизонтальной площадки.

10.20. Реактивная тележка движется по прямолинейным горизонтальным направляющим; масса тележки меняется по закону $M = M_0 - \mu t$, относительная скорость u истечения газов из двигателя постоянна, начальная скорость тележки равна v_0. Найти зависимость

скорости тележки от времени, если при движении на нее действует сила сопротивления $F = -\alpha v - \beta v^2$. Какова будет эта зависимость в случаях, когда одна из констант α или β равна нулю?

10.21. Камера сгорания ракеты, представляющая собой цилиндр радиуса R и высоты h_0 (см. рисунок), целиком заполнена однородным твердым топливом плотности ρ. Истечение газов, образующихся при сгорании топлива, происходит через отверстие A радиуса r в торце цилиндра. По мере выгорания заряд продвигается специальным устройством к выходному отверстию так, что горение происходит непосредственно у отверстия A. Масса корпуса ракеты равна M; плотность газов, проходящих через отверстие A, можно считать постоянной величиной, равной ρ_0. Пренебрегая сопротивлением воздуха, составить уравнение вертикального движения ракеты, если высота заряда при его сгорании меняется по закону $h = h(t)$.



К задаче 10.21

10.22. Показать, что импульс ракеты, которая движется прямолинейно при отсутствии внешних сил, достигает максимального значения в тот момент, когда скорость ракеты становится равной скорости истечения газов u ($u = \text{const}$).

10.23. Ракета движется прямолинейно под действием реактивной силы. В начальный момент ракета покоилась и ее масса равнялась m_0; относительная скорость u истечения газов постоянна; действием внешних сил пренебречь. При каком значении массы следует выключить двигатель, чтобы импульс P, приобретенный ракетой, был максимальным? Каков этот максимальный импульс?

10.24. Решить предыдущую задачу, считая начальную скорость ракеты v_0 отличной от нуля и меньшей u.

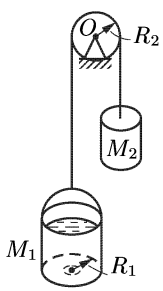
10.25. Найти значение массы, при котором кинетическая энергия ракеты из задачи 10.23 будет иметь максимальное значение.

10.26. Двухступенчатая ракета несет полезный груз m_0. Рабочее тело массы M находится в цилиндрических баках, причем на 1 кг рабочего тела приходится k кг стенок баков. Как следует распределить массу рабочего тела между ступенями, чтобы ракета имела наибольшую скорость в конце активного участка? Скорость истечения газов считать постоянной и равной u, действием внешних сил пренебречь. Принять, что отработавшая ступень отделяется с нулевой относительной скоростью.

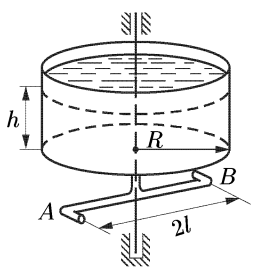
10.27. Цилиндрическое ведро массы M_1 и радиуса R_1 (см. рисунок) поднимается грузом массы M_2 с помощью невесомого нерастяжимого каната, перекинутого через блок радиуса R_2; момент инер-

ции блока равен J. Ведро заполнено водой, которая вытекает через отверстие площадью сечения S в центре дна. Уровень воды в ведре все время остается горизонтальным, а скорость истечения равна $u(t)$. Составить уравнение движения ведра.

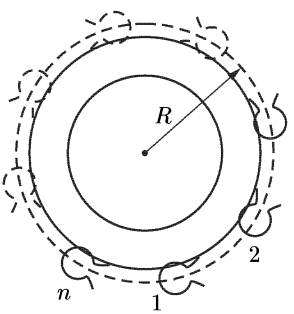
10.28. Ось цилиндрического бака (см. рисунок), из которого жидкость поступает в сегнерово колесо, совпадает с вертикальной осью вращения колеса. Уровень жидкости в баке меняется по закону $h = h(t)$. Выходное сечение каждого из сопел A и B, расположенных симметрично относительно оси вращения, равно S, расстояние между соплами составляет $2l$; момент инерции пустого бака равен J, радиус бака равен R. Найти угловую скорость системы к моменту времени t, считая, что находящаяся в баке жидкость вращается как твердое целое вместе с баком и колесом (это можно обеспечить, например, за счет перегородок).



К задаче 10.27



К задаче 10.28

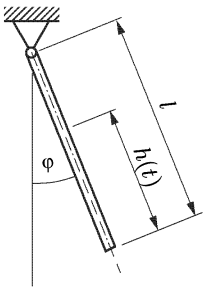


К задаче 10.29

10.29. Для создания искусственной гравитации космический корабль, движущийся по инерции, раскручивается вокруг оси симметрии реактивными силами. Сопла всех n реактивных двигателей (см. рисунок) установлены симметрично в плоскости, перпендикулярной оси корабля, на расстоянии R от оси, причем можно считать, что рабочее тело сосредоточено в точках $1, 2, \ldots, n$. Истечение газов происходит с постоянной относительной скоростью u, скорость центра корабля направлена по его оси. Определить массу Δm рабочего тела, необходимую для раскручивания корабля от угловой скорости ω_0 до угловой скорости ω_1, если момент инерции корпуса корабля и оставшегося рабочего тела равен J.

10.30. Физический маятник (см. рисунок) представляет собой тонкую трубку массы M и длины l, заполненную вытекающей из нее жидкостью. Масса жидкости в трубке меняется по закону $m(t) = \rho h(t)$, где $h(t)$ — высота столба жидкости. Составить уравнение

движения трубки, считая, что частицы вытекшей жидкости движутся без сопротивления в однородном поле тяжести.

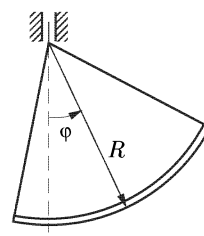


К задаче 10.30

10.31. Используя условия предыдущей задачи, но считая, что $M = 0$, посредством предельного перехода $h \to 0$, $\rho h(t) \to m(t)$ получить уравнение движения соответствующего математического маятника переменной массы.

10.32. Физический маятник (см. рисунок) представляет собой цилиндрическую поверхность массы m_0 и радиуса R, которая подвешена на нерастяжимых нитях длины R и на которую из точки подвеса сыплется песок, так что масса маятника меняется по закону $m(t) = m_0 + \mu(t)$. Написать уравнение движения маятника, считая, что песок прилипает к поверхности и что толщиной слоя песка можно пренебречь.

10.33. Показать, что при малых значениях угла φ момент импульса маятника из задачи 10.32 $K_0(t) = m(t)R^2\dot{\varphi}$ описывается тем же уравнением $\ddot{K}_0 + (g/R)K_0 = 0$, что и маятник постоянной массы в однородном поле тяжести.



К задаче 10.32

10.34. Найти малые колебания маятника из задачи 10.32, считая, что его масса меняется по линейному закону $m = m_0 + \mu t$.

10.35. Исследовать движение маятника из задачи 10.32 в линейном приближении, т. е. считая углы отклонения φ малыми. Показать, что в этом случае при любом законе изменения массы $m = m(t)$ ($m(t)$ — монотонно возрастающая функция) $|\varphi(t)|$ и $|\dot{\varphi}(t)|$ будут малыми, если они были малы в начальный момент.

§ 11. Динамика твердого тела

11.1. Показать, что моменты инерции твердого тела относительно любых двух параллельных осей u и u_1 связаны соотношением $J_{u_1} = J_u + m(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_C)$, где векторы $\mathbf{r}_C = \overrightarrow{OC}$ и $\mathbf{r} = \overrightarrow{OO}_1$ лежат в плоскости Π, проходящей через центр масс тела C, перпендикулярно этим осям, а O и O_1 — точки пересечения плоскости Π с осями u и u_1 соответственно.

11.2. Показать, что в любом твердом теле можно найти такие пары параллельных осей u и v, ни одна из которых не проходит через центр масс, что моменты инерции относительно этих осей будут

связаны равенством Штейнера $J_v = J_u + md^2$, где m — масса тела, а d — расстояние между осями.

11.3. Система $Cx_1x_2x_3$ представляет собой систему главных центральных осей инерции твердого тела массы m. Моменты инерции относительно этих осей равны J_1, J_2 и J_3 соответственно. Найти выражения для осевых и центробежных моментов инерции тела в системе $O\xi_1\xi_2\xi_3$, начало которой находится в точке O с координатами a_1, a_2, a_3, а оси параллельны главным центральным осям.

11.4. Главные центральные моменты инерции тела в некоторой системе единиц равны 3, 4, 5, а масса тела равна 2. В системе $C\xi_1\xi_2\xi_3$, совпадающей с главными центральными осями инерции тела, точка A имеет координаты (1, 2, 0). Найти тензор инерции тела для точки A в системе координат, оси которой параллельны осям системы $C\xi_1\xi_2\xi_3$.

11.5. Доказать, что для любой плоской фигуры в системе $Oxyz$, оси которой Ox и Oy лежат в плоскости фигуры, тензор инерции имеет вид

$$\begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & 0 \\ -J_{yx} & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{xx}+J_{yy} \end{pmatrix}.$$

Как изменится соотношение между диагональными элементами этого тензора, если учитывать толщину фигуры?

11.6. Заданы три произвольных положительных числа a, b и c. Всегда ли можно «подобрать» такое твердое тело, чтобы эти числа в некоторой системе единиц совпадали со значениями его главных моментов инерции?

11.7. Какому условию должны удовлетворять главные центральные моменты инерции твердого тела, чтобы существовали точки, для которых эллипсоид инерции представляет собой сферу? Где находятся эти точки, если главные центральные моменты инерции тела равны A, B, C?

11.8. Найти компоненты тензора инерции в главных центральных осях для следующих однородных тел массы M:

1) куба с ребром $2a$;

2) прямоугольного параллелепипеда с ребрами $2a$, $2b$, $2c$;

3) тонкой прямоугольной пластинки со сторонами $2a$ и $2b$;

4) тонкого диска радиуса R;

5) прямого кругового цилиндра с радиусом основания R и высотой H;

6) полого цилиндра с внешним радиусом R_2 и внутренним радиусом R_1;

7) шара радиуса R;

8) кругового конуса с высотой h и радиусом основания R.

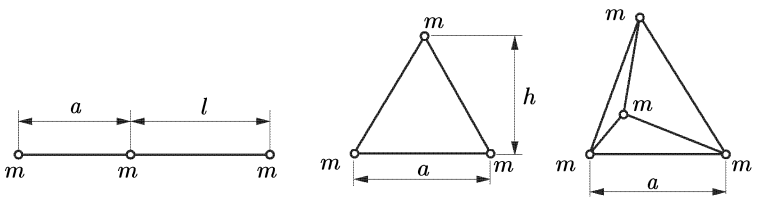
11.9. Определить главные центральные моменты инерции для следующих моделей молекул (систем частиц, расположенных на неизменных расстояниях друг от друга):

а) молекулы из трех атомов, расположенных на одной прямой;

б) молекулы из трех атомов, расположеных в вершинах равнобедренного треугольника;

в) молекулы из четырех атомов, расположенных в вершинах тетраэдра.

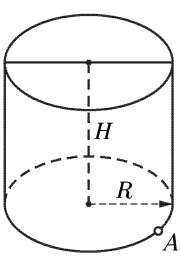
Размеры указаны на рисунках. Молекулы состоят из одинаковых атомов массы m.



К задаче 11.9

11.10. Какие параметры твердого тела следует включать в справочные таблицы, чтобы полностью описать геометрию масс твердого тела?

11.11. Найти главные оси инерции в точке A однородного кругового цилиндра массы m (см. рисунок). Высота цилиндра равна H, радиус его основания равен R. Для случая $H = \sqrt{3}R$ выписать тензор инерции цилиндра в главных осях для точки A.



К задаче 11.11

11.12. Тензор инерции твердого тела в точке O в системе координат $Ox_1x_2x_3$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}, \quad D \neq 0.$$

Найти главные оси инерции тела и моменты инерции A_1, B_1, C_1 относительно этих осей.

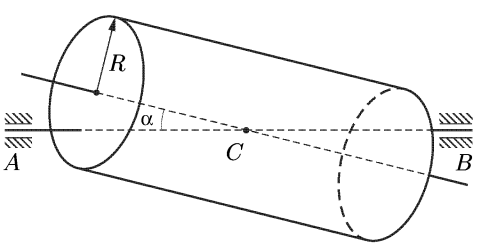
11.13. Тензор инерции твердого тела для точки O в системе координат $Ox_1x_2x_3$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}.$$

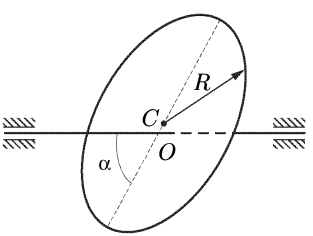
Показать, что величины: 1) $A+B+C$; 2) $BC-D^2+AC-E^2+AB-$ $-F^2$; 3) $ABC-AD^2-BE^2-CF^2-2DEF$ будут одинаковыми в любых ортогональных осях, т. е. являются инвариантами тензора инерции относительно выбора ортогональных осей.

11.14. Кинетическая энергия твердого тела с неподвижной точкой выражается равенством $T=\frac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{3} J_{ik}\omega_i\omega_k$, где J_{ik} $(i,\,k=\overline{1,\,3})$ — компоненты тензора инерции в системе координат x_1, x_2, x_3, связанной с телом, а ω_i — проекции угловой скорости на эти оси. Аналогично, для других осей x_1', x_2', x_3' по той же формуле будем иметь $T=\frac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{3} J_{ik}'\omega_i'\omega_k'$. Из условия независимости энергии T от выбора системы координат получить закон преобразования компонент тензора инерции при переходе от системы x_1, x_2, x_3 к x_1', x_2', x_3', если задана матрица направляющих косинусов $(\alpha_{ik})_{i,k=1}^{3}$, осей системы x_1', x_2', x_3' относительно x_1, x_2, x_3.

11.15. Прямой однородный круговой цилиндр (см. рисунок), имеющий массу m, высоту h и радиус основания R, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси AB, проходящей через его центр масс C и образующей угол α с осью симметрии. Найти величину и направление момента импульса цилиндра относительно точки C.



К задаче 11.15



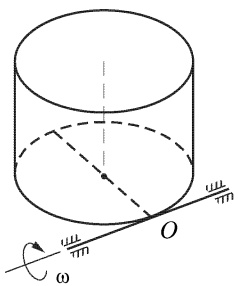
К задаче 11.16

11.16. Однородный диск радиуса R и массы m (см. рисунок), насаженный на ось с эксцентриситетом $OC=e$, вращается с угловой скоростью ω. Ось образует с плоскостью диска угол α. Найти величину и направление момента импульса диска относительно точки O.

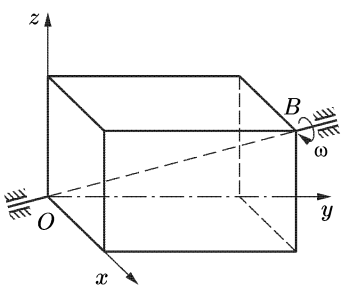
11.17. Прямой однородный круговой цилиндр массы M, радиуса R и высоты h (см. рисунок) вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, направленной по касательной к основанию цилиндра в точке O. Найти момент импульса цилиндра относительно точки O.

11.18. Однородный параллелепипед массы m (см. рисунок) с ребрами a, b и c вращается с угловой скоростью ω относительно своей диагонали OB. Найти момент импульса параллелепипеда относительно произвольной точки A пространства.

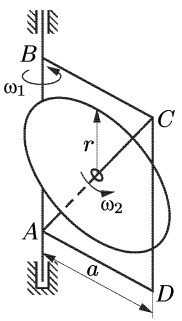
11.19. Тонкий однородный диск массы m катится без скольжения по неподвижной горизонтальной плоскости, образуя с нею угол α. Центр диска C описывает горизонтальную окружность с постоянной линейной скоростью v. Точка O пересечения оси симметрии диска с горизонтальной плоскостью неподвижна. Найти кинетическую энергию диска.



К задаче 11.17



К задаче 11.18



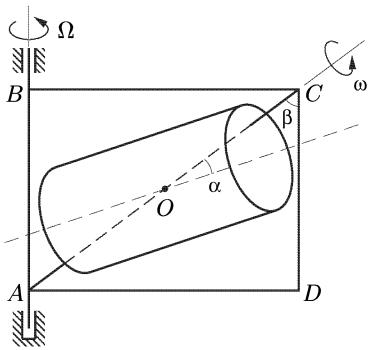
К задаче 11.20

11.20. Квадратная рама $ABCD$ со стороной a (см. рисунок) вращается вокруг стороны AB с угловой скоростью ω_1. Вокруг диагонали AC рамы вращается с угловой скоростью ω_2 однородный диск радиуса r и массы m, плоскость которого перпендикулярна диагонали AC, а центр совпадает с серединой этой диагонали. Найти кинетическую энергию диска при $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, а также динамические силы реакции в точках A и B, пренебрегая массой рамы и расстояниями точек A и B от опор.

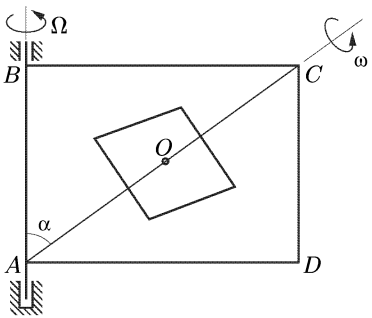
11.21. Однородный круговой цилиндр массы m, радиуса R и высоты h (см. рисунок) вращается с угловой скоростью ω вокруг оси AC, проходящей через центр масс O цилиндра и образующей угол α с его осью. Ось AC совпадает с диагональю прямоугольной рамы $ABCD$, которая вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью Ω. Найти кинетическую энергию цилиндра, если $AB = a$, $\angle ACD = \beta$, $AO = OC$.

11.22. Куб массы m, ребро которого равно a, вращается вокруг одной из своих диагоналей с угловой скоростью ω. Вершины куба, соединенные этой диагональю, движутся в пространстве с одинаковой скоростью u. Найти кинетическую энергию куба.

11.23. Однородная квадратная пластина массы m (см. рисунок) вращается с угловой скоростью ω вокруг диагонали AC прямоугольной рамы $ABCD$. Диагональ рамы AC проходит через центр



К задаче 11.21



К задаче 11.23

масс пластины O и лежит в ее плоскости. Рама вращается вокруг неподвижной оси AB с угловой скоростью Ω, $AB = b$. Найти кинетическую энергию пластины, если ее сторона равна a, $AO = OC$, $\angle BAC = \alpha$.

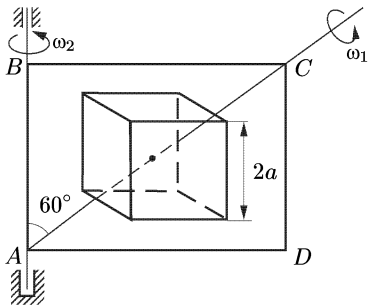
11.24. Решить предыдущую задачу для однородной треугольной пластины со сторонами a.

11.25. Подсчитать кинетическую энергию однородного тонкого диска массы m и радиуса r (см. рис. к задаче 11.16), насаженного на горизонтальный вал с эксцентриситетом $OC = e$ под углом α к оси вала, если угловая скорость вращения диска вокруг оси вала равна ω.

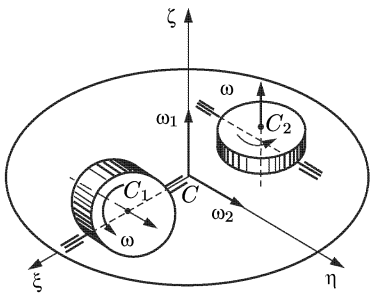
11.26. Однородный куб массы m (см. рисунок) укреплен в прямоугольной раме $ABCD$. Ребро куба равно $2a$, сторона рамы $AD = b$, угол $BAC = 60°$, центр куба совпадает с серединой диагонали AC. Куб вращается вокруг диагонали рамы AC с угловой скоростью ω_1, а рама — вокруг неподвижной оси AB с угловой скоростью ω_2. Найти кинетическую энергию куба.

11.27. Двухосная гироплатформа (см. рисунок) несет на себе два одинаковых гироскопа, вращающихся с постоянной угловой скоростью ω. Специальное устройство удерживает ось первого гироскопа в плоскости платформы, а второго перпендикулярно к ней. Центры инерции гироскопов C_1 и C_2 расположены в плоскости платформы на расстоянии a от ее центра C. Считая гироскопы тонкими однородными дисками массы m и радиуса r, найти их кинетическую энергию в случаях, когда 1) платформа вращается с угловой скоростью ω_1 вокруг оси $C\zeta$, перпендикулярной плоскости платформы; 2) платформа вращается с угловой скоростью ω_2 вокруг оси $C\eta$, параллельной оси первого гироскопа.

11.28. Центрифуга для тренировки космонавтов (см. рисунок) состоит из кабины, помещенной в раму, противовеса и горизонтальной штанги, соединяющей раму и противовес. Штанга вращается

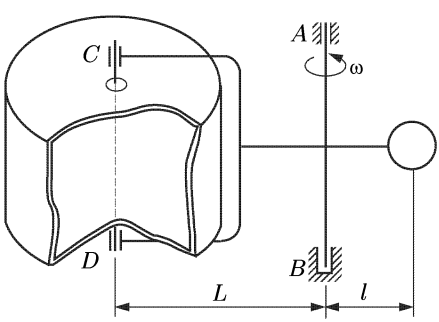


К задаче 11.26

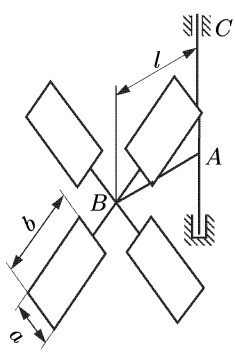


К задаче 11.27

с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси AB. Цилиндрическая кабина (высота цилиндра H, радиус основания R) совершает колебания вокруг вертикальной оси CD по закону $\varphi = \varphi_0 \sin \Omega t$. Расстояние между осями AB и CD равно L, расстояние l между осью AB и центром масс противовеса выбирается из условия отсутствия динамических реакций. Массы кабины и противовеса равны M_1 и M_2 соответственно. Определить кинетическую энергию системы, считая кабину однородным тонкостенным цилиндром с одинаковой поверхностной плотностью оснований и боковой поверхности. Весом штанги и рамы пренебречь.



К задаче 11.28



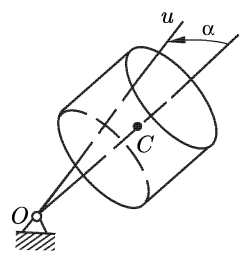
К задаче 11.29

11.29. Двигатель ветряной мельницы (см. рисунок) снабжен приспособлением, автоматически устанавливающим его горизонтальную ось AB по направлению ветра. Определить кинетическую энергию

лопастей двигателя, если известна зависимость от времени угла поворота лопастей вокруг оси AB: $\alpha = \alpha(t)$ и угла поворота оси AB вокруг вертикали AC: $\beta = \beta(t)$. Лопасти считать однородными прямоугольными пластинами массы m; расстояние внутреннего края лопасти от точки B равно h; угол атаки лопастей принять равным нулю.

11.30. Однородный цилиндр (см. рисунок), имеющий массу m, высоту h и радиус основания R, вращается вокруг неподвижной точки O, лежащей на оси цилиндра на расстоянии R от его центра масс C. Скорость точки C равна v, мгновенная ось вращения цилиндра Ou образует угол α с осью OC. Найти момент импульса цилиндра относительно неподвижной точки и его кинетическую энергию.

11.31. При некотором движении твердого тела с неподвижной точкой O в каждый момент времени главный момент внешних сил M_O относительно неподвижной точки, ортогонален вектору мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Показать, что при таком движении кинетическая энергия твердого тела сохраняется, а вектор момента импульса $\mathbf{K}_O$ во все время движения ортогонален вектору мгновенного углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$.



К задаче 11.30

11.32. Показать, что при движении твердого тела с неподвижной точкой O кинетическая энергия сохраняется в том и только в том случае, когда вектор момента импульса $\mathbf{K}_O$, и вектор углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$ ортогональны во все время движения.

11.33. Точка M твердого тела, совершающего движение в пространстве, внезапно закрепляется. В момент закрепления угловая скорость тела равна $\boldsymbol{\omega}$, а скорость точки M равна $\mathbf{v}_M$. Считая известными геометрию масс тела и положение его центра масс C, найти вектор угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ тела сразу после закрепления.

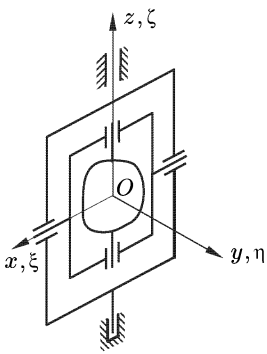
11.34. Центр масс твердого тела, совершающего движение в пространстве, внезапно закрепляется. Показать, что вектор угловой скорости тела сразу после закрепления совпадает с вектором угловой скорости в момент закрепления.

11.35. Твердое тело с неподвижной точкой движется так, что вектор момента импульса относительно неподвижной точки меняется только по модулю, сохраняя неизменным свое направление в пространстве. Показать, что для такого движения твердого тела имеет место геометрическая интерпретация Пуансо: существует такая неподвижная плоскость, по которой эллипсоид инерции тела катится без проскальзывания.

11.36. Твердое тело с неподвижной точкой в некотором силовом поле движется так, что для этого движения имеет место геометри-

ческая интерпретация Пуансо: эллипсоид инерции тела катится по неподвижной плоскости без проскальзывания. Как связаны между собой момент импульса $\mathbf{K}_O(t)$ тела и момент внешних сил $\mathbf{M}_O(t)$ относительно неподвижной точки O при таком движении?

11.37. Убедиться в том, что углы поворота рамок и тела в техническом устройстве, изображенном на рисунке (карданов подвес), соответствуют эйлеровым углам.



К задаче 11.37

11.38. Твердое тело массовой плотности $\rho(x, y, z)$ вращается вокруг неподвижной точки в ньютоновском поле сил $d\mathbf{F} = -\dfrac{G\,dm}{r^2}\dfrac{\mathbf{r}}{r}$ (G — гравитационная постоянная). Радиус-вектор $\mathbf{R}$, проведенный из центра тяготения в неподвижную точку тела, имеет компоненты $R_x = -R\gamma_1$, $R_y = -R\gamma_2$, $R_z = -R\gamma_3$ ($Oxyz$ — главные оси тензора инерции для неподвижной точки O; γ_1, γ_2, γ_3 — направляющие косинусы). Составить уравнения движения тела.

11.39. Платформа движется поступательно с постоянным ускорением $\mathbf{w}$. Составить уравнения относительного движения асимметричного волчка массы m, точка опоры O которого неподвижна относительно платформы.

11.40. Непосредственным вычислением убедиться в том, что при движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае С. В. Ковалевской ($A = B = 2C$, $\eta_C = \zeta_C = 0$) имеет место 1-й интеграл уравнений движения

$$\left(p^2 - q^2 - \frac{mg\xi_C}{C}\gamma\right)^2 + \left(2pq - \frac{mg\xi_C}{C}\gamma'\right)^2,$$

где γ, γ', γ'' — направляющие косинусы вертикали в системе главных осей твердого тела.

11.41. Составить динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой O в переменных K_1, K_2, K_3, где K_1, K_2, K_3 — компоненты вектора момента импульса на некоторую систему ортогональных осей $O\xi_1$, $O\xi_2$, $O\xi_3$, связанных с телом. Рассмотреть также случай, когда оси $O\xi_i$ ($i = \overline{1, 3}$) являются главными.

11.42. Спутник, главные центральные моменты инерции которого $A = B > C$, совершает регулярную прецессию в поступательно движущейся системе отсчета с началом в центре масс O спутника. Реактивный двигатель, который создает постоянный момент M относительно главной оси инерции $O\xi$, лежащей в экваториальной

плоскости, включается в некоторый момент времени и через время T выключается. Пренебрегая изменением массы спутника, найти то время работы двигателя T, по истечении которого экваториальная компонента угловой скорости $\omega_э = (p^2 + q^2)^{1/2}$, будет иметь минимальное значение, если проекции вектора угловой скорости на оси $O\xi\eta\zeta$ в момент включения двигателя равны p_0, q_0, r_0 соответственно. Найти также значение $\omega_э$ в момент $t = T$.

11.43. Показать, что в условиях предыдущей задачи последовательным включением и выключением двигателя можно обратить в нуль экваториальную компоненту угловой скорости.

11.44. Симметричный гироскоп ($A = B \neq C$) массы m вращается вокруг неподвижной точки O. Центр масс гироскопа лежит на оси симметрии на расстоянии l от неподвижной точки. В начальный момент гироскопу была сообщена абсолютная угловая скорость ω вокруг оси, образующей угол α с осью симметрии гироскопа. Определить момент импульса гироскопа относительно точки O в зависимости от угла β между осью симметрии гироскопа и вертикалью, если в начальный момент $\beta = \beta_0$.

11.45. Твердое тело с неподвижной точкой движется под действием момента $\mathbf{M}_O = \mathbf{a} \times \boldsymbol{\omega}$, где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор в системе отсчета, связанной с телом. Найти два первых интеграла динамических уравнений Эйлера.

11.46. К твердому телу с неподвижной точкой приложен момент, проекции которого на главные оси инерции тела равны соответственно $M_\xi = Apf(t)$, $M_\eta = Bqf(t)$, $M_\zeta = Crf(t)$, где A, B и C — главные моменты инерции тела, а p, q и r — компоненты вектора угловой скорости на главные оси. Проинтегрировать (в квадратурах) динамические уравнения Эйлера.

11.47. При движении твердого тела с неподвижной точкой O его вектор момента импульса меняется в соответствии с равенством $\mathbf{K}_O(t) = f(t)\mathbf{e}$, где $\mathbf{e}$ — единичный вектор, неподвижный в пространстве. Найти закон изменения во времени проекций p, q, r угловой скорости тела на его главные оси инерции.

11.48. Твердое тело с неподвижной точкой начинает движение из состояния покоя под действием постоянного по модулю и направлению момента сил $\mathbf{M}_O$. Найти закон изменения во времени угловой скорости тела, если его главные моменты инерции равны A, B и C.

11.49. Проводящее неоднородное сферическое твердое тело с моментами инерции $A = B \neq C$ раскручивается симметричным вращающимся электромагнитным полем вокруг центра инерции, совпадающего с центром сферы. На начальной стадии движения, когда угловая скорость тела мала, можно считать, что на него действует

постоянный по направлению момент сил $\mathbf{M}_O(t)$ (по модулю и направлению такой же, как в случае неподвижного тела). Найти решение динамических уравнений Эйлера на начальном этапе разгона тела.

11.50. К симметричному ($A = B \neq C$) твердому телу с неподвижной точкой O прикладывается постоянный по модулю и направлению момент внешних сил $\mathbf{M}_O$. Найти зависимость угловой скорости тела от времени, если в начальный момент она была равна нулю.

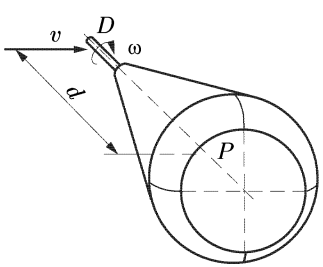
11.51. Симметричный гироскоп вращается в воздушной среде. Учет сил сопротивления в соответствии с моделью Клейна–Зоммерфельда приводит к уравнениям $A\dot{p} = -(C - A)rq - A\lambda^2 p$, $A\dot{q} = (C - A)rp - A\lambda^2 q$, $C\dot{r} = -C\mu^2 r$. Найти зависимость p, q и r от времени.

11.52. Используя условия предыдущей задачи, найти закон изменения во времени угла γ между осью симметрии гироскопа и вектором его мгновенной угловой скорости.

11.53. Симметричное тело ($A = B \neq C$) совершает движение с неподвижной точкой O. Найти зависимость угловой скорости тела от времени, если на него действует момент внешних сил $\mathbf{M}_O(t)$, все время направленный по оси динамической симметрии.

11.54. Осесимметричный космический аппарат ($A = B \neq C$) вращается относительно продольной оси с угловой скоростью ω (см. рисунок). Метеорит, летящий со скоростью v, попадает под прямым углом в точку D оси симметрии аппарата и застревает в ней. Расстояние от точки D до центра инерции P равно d. Описать дальнейшее движение системы, считая, что масса метеорита m пренебрежимо мала по сравнению с массой аппарата.

11.55. Однородный тонкий стержень длины l и массы m, центр масс C которого закреплен, закручивается с угловой скоростью ω_0 вокруг оси, образующей угол α со стержнем. Найти движение стержня.



К задаче 11.54

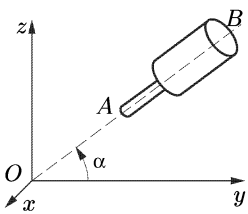
11.56. Тонкая пластина движется в пространстве. В некоторый момент времени вектор момента импульса $\mathbf{K}$ пластины относительно центра масс образует с плоскостью пластины угол α. Найти угловую скорость ω и угол β, который вектор $\boldsymbol{\omega}$ образует с плоскостью пластины, если главные центральные моменты инерции относительно осей, лежащих в плоскости пластины, равны между собой, $J_1 = J_2 = J$.

11.57. Симметричное твердое тело ($A = B \neq C$) с неподвижной точкой движется по инерции. Найти угловую скорость собственно-

го вращения $\dot{\varphi}$ тела, если в начальный момент ему была сообщена угловая скорость, проекция которой на ось симметрии равна r_0.

11.58. Булава, главные центральные моменты инерции которой равны $A = B \neq C$, подброшена над землей. Найти параметры регулярной прецессии в поступательно движущейся системе отсчета с началом в центре масс, если в начальный момент булаве была сообщена угловая скорость, проекции которой на главные центральные оси равны p_0, q_0, r_0.

11.59. Симметричный гироскоп ($A = B \neq C$) вращается по инерции вокруг своего центра масс. Найти параметры регулярной прецессии, если в начальный момент гироскопу была сообщена угловая скорость ω_0, проекция которой на ось симметрии равна r_0.



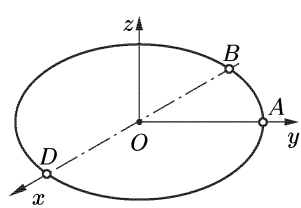
К задаче 11.60

11.60. В момент метания гранаты ее ось материальной симметрии AB (см. рисунок) составляет угол α с горизонтом. Скорость точки A равна нулю, а скорость v_0 точки B лежит в вертикальной плоскости yOz, совпадающей с вертикальной плоскостью материальной симметрии гранаты. Длина гранаты $AB = h$, расстояние между точкой A и центром масс гранаты равно l. Найти движение гранаты, пренебрегая сопротивлением воздуха.

11.61. Однородному круговому цилиндру (высота h, радиус основания r), центр масс которого закреплен, сообщается вращение с угловой скоростью ω_0 вокруг оси, образующей угол α с плоскостью основания цилиндра. Определить движение цилиндра.

11.62. Однородный параллелепипед высоты h, основанием которого является квадрат со стороной a, может двигаться так, что его центр масс остается неподвижным. В начальный момент параллелепипеду сообщается угловая скорость ω_0, образующая угол α с его основанием. Найти движение параллелепипеда; в частности, рассмотреть случай $\alpha = 0$.

11.63. В момент метания диска радиуса r плоскость диска горизонтальна и три его точки A, B и D (см. рисунок) имеют скорости $v_A = 0$, $v_B = v_0$, $v_D = \sqrt{2}v_0$, причем вектор $\mathbf{v}_B$, лежит в плоскости диска. Найти движение диска, пренебрегая сопротивлением воздуха.



К задаче 11.63

11.64. Показать, что параметры свободной регулярной прецессии симметричного твердого тела ($A = B \neq C$) с неподвижной точкой связаны соотношением $C\dot{\varphi} = (A - C)\dot{\psi}\cos\theta$, где $\dot{\varphi}$ — угловая скорость

собственного вращения, $\dot{\psi}$ — угловая скорость прецессии, а θ — угол нутации.

11.65. Пренебрегая взаимодействием Земли с Солнцем и Луной и считая Землю твердым сплюснутым сфероидом с эллиптичностью (мерой сплюснутости) $\alpha = (C - A)/A \approx 1/300$, оценить параметры ее прецессии.

11.66. Показать, что осью регулярной прецессии тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа может быть только вертикаль.

11.67. При движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой O в случае Лагранжа ($A = B \neq C$, центр масс P лежит на оси динамической симметрии, $OP = l$) в начальный момент проекция угловой скорости на ось динамической симметрии и проекция момента импульса на вертикаль равны нулю. Показать, что угол нутации определяется из уравнения $\ddot{\theta} - (mgl/A)\sin\theta = 0$.

11.68. При движении твердого тела массы m с неподвижной точкой O в случае Лагранжа ($A = B \neq C$, центр масс P лежит на оси динамической симметрии, $OP = l$) начальные данные $\psi(0) = \psi_0$, $\dot{\psi}(0) = \dot{\psi}_0$, $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$, $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = 0$ связаны соотношением $C\dot{\psi}_0\dot{\varphi}_0 + (C - A)\dot{\psi}_0^2\cos\theta = mgl$. Показать, что в этом случае тело будет совершать регулярную прецессию.

11.69. Центр однородного диска радиуса R и массы m жестко соединен с тонким невесомым стержнем длины $l = R/2$. Другой конец O стержня, образующего прямой угол с плоскостью диска, закреплен сферическим шарниром. Определить движение диска в однородном поле тяжести при следующих начальных условиях: $\psi_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\theta_0 = \pi/4$, $\dot{\psi}_0 = (1/3)\sqrt{g/R}$, $\dot{\varphi}_0 = 3\sqrt{g/R}$, $\dot{\theta}_0 = 0$.

11.70. Велосипедное колесо радиуса R и массы m, равномерно распределенной по его ободу, жестко насажено в центре на тонкий невесомый стержень длины $l = R$, другой конец которого сферически закреплен. Стержень образует прямой угол с плоскостью колеса. Найти движение колеса при следующих начальных условиях: $\psi_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\theta_0 = \pi/3$, $\dot{\psi}_0 = 2\sqrt{g/R}$, $\dot{\varphi}_0 = \sqrt{g/R}$, $\dot{\theta}_0 = 0$.

11.71. Один конец тонкого невесомого стержня длины l закреплен сферическим шарниром, на второй конец насажена однородная квадратная пластина со стороной $a = 2l$ и массой m. Стержень перпендикулярен плоскости пластины и проходит через ее центр. Определить движение пластины в однородном поле тяжести, если $\psi_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\theta_0 = \pi/3$, $\dot{\psi}_0 = \sqrt{2g/(3a)}$, $\dot{\varphi}_0 = 5\sqrt{2g/(3a)}$, $\dot{\theta}_0 = 0$.

11.72. Найти (в квадратурах) закон движения однородного тонкого стержня длины l и веса P, один конец которого закреплен посредством сферического шарнира.

11.73. Чему равна работа момента сил, поддерживающего регулярную прецессию симметричного твердого тела $(A = B \neq C)$?

11.74. Волчок, который представляет собой диск радиуса r, насаженный в центре под прямым углом на невесомый стержень длины l, совершает регулярную прецессию вокруг вертикали с углом нутации θ и угловой скоростью прецессии ω_2. Найти угловую скорость собственного вращения волчка ω_1.

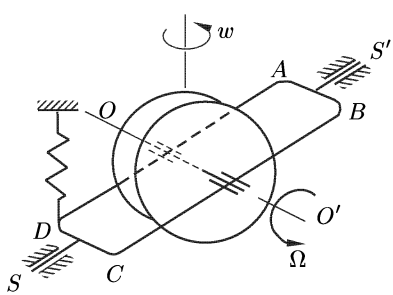
11.75. Симметричное твердое тело $(A = B \neq C)$ с неподвижной точкой O совершает регулярную прецессию. Показать, что вектор момента импульса $\mathbf{K}_O$ определяется выражением $\mathbf{K}_O = [C + (C - A)\cos\theta\,\omega_2/\omega_1]\boldsymbol{\omega}_1 + A\boldsymbol{\omega}_2$, где $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ — векторы угловых скоростей собственного вращения и прецессии соответственно, а θ — угол между ними. Используя это соотношение, получить выражение для $\mathbf{K}_O$ в случае движения симметричного твердого тела по инерции.

11.76. Получить выражение для момента $\mathbf{M}$ внешних сил, поддерживающих регулярную прецессию симметричного твердого тела $(A = B \neq C)$ с неподвижной точкой, используя выражение для вектора момента импульса, найденное в предыдущей задаче.

11.77. Симметричный гироскоп $(A = B = 2C)$ совершает регулярную прецессию, так что углы раствора неподвижного и подвижного аксоидов равны 2α. Найти зависимость между мгновенной угловой скоростью ω гироскопа и приложенным к нему моментом сил.

11.78. Однородный круговой конус, вершина O которого закреплена, может катиться без проскальзывания по горизонтальной плоскости. В начальный момент центру основания конуса M сообщается горизонтальная скорость v_0. Найти движение конуса.

11.79. В качестве датчика угловой скорости рыскания самолета используется гироскоп, ротор которого (см. рисунок) вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси OO', закрепленной в прямоугольной рамке $ABCD$. Рамка, связанная с корпусом самолета пружиной жесткости k, в свою очередь может поворачиваться вокруг оси SS', неподвижной относительно корпуса самолета и совпадающей с его продольной осью. В режиме прямолинейного полета рамка горизонтальна и пружина недеформирована. Самолет поворачивается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω $(\omega \ll \Omega)$ так, что угол между плоскостью рамки и горизонтальной плоскостью равен α. Моменты инерции гироскопа относительно

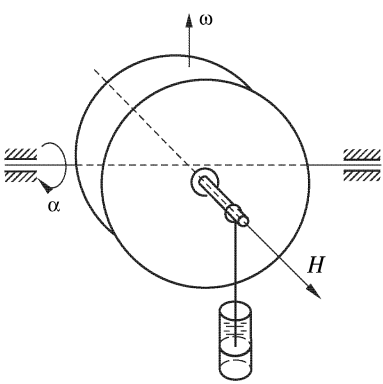


К задаче 11.79

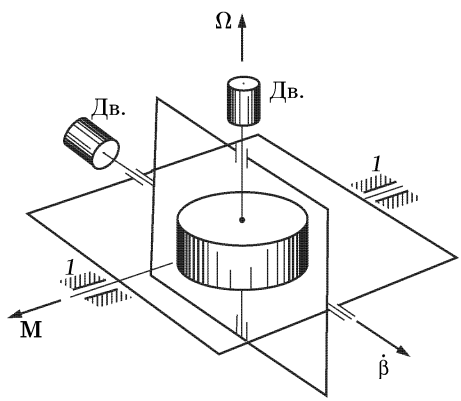
осей OO' и SS' равны C и A соответственно, момент инерции рамки пренебрежимо мал, сторона AB равна $2l$. Найти угловую скорость ω, считая угол α малым.

11.80. Твердое тело массы m, обладающее динамической симметрией ($A = B \neq C$), совершает регулярную прецессию в поле тяжести. Центр масс тела лежит на оси симметрии на расстоянии l от неподвижной точки. Найти все значения угловой скорости прецессии ω_2, при которых тело совершает прецессионное движение с заданным углом нутации θ $(\theta \neq 0, \pi/2)$ и с заданной угловой скоростью собственного вращения ω_1. В частности, найти приближенные значения ω_2 при условии, что $\omega_1^2 \gg mgl/C$.

11.81. Гироскоп (см. рисунок) с двумя степенями свободы ($A = B \neq C$, $C\Omega = H$) установлен на основании, вращающемся с угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной оси кожуха гироскопа. Масляный демпфер создает момент сопротивления $-k\dot{\alpha}$, пропорциональный угловой скорости кожуха. Показать, что на малых интервалах времени при малых скоростях ω и большом коэффициенте



К задаче 11.81

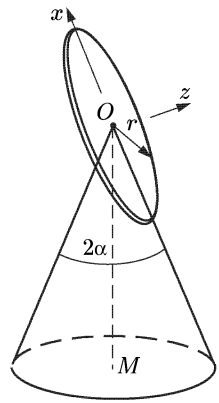


К задаче 11.82

демпфирования k угол поворота кожуха гироскопа пропорционален углу поворота основания. (Интегрирующий гироскоп.)

11.82. Для стабилизации по углу различных объектов применяют сервогироскопы, прикладывающие к объекту момент, который компенсирует внешнее возмущающее воздействие. Схема привода сервогироскопа представлена на рисунке. Найти такие угловые скорости Ω и $\dot{\beta}$ сервогироскопа ($A = B \neq C$), при которых возмущающий момент $M = M_0 \cos \omega t$, приложенный к внешней раме и направленный по оси *1–1*, компенсируется.

11.83. Центру основания однородного кругового конуса с массой m, высотой h и углом при вершине 2α, вершина O которого закреплена и который может катиться без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости, сообщается горизонтальная скорость v. Найти равнодействующую (значение, направление и точку приложения) сил реакции плоскости и реакции в неподвижной точке, возникающих во время движения конуса.

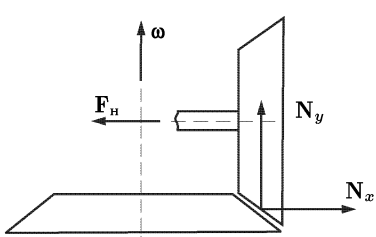


К задаче 11.84

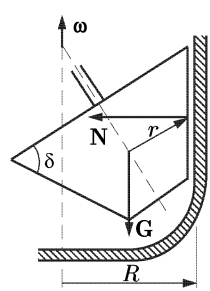
11.84. Тонкий однородный диск радиуса r и массы m, центр O которого неподвижен, обкатывает без проскальзывания неподвижный конус с углом 2α при вершине O; ось конуса OM вертикальна. Найти модуль, направление и точку приложения равнодействующей сил реакции конуса и реакции в неподвижной точке O во время движения диска, если в начальный момент ему сообщена угловая скорость ω_0.

11.85. Симметричное твердое тело ($A = B = 3C$) движется по инерции. В начальный момент времени проекции угловой скорости на связанные с телом оси равны p_0, $q_0 = 0$, $r_0 = 3p_0$. Найти закон движения тела в параметрах Родрига–Гамильтона.

11.86. В коническом зацеплении подвижная шестерня (см. рисунок), радиус r, масса m и моменты инерции $A = B \neq C$ которой заданы, обкатывает неподвижную шестерню радиуса R так, что угловая скорость оси подвижной шестерни равна ω. Найти динамические силы реакции N_x, N_y, N_z в точке контакта шестерен и силу натяжения $F_н$, оси подвижной шестерни.



К задаче 11.86

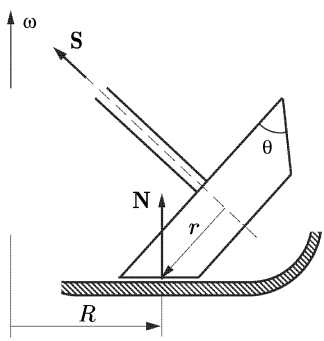


К задаче 11.87

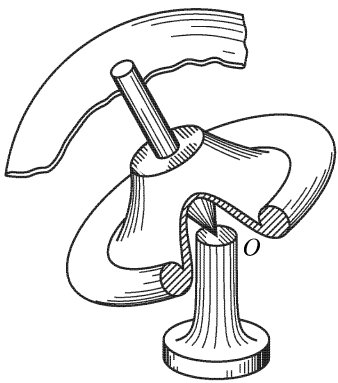
11.87. При большой угловой скорости ω ведущего вала бегун маятниковой мельницы (см. рисунок) прижимается изнутри к стенке

цилиндрической чаши радиуса R и катится по ней без проскальзывания. Сечение бегуна, содержащее его центр масс, имеет радиус r. Вес бегуна G, его моменты инерции $A = B$, C относительно осей, проходящих через неподвижную точку, и угол δ между основанием и образующей заданы. Найти силу реакции N чаши.

11.88. Бегун дробильной мельницы (см. рисунок), представляющий собой усеченный конус массы m с углом θ между основанием и образующей, равномерно катится без проскальзывания по дну чаши. Геометрические места точек контакта бегуна и чаши считать окружностями радиусов r и R соответственно, центр инерции бегуна находится в плоскости окружности радиуса r. Угловая скорость ω штанги бегуна и моменты инерции бегуна $A = B \neq C$ заданы. Найти нормальную реакцию и натяжение S штанги.



К задаче 11.88



К задаче 11.89

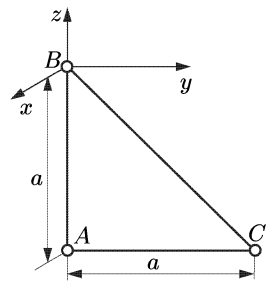
11.89. Периметрический гироскоп (см. рисунок) представляет собой симметричный ротор ($A = B \neq C$), снабженный стержневидной шейкой радиуса r вдоль оси симметрии. Гироскоп вращается вокруг центра масс так, что шейка катится без проскальзывания по ребру лекала (кривая на поверхности сферы радиуса R, центр которой совпадает с неподвижной точкой гироскопа). Найти давление, оказываемое шейкой на лекало, если трение отсутствует и 1) направляющая является дугой большого круга, 2) направляющая является окружностью радиуса ρ.

11.90. Для твердого тела массы m известны направления главных центральных осей системы x', y', z' и главные центральные моменты инерции A, B, C. Построить главные оси инерции тела для точки O с координатами $x'_0 = a$, $y'_0 = b$, $z'_0 = 0$.

11.91. Оси $O\xi\eta\zeta$ являются главными осями инерции для точки O твердого тела. Моменты инерции относительно этих осей равны J_ξ,

J_η, J_ζ. Найти центробежные моменты инерции для системы осей $Oxyz$, если оси Ox и Oy образуют угол α с осями ξ и η соответственно.

11.92. Материальные точки A, B и C массы m каждая (см. рисунок) находятся в вершинах невесомого равнобедренного треугольника с длиной катета, равной a. Найти тензор инерции системы для точки B в указанных на рисунке осях. Найти главные оси для точки B. Показать, что эллипсоид инерции для точки A является эллипсоидом вращения.



К задаче 11.92

11.93. Однородный шар рассекают плоскостью, проходящей через его центр C. Показать, что эллипсоид инерции полушара для точки C будет сферой радиуса $r = \sqrt{2}R$, где R — радиус эллипсоида инерции шара.

11.94. Однородный куб рассекается на две части плоскостью, проходящей через центр куба C. Показать, что эллипсоид инерции каждой из этих частей куба в точке C является сферой радиуса $r = \sqrt{2}R$, где R — радиус эллипсоида инерции куба.

11.95. Составить алгебраическое уравнение 3-й степени, корнями которого являются главные моменты инерции твердого тела в точке O, если известны величины $a_1 = A + B + C$, $a_2 = D^2 + E^2 + F^2 - AB - BC - AC$, $a_3 = ABC - CF^2 - BE^2 - AD^2 - 2DEF$, представляющие собой инварианты тензора момента инерции относительно выбора ортогональных осей в точке O.

11.96. Показать, что моменты инерции твердого тела относительно наибольшей J_1 и наименьшей J_3 осей выражаются равенствами $J_1 = \min\limits_{\sum\alpha_i^2=1} \sum J_{ik}\alpha_i\alpha_k$, $J_3 = \max\limits_{\sum\alpha_i^2=1} \sum J_{ik}\alpha_i\alpha_k$, где J_{ik} — компоненты тензора инерции в некоторой системе ортогональных осей.

11.97. Показать, что момент инерции J_2 твердого тела относительно средней оси эллипсоида инерции определяется из решения следующей минимаксной задачи: $J_2 = \min\limits_{\sum\beta_i^2=1} \max\limits_{\substack{\sum\alpha_i^2=1 \\ \sum\alpha_i=\beta_{i0}}} \sum J_{ik}\alpha_i\alpha_k$, где J_{ik} — компоненты тензора инерции в некоторой системе ортогональных осей.

11.98. В условиях предыдущей задачи показать, что

$$J_2 = \max_{\sum\beta_i^2=1} \min_{\substack{\sum\alpha_i^2=1 \\ \sum\alpha_i\beta_i=0}} \sum J_{ik}\alpha_i\alpha_k.$$

11.99. Момент инерции твердого тела относительно оси Ox удовлетворяет неравенству $J_{Ox} \geqslant J$, где J — момент инерции тела относительно произвольной оси, проходящей через точку O. Показать, что ось Ox является главной осью инерции тела для точки O. Сохраняет ли силу это утверждение, если $J_{Ox} \leqslant J$?

11.100. Однородный круговой конус массы m, с высотой h и углом при вершине $60°$ катится без проскальзывания по неподвижному конусу с углом при вершине $120°$. Найти модуль вектора кинетического момента $\mathbf{K}_0$ и угол β, который образует этот вектор с вектором угловой скорости. Подсчитать кинетическую энергию конуса, если центр его основания движется с постоянной по модулю скоростью v.

11.101. При движении твердого тела с неподвижной точкой в некоторый момент времени известен вектор кинетического момента тела $\mathbf{K}_0$. Найти кинетическую энергию тела, если проекции вектора $\mathbf{K}_0$ на главные оси инерции для неподвижной точки равны K_1, K_2, K_3.

11.102. Известно, что вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$ симметричного твердого тела ($A = B \neq C$) с неподвижной точкой образует угол $\alpha(t)$ с экваториальной плоскостью эллипсоида инерции, построенного в неподвижной точке. Найти разложение вектора $\boldsymbol{\omega}$ на направление оси симметрии тела и направление вектора кинетического момента $\mathbf{K}_0$.

11.103. При движении твердого тела с неподвижной точкой O вектор кинетического момента $\mathbf{K}_0$, вектор мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и орт $\mathbf{e}$ одной из главных осей эллипсоида инерции, построенного для точки O, в некоторый момент времени лежат в одной плоскости, причем вектор $\boldsymbol{\omega}$ в этот момент не коллинеарен ни одной из главных осей. Показать, что при любом движении тела векторы $\mathbf{K}_0$, $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{e}$ будут лежать в одной плоскости в любой момент времени.

11.104. Твердое тело с неподвижной точкой O обладает динамической симметрией ($A = B$). Показать, что смешанное произведение вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, вектора кинетического момента $\mathbf{K}_0$ и орта $\mathbf{e}$ (оси динамической симметрии) равно нулю при любом движении твердого тела.

11.105. Твердое тело с неподвижной точкой движется по инерции. В начальный момент времени вектор кинетического момента $\mathbf{K}_0$, мгновенная угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ и орт $\mathbf{e}$ одной из главных осей эллипсоида инерции, построенного для неподвижной точки, лежат в одной плоскости. Каким будет дальнейшее движение тела?

11.106. Однородный эллипсоид с моментами инерции A, $(3/2)A$, $2A$ движется вокруг своего неподвижно закрепленного центра масс. В начальный момент эллипсоиду сообщена угловая скорость $\Omega =$

$= \sqrt{2}\omega\mathbf{i} + \omega\mathbf{k}$ ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные орты главных центральных осей инерции). Получить уравнения движения эллипсоида в квадратурах.

11.107. Твердое тело ($A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$) с неподвижной точкой движется по инерции. Как должны быть связаны между собой главные моменты инерции A, B и C тела, чтобы составляющая его угловой скорости $\sqrt{p^2+q^2}$ оставалась постоянной для любого движения?

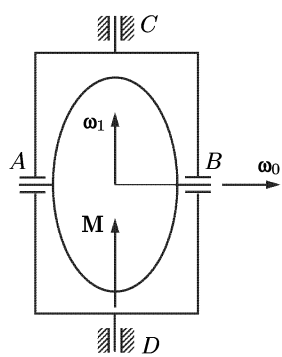
11.108. Твердое тело с неподвижной точкой, у которого $A = B \neq \neq C$, движется по инерции. Проекции угловой скорости тела на главные оси инерции для неподвижной точки в начальный момент равны p_0, q_0 и r_0. Найти угол нутации θ и угловые скорости прецессии $\dot{\psi}$ и собственного вращения $\dot{\varphi}$.

11.109. Симметричное твердое тело ($A = B \neq C$), имеющее неподвижную точку, движется по инерции. В начальный момент телу была сообщена угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$, образующая угол α с экваториальной плоскостью эллипсоида инерции, построенного в неподвижной точке. Найти параметры регулярной прецессии движения тела.

11.110. Твердое тело с моментами инерции $A > B$, $C = A + + B$ движется по инерции вокруг неподвижной точки. Найти максимальное и минимальное значения угла нутации (между вектором кинетического момента и наименьшей осью эллипсоида инерции), если в начальный момент $p = p_0$, $q = q_0$, $r = r_0$.

11.111. Твердое тело с неподвижной точкой ($A > B > C$) движется по инерции. Найти все движения тела, которые происходят с постоянной по модулю угловой скоростью.

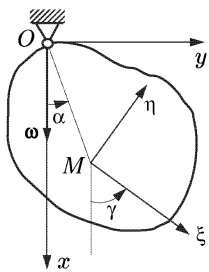
11.112. Ось AB велосипедного колеса (см. рисунок) укреплена в раме так, что плоскость колеса перпендикулярна плоскости рамы. К раме прикладывается некоторый момент $\mathbf{M}(t)$ относительно оси CD и находится закон вращения рамы. Можно ли по этой информации без каких-либо дополнительных измерений узнать, вращается колесо вокруг оси AB или нет?



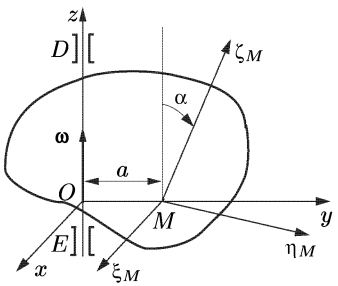
К задаче 11.112

11.113. Велосипедное колесо (см. рис. к задаче 11.112) массы m и радиуса r, установленное в раме, вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 вокруг своей оси AB. Рама вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 вокруг оси CD, перпендикулярной оси AB. Определить динамические силы реакции в подшипниках C и D, если расстояние $CD = l$. Массу колеса считать равномерно распределенной по ободу.

11.114. Тонкая пластина массы m (см. рисунок), точка O которой шарнирно закреплена, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Ox, лежащей в плоскости пластины. Ось OM, проходящая через центр масс M пластины, образует с Ox угол α. Найти угол γ, на который повернуты главные центральные оси по отношению к осям Oxy, если главные центральные моменты инерции пластины равны A, B и C, а $OM = a$.



К задаче 11.114



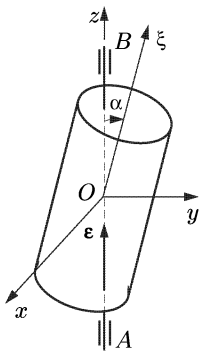
К задаче 11.115

11.115. Тонкая пластина массы m (см. рисунок) вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Oz, лежащей в плоскости пластины. Центр масс пластины M находится на расстоянии a от оси вращения, главная центральная ось $M\zeta_M$ образует с осью Oz угол α. Найти статические и динамические силы реакции в подшипнике D и подпятнике E, если главные центральные моменты инерции пластины равны $J_{\eta M} = B$, $J_{\xi M} = C$, $EO = b$, $OD = c$.

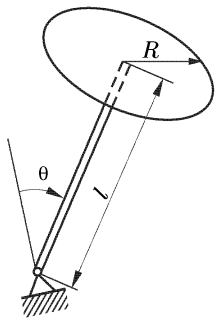
11.116. Однородный цилиндр (см. рисунок) насажен на вертикальную ось AB, проходящую через центр масс O цилиндра и образующую угол α с осью $O\xi$ цилиндра. Под действием момента сил цилиндр вращается вокруг оси AB с постоянным угловым ускорением ε. Определить компоненты динамических сил реакций в точках A и B, если масса цилиндра равна m, радиус основания R, высота h, $OA = OB = l/2$.

11.117. Тонкий однородный диск веса P и радиуса R (см. рисунок) насажен жестко на невесомый стержень длины $l = \sqrt{3}R/2$, один конец которого шарнирно закреплен. В начальный момент диску сообщают собственное вращение с угловой скоростью $\dot{\varphi}_0 = 4\sqrt{g/R}$ и отпускают ось без толчка. Найти минимальное и максимальное значения угла нутации θ при движении диска, если в начальный момент $\theta_0 = 30°$, $\dot{\theta}_0 = 0$, $\dot{\psi}_0 = 0$. Найти также зависимость угловой скорости прецессии $\dot{\psi}$ и угловой скорости собственного вращения $\dot{\varphi}$ от угла нутации θ.

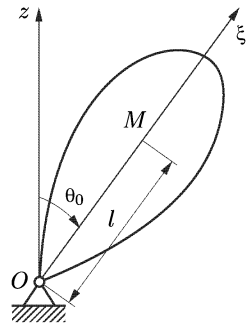
11.118. Симметричный волчок ($A = B \neq C$) массы m (см. рисунок) в начальный момент получил угловую скорость собственного



К задаче 11.116



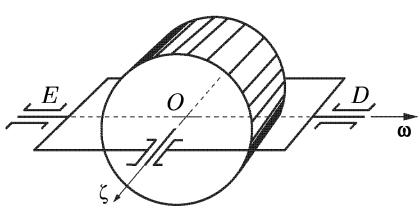
К задаче 11.117



К задаче 11.118

вращения ω, его ось симметрии в этот момент образовывала с вертикалью угол θ_0. Какой должна быть начальная угловая скорость прецессии $\dot{\psi}_0$, чтобы движение волчка являлось регулярной прецессией, если расстояние центра масс M от неподвижной точки опоры равно l? Определить при регулярной прецессии реакцию опоры. Показать, что при $\omega \gg \dot{\psi}$ угловая скорость прецессии не зависит от угла нутации.

11.119. При движении симметричного твердого тела с неподвижной точкой в поле тяжести (случай Лагранжа) угол θ между вертикалью и осью динамической симметрии сохраняет во время движения постоянное значение. Какое движение тела реализуется при этих условиях?



К задаче 11.120

11.120. Рамка уравновешенного гироскопа укреплена на неподвижном основании с помощью подшипников D и E (см. рисунок). Рамка поворачивается вокруг оси DE с угловой скоростью ω. Ротор гироскопа совершает n оборотов в секунду вокруг оси $O\zeta$, расстояние $DE = l$. Момент инерции ротора относительно оси симметрии

равен C. Определить силу реакции на подшипники D и E рамки, обусловленную гироскопическим моментом. Массой рамки пренебречь.

11.121. Тяжелый симметричный гироскоп (см. рис. к задаче 11.118) совершает регулярную прецессию с параметрами $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$, θ. Перейдя в неинерциальную систему координат, вращающуюся с угловой скоростью прецессии $\dot{\psi}$, найти момент переносных и кориолисовых сил инерции относительно неподвижной точки.

11.122. В условиях предыдущей задачи показать, что система переносных сил инерции приводится к равнодействующей, а система кориолисовых сил инерции приводится к паре. Найти точку K приложения равнодействующей переносных сил инерции. Расстояние от центра масс гироскопа до неподвижной точки равно l, его масса равна m.

11.123. Твердое тело вращается вокруг неподвижной точки. В неинерциальной системе отсчета, жестко связанной с телом, найти главный момент сил инерции относительно этой точки.

11.124. Получить закон вращения твердого тела вокруг неподвижной оси из динамических уравнений Эйлера.

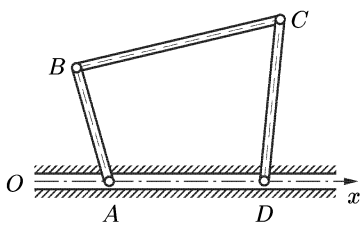
11.125. Показать, что объем эллипсоида инерции твердого тела для его центра масс больше объема эллипсоида инерции в других точках тела.

2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

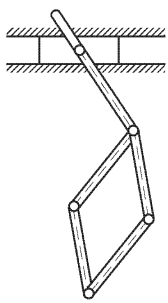
§ 12. Уравнения Лагранжа

12.1. Найти число степеней свободы плоского трехзвенного механизма $ABCD$ (см. рисунок), у которого точки A и D могут перемещаться по прямой Ox.

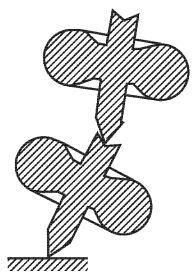
12.2. Найти число степеней свободы плоского многозвенного механизма, изображенного на рисунке.



К задаче 12.1



К задаче 12.2



К задаче 12.3

12.3. Определить число степеней свободы системы, состоящей из двух волчков, установленных один на другом, как показано на рисунке. Точка опоры нижнего волчка неподвижна.

12.4. Показать, что если выполнены соотношения

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_k} + \frac{\partial f_k}{\partial q_n} f_i = \frac{\partial f_k}{\partial q_i} + \frac{\partial f_i}{\partial q_n} f_k \quad (i = \overline{1, n},\, k = \overline{1, n-1}),$$

то линейная дифференциальная связь вида

$$\dot{q}_n + \sum_{k=1}^{n-1} f_k(q_1, \ldots, q_n)\dot{q}_k = 0$$

является голономной.

12.5. Круговой конус с неподвижной вершиной катится по горизонтальной плоскости без проскальзывания. Выписать уравнения связей и выяснить, является ли эта система голономной.

12.6. Выяснить, какие из следующих дифференциальных связей являются интегрируемыми; для интегрируемых связей найти соответствующее конечное уравнение:

а) $x\dot{z} + (y^2 - x^2 - z)\dot{x} + (z - y^2 - xy)\dot{y} = 0$;

б) $(\dot{x}_1+\dot{x}_2)/(x_1-x_2)=(\dot{y}_1+\dot{y}_2)/(y_1-y_2)$;

в) $\dot{y}-z\dot{x}=0$;

г) $\dot{x}(x^2+y^2+z^2)+2(x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z})=0$;

д) $(2x+y+z)\dot{x}+(2y+z+x)\dot{y}+(2z+x+y)\dot{z}=0$.

12.7. Свободная материальная точка движется под действием силы $\mathbf{F}=\mathbf{F}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t)=F_x\mathbf{i}+F_y\mathbf{j}+F_z\mathbf{k}$. Найти выражения для обобщенных сил, если в качестве обобщенных координат выбирается одна из следующих криволинейных систем координат:

а) цилиндрические координаты r, φ, z: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$;

б) сферические координаты r, φ, θ: $x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$;

в) параболические координаты u, v, φ: $x=\sqrt{uv}\cos\varphi$, $y=\sqrt{uv}\sin\varphi$, $z=(u-v)/2$.

12.8. В следующих задачах движение системы определяется лагранжианом L. Найти уравнения движения системы, если

а) $L=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i\dot{q}_i^2+2q_i\dot{q}_i\sin t)-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}(c_i-\cos t)q_i^2$

$(a_i=\text{const}, c_i=\text{const})$;

б) $L=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\dot{q}_i^2-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{q_i+\dot{q}_it}{\cos^2 q_it}\quad(a_i=\text{const})$;

в) $L=\dfrac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-mg\left(z+\dfrac{\dot{x}}{x}+\dfrac{\dot{y}}{y}\right)$.

12.9. Свободная материальная точка массы m движется в потенциальном силовом поле, причем $\Pi=\Pi(x,y,z,t)$. Декартовы координаты точки x, y, z связаны с ортогональными криволинейными координатами q_1, q_2, q_3 равенствами

$$x=x(q_1,q_2,q_3),\quad y=y(q_1,q_2,q_3),\quad z=z(q_1,q_2,q_3).$$

Найти лагранжиан точки в координатах q_i, используя коэффициенты Ламе

$$H_k=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_k}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_k}\right)^2}\qquad(k=1,2,3).$$

12.10. Точка массы m движется в силовом поле с потенциалом $\Pi(x,y,z)$. Найти лагранжиан точки и составить ее уравнения движения в следующих системах координат:

а) цилиндрические координаты r, φ, z: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$;

б) сферические координаты r, φ, θ: $x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$;

в) параболические координаты u, v, φ: $x = \sqrt{uv}\cos\varphi$, $y = \sqrt{uv}\sin\varphi$, $z = (u - v)/2$.

12.11. Для плоского движения материальной точки в силовом поле с потенциалом $\Pi(x, y)$ найти лагранжиан в координатах q_1 и q_2, связанных с декартовыми координатами равенствами $x = (q_1 - q_2)/2$, $y = \sqrt{q_1 q_2}$.

12.12. Найти функцию Лагранжа и составить уравнения движения двух материальных точек с массами m_1 и m_2, притягивающихся одна к другой по закону Ньютона. Выписать также интегралы движения системы.

Указание. За обобщенные координаты принять декартовы координаты x, y, z центра масс системы, расстояние между точками r и углы θ и φ (широты и долготы), которые определяют направление прямой, соединяющей точки.

12.13. В качестве модели двухатомной молекулы можно взять систему из двух материальных точек массы m_1 и m_2, упруго связанных между собой. Сила взаимодействия точек равна $F = -c(r - r_0)$, где r — расстояние между точками, $c = \text{const}$, а r_0 соответствует положению, в котором упругая сила равна нулю. Найти функцию Лагранжа, составить уравнения движения системы и выписать интегралы движения.

12.14. Найти движения системы, лагранжиан которой $L = L(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$ не зависит от обобщенных координат и времени.

12.15. Найти движения системы с лагранжианом $L = \sum\limits_{i=1}^{n} F_i(\dot{q}_i + q_i)$, если уравнения $y_i = \varphi_i(z_i)$, где $\varphi_i(z_i) = F_i'(z_i)$, имеют решениями функции $z_i = \psi_i(y_i) \quad (i = \overline{1, n})$.

12.16. Найти движения механической системы с лагранжианом $L = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k - \sum\limits_{i=1}^{n} c_i(t)q_i$, где $a_{ik} = a_{ki}$ — постоянные величины.

12.17. Найти закон движения точки, определяемый лагранжианом $L = t\sqrt{1 + \dot{x}^2}$.

12.18. Функция Лагранжа релятивистской частицы с массой покоя m_0 в поле тяготения с потенциалом $\Pi = -\dfrac{\gamma}{r} \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ в декартовых координатах имеет вид

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{\frac{1 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{c^2}} + \frac{\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

где c — скорость света. Найти функцию Лагранжа частицы в сферических координатах.

12.19. Функция Лагранжа свободной релятивистской частицы с массой покоя m_0 имеет вид

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}{c^2}},$$

где c — скорость света. Составить уравнения движения частицы и найти их решение.

12.20. Найти закон движения точки, определяемый лагранжианом $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{\alpha}{2}(\dot{x}y - \dot{y}x) - \frac{\rho_1 x^2}{2} - \frac{\rho_2 y^2}{2}$ (α, ρ_1, ρ_2 — положительные константы).

12.21. Кинетическая и потенциальная энергии механической системы являются квадратичными формами с постоянными коэффициентами: $T = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$, $\Pi = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} c_{ik}q_i q_k$. Найти движения системы, если квадратичная форма T положительно определена, а квадратичная форма Π отрицательно определена. В начальный момент $q_i(0) = q_{i0}$, $\dot{q}_i(0) = \dot{q}_{i0}$.

12.22. Тяжелая точка может двигаться без трения в вертикальной плоскости xz по кривой $z = f(x)$. Составить уравнение Лагранжа и найти его первый интеграл.

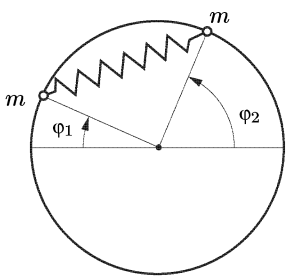
12.23. Тяжелая точка может двигаться по гладкому эллиптическому параболоиду $z = ax^2 + by^2$ ($a > 0$, $b > 0$, ось Oz направлена вертикально вверх). Составить уравнения Лагранжа.

12.24. Частица массы m и заряда e движется в электромагнитном поле. Напряженности $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ электрического и магнитного полей могут быть выражены через скалярный $\varphi(x, y, z, t)$ и векторный $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ потенциалы при помощи соотношений $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$, $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$, где c — скорость света. Показать, что уравнения движения частицы $m\dot{\mathbf{v}} = e[\mathbf{E} + c^{-1}(\mathbf{v} \times \mathbf{H})]$ представляют собой уравнения Лагранжа, где в качестве лагранжиана взята функция $L = mv^2/2 - e\varphi + (\mathbf{A}, \mathbf{v})e/c$.

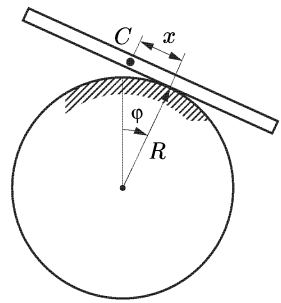
12.25. Две точечные массы m_1 и m_2, связанные пружиной жесткости c, могут двигаться без трения по сторонам прямого угла $\angle xOy$, сторона Oy которого вертикальна. Длина пружины в ненапряженном состоянии равна l_0. Составить уравнения Лагранжа.

12.26. Две равные точечные массы m (см. рисунок), связанные пружиной жесткости c, могут двигаться без трения, по неподвижному кольцу радиуса r, лежащему в горизонтальной плоскости. Длина пружины в недеформированном состоянии равна l. Составить уравнения Лагранжа. Используя координаты $\theta_1 = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$, $\theta_2 = (\varphi_1 - \varphi_2)/2$, найти закон движения в квадратурах.

12.27. Однородный стержень массы m и длины $2l$ может свободно двигаться по гладкой горизонтальной плоскости. Каждый элемент стержня притягивается неподвижной прямой этой плоскости (прямой Ox) с силой, прямо пропорциональной массе элемента и его расстоянию от притягивающей прямой (коэффициент пропорцио-



К задаче 12.26



К задаче 12.28

нальности k). Составить уравнения движения стержня в форме Лагранжа. Доказать, что центр C стержня будет двигаться по синусоиде.

12.28. Однородный гладкий тяжелый стержень длины $2l$ (см. рисунок), помещенный на неподвижный гладкий цилиндр радиуса R, может совершать движение в вертикальной плоскости. Составить уравнения движения стержня (до момента его отрыва от цилиндра) в форме Лагранжа.

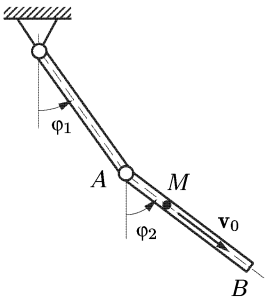
12.29. Два однородных стержня длины l каждый образуют плоский двойной маятник. Составить уравнения движения в форме Лагранжа.

12.30. Составить уравнения Лагранжа, описывающие движение двойного плоского маятника, который состоит из двух однородных стержней массы m и длины l каждый (см. рисунок), если по стержню AB перемещается точка массы M с относительной скоростью $v_0 = \text{const}$; при $t = 0$ $AM = 0$.

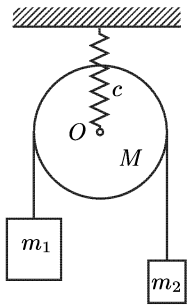
12.31. Через блок O массы M (см. рисунок), подвешенный на вертикальной пружине жесткости c, перекинута невесомая нерастяжимая нить с двумя грузами массы m_1 и m_2 на концах. Нить по блоку не скользит. Составить уравнения движения системы в форме Лагранжа, пренебрегая весом пружины и считая, что блок — однородный диск, а грузы движутся по вертикали.

12.32. Сохраняя условия предыдущей задачи, найти закон движения блока и грузов.

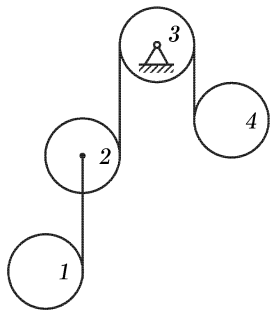
12.33. Используя уравнения Лагранжа, найти движение четырех одинаковых однородных цилиндров радиуса r (см. рисунок), соединенных между собой нерастяжимыми невесомыми нитями, как пока-



К задаче 12.30



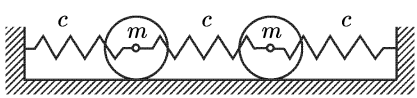
К задаче 12.31



К задаче 12.33

зано на рисунке. Нити по цилиндрам не скользят, центры цилиндров *1*, *2*, *4* перемещаются по вертикали.

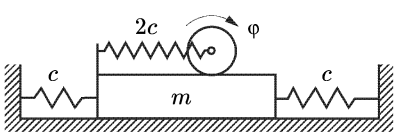
12.34. Два одинаковых однородных диска массы m каждый (см. рисунок) могут катиться без проскальзывания по горизонталь-



К задаче 12.34

ной прямой. Центры дисков соединены между собой и с неподвижными стенками пружинами жесткости c. Составить уравнения движения системы в форме Лагранжа.

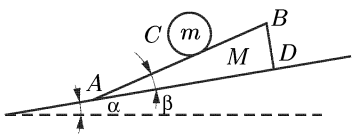
12.35. Доска массы m (см. рисунок), соединенная пружинами жесткости c с неподвижными стенками, может скользить по гладкому



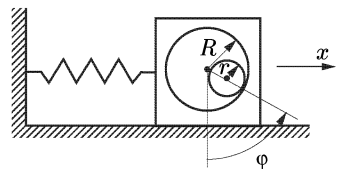
К задаче 12.35

горизонтальному полу. По доске может катиться без проскальзывания диск массы $m/2$ и радиуса r, центр которого соединен с краем доски пружиной жесткости $2c$. Составить уравнения движения системы в форме Лагранжа.

12.36. Трехгранная призма ABD массы M (см. рисунок) скользит по гладкой наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом; $\angle BAD = \beta$. По грани AB призмы скатывается без проскальзывания однородный цилиндр массы m. Используя уравнения Лагранжа, найти ускорение призмы w и ускорение w_C центра цилиндра относительно призмы.



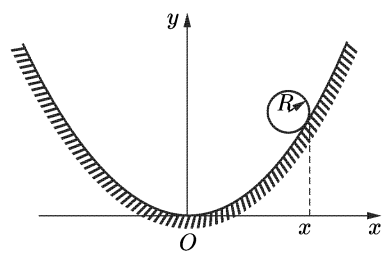
К задаче 12.36



К задаче 12.37

12.37. Прямоугольный брус массы M (см. рисунок), в котором вырезана цилиндрическая полость радиуса R, соединен, с неподвижной стенкой пружиной жесткости c и может двигаться без трения по горизонтальным направляющим. В полости может катиться без проскальзывания однородный цилиндр массы m и радиуса r ($r < R$). Составить уравнения движения системы в форме Лагранжа.

12.38. Однородный диск радиуса R и массы m (см. рисунок) может катиться без проскальзывания по параболе $y = ax^2/2$. Ось Oy вертикальна, $Ra \leqslant 1$. Составить функцию Лагранжа, приняв за обобщенную координату абсциссу x точки касания.



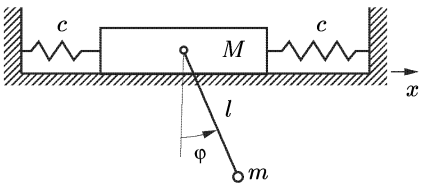
К задаче 12.38

12.39. Груз массы m, подвешенный на пружине жесткости c, может двигаться по вертикальным направляющим без трения. В центре масс груза шарнирно прикреплен однородный стержень массы M и длины $2l$. Составить уравнения движения системы в форме Лагранжа, если стержень во время движения не выходит из вертикальной плоскости.

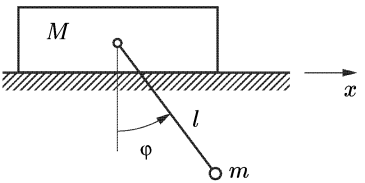
12.40. Брусок массы M (см. рисунок), соединенный с неподвижными стенками одинаковыми пружинами жесткости c, может скользить без трения вдоль горизонтальной направляющей. К центру бруска на нерастяжимой нити длины l подвешен груз массы m. Составить уравнения движения системы в форме Лагранжа.

12.41. К центру бруска массы M (см. рисунок), который может скользить без трения по горизонтальным направляющим, на упругой

нити жесткости c подвешен груз массы m (длина нити в ненапряженном состоянии l_0). Составить уравнения движения системы в форме Лагранжа.



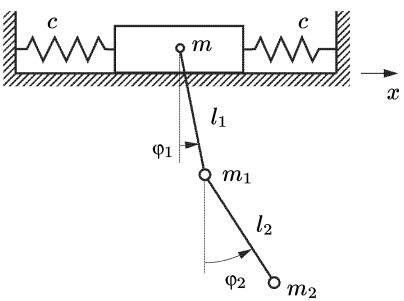
К задаче 12.40



К задаче 12.41

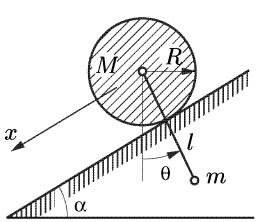
12.42. Решить задачу 12.40, считая нить упругой (жесткость нити c_1, ее длина в недеформированном состоянии l_0).

12.43. К ползуну массы m (см. рисунок), который может перемещаться по гладкой горизонтальной направляющей, подвешен двойной математический маятник с массами m_1 и m_2 и длинами l_1 и l_2. Ползун соединен с неподвижными стенками двумя пружинами жесткости c каждая. Составить уравнения движения в форме Лагранжа.

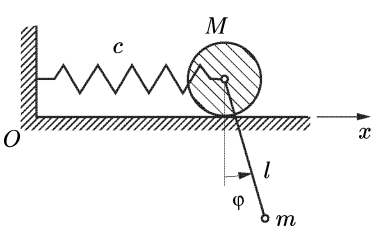


К задаче 12.43

12.44. Однородный диск массы M (см. рисунок) может катиться без проскальзывания по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. К центру диска на невесомой нерастяжимой нити длины l подвешен груз массы m. Составить уравнения движения системы в форме Лагранжа.



К задаче 12.44

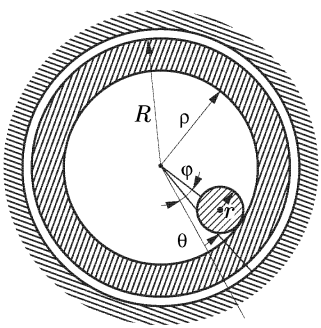


К задаче 12.45

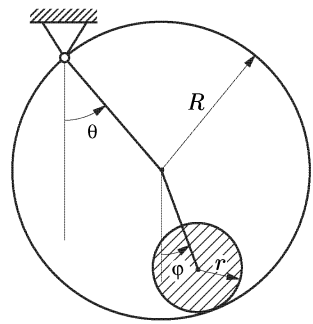
12.45. Составить уравнения движения маятника массы m и длины l (см. рисунок), точка подвеса которого находится в центре диска

массы M. Диск может катиться без проскальзывания по горизонтальной прямой Ox; центр диска соединен с неподвижной стенкой пружиной жесткости c.

12.46. Полый однородный цилиндр массы M (см. рисунок), внешний и внутренний радиусы которого равны соответственно R и ρ, может скользить без трения по внутренней поверхности неподвижного цилиндра радиуса R. Внутри полого цилиндра может катиться без проскальзывания сплошной однородный цилиндр массы m и радиуса r. Оси обоих цилиндров горизонтальны. Составить уравнения движения системы в форме Лагранжа.



К задаче 12.46



К задаче 12.47

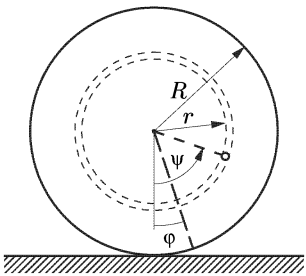
12.47. Внутри полого цилиндра массы M и радиуса R (см. рисунок), который может свободно качаться вокруг своей горизонтальной образующей, катится без проскальзывания однородный цилиндр массы m и радиуса r. Составить уравнения движения системы в форме Лагранжа.

12.48. Однородный диск массы M и радиуса R (см. рисунок) может катиться без проскальзывания по горизонтальной прямой. В диске имеется гладкий круговой желоб радиуса r, центр которого совпадает с центром диска и по которому может двигаться шарик массы m. Пренебрегая размерами шарика, составить уравнения Лагранжа системы и найти интегралы движения.

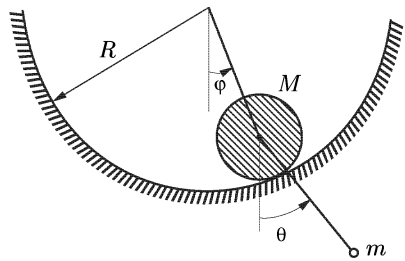
12.49. Однородный цилиндр массы M и радиуса r (см. рисунок) может катиться без проскальзывания внутри неподвижного полого цилиндра радиуса R. К центру подвижного цилиндра подвешен математический маятник массы m и длины l. Составить уравнения движения системы в форме Лагранжа.

12.50. Две точечные массы m_1 и m_2 (см. рисунок) связаны упругой нитью жесткости c, пропущенной через отверстие в гладкой горизонтальной плоскости. Масса m_1 движется по плоскости, мас-

са m_2 совершает пространственное движение. Длина нити в недеформированном состоянии равна l. Составить уравнения движения системы в форме Лагранжа.

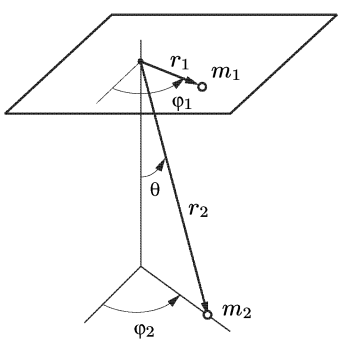


К задаче 12.48

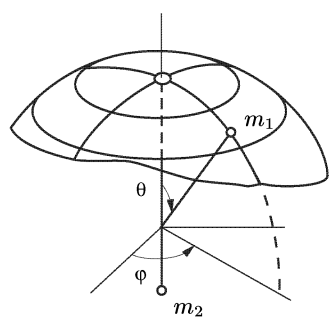


К задаче 12.49

12.51. Точечная масса m_1 (см. рисунок) движется по гладкой сфере радиуса R, точечная масса m_2 движется по вертикали. Массы связаны невесомой нерастяжимой нитью, пропущенной через малое отверстие в наивысшей точке сферы, как показано на рисунке. Составить уравнения движения системы в форме Лагранжа и найти интегралы движения.



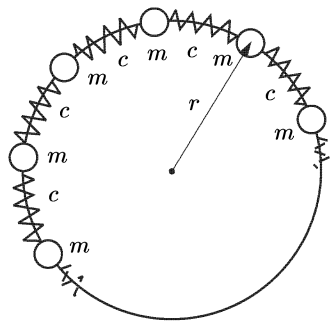
К задаче 12.50



К задаче 12.51

12.52. К концам однородной весомой нити массы M и длины l (см. рис. к задаче 12.51), пропущенной через малое отверстие в наивысшей точке гладкой сферы радиуса R, присоединены точечные массы m_1 и m_2. Масса m_1 движется по сфере, масса m_2 движется по вертикали. Найти функцию Лагранжа и выписать уравнения движения системы.

12.53. Система состоит из n одинаковых материальных точек массы m каждая (см. рисунок). Точки связаны одинаковыми пружинами жесткости c и могут скользить без трения по круговому кольцу, расположенному в горизонтальной плоскости. Найти функцию Лагранжа и составить уравнения движения.



К задаче 12.53

12.54. В динамические уравнения Эйлера вместо p, q и r подставляют их выражения из кинематических уравнений Эйлера. Являются ли полученные таким образом уравнения уравнениями Лагранжа в эйлеровых углах?

12.55. Получить из динамических и кинематических уравнений Эйлера уравнения Лагранжа в эйлеровых углах.

12.56. Найти функцию Лагранжа и составить уравнения движения симметричного волчка ($A = B \neq C$) массы m в однородном поле тяжести, если центр масс волчка находится на его оси динамической симметрии на расстоянии l от неподвижной точки.

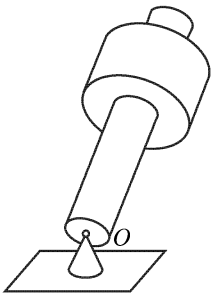
12.57. Найти функцию Лагранжа и составить уравнения движения однородного стержня массы m и длины $2l$ в однородном поле тяжести. Найти движение стержня.

12.58. Цилиндрический болт радиуса R, высоты H и массы M (см. рисунок) закреплен в центре O основания. На болт надета гайка, которую можно считать полым цилиндром с внешним радиусом αR ($\alpha > 1$), высотой l и массой m. Шаг винтовой нарезки равен h. Составить функцию Лагранжа системы.

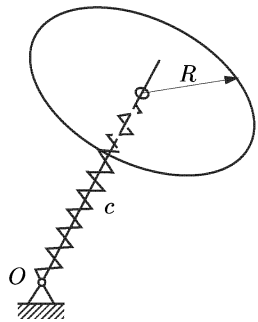
12.59. Однородный диск радиуса R и массы m (см. рисунок), насаженный в центре под прямым углом на невесомый гладкий стержень, конец O которого закреплен сферическим шарниром, может поступательно двигаться вдоль этого стержня. Центр диска соединен с точкой O пружиной жесткости c, длина которой в недеформированном состоянии равна l_0. Составить уравнения движения диска в форме Лагранжа.

12.60. Симметричное твердое тело ($A = B \neq C$) массы M (см. рисунок) может вращаться вокруг неподвижной точки O, лежащей на оси симметрии тела на расстоянии l от его центра масс. В теле имеется узкая цилиндрическая полость, ось которой совпадает с осью симметрии тела. Вдоль полости может перемещаться материальная точка D массы m, соединенная с неподвижной точкой O пружиной жесткости c. Длина пружины в недеформированном состоянии

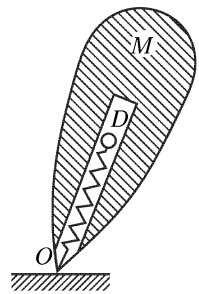
равна l_0. Пренебрегая трением, составить уравнения движения системы в форме Лагранжа.



К задаче 12.58

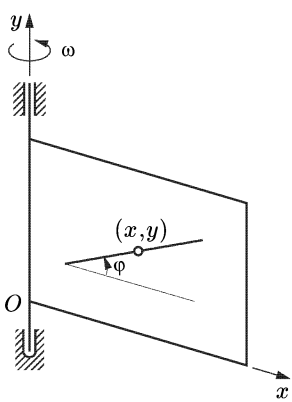


К задаче 12.59



К задаче 12.60

12.61. Однородный стержень (см. рисунок) может двигаться в вертикальной плоскости xy, которая вращается с угловой скоростью $\omega = \omega(t)$ вокруг вертикальной оси Oy. Составить уравнения относительного движения стержня в форме Лагранжа.



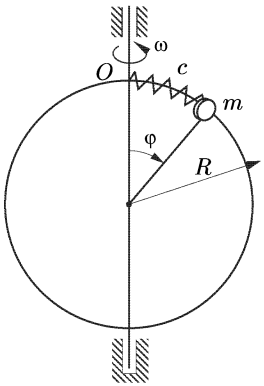
К задаче 12.61

12.62. Найти лагранжиан и составить уравнения движения замкнутой системы материальных точек относительно подвижной системы отсчета $O_1Y_1Y_2Y_3$. Движение системы $O_1Y_1Y_2Y_3$ по отношению к исходной инерциальной системе отсчета $OX_1X_2X_3$ задано радиус-вектором $\mathbf{r}_0(t)$ точки O_1 и угловой скоростью вращения $\mathbf{\Omega}(t)$. Взаимодействие между частицами полностью определяется потенциалом $\Pi = \Pi(|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_\nu|)$ $(k, \nu = \overline{1, N})$.

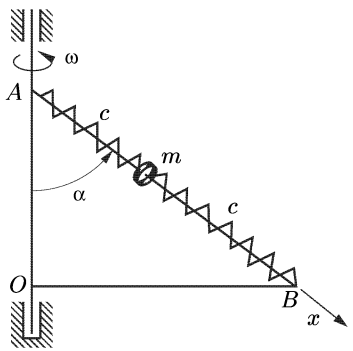
12.63. Точка массы m притягивается к неподвижному центру O силой $F = -\gamma m M/r^2$. Методом Лагранжа составить уравнения движения частицы во вращающейся системе отсчета x_1, x_2, x_3, переход к которой осуществляется при помощи преобразования $x = x_1 \cos\omega t - y_1 \sin\omega t$, $y = x_1 \sin\omega t + y_1 \cos\omega t$, $z = z_1$, где x, y и z — координаты в неподвижной системе отсчета.

12.64. Гладкая проволочная окружность радиуса R (см. рисунок) вращается вокруг своего вертикального диаметра с постоянной угловой скоростью ω. На окружность насажено колечко массы m, соединенное с точкой O окружности пружиной жесткости c; длина

пружины в недеформированном состоянии равна $R\varphi_0$. Составить уравнения относительного движения колечка в форме Лагранжа.



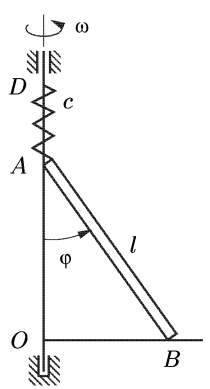
К задаче 12.64



К задаче 12.65

12.65. Колечко массы m (см. рисунок) может скользить вдоль гладкого стержня $AB = 2l$, концы которого в точках A и B жестко соединены со сторонами прямого угла $\angle AOB$, вращающегося вокруг своей вертикальной стороны AO с постоянной угловой скоростью ω. Колечко соединено с точками A и B двумя одинаковыми пружинами жесткости c. Длина каждой пружины в недеформированном состоянии равна l, $\angle OAB = \alpha$. Найти относительное движение колечка, используя уравнения Лагранжа.

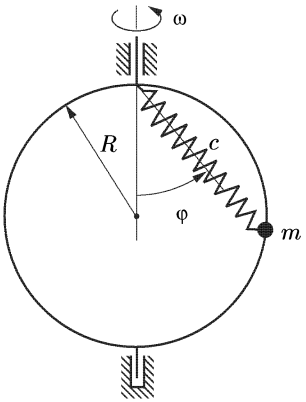
12.66. Однородный стержень AB массы m и длины l (см. рисунок) может скользить без трения по сторонам прямого угла $\angle DOB$, сторона OD которого вертикальна. Точка A стержня соединена с неподвижной точкой D пружиной жесткости c. Угол $\angle DOB$ вращается вокруг стороны OD с постоянной угловой скоростью ω. Составить уравнения относительного движения стержня в форме Лагранжа, если при $\varphi = \varphi_0$ пружина недеформирована.



К задаче 12.66

12.67. Гладкое проволочное кольцо радиуса R (см. рисунок) вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг своего вертикального диаметра. На кольцо надета бусинка массы m, соединенная с наивысшей точкой окружности пружиной жесткости c. Составить уравнения относительного движения бусинки, если длина пружины в ненапряженном состоянии равна l_0.

12.68. Точка может двигаться без трения в вертикальной плоскости yz по кривой $z = f(y)$. Плоскость yz вращается вокруг оси Ox с постоянной угловой скоростью ω. Составить уравнения движения точки во вращающейся системе координат в форме Лагранжа. Найти движение точки в случае $z = ay + b$, считая, что в начальный момент ось Oz была направлена вертикально вверх и точка начала двигаться из положения $(0, b)$ с нулевой относительной скоростью.



К задаче 12.67

12.69. Обобщенные силы Q_i некоторой механической системы определяются обобщенным потенциалом $V(q_j, \dot{q}_j)$ в соответствии с равенствами

$$Q_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (i = \overline{1, n}).$$

Показать, что силы Q_i не изменятся, если вместо исходного потенциала $V(q_j, \dot{q}_j)$ взять обобщенный потенциал

$$U = V(q_j, \dot{q}_j) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

где $\psi(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$ — произвольная дифференцируемая функция.

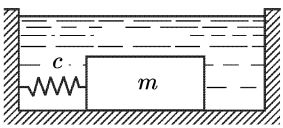
12.70. Найти обобщенный потенциал гироскопических сил $Q_i = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_k$ $(i = \overline{1, n})$, где $b_{ik} = -b_{ki}$ — постоянные величины.

12.71. Материальная точка массы m движется под действием силы $\mathbf{F} = \dfrac{a}{r^3}(\mathbf{v} \times \mathbf{r})$, где $a = \text{const}$. Показать, что эта сила имеет обобщенный потенциал. Найти выражение обобщенного потенциала U в сферических координатах.

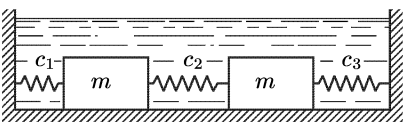
12.72. По поверхности $z = f(x, y)$, вращающейся вокруг вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω, движется материальная точка массы m. Найти обобщенный потенциал переносной и кориолисовой сил инерции в относительном движении точки.

12.73. Показать, что уравнение движения осциллятора с вязким трением (сила сопротивления $F = -\beta v$) можно записать как уравнение Лагранжа вида $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0$, введя надлежащим образом функцию Лагранжа $L(x, \dot{x}, t)$ (см. рисунок).

12.74. Два одинаковых груза массы m (см. рисунок) связаны между собой и с неподвижными стенками пружинами жесткости c_1, c_2 и c_3. На каждый из грузов действует сила сопротивления $F_i = -\beta v_i$ $(i = 1, 2)$. Показать, что уравнения движения системы можно записать как уравнения Лагранжа вида $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0$, введя надлежащим образом функцию Лагранжа $L(x_i, \dot{x}_i, t)$.



К задаче 12.73



К задаче 12.74

12.75. Механическая система имеет кинетическую энергию $T = \dfrac{m}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} \dot{q}_i^2$, потенциальную энергию $\Pi = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} c_{ik} q_i q_k$ и функцию Рэлея $R = \dfrac{\beta}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} \dot{q}_i^2$. Показать, что для этой системы можно так ввести функцию Лагранжа $L(q_j, \dot{q}_j, t)$, что уравнения движения могут быть записаны в форме $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = 0$.

12.76. (Г. Биркгоф.) Для уравнений Лагранжа $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ $(i = \overline{1, n})$ некоторой натуральной системы с $L = L_2 + L_1 + L_0$ существуют такие множители $\varphi_i(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, что

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(q_j)\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right] = \frac{dV(q_j, \dot{q}_j)}{dt},$$

где $V = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k(q_j) q_k$. Показать, что в этом случае найдутся такие новые обобщенные координаты θ_i $(q_i = q_i\ (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n))$, что $\dfrac{\partial \widetilde{L}(\theta_j, \dot{\theta}_j)}{\partial \theta_1} = 0$, т. е. что координата θ_1 будет циклической.

12.77. Пусть q_1 — циклическая координата системы с лагранжианом $L(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, q_2, \ldots, q_n, t)$. Показать, что переменные $q_2, \ldots, q_n$ описываются уравнениями Лагранжа с функцией $L = L(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, q_2, \ldots, q_n, t) - c\dot{q}_1$, где $\dot{q}_1$ находится из равенства $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = c$ (c — произвольная постоянная).

12.78. Показать, что добавление к лагранжиану $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ полной производной функции $\psi(q_j, t)$: $\dfrac{d\psi(q_j, t)}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \psi}{\partial q_i}\dot{q}_i + \dfrac{\partial \psi}{\partial \tau}$ не меняет уравнений Лагранжа.

12.79. Функции Лагранжа $L_1(q_i, \dot{q}_i, t)$ и $L_2(q_i, \dot{q}_i, t)$ порождают одинаковые уравнения Лагранжа, т. е. $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial L_1}{\partial q_i} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial L_2}{\partial q_i} = 0 \quad (i = \overline{1, n})$. Как связаны эти функции между собой?

12.80. Показать, что уравнения Ньютона $m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_j, \dot{\mathbf{r}}_j, t)$ $(i, j = \overline{1, N})$ ковариантны относительно преобразований Галилея $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0$, где $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$ — постоянные векторы. Привести пример преобразования, относительно которого уравнения Ньютона не ковариантны, в отличие от уравнений Лагранжа, ковариантных относительно любых преобразований координат.

12.81. Показать, что если обобщенные силы потенциальны в какой-либо одной системе обобщенных координат, то они будут потенциальны в любой системе обобщенных координат.

12.82. Символами Кристоффеля 1-го рода называются выражения

$$\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{li}}{\partial q^k} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial q^l} - \frac{\partial a_{kl}}{\partial q^i}\right).$$

Используя их, записать уравнения Лагранжа $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \dfrac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i \quad (i = \overline{1, n})$ склерономной системы, для которой

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(q)\dot{q}^i\dot{q}^k.$$

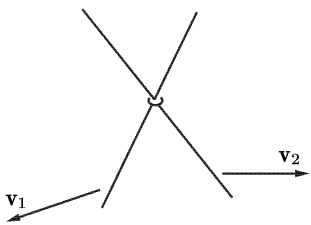
12.83. Механическая система с кинетической энергией $T = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}(q_j, t)\dot{q}_i\dot{q}_k$ и обобщенными силами $Q_j = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_j} + \widetilde{Q}_j(q_j, \dot{q}_j, t) \quad (j = \overline{1, n})$ совершает финитное движение. Получить аналог теоремы о вириале, используя функцию $G = \sum\limits_{j=1}^{n} q_j \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$, где $L = T - \Pi$.

12.84. Шар радиуса r движется по шероховатой плоскости так, что скорость точки касания шара с плоскостью равна нулю. Найти систему бесконечно малых возможных перемещений произвольной точки шара.

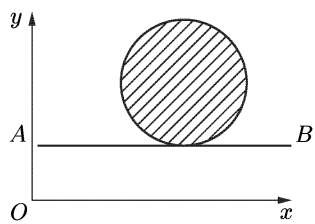
12.85. Твердое тело может перемещаться в пространстве. Найти систему бесконечно малых возможных перемещений произвольной точки тела.

12.86. Записать необходимое и достаточное условие интегрируемости уравнения дифференциальной связи $\sum\limits_{k=0}^{3} a_k(q)\dot{q}_k = 0$.

12.87. Два стержня (см. рисунок) могут двигаться в плоскости поступательно со скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ соответственно. Найти возможные скорости колечка, связывающего стержни.



К задаче 12.87



К задаче 12.88

12.88. Диск (см. рисунок) может катиться без проскальзывания по направляющей AB. Направляющая движется поступательно вертикально вверх по закону $y_A = y_A(t)$. Является ли связь, налагаемая направляющей на движение диска, идеальной?

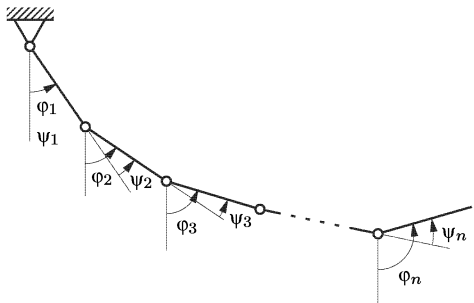
12.89. Движение материальной точки ограничено некоторой связью. В некотором положении при $t = t_1$ известны два возможных перемещения $(d\mathbf{r})_1$ и $(d\mathbf{r})_2$. Найти хотя бы одно виртуальное перемещение $\delta\mathbf{r}$ точки.

12.90. Лагранжиан механической системы $L = L(q, \dot{q})$ не зависит явно от времени. Показать, что функция $\varphi(q, \dot{q}) = \sum \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L(q, \dot{q})$ является первым интегралом уравнений движения.

12.91. Функция $\varphi(x, \dot{x})$ является первым интегралом уравнения движения $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$. Показать, что общее решение $x = x(x_0, \dot{x}_0, t)$ этого уравнения совпадает с общим решением уравнения Лагранжа с кинетическим потенциалом $L(x, \dot{x}) = \dot{x}\displaystyle\int\limits_0^{\dot{x}} \frac{\varphi(x, y)}{y^2}\,dy$, где интегрирование по y производится при фиксированном x.

12.92. На рисунке показана схема плоского многозвенного автоматического манипулятора. Через φ_i обозначены углы, которые звенья образуют с вертикалью, а через ψ_i обозначены шарнирные углы (т. е. углы между звеньями). Силовые электродвигате-

ли, установленные в шарнирах, развивают управляющие моменты $M_i(t)$ ($|M_i(t)| \leqslant m$). Найти обобщенные силы Q_{φ_i} и Q_{ψ_i}, соответствующие двум системам обобщенных координат $\varphi\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ и $\psi\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$.



К задаче 12.92

12.93. Обобщенным координатам $q_1, \ldots, q_n$ системы с n степенями свободы соответствуют обобщенные силы $Q_1(q, \dot{q}, t)$, $Q_2(q, \dot{q}, t)$, $\ldots$, $Q_n(q, \dot{q}, t)$. Найти обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, связанным с координатами q_i соотношениями $q_i = f_i(\varphi, t)$.

12.94. В обобщенных координатах q и $\widetilde{q}$ функции Лагранжа одной и той же механической системы имеют вид $L(q, \dot{q}, t)$ и $\widetilde{L}(\widetilde{q}, \dot{\widetilde{q}}, t)$. Найти связь между L и $\widetilde{L}$, если известно преобразование $\widetilde{q}_i = \varphi_i(q)$, $i = \overline{1, n}$.

12.95. Движение системы с одной степенью свободы описывается уравнением

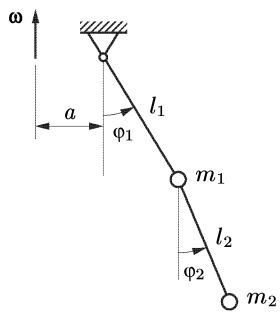
$$\ddot{q} - F(t, q, \dot{q}) = 0. \qquad (*)$$

Показать, что существует такая функция $\mu(t, q, \dot{q})$, при умножении на которую уравнение $(*)$ переходит в уравнение Лагранжа вида $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = 0$.

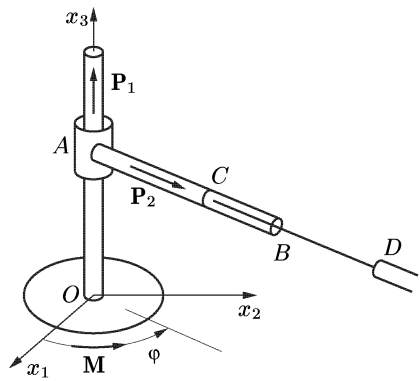
12.96. Убедиться, что системы уравнений Лагранжа, соответствующие функциям Лагранжа $L_1 = (1/2)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - (\omega^2/2)(q_1^2 + q_2^2)$, $L_2 = (1/2)\dot{q}_1\dot{q}_2 - (\omega^2/2)q_1q_2$, совпадают.

12.97. Плоскость, в которой совершает колебания двойной математический маятник (см. рисунок), вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, находящейся на расстоянии a от точки подвеса маятника. Массы и длины маятников равны m_1, m_2 и l_1, l_2. Составить выражение в обобщенных координатах φ_1, φ_2 для функции Лагранжа $L_{\text{абс}} = T_{\text{абс}} - \Pi_{\text{абс}}$ в абсолютном движении и для

функции Лагранжа $L_{\text{отн}} = T_{\text{отн}} - V_{\text{отн}}$ в относительном движении (по отношению к плоскости), где $V_{\text{отн}}$ — обобщенный потенциал. В связи с этой задачей обсудить тезис Герца о кинетическом происхождении потенциальной энергии за счет скрытых движений.



К задаче 12.97



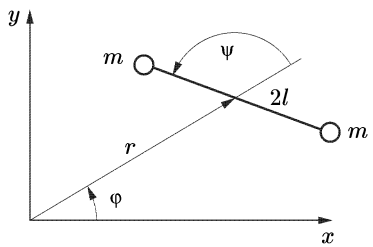
К задаче 12.98

12.98. Манипуляционный робот состоит из платформы с жестко укрепленной на ней вертикальной штангой (см. рисунок), вдоль которой может скользить звено $AB = l$, несущее телескопическое звено $CD = l$. Звено CD с помощью винтовой передачи может выдвигаться и убираться внутрь звена AB. Платформа может поворачиваться вокруг вертикальной оси Ox_3. Момент инерции платформы вместе со штангой относительно оси Ox_3 равен J, моменты инерции звеньев AB и CD относительно вертикальных осей, проходящих через их центры масс, равны J_1 и J_2 соответственно. Пренебрегая трением, составить уравнения движения робота, если к соответствующим звеньям приложены управляющий момент $M(t)$ и управляющие силы $P_1(t)$ и $P_2(t)$, как показано на рисунке. Массы звеньев AB и CD равны m_1 и m_2.

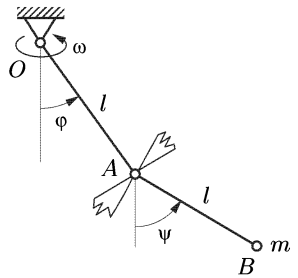
12.99. Составить уравнения Лагранжа гантели (см. рисунок), состоящей из двух одинаковых масс, соединенных невесомым нерастяжимым стержнем длины $2l$, в поле всемирного тяготения. Считать, что гантель движется без трения в неподвижной плоскости, содержащей центр притяжения.

12.100. Неоднородное колесо радиуса r и массы m катится по горизонтальной прямой без проскальзывания. Составить уравнения Лагранжа, если момент инерции относительно геометрического центра O равен J, а расстояние от центра масс C до центра O равно ρ. Найти также первый интеграл системы.

12.101. Материальная точка B массы m соединена с неподвижной точкой O двумя невесомыми стержнями OA и AB длины l каждый. Точка может совершать движение в вертикальной плоскости.



К задаче 12.99

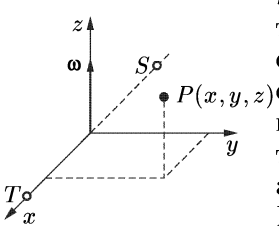


К задаче 12.101

Плоскость равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через точку подвеса O. В точке соединения стержней A имеется пружина жесткости кручения c. Пружина не напряжена, если стержни образуют прямую линию ($\varphi = \psi$). Составить уравнения Лагранжа.

12.102. Материальная точка массы m может двигаться по гладкой горизонтальной плоскости Π, вращающейся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью, изменяющейся по заданному закону $\omega = \omega(t)$. Составить уравнения Лагранжа для движения точки относительно плоскости Π.

12.103. Два небесных тела T и S, находящиеся на постоянном расстоянии друг от друга, движутся по круговым орбитам радиусов r_1 и r_2 в одной плоскости вокруг общего центра масс. Угловая скорость вращения прямой, соединяющей тела, постоянна и равна ω. Составить в форме Лагранжа уравнения движения космического аппарата P массы m относительно этих небесных тел, считая, что влияние аппарата на движение тел пренебрежимо мало. Массы тел равны m_1 и m_2 ($m_1 \gg m$, $m_2 \gg m$). (Ограниченная задача трех тел.)



К задаче 12.103

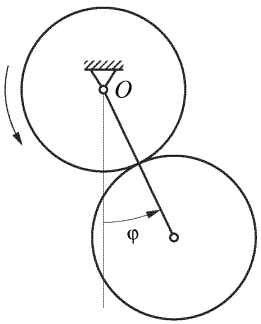
12.104. В задаче 12.37 составить уравнения Лагранжа при наличии трения скольжения между брусом и плоскостью скольжения (коэффициент трения равен f).

12.105. Кривошип, несущий две шестеренки одинакового радиуса, может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через центр O первой шестеренки. Шестеренки находятся в зацеплении друг с другом. Первая шестеренка вращается

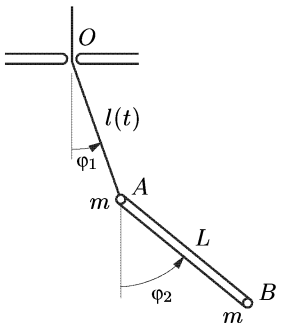
с постоянным угловым ускорением. Показать, что движение системы эквивалентно движению маятника с потенциалом

$$\Pi = -A\cos\varphi - B\varphi,$$

где $A = \text{const}$, $B = \text{const}$.



К задаче 12.105



К задаче 12.106

12.106. Составить уравнения Лагранжа системы, состоящей из двух одинаковых масс, соединенных между собой невесомым стержнем AB длины L. Расстояние от точки A стержня до точки подвеса O изменяется по закону $l = l(t)$.

12.107. Составить уравнения движения плоского математического маятника, длина которого меняется по закону $l = l(t)$, в форме уравнений Лагранжа.

12.108. Как нужно менять длину маятника $l = l(t)$ в условиях задачи 12.107, чтобы угол φ менялся по закону $\varphi = \varphi(t)$ $(\dot\varphi > 0)$.

12.109. Длина l плоского математического маятника меняется в зависимости от угла φ отклонения маятника от вертикали по закону $l = l(\varphi)$. Составить уравнение Лагранжа и найти его первый интеграл.

12.110. Маятник массы m переменной длины l, где $l = l(t)$ — заданная функция времени, совершает движение в среде с сопротивлением. Найти обобщенную силу Q_φ соответствующую координате φ, если сила сопротивления $\mathbf{F} = -\beta\mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ — абсолютная скорость точки m.

12.111. Показать, что система с лагранжианом

$$L = \frac{\dot x + \gamma x}{\omega x}\operatorname{arctg}\frac{\dot x + \gamma x}{\omega x} - \frac{1}{2}\ln\left[(\dot x + \gamma x)^2 + \omega^2 x^2\right]$$

(γ и ω — размерные коэффициенты) эквивалентна линейному осциллятору с вязким трением, движение которого описывается уравнением $\ddot x + 2\gamma\dot x + (\gamma^2 + \omega^2)x = 0$.

12.112. Рассмотрим диссипативную механическую систему с кинетической энергией $T = \frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}A\dot{q}$, функцией Рэлея $R = \frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}B\dot{q}$, потенциальной энергией $\Pi = \frac{1}{2}q^{\mathrm{T}}Cq$, где A, B, C — постоянные симметрические матрицы. Матрицы A и B связаны равенством $B = \lambda A$, где λ — постоянная. Показать, что при надлежащем выборе функции Лагранжа L уравнения движения можно записать в форме $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = \overline{1, n})$.

12.113. Механическая система описывается функциями $T = \frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}A\dot{q}$, $\Pi = \frac{1}{2}q^{\mathrm{T}}C\dot{q}$, $R = \frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}B\dot{q}$. Показать, что если симметрические матрицы A и B коммутируют, т. е. $AB = BA$, и $BA^{-1}C = CA^{-1}B$, то существует функция Лагранжа

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}[e^{t(BA^{-1})}A]\dot{q} - \frac{1}{2}q^{\mathrm{T}}[e^{t(BA^{-1})}C]q.$$

§ 13. Электромеханические аналогии

13.1. Как определяется число степеней свободы в системе связанных электрических контуров?

13.2. Обсудить аналогию между законом Кирхгофа для замкнутой электрической цепи и принципом Даламбера в механике.

13.3. Выяснить, что может служить механическим аналогом электрического трансформатора.

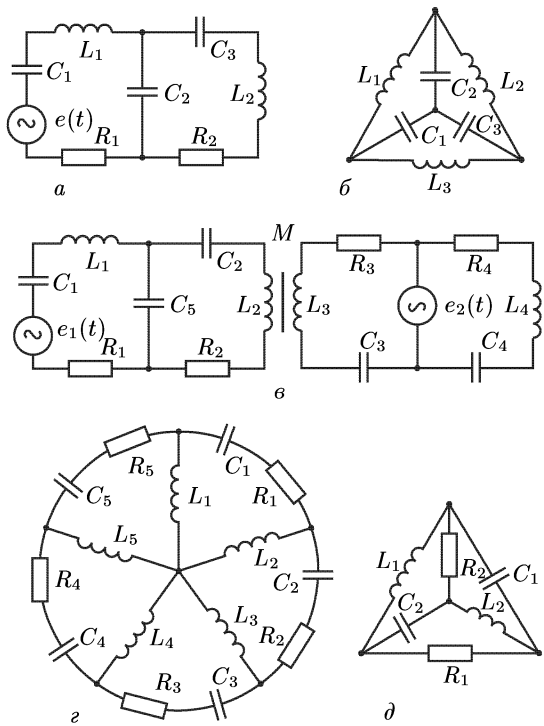
13.4. Пользуясь электромеханическими аналогиями, составить уравнения состояния изображенных на рисунках контуров.

13.5. Три пластины образуют последовательное соединение двух конденсаторов переменной емкости. Средняя пластина неподвижная, верхняя массы m_1, подвешенная на пружине жесткости k_1, и нижняя массы m_2, подпертая пружиной жесткости k_2, соединены непроводящей пружиной жесткости k_3 и могут перемещаться по вертикали. Конденсаторы включены в электрический контур, содержащий кроме них элементы $e(t)$, R, L и C_0. Составить уравнение состояния системы, если в положении равновесия верхняя пружина растянута, а средняя и нижняя сжаты (их деформации равны Δ_1, Δ_2 и Δ_3 соответственно), расстояния между пластинами в этом положении составляют a_1 и a_2, а емкости конденсаторов равны C_1 и C_2.

13.6. Точка O_1 подвеса математического маятника длины l совершает горизонтальные колебания с частотой ω и амплитудой A.

Построить электрический контур, моделирующий малые колебания маятника.

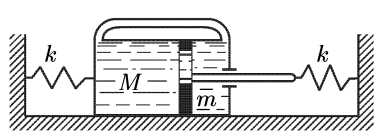
13.7. Два одинаковых математических маятника связаны между собой пружиной жесткости k. Маятники подвешены на стержне AB,



К задаче 13.4

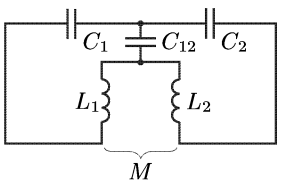
который совершает горизонтальные колебания с частотой ω и амплитудой A. Построить электрический контур, моделирующий малые колебания маятников. Рассмотреть также систему из n маятников.

13.8. Цилиндр массы M (см. рисунок) может скользить без трения по горизонтальной направляющей. В цилиндре может скользить поршень массы m. Пространство между стенками цилиндра и поршнем заполнено вязкой жидкостью (коэффициент вязкости равен β). Цилиндр и поршень соединены с неподвижными стенками пружинами жесткости k. Построить электрическую цепь, моделирующую движение системы.

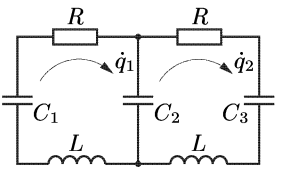


К задаче 13.8

13.9. В электрической цепи, изображенной на рисунке, подобрать емкость C_{12} и взаимную индукцию M так, чтобы емкостная и индуктивная связи между контурами взаимно компенсировались, т. е. чтобы в форме, разрешенной относительно старших производных, уравнения состояния системы представляли собой два независимых уравнения.



К задаче 13.9



К задаче 13.10

13.10. Пользуясь электромеханическими аналогиями, составить уравнения состояния электрической цепи, изображенной на рисунке. Показать, что для этой цепи можно так ввести функцию Лагранжа $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$, что уравнения состояния можно записать как уравнения Лагранжа вида

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0.$$

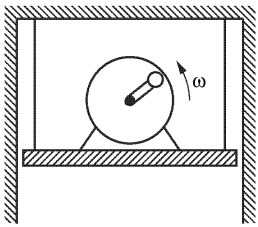
13.11. Механическая система, у которой координата q_2 является циклической, имеет функцию Лагранжа $\mathcal{L} = (m_1/2)\dot{q}_1^2 + (m_2/2)\dot{q}_2^2 - (k/2)q_1^2$. Составить электрический контур, моделирующий движение этой системы.

13.12. Построить электрический контур, моделирующий падение парашютиста по вертикали в однородном поле тяжести. Силу сопротивления считать пропорциональной первой степени скорости.

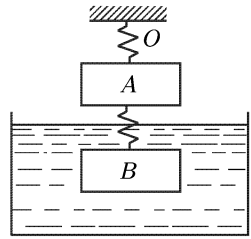
13.13. Найти электрический контур, моделирующий изменение угловой скорости ω турбины, если управляющее устройство создает момент $M = -\alpha(\omega - \omega_0)$, где ω — текущее значение угловой скорости, ω_0 — заданное (в соответствии с целью регулирования) значение угловой скорости, α — постоянная величина. Момент инерции турбины относительно оси вращения равен J. Силами сопротивления пренебречь.

13.14. Установка Зоммерфельда (см. рисунок) для изучения вынужденных колебаний состоит из платформы, подвешенной на одинаковых упругих нитях общей жесткости k, и мотора, закрепленного на платформе (общая масса мотора и платформы равна M). На вращающийся с постоянной угловой скоростью ω вал мотора насажен невесомый стержень длины l, свободный конец которого несет

точечную массу m. Построить электрический контур, моделирующий работу установки.



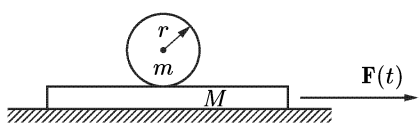
К задаче 13.14



К задаче 13.15

13.15. На груз A массы m_1 (см. рисунок), подвешенный к неподвижной точке O на пружине жесткости k_1 действует вертикальная сила $F = F(t)$. К грузу A на пружине жесткости k_2 подвешен груз B массы m_2, испытывающий сопротивление жидкости, пропорциональное первой степени скорости (коэффициент пропорциональности β). Построить электрический контур, моделирующий движение этой механической системы.

13.16. Доска массы M (см. рисунок) скользит вдоль горизонтальных направляющих под действием силы $F(t)$, испытывая сопротивление, пропорциональное первой степени скорости (коэффициент



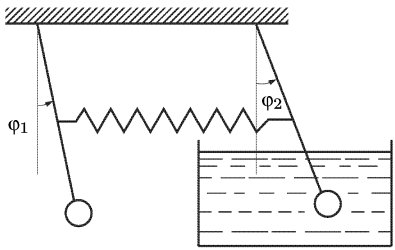
К задаче 13.16

пропорциональности β). По доске катится без проскальзывания однородный цилиндр радиуса r и массы m. Построить электрическую цепь, моделирующую движение этой механической системы.

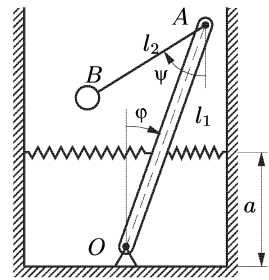
13.17. Построить электрическую цепь, моделирующую малые колебания двойного математического маятника.

13.18. Два плоских математических маятника массы m и длины l каждый (см. рисунок) соединены невесомой пружиной жесткости k прикрепленной концами к стержням маятников на расстоянии a от точек их подвеса. В положении равновесия пружина ненапряжена. На один из маятников действует внешний момент сил $M(t)$, а на другой — сила сопротивления, пропорциональная скорости маятника (β — коэффициент пропорциональности). Построить электрическую цепь, моделирующую малые колебания системы.

13.19. Обращенный физический маятник OA (см. рисунок), представляющий собой однородный стержень массы M и длины l_1, прикреплен 0ptk неподвижным стенкам пружинами жесткости k.



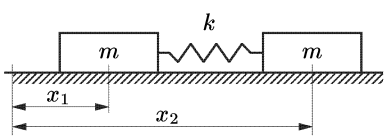
К задаче 13.18



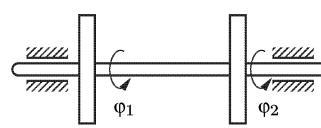
К задаче 13.19

В точке A подвешен математический маятник AB массы m и длины l_2, на который действует сила сопротивления $-\beta\mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ — абсолютная скорость точки B. Построить электрическую цепь, моделирующую малые колебания системы, считая, что ее движение происходит только в вертикальной плоскости вблизи положения $\varphi = \psi = 0$.

13.20. Составить электрический контур, моделирующий движение изображенной на рисунке механической системы, приняв в качестве обобщенных координат $q_1 = (x_1 + x_2)/2$ и $q_2 = (x_1 - x_2)/2$.

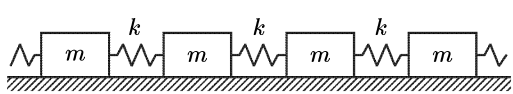


К задаче 13.20



К задаче 13.21

13.21. Составить электрический контур, моделирующий крутильные колебания изображенной на рисунке механической системы, приняв в качестве обобщенных координат $q_1 = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$ и $q_2 = (\varphi_1 - \varphi_2)/2$.

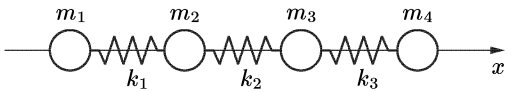


К задаче 13.22

13.22. Система из n одинаковых масс m (см. рисунок), соединенных пружинами жесткости k, представляет собой механический

фильтр продольных колебаний. Построить электрический аналог этого фильтра.

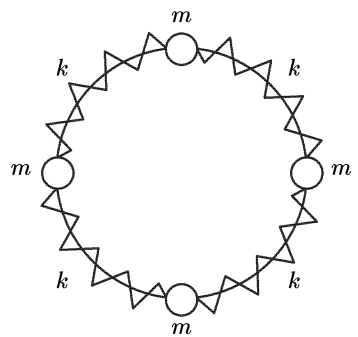
13.23. Пользуясь электромеханическими аналогиями, построить контур, моделирующий движение линейной модели четырехатомной



К задаче 13.23

молекулы (см. рисунок). Модель представляет собой систему четырех точечных масс m_1, m_2, m_3, m_4 ($m_1 = m_4 = m$, $m_2 = m_3 = pm$), насаженных на гладкий горизонтальный стержень и соединенных пружинами жесткости k_1, k_2, k_3 ($k_1 = k_3 = k$, $k_2 = qk$).

13.24. Четыре одинаковые точечные массы m (см. рисунок), связанные одинаковыми пружинами жесткости k каждая, могут скользить по гладкому неподвижному горизонтальному кольцу. Построить электрическую цепь, моделирующую движение системы.

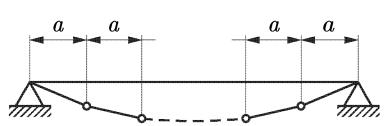


К задаче 13.24

13.25. Решить предыдущую задачу для случая n одинаковых масс, связанных n одинаковыми пружинами.

13.26. Построить электрический аналог пружины, состоящей из двух последовательно соединенных участков с жесткостями k_1 и k_2. Используя выражение для эквивалентной жесткости пружины (см. задачу 7.11), получить выражение для емкости эквивалентного конденсатора. Рассмотреть аналогичную задачу для случая параллельно соединенных пружин.

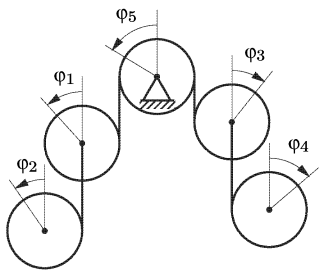
13.27. Используя электромеханические аналогии, построить контур, моделирующий малые поперечные колебания упругой нити, несущей n одинаковых точечных масс (см. рисунок).



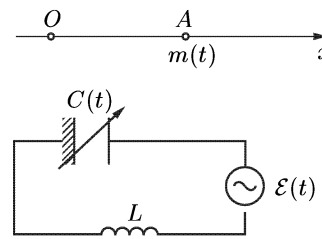
К задаче 13.27

13.28. Используя электромеханические аналогии, построить контур, моделирующий движение системы из пяти одинаковых цилиндров массы m и радиуса r (см. рисунок). Центры цилиндров движутся по вертикали: нити по цилиндрам не скользят.

13.29. Точка A переменной массы $m = m(t)$ (см. рисунок) движется вдоль оси Ox под действием силы F, направленной к неподвижному центру O и пропорциональной расстоянию до центра с коэффициентом пропорциональности k. Относительная скорость



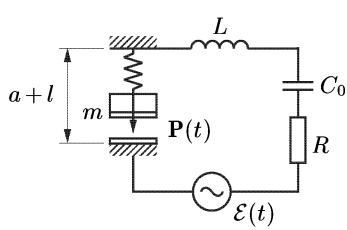
К задаче 13.28



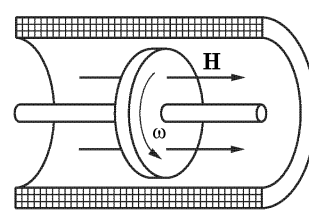
К задаче 13.29

отсоединяющихся масс постоянна и равна u, причем отсоединяющиеся частицы вылетают в направлении, противоположном положительному направлению оси Ox. Используя электромеханические аналогии, найти такие законы изменения расстояния $d = d(t)$ между пластинами конденсатора и электродвижущей силы $\mathcal{E} = \mathcal{E}(t)$, чтобы контур, изображенный на рисунке, моделировал указанное движение точки переменной массы. Площадь пластин конденсатора равна S_0.

13.30. Составить уравнения движения электромеханической системы, изображенной на рисунке. Длина пружины в недеформированном состоянии равна l, ее жесткость равна k, масса подвижной пластины равна m. Когда пружина недеформирована, расстояние между подвижной и неподвижной пластинами конденсатора равно a, а его емкость равна C_1.



К задаче 13.30



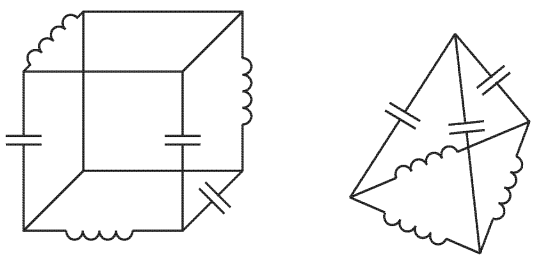
К задаче 13.31

13.31. В униполярном генераторе (см. рисунок), предложенном в 1831 г. Фарадеем, при приложении аксиального магнитного поля H между центром и наружным краем вращающегося металлического

диска возникает напряжение $V = \alpha i \omega$, пропорциональное току i и угловой скорости диска ω. Составить уравнения динамики генератора. Момент инерции диска равен J, омическое сопротивление генератора равно R, индуктивность L.

13.32. Доказать теорему Эйлера: число независимых контуров линейной электрической цепи равно $n = N - M + 1$, где M — число узлов схемы (узлом называется точка схемы, при вырезании которой приходится разрывать не менее трех проводников), а N — общее число соединений между узлами [1].

13.33. Найти число степеней свободы электрической схемы (см. рисунок), проводники которой образуют пространственное соединение в форме куба и тетраэдра.



К задаче 13.33

13.34. Пользуясь электромеханическими аналогиями, составить уравнения состояния электрической схемы, узлы которой находятся в вершинах: а) тетраэдра, б) куба. Каждый участок цепи между вершинами содержит одинаковые индуктивности L, емкости C и сопротивления R.

13.35. Дана электрическая схема, состоящая из n независимых контуров, в каждом из которых может содержаться индуктивность L_i, емкость C_i, омическое сопротивление R_i и источник переменного напряжения $\mathcal{E}_i(t)$ $(i = \overline{1, n})$. Если у i-го и j-го контуров имеется общий участок цепи, то он может содержать индуктивность $L_{ij} = L_{ji}$, емкость $C_{ij} = C_{ji}$ и омическое сопротивление $R_{ij} = R_{ji}$. При наличии взаимной индукции между i-м и j-м контурами соответствующий коэффициент равен $M_{ij} = M_{ji}$. Пользуясь электромеханическими аналогиями, выписать выражения для функции Лагранжа $\mathcal{L}$, функции Релея $\mathcal{R}$ и для непотенциальных обобщенных сил Q_i^*.

[1] Строгое определение получается при использовании теории графов, когда каждой схеме ставится в соответствие ее граф соединений. В этом случае M — число вершин графа и N — число его ребер.

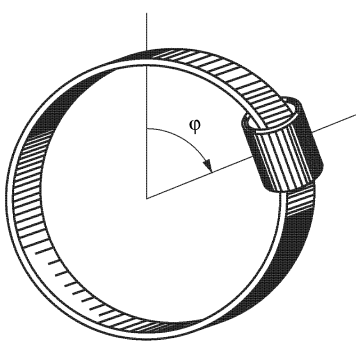
§ 14. Условия равновесия

14.1. Существует ли положение равновесия системы из N материальных точек, взаимодействующих по закону всемирного тяготения?

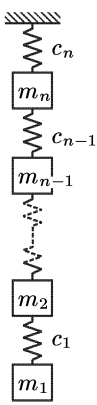
14.2. Материальная точка может двигаться без трения по поверхности $f(x, y, z) = 0$ под действием силы $\mathbf{F} = \{-kx, -ky, -kz\}$. Какой должна быть функция $f(x, y, z)$ для того, чтобы каждая точка поверхности могла быть положением равновесия?

14.3. Приспособление для экспериментального определения коэффициента трения состоит из обруча (см. рисунок), расположенного в вертикальной плоскости, и шайбы, насаженной на обруч. Найти связь между коэффициентом трения f и наибольшим углом φ, при котором отпущенная без начальной скорости шайба остается в равновесии.

14.4. Найти положение равновесия тяжелой точки массы m, которая может двигаться без трения по винтовой линии на круговом цилиндре с вертикальной осью Oz. Точка притягивается одной из точек оси Oz силой, пропорциональной расстоянию между ними. Коэффициент пропорциональности равен k.



К задаче 14.3



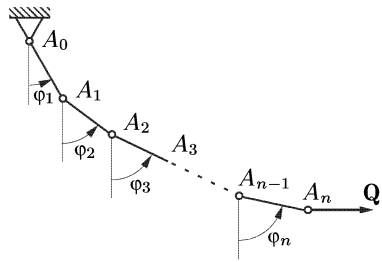
К задаче 14.5

14.5. Найти деформации пружин в положении равновесия системы масс, изображенной на рисунке.

14.6. Материальные точки A_0, A_1, $A_2, \ldots$, A_n массы m каждая (см. рисунок) последовательно соединены одна с другой невесомыми стержнями одинаковой длины. Вся система расположена в вертикальной плоскости. Первая точка A_0 неподвижно закреплена и занимает наивысшее положение, а на последнюю точку A_n действует

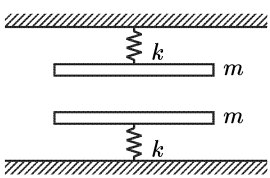
постоянная горизонтальная сила Q. Найти углы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, которые образуют стержни с вертикалью в положении равновесия.

14.7. Цепь, состоящая из n одинаковых однородных стержней массы m каждый, подвешена в вертикальной плоскости. Стержни соединены друг с другом с помощью шарниров. Один конец этой системы неподвижно закреплен, а на второй действует постоянная горизонтальная сила Q (см. рис. к задаче 14.6). Найти углы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, которые образуют стержни с вертикалью в положении равновесия.

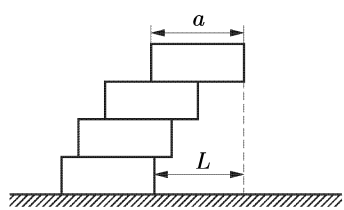


К задаче 14.6

14.8. Две одинаковые тяжелые пластины массы m каждая (см. рисунок) заряжены зарядами q и $-q$ соответственно. Пластины прикреплены к неподвижным опорам с помощью одинаковых непроводящих пружин жесткости k каждая и могут совершать движение по вертикали. В положении, когда пружины ненапряжены, расстояние между пластинами равно d, а емкость образованного ими конденсатора в этот момент равна C. Найти положение равновесия системы.



К задаче 14.8



К задаче 14.9

14.9. Одинаковые гладкие пластины длины a (см. рисунок) укладываются одна на другую, как показано на рисунке. Найти максимальную длину «пролета» L (как функцию числа пластин n), при которой система остается в положении равновесия.

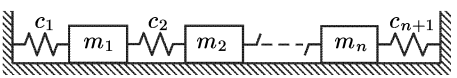
14.10. Используя принцип возможных перемещений, доказать, что равенство нулю главного вектора $\mathbf{R}$ и главного момента $\mathbf{M}_O$ сил, действующих на твердое тело, является необходимым и достаточным условием равновесия свободного твердого тела.

14.11. Балка несет распределенную нагрузку $q(x)$. Из принципа виртуальных перемещений получить дифференциальные соотношения, связывающие изгибающий момент $M(x)$, перерезывающую силу $Q(x)$ и нагрузку в каждом сечении балки.

14.12. На изготовление фермы идет наименьшее количество материала в том случае, если в каждом сечении изгибающий момент фермы равен нулю. Найти наивыгоднейшую в этом смысле форму фермы, если распределенная нагрузка, отнесенная к единице длины горизонтальной проекции фермы, постоянна. Длина фермы равна $2l$, ее высота h.

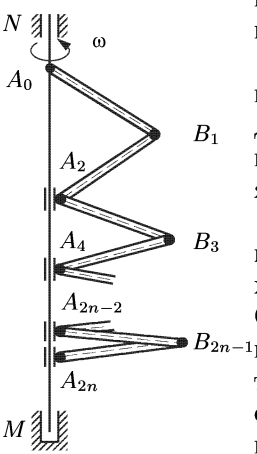
14.13. Однородный стержень $AB = l$ может двигаться в вертикальной плоскости xy так, что конец A скользит по прямой Oy, а конец B — по кривой $y = f(x)$. Плоскость xy вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Oy. Трение в системе отсутствует. Какой должна быть функция $f(x)$, чтобы любое положение стержня было положением относительного равновесия, если $f(0) = 0$?

14.14. Массы m_i $(i = \overline{1, n})$, связанные между собой и с неподвижными стенками пружинами (см. рисунок), могут скользить по



К задаче 14.14

гладкой горизонтальной направляющей. Известно, что одна из крайних масс (m_1 или m_n) покоится. Показать, что в этом случае покоятся и все остальные массы, т. е. система находится в равновесии.



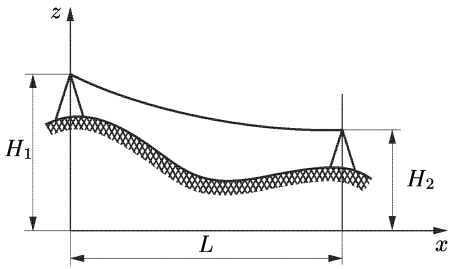
К задаче 14.16

14.15. Система подвешенных на пружинах грузов (см. рис. к задаче 14.5) может совершать движение по вертикали. Показать, что если верхний груз находится в состоянии покоя, то в состоянии покоя находятся и все остальные грузы.

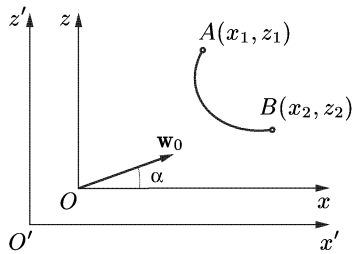
14.16. Система из $2n$ одинаковых стержней массы m и длины l каждый (см. рисунок) может вращаться вокруг вертикальной оси MN. Стержни соединены между собой шарнирами в точках $B_1, B_3, \ldots, B_{2n-1}$ и с невесомыми муфтами в точках $A_0, A_2, A_4, \ldots, A_{2n}$. Трение в системе отсутствует. Найти положение относительного равновесия системы.

14.17. При переходе через препятствие вершины двух мачт линии высокого напряжения оказались на высотах H_1 и H_2 над уровнем моря (см. рисунок). Найти форму равновесия провода длины l, считая его однородным, гибким и нерастяжимым, если расстояние между опорами равно L.

14.18. Система координат xOz (см. рисунок) движется поступательно относительно неподвижной системы $x'O'z'$ с постоянным ускорением $\mathbf{w}_0$. Концы нити неподвижно закреплены в системе xOz



К задаче 14.17



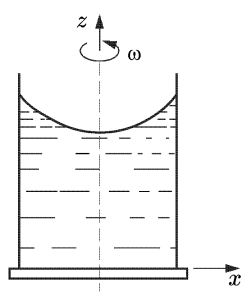
К задаче 14.18

в точках $A(x_1, z_1)$ и $B(x_2, z_2)$; вектор ускорения $\mathbf{w}_0$ образует постоянный угол α с горизонтом. Найти форму равновесия тяжелой однородной нити в движущейся системе координат.

14.19. Космическая станция вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси Oy, сохраняющей неизменное направление в пространстве. Найти форму равновесия однородной нерастяжимой нити, которая расположена в неподвижной относительно станции плоскости xy, если концы нити закреплены в точках $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$.

14.20. Точка O подвеса неоднородной нити движется с постоянным ускорением $\mathbf{w}_0$. Найти положение относительного равновесия нити в системе координат, поступательно движущейся вместе с точкой O.

14.21. Используя принцип возможных перемещений и считая поле тяжести однородным, найти уравнение $z(x, y)$ свободной поверхности идеальной несжимаемой жидкости в цилиндрическом сосуде, равномерно вращающемся с угловой скоростью ω (см. рисунок).



К задаче 14.21

14.22. Показать, что плотность ρ однородной изотермической равновесной атмосферы изменяется с высотой по барометрическому закону $\rho = \rho_0 e^{-gh/RT}$, где ρ_0 — плотность на поверхности Земли, T — температура, R — универсальная газовая постоянная.

14.23. Потенциальная энергия консервативной системы $\Pi = \Pi(q_{s+1}, \ldots, q_n)$ не зависит от обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_s$ Найти положения равновесия системы.

14.24. Сформулировать необходимые и достаточные условия того, что положение $q_i = a_i$ $(i = \overline{1, n})$ натуральной системы с идеальными связями является положением равновесия, если уравнения Лагранжа имеют единственное решение при заданных начальных условиях. Кинетическую энергию системы $T = T_2 + T_1 + T_0 = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}(q_j, t)\dot{q}_i\dot{q}_k + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(q_j, t)\dot{q}_i + T_0(q_j, t)$ и обобщенные силы $Q_i = Q_i(q_j, \dot{q}_j, t)$ считать известными функциями. Из полученных условий вывести принцип возможных перемещений для случая склерономной системы.

14.25. Для отыскания положений равновесия сложных механических систем используют различные численные методы. В частности, для консервативной системы с потенциалом $\Pi(x_i)$, $i = \overline{1, n}$, составляют систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\frac{dx_s}{dt} = -\frac{\partial \Pi(x_i)}{\partial x_s} \quad (i, s = \overline{1, n}) \qquad (*)$$

и решают ее на ЭВМ, перебирая по некоторому правилу возможные начальные условия $x_s(0) = x_s^0$. Показать, что если процесс в системе $(*)$ для некоторого x_s^0 $(s = \overline{1, n})$ сходится, т. е. если существуют пределы $\lim\limits_{t\to\infty} x_s(x_i^0, t) = \gamma_s$ $(i, s = \overline{1, n})$, то положение $x_s = \gamma_s$ $(s = \overline{1, n})$ является положением равновесия системы.

14.26. Показать, что в условиях предыдущей задачи вместо системы $(*)$ можно рассматривать систему вида

$$\dot{x}_s = F_s\left(\frac{\partial \Pi(x_i)}{\partial x_1}, \frac{\partial \Pi(x_i)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial \Pi(x_i)}{\partial x_n}\right) \ (i, s = \overline{1, n}),$$

где функции $F_s(z_1, \ldots, z_n)$ таковы, что система алгебраических уравнений $F_s(z_i) = 0$ $(i, s = \overline{1, n})$ имеет только нулевое решение $(z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0)$.

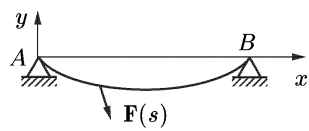
14.27. Материальная точка может скользить без трения по поверхности $f(x, y, z) = 0$ в силовом поле с потенциалом $\Pi(x, y, z)$. Используя метод неопределенных множителей Лагранжа, показать, что всем стационарным точкам функции $\Phi = \Pi(x, y, z) + \lambda f(x, y, z)$ (λ — неопределенный множитель Лагранжа), удовлетворяющим уравнению поверхности, соответствуют положения равновесия точки, и обратно.

14.28. Шарик может скользить без трения по проволоке, изогнутой в форме плоской кривой 2-го порядка $ax^2 + bxy + cy^2 + \alpha x + \beta y + \rho = 0$, $4ac - b^2 \neq 0$. Найти положения равновесия шарика, если ось Oy направлена вертикально вверх.

14.29. Материальная точка в силовом поле $\mathbf{F} = \{F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z)\}$ может двигаться без трения по поверхности $f(x, y, z) = 0$. Показать, что любое решение системы

$$F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad f(x, y, z) = 0$$

(относительно переменных x, y, z, λ) определяет положение равновесия (x, y, z) точки и, обратно, любому положению равновесия $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ соответствует решение системы $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{\lambda})$.



К задаче 14.30

14.30. Гибкая нерастяжимая нить AB (см. рисунок), концы которой закреплены, находится в равновесии под действием распределенной силы $\mathbf{F} = \mathbf{F}(s) = \{X(s), Y(s)\}$, где s — длина дуги. Показать, что функции $x = x(s)$, $y = y(s)$, определяющие равновесную форму нити и натяжение $T = T(s)$, являются решением системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{ds}\left[T\frac{dx}{ds}\right] + X(s) = 0, \quad \frac{d}{ds}\left[T\frac{dy}{ds}\right] + Y(s) = 0,$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1.$$

Из каких условий можно определить произвольные постоянные, входящие в это решение?

14.31. На склерономную систему наложены удерживающие связи $f_s(x_i, y_i, z_i) = 0$ $(s = \overline{1, m}; i = \overline{1, n})$ и неудерживающие связи $g_\nu(x_i, y_i, z_i) \leqslant 0$ $(\nu = \overline{1, k})$. В некотором положении из всех неудерживающих напряжены только связи $g_1, \ldots, g_l$ $(l \leqslant k)$. Каким условиям удовлетворяют возможные перемещения в этом положении?

14.32. Шарик массы m подвешен на гибкой нерастяжимой нити длины l (неудерживающая связь). Показать, что в положении равновесия шарика для любых возможных перемещений, допускаемых связью, выполняется неравенство $\delta\Pi \geqslant 0$, где Π — потенциал сил, и что справедливо также обратное утверждение.

14.33. На систему материальных точек с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, которая может двигаться в силовом поле с потенциалом $\Pi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n)$, наложены идеальные удерживающие и неудерживающие стационарные связи. Доказать, что в положении равновесия

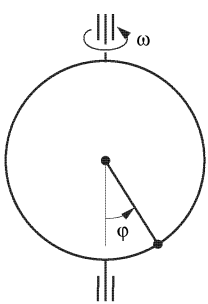
системы $d\Pi \geqslant 0$ на любых возможных в этом положении перемещениях и, обратно, что все точки, где $\partial\Pi \geqslant 0$ на любых возможных перемещениях, будут положениями равновесия.

14.34. Система движется в потенциальном поле $\Pi = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k q_k$ $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^2 > 0\right)$, причем на нее наложена неудерживающая идеальная связь $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i^2 - 1 \leqslant 0$. Найти положение равновесия системы.

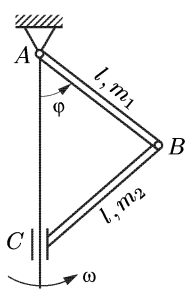
14.35. Доказать справедливость следующего утверждения: для того чтобы некоторое положение склерономной системы, на которую наложены удерживающие и неудерживающие связи, было положением равновесия, необходимо и достаточно, чтобы в этом положении работа сил, действующих на точки системы, на любом возможном (допускаемом связями) перемещении была неположительна.

14.36. Проволочная окружность радиуса r (см. рисунок) вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг своего вертикального диаметра. Найти положения относительного равновесия колечка, которое может скользить по окружности без трения.

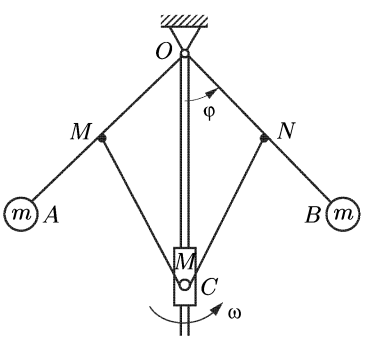
14.37. Два стержня $AB = l$ и $BC = l$ массы m_1 и m_2 соответственно (см. рисунок) вращаются с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. Найти угол φ, который стержень AB образует с вертикалью в положении относительного равновесия.



К задаче 14.36



К задаче 14.37



К задаче 14.38

14.38. Найти зависимость между угловой скоростью ω вращения вала и углом φ отклонения стержней OA в OB от вертикали в положении относительного равновесия центробежного регулятора, схема которого показана на рисунке. Шарики регулятора A и B имеют массу m каждый, муфта C имеет массу $M = \alpha m$; жесткость пружины, соединяющей точки O и C, равна k, а ее длина в недеформированном

состоянии равна $2l$, $AO = BO = 2l$, $OM = ON = CM = CN = l$. Массой стержней пренебречь.

14.39. Материальные точки A_0, A_1, A_2, ..., A_n (см. рис. к задаче 14.6.) последовательно соединены одна с другой невесомыми стержнями одинаковой длины l. Вся система, расположенная в вертикальной плоскости, вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикали, проходящей через неподвижную точку A_0. Составить уравнения, определяющие все положения равновесия системы.

14.40. Маятник составлен из n одинаковых стержней массы m и длины l каждый, последовательно, соединенных друг с другом шарнирами (n-звенный маятник). Маятник может совершать движение в вертикальной плоскости Π, которая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикали, проходящей через точку A_0 закрепления конца первого стержня. Составить уравнения, определяющие положения относительного равновесия системы. (См. рис. к задаче 14.6.)

14.41. Материальная точка может двигаться по линии пересечения двух плоскостей $-2x_1 + x_2 + x_3 - t = 0$, $x_1 - 2x_2 + x_3 + t^2 = 0$. Найти систему бесконечно малых возможных перемещений точки.

14.42. Используя принцип возможных перемещений, доказать теорему о трех силах: если свободное твердое тело находится в положении равновесия под действием трех сил, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

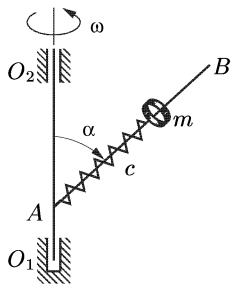
14.43. Кинетическая энергия механической системы в обобщенных координатах $q = (q_i)_{i=1}^n$ задается квадратичной формой $T = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}(q,t)\dot{q}_i\dot{q}_k$, коэффициенты a_{ik} которой явно зависят от времени. Доказать, что для таких систем справедлив принцип возможных перемещений: положение системы $q_i = c_i$ является положением равновесия в том и только том случае, если в этом положении все обобщенные силы равны нулю.

§ 15. Устойчивость равновесия консервативных систем

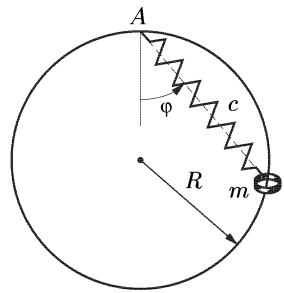
15.1. Частица массы m, несущая заряд e, находится в электрическом поле неподвижного заряда q. Найти положение равновесия частицы в однородном поле тяжести и исследовать его устойчивость.

15.2. Стержень AB (см. рисунок), образующий угол α с вертикалью, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси O_1O_2. По стержню может двигаться без трения тяжелое колечко массы m, соединенное с неподвижным концом стержня A

пружиной жесткости c. Длина пружины в недеформированном состоянии равна l_0. Найти положения относительного равновесия колечка и исследовать их устойчивость.



К задаче 15.2



К задаче 15.3

15.3. По гладкой проволочной окружности радиуса R (см. рисунок), неподвижно закрепленной в вертикальной плоскости, может скользить тяжелое колечко массы m, соединенное с наивысшей точкой A окружности пружиной жесткости c; длина пружины в недеформированном состоянии равна l_0. Найти положения равновесия колечка и исследовать их устойчивость.

15.4. Материальная точка находится в поле тяжести на поверхности, определяемой уравнением:

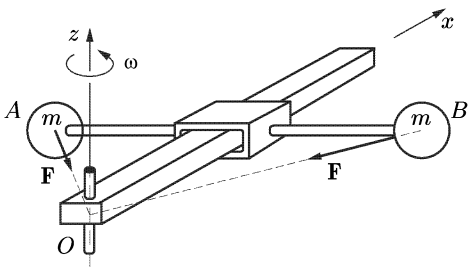
а) $z = 4x^2 + 2xy + y^2$;
б) $z = x^2 - xy + y^2$;
в) $z = x^2 + xy - y^2$;
г) $z = 4x^2 - 2xy + 2y^2$;
д) $z = 2xy$.

Найти положения равновесия материальной точки на каждой поверхности и исследовать их устойчивость, если трение в системе отсутствует, а ось Oz направлена вверх.

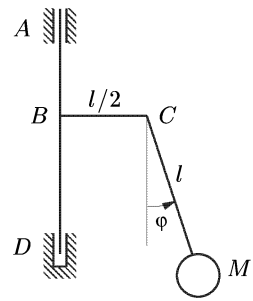
15.5. Гантель AB длины $2l$ (см. рисунок) состоит из двух одинаковых масс m, соединенных невесомым стержнем. Каждая из масс притягивается к неподвижному центру O по закону $F = -\alpha m/r^2$, где $r = OA = OB$. Центр гантели может перемещаться по гладкой горизонтальной направляющей Ox, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси Oz, причем гантель не поворачивается относительно направляющей. Найти положения относительного равновесия гантели во вращающейся системе координат и исследовать их устойчивость.

15.6. Шарик, подвешенный на невесомом стержне длины l, может совершать колебания в вертикальной плоскости, которая вра-

щается вокруг вертикальной оси, проходящей через точку подвеса маятника, с угловой скоростью $\omega = \text{const}$. Найти угол отклонения φ стержня от вертикали в положении относительного равновесия. Исследовать устойчивость соответствующих положений равновесия.



К задаче 15.5



К задаче 15.7

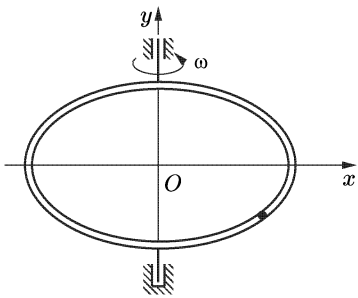
15.7. Прямой угол ABC (см. рисунок) вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = \sqrt{g/(l\sqrt{3})}$ вокруг вертикальной оси AD. В точке C с углом шарнирно соединен невесомый стержень CM, несущий на свободном конце груз массы m; длина стержня $CM = l$ вдвое больше длины стороны BC угла. Показать, что положение груза, соответствующее $\varphi = \pi/6$, является положением устойчивого равновесия во вращающейся системе отсчета.

15.8. Тяжелый шарик массы m может скользить по гладкой проволоке, изогнутой в форме параболы $x^2 = 2py$ и вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Oy. Найти положения относительного равновесия шарика и исследовать их устойчивость.

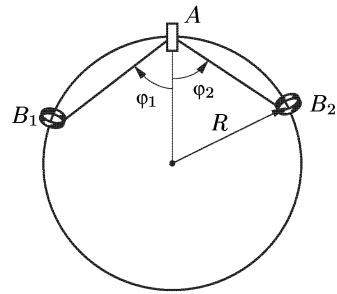
15.9. Шарик (см. рисунок) находится в полости гладкой трубки, изогнутой по эллипсу $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ и вращающейся вокруг вертикальной оси Oy с постоянной угловой скоростью ω. Определить положения относительного равновесия точки и исследовать их устойчивость.

15.10. По гладкой проволочной окружности радиуса R (см. рисунок), неподвижно закрепленной в вертикальной плоскости, могут двигаться два тяжелых колечка B_1 и B_2 с массами m_1 и m_2. Колечки связаны между собой упругой нитью жесткости c, которая пропущена через неподвижное кольцо, расположенное в наивысшей точке A окружности; длина нити в недеформированном состоянии равна l_0. Найти положение равновесия системы и исследовать его устойчивость.

15.11. Два одинаковых шарика, связанные пружиной жесткости c, могут скользить без трения по сторонам прямого угла, лежа-



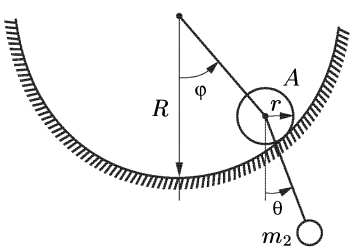
К задаче 15.9



К задаче 15.10

щего в горизонтальной плоскости. Длина пружины в недеформированном состоянии равна l_0. Найти положения равновесия шариков и исследовать их устойчивость.

15.12. Однородный цилиндр A массы m_1 и радиуса r (см. рисунок) может катиться без проскальзывания внутри неподвижного полого цилиндра радиуса R. К центру цилиндра A на невесомой упругой нити жесткости c подвешена бусинка массы m_2. Найти положения равновесия системы и исследовать их устойчивость.

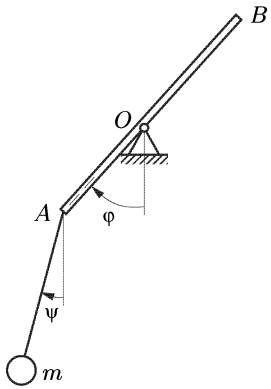


К задаче 15.12

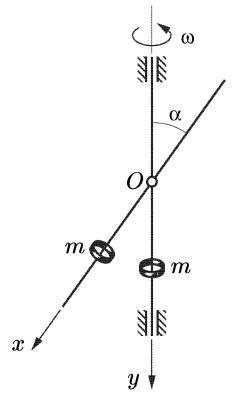
15.13. Груз массы m (см. рисунок) подвешен на невесомой нерастяжимой нити длины l к точке A однородного стержня массы M, который может вращаться вокруг закрепленной точки O ($AO = l_1$, $OB = l_2$). Движение происходит в вертикальной плоскости. Найти положения равновесия системы и исследовать их устойчивость.

15.14. Система (см. рисунок), состоящая из двух жестко связанных гладких стержней Ox и Oy, угол между которыми равен $\alpha < \pi/2$, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикального стержня Oy. По каждому из стержней может двигаться колечко массы m. Колечки притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной расстоянию между ними (коэффициент пропорциональности a). Найти положения относительного равновесия колечек и исследовать их устойчивость.

15.15. Материальная точка движется по гладкому параболоиду $z = \alpha x^2 + \beta y^2$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$, который вращается с постоянной угловой



К задаче 15.13



К задаче 15.14

скоростью ω вокруг вертикальной оси Oz. Найти условие, при котором точка с координатами $(0, 0, 0)$ является положением устойчивого равновесия в системе отсчета, связанной с параболоидом.

15.16. Материальная точка может двигаться по поверхности гладкого эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ с полуосями $a < b < c$, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси Oz. Найти положения относительного равновесия точки и исследовать их устойчивость.

15.17. Доказать теорему Ирншоу: любая статическая конфигурация электрических зарядов является неустойчивой. Обсудить в связи с этим вопрос об устойчивости молекул.

15.18. Кинетическая энергия и потенциальная энергия консервативной системы представляют собой квадратичные формы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} q_i q_k$$

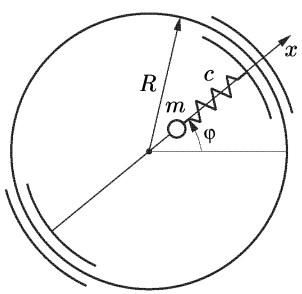
с постоянными коэффициентами, причем T — положительно определенная форма. Доказать, что для этой системы условия теоремы Лагранжа об устойчивости равновесия консервативной системы являются необходимыми и достаточными условиями устойчивости.

15.19. Потенциальная энергия $\Pi(q) = \Pi(q_1, \ldots, q_n)$ консервативной системы является дважды непрерывно дифференцируемой ограниченной снизу строго выпуклой функцией $(\Pi(\alpha x_i + (1-\alpha) y_i) \leqslant \alpha \Pi(x_i) + (1-\alpha)\Pi(y_i)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, а равенство имеет

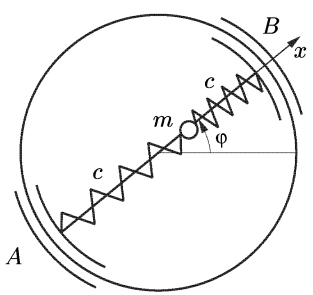
место лишь при $x_i = y_i$). Показать, что если положение системы $q = a$ является положением равновесия, то оно будет устойчивым, причем других положений равновесия не будет.

15.20. Показать, что положение равновесия $q_i = a_i$ ($i = \overline{1, n}$) консервативной системы будет устойчиво, если потенциальная энергия $\Pi(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ является дважды непрерывно дифференцируемой локально строго выпуклой функцией в точке a (т. е. в некоторой достаточно малой окрестности точки a при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ выполняется соотношение $\Pi(\alpha x_i + (1-\alpha) y_i) \leqslant \alpha \Pi(x_i) + (1-\alpha)\Pi(y_i)$, где равенство имеет место лишь при $x_i = y_i$). Убедиться в том, что в нижнем положении равновесия математического маятника его потенциальная энергия является локально строго выпуклой функцией.

15.21. По гладкому кольцу радиуса R (см. рисунок), расположенному в вертикальной плоскости, может скользить стержень длины $2R$. По стержню может двигаться без трения бусинка массы m, соединенная с одним из концов стержня пружиной жесткости $c \neq 2mg/R$, длина которой в недеформированном состоянии равна $R/2$. Найти положения равновесия системы и исследовать их устойчивость.



К задаче 15.21



К задаче 15.22

15.22. По гладкому кольцу радиуса R (см. рисунок), расположенному в вертикальной плоскости, может скользить своими концами невесомый стержень AB длины $2l$. По стержню AB может перемещаться без трения бусинка массы m, соединенная с точками A и B пружинами жесткости c. Длины пружин в ненапряженном состоянии равны R, плоскость кольца вертикальна. Используя обобщенные координаты x, φ, найти положения равновесия системы и исследовать их устойчивость.

15.23. Материальная точка может двигаться вдоль оси Ox под действием силы $F(x)$, зависящей только от положения точки. Предполагая функцию $F(x)$ достаточно гладкой, показать, что равновесие $x = a$ будет устойчиво в том и только в том случае, если на фазовой

плоскости $(x, \dot{x})$ существует замкнутая траектория, содержащая точку $\{a, 0\}$ внутри себя.

15.24. В условиях задачи 14.36 исследовать устойчивость положений относительного равновесия колечка.

§ 16. Малые колебания консервативных систем

16.1. Зависят ли собственные частоты малых колебаний консервативной системы вблизи устойчивого положения равновесия от выбора обобщенных координат (переход от одних координат к другим осуществляется при помощи стационарного преобразования)?

16.2. Объяснить, почему в консервативной системе с двумя степенями свободы, у которой $T = (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)/2$ и $\Pi = (q_1^4 + q_2^4)/4$, лишена смысла задача о малых колебаниях и необходимо исследовать нелинейные колебания.

16.3. В выражениях кинетической $T = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$ и потенциальной $\Pi = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} c_{ik}q_iq_k$ энергий консервативной системы коэффициенты постоянны и связаны равенствами $c_{ik} = \lambda a_{ik}$ $(i, k = \overline{1, n})$, где λ — положительное число. Показать, что в этой системе возможны колебания лишь с одной частотой $\omega = \sqrt{\lambda}$.

16.4. Механическая система с n степенями свободы совершает малые колебания. Определить собственную частоту ω_n, если известны собственные частоты $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$ и определители $\det \mathbf{A}$ и $\det \mathbf{C}$ матриц коэффициентов кинетической и потенциальной энергий.

16.5. Вековое уравнение $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ $(\lambda = \omega^2)$ малых колебаний некоторой консервативной системы имеет два различных корня λ_1 и λ_2 кратности k и $n-k$ соответственно. Показать, что λ_1 и λ_2 удовлетворяют уравнениям

$$\lambda_1 k + (n-k)\sqrt[n-k]{\frac{|a_n|}{|a_0|\lambda_1^k}} = \frac{|a_1|}{|a_0|}, \quad \lambda_2(n-k) + k\sqrt[k]{\frac{|a_n|}{|a_0|\lambda_2^{n-k}}} = \frac{|a_1|}{|a_0|}.$$

16.6. Показать, что амплитудные векторы $\mathbf{u}_j$ и $\mathbf{u}_k$, соответствующие различным собственным частотам малых колебаний консервативной системы, линейно независимы.

16.7. Собственным частотам малых колебаний консервативной системы $\omega_j \neq \omega_k$ соответствуют амплитудные векторы $\mathbf{u}_j$ и $\mathbf{u}_k$. Показать, что векторы $\mathbf{u}_j$ и $\mathbf{u}_k$ ортогональны, если скалярное произ-

ведение определить следующим образом: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i y_k$, где $\mathbf{A} = (a_{ik})_{i,k=1}^{n}$ — матрица кинетической энергии системы.

16.8. Кинетическая $T = \frac{1}{2} \sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k$ и потенциальная $\Pi = \frac{1}{2} \sum\limits_{i,k=1}^{n} c_{ik} q_i q_k$ энергии некоторой консервативной системы представляют собой положительно определенные квадратичные формы с постоянными коэффициентами. Свойства симметрии этой системы позволяют найти амплитудные векторы $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ $(m \leqslant n)$. Найти соответствующие собственные частоты системы, не решая векового уравнения.

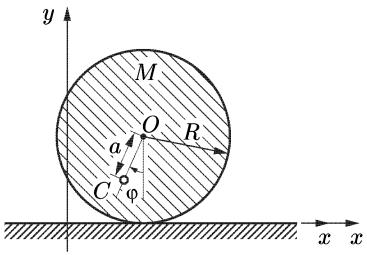
16.9. Консервативная система, у которой кинетическая $T = \frac{1}{2} \sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k$ и потенциальная $\Pi = \frac{1}{2} \sum\limits_{i,k=1}^{n} c_{ik} q_i q_k$ энергии представляют собой положительно определенные квадратичные формы с постоянными коэффициентами, имеет собственные частоты p_1, $p_2, \ldots, p_n$ и амплитудные векторы $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$. Найти собственные частоты ω_i и амплитудные векторы $\mathbf{v}_i$ консервативной системы с кинетической $T = \frac{1}{2} \sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k$ и потенциальной $\Pi = \frac{\alpha^2}{2} \sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik} q_i q_k + \frac{\beta^2}{2} \sum\limits_{i,k=1}^{n} c_{ik} q_i q_k$ энергиями.

16.10. Материальная точка A массы m, которая может скользить по гладкой горизонтальной направляющей $y = a$, притягивается к началу координат O силой с потенциалом $\Pi = \Pi(r)$, где $r = OA$. Найти период малых колебаний точки в окрестности устойчивого положения равновесия $x = 0$, $y = a$.

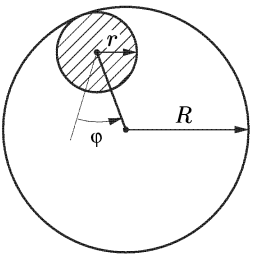
16.11. В Земле прорыта прямолинейная сквозная шахта, в которой движется без сопротивления материальная точка. Доказать, что период T колебаний точки, опущенной с поверхности Земли с нулевой начальной скоростью, равен периоду маятника Шулера, т. е. $T \approx 84$ мин. (Маятником Шулера называют такой математический маятник, длина которого равна радиусу Земли.)

16.12. Неоднородный диск радиуса R и массы M (см. рисунок), центр масс C которого расположен на расстоянии a от его геометрического центра O, может катиться без проскальзывания по горизонтальной направляющей. Момент инерции диска относительно оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр

масс, равен J. Найти малые колебания системы около устойчивого положения равновесия.



К задаче 16.12



К задаче 16.13

16.13. Обруч массы M и радиуса R (см. рисунок) может качаться в вертикальной плоскости, опираясь на неподвижный цилиндр радиуса r; проскальзывание между цилиндром и обручем отсутствует. Показать, что период малых колебаний обруча будет совпадать с периодом колебаний математического маятника длины $2(R-r)$.

16.14. Точка подвеса математического маятника длины l движется по горизонтальной прямой по закону $s = at^2/2$. Найти малые колебания маятника в системе отсчета, поступательно движущейся вместе с точкой подвеса.

16.15. Тяжелое колечко массы m может скользить по неподвижному гладкому проволочному эллипсу, задаваемому уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, ось Oy которого вертикальна. Найти малые колебания колечка около устойчивого положения равновесия.

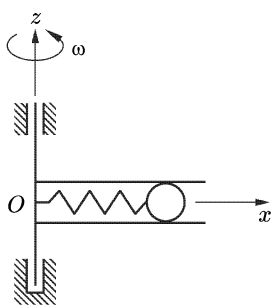
16.16. Тяжелое колечко массы m может скользить по гладкому проволочному эллипсу $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, вращающемуся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Oy. Найти малые колебания колечка около устойчивого положения относительного равновесия.

16.17. Тяжелое колечко массы m может скользить по гладкой проволочной параболе $y = x^2/(2l)$ (ось Oy направлена вертикально вверх). Показать, что период малых колебаний колечка вблизи положения равновесия совпадает с периодом математического маятника длины l.

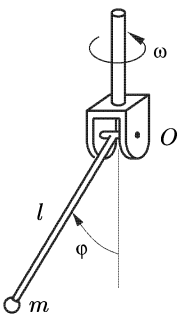
16.18. В гладкой горизонтальной трубке (см. рисунок), вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Oz, находится шарик массы m, связанный с осью невесомой

пружиной жесткости c. В начальный момент шарик находился в покое относительно трубки на расстоянии a от оси Oz и пружина была недеформирована. Пренебрегая размерами шарика, найти значения ω, при которых он совершает финитное движение, и найти при этих значениях ω малые колебания шарика во вращающейся системе отсчета.

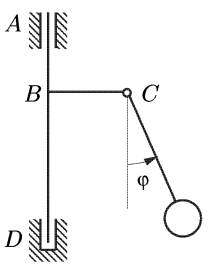
16.19. Конец O невесомого стержня длины l (см. рисунок), на другом конце которого находится точечная масса m, шарнирно соединен с вертикальным валом, вращающимся с постоянной угловой скоростью ω. Найти малые колебания стержня около устойчивого положения относительного равновесия.



К задаче 16.18



К задаче 16.19



К задаче 16.20

16.20. Математический маятник длины l (см. рисунок) совершает колебания в плоскости, вращающейся вокруг вертикальной оси. Точка подвеса маятника находится на расстоянии $l/2$ от оси вращения. Угловая скорость вращения плоскости равна $\omega = \sqrt{g/(\sqrt{3}l)}$. Найти малые колебания маятника во вращающейся системе отсчета вблизи положения равновесия $\varphi_0 = \pi/6$.

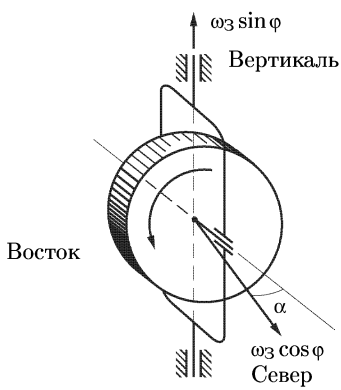
16.21. В поле двух неподвижных частиц одинакового заряда e, находящихся на расстоянии a одна от другой, движется частица массы m, несущая такой же заряд e. Считая, что движение совершается по прямой, соединяющей неподвижные заряды, найти положение равновесия частицы и ее малые колебания в окрестности этого положения.

16.22. Гантель (см. рис. к задаче 15.5), состоящая из двух одинаковых масс m, связанных невесомым нерастяжимым стержнем длины $2l$, может перемещаться поступательно по гладкой горизонтальной направляющей Ox, которая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O. Массы притягиваются к точке O силами $F = -\alpha m/r^2$, где r —

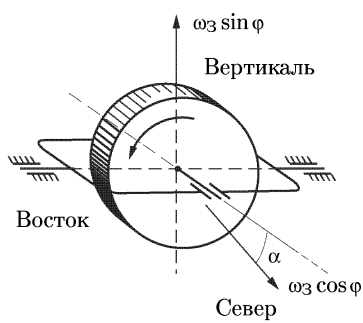
расстояние до точки O. Найти частоту малых колебаний гантели вблизи ее устойчивого положения равновесия.

16.23. Бусинка массы m, которая может двигаться по гладкой проволочной прямой AB, притягивается точками бесконечно тонкой однородной окружности радиуса R и массы M. Центр окружности лежит на прямой AB, а ее плоскость перпендикулярна этой прямой. Силы притяжения подчиняются закону Ньютона: $F_i = -k\mu_i m/r^2$, где μ_i — масса элемента окружности. Найти частоту малых колебаний бусинки.

16.24. Внешняя ось рамки деклинометрического гироскопа ($A = B \neq C$, $C\Omega = H$), установленного на географической широте φ, направлена по вертикали (см. рисунок). Момент инерции рамки относительно внешней оси равен J. Найти малые колебания оси ротора гироскопа около направления на север. Угловая скорость вращения Земли равна $\omega_З$.



К задаче 16.24

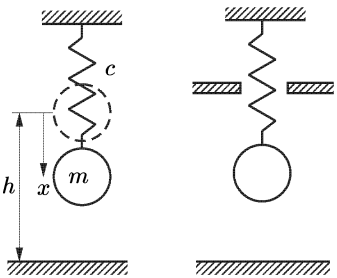


К задаче 16.25

16.25. Внешняя ось рамки инклинометрического гироскопа ($A = B \neq C$, $C\Omega = H$), изображенного на рисунке, установлена горизонтально в направлении «восток–запад» на географической широте φ. Момент инерции рамки относительно внешней оси равен J. Найти малые колебания оси ротора гироскопа относительно положения равновесия. Угловая скорость вращения Земли равна $\omega_З$.

16.26. Шарик массы m (см. рисунок), подвешенный на пружине жесткости c, во время движения может ударяться о преграду, как показано на рисунке. Расстояние от преграды до положения равновесия шарика равно h. Считая удар абсолютно упругим, найти частоту колебаний шарика. Рассмотреть картину движения шарика на фазовой плоскости $(x, \dot{x})$.

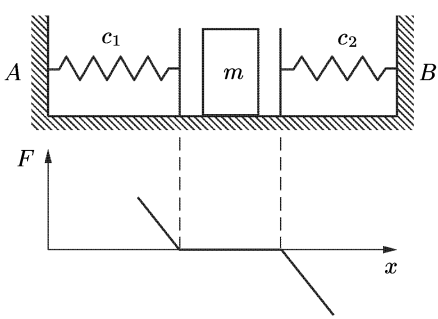
16.27. Решить предыдущую задачу в предположении, что шарик может двигаться между двумя преградами, как показано на рисунке. Расстояния от положения равновесия шарика до преград равны h_1 и h_2.



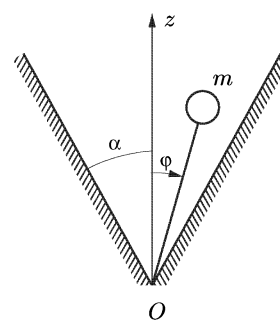
К задаче 16.26 К задаче 16.27

16.28. Груз массы m (см. рисунок) может двигаться по гладкой горизонтальной направляющей. Две пружины жесткости c_1 и c_2, прикрепленные к стенкам в точках A и B, имеют в недеформированном состоянии длины l_1 и l_2 соответственно, $l_1 + l_2 < AB = L$. Сила F взаимодействия груза с пружинами определяется приведенным графиком. Пренебрегая размерами груза, найти период его колебаний и изобразить траекторию движения на фазовой плоскости.

16.29. Обращенный математический маятник массы m и длины l (см. рисунок) может совершать колебания между преградами, образующими с вертикалью Oz малый угол α. Считая удар о преграду абсолютно упругим, найти приближенное значение периода колебаний маятника.



К задаче 16.28

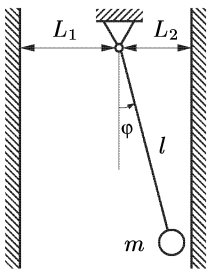


К задаче 16.29

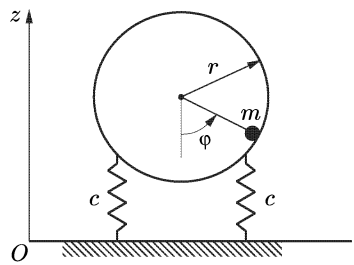
16.30. Математический маятник массы m и длины l (см. рисунок) может совершать колебания между двумя вертикальными стенками, причем расстояния L_1 и L_2 между точкой подвеса маятника и стенками удовлетворяют неравенству $L_1 + L_2 \ll l$. Считая удары абсолютно упругими, найти такое значение $\dot{\varphi}(0)$, чтобы при $\varphi(0) = 0$ частота $\omega = 10^4\sqrt{g/l}$.

16.31. Однородный горизонтальный диск может поворачиваться без трения вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр O; момент инерции диска относительно этой оси равен J. В круговом

желобе радиуса r с центром в точке O совершает малые колебания точка массы m, которая связана с диском лежащей в желобе пружиной жесткости c. Найти частоту колебаний точки и сравнить ее с частотой колебаний в случае неподвижно закрепленного диска. (Эффект ухода вперед карманных часов, помещенных на гладкий горизонтальный стол.)



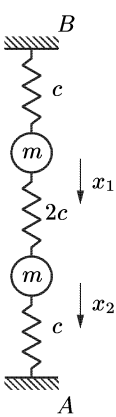
К задаче 16.30



К задаче 16.32

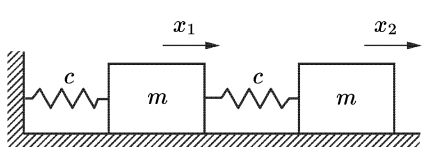
16.32. Гладкая проволочная окружность радиуса r и массы M (см. рисунок), соединенная с горизонтальной неподвижной плоскостью двумя одинаковыми пружинами жесткости c каждая, может поступательно перемещаться по вертикали. По внутренней стороне окружности может двигаться шарик массы m. Найти малые колебания системы около устойчивого положения равновесия.

16.33. Колебательная система, представленная на рисунке, помещена на Земле и на Марсе; силы тяжести параллельны прямой AB. Найти малые движения систем. Чем различаются эти движения?



К задаче 16.33

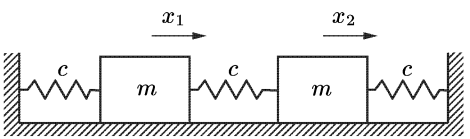
16.34. Два груза массами m_1 и m_2 (см. рисунок) связаны между собой и с неподвижной стенкой одинаковыми пружинами жесткости c. В каком соотношении должны находиться массы m_1 и m_2 для того, чтобы вектор $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ был амплитудным? При этих значе-



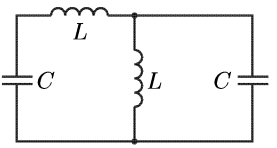
К задаче 16.34

ниях масс найти второй амплитудный вектор $\mathbf{u}_2$ и частоты главных колебаний.

16.35. Два одинаковых груза массы m (см. рисунок), связанных между собой и с неподвижными стенками пружинами жесткости c каждая, совершают малые колебания по гладкой горизонтальной направляющей. Как изменится наименьшая частота главных колебаний системы, если один из грузов неподвижно закрепить? (Эффект Релея.)



К задаче 16.35

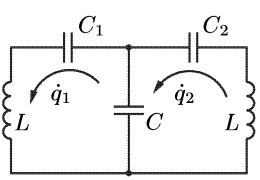


К задаче 16.37

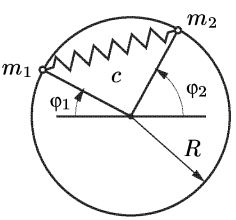
16.36. В условиях задачи 15.14 найти малые колебания в окрестности устойчивого равновесия, приняв $\alpha = \pi/3$, $m\omega^2 = 5a/9$.

16.37. Найти закон изменения во времени зарядов q_1 и q_2 в контуре, представленном на рисунке. В начальный момент $q_1(0) = q_{10}$, $q_2(0) = q_{20}$, $\dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$.

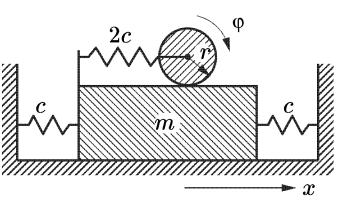
16.38. Электрический контур, изображенный на рисунке, моделирует явление биений. Найти закон изменения зарядов $q_1(t)$ и $q_2(t)$, если в начальный момент $q_1(0) = q_{10}$, $q_2(0) = q_{20}$, $\dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$.



К задаче 16.38



К задаче 16.39



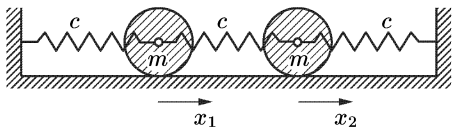
К задаче 16.40

16.39. Две массы $m_1 = m_2 = m$ (см. рисунок), связанные между собой пружиной жесткости c, могут двигаться по гладкому неподвижному горизонтальному кольцу радиуса R; длина пружины в недеформированном состоянии равна $R\sqrt{2}$. Найти малые колебания системы.

16.40. Доска массы m (см. рисунок), которая может скользить по гладкой горизонтальной направляющей, связана с неподвижными стенками двумя одинаковыми пружинами жесткости c каждая. По верхней стороне доски катится без проскальзывания диск массы

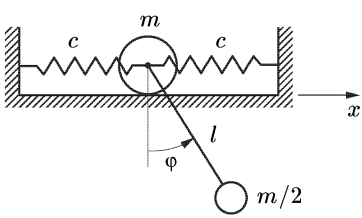
$m/2$ и радиуса r, центр которого соединен с краем доски пружиной жесткости $2c$. Найти малые колебания системы.

16.41. Два одинаковых однородных диска массы m каждый (см. рисунок) могут катиться без проскальзывания по горизонтальной направляющей. Центры дисков соединены между собой и с неподвижными стенками одинаковыми пружинами жесткости c. Найти малые колебания системы.

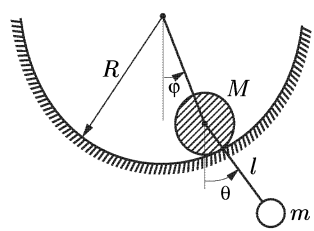


К задаче 16.41

16.42. Однородный диск радиуса r и массы m (см. рисунок), центр которого соединен с неподвижными стенками двумя одинаковыми пружинами жесткости c каждая, катится без проскальзывания по горизонтальной прямой. К центру диска подвешен математический маятник длины l и массы $m/2$. Считая, что $cl = mg$, найти малые колебания системы.



К задаче 16.42



К задаче 16.43

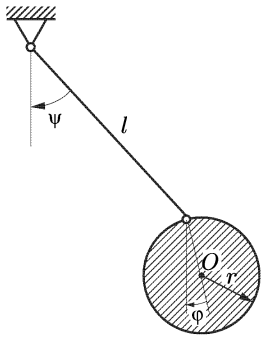
16.43. К центру однородного цилиндра радиуса r и массы m (см. рисунок), который может катиться без проскальзывания внутри неподвижного полого цилиндра радиуса R, подвешен математический маятник массы $m/2$ и длины $l = (R - r)/2$. Найти малые колебания системы вблизи устойчивого положения равновесия, если в начальный момент $\varphi(0) = 0$, $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\varphi}(0) = \dot{\theta}(0) = 0$.

16.44. Однородный круглый диск радиуса r и массы m (см. рисунок) подвешен на невесомой нерастяжимой нити длины $l = 3r/2$. Найти малые колебания системы в вертикальной плоскости.

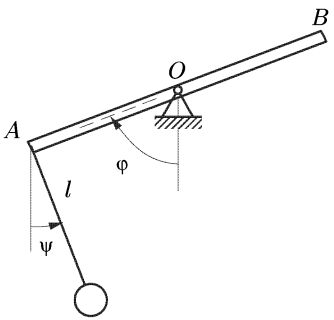
16.45. К концу A однородного стержня AB массы M и длины $3a$ (см. рисунок), который может поворачиваться в вертикальной плоскости вокруг неподвижной точки O ($AO = a$), на невесомой нерастяжимой нити длины $l = a$ подвешен грузик массы $m = 3M/4$.

Найти малые колебания системы вблизи устойчивого положения равновесия.

16.46. К концу A однородного стержня AB массы $m_1 = 2m$ и длины $2l$ (см. рисунок), который может поворачиваться в верти-

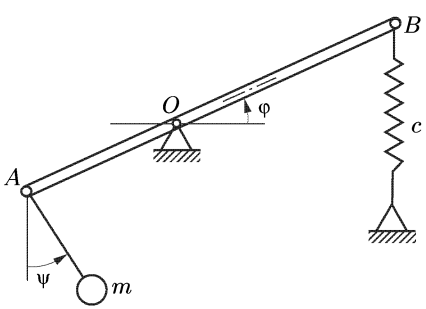


К задаче 16.44

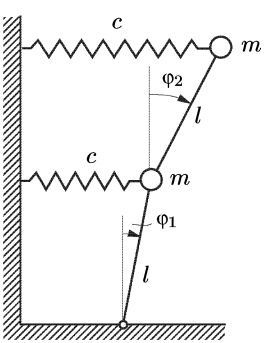


К задаче 16.45

кальной плоскости вокруг неподвижной точки O ($AO = AB/3$), на невесомой нерастяжимой нити длины l подвешен грузик массы m. Конец B стержня прикреплен к неподвижному основанию пружиной жесткости c (при горизонтальном положении стержня пружина ненапряжена). Найти малые колебания системы около устойчивого положения равновесия.



К задаче 16.46



К задаче 16.47

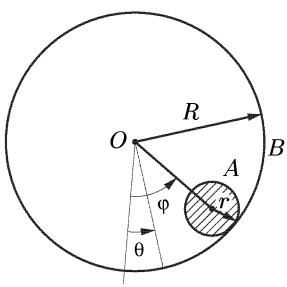
16.47. Найти малые колебания обращенного двойного маятника, изображенного на рисунке, вблизи устойчивого вертикального положения равновесия.

16.48. Решить предыдущую задачу считая, что система расположена в горизонтальной плоскости.

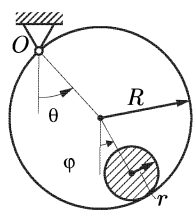
16.49. Точка подвеса двойного маятника, состоящего из двух одинаковых однородных стержней длины l каждый, движется с постоянным ускорением w_0 вдоль горизонтальной прямой. Найти малые колебания маятника в подвижной системе отсчета.

16.50. Однородный цилиндр A радиуса r и массы m (см. рисунок) катится без проскальзывания по внутренней поверхности полого цилиндра B радиуса R и той же массы m, который может вращаться вокруг своей горизонтально расположенной неподвижной оси O. Найти малые колебания системы.

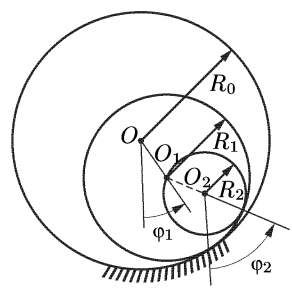
16.51. По внутренней поверхности полого цилиндра радиуса R и массы M (см. рисунок), который может свободно качаться вокруг горизонтальной образующей O, катится без проскальзывания однородный цилиндр радиуса $r = R/4$ и той же массы M. Найти малые колебания системы вблизи устойчивого положения равновесия.



К задаче 16.50



К задаче 16.51



К задаче 16.52

16.52. Три цилиндрические трубы с радиусами $R_0 = 3r$, $R_1 = 2r$, $R_2 = r$ вложены одна в другую, как показано на рисунке. Внешняя труба радиуса R_0 неподвижна, проскальзывание между трубами отсутствует, а их массы равны соответственно $m_1 = 3m$ и $m_2 = m$. Найти малые колебания системы около устойчивого положения равновесия.

16.53. Материальная точка находится на внутренней поверхности неподвижного эллипсоида с полуосями a, b и c, главная ось Oz которого направлена по вертикали. Найти малые колебания точки в окрестности устойчивого положения равновесия.

16.54. По гладкому параболоиду $z = \alpha x^2 + \beta y^2$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$, вращающемуся с постоянной угловой скоростью Ω вокруг вертикальной оси Oz, может двигаться материальная точка. Найти малые колебания точки в окрестности устойчивого положения равновесия в системе координат, связанной с параболоидом.

16.55. Найти общее решение задачи о малых колебаниях материальной точки, находящейся в поле силы тяжести на поверхности, заданной уравнением (ось Oz направлена вертикально вверх):

а) $lz - 4x^2 - 2xy - y^2 = 0$;

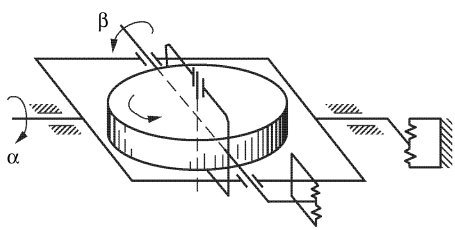
б) $lz - 2x^2 - 2xy - 3y^2 = 0$;

в) $lz - x^2 - xy - y^2 = 0$.

16.56. Твердое тело ($A > B > C$) может свободно вращаться вокруг неподвижного центра инерции. В начальный момент телу сообщают достаточно большую угловую скорость Ω относительно наименьшей (наибольшей) оси эллипсоида инерции. Найти частоты малых колебаний наименьшей (наибольшей) оси эллипсоида инерции.

16.57. Гиромаятник представляет собой быстро вращающийся гироскоп ($A = B \neq C$, $C\Omega = H$) в кардановом подвесе; вес гироскопа равен G, его центр масс лежит на оси симметрии на расстоянии s от точки подвеса. Найти частоты малых колебаний оси симметрии гироскопа.

16.58. Прибор, демонстрирующий работу гиромаятника, представляет собой гироскоп ($A = B \neq C$) в кардановом подвесе (см. рисунок). Ротор гироскопа вращается вокруг оси симметрии с постоянной

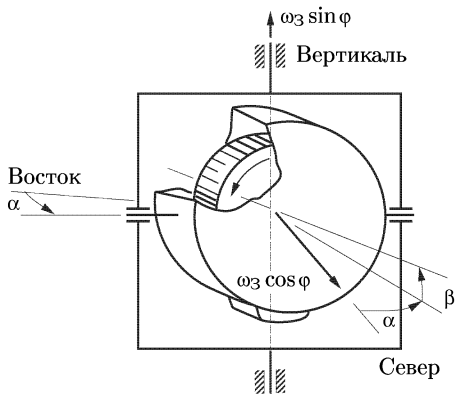


К задаче 16.58

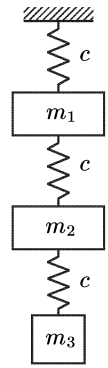
угловой скоростью Ω ($C\Omega = H$). Внутреннее кольцо вращается относительно внешнего кольца, последнее — относительно неподвижного основания; моментами инерции колец пренебречь. Пружины жесткости c между внутренним и внешним кольцами, а также между внешним кольцом и основанием обеспечивают взаимную ортогональность всех трех осей. Найти малые колебания оси гироскопа, используя углы α и β, показанные на рисунке.

16.59. Измерительный гирокомпас, применяемый для работы на неподвижном относительно Земли основании, представляет собой гироскоп ($A = B \neq C$, $C\omega_z = H$) в кардановом подвесе (см. рисунок). Наружная ось внешней рамки вертикальна, ось внутренней рамки — кожуха гироскопа — горизонтальна; моментами инерции внешней рамки и кожуха можно пренебречь. Груз массы m, прикрепленный

внизу к кожуху гироскопа на расстоянии l от его оси, превращает кожух в маятник, так что ось ротора при работе гирокомпаса остается почти горизонтальной. Найти малые колебания оси гироскопа вблизи положения равновесия.



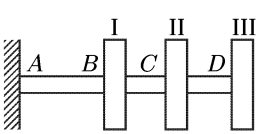
К задаче 16.59



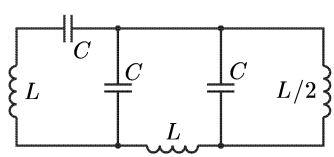
К задаче 16.60

16.60. Найти малые вертикальные колебания системы трех грузов, соединенных между собой и с неподвижной опорой одинаковыми пружинами жесткости c. Массы грузов $m_1 = m_2 = m$, $m_3 = m/2$.

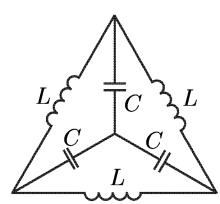
16.61. Найти малые крутильные колебания дисков (см. рисунок), насаженных на упругий вал, при следующих начальных условиях: $\varphi_i(0) = \varphi_i^0$, $\dot{\varphi}_i(0) = \dot{\varphi}_i^0$ $(i = \overline{1,3})$. Жесткости участков AB, BC и CD вала на кручение одинаковы и равны c, моменты инерции $J_{\mathrm{I}} = J_{\mathrm{II}} = J$, $J_{\mathrm{III}} = J/2$.



К задаче 16.61



К задаче 16.62



К задаче 16.63

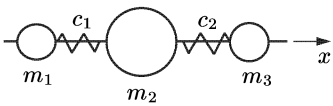
16.62. Найти закон изменения во времени зарядов в электрической цепи, изображенной на рисунке.

16.63. Найти закон изменения во времени зарядов в электрической цепи, изображенной на рисунке.

16.64. Линейная модель трехатомной молекулы может быть представлена как система трех точечных масс m_1, m_2, m_3, насажен-

ных на гладкий горизонтальный стержень (см. рисунок) и связанных пружинами жесткости c_1 и c_2. Найти движение системы в случае, когда $c_1 = c_2 = c$, $m_1 = m_3 = m$, $m_2 = nm$.

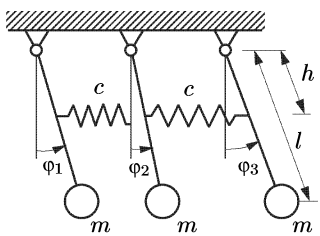
16.65. Гладкое неподвижное кольцо, расположенное в горизонтальной плоскости, несет шесть одинаковых точечных масс m, последовательно соединенных пружинами жесткости c. Найти движение системы.



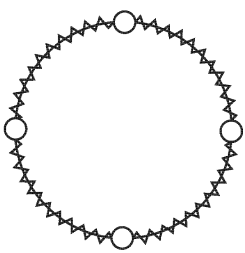
К задаче 16.64

16.66. Три маятника массы m и длины l каждый соединены между собой одинаковыми пружинами жесткости c, как показано на рисунке. Используя симметрию, найти малые колебания системы вблизи вертикального положения равновесия.

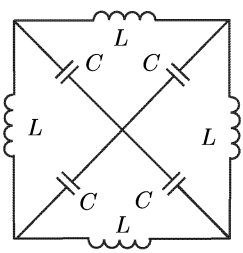
16.67. Решить предыдущую задачу с числом маятников, равным четырем и пяти.



К задаче 16.66



К задаче 16.68



К задаче 16.69

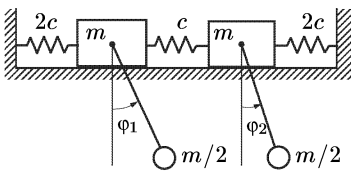
16.68. Гладкое неподвижное кольцо, расположенное в горизонтальной плоскости, несет четыре одинаковые точечные массы m, последовательно соединенные пружинами жесткости c, как показано на рисунке. Найти движение системы.

16.69. Найти закон изменения во времени зарядов в электрической цепи, изображенной на рисунке.

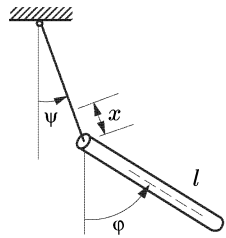
16.70. Два груза массы m каждый (см. рисунок), соединенные между собой пружиной жесткости c, а с неподвижными стенками пружинами жесткости $2c$ каждая, могут скользить по гладкой горизонтальной направляющей. К каждому грузу подвешен математический маятник массы $m/2$ и длины l. Используя симметрию системы, найти ее малые колебания. При вычислениях положить $c = mg/(2l)$.

16.71. Однородная палочка массы m и длины l (см. рисунок) подвешена на упругой нити жесткости c; длина нити в положении равновесия равна $2l/3$. Найти малые колебания системы в вертикальной плоскости вблизи устойчивого положения равновесия.

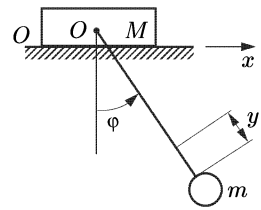
16.72. Шарик массы m (см. рисунок) подвешен на упругой нити жесткости c к доске массы M, которая может скользить по гладкой горизонтальной направляющей Ox; длина нити в ненапряженном состоянии равна l_0; размерами шарика можно пренебречь. Найти малые колебания системы.



К задаче 16.70

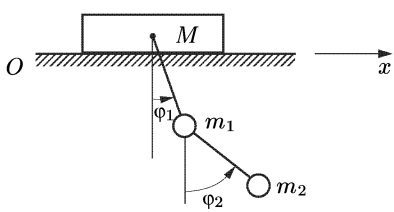


К задаче 16.71

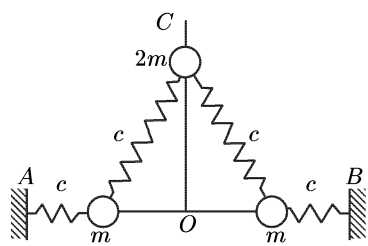


К задаче 16.72

16.73. К бруску массы M (см. рисунок), который может двигаться по гладкой горизонтальной направляющей, подвешен двойной математический маятник, причем $m_1 = m_2 = M/2$, $l_1 = l_2 = l$. Найти малые колебания системы.



К задаче 16.73

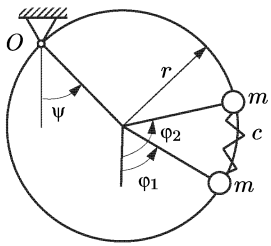


К задаче 16.74

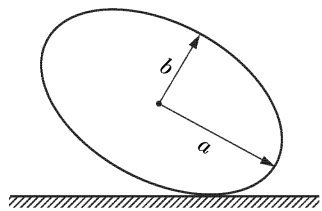
16.74. Две одинаковые бусинки массы m каждая (см. рисунок) могут скользить по гладкому стержню AB. Третья бусинка массы $2m$ может скользить по гладкому стержню OC, перпендикулярному AB. Бусинки соединены между собой и со стенками пружинами жесткости c каждая. Система расположена в горизонтальной плоскости. В положении, когда пружины недеформированы, бусинки находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной a. Используя симметрию, найти малые колебания системы около устойчивого положения равновесия.

16.75. Проволочная окружность радиуса r и массы $M = 2m$ (см. рисунок), точка O которой неподвижно закреплена, может колебаться в вертикальной плоскости. По окружности могут двигаться без

трения два одинаковых шарика массы m каждый. Шарики, размерами которых можно пренебречь, соединены между собой невесомой пружиной жесткости c, имеющей в недеформированном состоянии длину l. Используя симметрию системы, найти частоты ее малых колебаний.



К задаче 16.75



К задаче 16.76

16.76. Однородный эллиптический цилиндр (см. рисунок) может катиться без проскальзывания по горизонтальной плоскости; большая и малые полуоси эллипса в сечении цилиндра равны a и b соответственно. Найти период малых колебаний цилиндра вблизи устойчивого положения равновесия. Исследовать выражение для периода при $b \to 0$ и $b \to a$.

16.77. По горизонтальной направляющей могут скользить без трения n одинаковых масс m, последовательно соединенных пружинами жесткости c каждая. Найти движение системы.

Указание. Решение искать в виде $x_k = a\cos\left(\frac{2k-1}{2}\varphi\right)\sin(\omega t+\alpha)$, $k=\overline{0, n+1}$, $\cos\left(\frac{2n+1}{2}\varphi\right) = \cos\left(\frac{2n-1}{2}\varphi\right)$.

16.78. Найти колебания системы, описанной в задаче 16.77, считая, что первая масса соединена такой же пружиной и с неподвижной стенкой.

Указание. Решение искать в виде $x_k = a\sin k\varphi\sin(\omega t+\alpha)$, $k = \overline{0, n+1}$, $\sin[(n+1)\varphi] = \sin n\varphi$.

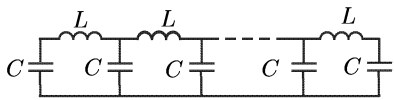
16.79. Найти колебания системы, описанной в задаче 16.77, считая, что первая и последняя массы соединены пружинами с неподвижными стенками.

Указание. Решение искать в виде $x_k = a\sin k\theta\sin(\omega t+\alpha)$, $k = \overline{0, n+1}$, $\sin[(n+1)\theta] = 0$.

16.80. Найти закон изменения во времени зарядов в электрической цепи, изображенной на рисунке. (См. указание к задаче 16.79.)

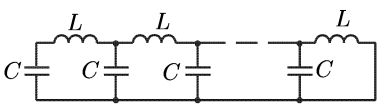
16.81. Найти закон изменения во времени зарядов в электрической цепи, изображенной на рисунке. (См. указание к задаче 16.78.)

16.82. Найти закон изменения во времени зарядов в электрической цепи, изображенной на рисунке. (См. указание к задаче 16.77.)

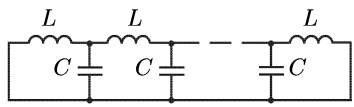


К задаче 16.80

16.83. По гладкому горизонтальному кольцу (см. рис. к задаче 12.53.) могут двигаться n одинаковых масс m, последовательно соединенных пружинами одинаковой жесткости c (последняя масса соединена с первой). Найти малые колебания системы.



К задаче 16.81

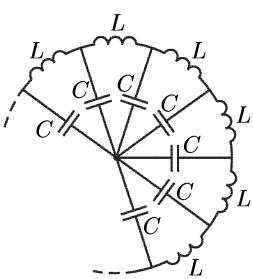


К задаче 16.82

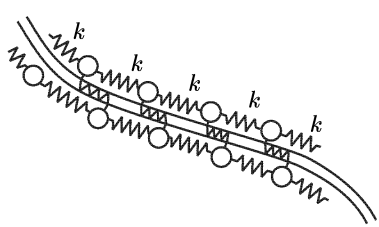
Указание. Угловое перемещение k-й массы искать в виде $\varphi_k = a\sin k\beta\sin(\omega t+\alpha)$, где $\sin k\beta = \sin[(k+n)\beta]$.

16.84. Найти закон изменения во времени зарядов в электрической цепи, изображенной на рисунке. В начальный момент $q_i(0) = q_i^0$, $\dot{q}_i(0) = 0$ $(i = \overline{1, n})$.

Указание. Закон изменения заряда в k-м. контуре искать в виде $q_k = a\sin k\beta\sin(\omega t+\alpha)$, где $\sin k\beta = \sin[(k+n)\beta]$.



К задаче 16.84



К задаче 16.86

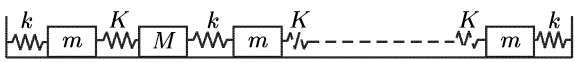
16.85. По гладкой проволоке, изогнутой в форме винтовой линии ($x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = h\varphi$), могут скользить n одинаковых бусинок массы m каждая. Бусинки последовательно соединены одинако-

выми пружинами жесткости c. Пренебрегая силой тяжести, найти движение системы. (См. указание к задаче 16.83.)

16.86. По винтовой линии $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = h\varphi$ (см. рисунок) могут скользить две системы материальных точек массы m. Каждая система содержит n материальных точек, последовательно соединенных пружинами жесткости k. Кроме того, i-е точки ($i = \overline{1, n}$) первой и второй систем соединены пружинами жесткости K. Пренебрегая силой тяжести, найти малые колебания системы.

Указание. Решение искать в виде $\varphi_i = a\cos\left(\frac{2i-1}{2}\beta\right)\sin(\omega t+\alpha)$, $\psi_i = b\cos\left(\frac{2i-1}{2}\beta\right)\sin(\omega t+\alpha)$, $i = \overline{0, n+1}$, $\varphi_{n+1} = \varphi_n$, $\psi_{n+1} = \psi_n$.

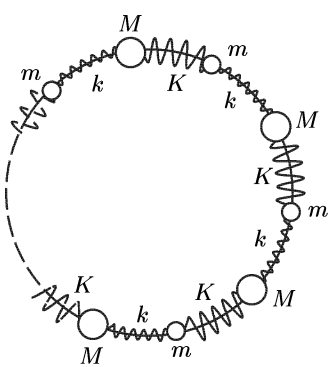
16.87. По гладкой горизонтальной направляющей (см. рисунок) могут скользить $2n-1$ материальных точек с чередующимися массами m и M, соединенных между собой и с неподвижными стенками пружинами жесткости k и K. Найти малые колебания системы.



К задаче 16.87

Указание. Решение искать в виде $x_{2i} = a\sin(i\beta_1 + i\beta_2)\sin(\omega t+\alpha)$, $x_{2i+1} = b\sin[(i+1)\beta_1 + i\beta_2]\sin(\omega t+\alpha)$, $i = \overline{0, n-1}$, $\sin(n\beta_1 + n\beta_2) = 0$.

16.88. По гладкому кольцу (см. рисунок), расположенному в горизонтальной плоскости, могут двигаться $2n$ материальных точек с чередующимися массами m и M, последовательно соединенных между собой пружинами одинаковой жесткости k (последняя точка соединена с первой). Найти малые колебания системы.



К задаче 16.88

Указание. Угловые перемещения точек искать в виде $\varphi_{2i-1} = a\sin[(2i-1)\beta]\sin(\omega t+\alpha)$, $\varphi_{2i} = b\sin(2i\beta)\times\sin(\omega t+\alpha)$, $\sin l\beta = \sin[(l+2n)\beta]$, $i = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, 2n}$.

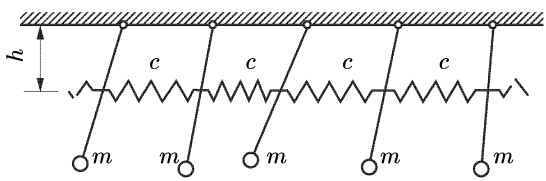
16.89. По гладкому кольцу (см. рис. к задаче 16.88), расположенному в горизонтальной плоскости, могут двигаться $2n$ материальных точек одинаковой массы m, последовательно соединенных между собой пружинами чередующихся жесткостей k и K (последняя точка соединена с первой). Найти малые колебания системы.

Указание. Угловые перемещения точек искать в виде $\varphi_{2i-1} = a\sin[i\beta_1 + (i-1)\beta_2]\sin(\omega t + \alpha)$, $\varphi_{2i} = b\sin(i\beta_1 + i\beta_2)\sin(\omega t + \alpha)$, $\sin[i\beta_1 + (i-1)\beta_2] = \sin[(i+n)\beta_1 + (i+n-1)\beta_2]$, $i = \overline{1, n}$.

16.90. По гладкому кольцу (см. рис. к задаче 16.88), расположенному в горизонтальной плоскости, могут двигаться $2n$ материальных точек с чередующимися массами m и M, соединенных между собой пружинами чередующихся жесткостей k и K (последняя точка соединена с первой). Найти малые колебания системы.

Указание. Угловые перемещения точек искать в виде $\varphi_{2i-1} = a\sin[i\beta_1 + (i-1)\beta_2]\sin(\omega t + \alpha)$, $\varphi_{2i} = b\sin(i\beta_1 + i\beta_2)\sin(\omega t + \alpha)$, $\sin[i\beta_1 + (i-1)\beta_2] = \sin[(i+n)\beta_1 + (i+n-1)\beta_2]$, $i = \overline{1, n}$.

16.91. Система из n одинаковых математических маятников массы m и длины l (см. рисунок), связанных пружинами жесткости c, может совершать колебания в вертикальной плоскости. Пружины прикреплены к маятникам на расстоянии h от точек подвеса; при вертикальном положении маятников пружины ненапряжены. Найти малые колебания системы.



К задаче 16.91

Указание. Решение искать в виде $\varphi_i = a\cos((2i-1)\beta/2)\sin(\omega t + \alpha)$, $i = \overline{0, n+1}$, $\varphi_{n+1} = \varphi_n$.

16.92. Решить предыдущую задачу в предположении. что левый маятник соединен пружиной с неподвижной стенкой.

Указание. Решение искать в виде $\varphi_i = a\sin(i\beta)\sin(\omega t + \alpha)$, $i = \overline{0, n+1}$, $\varphi_{n+1} = \varphi_n$.

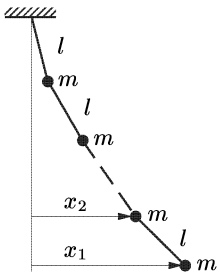
16.93. Решить задачу 16.91 в предположении, что оба крайних маятника соединены пружинами с неподвижными стенками.

Указание. Решение искать в виде $\varphi_i = a\sin(i\beta)\sin(\omega t + \alpha)$, $i = \overline{0, n+1}$, $\varphi_{n+1} = 0$.

16.94. Невесомая упругая струна жесткости c и длины l с закрепленными концами несет n равноотстоящих одна от другой и от концов бусинок массы m каждая. Найти малые поперечные колебания системы. Считать, что действующая на каждую бусинку возвращающая сила пропорциональна отклонению от положения равновесия.

Указание. Отклонения искать в виде $y_i = a\sin(i\theta)\sin\omega t$, $\sin(n+1)\theta = 0$, $i = \overline{1, n}$.

16.95. Используя решение задачи 16.94, предельным переходом $n \to \infty$ найти частоты струны линейной плотности $\rho = mn/l$ и жесткости $c = F_н(n+1)/l$ ($F_н$ — сила натяжения струны).



К задаче 16.96

16.96. Упругая невесомая нить (см. рисунок), свободно подвешенная одним концом, несет n весомых равноотстоящих одна от другой бусинок массы m каждая (расстояние между соседними бусинками равно l). Найти малые поперечные колебания системы.

Указание. Жесткость i-го участка (отсчет от свободного конца) пропорциональна силе его натяжения в вертикальном положении равновесия нити. При решении воспользоваться рекуррентным соотношением для многочленов Чебышева–Поссе:

$$(k-1)L_{k-2}(p) + (p-2k+1)L_{k-1}(p) + kL_k(p) = 0,$$

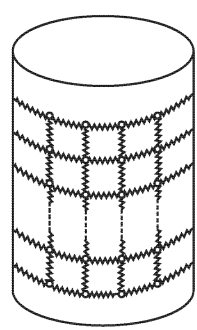
$$L_k(p) = \frac{1}{k!}e^p \frac{d^k}{dp^k}(p^k e^{-p}).$$

16.97. Сохраняя условия предыдущей задачи и считая жесткость нити равной k, найти малые продольные колебания системы.

Указание. Решение искать в виде $x_i = x_{i0} + a\cos\left[\frac{(2i-1)\varphi}{2}\right] \times \times \sin(\omega t + \alpha)$, $i = \overline{0, n+1}$, $\cos\left(\frac{2n+1}{2}\varphi\right) = 0$.

16.98. Найти малые колебания сложного математического маятника, состоящего из n последовательно подвешенных один к другому простых математических маятников длины l каждый.

Указание. Угол поворота i-го маятника (отсчет от свободного конца) равен $\varphi_i \approx \sin\varphi_i = (x_i - x_{i+1})/l$. При определении амплитуды в решении $x_i = u_i \sin(\omega t + \alpha)$ воспользоваться рекуррентным соотношением для многочленов Чебышева–Поссе. (См. указание к задаче 16.96.)


К задаче 16.99

16.99. Материальные точки одинаковой массы (см. рисунок), которые могут двигаться по поверхности прямого кругового цилиндра, соединены пружинами таким образом, что образуют сеть, охватывающую цилиндр и состоящую из m слоев по n точек в каждом слое. Ячейки сети представляют собой произвольные четырех-

угольники; жесткости пружин в двух направлениях равны k_1 и k_2 соответственно. Найти малые колебания системы.

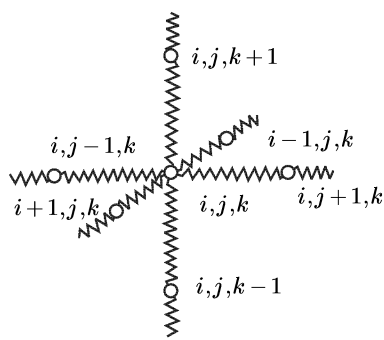
Указание. В цилиндрических координатах решение искать в виде

$$\begin{bmatrix}\varphi_{ij}\\ z_{ij}\end{bmatrix} = \cos\left(\frac{2i-1}{2}\gamma\right)\cos(j\delta)\begin{bmatrix}A\sin(\omega t+\alpha)\\ B\sin(\omega t+\beta)\end{bmatrix}.$$

16.100. Решить предыдущую задачу в предположении, что верхний слой материальных точек соединен пружинами жесткости k_1 с неподвижной направляющей цилиндра.

16.101. Решить задачу 16.99 в предположении, что верхний и нижний слои материальных точек соединены пружинами жесткости k_1 с неподвижной направляющей цилиндра.

16.102. Неподвижный параллелепипед (см. рисунок) заполнен материальными точками, которые связаны пружинами таким образом, что образуется объемная решетка, причем в положении равновесия ячейки решетки представляют собой произвольные шестигранники. Материальные точки переднего и заднего слоев (вдоль оси Ox) и левого бокового слоя (вдоль оси Oy) связаны пружинами с соответствующими гранями параллелепипеда; материальные точки верхнего и нижнего слоев (вдоль оси Oz) и правого бокового слоя (вдоль оси Oy) со стенками не связаны. Жесткости пружин, параллельных осям Ox, Oy, Oz, равны k_1, k_2 и k_3; число слоев вдоль осей Ox, Oy, Oz составляет n_x, n_y, n_z соответственно. Найти малые колебания системы.



К задаче 16.102

Указание. Отклонения точек от положений равновесия искать в виде

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \sin i\varphi\sin j\psi\cos\left(\frac{2k-1}{2}\theta\right)\begin{bmatrix}A\sin(\omega t+\alpha)\\ B\sin(\omega t+\beta)\\ C\sin(\omega t+\gamma)\end{bmatrix},$$

$$i=\overline{0,n_x+1},\quad j=\overline{0,n_y+1},\quad k=\overline{0,n_z+1},$$

$$\sin[(n_x+1)\varphi]=0,\quad \sin[(n_y+1)\psi]=\sin(n_y\psi),$$

$$\cos\left(\frac{2n_z+1}{2}\theta\right)=\cos\left(\frac{2n_z-1}{2}\theta\right).$$

16.103. Колебательная система имеет собственные частоты ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_n$. Как изменятся собственные частоты, если на систему наложить связь, уравнение которой имеет вид $a\theta_1 + b\theta_2 = 0$, где θ_1 и θ_2 — нормальные координаты, a и b — постоянные числа (координатам θ_1 и θ_2 соответствуют частоты ω_1 и ω_2)?

16.104. Найти все частоты главных колебаний консервативной системы, кинетическая энергия которой $T = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$ является положительно определенной квадратичной формой, а потенциальная энергия записывается в виде $\Pi = \frac{\lambda}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}q_iq_k + \frac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} b_ib_kq_iq_k$, где $\lambda > 0$, a_{ik}, b_i, b_k — постоянные величины.

16.105. Из наблюдений над малыми колебаниями механической системы были найдены ее собственные частоты $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ ($\omega_i \neq \neq \omega_j$, $i, j = \overline{1, n}$) и амплитудные векторы $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$. Найти вид матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$, составленных из коэффициентов в выражениях кинетической и потенциальной энергий, т. е. решить задачу идентификации системы по результатам наблюдений.

16.106. Кинетическая $T = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$, и потенциальная $\Pi = = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}q_iq_k + \frac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} b_ic_kq_iq_k$ энергии консервативной системы являются положительно определенными квадратичными формами с постоянными коэффициентами. Доказать, что эта система имеет собственные частоты $\omega_1, \omega_2, \omega_3 = \ldots = \omega_n = 1$, где ω_1 и ω_2 определяются из соотношений

$$\omega_1^2\omega_2^2 = \Omega^{2-n}\det\left(\mathbf{E} + \frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}' + \frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{B}'\right),$$

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = 2\Omega^2 + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}' + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{B}'\right),$$

$\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ — векторы-столбцы с компонентами b_i и c_i соответственно, а $\operatorname{tr}\mathbf{D} = \sum\limits_{i=1}^{n} d_{ii}$.

16.107. Кинетическая энергия гироскопической системы представляет собой положительно определенную квадратичную форму $\frac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$ с постоянными коэффициентами a_{ik}, а обобщенные

силы определяются соотношениями $Q_i = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_k$, где $b_{ik} = -b_{ki}$ — постоянные величины. Найти движение системы.

Указание. При решении учесть, что всякая кососимметрическая матрица $\mathbf{B}$ с помощью ортогонального преобразования с матрицей $(u_{ik})_{i,k=1}^{n}$ может быть приведена к виду

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & & & & & & \\ & \mathbf{B}_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \mathbf{B}_m & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} 0 & -\nu_j \\ \nu_j & 0 \end{pmatrix}$, причем ν_j — действительные числа.

16.108. При исследовании малых колебаний вблизи устойчивого положения, равновесия консервативной системы с кинетической энергией $T = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$ были найдены собственные частоты ω_i ($\omega_i \neq \omega_j$; $i, j = \overline{1, n}$) и соответствующие им амплитудные векторы $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^n$. Найти произвольные постоянные B_j и C_j в общем решении задачи о малых колебаниях

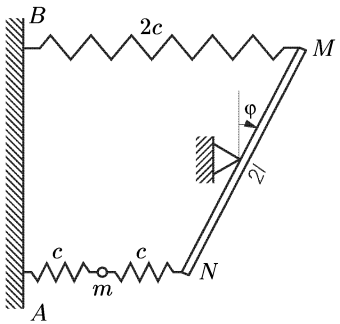
$$\mathbf{q} = \sum_{j=1}^{n} B_j\mathbf{u}^j \sin(\omega_j t) + \sum_{j=1}^{n} C_j\mathbf{u}^j \cos(\omega_j t)$$

по заданным начальным условиям $q_i(0) = q_i^0$, $\dot{q}_i(0) = \dot{q}_i^0$, $i = \overline{1, n}$.

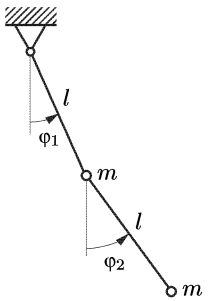
16.109. Материальная точка массы m подвешена на упругой нити жесткости c. В положении равновесия точке сообщается скорость v_0 в вертикальном направлении. Учитывая, что нить работает на растяжение, найти период колебаний точки.

16.110. Стержень MN массы $2m$ и длины $2l$ (см. рисунок) может поворачиваться вокруг своего неподвижного центра. Конец M стержня соединен с неподвижной стенкой AB пружиной жесткости $2c$. Масса m, которая может двигаться в направлении, перпендикулярном к AB, соединена с концом N стержня и стенкой AB одинаковыми пружинами жесткости c каждая. Решить задачу о малых колебаниях системы, если она расположена в горизонтальной плоскости.

16.111. Найти малые колебания двойного математического маятника, изображенного на рисунке.



К задаче 16.110

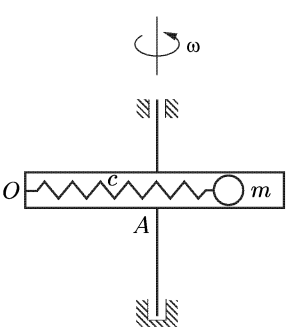


К задаче 16.111

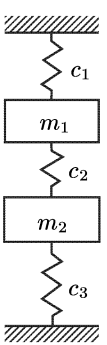
16.112. Найти малые колебания двойного маятника, состоящего из двух однородных стержней массы m и длины l каждый (см. рис. к задаче 16.111.).

§ 17. Движение диссипативных систем

17.1. Внутри горизонтальной шероховатой трубки (см. рисунок), вращающейся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω, может перемещаться шарик массы m, скрепленный пружиной жесткости c с концом трубки O. При недеформированной



К задаче 17.1



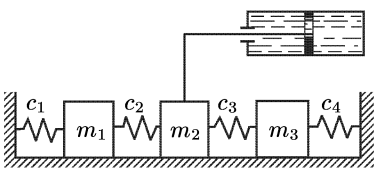
К задаче 17.2

пружине центр шарика находится на оси вращения. Пренебрегая действием силы тяжести, найти условия, при которых положение относительного равновесия шарика будет асимптотически устойчиво.

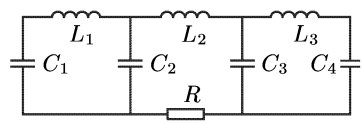
17.2. Грузы массы m_1 и m_2 (см. рисунок), связанные между собой и с неподвижными опорами пружинами, как показано на рисунке, могут перемещаться по вертикали, причем на один из грузов действует сила вязкого трения $F = -\beta v$ ($\beta > 0$). Используя критерий Рауса–Гурвица, показать, что положение равновесия этой системы будет асимптотически устойчивым при любых c_i и m_i.

17.3. Можно ли решить предыдущую задачу, опираясь на теорему об асимптотической устойчивости определенно диссипативных систем?

17.4. При каких значениях параметров c_i и m_i положение равновесия диссипативной системы, изображенной на рисунке, не будет асимптотически устойчивым, если трение между массами и направляющей отсутствует?



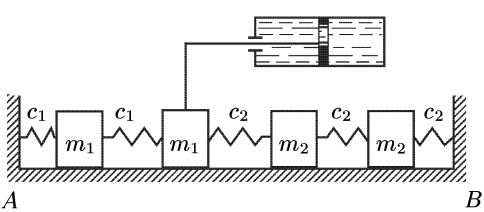
К задаче 17.4



К задаче 17.5

17.5. При каких соотношениях между параметрами электрической цепи, изображенной на рисунке, в системе возможны незатухающие колебания, несмотря на наличие в среднем контуре омического сопротивления R?

17.6. В системе, изображенной на рисунке, трение между грузами и направляющей AB отсутствует и сила сопротивления, действующая на второй груз, равна $-\beta v$, где v — скорость этого груза. При каких значениях параметров c_1, c_2, m_1 и m_2 положение равновесия системы не будет асимптотически устойчивым?

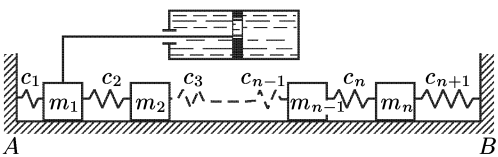


К задаче 17.6

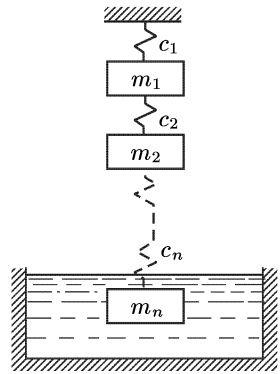
17.7. В системе, изображенной на рисунке, трение между грузами и направляющей AB отсутствует и сила сопротивления, действующая на первый груз, равна $-\beta v$, где v — скорость этого груза.

Показать, что положение равновесия системы асимптотически устойчиво при любых значениях параметров $c_i \neq 0$, $m_i \neq 0$, $\beta > 0$. Показать также, что если сила сопротивления $-\beta v$ действует не на первый, а на k-й груз ($k \neq 1$, $k \neq n$), то при некотором подборе параметров $c_i \neq 0$, $m_i \neq 0$, $\beta > 0$ положение равновесия не будет асимптотически устойчивым.

17.8. Система состоит из n грузов (см. рисунок), которые связаны между собой и с неподвижной опорой пружинами



К задаче 17.7



К задаче 17.8

жесткости c_i и могут перемещаться по вертикали. На груз m_n действует сила вязкого трения $F = -\beta v$. Показать, что положение равновесия системы асимптотически устойчиво.

17.9. Годограф Михайлова многочлена $f(\lambda)$ степени n не проходит через нулевую точку, и $\Delta_{\omega=0}^{\omega=\infty} \arg f(i\omega) = k\pi/2$, $|k| \leqslant n$. Найти число корней этого многочлена с отрицательной вещественной частью.

17.10. В следующих уравнениях при помощи годографа Михайлова найти число корней с отрицательной и с положительной действительной частью:

а) $\lambda^4 + 6\lambda^3 + 26\lambda^2 + 46\lambda + 65 = 0$;

б) $\lambda^4 + 6\lambda^3 + 18\lambda^2 + 24\lambda + 16 = 0$;

в) $\lambda^4 + \lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0$;

г) $\lambda^4 + 3\lambda^3 + 5\lambda^2 + 12\lambda + 4 = 0$;

д) $\lambda^5 + 5\lambda^4 + 10\lambda^3 + 11\lambda^2 + 7\lambda + 2 = 0$;

е) $\lambda^5 + 3\lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0$;

ж) $\lambda^5 + 5\lambda^4 + 12\lambda^3 + 6\lambda^2 - 8\lambda - 16 = 0$;

з) $\lambda^5 + 2\lambda^4 - 2\lambda^3 - \lambda^2 + 6\lambda + 2 = 0$;

и) $\lambda^5 + 2\lambda^4 + 2\lambda^3 + 7\lambda^2 - 44\lambda - 4 = 0$.

17.11. В следующих задачах определить область устойчивости, т. е. найти все значения параметров α и β, при которых положение равновесия асимптотически устойчиво:

а) $\ddot{x} + \dot{x} + x - \alpha y = 0$, $\ddot{y} + \dot{y} - \beta x + y = 0$;

б) $\ddot{x} + \dot{x} + x - \alpha y = 0$, $\ddot{y} + \beta \dot{y} - x + y = 0$;

в) $\ddot{x}+\dot{x}+x-\alpha y=0,\ \ \beta\ddot{y}+\dot{y}-x+y=0;$
г) $\ddot{x}+\dot{x}+x-\alpha y=0,\ \ \dot{y}-\beta x+y=0;$
д) $\ddot{x}+\dot{x}+x-\alpha y=0,\ \ \beta\dot{y}-x+y=0.$

17.12. В следующих задачах выяснить, является ли положение равновесия системы асимптотически устойчивым:
а) $\ddot{x}+\dot{x}+x-y=0,\ \ \ddot{y}+2y-x=0;$
б) $\ddot{x}+2\dot{x}+3x-y=0,\ \ \ddot{y}+2y-2x=0;$
в) $3\ddot{x}+4\dot{x}+6x-6y=0,\ \ 2\ddot{y}+\dot{y}-6x+6y=0;$
г) $3\ddot{x}+4\dot{x}+6x-6y=0,\ \ 2\ddot{y}+\dot{y}-6x+7y=0;$
д) $\ddot{x}+x-y=0,\ \ \dot{x}+\dot{y}+x=0.$

17.13. Характеристическое уравнение линеаризованной системы $\lambda^4+\lambda^3+4\lambda^2+2\lambda+3+k=0$ содержит параметр k. Используя годограф Михайлова, разбить ось значений параметра k на интервалы, в пределах которых число s корней уравнения с отрицательной действительной частью не меняется.

17.14. Характеристическое уравнение линеаризованной системы $f(\lambda)=D(\lambda)-\beta K(\lambda)=0$ содержит параметр β. Многочлены $D(\lambda)$ и $K(\lambda)$ имеют степени n и $m<n$ соответственно. При $\beta=0$ все n корней многочлена $f(\lambda)$ лежат слева от мнимой оси. При каких условиях многочлен $f(\lambda)$ будет гурвицевым для $\beta=-1$? (Критерий Найквиста.)

17.15. Массы m_i $(i=\overline{1,n})$ связаны между собой и с неподвижной опорой пружинами жесткости c_i (см. рис. к задаче 17.8). На последнюю массу действует сила вязкого трения $F=-\beta v$ $(\beta>0)$. Показать, что те значения ω, при которых годограф Михайлова $f(i\omega)$ характеристического полинома системы $f(\lambda)$ пересекает мнимую ось, являются собственными частотами консервативной системы, в которую рассматриваемая система переходит в пределе при $\beta\to 0$.

17.16. Уравнения Лагранжа механической системы имеют вид $\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{C}\mathbf{q}=0$, где $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ — постоянные матрицы, причем $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$ — симметрические матрицы, отвечающие положительно определенным квадратичным формам, а $\mathbf{B}$ — диагональная матрица с элементами $\beta_{11}=\beta>0$, $\beta_{ii}=0$ $(i\neq 1)$. Показать, что те значения ω, при которых годограф Михайлова $f(i\omega)$ характеристического полинома системы $f(\lambda)$ пересекает мнимую ось, являются собственными частотами консервативной системы, в которую рассматриваемая система переходит в пределе при $\beta\to 0$.

17.17. Характеристическое уравнение линеаризованной системы $D(\lambda)-\beta K(\lambda)=0$ с действительными коэффициентами содержит параметр β. Степень многочлена $D(\lambda)$ выше степени многочлена $K(\lambda)$. Какой смысл имеют граничные точки β^* интервалов на оси β, в пределах которых число корней уравнения с отрицательной действительной частью не меняется?

17.18. Характеристическое уравнение линеаризованной системы $D(\lambda) - \beta K(\lambda) = 0$ содержит параметр β; $D(\lambda)$ и $K(\lambda)$ — заданные многочлены степени n и $m < n$ соответственно, причем у полинома $D(\lambda)$ коэффициент при λ^n равен 1. Как разбить ось β на интервалы, в пределах которых число корней характеристического уравнения с отрицательной действительной частью не меняется?

17.19. Считая число β предыдущей задаче комплексным, найти разбиение плоскости β на области, в пределах которых число корней уравнения с отрицательной действительной частью не меняется (D-разбиение).

17.20. В линейном приближении система уравнений движения некоторой механической системы имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\ddot{q}_k + b_{ik}\dot{q}_k + c_{ik}q_k) = 0 \quad (i = \overline{1, n}),$$

где $a_{ik} = a_{ki}$, $b_{ik} = b_{ki}$, $c_{ik} = c_{ki}$ — постоянные величины. Показать, что положение равновесия $q = 0$ асимптотически устойчиво, если матрицы

$$\mathbf{A} = (a_{jk})_{j,k=1}^{n}, \quad \mathbf{B} = (b_{jk})_{j,k=1}^{n}, \quad \mathbf{C} = (c_{jk})_{j,k=1}^{n}$$

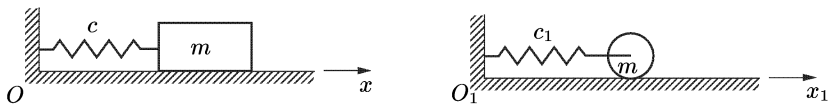
являются матрицами положительно определенных квадратичных форм.

17.21. Кинетическая энергия системы $T = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$, потенциальная энергия $\Pi = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} c_{ik}q_iq_k$ и функция Релея $R = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$ являются положительно определенными квадратичными формами (указанных переменных) с постоянными коэффициентами. Показать, что среднее значение кинетической $\overline{T}$ и потенциальной $\overline{\Pi}$ энергий равно нулю.

17.22. Собственная частота линейного осциллятора равна ω_0. Найти частоту затухающих колебаний этого же осциллятора в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости, если за n колебаний его амплитуда уменьшается в k раз.

17.23. Груз массы m (см. рисунок), прикрепленный пружиной жесткости c к стенке, может скользить по шероховатой направляющей Ox, причем коэффициент трения скольжения равен f. Диск радиуса R и той же массы, центр которого прикреплен к стенке пружиной жесткости c_1, может катиться без проскальзывания по направляющей O_1x_1. Коэффициент трения качения (плечо пары

трения качения) диска равен k. Найти такие соотношения между параметрами c, c_1, f, k и R, чтобы центр инерции груза и центр инерции диска при одинаковых начальных условиях совершали одинаковые движения.



К задаче 17.23

17.24. Однородный диск радиуса R и массы m, центр которого прикреплен к стенке пружиной жесткости c, может катиться без проскальзывания по неподвижной направляющей, причем коэффициент трения качения (плечо пары трения качения) равен k. В начальный момент диск покоится и деформация пружины равна x_0. Какой будет деформация пружины спустя время $t_1 = n\pi\sqrt{6m/c}$ $(n = 1, 2, \ldots)$?

17.25. Движение осциллятора, помещенного в вязкую жидкость, описывается уравнением $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = 0$. Найти такую положительно определенную функцию $V(x, \dot{x})$ (функцию Ляпунова), чтобы на движениях осциллятора выполнялось равенство

$$\frac{dV(x, \dot{x})}{dt} = -\frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + cx^2) = -E.$$

Указание. Функцию V искать в классе квадратичных форм от x, $\dot{x}$ с неопределенными коэффициентами.

17.26. Цилиндр массы M может скользить без трения по горизонтальной направляющей Ox так, что образующая цилиндра во время движения совпадает с Ox. В цилиндре может двигаться поршень массы m. Пространство между стенками цилиндра и поршнем заполнено вязкой жидкостью (коэффициент вязкости равен β). Цилиндр и поршень соединены с неподвижным стержнем пружинами жесткости c, как показано на рисунке к задаче 13.8. Показать, что положение равновесия системы асимптотически устойчиво.

17.27. В соревнованиях по ориентированию на местности каждый участник ориентирует свой вектор скорости по направлению на заранее заданного участника. Значение скорости выбирается пропорциональным расстоянию между ними. В результате движение спортсменов будет описываться системой дифференциальных уравнений $\dot{\mathbf{r}}_1 = \lambda_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$, $\dot{\mathbf{r}}_2 = \lambda_2(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2), \ldots, \dot{\mathbf{r}}_n = \lambda_n(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_n)$, где константы $\lambda_i > 0$, $\mathbf{r}_i$ — радиус-векторы участников. Доказать, что действуя по такому алгоритму, участники за конечное время соберутся в круге

радиуса $r_0 > 0$ с центром в точке $\mathbf{r} = \dfrac{\sum \mathbf{r}_i^0/\lambda_i}{\sum 1/\lambda_i}$, где $\mathbf{r}_i^0$ — радиус-вектор i-го участника в начальной позиции.

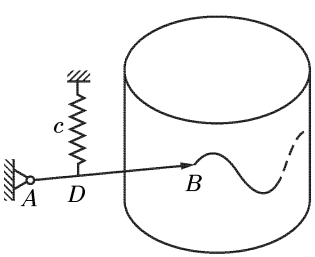
17.28. Динамическая система описывается уравнениями $\dot{x}_1 = \alpha_1(x_2 - x_1)$, $\dot{x}_2 = \alpha_2(x_3 - x_2), \ldots$, $\dot{x}_n = \alpha_n(x_1 - x_n)$, где $\alpha_i > 0$ — постоянные действительные величины. Показать, что всякое решение системы при $t \to \infty$ сходится к одному из положений равновесия вида $x_1^* = x_2^* = \ldots = x_n^* = a$, где величина a зависит от начальных условий. (Алгоритм встречи в задаче на ориентирование.)

17.29. Используя критерий Михайлова, показать, что многочлен $f(\lambda) = \prod\limits_1^n(\lambda + a_s) - \prod\limits_1^n a_s$ при действительных положительных a_s $(s = \overline{1, n})$ имеет один нулевой корень и $(n-1)$-корень с отрицательной действительной частью.

17.30. Движение склерономной системы в линейном приближении описывается уравнениями $\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = 0$, где матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$ положительно определены, а симметрическая матрица $\mathbf{B}$ отвечает знакопостоянной квадратичной форме. Доказать, что равновесие системы $\mathbf{q} = 0$ асимптотически устойчиво в том и только в том случае, если $\mathbf{B}\mathbf{u}_s \neq 0$, $s = \overline{1, n}$, где $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ — совокупность амплитудных векторов, определяющих малые колебания консервативной системы $\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = 0$.

§ 18. Вынужденные колебания. Частотные характеристики

18.1. Перо сейсмографа (см. рисунок), регистрирующего колебания почвы (которые происходят по закону $L \sin pt$), вычерчивает синусоиду с амплитудой H и периодом $2\pi/p$ (см. рисунок). Длина стержня $AB = l$, расстояние $AD = b$, масса m головки сейсмографа B, где находится перо, и жесткость c пружины известны. Пренебрегая массой стержня, определить амплитуду L истинных колебаний почвы.

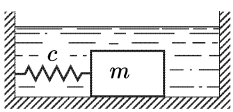


К задаче 18.1

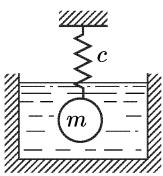
18.2. Решить предыдущую задачу, считая дополнительно, что сейсмограф работает под воздействием демпфирующего устройства, создающего сопротивление движению стержня AB, пропорциональное его угловой скорости. Момент сил сопротивления относительно точки A равен $-\beta\omega$.

18.3. Точка подвеса математического маятника длины l движется по горизонтальной прямой по закону $s = at^2/2 + A\sin\omega t$. Найти движение маятника в системе отсчета, движущейся по закону $s = at^2/2$; исследовать случай резонанса.

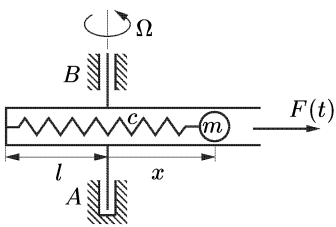
18.4. Груз массы m (см. рисунок) движется в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости (коэффициент пропорциональности β). На груз действуют упругая сила пружины жесткости c и возмущающая гармоническая сила $p(t) = A\sin\omega t$. Найти частотную характеристику $W(i\omega)$ системы. Построить графически амплитудную $R(\omega) = |W(i\omega)|$ и фазовую $\varphi = \arg W(i\omega)$ характеристики в зависимости от частоты ω. Найти частоту ω^*, при которой амплитудная характеристика $R(\omega)$ имеет максимальное значение $R_{\max}$.



К задаче 18.4



К задаче 18.5



К задаче 18.7

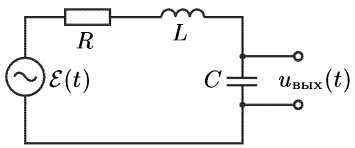
18.5. Построить амплитудно-фазовую, амплитудную и фазовую характеристики груза массы m (см. рисунок), подвешенного на пружине жесткости c, если на груз действуют возмущающая гармоническая сила $p(t) = A\sin\omega t$ и сила сопротивления $F = -\beta v$. Рассмотреть следующие значения параметров: а) $c/m = 1$, $\beta/m = 0,1$; б) $c/m = 9$, $\beta/m = 10$; в) предельный случай $\beta \to 0$.

18.6. В условиях предыдущей задачи найти частотную характеристику $W(i\omega)$ системы, считая «входным» воздействием силу $p(t)$, а «выходом»: а) скорость груза v; б) комбинацию $ax + bv$.

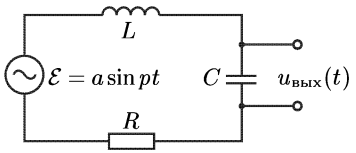
18.7. Шарик массы m (см. рисунок) может двигаться внутри шероховатой трубки, которая вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси AB. На шарик действуют упругая сила пружины жесткости c и возмущающая сила $F(t) = A\sin\omega t$. Коэффициент трения скольжения шарика о поверхность трубки равен μ, $c > m\Omega^2$. При недеформированной пружине центр шарика находится на оси вращения. Пренебрегая действием силы тяжести, найти частотную характеристику $W(i\omega)$ шарика, считая «входным» воздействием силу $F(t)$, а «выходом» — координату x шарика.

18.8. Построить амплитудно-фазовую, амплитудную и фазовую характеристики изображенного на рисунке электрического контура

от входа $\mathcal{E}(t) = A\sin\omega t$ к выходу $u_{\text{вых}}(t)$. Рассмотреть также предельный случай $R \to 0$.



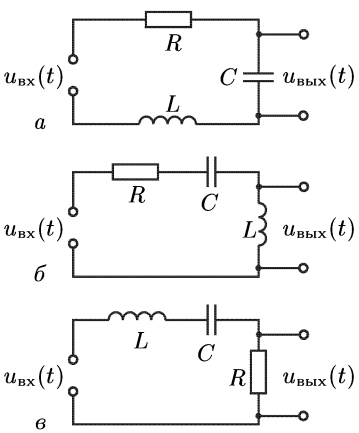
К задаче 18.8



К задаче 18.9

18.9. При какой частоте $p = p_0$ синусоидального генератора (см. рисунок) в RLC-контуре амплитуда B вынужденных колебаний для указанного $u_{\text{вых}}(t)$ будет максимальной? Найти это максимальное значение амплитуды $B_{\max}$ и сдвиг фазы φ на частоте $p = p_0$.

18.10. Для изображенных на рисунке электрических контуров найти аналитически и построить графически частотные характеристики от $u_{\text{вх}}(t)$ к указанным $u_{\text{вых}}(t)$.



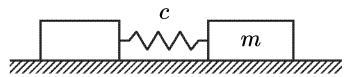
К задаче 18.10

18.11. В некоторой системе выходной сигнал $x(t)$ выражается через возмущающее воздействие $f(t)$ ($f(t) \equiv 0$ при $t < 0$) при помощи линейного оператора вида $x(t) = \int\limits_0^t H(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau$. Показать, что частотная характеристика $W(i\omega)$ этой системы от входа $f(t)$ к выходу $x(t)$ выражается равенством $W(i\omega) = \int\limits_0^\infty H(\xi)\, e^{-i\omega\xi}\, d\xi$, т. е. представляет собой фурье-изображение функции $H(\xi)$.

18.12. Для идентификации системы, т. е. определения массы груза m, жесткости пружины c и коэффициента вязкого трения β, (см. рис. к задаче 18.5) к грузу прикладывают гармоническое воздействие $f(t) = A\sin\omega t$ и определяют амплитуду B и фазу φ вынужденных колебаний груза при различных частотах ω. Найти выражения для m, c и β, если на частотах $\omega_1 \neq 0$ и $\omega_2 \neq \omega_1$ найдены величины B_1, φ_1 и B_2, φ_2 соответственно.

18.13. Найти частотную характеристику $W(i\omega)$ элемента с запаздыванием, поведение которого определяется уравнением $x_{\text{вых}}(t) = x_{\text{вх}}(t-\tau)$. Построить графически амплитудную и фазовую характеристики элемента.

18.14. Два груза (см. рисунок), соединенные невесомой пружиной жесткости c, могут двигаться по гладкой горизонтальной направляющей. Длина пружины в недеформированном состоянии равна l_0, масса одного из грузов равна m. Под действием внешней силы координата другого груза меняется по закону $x = A\sin\omega t$. По какому закону меняется расстояние l между грузами?



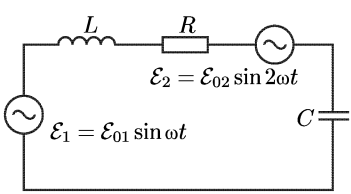
К задаче 18.14

18.15. В тот момент, когда линейный осциллятор массы m (без затухания) с собственной частотой ω_0 имел положение x_0 и скорость $\dot{x}_0$, к нему была приложена постоянная сила F. Через какое минимальное время τ нужно снять воздействие, чтобы дальнейшее движение осциллятора происходило с первоначальной полной энергией? Проиллюстрировать результат на фазовой плоскости.

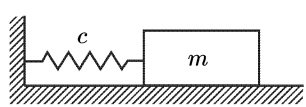
18.16. Линейный осциллятор массы m с собственной частотой ω_0 под действием возмущающей силы совершает гармонические колебания с частотой p и амплитудой a. Какую работу совершает возмущающая сила на интервале времени $[t_0, t]$? Показать, что работа, совершенная этой силой за половину периода вынужденных колебаний, равна нулю.

18.17. Найти вынужденные колебания груза массы m, подвешенного на пружине жесткости c, если на него действуют возмущающие силы $F_1(t) = A\sin\omega_1 t$ и $F_2(t) = B\cos 2\omega_2 t$, а также сила сопротивления $F = -\beta v$.

18.18. Найти закон изменения во времени заряда на обкладках конденсатора емкости C в изображенном на рисунке контуре. Рассмотреть следующие случаи: а) $R = 0$, $\omega \neq 1/\sqrt{LC}$, $\omega \neq 1/(2\sqrt{LC})$; б) $R = 0$, $\omega = 1/\sqrt{LC}$ (резонанс); в) $R \neq 0$.



К задаче 18.18



К задаче 18.19

18.19. При учете запаздывания восстанавливающая сила в осцилляторе, изображенном на рисунке, меняется по закону $F = -cx(t-\tau)$, где $\tau > 0$ — время запаздывания. Найти вынужденные колебания осциллятора под действием гармонической силы $f(t) = A\sin\omega t$, а также частотные характеристики системы (амплитудную и фазовую).

18.20. Груз массы m (см. рисунок к предыдущей задаче) соединен с неподвижной стенкой пружиной жесткости c. В положении равновесия груза при $t = 0$ ему сообщается скорость v_0 и прикладывается возмущающая сила $F(t) = F_0 \sin(\Omega t + \psi)$, которая действует лишь в течение половины периода собственных колебаний. Считая, что частота собственных колебаний больше частоты Ω, и пренебрегая трением, найти такую силу F_0 и фазу ψ, чтобы за время действия силы груз пришел в положение равновесия с нулевой скоростью.

18.21. Тело массы m, прикрепленное к неподвижной стенке пружиной жесткости c, совершает движение вдоль горизонтальной направляющей Ox под действием силы $mF(t)$, испытывая сопротивление $-\beta\dot{x}$, пропорциональное скорости. Найти движение тела при начальных условиях $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ в следующих трех случаях: а) $\beta^2 = 2mc$; б) $\beta^2 = 4mc$; в) $\beta^2 = 6,25mc$.

18.22. Сохраняя условия предыдущей задачи, найти закон движения $x(t)$ тела при $t > 0$, если сила $F(t)$ задана следующим образом:

$$F(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0, \\ a \text{ при } t \geqslant 0 \end{cases}$$

(ступенчатое воздействие). При $t = 0$ тело находится в покое, т. е. $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

18.23. Сохраняя условия задачи 18.21, найти закон движения $x(t)$ тела при $t > 0$, если сила $F(t)$ задана следующим образом:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ b/T & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant T, \\ 0 & \text{при } t > T, \end{cases}$$

где $T \to 0$ (импульсное воздействие). При $t = 0$ тело находится в покое, т. е. $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

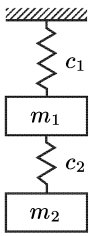
18.24. Показать, что любое финитное движение системы с лагранжианом $L = \dfrac{\dot{q}^2}{2q^4} - \dfrac{\omega^2}{2q^2} + \dfrac{\omega^2}{q}$ представляет собой периодическое движение с периодом $2\pi/\omega$.

Указание. При решении задачи перейти к новой обобщенной координате $z = 1/q$.

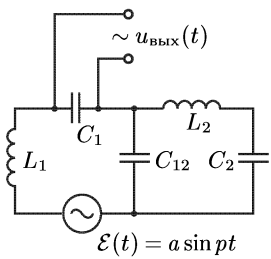
18.25. Грузы с массами m_1 и m_2 (см. рисунок), подвешенные на невесомых пружинах жесткости c_1 и c_2, могут двигаться по вертикали. К грузу массы m_1 приложена вертикальная сила $F(t) = a \sin pt$. При заданных c_1, m_1 и p найти начальные условия системы и значения c_2 и m_2, при которых амплитуда вынужденных колебаний 1-го груза равна нулю (успокоитель колебаний без трения).

18.26. Решить предыдущую задачу, считая, что на груз массы m_1 дополнительно действует сила сопротивления $F = -\beta v_1$.

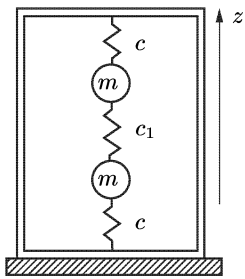
18.27. В изображенном на рисунке контуре подобрать начальные условия, емкости C_{12}, C_2 и индуктивность L_2 таким образом, чтобы выходное напряжение $u_{\text{вых}}$ было равно нулю при заданной частоте генератора $p = p_0$ (поглотитель колебаний).



К задаче 18.25



К задаче 18.27



К задаче 18.29

18.28. Как изменится искомое соотношение между параметрами схемы в предыдущей задаче, если учесть омическое сопротивление R в 1-м контуре?

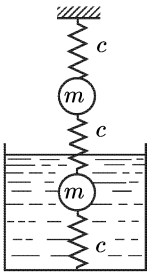
18.29. Платформа (см. рисунок), на которой жестко укреплен ящик, совершает вертикальные гармонические колебания по закону $z = A \sin \omega t$. Внутри ящика могут двигаться по вертикали два одинаковых груза массы m, связанные между собой и со стенками ящика пружинами жесткости c и c_1 соответственно. При каких частотах колебаний платформы в системе возможны резонансы?

18.30. Два груза массы m каждый (см. рисунок) соединены друг с другом и с неподвижными опорами пружинами жесткости c. На верхний груз действует вертикальная сила $f(t) = A \sin \omega t$, на нижний — сила сопротивления $F = -\beta v_2$. Найти частотные характеристики системы.

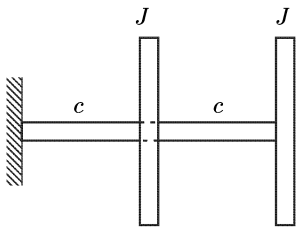
18.31. Два одинаковых диска с моментами инерции J каждый (см. рисунок) связаны между собой и с неподвижной стенкой двумя валами, жесткость на кручение которых равна c. На левый диск действует внешний момент $M = M_0 \sin \omega t$, а на правый — момент сил сопротивления, пропорциональный его угловой скорости (коэффициент пропорциональности равен β). Найти частотные характеристики системы.

18.32. Найти амплитуду A и сдвиг фазы φ вынужденных колебаний заряда на обкладках конденсатора C_2 в изображенном на рисунке контуре, если ЭДС генератора меняется по закону $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$.

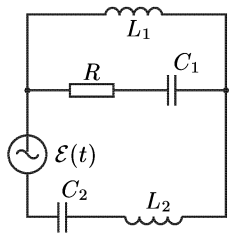
Задаваясь конкретными значениями параметров системы, построить амплитудную и фазовую характеристики.



К задаче 18.30



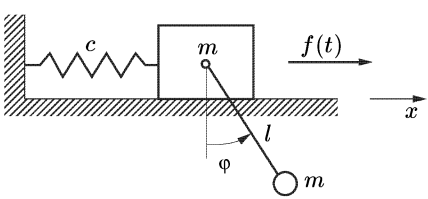
К задаче 18.31



К задаче 18.32

18.33. Построить амплитудную и фазовую частотные характеристики для системы с двумя степенями свободы, если заданы кинетическая энергия $T = \dot{q}_1^2/4 + 4\dot{q}_2^2$, потенциальная энергия $\Pi = (q_1^2 + q_2^2)/2$ и диссипативная функция Релея $R = (\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + 4\dot{q}_2^2)/2$. На систему действует внешняя периодическая сила $\mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ F(t) \end{pmatrix}$, где $F(t) = A\sin\omega t$.

18.34. Эллиптический маятник (см. рисунок) состоит из ползуна массы m, который соединен пружиной жесткости c с неподвижной стенкой и может скользить по гладкой горизонтальной направляющей, и материальной точки такой же массы m, подвешенной к ползуну на невесомом стержне длины l. К ползуну приложено воздействие $f(t) = A\sin pt$. Параметры системы удовлетворяют условию $2mg = cl$. Найти движение системы, считая отклонения от положения равновесия малыми.

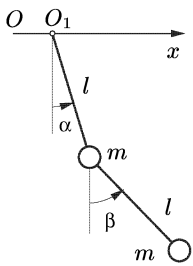


К задаче 18.34

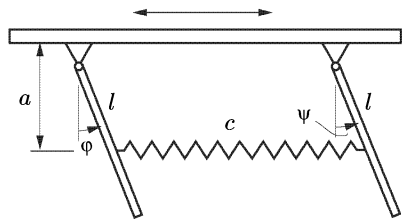
18.35. Используя условия предыдущей задачи, выяснить, при какой частоте воздействия $p \neq 0$ и при каких начальных значениях $x_0, \dot{x}_0, \varphi_0, \dot{\varphi}_0$ ползун во все время движения будет неподвижен. Найти закон изменения во времени координаты φ в этом случае.

18.36. Точка O_1 подвеса двойного математического маятника (см. рисунок) совершает горизонтальные колебания по закону $OO_1 = a\sin\omega t$. Найти колебания маятника в линейном приближении, приняв $\omega^2 = g/l$.

18.37. Два одинаковых однородных стержня длины l и массы m каждый (см. рисунок) соединены пружиной жесткости c. Расстояние между точкой подвеса и точкой закрепления пружины для каждого маятника равно a, длина пружины в ненапряженном состоянии равна расстоянию между точками подвеса маятников. Точки подвеса маятников совершают горизонтальные колебания по одинаковому закону $A\sin pt$. Найти движение системы, считая углы отклонения стержней от вертикали малыми.



К задаче 18.36

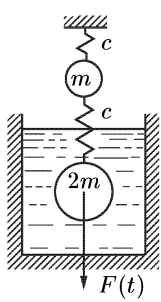


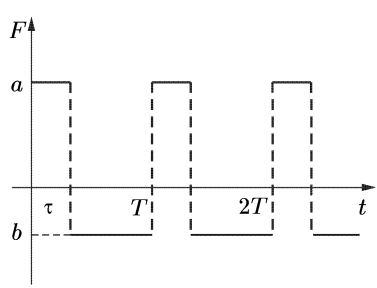
К задаче 18.37

18.38. При каких частотах p возможен резонанс в системе, описанной в предыдущей задаче?

18.39. Детская игрушка состоит из двух одинаковых шариков массы m (см. рисунок), связанных между собой пружинкой жесткости c; верхний шарик с помощью такой же пружинки подвешивается на руке. В недеформированном состоянии длина каждой пружинки равна l. Шарики приводятся в движение вертикальным покачиванием руки по гармоническому закону с амплитудой A и частотой ω ($z = A\sin\omega t$). Как меняется расстояние шариков от руки?

К задаче 18.39



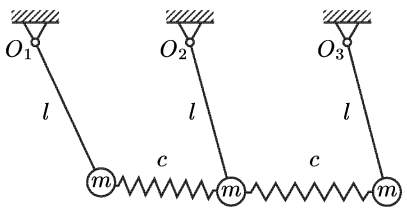


К задаче 18.40

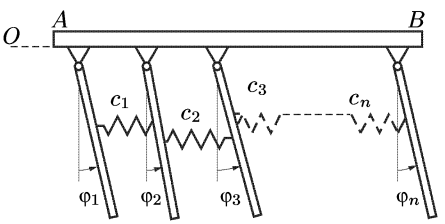
18.40. Два груза массами m и $2m$ (см. рисунок) связаны между собой и с неподвижной опорой одинаковыми пружинами жесткости c.

На груз массы $2m$ действует сила вязкого трения, пропорциональная скорости груза (коэффициент пропорциональности β), а также периодическая внешняя сила $F(t)$, зависимость которой от времени показана на графике. Найти вынужденное движение системы, если $a\tau + b(T - \tau) = 0$.

18.41. Три одинаковых математических маятника массы m и длины l (см. рисунок) связаны пружинами жесткости c, которые при вертикальном положении маятников недеформированы. Точки подвеса O_1, O_2, O_3 маятников совершают горизонтальные колебания по закону $a_1 \sin \omega t$, $a_2 \sin \omega t$, $a_3 \sin \omega t$ соответственно. Найти значения a_1, a_2, a_3, при которых резонанс в системе возникает только при частоте $\omega = \sqrt{g/l + c/m}$.



К задаче 18.41



К задаче 18.42

18.42. Система (см. рисунок) состоит из n одинаковых стержней длины l (см. рисунок), шарнирно закрепленных на горизонтальном стержне AB. Между собой стержни связаны пружинами так, что в положении, когда все стержни вертикальны, пружины ненапряжены. Стержень AB совершает горизонтальные колебания по закону $OA = a \sin \omega t$. Рассматривая движение стержней в линейном приближении (т. е. при малых углах отклонения стержней от вертикали), найти, при каких значениях частоты ω в системе возможен резонанс.

18.43. В следующих задачах динамические системы заданы своими уравнениями движения. Для каждой из координат системы найти частотные характеристики от указанных внешних воздействий [1]) и построить графически амплитудно-фазовые характеристики на комплексной плоскости.

а) $\dot{x} = -2x + y - z + A \sin \omega t$, $\dot{y} = x - y$, $\dot{z} = x + y - z$;

б) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x - y = 0$, $\ddot{y} + \dot{y} + 3y - x = A \sin \omega t$;

в) $\dot{x} = -x + A \sin \omega t$, $\dot{y} = -2y + 2x$, $\dot{z} = -z + y$;

[1]) Нечетность порядка некоторых систем связана с тем, что иногда в качестве параметров, характеризующих систему, вместо обобщенных координат выбирают обобщенные скорости; так, например, поступают при исследовании динамики турбин, где основным параметром является угловая скорость, а не угол поворота.

г) $\ddot{x}+2\dot{x}+x=A\sin\omega t,\quad \ddot{y}+\dot{y}+y=x\quad \ddot{z}+2\dot{z}+z=y$;

д) $\ddot{x}+2\dot{x}+x=-y+A\sin\omega t,\quad \ddot{y}+\dot{y}+y=x$;

е) $\dot{x}=-2x-y+A\sin\omega t,\quad \ddot{y}+2\dot{y}+y=x$.

18.44. Два одинаковых груза массы m (см. рис. к задаче 18.29), связанные между собой и со стенками резервуара пружинами жесткости c и c_1, могут совершать движение по вертикали. Сосуд укреплен на платформе, которая совершает вертикальные колебания по закону $z=a\sin\omega t$. Найти вынужденные движения грузов относительно платформы, если на каждый из них действует сила сопротивления $F_i=-\beta v_i$. Найти также все значения ω, при которых амплитуда вынужденных колебаний груза будет наибольшей.

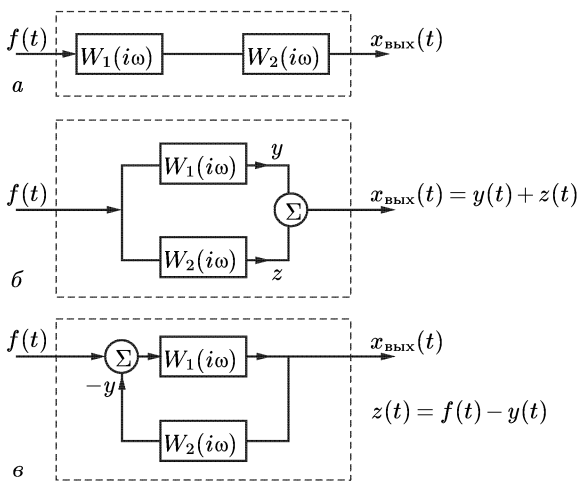
18.45. Два одинаковых груза массы m каждый (см. рис. к задаче 18.29) могут совершать движение по вертикали. На каждый из грузов действует сила сопротивления $\mathbf{F}_i=-\beta\mathbf{v}_i$. Платформа, на которой установлен сосуд, совершает вертикальные колебания по закону $z=a\sin\omega t$. Показать, что с течением времена движения грузов относительно платформы будут совпадать.

18.46. Сосуд совершает движение по вертикали по закону $z=f(t)$. Внутри сосуда по вертикали могут двигаться два одинаковых груза, связанных между собой и со стенками пружинами, как показано на рисунке к задаче 18.29. На каждый из грузов действует сила сопротивления $\mathbf{F}_i=-\beta\mathbf{v}_i$. Показать, что с течением времени движения грузов относительно сосуда будут совпадать, т. е. что деформация $\Delta(t)$ средней пружины при $t\to\infty$ будет стремиться к деформации Δ_0, которую она имеет в состоянии равновесия системы при неподвижном сосуде.

18.47. Кинетическая энергия $T=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n}a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$ и потенциальная энергия $\Pi=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n}c_{ik}q_iq_k$ механической системы являются положительно определенными квадратичными формами с постоянными коэффициентами. На систему действуют силы сопротивления, определяемые функцией Релея $R=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n}(\alpha a_{ik}+\beta c_{ik})\dot{q}_i\dot{q}_k$ $(\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0,\alpha+\beta>0)$. Показать, что с течением времени обобщенные координаты q_i $(i=\overline{1,n})$ будут изменяться по одному и тому же закону, т. е. $q_1(t)\equiv q_2(t)\equiv\ldots\equiv q_n(t)$, если вынуждающие силы имеют вид $f_k=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ik}u_{ij}f(t)$, где u_{ij} — компоненты амплитудного вектора в решении системы, которая получается из рассматриваемой при $\alpha=\beta=0$.

18.48. Кинетическая $T(q, \dot{q}) = \dot{q}^{\mathrm{T}} A \dot{q}/2$ и потенциальная $\Pi(q)$ энергии системы являются положительно определенными квадратичными формами с постоянными коэффициентами. Известны все собственные частоты системы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ $(\omega_i \neq \omega_k)$ и соответствующие им амплитудные векторы $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$. К системе приложено внешнее воздействие $Q_i = b_i \sin \omega_1 t$ $(i = \overline{1, n})$. Найти движение системы, если в начальный момент она находилась в покое.

18.49. В теории линейных цепей рассматривают цепи, состоящие из элементов с детектирующим (однонаправленным) действием, когда воздействие последующего элемента на предыдущий не учитывается. Найти частотную характеристику участка цепи (см. рисунок) со входом $f(t) = A \sin \omega t$ и с выходом $x_{\text{вых}}(t)$, если этот участок состоит из двух однонаправленных элементов с частотными характеристиками $W_1(i\omega)$ и $W_2(i\omega)$, причем элементы а) соединены последовательно, б) соединены параллельно, в) образуют цепь с отрицательной обратной связью.



К задаче 18.49

18.50. В условиях предыдущей задачи частотные характеристики элементов $W_1(i\omega)$ и $W_2(i\omega)$ представлены соответственно в виде $K_1(i\omega)/D_1(i\omega)$ и $K_2(i\omega)/D_2(i\omega)$, где $K_j(\lambda)$ и $D_j(\lambda)$ $(j = \overline{1, 2})$ — многочлены, причем $D_1(\lambda)$ и $D_2(\lambda)$ являются характеристическими многочленами элементов. Найти характеристические полиномы $D(\lambda)$ соединений а), б) и в).

18.51. Механическая система описывается уравнениями в матричной форме $\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t)$, где $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ — постоянные

квадратные матрицы размера $n \times n$, а $\mathbf{Q}(t)$ — вектор вынуждающих сил. Показать, что если положение равновесия $\mathbf{q} = 0$ (при $\mathbf{Q}(t) \equiv 0$) асимптотически устойчиво, то матрица частотных характеристик $[W_{jk}(i\omega)]_{j,k=1}^n$ системы совпадает с матрицей, обратной к матрице $[\mathbf{A}(i\omega)^2 + \mathbf{B}(i\omega) + \mathbf{C}]$.

18.52. Показать, что для частотной характеристики $W_{jk}(i\omega)$ системы, описанной в предыдущей задаче, выполняется соотношение $\lim\limits_{\omega\to\infty} \arg W_{jk}(i\omega) = -s_{jk}\pi/2$, где s_{jk} — положительное целое число.

18.53. Из экспериментальных наблюдений были найдены все частотные характеристики $\mathbf{W}(i\omega) = [W_{jk}(i\omega)]_{j,k=1}^n$ системы $\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t)$, для чего внешние силы $\mathbf{Q}(t)$ надлежащим образом изменяли по гармоническому закону. Каким образом идентифицировать систему, т. е. найти матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, по матрице частотных характеристик $\mathbf{W}(i\omega)$? Найти выражения для матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, если известны матрицы $\mathbf{W}(i\omega_1)$ и $\mathbf{W}(i\omega_2)$ частотных характеристик для двух значений частоты $\omega_1 \neq 0$ и $\omega_2 \neq \omega_1$. Положение равновесия $\mathbf{q} = 0$ системы $\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = 0$ асимптотически устойчиво.

18.54. Задана матрица $\mathbf{W}(i\omega) = [W_{jk}(i\omega)]_{j,k=1}^n$. Каким условиям должна удовлетворять эта матрица для того, чтобы она могла быть матрицей частотных характеристик стационарной системы вида $\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t)$?

18.55. Динамическая система описывается уравнениями $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}f(t)$, где $\mathbf{A} = (a_{\mu\nu})_{\mu,\nu=1}^n$ — постоянная гурвицева матрица [1], а $\mathbf{b}$ — постоянный вектор. При гармоническом воздействии $f(t) = A\sin\omega t$ вектор

$$\mathbf{W}_x(i\omega) = \begin{bmatrix} W_1(i\omega) \\ \vdots \\ W_n(i\omega) \end{bmatrix}$$

частотных характеристик системы от входа f к выходам $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно задан. Производится переход к новым переменным $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ при помощи неособой постоянной матрицы $\mathbf{Q}$. Найти связь между векторами частотных характеристик $\mathbf{W}_y(i\omega)$ и вектором $\mathbf{W}_x(i\omega)$; иначе говоря, найти правило преобразования частотных характеристик при линейных преобразованиях.

18.56. Среднеквадратичным значением сигнала $x(t)$, определенного при $-\infty < t < +\infty$, называется величина $\overline{x}^2 =$

[1] Гурвицевой называется матрица, все собственные числа которой имеют отрицательную действительную часть.

$= \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} x^2(\tau)\,d\tau$. Показать, что среднеквадратичное значение периодического сигнала $x(t+\tau) = x(t)$ равно $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |C_k|^2$, где C_k — коэффициенты Фурье:

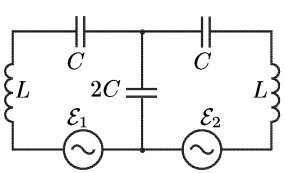
$$C_k = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^{\tau} x(t)\,e^{i\omega kt}\,dt, \quad \omega = \frac{2\pi}{\tau}.$$

18.57. Найти среднеквадратичное значение (см. предыдущую задачу и рисунок к задаче 18.5) координаты груза массы m, подвешенного на пружине жесткости c и совершающего вертикальные колебания в среде с сопротивлением. Сила сопротивления $F = -\beta v$, внешняя периодическая сила $f(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{i\omega kt}$, $a_{-k} = \overline{a}_k$.

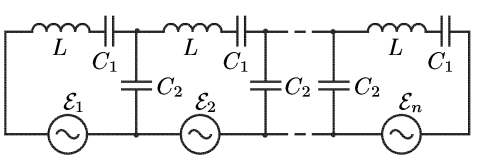
18.58. Найти среднее значение мощности $\overline{N}$, выделяющейся в активном сопротивлении R, в RLC-контуре, если $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin\omega t$, а $\overline{N} = R\overline{i^2}$, где $\overline{i^2}$ — среднеквадратичное значение тока. (См. задачу 18.56 и рисунок к задаче 18.8.)

18.59. В условиях задачи 18.29 найти движение системы в случае резонанса.

18.60. В электрической цепи, представленной на рисунке, $\mathcal{E}_1(t) = \mathcal{E}_2(t) = U_0 \sin\omega t$. Найти все значения ω, при которых возможен резонанс.



К задаче 18.60



К задаче 18.61

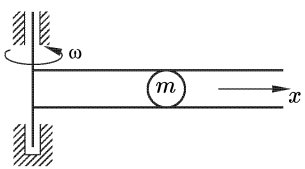
18.61. В изображенной на рисунке системе из n связанных электрических контуров $\mathcal{E}_1(t) = \mathcal{E}_2(t) = \ldots = \mathcal{E}_n(t) = a\sin\omega t$. Найти все значения ω, при которых возможен резонанс.

18.62. Кинетическая $T = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$ и потенциальная $\Pi = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} c_{ik}q_iq_k$ энергии консервативной системы являются положительно определенными квадратичными формами с постоянными

коэффициентами. Известно одно из главных колебаний системы, т. е. известны собственная частота ω_1 и соответствующий ей амплитудный вектор $\mathbf{u}_1$. На каких частотах возможен резонанс в этой системе, если вынужденные движения описываются уравнениями $A\ddot{q} + Cq = Au_1 a \sin\omega t$, где $A = [a_{ik}]_{i,k=1}^n$, $C = [c_{ik}]_{i,k=1}^n$.

§ 19. Уравнения Гамильтона, Рауса, Уиттекера и Якоби

19.1. По гладкой горизонтальной трубке (см. рисунок), вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, может двигаться шарик массы m. Пренебрегая размерами шарика, составить и решить канонические уравнения его относительного движения.



К задаче 19.1

19.2. Найти гамильтониан и составить канонические уравнения движения плоского математического маятника.

19.3. Составить канонические уравнения движения математического маятника переменной длины $l = l(t)$, где $l(t)$ — заданная функция времени.

19.4. Составить канонические уравнения движения свободной материальной точки в однородном поле тяжести.

19.5. Найти гамильтониан материальной точки в поле с потенциалом $\Pi(x, y, z)$, если за независимые координаты выбраны: а) декартовы; б) сферические; в) цилиндрические координаты.

В задачах 19.6–19.11 найти гамильтониан и составить канонические уравнения движения механической системы, лагранжиан которой имеет следующий вид.

19.6. $L = \dfrac{3\dot{q}_1^2}{2} + \dfrac{\dot{q}_2^2}{2} - q_1^2 - \dfrac{q_2^2}{2} - q_1 q_2.$

19.7. $L = \dfrac{5\dot{q}_1^2}{2} + \dfrac{\dot{q}_2^2}{2} + \dot{q}_1\dot{q}_2\cos(q_1 - q_2) + 3\cos q_1 + \cos q_2.$

19.8. $L = \dfrac{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2}{2} + \dfrac{(\dot{q}_1 + \dot{q}_3)^2}{4} + \dfrac{(\dot{q}_2 + \dot{q}_4)^2}{4} -$

$$- 2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - q_1 q_2) - \frac{q_3^2 + q_4^2}{4}.$$

19.9. $L = \dfrac{(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 + a\dot{q}_1^2 t^2}{2} - a\cos q_2.$

19.10. $L = a\dot{q}_1^2 + (c^2 + b^2\cos^2 q_1)\dot{q}_2^2.$

19.11. $L = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{q_1 q_2}(\dot{q}_1 q_2 + q_1 \dot{q}_2)^2 + (\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 + 4q_1 q_2 \dot{q}_3^2\right] +$

$$+ \frac{a}{q_1 + q_2} - b(q_1 - q_2).$$

В задачах 19.12–19.16 найти лагранжиан механической системы, гамильтониан которой имеет следующий вид.

19.12. $H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{a}{4}(q_1 - q_2)^2 + \frac{b}{4}(q_1 + q_2)^2.$

19.13. $H = q_1 p_2 - q_2 p_1 + a(p_1^2 + p_2^2).$

19.14. $H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{\sin^2 q_1}\right) - a\cos q_1.$

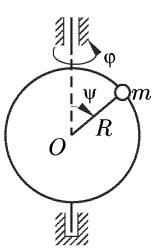
19.15. $H = \frac{1}{2}\frac{p_1^2 + p_2^2}{q_1^2 + q_2^2} + a(q_1^2 + q_2^2).$

19.16. $H = p_1 p_2 + q_1 q_2.$

19.17. Материальная точка массы m движется в поле притяжения к неподвижному центру. Составить канонические уравнения движения точки, если притягивающая сила является функцией ее расстояния от центра.

19.18. Найти гамильтониан и составить канонические уравнения движения линейной модели трехатомной молекулы (см. рис. к задаче 16.64), которую можно представить в виде трех точечных масс m_1, m_2, m_3, насаженных на гладкий горизонтальный стержень и соединенных пружинами жесткости c_1 и c_2.

19.19. Тяжелое колечко массы m (см. рисунок) скользит по гладкой проволочной окружности массы M и радиуса R, которая может вращаться вокруг своего вертикального диаметра. Найти гамильтониан, составить канонические уравнения движения системы и решить их (в квадратурах).



К задаче 19.19

19.20. Два одинаковых шарика массы m (см. рисунок), связанные между собой пружиной жесткости c (длина пружины в недеформированном состоянии равна l_0), могут скользить без трения по трубке, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. Найти гамильтониан системы и составить канонические уравнения относительного движения шариков, пренебрегая их размерами.

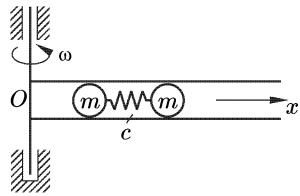
19.21. Релятивистская частица массы покоя m_0 при отсутствии силового поля в декартовых координатах имеет лагранжиан $L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)/c^2}$, где c — скорость света. Показать, что гамильтониан свободной релятивистской частицы имеет вид $H =$

$= c\sqrt{m_0^2c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$, в частности, что при $v = 0$ $H = m_0c^2$ (формула Эйнштейна для энергии покоя). Составить канонические уравнения и найти закон движения частицы.

19.22. В сферических координатах лагранжиан релятивистской частицы в поле тяготения имеет вид

$$L = -m_0c^2\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta}{c^2}} + \frac{\gamma}{r},$$

где m_0 — масса покоя частицы, а c — скорость света. Найти гамильтониан частицы.



К задаче 19.20

19.23. Составить канонические уравнения движения материальной точки массы m по гладкой сфере радиуса R в однородном поле тяжести (сферический маятник).

19.24. Материальная точка массы m может двигаться по гладкой сфере, расширяющейся по закону $R = R(t)$. в однородном поле тяжести. Найти гамильтониан и составить канонические уравнения движения точки.

19.25. Составить канонические уравнения движения системы, лагранжиан которой в сферических координатах имеет вид

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\psi}^2\sin^2\theta) - aF(\theta)\dot{\psi},$$

где $a = \text{const}$, а $F(\theta)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

19.26. Две материальные точки массами m_1 и m_2 связаны между собой упругим стержнем жесткости c и помещены на гладкую горизонтальную плоскость; стержень не работает на изгиб и на кручение и в нерастянутом состоянии имеет длину l_0; массой стержня можно пренебречь. Составить канонические уравнения движения системы.

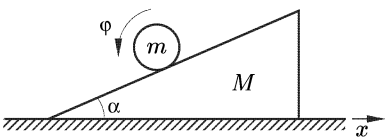
19.27. Найти гамильтониан и составить канонические уравнения движения системы двух точек массами m_1 и m_2, взаимодействующих по закону всемирного тяготения. За обобщенные координаты принять координаты центра масс системы x, y, z, расстояние между точками r и углы φ и ψ (широты и долготы), которые определяют направление прямой, соединяющей точки.

19.28. Симметричный волчок массы m ($A = B \neq C$) с неподвижной точкой опоры O совершает движение в однородном поле тяжести. Центр масс волчка находится на оси динамической симметрии $O\zeta$ на расстоянии a от точки опоры. Составить канонические уравнения движения волчка.

19.29. Составить канонические уравнения пространственного движения однородного стержня массы m и длины $2l$ в однородном поле тяжести. Найти первые интегралы движения.

19.30. Найти гамильтониан свободного твердого тела массы m в однородном поле тяжести, если главные центральные моменты инерции тела равны A, B и C.

19.31. Треугольная призма массы M (см. рисунок) скользит по гладкой горизонтальной плоскости. Однородный цилиндр радиуса r и массы m катится без проскальзывания по боковой грани призмы, образующей угол α с горизонтом. Найти гамильтониан системы, составить канонические уравнения движения и решить их.

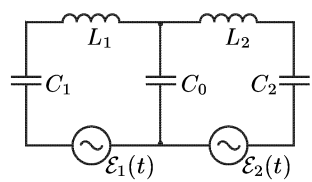


К задаче 19.31

19.32. Найти гамильтониан и составить канонические уравнения движения двойного маятника, состоящего из двух одинаковых однородных стержней массы m и длины l (см. рис. к задаче 12.29).

19.33. Выяснить физический смысл обобщенных импульсов $p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$, для системы связанных электрических контуров (омическим сопротивлением пренебречь).

19.34. Пользуясь электромеханическими аналогиями, составить канонические уравнения состояния электрического контура, изображенного на рисунке.



К задаче 19.34

19.35. Каким условиям должны удовлетворять постоянные матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ для того, чтобы система уравнений

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{C}\mathbf{q} + \mathbf{D}\mathbf{p}$$

была гамильтоновой системой?

19.36. Движение частицы массы m в поле с потенциалом $\Pi(q_1, q_2, q_3)$ задано в ортогональных криволинейных координатах q_1, q_2 и q_3. Найти гамильтониан частицы, если криволинейные координаты связаны с декартовыми координатами соотношениями $x = x(q_1, q_2, q_3)$, $y = y(q_1, q_2, q_3)$, $z = z(q_1, q_2, q_3)$.

19.37. Найти гамильтониан системы с функцией Лагранжа $L = L_2 + L_1 + L_0$, где

$$L_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(q,t)\dot{q}_i\dot{q}_k \quad (a_{ik} = a_{ki}),$$

$$L_1 = \sum_{i=1}^{n} b_i(q,t)\dot{q}_i, \quad L_0 = L_0(q,t).$$

19.38. Составить канонические уравнения малых колебаний консервативной системы с n степенями свободы, для которой кинетическая и потенциальная энергии представляют собой положительно определенные квадратичные формы с постоянными коэффициентами:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k, \quad \Pi = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}q_iq_k \quad (a_{ik} = a_{ki}, c_{ik} = c_{ki}).$$

19.39. Найти гамильтониан системы, лагранжиан которой равен

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k + \sum_{i=1}^{n} b_i(t)q_i,$$

где $a_{ik} = a_{ki}$ — постоянные величины. Составить канонические уравнения движения и найти их решение.

19.40. Показать, что в консервативной системе с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}q_iq_j,$$

где $a_{ij} = \text{const}$, $c_{ij} = \text{const}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{ik}a_{kj}$ $(i, j = \overline{1, n})$, координаты и импульсы удовлетворяют одним и тем же уравнениям:

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}\ddot{q}_j + c_{ij}q_j) = 0, \quad \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}\ddot{p}_j + c_{ij}p_j) = 0 \quad (i = \overline{1, n}).$$

19.41. Натуральной механической системе соответствует функция Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_iv_i^2 - \Pi(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, t).$$

С помощью невырожденного точечного преобразования $q_i = f_i(\theta_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ осуществляется переход от лагранжевых переменных $\{q_i, \dot{q}_i, t\}$ к новым лагранжевым переменным $\{\theta_j, \dot{\theta}_j, t\}$. Найти соответствующую этому переходу связь обобщенных импульсов p_{iq} и $p_{j\theta}$.

19.42. Найти закон преобразования обобщенных импульсов, о котором говорилось в предыдущей задаче, при переходе от декартовых координат к координатам: а) цилиндрическим r, φ, z: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$; б) сферическим r, φ, θ: $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$.

19.43. Гамильтониан трехмерного анизотропного осциллятора в декартовых координатах имеет вид

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2}(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2).$$

Используя решение задачи 19.41, найти гамильтониан осциллятора в цилиндрических и сферических координатах.

19.44. Составить канонические уравнения Гамильтона для системы, представленной в задаче 16.37.

19.45. Показать, что движение консервативной системы с двумя степенями свободы и одной циклической координатой может быть найдено в квадратурах.

19.46. Составить канонические уравнения Гамильтона для системы, представленной в задаче 16.38.

19.47. Составить канонические уравнения Гамильтона для системы, представленной в задаче 16.40.

19.48. Составить канонические уравнения Гамильтона для системы, представленной в задаче 16.41.

19.49. Система имеет функцию Гамильтона $H(q_i, p_i, t)$, причем матрица $[\partial^2 H/(\partial p_i \partial p_k)]_{i,k=1}^n$ является матрицей положительно определенной квадратичной формы при любых q_j, p_j, t. Показать, что функция $\psi(q_i, \dot{q}_i, t)$, определенная в соответствии с равенством $\psi(q_i, \dot{q}_i, t) = \max\limits_{\{x\}}[\sum x_i \dot{q}_i - H(q_i, x_i, t)]$, совпадает с лагранжианом системы $L(q_i, \dot{q}_i, t)$.

19.50. Система имеет функцию Лагранжа $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ $(i = \overline{1, n})$, причем матрица $[\partial^2 L/(\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k)]_{i,k=1}^n$ является матрицей положительно определенной квадратичной формы. Показать, что обобщенные импульсы $p_i = p_i(q_j, \dot{q}_j, t)$ можно определить, рассматривая задачу на экстремум $\varphi(q_i, p_i, t) = \max\limits_{\{\dot{q}_i\}}[\sum p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t)]$ по всем переменным $\dot{q}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Показать также, что функция $\varphi(q_i, p_i, t)$ является гамильтонианом системы.

19.51. Доказать следующий критерий устойчивости состояния равновесия систем в канонической форме: если в состоянии равновесия (q^*, p^*) функция Гамильтона $H(q, p)$ имеет строгий минимум (по всем переменным q_i, p_i $(i = \overline{1, n})$), то это состояние будет устойчивым по Ляпунову.

19.52. Для обобщенно консервативной системы с гамильтонианом $H(q_k, p_k)$ найдена такая функция $S(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, что выражение $H(q_k, \partial S/\partial q_1, \ldots, \partial S/\partial q_n)$, в которое переходит гамильтониан при замене импульсов p_k на $f_k = \partial S/\partial q_k$ $(k = \overline{1, n})$, оказывается не зависящим от координат q_i $(i = \overline{1, n})$. Показать, что в этом случае

на движениях системы $\{q_i(t), p_i(t)\}$ при всех t будут выполняться соотношения $p_k(t) = f_k(q(t))$, если они выполняются в начальный момент времени, т. е. если $p_k^0 = f_k(q_0)$ $(i, k = \overline{1, n})$.

19.53. Функции $q_i = \varphi_i(q_0, p_0, t)$, $p_i = \psi_i(q_0, p_0, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ задают закон движения системы с гамильтонианом $H(q_i, p_i)$. Найти закон движения системы с гамильтонианом $f[H(q_i, p_i)]$.

19.54. Функции $\varphi_i(\alpha_j, \beta_j, t)$, $\psi_i(\alpha_j, \beta_j, t)$, $(i, j = \overline{1, n})$, где α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ — произвольные постоянные, задают общее решение $q_i = \varphi_i(\alpha_j, \beta_j, t)$, $p_i = \psi_i(\alpha_j, \beta_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ гамильтоновой системы с функцией $H_0(q_j, p_i, t)$. Найти закон движения гамильтоновой системы с функцией

$$H(q, p, t) = H_0(q, p + \operatorname{grad} f(q, t), t) + \partial f(q, t)/\partial t,$$

где $f(q, t)$ — заданная функция.

19.55. Функции $q_i = \varphi_i(\alpha_j, \beta_j, t)$, $p_i = \psi_i(\alpha_j, \beta_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ представляют собой уравнения движения системы с гамильтонианом $H_0(q_i, p_i)$. Найти движение системы с гамильтонианом $H_1 = \gamma(t) H_0(q_i, p_i)$.

19.56. Натуральной механической системе соответствует функция Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i V_i^2 - \Pi(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, t)$$

и функция Гамильтона $H(q, p_q, t)$. В исходном лагранжевом описании системы совершается переход от обобщенных координат q_i $(i = \overline{1, n})$ к обобщенным координатам θ_i $(i = \overline{1, n})$ в соответствии с формулами неособенного преобразования $q_i = f_i(\theta, t)$ $(i = \overline{1, n})$. Найти гамильтониан $\widetilde{H}(\theta, p_\theta, t)$, соответствующий описанию системы в новых переменных (см. задачу 19.41).

19.57. Системе с лагранжианом $L(q, \dot{q}, t)$ соответствует гамильтониан $H(q, p, t)$. Найти гамильтониан $\widetilde{H}(q, p, t)$ системы, лагранжиан которой равен $\widetilde{L}(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + dF(q, t)/dt$, где $dF/dt = \partial F/\partial t + (\operatorname{grad} F, \dot{q})$.

19.58. Система с гамильтонианом $H_0(q, p, t)$ имеет лагранжиан $L_0(q, \dot{q}, t)$. Найти лагранжиан $L(q, \dot{q}, t)$ системы с гамильтонианом

$$H(q, p, t) = \gamma(t) H_0 \left[q, \frac{p - \operatorname{grad} \Phi(q, t)}{\gamma(t)}, t \right] - \frac{\partial \Phi(q, t)}{\partial t}.$$

19.59. В канонических переменных движение системы определяется гамильтонианом

$$H(q, p, t) = \Phi(q, p - \operatorname{grad} F(q, t), t) - \partial F(q, t)/\partial t,$$

где

$$\det \left[\frac{\partial^2 \Phi(q_j, z_i, t)}{\partial z_i \, \partial z_k} \right]_{i,k=1}^{n} \neq 0.$$

Показать, что уравнения Лагранжа этой системы не зависят от выбора функции $F(q_i, t)$.

19.60. В системе с лагранжианом $L(q, \dot{q}, t)$ переменные P_i определяются в соответствии с равенствами

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial F(q_j, t)}{\partial q_i} \quad \left(i, j = \overline{1, n}, \ \det \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \, \partial \dot{q}_j} \right]_{i,j=1}^{n} \neq 0 \right).$$

Показать, что для любой функции $F(q, t)$ найдется такая функция $H(q, P, t)$, что в переменных (q, P, t) уравнения движения системы записываются в канонической форме

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q, P, t)}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = \frac{\partial H(q, P, t)}{\partial q_i} \quad (i = \overline{1, n}).$$

19.61. Уравнения движения системы материальных точек в обобщенных координатах $q_1, q_2, \ldots, q_n$ заданы в форме уравнений Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = \overline{1, n}).$$

Записать уравнения движения этой системы в «полуканонической» форме, определяя обобщенные импульсы равенствами $\overline{p}_k = \partial T / \partial \dot{q}_k$ $(k = \overline{1, n})$, из которых скорости $\dot{q}_k$ могут быть выражены через q_i, $\overline{p}_i$ и t с помощью соотношений $\dot{q}_k = \psi_k(q, \overline{p}, t)$ $(k = \overline{1, n})$.

19.62. Из «полуканонических» уравнений, полученных в предыдущей задаче, вывести канонические уравнения движения системы в потенциальном поле с потенциалом $\Pi(q, t)$.

19.63. При выводе теоремы о вириале для финитных движений системы материальных точек в декартовых координатах рассматривают функцию $G = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i \dot{\mathbf{r}}_i$, где $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор i-й материальной точки, а $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ — ее импульс. Используя функцию $g = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k q_k$ $(p_k = \partial L / \partial \dot{q}_k, \ L = T - \Pi = L(q, \dot{q}))$, получить аналог теоремы о вириале в обобщенных координатах.

19.64. Показать, что среднее значение гамильтониана $H(q_i, p_i) = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}(q)p_ip_k + \Pi(q)$ на финитных движениях системы имеет вид $\overline{H} = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_i}q_i$.

19.65. На груз массы m, подвешенный на пружине жесткости c, действуют возмущающая сила $F(t)$ и сила сопротивления среды $Q = -\beta v$. Показать, что если ввести координату $y = x\exp[\beta t/(2m)]$, где x — смещение груза из положения равновесия, то уравнения движения груза могут быть записаны в форме уравнений Гамильтона. Найти соответствующие координате y лагранжиан L и гамильтониан H; выписать канонические уравнения движения.

19.66. Частица массы m движется в плоскости xy под действием силы $\mathbf{F} = -f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Составить уравнения движения частицы в форме уравнений Рауса.

19.67. Составить уравнения движения спутника массы m в поле тяготения планеты массы M в форме уравнений Рауса.

19.68. Две точки с массами m_1 и m_2 взаимодействуют по закону всемирного тяготения. Составить уравнения движения системы в форме уравнений Рауса. За обобщенные координаты принять координаты центра масс системы x, y, z, расстояние между точками r и углы φ и ψ (широты и долготы), которые определяют направление прямой, соединяющей точки.

19.69. Тяжелое колечко массы m (см. рис. к задаче 19.19) скользит по гладкой проволочной окружности массы M и радиуса r, которая может вращаться вокруг своего вертикального диаметра. Составить уравнения движения системы в форме уравнений Рауса.

19.70. В сферических координатах лагранжиан релятивистской частицы в поле тяготения имеет вид

$$L = -m_0c^2\sqrt{1-\frac{\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta}{c^2}}+\frac{G}{r},$$

где m_0 — масса покоя частицы, а c — скорость света. Построить функцию Рауса частицы.

19.71. Найти функцию Рауса системы, гамильтонианом которой является функция $H(q_i, p_i, t)$, выбирая в качестве переменных $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_m, \dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_n$.

19.72. Найти функцию Уиттекера K и составить уравнения Уиттекера системы с лагранжианом $L = (\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+q_1^2\dot{q}_3^2)/2-(q_1^2+q_2^2)/2$.

19.73. Найти функцию Уиттекера K частицы массы m в однородном поле тяжести.

19.74. Найти функцию Якоби P частицы массы m в однородном поле тяжести.

19.75. Составить уравнения движения частицы массы m в однородном поле тяжести в форме уравнений Якоби. Найти первые интегралы полученной системы.

19.76. Лагранжиан точечного заряда e и массы m в электромагнитном поле имеет вид $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - e\varphi + \frac{e}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{A}]$, c — скорость света, φ и $\mathbf{A}$ — скалярный и векторный потенциалы поля. Найти гамильтониан заряда и составить канонические уравнения движения.

19.77. Функция Гамильтона релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле имеет вид $H = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2} + e\varphi$, c — скорость света, $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ — импульс частицы, $\mathbf{A}$ и φ — векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля. Найти лагранжиан частицы.

19.78. Найти функцию Гамильтона и составить канонические уравнения движения осциллятора с вязким трением, функция Лагранжа которого равна $L = \frac{1}{2}e^{\beta t/m}\left[m\dot{x}^2 + \beta x\dot{x} - \left(c - \frac{\beta^2}{2m}\right)x^2\right]$, где β — коэффициент сопротивления.

19.79. Найти функцию Гамильтона и составить канонические уравнения движения осциллятора с вязким трением, функция Лагранжа которого равна $\widetilde{L} = e^{\beta t/m}[m\dot{x}^2 - cx^2]/2$. Показать, что функции $\widetilde{L}$ и L из задачи 19.78 связаны соотношением $\widetilde{L}(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + dF(q, t)/dt$ (см. задачу 19.57).

§ 20. Первые интегралы. Скобки Пуассона. Теорема Нётер

20.1. Вычислить скобки Пуассона (K_j, p_i), (K_i, K_j), (K^2, K_j), (x_i, K_j) $(i, j = \overline{1, 3})$, где x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3 — декартовы координаты и компоненты импульса частицы; K_1, K_2, K_3 — компоненты ее момента импульса относительно начала координат, а $K^2 = K_1^2 + K_2^2 + K_3^2$.

В задачах 20.2–20.13 для заданных функций $\varphi(q, p, t)$ и $\psi(q, p, t)$ вычислить скобку Пуассона (φ, ψ).

20.2. $\varphi = q^2 + p^2$, $\psi = \operatorname{arctg}(p/q)$.

20.3. $\varphi = \varphi(p^2 + q^2)$, $\psi = \operatorname{arctg}(p/q)$.

20.4. $\varphi = q_i$, $\psi = \psi(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t)$.

20.5. $\varphi = p_i, \quad \psi = \psi(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t)$.

20.6. $\varphi = q_i, \quad \psi = p_k \quad (i, k = \overline{1, n})$.

20.7. $\varphi = q_i, \quad \psi = q_k \quad (i, k = \overline{1, n})$.

20.8. $\varphi = p_i, \quad \psi = p_k \quad (i, k = \overline{1, n})$.

20.9. $\varphi = \varphi(q_1, p_1), \quad \psi = F[\varphi(q_1, p_1), q_2, \ldots, q_n, p_2, \ldots, p_n, t]$.

20.10. $\varphi = q\cos\omega t + \dfrac{p}{\omega}\sin\omega t$, $\psi = p\cos\omega t - q\omega\sin\omega t$.

20.11. $\varphi = \varphi\Big[\sum\limits_{i=1}^{n}(p_i^2 + q_i^3)\Big]$, $\psi = \psi\Big[\sum\limits_{i=1}^{n}(p_i^2 + q_i^3)\Big]$.

20.12. $\varphi = \cos\Big[\sum\limits_{i=1}^{n}(p_i^2 + q_i^2)\Big]$, $\psi = \sin\Big[\sum\limits_{i=1}^{n}(p_i^2 + q_i^2)\Big]$.

20.13. $\varphi = f_1(g(q_i, p_i))$, $\psi = f_2(g(q_i, p_i))$.

20.14. С помощью скобок Пуассона записать канонические уравнения Гамильтона.

20.15. Соотношения $X(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $Y(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, где $f(x_1, \ldots, x_n)$, $X_i(x_1, \ldots, x_n)$ и $Y_i(x_1, \ldots, x_n)$ — непрерывно дифференцируемые функции, задают линейные дифференциальные операторы X и Y соответственно. Непосредственной проверкой показать, что коммутатор $Z(f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$ является снова дифференциальным оператором 1-го порядка: $Z(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} Z_i(x_1, \ldots, x_n)\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, причем $Z_i = X(Y_i) - Y(X_i)$.

20.16. Используя решение предыдущей задачи, доказать тождество Пуассона

$$((\varphi, \psi), f) + ((\psi, f), \varphi) + ((f, \varphi), \psi) = 0,$$

где $\varphi = \varphi(q, p, t)$, $\psi = \psi(q, p, t)$, $f = f(q, p, t)$.

20.17. Показать, что функции $\varphi_1 = p_1^2 + q_2^2$, $\varphi_2 = p_2^2 + q_1^2$, $\varphi_3 = (\varphi_1, \varphi_2)$, где (φ_1, φ_2) — скобка Пуассона, являются независимыми первыми интегралами системы с гамильтонианом $H = p_1 p_2 + q_1 q_2$.

20.18. Функция $\varphi(q, p, t)$ является первым интегралом обобщенно-консервативной системы. Показать, что функции $\partial\varphi/\partial t$, $\partial^2\varphi/\partial t^2, \ldots$ также будут первыми интегралами этой системы.

20.19. Функция $\varphi(q, p, t)$ является первым интегралом гамильтоновой системы с циклической координатой q_k. Показать, что функции $\partial\varphi/\partial q_k$, $\partial^2\varphi/\partial q_k^2, \ldots$, $\partial^n\varphi/\partial q_k^n$ также будут первыми интегралами этой системы.

20.20. В гамильтоновой системе с n степенями свободы координата q_1 является циклической. Показать, что $2n$ независимых первых интегралов системы можно представить виде $W_1 = q_1 - F_1(q_j, p_s, t)$, $W_i = F_i(q_j, p_s, t)$ $(i = \overline{2, 2n})$, где функции $F_k(q_j, p_s, t)$ $(k = \overline{1, 2n})$ не зависят от циклической координаты q_1.

20.21. В гамильтоновой системе с n степенями свободы координата q_1 является циклической. По первым интегралам, указанным в задаче 20.20, построить такой первый интеграл W системы, чтобы $2n$ независимых первых интегралов определялись равенствами W, $\partial W/\partial q_1, \ldots, \partial^{2n-1}W/\partial q_1^{2n-1}$.

20.22. Используя результат задачи 20.21, для гамильтоновой системы с циклической координатой q_1 построить два таких первых интеграла, при помощи которых можно получить полный набор независимых первых интегралов системы, используя только скобки Пуассона.

20.23. Показать, что для системы с гамильтонианом $H = F[f(q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m), q_{m+1}, \ldots, q_n, p_{m+1}, \ldots, p_n, t]$ функция $f(q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m)$ является первым интегралом.

20.24. Показать, что для системы с гамильтонианом

$$H = F[\varphi_1(q_1, p_1), \ldots, \varphi_n(q_n, p_n), t]$$

функции $\varphi_i(q_i, p_i)$ $(i = \overline{1, n})$ являются первыми интегралами. Считая, что система уравнений $y_i = \varphi_i(q_i, p_i)$ разрешима относительно импульсов $p_i = \psi_i(q_i, y_i)$, $(i = \overline{1, n})$, найти движение системы (в квадратурах).

20.25. Показать, что для системы с гамильтонианом

$$H = F\{f_n[\ldots f_2(f_1(q_1, p_1), q_2, p_2), \ldots, q_n, p_n], t\}$$

функции $f_1(q_1, p_1)$, $f_i(f_{i-1}, q_i, p_i)$ $(i = \overline{1, n})$ являются первыми интегралами. При $n = 2$ найти (в квадратурах) движение системы. Считать, что система уравнений $y_1 = f_1(q_1, p_1)$, $y_2 = f_2(\alpha, q_2, p_2)$ разрешима относительно импульсов: $p_1 = \psi_1(y_1, q_1)$, $p_2 = \psi_2(\alpha, y_2, q_2)$.

20.26. Показать, что для системы с гамильтонианом

$$H = \sum_{i=1}^{n} f_i(q_i, p_i) \left[\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(q_i, p_i) \right]^{-1},$$

функции $f_i(q_i, p_i) - H\varphi_i(q_i, p_i)$ являются первыми интегралами.

20.27. Показать, что для системы с гамильтонианом

$$H = f(t) \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \varphi_i(q_i, p_i) \left[\sum_{i=1}^{n} \delta_i \varphi_i(q_i, p_i) \right]^{-1},$$

где γ_i и δ_i — постоянные, функции $\varphi_i(q_i, p_i)$ являются первыми интегралами.

20.28. Найти (в квадратурах) движение системы, гамильтониан которой задан в следующем виде:

а) $H = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}(p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2)$;

б) $H = [p_1^2(p_2^2 + q_2^2) + q_1^2]/2$;

в) $H = (p_1^2 + q_1^2)/(p_2^2 + q_2^2)$;

г) $H = (p_1^2 + q_1^2)F(p_2, \ldots, p_n, t)$.

20.29. Функция $W(q, p, t)$ удовлетворяет соотношению $\partial W/\partial t + (W, H) \equiv f(t)$, где (W, H) — скобка Пуассона. Построить первый интеграл канонической системы с гамильтонианом $H(q, p, t)$, используя функции $W(q, p, t)$ и $f(t)$.

20.30. Две механические системы с одной степенью свободы каждая имеют гамильтонианы $H_1(q, p)$ и $H_2(q, p)$ соответственно. Известны конечные уравнения движения $q(q_0, p_0, t)$ и $p(q_0, p_0, t)$ одной из этих систем. Найти конечные уравнения движения системы с гамильтонианом $f(H_1, H_2)$, если скобки Пуассона от функций $H_1(q, p)$ и $H_2(q, p)$ равны нулю.

20.31. Найти ошибку в следующих «правдоподобных» рассуждениях. Материальная точка массы m начинает движение в плоскости yz из состояния покоя в однородном поле тяжести, силовые линии которого параллельны оси Oz. Следовательно, импульс точки p_x, сохраняется, т. е. $p_x = \text{const}$. Производная момента импульса K_{Oy} точки относительно оси Oy равна нулю, так как единственная внешняя сила — сила тяжести — пересекает ось Oy и, следовательно, не создает момента относительно этой оси. Поэтому K_{Oy} будет первым интегралом, т. е. $K_{Oy} = \text{const}$ при движении точки. Используя теорему Якоби–Пуассона, получим, что $p_z = \text{const}$, так как $(p_x, K_{Oy}) = p_z$. Этот «вывод» находится в очевидном противоречии с уравнением изменения импульса $\dot{p}_z = mg$.

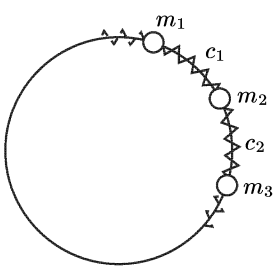
20.32. Гамильтониан $H(q, p, t)$ некоторой системы удовлетворяет условию $\det[\partial^2 H/(\partial p_i\, \partial p_k)]_{i,k=1}^{n} \neq 0$. Показать, что соответствующая гамильтонова система не имеет нетривиальных (т. е. отличных от константы) первых интегралов вида $f(q, t) = \text{const}$, зависящих только от координат q и времени t.

20.33. Найти зависимость гамильтониана $H(q, p, t)$ от обобщенных импульсов p_i $(i = \overline{1, n})$, если соответствующая система канонических уравнений допускает n функционально независимых первых интегралов вида $f_1(q, t) = \alpha_1$, $f_2(q, t) = \alpha_2, \ldots, f_n(q, t) = \alpha_n$, не зависящих от обобщенных импульсов.

20.34. Система дифференциальных уравнений $\dot{q}_i = A_i(q, p, t)$, $\dot{p}_i = B_i(q, p, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ имеет в некоторой области $2n$ независимых первых интегралов $W_k(q_j, p_j, t)$ $(k = \overline{1, 2n})$. Доказать, что эта система является гамильтоновой тогда и только тогда, когда скобки Пуассона (W_k, W_l) любой пары интегралов также являются первым интегралом.

20.35. В лагранжиане $L = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j - \Pi(q)$ консервативной системы функции $a_{ij}(q)$ являются однородными функциями одного и того же порядка k, а потенциал $\Pi(q)$ — однородной функцией порядка l. Как должны быть связаны числа k, l, a и b, чтобы однопараметрическое семейство преобразований (с параметром α) $\widetilde{q}_i = q_i \exp(\alpha a)$ $(i = \overline{1, n})$, $\widetilde{t} = t\exp(\alpha b)$ удовлетворяло условиям теоремы Нётер? Найти соответствующий первый интеграл системы.

20.36. Система состоит из n материальных точек с массами m_1, $m_2, \ldots, m_n$ (см. рисунок), которые могут перемещаться по гладкому горизонтальному кольцу. Массы соединены пружинами, как показано на рисунке. Подобрав преобразование $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q, \alpha)$ $(i = \overline{1, n})$, не меняющее лагранжиана системы, показать, что в силу теоремы Нётер система имеет первый интеграл $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\dot{q}_i$. В качестве обобщенных координат q_i $(i = \overline{1, n})$ принять расстояние по дуге окружности от некоторой неподвижной точки до точек системы.



К задаче 20.36

20.37. Показать, что преобразование поворота относительно оси x_3 удовлетворяет всем условиям теоремы Нётер для системы с лагранжианом $L = f(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + \Omega(t)(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1)$. Найти соответствующий первый интеграл.

20.38. Система материальных точек с массами m_1, $m_2, \ldots, m_n$ совершает движение в силовом поле с потенциалом

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} a_i r_i^2 \left(\sum_{i=1}^{n} b_i r_i^8\right)^{-1/2},$$

где x_i, y_i, z_i — декартовы координаты точек; $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$, a_i, b_i — постоянные числа. Подобрав числа α и β так, чтобы однопараметрическое семейство преобразований (с параметром a) $\widetilde{x}_i = x_i e^{\alpha a}$, $\widetilde{y}_i = y_i e^{\alpha a}$, $\widetilde{z}_i = z_i e^{\alpha a}$, $\widetilde{t} = te^{\beta a}$ удовлетворяло условиям теоремы Нётер,

показать, что функция

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i\dot{x}_i + y_i\dot{y}_i + z_i\dot{z}_i) - t\left[\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + 2\Pi\right]$$

является первым интегралом системы.

20.39. Движение механической системы определяется лагранжианом $L = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} \dot{q}_i^2 - \Pi(q_i)$. Показать, что если первый интеграл этой системы найден при помощи теоремы Нётер, то он имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i\left(aq_i + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}q_j + c_i\right) - \left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i^2 + \Pi(q_i)\right](2at + d),$$

где a, c_i, d — постоянные величины, а $(b_{ij})_{i,j=1}^{n}$ — кососимметрическая постоянная матрица.

20.40. Движение механической системы описывается лагранжианом $L = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} \dot{q}_i^2 - \Pi(q_i)$. Показать, что для этой системы первый интеграл можно получить при помощи теоремы Нётер в том и только в том случае, когда потенциальная энергия $\Pi(q)$ системы удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i=1}^{n}\left(aq_i + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}q_j + c_i\right)\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + 2a\Pi = 0,$$

где a и c_i — постоянные величины, а $(b_{ij})_{i,j=1}^{n}$ — кососимметрическая постоянная матрица.

20.41. Движение механической системы определяется лагранжианом $L = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\dot{q}_i^2 - \Pi(q)$, где λ_i — постоянные положительные числа. Используя результаты решения задач 20.39 и 20.40, получить вид первого интеграла, который можно найти для этой системы при помощи теоремы Нётер, и записать уравнение, которому должна удовлетворять потенциальная энергия $\Pi(q)$.

20.42. Ответить на вопросы предыдущей задачи в случае, когда механическая система имеет лагранжиан $L = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - \Pi(q)$, где $(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ — постоянная симметричная матрица такая, что соответствующая ей квадратичная форма является положительно определенной.

20.43. Движение консервативной системы определяется лагранжианом $L = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \dot{q}_i^2 - \Pi(q)$. Показать, что система имеет первый интеграл вида $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i \dot{q}_i$ в том и только в том случае, когда потенциальную энергию $\Pi(q)$ можно представить в виде $\Pi(q) = F(z_1, z_2, \ldots$ $\ldots, z_{n-1})$, где z_i — линейные формы: $z_i = \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} q_j$. Параметры a_i, b_i и c_{ij} — постоянные величины.

20.44. Используя условия предыдущей задачи, показать, что система имеет m независимых первых интегралов вида $\sum\limits_{i=1}^{n} b_{ki} \dot{q}_i$ $(k = \overline{1, m})$ тогда и только тогда, когда потенциальную энергию можно представить в виде

$$\Pi\left(\sum_{i=1}^{n} c_{1i} q_i, \sum_{i=1}^{n} c_{2i} q_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} c_{n-m,i} q_i\right).$$

20.45. В условиях задачи 20.43 построить такое однопараметрическое семейство преобразований, чтобы указанный в задаче первый интеграл получался при помощи теоремы Нётер.

20.46. Механическая система с лагранжианом $L = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{4} \dot{q}_i^2 - \Pi(q)$ имеет первый интеграл $\alpha(q_1\dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2) + \beta(q_3\dot{q}_4 - \dot{q}_3 q_4)$, где α и β — постоянные параметры. Найти вид потенциальной энергии системы $\Pi(q)$.

20.47. Используя условия предыдущей задачи, построить такое однопараметрическое семейство преобразований, чтобы указанный в задаче первый интеграл получался при помощи теоремы Нётер.

20.48. Показать, что механическая система с лагранжианом $L =$ $= \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} \dot{q}_i^2 - \Pi(q)$ имеет первый интеграл

$$\sum_{i=1}^{r} (q_{2i-1}\dot{q}_{2i} - \dot{q}_{2i-1} q_{2i}), \quad r \leqslant n/2,$$

в том и только в том случае, когда потенциальную энергию можно представить в виде $\Pi = F(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$, где

$$\begin{aligned} z_i &= q_{2i-1}^2 + q_{2i}^2, & i &= \overline{1, r}, \\ z_{r+k} &= q_1 q_{2k+2} - q_2 q_{2k+1}, & k &= \overline{1, r-1}, \\ z_{2r-1+l} &= q_{2r+l}, & l &= \overline{1, n-2r}. \end{aligned}$$

20.49. Используя условия предыдущей задачи, построить такое однопараметрическое семейство преобразований, чтобы указанный в задаче первый интеграл получался при помощи теоремы Нётер.

20.50. Показать, что механическая система с лагранжианом $L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i \dot{q}_i^2 - \Pi(q)$ имеет первый интеграл

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i \dot{q}_i (q_i + b_i) - t\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i \dot{q}_i^2 + \Pi(q)\right]$$

тогда и только тогда, когда потенциальная энергия $\Pi(q)$ обладает следующим свойством: если $\Pi(q)$ представить в виде $\Pi(q) = F(q_1 + b_1, q_2 + b_2, \ldots, q_n + b_n)$, то функция $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ является однородной степени -2. Параметры a_i и b_i — постоянные величины.

20.51. Используя условия предыдущей задачи, построить такое однопараметрическое семейство преобразований, чтобы указанный в задаче первый интеграл получался при помощи теоремы Нётер.

20.52. Найти однопараметрическое семейство преобразований $q_i^* = \varphi_i(q, t, \alpha)$ и $t^* = \psi(q, t, \alpha)$, удовлетворяющих условиям теоремы Нётер, при помощи которых можно получить следующие законы сохранения: а) закон сохранения энергии в консервативной системе; б) закон сохранения импульса и момента импульса системы точек, движущихся в потенциальном силовом поле с потенциалом $\Pi = F[|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|]$, где $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ — расстояние между i-й и j-й точками; в) закон сохранения импульса в системе с циклической координатой.

20.53. Динамическая система описывается системой уравнений $\dot{x}_i = f_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$. Для каждой начальной точки $x(0) = a$ существует временно́е среднее $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T g(x(a, t))\,dt = \psi(a)$, где $g(x)$ — некоторая функция. Показать, что функция $\psi(x)$ будет первым интегралом системы. Убедиться, что для любого первого интеграла $\psi(x)$ найдется такая функция $g(x)$, что ее усреднение дает $\psi(a)$.

20.54. Для каждой начальной точки (q_0, p_0) гамильтоновой системы $H = H(q, p)$ существует временно́е среднее $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T g[q_i(q_0, p_0, t), p_i(q_0, p_0, t)]\,dt = \varphi(q_0, p_0)$, где $g(q, p)$ — заданная функция, а функция $\varphi(q_0, p_0)$ — непрерывно дифференцируемая функция. Показать, что для скобки Пуассона выполняется $(\varphi(q, p), H(q, p)) = 0$.

20.55. В качестве динамической системы в условиях предыдущей задачи берется гармонический осциллятор $(H(q,p)=(p^2+\omega^2q^2)/2)$, а в качестве функций g выбираются $g_1=q^2$, $g_2=p^2$, $g_3=qp$. Непосредственным вычислением показать, что соответствующие средние имеют вид $\varphi_1=\omega^{-2}H(q^0,p^0)$, $\varphi_2=H(q^0,p^0)$, $\varphi_3=0$.

20.56. Показать, что для одномерного осциллятора среднее значение $\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{T}\int\limits_0^T\varphi[q(q^0,p^0,t)p(q^0,p^0,t)]\,dt=f(q^0,p^0)$ для любой функции $\varphi(q,p)$ является функцией одного переменного $H=(p^2+\omega^2q^2)/2$, т. е. что $f(q^0,p^0)=\psi[(p^{0^2}+\omega^2q^{0^2})/2]$.

20.57. Показать, что функции $\varphi_1=p_1/q_2$ и $\varphi_2=(p_2-q_2)\exp(-t)$ являются первыми интегралами системы с гамильтонианом $H=$ $=p_1q_1-p_2q_2+q_2^2$. Построить полную систему первых интегралов и с ее помощью найти закон движения.

20.58. Доказать тождество $\dfrac{d}{dt}(f,\varphi)=\left(\dfrac{df}{dt},\varphi\right)+\left(f,\dfrac{d\varphi}{dt}\right)$, где f, φ — функции гамильтоновых переменных, (f,φ) — скобка Пуассона.

20.59. Динамическая система описывается системой дифференциальных уравнений $\dot{x}_i=f_i(x,t)$ $(i=\overline{1,n})$. Движение системы задается функциями $x_i=\varphi_i(x_0,t_0,t)$, где $x_0=x(t_0)$. Показать, что при любом фиксированном t_0 функции $\varphi_i(x,t,t_0)$ задают полный набор функционально независимых первых интегралов динамической системы.

20.60. Первые интегралы $f_i(q_i,p_i,t),\ldots,f_m(q_i,p_i,t)$ канонической системы находятся в инволюции, т. е. скобки Пуассона $(f_i,f_k)=$ $=0$ $(i,k=\overline{1,m})$. Показать, что первые интегралы вида $\Phi(f_1,f_2,\ldots$ $\ldots,f_m)$ и $F(f_1,f_2,\ldots,f_m)$ также находятся в инволюции.

20.61. Вычислить скобки Пуассона $(\varphi(u),\psi(u))$, где $u=u(q,p,t)$ и $v=v(q,p,t)$.

20.62. Показать, что скобки Пуассона (φ,ψ) двух функций $\varphi=$ $=\varphi(f_1,f_2,\ldots,f_m,t)$ и $\psi=\psi(f_1,f_2,\ldots,f_m,t)$, где $f_k=f_k(q_i,p_i,t)$ $(k=\overline{1,m},\ i=\overline{1,n})$, выражаются равенством

$$(\varphi,\psi)=\sum_{s,k=1}^{m}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial f_s}\frac{\partial\psi}{\partial f_k}-\frac{\partial\varphi}{\partial f_k}\frac{\partial\psi}{\partial f_s}\right)(f_s,f_k).$$

20.63. Заданы функции $\varphi=\varphi(q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n,\ f_1,\ldots,f_m)$ и $\psi=\psi(q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n,f_1,\ldots,f_m)$, где $f_i=f_i(q,p,t)$. Пока-

зать, что скобки Пуассона этих двух функций выражаются равенствами (теорема В. Г. Имшенецкого)

$$(\varphi,\psi)=(\varphi;\psi)+\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial f_k}(f_k,\varphi)+\frac{\partial\psi}{\partial f_k}(\varphi,f_k)\right]+$$
$$+\sum_{s,i=1}^{m}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial f_s}\frac{\partial\psi}{\partial f_i}-\frac{\partial\varphi}{\partial f_i}\frac{\partial\psi}{\partial f_s}\right)(f_s,f_i).$$

где первые скобки вычисляются при фиксированном f_i.

20.64. Каждой функции $\varphi(q,p)$ гамильтоновых переменных можно поставить в соответствие оператор X^{φ} по следующему правилу: $X^{\varphi}=\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}-\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right)$. Доказать тождество $[X^{\varphi_1},X^{\varphi_2}]=$ $=X^{(\varphi_1,\varphi_2)}$, где $[X,Y]=XY-YX$ — коммутатор операторов, а (φ_1,φ_2) — скобка Пуассона.

20.65. Если в линейном пространстве L каждой паре элементов $a\in L$ и $b\in L$ по некоторому правилу поставлен в соответствие элемент [1] (коммутатор) $c=[a,b]$, принадлежащий L и удовлетворяющий следующим условиям:

1. $[\alpha a_1+\beta a_2,b]=\alpha[a_1,b]+\beta[a_2,b]$, α, $\beta=\mathrm{const}$ (дистрибутивность),

2. $[a,b]+[b,a]=0$ (антикоммутативность),

3. $[a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]]=0$ (тождество Якоби), то пространство L вместе с операцией коммутирования называют алгеброй Ли. Показать, что следующие пространства с определенным в них коммутатором являются алгеброй Ли:

а) трехмерное линейное векторное пространство, в котором определено векторное произведение $\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$;

б) пространство вещественных матриц $\mathbf{A}=(a_{ik})_{i,k=1}^{n}$ порядка n [2], где коммутатор естественно определяется равенством $C=$ $=AB-BA$;

в) пространство вещественных функций $a(q,p)$, где коммутатор определяется через скобки Пуассона:

$$c(q,p)=(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\det\begin{bmatrix}\partial a/\partial q_i & \partial a/\partial p_i\\ \partial b/\partial q_i & \partial b/\partial p_i\end{bmatrix};$$

[1] Соответствие $c=[a,b]$ обычно называют бинарной операцией, т. е. операцией, определенной на паре элементов.

[2] Размерность этого пространства равна n^2, по числу элементов матрицы.

г) пространство линейных дифференциальных операторов $a = \sum a_i(x)\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, где коммутатор определяется соотношением $c = ab - ba$, т. е. для любой непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ $cf = a(bf) - b(af)$, где

$$af = \sum_i a_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad bf = \sum_i b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i};$$

д) произвольная алгебра при $c = a \circ b - b \circ a$, где $a \circ b$ — определенное в алгебре умножение.

20.66. Группа $q_i^* = \varphi_i(q, t, \alpha)$, $t^* = \psi(q, t, \alpha)$ называется группой дивергентных симметрий системы с лагранжианом $L(q, \dot{q}, t)$, если группа и система связаны соотношением

$$L(q^*, \frac{dq^*}{dt^*}, t^*)\frac{dt^*}{dt} = L\left(q, \frac{dq}{dt}, t\right) - \frac{dR(q, t, \alpha)}{dt},$$

где $R(q, t, \alpha)$ — некоторая функция. Показать, что в этом случае у системы имеется первый интеграл

$$w = \sum_{i=1}^{n} p_i\eta_i(q, t) - \xi(q, t)H + r(q, t) = C,$$

где введены обозначения

$$\eta_i = \frac{\partial\varphi_i}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0}, \qquad \xi = \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0}, \qquad r = \frac{\partial R}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0},$$

p_i — обобщенные импульсы, H — функция Гамильтона, соответствующая лагранжиану $L(q, \dot{q}, t)$.

20.67. Убедиться,что группа $t^* = t$, $x^* = x + \alpha\sin(\omega t + \beta)$ при любой фазе β является группой дивергентных симметрий (см. задачу 20.66) для возмущенного линейного осциллятора: $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$. Вычислить два первых интеграла ($\beta = 0$, $\beta = \pi/2$) и общее решение $x(t, C_1, C_2)$.

20.68. Для возмущенного линейного осциллятора с вязким трением $\ddot{x} + 2n\dot{x} + kx = f(t)$ найти две группы дивергентных симметрий (см. задачу 20.66), соответствующие первые интегралы и построить общее решение $x(t, C_1, C_2)$. Рассмотреть три случая:

$$\text{а) } n^2 - k > 0; \quad \text{б) } n^2 - k = 0; \quad \text{в) } n^2 - k < 0.$$

Указание. Использовать функцию Лагранжа из условия задачи 19.79 и идею задачи 20.67.

§ 21. Вариационные принципы механики

21.1. Показать, что вариационный принцип Гамильтона дает форму уравнений движения механической системы в потенциальном поле, ковариантную по отношению к произвольным преобразованиям координат.

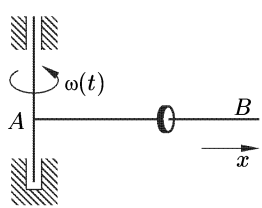
21.2. Используя принцип Гамильтона, показать, что уравнения движения систем с лагранжианом $L_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, $L_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \frac{d}{dt}\Phi(\mathbf{q}, t)$, отличающимися на полную производную от произвольной функции $\Phi(\mathbf{q}, t)$, совпадают.

21.3. Материальная точка движется по инерции. Показать, что в расширенном координатном пространстве (x, y, z, t) через любые две точки $M_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$, не лежащие в гиперплоскости $t = \text{const}$, можно провести прямой путь и притом только один. Непосредственным вычислением показать, что на прямом пути действие по Гамильтону $W_{\text{пр}}$ принимает минимальное значение по сравнению с действием на любых окольных путях $W_{\text{ок}}$.

21.4. Материальная точка движется в однородном поле тяжести, силовые линии которого параллельны оси Oz. Показать, что в расширенном координатном пространстве (x, y, z, t) через любые две точки $M_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$, не лежащие в гиперплоскости $t = \text{const}$, всегда можно провести прямой путь и притом только один.

21.5. В расширенном координатном пространстве (q, t) линейного осциллятора $L = (\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)/2$ описать множество всех тех точек (t_1, q_1), которые нельзя соединить прямым путем с начальной точкой (t_0, q_0).

21.6. Частота собственных колебаний линейного осциллятора равна ω. В расширенном координатном пространстве (q, t) осциллятора требуется провести прямой путь через точки $\{q_0, t_0\}$ и $\{q_1, t_1\}$. Показать, что а) при $t_1 - t_0 \neq k\pi/\omega$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ задача имеет единственное решение; б) при $t_1 - t_0 = k\pi/\omega$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ и $q_1 = (-1)^k q_0$ задача имеет бесчисленное множество решений; в) при $t_1 - t_0 = k\pi/\omega$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ и $q_1 \neq (-1)^k q_0$ задача не имеет решения.



К задаче 21.7

21.7. По гладкому горизонтальному стержню AB (см. рисунок), вращающемуся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega(t)$, может скользить колечко массы m. Показать, что в расширенном координатном пространстве колечка, т. е. в плоскости xt, через любые две точки, не

лежащие на прямой $t = \text{const}$, можно провести прямой путь и притом только один.

21.8. Используя условия предыдущей задачи, показать, что в расширенном координатном пространстве колечка на любом прямом пути, проходящем через две точки, действие по Гамильтону принимает минимальное значение по сравнению с действием на окольных путях, проходящих через эти же точки.

21.9. Плоский математический маятник длины l совершает малые колебания (в соотвествие с линеаризованными уравнениями). Рассматривая расширенное координатное пространство (φ, t), где φ — угол отклонения маятника от вертикали, нарисовать прямой и окольный пути. Для различных начальных положений маятника (φ_0, t_0) указать кинетический фокус, сопряженный начальной точке.

21.10. Свободная релятивистская частица имеет лагранжиан $L = -m_0c^2\sqrt{1-(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)/c^2}$, где c — скорость света, а x, y, z — декартовы координаты частицы. Показать, что в расширенном координатном пространстве (x, y, z, t) частицы через любые две точки $A(x_0, y_0, z_0, t_0)$ и $B(x_1, y_1, z_1, t_1)$, $t_1 \neq t_0$, проходят прямой путь и притом только один.

21.11. Частица массы m и заряда e движется в постоянном однородном магнитном поле напряженности $\mathbf{H}$ (вектор напряженности поля $\mathbf{H}$ направлен по оси z) под действием силы Лоренца $\mathbf{F} = \frac{e}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]$, где $\mathbf{v}$ — скорость частицы, а c — скорость света. Показать, что точка (x_1, y_1, z_1, t_1) будет сопряженным кинетическим фокусом для точки (x_0, y_0, z_0, t_0), если $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$, $z_1 = z_0 + \dot{z}_0 2\pi mc/eH$, $t_1 = t_0 + 2\pi mc/eH$ (индекс 0 соответствует начальному положению частицы, а индекс 1 — конечному).

21.12. Материальная точка движется по вертикали в однородном поле тяжести. Непосредственным вычислением показать, что действие по Гамильтону на прямом пути $z = gt^2/2$ меньше действия на окольных путях вида $z = a_n t^n$ $(n \geqslant 1)$. Рассматривая двумерное расширенное координатное пространство (z, t), нарисовать прямой и окольные пути системы.

21.13. Одномерный гармонический осциллятор частоты ω при $t = 0$ начинает движение без начальной скорости из положения q_0. Вычислить значение действия по Гамильтону W на этом прямом пути за период колебаний T. Вычислить также значение действия на окольных путях вида $q(t) = \alpha t(t-T) + q_0$ за время T. Изобразить прямой путь и семейство окольных путей в пространстве (q, t) и показать, что существуют значения параметра α, для которых а) $W_{\text{ок}} > W_{\text{пр}}$; б) $W_{\text{ок}} = W_{\text{пр}}$; в) $W_{\text{ок}} < W_{\text{пр}}$.

21.14. Точка массы m может двигаться по гладкой вертикальной плоскости xz, вращающейся вокруг вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω. Показать, что существует единственная траектория, по которой точка перейдет из заданной точки $A(x_0, z_0)$ в заданную точку $B(x_1, z_1)$ за фиксированное время $T > 0$.

21.15. Сохраняя условия предыдущей задачи, показать, что действия по Гамильтону на прямом пути $x(t)$, $z(t)$ и на окольном пути $x(t) + \Delta x(t)$, $z(t) + \Delta z(t)$ связаны соотношением $W_{\text{ок}} = W_{\text{пр}} + \frac{1}{2}\int\limits_0^T [(\Delta\dot{x})^2 + \omega^2(\Delta x)^2 + (\Delta\dot{z})^2]\,dt$, если $\Delta x(0) = \Delta x(T) = \Delta z(0) = \Delta z(T) = 0$.

21.16. Материальная точка движется по инерции по гладкой сфере. Показать, что действие по Гамильтону на прямом пути AB, содержащем точку C, диаметральнопротивоположную точке A, строго минимально по сравнению с окольными путями, также содержащими точку C.

21.17. Показать, что для системы, описанной в задаче 21.7, действие по Гамильтону на прямом пути имеет строгий глобальный минимум.

21.18. Частица массы m движется в однородном поле тяжести, силовые линии которого параллельны оси Oz. Показать, что действие по Гамильтону на прямом пути, который проходит через две произвольные точки A и B расширенного координатного пространства (x, y, z, t), не лежащие в гиперплоскости $t = \text{const}$, имеет глобальный минимум по сравнению со значением действия на окольных путях, проходящих через эти же точки.

21.19. Лагранжиан механической системы представляет собой положительно определенную квадратичную форму скоростей $L = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$ с постоянными коэффициентами a_{ik}. Показать, что через любые две точки расширенного координатного пространства, не лежащие в гиперплоскости $t = \text{const}$, можно провести прямой путь и притом только один.

21.20. Используя условия предыдущей задачи, непосредственным вычислением показать, что на прямом пути, соединяющем любые две точки $(\mathbf{q}^{(0)}, t_0)$ и $(\mathbf{q}^{(1)}, t_1)$, $t_1 \neq t_0$, расширенного координатного пространства, действие по Гамильтону будет минимальным по сравнению с действием на любых окольных путях, соединяющих эти точки.

21.21. Показать, что в $(n+1)$-мерном расширенном координатном пространстве $(\mathbf{q}, t)$ системы с лагранжианом $L = L(\dot{\mathbf{q}})$ через лю-

бые две точки $A(\mathbf{q}^{(0)}, t_0)$ и $B(\mathbf{q}^{(1)}, t_1)$, не лежащие в гиперплоскости $t = \text{const}$, можно провести прямой путь и притом только один, если

$$\det\left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\, \partial \dot{q}_k}\right]_{i,k=1}^{n} \neq 0.$$

21.22. Функция Лагранжа системы $L = L(\dot{q})$ зависит только от обобщенных скоростей. Показать, что действие по Гамильтону на прямом пути, проходящем через две точки $A(\mathbf{q}^{(0)}, t_0)$ и $B(\mathbf{q}^{(1)}, t_1)$ $(n+1)$-мерного расширенного координатного пространства, будет минимальным по сравнению с действием на любых окольных путях, проходящих через эти же точки, если матрица Гессе $[\partial^2 L/(\partial \dot{q}_i\, \partial \dot{q}_k)]_{i,k=1}^{n}$ является матрицей положительно определенной квадратичной формы.

21.23. Показать, что для системы с лагранжианом $L = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}[a_i^2\dot{q}_i^2 + b_i^2 q_i^2]$ $(a_i = \text{const},\ b_i = \text{const})$ действие по Гамильтону на прямом пути имеет глобальный минимум.

21.24. Кинетическая $T = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$ и потенциальная $\Pi = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} c_{ik}q_i q_k$ энергии консервативной системы представляют собой положительно определенные квадратичные формы с постоянными коэффициентами. Из точки $A(\mathbf{q}^{(0)}, t_0)$ $(n+1)$-мерного расширенного координатного пространства выпускаются всевозможные прямые пути, и на каждом из них находится ближайший (по времени) кинетический фокус B, сопряженный для начальной точки A. Описать множество таких точек B.

21.25. Решить предыдущую задачу для консервативной системы, у которой $T = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$, $\Pi = \frac{\lambda}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}q_i q_k + \frac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} b_i b_k q_i q_k$, где $\lambda > 0$ и все коэффициенты постоянны.

21.26. Кинетическая энергия системы $T = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$ представляет собой положительно определенную квадратичную форму от обобщенных скоростей с постоянными коэффициентами a_{ik} $(i, k = \overline{1, n})$, а потенциальная энергия равна $\Pi = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i(t)q_i$. Показать, что через любые две точки расширенного координатного пространства $(\mathbf{q}^{(0)}, t_0)$ и $(\mathbf{q}^{(1)}, t_1)$, не лежащие в гиперплоскости $t = \text{const}$, можно провести прямой путь и притом только один. Показать также, что

действия по Гамильтону на окольном пути $W_{\text{ок}}$ и на прямом пути $W_{\text{пр}}$ связаны равенством $W_{\text{ок}} = W_{\text{пр}} + \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1} \sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}\Delta\dot{q}_i\Delta\dot{q}_k\,dt$, причем $\Delta q_s(t) = q_s^{\text{ок}}(t) - q_s^{\text{пр}}(t)$ и $\Delta q_s(t_0) = \Delta q_s(t_1) = 0$ $(s = \overline{1, n})$.

21.27. Показать, что для натуральной системы

$$\left(L = L_2 + L_1 + L_0,\ L_2 = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k > 0 \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i^2 > 0\right)$$

действие по Гамильтону на прямом пути не может быть максимальным по сравнению с любыми окольными путями, имеющими такие же граничные точки, как и у прямого пути.

21.28. Точка $B\{\mathbf{q}^{(1)}, t_1\}$ прямого пути $\widetilde{\mathbf{q}}(t)$, соединяющего ее с начальной точкой $A\{\mathbf{q}^{(0)}, t_0\}$ в $(n+1)$-мерном расширенном координатном пространстве, является кинетическим фокусом, сопряженным для точки A. При этом на пути $\widetilde{\mathbf{q}}(t)$ нет других кинетических фокусов, сопряженных начальной точке. Показать, что значение действия $W_{\text{пр}}$ на прямом пути $\widetilde{\mathbf{q}}(t)$ связано со значением действия $W_{\text{ок}}$ на любых других близких путях (окольных и прямых) неравенством $W_{\text{пр}} \leqslant W_{\text{ок}}$, т. е. на прямом пути действие локально минимальное [1].

21.29. Если в выражении действия по Гамильтону $W = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\,dt$ сделать переход к новому времени τ в соответствии с равенствами $t = t(\tau)$, то в результате получим

$$W = \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} L\left(q_1, q_2, \ldots, q_n, \frac{q_1'}{t'}, \frac{q_2'}{t'}, \ldots, \frac{q_n'}{t'}\right) t'\,d\tau,$$

где штрихом обозначена операция дифференцирования по τ. Введем в рассмотрение систему с лагранжианом $L\left(\mathbf{q}, \frac{\mathbf{q}'}{t'}\right) t'$, рассматривая t как новую $(n+1)$-ю обобщенную координату. Найти обобщенный импульс p_t, соответствующий координате t.

21.30. Прямой путь $q_i = q_i(t)$ $(i = \overline{1, n})$ системы с лагранжианом $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ проходит через точки $A(\mathbf{q}^{(0)}, t_0)$ и $B(\mathbf{q}^{(1)}, t_1)$ $(n+1)$-мерного

[1] Локальная минимальность понимается в следующем смысле: существует такое число $\varepsilon > 0$, что при $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta q_i^2(t) + \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta\dot{q}_i^2(t) < \varepsilon$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, выполняется неравенство $W_{\text{ок}} > W_{\text{пр}}$;

расширенного координатного пространства. Для однопараметрического семейства кривых $q_i(t,\alpha) = q_i(t) + \alpha\varphi_i(t)$, $\varphi_i(t_0) = \varphi_i(t_1) = 0$ $(i = \overline{1,n})$, проходящих через точки A и B, найти выражение для второй вариации $\delta^2 W(\alpha)$ действия по Гамильтону $W = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\,dt$ на прямом пути, которому соответствует $\alpha = 0$.

21.31. Обратимое преобразование $(n+1)$-мерного расширенного координатного пространства $\widetilde{q}_i = \varphi_i(\mathbf{q}, t)$, $\widetilde{t} = \psi(\mathbf{q}, t)$ $(i = \overline{1,n})$ переводит каждую кривую $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$, представляющую движение лагранжевой системы с функцией $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, в соответствующую кривую $\widetilde{\mathbf{q}} = \widetilde{\mathbf{q}}(\widetilde{t})$. Опираясь на принцип Гамильтона, показать, что функцию $\widetilde{L}(\widetilde{\mathbf{q}}, d\widetilde{\mathbf{q}}/d\widetilde{t}, \widetilde{t})$, задающую лагранжеву систему с решениями $\widetilde{\mathbf{q}}(\widetilde{t})$, можно вычислить следующим образом:

$$\widetilde{L}\left(\widetilde{\mathbf{q}}, \frac{d\widetilde{\mathbf{q}}}{d\widetilde{t}}, \widetilde{t}\right) = \left\{L\left(\mathbf{q}, \frac{d\mathbf{q}}{dt}, t\right)\frac{dt}{d\widetilde{t}}\right\}\Bigg|_{\substack{q_i=\widetilde{\varphi}_i(\widetilde{\mathbf{q}},\widetilde{t})\\ t=\widetilde{\psi}(\widetilde{\mathbf{q}},\widetilde{t})}},$$

где $q_i = \widetilde{\varphi}_i(\widetilde{\mathbf{q}}, \widetilde{t})$ — обратное преобразование.

21.32. Материальная точка движется по инерции по оси Ox. Рассмотрев действие по Гамильтону $W = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(\dot{x})\,dt$ на трехпараметрическом (параметры α_0, α_1, α_2) семействе кривых $x(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2/2$, проходящих через точки $A(x_0, t_0 = 0)$ и $B(x_1, t_1)$, найти такие значения параметров $\widetilde{\alpha}_0$, $\widetilde{\alpha}_1$, $\widetilde{\alpha}_2$, определяющие кривую $x(\widetilde{\alpha}_0, \widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, t)$, чтобы $W(\widetilde{\alpha}_0, \widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2) \leqslant W(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ (прямой метод приближенного отыскания экстремалей вариационных задач в заданном классе функций).

21.33. Лагранжиан $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ некоторой системы является выпуклой функцией относительно $(q_i, \dot{q}_i)$ $(i = \overline{1,n})$, т. е. для любого $\lambda \in [0,1]$ выполняется неравенство

$$L(\lambda\mathbf{q}^{(1)} + (1-\lambda)\mathbf{q}^{(2)}, \lambda\dot{\mathbf{q}}^{(1)} + (1-\lambda)\dot{\mathbf{q}}^{(2)}, t) \leqslant$$
$$\leqslant \lambda L(\mathbf{q}^{(1)}, \dot{\mathbf{q}}^{(1)}, t) + (1-\lambda) L(\mathbf{q}^{(2)}, \dot{\mathbf{q}}^{(2)}, t).$$

Доказать, что в такой системе значение действия по Гамильтону на прямом пути $W_{\text{пр}}$ и значение $W_{\text{ок}}$ на любом окольном пути, проходящих через точки $A(\mathbf{q}^{(0)}, t_0)$ и $B(\mathbf{q}^{(1)}, t_1)$ расширенного координатного пространства, связаны соотношением $W_{\text{ок}} \geqslant W_{\text{пр}}$.

21.34. Материальная точка массы m движется в однородном поле тяжести. Выписать выражение для действия по Лагранжу W^*. В трехмерном координатном пространстве частицы найти все кинетические фокусы (сопряженные для начальной точки (x_0, y_0, z_0)), которые возникают при рассмотрении принципа Мопертюи–Лагранжа.

21.35. Согласно принципу Ферма луч света в неоднородной среде распространяется таким образом, что вариация

$$\delta\left[\int\limits_{s_0}^{s} n\,ds\right] = 0,$$

где $n = n(x, y, z)$ — показатель преломления среды. Найти потенциал $\Pi(x, y, z)$ силового поля, в котором траектории частицы будут совпадать с траекториями светового луча (оптико-механическая аналогия).

21.36. Используя оптико-механическую аналогию, найти траектории светового луча в среде с коэффициентом преломления $n(x, y, z) = \alpha(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/4}$.

21.37. Задано некоторое однопараметрическое семейство S путей $q(\alpha, t)$, проходящих через точки $A(q^0, t_0)$ и $B(q^1, t_1)$ $(n+1)$-мерного расширенного координатного пространства $(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$. Действие по Гамильтону механической системы с функцией Лагранжа $L(q, \dot{q}, t)$ на семействе S определяется функцией $W^S(\alpha)$. Верно ли утверждение: из условия $[\delta W^S(\alpha)]_{\alpha=\alpha^*} = 0$ следует, что путь $q(\alpha^*, t)$ является прямым.

21.38. Функция Лагранжа $L(q, \dot{q}, t)$ некоторой системы является строго выпуклой функцией обобщенных скоростей $\dot{q}_i$, т. е. $[\partial^2 L/(\partial \dot{q}_i\, \partial \dot{q}_k)]_{i,k=1}^n$ при всех $q, \dot{q}, t$ является матрицей положительно определенной квадратичной формы. Пусть через любые две точки (q_0, t_0) а (q_1, t_1) $(n+1)$-мерного расширенного координатного пространства, не лежащие в гиперплоскости $t = \mathrm{const}$, проходит единственный прямой путь. Показать, что в этом случае действие по Гамильтону $W_{\text{ок}} \geqslant W_{\text{пр}}$ для любых окольных путей, соединяющих начальную и конечную точку.

21.39. Функция Лагранжа $L(q, \dot{q}, t)$ системы такова, что любые две точки (a, t_0), (b, t_1) $(n+1)$-мерного расширенного координатного пространства можно соединить единственным прямым путем. Показать, что в переменных q, p, t на прямом пути $q(t)$, проходящем через a и b, достигается минимакс $\min\limits_{q(t)} \max\limits_{p(t)} \int\limits_{t_0}^{t_1} [\sum p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)]\, dt$

(т. е. выполняется условие минимакса). Гамильтониан при этом является строго выпуклой функцией переменных $p_i(t)$:

$$\left(\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i\, \partial p_k}\xi_i\xi_k \geqslant \lambda \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \lambda = \text{const}, \quad \lambda > 0\right),$$

на которые не налагается никаких ограничений.

21.40. С использованием условия задачи 21.31 для системы с лагранжианом $L(\dot{x}) = m\dot{x}^2/2$ (свободная одномерная частица) вычислить функцию Лагранжа, соответствующую новым переменным $y = xe^{\alpha}$, $\tau = te^{2\alpha}$. Убедиться в справедливости равенства

$$L\left(\frac{dy}{d\tau}\right)\frac{d\tau}{dt} = L\left(\frac{dx}{dt}\right) \quad \text{(вариационная симметрия)}.$$

21.41. С использованием условия задачи 21.31 для системы с лагранжианом $L(t, x, \dot{x}) = m\dot{x}^2/2 - \omega^2 x^2/2 + xf(t)$ (возмущенный осциллятор) вычислить функцию Лагранжа, соответствующую новым переменным $y = x + \alpha \sin \omega t$, $\tau = t$. Убедиться в справедливости равенства

$$L\left(\tau, y, \frac{dy}{d\tau}\right)\frac{d\tau}{dt} = L\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) - \frac{dR(t, x, \alpha)}{dt},$$

где $R(t, x, \alpha)$ — некоторая функция (дивергентная симметрия, см. задачи 20.66, 20.67).

21.42. С использованием условия задачи 21.31 для системы с лагранжианом $L(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)/2 + a/r$ (кеплерова задача) вычислить функцию Лагранжа, соответствующую новым переменным

$$\widetilde{r} = re^{2\alpha}, \quad \widetilde{\varphi} = \varphi, \quad \widetilde{t} = te^{3\alpha}. \qquad (*)$$

Убедиться в справедливости равенства

$$L\left(\widetilde{r}, \frac{d\widetilde{r}}{d\widetilde{t}}, \frac{d\widetilde{\varphi}}{d\widetilde{t}}\right)\frac{d\widetilde{t}}{dt} = c(\alpha)L\left(r, \frac{dr}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}\right), \qquad (**)$$

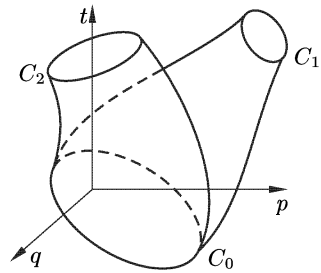
где $c(\alpha)$ — некоторая функция (конформная симметрия). Преобразование $(*)$ и равенство $(**)$ обосновывают третий закон Кеплера.

§ 22. Интегральные инварианты

22.1. В расширенном фазовом пространстве одномерного осциллятора с лагранжианом $L = (\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)/2$, движущегося по закону $q = A\sin(\omega t + \alpha)$, найти уравнение поверхности трубки прямых путей, соответствующей заданной постоянной амплитуде A и изменению фазы α от 0 до 2π. Изобразить эту трубку в перспективе, показав

на ней прямые пути. Непосредственным вычислением показать, что значение интеграла $\oint(p\,\delta q - H\,\delta t)$ по контуру C, лежащему в плоскости $t = t_1$, не зависит от t_1.

22.2. В расширенном фазовом пространстве (q_i, p_i, t), $i = \overline{1, n}$, выбирается замкнутый контур C_0, по которому строятся трубки прямых путей двух гамильтоновых систем с функциями $H_1(q_i, p_i, t)$ и $H_2(q_i, p_i, t)$ соответственно (см. рисунок). На каждой из трубок выбираются контуры C_1 и C_2, согласованные с C_0 [1]. Как связаны между собой значения интегральных инвариантов



К задаче 22.2

$$I_1 = \oint\limits_{C_1} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H_1\,\delta t\right] \quad \text{и} \quad I_2 = \oint\limits_{C_2} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H_2\,\delta t\right]?$$

Выяснить, какие из криволинейных интегралов задач 22.3–22.8 являются универсальными интегральными инвариантами.

22.3. $I = \oint \left[\dfrac{p}{q}\delta q + (q + \ln q)\,\delta p\right]$.

22.4. $I = \oint \sum\limits_{i=1}^{n} \left[2q_i \cos^2\left(\dfrac{q_i p_i}{2}\right)\delta p_i + p_i \cos(q_i p_i)\,\delta q_i\right]$.

22.5. $I = \oint [(ap + bq)\delta q + (\alpha p + \beta q)\delta p]$.

22.6. $I = \oint \sum\limits_{i=1}^{n} [(\alpha_i p_i + \varphi_i(q_i))\,\delta q_i + (\beta_i q_i + \psi_i(p_i))\,\delta p_i]$.

22.7. $I = \oint [(ap^2 + bpq + cq^2)\delta q + (\alpha p^2 + \beta pq + \gamma q^2)\delta p]$.

22.8. $I = \oint \varphi(p)\,\delta q$.

22.9. Вычислить значение интеграла $I = \oint \left[\sum\limits_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H\,\delta t\right]$, взятого вдоль замкнутого контура, лежащего на трубке прямых путей, но не охватывающего ее.

[1] Два контура C_0 и C_1, охватывающие трубку прямых путей, называются согласованными, если возможна такая параметризация одним и тем же параметром α, что при каждом значении α соответствующие точки контуров C_0 и C_1 расположены на одном и том же прямом пути.

22.10. Показать, что интеграл $I' = \alpha \oint\limits_C \sum\limits_{i=1}^{n} q_i \delta p_i$, $\alpha \neq 0$, где контур C лежит в гиперплоскости $t = \text{const}$, является универсальным интегральным инвариантом. Найти отношение I'/I, где $I = \oint\limits_C \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \delta q_i$ — универсальный интегральный инвариант Пуанкаре.

22.11. Как изменяется интеграл $\oint\limits_C \left[\sum\limits_{i=1}^{n} q_i \delta p_i + H\,\delta t \right]$ при произвольной деформации вдоль прямых путей контура C, охватывающего трубку прямых путей?

22.12. Найти общий вид функции $\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, для которой интеграл

$$I = \oint \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)\,\delta t \right]$$

является интегральным инвариантом (типа инварианта Пуанкаре–Картана) гамильтоновой системы с функцией $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$.

22.13. Функция $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ является первым интегралом системы с гамильтонианом $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$. При построении трубки прямых путей системы в $(2n+1)$-мерном расширенном фазовом пространстве $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ начальный контур $C_0(\mathbf{q}^{(0)}(\alpha), \mathbf{p}^{(0)}(\alpha), t_0(\alpha))$ выбирается таким образом, что $f[\mathbf{q}^{(0)}(\alpha), \mathbf{p}^{(0)}(\alpha), t_0(\alpha)] \equiv \beta$, где β — фиксированное число. Показать, что значение криволинейного интеграла

$$I' = \oint\limits_C \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - [H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)]\,\delta t \right]$$

не будет зависеть от выбора контура C на указанной трубке прямых путей.

22.14. В $(2n+1)$-мерном расширенном фазовом пространстве $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ канонической системы с гамильтонианом

$$H = F[\varphi(q_1, q_2, \ldots, q_s, p_1, p_2, \ldots, p_s), q_{s+1}, \ldots, q_n, p_{s+1}, \ldots, p_n, t]$$

начальный контур $C_0(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t_0)$ трубки прямых путей выбран таким образом, что $t_0 \equiv 0$, $\varphi(q_{10}, \ldots, q_{s0}, p_{10}, \ldots \ldots, p_{s0}) = \beta$, где β — фиксированное число. Показать, что значение криволинейного интеграла

$$I' = \oint\limits_C \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - [H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \varphi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)]\,\delta t \right]$$

не будет зависеть от выбора контура C на этой трубке. Изменится ли этот вывод, если условие $\varphi(q_{10}, \ldots, q_{s0}, p_{10}, \ldots \ldots, p_{s0}) = \beta$ для контура C_0 не будет выполняться? Предполагается согласованность контуров C_0 и C (см. сноску к задаче 22.2).

22.15. Каким условиям должны удовлетворять функции $A_i(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ и $B_i(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ $(i = \overline{1, n})$ для того, чтобы интеграл

$$I = \oint\limits_C \sum_{i=1}^{n} [A_i \delta q_i + B_i \delta p_i]$$

был универсальным интегральным инвариантом?

22.16. Функция $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ является первым интегралом канонической системы с гамильтонианом $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$. Доказать, что интеграл

$$I = \int\limits_{G_{2n}} \ldots \int f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)\, dq_1\, dq_2 \ldots dq_n\, dp_1\, dp_2 \ldots dp_n$$

является интегральным инвариантом.

22.17. Показать, что в обобщенно-консервативной системе с гамильтонианом $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ интеграл

$$I = \int\limits_{G_{2n}} \ldots \int H(\mathbf{q}, \mathbf{p})\, dq_1\, dq_2 \ldots dq_n\, dp_1\, dp_2 \ldots dp_n$$

является интегральным инвариантом.

22.18. Показать, что каноническая система с гамильтонианом

$$H = H[\varphi_1(q_1, p_1), \ \ldots, \varphi_n(q_n, p_n), t]$$

имеет следующие интегральные инварианты:

$$I_k = \int\limits_{G_{2n}} \ldots \int \varphi_k(q_k, p_k)\, dq_1\, dq_2 \ldots dq_n\, dp_1\, dp_2 \ldots dp_n \ (k = \overline{1, n}).$$

22.19. Показать, что интеграл

$$I = \int\limits_{G_{2n}} \ldots \int \varphi(q_1, p_1)\, dq_1\, dq_2 \ldots dq_n\, dp_1\, dp_2 \ldots dp_n$$

является интегральным инвариантом канонической системы с гамильтонианом $H(\varphi(q_1, p_1), q_2, \ldots, q_n, p_2, \ldots, p_n, t)$.

22.20. Показать, что интегралы

$$I_1 = \int\limits_{G_6} \ldots \int \varphi_1(q_1, p_1)\, dq_1\, dq_2\, dq_3\, dp_1\, dp_2\, dp_3,$$

$$I_2 = \int\limits_{G_6} \dots \int \varphi_2(\alpha, q_2, p_2)\, dq_1\, dq_2\, dq_3\, dp_1\, dp_2\, dp_3,$$

$$I_3 = \int\limits_{G_6} \dots \int \varphi_3(\beta, q_3, p_3)\, dq_1\, dq_2\, dq_3\, dp_1\, dp_2\, dp_3,$$

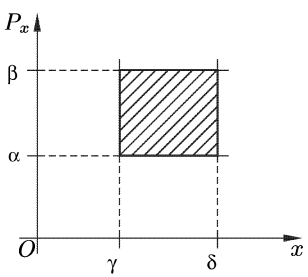
где α и β — произвольные постоянные величины, являются интегральными инвариантами канонической системы с гамильтонианом $H = \varphi_3\{\varphi_2[\varphi_1(q_1, p_1), q_2, p_2], q_3, p_3\}$.

22.21. Система с гамильтонианом $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ имеет интегральный инвариант вида

$$I = \int\limits_{G_{2n}} \dots \int F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)\, dq_1\, dq_2 \dots dq_n\, dp_1\, dp_2 \dots dp_n,$$

где $F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ — непрерывная функция, а n — число степеней свободы. Показать, что функция $F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ является первым интегралом системы.

22.22. Материальная точка (см. рисунок) движется по инерции вдоль оси Ox. На фазовой плоскости $\{x, p_x\}$ точки выбирается область G_0 $\{\gamma \leqslant x_0 \leqslant \delta, \alpha \leqslant p_{x0} \leqslant \beta\}$. Совокупность движений точки (с начальными условиями в G_0) переводит G_0 в G_t. Найти вид области G_t для произвольного момента времени t.



К задаче 22.22

22.23. Показать, что если для системы второго порядка $\dot{q} = Q(q, p, t)$, $\dot{p} = P(q, p, t)$ сохраняется «фазовый объем», то эта система является гамильтоновой, т. е. существует такая функция $H(q, p, t)$, что $Q(q, p, t) = \partial H/\partial p$, $P(q, p, t) = -\partial H/\partial q$.

22.24. Показать, что из факта сохранения фазового объема для системы

$$\dot{q}_i = Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad \dot{p}_i = P_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad (i = \overline{1, n}, n \geqslant 2),$$

вообще говоря, нельзя сделать вывод о том, что система является гамильтоновой. Привести пример.

22.25. В фазовом пространстве одномерного гармонического осциллятора с гамильтонианом $H = (p^2 + \omega^2 q^2)/2$ выбирается область $(q_0 - a)^2 + (1/\omega^2)(p_0 - b)^2 \leqslant 1$, где a и b — постоянные. Из каждой точки этой области выпускается прямой путь системы. Как изменяются форма и положение этой области во времени?

22.26. Гамильтониан многомерного осциллятора имеет вид $H = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}(p_i^2+\omega_i^2 q_i^2)$. Из каждой точки области

$$G_0\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[(q_{i0}-a_i)^2+\frac{1}{\omega_i^2}(p_{i0}-b_i)^2\right]\leqslant 1\right\}$$

$2n$-мерного фазового пространства осциллятора выпускаются прямые пути, переводящие G_0 в G_t. Показать, что G_t представляет собой внутренность эллипсоида

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(q_i-\alpha_i(t))^2+\frac{1}{\omega_i^2}(p_i-\beta_i(t))^2\right]\leqslant 1,$$

где $\alpha_i(t)=a_i\cos\omega_i t+(b_i/\omega_i)\sin\omega_i t$, $\beta_i(t)=-a_i\sin\omega_i t+b_i\cos\omega_i t$.

22.27. Гамильтониан системы $H(q_i, p_i)$ $(i=\overline{1,n})$ и число α таковы, что неравенство $H(q_i^0, p_i^0)\leqslant\alpha$ определяет некоторый объем G_0 в фазовом пространстве (q_i, p_i). Из каждой точки области G_0 выпускается прямой путь системы. Как меняются положение и форма области G_0 с течением времени?

22.28. Как меняется во времени величина некоторого объема G_0 в фазовом пространстве (q, p) механической системы с лагранжианом $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, на которую действуют дополнительно обобщенные силы $Q_i(t)$ $(i=\overline{1,n})$?

22.29. Найти необходимые и достаточные условия сохранения фазового объема в пространстве x_1, $x_2, \ldots, x_n$ для стационарной линейной динамической системы $\dot{x}_i=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}x_k$ $(i=\overline{1,n})$.

22.30. Показать, что фазовый объем линейной стационарной динамической системы $\dot{x}_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2$, $\dot{x}_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2$ сохраняется лишь в том случае, когда эта система гамильтонова. Выписать выражение для соответствующего гамильтониана.

22.31. Груз массы m движется в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости (коэффициент пропорциональности β). На груз действует сила пружины жесткости c (см. рисунок к задаче 18.4). На плоскости $(x, \dot{x})$ (x — растяжение пружины) выбирается область G_0 площади S_0. Совокупность движений груза с начальными условиями в G_0 переводит G_0 в G_t. Найти площадь S_t области G_t.

22.32. Движение динамической системы в координатах x_1, $x_2, \ldots, x_m$ описывается системой уравнений:

$$\dot{x}_i=f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)\qquad (i=\overline{1,m}).$$

Показать, что фазовый объем этой системы в m-мерном пространстве $x_1, x_2, \ldots, x_m$ сохраняется в том и только в том случае, когда $\operatorname{div}\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0$.

22.33. В трехмерном пространстве (p, q, r) угловых скоростей твердого тела с одной закрепленной точкой, движущегося по инерции, выбирается некоторая область G_0. Движения твердого тела с начальными условиями в G_0 переводят эту область в область G_t. Найти объем V_t области G_t, если объем области G_0 равен V_0.

22.34. Некоторая динамическая система описывается уравнениями $\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ $(i = \overline{1, m})$, причем задача Коши для этих уравнений имеет единственное решение. Каждая начальная область G_0 в m-мерном пространстве $x_1, x_2, \ldots, x_m$ траекториями системы $x_i = x_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, t)$ переводится в область G_t, если $\mathbf{x}^0 \in G_0$. Показать, что интеграл

$$I_t = \int\limits_{G_t} \ldots \int \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_m)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_m$$

сохраняется на траекториях системы $(I_t \equiv I_{t_0})$, т. е. является интегральным инвариантом системы в том и только в том случае, когда

$$\operatorname{div}[\Phi(x)\mathbf{f}(x)] = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial[\Phi(x) f_i(x)]}{\partial x_i} = 0.$$

22.35. Показать, что в условиях предыдущей задачи выражение

$$I_t = \int\limits_{G_t} \ldots \int \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)\, dx_1\, dix_2 \ldots dx_m$$

будет сохраняться на движениях системы в том и только в том случае, когда $\partial\Phi(x, t)/\partial t + \operatorname{div}[\Phi(x, t)\mathbf{f}(x)] = 0$.

22.36. Два шарика с массами m_1 и m_2 движутся навстречу друг другу со скоростями u_1^0 и u_2^0 соответственно. Рассматривается совокупность таких движений при различных значениях скоростей u_1^0 и u_2^0, заполняющих некоторую область S_0 на плоскости $u_1 u_2$. Как изменится площадь области S_0 в результате абсолютно упругого удара?

22.37. Решить предыдущую задачу, считая коэффициент восстановления при ударе равным k.

22.38. Шарик массы m движется по инерции вдоль оси Ox и абсолютно упруго ударяется о перпендикулярную направлению движения преграду. На фазовой плоскости (p, x) выбирается область

начальных данных S_0. Совокупность движений шарика (с начальными данными в S_0) переводит S_0 в S_t. Проследить (качественно) изменение S_t с течением времени на фазовой плоскости с учетом соударения с преградой.

22.39. Диссипативная система имеет кинетическую энергию $T = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} \dot{q}_i^2$ и потенциальную энергию $\Pi = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} c_{ik}q_iq_k$, $c_{ik} = \text{const}$. Непотенциальные обобщенные силы равны $\widetilde{Q}_i = -\dfrac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}$, где $R = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$ — функция Релея системы, а $b_{ik} = b_{ki}$ — постоянные величины. В $2n$-мерном пространстве $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ этой системы выбрана некоторая область G_0, объем которой равен V_0. Найти объем V_t области G_t, в которую переводят область G_0 движения системы с начальными условиями в G_0.

22.40. Найти закон изменения объема V_t диссипативной системы, описанной в предыдущей задаче, считая потенциальную энергию произвольной дифференцируемой функцией $\Pi(\mathbf{q}, t)$.

22.41. Для гамильтоновой системы статистический ансамбль имеет плотность $\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$. Показать, что интеграл

$$I = \int\limits_{G_{2n}}\!\!\ldots\!\int \rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)\, dq_1\, dq_2 \ldots dq_n\, dp_1\, dp_2 \ldots dp_n$$

является интегральным инвариантом системы.

22.42. Задан статистический ансамбль плотности $\rho(q_i, p_i, t)$ $(i = \overline{1, n})$, для которого справедлива теорема Лиувилля

$$\partial\rho/\partial t + (\rho, H) = 0,$$

где $H(q_i, p_i, t)$ — гамильтониан системы. Этот ансамбль можно интерпретировать как «$2n$-мерную жидкость», поле скоростей которой задается уравнениями Гамильтона $\dot{q}_i = u_{q_i} = \partial H/\partial p_i$, $\dot{p}_i = u_{p_i} = -\partial H/\partial q_i$, а плотность совпадает с плотностью ансамбля. Показать, что в этих условиях для «жидкости» будет выполняться «уравнение неразрывности» $\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0$, где $\mathbf{u} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_n)$ представляет собой $2n$-мерный вектор скорости «жидкой частицы».

22.43. Используя введенную в предыдущей задаче аналогию между «$2n$-мерной жидкостью» и статистическим ансамблем, получить из «уравнения неразрывности жидкости» $\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0$ уравнение $\partial\rho/\partial t + (\rho, H) = 0$, выражающее утверждение теоремы Лиувилля.

В теории динамических систем вероятность p нахождения движущейся точки в некоторой области G определяется как предел (если он существует) отношения времени $\sum t_i$ нахождения траектории в области ко всему времени движения T, т. е.

$$p = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum t_i = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \varphi_G(x(x_0, t))\, dt,$$

где φ_0 — характеристическая функция множества G:

$$\varphi_G = \begin{cases} 1, & x \in G, \\ 0, & x \notin G. \end{cases}$$

В следующих задачах для конкретных механических систем требуется найти вероятность их нахождения в заданных областях.

22.44. Тело массы m (см. рис. к задаче 18.19) соединено со стенкой пружиной жесткости c и может скользить по гладкой горизонтальной направляющей. Найти вероятность q нахождения тела в области $G\left\{0 \leqslant x,\ 0 \leqslant p_x,\ cx^2 + \dfrac{p_x^2}{m} \leqslant 2E_0\right\}$ фазовой плоскости (x, p_x), где x — растяжение пружины. В начальный момент времени: $x(0) = x_0 > 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

22.45. Решить предыдущую задачу, считая дополнительно, что на тело действует сила вязкого трения $F = -\beta v$ с постоянным коэффициентом β $(4mc > \beta^2)$.

22.46. Зависит ли вероятность нахождения изображающей точки в области, указанной в задачах 22.44 и 22.45, от значений x_0 и $\dot{x}_0$?

22.47. Динамическая система, описываемая уравнениями $\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ $(i = \overline{1, n})$, имеет два интегральных инварианта:

$$I_1 = \int\limits_G \ldots \int \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n,$$

$$I_2 = \int\limits_G \ldots \int \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Показать, что отношение $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)/\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будет первым интегралом системы. Обсудить в связи с этим задачу 22.21.

22.48. Динамическая система описывается уравнениями $\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$. Найти условия, при которых эта система имеет интегральный инвариант вида $I = \int\limits_L \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(x, t)\, dx_i$, где криволи-

нейный интеграл вычисляется по любым кривым (в том числе и незамкнутым — абсолютный инвариант по терминологии А. Пуанкаре), лежащим в гиперплоскости $t = \text{const}$ $(n+1)$-мерного пространства $(\mathbf{x}, t)$.

22.49. Показать, что в условиях задачи 22.48 переменные x_k, φ_k $(k = \overline{1, n})$ являются сопряженными каноническими переменными, т. е. $\dot{x}_i = \dfrac{\partial H}{\partial \varphi_i}$, $\dot{\varphi}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}$, где $H = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(\mathbf{x}, t) f_i(\mathbf{x}, t)$.

22.50. Функции $q_i = \varphi_i(\mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{p}^{(0)}, t)$, $p_i = \psi_i(\mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{p}^{(0)}, t)$ $(i = \overline{1, n})$ описывают закон движения некоторой гамильтоновой системы, причем некоторая конечная область Ω фазового пространства является инвариантной (т. е. из $\{\mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{p}^{(0)}\} \in \Omega$ следует, что при любом t выполняется соотношение $\{\varphi_i(\mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{p}^{(0)}, t), \psi_i(\mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{p}^{(0)}, t)\} \in \Omega$). Выбирается момент времени T и некоторая область $G \in \Omega$, объем которой равен $V > 0$. Доказать, что найдется такой момент времени $t \geqslant T$, что область $G \cap G_t$, где G_t — область, в которую переводится область G траекториями системы, будет иметь положительный объем. (Теорема Пуанкаре о возвращаемости областей.)

22.51. Материальная точка единичной массы движется по инерции по оси Ox. На фазовой плоскости $\{x, p_x\}$ выбирается область G_0 — круг единичного радиуса. Совокупность движений точки (с начальными условиями в G_0) переводит G_0 в G_t. Найти вид области G_t для произвольного момента t. Непосредственным вычислением убедиться в сохранении фазового объема.

22.52. По гладкой горизонтальной оси может двигаться точка единичной массы. В расширенном фазовом пространстве этой системы построить трубку прямых путей, исходящую из контура C_0, заданного параметрически уравнениями $q(\alpha) = \sin\alpha$, $p(\alpha) = \cos\alpha$, $t(\alpha) = 0$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$. Для этой трубки вычислить интеграл Пуанкаре. Сравнить его с интегралом Пуанкаре–Картана по контуру C_1, полученному путем сечения трубки плоскостью $p - t = 0$.

22.53. В канонической системе, заданной функцией Гамильтона $H(q, p, t)$, определен переход к новым координатам и времени $\widetilde{q}_i = f_i(q, t)$, $\widetilde{t} = g(q, t)$. Преобразование импульсов $\widetilde{p}_i = h_i(q, p, t)$ определяется в соответствии с равенством

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i - H \, dt = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{p}_i \, d\widetilde{q}_i - \widetilde{H} \, d\widetilde{t},$$

гарантирующим гамильтоновость уравнений в новых переменных (обосновать!). Показать, что переменные q, p, t, $\widetilde{q}, \widetilde{p}, \widetilde{t}$ и функции

$H(q, p, t)$, $\widetilde{H}(\widetilde{q}, \widetilde{p}, \widetilde{t})$ связаны соотношениями

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \widetilde{p}_i - \frac{\partial g}{\partial q_k} \widetilde{H} = p_k, \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial t} \widetilde{p}_i - \frac{\partial g}{\partial t} \widetilde{H} = H.$$

22.54. В декартовых координатах гамильтониан релятивистской частицы в поле тяготения имеет вид

$$H = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} - \frac{G}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

где m_0 — масса покоя, c — скорость света, а G — гравитационная постоянная. С использованием соотношений, приведенных в условии задачи 22.53, найти гамильтониан частицы в сферической системе координат.

22.55. Для нижеприведенных одномерных систем с использованием соотношений из условия задачи 22.53 вычислить функцию Гамильтона в новых переменных, если меняются ролями время и координата $\widetilde{q} = t$, $\widetilde{t} = q$:

а) движение точки по вертикали в однородном поле тяжести Земли;

б) линейный осциллятор;

в) осциллятор с вязким трением (см. задачу 19.79).

§ 23. Канонические преобразования

23.1. Доказать каноничность преобразования $\widetilde{q}_i = p_i$, $\widetilde{p}_i = q_i$ $(i = \overline{1, n})$. Найти валентность c этого преобразования и производящую функцию $F(q_i, p_i, t)$.

23.2. Показать, что в одномерном случае невырожденное линейное стационарное преобразование $\widetilde{q} = \alpha q + \beta p$, $\widetilde{p} = \gamma q + \rho p$ всегда является каноническим. Найти его валентность c и производящую функцию $F(q, p, t)$.

23.3. При каких условиях неособенное преобразование

$$\widetilde{q}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} q_i, \quad \widetilde{p}_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ji} p_i \qquad (j = \overline{1, n})$$

является каноническим? Считая, что эти условия выполнены, найти производящую функцию $F(q_i, p_i, t)$ преобразования.

Установить каноничность и найти валентности c и производящие функции F преобразований в задачах 23.4–23.9.

23.4. $\widetilde{q} = q + p$, $\widetilde{p} = 2q(\exp[(q+p)^2] + 1) + 2p(\exp[(q+p)^2] - 1)$.

23.5. $\widetilde{q} = qp, \quad \widetilde{p} = \ln(q^{20}p^{19})$.

23.6. $\widetilde{q} = pe^{q}, \quad \widetilde{p} = q + e^{-q} + \ln p$.

23.7. $\widetilde{q} = -q\operatorname{ctg} p, \quad \widetilde{p} = 2\ln\cos p$.

23.8. $\widetilde{q} = pq^{-1}, \quad \widetilde{p} = q^{-4}(p^4 - 5q^6)$.

23.9. $\widetilde{q} = q^{-2} + \ln(tpq^3), \quad \widetilde{p} = pq^3 + tpq^3\exp(1/q^2)$.

23.10. Известны валентность c и производящая функция $F(q_1, p_1, t)$ канонического преобразования $\widetilde{q}_1 = f(q_1, p_1, t)$, $\widetilde{p}_1 = \varphi(q_1, p_1, t)$. Показать, что преобразование

$$\widetilde{q}_1 = f(q_1, p_1, t), \ldots, \widetilde{q}_n = f(q_n, p_n, t),$$
$$\widetilde{p}_1 = \varphi(q_1, p_1, t), \ldots, \widetilde{p}_n = \varphi(q_n, p_n, t)$$

является каноническим той же валентности c. Найти производящую функцию этого преобразования.

23.11. Доказать, что преобразование $q_i = \sqrt{2\lambda_i}\cos\varphi_i$, $p_i = \sqrt{2\lambda_i}\sin\varphi_i$ $(i = \overline{1, n})$ является каноническим (т. е. что λ_i и φ_i представляют собой гамильтоновы переменные). Найти его валентность c и производящую функцию F.

23.12. Доказать каноничность преобразования

$$\widetilde{q}_i = \mu q_i + \partial\varphi(p_j, t)/\partial p_i, \quad \widetilde{p}_i = p_i \quad (i, j = \overline{1, n}).$$

Найти валентность c этого преобразования, его производящую функцию $F(q_j, p_j, t)$ и закон преобразования гамильтонианов.

23.13. Доказать, что не существует канонического преобразования с валентностью $c = 0$.

23.14. Доказать, что у канонического преобразования валентность c определяется однозначно, а производящая функция $F(q_i, p_i, t)$ лишь с точностью до произвольной аддитивной функции $f(t)$.

23.15. Условия каноничности преобразования

$$\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q_j, p_j, t), \quad \widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(q_j, p_j, t) \quad (i, j = \overline{1, n}) \qquad (*)$$

можно получить при помощи следующей идеи [1]. В результате преобразования $(*)$ любая гамильтонова система переходит в систему

$$\dot{\widetilde{q}}_i = \widetilde{Q}_i(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t), \quad \dot{\widetilde{p}}_i = \widetilde{P}_i(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t) \quad (i, j = \overline{1, n}) \qquad (**)$$

[1] Эта идея и была использована С. Ли в его работе 1877 г. по каноническим преобразованиям (см. [17, с. 404-424]).

где функции $\widetilde{Q}_i$ и $\widetilde{P}_i$ зависят от выбора исходного гамильтониана $H(q_j, p_j, t)$. Для того чтобы система (**) была гамильтоновой, необходимо и достаточно выполнение равенств

$$\frac{\partial \widetilde{Q}_i}{\partial \widetilde{q}_k} = \frac{\partial \widetilde{Q}_k}{\partial \widetilde{q}_i}, \quad \frac{\partial \widetilde{Q}_i}{\partial \widetilde{p}_k} = -\frac{\partial \widetilde{P}_k}{\partial \widetilde{q}_i}, \quad \frac{\partial \widetilde{P}_i}{\partial \widetilde{p}_k} = \frac{\partial \widetilde{P}_k}{\partial \widetilde{p}_i} \quad (i, k = \overline{1, n}).$$

Условия, при которых эти равенства выполняются при любом выборе функции $H(q_j, p_j, t)$, и будут являться искомыми условиями каноничности преобразования (*). Получить с помощью этих рассуждений условие каноничности преобразования (*) в виде тождества

$$\sum_{i=1}^{n} \widetilde{p}_i \delta \widetilde{q}_i - c \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i = -\delta F(q_j, p_j, t),$$

где $c \neq 0$ — некоторое число (валентность преобразования (*)), а $\delta \widetilde{q}_i$ и δF вычисляются при «замороженном» времени.

23.16. Задан гамильтониан $H(q, p, t)$ системы с одной степенью свободы. Найти условия, при которых преобразование $\widetilde{q} = \widetilde{q}(q, p, t)$, $\widetilde{p} = \widetilde{p}(q, p, t)$ переводит эту конкретную гамильтонову систему снова в гамильтонову.

23.17. Вычислить квадрат якобиана канонического преобразования валентности c: $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(q_j, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$.

23.18. В механической системе с лагранжианом $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ совершается переход от обобщенных координат q_i $(i = \overline{1, n})$ к обобщенным координатам $\widetilde{q}_i$ при помощи неособого преобразования $\widetilde{q}_i = \varphi_i(q_j, t)$. Используя соотношения из условия задачи 22.53, найти соответствующий этому переходу закон преобразования обобщенных импульсов $\widetilde{p}_i = \psi_i(q_j, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ и доказать каноничность преобразования $\widetilde{q}_i = \varphi_i(q_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \psi_i(q_j, p_j, t)$. Найти также валентность c и производящую функцию F этого преобразования.

23.19. Найти закон преобразования гамильтонианов при каноническом преобразовании, о котором шла речь в предыдущей задаче, считая, что обращение формул исходного преобразования $\widetilde{q}_i = \varphi_i(q_j, t)$ приводит к равенствам $q_i = f_i(\widetilde{q}_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$.

Приведенные в 23.20–23.24 выражения $x_i = x_i(q, t)$ $(i = \overline{1, 3})$ определяют переход от декартовых координат к другим обобщенным координатам. С использованием решения задачи 23.18 найти соответствующие этому переходу формулы преобразования обобщенных импульсов $p_{x_i} = p_{x_i}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3, t)$. Установить каноничность преобразования $x_i = x_i(q_1, q_2, q_3, t)$, $p_{x_i} = p_{x_i}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3, t)$ $(i = \overline{1, 3})$, найти его валентность c и производящую функцию F.

23.20. $x_1 = \rho \cos \varphi$, $x_2 = \rho \sin \varphi$, $x_3 = z$.

23.21. $x_1 = r\sin\theta\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\theta\sin\varphi$, $x_3 = r\cos\theta$.

23.22. $x_1 = q_1 - v_1 t$, $x_2 = q_2 - v_2 t$, $x_3 = q_3 - v_3 t$.

23.23. $x_1 = \sqrt{\xi\eta}\cos\varphi$, $x_2 = \sqrt{\xi\eta}\sin\varphi$, $x_3 = (\xi - \eta)/2$.

23.24. $x_1 = \sigma\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\cos\varphi$, $x_2 = \sigma\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\sin\varphi$, $x_3 = \sigma\xi\eta$, $\sigma = \mathrm{const}$.

23.25. Задано каноническое преобразование $\widetilde{q}_i = f_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \varphi_i(q_j, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$. Найти общий вид функций $\psi_i(q_j, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$, обеспечивающих каноничность преобразования $q_i^* = f_i(q_j, p_j, t)$, $p_i^* = \psi_i(q_j, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$. Иначе говоря, как можно изменить формулы, задающие «новые» импульсы, не меняя формул, задающих «новые» координаты, чтобы преобразование осталось каноническим?

23.26. Привести пример, показывающий, что не для любых функций $f_i(q_j, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ можно найти такие функции $\psi_i(q_j, p_j, t)$, чтобы преобразование $\widetilde{q}_i = f_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \psi_i(q_j, p_j, t)$ было каноническим.

23.27. Описать совокупность всех канонических преобразований, обладающих следующим свойством. Для любого решения $\{q_j(t), p_j(t)\}$ исходной гамильтоновой системы найдется такое решение $\{\widetilde{q}_j(t), \widetilde{p}_j(t)\}$ преобразованной гамильтоновой системы, что функции $\widetilde{q}_j(t)$ и $q_j(t)$ будут связаны соотношением $\widetilde{q}_i(t) = F_i(q_j(t), t)$ $(i, j = \overline{1, n})$. Заданные функции $F_i(q_j, t)$ таковы, что преобразование $y_i = F_i(x_j, t)$ однозначно разрешимо относительно $x_1, \ldots, x_n$.

23.28. Задана цепочка преобразований

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) \xrightarrow{A} H(q_i, p_i, t) \xrightarrow{B} \widetilde{H}(\widetilde{q}_i, \widetilde{p}_i, t) \xrightarrow{C} \widetilde{L}(\widetilde{q}_i, \dot{\widetilde{q}}_i, t),$$

где преобразование A переводит лагранжевы переменные в гамильтоновы, преобразование C переводит гамильтоновы переменные в лагранжевы, а B является каноническим. Функция L и каноническое преобразование B таковы, что к системе с лагранжианом $\widetilde{L}$ можно перейти и непосредственно от системы с лагранжианом L с помощью точечного преобразования обобщенных координат $\widetilde{q}_i = \Phi_i(q_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ (см. задачу 21.31). Найти вид канонического преобразования B.

23.29. Задано каноническое преобразование $\widetilde{q}_i = \varphi_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \psi_i(q_j, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$. Каким условиям должны удовлетворять функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ для того, чтобы преобразование $q_i^* = f_1(t)\varphi_i(q_j, p_j, t)$, $p_i^* = f_2(t)\psi_i(q_j, p_j, t)$ было каноническим?

23.30. Показать, что преобразование

$$\widetilde{q}_i = q_i,\ \widetilde{p}_i = \gamma p_i - \frac{\partial \Phi(q_j, t)}{\partial q_i} \quad (i, j = \overline{1, n})$$

является каноническим при любой непрерывно дифференцируемой функции $\Phi(q_j, t)$ $(j = \overline{1, n})$ и $\gamma = \text{const} \neq 0$. Найти также валентность c, производящую функцию $F(q_j, p_j, t)$ этого преобразования и закон преобразования гамильтонианов.

23.31. Гамильтониан $H(q_i, p_i, t)$ некоторой системы удовлетворяет условию $\det \left[\dfrac{\partial^2 H}{\partial p_i\, \partial p_j}\right]_{i,j=1}^{n} \neq 0$. В результате применения канонического преобразования $\widetilde{q}_i = q_i$, $\widetilde{p}_i = \gamma p_i + \partial \Phi(q_j, t)/\partial q_i$ $(i, j = \overline{1, n})$, $\gamma = \text{const} \neq 0$, эта система переходит в систему с гамильтонианом $\widetilde{H}(\widetilde{q}_i, \widetilde{p}_i, t)$. Показать, что если исходной гамильтоновой системе соответствует лагранжева система с лагранжианом $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, то новой гамильтоновой системе будет соответствовать лагранжева система с лагранжианом

$$\widetilde{L}(\widetilde{q}_i, \dot{\widetilde{q}}_i, t) = \gamma L(\widetilde{q}_i, \dot{\widetilde{q}}_i, t) + \frac{d\Phi(\widetilde{q}_i, t)}{dt}.$$

23.32. Какому условию должны удовлетворять функции φ_i и ψ_i для того, чтобы преобразование

$$\widetilde{q}_i = q_i,\ \widetilde{p}_i = \varphi_i(p_1, \ldots, p_n, t) + \psi_i(q_1, \ldots, q_n, t) \quad (i = \overline{1, n})$$

было каноническим преобразованием валентности c?

23.33. Установить условия, при которых преобразования $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(q_j, p_j, t)$ $(i = \overline{1, n})$ переводят любую систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{q}_i = \frac{\partial K(q_j, p_j, t)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial K(q_j, p_j, t)}{\partial q_i} + \alpha p_i$$

в систему такого же вида, вообще говоря, с другой функцией K и другой постоянной α.

23.34. В результате преобразования, определенного в задаче 23.33, любая система

$$\dot{q}_i = \frac{\partial K}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial K}{\partial q_i} + \alpha_1 p_i \quad (i = \overline{1, n})$$

переходит в систему такого же вида. Какими будут в преобразованной системе функция $\widetilde{K}(\widetilde{q}_i, \widetilde{p}_i, t)$ и постоянная α_2?

23.35. Преобразование $\widetilde{q} = q$, $\widetilde{p} = p^3/6$ применяется к гамильтоновой системе с гамильтонианом: а) $H_1 = p^2/2$, б) $H_2 = (p^2 + q^2)/2$, в) $H_3 = qe^{pt}$, г) $H_4 = e^{pt}$. Составить уравнения движения в новых переменных и выяснить, являются ли полученные системы гамильтоновыми.

23.36. Заданы преобразование $\widetilde{q} = p^2/2$, $\widetilde{p} = q$ и две канонические системы с гамильтонианами $H_1 = p$ и $H_2 = (p^2 + q^2)/2$. Показать, что указанное преобразование первую систему переводит в каноническую, а вторую — в неканоническую.

23.37. Систему с гамильтонианом

$$H = (p+q)^2 \exp[2(p+q)^2] + 2(p^2 - q^2)\exp[(p+q)^2] + 2(p^2 + q^2)$$

подвергнуть преобразованию

$$\widetilde{q} = p + q,\ \widetilde{p} = 2p[\exp(p+q)^2 + 1] + 2q[\exp(p+q)^2 - 1].$$

Убедиться, что это преобразование является каноническим. Найти гамильтониан преобразованной системы.

23.38. Систему с гамильтонианом

$$H = a\sum_{i=1}^{n}[p_i^2 + (q_i - \gamma_i t \ln(p_i\gamma_i t))^2] + \sum_{i=1}^{n}\gamma_i p_i \ln(p_i\gamma_i t)$$

подвергнуть преобразованию $\widetilde{q}_i = q_i - \gamma_i t \ln(p_i\gamma_i t)$, $\widetilde{p}_i = ap_i$ $(i = \overline{1, n})$. Убедиться, что это преобразование является каноническим. Найти гамильтониан преобразованной системы.

23.39. Систему с гамильтонианом $H = pq^3/(2t)$ подвергнуть преобразованию

$$\widetilde{q} = \frac{1}{q^2} + \ln(tpq^3), \quad \widetilde{p} = pq^3\left(1 + t\exp\frac{1}{q^2}\right).$$

Убедиться, что это преобразование является каноническим. Найти гамильтониан преобразованной системы.

23.40. Систему с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n} q_i\left(\arcsin\sqrt{\frac{1}{2q_i}} - p_i\right)$$

подвергнуть каноническому преобразованию

$$\widetilde{q}_i = \frac{1}{t}q_i\left(\arcsin\sqrt{\frac{1}{2q_i}} - p_i\right), \quad \widetilde{p}_i = 2q_i t \quad (i = \overline{1, n}).$$

Найти гамильтониан преобразованной системы.

23.41. Систему с гамильтонианом

$$H = -\sum_{i=1}^{n}\left[q_i^2\left(\frac{1}{2}+at^2\right)-2tq_ip_i+\frac{p_i^2}{a}\right]$$

подвергнуть каноническому преобразованию

$$\widetilde{q}_{i+1} = aq_i,\ \widetilde{p}_{i+1} = atq_i - p_i,\ \widetilde{q}_{n+1} = \widetilde{q}_1,\ \widetilde{p}_{n+1} = \widetilde{p}_1\ (i = \overline{1, n}).$$

Найти гамильтониан преобразованной системы.

23.42. Показать, что существует унивалентное каноническое преобразование вида $\widetilde{q}_i = \sum\limits_{k=1}^{n} u_{ik}q_k$, $\widetilde{p}_i = \sum\limits_{k=1}^{n} v_{ik}p_k$ $(i = \overline{1, n})$, которое переводит систему с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\alpha_{ik}p_ip_k + \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\beta_{ik}q_iq_k$$

в систему с гамильтонианом

$$\widetilde{H} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{p}_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\widetilde{q}_i^2,$$

если $[\alpha_{ik}]$, $[\beta_{ik}]$, $[u_{ik}]$, $[v_{ik}]$ — постоянные матрицы, $\sum\limits_{i,k=1}^{n}\alpha_{ik}p_ip_k$ — положительно определенная квадратичная форма.

23.43. Как связаны между собой матрицы $\mathbf{U} = [u_{ik}]_{i,k=1}^{n}$ и $\mathbf{V} = [v_{ik}]_{i,k=1}^{n}$ в условиях предыдущей задачи?

23.44. Показать, что в результате замены переменных $\widetilde{q}_i = q_i\exp(-\beta t)$, $\widetilde{p}_i = p_i\exp(-\gamma t)$, $\gamma = \text{const}$, $\beta = \text{const}$, система

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \beta q_i, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \gamma p_i$$

становится гамильтоновой. Найти гамильтониан $\widetilde{H}(\widetilde{q}_i, \widetilde{p}_i, t)$ преобразованной системы.

23.45. Показать, что невырожденное преобразование $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(q_j, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ переводит систему с заданным гамильтонианом $H(q_i, p_i, t)$ снова в гамильтонову систему в том и только в том случае, когда существует функция $\Phi(q_i, p_i, t)$ такая, что выполняется тождество

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\frac{\partial\widetilde{q}_i}{\partial t} + (\widetilde{q}_i, H)\right]\delta\widetilde{p}_i - \left[\frac{\partial\widetilde{p}_i}{\partial t} + (\widetilde{p}_i, H)\right]\delta\widetilde{q}_i\right\} = \delta\Phi(q_i, p_i, t)$$

$$(i = \overline{1, n}),$$

где $(\widetilde{q}_i, H)$ и $(\widetilde{p}_i, H)$ — скобки Пуассона, а

$$\delta f(q, p, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i} \delta p_i.$$

23.46. Каким условиям должно удовлетворять преобразование (может быть, и не каноническое) $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(q_j, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ для того, чтобы оно переводило систему с гамильтонианом $H = \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha_k q_k + \beta_k p_k)$, $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$, снова в гамильтонову систему?

23.47. Построить каноническое преобразование, переводящее систему с гамильтонианом $H = (p^2 + \omega^2 q^2)/2$ (осциллятор) в систему с гамильтонианом $H_1 = \omega(\widetilde{p}^{\,2} + \widetilde{q}^{\,2})/2$. Найти также валентность c и производящую функцию F этого преобразования.

23.48. Найти движение осциллятора с гамильтонианом $H = \frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{n} (p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2)$. Показать, что закон движения системы $q_i = q_i(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t)$, $p_i = p_i(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t)$ можно рассматривать как унивалентное каноническое преобразование, т. е. движение системы в фазовом пространстве представляет собой процесс непрерывного канонического преобразования начальных данных. Найти производящую функцию преобразования и гамильтониан $\widetilde{H}$ осциллятора в переменных $\mathbf{q}_0$ и $\mathbf{p}_0$.

23.49. Показать, что закон движения свободной точки массы m в однородном поле тяжести можно рассматривать как унивалентное каноническое преобразование $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0, t)$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0, t)$. Найти производящую функцию этого преобразования и гамильтониан $\widetilde{H}$ точки в переменных $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{p}_0$.

23.50. Функции $\varphi_i(q_j, p_j, t)$, $\psi_i(q_j, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ задают решение $\widetilde{q}_i = \varphi_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \psi_i(q_j, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ системы дифференциальных уравнений $\dot{\widetilde{q}}_i = Q_i(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t)$, $\dot{\widetilde{p}}_i = P_i(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t)$ с начальными данными $\widetilde{q}_i(0) = q_i$, $\widetilde{p}_i(0) = p_i$ $(i = \overline{1, n})$. Показать, что функции φ_i, ψ_i удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i \delta\varphi_i - c(t) \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i = -\delta F(q_j, p_j, t),$$

где $c \neq 0$ и F — некоторая функция, в том и только в том случае, когда справедливы равенства

$$Q_i = \frac{\partial K}{\partial \widetilde{p}_i}, \quad P_i = -\frac{\partial K}{\partial \widetilde{q}_i} + a(t)\widetilde{p}_i \qquad (i = \overline{1, n}),$$

в которых $K(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t)$ — некоторая дифференцируемая функция, а функции $a(t)$ и $c(t)$ связаны следующим образом:

$$\frac{dc}{dt} = ac, \qquad c(0) = 1.$$

23.51. Функции $q_i = \varphi_i(q_j^0, p_j^0, t)$, $p_i = \psi_i(q_j^0, p_j^0, t)$ $(i = \overline{1, n})$ задают уравнения движения гамильтоновой системы в конечной форме. Используя общую формулу для вариации действия по Гамильтону, показать, что преобразование $\widetilde{q}_i = \varphi_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \psi_i(q_j, p_j, t)$ $(i = \overline{1, n})$ является унивалентным каноническим преобразованием, т. е. что движение гамильтоновой системы представляет собой процесс непрерывного канонического преобразования фазового пространства.

23.52. Показать, что при унивалентных канонических преобразованиях $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(q_j, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ фазовый объем

$$V = \int\limits_G \ldots \int dq_1 \ldots dq_n \, dp_1 \ldots dp_n$$

не изменяется.

23.53. Заданы каноническое преобразование A: $\widetilde{q} = p$, $\widetilde{p} = q$ и каноническое преобразование B: $\widetilde{q} = q + p$, $\widetilde{p} = q - p$. Найти валентность и производящую функцию суперпозиции преобразований: а) AB; б) BA; в) $B^{-1}A$, где B^{-1} — преобразование, обратное к B. Выписать формулы указанных преобразований в явном виде.

23.54. Каноническое преобразование $\widetilde{q}_i = f_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \varphi_i(q_j, p_j, t)$ имеет валентность c и производящую функцию $F(q_j, p_j, t)$. Показать, что преобразования: а) $\widetilde{q}_i = f_i(p_j, q_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \varphi_i(p_j, q_j, t)$; б) $\widetilde{q}_i = \varphi_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = f_i(q_j, p_j, t)$; в) $\widetilde{q}_i = \varphi_i(p_j, q_j, t)$, $\widetilde{p}_i = f_i(p_j, q_j, t)$ являются каноническими. Найти валентности и производящие функции этих преобразований.

23.55. Каноническое преобразование $\widetilde{q}_i = \varphi_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \psi_i(q_j, p_j, t)$, $(i, j = \overline{1, n})$ переводит систему с гамильтонианом $H(q_j, p_j, t)$ в систему с гамильтонианом $\widetilde{H}(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t)$. Выписать систему, в которую переходит исходная гамильтонова система

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q_j, p_j, t)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q_j, p_j, t)}{\partial q_i} \quad (i, j = \overline{1, n})$$

в результате применения к ней преобразования

$$q_i^* = f(t)\varphi_i(q_j, p_j, t), \quad p_i^* = f(t)\psi_i(q_j, p_j, t) \quad (i = \overline{1, n}),$$

где функции φ_i и ψ_i те же, что и в первоначальном преобразовании, а $f(t)$ — произвольная функция времени.

23.56. Выяснить, является ли преобразование $\widetilde{q}_i = \varphi(t)q_i$, $\widetilde{p}_i = \varphi(t)p_i$ $(i = \overline{1, n}, \dot{\varphi}(t) \not\equiv 0)$ каноническим. Выписать систему, в которую переходит гамильтонова система

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q_j, p_j, t)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q_j, p_j, t)}{\partial q_i} \quad (i, j = \overline{1, n})$$

в результате применения этого преобразования.

23.57. Каноническое преобразование $\widetilde{q}_i = \varphi_i(\overline{q}_j, \overline{p}_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \psi_i(\overline{q}_j, \overline{p}_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ имеет валентность c. Показать, что преобразование $q_i^* = \varphi_i(\alpha q_j, \beta p_j, t)$, $p_i^* = \psi_i(\alpha q_j, \beta p_j, t)$ будет унивалентным каноническим преобразованием, если $\alpha\beta c = 1$.

23.58. Каноническое преобразование $\widetilde{q}_i = \varphi_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \psi_i(q_j, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ имеет валентность c. Показать, что преобразование

$$q_i^* = \varphi_i\left(\frac{1}{c}q_j, p_j, t\right), \quad p_i^* = \psi_i\left(\frac{1}{c}q_j, p_j, t\right)$$

является унивалентным каноническим преобразованием.

23.59. Каждое из канонических преобразований, представляющих собой суперпозицию M последовательных канонических преобразований

$$q_i^m = q_i^m(q_j^{m+1}, p_j^{m+1}, t), \quad p_i^m = p_i^m(q_j^{m+1}, p_j^{m+1}, t)$$

$$(i, j = \overline{1, n},\ m = \overline{1, M};\ q_i^{M+1} = q_i^1,\ p_i^{M+1} = p_i^1),$$

имеет валентность c_m и производящую функцию $F_m(q_j^{m+1}, p_j^{m+1}, t)$. Найти валентность и производящую функцию результирующего преобразования.

23.60. Доказать, что каноническое преобразование

$$\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q_j, p_j, t), \quad \widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(q_j, p_j, t) \qquad (i = \overline{1, n})$$

имеет производящую функцию $F(t)$, не зависящую от q_i, p_i, тогда и только тогда, когда функции $\widetilde{q}_i(q_j, p_j, t)$ однородны по переменным p_k нулевой степени, а функции $\widetilde{p}_i(q_j, p_j, t)$ однородны по переменным p_k первой степени.

23.61. Найти общий вид канонического преобразования, имеющего валентность c и производящую функцию $F(q, p, t) = 0$ в одномерном случае.

23.62. Найти общий вид канонического преобразования, имеющего валентность $c = -1$ и производящую функцию $F = -qp$.

23.63. Верно ли следующее утверждение: суперпозиция любых двух свободных канонических преобразований снова является свободным каноническим преобразованием?

23.64. Построить два таких свободных канонических преобразования, суперпозиция которых также является свободным каноническим преобразованием.

Указание. При построении примера ограничиться линейными каноническими преобразованиями.

23.65. Из критерия каноничности $\sum\limits_{j=1}^{n} \widetilde{p}_j \delta q_j = c \sum\limits_{j=1}^{n} p_j \delta q_j - \delta F(q_i, p_i, t)$ преобразования $\widetilde{q}_j = \widetilde{q}_j(q_i, p_i, t)$, $\widetilde{p}_j = \widetilde{p}_j(q_i, p_i, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ получить эквивалентный ему критерий каноничности, записанный через скобки Лагранжа:

$$[q_i, q_k] = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \widetilde{q}_j}{\partial q_i} \frac{\partial \widetilde{p}_j}{\partial q_k} - \frac{\partial \widetilde{q}_j}{\partial q_k} \frac{\partial \widetilde{p}_j}{\partial q_i} \right) = 0,$$

$$[p_i, p_k] = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \widetilde{q}_j}{\partial p_i} \frac{\partial \widetilde{p}_j}{\partial p_k} - \frac{\partial \widetilde{q}_j}{\partial p_k} \frac{\partial \widetilde{p}_j}{\partial p_i} \right) = 0,$$

$$[q_i, p_k] = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \widetilde{q}_j}{\partial q_i} \frac{\partial \widetilde{p}_j}{\partial p_k} - \frac{\partial \widetilde{q}_j}{\partial p_k} \frac{\partial \widetilde{p}_j}{\partial q_i} \right) = c\delta_{ik} \quad (i, k = \overline{1, n}),$$

где δ_{ik} — символ Кронекера.

23.66. Каким условиям должны удовлетворять постоянные матрицы

$$\mathbf{A} = [a_{ik}]_{i,k=1}^{n}, \quad \mathbf{B} = [b_{ik}]_{i,k=1}^{n},$$

$$\mathbf{C} = [c_{ik}]_{i,k=1}^{n}, \quad \mathbf{D} = [d_{ik}]_{i,k=1}^{n}$$

для того, чтобы невырожденное преобразование $\widetilde{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{p}$, $\widetilde{\mathbf{p}} = \mathbf{C}\mathbf{q} + \mathbf{D}\mathbf{p}$ было каноническим.

23.67. Найти производящую функцию $F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ и валентность c линейного канонического преобразования $\widetilde{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{p}$, $\widetilde{\mathbf{p}} = \mathbf{C}\mathbf{q} + \mathbf{D}\mathbf{p}$, где

$$\mathbf{A} = [a_{ik}]_{i,k=1}^{n}, \quad \mathbf{B} = [b_{ik}]_{i,k=1}^{n},$$

$$\mathbf{C} = [c_{ik}]_{i,k=1}^{n}, \quad \mathbf{D} = [d_{ik}]_{i,k=1}^{n},$$

— постоянные матрицы.

23.68. Найти условия, которым должны удовлетворять матрицы

$$\mathbf{A}(t) = [a_{ik}(t)]_{i,k=1}^{n}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{t}) = [b_{ik}(t)]_{i,k=1}^{n},$$

$$\mathbf{C}(t) = [c_{ik}(t)]_{i,k=1}^{n}, \quad \mathbf{D}(\mathbf{t}) = [d_{ik}(t)]_{i,k=1}^{n}$$

для того, чтобы преобразование $\widetilde{\mathbf{q}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{q} + \mathbf{B}(t)\mathbf{p}$, $\widetilde{\mathbf{p}} = \mathbf{C}(t)\mathbf{q} + \mathbf{D}(t)\mathbf{p}$ было каноническим.

23.69. Доказать, что преобразование $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(q_j, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ будет каноническим в том и только в том случае, когда существует такая константа $c \neq 0$, что для скобок Пуассона выполнены тождества $(\widetilde{q}_i, \widetilde{q}_k) = 0$, $(\widetilde{p}_i, \widetilde{p}_k) = 0$, $(\widetilde{q}_i, \widetilde{p}_k) = c\delta_{ik}$, где δ_{ik} — символ Кронекера. (Критерий каноничности, записанный через скобки Пуассона.)

23.70. Якобиан преобразования $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(q_j, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ представляет собой функцию $f(q_i, p_i, t)$, не равную тождественно постоянной. Может ли это преобразование быть каноническим?

23.71. При каких значениях параметров α_i, β_i, γ_i, δ_i преобразование $\widetilde{q}_i = q_i^{\alpha_i} p_i^{\beta_i}$, $\widetilde{p}_i = q_i^{\gamma_i} p_i^{\delta_i}$ $(i = \overline{1, n})$ является каноническим?

23.72. Задана система функций $f_i(q_j, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$, для которых якобиан $\dfrac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(p_1, p_2, \ldots, p_n)} \neq 0$. Любые две функции из указанного набора находятся в инволюции, т. е. скобки Пуассона $(f_l, f_k) = 0$ $(l, k = \overline{1, n})$. Показать, что можно найти такие функции $\varphi_i(q_j, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$, чтобы преобразование $\widetilde{q}_i = f_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \varphi_i(q_j, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ было свободным каноническим преобразованием валентности $\mu \neq 0$.

23.73. Задана система функций $q_i = q_i(c_1, \ldots, c_{2n}, t)$, $p_i = p_i(c_1, \ldots, c_{2n}, t)$ $(i = \overline{1, n})$. Найти условия, при которых эти функции определяют общее решение какой-либо гамильтоновой системы.

23.74. Каким условиям должен удовлетворять набор $2n$ функционально независимых по переменным q_j, p_j функций $w_i = w_i(t, q_j, p_j)$ $(i = \overline{1, 2n}, j = \overline{1, n})$, чтобы нашлась такая гамильтонова система, для которой функции w_i $(i = \overline{1, 2n})$ образуют полный набор ее первых интегралов?

23.75. Показать, что для преобразований вида

$$\widetilde{q}_i = \frac{\partial\psi(q_j, p_j, t)}{\partial q_i}, \quad \widetilde{p}_i = \frac{\partial\psi(q_j, p_j, t)}{\partial p_i} \quad (i, j = \overline{1, n})$$

скобки Пуассона и скобки Лагранжа совпадают, т. е. что имеют место соотношения $[q_j, q_k] = (\widetilde{q}_j, \widetilde{q}_k)$, $[p_j, p_k] = (\widetilde{p}_j, \widetilde{p}_k)$, $[q_j, p_k] = (\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_k)$ $(j, k = \overline{1, n})$.

23.76. Для преобразований

$$\widetilde{q}_i = \frac{\partial\varphi(q_j, p_j, t)}{\partial p_i}, \quad \widetilde{p}_i = -\frac{\partial\varphi(q_j, p_j, t)}{\partial q_i} \quad (i, j = \overline{1, n}),$$

заданных при помощи функции $\varphi(q_j, p_j, t)$, показать, что для скобок Лагранжа и скобок Пуассона выполняются равенства

$$[q_j, q_k] = (\widetilde{p}_j, \widetilde{p}_k),\ [p_j, p_k] = (\widetilde{q}_j, \widetilde{q}_k),\ [q_j, p_k] = (\widetilde{q}_k, \widetilde{p}_j)\ \ (j, k = \overline{1, n}).$$

23.77. Для системы с одной степенью свободы скобки Пуассона функций $H_1(q,p,t)$ и $H_2(q,p,t)$ удовлетворяют соотношению $(H_1, H_2) = 1$. Показать, что если гамильтониан системы равен

$$\text{а)}\quad H = H_1 + H_2; \quad \text{б)}\quad H = H_1 H_2;$$
$$\text{в)}\quad H = H_1/H_2; \quad \text{г)}\quad H = H_1^2 + H_2^2,$$

то общее решение соответствующей канонической системы уравнений можно найти, решив относительно q, p систему алгебраических уравнений:

а) $H_1(q, p, t) = c_1 + t,\ H_2(q, p, t) = c_2 - t;$

б) $H_1(q, p, t) = c_1 e^t,\ H_2(q, p, t) = c_2 e^{-t};$

в) $H_1(q, p, t) = c_1\sqrt{2t + c_2},\ H_2(q, p, t) = \sqrt{2t + c_2};$

г) $H_1(q, p, t) = c_1 \sin(2t + c_2),\ H_2(q, p, t) = c_1 \cos(2t + c_2).$

23.78. Даны преобразование $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(q_j, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ и обратное к нему $q_i = q_i(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t)$, $p_i = p_i(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$. Показать, что матрица Лагранжа $\mathbf{L}$, составленная из скобок Лагранжа $[q_i, q_j]$, $[q_i, p_j]$, $[p_i, p_j]$ $(i, j = \overline{1, n})$ для прямого преобразования:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} ([q_i, q_j])_{i,j=1}^n & ([q_i, p_j])_{i,j=1}^n \\ ([p_i, q_j])_{i,j=1}^n & ([p_i, p_j])_{i,j=1}^n \end{bmatrix},$$

и матрица Пуассона $\mathbf{P}$, составленная из скобок Пуассона (q_i, q_j), (q_i, p_j), (p_i, p_j) $(i, j = \overline{1, n})$ для обратного преобразования:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} [(q_i, q_j)]_{i,j=1}^n & [(q_i, p_j)]_{i,j=1}^n \\ [(p_i, q_j)]_{i,j=1}^n & [(p_i, p_j)]_{i,j=1}^n \end{bmatrix},$$

связаны соотношением $\mathbf{LP} = -\mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ — единичная матрица.

23.79. Показать, что преобразование $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(q_j, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ переводит систему с гамильтонианом $H = 0$ снова в гамильтонову систему в том и только в том случае, когда скобки Лагранжа $[q_k, q_l]$, $[q_k, p_l]$, $[p_k, p_l]$ $(k, l = \overline{1, n})$ не зависят явно от времени.

23.80. Какой должна быть функция $\varphi(q, p)$ для того, чтобы преобразование $\widetilde{q} = (q^2 + p^2)/2$, $\widetilde{p} = \varphi(q, p)$ двумерной фазовой плоскости $\{q, p\}$ было каноническим преобразованием валентности c?

23.81. Доказать, что любое преобразование фазовой плоскости $\{q, p\}$: $\widetilde{q} = \varphi(q, p, t)$, $\widetilde{p} = \psi(q, p, t)$, сохраняющее площадь, является унивалентным каноническим преобразованием.

23.82. Будет ли преобразование $q = \rho\cos\varphi$, $p = \rho\sin\varphi$ фазовой плоскости $\{q, p\}$ каноническим?

23.83. Показать, что в результате применения к канонической системе $\dot{q}_i = \partial H/\partial p_i$, $\dot{p}_i = -\partial H/\partial q_i$ $(i = \overline{1, n})$ невырожденного преобразования $q_j = \varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}, t)$, $p_j = \psi_j(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}, t)$ $(j = \overline{1, n})$ она переходит в систему

$$\sum_{j=1}^{2n} [x_k, x_j]\dot{x}_j + [x_k, t] = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial x_k} \quad (k = \overline{1, 2n}),$$

где $\widetilde{H}(\mathbf{x}, t) = H(\varphi(\mathbf{x}, t), \psi(\mathbf{x}, t), t)$, а символом $[\,,\,]$ обозначены скобки Лагранжа.

Преобразования, допускающие $(q, \widetilde{q})$-описание (свободные преобразования)

23.84. Невырожденное преобразование $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(q_j, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ удовлетворяет условию $\det[\partial\widetilde{q}_i/\partial p_j]_{i,j=1}^n \neq 0$ (свободные преобразования). Показать, что это преобразование будет каноническим в том и только в том случае, когда существуют производящая функция $S(q_i, \widetilde{q}_i, t)$ и валентность $c \neq 0$ такие, что

$$cp_i = \partial\frac{S(q_j, \widetilde{q}_j, t)}{\partial q_i}, \quad \widetilde{p}_i = -\frac{\partial S(q_j, \widetilde{q}_j, t)}{\partial \widetilde{q}_i} \quad (i, j = \overline{1, n}),$$

где p_i и $\widetilde{p}_i$ выражены в силу преобразования через q_i, $\widetilde{q}_i$ и t. (Критерий каноничности преобразования в $(q, \widetilde{q})$-описании.) Показать также, что при этом гамильтониан преобразуется в соответствии с равенством $\widetilde{H} = cH + \partial S/\partial t$.

Используя критерий каноничности в $(q, \widetilde{q})$-описании, выяснить, какие из преобразований 23.85–23.105 являются каноническими. Найти для них валентность c и производящую функцию $S(q_j, \widetilde{q}_j, t)$ (см. предыдущую задачу).

23.85. $\widetilde{q} = t^{-1}\ln[1 + (\beta p\sin^2 q)^{1/n}]$,

$$\widetilde{p} = nt\operatorname{ctg} q(\beta p\sin^2 q)^{(n-1)/n}[1 + (\beta p\sin^2 q)^{1/n}].$$

23.86. $\widetilde{q}_1 = [\ln(p_1+9q_2)-q_1]/2,\ \widetilde{p}_1 = -2[p_1+9q_2],$
$\widetilde{q}_2 = [\ln(p_2+9q_1)-3q_2]/2,\ \widetilde{p}_2 = -2[p_2+9q_1]/3.$

23.87. $\widetilde{q}_i = \arccos(q_i^{-1/2})-q_i,\ \widetilde{p}_i = -p_i\ (i=\overline{1,n}).$

23.88. $\widetilde{q}_i = \arccos(p_i/\cos q_i),\ \widetilde{p}_i = \lambda\sqrt{1-(p_i/\cos q_i)^2}\sin q_i\ \ (i = \overline{1,n}).$

23.89. $\widetilde{q}_i = [p_i/(\alpha+1)]^{1/\alpha}-q_i,\ \ \widetilde{p}_i = -p_i\ \ (i=\overline{1,n}).$

23.90. $\widetilde{q}_i = \operatorname{arctg}(p_iq_i),\ \widetilde{p}_i = \lambda[1+(p_iq_i)^2]\ln q_i\ \ (i=\overline{1,n}).$

23.91. $\widetilde{q}_i = \ln p_i - q_i,\ \widetilde{p}_i = -p_i\ \ (i=\overline{1,n}).$

23.92. $\widetilde{q}_i = (p_it/\alpha q_i^{\alpha-1})^{1/\beta},$
$\widetilde{p}_i = -t^{-1/\beta}\alpha^{1/\beta}p_i^{(\beta-1)/\beta}q_i^{(\alpha+\beta-1)/\beta}\ \ (i=\overline{1,n}).$

23.93. $\widetilde{q}_i = \sqrt{\lambda^2p_i^2+\omega_i^2q_i^2},$
$$\widetilde{p}_i = \sqrt{\lambda^2p_i^2+\omega_i^2q_i^2}\left[2t-\frac{1}{\omega_i}\arcsin\frac{\omega_iq_i}{\sqrt{\lambda^2p_i^2+\omega_i^2q_i^2}}\right]\ (i=\overline{1,n})$$

23.94. $\widetilde{q}_i = q_i-\gamma p_i+t\cos\left(t\sum\limits_{k=1}^{n}q_k\right),\ \widetilde{p}_i = q_i\ (i=\overline{1,n}).$

23.95. $\widetilde{q}_i = \ln\left[\dfrac{1}{\lambda\alpha q_i^{\alpha}}\left(\gamma p_iq_i-\beta\prod\limits_{k=1}^{n}q_k\right)\right],$
$$\widetilde{p}_i = -\frac{1}{\alpha}\left(\gamma p_iq_i-\beta\prod_{k=1}^{n}q_k\right)\qquad (i=\overline{1,n}).$$

23.96. $\widetilde{q}_i = (\gamma p_i)^{1/2}q_i^{-1/2},\ \widetilde{p}_i = -q_i^{3/2}(\gamma p_i)^{1/2}\ (i=\overline{1,n}).$

23.97. $\widetilde{q}_i = (\gamma p_i)^{1/\alpha_i}q_i^{(1-\alpha_i)\alpha_i},$
$\widetilde{p}_i = -(\gamma p_i)^{(\alpha_i-1)/\alpha_i}q_i^{(2\alpha_i-1)\alpha_i}\ \ (i=\overline{1,n}).$

23.98. $\widetilde{q}_1 = \ln\dfrac{p_1+4q_2}{4}-2q_1,\ \widetilde{p}_1 = -\dfrac{1}{2}(p_1+4q_2),$
$\widetilde{q}_2 = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p_2+4q_1}{3}-\dfrac{1}{2}q_2,\ \widetilde{p}_2 = -2(p_2+4q_1).$

23.99. $\widetilde{q}_1 = [\ln(\alpha p_1+2q_2)-q_1]/2,\ \widetilde{p}_1 = -2(\alpha p_1+2q_2),$
$\widetilde{q}_2 = -\dfrac{1}{3}\left[\arcsin\left(\dfrac{\alpha p_2+2q_1}{b}\right)+q_2\right],\ \widetilde{p}_2 = -3(\alpha p_2+2q_1).$

23.100. $\widetilde{q}_1 = \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3p_1+q_2}{a}-\dfrac{q_1}{2},\ \widetilde{p}_1 = -6p_1-2q_2,$
$\widetilde{q}_2 = \dfrac{1}{3}\arccos\dfrac{3p_2+q_1}{b}-\dfrac{q_2}{3},\ \widetilde{p}_2 = -9p_2-3q_1.$

23.101. $\widetilde{q}_1 = (\gamma p_1 + q_2)^{-1} - q_1, \ \widetilde{p}_1 = -(\gamma p_1 + q_2),$

$$\widetilde{q}_2 = \frac{1}{2}\left[\arccos\frac{\gamma p_2 + q_1}{a} - q_2\right], \ \widetilde{p}_2 = -2(\gamma p_2 + q_1).$$

23.102. $\widetilde{q}_1 = (\gamma p_1 + q_2)^{-1} - q_1, \ \widetilde{p}_1 = -(\gamma p_1 + q_2),$

$$\widetilde{q}_2 = \frac{2}{\gamma p_2 + q_1} - 2q_2, \ \widetilde{p}_2 = -\frac{1}{2}(\gamma p_2 + q_1).$$

23.103. $\widetilde{q}_i = \alpha_i q_i + \ln\left[\gamma p_i - \beta \exp\left(\sum\limits_{k=1}^{n} q_k\right)/a_i^2\right],$

$$\widetilde{p}_i = -\frac{\gamma}{a_i} p_i + \frac{\beta}{\alpha_i}\exp\left(\sum_{k=1}^{n} q_k\right) \quad (i = \overline{1, n}).$$

23.104. $\widetilde{q}_i = \sqrt{\gamma\dfrac{p_i}{q_i} - 2\alpha\beta_i \exp\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k q_k^2\right)},$

$$\widetilde{p}_i = -q_i\sqrt{q_i\left(\gamma p_i - 2\alpha\beta_i \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k q_k^2\right)\right)} \quad (i = \overline{1, n}).$$

23.105. $\widetilde{q}_i = \left[\alpha q_i^{1-\beta}\left(\mu p_i - 2\gamma q_i \exp\left(\sum\limits_{k=1}^{n} q_k^2\right)\right)\right]^{1/\alpha},$

$$\widetilde{p}_i = \varphi(t)\left[\alpha q_i^{1-\beta}\left(\mu p_i - 2\gamma q_i \exp\left(\sum_{k=1}^{n} q_k^2\right)\right)\right]^{2/\alpha} -$$

$$- \frac{1}{\beta}\left[\alpha q_i^{(\alpha+\beta-1)/(\alpha-1)}\left(\mu p_i - 2\gamma q_i \exp\left(\sum_{k=1}^{n} q_k^2\right)\right)\right]^{(\alpha-1)/\alpha}.$$

В задачах 23.106–23.110 выписать формулы свободного канонического преобразования валентности μ, заданного своей производящей функцией S.

23.106. $S = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(t) q_i^{\alpha} \widetilde{q}_i^{\beta}.$

23.107. $S = \sum\limits_{i=1}^{n} \sin(q_i t + \widetilde{q}_i).$

23.108. $S = \sum\limits_{i=1}^{n} \cos(\widetilde{q}_i t + q_i).$

23.109. $S = \sum\limits_{i=1}^{n} \widetilde{q}_i^{\alpha}[\ln(q_i t) - t].$

23.110. $S = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} q_i \widetilde{q}_j.$

23.111. Валентность и производящая функция свободного канонического преобразования $\widetilde{q}_i = \varphi_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \psi_i(q_j, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ равны c_0 и $S_0(q_i, \widetilde{q}_i, t)$. Построить свободное каноническое преобразование валентности c с производящей функцией $S(q_i, \widetilde{q}_i, t) = S_0(q_i, \widetilde{q}_i, t) + f_1(q_i, t) + f_2(\widetilde{q}_i, t)$, где $f_1(q_i, t)$ и $f_2(\widetilde{q}_i, t)$ — заданные функции.

23.112. При каких значениях параметров α_i, β_i, μ_i, ν_i преобразование $\widetilde{q}_i = \exp(\alpha_i q_i)\cos(\beta_i p_i)$, $\widetilde{p}_i = \exp(\mu_i q_i)\sin(\nu_i p_i)$ $(i = \overline{1, n})$ является свободным каноническим преобразованием?

23.113. Преобразование $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(q_j, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ задано функциональными уравнениями

$$\ln\left(\frac{p_i\gamma_i}{\alpha_i t}\right) + (\beta_i\widetilde{q}_i - \alpha_i q_i)t = 0, \quad \ln\left(\frac{\widetilde{p}_i\delta_i}{\beta_i t}\right) + (\beta_i\widetilde{q}_i - \alpha_i q_i)t = 0.$$

Определить значения параметров α_i, β_i, γ_i, δ_i, при которых это преобразование будет свободным каноническим преобразованием. Найти его валентность c и производящую функцию S.

23.114. Доказать, что если каноническое преобразование $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(q_j, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ имеет производящую функцию $F(t)$, не зависящую от q_i и p_i $(i, j = \overline{1, n})$, то оно не может быть свободным.

Преобразования, допускающие $(p, \widetilde{p})$-описание

23.115. Невырожденное преобразование $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(q_j, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ удовлетворяет условию $\det[\partial\widetilde{p}_i/\partial q_j]_{i,j=1}^n \neq 0$. Показать, что это преобразование будет каноническим в том и только в том случае, когда существуют производящая функция $U(p_i, \widetilde{p}_i, t)$ и валентность $c \neq 0$ такие, что

$$cq_i = -\frac{\partial U(p_j, \widetilde{p}_j, t)}{\partial p_i}, \quad \widetilde{q}_i = \frac{\partial U(p_j, \widetilde{p}_j, t)}{\partial \widetilde{p}_i} \quad (i, j = \overline{1, n}),$$

где q_i и $\widetilde{q}_i$ выражены в силу преобразования через p_j, $\widetilde{p}_j$ и t. (Критерий каноничности преобразования в $(p, \widetilde{p})$-описании.) Показать, что при этом гамильтониан преобразуется в соответствии с равенством $\widetilde{H} = cH + \partial U/\partial t$.

23.116. Показать, что преобразование $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(q_j, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ будет каноническим в том и только в том случае, если существуют константа $c \neq 0$ и функция $F_1(q_i, p_i, t)$ такие, что выполняется тождество

$$-\sum_{i=1}^n \widetilde{q}_i\delta\widetilde{p}_i + c\sum_{i=1}^n q_i\delta p_i = -\delta F_1(q, p, t),$$

где $\delta\widetilde{p}_i$, δp_i, и δF вычисляются при $t = \mathrm{const}$. Показать также, что закон преобразования гамильтонианов в этом случае имеет вид

$$\widetilde{H} = cH + \frac{\partial F_1}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \widetilde{q}_i \frac{\partial \widetilde{p}_i}{\partial t},$$

где переменные q_i, p_i в правой части выражены через $\widetilde{q}_i$, $\widetilde{p}_i$ в соответствии с формулами преобразования.

В задачах 23.117–23.120 выписать формулы канонического преобразования валентности c, заданного своей производящей функцией U в $(p, \widetilde{p})$-описании (см. задачу 23.115).

23.117. $U = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(t) p_i^{\alpha} \widetilde{p}_i^{\beta}$.

23.118. $U = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} \ln(p_i t) \ln(\widetilde{p}_j t)$.

23.119. $U = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} \exp[\alpha_i(t) p_i] \exp[\beta_j(t) \widetilde{p}_j]$.

23.120. $U = \sum\limits_{i=1}^{n} (p_i + \widetilde{p}_{i+1})^2$, $\widetilde{p}_{n+1} = \widetilde{p}_1$.

23.121. Валентность и производящая функция канонического преобразования $\widetilde{q}_i = \varphi_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \psi_i(q_j, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ в $(p, \widetilde{p})$-описании равны c_0 и $U_0(p_j, \widetilde{p}_j, t)$. Построить каноническое преобразование валентности c с производящей функцией $U(p_j, \widetilde{p}_j, t) = U_0(p_j, \widetilde{p}_j, t) + f_1(p_j, t) + f_2(\widetilde{p}_j, t)$. При решении использовать структурные формулы канонического преобразования в $(p, \widetilde{p})$-описании. (См. задачу 23.115.)

Используя критерий каноничности в $(p, \widetilde{p})$-описании, выяснить, какие из преобразований задач 23.112–23.126 являются каноническими. Для канонических преобразований найти валентность c и производящую функцию $U(p_j, \widetilde{p}_j, t)$ (см. задачу 23.115).

23.122. $\widetilde{q}_i = -(\lambda q_i)^{1-\alpha_i} p_i^{2-\alpha_i}$, $\widetilde{p}_i = (\lambda q_i)^{\alpha_i} p_i^{\alpha_i - 1}$ $(i = \overline{1, n})$.

23.123. $\widetilde{q}_i = -q_i p_i$, $\widetilde{p}_i = \ln\left[\frac{1}{\alpha} p_i^{\alpha} q_i^{\beta}\right]$ $(i = \overline{1, n})$.

23.124. $\widetilde{q}_i = -\gamma p_i \exp(-q_i)$, $\widetilde{p}_i = \exp q_i$ $(i = \overline{1, n})$.

23.125. $\widetilde{q}_i = -\frac{\gamma p_i}{2} \sin 2q_i$, $\widetilde{p}_i = \ln \operatorname{tg} q_i$ $(i = \overline{1, n})$.

23.126. $\widetilde{q}_i = -\gamma q_i$, $\widetilde{p}_i = p_i + \exp(\gamma q_i - 1)$ $(i = \overline{1, n})$.

Преобразования, допускающие $(q,\widetilde{p})$-описание

23.127. Невырожденное преобразование $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(q_j, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ удовлетворяет условию $\det[\partial\widetilde{p}_i/\partial p_j]_{i,j=1}^n \neq 0$. Показать, что это преобразование будет каноническим в том и только в том случае, когда существуют производящая функция $\Phi(q_i, \widetilde{p}_i, t)$ и валентность $c \neq 0$ такие, что

$$cp_i = \frac{\partial\Phi(q_j, \widetilde{p}_j, t)}{\partial q_i}, \quad q_i = \frac{\partial\Phi(q_j, \widetilde{p}_j, t)}{\partial\widetilde{p}_i} \qquad (i, j = \overline{1, n}),$$

где p_i и $\widetilde{q}_i$ в силу преобразования выражены через q_i, $\widetilde{p}_j$ и t. (Критерий каноничности преобразования в $(q, \widetilde{p})$-описании.) Показать, что при этом гамильтониан преобразуется в соответствии с равенством $\widetilde{H} = cH + \partial\Phi/\partial t$.

23.128. Задано преобразование $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$. Найти общий вид функций $\widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(q_j, p_j, t)$ таких, что преобразование $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ является каноническим. При решении воспользоваться результатами задачи 23.127.

В задачах 23.129–23.133 выписать формулы канонического преобразования валентности c, заданного своей производящей функцией Φ в $(q, \widetilde{p})$-описании (см. задачу 23.127).

23.129. $\Phi = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t) q_i^\alpha \widetilde{p}_j^\beta$.

23.130. $\Phi = \sum\limits_{i=1}^{n} (a_i(t) q_i + b_{i+1}(t)\widetilde{p}_{i+1})^s$;

при этом $\widetilde{p}_{n+1} = \widetilde{p}_1$, $b_{n+1} = b_1$.

23.131. $\Phi = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} \ln(q_i t) \exp(\alpha_j(t)\widetilde{p}_j)$.

23.132. $\Phi = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cos(q_i t) \sin(\widetilde{p}_j t)$.

23.133. $\Phi = \sum\limits_{i=1}^{n} q_i \ln \widetilde{p}_i$.

23.134. Валентность и производящая функция канонического преобразования $\widetilde{q}_i = \varphi_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \psi_i(q_j, p_j, t)$ $(i = \overline{1, n})$ в $(q, \widetilde{p})$-описании равны c_0 и $\Phi_0(q_i, \widetilde{p}_i, t)$. Построить каноническое преобразование валентности c с производящей функцией $\Phi(q_i, \widetilde{p}_i, t) = \Phi_0(q_i, \widetilde{p}_i, t) + f_1(q_i, t) + f_2(\widetilde{p}_i, t)$. При решении использовать результаты задачи 23.127.

Используя критерий каноничности в $(q, \widetilde{p})$-описании, выяснить, какие из преобразований задач 23.135–23.144 являются каноническими. Для канонических преобразований найти валентность c и производящую функцию $\Phi(q_i, \widetilde{p}_i, t)$ (см. задачу 23.127).

23.135. $\widetilde{q}_i = p_i^{\beta-1)/\beta} q_i^{(\beta+\alpha-1)/\beta}$, $\widetilde{p}_i = p_i^{1/\beta} q_i^{(1-\alpha)/\beta}$ $(i = \overline{1, n})$.

23.136. $\widetilde{q}_i = q_i + \ln p_i - \exp(p_i)$, $\widetilde{p}_i = p_i$ $(i = \overline{1, n})$.

23.137. $\widetilde{q}_i = \ln(p_i/\alpha q_i^{\alpha-1})$, $\widetilde{p}_i = q_i p_i$ $(i = \overline{1, n})$.

23.138. $\widetilde{q}_i = -\alpha_i \sqrt{\gamma p_i/q_i} + \ln[(\lambda/\alpha_i^2) q_i \sqrt{\gamma p_i q_i}]$,

$\widetilde{p}_i = (\lambda/\alpha_i) q_i \sqrt{\gamma p_i q_i}$ $(i = \overline{1, n})$.

23.139. $\widetilde{q}_i = 2\xi_i \left[q_i + t\cos\left(t \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^2\right)\right]$, $\widetilde{p}_i = \xi_i$,

где $\lambda = \text{const}$, $\xi_i = \sqrt{\lambda p_i + 2t q_i \sin\left(t \sum\limits_{k=1}^{n} q_k^2\right)}$ $(i = \overline{1, n})$.

23.140. $\widetilde{q}_i = q_i^2 + 2t\left[\gamma \dfrac{p_i}{2q_i} - t\exp\left(\sum\limits_{i=1}^{n} q_i^2\right)\right] \times$

$$\times \exp\left[t \sum_{k=1}^{n} \gamma \frac{p_k}{2q_k} - t\exp\left(-t \sum_{i=1}^{n} q_i^2\right)\right],$$

$$\widetilde{p}_i = \gamma \frac{p_i}{2q_i} - t\exp\left(-t \sum_{i=1}^{n} q_i^2\right) \quad (i = \overline{1, n}).$$

23.141. $\widetilde{q}_i = \left(1 + \dfrac{p_i^2}{t^2}\cos^4(q_i t)\right) \operatorname{tg}(q_i t)$,

$$\widetilde{p}_i = \operatorname{arctg}\left(\frac{p_i}{t}\cos^2(q_i t)\right) \qquad (i = \overline{1, n}).$$

23.142. $\widetilde{q}_i = \sqrt{(t - t_0)^2 \exp(2q_i(t - t_0)) - 4p_i^2}$,

$$\widetilde{p}_i = \frac{1}{t - t_0} \arcsin\left[\frac{2p_i}{t - t_0} \exp(-q_i(t - t_0))\right] \quad (i = \overline{1, n}).$$

23.143. $\widetilde{q}_i = 2\operatorname{ch} q_i t$, $\widetilde{p}_i = p_i/(t \operatorname{sh} q_i t)$ $(i = \overline{1, n})$.

23.144. $\widetilde{q}_i = \ln q_i$, $\widetilde{p}_i = p_i q_i$ $(i = \overline{1, n})$.

23.145. Используя $(q, \widetilde{p})$-описание, найти общий вид канонического преобразования, имеющего валентность c и производящую функцию $F(q_i, p_i, t) = 0$ (см. задачу 23.127).

23.146. Показать, что если у канонического преобразования $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(q_j, p_j, t)$ производящая функция $F(t)$ не зависит от q_i, p_j $(i, j = \overline{1, n})$, то в качестве независимых переменных можно взять $q_i, \widetilde{p}_j$ $(i, j = \overline{1, n})$, т. е. преобразования этого вида допус-

кают $(q, \widetilde{p})$-описание. Найти вид производящей функции $\Phi(q_i, \widetilde{p}_i, t)$ таких преобразований в $(q, \widetilde{p})$-описание.

Преобразования, допускающие $(p, \widetilde{q})$-описание

23.147. Невырожденное преобразование $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(q_j, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ удовлетворяет условию $\det[\partial\widetilde{q}_i/\partial q_j]_{i,j=1}^n \neq 0$. Показать, что это преобразование будет каноническим в том и только в том случае, когда существуют производящая функция $R(p_i, \widetilde{q}_i, t)$ и валентность $c \neq 0$ такие, что

$$cq_i = -\frac{\partial R(p_i, \widetilde{q}_i, t)}{\partial p_i}, \quad \widetilde{p}_i = -\frac{\partial R(p_i, \widetilde{q}_i, t)}{\partial \widetilde{q}_i} \quad (i, j = \overline{1, n}),$$

где q_i и $\widetilde{p}_i$ в силу преобразования выражены через p_i, $\widetilde{q}_j$ и t. (Критерий каноничности преобразования в $(p, \widetilde{q})$-описании.) Показать, что при этом гамильтониан преобразуется в соответствии с равенством $\widetilde{H} = cH + \partial R/\partial t$.

23.148. Валентность и производящая функция канонического преобразования $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(q_j, p_j, t)$ $(i = \overline{1, n})$ в $(p, \widetilde{q})$-описании равны c_0 и $R_0(p_j, \widetilde{q}_j, t)$. Построить каноническое преобразование валентности c с производящей функцией $R(p_j, \widetilde{q}_j, t) = R_0(p_j, \widetilde{q}_j, t) + f_1(p_j, t) + f_2(\widetilde{q}_j, t)$. При решении использовать структурные формулы канонического преобразования в $(p, \widetilde{q})$-описании (см. задачу 23.147).

Используя критерий каноничности в $(p, \widetilde{q})$-описании, выяснить, какие из преобразований задач 23.149–23.136 являются каноническими. Для канонических преобразований найти валентность c и производящую функцию $R(p_j, \widetilde{q}_j, t)$ (см. задачу 23.147).

23.149. $\widetilde{q}_i = t^{-1}(\arcsin\sqrt{1/(2q_i) - p_i})$, $\widetilde{p}_i = 2q_i t$ $(i = \overline{1, n})$.

23.150. $\widetilde{q}_i = p_i + \exp(-\lambda q_i)$, $\widetilde{p}_i = -\lambda q_i$ $(i = \overline{1, n})$.

23.151. $\widetilde{q}_i = t^{-1}\arcsin\left(\dfrac{\lambda q_i}{t\sin(p_i t)}\right)$,

$$\widetilde{p}_i = -t\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda q_i}{t\sin(p_i t)}\right)^2}\cos(p_i t) \quad (i = \overline{1, n}).$$

23.152. $\widetilde{q}_i = \exp(-q_i/\cos p_i) - t$,

$$\widetilde{p}_i = -\sin p_i \exp(q_i/\cos p_i) \quad (i = \overline{1, n}).$$

23.153. $\widetilde{q}_i = a_i p_i + \left(\dfrac{3q_i}{\alpha a_i t}\right)^{1/(\alpha-1)}$, $\widetilde{p}_i = -\dfrac{3q_i}{a_i}$ $(i = \overline{1, n})$.

23.154. $\widetilde{q}_i = t^{-1}\ln(2q_i\cos^2 p_i)$, $\widetilde{p}_i = -q_i t\sin 2p_i$ $(i = \overline{1, n})$.

23.155. $\widetilde{q}_i = \dfrac{1}{a_i}\left[\ln\left(\dfrac{\lambda q_i}{b_i}\right) - b_i p - c_i t\right]$, $\widetilde{p}_i = -\lambda \dfrac{a_i}{b_i} q_i \quad (i = \overline{1, n})$.

23.156. $\widetilde{q}_i = \left(\dfrac{q_i}{\alpha t}\right)^{1/\beta} p_i^{(1-\alpha t)/\beta}$,

$$\widetilde{p}_i = \alpha^{1/\beta} t^{(1-\beta)/\beta} q_i^{(\beta-1)/\beta} p_i^{(\alpha t+\beta-1)/\beta} \quad (i = \overline{1, n}).$$

23.157. $\widetilde{q}_i = -t^{-1}\left(\ln \dfrac{q_i}{a_i^2} + \alpha_i p_i\right)$, $\widetilde{p}_i = \dfrac{q_i t}{\alpha_i} \quad (i = \overline{1, n})$.

23.158. $\widetilde{q}_i = \exp\left(-\dfrac{\lambda q_i}{\alpha_i p_i^{\alpha-1}}\right)$, $\widetilde{p}_i = -p_i^{\alpha_i} \exp\left(\dfrac{\lambda q_i}{\alpha_i p_i^{\alpha-1}}\right) \quad (i = \overline{1, n})$.

23.159. $\widetilde{q}_i = (\lambda^2 q_i^2 + \omega_i^2 p_i^2)^{1/2}$,

$$\widetilde{p}_i = -t\gamma(\lambda^2 q_i^2 + \omega_i^2 p_i^2)^{(\gamma-1)/2} - \sqrt{\frac{\lambda^2}{\omega_i^2} q_i^2 + p_i^2}\, \arccos \frac{\omega_i p_i}{\lambda^2 q_i^2 + \omega_i^2 p_i^2} \quad (i = \overline{1, n}).$$

23.160. $\widetilde{q}_i = q_i^{1/n} p_i^{1/n-1}$, $\widetilde{p}_i = -n q_i^{1-1/n} p_i^{2-1/n} \quad (i = \overline{1, n})$.

23.161. $\widetilde{q}_1 = \dfrac{1}{2p_1 p_2^2 - \gamma q_1} - p_1$, $\widetilde{p}_1 = \gamma q_1 - 2p_i p_2^2$,

$$\widetilde{q}_2 = \frac{1}{2p_1^2 p_2 - \gamma q_2} - p_2, \quad \widetilde{p}_2 = \gamma q_2 - 2p_1^2 p_2.$$

23.162. $\widetilde{q}_1 = \ln\left[p_2 - \gamma q_1 - \left(\dfrac{\gamma q_2}{\alpha^2}\right)^{1/(\alpha-1)}\right] - p_1$,

$$\widetilde{p}_1 = \left(\frac{\gamma q_2}{\alpha^2}\right)^{1/(\alpha-1)} - p_2 + \gamma q_1,$$

$$\widetilde{q}_2 = \left(\frac{\gamma q_2}{\alpha^2}\right)^{1/(\alpha-1)} - p_2, \quad \widetilde{p}_2 = -p_1 + \gamma q_2.$$

23.163. $\widetilde{q}_i = \sqrt{\dfrac{\gamma q_i}{p_i}}$,

$$\widetilde{p}_i = p_i^2 \sqrt{\frac{\gamma q_i}{p_i}} - \gamma \alpha_i \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sqrt{\frac{\gamma q_k}{p_k}}\right) \quad (i = \overline{1, n}).$$

В задачах 23.164–23.167 выписать формулы канонического преобразования валентности c, заданного своей производящей функцией R в $(p, \widetilde{q})$-описании (см. задачу 23.147).

23.164. $R = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(t) p_i^{\alpha} \widetilde{q}_i^{\beta}$.

23.165. $R = \sum\limits_{i=1}^{n} \operatorname{tg}(\widetilde{q}_i t + p_i)$.

23.166. $R = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t) p_i \widetilde{q}_j$.

23.167. $R = \sum\limits_{i=1}^{n} \sin(p_i t) \exp(\alpha_i \widetilde{q}_i t)$.

23.168. Показать, что канонические преобразования

а) $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(p_j, t)$;

б) $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(q_j, t)$;

в) $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(q_i, p_j, t)$;

г) $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(q_i, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$

допускают формулировку критерия каноничности преобразования в $(p, \widetilde{q})$-, $(q, \widetilde{q})$-, $(p, \widetilde{p})$-, $(q, \widetilde{p})$-описаниях соответственно.

В задачах 23.169–23.174 установить каноничность преобразования. Из $4n$ величин q_i, p_i, $\widetilde{q}_i$, $\widetilde{p}_i$, связанных формулами преобразования $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(q_i, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$, выбрать $2n$ независимых величин так, чтобы среди них не содержалось сопряженных пар (q_k, p_k) или $(\widetilde{q}_k, \widetilde{p}_k)$. В выбранных переменных выписать выражения для валентности и производящих функций.

23.169. $\widetilde{q}_1 = -\alpha q_1$, $\widetilde{q}_2 = \alpha p_2$, $\widetilde{q}_3 = p_3$, $\widetilde{q}_4 = q_4$,

$\widetilde{p}_1 = -p_1$, $\widetilde{p}_2 = -q_2$, $\widetilde{p}_3 = -\alpha q_3$, $\widetilde{q}_4 = \alpha p_4$.

23.170. $\widetilde{q}_i = -\alpha q_i p_i$, $\widetilde{p}_i = -\ln p_i$ $(i = \overline{1, n_1})$,

$\widetilde{q}_j = -\alpha q_j p_j$, $\widetilde{p}_j = \ln(\alpha q_j)$ $(j = \overline{n_1 + 1, n})$.

23.171. $\widetilde{q}_i = \ln(\gamma q_i^{\gamma-1} - 1)$, $\widetilde{p}_j = \dfrac{\gamma q_i^{\gamma-1} - 1}{\gamma - 1} \dfrac{p_i}{q_i^{\gamma-2}}$ $(i = \overline{1, n_1})$,

$\widetilde{q}_j = q_j + \exp(-\gamma p_j)$, $\widetilde{p}_j = \gamma p_j$ $(j = \overline{n_1 + 1, n})$.

24.172. $\widetilde{q}_1 = q_1^{1/\beta} p_1^{(1-\alpha)/\beta}$, $\widetilde{p}_1 = \beta q_1^{(\beta-1)/\beta} p_1^{(\alpha+\beta-1)/\beta}$,

$\widetilde{q}_2 = q_2^{(1-\alpha)/\gamma} p_2^{1/\gamma}$, $\widetilde{p}_2 = -\gamma q_2^{(\alpha+\beta-1)/\gamma} p_2^{(\gamma-1)/\gamma}$,

$\widetilde{q}_3 = -\sigma q_3^{(\sigma-1)/\sigma} p_3^{(\alpha+\sigma-1)/\sigma}$, $\widetilde{p}_3 = q_3^{1/\sigma} p_3^{(1-\alpha)/\sigma}$,

$\widetilde{q}_4 = \mu q_i^{(\alpha+\mu-1)/\mu} p_4^{(\mu-1)/\mu}$, $\widetilde{p}_4 = q_4^{(1-\alpha)/\mu} p_4^{1/\mu}$.

23.173. $\widetilde{q}_i = \arcsin \dfrac{p_i}{\cos q_i}$, $\widetilde{p}_i = -\sqrt{1 - \dfrac{p_i^2}{\cos^2 q_i}} \sin q_i$ $(i = \overline{1, n_1})$,

$$\widetilde{q}_i = -\sqrt{1 - \frac{q_j^2}{\sin^2 p_j}}\cos p_j,$$

$$\widetilde{p}_i = \arccos\frac{q_i}{\sin p_j} \quad (j = \overline{n_1+1, n}).$$

23.174. $\widetilde{q}_i = \exp(-q_i)$, $\widetilde{p}_i = -p_i \exp q_i$ $(i = \overline{1, n_1})$,
$\widetilde{q}_j = q_j \exp(-p_j)$, $\widetilde{p}_j = \exp p_j$, $(j = \overline{n_1+1, n})$.

23.175. Найти производящие функции $R(p_j, \widetilde{q}_j, t)$, $S(q_j, \widetilde{q}_j, t)$, $U(p_j, \widetilde{p}_j, t)$, $\Phi(q_j, \widetilde{p}_j, t)$ канонического преобразования, заданного уравнениями $q_i = q_i(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t)$, $p_i = p_i(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t)$ $(i = \overline{1, n})$, которые можно рассматривать как уравнения движения системы с гамильтонианом $H = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}(p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2)$ в $(p, \widetilde{q})$-, $(q, \widetilde{q})$-, $(p, \widetilde{p})$-, $(q, \widetilde{p})$-описаниях соответственно.

23.176. Показать, что тождественное преобразование $\widetilde{q}_i = q_i$, $\widetilde{p}_i = p_i$ $(i = \overline{1, n})$ является каноническим. Найти его валентность c и производящую функцию $F(\dot{q}_i, p_i)$.

23.177. Показать, что преобразование, обратное к каноническому преобразованию $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(q_i, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ является также каноническим преобразованием. Найти валентность c и производящую функцию $F(\widetilde{q}_i, \widetilde{p}_i, t)$ обратного преобразования, если валентность и производящая функция исходного преобразования равны λ и $\Phi(q_i, p_i, t)$.

23.178. Производящие функции и валентности двух канонических преобразований $q_i^* = q_i^*(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t)$, $p_i^* = p_i^*(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t)$ и $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(q_i, p_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ равны $F_1(\widetilde{q}_i, \widetilde{p}_i, t)$, $F_2(q_i, p_i, t)$, c_1 и c_2 соответственно. Показать, что суперпозиция этих преобразований является каноническим преобразованием. Найти его валентность c и производящую функцию $F(q_i, p_i, t)$.

23.179. Доказать, что совокупность канонических преобразований образует группу преобразований.

23.180. Суперпозиция двух преобразований $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q_j, p_j, t)$, $\widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(q_i, p_j, t)$ и $q_i^* = q_i^*(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t)$, $p_i^* = p_i^*(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$, из которых одно каноническое, является каноническим преобразованием. Будет ли и другое преобразование также каноническим?

23.181. Показать, что любое каноническое преобразование валентности c можно представить как суперпозицию некоторого унивалентного канонического преобразования и преобразования вида $\widetilde{q}_i = cq_i$, $\widetilde{p}_i = p_i$ $(i = \overline{1, n})$.

23.182. Показать, что валентность c преобразований, принадлежащих однопараметрической группе канонических преобразований, которая может содержать и неунивалентные преобразования, зависит

от группового параметра a следующим образом: $c = \exp(\alpha a)$, где α — постоянное число.

23.183. Показать, что совокупность линейных канонических преобразований образует подгруппу группы канонических преобразований.

23.184. Показать, что множество G_1 канонических преобразований, у которых производящая функция удовлетворяет условию $F(q_i, p_i, t) \equiv 0$, образует подгруппу G_1 группы канонических преобразований.

23.185. Показать, что множество G_0 унивалентных канонических преобразований с производящей функцией $F(q_i, p_i, t) \equiv 0$ образует подгруппу G_0 группы канонических преобразований.

23.186. Доказать, что подгруппа G_0 есть нормальный делитель в группе G_1 (G_1 и G_0 определены в задачах 23.184 и 23.185). Что представляют собой элементы факторгруппы G_1/G_0?

23.187. Показать, что множество G^* канонических преобразований, имеющих одну и ту же производящую функцию $F(q_i, p_i, t)$ и одинаковую валентность c, есть правый смежный класс по подгруппе G_0 (см. задачу 23.185), т. е. для любых преобразований $g_1, g_2 \in G^*$ найдется такое преобразование $g_0 \in G_0$, что выполняется равенство $g_1 = g_0 \cdot g_2$.

23.188. Доказать, что множество M всех унивалентных канонических преобразований есть нормальный делитель группы G канонических преобразований. Каковы элементы факторгруппы G/M?

23.189. Записать в явной форме суперпозицию канонических преобразований $\mathbf{r}^{-1}g\mathbf{r}$, где через $\mathbf{r}$ обозначено каноническое преобразование $\widetilde{q}_i = p_i$, $\widetilde{p}_i = q_i$ $(i = \overline{1, n})$, через $\mathbf{r}^{-1}$ — преобразование, обратное к преобразованию $\mathbf{r}$, а через g — каноническое преобразование $q_i^* = \widetilde{q}_i^3/3$, $p_i^* = \widetilde{p}_i/\widetilde{q}_i^2$ $(i = \overline{1, n})$. Найти также валентность c и производящую функцию F преобразования $\mathbf{r}^{-1}g\mathbf{r}$.

23.190. Являются ли подгруппы G_1 и G_0 из задач 23.184 и 23.185 нормальными делителями в группе всех канонических преобразований?

23.191. Найти такие условия, которым должна удовлетворять правая часть системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\widetilde{q}_i}{da} = Q_i(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t), \quad \frac{d\widetilde{p}_i}{da} = P_i(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t) \quad (i, j = \overline{1, n})$$

для того, чтобы решение этой системы с начальными данными $\widetilde{q}_i(0) = q_i$, $\widetilde{p}_i(0) = p_i$, определяло группу канонических преобразований (не обязательно унивалентных).

23.192. Функции $\widetilde{q}_i(q_j, p_j, t, a)$, $\widetilde{p}_i(q_j, p_j, t, a)$ $(i, j = \overline{1, n})$, зависящие от параметра a, удовлетворяют системе дифференциальных

уравнений

$$\frac{d\widetilde{q}_i}{da} = \frac{\partial K(\widetilde{q}_j, \quad \widetilde{p}_j, t)}{\partial \widetilde{p}_i}, \qquad \frac{d\widetilde{p}_i}{da} = -\frac{\partial K(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t)}{\partial \widetilde{q}_i},$$

определяемой некоторой функцией $K(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t)$. Показать, что если преобразование $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q_j, p_j, t, a)$, $\widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(q_j, p_j, t, a)$ является каноническим при некотором a, то оно каноническое при любом a.

23.193. Семейство преобразований пространства (q_j, p_j, t): $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q_j, p_j, t, a)$, $\widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(q_j, p_j, t, a)$, $\widetilde{t} = t$ является однопараметрической (с параметром a) группой преобразований, т. е. функции $\widetilde{q}_i(q_j, p_j, t, a)$, $\widetilde{p}_i(q_j, p_j, t, a)$ дают решение системы уравнений

$$\frac{d\widetilde{q}_i}{da} = Q_i(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t), \qquad \frac{d\widetilde{p}_i}{da} = P_i(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t),$$

причем при $a = 0$ имеют место равенства $\widetilde{q}_i = q_i$, $\widetilde{p}_i = p_i$. Показать, что при каждом значении параметра a преобразования являются унивалентными каноническими преобразованиями (гамильтонова группа) в том и только в том случае, когда существует такая функция $K(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t)$, что выполняются равенства $Q_i = \partial K/\partial \widetilde{p}_i$, $P_i = -\partial K/\partial \widetilde{q}_i$ $(i = \overline{1, n})$.

23.194. Группа преобразований $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q, t, \alpha)$, $\widetilde{t} = t$, и лагранжиан $L(q, \dot{q}, t)$ удовлетворяют условиям теоремы Нётер. Показать, что при каноническом преобразовании $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q, t, \alpha)$, $\widetilde{p} = (\partial\widetilde{q}/\partial q)^{\mathrm{T}} p$ уравнения Гамильтона системы не изменяются, т. е. уравнения Гамильтона инвариантны относительно предложенных канонических преобразований.

23.195. Задано преобразование $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i(q, p, t)$, $\widetilde{p}_i = \widetilde{p}_i(q, p, t)$, для которого существует число $c \neq 0$ и функция $F = F(q, p, t)$ такие, что выполнено тождество $\sum \widetilde{p}_i \delta\widetilde{q}_i - c\sum p_i \delta q_i = -\delta F(q, p, t)$. Доказать, что это преобразование будет невырожденным, т. е. что $\partial(\widetilde{q}, \widetilde{p})/\partial(q, p) \neq 0$.

23.196. Найти общий вид функций $\varphi_i = \varphi_i(q, p, t)$, при которых преобразование $\widetilde{q}_i = q_i$, $\widetilde{p}_i = \varphi_i(q, p, t)$ является каноническим.

23.197. Унивалентное каноническое преобразование с производящей функцией $\Phi(q, p, t)$ переводит систему с функцией Гамильтона $H(q, p, t)$ в систему с функцией $\widetilde{H} = 0$. Показать, что функция Φ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H.$$

§ 24. Уравнение Гамильтона–Якоби

24.1. Составить уравнение Гамильтона–Якоби, определить его полный интеграл и найти закон движения материальной точки массы m в однородном поле тяжести: а) в декартовых; б) в цилиндрических координатах.

24.2. Составить уравнение Гамильтона–Якоби, определить его полный интеграл и найти закон движения свободной (при отсутствии сил) точки массы m при следующих начальных условиях: $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$, $p_x(0) = mv_{0x}$, $p_y(0) = mv_{0y}$, $p_z(0) = mv_{0z}$.

24.3. Методом Якоби найти в квадратурах закон движения математического маятника массы m и длины l.

24.4. Составить уравнение Гамильтона–Якоби для одномерного линейного осциллятора (плоский маятник при малых отклонениях, колебания груза на пружине, LC-контур). Определить его полный интеграл и найти закон движения.

24.5. Лагранжиан двумерного осциллятора имеет вид

$$L = \frac{m_1\dot{q}_1^2 + m_2\dot{q}_2^2}{2} - \frac{c_1q_1^2 + c_2q_2^2}{2}.$$

Составить уравнение Гамильтона–Якоби осциллятора. Определить его полный интеграл и найти закон движения, если заданы начальные координаты и скорости.

24.6. Материальная точка массы m движется в поле центральной силы с потенциальной энергией $\Pi = -\gamma/r$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\gamma > 0$ (ньютоновское или кулоновское взаимодействие). Методом Якоби найти в квадратурах закон движения точки. Использовать сферические координаты.

24.7. Используя условия предыдущей задачи, найти уравнение траектории движения точки.

24.8. Частица массы m движется в потенциальном поле

$$\Pi = -\alpha/r + \beta z, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \alpha = \text{const}, \ \beta = \text{const}$$

(суперпозиция центрального кулоновского и однородного полей). Найти полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби частицы. (Эффект Штарка.)

24.9. Материальная точка массы m движется в центральном поле с потенциальной энергией $\Pi(r) = -\mu_1/r + \mu_2/r^2$. Составить уравнение Гамильтона–Якоби для этой точки, найти его полный интеграл и получить из него уравнение траектории точки.

24.10. Материальная точка массы m движется в потенциальном поле

$$\Pi(r, \theta, \varphi) = R(r) + \frac{\Theta(\theta)}{r^2} + \frac{\Phi(\varphi)}{r^2 \sin^2\theta},$$

где r, θ и φ — сферические координаты, а $R(r)$, $\Theta(\theta)$ и $\Phi(\varphi)$ — заданные функции. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби для точки.

24.11. Материальная точка массы m, движущаяся в плоскости, взаимодействует с двумя неподвижными центрами A и B, расстояние между которыми равно $2l$. Потенциальная энергия взаимодействия равна $\Pi = -(\gamma_1/r_1 + \gamma_2/r_2)$, где $r_1 = \sqrt{(x-l)^2 + y^2}$ и $r_2 = \sqrt{(x+l)^2 + y^2}$ — расстояния от притягивающих центров до точки, а γ_1 и γ_2 — постоянные. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби.

Указание. При решении использовать эллиптические координаты ξ, η, связанные с декартовыми координатами x, y равенствами $x = l \operatorname{ch}\xi \cos\eta$, $y = l \operatorname{sh}\xi \sin\eta$.

24.12. Точка массы m движется по гладкой сфере радиуса r в однородном поле тяжести (сферический маятник). Составить уравнение Гамильтона–Якоби, найти его полный интеграл и получить закон движения точки в квадратурах.

24.13. В наивысшей точке гладкой сферы радиуса r проделано малое отверстие, через которое пропущена гибкая нерастяжимая нить. К концам нити присоединены две материальные точки массы m_1 и m_2. Первая точка остается во время движения на поверхности сферы, а вторая движется по вертикали. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби для этой системы (см. рис. к задаче 12.51).

24.14. Две материальные точки массы m и M связаны гибкой нерастяжимой нитью. Точка массы m может двигаться по гладкому горизонтальному столу, а точка массы M находится на свисающем конце нити, которая пропущена через небольшое отверстие в столе. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби для этой системы, если точка массы M может двигаться только по вертикали.

24.15. Модель двухатомной молекулы может быть представлена в виде двух материальных точек одинаковой массы m, соединенных пружиной жесткости c (в ненапряженном состоянии длина пружины равна l_0). Найти закон движения молекулы при помощи уравнения Гамильтона–Якоби.

Указание. Использовать следующие обобщенные координаты: x_1, x_2, x_3 — координаты центра масс молекулы, θ, φ — углы широты

и долготы, определяющие положение оси молекулы в пространстве, и r — расстояние между атомами.

24.16. Сила взаимодействия двух точек массы m_1 и m_2 обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними (ньютоновское или кулоновское взаимодействие). (Задача двух тел.) Найти движение системы методом Якоби.

Указание. В качестве обобщенных координат взять координаты центра масс системы x, y, z, расстояние r между точками, а также углы широты и долготы θ и ψ, определяющие в пространстве положение прямой, соединяющей точки.

24.17. Составить уравнение Гамильтона–Якоби, определить его полный интеграл и найти закон движения однородного стержня массы m и длины $2l$ в однородном поле тяжести.

24.18. Однородный стержень массы m и длины l движется по гладкой вертикальной плоскости $O\xi\eta$. Плоскость вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси $O\eta$. Найти относительное движение стержня методом Якоби.

24.19. Симметричное твердое тело, имеющее неподвижную точку, движется по инерции (случай Эйлера). Методом Якоби найти движение тела в квадратурах.

24.20. Симметричный волчок массы m движется так, что его точка M, лежащая на оси симметрии, во все время движения касается гладкой горизонтальной плоскости. Расстояние от центра масс C до точки M равно l. Методом Якоби найти движение волчка в квадратурах.

24.21. Тяжелое однородное тело вращения массы m движется без трения, касаясь неподвижной горизонтальной плоскости. В сечении тела плоскостью, проходящей через ось симметрии, получается гладкая строго выпуклая кривая с непрерывно меняющейся кривизной. Расстояние OM от центра инерции тела до горизонтальной плоскости равно $z(\theta)$, где θ — угол между вертикалью и осью симметрии тела. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби, если главные центральные моменты инерции тела $A = B \neq C$.

24.22. Методом Якоби найти движение системы, лагранжиан которой в сферических координатах имеет вид

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 r^2 \sin^2\theta) - \dot{\psi}\lambda\cos\theta,$$

где λ — постоянная величина. (Заряженная частица в поле магнитного монополя.)

24.23. Составить уравнение Гамильтона–Якоби, определить его полный интеграл и найти закон движения системы, лагранжиан которой в сферических координатах имеет вид

$$L = \frac{m}{2}[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\psi}^2\sin^2\theta] - af_1(\theta)\dot{\psi} - bf_2(\theta) - \frac{\beta}{r^2}f_3(\theta) - f_4(r).$$

24.24. Многомерному возмущенному осциллятору соответствует гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t)p_ip_j + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(t)q_iq_j + \sum_{i=1}^{n} A_i(t)p_i + \sum_{i=1}^{n} C_i(t)q_i.$$

Найти уравнения, которым должны удовлетворять функции $\varphi_{ij}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, t)$, $\psi_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, t)$, $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, t)$ для того, чтобы функция

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{ij}q_iq_j + \sum_{i=1}^{n} \psi_iq_i + f$$

была полным интегралом уравнения Гамильтона–Якоби этой системы.

24.25. Гладкий прямолинейный стержень вращается с постоянной угловой скоростью ω в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси (которая проходит через некоторую точку стержня). Методом Якоби найти движение колечка, насаженного на стержень.

Указание. Воспользоваться результатом задачи 24.24.

24.26. Гладкая плоскость вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной горизонтальной оси, лежащей в этой плоскости. В плоскости движется однородный стержень массы m и длины l. Составить уравнение Гамильтона–Якоби для относительного движения стержня и найти его полный интеграл.

Указание. Воспользоваться результатом задачи 24.24.

24.27. Лагранжиан свободной (в отсутствие силового поля) релятивистской частицы имеет вид

$$L = -m_0c^2\sqrt{1 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)/c^2},$$

где c — скорость света. Составить уравнение Гамильтона–Якоби частицы, определить его полный интеграл и найти закон движения.

24.28. Гамильтониан релятивистской частицы в центральном поле имеет вид $H = c\sqrt{m_0^2c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} - \alpha/r$, где $\alpha > 0$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, c — скорость света. Составить уравнение Гамильтона–Якоби и найти его полный интеграл. По полному интегралу определить уравнение траектории частицы.

Указание. При решении использовать сферические координаты.

24.29. Лагранжиан релятивистской частицы имеет вид

$$L = -m_0c^2\sqrt{1-(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)/c^2} - k(x^2+y^2+z^2)/2.$$

Методом Якоби найти закон движения частицы в квадратурах.

Указание. При решении использовать сферические координаты.

24.30. Для системы с лагранжианом $L = \sqrt{\dot{x}^2+\alpha x^2+\beta}$ составить уравнение Гамильтона–Якоби, определить его полный интеграл и найти закон движения в квадратурах.

24.31. Гамильтониан системы имеет вид

$$H = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}[p_i^2+\omega_i^2q_i^2]+\varphi(t)}.$$

Составить уравнение Гамильтона–Якоби, найти полный интеграл и получить из него уравнения движения.

В задачах 24.32–24.35 система задается своим гамильтонианом $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$. Подвергнуть систему такому каноническому преобразованию, чтобы в новых переменных полный интеграл соответствующего уравнения Гамильтона–Якоби можно было найти методом разделения переменных. Найти этот полный интеграл и закон движения $q(t)$, $p(t)$ в исходных переменных.

24.32. $H = p_1p_2 + q_1q_2$.

24.33. $H = p_1q_2 + p_2q_1$.

24.34. $H = p^2 + q^2 + \operatorname{arctg}(p/q)$.

24.35. $H = \sum\limits_{i=1}^{n}(p_i^2+q_i^2)\operatorname{arctg}(p_i/q_i)$.

Составить уравнение Гамильтона–Якоби, найти его полный интеграл и найти движение $q(t)$, $p(t)$ в квадратурах для систем, заданных в задачах 24.36–24.47 гамильтонианами.

24.36. $H = (p_1q_2 + 2p_1p_2 + q_1^2)/2$.

24.37. $H = (p_1^2q_1^4 + p_2^2q_1^2 - 2q_1^2q_2)/2$.

24.38. $H = (p_1^2 + p_2^2/\cos^2 q_1)/2 + b\sin q_1$.

24.39. $H = (p_1^2 + q_1^2\cos q_1)q_2^2/2 + p_2^2\cos(q_2)/2$.

24.40. $H = p_1^2 + \sin q_1 + (p_2 + p_3\cos q_2)^2/q_2^2$.

24.41. $H = p_1^2 + \sin q_1 + (p_2 + p_3\cos q_2)^2/q_2^2$.

24.42. $H = p_1^2 + q_1^2 + \dfrac{p_2^2+p_3^2}{q_2^2+q_3^2}$.

24.43. $H = \dfrac{p_1^2}{q_1^2} + \dfrac{1}{q_1^2}\left(\dfrac{p_2^2}{q_2^2} + \dfrac{p_3^2}{q_2^2 q_3^2}\right).$

24.44. $H = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{p_1^2 + p_2^2}{q_1 - q_2} + \left(p_3^2 + \dfrac{1}{q_3^2}\right)(q_1 + q_2)\right].$

24.45. $H = \dfrac{p_1^2 + \sin^2 q_1 + p_2^2 + \cos^2 q_2}{p_1^2 - \sin^2 q_1 + p_2^2 - \cos^2 q_2}.$

24.46. $H = \dfrac{p_1^2 q_1^2 + p_2^2 q_2^2}{2p_1^2 q_1^2 + 3p_2^2 q_2^2}\sin t.$

24.47. $H = \dfrac{1}{2}\dfrac{\exp[2(p_1 + q_1)] + \exp[2(p_2 + q_2)]}{\exp(p_1 + q_1) + \exp(p_2 + q_2)} f(t).$

Составить уравнение Гамильтона–Якоби, определить его полный интеграл и найти движение $q(t)$, $p(t)$ для систем, заданных в задачах 24.48–24.59 своими лагранжианами.

24.48. $L = 3\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 - 2q_1^2 - 3q_2^2.$

24.49. $L = (\dot{q}_1^2 q_1^2 + \dot{q}_2^2 q_2^2 + \dot{q}_3^2)/2 - \cos q_1.$

24.50. $L = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\dot{q}_1^2}{q_2^2} + \dot{q}_2^2\right) + \dot{q}_3^2 - 2q_1^2 q_2^2.$

24.51. $L = \dfrac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dfrac{q_1^2}{q_2^2}\dot{q}_2^2\right).$

24.52. $L = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\dot{q}_1^2}{q_2^2} + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2\right) - \dfrac{1}{2}q_1^2 q_2^2.$

24.53. $L = \dfrac{1}{2}(\dot{q}_1^2 q_1^4 + \dot{q}_2^2 q_1^2) - \dfrac{q_2^2}{q_1^2}.$

24.54. $L = \dfrac{\dot{q}_1^2}{4q_2^2} + \dfrac{\dot{q}_2^2}{4q_2^2} - 3q_1^2 q_2^2 + f(q_2)$, где f — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

24.55. $L = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\dot{q}_1^2}{q_2^2} + \dfrac{\dot{q}_2^2}{\operatorname{tg} q_2}\right) - q_2^2 \cos q_1.$

24.56. $L = \dfrac{\dot{q}_1^2}{q_2^2} + \dfrac{1}{4}\dot{q}_2^2 \operatorname{ctg} q_2 + \dot{q}_3^2 - q_1^2 q_2^2 \sin q_1.$

24.57. $L = \dfrac{1}{2}\left(q_1^4 \dot{q}_1^2 + \dfrac{\sin q_2}{\cos q_1}\dot{q}_2^2\right) - q_2^2 \cos q_1.$

24.58. $L = \dfrac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 \operatorname{tg} q_1 + \dfrac{\cos q_2}{\cos q_1}\dot{q}_2^2\right).$

24.59. $L = (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \sin q_2)/2 - (q_1^2 + q_2^2)/2.$

24.60. Методом Якоби найти закон движения системы с гамильтонианом $H = \Phi(p_1, \ldots, p_n, t)$.

24.61. В результате канонического преобразования система с гамильтонианом $H(q_i, p_i, t)$ переходит в систему с гамильтонианом $H_1(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$. Составить уравнение Гамильтона–Якоби для преобразованной системы и найти закон движения.

24.62. Для системы с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t)p_ip_j + \sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i(t)$$

составить уравнение Гамильтона–Якоби, определить его полный интеграл и найти закон движения в квадратурах.

Указание. Полный интеграл искать в виде

$$S = -\sum_{i=1}^{n} q_i \int \varphi_i(t)\,dt + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i + \psi(t, \alpha_j).$$

24.63. На материальную точку массы m, движущуюся в однородном поле тяжести, в некоторый момент времени начинает действовать сила $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$. Найти движение точки, используя уравнение Гамильтона–Якоби.

24.64. Опираясь на решение задачи 24.62, найти полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби системы, для которой

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}p_ip_j + \sum_{i,j=1}^{n} q_i\varphi_i(t) + \sum_{i,j=1}^{n} p_if_i(t).$$

24.65. Для системы с гамильтонианом $H = \sum\limits_{i=1}^{n} \psi_i(t)(p_i^2 + q_i^2)$ составить уравнение Гамильтона–Якоби, определить его полный интеграл и найти закон движения в следующем виде: $q_i = q_i(t, \alpha_j, \beta_j)$, $p_i = p_i(t, \alpha_j, \beta_j)$ $(i, j = \overline{1, n})$.

24.66. Для системы с гамильтонианом

$$H = F[\varphi_1(q_1, p_1), \ldots, \varphi_n(q_n, p_n), t]$$

составить уравнение Гамильтона–Якоби и методом разделения переменных найти полный интеграл этого уравнения. Уравнения $\varphi_i(q_i, p_i) = y_i$ $(i = \overline{1, n})$ разрешимы относительно p_i, причем $p_i = \psi_i(q_i, y_i)$ $(i = \overline{1, n})$.

24.67. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби системы с гамильтонианом

$$H = F[f_n(f_{n-1}, q_n, p_n), t],$$

где $f_{n-1} = f_{n-1}\{\ldots, f_2[f_1(q_1, p_1)q_2, p_2]\ldots q_{n-1}, p_{n-1}\}$, а система уравнений $f_1(q_1, p_1) = \beta_1$, $f_k(\beta_{k-1}, q_k, p_k) = \beta_k$ $(k = \overline{2, n})$ разрешима относительно p_i $(i = \overline{1, n})$, причем $p_1 = \varphi_1(q_1, \beta_1)$, $p_k = \varphi_k(q_k, \beta_k, \beta_{k-1})$.

24.68. Кинетическая и потенциальная энергии системы Лиувилля имеют вид

$$T = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} B_k(q_k)\right)\sum_{i=1}^{n} A_i(q_i)\dot{q}_i^2, \quad \Pi = \sum_{k=1}^{n} C_k(q_k)\left(\sum_{k=1}^{n} B_k(q_k)\right)^{-1}.$$

Составить уравнение Гамильтона–Якоби и найти его полный интеграл в квадратурах.

24.69. Кинетическая и потенциальная энергии механической системы определяются формулами

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} A_k p_k^2, \quad \Pi = \sum_{k=1}^{n} A_k \Pi_k(q_k),$$

где p_k — импульсы, $A_k = \dfrac{1}{\Delta}\dfrac{\partial(\Delta)}{\partial\varphi_{ik}}$, $\Delta = \det\|\varphi_{ik}(q_k)\|$ $(i, k = \overline{1, n})$, причем $\Pi_k(q_k)$ и $\varphi_{ik}(q_k)$ — произвольные функции. Показать, что в этом случае переменные в уравнении Гамильтона–Якоби разделяются.

24.70. Лагранжиан некоторой натуральной системы имеет вид

$$L = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} F_k(q_k)\sum_{k=1}^{n} A_k(q_k)\dot{q}_k^2 + \sum_{k=1}^{n} B_k(q_k)\dot{q}_k + \\ + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} C_k(q_k)\left(\sum_{k=1}^{n} F_k(q_k)\right)^{-1}.$$

Найти полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби системы. (Н. Д. Моисеев.)

24.71. Какому уравнению удовлетворяет производящая функция $S(q_i, \widetilde{q}_i, t)$ свободного унивалентного канонического преобразования, которое переводит гамильтонову систему с функцией $H = 0$ в гамильтонову систему с функцией $\widetilde{H} = \widetilde{H}(\widetilde{q}_i, \widetilde{p}_i, t)$?

24.72. Функция $S_0(q_i, \alpha_i, t)$ является полным интегралом уравнения Гамильтона–Якоби системы с гамильтонианом $H_0(q_i, p_i, t)$. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби системы с гамильтонианом

$$H = H_0\left(q_i, p_i + \frac{\partial F(q_j, t)}{\partial q_i, t}\right) + \frac{\partial F(q_j, t)}{\partial t},$$

где $F(q_i, t)$ — заданная функция.

24.73. При составлении канонических уравнений функция Гамильтона может быть задана с точностью до произвольной аддитивной функции времени $\varphi(t)$, т. е. движения системы с гамильтонианами $H(q_i, p_i, t)$ и $H^*(q_i, p_i, t) = H(q_i, p_i, t) + \varphi(t)$ совпадают. Установить тождественность движения этих систем методом Якоби.

24.74. Совокупность производящих функций $\{S(q_i, \widetilde{q}_i, t)\}$ определяет множество всех свободных канонических преобразований валентности c, переводящих систему с гамильтонианом $H(q_i, p_i, t)$ в систему с гамильтонианом $\widehat{H} \equiv 0$. Определить множество канонических преобразований валентности $\lambda \neq c$, обладающих тем же свойством.

24.75. Гамильтониан системы имеет вид

$$H = F(p_1, \ldots, p_n, t) + \sum_{i=1}^{n} q_i \Phi_i(p_1, \ldots, p_n, t).$$

Каким условиям должны удовлетворять функции $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, t)$, $\varphi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, t)$ для того, чтобы функция

$$S = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, t) + \sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, t)$$

являлась полным интегралом уравнения Гамильтона–Якоби этой системы?

24.76. Уравнение Гамильтона–Якоби для системы с гамильтонианом $H(q_i, p_i, t)$ имеет своим частным решением функцию $S(q_i, t)$. Показать, что если начальные значения q_i^0, p_i^0 связаны соотношением $p_i^0 = \partial S(q_j^0, t^0)/\partial q_i^0$, то равенства $p_i = \partial S(q_j, t)/\partial q_i$ выполняются во все время движения, т. е. что поверхности $f_i(q_j, p_j, t) \equiv p_i - \partial S/\partial q_i = 0$ целиком заполнены траекториями системы.

24.77. Основываясь на задачах 23.84, 23.115, 23.127, 23.147, записать дифференциальные уравнения в частных производных, определяющие производящие функции $R(p_i, \alpha_i, t)$, $S(q_i, \alpha_i, t)$, $U(p_i, \alpha_i, t)$ и $\Phi(q_i, \alpha_i, t)$ унивалентного канонического преобразования, которое переводит систему с заданной функцией $H(q_i, p_i, t)$ в систему с $\widetilde{H} = 0$. (Уравнения Гамильтона–Якоби в $(p, \widetilde{q})$-, $(q, \widetilde{q})$-, $(p, \widetilde{p})$- и $(q, \widetilde{p})$-описаниях соответственно.)

24.78. В задачах 23.84, 23.115, 23.127, 23.147 рассмотрены структурные формулы канонического преобразования в $(p, \widetilde{q})$-, $(q, \widetilde{q})$-, $(p, \widetilde{p})$- и $(q, \widetilde{p})$-описаниях соответственно. Используя эти структурные формулы, написать соответствующие уравнения, определяющие производящие функции $R(p_i, \widetilde{q}_i, t)$, $S(q_i, \widetilde{q}_i, t)$, $U(p_i, \widetilde{p}_i, t)$ и $\Phi(q_i, \widetilde{p}_i, t)$

унивалентного канонического преобразования, которое переводит систему с заданной функцией $H(q_i, p_i, t)$ в систему с гамильтонианом $\widetilde{H} = \sum\limits_{i=1}^{n} (\widetilde{q}_i^2 + \widetilde{p}_i^2)$.

Составить уравнение Гамильтона–Якоби в $(p, \widetilde{p})$- описании (см. задачу 23.115), определить его полный интеграл и найти движение $q(t)$, $p(t)$ для систем, описанных в задачах 24.79–24.83.

24.79. Одномерный осциллятор, $H = (p^2/m + cq^2)/2$.

24.80. Свободная материальная точка в пространстве.

24.81. Материальная точка на равномерно вращающейся прямой, $H = (p^2 - m^2\omega^2 q^2)/(2m)$.

24.82. Система с гамильтонианом $H = G(p_1, \ldots, p_n)$.

24.83. Система с гамильтонианом $H = F(q_1, \ldots, q_n)$.

По заданному полному интегралу уравнения Гамильтона–Якоби некоторой системы в задачах 24.84–24.89 найти гамильтониан этой системы.

24.84. $$S = -\alpha_n \int f(t)\,dt + \int \sqrt{-\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \frac{1}{f_n(q_n) - \alpha_n \psi_n(q_n)}}\,dq_n + \\ + \sum_{i=1}^{n-1} \int \sqrt{\frac{\alpha_i}{f_i(q_i) - \alpha_n \psi_i(q_i)}}\,dq_i.$$

24.85. $$S = -\alpha_n \int f(t)\,dt + \int \sqrt{-\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i - f_n(q_n) + \alpha_n \psi_n(q_n)}\,dq_n + \\ + \sum_{i=1}^{n-1} \int \sqrt{\alpha_i - f_i(q_i) + \alpha_n \psi_i(q_i)}\,dq_i.$$

24.86. $$S = -\alpha_1 \int f(t)\,dt + \int \sqrt{\alpha_n f_n(q_n)}\,dq_n + \\ + \sum_{i=1}^{n-1} \int \sqrt{\alpha_i f_i(q_i) - \alpha_{i+1} \psi_i(q_i)}\,dq_i.$$

24.87. $$S = -\alpha_1 \int f(t)\,dt + \int \sqrt{\alpha_n f_n(q_n)}\,dq_n + \\ + \sum_{i=1}^{n-1} \int \sqrt{(\alpha_i - \alpha_{i+1}) f_i(q_i)}\,dq_i.$$

24.88. $$S = \alpha_1 \int f(t)\,dt + \int \sqrt{\alpha_n f_n(q_n)}\,dq_n + \sum_{i=1}^{n-1} \int \sqrt{\frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}} f_i(q_i)}\,dq_i.$$

24.89. $S = -\sum\limits_{i=1}^{n} q_i f_i(t) - \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i q_i - \sum\limits_{i=1}^{n} \int [f_i(t) + \alpha_i]^2\, dt.$

24.90. Функция $S(q_i, t, \alpha_i)$ является полным интегралом уравнения Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = 0.$$

Построить уравнение Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + H_1\left(\theta_i, \frac{\partial S_1}{\partial \theta_i}, t\right) = 0,$$

полным интегралом которого будет функция $S_1(\theta_i, \alpha_i, t) = S(f(\theta_i, t), \alpha_i, t)$, если преобразование $q_i = f_i(\theta_j, t)$ $(i, j = \overline{q, n})$ является взаимно обратимым.

24.91. Используя решение предыдущей задачи, показать, что вычисленная в задаче функция $H_1(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}_\theta, t)$ будет гамильтонианом системы, в которую переходит исходная система после канонического преобразования

$$q = f(\theta, t), \qquad p_q = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^{-1}\right)^{\mathrm{T}} p_\theta.$$

24.92. Гамильтониан $H(q_i, p_i, t)$ является однородной функцией первой степени относительно обобщенных импульсов p_i. Показать, что если $S(q_i, \alpha_i, t)$ — полный интеграл соответствующего уравнения Гамильтона–Якоби, то $\varphi(S(q_i, \alpha_i, t))$ тоже будет полным интегралом, где $\varphi(S)$ — произвольная функция, производная которой не обращается в нуль.

24.93. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби системы с гамильтонианом $\varphi(H(q_i, p_i))$, если функция $S = -f(\alpha_i)t + V(q_k, \alpha_i)$ $(i, k = \overline{1, n})$ является полным интегралом уравнения Гамильтона–Якоби системы с гамильтонианом $H(q_i, p_i)$.

24.94. Механическая система имеет лагранжиан $L(q_i, \dot{q}_i, t)$. Показать, что

$$\frac{d}{dt} S(q_i(t, \alpha_j, \beta_j), \alpha_i, t) = L(q_i(t, \alpha_j, \beta_j), \dot{q}_i(t, \alpha_j, \beta_j), t) \quad (i, j = \overline{1, n}),$$

где $S(q_i, \alpha_i, t)$ — полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби этой системы, а зависимости $q_i = q_i(t, \alpha_j, \beta_j)$ определяются из соотношений $\partial S / \partial \alpha_i = \beta_i$ $(i = \overline{1, n})$.

24.95. Гамильтониан канонической системы имеет вид $H = H_1(q_i, p_i) + H_2(q_i, p_i)$, причем известен полный интеграл $S(q_i, \alpha_i, t)$ уравнения Гамильтона–Якоби $\partial S / \partial t + H_1(q_i, \partial S / \partial q_i) = 0$. Исходная система подвергается унивалентному каноническому

преобразованию с производящей функцией $S(q_i, \widetilde{q}_i, t)$. Найти функцию Гамильтона и выписать канонические уравнения в новых переменных $\widetilde{q}_i$, $\widetilde{p}_i$.

Используя схему решения, описанную в задаче 24.95 (проводя каноническое преобразование, составляя канонические уравнения в новых переменных, интегрируя и переходя к старым переменным), найти в задачах 24.96–24.98 движение $q(t)$, $p(t)$ систем со следующими гамильтонианами.

24.96. $H = pqf(t) + p\psi(t)$.

24.97. $H = pqf(t) + q^n p\psi(t)$.

24.98. $H = pqf(t) + q^n\psi(t)$.

24.99. Задан полный интеграл $S(q_i, \alpha_i, t)$ уравнения Гамильтона–Якоби некоторой системы. Из соотношений $\partial S/\partial q_i$ $(i = \overline{1, n})$ определяются первые интегралы $f_i(q_j, p_j, t) = \alpha_i$ канонических уравнений, соответствующих этой системе. Показать, что эти n первых интегралов находятся в инволюции, т. е. что скобки Пуассона от них $(f_i, f_k) = 0$ $(i, k = \overline{1, n})$.

24.100. Канонические уравнения гамильтоновой системы с n степенями свободы имеют первые интегралы $f_i(q_j, p_j, t) = \alpha_i$ $(i, j = \overline{1, n})$. Эта система интегралов однозначно разрешима относительно обобщенных импульсов $p_i = F_i(q_j, \alpha_j, t)$. Показать, что равенства $F_i(q_j, \alpha_j, t) = \partial S(q_j, \alpha_j, t)/\partial q_i$, где $S = S(q_i, \alpha_i, t)$ — некоторая функция, имеют место в том и только в том случае, когда первые интегралы $f_1, f_2, \ldots, f_n$ находятся в инволюции друг с другом, т. е. когда $f_i(q_k, p_k, t), f_j(q_k, p_k, t) = 0$ $(i, j = \overline{1, n})$, где (f_i, f_j) — скобка Пуассона функций f_i и f_j.

24.101. Для канонических уравнений некоторой гамильтоновой системы заданы n первых интегралов $f_i(q_j, p_j, t) = \alpha_i$ $(i, j = \overline{1, n})$, находящихся в инволюции, $(f_i, f_j) = 0$, причем $\det \left[\dfrac{\partial f_i}{\partial p_k}\right]_{i,k=1}^{n} \neq 0$. Каким образом на основании этих данных получить гамильтониан системы?

Найти главную функцию Гамильтона W для систем, описанных в задачах 24.102–24.105.

24.102. Система материальных точек при отсутствии силового поля.

24.103. Материальная точка в однородном поле тяжести.

24.104. Одномерный линейный осциллятор.

24.105. Материальная точка, движущаяся по гладкой горизонтальной прямой, которая равномерно вращается вокруг вертикальной оси.

24.106. Непосредственным вычислением убедиться, что главные функции Гамильтона, полученные в задачах 24.102–24.105, являются полными интегралами соответствующих уравнений Гамильтона–Якоби.

Переменные действие–угол

Исследование консервативных систем, совершающих колебательные движения, часто проводят в специальным образом построенных канонических переменных $\{I_s, \varphi_s\}$ $(s = \overline{1, n})$, называемых переменными действие–угол. При этом, помимо всего прочего, предполагают, что переменные разделяются, т. е. что полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби можно искать в виде $S = S_0(t, \alpha_i) + \sum\limits_{k=1}^{n} S_k(q_k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. В этом случае переход к новым каноническим переменным, разумеется, не дает никаких преимуществ. Однако если рассматривается система, в которой учитываются малые возмущения, то переменные действие–угол невозмущенной системы являются адиабатическими инвариантами, т. е. остаются инвариантами при медленном изменении параметров системы. Кроме того, в этих переменных проще всего формулируются условия квантования в квантовой механике.

В случае, когда $\{q_i(t), p_i(t)\}$ являются периодическими функциями (либрация) или импульс p_i является периодической функцией координаты q_i (вращение), переменные действия вводятся равенствами

$$I_i = \frac{1}{2\pi}\oint p_i \delta q_i,$$

где интегрирование ведется по полному периоду изменения импульса p_i, определяемому соответствующей координатой q_i. Если полный интеграл системы известен, то $p_i = \partial S/\partial q_i$ и $I_i = \psi_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ $(i = \overline{1, n})$. Из этих соотношений находятся $\alpha_i = f_i(I_1, I_2, \ldots, I_n)$ и функция (укороченное действие) $\widetilde{S} = \sum\limits_{k=1}^{n} S_k[q_k, f_1(I_1), \ldots, f_n(I_n)]$ берется в качестве производящей функции свободного унивалентного канонического преобразования от переменных $\{q_i, p_i\}$ к переменным действие–угол $\{I_i, \varphi_i\}$:

$$p_i = \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial q_i}, \quad \varphi_i = -\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial I_i} \quad (i = \overline{1, n}).$$

24.107. Функция $S(q_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, E)$ (укороченное действие) является полным интегралом уравнения Гамильтона–Якоби $H(q_i, \partial S/\partial q_i) = E$ обобщенно-консервативной системы. От постоянных $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, E\}$ делается переход к постоянным $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ с помощью преобразования $\alpha_s = f_s(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $E = f_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ $(s = \overline{1, n-1})$. После подстановки этих соотношений в функцию S получается функция $\widetilde{S}(q_i, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Рассматривая $\widetilde{S}(q_i, \alpha_i)$ как производящую функцию свободного унивалентного канонического преобразования $\{\mathbf{q}, \mathbf{p}\} \to \{\lambda, \mu\}$, найти гамильтониан системы в новых переменных $\{\lambda, \mu\}$ и проинтегрировать соответствующие им канонические уравнения.

24.108. Показать, что если переменная q_i является циклической, то переменной действие будет $I_i = p_i$.

24.109. Найти переменные действие–угол гармонического осциллятора, для которого $H = p^2/(2m) + cq^2/2$.

24.110. Найти выражение гамильтониана кеплеровой задачи в переменных действие–угол для случая финитного движения точки.

24.111. Функция Лагранжа $L(q, \dot{q}, t)$ является строго выпуклой функцией обобщенных скоростей. Функция $S(q, t)$ является решением уравнения Гамильтона–Якоби. Показать, что вектор-функция $q(t)$ будет движением системы, если при всех t выполняется соотношение $dS(q(t), t)/dt = L(q(t), \dot{q}(t), t)$.

24.112. Показать, что главная функция Гамильтона $W(t, q, t_0, q_0)$ выражается через полный интеграл $S(t, q, \alpha)$ соответствующего уравнения Гамильтона–Якоби следующим образом: $W(t, q, t_0, q_0) = S(t_0, q_0, \alpha) - S(t, q, \alpha)$, где параметры α могут быть исключены при помощи соотношения $\partial S(t_0, q_0, \alpha)/\partial\alpha_i = \partial S(t, q, \alpha)/\partial\alpha_i$.

24.113. Доказать, что главная функция Гамильтона $W(t, q, t_0, q_0)$ существует при всех $q \neq q_0$ и $t \neq t_0$ в том и только том случае, если краевая задача для уравнений движения $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, $q_i(t_0) = q_{i0}$, $q_i(t_1) = q_{i1}$ имеет единственное решение при любых q_0, q_1 и $t_1 \neq t_0$.

§ 25. Методы оптимального управления в задачах механики

Задачи настоящего параграфа составлены в расчете на читателя, владеющего аппаратом оптимального управления, в частности, процедурой и идеями принципа максимума Л. С. Понтрягина и методом динамического программирования Р. Беллмана. Помимо решения задач механики методами оптимального управления, цель раздела состоит и в том, чтобы продемонстрировать роль методов аналитической механики в теории оптимального управления.

25.1. Показать, что ограниченным управлением, т. е. моментом вида $\mathbf{M} = u(t)\mathbf{K}$, где $\mathbf{K}$ — кинетический момент, а $|u(t)| \leqslant a$, нельзя за конечное время остановить твердое тело ($A \neq B \neq C$), которое вращается по инерции вокруг неподвижного центра масс.

25.2. Твердое тело вращается по инерции с угловой скоростью ω_0 вокруг неподвижной оси; момент инерции тела относительно оси вращения равен J. В некоторый момент включается двигатель, развивающий относительно оси вращения управляющий момент $M(t)$ ($|M(t)| \leqslant M_0$). Указать на плоскости ωt область, в которой могут находиться значения угловой скорости при всевозможных законах изменения управляющего момента (область достижимости).

25.3. На твердое тело, которое вращается вокруг неподвижной вертикальной оси Oz, действует внешний момент $M_z(t) = m(t)$ ($|m(t)| \leqslant m_0$). Найти закон изменения $m(t)$, при котором тело переходит из начального состояния (φ_0, ω_0) в конечное состояние $(0, 0)$ за минимальное время.

25.4. Материальная точка массы m движется под действием силы $F(t)$ ($|F(t)| \leqslant F_0$) по гладкой горизонтальной направляющей Ox. Найти закон изменения силы $F(t)$, при котором точка переходит из состояния $(x_0, \dot{x}_0)$ в состояние $(0, 0)$ за минимальное время.

25.5. Тело массы m отпущено без начальной скорости на высоте H над поверхностью Земли. На тело действует управляющая сила $F(t)$ ($|F(t)| \leqslant F_0$, $F_0 > mg$). Пренебрегая изменением силы тяжести с высотой, найти закон изменения силы $F = \widetilde{F}(t)$, при котором тело за минимальное время достигнет поверхности Земли с нулевой конечной скоростью.

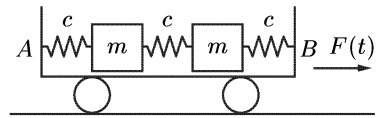
25.6. Тело массы m, соединенное с неподвижной стенкой пружиной жесткости c, может скользить по гладкой горизонтальной направляющей Ox. На тело действует сила $F(t)$ ($|F(t)| \leqslant F_0$). В начальный момент времени тело неподвижно и находится на расстоянии $6F_0/c$ от положения равновесия. Найти закон изменения силы $\widetilde{F}(t)$, при котором тело за минимальное время вернется в положение равновесия с нулевой скоростью.

25.7. Груз массы m, подвешенный на пружине жесткости c, может совершать движение по вертикали в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости груза (коэффициент сопротивления равен β). На груз действует ограниченная внешняя сила $F(t)$ ($|F(t)| \leqslant F_0$). Какими должны быть начальное положение и начальная скорость груза, чтобы при воздействии постоянной силы $F = \text{const}$ груз пришел в положение равновесия с нулевой скоростью за минимальное время по сравнению с другими допустимыми законами изменения силы $F(t)$? Рассмотреть следующие случаи: а) $\beta^2 - 4mc < 0$; б) $\beta^2 - 4mc > 0$; в) $\beta^2 - 4mc = 0$.

25.8. Максимальная тяга, которую может развивать двигатель турбопоезда массы m, равна P. Считая силу сопротивления R постоянной, найти наименьшее время прохождения поездом перегона протяженностью l между двумя остановками и максимальную скорость на перегоне. Рассмотреть следующие случаи: а) при работе двигателя сила тяги направлена только в сторону движения; б) сила тяги двигателя может быть направлена как в сторону движения, так и против него (реверс тяги).

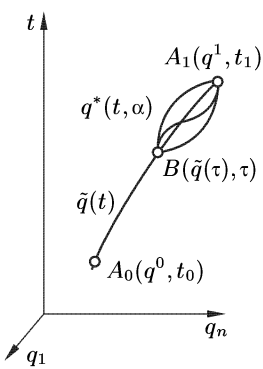
25.9. Два одинаковых груза m (см. рисунок), связанные между собой и со стенками одинаковыми пружинами жесткости c, могут

двигаться без трения по горизонтальной направляющей AB, закрепленной на тележке; масса тележки равна M; массой колес можно пренебречь. В начальный момент грузы смещены на одинаковое расстояние a из положения относительного равновесия и обладают одной и той же относительной скоростью u. По какому закону должна меняться приложенная к тележке сила $F(t)$ ($|F(t)| \leqslant F_0$), чтобы грузы вернулись за минимальное время в положение относительного равновесия с нулевыми относительными скоростями?



К задаче 25.9

25.10. Среди всевозможных путей, соединяющих точки $A_0\{\mathbf{q}^0, t_0\}$ и $A_1\{\mathbf{q}^1, t_1\}$ (см. рисунок) расширенного $(n+1)$-мерного координатного пространства, на пути $\widetilde{\mathbf{q}}(t)$ действие по Гамильтону $W = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\,dt$ имеет наименьшее значение (см. рисунок). На пути $\widetilde{\mathbf{q}}(t)$ произвольно выбирается точка $B\{\widetilde{\mathbf{q}}(\tau), \tau\}$ $(t_0 < \tau < t_1)$ и рассматривается пучок всевозможных кривых $\mathbf{q}^*(t, \alpha)$, соединяющих точки B и A_1. Доказать, что действие по Гамильтону $W = \int\limits_{\tau}^{t_1} L(\mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}^*, t)\,dt$ имеет наименьшее значение на кривой $\widetilde{\mathbf{q}}(t)$ $(\tau \leqslant t \leqslant t_1)$. (Принцип оптимальности Р. Беллмана.)



К задаче 25.10

25.11. Действие по Гамильтону $W = \int\limits_{t_0}^{T} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\,dt$ на пучке кривых, соединяющих точки $A_0\{\mathbf{q}^0, t^0\}$ и $A_1\{\mathbf{q}^1, T\}$ расширенного $(n+1)$-мерного координатного пространства, при фиксированных q_i^1 и T является функцией от q_s^0 и t_0, т. е. $W = \varphi(\mathbf{q}^0, t_0)$. Используя принцип оптимальности (см. задачу 25.10 и рисунок к ней), показать, что функция $\varphi(\mathbf{q}^0, t_0)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(\mathbf{q}^0, t_0) = \min_{\substack{y(t) \\ y(t_0)=q^0 \\ y(t_0+\Delta)=\widetilde{q}(t_0+\Delta)}} \left\{ \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta} L(\mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t), t)\,dt + \varphi(\widetilde{\mathbf{q}}(t_0+\Delta), t_0) \right\},$$

где $\widetilde{\mathbf{q}}(t)$ — прямой путь, соединяющий точки A_0 и A_1, а минимизация проводится по всем функциям $\mathbf{y}(t)$, удовлетворяющим на $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \Delta$ условиям $y_i(t_0) = q_i^0$, $y_i(t_0+\Delta) = \widetilde{q}_i(t_0+\Delta)$.

25.12. Предполагая, что функция $\varphi(\mathbf{q}^0, t_0)$, введенная в предыдущей задаче, непрерывно дифференцируема, получить для нее уравнение в частных производных, используя предельный переход при $\Delta \to 0$ в основном соотношении задачи.

25.13. Если функция $\varphi(\mathbf{q}^0, t_0)$, введенная в задаче 25.11, является достаточно гладкой, то она удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_0} + \min_{\{v_i\}} \left\{ L(\mathbf{q}^0, v_i, t_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i^0} v_i \right\} = 0.$$

Показать, что после выполнения операции минимизации это уравнение относительно функции φ переходит в уравнение Гамильтона–Якоби системы с лагранжианом $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$.

25.14. Как следует из принципа Гамильтона, на прямом пути, соединяющем точки $A(\mathbf{q}^0, t_0)$ и $B(\mathbf{q}^1, t_1)$ расширенного $(n+1)$-мерного координатного пространства, действие по Гамильтону $W = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\, dt$ достигает стационарного значения (по сравнению со значениями на окольных путях). Показать, что любой прямой путь можно получить при помощи принципа максимума Л. С. Понтрягина из решения следующей задачи оптимального управления.

Задан управляемый объект $dx_i/dt = u_i(t)$ $(i = \overline{1, n})$. Найти управление $\widetilde{\mathbf{u}}(t)$, переводящее объект из начального состояния $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{q}^0$ в конечное $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{q}^1$ и доставляющее наименьшее значение критерию качества

$$I[\mathbf{u}(t)] = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)\, dt.$$

25.15. Управляемый объект описывается системой уравнений $dx_i/dt = u_i$ $(i = \overline{1, n})$, причем качество управления характеризуется функционалом

$$I = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)\, dt.$$

Управление $\widetilde{\mathbf{u}}(t)$, переводящее объект из состояния $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ в состояние $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^1$ и доставляющее наименьшее значение критерию

качества I, в соответствии с утверждением принципа максимума определяется из соотношения

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), t) = \max_{\{u\}} H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \widetilde{\mathbf{u}}, t),$$

где $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, t) = -L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \sum\limits_{i=1}^{n} p_i u_i$. Показать, что функция $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t)$ совпадает с гамильтонианом механической системы, имеющей лагранжиан $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$.

25.16. Показать, что уравнение Беллмана, составленное для задачи оптимального управления объектом, который описан в предыдущей задаче, в предположении достаточной гладкости функции Беллмана совпадает с уравнением Гамильтона–Якоби механической системы, имеющей лагранжиан $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$.

§ 26. Уравнения механики неголономных систем

26.1. На систему из N материальных точек наложены идеальные связи [1], из которых g конечных (геометрических и дифференциальных интегрируемых) и d дифференциальных (неинтегрируемых). Выбраны такие независимые обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$ $(n = 3N - g)$, что при подстановке зависимостей $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \ldots \ldots, q_n, t)$ $(i = \overline{1, m})$ в уравнения конечных связей они тождественно удовлетворяются. Показать, что общее уравнение динамики $I = \sum\limits_{i=1}^{N} (m_i \mathbf{w}_i - \mathbf{F}_i)\delta\mathbf{r}_i = 0$, $\delta\mathbf{r}_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k$, выражающее идеальность связей $\sum\limits_{i=1}^{N} R_i \delta\mathbf{r}_i = 0$, можно представить в виде

$$I = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right) \delta q_k = 0, \tag{1}$$

где $T = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}_i = \dfrac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} + \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k$, $Q_k = \sum\limits_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \dfrac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}$. Можно ли при условии $d > 0$ из выражения (1) получить уравнения движения в форме уравнений Лагранжа 2-го рода?

---

[1] Здесь, как и обычно, предполагается, что при наличии в системе неидеальных связей их реакции $\mathbf{R}_i^*$ включены в числа активных сил, причем из экспериментальных законов известны зависимости $R_\nu^* = R_\nu^*(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, t)$, как это имеет место, например, при наличии сухого трения.

26.2. Используя условия предыдущей задачи показать, что в координатах q_k $(k=\overline{1,n})$ при наличии линейных дифференциальных связей $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{sk}(q,t)q_k + a_{0s}(q,t) = 0$ $(s=\overline{1,d})$ общее уравнение динамики системы выражает следующее свойство: равенство (относительно δq_k)

$$\sum_{k=1}^{n} \delta q_k \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right) = 0, \quad n = 3N - g$$

является следствием системы линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_{sk}(q,k)\delta q_k = 0 \quad (s=\overline{1,d}).$$

Исходя из этого утверждения [1], получить уравнения движения системы в форме Лагранжа 1-го рода.

26.3. Используя решение задачи 26.1, составить уравнения Лагранжа второго рода, считая, что на систему наложены только связи $f_j(q,t)=0$, $j=\overline{1,m}$.

26.4. Выяснить смысл сумм $\sum a_{sk}\lambda_k$ в уравнениях движения системы материальных точек в форме уравнений Лагранжа 1-го рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k + \sum_{s=1}^{d} \lambda_s a_{sk}, \quad k=\overline{1,n},$$

где равенства $\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_{q\nu}(q,t)\dot{q}_\nu + a_{0s}(q,t) = 0$ $(s=\overline{1,d})$ задают уравнения неголономных связей.

---

[1] Говорят, что уравнение $(a,x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k = 0$ является следствием системы уравнений $(b^s,x) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{sk}x_k = 0$ $(s=\overline{1,m})$, если для каждого решения x_k^* этой системы выполняется условие $(a,x^*) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k^* = 0$. В линейной алгебре известно следующее утверждение: равенство $(a,x)=0$ является следствием системы уравнений $(b^s,x)=0$ $(s=\overline{1,m})$ в том и только том случае, если существуют такие вещественные числа λ_s, что $a = \sum\limits_{s=1}^{m} \lambda_s b^s$. Это утверждение называется теоремой Минковского–Фаркаша. Эта теорема справедлива не только в случае линейных уравнений, но и в случае линейных неравенств. Именно: если неравенство $(a,x) \geqslant 0$ является следствием системы неравенств $(b^s,x) \geqslant 0$ $(s=\overline{1,m})$, то существуют такие неотрицательные $\lambda_s \geqslant 0$, что $a = \sum\limits_{s=1}^{m} \lambda_s b^s$.

26.5. Доказать тождество $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial T}{\partial q_i} = \dfrac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i}$, $i = \overline{1, n}$, где $T = \frac{1}{2}\sum\limits_k m_k v_k^2$ — кинетическая энергия системы, $S = \frac{1}{2}\sum\limits_k m_k w_k^2$ — энергия ускорений системы, $\mathbf{v}_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}\dot{q}_i$ — скорость k-й точки, $\mathbf{w}_k = \sum \dfrac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}\ddot{q}_i + \sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q_i\, \partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j$ — ее ускорение ($\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(q)$).

26.6. Показать, что уравнения динамики голомной системы можно записать в виде уравнений Гиббса–Аппеля $\partial S/\partial \ddot{q}_i = Q_i$ ($i = \overline{1, n}$), где $S = \frac{1}{2}\sum\limits_k m_k w_k^2$ — энергия ускорений систем, $\mathbf{w}_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}\ddot{q}_i + \sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q_i\, \partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j$ — ускорение k-й точки, а Q_i — обобщенные силы.

26.7. Кинетическая энергия натуральной системы представляет собой однородную квадратичную форму импульсов. Используя принцип Даламбера, составить полуканонические уравнения Гамильтона.

26.8. Проекция вектора скорости $\mathbf{v} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dot{q}_i \mathbf{e}_i$ изображающей точки в n-мерном координатном пространстве стационарной системы на направление вектора $\mathbf{L} = \sum\limits_{j=1}^{n} L_j \mathbf{e}_j$ равна нулю, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{L} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} L_j \dot{q}_i = \sum\limits_{i=1}^{n} l_i \dot{q}_i$. Считая эту связь идеальной, найти обобщенную силу, соответствующую реакции этой связи, и составить уравнения Лагранжа 2-го рода в зависимых координатах.

26.9. При движении стационарной системы имеет место условие $\dot{q}_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{n} l_i \dot{q}_i$. Составить уравнения движения системы в форме уравнений Гиббса–Аппеля.

26.10. Угловые скорости твердого тела, которое вращается вокруг неподвижной точки, подчинены условию $\sum\limits_{i=1}^{3} a_i \omega_i = 0$. Считая эту связь идеальной, составить уравнения движения с неопределенным множителем.

26.11. Движение главных осей центрального тензора инерции твердого тела задается тремя компонентами скорости центра масс тела и тремя проекциями угловой скорости тела на оси тензора инерции. Из принципа Даламбера получить теорему об изменении импульса и момента импульса.

26.12. На систему материальных точек наложены связи $\sum\limits_{i=1}^{N} l_{ki}\mathbf{v}_k = 0$. Введение независимых скоростей $\dot{q}_i$ по формулам $\mathbf{v}_i = \sum\limits_{s=1}^{n} \mathbf{a}_{is}\dot{q}_s$ обращает уравнения связей в тождества $\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{s=1}^{n} \mathbf{l}_{ki}\mathbf{a}_{is}\dot{q}_s = 0$, если $\sum\limits_{i=1}^{N} \mathbf{l}_{ki}\mathbf{a}_{is} \equiv 0$. Составить уравнения динамики системы в форме уравнений Маджи.

26.13. Угловые скорости $\boldsymbol{\omega}_i$ $(i = \overline{1, N})$ системы из N твердых тел, вращающихся вокруг неподвижных точек, подчинены условиям $\sum\limits_{i=1}^{N} \mathbf{l}_{ki}\boldsymbol{\omega}_i = 0$. Независимые скорости вводятся по формулам $\boldsymbol{\omega}_i = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{is}\dot{q}_s$ так, что $\sum\limits_{i=1}^{N} \mathbf{l}_{ki}\mathbf{a}_{is} = 0$. Составить уравнения динамики системы в форме уравнений Маджи.

26.14. Исключая неопределенные множители в уравнениях Лагранжа, составить уравнения динамики материальной точки массы m, движущейся по инерции по поверхности:

а) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; б) $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$;
в) $x^2 \pm y^2 = az$; г) $x^2 + y^2 = a^2$.

26.15. Исключая неопределенные множители в уравнениях Лагранжа, составить уравнения динамики материальной точки массы m, движущейся по инерции по кривой, заданной плоскостью $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1)$ и поверхностью 2-го порядка:

а) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; б) $x^2 + y^2 = 1$.

26.16. Неоднородный шар массы m радиуса R катится по шероховатой горизонтальной плоскости без проскальзывания. Составить уравнения движения с неопределенными множителями, полагая, что центр масс шара совпадает е его геометрическим центром.

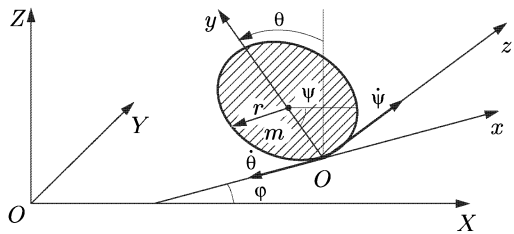
26.17. Неоднородное твердое тело сферической формы радиуса r катится по горизонтальной плоскости без проскальзывания. Центр инерции тела совпадает с его геометрическим центром. Определяя ориентацию главных осей тела параметрами Эйлера–Родрига–Гамильтона, составить уравнения динамики.

26.18. Конек массы m свободно движется по горизонтальной плоскости так, что скорость v его центра масс направлена только вдоль конька. Найти движение конька и определить горизонтальную реакцию N плоскости.

26.19. Диск массы m катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости так, что его плоскость все время остается вертикальной. Найти движение диска. Определить горизонтальную компоненту силы реакции N.

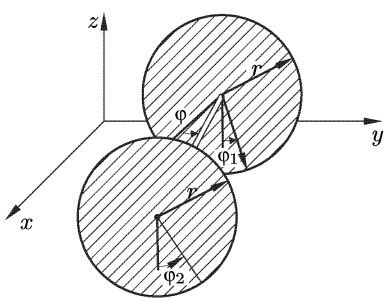
26.20. Однородный шар катится по горизонтальной плоскости без проскальзывания. Составить уравнения динамики в форме уравнений Маджи.

26.21. Диск радиуса r (см. рисунок) катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости. Задавая положение диска углами φ, θ, ψ, составить уравнения, определяющие закон их изменения.

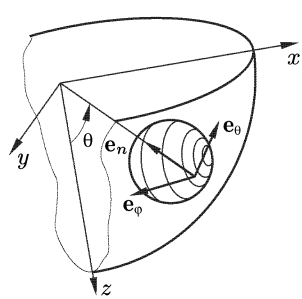


К задаче 26.21

26.22. Два тонких соединенных осью диска массы m и радиуса r каждый (см. рисунок) катятся по горизонтальной плоскости без проскальзывания. Масса оси, соединяющей диски, равна M, ее длина l. Полагая, что каждое колесо свободно (независимо одно от другого) вращается вокруг оси, составить уравнения динамики и найти движение системы.



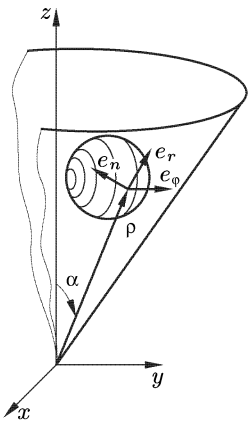
К задаче 26.22



К задаче 26.23

26.23. Тяжелый однородный шар массы m и радиуса r (см. рисунок) катится без проскальзывания по внутренней поверхности сферы радиуса R. Составить уравнения динамики и найти их первые интегралы.

26.24. Тяжелый однородный шар массы m и радиуса r (см. рисунок) катится без проскальзывания по поверхности кругового конуса с углом 2α при вершине. Ось конуса вертикальна. Составить уравнения динамики и найти их первые интегралы.



К задаче 26.24

26.25. Два одинаковых симметричных твердых тела ($A = B \neq C$), вращающихся вокруг своих неподвижных центров масс, соединены гибким невесомым тросом не допускающим скручивания так, что проекции угловых скоростей тел на их оси симметрии равны. Найти движение системы.

26.26. Показать, что для энергии ускорений системы материальных точек $S = \frac{1}{2}\sum m_i w_i^2$ имеет место аналог теоремы Кенига: $S = \frac{m}{2}w_c^2 + \frac{1}{2}\sum m_i w_{ir}^2$, где w_{ir} — ускорение точек относительно системы координат, движущейся поступательно с началом в центре масс системы.

§ 27. Устойчивость движения

27.1. Составить уравнения возмущенного движения для перманентных вращений твердого тела с неподвижной точкой в случае Эйлера, вводя отклонения от возмущенного движения $x = p - p_0$, $y = q$, $z = r$.

27.2. Показать, что для асимптотической устойчивости нулевого решения $x = 0$ скалярного уравнения $\dot{x} = X(x)$, $X(0) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности $|x| \leqslant \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) точки $x = 0$ были выполнены два неравенства: $X(x) < 0$ при $x > 0$; $X(x) > 0$ при $x < 0$.

В задачах 27.3–27.14 выяснить, в какой области функции $v(t, x)$ являются: знакопеременными, знакопостоянными, знакоопределенными. Какие из этих функций допускают бесконечно малый высший и бесконечно большой низший пределы?

27.3. $v(t, x) = e^{-t}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)$.

27.4. $v(t, x) = -\sin^2(t(x_1 + x_2 + \ldots + x_n))$.

27.5. $v(t, x) = tx_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$.

27.6. $v(t, x) = x_1^2 - 2tx_1x_2 + t^2x_2^2$.

27.7. $v(t, x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\left(1 - \alpha\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)$.

27.8. $v(t, x) = t \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$.

27.9. $v(t, x) = x_1^2 - 2x_1x_2\cos t + x_2^2$.

27.10. $v(t, x) = (1+\sin t)\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\right)$.

27.11. $v(x) = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 + x_1^2$.

27.12. $v(x) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i^2\}$.

27.13. $v(x) = \max\limits_{1\leqslant s\leqslant m}\{(l^s, x)^2\}$, $(l, x) = \sum\limits_{i=1}^{n} l_i x_i$,

$\operatorname{rank}\|l^1, l^2, \ldots, l^m\| = n \leqslant m$.

27.14. $v(x) = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant m}\{x^{\mathrm{T}} L_k x\}$, $L_k^{\mathrm{T}} = L_k$.

27.15. Функция Ляпунова $v(x, t)$ и ее производная $\dot v(x, t)$ в силу системы уравнений в отклонениях $\dot x_i = X_i(x, t)$, $X(0, t) \equiv 0$, удовлетворяют оценкам: $a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant v(x, t) \leqslant b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$, $\dot v(x, t) \leqslant -c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$, $\left|\dfrac{\partial v}{\partial x}\right| \leqslant r\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Доказать, что нулевое решение $x = 0$ уравнений в отклонениях экспоненциально устойчиво, т. е. для любых решений уравнений в отклонениях с начальными условиями $x_0 \in H$, $H = \{\sum x_{i0}^2 \leqslant \rho\}$ выполняется неравенство $\sum x_i^2(t) \leqslant \beta \sum x_{i0}^2 \exp[\alpha(t_0 - t)]$, где числа α и β не зависят от выбора $x_0 \in H$.

27.16. Доказать, что тривиальное решение $x = 0$ системы $\dot x = P(t)x$, $P(t) = [P_{ij}]_{i,j=1}^{n}$, асимптотически устойчиво, если матрица $P(t)$ имеет предел при $t \to \infty$, т. е. $\lim\limits_{t\to\infty} P(t) = P_0$, где P_0 — гурвицева матрица.

27.17. Указать границы области, в которой может лежать поверхность уровня $v = c$ функции $v(x, t)$, положительно определенной в $G\{\sum x_i^2 \leqslant H\}$ и допускающей бесконечно малый высший предел, при малых $c > 0$.

27.18. Показать, что поверхности уровня $v(x) = c$ функции $v(x)$, положительно определенной в области $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant H$, образуют семейство замкнутых поверхностей, вложенных одна в другую и охватывающих начало координат, если значения параметра c не превосходят величины $c^* = \min\limits_{\sum x_i^2 = H} v(x)$.

27.19. Для уравнений возмущенного движения $\dot{x} = X(x)$, $X(0) = 0$, существует функция Ляпунова

$$v = \sqrt{x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} + \ldots + \frac{x_n^2}{n^2}} \left(1 - 2\sqrt{x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} + \ldots + \frac{x_n^2}{n^2}}\right),$$

полная производная которой $\dot{v}(x)$ в силу этих уравнений отрицательно определена в области $v > 0$. Найти область притяжения начала координат.

27.20. Дифференциальные уравнения в отклонениях $\dot{x}_i = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ $(i = \overline{1, n})$ заданы во всем пространстве R^n. Асимптотическая устойчивость устанавливается с помощью функции Ляпунова $v = (1 + \sin^2 t)\left(x_1^2 + x_2^2/4 + \ldots + x_n^2/n^2\right)$, полная производная $\dot{v}(x, t)$ которой в силу уравнений в отклонениях отрицательна во всем пространстве. Найти область начальных условий x_0, при которых отклонения $x_i(t)$ в возмущенном движении не превзойдут ε и область притяжения $x = 0$.

27.21. Докажите, что нулевое решение $x = 0$ системы возмущенного движения $\dot{x}_i = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$ $(i = \overline{1, n})$, $A = [a_{ik}]_{i,k=1}^n = \text{const}$ асимптотически устойчиво, если симметрической матрице $(A^{\text{т}} + A)$ отвечает отрицательно определенная квадратичная форма $x^{\text{т}}(A^{\text{т}} + A)x < 0$, $x \neq 0$.

27.22. Коэффициенты a_{ik} линейной системы с постоянными коэффициентами $\dot{x} = Ax$, $x = [x_i]_{i=1}^n$, удовлетворяют условиям $\sum\limits_{s=1, s\neq i}^{n} |a_{is}| + a_{ii} < 0$, $i = \overline{1, n}$, строгого диагонального преобладания по строкам. Доказать, что нулевое решение $x = 0$ системы асимптотически устойчиво.

Указание. Воспользоваться функцией Ляпунова

$$v(x) = \max\left\{x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2\right\}.$$

27.23. Все решения линейной системы $\dot{x} = P(t)x$, $P(t) = [P_{ij}(t)]$, с ограниченными коэффициентами при начальных условиях $\sum\limits_{i=1}^{n} x_{i0}^2 \leqslant 1$ равномерно ограничены. Показать, что нулевое решение $x = 0$ системы устойчиво по Ляпунову.

27.24. Показать, что нулевое решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ системы $\dot{x} = -xy^{2k}$, $\dot{y} = yx^{2k}$ устойчиво по Ляпунову.

Указание. Воспользоваться функцией Ляпунова $v = x^{2k} + y^{2k}$.

27.25. Доказать устойчивость перманентных вращений твердого тела в случае Эйлера около наибольшей и наименьшей осей эллипсоида инерции ($A < B < C$).

Указание. При построении функции Ляпунова воспользоваться условиями сохранения кинетической энергии и кинетического момента.

27.26. Используя теорему Н. Г. Четаева, доказать неустойчивость перманентного вращения твердого тела в случае Эйлера около средней оси эллипсоида инерции ($A < B < C$).

Указание. Воспользоваться функцией Ляпунова $v = -yz$, где переменные $x = p$, $y = q - q_0$, $z = r$ определяют отклонения от невозмущенного движения $p \equiv 0$, $q \equiv q_0$, $r \equiv 0$.

27.27. Рассмотрим пример стационарной системы 2-го порядка

$$\dot{x} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} + 2y, \quad \dot{y} = -\frac{2y}{(1+x)^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Для этой системы существует положительно определенная на всей плоскости функция Ляпунова $v(x, y) = x^2/(1+x^2) + y^2$, полная производная которой $\dot{v} = -4[x^2/(1+x^2)^4 + y^2/(1+x^2)^2]$ отрицательно определена во всей плоскости. Принципиальное значение этого примера состоит в том, что он показывает, что выполнение критерия асимптотической устойчивости Ляпунова во всем пространстве может не обеспечивать асимптотической устойчивости нулевого решения системы в целом, т. е. при любых начальных отклонениях. В связи с этим показать, что траектории системы не будут выходить из области, определенной неравенствами

$$x \geqslant a, \quad y \geqslant 2 + \frac{1}{(1+x^2)^2},$$

где $a > 0$ — достаточно большое положительное число. Это означает, что решения с начальными условиями из области G не будут стремиться к нулю. (*Барбашин Е. А.*, *Красовский Н. Н.* // ДАН СССР. 1952. Т. 86, № 6.)

27.28. Возмущенное движение описывается линейными уравнениями с переменными коэффициентами $\dot{x}_i = \sum P_{ik}(t)x_k$, $i = \overline{1, n}$, где $P_{ik}(t) = -P_{ki}(t)$, а $P_{ii} \leqslant -\gamma < 0$. Показать, что нулевое решение системы асимптотически устойчиво, используя функцию Ляпунова $v(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$.

27.29. Возмущенное движение описывается линейными уравнениями с $\dot{x} = P(t)x$, $P(t) = [P_{is}(t)]_{i,s=1}^{n}$, с непрерывными ограниченными коэффициентами $P_{is}(t)$, $|P_{is}(t)| \leqslant \rho$. Показать, что решения

уравнений возмущенного движения $x(t)$ не могут расти быстрее экспоненты с некоторым положительным показателем $\beta < \infty$, т. е. найдется $\beta > 0$, такое что

$$[x(t)] \leqslant [x(t_0)] \exp[\beta(t - t_0)], \quad |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Указание. На решениях системы рассмотреть функцию $v(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$.

27.30. Используя функцию Ляпунова $v(x) = \sum x_i^2$, показать, что нулевое решение системы $\dot{x} = P(t)x$, $P(t) = ||P_{is}(t)||_{i,s=1}^{n}$, устойчиво по Ляпунову, если матрица коэффициентов кососимметрична, т. е. $P^{\text{т}}(t) = -P(t)$.

27.31. Динамика численности видов N_i, оспаривающих одну и ту же пищу, может быть описана моделью В. Вольтерра вида $\dot{N}_i = N_i\left(\varepsilon_i - \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_{ij} N_j\right)$, $i = \overline{1, n}$, где $\varepsilon_i > 0$, $\gamma_{ij} = \gamma_{ji} \geqslant 0$. Показать, что в переменных $\xi_i = 2\sqrt{N_i}$ динамика численности популяции описывается системой градиентного вида $\dot{\xi}_i = \partial W / \partial \xi_i$ $(i = \overline{1, n})$, определяющей закон возрастания $W(\xi)$. Используя функцию $W(\xi)$, изучить вопрос об устойчивости стационарного состояния системы.

27.32. Показать, что в условиях предыдущей задачи флуктуации численности видов (т. е. отклонение численности видов от стационарных значений) периодичны (закон периодического цикла Вольтерра), а средние (за период) числа особей двух видов не зависят от начальных условий (закон сохранения средних).

27.33. Если в среде обитания находятся два противоборствующих вида (хищник и жертва), то в соответствии с простейшими моделями В. Вольтерра борьбы за существование динамику численности популяций можно описать системой двух уравнений:

$$\dot{N}_1 = N_1(\lambda_1 - \mu_1 N_2), \quad \dot{N}_2 = N_2(-\lambda_2 + \mu_2 N_1),$$

где $\lambda_i > 0$, $\mu_i > 0$ — постоянные параметры, а $N_i \geqslant 0$ — численность особей каждого вида. Показать, что стационарное состояние системы устойчиво (но не асимптотически) по Ляпунову [1].

Указание. Воспользоваться наличием в системе 1-го интеграла $N_1^{\lambda_2} \exp(\mu_2 N_1) N_2^{-\lambda_1} \exp(-\mu_1 N_2) = \text{const}$.

---

[1] При исследовании устойчивости необходимо учитывать условие неотрицательности $N_1(t) \geqslant 0$, $N_2(t) \geqslant 0$.

27.34. Каким условиям должны удовлетворять непрерывные функции $\varphi_i(x)$ и $\psi_i(x)$ $(i = 1, 2)$, чтобы нулевое решение $x = y = 0$ системы $\dot{x} = \varphi_1(x)\psi_1(y)$, $\dot{y} = \varphi_2(x)\psi_2(y)$ было: а) неустойчиво; б) устойчиво по Ляпунову; в) асимптотически устойчиво.

27.35. Скалярное уравнение $\dot{x} = a_0x^m + a_1x^{m+1} + \ldots + a_kx^{m+k}(m > 1)$ имеет полиномиальную правую часть. При $m > 1$ задача устойчивости относится к критическим случаям, так как линейные члены в правой части отсутствуют. Показать, что выбором знака числа a_0 и показателем $m > 1$ можно распорядиться так, чтобы получить (по желанию) уравнение, у которого $x = 0$ устойчиво; $x = 0$ неустойчиво; и, наконец, $x = 0$ асимптотически устойчиво.

27.36. Уравнение Ван дер Поля $\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$, $\varepsilon > 0$ описывает колебательные процессы в электрических цепях. Доказать, что нулевое состояние равновесия этой системы неустойчиво.

27.37. Рассматривается линейный дифференциальный оператор

$$\mathbf{L}\{v(x)\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k, \quad a_{ik} = \text{const}.$$

Найти собственные числа Λ_s и собственные функции $u_s(t)$ этого оператора в пространстве квадратичных форм, т. е. функций $v(x)$ вида $v(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} l_{ij}x_ix_j$, где l_{ij} — постоянные.

Указание. Рассмотреть сначала аналогичную задачу в пространстве линейных форм $v'(x) = \sum\limits_{s=1}^{n} l_sx_s$

27.38. Найти собственные числа Λ_m и собственные функции u_m оператора $\mathbf{L}\{v(x)\}$, указанного в предыдущей задаче, в классе однородных многочленов

$$W_m = \sum_{\sum m_i = m} \alpha_{i_1i_2\ldots i_n} x_1^{m_{i_1}} x_2^{m_{i_2}} \ldots x_n^{m_{i_n}}, \quad m_i \geqslant 0, \quad \sum m_i = m.$$

27.39. Задача построения функций Ляпунова вида $v = x^{\mathrm{T}}Lx$ для линейных стационарных систем $\dot{x} = Ax$, $A = ||a_{ij}||_{i,j=1}^{n}$, с заданной производной $\dot{v} = -x^{\mathrm{T}}Wx < 0$, $x \neq 0$, сводится к решению матричного уравнения Ляпунова $A^{\mathrm{T}}L + LA = -W$. Показать, что в случае гурвицевой матрицы A решение уравнения Ляпунова можно представить в интегральной форме $L = \int\limits_0^{\infty} e^{A^{\mathrm{T}}t}We^{At}\,dt$, где через $\exp(At)$ обозначена фундаментальная матрица $\Phi(t)$-решений системы $\dot{x} = Ax$ с условием $\Phi(0) = E$.

В задачах 27.40–27.43 заданы уравнения возмущенного движения $\dot{x}_i = \sum a_{ik}x_k + y_i(x)$, $|y_i(x)| \leqslant \rho|x|^2$, $a_{ik} = \text{const}$. По указанным в каждой задаче квадратичным формам $W(x) = \sum W_{ij}x_ix_j$ для системы линейного приближения $\dot{x}_i = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}x_k$, $i = \overline{1, n}$, построить функцию Ляпунова вида $v(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} l_{ij}x_ix_j$, удовлетворяющую условию $(dv/dt)_{\dot{x}=Ax} = -W(x)$. Полученную функцию Ляпунова использовать для доказательства асимптотической устойчивости нелинейной системы. Кроме того, используя $v(x)$, найти возможно более широкую инвариантную область этой системы.

27.40. $\dot{x}_1 = -3x_1 + 2x_2 + x_1^2x_2^2$, $\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - x_1^2x_2^2$,
$W = -x_1^2 - x_2^2$.

27.41. $\dot{x}_1 = -x_1 - 3x_2 + x_1^2$, $\dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2 + x_2^2$,
$W = -x_1^2 - 2x_2^2$.

27.42. $\dot{x}_1 = -x_1 - x_2 + x_1^3$, $\dot{x}_2 = -x_1 - 6x_2 + x_2^3$,
$W = -x_1^2 - x_2^2$.

27.43. $\dot{x}_1 = -2x_1 - 3x_2 + x_2^2$, $\dot{x}_2 = -x_1 - 4x_2 + x_1^2$,
$W = -2x_1^2 - x_2^2$.

27.44. Найти Ω-предельное множество движения осциллятора с начальными условиями $q(0) = q_0$, $p(0) = p_0$. Гамильтониан осциллятора равен $H(q, p) = (p^2 + \omega^2q^2)/2$. Показать, что Ω-предельное множество всякого движения осциллятора определяется только его энергией.

27.45. Нулевое решение $x = 0$ системы уравнений возмущенного движения $\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f_i(0, \ldots, 0) = 0$, $i = \overline{1, n}$, асимптотически устойчиво. Найти структуру Ω-предельного множества решения $X(x_0, t)$, где x_0 выбрано из области притяжения точки $x = 0$.

27.46. Динамическая система $\dot{x} = f(x)$ имеет решение $x_j(t) = \gamma_j(1 + e^{-t})\cos\omega t$, $\gamma_j = \text{const}$, $j = \overline{1, n}$. Найти Ω-предельное множество этого решения.

27.47. В задачах 27.44–27.46 найти α-предельные множества указанных решений.

27.48. Показать, что состояние равновесия системы с одной степенью свободы, описываемой уравнением Льенера: $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$, будет асимптотически устойчиво по Ляпунову, если $g(x)$ нечетная функция и $xg(x) > 0$, $x \neq 0$, а $f(x) \geqslant \Delta > 0$ при всех значениях x.

27.49. Для определения точки минимума непрерывно дифференцируемой функции $\psi(x) = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ применяют так на-

зываемые градиентные процедуры, использующие решение системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = -\partial\psi(x)/\partial x_i, \quad i = \overline{1, n}. \qquad (*)$$

Доказать, что в этой системе точка минимума x^* функции $\psi(x)$ будет асимптотически устойчива, если в некоторой окрестности точки x^* нет других стационарных точек функции $\psi(x)$.

27.50. Каким условиям должна удовлетворять функция $\psi(x)$ в условиях предыдущей задачи, чтобы точка минимума x^* была асимптотически устойчивым в целом положением равновесия градиентной системы $(*)$?

27.51. Движение некоторой динамической системы описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами $\dot{x}_i = \sum a_{ik}x_k + f_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, где непрерывная функция $f(t)$ периодична с периодом T, т. е. $f(t+T) = f(t)$. Доказать, что эта система имеет единственное асимптотически устойчивое в целом периодическое движение периода T, если матрица $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{i,k=1}^n$ гурвицева.

27.52. Динамическая система описывается уравнениями $\dot{x} = Ax + f(t)$, $\mathbf{A} = [a_{is}]_{i,s=1}^n = \text{const}$. Показать, что если матрица A гурвицева, а функция $f(t)$ ограничена при всех $t \geqslant 0$, то у системы имеется ограниченное замкнутое множество (имеющее нуль внутренней точкой), в которое любое движение попадает за конечное время и там остается, т. е. что система обладает свойством диссипативности.

27.53. Показать, что нулевое решение $x = 0$ линейной системы в конечных разностях $x(s+1) = Ax(s)$ с постоянной матрицей A асимптотически устойчиво в том и только том случае, если все собственные числа λ_i матрицы A лежат внутри единичного круга: $|\lambda_i| < 1$, $i = \overline{1, n}$.

27.54. Для линейной стационарной дискретной системы $x(s+1) = Ax(s)$, $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$, уравнение Ляпунова для функций $v(x)$ из класса квадратичных форм имеет вид $A^{\mathrm{T}}LA - L = -W$. Показать, что решение этого уравнения представимо абсолютно сходящимся рядом $L = \sum\limits_{s=0}^{\infty} A^{T^s} W A^s$, если все собственные числа λ_i матрицы $\mathbf{A}$ по модулю меньше единицы.

27.55. Доказать дискретный аналог теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Если для системы рекуррентных уравнений

$$x(s+1) = X(x(s)), \quad X(0) = 0, \quad x = [x_i]_{i=1}^n \qquad (*)$$

существует положительно определенная в области $G\{|x| \leqslant h\}$ функция Ляпунова $v(x)$, первая разность которой

$$\Delta v(x) = v(x(s+1)) - v(x(s)) = v(X(x)) - v(x) = -w(x) < 0$$

отрицательно определена в G, то нулевое решение $x(s) \equiv 0$ системы $(*)$ асимптотически устойчиво по Ляпунову.

§ 28. Дискретные модели механических систем

Назначение этого параграфа связано с анализом дискретных схем интегрирования уравнений движения (дискретных моделей). Вопросы, которые здесь обсуждаются, связаны с первую очередь с вопросами механики. При переходе к описанию уравнений движения в конечных разностях законы сохранения могут нарушаться. В связи с этим обсуждаются способы формирования численных схем, которые не приводят к нарушению законов сохранения. По существу речь идет о методах построения таких дискретных моделей, которые содержат в себе законы сохранения исходной непрерывной модели: законы сохранения полной энергии, импульса, фазового объема и т. д. Необходимо заметить, что анализ этих вопросов имеет большое значение для механики. Это связано с тем, что предельные теоремы о равномерной сходимости ломаных Эйлера к решению дифференциальных уравнений движения имеют чисто теоретическое значение, так как при использовании ЭВМ этого предельного перехода не производится, а в качестве приближенного решения рассматривается соответствующая «ломаная» с достаточно малым, но не равным нулю шагом интегрирования h. Одним из возможных методов получения дискретных моделей служит вариационный принцип Гамильтона, в котором действие $W = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q})\, dt$ заменяется конечной суммой вида

$$W_g = \sum_{s=1}^{N} h_s L_s, \tag{1}$$

где $t_{s+1} - t_s = h_s,\ h_s > 0;\ q^s = q(s) = q(t_s),\ L_s = L\left(t_s, q^s, \dfrac{q^{s+1} - q^s}{h_s}\right)$. Выражение (1) (дискретное действие) в пределе при $N \to \infty$, $\max h_s \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ переходит в действие по Гамильтону. С использованием дискретного действия (1) принцип Гамильтона (условие стационарности) при заданных t_0, t_1, q^1, q^2 приводит к соотношениям

$$\frac{\partial W}{\partial q^s} = \left\| \frac{\partial W}{\partial q_i^s} \right\|_{i=1}^{n} = 0, \qquad s = \overline{1, N-1}, \tag{2}$$

которые можно интерпретировать как дискретный аналог уравнений Лагранжа. При построении дискретного аналога уравнений Гамильтона обобщенный импульс на такте s вводится в соответствии с равенством

$$P_i(s) = \frac{\partial L_{s-1}}{\partial \dot{q}_i}, \tag{3}$$

где L_s определено в (1).

28.1. При численном интегрировании канонических уравнений движения одномерного осциллятора $\dot{q} = \partial H/\partial p$, $\dot{p} = -\partial H/\partial q$, $H = (q^2 + p^2)/2$ используется дискретная схема Эйлера:

$$q_{s+1} = q_s + hp_s, \quad p_{s+1} = p_s - hq_s, \quad s = 0, 1, 2, \ldots, \tag{$*$}$$

где h — шаг интегрирования. Найти закон изменения полной энергии $E_s = H(q^s, p^s)$ в силу рекуррентных соотношений $(*)$.

28.2. Найти закон изменения фазового объема V_s в дискретной схеме численного интегрирования по методу Эйлера уравнений движения осциллятора $q_{s+1} = q_s + hp_s$, $p_{s+1} = p_s - hq_s$.

28.3. Дискретная схема Эйлера интегрирования уравнений осциллятора, описанная в задаче 28.1, является частным случаем схем вида $(q_{s+1} - q_s)/h = \sigma p_{s+1} + (1-\sigma)p_s$, $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$; $(p_{s+1} - p_s)/h = -[\lambda q_{s+1} + (1-\lambda)q_s]$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, зависящих от двух параметров σ и λ. Найти условия, при которых в этой схеме сохраняется фазовый объем.

28.4. В условиях предыдущей задачи найти соотношения между параметрами σ и λ, при которых в дискретной схеме Эйлера интегрирования уравнений движения сохраняется полная энергия осциллятора.

28.5. Используя дискретное действие (1) и условие его стационарности (2), выписать соответствующую модель механической системы с n степенями свободы, функция Лагранжа которой $L = L(t, q, \dot{q})$.

28.6. Используя дискретное действие (1) и условие его стационарности (2), построить дискретную модель осциллятора, считая шаг интегрирования h_s, постоянным ($h_s = h$).

28.7. Показать, что в дискретной модели осциллятора, описанной в предыдущей задаче, сохраняется фазовый объем.

28.8. Проверить, сохраняется ли полная механическая энергия в дискретной модели одномерного осциллятора, построенной в задаче 28.6.

28.9. Материальная точка массы m движется в плоскости xy в поле центральной силы. Потенциал поля $\Pi = \alpha/\sqrt{x^2+y^2}$. Построить дискретную модель этой системы в координатах x, y, используя дискретное действие (1) и условие его стационарности (2).

28.10. Составить дискретную модель системы, описанной в задаче 28.9, в полярных координатах r, φ.

28.11. Известно, что для системы с функцией Лагранжа $L(t, q, \dot{q})$ время можно включить в число обобщенных координат, если в выражении действия по Гамильтону W сделать переход к новому времени τ так, как это описано в задаче 21.29. Исходя из новой функции Лагранжа $L(t, q, q'/t')t' = \widetilde{L}(t, q, t', q')$ (штрих — производная по τ), выписать уравнения в конечных разностях по методу, описанному в задаче 28.5.

28.12. Используя уравнения в конечных разностях, полученные в предыдущей задаче, составить аналогичные уравнения для одномерного осциллятора $(L = (\dot{q}^2 - q^2)/2)$.

28.13. Показать, что в дискретной модели, полученной в задаче 28.12, сохраняется полная механическая энергия осциллятора.

28.14. Показать, что положение равновесия $q = p = 0$ дискретной модели одномерного осциллятора $q_{s+1} = q_s + hp_s$, $p_{s+1} = p_s - hq_s$, построенной по схеме Эйлера, неустойчиво по Ляпунову.

Указание. Найти расположение корней характеристического уравнения относительно единичной окружности.

28.15. Обсудить утверждение предыдущей задачи в связи с задачей 28.1 и методом функций Ляпунова.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

1. Кинематика и динамика

2. Аналитическая механика

1. КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА

§ 1. Движение точки

1.2. $w_\tau = 0$, $w_n = a\omega^2$, $\rho = a + b^2/(a\omega^2)$.

1.3. Если $\Delta = \alpha\rho - \beta\gamma \neq 0$, то $(\rho x - \beta y)^2 - (\alpha y - \gamma x)^2 = \Delta^2$, $(\alpha\dot{y} - \gamma\dot{x})^2 - (\rho\dot{x} - \beta\dot{y})^2 = \Delta^2\omega^2$. Если $\Delta = \alpha\rho - \beta\gamma = 0$, то $\rho x - \beta y = 0$, $\rho\dot{x} - \beta\dot{y} = 0$.

1.4. $w_r = \omega^2 r$, $w_\varphi = 0$.

1.5. $w = \dfrac{2a}{\sqrt{(1+4a^2x^2)^3}} v^2$.

1.6. В точке сопряжения $x = a$ должны выполняться условия $f(a) = 0$, $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$.

1.7. $r = r_0 \exp[(\varphi - \varphi_0)\operatorname{ctg}\alpha]$.

1.8. Винтовая линия на круговом цилиндре, ось которого параллельна вектору $\mathbf{a}$.

1.10. $t = \dfrac{n-1}{n}\dfrac{R}{v_0 \operatorname{ctg}\alpha}$.

1.11. $x^2 + \left(y - \dfrac{u}{a}\right)^2 = \dfrac{u^2}{a^2}$, $w = au$.

1.12. $w_y = -8bv_0^2/a^2$.

1.13. $w_n = v\dot{\theta}$, $w_\tau = \dot{v}$, $\tau = \mathbf{v}/v$.

1.16. $x(t) = \dfrac{1}{a}\cos(at+\beta) + t\sin(at+\beta) + x_0 - \dfrac{\cos\beta}{a}$,

$y(t) = \dfrac{1}{a}\sin(at+\beta) - t\cos(at+\beta) + y_0 - \dfrac{\sin\beta}{a}$.

1.17. Парабола $y - y_0 = a(x - x_0)^2/2$ в системе координат, повернутой на угол $\alpha = \text{const}$, $\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} bt \\ ab^2t^2/2 \end{bmatrix}$.

1.19. $w_r = -c^2/(pr^2)$, $w_\varphi = 0$.

1.20. $w = -c^2[\omega^2 r + (1-\omega^2)p]/(r^3 p)$.

1.21. $r = r_0 + a(\varphi - \varphi_0)$, $w_r = -r^{-3}(2/r^2 + 1/a^2)$, $w_\varphi = 0$.

1.22. $w_\tau = -\dfrac{r^2 + 2a^2}{ar^5\sqrt{a^2+r^2}}$, $w_n = \dfrac{r^2 + 2a^2}{a^2r^4\sqrt{a^2+r^2}}$.

1.23. $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_0} - \dfrac{c}{a}(\varphi - \varphi_0)$.

1.24. $\rho = \dfrac{v^3}{|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|}$.

1.25. $\rho = \dfrac{v^2}{a|\mathbf{v} \times \mathbf{r}|}$.

1.26. $\rho = \dfrac{(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2)^{3/2}}{|\dot r(2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi) - r\dot\varphi(\ddot r - r\dot\varphi^2)|}.$

1.28. $\rho = \dfrac{(w^2t^2 + 2v_0wt\cos\alpha + v_0^2)^{3/2}}{wv_0\sin\alpha}.$

1.29. $r = H\dfrac{\sin\varphi}{(1+\cos\varphi)^2},\ t = \dfrac{2}{3}\dfrac{H}{v},\ w = \dfrac{2v^2}{H}(1+\cos\varphi)^2.$

1.30. В системе отсчета, связанной с точкой A прямая

$$r = r_0 + (v_1\cos\varphi_1 - v_2\cos\varphi_2)t,\ T = \frac{r_0}{-v_1\cos\varphi_1 + v_2\cos\varphi_2}.$$

1.31. $\dfrac{r}{r_0} = \dfrac{\sin\varphi_0}{\sin\varphi}\left[\dfrac{\operatorname{tg}(\varphi/2)}{\operatorname{tg}(\varphi_0/2)}\right]^{v_2/v_1}.$

1.32. $w = \dfrac{v_1v_2}{r}\sin\varphi,\ \rho = r\dfrac{v_2}{v_1\sin\varphi}.$

1.33. $re^{-r/l}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}\right)^{v_1/v_2}\sin\varphi = \text{const}.$

1.34. $t - t_0 = \dfrac{r_0[v_2/v_1 + \cos(\varphi_0+\delta)] - r[v_2/v_1 + \cos(\varphi+\delta)]}{v_1[(v_2/v_1)^2 - 1]\cos\delta}$; r, φ, r_0, φ_0 — текущие и начальные значения полярных координат в системе отсчета, движущейся с целью.

1.35. В случае удаляющейся цели:

а) $\lim\limits_{\varphi\to 0} w_n = 0$; б) $\lim\limits_{\varphi\to 0} w_n = \dfrac{4v_1v_2\sin\varphi_0}{r_0(1+\cos\varphi_0)^2}$; в) $\lim\limits_{\varphi\to 0} w_n = +\infty$.

В случае приближающейся цели:

а) $\lim\limits_{\varphi\to \pi} w_n = 0$; б) $\lim\limits_{\varphi\to \pi} w_n = \dfrac{4v_1v_2(1+\cos\varphi_0)^2}{r_0\sin^3\varphi_0}$; в) $\lim\limits_{\varphi\to \pi} w_n = \infty$.

1.37. а) $v = \sqrt{\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 + \dot z^2}$; $w_r = \ddot r - r\dot\varphi^2,\ w_\varphi = \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot\varphi),\ w_z = \ddot z.$

б) $v = \sqrt{\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 r^2\sin^2\theta}$; $w_r = \ddot r - r(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta)$,

$$w_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot\theta) - r\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta, \ldots\ w_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\dot\varphi\sin^2\theta).$$

в) $v = \sqrt{(\sigma^2+\tau^2)(\dot\sigma^2+\dot\tau^2) + \dot z^2}$;

$$w_\sigma = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\left\{\frac{d}{dt}[(\sigma^2+\tau^2)\dot\sigma] - \sigma(\dot\sigma^2+\dot\tau^2)\right\},$$

$$w_\tau = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\left\{\frac{d}{dt}[(\sigma^2+\tau^2)\dot\tau] - \tau(\dot\sigma^2+\dot\tau^2)\right\}, \ldots\ w_z = \ddot z.$$

г) $v = \sqrt{a^2(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v)(\dot u^2 + \dot v^2) + \dot z^2}$;

$$w_u = \frac{a}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v}}\left\{\frac{d}{dt}[(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v)\dot u] - \operatorname{sh} u\operatorname{ch} u(\dot u^2 + \dot v^2)\right\},$$

$$w_v = \frac{a}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v}}\left\{\frac{d}{dt}[(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v)\dot v] - \sin v\cos v(\dot u^2 + \dot v^2)\right\},\ w_z = \ddot z.$$

д) $v=\sqrt{(\sigma^2+\tau^2)(\dot\sigma^2+\dot\tau^2)+\sigma^2\tau^2\dot\varphi^2}$;

$$w_\sigma=\frac{1}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\left\{\frac{d}{dt}[(\sigma^2+\tau^2)\dot\sigma]-\sigma(\dot\sigma^2+\dot\tau^2+\tau^2\dot\varphi^2)\right\},$$

$$w_\tau=\frac{1}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\left\{\frac{d}{dt}[(\sigma^2+\tau^2)\dot\tau]-\tau(\dot\sigma^2+\dot\tau^2+\tau^2\dot\varphi^2)\right\},$$

$$w_\varphi=\frac{1}{\sigma\tau}\frac{d}{dt}(\sigma^2\tau^2\dot\varphi).$$

е) $v=a\sqrt{(\operatorname{sh}^2u+\sin^2v)(\dot u^2+\dot v^2)+\dot\varphi^2\operatorname{sh}^2u\sin^2v}$;

$$w_u=\frac{a}{\sqrt{\operatorname{sh}^2u+\sin^2v}}\left\{\frac{d}{dt}[(\operatorname{sh}^2u+\sin^2v)\dot u]-\operatorname{sh}u\operatorname{ch}u(\dot u^2+\dot v^2+\dot\varphi^2\sin^2v)\right\},$$

$$w_v=\frac{a}{\sqrt{\operatorname{sh}^2u+\sin^2v}}\left\{\frac{d}{dt}[(\operatorname{sh}^2u+\sin^2v)\dot v]-\sin v\cos v(\dot u^2+\dot v^2+\dot\varphi^2\operatorname{sh}^2u)\right\},$$

$$w_\varphi=\frac{a}{\operatorname{sh}u\sin v}\frac{d}{dt}(\dot\varphi\operatorname{sh}^2u\sin^2v).$$

ж) $v=a\sqrt{(\operatorname{sh}^2u+\cos^2v)(\dot u^2+\dot v^2)+\dot\varphi^2\operatorname{ch}^2u\sin^2v}$;

$$w_u=\frac{a}{\sqrt{\operatorname{sh}^2u+\cos^2v}}\left\{\frac{d}{dt}[(\operatorname{sh}^2u+\cos^2v)\dot u]-\operatorname{sh}u\operatorname{ch}u(\dot u^2+\dot v^2+\dot\varphi^2\sin^2v)\right\},$$

$$w_v=\frac{a}{\sqrt{\operatorname{sh}^2u+\cos^2v}}\left\{\frac{d}{dt}[(\operatorname{sh}^2u+\cos^2v)\dot v]+\sin v\cos v(\dot u^2+\dot v^2-\dot\varphi^2\operatorname{ch}^2u)\right\},$$

$$w_\varphi=\frac{a}{\operatorname{ch}u\sin v}\frac{d}{dt}(\dot\varphi\operatorname{ch}^2u\sin^2v).$$

1.38. $\rho=\left(\sum\limits_{i=1}^{3}H_i^2\dot q_i^2\right)^{3/2}\left[\left(\sum\limits_{i=1}^{3}\frac{L_i^2}{H_i^2}\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{3}H_i^2\dot q_i^2\right)-\left(\sum\limits_{i=1}^{3}\dot q_iL_i\right)^2\right]^{-1/2}$,

где $L_i=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot q_i}\left(\frac{1}{2}\sum\limits_{s=1}^{3}H_s^2\dot q_s^2\right)-\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2}\sum\limits_{s=1}^{3}H_s^2\dot q_s^2\right)$.

1.39. $k_r=-\frac{r\dot\varphi^2(v^2+\dot r^2)}{v^4}$, $k_\varphi=\frac{\dot r\dot\varphi\left(2v^2-r^2\dot\varphi^2\right)}{v^4}$, $k_z=-\frac{\dot zr\dot r\dot\varphi^2}{v^4}$.

1.40. $\frac{d}{dt}\frac{\partial\left(v^2/2\right)}{\partial\dot q_j}-\frac{\partial\left(v^2/2\right)}{\partial q_j}=0,\ j=2,3,$ где $v^2=\sum\limits_{i=2}^{3}H_i^2\dot q_i^2,\quad q_1=\text{const}.$

1.41. $\mathbf{k}=-\mathbf{e}_r\frac{1}{r}-\mathbf{e}_\theta\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}$.

1.42. $v=v_0\exp\left[\operatorname{ctg}\alpha(\varphi-\varphi_0)\right],\ w=\frac{v}{\sin\alpha}\frac{d\varphi(t)}{dt}$.

1.44. $w_n=v\sqrt{\dot\theta_v^2+\dot\varphi_v^2\sin^2\theta_v}$.

1.45. $\boldsymbol\tau=\frac{\mathbf{v}}{v},\ \mathbf{n}=\frac{v^2\mathbf{w}-(\mathbf{w}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}}{v|\mathbf{v}\times\mathbf{w}|},\ \mathbf{b}=\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}{|\mathbf{v}\times\mathbf{w}|}$.

1.47. $\rho=\frac{v_0^2r^3}{\gamma|\mathbf{v}_0\times\mathbf{r}|}$.

§ 2. Сложное движение точки

2.1. $t = \dfrac{R-r}{v\sin(\pi/n)}$.

2.2. $u = \sqrt{v_1^2 + (v_1\operatorname{tg}\alpha + v_2)^2}$, $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha + v_2/v_1$.

2.3. $w_A = \sqrt{R^2\omega^4 + a^2\Omega^4\sin^2\Omega t + 2aR\omega^2\Omega^2\sin\Omega t\sin\omega t}$.

2.4. $v = \left[v_0^2 + \omega_1^2 l^2 + l^2\omega_2^2\cos^2\alpha\right]^{1/2}$,

$$w^2 = \left[(w_0 - l\omega_1^2 - l\omega_2^2)\cos\alpha - 2v_0\omega_1\sin\alpha\right]^2 + \\ + \left[(w_0 - l\omega_1^2)\sin\alpha + 2v_0\omega_1\cos\alpha\right]^2 + [2\omega_2(\omega_1 l\sin\alpha - v_0\cos\alpha)]^2.$$

2.5. $v_1 = v_3 = \sqrt{\omega_2^2R^2 + v_0^2}$, $v_2 = v_4 = \sqrt{\omega_1^2R^2 + v_0^2}$;

$$w_1 = w_3 = \sqrt{(\omega_2^2R + v_0^2/R)^2 + 4\omega_1^2v_0^2},$$

$$w_2 = w_4 = \sqrt{(\omega_1^2R + v_0^2/R)^2 + 4\omega_1^2\omega_2^2R^2 + 4\omega_2^2v_0^2}.$$

2.6. $w = l\sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + \omega_2^2(2\omega_1^2 - \omega_2^2)\cos^2\omega_1 t}$.

2.7. В цилиндрических координатах $r = \dfrac{|\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}|}{\omega^2}(\varphi - \varphi_0)$,

$$z = \frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{v}}{\omega^2}(\varphi - \varphi_0);\quad w_r = \frac{|\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}|}{v}\sqrt{\omega^2l^2 + 4v^2}.$$

2.11. $v_1 = v$, $v_2 = \sqrt{v^2 + 2v_0^2 + 2vv_0(\cos\alpha + \sin\alpha)}$,

$$v_3 = \sqrt{v^2 + 4v_0^2 + 4vv_0\cos\alpha},$$

$$v_4 = \sqrt{v^2 + 2v_0^2 + 2vv_0(\cos\alpha - \sin\alpha)};$$

$$w_1 = R^{-1}\sqrt{w^2R^2 + v_0^4 + 2v_0^2wR\sin\alpha},$$

$$w_2 = R^{-1}\sqrt{w^2R^2 + v_0^4 + 2v_0^2wR\cos\alpha},$$

$$w_3 = R^{-1}\sqrt{w^2R^2 + v_0^4 - 2v_0^2wR\sin\alpha},$$

$$w_4 = R^{-1}\sqrt{w^2R^2 + v_0^4 - 2v_0^2wR\cos\alpha}.$$

2.12. $v = \sqrt{(\omega l + v_0)^2 + v_0^2\omega^2t^2}$, $w = \omega\sqrt{(\omega l + 2v_0)^2 + v_0^2\omega^2t^2}$.

2.13. $w_M = \left\{\left[\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right)l\cos\varphi + \omega_1^2L\right]^2 + \omega_2^4l^2\sin^2\varphi + 4\omega_1^2\omega_2^2l^2\sin^2\varphi\right\}^{1/2}$.

2.14. $v_A = \left\{\dfrac{4a^2\pi^2}{\omega^2} - 4R\omega\varphi_0\left(2a\dfrac{\pi}{\omega} - R\omega\varphi_0\right)\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\right\}^{1/2}$,

$$w_A = \left\{\left[\left(\frac{2a\pi}{R\omega} - \omega\varphi_0\right)^2R + R\omega^2\varphi_0^2\cos\alpha\right]^2 + \left(2a + R\omega^2\varphi_0^2\sin\alpha\right)^2\right\}^{1/2},$$

где $\alpha = \dfrac{a\pi^2}{R\omega^2}$.

2.15. $v = a\sqrt{\omega_0^2\cos^2\omega_0 t + \omega^2(1+\sin\omega_0 t)^2}$,

$w = a\sqrt{4\omega^2\omega_0^2\cos^2\omega_0 t + [\omega^2 + (\omega^2+\omega_0^2)\sin\omega_0 t]^2}$.

2.16. $v = \dfrac{at}{2}\sqrt{4+\varphi_0^2\omega^2 t^2\cos^2\omega t}$,

$w = \dfrac{a}{2}\sqrt{(2-\varphi_0^2\omega^2 t^2\cos^2\omega t)^2 + \varphi_0^2\omega^2 t^2(4\cos\omega t - \omega t\sin\omega t)^2}$.

2.17. $v_\xi = \dot r,\ v_\eta = r\dot\varphi; w_\xi = \ddot r - r\dot\varphi^2,\ w_\eta = r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi = \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dot\varphi\right)$.

2.18. См. ответ к задаче 1.37,б.

2.19. $v_A = \omega l\sin\varphi_0,\ w_A = l\sqrt{\varphi_0^2\omega_0^4 + \varphi_0\omega_0^2\omega^2\sin 2\varphi_0 + \omega^4\sin^2\varphi_0}$.

2.20. $v_A = \sqrt{a^2 + \varphi_0^2\omega^2(l_0 - at)^2\cos^2\omega t}$,

$w_A = \varphi_0\omega\cos\omega t\sqrt{\varphi_0^2\omega^2(l_0-at)^2\cos^2\omega t + [2a + (l_0-at)\omega\operatorname{tg}\omega t]^2}$.

2.21. $v_B = \sqrt{a^2 - 2a\varphi_0\omega l\cos\dfrac{a\pi}{R\omega} + \varphi_0^2\omega^2 l^2}$,

$w_B = R^{-1}\sqrt{a^4 + 2Ra^2\varphi_0^2\omega^2 l\cos\dfrac{a\pi}{R\omega} + R^2\varphi_0^4\omega^4 l^2}$.

2.22. $v = \sqrt{v_0^2+\omega^2x^2};\ w_x = -\omega^2 x - \dfrac{4a^2v_0^2x}{\left(1+4a^2x^2\right)^2}$,

$w_y = \dfrac{2av_0^2}{\left(1+4a^2x^2\right)^2},\ w_z = -\dfrac{2\omega v_0}{\sqrt{1+4a^2x^2}}$.

2.23. $v_M^2 = (u+v)^2 + \dfrac{uvt}{a(4a-ut)}(av - 8au + 2u^2t),\ w_M^2 = \dfrac{4auv^2(9a-2ut)}{t(4a-ut)^3}$.

2.24. $v = \dfrac{v_0|a|}{R},\ w = \dfrac{1}{R^2}\sqrt{v_0^4a^2 + (w_0a - v_0^2)^2R^2}$, где a — расстояние точки рельса от точки касания колеса; $a > 0$, если колесо накатывается на точку, $a < 0$ в противном случае.

2.25. $v = \omega r,\ w = \omega^2r^2/(R-r)$.

2.26. $w_r = \dfrac{v_1}{R^2r}\sqrt{r^2v_1^2(r - R\sin\varphi)^2 + R^2[v_1r\cos\varphi + v_2(R\sin\varphi - 2r)]^2}$.

2.27. $v_a = \dfrac{2lk\omega}{2l\cos(\alpha/2)+k},\ v_r = \dfrac{2l\omega\cos(\alpha/2)\sqrt{k^2+4l^2\sin^2(\alpha/2)}}{2l\cos(\alpha/2)+k}$.

2.28. $w_\tau = \dfrac{4k^2\omega^2l^2\sin(\alpha/2)}{(2l\cos(\alpha/2)+k)^3},\ w_n = \dfrac{4k^2\omega^2 l}{(2l\cos(\alpha/2)+k)^2}$.

2.29. $\mathbf{v} = \mathbf{n}\dot\rho,\ \mathbf{w} = -\boldsymbol{\tau}\dfrac{v}{\rho}\dot\rho + \mathbf{n}\ddot\rho,\ \rho = \dfrac{v^3}{|\mathbf{w}\times\mathbf{v}|}$.

2.30. $\nu' = \dfrac{a+v_2}{a-v_1}\nu$.

2.31. $r = r_0\exp[(\varphi_0 - \varphi)\operatorname{tg}(\pi/n)]$.

2.32. В плоскости x_1x_2 имеем

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u - \omega a \\ \omega a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -(\omega^2 + \varepsilon)a \\ 2\omega u + \varepsilon a - \omega^2 a \end{bmatrix}.$$

2.33. В системе координат x_1, x_2, x_3 имеем

$$\mathbf{v} = \omega \begin{bmatrix} OA \sin\alpha \\ a\cos\omega t\cos\alpha \\ a\cos\omega t\sin\alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \sin\alpha\,(\varepsilon OA + 2\omega^2 a\sin\omega t) \\ -a\omega^2\sin\omega t\cos\alpha \\ -\omega^2\sin\alpha\,(OA + a\sin\omega t) \end{bmatrix},$$

$OA = \varepsilon + a\sin\omega t.$

2.34. $v = \sqrt{\omega^2 s^2 + (\omega R + v_0)^2 + 2\omega s(\omega R + v_0)\cos\alpha},$

$$w = \sqrt{\omega^4 s^2 + \left(\omega^2 R + 2\omega v_0 + \frac{v_0^2}{R}\right)^2 + 2\omega^2 s\left(\omega^2 R + 2\omega v_0 + \frac{v_0^2}{R}\right)\cos\alpha},$$

где $\alpha = v_0 t/R$.

2.35. $v_A = \sqrt{(a\omega\cos\omega t + w_0 t\cos\varphi)^2 + \dfrac{w_0^2 t^2}{R^2}(R\sin\varphi - a\sin\omega t)^2},$

$$w_A = \sqrt{\left(\omega^2 a\sin\omega t - \frac{w_0^2 t^2}{R^2}\,a\sin\omega t - w_0\cos\varphi\right)^2 + w_0^2\left(\frac{2at\omega}{R}\cos\omega t + \frac{a}{R}\sin\omega t - \sin\varphi\right)^2},$$

где $\varphi = w_0 t/(2R)$.

2.36. $v^2 = \left(R\varphi_0\,\omega\cos\omega t - 2w_0\,t\sin^2\dfrac{\varphi}{2}\right)^2 + w_0^2 t^2\sin^2\varphi,$

$$w^2 = \left[R\left(\frac{w_0 t}{R} - \varphi_0\,\omega\cos\omega t\right)^2 - w_0\sin\varphi\right]^2 + \left(2w_0\sin^2\frac{\varphi}{2} + R\omega^2\varphi_0\sin\omega t\right)^2,$$

где $\varphi = \varphi_0\sin\omega t - \dfrac{w_0 t^2}{2R}$.

2.37. $v^2 = (\omega_1^2 a_1^2 + \omega_2^2 a_2^2 + 2\omega_1\omega_2 a_1 a_2\cos\varphi)/\sin^2\varphi.$

2.38. $v^2 = c^2\left[\dfrac{e^2}{p^2} - \left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{p}\right)^2\right] + \left(\dfrac{c}{r} + \omega r\right)^2,$

$$w^2 = \left(\frac{c^2}{pr^2} + \omega^2 r + 2\omega\frac{c}{r}\right)^2 + 4\omega^2 c^2\left[\frac{e^2}{p^2} - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)^2\right].$$

2.39. В системе координат ξ, η, ζ, в которой ось $O\xi$ направлена по радиус-вектору $\mathbf{r}$, ось $O\xi$ перпендикулярна плоскости орбиты по $\boldsymbol{\omega}_1$, а ось $O\eta$ направлена так, чтобы образовалась правая тройка осей, получаем

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{C}{r_0} + r_0\omega_\zeta \\ -r_0\omega_\eta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -r_0\left(\omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2\right) - \dfrac{C^2}{pr_0^2} - 2C\dfrac{\omega_\zeta}{r_0} \\ \omega_\xi\omega_\eta r_0 \\ (\omega_1 + \omega_\zeta)\omega_\xi r_0 + 2C\omega_\xi/r_0 \end{bmatrix},$$

где $r_0 = p/(1+e)$, $\omega_\xi = \omega_2\sin\theta\sin\omega_1 t$, $\omega_\eta = \omega_2\sin\theta\cos\omega_1 t$, $\omega_\zeta = \omega_1 + \omega_2\cos\theta$.

2.40. $v_D = 2v_0\sin(\alpha/2)$, $\Delta s = \displaystyle\int_{-l/2}^{l/2}\sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}\,dx - l.$

§ 3. Плоскопараллельное движение твердого тела

3.2. Окружность $\left[x+\lambda^2 a/\left(1-\lambda^2\right)\right]^2+y^2=a^2\lambda^2/(1-\lambda^2)^2$ в системе координат связанной с телом так, что $A(0,0)$, $B(a,0)$.

3.4. $\omega=\dfrac{v_0}{R-r}\dfrac{R-\rho}{\rho}$.

3.6. $\overrightarrow{OA}=\dfrac{1}{\omega^2}\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{v}_0-\mathbf{v}_A)$.

3.7. $0\leqslant|v_C|\leqslant v/\sin(\alpha/2)$.

3.8. $\omega_k=\omega\left[1+(-1)^k\dfrac{r_1}{r_k}\right]-\omega_1(-1)^k\dfrac{r_1}{r_k}$, $\quad\varepsilon_k=\varepsilon\left[1+(-1)^k\dfrac{r_1}{r_k}\right]-\varepsilon_1(-1)^k\dfrac{r_1}{r_k}$.

3.9. $\omega_k=\omega\left[1+(-1)^k\dfrac{R}{r_k}\right]-\omega_0(-1)^k\dfrac{R}{r_k}$, $\quad\varepsilon_k=\varepsilon\left[1+(-1)^k\dfrac{R}{r_k}\right]-\varepsilon_0(-1)^k\dfrac{R}{r_k}$,

где $R=2\sum\limits_{i=1}^{n}r_i-r_n$.

3.10. $v_A=\omega l_k-\omega_k r_k$, $v_B=\sqrt{(\omega_k r_k)^2+(\omega l_k)^2}$,

$v_C=\omega l_k+\omega_k r_k$, $v_D=\sqrt{(\omega_k r_k)^2+(\omega l_k)^2}$;

$w_A=\sqrt{(-\omega^2 l_k+\omega_k^2 r_k)^2+(\varepsilon l_k-\varepsilon_k r_k)^2}$,

$w_B=\sqrt{(\omega^2 l_k+\varepsilon_k r_k)^2+(\varepsilon l_k-\omega_k^2 r_k)^2}$,

$w_C=\sqrt{(\omega^2 l_k+\omega_k^2 r_k)^2+(\varepsilon l_k+\varepsilon_k r_k)^2}$,

$w_D=\sqrt{(-\omega^2 l_k+\varepsilon_k r_k)^2+(\varepsilon l_k+\omega_k^2 r_k)^2}$, где $l_k=2\sum\limits_{i=1}^{k}r_i-r_1-r_k$.

3.11. $v^2=\left[\dfrac{v_A+v_B}{2}-\omega_0\left(r+l\cos\dfrac{\varphi}{2}\right)\right]^2+\left[\dfrac{v_A-v_B}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}+\omega_0\dfrac{l_A+l_B}{2}\right]^2$.

3.12. $v=v_0\cos(\varphi/2)$.

3.13. *Решение.* Движение мгновенного центра скоростей по неподвижной центроиде можно представить как сложное: относительное движение — движение точки по подвижной центроиде, переносное движение — движение точки вместе с подвижной центроидой (т. е. вместе с телом). Поэтому для абсолютного ускорения мгновенного центра имеем

$$\mathbf{w}_a=\mathbf{w}_r+\mathbf{w}_e+\mathbf{w}_c.$$

Проецируя выражение для ускорения на направление орта касательной к центроидам $\boldsymbol{\tau}$, получаем

$$\mathbf{w}_a\boldsymbol{\tau}=\mathbf{w}_r\boldsymbol{\tau}+\mathbf{w}_e\boldsymbol{\tau}+\mathbf{w}_c\boldsymbol{\tau}.$$

Из условия отсутствия скольжения следует, что $\mathbf{w}_a\boldsymbol{\tau}=\mathbf{w}_r\boldsymbol{\tau}$. Кроме того, $\mathbf{w}_c\boldsymbol{\tau}=0$, так как $\mathbf{w}_c=2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_r=2(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\tau})\cdot(\mathbf{v}_r\times\boldsymbol{\tau})$. Следовательно, в точке касания $\mathbf{w}_e\boldsymbol{\tau}=0$. По определению переносного движения $\mathbf{w}_e$ в точке касания совпадает с абсолютным ускорением $\mathbf{w}_P$ точки P тела. Поэтому из последнего равенства вытекает, что $\mathbf{w}_P$ направлено по нормали к центроидам.

3.14. $w_n = \dfrac{\left|\left(\mathbf{w}_A \cdot \overrightarrow{PA}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{PA}\right|}$, $|w_\tau| = \left\{ w_A^2 - \dfrac{\left(\mathbf{w}_A \cdot \overrightarrow{PA}\right)^2}{\left|\overrightarrow{PA}\right|^2} \right\}^{1/2}$.

3.15. $\rho = \omega^2 \dfrac{\left|\overrightarrow{PA}\right|^3}{\left|\left(\mathbf{w}_A \cdot \overrightarrow{PA}\right)\right|}$.

3.16. Прямая, соединяющая мгновенные центры скоростей и ускорений.

3.17. Скорости точек в обоих случаях одинаковы; $w_A^{(2)}/w_A^{(1)} = 1+\lambda$, $w_B^{(2)}/w_B^{(1)} = w_D^{(2)}/w_D^{(1)} = \sqrt{1+\lambda^2}$, $w_C^{(2)}/w_C^{(1)} = 1-\lambda$, где $\lambda = r/(R-r)$.

3.18. $\overrightarrow{OA} = [\omega^2(\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_A) + \boldsymbol{\varepsilon} \times (\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_A)]/(\varepsilon^2 + \omega^4)$.

3.19. $\omega^2 = \dfrac{(\mathbf{w}_A - \mathbf{w}_B)\,\overrightarrow{AB}}{AB}$, $\varepsilon = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB} \times (\mathbf{w}_B - \mathbf{w}_A)\right|}{(AB)^2}$.

3.20. $v = \omega\sqrt{l^2 + r^2}$, $w = \sqrt{\varepsilon^2(l^2+r^2) + (\omega^4/4)(r^2+4l^2) - \varepsilon\omega^2 rl}$.

3.22. $v_1 = \omega v t$, $w_1 = \dfrac{v}{R}\sqrt{\omega^4 R^2 t^2 + v^2}$; $v_2 = \sqrt{[v + \omega(vt - R)]^2 + (v - \omega R)^2}$,

$w_2 = R^{-1}\sqrt{[(v-\omega R)^2 - \omega^2 R v t]^2 + \omega^2 R^2 (2v - \omega R)^2}$;

$v_3 = \sqrt{4(v-\omega R)^2 + (v\omega t)^2}$, $w_3 = R^{-1}\sqrt{[2(v-\omega R)^2 - v^2]^2 + \omega^2 v^2 R^2 t^2}$;

$v_4 = \sqrt{[v - \omega(vt + R)]^2 + (v - \omega R)^2}$,

$w_4 = R^{-1}\sqrt{[(v-\omega R)^2 + \omega^2 R v t]^2 + \omega^2 R^2 (2v - \omega R)^2}$.

3.23. $w_C = \dfrac{\omega^2 R}{r}\sqrt{R^2 + \dfrac{(R-r)^4}{a^2 - (R-r)^2}}$.

3.24. $v_C = v$, $w_C = \sqrt{3(9v^4 - 8\omega^2 v^2 r^2 + 64\omega^4 r^2)}\,(9r)^{-1}$.

3.25. $w_n = \dfrac{v_C^2}{R^2\sqrt{x^2+y^2}}\left|x^2 + y^2 - yR\right|$, $w_\tau = \dfrac{1}{R\sqrt{x^2+y^2}}\left[w_C(x^2+y^2) - v_C^2 x\right]$.

3.26. Окружность радиуса $R/2$ с центром в середине отрезка, соединяющего центр диска и точку его касания с прямой (за исключением самой точки касания).

3.27. $\rho = 2\sqrt{x^2+y^2}$.

3.28. Прямая $y = 0$ и окружность $x^2 + (y - r/4)^2 = r^2/16$ (за исключением точки $x = 0$, $y = 0$).

3.29. $v_M = \omega x$, $w_M = \omega^2\sqrt{R^2 + x^2}$, где x — расстояние от точки касания прямой с окружностью до точки M.

3.30. $v_A = 2v\dfrac{R}{r}\sin\dfrac{\beta}{2}$, $w_A = \dfrac{v^2 R}{r^2(R-r)}\sqrt{r^2 + 4R(R-r)\sin^2(\beta/2)}$.

3.31. $v_A = 2(R-r)\,\omega\sin\dfrac{\beta}{2}$, $w_A = \dfrac{\omega^2(R-r)}{R}\sqrt{r^2 + 4R(R-r)\sin^2(\beta/2)}$.

3.32. $v=\sqrt{v_0^2+4\omega(R-r)\sin\frac{\beta}{2}\left[\omega(R-r)\sin\frac{\beta}{2}+v_0\cos\left(\frac{\beta}{2}+\frac{v_0t}{\rho}-\varphi\right)\right]}$,

$$w_y=\frac{v_0^2}{\rho}\cos\left(\frac{v_0}{\rho}t\right)-\omega^2(R-r)\sin\varphi-\omega^2\frac{(R-r)^2}{R}\sin(\beta-\varphi),$$

$$w_x=-\frac{v_0^2}{\rho}\sin\left(\frac{v_0}{\rho}t\right)-\omega^2(R-r)\cos\varphi+\omega^2\frac{(R-r)^2}{R}\cos(\beta-\varphi).$$

3.33. $\omega_1=\dfrac{(\mathbf{v}_B-\mathbf{v}_A)\cdot\mathbf{l}_2}{l_1l_2\sin\varphi}$, $\omega_2=\dfrac{(\mathbf{v}_B-\mathbf{v}_A)\cdot\mathbf{l}_1}{l_1l_2\sin\varphi}$, где $\mathbf{l}_1=\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{l}_2=\overrightarrow{BC}$,

$$\varepsilon_1=\frac{(\mathbf{w}_B-\mathbf{w}_A)\cdot\mathbf{l}_2+\omega_1^2l_1l_2\cos\varphi-\omega_2^2l_2^2}{l_1l_2\sin\varphi},$$

$$\varepsilon_2=\frac{(\mathbf{w}_B-\mathbf{w}_A)\cdot\mathbf{l}_1+\omega_1^2l_1^2-\omega_2^2l_1l_2\cos\varphi}{l_1l_2\sin\varphi}.$$

3.34. $v_0=\omega\sqrt{\dfrac{a^4\sin^2\omega t+b^4\cos^2\omega t}{a^2\sin^2\omega t+b^2\cos^2\omega t}}$.

3.35. $\omega_{\min}=\dfrac{vb^2}{a^2b-h\left(a^2-b^2\right)}$, $\omega_{\max}=\dfrac{va^2}{ab^2+h\left(a^2-b^2\right)}$.

3.36. $\boldsymbol{\omega}=\mathbf{b}\dfrac{(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\tau})}{\rho}$, $\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{b}\left[\dfrac{\dot{\mathbf{v}}\cdot\boldsymbol{\tau}}{\rho}-\dfrac{(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\tau})\dot{\rho}}{\rho^2}\right]$.

3.38. $v=v_0\cos\varphi$.

3.39. $\dot{\varphi}_1=\dfrac{v\cos(\varphi_2-\alpha)}{l_1\sin(\varphi_2-\varphi_1)}$, $\dot{\varphi}_2=\dfrac{v\cos(\varphi_1-\alpha)}{l_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)}$.

3.40. $\dot{\varphi}_1=\dfrac{v\cos(vt/R-\varphi_2)}{l_1\sin(\varphi_2-\varphi_1)}$, $\dot{\varphi}_2=\dfrac{v\cos(vt/R-\varphi_1)}{l_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)}$.

3.41. $v_A(s)=(v/R)\sqrt{4R^2-s^2}$, $w_A(s)=v^2s/R^2$.

§ 4. Движение твердого тела с неподвижной точкой. Общий случай движения твердого тела

4.2. $\varepsilon_\xi=\dot{\omega}_\xi$.

4.3. $v_3=-\dfrac{1}{l^2}\left[(\mathbf{v}_1\cdot\overrightarrow{OA_3})\overrightarrow{OA_1}+(\mathbf{v}_2\cdot\overrightarrow{OA_3})\overrightarrow{OA_2}\right]$.

4.4. $\omega=\sqrt{\omega_1^2+2\omega_1\omega_2\cos\theta+\omega_2^2}$, $\varepsilon=\omega_1\omega_2\sin\theta$.

4.5. $v_C=v_E=\dfrac{a}{\sqrt{2}}(\omega_1+\omega_2\cos\theta)$, $v_D=v_F=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega_1^2+2\omega_1\omega_2\cos\theta+\omega_2^2}$;

$$w_C=w_E=\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{(\omega_1+\omega_2\cos\theta)^4+\omega_2^2\sin^2\theta\,(2\omega_1+\omega_2\cos\theta)^2},$$

$$w_D=w_F=\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\omega_1^2+2\omega_1\omega_2\cos\theta+\omega_2^2\right).$$

4.6. $v_A=0$, $v_B=3\omega_1r$; $w_A=\sqrt{3}\,\omega_1^2r$, $w_B=\sqrt{21}\,\omega_1^2r$.

4.7. $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \varphi_0^2\omega_0^2\cos^2\omega_0 t}$, $\varepsilon = \varphi_0\omega_0\sqrt{\omega_0^2 + (\omega_1^2 - \omega_0^2)\cos^2\omega_0 t}$.

4.8. $\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega} + \dfrac{2v}{l^2}\mathbf{l}$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \dfrac{2\mathbf{v}}{l^2}(2v - \omega l)$.

4.9. $\mathbf{v}_A = 2\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_B = -(\omega l/v)\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_C = (1 - \omega l/(2v))\mathbf{v}$;

$\mathbf{w}_A = -(4v^2/l^2)\left[\overrightarrow{OA} + (1 - \omega l/v)\overrightarrow{OB}\right]$,

$\mathbf{w}_B = (4v^2/l^2)\overrightarrow{OA} - \omega^2\overrightarrow{OB}$, $\mathbf{w}_C = -(2l^2)^{-1}(2v - \omega l)^2\overrightarrow{OB}$.

4.10. $\omega_a = \sqrt{3}\omega$, $\mathcal{E}_a = \sqrt{3(\varepsilon^2 + \omega^4)}$; $w_A = r\sqrt{9\varepsilon^2 + 21\omega^4}$, $w_B = 2\sqrt{3}r\omega^2$.

4.11. $w_M^{\text{вр}} = w_N^{\text{вр}} = \left(\omega^2/4r\right)\left(a + r\sqrt{2}\right)\sqrt{a^2 + 2r^2}$; $w_M^{\text{ос}} = 0$,

$w_N^{\text{ос}} = \left(\omega^2 a/2r\right)\sqrt{a^2 + 2r^2}$.

4.12. $v_1 = R^{-1}\sqrt{v^2(R^2 + r^2 + 2Rr\cos\alpha) + \omega^2 r^2 R^2}$, $v_2 = \sqrt{v^2 + \omega^2 r^2 - 2\omega v r\sin\alpha}$,

$v_3 = R^{-1}\sqrt{v^2(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha) + \omega^2 r^2 R^2}$, $v_4 = \sqrt{v^2 + \omega^2 r^2 + 2\omega v r\sin\alpha}$;

$w_1 = w_3 = r\left(\dfrac{v^2}{R^2} + \omega^2\right)$, $w_2 = w_4 = \dfrac{\omega r}{R}\sqrt{R^2\omega^2 + 4v^2}$.

4.13. $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_r + \boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\omega}_r$.

4.14. $\boldsymbol{\varepsilon} = \sum\limits_{k=2}^{N}\sum\limits_{i=1}^{k-1}\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\omega}_k$.

4.15. $\boldsymbol{\varepsilon} = \sum\limits_{i=2}^{n}\dot{\omega}_i\dfrac{\boldsymbol{\omega}_i}{\omega_i} + \sum\limits_{k=2}^{N}\sum\limits_{j=1}^{k-1}\boldsymbol{\omega}_j \times \boldsymbol{\omega}_k$.

4.16. $\dot{x}_1 = r\left(\dot{\alpha}_{11}\alpha_{13} + \dot{\alpha}_{21}\alpha_{23} + \dot{\alpha}_{31}\alpha_{33}\right)$, $\dot{x}_2 = -r\left(\dot{\alpha}_{13}\alpha_{12} + \dot{\alpha}_{23}\alpha_{22} + \dot{\alpha}_{33}\alpha_{32}\right)$.

4.17. $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} = \dfrac{\cos\varphi}{1 - \cos^2\alpha\sin^2\varphi}$, где $\alpha = \int\limits_0^1 \omega_1\,dt + \alpha_0$.

4.18. а) $\omega_x = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi$, $\omega_\xi = \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi$,
$\omega_y = \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi$, $\omega_\eta = -\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi$,
$\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta$; $\omega_\zeta = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta$;

б) $\omega_x = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\cos\theta\sin\psi$, $\omega_\xi = \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\cos\theta\sin\varphi$,
$\omega_y = \dot{\psi} - \dot{\varphi}\sin\theta$, $\omega_\eta = -\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\psi}\cos\theta\cos\varphi$,
$\omega_z = -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\cos\theta\cos\psi$; $\omega_\zeta = \dot{\varphi} - \dot{\theta}\sin\theta$.

4.19. Локсодромия $\operatorname{tg}(\theta/2) = \operatorname{tg}(\theta_0/2)\exp\left[k(\psi - \psi_0)\right]$, где $k = \dfrac{ab(d-c)}{b^2c + a^2d}$.

4.20. В системе координат x, y, z (ось Oz перпендикулярна плоскости, ось Oy направлена по линии касания конуса с плоскостью) имеем $\mathbf{v} = (0, 0, x\omega)$, $\mathbf{w} = (-x\omega^2, 0, -y\omega^2\operatorname{tg}\alpha)$.

4.23. $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1(x - x_2)/(x_1 - x_2) + \mathbf{w}_2(x - x_1)/(x_2 - x_1)$.

4.24. Если O, x, y — произвольная декартова система координат на плоскости, а ψ — угол между вектором $\mathbf{v}$ и осью Ox, то искомые уравнения таковы: $\dot{x} = v(t)\cos\psi$, $\dot{y} = v(t)\sin\psi$, $\dot{\psi} = \omega(t)\operatorname{tg}\alpha$. Окружность радиуса $v/(\omega\operatorname{tg}\alpha)$.

4.25. $\omega_a = \sqrt{\omega^2 + \dfrac{v^2}{h^2 \sin^2\beta}}$, $\varepsilon_a = \sqrt{\dot\omega^2 + \dfrac{v^2}{h^2\sin^2\beta}\left(\dfrac{v}{h\cos\beta} - \omega\right)^2}$.

4.26. $v_A = \omega\sqrt{l^2 + \dfrac{h^2}{\cos^2\beta} + \dfrac{2lh}{\cos\beta}\cos\alpha}$,

$$w_A = \sqrt{(\omega^4 + \dot\omega^2)\left[l^2 + \frac{h^2}{\cos^2\beta} + \frac{2lh}{\cos\beta}\sin\alpha\right] + \left(\frac{v^2}{h\sin\beta\cos^2\beta}\right)^2}.$$

4.28. $\boldsymbol{\omega} = a^{-2}\{((\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)\cdot\mathbf{a})\mathbf{r}_1 - ((\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3)\cdot\mathbf{a})\mathbf{r}_2 + ((\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3)\times\mathbf{r}_2)\mathbf{a}\}$, где $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — радиус-векторы, проведенные из третьей точки к первой и второй соответственно, а $\mathbf{a} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$.

4.29. $\alpha = -\dfrac{(\mathbf{w} - \mathbf{w}_0)(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\varepsilon})}{(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\varepsilon})^2} - \dfrac{(\mathbf{w} - \mathbf{w}_0)\cdot\boldsymbol{\omega}}{(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\varepsilon})^2}\omega^2$, $\beta = -\dfrac{(\mathbf{w} - \mathbf{w}_0)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}}{(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\varepsilon})^2}$, $\gamma = \dfrac{(\mathbf{w} - \mathbf{w}_0)\cdot\boldsymbol{\omega}}{(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\varepsilon})^2}$.

4.32. $\boldsymbol{\omega} = (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\tau})(\boldsymbol{\tau}/\kappa + \mathbf{b}/\rho)$, где ρ — радиус кривизны, а κ — радиус кручения траектории.

4.33. $w_B^{\text{вр}} = \sqrt{2}\Omega^2 h$, $w_B^{\text{ос}} = \sqrt{2}\Omega^2 h$, $w_{B\tau} = 0$, $w_{Bn} = 2\Omega^2 h$.

4.34. $w = \sqrt{6}\, v^2/R$.

4.35. $w_M = \sqrt{(w + 2\omega v)^2 + 2(v^2/R)^2}$.

4.36. В системе координат x, y, z с единичными ортами $\mathbf{i} = \dfrac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\varepsilon}$, $\mathbf{j} = \dfrac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}$, $\mathbf{k} = \dfrac{\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\omega}}{\varepsilon\omega}$ для точки тела с координатами x, y, z $\mathbf{w}_\tau = \dfrac{\varepsilon x y}{x^2 + z^2}\times(-z\mathbf{i} + x\mathbf{k})$, $\mathbf{w}_n = \left(\dfrac{\varepsilon y z}{x^2 + z^2} - \omega^2\right)(x\mathbf{i} + z\mathbf{k}) - \varepsilon z\mathbf{j}$.

4.37. $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot\omega_1\mathbf{i} + \dot\omega_2\mathbf{j} + \dot\omega_3\mathbf{k}$.

4.38. $w_M = \sqrt{3}\,\omega^2 r$, $w_N = 7\omega^2 r$.

4.40. $v_B = \dfrac{\mathbf{v}_A\cdot\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB}\cdot\mathbf{e}}$.

4.41. В системе координат x, y, z, где ось Oz направлена по оси болта,

$$\omega = \frac{v_{Ax} - v_{Bx}}{y_B - y_A} = \frac{v_{By} - v_{Ay}}{x_B - x_A}, \quad v = v_{Az} = v_{Bz}.$$

4.42. а) $\boldsymbol{\omega} = \dfrac{\mathbf{v}_A\times\mathbf{v}_B}{\mathbf{v}_A\cdot\overrightarrow{AB}}$; б) $\boldsymbol{\omega} = \beta\overrightarrow{AB} + (1-\alpha)\dfrac{\mathbf{v}_A\times\overrightarrow{AB}}{AB^2}$, $\beta = \text{const}$.

4.43. Уравнение оси винта имеет вид $y = \omega^2 a/(\omega^2 + \Omega^2)$, $z = (\Omega/\omega)x$, угловая скорость равна $\sqrt{\omega^2 + \Omega^2}$, линейная скорость $-\dfrac{\omega\Omega a}{\sqrt{\omega^2 + \Omega^2}}$.

4.44. Уравнение оси винта имеет вид $y = v_0\omega/\sqrt{\omega^2 + \Omega_0^2}$, $z = (\omega/\omega_0)x$, угловая скорость равна $\sqrt{\omega^2 + \omega_0^2}$, линейная скорость $v_0\omega_0/\sqrt{\omega^2 + \omega_0^2}$.

4.45. Винтовое движение с угловой скоростью $\sqrt{2}\omega$ и с поступательной скоростью $(2v-\omega a)/\sqrt{2}$ вдоль оси винта, уравнение которой: $x=a+v/\omega$, $y=a/2+v/\omega$.

4.46. $\boldsymbol{\omega}=\mathbf{e}\dfrac{v}{r}$, $\mathbf{e}\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

4.47. Уравнение оси винта $z=a$, $y=2a$, угловая скорость $\boldsymbol{\omega}\left(-\dfrac{v}{a},0,0\right)$, линейная скорость $\mathbf{v}(v,0,0)$.

4.48. Уравнение оси винта $x+y=0$, $z=a/2$, угловая скорость равна $\boldsymbol{\omega}=\sqrt{2}\dfrac{v}{a}\mathbf{e}$, $\mathbf{e}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, линейная скорость $\mathbf{v}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}v\mathbf{e}$.

4.49. В системе координат x,y,z с осью Az, совпадающей с $\overrightarrow{AB}$, должны удовлетворяться условия: $(v_{Ax}-v_{Cx})/y_C=(v_{Cy}-v_{Ay})/x_C=\omega$, $v_{iz}=0$, $i=A,B,C$. Уравнение оси вращения $x=-v_{Ay}/\omega$, $y=v_{Ax}/\omega$.

4.51. $\mathbf{v}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v}=0$.

4.53. В системе координат ξ,η,ζ с ортами $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ уравнение оси винта имеет вид $\xi ab-\zeta c=0$, $\eta=a$, угловая скорость равна b, линейная скорость c.

4.55. $w=\sqrt{\left(\dfrac{2\dot{v}_0}{l}f-\dfrac{4v_0}{l}\dot{f}\right)^2+\left(\dfrac{4v_0^2}{l^2}f\right)^2+\left(\ddot{f}-\dfrac{4v_0^2}{l^2}f\right)^2}$.

4.57. $\cos\dfrac{\varphi}{2}=\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\psi}{2}$, $\alpha_1=\dfrac{\cos(\psi/2)\sin(\theta/2)}{\sqrt{1-\cos^2(\theta/2)\cos^2(\psi/2)}}$,

$\alpha_2=\mp\dfrac{\sin(\psi/2)\sin(\theta/2)}{\sqrt{1-\cos^2(\theta/2)\cos^2(\psi/2)}}$, $\alpha_2=\dfrac{\sin(\psi/2)\cos(\theta/2)}{\sqrt{1-\cos^2(\theta/2)\cos^2(\psi/2)}}$,

где φ и α_i — угол и направляющие косинусы оси конечного поворота.

4.61. а) $X=-a/2+\mathbf{x}$, $\mathbf{x}$ — любой вектор с модулем $|\mathbf{x}|=\sqrt{b-a^2/4}$;
б) при $\boldsymbol{\lambda}\times\mathbf{x}=0$ решение вещественно: $x_1=0$, $x_2=1$, при $\boldsymbol{\lambda}\times\mathbf{x}\neq 0$ решений не существует; в) $X=\Lambda$.

4.66. Угол поворота $\alpha=2\arccos\lambda_0$, направляющие косинусы

$\gamma_i=\lambda_i\{1-\lambda_0^2\}^{-1/2}$, $i=\overline{1,3}$, где $\lambda_0=\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\psi+\varphi}{2}$,

$\lambda_1=\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\psi-\varphi}{2}$, $\lambda_2=\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\psi-\varphi}{2}$, $\lambda_3=\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\psi+\varphi}{2}$.

4.67. Угол поворота $\varphi=2\arccos 1/(2\sqrt{2})$, направляющие косинусы оси поворота $(\sqrt{3/7},\sqrt{1/7},\sqrt{3/7})$.

4.68. $\mathbf{r}=\mathbf{i}_1+(\sqrt{3}/2)\mathbf{i}_2+(1/2)\mathbf{i}_3$.

4.69. $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_3=0$, $\lambda_2=-1$.

4.70. Угол поворота $\alpha=2\arccos\lambda_0$, направляющие косинусы
$\gamma_i=\lambda_i/\sqrt{1-\lambda_0^2}$, $i=\overline{1,3}$, где $\lambda_0=(1/\sqrt{2})\sin[\pi/(2\sqrt{2})]$,

$\lambda_1 = (1/\sqrt{2})\sin[\pi/(2\sqrt{2})]$, $\lambda_2 = -(1/\sqrt{2})\cos[\pi/(2\sqrt{2})]$,
$\lambda_3 = (1/\sqrt{2})\cos[\pi/(2\sqrt{2})]$.

4.71. Параметры Родрига–Гамильтона искомого кватерниона

$$\lambda_0 = \cos(\theta/2)\cos(\theta/\sqrt{2}) + (1/\sqrt{2})\sin(\theta/2)\sin(\theta/\sqrt{2}),$$
$$\lambda_1 = \sin(\theta/2)\sin(\theta/\sqrt{2}), \quad \lambda_2 = (-1/\sqrt{2})\cos(\theta/2)\sin(\theta/\sqrt{2}),$$
$$\lambda_3 = \sin(\theta/2)\cos(\theta/\sqrt{2}) - (1/\sqrt{2})\cos(\theta/2)\sin(\theta/\sqrt{2}), \quad \theta = \int_0^t \Omega(\tau)\,d\tau.$$

4.72. $$\lambda_0 = \cos\left(\sqrt{p_0^2+q_0^2}\,t\right)\cos\frac{r_0 t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\sqrt{p_0^2+q_0^2}\,t\right)\sin\frac{r_0 t}{\sqrt{2}},$$
$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\sqrt{p_0^2+q_0^2}\,t\right)\sin\frac{r_0 t}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\sqrt{p_0^2+q_0^2}\,t\right)\sin\frac{r_0 t}{\sqrt{2}},$$
$$\lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\sqrt{p_0^2+q_0^2}\,t\right)\sin\frac{r_0 t}{\sqrt{2}} + \sin\left(\sqrt{p_0^2+q_0^2}\,t\right)\cos\frac{r_0 t}{\sqrt{2}}.$$

4.75. $\boldsymbol{\xi} = -\mathbf{i}_1/\sqrt{3} - \mathbf{i}_2/\sqrt{3} - \mathbf{i}_3/\sqrt{3}$, $\alpha = 120^\circ$.

4.77. $$S = \begin{bmatrix} (\sin t + \cos t)/\sqrt{3} & (\cos t - \sin t)/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ (\cos t - \sin t)/\sqrt{2} & -(\cos t + \sin t)/\sqrt{2} & 0 \\ (\cos t + \sin t)/\sqrt{6} & (\cos t - \sin t)/\sqrt{6} & -\sqrt{2/3} \end{bmatrix}.$$

4.78. $\omega_\tau = -1/\sqrt{3}$, $\omega_n = 0$, $\omega_\beta = \sqrt{2/3}$, $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$, $\Omega_3 = -1$.

4.79. $$\lambda_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(1-\sin t)}, \quad \lambda_1 = \cos t\left[2\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)(1-\sin t)}\,\right]^{-1/2},$$
$$\lambda_2 = (\sin t - 1)\left[2\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)(1-\sin t)}\,\right]^{-1/2},$$
$$\lambda_3 = (1+\sqrt{2})\cos t\left[2\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)(1-\sin t)}\,\right]^{-1/2}.$$

4.80. $$\lambda_0 = \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2},$$
$$\lambda_1 = \cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2},$$
$$\lambda_2 = \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2},$$
$$\lambda_3 = -\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

4.81. $$\lambda_0 = \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2},$$
$$\lambda_1 = \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2},$$
$$\lambda_2 = \cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2},$$
$$\lambda_3 = \cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

4.82. $\lambda_0(t) = \lambda_0 \cos\dfrac{\omega t}{2} - \dfrac{1}{\omega}(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\omega_3)\sin\dfrac{\omega t}{2}$,

$\lambda_1(t) = \lambda_1 \cos\dfrac{\omega t}{2} + \dfrac{1}{\omega}(\lambda_0\omega_1 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2)\sin\dfrac{\omega t}{2}$,

$\lambda_2(t) = \lambda_2 \cos\dfrac{\omega t}{2} + \dfrac{1}{\omega}(\lambda_0\omega_2 + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3)\sin\dfrac{\omega t}{2}$,

$\lambda_3(t) = \lambda_3 \cos\dfrac{\omega t}{2} + \dfrac{1}{\omega}(\lambda_0\omega_3 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1)\sin\dfrac{\omega t}{2}$,

где λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 — параметры Родрига–Гамильтона кватерниона $\Lambda(0)$.

§ 5. Динамика точки

5.2. $r(t) = \dfrac{mv_0^2}{F(1+3\cos^2\alpha)}$, $\varphi = \operatorname{tg}\alpha \ln\left(1 + \dfrac{F\cos\alpha}{mv_0}t\right)$.

5.3. $v_0 = \sqrt{gR\operatorname{sh}4\pi f n}$, n — число оборотов.

5.4. $\ddot{s} + f\left|gx' + (x'y'' - x''y')\dot{s}^2\right|\operatorname{sign}\dot{s} + gy' = 0$ (x', y', x'', y'' — первые и вторые производные от функций $x(s)$ и $y(s)$ по параметру s).

5.5. $v_0 \geqslant \sqrt{2gR(1-2f^2+3fe^{f\pi})/(1+4f^2)}$.

5.6. $v \geqslant \sqrt{(g/a)[(1+2ah)\exp(2f\operatorname{arctg}\sqrt{2ah}) - 1]}$.

5.7. $t = \dfrac{(R+H)^{3/2}}{R\sqrt{2g}}\left[\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\sqrt{(h+R)(H-h)}}{H+R} - \arcsin\sqrt{\dfrac{h+R}{H+R}}\right]$; $\lim\limits_{R\to\infty} t(R) = \sqrt{2(H-h)/g}$ — закон свободного падения в отсутствие сил сопротивления.

5.8. $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\left[\dot{x}_0^2 + \frac{2}{m}\int_{x_0}^{x} F(\xi)\,d\xi\right]^{-1/2} dx = t - t_0$.

5.9. $y = \dfrac{m^2 g}{\beta^2}\ln\left(1 - \dfrac{\beta x}{mv_0}\right) + \dfrac{mgx}{\beta v} + H$; при $\beta \to 0$ $y \to H - \dfrac{g}{2v^2}x^2$.

5.10. $\displaystyle v^2 = v_0^2 e^{-(2\beta/m)(H-h)} + 2gR^2 e^{(2\beta/m)h}\int_h^H \frac{e^{-(2\beta/m)z}}{(R+z)^2}\,dz$.

5.11. $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\left[e^{-(2\beta/m)(x-x_0)}\dot{x}_0^2 + \frac{2}{m}e^{-(2\beta/m)x}\int_{x_0}^{x} e^{(2\beta/m)\xi}\Phi(\xi)\,d\xi\right]^{-1/2} dx = t - t_0$.

5.12. $v = \dfrac{2mg}{\alpha + 2m\lambda\operatorname{cth}\lambda t}$; $v_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} v(t) = \dfrac{2mg}{\alpha + 2m\lambda}$, где $\lambda = \dfrac{\sqrt{\alpha^2 + 4\beta mg}}{2m}$.

5.13. $x = b_1 - \dfrac{a_1}{\omega}\cos(\omega t + \alpha)$, $y = b_2 + \dfrac{a_1}{\omega}\sin(\omega t + \alpha)$, $z = b_3 + a_2 t$, где $\omega = \dfrac{eH}{cm}$, а a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 и α — произвольные постоянные.

5.14. В системе $Oxyz$, где Ox направлена вверх по вертикали, а Ox — по вектору напряженности $\mathbf{H}$, уравнения движения имеют вид

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t,\ \ y = y_0 + \frac{\dot{z}_0}{\omega}(1-\cos\omega t) + \frac{1}{\omega}\left(\dot{y}_0 + \frac{g}{\omega}\right)\sin\omega t - \frac{gt}{\omega},$$

$$z = z_0 - \frac{1}{\omega}\left(\dot{y}_0 + \frac{g}{\omega}\right)(1-\cos\omega t) + \frac{\dot{z}_0}{\omega}\sin\omega t,\ \text{где}\ \omega = eH/(mc)$$

(c — скорость света).

5.15. $z_{\max} = \dfrac{\sqrt{v_0^2\omega^2 + g^2} - g}{\omega^2}$, где $\omega = eH/(mc)$ (c — скорость света).

5.16. $h > \dfrac{g + \sqrt{v_0^2\omega^2 + g^2}}{\omega^2}$, где $\omega = eH/(mc)$ (c — скорость света).

5.17. Высота H определяется из уравнения

$$2mgH^2 - \left(mv_0^2 + eE_0 z_0\right)H + eE_0 z_0^2 - mz_0\left(v_0^2 - 2gH\right) = 0.$$

5.18. Движение происходит по конусу, ось которого направлена по вектору $\mathbf{a} = m(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0) - \dfrac{eq}{c}\dfrac{\mathbf{r}_0}{r}$ (c — скорость света), а угол 2θ при вершине определяется углом между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{r}_0$. В сферических координатах движение определяется уравнениями

$$r = \frac{1}{r_0}\sqrt{r_0^4 + 2tr_0^3\dot{r}_0 + t^2\left(a^2\omega^2 + r_0^2\dot{r}_0^2\right)},$$

$$\theta \equiv \arccos\frac{\gamma}{a},\quad \varphi = \frac{1}{\omega}\operatorname{arctg}\frac{r_0\left(r_0 + \dot{r}_0 t\right)}{a\omega t}.$$

5.22. а) $l\ddot{\psi} + 2\dot{l}\dot{\psi} = (\beta/m)(l\dot{\psi} - u\sin\psi)$,

б) $l\ddot{\psi} + 2\dot{l}\dot{\psi} = \dfrac{\mu g\left(l\dot{\psi} - u\sin\psi\right)}{\sqrt{\dot{l}^2 + l^2\dot{\psi}^2 + u^2 - 2u\left(\dot{l}\cos\psi + l\dot{\psi}\sin\psi\right)}}$.

§ 6. Изменение импульса и момента импульса системы

6.1. Эллипс.

6.2. Эллипс.

6.3. $\widetilde{x}_1 = -(m_2/m_1)a\operatorname{ch}t$, $\widetilde{y}_1 = -(m_2/m_1)b\operatorname{sh}t$; $\widetilde{x}_2 = a\operatorname{ch}t$, $\widetilde{y}_2 = b\operatorname{sh}t$.

6.4. $f_1 \geqslant fm/(M+m)$.

6.5. $m = 3Mw_0/(2w_0 + g)$.

6.6. $\mathbf{P} = -m\mathbf{v}$.

6.7. $t = 2v\sin\alpha/[g(1-\lambda)]$, $L = v^2\sin 2\alpha/[g(1-\lambda)]$.

6.8. $R_x = ml\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta - \omega^2\sin\theta\right)$, $R_y = ml\left(2\dot{\theta}\omega\cos\theta + \dot{\omega}\sin\theta\right)$, $R_z = m\left(g - l\ddot{\theta}\sin\theta - l\dot{\theta}^2\cos\theta\right)$.

6.11. $\mu_1 = M\dfrac{V_{234C}}{V_{1234}}$, $\mu_2 = M\dfrac{V_{314C}}{V_{1234}}$, $\mu_3 = M\dfrac{V_{124C}}{V_{1234}}$, $\mu_4 = M\dfrac{V_{123C}}{V_{1234}}$, где M — масса всей системы, V_{ijks} — объем тетраэдра, образованного точками $i, j, k, s = \overline{1,4}$.

6.13. $\omega = \dfrac{3(1+k)}{13+3k}\,\omega_0$.

6.15. $y_B(t) = y_0\left[\dfrac{x_A(t)}{x_0}\right]^{m_1/m_2}$.

6.16. $T = \dfrac{1}{\omega}\arcsin\left[\dfrac{2a\omega^2}{g}(2-\ln 3)\right]$.

6.17. $\rho = \sqrt{-\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}}\,R$.

6.18. $F = (m/2)\,a\omega^2\sin\omega t$.

6.19. $v_{\varphi_1}/v_{\varphi_2} = \alpha$.

6.24. $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega} + (m/J)\,(\overrightarrow{AC} \times \mathbf{v}_A)$.

6.28. а) $w_C = \dfrac{4}{9}g,\ \varepsilon = \dfrac{4}{9}\dfrac{g}{R}$; б) $w_C = \dfrac{9}{8}g,\ \varepsilon = \dfrac{7}{4}\dfrac{g}{R}$.

6.29. $w_C = \dfrac{2g\sin\alpha}{3+\gamma+f(1-\gamma)},\ N = \dfrac{(1-\gamma)mg\sin\alpha}{3+\gamma+f(1-\gamma)}$.

6.30. $4fgt(\omega_0 r - v_0) - (\omega_0 r + v_0)^2 = 0$, если $v_0 < \omega_0 r < 3v_0$;
$fgt - 2v_0 = 0$, если $3v_0 \leqslant \omega_0 r$.

6.31. а) Окружность радиуса $Mr/(M+m)$ с центром в центре инерции системы.
б) $\rho = \dfrac{2Mr}{M+m}\,\dfrac{\sin\sqrt{1+\sigma}\,\psi}{\sqrt{1+\sigma\cos^2\sqrt{1+\sigma}\,\psi}}$ $\left(\sigma = \dfrac{8m}{M+m}\left(\dfrac{r}{R}\right)^2\right)$, где ρ и ψ — полярные координаты жука в системе, полюс которой совпадает с начальным положением центра диска.

6.33. $r(\psi) = f(\varphi(\psi))\,\dfrac{m}{(m+M)}$, $\dfrac{d\varphi}{d\psi} = 1 + \dfrac{mM}{J(m+M)}\,f^2(\varphi)$, где r, φ — полярные координаты центра инерции фигуры.

6.34. $m\ddot{x} - ml\ddot{\varphi}\sin\varphi - m\dot{\varphi}^2 l\cos\varphi = R_x$, $m\ddot{y} + ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - m\dot{\varphi}^2 l\sin\varphi = R_y$, $J\ddot{\varphi} + ml(\ddot{y}\cos\varphi - \ddot{x}\sin\varphi) = M_z$, где R_x, R_y, M_z — компоненты главного вектора и главного момента внешних сил.

6.36. $\Omega = -J_2\omega_0/(J_1+J_2)$.

6.37. $\Omega = -J_2\omega_0/(J_1+J)$.

6.38. $J(t)\ddot{\varphi} + (dJ(t)/dt)\dot{\varphi} = -mg\,l(t)\sin\varphi$.

6.39. $l(t) = l_0 + g\cos\omega t/(2\omega^2)$.

6.40. $2(R-r)\ddot{\varphi} + \rho\dot{\alpha}^2\sin(\varphi-\alpha) + \rho\ddot{\alpha}\cos(\varphi-\alpha) = 0$,
$(R-r)\dot{\varphi}^2 + \rho\dot{\alpha}^2\cos(\varphi-\alpha) - \rho\ddot{\alpha}\sin(\varphi-\alpha) \geqslant 0$.

6.42. $\omega = v/\rho$.

§ 7. Изменение кинетической энергии. Смешанные задачи

7.1. $T = (1/2)\,mv_0^2\,(1+\omega^2 t^2) + (1/2)\,ma\omega v_0 + (1/6)\,(ma^2 + Ml^2)\omega^2.$

7.3. $T = \dfrac{1}{6}\,(M+3m)\,l^2\omega_1^2 + \dfrac{1}{2}\,m\,r^2\omega_2^2 + \dfrac{1}{4}\,mr^2(\omega_1+\omega_2)^2 + mlr\omega_1\omega_2\cos\omega_2 t.$

7.4. $T = \omega^2[\mu(l+r-\rho)^2 + (3/4)ml^2 + (1/6)Ml^2].$

7.5. $$T = \frac{1}{2}\left\{\sum_{k=1}^{n} m_k\left(r_1 + 2\sum_{i=2}^{k-1} r_i + r_k\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \times \right.$$
$$\left. \times\left[r_k + (-1)^{n-k+1}\left(r_1 + 2\sum_{i=2}^{n} r_i\right)\right]^2 + \frac{1}{3}M\left(r_1 + 2\sum_{i=2}^{n-1} r_i + r_n\right)^2\right\}\omega_0^2.$$

7.6. $$T = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=2}^{n} m_k\left(r_1 + 2\sum_{i=2}^{k-1} r_i + r_k\right)^2 + \frac{1}{3}M\left(r_1 + 2\sum_{i=2}^{n-1} r_i + r_n\right)^2\right]\omega_0^2 +$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n} m_k\left[\omega_0 r_k + (-1)^{k-1} r_1(\omega_1 - \omega_0)\right]^2 + \frac{1}{4}m_1 r_1^2\omega_1^2.$$

7.7. $p = m\sqrt{(\dot{l} - r\dot{\varphi})^2 + l^2\dot{\varphi}^2}$, $K_A = \dfrac{3}{2}\,mr\,(\dot{l} - r\dot{\varphi})$, $T = \dfrac{3}{4}\,m\,(\dot{l} - r\dot{\varphi})^2 + \dfrac{m}{2}\,l^2\dot{\varphi}^2.$

7.9. $A = -\alpha\pi a^2.$

7.16. $f_i = \mathrm{const}\ (i = \overline{1,3}).$

7.19. $\Pi = \Phi(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z)$, где $\Phi(\xi) = \displaystyle\int F(\xi)\,d\xi$, а постоянные α_i пропорциональны a, b и c соответственно и удовлетворяют условию $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$.

7.20. Увеличится на $m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_0$.

7.21. $A_1 = 0{,}92\,A_2$.

7.26. $v = \sqrt{2\gamma M\left(\sqrt{R^2+l^2} - R\right)\left(R\sqrt{R^2+l^2}\right)^{-1}}$, где γ — постоянная тяготения.

7.27. $v = \sqrt{\dfrac{3a^2}{3Ma^2 + 4ml^2\sin^4\varphi}}\sqrt{2mgl(\sin\varphi_0 - \sin\varphi) - ca^2(\mathrm{ctg}\,\varphi - \mathrm{ctg}\,\varphi_0)^2}.$

7.28. $v_1/v_2 = \sqrt{(7r^2 + 5R^2 - 10Rr)/[7(R-r)^2]}$; $R = 2r$.

7.29. $v_D = \sqrt{(3\sqrt{3}/5)\,g\,l}.$

7.30. $v = l\sqrt{3g\,(h_0 - h)/(l^2 + 3h^2)}.$

7.31. $v = n\sqrt{\dfrac{12g\,(H_0 - H)(2\,P_1 + P_2)}{12n^2 P_1 + P_2\,[4n^2 - 1 + 4n^2 l^2/(4n^2 l^2 - H^2)]}}.$

7.32. $\Delta\mathbf{p} = -m\mathbf{v}_C$, $\Delta T = -mv_C^2/2$, где $\mathbf{v}_C$ — скорость центра инерции фигуры до закрепления.

7.35. $N = mg\,(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0).$

7.38. $\varphi_{\min} = \arccos\left[\left(\sqrt{a^2\omega_0^4 + 36g^2} - a\omega_0^2\right)/(6g)\right]$;

при $\omega_0 \gg \sqrt{(g/a)}$ $\varphi_{\min} \approx \arccos\left[3g\,/\left(a\omega_0^2\right)\right].$

7.40. $h^3 - \dfrac{E\,l}{mga}\,h^2 - l^2 h + \dfrac{l^3}{2Jmga}\,(2JE - K^2) = 0,$

$\left[\dfrac{E}{2mga} - \sqrt{\left(\dfrac{E}{2mga}\right)^2 + 1}\right] l \leqslant h \leqslant 0.$

7.41. $\omega = \dfrac{2m}{R}\sqrt{\dfrac{2gh}{(M+3m)[M+(M+3m)\operatorname{tg}^2\alpha]}}.$

7.42. $\alpha_{\max} = \arccos\left[\left(7v_0^2 + 10gr\right)/\left(17gr\right)\right].$

7.43. $\alpha_{\max} = \arccos\left[\left(7v_0^2 + 10g\,(r\cos\beta + l\sin\beta)\right)/\left(17gr\right)\right].$

7.44. $\varphi < 2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1+33f^2}-1}{11f}$; $v = \sqrt{\dfrac{4}{3}g\,(R+r)\,(1-\cos\varphi)}$;

$N = mg\,(7\cos\varphi - 4)/3$; $F = mg\sin\varphi/3.$

7.45. Отрыву при качении без проскальзывания соответствовал бы угол $\varphi = \arccos(4/7)$.

7.46. $v_C = \sqrt{2gl\sin\alpha_0\,(27+\sin^2\alpha_0)}\,/6.$

7.47. $\omega_0 = 4\sqrt{\dfrac{g\,\left(a^2+b^2\right)\left(\sqrt{2\,(a^2+b^2)}-2\,b\right)}{15\,b^4+22\,a^2b^2-a^4}}.$

7.48. $\overline{T} = (1/3)mgh.$

7.49. $\overline{T} = A^2/(4m\omega^2).$

7.53. Для величин $T(\tau/2)$, $\overline{T}$ и $T(t')$ выполняются неравенства $T(\tau/2) < \overline{T} < T(t')$, поскольку $\overline{T} = (m/6)\left(v_0^2 + v_1^2 + v_0 v_1\right)$, $T(\tau/2) = \overline{T} - (m/24)\times(v_1 - v_0)^2$, $T(t') = \overline{T} + (m/12)\,(v_1 - v_0)^2$.

7.54. $t_1 = \left(\sqrt{2m\overline{T}} - mv_0\right)/F.$

7.58. *Решение.* Согласно теореме о вириале $2\overline{T} = -\overline{\sum\limits_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i\cdot\mathbf{r}_i}$, где $\overline{T}$ — средняя кинетическая энергия системы, $\mathbf{F}_i$ — сила, действующая со стороны стенки сосуда, и $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор i-й молекулы. По условию задачи $2\overline{T} = 2N\varepsilon$; здесь $N = nV$ — общее число молекул во всем объеме V сосуда. Очевидно, что $d\mathbf{F}_K = -\mathbf{n}_K\,p_K\,dS$, где $\mathbf{n}_K$ — орт внешней нормали в точке K стенки, а p_K — давление в этой точке; тогда

$$\overline{\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i\cdot\mathbf{r}_i} = -\oiint\limits_{(S)} p\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}\,dS = -\oiint\limits_{(S)}\overline{p}\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}\,dS.$$

По формуле Гаусса–Остроградского

$$\oiint\limits_{(S)}\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}\,dS = \iiint\limits_{V}\operatorname{div}\mathbf{r}\,dV = 3\iiint\limits_{V}dV = 3V;$$

следовательно, $2N\varepsilon = 3\overline{p}\,V$, и окончательно получаем $\overline{p} = (2/3)\,n\varepsilon$.

7.62. $T = (m/6)\,l^2\left[4\omega_1^2 + \omega_2^2 + 3\omega_1\omega_2\cos(\omega_2 - \omega_1)t\right].$

7.63. $\Omega = \sqrt{\dfrac{3g}{l}\left(\cos\varphi - \cos\varphi_0 + \dfrac{\omega_0^2 \sin^2\varphi_0}{\sin^2\varphi}\left(\sin^2\varphi + \sin^2\varphi_0 \operatorname{ctg}^2\varphi\right)\right.}$;

$$T = -\frac{mg}{4}\sin\varphi, \quad S = \frac{mg}{2}\left(5\cos\varphi - 3\cos\varphi_0\right) + \frac{m\omega_0^2 l}{2}\sin^2\varphi_0.$$

§ 8. Динамика точки в центральном поле

8.1. $v = \sqrt{\dfrac{2gR^2(H-h)}{(R+H)(R+h)}}$.

8.3. $H \approx 5{,}63\,R$, где R — радиус Земли.

8.4. Коническое сечение $r = p/(1+e\cos\varphi)$, где параметр $p = K/(m\alpha)$ и эксцентриситет $e = \sqrt{1+2EK^2/(m\alpha^2)}$ определяются из начальных данных.

8.6. Нет.

8.7. $r^* = 2\gamma M/c^2$.

8.8. $\dot\varphi_{\max}/\dot\varphi_{\min} = (1+e)^2/(1-e)^2$.

8.10. $p = p_0$, $\Delta e \approx \dot r_0 p_0 \Delta q/(e_0 mgR^2)$, R — радиус Земли.

8.11. $K_0 = (m/R)\sqrt{\alpha/8}$.

8.13. В центральной системе $E = \dfrac{1}{2}\dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2 - \dfrac{\gamma m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} < 0$.

8.14. $v_{10} = m_2/\delta$, $v_{20} = m_1/\delta$, где $\delta = \sqrt{(m_1+m_2)r_0/\gamma}$, γ — постоянная тяготения.

8.16. Произвольная зависимость от $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2$, t.

8.20. $F(r) = -\alpha/r^2 + \beta/r^3$.

8.21. $\theta = \arccos\dfrac{\left(mv_\infty^2 d\right)^2 - Q^2q^2}{\left(mv_\infty^2 d\right)^2 + Q^2q^2}$.

8.22. $\theta = \arccos\dfrac{\left(dv_\infty^2\right)^2 - (\gamma M)^2}{(\gamma M)^2 + \left(dv_\infty^2\right)^2}$.

8.23. $v_0 = \sqrt{\dfrac{gR}{\cos\alpha\,(\sin\alpha + \cos\alpha)}}$; $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{8}$.

8.24. $v_0 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}\sqrt{\dfrac{gR}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(\pi/4+\varphi/2)}}$.

8.25. $e = \dfrac{\sin\alpha}{\sin(\pi/4+\alpha-\varphi/2)}$, $p = \dfrac{R}{1+\operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}(\pi/4+\varphi/2)}$; $0 < \alpha < \dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{\varphi_0}{4}$.

8.26. $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\varphi}{4}$; $e = \dfrac{\sin(\pi/8+\varphi/4)}{\sin(3\pi/8-\varphi/4)}$, $p = R\left[1 + \dfrac{\cos(3\pi/8-\varphi/4)}{\cos(\pi/8-\varphi/4)}\right]$.

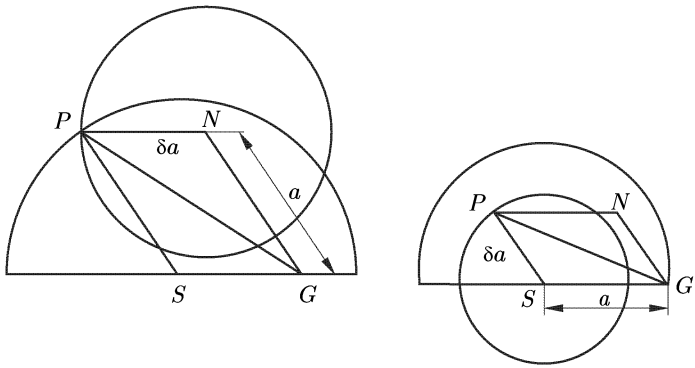
8.27. $r = \dfrac{p}{1+e\cos(\omega\varphi+\gamma)}$, $p = \text{const}$; $e = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$.

$\omega^2 = 1 + 2\beta/\left(mK_0^2\right)$, $K_0 = |\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0|$.

8.28. $\varepsilon = 2e$, $\Delta\varphi = 43''$.

8.29. $\lambda \approx 309^\circ 6'$.

8.30. См. рисунок. $a_i = \delta_i a_0$ $(i = 1, 2)$ для внутренних планет, $a_j = a_0/\delta_j$ $(i = 3, 4, 5)$ для внешних планет, где a_i — средний радиус орбиты планеты, а a_0 — средний радиус орбиты Земли.



К задаче 8.30

8.32. $R = \sqrt{2}l$.

8.33. $E = -\gamma m/(2a)$, где γ — постоянная, зависящая от массы Земли.

8.34. $\Delta v_1 = \sqrt{\dfrac{\alpha}{R_1}}\left(\sqrt{\dfrac{2R_2}{R_1+R_2}} - 1\right)$, $\Delta v_2 = \sqrt{\dfrac{\alpha}{R_2}}\left(1 - \sqrt{\dfrac{2R_1}{R_1+R_2}}\right)$,

где α — параметр, задающий потенциальную энергию спутника $\Pi = -\dfrac{\alpha m}{r}$.

8.35. Круговая орбита радиуса r_0.

8.36. $e = \dfrac{H-h}{2R+H+h}$, $p = \dfrac{2(R+H)(R+h)}{2R+H+h}$, где R — радиус Земли.

8.37. $E = -\dfrac{mgR^2}{2R+H+h}$, $K = mR\sqrt{\dfrac{2g(R+H)(R+h)}{2R+H+h}}$, R — радиус Земли.

8.38. $\mathbf{K}_0(t) = \mathbf{K}_0(t_0)\exp[-\beta(t-t_0)/m]$.

8.39. $v^2 = \dfrac{2\alpha}{m}\left(\dfrac{1}{R+h} + \dfrac{E_0}{\alpha}\right)$.

8.40. $v = v_C \exp\left(-\dfrac{ks}{m}\right)$, где v_C — начальное значение секториальной скорости.

8.41. Сила притяжения $\mathbf{F} = -\dfrac{mv_C^2(\omega^2+1)}{r^3}\dfrac{\mathbf{r}}{r}$, $v_C = r^2\dot{\varphi}$.

8.42. $v = v_C \exp\left(-\dfrac{\beta t}{m}\right)$, где v_C — начальное значение секториальной скорости.

8.43. $\dot{\varphi} = \dfrac{2v_C}{r^2}\exp(-\beta t/m)$.

8.44. $r = \dfrac{1}{a\cos\omega\varphi + b\sin\omega\varphi}$, $1 + \dfrac{2\alpha}{mc^2} = \omega^2 > 0$;

$$r = \frac{1}{ae^{i\omega\varphi} + be^{-i\omega\varphi}}, \quad 1 + \frac{2\alpha}{mc^2} = -\omega^2 < 0;$$

$$r = \frac{1}{a\varphi + b}, \quad 1 + \frac{2\alpha}{mc^2} = 0,$$ где a и b — произвольные постоянные, $c = r^2\dot{\varphi}$.

8.45. Гипербола.

8.46. $F(r) = \dfrac{mc^2}{r^2}\left(\psi(r) - \dfrac{1}{r}\right), \quad c = r^2\dot{\varphi}.$

8.47. $\dfrac{1}{r} = A\sin\varphi + B\cos\varphi + \dfrac{\alpha}{mc^2}\displaystyle\int_0^{\varphi} \sin(\varphi - \tau)\,\psi(\tau)\,d\tau,$ где постоянные A и B находятся из начальных условий.

8.48. $\dfrac{1}{r} = A\sin\omega\varphi + B\cos\omega\varphi + \dfrac{\alpha}{mc^2\omega}\displaystyle\int_0^{\varphi} \sin[\omega(\varphi - \tau)]\,\psi(\tau)\,d\tau,$

где $\omega = \sqrt{1 + \beta/(mc^2)}$, A и B — произвольные постоянные.

8.49. $e = \Delta v/v, \quad \varphi = -\pi/2.$

8.50. $p = R(v - \Delta v)^2/v^2, \quad e = \Delta v\,(2v - \Delta v)/v^2, \quad \varphi = \pi.$

8.51. $r_1 < r_2.$

8.52. $p = p_0(1+\lambda)^2, \quad e = \sqrt{1 + (1+\lambda)^2\left[e_0^2 - 1 + (mv_0^2 p_0/\alpha)\,(\lambda^2 + 2\lambda)\right]}.$

8.53. $q_1 = -q_2 = m\sqrt{(\alpha/p)}\left[\sqrt{1-e} - (1-e)\right], \quad t_{\min} = \psi\sqrt{p^3/[\alpha(1-e)^3]}$, где α — параметр, задающий потенциальную энергию $\Pi = -\alpha m/r$.

8.54. $\Delta v = v$. Импульс сообщается в точке пересечения орбиты с плоскостью экватора.

8.57. $\ddot{J} = 2E_0 + 2T$, где T — кинетическая энергия системы.

8.58. $h = 35\,870$ км.

8.59. $\Pi = -\dfrac{\mu m}{R} - \dfrac{\mu}{2R^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{3} J_k - \dfrac{3}{2}\dfrac{\mu}{R^3}\sum_{k=1}^{3} J_k\gamma_k^2, \quad \mathbf{M}_C = \sum_{k=1}^{3} M_k\mathbf{e}_k,$

$$M_1 = \frac{3\mu}{R^3}(J_3 - J_2)\gamma_2\gamma_3, \quad M_2 = \frac{3\mu}{R^3}(J_1 - J_3)\gamma_1\gamma_3, \quad M_3 = \frac{3\mu}{R^3}(J_2 - J_1)\gamma_1\gamma_2,$$

где μ — произведение всемирной постоянной на массу центра O, $\gamma_k = \cos(\mathbf{R}, \mathbf{e}_k)$.

8.60. $CA = (l^2/R)\cos\psi$, ψ — угол между $\overrightarrow{OC}$ и стержнем.

§ 9. Динамика относительного движения

9.4. $\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = \pi,\ \varphi_3 = \arccos[g/(\omega^2 R)]$ при $\omega^2 \geqslant g/R$.

9.5. $\omega^2 = g\,\mathrm{tg}\,\varphi_0/(a + r\sin\varphi_0), \quad v = r\dot{\varphi} = \sqrt{2E_0 + 2gr\cos\varphi + \omega^2(a + r\sin\varphi)^2},$
где $E_0 = -gr\cos\varphi_0 - (\omega^2/2)(a + r\sin\varphi_0)^2$.

9.6. $\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = \pi,\ \varphi_3 = \arccos[g/(\omega^2(R-r))]$ при $\omega^2 \geqslant g/(R-r)$.
$3(R-r)\ddot{\varphi} - \omega^2(R-r)\sin 2\varphi + 2g\sin\varphi = 0.$

9.7. $\operatorname{tg}\varphi_k = \dfrac{w}{g}$ $(k = \overline{1,n})$.

9.8. $w > g\operatorname{tg}\alpha$.

9.9. $v = \sqrt{v_0^2 + (4/3)(g+w)(R-r)(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}$.

9.11. $\ddot{\varphi} + \left[\omega_0^2 - (a/l)\,\omega^2 \sin\omega t\right]\sin\varphi = 0$, $\omega_0^2 = g/l$.

9.12. $l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi + a\cos\varphi - A\omega^2 \sin\omega t\cos\varphi = 0$.

9.13. $v(t) = v_0 + \dfrac{g}{\omega_0}\ln|\cos\omega_0 t|$.

9.14. $F = (M+m)\,g\operatorname{tg}\omega_0 t + m\omega_0^2 l\sin\omega_0 t$.

9.15. $v = \sqrt{v_0^2 - \dfrac{2\mu}{mr_0} - \omega^2 r_0^2 + \dfrac{2\mu}{mr} + \omega^2 r^2}$.

9.16. Сила трения $F = (m/3)(g\cos\varphi + l\omega^2)$, сила нормальной реакции $N = mg\sin\varphi - m\omega^2 r + 2m\omega\sqrt{(2/3)\,\omega^2 l^2 + (4/3)\,gl\cos\varphi}$.

9.17. $T = \dfrac{2}{\omega}\ln\dfrac{\omega L + \sqrt{v_0^2 + \omega^2(L^2 - l^2)}}{v_0 + \omega l}$.

9.18. $0 \leqslant k < \omega\sqrt{\dfrac{L^2 - l^2}{v_0^2 + \omega^2(L^2 - l^2)}}$.

9.19. $t = \displaystyle\int\sqrt{\frac{(df/d\varphi)^2 + f^2(\varphi)}{\gamma + \omega^2 f^2(\varphi)}}\,d\varphi$, где $\gamma = v_0^2 - \omega^2 r_0^2$.

9.20. $x = \left(x_0 + \dfrac{g}{2\omega^2}\right)\operatorname{ch}\omega t + \dfrac{\dot{x}_0}{\omega}\operatorname{sh}\omega t - \dfrac{g}{2\omega^2}\cos\omega t$.

9.21. *Решение.* Если в отсутствие силового поля трубке с шариком сообщить вращение с постоянной угловой скоростью ω, вокруг неподвижной оси, перпендикулярной оси трубки, то с учетом закона Кулона $F_{\text{тр}} = -fN\operatorname{sign} v$ уравнение движения шарика относительно трубки можно записать в форме $m\ddot{x} + 2m|\omega|f\dot{x} - m\omega^2 x = 0$, где x — расстояние шарика от оси вращения, поскольку $N = |J_K| = 2m|\omega|\cdot|\dot{x}|$. Прямолинейное движение шарика в вязкой жидкости под действием активной силы $m\omega^2 x$ будет описываться уравнением того же вида.

9.22. *Решение.* Соединим шарик с осью вращения трубки пружиной жесткости c; тогда уравнение движения шарика относительно трубки будет иметь вид $\ddot{x} + 2\omega f\dot{x} + (c/m - \omega^2)\,x = 0$, где x — расстояние шарика от положения относительного равновесия. При достаточно большой жесткости пружины $c > m\omega^2(1 + f^2)$ из выражения для логарифмического декремента затухания $\left(\text{период } T = \dfrac{2\pi\sqrt{m}}{\sqrt{c - m\omega^2(1+f^2)}}\right)$ находим $f = \dfrac{\alpha}{\omega}\sqrt{\dfrac{c - m\omega^2}{m(4\pi^2 + \alpha^2)}}$, где $\alpha = \ln\left|\dfrac{x_0}{x(T)}\right|$.

9.23. $x = e^{-kt/(2m)}\left[x_0 \operatorname{ch}\frac{\alpha}{2m}t + \frac{1}{\alpha}(kx_0 + 2mv_0)\operatorname{sh}\frac{\alpha}{2m}t\right]$, $|v_0| > \frac{k+\alpha}{2m}|x_0|$, $\alpha = \sqrt{k^2 + 4m^2\omega^2}$.

9.24. $x = A_1 e^{\lambda t} + A_2 e^{-\lambda t}$, где $\lambda = \omega\sqrt{6}/3$.

9.25. $\ddot{x}_1 - x_1(\omega^2 + \Omega^2 \sin^2 \omega t) + g\cos\omega t + f \operatorname{sign}\dot{x}_1[4\Omega^2(x_1\omega\cos\omega t + \dot{x}_1 \sin\omega t)^2 + (x_1\Omega^2 \sin\omega t\cos\omega t + g\sin\omega t - 2\dot{x}_1\omega)^2]^{1/2} = 0$.

9.26. $\Pi = m\left(\mathbf{w}\cdot\mathbf{r} - \frac{1}{2}|\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}|^2\right)$.

9.28. $h = \dfrac{J\varepsilon}{ma\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$.

9.29. $3\ddot{x} = 2\omega^2(t)\,x$, $x = x_0 \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\omega t\right) + \sqrt{\frac{3}{2}}\dot{x}_0 \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\omega t\right)$.

9.30. $x = ay^\gamma$, $0 < \gamma \leqslant 1$.

9.31. Наименьшее значение v определяется из уравнения

$$\int_0^v \frac{\tau\, d\tau}{\sqrt{g^2R^2 + (\tau - \omega R)^4}} = 2\pi f k.$$

В частности, при $\omega = 0$ $v^2 + \sqrt{g^2R^2 + v^4} = gR\exp(4\pi f k)$.

9.32. $m\ddot{x} = F_x + m\omega^2 x + m\omega_x(\omega_x x + \omega_y y)$, $m\ddot{y} = F_y + m\omega^2 y + m\omega_y(\omega_x x + \omega_y y)$, $J_{zz}\ddot{\varphi} = M_z + \omega^2 J_{xy}$, где x, y, φ — координаты центра масс и угол поворота тела во вращающейся системе отсчета.

9.33. $m\ddot{x} = F_x + m(\dot{\omega}y + \omega^2 x) + 2m\omega\dot{y}$, $m\ddot{y} = F_y - m\dot{\omega}x + m\omega^2 y - 2m\omega\dot{x}$, $J_{zz}\ddot{\varphi} = M_z - \dot{\omega}J_{zz}$, где x, y, φ — координаты центра масс и угол поворота тела во вращающейся системе отсчета.

§ 10. Динамика систем переменного состава

10.1. $s = L\left(1 - \frac{v_0^2}{a^2}\right)$.

10.3. $v = \begin{cases} gt/3, & 0 < t \leqslant \sqrt{6H/g}, \\ \sqrt{gH}\,\dfrac{(5+2\sqrt{6})\exp(2t\sqrt{g/H} - \sqrt{6}) - 1}{(5+2\sqrt{6})\exp(2t\sqrt{g/H} - \sqrt{6}) + 1}, & t \geqslant \sqrt{6H/g}. \end{cases}$

10.4. $t = \frac{mp}{2k}\ln\left(\frac{1+pv_1}{1-pv_1}\frac{1-pv_0}{1+pv_0}\right)$, где $p = \frac{1}{u}\sqrt{\frac{k}{\rho S(n-1)}}$ (ρ — плотность воды).

10.5. $R_{Ax} = 0$, $R_{Ay} = P/2 - \mu uh/L$, $R_{By} = P/2 + \mu uh/L$.

10.6. $R_{Ay} = Mg\frac{L-l}{L} + mu\left(\sin\alpha + \frac{h}{L}\cos\alpha\right)$, $R_{Bx} = m(v\cos\beta - u\cos\alpha)$,

$R_{By} = Mg\frac{l}{L} + m(v\sin\beta - u\frac{h}{L}\cos\alpha)$.

10.7. $R_{Ax} = \rho S u(1-\sin\alpha)$, $R_{Ay} = Mg\dfrac{L-l}{L} + \rho S u\dfrac{L\cos\alpha - h}{L}$,

$R_{By} = Mg\dfrac{l}{L} + \rho S u\dfrac{h}{l}$, где ρ — удельный вес воды.

10.8. $v = v_0 r_0^2/r^2$, $r = \left(r_0^4 - 2\delta r_0^2 v_0 t/\pi\right)^{1/4}$.

10.9. *Решение.* Пусть $x(t)$ — координата отверстия B в момент времени t; тогда координата центра инерции трубы $x + L/2$, центра инерции жидкости в трубе $x + (L-l)/2$. Масса жидкости в трубе меняется по закону $m(t) = \rho(L - l(t))S$, относительная скорость истечения составляет $u(t) = -\dot{m}/(S_0\rho)$, масса частицы, вылетающей в момент времени t, равна $dm(t) = -\dot{m}(t)\,dt$. Если частица dm вылетела из трубы в момент времени τ, то в момент времени $t > \tau$ она будет иметь координату $x = x(\tau) + (\dot{x}(\tau) - u(\tau))(t-\tau)$, и, следовательно, сумма $dm_i x_i$ по всем частицам, вылетевшим из трубы к моменту времени t, будет выражаться интегралом

$$-\int\limits_0^t \dot{m}(\tau)\left[x(\tau) + (\dot{x}(\tau) - u(\tau))\,(t-\tau)\right]d\tau.$$

Координата $x_C(t)$ центра инерции вылетевших частиц будет равна отношению этой величины к массе данных частиц $-\int\limits_0^t \dot{m}(\tau)\,d\tau = m(0) - m(t)$. Сумма произведений масс частиц на их координаты x_i для точек трубы вместе с частицами жидкости в ней равна $m_0(x + L/2) + m(t)[x - (L-l)/2]$.

Таким образом, закон движения центра инерции всей системы в конечной (а не дифференциальной!) форме дается интегральным соотношением $m_0(x(t) + L/2) + m(t)[x(t) + (L-l)/2] - \int\limits_0^t \dot{m}(\tau)\left[x(\tau) + (\dot{x}(\tau) - u(\tau))\,(t-\tau)\right]d\tau = At + B$, поскольку проекция главного вектора внешних сил на ось Ox равна нулю. Это соотношение по существу представляет собой интегральное уравнение для функции $x(t)$, описывающей движение трубы. Дифференцируя это соотношение, получаем

$$m_0\dot{x} + \dot{m}\frac{L-l}{2} + m\left(\dot{x} - \frac{\dot{l}}{2}\right) - \int\limits_0^t \dot{m}(\tau)\left[\dot{x}(\tau) - u(\tau)\right]d\tau = A,$$

а повторное дифференцирование дает

$$m_0\,\ddot{x} + \ddot{m}(t)\,\frac{L - l(t)}{2} + m(t)\left(\ddot{x}(t) - \frac{\ddot{l}(t)}{2}\right) + \dot{m}\,u(t) = 0,$$

или

$$(m_0 + m(t))\,\ddot{x} = -[\ddot{m}(t)(L - l(t)) - m(t)\ddot{l}(t) - 2\dot{m}(t)\dot{l}(t) + 2\dot{m}(t)u(t)]/2,$$

где $m(t) = \rho S(L - l(t))$, а $u(t) = S\dot{l}/S_0$. Заметим, что в правой части этого уравнения стоит выражение для реактивной силы.

10.10. $(M+\rho S h(t))\,\ddot{x} = -a\rho S\ddot{h}(t)$.

10.11. $h = \left(h_0 + \dfrac{M}{\rho S}\right)\cos\sqrt{\dfrac{w_0}{a}}\,t - \dfrac{M}{\rho S}$.

10.12.
$$v = \dot{x} = \begin{cases} a\omega\left[\omega t - \dfrac{2M+m_0}{\sqrt{M(M+m_0)}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{M}{M+m_0}}\operatorname{tg}\dfrac{\omega t}{2}\right)\right], & t < t_1, \\ a\pi\omega\left[1 - \dfrac{2M+m_0}{2\sqrt{M(M+m_0)}}\right], & t \geqslant t_1, \end{cases}$$

где $\omega = \pi/t_1$. Заметим, что, каково бы ни было отношение масс M и m_0, при малых значениях t скорость $v > 0$, а при $t > t_1$ скорость $v < 0$, т. е. сначала тележка движется вправо, а затем направление движения меняется.

10.13. $(M+\rho S h(t))\,\ddot{x} = -\rho S\,[a\ddot{h}(t) - (S/S_0)\,\dot{h}^2(t)\cos\alpha]$. Уравнение Мещерского совпадает с этим уравнением на тех интервалах времени, на которых $\ddot{h} \equiv 0$.

10.14.
$$\dot{h}^2 = \frac{S_0 w_0}{S\cos\alpha}\left\{h + \frac{M}{\rho S} + \frac{S_0 a}{2S\cos\alpha} - \right.$$
$$\left. - \left(h_0 + \frac{M}{\rho S} + \frac{S_0 a}{2S\cos\alpha}\right)\exp\left[-\frac{2S\cos\alpha}{S_0 a}(h_0 - h)\right]\right\}.$$

10.15. $[M+m(t)]\,\ddot{x} + \ddot{m}(t)\,[a + l\cos\alpha(t)] - 2\dot{m}(t)\,l\,\dot{\alpha}(t)\sin\alpha(t) - \dot{m}^2(t)\dfrac{\cos\alpha(t)}{\rho S} = 0$.

10.16. $(M+m)\,\ddot{x} - \ddot{m}a\cos\varphi + 2\dot{m}a\dot{\varphi}\sin\varphi = 0$, $(M+m)\,\ddot{y} - \ddot{m}a\sin\varphi - 2\dot{m}a\dot{\varphi}\cos\varphi = 0$,
$$4\frac{d}{dt}\left[\left(J + \frac{mr^2}{2}\right)\dot{\varphi} + \dot{m}a\,(x\sin\varphi - y\cos\varphi)\right] = \dot{m}a^2\dot{\varphi}.$$

10.17. $(M+m)\,\ddot{x} - \ddot{m}a\cos\varphi + 2\dot{m}a\dot{\varphi}\sin\varphi = (\dot{m}^2/S\rho)\sin\varphi$,
$(M+m)\,\ddot{y} - \ddot{m}a\sin\varphi - 2\dot{m}a\dot{\varphi}\cos\varphi = -(\dot{m}^2/S\rho)\cos\varphi$,
$$\frac{d}{dt}\left[\left(J + \frac{mr^2}{2}\right)\dot{\varphi} + \dot{m}a\,(x\sin\varphi - y\cos\varphi)\right] = \dot{m}a^2\dot{\varphi} - \frac{a}{S\rho}\dot{m}^2.$$

10.18. $t = \dfrac{m+\rho L}{\sqrt{\rho P}}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,\Phi\left(\sqrt{2\ln\left(1 + \dfrac{\rho L}{m}\right)}\right)$, где $\Phi(z) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\displaystyle\int_0^z \exp(-x^2/2)\,dx$.

10.19. $v = \sqrt{2\dfrac{P+mgf}{\rho}\ln\left(1 + \dfrac{\rho L}{m}\right) - 2gfL}$.

10.20.
$$v = \frac{\left[v_0\dfrac{\alpha - \sqrt{\Delta}}{2\beta} - \dfrac{\mu u}{\beta}\right] - \left[v_0\dfrac{\alpha + \sqrt{\Delta}}{2\beta} - \dfrac{\mu u}{\beta}\right]\left(\dfrac{M_0 - \mu t}{M_0}\right)^{\sqrt{\Delta}/\mu}}{\left(v_0 + \dfrac{\alpha - \sqrt{\Delta}}{2\beta}\right)\left(\dfrac{M_0 - \mu t}{M_0}\right)^{\sqrt{\Delta}/\mu} - \left(v_0 + \dfrac{\alpha + \sqrt{\Delta}}{2\beta}\right)},$$

где $\Delta = 4\beta\mu u + \alpha^2$;

$$v=-\sqrt{\frac{\mu u}{\beta}}\,\frac{\left(v_0+\sqrt{\frac{\mu u}{\beta}}\right)+\left(v_0-\sqrt{\frac{\mu u}{\beta}}\right)\left(\frac{M_0-\mu t}{M_0}\right)^{2\sqrt{\beta u/\mu}}}{\left(v_0-\sqrt{\frac{\mu u}{\beta}}\right)\left(\frac{M_0-\mu t}{M_0}\right)^{2\sqrt{\beta u/\mu}}-\left(v_0+\sqrt{\frac{\mu u}{\beta}}\right)}\quad \text{при } \alpha=0;$$

$$v=\left(v_0-\frac{\mu u}{\alpha}\right)\left(\frac{M_0-\mu t}{M_0}\right)^{\alpha/\mu}+\frac{\mu u}{\alpha}\quad \text{при } \beta=0.$$

10.21. $(M+m(t))\,\ddot{x}+\dfrac{d^2}{dt^2}\left[m(t)\dfrac{h(t)}{2}\right]+u(t)\dfrac{dm(t)}{dt}=-(M+m(t))g$, где $m(t)=$ $=\rho\pi R^2h(t)$, $u(t)=-(\rho R^2/\rho_0 r^2)\,\dot{h}(t)$.

10.23. $m=m_0/e$, $P_{\max}=mu$.

10.24. $m=m_0\exp(v_0/u-1)$, $P_{\max}=m_0u\exp(v_0/u-1)$.

10.25. $m=m_0/e^2$.

10.26. Масса первой ступени должна быть равной $m_1=M-m_2$, масса второй — равной $m_2=(k+1)^{-1}\left[\sqrt{m_0^2+(1+k)m_0M}-m_0\right]$.

10.27. $\left[M_1+M_2+\dfrac{J}{R_2^2}+m(t)\right]\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{d^2}{dt^2}\left[\dfrac{m^2(t)}{2\pi\rho R_1^2}\right]-\rho Su^2(t)=-(M_1+m(t))g+$ $+M_2g$, $dm/dt=-\rho Su(t)$.

10.28. $\omega(t)=\omega_0\left[\dfrac{2J+\pi R^4\rho h(t)}{2J+\pi R^4\rho h(0)}\right]^{\alpha}+\left[J+\dfrac{1}{2}\pi R^4\rho h(t)\right]^{\alpha}\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{\rho\pi^2R^4l\dot{h}^2(\tau)\,d\tau}{2S\left[J+\pi R^4\rho h(\tau)/2\right]^{\alpha+1}}$,

где $\alpha=(2l^2-R^2)/R^2$, ρ — плотность жидкости, ω_0 — начальная угловая скорость системы.

10.29. $\Delta m=\dfrac{J}{R^2}\left\{\exp\dfrac{(\omega_1-\omega_0)R}{u}-1\right\}$.

10.30. $\dfrac{d}{dt}\left\{M\dfrac{l^2}{3}\dot{\varphi}+\rho h(t)\left[\dfrac{h^2(t)}{12}+\left(l-\dfrac{h(t)}{2}\right)^2\right]\dot{\varphi}\right\}-\rho\dot{h}(t)\,l^2\dot{\varphi}=$

$$=-g\sin\varphi\left[\frac{1}{2}Ml+\rho h(t)\left(l-\frac{h(t)}{2}\right)\right].$$

10.31. $\ddot{\varphi}+(g/l)\sin\varphi=0$.

10.32. Изменение угла φ будет описываться интегродифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}\left[m(t)R^2\frac{d\varphi}{dt}\right]+m_0gR\sin\varphi=-\int_0^t\dot{m}(\tau)\,gR\sin(\varphi(t)-\varphi(\tau))\,d\tau.$$

10.34. *Решение.* Так как $\ddot{K}_0+(g/R)K_0=0$ $(K_0=m(t)R^2\dot{\varphi})$, имеем $K_0(t)=$ $=m_0R^2\dot{\varphi}_0\cos\omega t-m_0R^2\varphi_0\omega\sin\omega t$, $\omega=\sqrt{g/R}$, поскольку до попадания первых

песчинок в чашу $K_0 = m_0 R^2 \dot{\varphi}_0$, $\dot{K}_0(0) = m_0 R^2 \ddot{\varphi}(0) = -m_0 R^2 \ddot{\varphi}^2 \varphi_0$. Поэтому

$$\varphi = \varphi_0 + \int\limits_0^t \left[\frac{m_0}{m(\tau)} \dot{\varphi}_0 \cos\omega\tau - \frac{m_0}{m(\tau)} \varphi_0 \omega \sin\omega\tau \right] d\tau.$$

Если бы на чашу не сыпался песок, то $m(t) \equiv m_0$, и из этого выражения получался бы обычный закон малых колебаний $\varphi = \varphi_0 \cos\omega t + (\dot{\varphi}_0/\omega)\sin\omega t$. При $m = m_0 + \mu t$ после интегрирования получаем

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{m_0}{\mu}\sqrt{\dot{\varphi}_0^2 + \omega^2\varphi_0^2} \left\{ \cos\left(\gamma - \omega\frac{m_0}{\mu}\right) \left[\mathrm{Ci}\left(\omega t + \frac{\omega m_0}{\mu}\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \mathrm{Ci}\,\frac{\omega m_0}{\mu} \right] - \sin\left(\gamma - \frac{\omega m_0}{\mu}\right) \left[\mathrm{Si}\left(\omega t + \frac{\omega m_0}{\mu}\right) - \mathrm{Si}\,\frac{\omega m_0}{\mu} \right] \right\},$$

где $\gamma = \arccos\left(\dot{\varphi}_0 / \sqrt{\dot{\varphi}_0^2 + \omega^2\varphi_0^2}\right)$, а $\mathrm{Si}\,(z)$ и $\mathrm{Ci}\,(z)$ — интегральные синус и косинус.

10.35. *Решение.* Так как $\dot{\varphi}(t) = -(m_0/m(t))\sqrt{\dot{\varphi}_0^2 + \omega^2\varphi_0^2}\cos(\omega t + \gamma)$, где $\omega = \sqrt{g/R}$ и $\gamma = \arccos\left(\dot{\varphi}_0 / \sqrt{\dot{\varphi}_0^2 + \omega^2\varphi_0^2}\right)$, имеем $|\dot{\varphi}(t)| \leqslant \sqrt{\dot{\varphi}_0^2 + \omega^2\varphi_0^2}$. Исследуя функцию

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \sqrt{\dot{\varphi}_0^2 + \omega^2\varphi_0^2} \int\limits_0^t \frac{m_0}{m(t)} \cos(\omega\tau + \gamma)\, d\tau,$$

можно показать, что при любом фиксированном T функции

$$u_1(t) = m_0/m_1(t) \quad \text{и} \quad u_2(t) = m_0/m_2(t),$$

дающие наибольшее и наименьшее значения $\varphi(T)$, кусочно постоянны на интервалах $\left(t_1,\, t_1 + \dfrac{2\pi}{\omega}\right), \ldots, \left(t_1 + \dfrac{2\pi s}{\omega},\, t_1 + \dfrac{2\pi(s+1)}{\omega}\right)$. Отсюда следует, что при любом T выполняется неравенство

$$|\varphi(T) - \varphi_0| < 4\sqrt{\dot{\varphi}_0^2 + \omega^2\varphi_0^2}.$$

§ 11. Динамика твердого тела

11.3. $J_{\xi_i\xi_i} = J_i + m\left(\sum\limits_{j=1}^{3} a_j^2 - a_i^2\right)$, $J_{\xi_i\xi_k} = m a_i a_k$ $(i \neq k)$.

11.4. $\begin{pmatrix} 11 & -4 & 0 \\ -4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$.

11.7. $A = B \leqslant C$.

11.8. 1) $J_x = J_y = J_z = (2/3)Ma^2$;
2) $J_x = M(b^2 + c^2)/3$, $J_y = M(a^2 + c^2)/3$, $J_z = M(a^2 + b^2)/3$;
3) $J_x = Mb^2/3$, $J_y = Ma^2/3$, $J_z = M(a^2 + b^2)/3$;
4) $J_x = J_y = MR^2/4$, $J_z = MR^2/2$;
5) $J_x = J_y = M(R^2/4 + H^2/12)$, $J_z = MR^2/2$;

6) $J_x = J_y = M[(R_1^2 + R_2^2)/4 + H^2/12]$, $J_z = M(R_1^2 + R_2^2)/2$;
7) $J_x = J_y = J_z = (2/5)MR^2$;
8) $J_x = J_y = (3/80)M(4R^2 + h^2)$; $J_z = (3/10)MR^2$.

11.9. а) $J_1 = J_2 = 2m(a^2 + l^2 + al)/3$, $J_3 = 0$;
б) $J_1 = ma^2/2$, $J_2 = 2mh^2/3$, $J_3 = m[a^2/2 + 2h^2/3]$;
в) $J_1 = J_2 = J_3 = ma^2$.

11.11. Одна из главных осей перпендикулярна плоскости, проходящей через ось цилиндра и точку A, а две другие лежат в этой плоскости и составляют с образующей цилиндра углы α и $\frac{\pi}{2} - \alpha$, причем $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{12RH}{15R^2 - 4H^2}$. При $H = R\sqrt{3}$ имеем

$$J = \frac{mR^2}{4}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

11.12. $A_1 = A$, $B_1 = [B + C + \sqrt{(B-C)^2 + 4D^2}]/2$,
$C_1 = [B + C - \sqrt{(B-C)^2 + 4D^2}]/2$; направление соответствующих главных осей определяется векторами

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ (B - B_1)/D \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ (C - C_1)/D \\ 1 \end{pmatrix},$$

заданными в исходной системе координат.

11.14. $J'_{k\nu} = \sum\limits_{i,j=1}^{3} J_{ij}\alpha_{ik}\alpha_{j\nu} \quad (k, \nu = 1, 2, 3)$.

11.15. $K_C = (m\omega/12)\sqrt{(3R^2 + h^2)^2 \sin^2\alpha + 36R^4\cos^2\alpha}$; угол β между осью симметрии цилиндра и вектором момента импульса определяется равенством $\operatorname{tg}\beta = [(3R^2 + h^2)/(6R^2)]\operatorname{tg}\alpha$.

11.16. $K_O = (m\omega/4)\sqrt{R^4\cos^2\alpha + 4(R^2 + 2e^2)^2\sin^2\alpha}$; угол β между вектором момента импульса и плоскостью диска определяется равенством $\operatorname{tg}\beta = 2[(R^2 + 2e^2)/R^2]\operatorname{tg}\alpha$.

11.17. $K_O = m(15R^2 + 4h^2)\omega/12$.

11.18. В системе $Oxyz$, связанной с параллелепипедом, вектор $\mathbf{K}_A$ имеет компоненты

$$K_{Ax} = \frac{ma\omega(b^2 + c^2)}{12\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad K_{Ay} = \frac{mb\omega(a^2 + c^2)}{12\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad K_{Az} = \frac{mc\omega(a^2 + b^2)}{12\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

11.19. $T = \frac{mv^2}{8}(6 + \operatorname{ctg}^2\alpha)$.

11.20. $T = \frac{m\omega^2 r^2}{16}\left(7 + 4\sqrt{2} + \frac{2a^2}{r^2}\right)$; $N_A = \frac{m\omega_1}{8\sqrt{2}a}[\sqrt{2}(r^2 + 2a^2)\omega_1 + 4r^2\omega_2]$,

$N_B = -\frac{m\omega_1}{8\sqrt{2}a}[\sqrt{2}(r^2 - 2a^2)\omega_1 + 4r^2\omega_2]$.

11.21. $T=\dfrac{m}{2}\left[\Omega^2\left(\dfrac{a^2}{4}\right)\operatorname{tg}^2\beta+\left(\dfrac{R^2}{4}+\dfrac{h^2}{12}\right)(\omega\sin\alpha+\Omega\sin(\beta+\alpha))^2+\right.$

$$\left.+\frac{R^2}{2}(\omega\cos\alpha+\Omega\cos(\beta+\alpha))^2\right].$$

11.22. $T=(m/2)(u^2+a^2\omega^2/6)$.

11.23. $T=\dfrac{mb^2}{8}\Omega^2\operatorname{tg}^2\alpha+\dfrac{ma^2}{24}[\omega^2+2\omega\Omega\cos\alpha+\Omega^2(1+\sin^2\alpha\sin^2\omega t)]$.

11.24. $T=\dfrac{mb^2}{8}\Omega^2\operatorname{tg}^2\alpha+\dfrac{ma^2}{48}[\omega^2+2\omega\Omega\cos\alpha+\Omega^2(1+\sin^2\alpha\sin^2\omega t)]$.

11.25. $T=(m\omega^2/8)[4e^2\sin^2\alpha+r^2(1+\sin^2\alpha)]$.

11.26. $T=(m/24)\,(3b^2+8a^2)\,\omega_2^2+(m/3)\,a^2\omega_1(\omega_1+\omega_2)$.

11.27. $T_i=\dfrac{mr^2}{2}\omega^2+\dfrac{mr^2}{2}\omega\omega_i+m\left(a^2+\dfrac{3r^2}{8}\right)\omega_i^2\qquad(i=1,2)$.

11.28. $T=\dfrac{M_1}{M_2}\dfrac{\omega^2L^2}{2}(M_1+M_2)+M_1\dfrac{2H+R}{H+R}\dfrac{R^2}{4}(\omega+\Omega\varphi_0\cos\Omega t)^2$.

11.29. $T=2ml^2\dot\beta^2+m\left[\dfrac{a^2+b^2}{2}+\left(\dfrac{b}{2}+h\right)^2\right](\dot\beta^2+2\dot\alpha^2)$.

11.30. $K_O=(mv/12R)\sqrt{(15R^2+h^2)^2+36R^4\operatorname{ctg}^2\alpha}$,

$T=(mv^2/24R^2)\,[h^2+(15+6\operatorname{ctg}^2\alpha)R^2]$.

11.33. $p_1=p+m(bv_3-cv_2)/A,\quad q_1=q+m(cv_1-av_3)/B,\quad r_1=r+m(av_2-$ $-bv_1)/C$, где (v_1,v_2,v_3), (a,b,c), (p,q,r) и (p_1,q_1,r_1) — компоненты векторов $\mathbf{v}_M$, $\overrightarrow{MC}$, $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ в системе главных осей инерции тела для точки M, а A, B и C — соответствующие моменты инерции.

11.36. $\mathbf{M}_O(t)=\mu(t)\mathbf{K}_O(t)$, где $\mu(t)$ — скалярная функция; вектор $\mathbf{K}_O(t)$ во все время движения перпендикулярен неподвижной плоскости.

11.38. $A\dot p+(C-B)qr=\gamma_3\partial U/\partial\gamma_2-\gamma_2\partial U/\partial\gamma_3,\quad B\dot q+(A-C)pr=\gamma_1\partial U/\partial\gamma_3-$ $-\gamma_3\partial U/\partial\gamma_1,\quad C\dot r+(B-A)pq=\gamma_2\partial U/\partial\gamma_1-\gamma_1\partial U/\partial\gamma_2$, где

$$U=G\iiint\frac{\rho(x,y,z)\,dv}{\sqrt{R^2+2R(x\gamma_1+y\gamma_2+z\gamma_3)+x^2+y^2+z^2}},$$

а интегрирование ведется по области, ограниченной телом.

11.39. $A\dot p+(C-B)\,qr=M_\xi-mw\,(\eta_C\gamma''-\zeta_C\gamma'),\quad\dot\gamma=r\gamma'-q\gamma''$,

$B\dot q+(A-C)\,pr=M_\eta-mw\,(\zeta_C\gamma-\xi_C\gamma''),\quad\dot\gamma'=p\gamma''-r\gamma$,

$C\dot r+(B-A)\,pq=M_\zeta-mw\,(\xi_C\gamma'-\eta_C\gamma),\quad\dot\gamma''=q\gamma-p\gamma'$,

где γ, γ', и γ'' — направляющие косинусы вектора $\mathbf{w}$ в системе главных осей $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, а ξ_C,η_C,ζ_C — координаты центра масс.

11.41. $\dot K_1+K_3\sum\limits_{s=1}^{3}l_{2s}K_s-K_2\sum\limits_{s=1}^{3}l_{3s}K_s=M_1,\ \dot K_2+K_1\sum\limits_{s=1}^{3}l_{3s}K_s-K_3\sum\limits_{s=1}^{3}l_{1s}K_s=$ $=M_2,\ \dot K_3+K_2\sum\limits_{s=1}^{3}l_{1s}K_s-K_1\sum\limits_{s=1}^{3}l_{2s}K_s=M_3$, где $(l_{ij})_{i,j=1}^3$ — матрица, обратная к матрице тензора инерции тела в системе $\xi_1\xi_2\xi_3$.

11.42. $T = \dfrac{A}{(A-C)\,r_0}\left[\dfrac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{M}{(A-C)\,p_0 r_0} + \dfrac{q_0}{p_0}\right)\right],$

$$\omega_э = \sqrt{\left(q_0 + \frac{M}{(A-C)\,r_0}\right)^2 + p_0^2} - \frac{M}{(A-C)\,r_0}.$$

11.44. $K_O = \sqrt{A^2\omega^2\sin^2\alpha + C^2\omega^2\cos^2\alpha + 2Amgl(\cos\beta_0 - \cos\beta)}.$

11.46. $p = F(t)\,\widetilde{p}\left(\int F(t)\,dt\right),\quad q = F(t)\,\widetilde{q}\left(\int F(t)\,dt\right),\quad r = F(t)\,\widetilde{r}\left(\int F(t)\,dt\right),$

где $F(t) = \exp\left(\int f(t)\,dt\right)$, а эллиптические функции $\widetilde{p}(s)$, $\widetilde{q}(s)$, $\widetilde{r}(s)$ представляют собой общее решение динамических уравнении Эйлера для твердого тела с главными моментами инерции A, B, C в случае Эйлера.

11.47. $p = f(t)\,\widetilde{p}\left(\int f(t)\,dt\right),\quad q = f(t)\,\widetilde{q}\left(\int f(t)\,dt\right),\quad r = f(t)\,\widetilde{r}\left(\int f(t)\,dt\right)$, где эллиптические функции $\widetilde{p}(s)$, $\widetilde{q}(s)$, $\widetilde{r}(s)$ представляют собой общее решение динамических уравнений Эйлера для твердого тела с главными моментами инерции A, B, C в случае Эйлера.

11.48. В главных осях инерции тела $p = t\,\widetilde{p}(t^2/2)$, $q = t\,\widetilde{q}(t^2/2)$, $r = t\,\widetilde{r}(t^2/2)$; здесь функции $\widetilde{p}(s)$, $\widetilde{q}(s)$, $\widetilde{r}(s)$ являются решениями динамических уравнений Эйлера для твердого тела в случае Эйлера с начальными условиями $\widetilde{p}(0) = M_O^{(1)}/A$, $\widetilde{q}(0) = M_O^{(2)}/B$, $\widetilde{r}(0) = M_O^{(3)}/C$, где $M_O^{(1)}$, $M_O^{(2)}$ и $M_O^{(3)}$ — проекции момента сил M_O на главные оси инерции в начальном положении тела.

11.49. $p = \dfrac{\sqrt{M_{10}^2 + M_{20}^2}}{AM_O}\displaystyle\int_0^t M(\xi)\,d\xi \cos\left[\frac{M_{30}}{C}\,\frac{C-A}{AM_O}\int_0^t\int_0^\tau M(\xi)\,d\xi\,d\tau + \varphi_0\right],$

$$q = \frac{\sqrt{M_{10}^2 + M_{20}^2}}{AM_O}\int_0^t M(\xi)\,d\xi \sin\left[\frac{M_{30}}{C}\,\frac{C-A}{AM_O}\int_0^t\int_0^\tau M(\xi)\,d\xi\,d\tau + \varphi_0\right],$$

$r = \dfrac{M_{30}}{CM_O}\displaystyle\int_0^t M(\xi)\,d\xi$, где M_{10}, M_{20}, M_{30} — проекции момента сил $\mathbf{M}_O$ на главные оси инерции тела в начальный момент времени.

11.50. $p(t) = \dfrac{t}{A}\left(M_O^{(1)}\cos\dfrac{\Omega t^2}{2} - M_O^{(2)}\sin\dfrac{\Omega t^2}{2}\right),$

$$q(t) = \frac{t}{A}\left(M_O^{(1)}\sin\frac{\Omega t^2}{2} + M_O^{(2)}\cos\frac{\Omega t^2}{2}\right),\quad r(t) = \frac{M_O^{(3)}}{C}\,t,$$

где $M_O^{(1)}$, $M_O^{(2)}$, $M_O^{(3)}$ — проекции момента сил на главные оси инерции в начальном положении тела, $\Omega = M_O^{(3)}(C-A)/AC$.

11.51. $p = e^{-\lambda^2 t} b \sin\left(\dfrac{C-A}{A\mu^2}\beta e^{-\mu^2 t} + \alpha\right)$, $q = e^{-\lambda^2 t} b \cos\left(\dfrac{C-A}{A\mu^2}\beta e^{-\mu^2 t} + \alpha\right)$,

$r = \beta e^{-\mu^2 t}$, α, β и b — произвольные постоянные.

11.52. $\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\gamma_0 \exp\left[(\mu^2 - \lambda^2)t\right]$.

11.53. $p = \alpha\cos\left(\dfrac{C-A}{AC}\displaystyle\int f(t)\,dt + \dfrac{C-A}{A}\beta t + \gamma\right)$,

$q = \alpha\sin\left(\dfrac{C-A}{AC}\displaystyle\int f(t)\,dt + \dfrac{C-A}{C}\beta t + \gamma\right)$, $r = \dfrac{1}{C}f(t) + \beta$,

где α, β, γ — произвольные постоянные, а $f(t) = \displaystyle\int M_O(t)\,dt$.

11.54. Регулярная прецессия: угловая скорость прецессии $\dot\psi = (1/A)\times$ $\times\sqrt{C^2\omega^2 + m^2v^2d^2}$, угловая скорость собственного вращения $\dot\varphi =$ $= (A-C)\,\omega/A$, угол нутации $\theta = \operatorname{arctg}(mvd/C\omega)$.

11.56. $\omega = (|K|/2J)\sqrt{1+3\cos^2\alpha}$, $\operatorname{tg}\beta = (\operatorname{tg}\alpha)/2$.

11.57. $\dot\varphi = (A-C)\,r_0/A$.

11.58. $\dot\psi = \dfrac{1}{A}\sqrt{C^2r_0^2 + A^2(p_0^2+q_0^2)}$, $\dot\varphi = \dfrac{(A-C)r_0}{A}$, $\theta = \operatorname{arctg}\left[\dfrac{A}{Cr_0}\sqrt{p_0^2+q_0^2}\right]$.

11.59. $\dot\psi = \sqrt{C^2r_0^2 + A^2(\omega_0^2 - r_0^2)}/A$, $\dot\varphi = (A-C)\,r_0/A$,

$\theta = \operatorname{arctg}\left[(A/Cr_0)\sqrt{\omega_0^2 - r_0^2}\right]$.

11.61. Регулярная прецессия: $\dot\psi = \omega_0\cos\alpha\sqrt{1 + \dfrac{36\,r^4}{(h^2+3r^2)^2}\operatorname{tg}^2\alpha}$,

$\dot\varphi = \dfrac{h^2-3r^2}{h^2+3r^2}\,\omega_0\sin\alpha$, $\theta = \operatorname{arcctg}\left(\dfrac{6\,r^2}{h^2+3r^2}\operatorname{tg}\alpha\right)$.

11.62. Регулярная прецессия: $\dot\psi = \omega_0\cos\alpha\sqrt{1 + \dfrac{4\,a^4}{(a^2+h^2)^2}\operatorname{tg}^2\alpha}$,

$\dot\varphi = \dfrac{h^2-a^2}{h^2+a^2}\,\omega_0\sin\alpha$, $\theta = \operatorname{arcctg}\left(\dfrac{2\,a^2}{a^2+h^2}\operatorname{tg}\alpha\right)$.

11.63. Центр масс O' диска движется по параболе $x = (v_0/\sqrt{2})t$, $y = 0$, $z =$ $= -gt^2/2 + v_0t/2$. В системе $O'x'y'z'$, оси которой во все время движения параллельны осям неподвижной системы отсчета, диск совершает регулярную прецессию: $\dot\psi = \sqrt{10}/2)(v_0/r)$, $\dot\varphi = v_0/(r\sqrt{2})$, ось прецессии определяется в системе $O'x'y'z'$ ортом $\mathbf{e} = (1/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10}, 2/\sqrt{5})$.

11.65. Период T_φ Земли составляет 300 дней; наблюдаемый период нестабилен и составляет приближенно около 420 дней.

11.69. Регулярная прецессия: $\dot\psi = (1/3)\sqrt{g/R}$, $\dot\varphi = 3\sqrt{g/R}$, $\theta = \pi/4$.

11.70. Регулярная прецессия: $\dot\psi = 2\sqrt{g/R}$, $\dot\varphi = \sqrt{g/R}$, $\theta = \pi/3$.

11.71. Регулярная прецессия: $\dot\psi = \sqrt{2g/(3a)}$, $\dot\varphi = 5\sqrt{2g/(3a)}$, $\theta = \pi/3$.

11.74. $\omega_1 = (2/\omega_2 r^2)\left[gl + (l^2 - r^2/4)\,\omega_2^2\cos\theta\right]$.

11.75. $\mathbf{K}_O = A\boldsymbol{\omega}_2$.

11.76. $\mathbf{M} = C\,(\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1)\left(1 + \dfrac{C-A}{C}\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\cos\theta\right)$.

11.77. $M = C\omega^2 \sin^2\alpha \operatorname{tg}\alpha$.

11.79. $\omega = \dfrac{-C\Omega + \sqrt{C^2\Omega^2 + 4kl^2\alpha^2(C-A)}}{2\alpha(C-A)}$.

11.80. $\omega_2 = \dfrac{-C\omega_1 \pm \sqrt{C^2\omega_1^2 + 4mgl\,(C-A)\cos\theta}}{2(C-A)\cos\theta}$; если $\omega_1^2 \gg \dfrac{mgl}{C}$, то $\omega_2' \approx \dfrac{C\omega_1}{(A-C)\cos\theta}$, $\omega_2'' \approx \dfrac{mgl}{C\omega_1}$,

11.81. $\alpha = -\dfrac{H}{k}\left[\varphi - \displaystyle\int_0^t \dot\varphi(\tau)\exp\left[(-k/A)(t-\tau)\right]d\tau\right]$.

11.82. $\Omega = M_0/(C\omega)$, $\dot\beta = \omega$.

11.83. Равнодействующая имеет вертикальную составляющую mg и составляющую по линии касания конуса с плоскостью $(3/4)mv^2/(h\cos\alpha)$. Равнодействующая приложена на линии касания конуса с плоскостью в точке, отстоящей от вершины на расстояние $\dfrac{3}{4}h\cos\alpha + \dfrac{3}{20}\dfrac{v^2\sin\alpha}{g\cos^3\alpha}(1+5\cos^2\alpha)$.

11.84. Равнодействующая равна mg, направлена вертикально вверх и приложена на линии касания диска с конусом в точке, отстоящей от вершины конуса на расстояние $\omega_0^2 r^2/(4g\cos\alpha)$.

11.85. $\lambda_0 = \cos p_0 t \cos\left(p_0 t/\sqrt{2}\right) - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin p_0 t \sin\left(p_0 t/\sqrt{2}\right)$,

$\lambda_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos p_0 t \sin\left(p_0 t/\sqrt{2}\right)$, $\lambda_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin p_0 t \sin\left(p_0 t/\sqrt{2}\right)$,

$\lambda_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos p_0 t \sin\left(p_0 t/\sqrt{2}\right) + \sin p_0 t \cos\left(p_0 t/\sqrt{2}\right)$.

11.86. $N_x = (CR/r^2)\omega^2$, $N_y = 0$, $N_z = 0$, $F_{\text{н}} = (C/r^2 + m)R\omega^2$.

11.87. $N = \dfrac{\omega^2\cos^2\delta\left[(R/r)C - (C-A)\sin\delta\right] - C\cos\delta\,(R - r\sin\delta)}{R\sin\delta - r}$.

11.88. $N = mg\,(R + r\cos\theta)/R + (\omega^2\sin\theta/r)\left[C + (C-A)(r\cos\theta/R)\right]$,
$S = -mg\,r/R - (\omega^2\operatorname{tg}\theta/r)\left[C + (C-A)(r\cos\theta/R)\right]$.

11.89. 1) $N = \dfrac{Cr\dot\varphi^2}{R^2 - r^2}$, где $\dot\varphi$ — угловая скорость относительно оси ротора;

2) $N = \dfrac{r\dot\varphi^2}{R^2}\left(1 + \dfrac{r}{\rho}\sqrt{\dfrac{R^2-\rho^2}{R^2-r^2}}\right)\left[C \pm (C-A)\dfrac{r}{\rho R^2}\left(\sqrt{(R^2-\rho^2)(R^2-r^2)} - \rho r\right)\right]$.

11.90. Главные оси Ox и Oy образуют с осями Ox' и Oy' угол α соответственно, где $\alpha = 0{,}5\operatorname{arctg}\dfrac{2mab}{B - A + m\,(a^2 - b^2)}$, ось Oz параллельна оси Oz'.

11.91. $J_{xy} = (J_\xi - J_\eta)\sin 2\alpha/2,\ J_{x\zeta} = J_{y\zeta} = 0.$

11.92. В осях $Bxyz$ тензор момента инерции для точки B есть $J_B = ma^2\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, направляющие косинусы главных осей для точки B: 0, $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, где $\alpha = 0{,}5\operatorname{arctg} 2$. Тензор момента инерции для точки A в осях, параллельных осям $Bxyz$, есть $J_A = ma^2\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

11.95. $\lambda^3 - a_1\lambda^2 - a_2\lambda - a_3 = 0.$

11.100. $K_0 = (\sqrt{181}/20)mvh,\ \beta = 30^\circ - \operatorname{arctg}(13/\sqrt{12});\ T = 19mv^2/40.$

11.101. $T = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{K_1^2}{A} + \dfrac{K_2^2}{B} + \dfrac{K_3^2}{C}\right).$

11.102. $\boldsymbol{\omega} = \left(1 - \dfrac{C}{A}\right)\boldsymbol{\omega}\sin\alpha\,\mathbf{e} + \dfrac{1}{A}\mathbf{K}_0$, $\mathbf{e}$ — орт оси симметрии.

11.105. Регулярная прецессия.

11.106. $\theta = \arccos\dfrac{\sqrt{2/3}}{\operatorname{ch}(t/\sqrt{8})},\ \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}\operatorname{sh}(t/\sqrt{8})},$

$$\psi = \psi_0 + 2\sqrt{\frac{2}{3}}\omega\left(t + \int\limits_0^t \frac{dt}{3\operatorname{ch}(t/\sqrt{2}) - 1}\right).$$

11.107. 1) $A = B$ — динамическая симметрия; 2) $C = A + B$ — плоская фигура.

11.108. $\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{A\sqrt{p_0^2 + q_0^2}}{Cr_0},\ \dot\psi = \dfrac{\sqrt{A^2(p_0^2 + q_0^2) + C^2r_0^2}}{A},\ \dot\varphi = (A - C)\dfrac{r_0}{A}.$

11.109. Угловая скорость собственного вращения тела $\dot\varphi = \dfrac{A - C}{A}\,\omega\sin\alpha$, угловая скорость прецессии тела $\dot\psi = \dfrac{\omega}{A}\sqrt{A^2\cos^2\alpha + C^2\sin^2\alpha}$, угол нутации $\theta = \operatorname{arctg}[(A/C)\operatorname{ctg}\alpha]$.

11.110. $\theta_{\min} = \arcsin\dfrac{B\sqrt{p_0^2 + q_0^2}}{\sqrt{A^2p_0^2 + B^2q_0^2 + C^2r_0^2}},\ \theta_{\max} = \arcsin\dfrac{A\sqrt{p_0^2 + q_0^2}}{\sqrt{A^2p_0^2 + B^2q_0^2 + C^2r_0^2}}.$

11.111. Вращение вокруг неподвижной оси, совпадающей с одной из главных осей для неподвижной точки.

11.112. Нельзя.

11.113. $F_C = F_D = mr^2\omega_0\omega_1/l.$

11.114. $\sin 2\gamma = \dfrac{2ma\sin\alpha(g - \omega^2 a\cos\alpha)}{(B - A)\omega^2}.$

11.115. $R_E^{\text{ст}} = \dfrac{mg}{b+c}\sqrt{a^2+(b+c)^2}$, $R_D^{\text{ст}} = -\dfrac{mga}{(b+c)}$,

$$R_E^{\text{д}} = \frac{1}{b+c}[m\omega^2 ac - (C-B)\,\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha],$$

$$R_D^{\text{д}} = \frac{1}{b+c}[m\omega^2 ab + (C-B)\,\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha].$$

11.116. $R_{Ax} = -R_{Bx} = \dfrac{m\varepsilon}{24l}(3R^2-h^2)\sin 2\alpha$,

$$R_{Ay} = -R_{By} = \frac{m\varepsilon^2 t^2}{24l}(3R^2-h^2)\sin 2\alpha.$$

11.117. $\arccos(\sqrt{3}/2) \leqslant \theta \leqslant \arccos(1/\sqrt{3})$, $\dot\psi = \sqrt{\dfrac{g}{R}}\,\dfrac{\sqrt{3}-2\cos\theta}{\sin^2\theta}$,

$$\dot\varphi = \sqrt{\frac{g}{R}}\,\frac{2+2\sin^2\theta-\sqrt{3}\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

11.118. $\dot\psi_0 = \dfrac{-C\omega \pm \sqrt{C^2\omega^2+(C-A)mgl\cos\theta_0}}{2(C-A)\cos\theta_0}$, $R = m\sqrt{g^2+\dot\psi_0^2 l^2\sin^2\theta_0}$.

11.119. Вынужденная регулярная прецессия.

11.120. $R_E = R_D = 2\pi n\omega C/l$.

11.121. $M_0^e = (A-C)\,\dot\psi^2\sin\theta\cos\theta$, $M_0^c = C\dot\psi\dot\varphi\sin\theta$.

11.122. $OK = (A-C)\cos\theta/ml$.

11.123. $\mathbf{M}_0 = d'\mathbf{K}_0/dt + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{K}_0$.

2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

§ 12. Уравнения Лагранжа

12.1. $n = 3$.
12.2. $n = 4$.
12.3. $n = 6$.
12.6. а) Интегрируема, $\mu = 1$, $z = x^2 + y^2 - xy$ (здесь и далее μ — интегрирующий множитель); б), в) неинтегрируема; г) интегрируема, $\mu = e^x$, $e^x(x^2 + y^2 + z^2) = \text{const}$; д) интегрируема, $\mu = 1$, $(x+y)^2 + (x+z)^2 + (y+z)^2 = \text{const}$.

12.9. $L = \dfrac{m}{2}\sum\limits_{k=1}^{3} H_k^2\,\dot{q}_k^2 - \Pi(x(q_1,q_2,q_3), y(q_1,q_2,q_3), z(q_1,q_2,q_3), t)$.

12.10. а) $L = \dfrac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \Pi(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$;

б) $L = \dfrac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) - \Pi(r\sin\theta\cos\varphi,\, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$;

в) $L = \dfrac{m}{8uv}[(v\dot{u} + u\dot{v})^2 + uv(\dot{u} - \dot{v})^2 + 4u^2v^2\dot{\varphi}^2] - \Pi\left(\sqrt{uv}\cos\varphi, \sqrt{uv}\sin\varphi, \dfrac{u-v}{2}\right)$.

12.11. $L = (m/8q_1q_2)\,(q_1+q_2)\,\left(\dot{q}_1^2 q_2 + \dot{q}_2^2 q_1\right) - \Pi\left((q_1-q_2)/2, \sqrt{q_1q_2}\right)$.

12.12. $L = \dfrac{m_1+m_2}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \dfrac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + \gamma\dfrac{m_1m_2}{r}$.

12.13. $L = \dfrac{m_1+m_2}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \dfrac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\psi}^2\sin^2\varphi) - \dfrac{c}{2}(r - r_0)^2$, где x, y, z — координаты центра масс системы, а углы φ и ψ (широта и долгота) определяют направление прямой, соединяющей точки.

12.14. $q_i = \alpha_i t + \beta_i \quad (\overline{i = 1, n})$.

12.15. $q_i = q_i^{(0)}e^{-t} + \int\limits_0^t e^{-(t-\tau)}\psi_i\left[e^{\tau}\varphi_i\left(q_i^{(0)} + \dot{q}_i^{(0)}\right)\right]d\tau \quad (i = \overline{1,n})$.

12.16. $\mathbf{q} = \mathbf{A}^{-1}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{\tau} C(\xi)\,d\xi\,d\tau + \dot{\mathbf{q}}_0 t + \mathbf{q}_0$, где $\mathbf{A}^{-1}$ — матрица, обратная к матрице $\mathbf{A} = (a_{ik})_{i,k=1}^{n}$.

12.17. $x = C_1\,\mathrm{arch}(t/C_1) + C_2$.

12.18. $L = -m_0c^2\sqrt{1 - \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)/c^2 + \gamma/r}$.

12.19. $x_i = \alpha_i t + \beta_i \quad (i = 1, 2, 3)$.

12.20. $\left\|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\| = C_1\left\|\begin{matrix} \sqrt{\rho_2 - m\omega_1^2}\cos(\omega_1 t + \alpha_1) \\ -\sqrt{\rho_1 - m\omega_1^2}\sin(\omega_1 t + \alpha_1) \end{matrix}\right\| + C_2\left\|\begin{matrix} \sqrt{\rho_2 - m\omega_2^2}\cos(\omega_2 t + \alpha_2) \\ -\sqrt{\rho_1 - m\omega_2^2}\sin(\omega_2 t + \alpha_2) \end{matrix}\right\|$,

$$\omega_{1,2}^2 = \left[(\rho_1+\rho_2+\alpha^2/m) \pm \sqrt{(\rho_1+\rho_2+\alpha^2/m)^2 - 4\rho_1\rho_2}\right]/(2m).$$

12.21. $\mathbf{q} = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\left(\dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{u}^j\right)}{\gamma_j \left(\mathbf{u}^j, \mathbf{u}^j\right)} \mathbf{u}^j \operatorname{sh}\gamma_j t + \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\left(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}^j\right)}{\left(\mathbf{u}^j, \mathbf{u}^j\right)} \mathbf{u}^j \operatorname{ch}\gamma_j t$, где скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i y_k$, а $\mathbf{u}^j$ — нетривиальные решения системы $\mathbf{A}\mathbf{u}^j = \gamma_j \mathbf{C}\mathbf{u}^j$, $\mathbf{A} = (a_{ik})_{i,k=1}^n$, $\mathbf{C} = (c_{ik})_{i,k=1}^n$.

12.22. $\ddot{x}\left[1 + \left(\dfrac{df}{dx}\right)^2\right] + \dfrac{d^2 f}{dx^2}\dfrac{df}{dx}\dot{x}^2 + \dfrac{df}{dx} g = 0.$

12.23. $(1+4a^2x^2)\ddot{x} + 4abxy\ddot{y} + 4a^2x\dot{x}^2 + 4abx\dot{y}^2 + 2agx = 0,$
$(1+4b^2y^2)\ddot{y} + 4abxy\ddot{x} + 4b^2y\dot{y}^2 + 4aby\dot{x}^2 + 2bgy = 0.$

12.25. $m_1\ddot{x} + cx\left(1 - \dfrac{l_0}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0,\ \ m_2\ddot{y} + cy\left(1 - \dfrac{l_0}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + m_2 g = 0.$

12.26. $t = \displaystyle\int \frac{\sqrt{mr^2}\, d\theta_1}{\sqrt{h_0 - (c/2)(l - 2r\cos\theta_1)^2}} + C_1,\ \theta_2 = C_2 t + C_0,$ где $h_0 = E_0 - mr^2 C_2^2$, E_0 — полная энергия системы, C_0, C_1, C_2 — постоянные величины.

12.27. $\ddot{x}_C = 0,\ \ddot{y}_C + ky_C = 0,\ 2\ddot{\varphi} + k\sin 2\varphi = 0.$

12.28. $(3R^2 + l^2)\ddot{\varphi} - 3R\ddot{x} + 3x^2\ddot{\varphi} + 6x\dot{x}\dot{\varphi} - 3gR\sin\varphi + 3gx\cos\varphi = 0,$
$\ddot{x} - R\ddot{\varphi} - x\dot{\varphi}^2 + g\sin\varphi = 0.$

12.29. $8l\ddot{\varphi}_1 + 3l\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) - 3l\dot{\varphi}_2^2\sin(\varphi_2 - \varphi_1) + 9g\sin\varphi_1 = 0,$
$2l\ddot{\varphi}_2 + 3l\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + 3l\dot{\varphi}_1^2\sin(\varphi_2 - \varphi_1) + 3g\sin\varphi_2 = 0.$

12.30. $L = \dfrac{ml^2}{6}\left[4\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 3\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\right] + \dfrac{M}{2}[l^2\dot{\varphi}_1^2 + v_0^2 t^2 \dot{\varphi}_2^2 + v_0^2 + 2lv_0 t\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + 2lv_0\dot{\varphi}_1\sin(\varphi_2 - \varphi_1)] + \dfrac{mgl}{2}(3\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) + Mg(l\cos\varphi_1 + v_0 t\cos\varphi_2).$

12.31. $(M + 2m_1 + 2m_2)\ddot{x} + 2(m_1 - m_2)\ddot{y} - 2(m_1 - m_2)g = 0,$
$(M + m_1 + m_2)\ddot{y} + (m_1 - m_2)\ddot{x} + cy - (M + m_1 + m_2)g = 0$, где x — смещение груза массы m_1 относительно блока (вниз), а y — смещение блока.

12.32. $x = x_0 + \dot{x}_0 t + \dfrac{2(m_1 - m_2)}{M + 2m_1 + 2m_2} \times$
$$\times \left[\frac{1}{2}gt^2 + \left(y_0 - \frac{g}{\Omega^2}(1 - \cos\Omega t) + \dot{y}_0\left(t - \frac{1}{\Omega}\sin\Omega t\right)\right]\right],$$
$$y = y_0\cos\Omega t + \frac{\dot{y}_0}{\Omega}\sin\Omega t + \frac{g}{\Omega^2}(1 - \cos\Omega t),$$
$$\Omega^2 = \frac{c(M + 2m_1 + 2m_2)}{M(M + 3m_1 + 3m_2) + 8m_1 m_2}.$$

12.33. Центры масс цилиндров *1*, *2* и *4* движутся с постоянными ускорениями $w_1 = (72/79)g$, $w_2 = (58/79)g$, $w_4 = (52/79)g$; угловое ускорение цилиндра *3* составляет $\varepsilon_3 = (2/79)g/r$.

12.34. $3m\ddot{x}_1+4cx_1-2cx_2=0,\ 3m\ddot{x}_2-2cx_1+4cx_2=0.$

12.35. $3m\ddot{x}+mr\ddot{\varphi}+4cx=0,\ 2m\ddot{x}+3mr\ddot{\varphi}+8cr\varphi=0.$

12.36. $w=\dfrac{2m\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-3(M+m)\sin\alpha}{3M+m(3-2\cos^2\beta)}g,\ \ w_C=\dfrac{2(M+m)\sin\beta\cos\alpha}{3M+m(3-2\cos^2\beta)}g.$

12.37. $(M+m)\ddot{x}+m(R-r)(\ddot{\varphi}\cos\varphi-\dot{\varphi}^2\sin\varphi)+cx=0,$
$3(R-r)\ddot{\varphi}+2\ddot{x}\cos\varphi+2g\sin\varphi=0.$

12.38. $L=\dfrac{3}{4}m\dot{x}^2\left[\dfrac{(1+a^2x^2)^{3/2}-aR}{1+a^2x^2}\right]^2-\dfrac{1}{2}mga\left[x^2+\dfrac{2R}{a}(1+a^2x^2)^{-1/2}\right].$

12.39. $(M+m)\ddot{x}-Ml(\ddot{\varphi}\sin\varphi+\dot{\varphi}^2\cos\varphi)+cx-(M+m)g=0,$
$4l\ddot{\varphi}-3\ddot{x}\sin\varphi+3g\sin\varphi=0.$

12.40. $(M+m)\ddot{x}+ml\ddot{\varphi}\cos\varphi-ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi+2cx=0,\ \ l\ddot{\varphi}+\ddot{x}\cos\varphi+g\sin\varphi=0.$

12.41. $(M+m)\dot{x}+m(\dot{l}\sin\varphi+l\dot{\varphi}\cos\varphi)=\text{const},\ \ l\ddot{\varphi}+\ddot{x}\cos\varphi+2\dot{l}\dot{\varphi}+g\sin\varphi=0,$
$m\ddot{l}+m\ddot{x}\sin\varphi-ml\dot{\varphi}^2-mg\cos\varphi+c(l-l_0)=0.$

12.42. $(M+m)\ddot{x}+m(\ddot{l}\sin\varphi+2\dot{l}\dot{\varphi}\cos\varphi+l\ddot{\varphi}\cos\varphi-l\dot{\varphi}^2\sin\varphi)+2cx=0,$
$l\ddot{\varphi}+2\dot{l}\dot{\varphi}+\ddot{x}\cos\varphi+g\sin\varphi=0,\ m\ddot{l}+m\ddot{x}\sin\varphi-ml\dot{\varphi}^2-mg\cos\varphi+c_1(l-l_0)=0.$

12.43. $L=[(m+m_1+m_2)/2]\,\dot{x}^2+[(m_1+m_2)/2]\,l_1\dot{\varphi}_1(l_1\dot{\varphi}_1+$
$+2\dot{x}\cos\varphi_1)+(m_2/2)\,l_2\dot{\varphi}_2\,[l_2\dot{\varphi}_2+2\dot{x}\cos\varphi_2+2l_1\dot{\varphi}_1\cos(\varphi_1-\varphi_2)]+$
$+(m_1+m_2)gl_1\cos\varphi_1+m_2gl_2\cos\varphi_2-cx^2.$

12.44. $\left(\dfrac{3}{2}M+m\right)\ddot{x}-lm\ddot{\theta}\cos(\theta-\alpha)+ml\dot{\theta}^2\sin(\theta-\alpha)-(M+m)g\sin\alpha=0,$
$l\ddot{\theta}-\ddot{x}\cos(\theta-\alpha)+g\sin\theta=0.$

12.45. $(3M+2m)\ddot{x}+2ml\ddot{\varphi}\cos\varphi-2ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi+2cx=0,\ \ l\ddot{\varphi}+\ddot{x}\cos\varphi+g\sin\varphi=0.$

12.46. $[M(R^2+\rho^2)+m\rho^2]\dot{\theta}-m\rho(\rho-r)\dot{\varphi}=\text{const},\ \ 3(\rho-r)\ddot{\varphi}-\rho\ddot{\theta}+2g\sin\varphi=0.$

12.47. $(4M+3m)R\ddot{\theta}+m(R-r)[2\cos(\varphi-\theta)-1]\ddot{\varphi}-$
$-2m(R-r)\sin(\varphi-\theta)\dot{\varphi}^2+2(M+m)g\sin\theta=0,$
$3(R-r)\ddot{\varphi}+R[2\cos(\varphi-\theta)-1]\ddot{\theta}+2R\dot{\theta}^2\sin(\varphi-\theta)+2g\sin\varphi=0.$

12.48. $((3/2)M+m)R\ddot{\varphi}-mr\ddot{\psi}\cos\psi+mr\dot{\psi}^2\sin\psi=0,$
$r\ddot{\psi}-r\ddot{\varphi}\cos\psi+g\sin\psi=0.$

12.49. $(3M+2m)(R-r)\ddot{\varphi}+2ml\ddot{\theta}\cos(\theta-\varphi)-2ml\dot{\theta}^2\sin(\theta-\varphi)+2(M+m)g\sin\varphi=$
$=0,\ \ l\ddot{\theta}+(R-r)\ddot{\varphi}\cos(\theta-\varphi)+(R-r)\dot{\varphi}^2\sin(\theta-\varphi)+g\sin\theta=0.$

12.50. $m_1\ddot{r}_1-m_1r_1\dot{\varphi}_1^2-c(l-r_1-r_2)=0,$
$m_2\ddot{r}_2-m_2r_2(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}_2^2\sin^2\theta)-c(l-r_1-r_2)-m_2g\cos\theta=0,$
$r_1\ddot{\varphi}_1+2\dot{r}_1\dot{\varphi}_1=0,\ \ (r_2\ddot{\varphi}_2+2\dot{r}_2\dot{\varphi}_2)\sin^2\theta-r_2\dot{\varphi}_2\dot{\theta}\sin2\theta=0,$
$r_2\ddot{\theta}+2\dot{r}_2\dot{\theta}-r_2\dot{\varphi}^2\sin2\theta+g\sin\theta=0.$

12.51. $(m_1+m_2)R\ddot{\theta}-m_1R\dot{\varphi}^2\sin2\theta+m_2g-m_1g\sin\theta=0,\ \ \ddot{\varphi}\sin^2\theta+\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin2\theta=0.$

12.52. $L=\dfrac{1}{2}(M+m_1+m_2)R^2\dot{\theta}^2+\dfrac{m_1}{2}R^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\dfrac{MR^3}{4l}\left(\theta-\dfrac{1}{2}\sin2\theta\right)\dot{\varphi}^2-$
$-m_1gR\cos\theta-m_2gR\theta-\dfrac{MgR\theta}{l}\left(l-R-\dfrac{1}{2}R\theta+R\cos\dfrac{\theta}{2}\right).$

12.53. $L = \dfrac{m}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\dot{x}_i^2 - \dfrac{c}{2}\left[\sum\limits_{i=2}^{n}(x_i - x_{i-1})^2 + (x_1 - x_n)^2\right]$.

12.56. В углах Эйлера $L = \dfrac{A}{2}\left(\dot\theta^2 + \dot\psi^2\sin^2\theta\right) + \dfrac{C}{2}(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)^2 - mgl\cos\theta$.

12.57. $L = (m/2)(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) + (ml^2/6)\left(\dot\theta^2 + \dot\psi^2\sin^2\theta\right) - mgz$, где x, y, z — координаты центра стержня, а θ и ψ — углы Эйлера (θ — угол нутации, ψ — угол прецессии).

12.58. $L = \dfrac{m}{2}\left[\dot x^2 + x^2\dot\theta^2 + x^2\dot\psi^2\sin^2\theta\right] +$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{MR^2}{4} + \frac{MH^2}{3} + \frac{mR^2}{4}(\alpha^2+1) + \frac{ml^2}{12}\right]\left(\dot\psi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2\right) +$$

$$+\frac{MR^2}{4}(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi)^2 + \frac{mR^2}{4}(\alpha^2+1)\left(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi + \frac{2\pi\dot x}{h}\right)^2 +$$

$$+\left(\frac{MH}{2} + mx\right)g\cos\theta,$$

где x — расстояние от центра гайки до неподвижной точки.

12.59. $L = \dfrac{m}{2}[\dot x^2 + x^2(\dot\theta^2 + \dot\psi^2\sin^2\theta)] + \dfrac{mR^2}{4}\left[\dfrac{1}{2}(\dot\psi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2) + (\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi)^2\right] -$

$- mgx\cos\theta - \dfrac{c}{2}(x - l_0)^2$, где x — расстояние от центра диска до точки O.

12.60. $L = \dfrac{1}{2}[A(\dot\psi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2) + C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)^2] + \dfrac{m}{2}[\dot x^2 + x^2(\dot\theta^2 + \dot\psi^2\sin^2\theta)] -$

$- g(Ml + mx)\cos\theta - \dfrac{c}{2}(x - l_0)^2$, где $x = OD$.

12.61. $\ddot x - \omega^2(t)x = 0$, $\ddot y + g = 0$, $2\ddot\varphi + \omega^2(t)\sin 2\varphi = 0$.

12.62. $L = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} m_k \sum\limits_{i=1}^{3}(v_i + a_{ik} + \dot y_{ik})^2 - \Pi(|\boldsymbol\rho_k - \boldsymbol\rho_\nu|)$, где $v_i(t)$ — компоненты скорости $\mathbf{v}_{O_1} = \dot{\mathbf{r}}_0(t)$ точки O_1 в системе X_1, X_2, X_3; величины a_{ik} определяются из соотношений $\sum\limits_{i=3}^{3} a_{ik}\mathbf{e}_i = \boldsymbol\Omega \times \boldsymbol\rho_k$, $\mathbf{e}_i$ — орты системы $O_1Y_1Y_2Y_3$, $\boldsymbol\rho_k$ — радиус-вектор k-й точки в этой системе.

12.63. $\ddot x_1 - \omega^2 x_1 - 2\omega\dot y_1 + \gamma M x_1(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{-3/2} = 0$,
$\ddot y_1 - \omega^2 y_1 + 2\omega\dot x_1 + \gamma M y_1(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{-3/2} = 0$,
$\ddot z_1 + \gamma M z_1(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{-3/2} = 0$.

12.64. $mR\ddot\varphi - mR\omega^2\sin 2\varphi + cR(\varphi - \varphi_0) - mg\sin\varphi = 0$.

12.65. $x = a\sin(\sqrt{\lambda}t + \beta) + \lambda^{-1}(g\cos\alpha + \omega^2 l\sin^2\alpha)$ при $2c > m\omega^2\sin^2\alpha$;
$x = b\,\mathrm{sh}(\sqrt{\lambda}t + \gamma) + \lambda^{-1}(g\cos\alpha + \omega^2 l\sin^2\alpha)$ при $2c < m\omega^2\sin^2\alpha$;
$x = (g\cos\alpha + \omega^2 l\sin^2\alpha)t^2/2 + d_1 t + d_2$ при $2c = m\omega^2\sin^2\alpha$, где a, b, d_1, d_2, β, γ — произвольные постоянные, а $\lambda = |2c/m - \omega^2\sin^2\alpha|$.

12.66. $2ml\ddot\varphi - ml\omega^2\sin 2\varphi - 6cl\sin\varphi(\cos\varphi - \cos\varphi_0) - 3mg\sin\varphi = 0$.

12.67. $4mR\ddot{\varphi} - m\omega^2 R\sin 4\varphi + 2mg\sin 2\varphi - 2c\sin\varphi(2R\cos\varphi - l_0) = 0.$

12.68. $y = \dfrac{g}{2\omega^2(1+a^2)}[a(\cos\omega t - \operatorname{ch}\omega t) + \sin\omega t - \operatorname{sh}\omega t] + \dfrac{ab}{1+a^2}(\operatorname{ch}\omega t - 1).$

12.70. $V(q_j, \dot{q}_j, t) = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i q_k + \dfrac{d\psi(q_j, t)}{dt}$, где $\psi(q_j, t)$ — произвольная функция.

12.72. $V = -(m/2)\omega^2(x^2+y^2) + m\omega(\dot{x}y - y\dot{x}).$

12.73. $L = \dfrac{1}{2}e^{(\beta/m)t}\left[m\dot{x}^2 + \beta\dot{x}x - \left(c - \dfrac{\beta^2}{2m}\right)x^2\right].$

12.74. $L = \dfrac{1}{2}e^{(\beta/m)t}\left[m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) + \beta\dot{x}_1 x_1 + \beta\dot{x}_2 x_2 + \dfrac{\beta^2}{2m}\left(x_1^2 + x_2^2\right) - \right.$

$$\left. - c_1 x_1^2 - c_2(x_1 - x_2)^2 - c_3 x_2^2\right].$$

12.75. $L = \dfrac{1}{2}e^{(\beta/m)t}\left[m\sum\limits_{i=1}^{n}\dot{q}_i^2 + \beta\sum\limits_{i=1}^{n}\dot{q}_i q_i + \dfrac{\beta^2}{2m}\sum\limits_{i=1}^{n} q_i^2 - \sum\limits_{i,k=1}^{n} c_{ik} q_i q_k\right].$

12.79. $L_1 - L_2 = \dfrac{d}{dt}F(q_i, t)$, где F — произвольная дифференцируемая функция.

12.82. $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}\ddot{q}_k + \sum\limits_{k,l=1}^{n}\Gamma_{i,kl}\dot{q}_k\dot{q}_l = Q_i \ (i = \overline{1,n})$. Если принять обычное в тензорном анализе соглашение о суммировании по повторяющимся индексам, то эта запись примет вид $a_{ik}\ddot{q}^k + \Gamma_{i,kl}\dot{q}^k\dot{q}^l = Q_i \ (i = \overline{1,n})$.

12.86. $\mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A} = 0,\ \mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3)$.

12.87. Возможная скорость колечка совпадает с его действительной скоростью.

12.88. Да.

12.92. $Q_{\varphi_i} = M_i(t) - M_{i+1}(t),\ \ Q_{\psi_i} = M_i(t),\ M_{n+1}(t) = 0.$

12.93. $Q_{\varphi_s}(\varphi, \dot{\varphi}, t) = \left[\sum\limits_{i=1}^{n} Q_i\dfrac{\partial f_i(\varphi, t)}{\partial\varphi_s}\right].$

12.94. $L(q, \dot{q}, t) = \widetilde{L}(\varphi(q), (\partial\varphi/\partial q)\dot{q}, t)$, где $\dfrac{\partial\varphi}{\partial q} = \left(\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial q_k}\right)_{i,k=1}^{n}$ — якобиева матрица преобразования.

12.97. $L = \dfrac{m_1}{2}[l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + (a + l_1\sin\varphi_1)^2\omega^2] + \dfrac{m_2}{2}[l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) +$
$+ (a + l_1\sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2)^2\omega^2] + 2(m_1 + m_2)g\, l_1\cos\varphi_1 + m_2 g\, l_2\cos\varphi_2.$

12.98. $\left[J + J_1 + J_2 + \dfrac{m_1 l^2}{4} + m_2(l+\eta)^2\right]\ddot{\varphi} + 2m_2(l+\eta)\dot{\eta}\dot{\varphi} = M(t),$

$(m_1 + m_2)\ddot{\xi} + (m_1 + m_2)g = P_1(t), \quad m_2\ddot{\eta} - m_2(l+\eta)\dot{\varphi}^2 = P_2(t).$

12.99. $\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + \dfrac{\gamma(r - l\cos\psi)}{r_1^2} + \dfrac{\gamma(r + l\cos\psi)}{r_2^2} = 0,\ r^2\ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi} + l^2(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}) = 0,$

$l(\ddot{\psi} + \ddot{\varphi}) + \gamma r\sin\psi\left(r_1^{-2} - r_2^{-2}\right) = 0$, где $r_{1,2} = \sqrt{r^2 + l^2 \pm 2rl\cos\psi}$.

12.100. $(J+mr^2-mr\rho\cos\varphi)\ddot\varphi-mg(r-\rho)\sin\varphi=0.$

12.101. $ml^2[\ddot\varphi+\ddot\psi\cos(\varphi-\psi)+\dot\psi^2\sin(\varphi-\psi)]+mg\,l\sin\varphi+c(\varphi-\psi)-$
$$-m\omega^2l^2\cos\varphi(\sin\varphi+\sin\psi)=0,$$
$$ml^2[\ddot\psi+\ddot\varphi\cos(\varphi-\psi)-\dot\varphi^2\sin(\varphi-\psi)]+mg\,l\sin\psi-c(\varphi-\psi)-$$
$$-m\omega^2l^2\cos\psi(\sin\varphi+\sin\psi)=0.$$

12.102. В полярных координатах $\ddot r-r(\dot\varphi+\omega)^2=0,\ \dfrac{d}{dt}\left(r^2(\dot\varphi+\omega)\right)=0.$

12.103. $\ddot x-2\omega\dot y-\omega^2x-\gamma\left[m_1(x-x_1)/r_1^{3/2}+m_2(x-x_2)/r_2^{3/2}\right]=0,$
$$\ddot y+2\omega\dot x-\omega^2y-\gamma y\left(m_1/r_1^{3/2}+m_2/r_2^{3/2}\right)=0,$$
$$\ddot z+\gamma z\left(m_1/r_1^{3/2}+m_2/r_2^{3/2}\right)=0,\ \text{где}\ r_i=\sqrt{(x-x_i)^2+y^2+z^2}$$
$(i=1,2)$, γ — постоянная всемирного тяготения.

12.104. $(M+m)\ddot x+m(R-r)(\ddot\varphi\cos\varphi-\dot\varphi^2\sin\varphi)=-cx-fN\operatorname{sign}\dot x,$
$3(R-r)\ddot\varphi+2\ddot x\cos\varphi-2g\sin\varphi=0,$
где $N=(M+m)g+m(R-r)(\ddot\varphi\sin\varphi+\dot\varphi^2\cos\varphi).$

12.106. $2l^2\ddot\varphi_1+4l\dot l\dot\varphi_1+lL\ddot\varphi_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)-lL\dot\varphi_2^2\sin(\varphi_2-\varphi_1)+2g\,l\sin\varphi_1=0,$
$$L\ddot\varphi_2+l\ddot\varphi_1\cos(\varphi_2-\varphi_1)+\dot l(\dot\varphi_1+\dot\varphi_2)\cos(\varphi_2-\varphi_1)+l\dot\varphi_1^2\sin(\varphi_2-\varphi_1)+g\sin\varphi_2=0.$$

12.107. $\ddot\varphi+2(\dot l/l)\dot\varphi+(g/l)\sin\varphi=0.$

12.108. $l=\dfrac{C}{\sqrt{\dot\varphi(t)}}-\dfrac{g}{2\sqrt{\dot\varphi(t)}}\displaystyle\int\frac{\sin\varphi(t)}{\sqrt{\dot\varphi(t)}}\,dt$, где C — произвольная постоянная.

12.109. $\left(\left(\dfrac{dl}{d\varphi}\right)^2+l^2\right)\ddot\varphi+2\dfrac{dl}{d\varphi}\dot\varphi^2\left(\dfrac{d^2l}{d\varphi^2}+l\right)+gl\sin\varphi-g\dfrac{dl}{d\varphi}\cos\varphi=0.$

12.110. $Q_\varphi=-mg\,l\sin\varphi-\beta l^2\dot\varphi.$

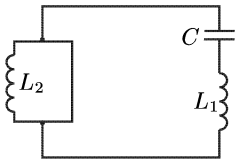
§ 13. Электромеханические аналогии

13.5. $m_1\ddot x_1+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2-\dfrac{q^2}{2C_1a_1}=m_1g-k_1\Delta_1+k_2\Delta_2,$
$$m_2\ddot x_2+(k_1+k_2)x_2-k_2x_1+\frac{q^2}{2C_2a_2}=m_2g-k_2\Delta_2-k_3\Delta_3,$$
$$L\ddot q+R\dot q+q\left(\frac{a_1-x_1}{C_1a_1}+\frac{a_2+x_2}{C_2a_2}+\frac{1}{C_0}\right)=e(t).$$

13.9. $C_{12}=\dfrac{C_1C_2(L_1-L_2)}{C_2L_2-C_1L_1},\ M=\dfrac{C_2L_2-C_1L_1}{C_2-C_1}.$

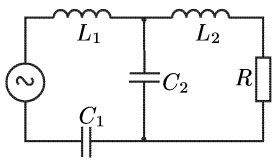
13.10. $\mathcal{L}=\dfrac{1}{2}e^{(R/L)t}\Bigg[L(\dot q_1^2+\dot q_2^2)+Rq_1\dot q_1+Rq_2\dot q_2+$
$$+\frac{R^2}{2L}(q_1^2+q_2^2)-\frac{q_1^2}{C_1}-\frac{(q_1-q_2)^2}{C_2}-\frac{q_2^2}{C_3}\Bigg].$$

13.11.

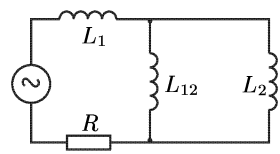


13.13. RC-контур.

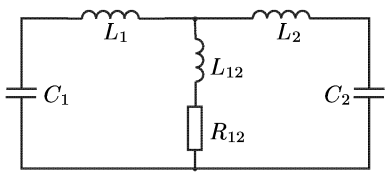
13.15.



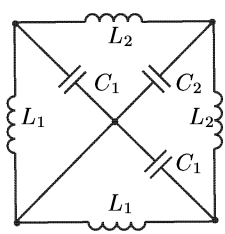
13.16.



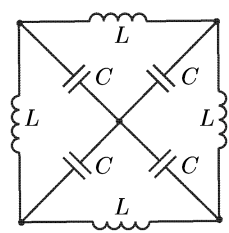
13.19.



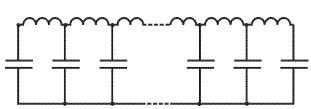
13.23.



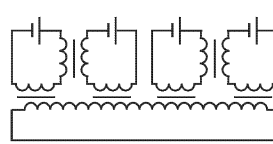
13.24.



13.27.



13.28.



13.29. $d(t) \sim \dfrac{kLS}{4\pi m(t)}$, $\mathcal{E}(t) \sim -u\dfrac{\dot{m}(t)}{m(t)}$.

13.30. $m\ddot{x} + kx - \dfrac{q^2}{2aC_1} = mg + P(t)$, $L\ddot{q} + \dfrac{q}{C_0} + \dfrac{q}{aC_1}(a - x) + R\dot{q} = \mathcal{E}(t)$.

13.31. $J\,d\omega/dt = \alpha i^2$, $L\,di/dt + iR = \alpha i\omega$.

13.33. $n_1 = 5$, $n_2 = 3$.

13.35. $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} L_{ik}(\dot q_i - \dot q_k)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\frac{1}{C_{ik}}(q_i - q_k)^2 + \sum_{i=1}^{n}\mathcal{E}_i(t)q_i +$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} M_{ik}\dot q_i \dot q_k + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} L_i \dot q_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i^2}{C_i},$$

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} R_{ik}(\dot q_i - \dot q_k)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} R_i \dot q_i^2.$$

§ 14. Условия равновесия

14.2. $f = \Psi(x^2 + y^2 + z^2) - C = 0$, где Ψ — произвольная функция, а C — произвольная постоянная.

14.3. $f = \operatorname{tg}\varphi_{\max}$.

14.4. $z = z_0 - mg/k$, где z_0 — высота притягивающей точки.

14.5. $\Delta_i = g\sum_{k=1}^{i} m_k/C_i \quad (i = \overline{1, n})$.

14.6. $\operatorname{tg}\varphi_k = Q/[mg(n-k+1)] \quad (k = \overline{1, n})$.

14.7. $\operatorname{tg}\varphi_k = 2Q/[mg(2n-2k+1)] \quad (k = \overline{1, n})$.

14.8. В положении равновесия деформация пружин равна $\frac{q^2}{2Cdk} \pm \frac{mg}{k}$.

14.9. $L = \frac{1}{2}a\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \approx \frac{1}{2}a\ln n$.

14.11. $\frac{dM}{dx} = q, \ \frac{dQ}{dx} = -q$.

14.12. $y = (xh/l^2)(2l - x)$.

14.13. $y = \frac{\omega^2}{6g}x^2 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{l^2 - x^2} - l\right)$.

14.16. В положении равновесия φ_k независимо друг от друга могут принимать одно из двух значений: $\varphi_k = 0$ или

$$\varphi_k = \arccos\left[(2(n-k)+1)\frac{3g}{\omega^2 l}\right] \quad (k = \overline{1, n}), \ \omega^2 \geqslant [2(n-k)+1]3g/l.$$

14.17. Цепная линия $z = \alpha\operatorname{ch}[(x+\beta)/\alpha] + \gamma$, где α, β и γ определяются из условий

$$z(0) = H_1, \ z(L) = H_2, \ \int_0^L \sqrt{1 + (z'(x))^2}\,dx = l.$$

14.18. Цепная линия по отношению к «вертикали» $g_1 = g - \mathbf{w}_0$ в движущейся системе.

14.19. $y(x) = c_1 + c_2\int\frac{dx}{\sqrt{x^4 - c_2^2}}$, c_1 и c_2 определяются из условий $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$.

14.21. $z = z_0 + \omega^2(x^2 + y^2)/2g$.

14.23. Координаты $q_{s+1}, \ldots, q_n$ в положении равновесия определяются из системы равенств $(\partial\Pi/\partial q_j) = 0 \quad (j = \overline{s+1, n})$; $q_i = \alpha_i \quad (i = \overline{1, s})$, где α_i — произвольные постоянные, т. е. система имеет континуальное множество положений равновесия.

14.24. Равенства $\Phi_i(a, t) - R_i(a, t) \equiv Q_i(a, 0, t)$, где $\Phi_i(q_j, t) = \partial b_i(q_j, t)/\partial t$ и $R_i(q_j, t) = \partial T_0(q_j, t)/\partial q_i \quad (i = \overline{1, n})$ должны тождественно выполняться по t.

14.28. $x = \dfrac{b\beta - 2\alpha c}{\Delta} \pm \dfrac{b}{\Delta}\sqrt{\dfrac{\alpha\beta b - \alpha^2 c - \beta^2 a + \rho\Delta}{a}}$,

$y = \dfrac{\alpha b - 2a\beta}{\Delta} \mp \dfrac{2a}{\Delta}\sqrt{\dfrac{\alpha\beta b - \alpha^2 c - \beta^2 a + \rho\Delta}{a}}$, $\Delta = 4ac - b^2$.

14.31. $\delta f_s = \sum\limits_{i=1}^{N}\left(\dfrac{\partial f_s}{\partial x_i}\delta x_i + \dfrac{\partial f_s}{\partial y_i}\delta y_i + \dfrac{\partial f_s}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0$; $\delta g_j \leqslant 0 \quad (j = \overline{1, l})$;

$g_r < 0 \quad (r = \overline{l+1, k})$.

14.34. $q_k^0 = -\dfrac{\alpha_k}{A}$, где $A = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k^2} \quad (k = \overline{1, n})$.

14.36. $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$, $\varphi_3 = \arccos(g/\omega^2 r)$, возможно при $\omega^2 \geqslant g/r$.

14.37. $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \arccos\dfrac{3g(m_1 + 3m_2)}{2\omega^2 l(m_1 + m_2)}$, возможно при $\omega^2 \geqslant \dfrac{3g(m_1 + 3m_2)}{2l(m_1 + m_2)}$.

14.38. $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \arccos\dfrac{(M + 2m)g + 2kl}{2l(k + m\omega^2)}$, возможно при $\omega^2 \geqslant \dfrac{(M + 2m)g}{2ml}$.

14.39. $\omega^2 l\cos\varphi_k\left[(n-k-1)\sum\limits_{j=1}^{k}\sin\varphi_j + \sum\limits_{j=k+1}^{n}(n-j+1)\sin\varphi_j\right] - g(n-k+1)\sin\varphi_k = 0.$

14.40. $\omega^2 l\cos\varphi_k\sum\limits_{i=1}^{n}(n-i+1/2)\sin\varphi_i - \dfrac{1}{6}\omega^2 l\cos\varphi_k\sin\varphi_k -$

$$-\omega^2 l\cos\varphi_k\sum_{i=1}^{k}(k-i)\sin\varphi_i - g(n-k+1/2)\sin\varphi_k = 0 \qquad (k = \overline{1, n}).$$

14.41. $d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} d\lambda + \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ t+1 \\ 4t-1 \end{pmatrix} dt$, где $d\lambda$ — произвольное бесконечно малое перемещение.

§ 15. Устойчивость равновесия консервативных систем

15.1. Положение равновесия смещено по вертикали от неподвижного заряда на расстояние $\sqrt{|eq|/mg}$, неустойчиво.

15.2. $AS = l_0 - \dfrac{mg\cos\alpha - m\omega^2 l_0\sin^2\alpha}{c - m\omega^2\sin^2\alpha}$, $c \neq m\omega^2\sin^2\alpha$; устойчиво при $c > m\omega^2\sin^2\alpha$, неустойчиво при $c < m\omega^2\sin^2\alpha$.

15.3. Положение равновесия $\varphi = 0$ устойчиво при $cl_0 \geqslant 2(cR - mg)$; положение $\varphi_0 = \arccos[(1/2)\,cl_0(cR - mg)^{-1}]$ устойчиво при $cl_0 < 2(cR - mg)$.

15.5. Положение равновесия $x = 0$ устойчиво при $\alpha > \omega^2 l^3$; положение равновесия $x = \sqrt{(\alpha/\omega^2)^{2/3} - l^2}$ неустойчиво.

15.6. При $\omega^2 l \leqslant g$: устойчивое положение равновесия $\varphi = 0$, неустойчивое — $\varphi = \pi$; при $\omega^2 l > g$: устойчивые положения равновесия $\varphi = \pm\arccos(g/\omega^2 l)$, неустойчивые — $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$.

15.8. Положение равновесия $x = 0$ устойчиво при $\omega^2 p < g$ и неустойчиво при $\omega^2 p > g$. При $\omega^2 p = g$ любое положение шарика будет положением неустойчивого равновесия.

15.9. При $\omega^2 a^2 \leqslant gb$: устойчивое положение равновесия $(0, -b)$, неустойчивое — $(0, b)$; при $\omega^2 a^2 > gb$: устойчивые положения равновесия $(\pm\sqrt{a^2 - g^2 b^2/(\omega^4 a^2)}, -gb^2/(\omega^2 a^2))$, неустойчивые — $(0, \pm b)$.

15.10. $AB_1 = \dfrac{cRm_2 l_0}{(m_1 + m_2)\,cR - m_1 m_2 g}$, $AB_2 = \dfrac{cRm_1 l_0}{(m_1 + m_2)\,cR - m_1 m_2 g}$; неустойчиво.

15.11. Континуум положений $x^2 + y^2 = l_0^2$ неустойчивого равновесия.

15.13. Положение равновесия $\varphi = 0$, $\psi = 0$ устойчиво, если $2ml_1 > M(l_2 - l_1)$; положение равновесия $\varphi = \pi$, $\psi = 0$ устойчиво при $2ml_1 < M(l_2 - l_1)$. При $2ml_1 = M(l_2 - l_1)$ система будет находиться в равновесии при любом φ и $\psi = 0$.

15.14. При $a = m\omega^2$ положений равновесия нет. При $a \neq m\omega^2$ существует одно положение равновесия

$$x = \frac{2mg\cos\alpha}{(a - m\omega^2)\sin^2\alpha}, \quad y = \frac{mg}{a} + \frac{2mg}{a - m\omega^2}\operatorname{ctg}^2\alpha,$$

устойчивое при $a > m\omega^2$ и неустойчивое при $a < m\omega^2$.

15.15. $\omega^2 < 2g\min\{\alpha, \beta\}$.

15.16. При $\omega^2 \leqslant gc/b^2$: устойчивое положение равновесия $x = y = 0$, $z = -c$; неустойчивое — $x = y = 0$, $z = c$. При $gc/b^2 < \omega^2 \leqslant gc/a^2$: устойчивые положения равновесия $x = 0$, $y = \pm\sqrt{b^2 - g^2c^2/(\omega^4 b^2)}$, $z = -gc^2/(\omega^2 b^2)$; неустойчивые — $x = y = 0$, $z = \pm c$. При $\omega^2 > gc/a^2$: устойчивые положения равновесия $x = 0$, $y = \pm\sqrt{b^2 - g^2c^2/(\omega^4 b^2)}$, $z = -gc^2/(\omega^2 b^2)$; неустойчивые — $x = y = 0$, $z = \pm c$; $x = \pm\sqrt{a^2 - g^2c^2/(\omega^4 a^2)}$, $y = 0$, $z = -gc^2/(\omega^2 a^2)$.

15.21. Положения равновесия: 1) $x_1 = R/2 + mg/c$, $\varphi_1 = -\pi/2$ — устойчиво; 2) $x_2 = R/2 - mg/c$, $\varphi_2 = \pi/2$ — устойчиво при $c < 2mg/R$, неустойчиво при $c > 2mg/R$; $x_3 = 0$, $\varphi_3 = \arcsin(cR/2mg)$ — неустойчиво.

15.22. Положения равновесия: $x_{1,2} = \pm mg/(2c)$, $\varphi_{1,2} = \pm\pi/2$ — устойчивы; $x_3 = 0$, $\varphi_3 = 0$, $x_4 = 0$, $\varphi_4 = \pi$ — неустойчивы.

15.24. Положения равновесия: $\varphi_1 = 0$ — устойчиво при $\omega^2 \leqslant g/r$; $\varphi_2 = \pi$ — неустойчиво; $\varphi_3 = \arccos(g/\omega^2 r)$ — устойчиво при $\omega^2 \geqslant g/r$.

§ 16. Малые колебания консервативных систем

16.4. $\omega_n^2 = \left(\prod_{j=1}^{n-1} \omega_j^2\right)^{-1} \dfrac{\det \mathbf{C}}{\det \mathbf{A}}$.

16.8. $\omega_j^2 = \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} u_{ij} u_{kj} \left(\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_{ij} u_{kj}\right)^{-1} \quad (j = \overline{1, m})$.

16.9. $\omega_i = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 p_i^2}$, $\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i \quad (i = \overline{1, n})$.

16.10. $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{ma}{(d\Pi(r)/dr)_{r=a}}}$.

16.12. $\varphi = \varphi_0 \cos \omega t + \dfrac{\dot{\varphi}_0}{\omega} \sin \omega t$, $\omega = \sqrt{\dfrac{Mga}{M(R-a)^2 + J}}$.

16.14. $\omega = \left(\dfrac{a^2 + g^2}{l^2}\right)^{1/4}$.

16.15. $x = A \sin\left(\dfrac{\sqrt{gb}}{a} t + \alpha\right)$.

16.16. $x = \begin{cases} A \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}\, t + \alpha\right) & \text{при} \quad \omega < \omega_0 = \dfrac{\sqrt{gb}}{a}, \\ \pm a \sqrt{1 - \dfrac{\omega_0^4}{\omega^4}} + A \sin\left(\omega a \sqrt{\dfrac{\omega^4 - \omega_0^4}{b^2 \omega^4 + (a^2 - b^2)\omega_0^4}}\, t + \alpha\right) \\ \qquad \text{при} \quad \omega > \omega_0. \end{cases}$

16.18. $x = A \sin\left(\sqrt{c/m - \omega^2}\, t + \alpha\right)$, $\omega^2 m < c$.

16.19. $\varphi = \varphi_0 + A \sin(kt + \alpha)$, где φ_0 — значение φ в положении равновесия,

$$k = \begin{cases} \sqrt{g/l - \omega^2} & \text{при} \quad \omega < \sqrt{g/l}, \\ \omega \sqrt{1 - g^2/(\omega^4 l^2)} & \text{при} \quad \omega > \sqrt{g/l}. \end{cases}$$

16.20. $\varphi = \dfrac{\pi}{6} + A \sin\left(\dfrac{1}{2\sqrt[4]{3}} \sqrt{\dfrac{5g}{l}}\, t + \alpha\right)$.

16.21. $\xi = A \sin\left(\dfrac{4e}{a} \sqrt{\dfrac{2}{ma}}\, t + \alpha\right)$, где ξ — отклонение частицы от положения равновесия.

16.22. Частота колебаний равна $\sqrt{(\alpha/l^3 - \omega^2)2}$.

16.23. $\omega = \sqrt{kM/R^3}$.

16.24. $\alpha = \alpha_0 \sin\left(\sqrt{\dfrac{(H + (C - A)\omega_3 \cos\varphi)\omega_3 \cos\varphi}{A + J}}\, t + \gamma\right)$.

16.25. $\alpha = \varphi + \alpha_0 \sin\left(\sqrt{\dfrac{H\omega_3 + (C - A)\omega_3^2}{A + J}}\, t + \gamma\right)$.

16.26. $\omega = \dfrac{\pi\sqrt{c/m}}{\pi - \arccos(h/A)}$, $A = \sqrt{x_0^2 + m\dot{x}_0^2/c} \geqslant h$, где x_0 и $\dot{x}_0$ — начальные положение и скорость.

16.27. $\omega = \dfrac{\pi\sqrt{c/m}}{\pi - \arccos(h_1/A) - \arccos(h_2/A)}$, $A = \sqrt{x_0^2 + m\dot{x}_0^2/c}$, где x_0 и $\dot{x}_0$ — начальные положение и скорость.

16.28. $T = (2/v_0)(L - l_1 - l_2) + \pi\left(\sqrt{m/c_1} + \sqrt{m/c_2}\right)$, где v_0 — скорость массы на участке MN.

16.29. $T = \begin{cases} 4\sqrt{\dfrac{l}{g}}\,\mathrm{arsh}\,\dfrac{\alpha\sqrt{g}}{\sqrt{\dot{\varphi}_0^2 l - \varphi_0^2 g}} & \text{при} \quad \varphi_0^2 g \leqslant \dot{\varphi}_0^2 l, \\ 2\sqrt{\dfrac{l}{g}}\,\mathrm{arch}\,\dfrac{\alpha\sqrt{g}}{\sqrt{\varphi_0^2 g - \dot{\varphi}_0^2 l}} & \text{при} \quad \varphi_0^2 g \geqslant \dot{\varphi}_0^2 l. \end{cases}$

16.30. $\dot{\varphi}(0) = 10^4\sqrt{\dfrac{g}{l}}\,\dfrac{L_1 + L_2}{\pi l}$.

16.31. $\omega = \sqrt{\dfrac{c}{m} + \dfrac{cr^2}{J}} > \sqrt{\dfrac{c}{m}}$.

16.32. $z = A\sin\left(\sqrt{\dfrac{2c}{M+m}}\,t + \alpha\right)$, $\varphi = B\sin\left(\sqrt{\dfrac{g}{r}}\,t + \beta\right)$.

16.33. $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\left(\frac{x_1^0 + x_2^0}{2}\cos\sqrt{\frac{c}{m}}\,t + \frac{\dot{x}_1^0 + \dot{x}_2^0}{2}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}\,t\right) + \\ + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\left(\frac{x_1^0 - x_2^0}{2}\cos\sqrt{\frac{5c}{m}}\,t + \frac{\dot{x}_1^0 - \dot{x}_2^0}{2}\sin\sqrt{\frac{5c}{m}}\,t\right).$$

16.34. $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{3}{2}$; $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{c}{6m}}$.

16.35. Увеличится в $\sqrt{2}$ раз.

16.36. $$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = A_1\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{m}}\,t + \alpha_1\right) + A_2\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\sin\left(2\sqrt{\frac{a}{3m}}\,t + \alpha_2\right).$$

16.37. $$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \frac{q_{10}(\sqrt{5}+1) + 2q_{20}}{4\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5}-1 \end{pmatrix}\cos\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2LC}}\,t\right) + \\ + \frac{q_{10}(\sqrt{5}-1) - 2q_{20}}{4\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{5}-1 \end{pmatrix}\cos\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2LC}}\,t\right).$$

16.38. $$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \frac{q_{10} - q_{20}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cos\left(\sqrt{\frac{1}{L}\left(\frac{2}{C} + \frac{1}{C_1}\right)}\,t\right) + \\ + \frac{q_{10} + q_{20}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cos\left(\sqrt{\frac{1}{C_1 L}}\,t\right).$$

16.39. $\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \overline{\varphi}_2\end{pmatrix} = A_1\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t+\alpha_1\right)+\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}(A_2t+A_3),\ \ \overline{\varphi}_2=\frac{\pi}{2}-\varphi_2.$

16.40. $\begin{pmatrix}x\\ r\varphi\end{pmatrix} = A_1\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{8c}{7m}}t+\alpha_1\right)+A_2\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}\sin\left(2\sqrt{\frac{c}{m}}t+\alpha_2\right).$

16.41. $$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\left(A_1\cos\sqrt{\frac{2c}{3m}}t+B_1\sin\sqrt{\frac{2c}{3m}}t\right)+$$
$$+\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\left(A_2\cos\sqrt{\frac{2c}{m}}t+B_2\sin\sqrt{\frac{2c}{m}}t\right),$$
$$A_1=\frac{1}{2}\left(x_1^0+x_2^0\right),\ \ B_1=\frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^0+\dot{x}_2^0\right)\sqrt{\frac{3m}{2c}},$$
$$A_2=\frac{1}{2}\left(x_1^0-x_2^0\right),\ \ B_2=\frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^0-\dot{x}_2^0\right)\sqrt{\frac{m}{2c}}.$$

16.42. $\begin{pmatrix}x\\ l\varphi\end{pmatrix} = A_1\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{2g}{3l}}t+\alpha_1\right)+A_2\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{2g}{l}}t+\alpha_2\right).$

16.43. $\begin{pmatrix}\varphi\\ \theta\end{pmatrix} = -\frac{\theta_0}{7}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\cos\sqrt{\frac{g}{3l}}t+\frac{\theta_0}{7}\begin{pmatrix}1\\ -6\end{pmatrix}\cos\sqrt{\frac{3g}{2l}}t.$

16.44. $$\begin{pmatrix}\psi\\ \varphi\end{pmatrix} = A_1\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ -\sqrt{3}\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{2\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\frac{g}{r}}\,t+\alpha_1\right)+$$
$$+A_2\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{2\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\frac{g}{r}}\,t+\alpha_2\right).$$

16.45. $$\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} = A_1\begin{pmatrix}6-3\sqrt{3}\\ -12+7\sqrt{3}\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{g}{a}}\,t+\alpha_1\right)+$$
$$+A_2\begin{pmatrix}6+3\sqrt{3}\\ -12-7\sqrt{3}\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{g}{a}}\,t+\alpha_2\right).$$

16.46. $\varphi=A_1\sin\left(\sqrt{\frac{4c}{3m}}\,t+\alpha_1\right),\ \psi=A_2\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t+\alpha_2\right).$

16.47. $$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = A_1\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}-\left(2+\sqrt{2}\right)\frac{g}{l}}t+\alpha_1\right)+$$
$$+A_2\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}-\left(2-\sqrt{2}\right)\frac{g}{l}}t+\alpha_2\right),\quad \frac{c}{m}>\left(2+\sqrt{2}\right)\frac{g}{l}.$$

16.49. $\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = \operatorname{arctg}\dfrac{w_0}{g}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + A_1\begin{pmatrix}6+3\sqrt{7}\\ -16-5\sqrt{7}\end{pmatrix}\sin(\omega_1 t+\alpha_1) +$

$$+ A_2\begin{pmatrix}6-3\sqrt{7}\\ -16+5\sqrt{7}\end{pmatrix}\sin(\omega_2 t+\alpha_2), \quad \text{где } \omega_{1,2} = \left(3\pm\frac{6}{\sqrt{7}}\right)\frac{\sqrt{g^2+w_0^2}}{l}.$$

16.50. $\begin{pmatrix}\varphi\\ \theta\end{pmatrix} = (A_1 t+\alpha_1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + A_2\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{R-r}{3R}\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\dfrac{3g}{4(R-r)}}\,t+\alpha_2\right).$

16.51. $\begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\end{pmatrix} = A_1\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\dfrac{2g}{15r}}\,t+\alpha_1\right) + A_2\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\dfrac{g}{4r}}\,t+\alpha_2\right).$

16.52. $\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = A_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\dfrac{g}{3r}}\,t+\alpha_1\right) + A_2\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\dfrac{g}{r}}\,t+\alpha_2\right).$

16.53. $x = A\sin\left(\dfrac{\sqrt{gc}}{a}\,t+\alpha\right),\ y = B\sin\left(\dfrac{\sqrt{gc}}{b}\,t+\beta\right).$

16.54. $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \sum\limits_{i=1}^{2} C_i\begin{pmatrix}\sqrt{b^2-\omega_i^2}\,\cos(\omega_i t+\alpha_i)\\ \sqrt{a^2-\omega_i^2}\,\sin(\omega_i t+\alpha_i)\end{pmatrix}$, где $a^2 = 2g\alpha-\Omega^2$, $b^2 = 2g\beta-\Omega^2$,

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2+4\Omega^2)\pm\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2+4\Omega^2)^2-4a^2b^2}.$$

16.55. а) $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = A_1\begin{pmatrix}2\\ -(3+\sqrt{13})\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\dfrac{(5-\sqrt{13})g}{l}}\,t+\alpha_1\right) +$

$$+ A_2\begin{pmatrix}2\\ \sqrt{13}-3\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\dfrac{(5+\sqrt{13})g}{l}}\,t+\alpha_2\right);$$

б) $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = A_1\begin{pmatrix}2\\ 1-\sqrt{5}\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\dfrac{(5-\sqrt{5})g}{l}}\,t+\alpha_1\right) +$

$$+ A_2\begin{pmatrix}2\\ 1+\sqrt{5}\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\dfrac{(5+\sqrt{5})g}{l}}\,t+\alpha_2\right);$$

в) $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = A_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\dfrac{g}{l}}\,t+\alpha_1\right) + A_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\dfrac{3g}{l}}\,t+\alpha_2\right).$

16.56. $\omega_{1,2} = \left(1\pm\sqrt{\dfrac{(A-C)(B-C)}{AB}}\right)\Omega.$

16.57. $\omega_{1,2} = \left|\dfrac{H}{2A}\pm\sqrt{\dfrac{H^2}{4A^2}+\dfrac{sG}{A}}\right|.$

16.58. $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = A_1\begin{pmatrix}\cos(\omega_1 t+\alpha_1)\\ \sin(\omega_1 t+\alpha_1)\end{pmatrix} + A_2\begin{pmatrix}\cos(\omega_2 t+\alpha_2)\\ \sin(\omega_2 t+\alpha_2)\end{pmatrix},$

где $\omega_{1,2} = \left|\dfrac{H}{2A}\pm\dfrac{\sqrt{H^2+4cA^2}}{2A}\right|.$

16.59. Ось гироскопа описывает эллиптический конус около направления на север ($\alpha_0 = 0$, $\beta_0 \approx H\omega_3 \sin\varphi/(mgl)$) с частотой, определяемой уравнением

$$\omega^4 - \omega^2\left(\frac{2H}{A}\omega_3\cos\varphi + \frac{mgl}{A} + \frac{H^2}{A^2}\right) + \frac{H}{A}\omega_3\cos\varphi\left(\frac{H}{A}\omega_3\cos\varphi + \frac{mgl}{A}\right) = 0.$$

16.60. $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \\ + A_2\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}\sin(\omega_2 t + \alpha_2) + A_3\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}\sin(\omega_3 t + \alpha_3),$$

где $\omega_1 = \sqrt{2c/m}$, $\omega_2 = \sqrt{(2-\sqrt{3})c/m}$, $\omega_3 = \sqrt{(2+\sqrt{3})c/m}$.

16.61. $$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}(A_1\cos\omega_1 t + B_1\sin\omega_1 t) + \\ + \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}(A_2\cos\omega_2 t + B_2\sin\omega_2 t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}(A_3\cos\omega_3 t + B_3\sin\omega_3 t),$$

$$\omega_1 = \sqrt{2c/J},\ \omega_2 = \sqrt{(2-\sqrt{3})\,c/J},\ \omega_3 = \sqrt{(2+\sqrt{3})\,c/J};$$

$$A_1 = \frac{2\varphi_1^0 - \varphi_3^0}{3},\ A_2 = \frac{\varphi_1^0 + \sqrt{3}\varphi_2^0 + \varphi_3^0}{6},\ A_3 = \frac{\varphi_1^0 - \sqrt{3}\varphi_2^0 + \varphi_3^0}{6};$$

$$B_1 = \frac{2\dot\varphi_1^0 - \dot\varphi_3^0}{3\omega_1},\ B_2 = \frac{\dot\varphi_1^0 + \sqrt{3}\dot\varphi_2^0 + \dot\varphi_3^0}{6\omega_2},\ B_3 = \frac{\dot\varphi_1^0 - \sqrt{3}\dot\varphi_2^0 + \dot\varphi_3^0}{6\omega_3}.$$

16.62. $$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = A_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{2}{CL}}\,t + \alpha_1\right) + \\ + A_2\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{CL}}\,t + \alpha_2\right) + A_3\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{CL}}\,t + \alpha_3\right).$$

16.63. $$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = (A_1 t + \alpha_1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{3}{CL}}\,t + \alpha_2\right) + \\ + A_3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{3}{CL}}\,t + \alpha_3\right).$$

16.64. $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (A_1 t + \alpha_1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\,t + \alpha_2\right) + \\ + A_3\begin{pmatrix} 1 \\ -2/n \\ 1 \end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{n+2}{n}\frac{c}{m}}\,t + \alpha_3\right).$$

16.65. *Решение.* Если принять радиус кольца равным единице, то кинетическая и потенциальная энергии системы, очевидно, будут таковы:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} m\dot{\varphi}_i^2, \ \Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} c(\varphi_i - \varphi_{i+1})^2 \quad (\varphi_7 = \varphi_1).$$

Поскольку общее движение системы является линейной комбинацией главных движений, любое частное движение системы, возможное в силу ее симметрии, представляет собой одно из главных движений. Так, например, возможно движение $\varphi_i = u_{i1}\theta_1$, где $u_{i1} = 1/\sqrt{6m}$ $(i = \overline{1,6})$, причем все пружины ненапряжены (рис. *а*). Тогда

$$T = \dot{\theta}_1^2/2, \quad \Pi = 0, \quad \ddot{\theta}_1 = 0, \quad \omega_1 = 0, \quad \theta_1 = A_1 t + \alpha_1.$$

В качестве второго главного движения примем $\varphi_i = u_{i2}\theta_2$, где

$$u_{12} = u_{32} = u_{52} = 1/\sqrt{6m}, \quad u_{22} = u_{42} = u_{62} = -1/\sqrt{6m}.$$

При этом средние точки каждой пружины покоятся, а соседние массы колеблются в противофазе (рис. *б*). Тогда

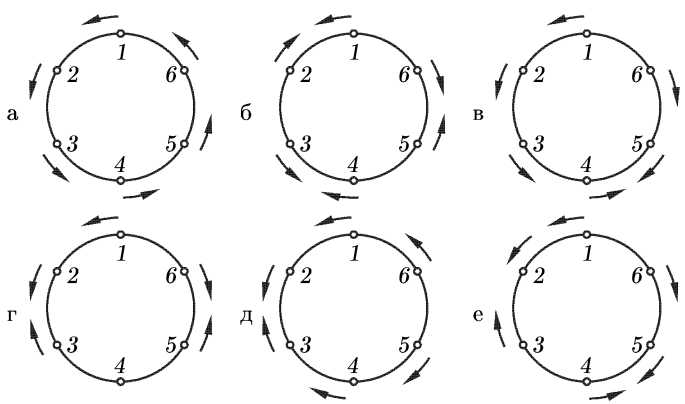
$$T = \dot{\theta}_2^2/2, \quad \Pi = (2c/m)\theta_2^2, \quad \ddot{\theta}_2 + (4c/m)\theta_2 = 0,$$

$$\omega_2 = \sqrt{4c/m}, \quad \theta_2 = A_2 \sin(\sqrt{4c/m}\,t + \alpha_2).$$

В силу симметрии системы возможны два движения, при которых 1-я и 4-я массы покоятся. В первом из движений (рис. *в*) $\varphi_i = u_{i3}\theta_3$, где

$$u_{13} = u_{43} = 0, \quad u_{23} = u_{33} = 1/\sqrt{4m}, \quad u_{53} = u_{63} = -1/\sqrt{4m}.$$

Пружины между 2-й и 3-й, а также между 5-й и 6-й массами не напряжены, и на



К задаче 16.65

каждую из четырех движущихся масс действует восстанавливающая сила только одной пружины. Тогда

$$T = \dot{\theta}_3^2/2, \quad \Pi = (c/2m)\theta_3^2, \quad \ddot{\theta}_3 + (c/m)\theta_3 = 0,$$

$$\omega_3 = \sqrt{c/m}, \quad \theta_3 = A_3 \sin(\sqrt{c/m}\,t + \alpha_3).$$

Во втором движении с неподвижной 1-й и 4-й массами (рис. *г*) $\varphi_i = u_{i4}\theta_4$, где

$$u_{14} = u_{44} = 0, \quad u_{24} = u_{54} = 1/\sqrt{4m}, \quad u_{34} = u_{64} = -1/\sqrt{4m}.$$

Средние точки пружин между 2-й и 3-й, а также между 5-й и 6-й массами покоятся. На каждую движущуюся массу действуют восстанавливающие силы целой пружины и пружины половинной длины. Тогда

$$T = \dot\theta_4^2/2, \quad \Pi = (3c/2m)\theta_4^2, \quad \ddot\theta_4 + (3c/m)\theta_4 = 0,$$

$$\omega_4 = \sqrt{3c/m}, \quad \theta_4 = A_4 \sin\left(\sqrt{3c/m}\, t + \alpha_4\right).$$

Нетрудно убедиться в том, что все найденные амплитудные векторы взаимно ортогональны. В рассматриваемом случае метрика определяется диагональной квадратичной формой $\sum\limits_{ij} a_{ij}\dot q_i \dot q_j = \sum\limits_{i=1}^{6} m\dot\varphi_i^2$, откуда следует, что

$$\sum_{i=1}^{6} m u_{i\nu} u_{j\mu} = \delta_{\nu\mu} \quad (\nu, \mu = \overline{1, 4}),$$

где $\delta_{\nu\mu}$ — символ Кронекера ($\delta_{\nu\mu} = 1$ при $\nu = \mu$; $\delta_{\nu\mu} = 0$ при $\nu \neq \mu$).

Для того чтобы найти два оставшихся движения, воспользуемся свойством ортогональности амплитудных векторов. Итак, пусть $\varphi_i = u_i\theta$; тогда

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 &= 0, \\ u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_6 &= 0, \\ u_2 + u_3 - u_5 - u_6 &= 0, \\ u_2 - u_3 + u_5 - u_6 &= 0. \end{aligned}$$

Эти четыре уравнения позволяют выразить четыре компоненты через две остальные; выразим, например, u_2, u_3, u_5, u_6 через u_1, u_4: $u_3 = u_5 = -u_1/2$, $u_2 = u_6 = -u_4/2$. Таким образом, $\varphi_3 = \varphi_5 = -\varphi_1/2$, $\varphi_2 = \varphi_6 = -\varphi_4/2$, и кинетическая и потенциальная энергии принимают вид

$$T = \frac{3}{4} m \left(\dot\varphi_1^2 + \dot\varphi_4^2\right), \quad \Pi = \frac{3c}{2}\left(\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_4 + \varphi_4^2\right).$$

Запишем уравнения движения этой системы с двумя степенями свободы:

$$\ddot\varphi_1 + \frac{2c}{m}\varphi_1 + \frac{c}{m}\varphi_4 = 0, \quad \frac{c}{m}\varphi_1 + \ddot\varphi_4 + \frac{2c}{m}\varphi_4 = 0,$$

и будем искать их решение в виде $\varphi_i = u_i \sin(\omega t + \alpha)$ $(i = 1, 4)$, что дает алгебраическую систему для определения u_1, u_4:

$$\left(\frac{2c}{m} - \omega^2\right) u_1 + \frac{c}{m} u_4 = 0, \quad \frac{c}{m} u_1 + \left(\frac{2c}{m} - \omega^2\right) u_4 = 0.$$

Характеристическое уравнение этой системы

$$\Delta = \left(\frac{2c}{m} - \omega^2\right)^2 - \left(\frac{c}{m}\right)^2 = 0$$

имеет два корня: $\omega_5 = \sqrt{c/m}$, $\omega_6 = \sqrt{3c/m}$. Этим двум частотам соответствуют два амплитудных вектора с компонентами $u_{15} = 1/\sqrt{3m}$, $u_{45} = -1/\sqrt{3m}$ и $u_{16} = 1/\sqrt{3m}$, $u_{46} = 1/\sqrt{3m}$.

Итак, в главном движении будет $\varphi_i = u_{i5}\theta_5$, где

$$\theta_5 = A_5 \sin\left(\sqrt{c/m}\, t + \alpha_5\right),$$

$$u_{15} = 1/\sqrt{3m}, \qquad u_{35} = u_{55} = -1/\sqrt{12m},$$
$$u_{45} = -1/\sqrt{3m}, \qquad u_{25} = u_{65} = 1/\sqrt{12m}.$$

Средние точки пружин между 2-й и 3-й, а также между 5-й и 6-й массами неподвижны (рис. *д*).

Наконец, в 6-м главном движении имеем $\varphi_i = u_{i6}\theta_6$, где

$$\theta_6 = A_6 \sin\left(\sqrt{3c/m}\, t + \alpha_6\right),$$

$$u_{16} = 1/\sqrt{3m}, \quad u_{36} = u_{56} = -1/\sqrt{12m},$$
$$u_{46} = 1/\sqrt{3m}, \quad u_{26} = u_{66} = -1/\sqrt{12m}.$$

Пружины между 2-й и 3-й, а также между 5-й и 6-й массами не напряжены (рис. *е*).

В рассматриваемой механической системе частоты $\omega_1 = 0$ и $\omega_2 = \sqrt{4c/m}$ имеют кратность один, а частоты $\omega_3 = \omega_5 = \sqrt{c/m}$ и $\omega_4 = \omega_6 = \sqrt{3c/m}$ — кратность два, однако все амплитудные векторы ортогональны. Общее движение является линейной комбинацией главных движений:

$$\varphi_i = u_{i1}(A_1 t + \alpha_1) + \sum_{j=2}^{6} u_{ij} A_j \sin(\omega_j t + \alpha_j).$$

Для того чтобы определить произвольные константы A_i и α_i, запишем общее решение в виде

$$\varphi_i = u_{i1}(B_1 t + C_1) + \sum_{j=2}^{6} u_{ij}(B_j \sin\omega_j t + C_j \cos\omega_j t),$$

где $B_1 = A_1$, $C_1 = \alpha_1$, $B_j = A_j \cos\alpha_j$, $C_j = A_j \sin\alpha_j$ $(j = \overline{2,6})$.

В начальный момент имеют место равенства

$$\varphi_i^0 = u_{i1} C_1 + \sum_{j=2}^{6} u_{ij} C_j, \quad \dot{\varphi}_i^0 = u_{i1} B_1 + \sum_{j=2}^{6} u_{ij}\omega_j B_j.$$

Условия ортогональности дают

$$C_j = \sum_{i=1}^{6} m\varphi_i^0 u_{ij}, \;\; B_1 = \sum_{i=1}^{6} m\dot{\varphi}_i^0 u_{i1}, \;\; B_j = \frac{1}{\omega_j}\sum_{i=1}^{6} m\dot{\varphi}_i^0 u_{ij}, \;\; j = \overline{2,6},$$

или

$$C_1 = \sqrt{m/6}\sum_{i=1}^{6}\varphi_i^0, \;\; C_2 = \sqrt{m/6}\left(\varphi_1^0 - \varphi_2^0 + \varphi_3^0 - \varphi_4^0 + \varphi_5^0 - \varphi_6^0\right),$$
$$C_3 = \sqrt{m/4}\left(\varphi_2^0 + \varphi_3^0 - \varphi_5^0 - \varphi_6^0\right), \;\; C_4 = \sqrt{m/4}\left(\varphi_2^0 - \varphi_3^0 + \varphi_5^0 - \varphi_6^0\right),$$
$$C_5 = \sqrt{m/3}\left(\varphi_1^0 + \varphi_2^0/2 - \varphi_3^0/2 - \varphi_4^0 - \varphi_5^0/2 + \varphi_6^0/2\right),$$
$$C_6 = \sqrt{m/3}\left(\varphi_1^0 - \varphi_2^0/2 - \varphi_3^0/2 + \varphi_4^0 - \varphi_5^0/2 - \varphi_6^0/2\right),$$

$$B_1 = \sqrt{m/6}\sum_{i=1}^{6}\dot\varphi_i^0,\ \ B_2 = \left(\sqrt{m/6}/\omega_2\right)\left(\dot\varphi_1^0 - \dot\varphi_2^0 + \dot\varphi_3^0 - \dot\varphi_4^0 + \dot\varphi_5^0 - \dot\varphi_6^0\right),$$

$$B_3 = \left(\sqrt{m/4}/\omega_3\right)\left(\dot\varphi_2^0 + \dot\varphi_3^0 - \dot\varphi_5^0 - \dot\varphi_6^0\right),\ \ B_4 = \left(\sqrt{m/4}/\omega_4\right)\left(\dot\varphi_2^0 - \dot\varphi_3^0 + \dot\varphi_5^0 - \dot\varphi_6^0\right),$$

$$B_5 = \left(\sqrt{m/3}/\omega_5\right)\left(\dot\varphi_1^0 + \dot\varphi_2^0/2 - \dot\varphi_3^0/2 - \dot\varphi_4^0 - \dot\varphi_5^0/2 + \dot\varphi_6^0/2\right),$$

$$B_6 = \left(\sqrt{m/3}/\omega_6\right)\left(\dot\varphi_1^0 - \dot\varphi_2^0/2 - \dot\varphi_3^0/2 + \dot\varphi_4^0 - \dot\varphi_5^0/2 - \dot\varphi_6^0/2\right).$$

Ответ. $\varphi_i = u_{i1}(A_i t + \alpha_i) + \sum\limits_{j=2}^{6} u_{ij} A_j \sin(\omega_j t + \alpha_j)$, где $\omega_2 = \sqrt{4c/m}$, $\omega_3 = \sqrt{c/m}$, $\omega_4 = \sqrt{3c/m}$, $\omega_5 = \sqrt{c/m}$, $\omega_6 = \sqrt{3c/m}$.

$$(u_{ij}) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6m} & 1/\sqrt{6m} & 0 & 0 & 1/\sqrt{3m} & 1/\sqrt{3m} \\ 1/\sqrt{6m} & -1/\sqrt{6m} & 1/\sqrt{4m} & 1/\sqrt{4m} & 1/\sqrt{12m} & -1/\sqrt{12m} \\ 1/\sqrt{6m} & 1/\sqrt{6m} & 1/\sqrt{4m} & -1/\sqrt{4m} & -1/\sqrt{12m} & -1/\sqrt{12m} \\ 1/\sqrt{6m} & -1/\sqrt{6m} & 0 & 0 & -1/\sqrt{3m} & 1/\sqrt{3m} \\ 1/\sqrt{6m} & 1/\sqrt{6m} & -1/\sqrt{4m} & 1/\sqrt{4m} & -1/\sqrt{12m} & -1/\sqrt{12m} \\ 1/\sqrt{6m} & -1/\sqrt{6m} & -1/\sqrt{4m} & -1/\sqrt{4m} & 1/\sqrt{12m} & -1/\sqrt{12m} \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \sqrt{\frac{m}{6}}\sum_{i=1}^{6}\varphi_i^0,\ \alpha_1 = \sqrt{\frac{m}{6}}\sum_{i=1}^{6}\dot\varphi_i^0,\ A_j = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{6} m\varphi_i^0 u_{ij}\right)^2 + (1/\omega_j)^2\left(\sum_{i=1}^{6} m\dot\varphi_i^0 u_{ij}\right)^2},$$

$$\alpha_j = \operatorname{arctg}\left[\sum_{i=1}^{6} m\varphi_i^0 u_{ij}\left(\sum_{i=1}^{6} m\dot\varphi_i^0 u_{ij}\right)^{-1}\right]\omega_j \quad (j = \overline{2,6}).$$

16.66. $$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix} = A_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \alpha_1\right) + A_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\times$$
$$\times\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{ch^2}{ml^2}}\,t + \alpha_2\right) + A_3\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{3ch^2}{ml^2}}\,t + \alpha_3\right).$$

16.68. $$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} = (A_1 t + \alpha_1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + A_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{2c}{m}}\,t + \alpha_2\right) +$$
$$+ A_3\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{2c}{m}}\,t + \alpha_3\right) + A_4\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{4c}{m}}\,t + \alpha_4\right).$$

16.69. $$\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\\ q_3\\ q_4\end{pmatrix} = (A_1 t + \alpha_1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + A_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{2}{CL}}\,t + \alpha_2\right) +$$
$$+ A_3\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{2}{CL}}\,t + \alpha_3\right) + A_4\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{4}{CL}}\,t + \alpha_4\right).$$

16.70. $$\begin{pmatrix} x_1 \\ l\varphi_1 \\ x_2 \\ l\varphi_2 \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{2l}}\,t + \alpha_1\right) + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{2g}{l}}\,t + \alpha_2\right) +$$
$$+ A_3 \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{17}+1 \\ -2 \\ -1-\sqrt{17} \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{7-\sqrt{17}}{4}\frac{g}{l}}\,t + \alpha_3\right) +$$
$$+ A_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{17} \\ -2 \\ \sqrt{17}-1 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{7+\sqrt{17}}{4}\frac{g}{l}}\,t + \alpha_4\right).$$

16.71. $$\begin{pmatrix} x \\ l\psi \\ l\varphi \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\,t + \alpha_1\right) +$$
$$+ A_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2/\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{3(2-\sqrt{3})\frac{g}{l}}\,t + \alpha_2\right) +$$
$$+ A_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2/\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{3(2+\sqrt{3})\frac{g}{l}}\,t + \alpha_3\right).$$

16.72. $$\begin{pmatrix} x \\ l_1\varphi \\ y \end{pmatrix} = (A_1 t + \alpha_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -(M+m)/m \\ 0 \end{pmatrix} \times$$
$$\times \sin\left(\sqrt{\frac{M+m}{M}\frac{g}{l_1}}\,t + \alpha_2\right) + A_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\,t + \alpha_3\right),$$

где $l_1 = l_0 + \dfrac{mg}{c}$.

16.73. $$\begin{pmatrix} x \\ l\varphi_1 \\ l\varphi_2 \end{pmatrix} = (A_1 t + \alpha_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \alpha_2\right) +$$
$$+ A_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \sin\left(2\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \alpha_3\right).$$

16.74. $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{c}{2m}}\,t + \alpha_1\right) +$$
$$+ A_2 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{3c}{2m}}\,t + \alpha_2\right) + A_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{5c}{4m}}\,t + \alpha_3\right).$$

16.75. $\omega_1^2 = \dfrac{g}{r}\cos\varphi_0 + \dfrac{2c}{m}$,

$$\omega_{2,3}^2 = \frac{g}{2r}\left[\left(\frac{3}{2}\cos\varphi_0 + 1\right) \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\cos\varphi_0 + 1\right)^2 - 4\cos^2\varphi_0}\,\right],$$

где $\varphi_{10} = -\varphi_{20} = \varphi_0$ — значения углов в положениии равновесия.

16.76. $T=\pi\sqrt{\dfrac{b}{g}\,\dfrac{a^2+5b^2}{a^2-b^2}}.$

16.77. $x_i=\sum\limits_{j=1}^{n-1}A_j\cos\dfrac{j\,(2i-1)\pi}{2n}\sin\left(2\sqrt{\dfrac{c}{m}}\,t\sin\dfrac{j\pi}{2n}+\alpha_j\right)+(A_n\,t+\alpha_n).$

16.78. $x_i=\sum\limits_{j=1}^{n}A_j\sin\dfrac{i(2j-1)\pi}{2n+1}\sin\left(2\sqrt{\dfrac{c}{m}}t\sin\dfrac{(2j-1)\pi}{2(2n+1)}+\alpha_j\right).$

16.79. $x_i=\sum\limits_{j=1}^{n}A_j\sin\dfrac{ij\pi}{n+1}\sin\left(2\sqrt{\dfrac{c}{m}}\,t\sin\dfrac{j\,\pi}{2(n+1)}\right)+\alpha_j.$

16.80. $q_i=\sum\limits_{j=1}^{n}A_j\sin\dfrac{ij\pi}{n+1}\sin\left(\dfrac{2t}{\sqrt{LC}}\sin\dfrac{j\,\pi}{2(n+1)}+\alpha_j\right).$

16.81. $q_i=\sum\limits_{j=1}^{n}A_j\sin\dfrac{i(2j-1)\pi}{2n+1}\sin\left(\dfrac{2t}{\sqrt{LC}}\sin\dfrac{(2j-1)\pi}{2(2n+1)}+\alpha_j\right).$

16.82. $q_i=\sum\limits_{j=1}^{n-1}A_j\cos\dfrac{j\,(2i-1)\pi}{2n}\sin\left(\dfrac{2t}{\sqrt{LC}}\sin\dfrac{j\pi}{2n}+\alpha_j\right)+A_n\,t+\alpha_n.$

16.83. $\varphi_i=\sum\limits_{j=1}^{n-1}A_j\sin\dfrac{2ij\pi}{n}\sin\left(2t\sqrt{\dfrac{c}{m}}\sin\dfrac{j\pi}{n}+\alpha_j\right)+A_nt+\alpha_n.$

16.84. $$q_k=\sum_{j=1}^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}q_i^0\sin\frac{2ij\pi}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\sin^2\frac{2ij\pi}{n}\right)^{-1}\right]\times$$
$$\times\sin\left(\frac{2kj\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{2t}{\sqrt{LC}}\sin\left(\frac{j\pi}{n}\right)\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i^0}{n}.$$

16.85. $\varphi_i=\sum\limits_{j=1}^{n-1}A_j\cos\dfrac{(2i-1)j\pi}{2n}\sin\left(2\sqrt{\dfrac{c}{m}}\,t\sin\dfrac{j\pi}{2n}+\alpha_j\right)+A_nt+\alpha_n.$

16.86. $$\varphi_i=\sum_{j=1}^{n-1}A_j\cos\frac{(2i-1)j\pi}{2n}\sin\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\sin\frac{j\pi}{2n}+\alpha_j\right)+A_n\,t+\alpha_n+$$
$$+\sum_{j=1}^{n-1}B_j\cos\frac{(2i-1)j\pi}{2n}\sin\left(2\sqrt{\frac{2K}{m}+\frac{4k}{m}\sin^2\frac{j\pi}{2n}}\,t+\beta_j\right)+$$
$$+B_n\sin\left(\sqrt{\frac{2K}{m}}\,t+\beta_n\right),$$
$$\psi_i=\sum_{j=1}^{n-1}A_j\cos\frac{(2i-1)j\pi}{2n}\sin\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\sin\frac{j\pi}{2n}+\alpha_j\right)+A_n\,t+\alpha_n-$$
$$-\sum_{j=1}^{n-1}B_j\cos\frac{(2i-1)j\pi}{2n}\sin\left(2\sqrt{\frac{2K}{m}+\frac{4k}{m}\sin^2\frac{j\pi}{2n}}\,t+\beta_j\right)-$$
$$-B_n\sin\left(\sqrt{\frac{2K}{m}}\,t+\beta_n\right).$$

16.87. $$x_{2i} = \sum_{j=1}^{2n-1} A_j \sqrt{k+K-M\omega_j^2}\,\sin\frac{ij\pi}{n}\,\sin(\omega_j t+\alpha_j),$$

$$x_{2i+1} = \sum_{j=1}^{2n-1} A_j \sqrt{k+K-m\omega_j^2}\,\frac{K\sin[(i+1)j\pi/n]+k\sin(ij\pi/n)}{\sqrt{k^2+2kK\cos(j\pi/n)+K^2}}\,\sin(\omega_j t+\alpha_j),$$

$$\omega_l^2 = \frac{(k+K)(m+M)}{2mM} \pm \sqrt{\left(\frac{(k+K)(m+M)}{2mM}\right)^2 - \frac{4kK}{mM}\sin^2\left(\frac{l\pi}{2n}\right)} \quad (l=\overline{0,n}).$$

16.88. $$\varphi_{2i-1} = \sum_{j=1}^{2n-1} A_j \sqrt{2k-M\omega_j^2}\,\sin\frac{(2i-1)j\pi}{n}\,\sin(\omega_j t+\alpha_j) + A_{2n}t+\alpha_{2n},$$

$$\varphi_{2i} = \sum_{j=1}^{2n-1} A_j \sqrt{2k-m\omega_j^2}\,\sin\frac{2ij\pi}{n}\,\sin(\omega_j t+\alpha_j) + A_{2n}t+\alpha_{2n},$$

$$\omega_l^2 = \frac{m+M}{mM}k \pm \sqrt{\left(\frac{m+M}{mM}k\right)^2 - 4\frac{k^2}{mM}\sin^2\frac{l\pi}{n}} \quad (i,\,l=\overline{1,n}).$$

16.89. $$\varphi_{2i-1} = \sum_{j=1}^{2n-1} A_j \frac{k\sin\dfrac{2ij\pi}{n}+K\sin\dfrac{2(i-1)j\pi}{n}}{\sqrt{k^2+2kK\cos\dfrac{2j\pi}{n}+K^2}}\,\sin(\omega_j t+\alpha_j) + A_{2n}t+\alpha_{2n},$$

$$\varphi_{2i} = \sum_{j=1}^{2n-1} A_j \sin\frac{2ij\pi}{n}\,\sin(\omega_j t+\alpha_j) + A_{2n}t+\alpha_{2n},$$

$$\omega_l^2 = \frac{k+K}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{k+K}{m}\right)^2 - 4\frac{kK}{m^2}\sin^2\frac{l\pi}{n}} \quad (i,\,l=\overline{1,n}).$$

16.90. $$\varphi_{2i-1} = \sum_{j=1}^{2n-1} A_j \sqrt{k+K-M\omega_j^2}\times$$

$$\times\frac{k\sin\dfrac{2ij\pi}{n}+K\sin\dfrac{2(i-1)j\pi}{n}}{\sqrt{k^2+2kK\cos\dfrac{2j\pi}{n}+K^2}}\,\sin(\omega_j t+\alpha_j) + A_{2n}t+\alpha_{2n},$$

$$\varphi_{2i} = \sum_{j=1}^{2n-1} A_j \sqrt{k+K-m\omega_j^2}\,\sin\frac{2ij\pi}{n}\,\sin(\omega_j t+\alpha_j) + A_{2n}t+\alpha_{2n},$$

$$\omega_l^2 = \frac{m+M}{mM}\,\frac{k+K}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m+M}{mM}\,\frac{k+K}{2}\right)^2 - 4\frac{kK}{mM}\sin^2\frac{l\pi}{2n}} \quad (i,\,l=\overline{0,n}).$$

16.91. $$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} A_j \cos\left(\frac{2i-1}{2}\,\frac{(j-1)\pi}{n}\right)\sin(\omega_j t+\alpha_j),$$

$$\omega_j = \sqrt{\frac{g}{l} + 4\frac{ch^2}{ml^2}\sin^2\frac{(j-1)\pi}{n}} \quad (i=\overline{1,n}).$$

16.92. $\varphi_i = \sum\limits_{j=1}^{n} A_j \sin\dfrac{i(2j-1)\pi}{2n+1}\sin(\omega_j t+\alpha_j),$

$$\omega_j = \sqrt{\frac{g}{l}+\frac{ch^2}{ml^2}4\sin^2\frac{(2j-1)\pi}{2(2n+1)}} \quad (i=\overline{1,n}).$$

16.93. $\varphi_i = \sum\limits_{j=1}^{n} A_j \sin\dfrac{ij\pi}{n+1}\sin(\omega_j t+\alpha_j),$

$$\omega_j = \sqrt{\frac{g}{l}+\frac{ch^2}{ml^2}4\sin^2\frac{j\pi}{2(n+1)}} \quad (i=\overline{1,n}).$$

16.94. $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} A_j \sin\dfrac{ij\pi}{n+1}\sin\left[2\sqrt{\dfrac{c}{m}}\,t\sin\dfrac{j\pi}{2(n+1)}+\alpha_j\right] \quad (i=\overline{1,n}).$

16.95. $\omega_j = \dfrac{j\pi}{l}\sqrt{\dfrac{F_{\text{н}}}{\rho}} \quad (j=\overline{1,\infty}).$

16.96. $x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} A_j L_{i-1}\left(\dfrac{l\omega_j^2}{g}\right)\sin(\omega_j t+\alpha_j) \quad (i=\overline{1,n}),$ ω_j — корни уравнения $L_n\left(\dfrac{l\omega^2}{g}\right)=0.$

16.97. $x_i = \dfrac{(n+i)(n+1-i)\,mg}{2k} + \sum\limits_{j=1}^{n} A_j\cos\dfrac{(2i-1)(2j+1)\pi}{2(2n+1)}\times$

$$\times\sin\left[2\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\sin\frac{(2j+1)\pi}{2(2n+1)}+\alpha_j\right].$$

16.98. $\varphi_i = \sum\limits_{j=1}^{n} A_j\left[L_{i-1}\left(\dfrac{\omega_j^2 l}{g}\right)-L_i\left(\dfrac{\omega_j^2 l}{g}\right)\right]\sin(\omega_j t+\alpha_j).$

16.99. $$\begin{pmatrix}\varphi_{ij}\\ z_{ij}\end{pmatrix} = \sum_{r=1}^{m-1}\sum_{s=1}^{n-1}\begin{pmatrix}A_{rs}\sin(\omega_{rs}t+\alpha_{rs})\\ B_{rs}\sin(\omega_{rs}t+\beta_{rs})\end{pmatrix}\cos\frac{(2i-1)r\pi}{2m}\times$$

$$\times\cos\frac{2js\pi}{n}+\sum_{r=1}^{m-1}\begin{pmatrix}A_{r0}\sin(\omega_{r0}t+\alpha_{r0})\\ B_{r0}\sin(\omega_{r0}t+\beta_{r0})\end{pmatrix}\cos\frac{(2i-1)r\pi}{2m}+$$

$$+\sum_{s=1}^{n-1}\begin{pmatrix}A_{0s}\sin(\omega_{0s}t+\alpha_{0s})\\ B_{0s}\sin(\omega_{0s}t+\beta_{0s})\end{pmatrix}\cos\frac{2js\pi}{n}+\begin{pmatrix}A_{00}t+\alpha_{00}\\ B_{00}t+\beta_{00}\end{pmatrix},$$

$$\omega_{rs}^2 = 4\left[\frac{k_1}{\mu}\sin^2\frac{r\pi}{2m}+\frac{k_2}{\mu}\sin^2\frac{s\pi}{n}\right].$$

16.100. $$\begin{pmatrix}\varphi_{ij}\\ z_{ij}\end{pmatrix}=\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n-1}\sin\frac{(2r-1)i\pi}{2m+1}\cos\frac{2js\pi}{n}\begin{pmatrix}A_{rs}\sin(\omega_{rs}t+\alpha_{rs})\\ B_{rs}\sin(\omega_{rs}t+\beta_{rs})\end{pmatrix}+$$
$$+\sum_{r=1}^{m}\sin\frac{(2r-1)i\pi}{2m+1}\begin{pmatrix}A_{r0}\sin(\omega_{r0}t+\alpha_{r0})\\ B_{r0}\sin(\omega_{r0}t+\beta_{r0})\end{pmatrix},$$
$$\omega_{rs}^2=4\left[\frac{k_1}{\mu}\sin^2\frac{(2r-1)\pi}{2(2m+1)}+\frac{k_2}{\mu}\sin^2\frac{s\pi}{n}\right].$$

16.101. $$\begin{pmatrix}\varphi_{ij}\\ z_{ij}\end{pmatrix}=\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n-1}\sin\frac{ir\pi}{m+1}\cos\frac{2js\pi}{n}\begin{pmatrix}A_{rs}\sin(\omega_{rs}t+\alpha_{rs})\\ B_{rs}\sin(\omega_{rs}t+\beta_{rs})\end{pmatrix}+$$
$$+\sum_{r=1}^{m}\sin\frac{ir\pi}{m+1}\begin{pmatrix}A_{r0}\sin(\omega_{r0}t+\alpha_{r0})\\ B_{r0}\sin(\omega_{r0}t+\beta_{r0})\end{pmatrix},$$
$$\omega_{rs}^2=4\left[\frac{k_1}{\mu}\sin^2\frac{r\pi}{m+1}+\frac{k_2}{\mu}\sin^2\frac{s\pi}{n}\right].$$

16.102. $$\begin{pmatrix}x_{ijk}\\ y_{ijk}\\ z_{ijk}\end{pmatrix}=\sum_{s=1}^{n_x}\sum_{r=1}^{n_y}\sum_{l=1}^{n_z-1}\sin\frac{i\pi(2s-1)}{n_x+1}\sin\frac{j\pi(2r-1)}{n_y+1}\times$$
$$\times\cos\frac{l\pi(2k-1)}{2n_z}\begin{pmatrix}A_{srl}\sin(\omega_{srl}t+\alpha_{srl})\\ B_{srl}\sin(\omega_{srl}t+\beta_{srl})\\ C_{srl}\sin(\omega_{srl}t+\gamma_{srl})\end{pmatrix},$$
$$\omega_{rsl}^2=4\left[\frac{k_1}{m}\sin^2\frac{(2s-1)\pi}{2(n_x+1)}+\frac{k_2}{m}\sin^2\frac{(2r-1)\pi}{2(n_y+1)}+\frac{k_3}{m}\sin^2\frac{l\pi}{2n_z}\right].$$

16.103. $\Omega_2=\sqrt{\dfrac{a^2\omega_2^2+b^2\omega_1^2}{a^2+b^2}}$, $\Omega_i=\omega_i\quad(i=\overline{3,n})$.

16.104. $\omega_1^2=\dfrac{1}{\lambda^{n-1}}\dfrac{\det(\lambda\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{b}')}{\det\mathbf{A}}$, $\omega_i=\lambda\quad(i=\overline{2,n})$, где $\mathbf{A}=\|a_{ik}\|_{i,k=1}^n$, $\mathbf{b}\mathbf{b}'=$ $=\|(b_ib_k)\|_{i,k=1}^n$.

16.105. По данным задачи можно найти множество систем, у которых $\mathbf{A}=$ $=(\mathbf{U}^{-1})'\mathbf{E}_\mu\mathbf{U}^{-1}$ и $\mathbf{C}=(\mathbf{U}^{-1})'\mathbf{E}_\mu\mathbf{E}_{\omega^2}\mathbf{U}^{-1}$, где $\mathbf{E}_\mu$ — диагональная матрица с произвольными ненулевыми элементами, $\mathbf{E}_{\omega^2}=(\mathbf{E}_\mu)_{\mu_i=\omega_i^2}$, $\mathbf{U}$ — матрица, столбцами которой являются амплитудные векторы.

16.107. $$q_i=\sum_{j=1}^{m}\left[u_{i,2j-1}\left(\frac{A_j}{\nu_j}\sin(\nu_jt+\alpha_j)+B_{2j-1}\right)+\right.$$
$$\left.+u_{i,2j}\left(-\frac{A_j}{\nu_j}\cos(\nu_jt+\alpha_j)+B_{2j}\right)\right]+\sum_{j=m+1}^{n}u_{ij}(A_jt+B_j)$$
$(i=\overline{1,n})$, A_j, B_j, α_j — произвольные постоянные.

16.108. Из начальных условий имеем $\mathbf{q}^0=\sum\limits_{i=1}^{n}C_i\mathbf{u}^i$, $\dot{\mathbf{q}}^0=\sum\limits_{i=1}^{n}B_i\omega_i\mathbf{u}^i$. Амплитудные векторы, соответствующие различным частотам, ортогональны, если скалярное произведение $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ векторов $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ определяется в соответствии со следующим

равенством: $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_iy_k$. Поэтому $(\mathbf{q}^0,\mathbf{u}^j) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i(\mathbf{u}^i,\mathbf{u}^j) =$

$= C_j(\mathbf{u}^j,\mathbf{u}^j)$, откуда $C_j = \dfrac{(\mathbf{q}^0,\mathbf{u}^j)}{(\mathbf{u}^j,\mathbf{u}^j)} = \sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}q_i^0u_k^j\left(\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_i^ju_k^j\right)^{-1}$.

Аналогично имеем $B_j = \dfrac{(\dot{\mathbf{q}}^0,\mathbf{u}^j)}{\omega_j(\mathbf{u}^j,\mathbf{u}^j)} = \sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i^0u_k^j\left(\omega_j\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_i^ju_k^j\right)^{-1}$.

16.109. $T = \begin{cases} 2\pi\sqrt{m/c} \text{ при } v_0\sqrt{c} \leqslant g\sqrt{m}; \\ \sqrt{\dfrac{m}{c}}\left(\pi + 2\arcsin\left(\dfrac{g}{v_0}\sqrt{\dfrac{m}{c}}\right) + \dfrac{2}{mg}\sqrt{v_0^2cm - m^2g^2}\right) \\ \qquad\qquad \text{при } v_0\sqrt{c} > g\sqrt{m}. \end{cases}$

16.110. $\begin{pmatrix} x \\ l\varphi \end{pmatrix} = A_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\dfrac{3c}{2m}}\,t + \alpha_1\right) + A_2\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\dfrac{5c}{m}}\,t + \alpha_2\right)$.

16.111. $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = A_1\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{(2-\sqrt{2})g/l}\,t + \alpha_1\right) +$

$+ A_2\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{(2+\sqrt{2})g/l}\,t + \alpha_2\right)$.

16.112. $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = A_1\begin{pmatrix} 4-\sqrt{7} \\ 3(\sqrt{7}-2) \end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\left(3-\dfrac{6}{\sqrt{7}}\right)\dfrac{g}{l}}\,t + \alpha_1\right) +$

$+ A_2\begin{pmatrix} -(4+\sqrt{7}) \\ 3(\sqrt{7}+2) \end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\left(3+\dfrac{6}{\sqrt{7}}\right)\dfrac{g}{l}}\,t + \alpha_2\right)$.

§ 17. Движение диссипативных систем

17.1. $c - m\omega^2 > 0$.

17.3. Нельзя, так как рассматриваемая система не является системой с полной диссипацией, т. е. определенно диссипативной системой.

17.4. $(c_1+c_2)/m_1 = (c_3+c_4)/m_3$.

17.5. $\dfrac{L_3(C_1+C_2)}{C_1C_2} = \dfrac{L_1(C_3+C_4)}{C_3C_4}$.

17.6. $2c_1m_2 = c_2m_1$ или $2c_1m_2 = 3c_2m_1$.

17.8. Производная полной энергии системы равна $\dot{E} = \dfrac{d(T+\Pi)}{dt} = -\beta\dot{x}_n^2$. Множество M тех точек $2n$-мерного фазового пространства системы, где $\dot{E} = 0$, определяется уравнением $\dot{x}_n = 0$. В этом множестве нет других движений системы при $t > 0$, за исключением положения равновесия. Действительно, если $\dot{x}_n(t) \equiv 0$, то $x_n(t) = \text{const}$ и последний груз будет находиться в состоянии покоя. Поэтому сила, действующая на последний груз, будет равна нулю. При этих условиях обобщенные силы, действующие на все остальные массы, будут равны нулю, т. е. система будет находиться в равновесии (см. задачу 14.15).

В теории устойчивости имеется следующая теорема: пусть для системы уравнений $\dot{y}_i = Y(y_j)$, $Y(0) = 0$ существует положительно определенная функция Ляпунова $V(y_j)$, полная производная которой $\dot{V}(y_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial y_i} Y_i(y_j) \leqslant 0$ в силу системы уравнений, причем множество M тех y_i, для которых $\dot{V} = 0$, не содержит целых траекторий системы (при $t > 0$), за исключением нулевого решения. Тогда нулевое решение $y_i = 0$ асимптотически устойчиво.

Поскольку $E(x_i, \dot{x}_i) > 0$, из этой теоремы следует вывод об асимптотической устойчивости положения равновесия рассматриваемой механической системы.

17.9. $(n+k)/2$.

17.10. а) $4, 0$; б) $4, 0$; в) $2, 2$; г) $2, 0$; д) $5, 0$; е) $5, 0$; ж) $4, 1$; з) $3, 2$; и) $4, 1$.

17.11. а) $|\alpha\beta| < 1$; б) $\alpha < 1$, $\alpha+\beta > 0$; в) $\beta > 0$, $-(\beta^2+3)/(\beta+1)^2 < \alpha < 1$; г) $-3 < \alpha\beta < 1$; д) $\beta(\beta+1) > 0$, $(\beta+1)^2 > \beta(1-\alpha) > 0$.

17.12. а) Устойчиво; б) устойчиво; в) неустойчиво; г) устойчиво; д) неустойчиво.

17.13. При $k < -3$ число $s = 3$; при $-3 < k < 1$ число $s = 4$; при $k > 1$ число $s = 2$.

17.14. На плоскости uv строится кривая, параметрически заданная уравнениями $u = \operatorname{Re} \dfrac{D(i\omega)}{K(i\omega)}$, $v = \operatorname{Im} \dfrac{D(i\omega)}{K(i\omega)}$, $0 \leqslant \omega < \infty$. Эта кривая не должна проходить через точку $u = -1$, $v = 0$ и иметь на отрезке $(-1, 0]$ одинаковое число спусков и подъемов при $\omega > 0$. (Спуск — это переход кривой от значений $v(\omega) > 0$ к $v(\omega) < 0$, подъем — переход от значений $v(\omega) < 0$ к $v(\omega) > 0$.)

17.17. При $\beta = \beta^*$ характеристическое уравнение имеет хотя бы одну пару чисто мнимых корней или нулевой корень.

17.18. На плоскости uv строится кривая, параметрически заданная уравнениями $u = \operatorname{Re} \dfrac{D(i\omega)}{K(i\omega)}$, $v = \operatorname{Im} \dfrac{D(i\omega)}{K(i\omega)}$, $-\infty < \omega < \infty$. Интервалы, на которые эта кривая разбивает ось u, и будут являться искомыми интервалами.

17.19. Границей областей служит кривая

$$u = \operatorname{Re}\beta = \operatorname{Re}\frac{D(i\omega)}{K(i\omega)}, \quad v = \operatorname{Im}\beta = \operatorname{Im}\frac{D(i\omega)}{K(i\omega)}, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

17.22. $\omega = \omega_0 \dfrac{2\pi n}{\ln k} \left[1 + \left(\dfrac{2\pi n}{\ln k}\right)^2\right]^{-1/2}$.

17.23. $3c = 2c_1$, $2k = 3fR$.

17.24. $x_0 - 4n\,kmg/(cR) \quad (n \leqslant (Rcx_0 - kmg)/(4kmg))$.

17.25. $V = (m^2/2\beta)\,\dot{x}^2 + (m/2)\,x\dot{x} + (2mc + \beta^2)\,x^2/(4\beta)$.

§ 18. Вынужденные колебания. Частотные характеристики

18.1. $L = H\left|1 - \dfrac{cb^2}{mp^2l^2}\right|$.

18.2. $L = H\sqrt{\left(1 - \dfrac{cb^2}{mp^2l^2}\right)^2 + \left(\dfrac{\beta}{mpl}\right)^2}$.

18.3. $\varphi = C\sin\left(\left(\dfrac{a^2+g^2}{l^2}\right)^{1/4} t + \alpha\right) - \dfrac{A\omega^2}{\sqrt{a^2+g^2} - \omega^2 l}\sin\omega t + \operatorname{arctg}\dfrac{a}{g}$, где φ — угол отклонения маятника от вертикали.

18.4. $\omega^* = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \beta^2 \geqslant 2mc, \\ \sqrt{c/m - \beta^2/(2m^2)} & \text{при} \quad \beta^2 < 2mc. \end{cases}$

18.6. а) $i\omega/[m(i\omega)^2 + i\beta\omega + c]$, б) $(a + ib\omega)/[m(i\omega)^2 + i\beta\omega + c]$.

18.7. $W(i\omega) = [m(i\omega)^2 + 2m\Omega\mu(i\omega) + c - m\Omega^2]^{-1}$.

18.9. При $2L \geqslant R^2C$: $p_0^2 = \dfrac{2L - R^2C}{2CL^2}$, $B_{\max} = \dfrac{2L}{RC}\sqrt{\dfrac{C}{4L - CR^2}}$,

$\varphi = -\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C} - \dfrac{R^2}{2}}\right)$; при $2L < R^2C$: $p_0 = 0$, $B_{\max} = a$, $\varphi = 0$.

18.10. а) $W = \dfrac{1}{CL(i\omega)^2 + i\omega RC + 1}$; б) $W = \dfrac{CL(i\omega)^2}{CL(i\omega)^2 + i\omega RC + 1}$;

в) $W = \dfrac{iRC\omega}{CL(i\omega)^2 + i\omega RC + 1}$.

18.12. $m = \dfrac{A[B_2\cos\varphi_1 - B_1\cos\varphi_2]}{B_1B_2\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right)}$, $c = \dfrac{A[B_2\omega_2^2\cos\varphi_1 - B_1\omega_1^2\cos\varphi_2]}{B_1B_2\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right)}$,

$\beta = -\dfrac{A\sin\varphi_1}{B_1\omega_1}$. При практическом определении параметров измерения выполняют при нескольких значениях частоты $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, а затем результаты усредняют.

18.13. $W(i\omega) = e^{-i\omega\tau}$.

18.14. $l = l_0 + a\sin kt + b\cos kt + A\dfrac{\omega^2}{k^2 - \omega^2}\sin\omega t$, где $k^2 = c/m$, а a и b — произвольные постоянные.

18.15. $= \dfrac{2}{\omega_0}\operatorname{arctg}\dfrac{m\omega_0\dot{x}_0}{m\omega_0^2x_0 - F}$.

18.16. $A = \dfrac{ma^2}{2}\left(p^2 - \omega_0^2\right)\left(\sin^2 pt_0 - \sin^2 pt\right)$.

18.17. $x = \dfrac{A}{\sqrt{(c - m\omega_1^2)^2 + \beta^2\omega_1^2}} \sin(\omega_1 t + \varphi(\omega_1)) +$

$$+ \frac{B}{\sqrt{(c - 4m\omega_2^2)^2 + 4\beta^2\omega_2^2}} \cos[2\omega_2 t + \varphi(2\omega_2)],$$

где $\varphi(\omega) = \arg(c - m\omega^2 + i\beta\omega)^{-1}$.

18.18. В случае в) при достаточно больших t

$$q \approx \frac{C\mathcal{E}_{01}}{\sqrt{(1 - CL\omega^2)^2 + C^2R^2\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi(\omega)) +$$

$$+ \frac{C\mathcal{E}_{02}}{\sqrt{(1 - 4CL\omega^2)^2 + 4C^2R^2\omega^2}} \sin(2\omega t + \varphi(2\omega)),$$

где $\varphi(\omega) = \arg \dfrac{C}{1 - CL\omega^2 + i\omega CR}$.

18.19. $x(t) = A|W(i\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega))$, где $W(i\omega) = [m(i\omega)^2 + c\exp(-i\omega\tau)]^{-1}$, $\varphi(\omega) = \arg W(i\omega)$.

18.20. $F = \dfrac{mv_0(\omega^2 - \Omega^2)}{2\Omega\cos(\pi\Omega/2\omega)}$, $\operatorname{tg}\psi = -\operatorname{tg}\dfrac{\pi\Omega}{2\omega}$, $\omega^2 = \dfrac{c}{m}$.

18.21. а) $x(t) = \dfrac{1}{\gamma} e^{-\gamma t}[\gamma x_0 \cos\gamma t + (\dot{x}_0 + \gamma x_0)\sin\gamma t] +$

$$+ \frac{1}{\gamma}\int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} F(\tau)\sin[\gamma(t-\tau)]\,d\tau, \text{ где } \gamma = \sqrt{\frac{c}{2m}};$$

б) $x(t) = e^{-\alpha t}[x_0 + (\dot{x}_0 + \alpha x_0)t] + \displaystyle\int_0^t (t-\tau) F(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)}\,d\tau$, где $\alpha = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$;

в) $x(t) = \dfrac{1}{3\rho}\left[(4\rho x_0 + \dot{x}_0)e^{-\rho t} - (\rho x_0 + \dot{x}_0)e^{-4\rho t}\right] +$

$$+ \frac{1}{3\rho}\int_0^t \left[e^{-\rho(t-\tau)} - e^{-4\rho(t-\tau)}\right] F(\tau)\,d\tau, \quad \rho = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{m}}.$$

18.22. а) $\dfrac{a}{2\gamma^2}[1 - e^{-\gamma t}(\sin\gamma t + \cos\gamma t)]$, где $\gamma = \sqrt{\dfrac{c}{2m}}$;

б) $\dfrac{a}{\alpha^2}\left[1 - (\alpha t + 1)e^{-\alpha t}\right]$, где $\alpha = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$;

в) $\dfrac{a}{12\rho^2}[3 + e^{-4\rho t} - 4e^{-\rho t}]$, где $\rho = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{c}{m}}$.

18.23. а) $\dfrac{1}{\gamma} e^{-\gamma t}\sin,\gamma t$, где $\gamma = \sqrt{\dfrac{c}{2m}}$; б) $te^{-\alpha t}$, где $\alpha = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$;

в) $\dfrac{1}{3\rho}\left(e^{-\rho t} - e^{-4\rho t}\right)$, где $\rho = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{c}{m}}$.

18.24. $q = [1 + A\sin(\omega t + \alpha)]^{-1}$.

18.25. $c_2 = m_2 p^2$.

18.26. $c_2 = m_2 p^2$.

18.27. Емкости C_{12} и C_2 и индуктивность L_2 должны удовлетворять соотношению $(C_{12}+C_2)/(L_2 C_2 C_{12}) = p_0^2$.

18.28. Не изменится.

18.29. Только при $\omega = \sqrt{c/m}$.

18.30. $W_{11}(i\omega) = \dfrac{m(i\omega)^2 + \beta i\omega + 2c}{\Delta(i\omega)}$, $W_{12}(i\omega) = \dfrac{c}{\Delta(i\omega)}$, где

$\Delta(i\omega) = [m(i\omega)^2 + \beta i\omega + 2c]\,[m(i\omega)^2 + 2c] - c^2$.

18.31. $W_{11}(i\omega) = \dfrac{J(i\omega)^2 + \beta i\omega + c}{\Delta(i\omega)}$, $W_{12}(i\omega) = \dfrac{c}{\Delta(i\omega)}$, где

$\Delta(i\omega) = [J(i\omega)^2 + \beta i\omega + c]\,[J(i\omega)^2 + 2c] - c^2$.

18.32. $A = \mathcal{E}_0\,|W(i\omega)|$, $\varphi = \arg W(i\omega)$, где $W(i\omega) = \dfrac{C_2 C_1\left[L_1 C_1 (i\omega)^2 + RC_1 i\omega + 1\right]}{\Delta(i\omega)}$,

причем $\Delta(i\omega) = \left[L_1 C_1 (i\omega)^2 + RC_1(i\omega) + 1\right]\left[L_2 C_1 C_2 (i\omega)^2 + RC_1 C_2 (i\omega) + C_1 + C_2\right] - C_2\left[RC_1(i\omega) + 1\right]^2$.

18.34.
$$\begin{pmatrix} x \\ l\varphi \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \sin\left[\sqrt{(2+\sqrt{2})\,\frac{g}{l}}\;t + \alpha_1\right] + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \sin\left[\sqrt{(2-\sqrt{2})\,\frac{g}{l}}\;t + \alpha_2\right] + \frac{Al}{m(2g^2 - 4glp^2 + l^2p^4)} \begin{pmatrix} g - lp^2 \\ -lp^2 \end{pmatrix} \sin pt.$$

18.35. $p = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = \dfrac{A}{m\sqrt{gl}}$; $\varphi = \dfrac{A}{mg} \sin\sqrt{\dfrac{g}{l}}\,t$.

18.36.
$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \sin\left[\sqrt{(2-\sqrt{2})\,\frac{g}{l}}\;t + \alpha_1\right] + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \sin\left[\sqrt{(2+\sqrt{2})\,\frac{g}{l}}\;t + \alpha_2\right] + \frac{a}{l} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t.$$

18.37.
$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{3g}{2l}}\,t + \alpha_1\right) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{3g}{2l} + \frac{6ca^2}{ml^2}}\,t + \alpha_2\right) + \frac{3Ap^2}{3g - 2lp^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin pt.$$

18.38. $p = \sqrt{3g/(2l)}$.

18.39. $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{c}\begin{pmatrix} 2mg + cl \\ 3mg + 2cl \end{pmatrix} - \dfrac{A\omega^2}{\omega^4 - 3k^2\omega^2 + k^4}\begin{pmatrix} -2k^2 + \omega^2 \\ -3k^2 + \omega^2 \end{pmatrix} \sin\omega t + C_1 \begin{pmatrix} \sqrt{5}+1 \\ -2 \end{pmatrix} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \begin{pmatrix} \sqrt{5}-1 \\ 2 \end{pmatrix} \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$, где C_1, C_2,

α_1 и α_2 — произвольные постоянные; $\omega_1 = k\sqrt{(3+\sqrt{5})/2}$ и $\omega_2 = k\sqrt{(3-\sqrt{5})/2}$ — частоты главных колебаний, $k^2 = c/m$.

18.40. $x_k(t) = \dfrac{a+b}{\pi}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{1}{j}R_k(\omega j)\{\sin[\omega jt+\varphi_k(\omega j)] - \sin[\omega j(t-\tau)+\varphi_1(\omega j)]\}$,

$R_k(\omega) = |W_k(i\omega)|$, $\varphi_k(\omega) = \arg W_k(i\omega)$ $\quad (k=1,2)$;

$$W_1(i\omega) = \frac{c}{2m^2(i\omega)^4+\beta m(i\omega)^3+5cm(i\omega)^2+2\beta ci\omega+c^2},$$

$$W_2(i\omega) = \frac{2c-m\omega^2}{2m^2(i\omega)^4+\beta m(i\omega)^3+5cm(i\omega)^2+2\beta ci\omega+c^2}.$$

18.41. $a_1 = -a_3, \quad a_2 = 0$.

18.42. Резонанс возможен только при $\omega = \sqrt{3g/2l}$.

18.43. а) $W_x = \dfrac{(1+i\omega)^2}{\Delta(i\omega)}$, $W_y = \dfrac{1+i\omega}{\Delta(i\omega)}$, $W_z = \dfrac{2+i\omega}{\Delta(i\omega)}$, где $\Delta(i\omega) = (i\omega)^3+4(i\omega)^2+5i\omega+3$; б) $W_x = \dfrac{1}{\Delta(i\omega)}$, $W_y = \dfrac{(i\omega)^2+2(i\omega)+1}{\Delta(i\omega)}$, где $\Delta(i\omega) = (i\omega)^4+3(i\omega)^3+6(i\omega)^2+7i\omega+2$; в) $W_x = \dfrac{1}{1+i\omega}$, $W_y = \dfrac{2}{(1+i\omega)(2+i\omega)}$, $W_z = \dfrac{2}{(1+i\omega)^2(2+i\omega)}$; г) $W_x = \dfrac{1}{(i\omega)^2+2i\omega+1}$, $W_y = \dfrac{1}{\Delta_1(i\omega)}$, $W_z = \dfrac{1}{\Delta_2(i\omega)}$, где $\Delta_1(i\omega) = [(i\omega)^2+2i\omega+1][(i\omega)^2+i\omega+1]$ и $\Delta_2(i\omega) = \Delta_1(i\omega)[(i\omega)^2+2i\omega+1]$; д) $W_x = \dfrac{(i\omega)^2+i\omega+1}{[(i\omega)^2+i\omega+1][(i\omega)^2+2i\omega+1]+1}$, $W_y = \dfrac{1}{(i\omega)^2+i\omega+1}W_x$; е) $W_x = \dfrac{(i\omega)^2+2i\omega+1}{\Delta(i\omega)}$, $W_y = \dfrac{1}{\Delta(i\omega)}$, где $\Delta(i\omega) = [(i\omega)^2+2i\omega+1][i\omega+2]+1$.

18.44. $z_1 = z_2 = \dfrac{ma\omega^2}{\sqrt{(c_1-m\omega^2)^2+\beta^2\omega^2}}\sin\left(\omega t - \operatorname{arctg}\dfrac{\beta\omega}{c_1-m\omega^2}\right)$.

18.48. $q_i = u_{i1}\left(\dfrac{d_1}{2\omega_1^2}\sin\omega_1 t - \dfrac{d_1 t}{2\omega_1}\cos\omega_1 t\right) + \sum\limits_{k=2}^{n} u_{ik}\dfrac{d_k}{\omega_k^2-\omega_1^2}\sin\omega_1 t$, где d_k — элементы вектора $\mathbf{d} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$.

18.49. а) $W_1(i\omega)W_2(i\omega)$; б) $W_1(i\omega)+W_2(i\omega)$; в) $\dfrac{W_1(i\omega)}{1+W_1(i\omega)W_2(i\omega)}$.

18.50. а, б) $D = D_1(\lambda)D_2(\lambda)$; в) $D = D_1(\lambda)D_2(\lambda)+K_1(\lambda)K_2(\lambda)$.

18.53. Пусть $\mathbf{\Gamma}(i\omega) = [\gamma_{jk}(i\omega)]_{j,k=1}^n$ — матрица, обратная к матрице $\mathbf{W}(i\omega)$, и пусть $\mathbf{U}(\omega)$ и $\mathbf{V}(\omega)$ — следующие матрицы:

$$\mathbf{U}(\omega) = [\operatorname{Re}\gamma_{jk}(i\omega)]_{j,k=1}^n, \quad \mathbf{V}(\omega) = [\operatorname{Im}\gamma_{jk}(i\omega)]_{j,k=1}^n.$$

В этих обозначениях

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{U}(\omega_1) - \mathbf{U}(\omega_2)}{\omega_2^2 - \omega_1^2}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{V}(\omega_1)}{\omega_1}, \quad \mathbf{C} = \frac{\omega_2^2\mathbf{U}(\omega_1) - \omega_1^2\mathbf{U}(\omega_2)}{\omega_2^2 - \omega_1^2}.$$

18.54. Для любых значений ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 $(\omega_1 \neq \omega_2,\ \omega_3 \neq \omega_4)$ должны выполняться матричные равенства

$$\frac{\mathbf{V}(\omega_1)}{\omega_1} = \frac{\mathbf{V}(\omega_2)}{\omega_2} = \frac{\mathbf{V}(\omega_3)}{\omega_3} = \frac{\mathbf{V}(\omega_4)}{\omega_4}, \quad \frac{\mathbf{U}(\omega_1) - \mathbf{U}(\omega_2)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} = \frac{\mathbf{U}(\omega_3) - \mathbf{U}(\omega_4)}{\omega_4^2 - \omega_3^2},$$

$$\frac{\omega_2^2\mathbf{U}(\omega_1) - \omega_1^2\mathbf{U}(\omega_2)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} = \frac{\omega_4^2\mathbf{U}(\omega_3) - \omega_3^2\mathbf{U}(\omega_4)}{\omega_4^2 - \omega_3^2},$$

$$\mathbf{U}(\omega) + i\mathbf{V}(\omega) = \mathbf{W}(i\omega)^{-1} \quad (\det \mathbf{W}(i\omega) \neq 0).$$

18.55. $\mathbf{W}_y(i\omega) = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{W}_x(i\omega)$.

18.57. $\overline{x^2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{|a_k|^2}{\sqrt{(c - mk^2\omega^2)^2 + \beta^2\omega^2k^2}}$. Если $f(t) = a\sin\omega t$, то $\overline{x^2} = a^2|W(i\omega)|^2$, где $W(i\omega) = [m(i\omega)^2 + \beta i\omega + c]^{-1}$ — частотная характеристика груза.

18.58. $\overline{N} = \dfrac{RC^2\omega^2}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}}\mathcal{E}_0$.

18.59. Только при $\omega = \sqrt{c/m}$.

18.60. Только при $\omega = \sqrt{1/(LC)}$.

18.61. Только при $\omega = \sqrt{1/(LC_1)}$.

18.62. Только при $\omega = \omega_1$.

§ 19. Уравнения Гамильтона, Рауса, Уиттекера и Якоби

19.1. $H = \dfrac{p_x^2}{2m} - \dfrac{m\omega^2x^2}{2}$.

19.2. $H = \dfrac{p_\varphi^2}{2ml^2} - mgl\cos\varphi$.

19.3. $H = \dfrac{p_\varphi^2}{2ml^2(t)} - \dfrac{m\dot{l}^2(t)}{2} - mgl(t)\cos\varphi$.

19.4. $H = \dfrac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + mgz$.

19.5. а) $H = \dfrac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Pi(x, y, z)$;

б) $H = \dfrac{1}{2m}\left(p_r^2 + \dfrac{p_\theta^2}{r^2} + \dfrac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + \Pi(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$;

в) $H = \dfrac{1}{2m}\left(p_r^2 + \dfrac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2\right) + \Pi(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)$.

19.6. $H = \dfrac{p_1^2}{6} + \dfrac{p_2^2}{2} + q_1^2 + \dfrac{q_2^2}{2} + q_1 q_2.$

19.7. $H = \dfrac{p_1^2 + 5p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos(q_1 - q_2)}{2\left(4 + \sin^2(q_1 - q_2)\right)} - 3\cos q_1 - \cos q_2.$

19.8. $H = \dfrac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + 3p_3^2 + 3p_4^2 - 2p_1 p_3 - 2p_2 p_4) + 2(q_1^2 + q_2^2 - q_1 q_2) + \dfrac{1}{4}(q_3^2 + q_4^2).$

19.9. $H = \dfrac{1}{2at^2}(p_1 + p_2)^2 + \dfrac{1}{2}p_2^2 + a\cos q_2.$

19.10. $H = \dfrac{p_1^2}{4a} + \dfrac{p_2^2}{4(c^2 + b^2\cos^2 q_1)}.$

19.11. $H = \dfrac{2}{q_1 + q_2}\left(q_1 p_1^2 + q_2 p_2^2\right) + \dfrac{p_3}{2q_1 q_2} - \dfrac{a}{q_1 + q_2} + b(q_1 - q_2).$

19.12. $L = \dfrac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - \dfrac{a}{4}(q_1 - q_2)^2 - \dfrac{b}{4}(q_1 + q_2)^2.$

19.13. $L = \dfrac{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2}{4a} + \dfrac{q_2\dot{q}_1 - q_1\dot{q}_2}{2a} + \dfrac{q_1^2 + q_2^2}{4a}.$

19.14. $L = \dfrac{\dot{q}_1^2}{2} + \dfrac{\dot{q}_2^2}{2}\sin^2 q_1 + a\cos q_1.$

19.15. $L = \dfrac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - 2a).$

19.16. $L = \dot{q}_1\dot{q}_2 - q_1 q_2.$

19.17. $H = \dfrac{1}{2m}\left(p_r^2 + \dfrac{p_\theta^2}{r^2} + \dfrac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + \Pi(r).$

19.18. $H = \dfrac{1}{2m_1}p_1^2 + \dfrac{1}{2m_2}p_2^2 + \dfrac{1}{2m_3}p_3^2 + \dfrac{c_1}{2}(x_1 - x_2)^2 + \dfrac{c_2}{2}(x_2 - x_3)^2.$

19.19. $H = \dfrac{p_\varphi^2}{R^2(M + 2m\sin^2\psi)} + \dfrac{p_\psi^2}{2mR^2} + mgR\cos\psi.$

19.20. $H = \dfrac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) - \dfrac{m\omega^2}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \dfrac{c}{2}(x_2 - x_1 - l_0)^2.$

19.22. $H = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p_r^2 + \dfrac{p_\theta^2}{r^2} + \dfrac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}} - \dfrac{\gamma}{r}.$

19.23. $H = \dfrac{1}{2mR^2}\left(p_\theta^2 + \dfrac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right) + mgR\cos\theta.$

19.24. $H = \dfrac{1}{2mR^2(t)}\left(p_\theta^2 + \dfrac{p_\psi^2}{\sin^2\theta}\right) - \dfrac{m\dot{R}^2(t)}{2} + mgR(t)\cos\theta.$

19.25. $\dot{r} = \dfrac{p_r}{m}$, $\dot{p}_r = \dfrac{1}{mr^3}\left[p_\theta^2 + \dfrac{(p_\psi + aF(\theta))^2}{\sin^2\theta}\right]$, $\dot{\psi} = \dfrac{p_\psi + aF(\theta)}{mr^2\sin^2\theta}$,

$$\dot{p}_\psi = 0,\ \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2},\ \dot{p}_\theta = \frac{p_\psi + aF(\theta)}{mr^2\sin^3\theta}\left[\cos\theta(p_\psi + aF(\theta)) - a\frac{dF(\theta)}{d\theta}\sin\theta\right].$$

19.26. $H = \dfrac{1}{2(m_1+m_2)}(p_x^2+p_y^2)+\dfrac{1}{2\mu}\left(p_r^2+\dfrac{p_\varphi^2}{r^2}\right)+\dfrac{c}{2}(r-l_0)^2$, где $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$, r — длина стержня, x и y — координаты центра масс, а φ — угол, образуемый стержнем с осью Ox.

19.27. $H = \dfrac{1}{2\,(m_1+m_2)}\left(p_x^2+p_y^2+p_z^2\right)+\dfrac{1}{2\mu}\left(p_r^2+\dfrac{p_\varphi^2}{r^2}+\dfrac{p_\psi^2}{r^2\cos^2\varphi}\right)-\dfrac{\gamma m_1 m_2}{r}$, где $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$.

19.28. $H = \dfrac{p_\theta^2}{2A}+\dfrac{p_\varphi^2}{2C}+\dfrac{(p_\psi - p_\varphi\cos\theta)^2}{2A\sin^2\theta}+mga\cos\theta$.

19.29. $H = \dfrac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+\dfrac{3}{2ml^2}\left(p_\theta^2+\dfrac{p_\psi^2}{\sin^2\theta}\right)+mgz$, где x, y, z — координаты центра масс стержня, а θ и ψ — углы Эйлера.

19.30. $$H = \frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+\frac{p_\varphi^2}{2C}+ \\ +\frac{1}{2AB\sin^2\theta}\{A\left[p_\theta^2\sin^2\theta+(p_\psi-p_\varphi\cos\theta)^2\right]+ \\ +(B-A)\left[p_\theta\sin\theta\cos\varphi+(p_\psi-p_\varphi\cos\theta)\sin\varphi\right]^2\}+mgz.$$

19.31. $H = \dfrac{3mr^2p_x^2+2(M+m)p_\varphi^2+4mrp_xp_\varphi\cos\alpha}{2mr^2\left[3M+m(1+2\sin^2\alpha)\right]}-mgr\varphi\sin\alpha$.

19.32. $$H = \frac{6}{ml^2\left[7+9\sin^2(\varphi-\psi)\right]}\left[p_\varphi^2+4p_\psi^2-3p_\varphi p_\psi\cos(\varphi-\psi)\right]- \\ -\frac{3}{2}mgl\cos\varphi-\frac{1}{2}mgl\cos\psi.$$

19.33. p_i — магнитный поток в i-м контуре.

19.34. $\dot q_1 = \dfrac{p_1}{L_1}$, $\dot q_2 = \dfrac{p_2}{L_2}$; $\dot p_1 = -\left(\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_0}\right)q_1+\dfrac{q_2}{C_0}+e_1(t)$,

$\dot p_2 = \dfrac{1}{C_0}q_1-\left(\dfrac{1}{C_0}+\dfrac{1}{C_2}\right)q_2+e_2(t)$.

19.35. $\mathbf{A} = -\mathbf{D}^{\text{т}}$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{\text{т}}$, $\mathbf{C} = \mathbf{C}^{\text{т}}$.

19.36. $H = \dfrac{1}{2m}\sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{p_i^2}{H_i^2}+\Pi(q_1, q_2, q_3)$,

где $H_i = \sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$ — коэффициенты Ламе.

19.37. $H = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n}\rho_{ik}p_ip_k-\sum\limits_{i,k=1}^{n}\rho_{ik}b_kp_i+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n}\rho_{ik}b_ib_k-L_0(q_i,t)$, где $[\rho_{ik}(q_j,t)]_{i,k=1}^n = \mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A} = [a_{ij}(q_k,t)]_{i,j=1}^n$.

19.38. $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}$, $\dot{\mathbf{p}} = -\mathbf{C}\mathbf{q}$, где $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{i,k=1}^n$, $\mathbf{C} = [c_{ik}]_{i,k=1}^n$.

19.39. $\mathbf{q}(t)=\mathbf{q}_0+\mathbf{R}\int\limits_{t_0}^{t}\mathbf{p}(\tau)\,d\tau,\ \mathbf{p}(t)=\mathbf{p}_0+\int\limits_{t_0}^{t}\mathbf{b}(\tau)\,d\tau$, где $\mathbf{R}=\mathbf{A}^{-1},\ \ \mathbf{A}=[a_{ik}]_{i,k=1}^{n}$.

19.41. $\mathbf{p}_\theta=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_q$, где $\mathbf{A}=[\partial f_i/\partial\theta_k]_{i,k=1}^{n}$.

19.42. а) $p_r=p_x\cos\varphi+p_y\sin\varphi,\ \ p_\varphi=-p_x r\sin\varphi+p_y r\cos\varphi,\ \ p_z=p_z$;

б) $p_r=p_x\sin\theta\,\cos\varphi+p_y\sin\theta\,\sin\varphi+p_z\cos\theta$,

$p_\theta=p_x r\cos\theta\,\cos\varphi+p_y r\cos\theta\,\sin\varphi-p_z r\sin\theta$,

$p_\varphi=-p_x r\sin\theta\,\sin\varphi+p_y r\sin\theta\,\cos\varphi$.

19.43. $H=\dfrac{1}{2m}\left(p_r^2+\dfrac{p_\varphi^2}{r^2}+p_z^2\right)+\dfrac{1}{2}(\alpha r^2\cos^2\varphi+\beta r^2\sin^2\varphi+\gamma z^2)$;

$H=\dfrac{1}{2m}\left(p_r^2+\dfrac{p_\theta^2}{r^2}+\dfrac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)+\dfrac{r^2}{2}(\alpha\,\sin^2\theta\,\cos^2\varphi+\beta\,\sin^2\theta\,\sin^2\varphi+\gamma\,\cos^2\theta)$.

19.44. $H=\dfrac{1}{2L}(p_1^2+2p_1p_2+2p_2^2)+\dfrac{1}{2C}(q_1^2+q_2^2)$.

19.46. $H=\dfrac{1}{2L}(p_1^2+p_2^2)+\dfrac{1}{2C}(q_1-q_2)^2+\dfrac{1}{2C_1}(q_1^2+q_2^2)$.

19.47. $H=\dfrac{1}{7mr^2}(3r^2p_x^2-4rp_xp_\varphi+6p_\varphi^2)+c(x^2+r^2\varphi^2)$.

19.48. $H=\dfrac{1}{3m}(p_1^2+p_2^2)+\dfrac{3c}{2}(x_1^2+x_2^2)$.

19.53. $q_i=\varphi_i\left[q_j^0,p_j^0,f'[H(q_j^0,p_j^0)]\,t\right],\ \ p_i=\psi_i\left[q_j^0,p_j^0,f'[H(q_j^0,p_j^0)]\,t\right]$.

19.54. $q_i=\varphi_i(\alpha_j,\beta_j,t),\ \ p_i=\psi_i(\alpha_j,\beta_j,t)-\partial f(q_k,t)/\partial q_i|_{q_k=\varphi_k}$.

19.55. $q_i(t)=\varphi_i\left(\alpha_j,\beta_j,\int\limits_0^t\gamma(\xi)\,d\xi\right),\quad p_i(t)=\psi_i\left(\alpha_j,\beta_j,\int\limits_0^t\gamma(\xi)\,d\xi\right)$.

19.56. $\widetilde{H}(\theta,p_\theta,t)=H[f(\theta,t),\mathbf{A}\mathbf{p}_\theta,t]-(\mathbf{p}_\theta,\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\partial\mathbf{f}/\partial t)$,

где $\mathbf{A}=\left[\left([\partial f_i/\partial\theta_k]_{i,k=1}^{n}\right)^{-1}\right]^{\mathrm{T}},\ \ (\mathbf{a},\mathbf{b})=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i$.

19.57. $\widetilde{H}=H(q,p-\operatorname{grad}F,t)-\partial F/\partial t$.

19.58. $L=\gamma(t)L_0(q,\dot q,t)+d\Phi(q,t)/dt$.

19.61. $\dot q_i=\partial\overline{H}(q,\overline{p},t)/\partial\overline{p}_i,\ \dot p_i=-\partial\overline{H}(q,\overline{p},t)/\partial\overline{q}_i+Q_i[q,\psi(q,\overline{p},t),t]$,

$\overline{H}(q,\overline{p},t)=\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{p}_i\psi_i(q,\overline{p},t)-T[q,\psi(q,\overline{p},t),t]\quad(i,j,k=\overline{1,n})$.

19.63. $\overline{T}=-\overline{\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\partial L}{\partial q_k}q_k}$.

19.65. $L=\dfrac{m\dot y^2}{2}-\left(c-\dfrac{\beta^2}{4m}\right)\dfrac{y^2}{2}+yF(t)\exp\left(\dfrac{\beta}{2m}t\right)$,

$H=\dfrac{p^2}{2m}+\left(c-\dfrac{\beta^2}{4m}\right)\dfrac{y^2}{2}-yF(t)\exp\left(\dfrac{\beta}{2m}t\right)$.

19.66. $R = \dfrac{p_\varphi^2}{2mr^2} - \dfrac{m}{2}\dot{r}^2 + \displaystyle\int f(r)\,dr.$

19.67. $R = \dfrac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta} - \dfrac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \dfrac{GmM}{r}.$

19.68. $R = \dfrac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2(m_1+m_2)} + \dfrac{p_\psi^2}{2\mu r^2\cos^2\varphi} - \dfrac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - \dfrac{\gamma m_1 m_2}{r},$

где $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$.

19.69. $R = \dfrac{p_\varphi^2}{R^2(M + 2m\sin^2\alpha)} - \dfrac{mr^2}{2}\dot{\alpha}^2 + mgr\cos\alpha.$

19.70. $R = m_0c^2\sqrt{\left(1 - \dfrac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}{c^2}\right)\left(1 + \dfrac{p_\varphi^2}{m_0^2c^2r^2\sin^2\theta}\right)} - \dfrac{G}{r}.$

19.71. Если $\det\left[\dfrac{\partial^2 H}{\partial p_j\,\partial p_k}\right]_{j,k=m+1}^{n} \neq 0$, то $R = H[q_j, p_i, f_k(q_j, p_i, \dot{q}_k, t)] - \sum\limits_{k=m+1}^{n} \dot{q}_k f_k(q_j, p_i, \dot{q}_k, t)$ $(j = \overline{1, n},\ i = \overline{1, m})$, где функции f_k получены из уравнений $\dot{q}_k = \partial H/\partial p_k$, разрешенных относительно p_k $(k = \overline{m+1, n})$.

19.72. $K = -q_1\sqrt{2h - (q_1^2 + q_2^2) - (p_1^2 + p_2^2)}.$

19.73. $K(x, y, z, p_y, p_z) = -\sqrt{2m(h + mgz) - p_y^2 - p_z^2}.$

19.74. $P = \sqrt{2m(h - \Pi)\left(1 + y'^2 + z'^2\right)}$, где $\Pi = -mgz$, а h — постоянная энергии.

19.75. $y'(h + mgz)2m/P = \alpha$, $2m(h + mgz)2m/P = \beta$,
где $P = \sqrt{2m(h + mgz)\left(1 + y'^2 + z'^2\right)}$ — функции Якоби, а штрих означает операцию дифференцирования по x.

19.76. $H = \dfrac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \dfrac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\varphi.$

19.77. $L = -mc\sqrt{c^2 - v^2} - e\varphi + \dfrac{e}{c}(\mathbf{vA}).$

19.78. $H = \dfrac{1}{2m}\left[e^{-\beta t/m}p^2 - \beta p x + e^{\beta t/m}\left(cm - \dfrac{\beta^2}{4}\right)x^2\right].$

§ 20. Первые интегралы. Скобки Пуассона. Теорема Нётер

20.1. $(K_j, p_j) = (K_j, K_j) = (x_j, K_j) = 0$, $(K_1, p_2) = -(K_2, p_1) = p_3$, $(K_3, p_1) = -(K_1, p_3) = p_2$, $(K_2, p_3) = -(K_3, p_2) = p_1$, $(x_1, K_2) = -(x_2, K_1) = x_3$, $(x_3, K_1) = -(x_1, K_3) = x_2$, $(x_2, K_3) = -(x_3, K_2) = x_1$, $(K_1, K_2) = K_3$, $(K_2, K_3) = K_1$, $(K_3, K_1) = K_2$, $(K^2, K_j) = 0$.

20.14. $\dot{q}_i = (q_i, H)$, $\dot{p}_i = (p_i, H)$ $\quad (i = \overline{1, n})$.

20.21. $\dfrac{1}{(2n)!}W_1^{2n} + \dfrac{1}{(2n-2)!}W_1^{2n-2}W_2 + \dfrac{1}{(2n-3)!}W_1^{2n-3}W_3 + \ldots$

$$\ldots + W_1 W_{2n-1} + W_{2n}.$$

20.24. $p_i = \psi_i(q_i, \alpha_i)$, $\displaystyle\int \frac{dq_i}{f_i(q_i, \psi_i(q_i, \alpha_i))} = \int H'_{\varphi_i}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, t)\,dt + \beta_i$ $(i = \overline{1, n})$, где α_i и β_i — произвольные постоянные, $f_i(q_j, p_j) = \partial\varphi_i(q_j, p_j)/\partial p_i$.

20.25. Система имеет первые интегралы $f_1(q_1, p_1) = c_1$, $f_2(c_1, q_2, p_2) = c_2$, $F(c_2, q_3, p_3) = c_3$, из которых в силу условия разрешимости следует, что $p_1 = \psi_1(c_1, q_1)$, $p_2 = \psi_2(c_1, c_2, q_2)$, $p_3 = \psi_3(c_2, c_3, q_3)$. Из уравнения $\dot{q}_3 = \dfrac{\partial H}{\partial p_3}$ имеем $\dfrac{dq_3}{dt} = \left.\dfrac{\partial F(c_2, q_3, p_3)}{\partial p_3}\right|_{p_3 = \psi_3}$. Дифференцируя по c_3 тождество $F(c_2, q_3, \psi_3(c_2, c_3, q_3)) \equiv c_3$, получаем $\left.\dfrac{\partial F(c_2, q_3, p_3)}{\partial p_3}\right|_{p_3 = \psi_3} \dfrac{\partial \psi_3}{\partial c_3} = 1$. Поэтому $\dot{q}_3 = \dfrac{1}{\partial\psi_3/\partial c_3}$, или $\displaystyle\int \frac{\partial\psi_3}{\partial c_3}\,dq_3 = t + \beta_3$. Аналогично, дифференцируя по c_2 тождества $f_2(c_1, q_2, \psi_2(c_1, c_2, q_2)) \equiv c_2$ и $F(c_2, q_3, \psi_3(c_2, c_3, q_3)) \equiv c_3$, из уравнения $\dot{q}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial p_2}$ получаем $\dot{q}_2 \dfrac{\partial\psi_2}{\partial c_2} + \dot{q}_3 \dfrac{\partial\psi_3}{\partial c_2} = 0$. Это соотношение дает дополнительный интеграл $\displaystyle\int \frac{\partial\psi_2}{\partial c_2}\,dq_2 + \int \frac{\partial\psi_3}{\partial c_2}\,dq_3 = \beta_2$. Точно так же получается первый интеграл $\displaystyle\int \frac{\partial\psi_1}{\partial c_1}\,dq_1 + \int \frac{\partial\psi_2}{\partial c_1}\,dq_2 = \beta_1$. Поэтому зависимость координат и импульсов от произвольных постоянных c_1, c_2, c_3, β_1, β_2, β_3 и времени определяется из следующих конечных соотношений: $p_1 = \psi_1(c_1, q_1)$, $p_2 = \psi_2(c_1, c_2, q_2)$, $p_3 = \psi_3(c_2, c_3, q_3)$, $\displaystyle\int \frac{\partial\psi_3(c_2, c_3, q_3)}{\partial c_3}\,dq_3 = \beta_3 + t$, $\displaystyle\int \frac{\partial\psi_2(c_1, c_2, q_2)}{\partial c_2}\,dq_2 + \int \frac{\partial\psi_3(c_2, c_3, q_3)}{\partial c_2}\,dq_3 = \beta_2$, $\displaystyle\int \frac{\partial\psi_1(c_1, q_1)}{\partial c_1}\,dq_1 + \int \frac{\partial\psi_2(c_1, c_2, q_2)}{\partial c_1}\,dq_2 = \beta_1$.

20.28. а) $q_i = A_i \sin(\omega_i t + \alpha_i)$, $p_i = A_i\omega_i \cos(\omega_i t + \alpha_i)$, $(i = \overline{1, n})$;

б) $q_1 = \alpha_1 \sin(\alpha_2 t + \beta_1)$, $p_1 = (\alpha_1/\alpha_2)\cos(\alpha_2 t + \beta_1)$,
$q_2 = \alpha_2 \sin[(\alpha_1^2/2\alpha_2^2)t + (\alpha_1^2/4\alpha_2^3)\sin 2(\alpha_2 t + \beta_1) + \beta_2]$,
$p_2 = \alpha_2 \cos[(\alpha_1^2/2\alpha_2^2)t + (\alpha_1^2/4\alpha_2^3)\sin 2(\alpha_2 t + \beta_1) + \beta_2]$;

в) $q_1 = \alpha_1 \sin[(2/\alpha_2^2)t + \beta_1]$, $p_1 = \alpha_1 \cos[(2/\alpha_2^2)t + \beta_1]$,
$q_2 = \alpha_2 \sin[\beta_2 - (2\alpha_1^2/\alpha_2^4)t]$, $p_2 = \alpha_2 \cos[\beta_2 - (2\alpha_1^2/\alpha_2^4)t]$;

г) $p_i = q_i$, $q_i = \alpha_1^2 \displaystyle\int \frac{\partial F(\alpha_2, \ldots, \alpha_n, t)}{\partial \alpha_i}\,dt + \beta_i$ $\quad (i = \overline{2, n})$,

$$q_1 = \alpha_1 \sin\left[2\int F(\alpha_2, \ldots, \alpha_n, t)\,dt + \beta_1\right],$$

$$p_1 = \alpha_1 \cos\left[2\int F(\alpha_2, \ldots, \alpha_n, t)\,dt + \beta_1\right].$$

20.29. $W(q_i, p_i, t) - \int f(t)\,dt.$

20.30. При условиях задачи существует функция F такая, что $f(H_1, H_2) = F(H_1)$. Поэтому

$$q = q[q_0, p_0, F'[H_1(q_0, p_0)]t],\ p = p[q_0, p_0, F'[H_1(q_0, p_0)]t],$$

где $F'(H_1) = dF/dH_1$.

20.33. $H = -(\mathbf{p}, \mathbf{A}^{-1}\,\partial\mathbf{f}/\partial t) + \psi(q_i, t)$, где $\psi(q_i, t)$ — произвольная функция координат и времени, $\mathbf{A} = [\partial f_i/\partial q_s]_{i,s=1}^n$, а скобки $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum\limits_{i=1}^n x_i y_i$.

20.35. $k + l + 2 = 0,\ b + la = 0;$

$$2\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\dot q_j q_j + lt\left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\dot q_i \dot q_j + 2\Pi(q_s)\right] = \text{const}, \quad s = \overline{1, n}.$$

20.37. $p_1 x_2 - p_2 x_1.$

20.41. $\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i \dot q_i \left(a q_i + \sum\limits_{j=1}^n b_{ij}\sqrt{\lambda_j/\lambda_i}\, q_j + c_i\right) - (2at + d)\left[\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i \dot q_i^2 + \Pi(q_k)\right],$

$$k = \overline{1, n}, \quad \sum_{i=1}^n \left(a q_i + \sum_{j=1}^n b_{ij}\sqrt{\lambda_j/\lambda_i}\, q_j + c_i\right)\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + 2a\Pi = 0,$$

где a, c_i, d — постоянные величины, а $(b_{ij})_{i,j=1}^n$ — кососимметрическая постоянная матрица.

20.42. $\sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}\dot q_i \left[a q_j + \sum\limits_{k,l=1}^n \psi_{kj} b_{kl} q_l + c_j\right] -$

$$-\left[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\dot q_i \dot q_j + \Pi(q_k)\right](2at + d), \quad k = \overline{1, n},$$

$\sum\limits_{i=1}^n \left[a q_i + \sum\limits_{k,l=1}^n \psi_{ki} b_{kl} q_l + c_i\right]\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + 2a\Pi = 0$, где a, c_i, d — постоянные величины, $(b_{kl})_{k,l=1}^n$ — кососимметрическая постоянная матрица, а $(\psi_{ki})_{k,i=1}^n$ — матрица, обратная к $(a_{ij})_{i,j=1}^n$.

20.45. $\tilde q_i = q_i + b_i a$, где b_i удовлетворяют системе $\sum\limits_{j=1}^n c_{ij} b_j = 0$ $(i = \overline{1, n-1})$.

20.46. $\Pi = F\left(q_1^2 + q_2^2,\ q_3^2 + q_4^2,\ \alpha \operatorname{arctg}\dfrac{q_3}{q_4} - \beta \operatorname{arctg}\dfrac{q_1}{q_2}\right).$

20.47. $\tilde q_1 = q_1 \cos\alpha a - q_2 \sin\alpha a,\ \tilde q_2 = q_1 \sin\alpha a + q_2 \cos\alpha a,$

$$\tilde q_3 = q_3 \cos\beta a - q_4 \sin\beta a,\ \tilde q_4 = q_3 \sin\beta a + q_4 \cos\beta a,\ \tilde t = t.$$

20.49. $\widetilde{q}_{2i-1} = q_{2i-1}\cos a - q_{2i}\sin a, \quad \widetilde{q}_{2i} = q_{2i-1}\sin a + q_{2i}\cos a,$
$i = \overline{1, r}. \quad \widetilde{q}_l = q_l, \ l = \overline{2r+1, n}, \ \widetilde{t} = t.$

20.51. $\widetilde{q}_i = (q_i + b_i)\exp\dfrac{a}{2} - b_i, \quad \widetilde{t} = t\exp a.$

§ 21. Вариационные принципы механики

21.5. Точки с координатами $(t_1 = t_0 + k\pi/\omega,\ q_1 \neq (-1)^k q_0)$, $k = 1, 2, \ldots$

21.24. Число различных точек B равно числу несоизмеримых частот системы.

21.25. Две точки.

21.28. На прямом пути $\widetilde{q}(t)$ выбирается последовательность точек $B^s(\widetilde{\mathbf{q}}(t_s), t_s) \to B(\mathbf{q}^{(1)}, t_1)$ при $t_s \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} t_1$. Рассматривается последовательность $t_s \to t_1$ однопараметрических семейств путей $(\mathbf{q}^{(s)}(t_0, \alpha) = \mathbf{q}^{(0)}$, $\mathbf{q}^{(s)}(t_s, \alpha) = \widetilde{\mathbf{q}}(t_s)$, $\mathbf{q}^{(s)}(t, 0) = \widetilde{\mathbf{q}}(t))$ таких, что $\mathbf{q}^{(s)}(t, \alpha) \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{q}(t, \alpha)$, $\dot{\mathbf{q}}^{(s)}(t, \alpha) \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} \dot{\mathbf{q}}(t, \alpha)$, равномерно по α и $t \in [t_0, t_1]$. Учитывая положительную определенность квадратичной формы с матрицей $\left[\partial^2 L/(\partial\dot{q}_i\,\partial\dot{q}_k)\right]_{i,k=1}^n$, можно перейти к пределу под знаком интеграла в выражении действия по Гамильтону и получить требуемое неравенство.

21.29. $p_t = -H$, где H — гамильтониан системы.

21.30.
$$\delta^2 W = \frac{(\delta\alpha)^2}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{i,k=1}^n \frac{\partial^2 L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial\dot{q}_i\,\partial\dot{q}_k}\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_k + \right.$$
$$\left. + \sum_{i,k=1}^n \left(\frac{\partial^2 L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial q_i\,\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial^2 L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial q_i\,\partial\dot{q}_k}\right)\varphi_i\varphi_k\right] dt.$$

21.34. Координаты кинетических фокусов удовлетворяют неравенству
$$z - z_0 < \frac{v_0^2}{2g}\left[1 - \frac{g^2}{v_0^4}(x - x_0)^2 - \frac{g^2}{v_0^4}(y - y_0)^2\right].$$

21.35. $\Pi = -n^2(x, y, z)/2 + \mathrm{const}$.

21.36. Конические сечения.

21.37. Неверно.

§ 22. Интегральные инварианты

22.2. $I_1 = I_2 + \oint\limits_{C_0}(H_2 - H_1)\,\delta t.$

22.6. Является при $\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \ldots = \alpha_n - \beta_n$.

22.9. $I = 0$.

22.10. $I' = -\alpha I$.

22.11. Не изменяется.

22.12. $\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + F(t)$, где $F(t)$ — произвольная функция времени.

22.15. $\dfrac{\partial A_i}{\partial q_k} - \dfrac{\partial A_k}{\partial q_i} = \dfrac{\partial B_i}{\partial p_k} - \dfrac{\partial B_k}{\partial p_i} = 0$, $\dfrac{\partial A_i}{\partial p_k} - \dfrac{\partial B_k}{\partial q_i} = c\delta_{ik}$, $(i, k = \overline{1, n})$, где δ_{ik} — символ Кронекера.

22.22. Параллелограмм, две стороны которого лежат на прямых $p_x = \alpha$, $p_y = \beta$ и равны $\delta - \gamma$, а две другие образуют с осью Ox угол $\lambda = \operatorname{arcctg} t$.

22.25. В любой момент времени область представляет собой внутренность эллипса, равного начальному, с главными осями, параллельными главным осям начального эллипса, и с центром в точке $q = a\cos\omega t + (b/\omega)\sin\omega t$, $p = -a\omega\sin\omega t + b\cos\omega t$.

22.27. Не меняются.

22.28. Не изменяется.

22.29. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$.

22.30. $a_{11} + a_{22} = 0$; $H = (1/2)a_{12}x_2^2 + a_{11}x_1x_2 - (1/2)a_{21}x_1^2$.

22.31. $S_t = S_0 \exp(-\beta t/m)$.

22.33. $V_t = V_0$.

22.36. Не изменится.

22.37. Площадь уменьшится в k раз.

22.39. $V_t = V_0 \exp\left(-t\sum\limits_{i=1}^{n} b_{ii}\right)$.

22.40. $V_t = V_0 \exp\left(-t\sum\limits_{i=1}^{n} b_{ii}\right)$.

22.44. $p = 0{,}25$.

22.45. $p = \dfrac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{4mc - \beta^2}}{\beta}$.

22.46. Не зависит.

22.48. $\dfrac{d\varphi_k}{dt} + \sum\limits_{j=1}^{n} \varphi_j \dfrac{\partial f_j}{\partial x_k} = 0$ (система уравнений в вариациях).

22.50. Обозначим область G_{tm} через G_m. В силу теоремы Лиувилля $V\{G_m\} = V\{G_0\} = V > 0$. Области $G_0, G_1, \ldots, G_N$ содержатся в Ω. Если объем области Ω равен V_1, то при $N > V_1/V$ области G_i не могут попарно пересекаться по областям нулевого объема, так как в этом случае $V\left\{\bigcup\limits_{s=0}^{N} G_s\right\} = NV_1 > V_1$. Поэтому обязательно существует такая пара областей G_s и G_k $(s \neq k)$, что $V\{G_s \bigcap G_k\} > 0$. Пусть $s < k$. Тогда преобразование $\{q_i = \varphi_i(\overline{\mathbf{q}}, \overline{\mathbf{p}}, -st),\ p_i = \psi_i(\overline{\mathbf{q}}, \overline{\mathbf{p}}, -st)\}$ переводит G_s в G_0, а G_k в G_{k-s} так, что объем области $G_s \bigcap G_k$ при этом не изменяется. Поэтому $V\{G_0 \bigcap G_{k-s}\} > 0$. Теорема доказана.

Теорема Пуанкаре сохраняет свою силу в случае преобразований, сохраняющих меру. Приведенное доказательство использовало только это свойство движений гамильтоновой системы, выражаемое теоремой Лиувилля.

22.51. Эллипс: $(x - tp)^2 + p^2 = 1$.

22.52. $J = \pi$.

22.55. а) $\widetilde{H} = -\sqrt{-2m(mg\widetilde{t} + \widetilde{p})}$; б) $\widetilde{H} = -\sqrt{-m(c\widetilde{t}^2 + 2\widetilde{p})}$;
в) $\widetilde{H} = -\sqrt{-m(ce^{2\frac{\beta}{m}\widetilde{q}}\widetilde{t}^2 + 2e^{\frac{\beta}{m}\widetilde{q}}\widetilde{p})}$.

§ 23. Канонические преобразования

23.1. $c = -1,\ F(q_i, p_i, t) = -\sum\limits_{i=1}^{n} q_i p_i$.

23.2. $c = \alpha\rho - \beta\gamma \neq 0,\ F = -\dfrac{1}{2}[\alpha\gamma q^2 + 2\beta\gamma qp + \rho\beta p^2]$.

23.3. Преобразование будет каноническим, если найдется такое число $c \neq 0$, что $\mathbf{A}'\mathbf{B} = c\mathbf{E}$, где $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{i,k=1}^n$, $\mathbf{B} = [b_{ik}]_{i,k=1}^n$ и $\mathbf{E}$ — единичная матрица; $F(q_i, p_i, t) = 0$.

23.4. $c = -4,\ F = p^2 - q^2 - 2pq - \exp[(q+p)^2]$.

23.5. $c = -1,\ F = qp\,(19 - \ln(q^{20}p^{19}))$.

23.6. $c = 1,\ F = p[e^q(1 - q - \ln p) - 1]$.

23.7. $c = 2,\ F = 2q(p + \operatorname{ctg} p \cdot \ln(\cos p))$.

23.8. $c = 10,\ F = 0{,}2\,q^{-5}(25pq^6 - p^5)$.

23.9. $c = -2,\ F = -pq^3 - tpq^3\exp(1/q^2)$.

23.10. Производящая функция построенного преобразования равна $F(q_1, p_1, t) + \ldots + F(q_n, p_n, t)$.

23.11. $c = 1,\ F = -\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(\sin\varphi_i \cos\varphi_i - \varphi_i)$.

23.12. $c = \mu,\ F(q_j, p_j, t) = -\sum\limits_{l=1}^{n} p_l \dfrac{\partial\varphi(p_j, t)}{\partial p_l}$,

$$\widetilde{H}(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t) = \mu H\left[\frac{1}{\mu}\left(\widetilde{q}_j - \frac{\partial\varphi(\widetilde{p}_i, t)}{\partial\widetilde{p}_j}\right), \widetilde{p}_j, t\right].$$

23.16. Скобка Пуассона функций $\widetilde{q}(q, p, t)$ и $\widetilde{p}(q, p, t)$ должна быть первым интегралом заданной гамильтоновой системы.

23.17. c^{2n}.

23.18. В векторно-матричной записи $\widetilde{p} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{p}$, где матрица $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{i,k=1}^n = \left[\dfrac{\partial\varphi_i(q_j, t)}{\partial q_k}\right]_{i,k=1}^n$; $c = 1,\ F = 0$.

23.19. $\widetilde{H}[\widetilde{\mathbf{q}}, \widetilde{\mathbf{p}}, t] = H[\mathbf{f}(\widetilde{\mathbf{q}}, t), (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\widetilde{\mathbf{p}}, t] - \left(\dfrac{\partial\mathbf{f}(\widetilde{\mathbf{q}}, t)}{\partial t}, (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\widetilde{\mathbf{p}}\right)$, где матрица $\mathbf{B} = [b_{ik}]_{i,k=1}^n = \left[\dfrac{\partial f_i(\widetilde{\mathbf{q}}, t)}{\partial\widetilde{q}_k}\right]_{i,k=1}^n$, а круглыми скобками обозначено скалярное произведение векторов, так что $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.

23.20. $p_{x_1} = p_\rho \cos\varphi - (p_\varphi/\rho)\sin\varphi$, $p_{x_2} = p_\rho \sin\varphi + (p_\varphi/\rho)\cos\varphi$,
$p_{x_3} = p_z$, $c = 1$, $F = 0$.

23.21. $p_{x_1} = p_r \sin\theta\cos\varphi + (p_\theta/r)\cos\theta\cos\varphi - (p_\varphi/r\sin\theta)\sin\varphi$,
$p_{x_2} = p_r \sin\theta\sin\varphi + (p_\theta/r)\cos\theta\sin\varphi + (p_\varphi/r\sin\theta)\cos\varphi$,
$p_{x_3} = p_r\cos\theta - (p_\theta/r)\sin\theta$, $c = 1$, $F = 0$.

23.22. $p_{x_1} = p_{q_1}$, $p_{x_2} = p_{q_2}$, $p_{x_3} = p_{q_3}$, $c = 1$, $F = 0$.

23.23. $p_{x_1} = 2\dfrac{\sqrt{\xi\eta}}{\xi+\eta}\cos\varphi\,(p_\xi + p_\eta) - \dfrac{\sin\varphi}{\sqrt{\xi\eta}}p_\varphi$, $p_{x_2} = 2\dfrac{\sqrt{\xi\eta}}{\xi+\eta}\sin\varphi\,(p_\xi + p_\eta) + \dfrac{\cos\varphi}{\sqrt{\xi\eta}}p_\varphi$,
$p_{x_3} = \dfrac{2\xi}{\xi+\eta}p_\xi - \dfrac{2\eta}{\xi+\eta}p_\eta$, $c = 1$, $F = 0$.

23.24. $p_{x_1} = \dfrac{\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}}{\sigma(\xi^2-\eta^2)}(\xi p_\xi - \eta p_\eta)\cos\varphi - \dfrac{p_\varphi \sin\varphi}{\sigma\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}}$,
$p_{x_2} = \dfrac{\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}}{\sigma(\xi^2-\eta^2)}(\xi p_\xi - \eta p_\eta)\sin\varphi + \dfrac{p_\varphi \cos\varphi}{\sigma\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}}$,
$p_{x_3} = \dfrac{\eta(\xi^2-1)}{\sigma(\xi^2-\eta^2)}p_\xi + \dfrac{\xi(1-\eta^2)}{\xi^2-\eta^2}p_\eta$, $c = 1$, $F = 0$.

23.25. $q_i^* = f_i(q_j, p_j, t)$, $p_i^* = \alpha\varphi_i(q_j, p_j, t) + [\partial\Phi(q_j^*, t)/\partial q_i^*]_{q_i^* = f_i(q_j, p_j, t)}$.
Это преобразование является каноническим при любых $\alpha \neq 0$ и $\Phi(q_j^*, t)$. Его валентность αc_0, производящая функция $\alpha F(q_j, p_j, t) - \Phi[f_i(q_j, p_j, t), t]$, где c_0 и $F(q_j, p_j, t)$ — валентность и производящая функция исходного преобразования.

23.27. $\widetilde{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(\mathbf{q}, t)$, $\widetilde{\mathbf{p}} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}(c\mathbf{p} - \partial f(\mathbf{q}, t)/\partial\mathbf{q})$, где $\mathbf{A} = [\partial F_i/\partial q_k]_{i,k=1}^n$, а $f(\mathbf{q}, t)$ — произвольная дифференцируемая функция.

23.28. В векторно-матричной записи $\widetilde{\mathbf{q}} = \Phi(\mathbf{q}, t)$, $\widetilde{\mathbf{p}} = (\mathbf{D}^{-1})'(c\mathbf{p} - \partial f(\mathbf{q}, t)/\partial\mathbf{q})$, где $\mathbf{D} = [\partial\Phi_i/\partial q_j]_{i,j=1}^n$, $f(\mathbf{q}, t)$ — произвольная дифференцируемая функция.

23.29. $f_1(t)f_1(t) = \mathrm{const}$.

23.30. $c = \gamma$, $F = \Phi(q_i, t)$,
$$\widetilde{H}(\widetilde{q}_i, \widetilde{p}_i, t) = \gamma H\left[\widetilde{q}_i, \frac{1}{\gamma}\left(\widetilde{p}_i + \frac{\partial\Phi(\widetilde{q}_i, t)}{\partial\widetilde{q}_i}\right), t\right] + \frac{\partial\Phi(\widetilde{q}_i, t)}{\partial t}.$$

23.32. $\varphi_i(p_j, t) = cp_i$, $\dfrac{\partial\psi_i}{\partial q_k} = \dfrac{\partial\psi_k}{\partial q_i}$ $\quad (i, k = \overline{1, n})$.

23.33. Должны существовать такая функция $F(q_i, p_i, t)$ и такие постоянные c и μ, чтобы тождественно выполнялось равенство
$$\sum_{i=1}^n \widetilde{p}_i\delta\widetilde{q}_i - ce^{-\mu t}\sum_{i=1}^n p_i\delta q_i = -\delta F.$$

23.34. $\widetilde{K}(\widetilde{q}_i, \widetilde{p}_i, t) = cK(q_i, p_i, t) + \sum\limits_{i=1}^n \widetilde{p}_i\dfrac{\partial\widetilde{q}_i}{\partial t} + \dfrac{\partial F}{\partial t}$, $\alpha_2 = \alpha_1 - \mu$, где c, μ и F те же, что и в тождестве в ответе задачи 23.33.

23.35. а) $\dot{\widetilde{q}} = (6\widetilde{p})^{1/3}$, $\dot{\widetilde{p}} = 0$, $\widetilde{H} = 2^{-5/3}(3\widetilde{p})^{4/3}$;

б) $\dot{\widetilde{q}} = (6\widetilde{p})^{1/3}$, $\dot{\widetilde{p}} = -(1/2)\widetilde{q}(6\widetilde{p})^{2/3}$, система не гамильтонова;

в) $\dot{\widetilde{q}} = t\widetilde{q}\exp[t(6\widetilde{p})^{1/3}]$, $\dot{\widetilde{p}} = -(1/2)(6\widetilde{p})^{2/3}\exp[t(6\widetilde{p})^{1/3}]$, система не гамильтонова;

г) $\dot{\widetilde{q}} = t\exp[t(6\widetilde{p})^{1/3}]$, $\dot{\widetilde{p}} = 0$, $\widetilde{H} = t\int \exp[t(6\widetilde{p})^{1/3}]\,d\widetilde{p}$.

23.37. $\widetilde{H} = \widetilde{p}^{\,2} + 4\widetilde{q}^{\,2}$.

23.38. $\widetilde{H} = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\widetilde{p}_i^2 + a^2\widetilde{q}_i^2\right)$.

23.39. $\widetilde{H} = 0$.

23.40. $\widetilde{H} = 0$.

23.41. $\widetilde{H} = \sum\limits_{i=1}^{n}\widetilde{p}_i^2$.

23.43. $\mathbf{V} = (\mathbf{U}^{-1})^{\mathrm{T}}$.

23.44. $\widetilde{H}(\widetilde{q}_i, \widetilde{p}_i, t) = H(\widetilde{q}_i e^{\beta t}, \widetilde{p}_i e^{\gamma t}, t)\, e^{-(\beta+\gamma)t}$.

23.46. Скобки Лагранжа $[q_i, q_k]$, $[q_i, p_k]$, $[p_i, p_k]$ от заданных функций должны быть первыми интегралами исходной гамильтововой системы.

23.47. $\widetilde{q} = \omega q$, $\widetilde{p} = p$, $c = \omega$, $F = F(t)$.

23.48. $F = \sum\limits_{i=1}^{n}\left[p_{0i}q_{0i}\sin^2\omega_i t + \dfrac{\omega_i}{4}\left(q_{0i}^2 - \dfrac{p_{0i}^2}{\omega_i^2}\right)\sin 2\omega_i t\right]$, $\widetilde{H} = 0$.

23.49. $F = mgtz_0 + gt^2 p_{z_0} - (t/2m)\left(p_{x_0}^2 + p_{y_0}^2 + p_{z_0}^2\right)$, $\widetilde{H} = 0$.

23.53. а) $\widetilde{q} = q + p$, $\widetilde{p} = -q + p$, $c = 2$, $F = -q^2/2 - pq + p^2/2$;

б) $\widetilde{q} = q - p$, $\widetilde{p} = q + p$, $c = 2$, $F = q^2/2 - pq - p^2/2$;

в) $\widetilde{q} = (q - p)/2$, $\widetilde{p} = (q + p)/2$, $c = 1/2$, $F = (q^2 - 2pq - p^2)/8$.

23.54. а) $-c$, $-c\sum\limits_{i=1}^{n}p_i q_i + F(p_j, q_j, t)$;

б) $-c$, $-F(q_j, p_j, t) - \sum\limits_{i=1}^{n}f_i(q_j, p_j, t)\varphi_i(q_j, p_j, t)$;

в) c, $c\sum\limits_{i=1}^{n}p_i q_i - F(p_j, q_j, t) - \sum\limits_{i=1}^{n}f_i(p_j, q_j, t)\varphi_i(p_j, q_j, t)$.

23.55. $\dot{q}_i^* = \dfrac{\partial H^*\left(q_j^*, p_j^*, t\right)}{\partial p_i^*} + \dfrac{\dot{f}}{f}q_i^*$, $\dot{p}_i^* = -\dfrac{\partial H^*\left(q_j^*, p_j^*, t\right)}{\partial q_i^*} + \dfrac{\dot{f}}{f}p_i^*$ $\quad(i = \overline{1, n})$,

$H^* = f^2(t)\,\widetilde{H}\left(\dfrac{1}{f(t)}q_j^*, \dfrac{1}{f(t)}p_j^*, t\right)$.

23.56. Преобразование не является каноническим, так как гамильтонову систему с функцией $H(q_i, p_i, t)$ оно переводит в систему

$\dot{\widetilde{q}}_i = \dfrac{\partial\widetilde{H}\left(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t\right)}{\partial\widetilde{p}_i} + \dfrac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)}\widetilde{q}_i$, $\dot{\widetilde{p}}_i = -\dfrac{\partial\widetilde{H}\left(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t\right)}{\partial\widetilde{q}_i} + \dfrac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)}\widetilde{p}_i$ $\quad(i = \overline{1, n})$,

$$\widetilde{H}(\widetilde{q}_i, \widetilde{p}_i, t) = \varphi^2(t)\, H\left(\frac{1}{\varphi(t)}\,\widetilde{q}_i, \frac{1}{\varphi(t)}\,\widetilde{p}_i, t\right),$$

которая не является гамильтоновой.

23.59. $c = \prod\limits_{m=0}^{M} c_m,\ F = \sum\limits_{m=1}^{M}\left(\prod\limits_{s=1}^{m-1} c_s\right) F_m\left(q_j^{m+1}, p_j^{m+1}, t\right)$, где q_j^{m+1}, p_j^{m+1} выражены через q_j^{M+1}, p_j^{M+1}, t путем последовательного выполнения $(m+1)$-го, $(m+2)$-го, ..., M-го преобразований.

23.61. $\widetilde{q} = f(q, t),\ \widetilde{p} = cp\,(\partial f(q, t)/\partial q)^{-1}$, где $f(q, t)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию $\partial f(q, t)/\partial q \neq 0$.

23.62. $\widetilde{q} = f(p, t),\ \widetilde{p} = q\,(\partial f(p, t)/\partial p)^{-1}$, где $f(p, t)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию $\partial f(p, t)/\partial p \neq 0$.

23.63. Неверно.

23.66. Преобразование будет каноническим, если существует такое число $\mu \neq 0$, что выполняются равенства $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A},\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D} = \mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{B},\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{D} - \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \mu\mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ — единичная матрица.

23.67. $c = \sum\limits_{j=1}^{n}(a_{j1}d_{j1} - b_{j1}c_{j1}),\ F = -(1/2)[\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{q} + 2\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{p} + \mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{p}]$.

23.68. Преобразование будет каноническим, если существует такая постоянная $\mu \neq 0$, что выполняются тождества
$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{C}(t) \equiv \mathbf{C}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{A}(t),\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{D}(t) \equiv \mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}(t)$,
$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{D}(t) - \mathbf{C}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{B}(t) \equiv \mu\mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ — единичная матрица.

23.70. Нет.

23.71. $\beta_i = \alpha_i - c,\ \gamma_i = 1 - \alpha_i,\ \delta_i = 1 - \alpha_i + c$, где α_i и $c \neq 0$ — произвольные числа.

23.73. $\dfrac{\partial(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)}{\partial(c_1, c_2, \ldots, c_{2n})} \neq 0,\ \dfrac{\partial}{\partial t}[c_i, c_j] = 0 \quad (i, j = \overline{1, 2n})$, где $[c_i, c_j]$ — скобки Лагранжа заданных функций.

23.74. Функции $q_i(c, t),\ p_i(c, t)$, полученные в результате разрешения системы уравнений $w_1(t, q_j, p_j) = c_i$ относительно q_j, p_j, должны удовлетворять условиям $\dfrac{\partial}{\partial t}[c_i, c_j] = 0$, где $[c_i, c_j]$ — скобки Лагранжа функций $q_i(c, t)$, $p_i(c, t)$.

23.77. При условиях задачи преобразование $\widetilde{q} = H_1(q, p, t), \widetilde{p} = H_2(q, p, t)$ является унивалентным каноническим преобразованием.

23.80. $\varphi = \Phi(p^2 + q^2) + c\,\mathrm{arctg}\,(p/q)$, где Φ — произвольная функция.

23.82. Не будет.

23.85. $c = \beta,\ S = -\left(e^{\widetilde{q}t} - 1\right)^n \mathrm{ctg}\, q$.

23.86. $c = 1,\ S = e^{2\widetilde{q}_1 + q_1} - 9q_1q_2 + \dfrac{1}{3}\exp(2\widetilde{q}_2 + 3q_2)$.

23.87. $c = 1,\ S = \sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{tg}\,(\widetilde{q}_i + q_i)$.

23.88. $c=\lambda,\ S=\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}\sin q_i\cos\widetilde{q}_i.$

23.89. $c=1,\ S=\sum\limits_{i=1}^{n}(q_i+\widetilde{q}_i)^{\alpha+1}.$

23.90. $c=\lambda,\ S=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln q_i\ln\widetilde{q}_i.$

23.91. $c=1,\ S=\sum\limits_{i=1}^{n}\exp(q_i+\widetilde{q}_i).$

23.92. $c=\dfrac{\alpha}{\beta},\ S=\dfrac{\alpha}{\beta t}\sum\limits_{i=1}^{n}q_i^{\alpha}\widetilde{q}_i^{\beta}.$

23.93. $c=\lambda,\ S=-t\sum\limits_{i=1}^{n}\widetilde{q}_i^2+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(q_i\sqrt{\widetilde{q}_i^2-\omega_i^2q_i^2}+\dfrac{\widetilde{q}_i^2}{\omega_i}\arcsin\dfrac{\omega_iq_i}{\widetilde{q}_i}\right).$

23.94. $c=\gamma,\ S=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}q_i^2-\sum\limits_{i=1}^{n}q_i\widetilde{q}_i+\sin\left(t\sum\limits_{k=1}^{n}q_k\right).$

23.95. $c=\gamma,\ S=\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}q_i^{\alpha}\exp(\widetilde{q}_i)+\beta\prod\limits_{k=1}^{n}q_k.$

23.96. $c=\gamma,\ S=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\widetilde{q}_i^2q_i^2.$

23.97. $c=\gamma,\ S=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\alpha_i}(q_i\widetilde{q}_i)^{\alpha_i}.$

23.98. $c=1,\ S=2\exp(\widetilde{q}_1+2q_1)-4q_1q_2+3\exp(2\widetilde{q}_2+q_2).$

23.99. $c=\alpha,\ S=\exp(2\widetilde{q}_1+q_1)-2q_1q_2+b\cos(3\widetilde{q}_2+q_2).$

23.100. $c=3,\ S=a\sin(2\widetilde{q}_1+q_1)-q_1q_2+b\sin(3\widetilde{q}_2+q_2).$

23.101. $c=\gamma,\ S=\ln(\widetilde{q}_1+q_1)-q_1q_2+a\sin(2\widetilde{q}_2+q_2).$

23.102. $c=\gamma,\ S=\ln(q_1+\widetilde{q}_1)-q_1q_2+\ln(\widetilde{q}_2+2q_2).$

23.103. $c=\gamma,\ S=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\exp(\widetilde{q}_i+\alpha_iq_i)+\beta\exp\left(\sum\limits_{k=1}^{n}q_k\right).$

23.104. $c=\gamma,\ S=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}q_i^2\widetilde{q}_i^2+\alpha\exp\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_kq_k^2\right).$

23.105. $c=\mu,\ S=-\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\varphi(t)}{3}\widetilde{q}_i^3-\dfrac{\widetilde{q}_i^{\alpha}q_i^{\beta}}{\alpha\beta}\right)+\gamma\exp\left(\sum\limits_{k=1}^{n}q_k^2\right).$

23.106. $\widetilde{q}_i=\left[\dfrac{\mu}{\alpha\varphi_i(t)}p_iq_i^{1-\alpha}\right]^{1/\beta},\ \widetilde{p}_i=-\beta\left[\varphi_i(t)\left(\dfrac{\mu}{\alpha}\right)^{\beta-1}p_i^{\beta-1}q_i^{\alpha+\beta-1}\right]^{1/\beta}.$

23.107. $\widetilde{q}_i=-q_it+\arccos(\mu p_i/t),\quad \widetilde{p}_i=-\mu p_i/t.$

23.108. $\widetilde{q}_i=-(q_i+\arcsin\mu p_i)/t,\quad \widetilde{p}_i=-\mu tp_i.$

23.109. $\widetilde{q}_i=(\mu q_ip_i)^{1/\alpha},\ \widetilde{p}_i=-\alpha[\ln(q_it)-t](\mu q_ip_i)^{1-1/\alpha}.$

23.110. $\widetilde{\mathbf{q}} = \mu \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}, \quad \widetilde{\mathbf{p}} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{q},\ \mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}.$

23.111. $\widetilde{q}_i = \varphi_i\left(q_j, \dfrac{c}{c_0}p_j - \dfrac{1}{c_0}\dfrac{\partial f_1(\mathbf{q}, t)}{\partial q_j}, t\right),$

$\widetilde{p}_i = \psi_i\left(q_j, \dfrac{c}{c_0}p_j - \dfrac{1}{c_0}\dfrac{\partial f_1(\mathbf{q}, t)}{\partial q_j}, t\right) + \Phi_i\left[\varphi\left(q_j, \dfrac{c}{c_0}p_j - \dfrac{1}{c_0}\dfrac{\partial f_1(\mathbf{q}, t)}{\partial q_j}, t\right)\right],$

где $\Phi_i(\xi_j, t) = -\partial f_2(\xi_j, t)/\partial \xi_i \quad (i, j = \overline{1, n}).$

23.112. Ни при каких значениях.

23.113. $\dfrac{\gamma_1}{\delta_1} = \dfrac{\gamma_2}{\delta_2} = \ldots = \dfrac{\gamma_n}{\delta_n} \neq 0,\ \dfrac{\alpha_i\beta_i}{\delta_i} \neq 0,\ c = \dfrac{\gamma_1}{\delta_1},$

$S = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\delta_i}\exp\left[t\left(\alpha_i q_i - \beta_i \widetilde{q}_i\right)\right] \quad (i = \overline{1, n}).$

23.117. $\widetilde{q}_i = [\varphi_i(t)]^{1/\beta}\left(\dfrac{c}{\alpha}\right)^{1/\beta}\beta q_i^{1-1/\beta}p_i^{1-(1-\alpha)/\beta},$

$\widetilde{p}_i = [\varphi_i(t)]^{-1/\beta}\left(\dfrac{c}{\alpha}\right)^{(\beta-1)/\beta} q_i^{1/\beta}p_i^{(1-\alpha)/\beta}.$

23.118. $\widetilde{q}_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}\ln(p_i t)t\exp(-\xi_j),\ \widetilde{p}_j = (1/t)\exp\xi_j,$ где $\xi_j = c\sum\limits_{k=1}^{n} b_{jk}q_k p_k,$

а b_{jk} — элементы матрицы, обратной к матрице $[a_{kj}]_{k,j=1}^{n}$.

23.119. $\widetilde{q}_j = c\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\dfrac{\beta_j(t)}{\alpha_k(t)}q_k\exp\left[\alpha_i(t)p_i - \alpha_k(t)p_k\right],$

$\widetilde{p}_j = \dfrac{1}{\beta_j(t)}\ln\left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_{jk}\dfrac{cq_k}{\alpha_k(t)}\exp\left[-\alpha_k(t)p_k\right]\right),$

b_{jk} — элементы матрицы, обратной к матрице $[a_{kj}]_{k,j=1}^{n}$.

23.120. $\widetilde{q}_{i+1} = cq_i,\ \widetilde{p}_{i+1} = (c/2)q_i - p_i.$

23.121. $\widetilde{q}_i = \varphi_i\left[\dfrac{1}{c_0}\left(cq_j + \dfrac{\partial f_1(\mathbf{p}, t)}{\partial p_j}\right), p_j, t\right] +$

$+ \Phi_i\left\{\psi_k\left[\dfrac{1}{c_0}\left(cq_j + \dfrac{\partial f_1(\mathbf{p}, t)}{\partial p_j}\right), p_j, t\right], t\right\},$

$\widetilde{p}_i = \psi_i\left[\dfrac{1}{c_0}\left(cq_j + \dfrac{\partial f_1(\mathbf{p}, t)}{\partial p_j}\right), p_j, t\right],$

где $\Phi_i(\xi_j, t) = \dfrac{\partial f_2(\xi_j, t)}{\partial \xi_i} \qquad (i, j, k = \overline{1, n}).$

23.122. $c = \lambda,\ U = -\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\left(p_i\widetilde{p}_i\right)^{1/\alpha_i}.$

23.123. $c = \beta - \alpha,\ U = -\beta\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\alpha e^{\widetilde{p}_i}p_i^{\beta-\alpha}\right)^{1/\beta}.$

23.124. $c = \gamma,\ U = -\gamma\sum\limits_{i=1}^{n} p_i\ln\widetilde{p}_i.$

23.125. $c=\gamma,\ U=-\gamma\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\operatorname{arctg}[\exp(\widetilde{p}_i)]$.

23.126. $c=-\gamma,\ U=-\sum\limits_{i=1}^{n}(\widetilde{p}_i-p_i)\ln(\widetilde{p}_i-p_i)$.

23.128. $\widetilde{\mathbf{p}}=(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}(c\mathbf{p}-\partial f(\mathbf{q},t)/\partial\mathbf{q})$, где $\mathbf{A}=[\partial\mathbf{q}_i/\partial q_j]_{i,j=1}^{n}$, а $f(\mathbf{q},t)$ — произвольная функция.

23.129. $\widetilde{q}_j=\beta\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}(t)\,q_i^{\alpha}\left[\dfrac{c}{\alpha}\sum\limits_{k=1}^{n}b_{jk}(t)p_kq_k^{1-\alpha}\right]^{1-1/\beta},\ \widetilde{p}_j=\left[\dfrac{c}{\alpha}\sum\limits_{k=1}^{n}b_{jk}(t)p_kq_k^{1-\alpha}\right]^{1/\beta},$

b_{jk} — элементы матрицы, обратной к матрице $[a_{kj}]_{k,j=1}^{n}$.

23.130. $\widetilde{q}_{i+1}=c\dfrac{b_{i+1}(t)}{a_i(t)}p_i,\ \widetilde{p}_{i+1}=\left(\dfrac{c}{s}\dfrac{p_i}{a_i(t)}\right)^{1/(s-1)}\dfrac{1}{b_{i+1}(t)}-\dfrac{a_i(t)}{b_{i+1}(t)}q_i.$

23.131. $\widetilde{q}_j=c\alpha_j(t)\sum\limits_{i,k=1}^{n}a_{ij}b_{jk}p_kq_k\ln(q_it),\ \widetilde{p}_j=\dfrac{1}{\alpha_j(t)}\ln\left(c\sum\limits_{k=1}^{n}b_{jk}p_kq_k\right),$

b_{jk} — элементы матрицы, обратной к матрице $[a_{kj}]_{k,j=1}^{n}$.

23.132. $\widetilde{q}_j=t\left[1-\left(\dfrac{c}{t}\right)^2\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_{ji}\dfrac{p_i}{\sin(q_it)}\right)^2\right]\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}\cos(q_it),$

$\widetilde{q}_j=-\dfrac{1}{t}\arcsin\left(\dfrac{c}{t}\sum\limits_{i=1}^{n}b_{ji}\dfrac{p_i}{\sin(q_it)}\right),$

b_{ji} — элементы матрицы, обратной к матрице $[a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$.

23.133. $\widetilde{q}_i=q_ie^{-cp_i},\ \widetilde{p}_i=e^{cp_i}$.

23.134. $\widetilde{q}_i=\widetilde{q}_i\left[q_j,\left(\dfrac{c}{c_0}p_j-\dfrac{1}{c_0}\dfrac{\partial f_1(\mathbf{q},t)}{\partial q_j}\right),t\right]+$

$$+\Phi_i\left[\widetilde{p}_j\left(q_j,\frac{c}{c_0}p_j-\frac{1}{c_0}\frac{\partial f_1(\mathbf{q},t)}{\partial q_j},t\right),t\right],$$

$\widetilde{p}_i=\widetilde{p}_i\left[q_j,\left(\dfrac{c}{c_0}p_j-\dfrac{1}{c_0}\dfrac{\partial f_1(\mathbf{q},t)}{\partial q_j}\right),t\right],$

где $\Phi_i(\xi_j,t)=\dfrac{\partial f_2(\xi_j,t)}{\partial\xi_i}\quad(i=\overline{1,n})$.

23.135. $c=\dfrac{\alpha}{\beta},\ \Phi=\dfrac{1}{\beta}\sum\limits_{i=1}^{n}\widetilde{p}_i^{\beta}q_i^{\alpha}$.

23.136. $c=1,\ \Phi=\sum\limits_{i=1}^{n}\left[q_i\widetilde{p}_i+\widetilde{p}_i(\ln\widetilde{p}_i-1)-e^{\widetilde{p}_i}\right]$.

23.137. $c=-\alpha,\ \Phi=\sum\limits_{i=1}^{n}\widetilde{p}_i\left(\ln\dfrac{\widetilde{p}_i}{\alpha q_i^{\alpha}}-1\right)$.

23.138. $c=\lambda\gamma,\ \Phi=\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\widetilde{p}_i\left(\ln\dfrac{\widetilde{p}_i}{\alpha_i}-1\right)-\dfrac{\alpha_i^2}{2\lambda}\dfrac{\widetilde{p}_i^2}{q_i^2}\right]$.

23.139. $c=\lambda,\ \Phi=\sum\limits_{i=1}^{n}\widetilde{p}_i^2 q_i+\cos\left(t\sum\limits_{i=1}^{n}q_i^2\right)+\sin\left(t\sum\limits_{i=1}^{n}\widetilde{p}_i^2\right).$

23.140. $c=\gamma,\ \Phi=\sum\limits_{i=1}^{n}q_i^2\widetilde{p}_i+\exp\left(t\sum\limits_{i=1}^{n}q_i^2\right)+\exp\left(t\sum\limits_{i=1}^{n}\widetilde{p}_i^2\right).$

23.141. $c=1,\ \Phi=\sum\limits_{i=1}^{n}(\operatorname{tg}\widetilde{p}_i)\cdot\operatorname{tg}(q_i t).$

23.142. $c=2,\ \Phi=\sum\limits_{i=1}^{n}\exp[q_i(t-t_0)]\sin[\widetilde{p}_i(t-t_0)].$

23.143. $c=2,\ \Phi=2\sum\limits_{i=1}^{n}\widetilde{p}_i\operatorname{ch}(q_i t).$

23.144. $c=1,\ \Phi=\sum\limits_{i=1}^{n}\widetilde{p}_i\ln q_i.$

23.145. В $(q,\widetilde{p})$-описании искомое каноническое преобразование задается функциями $\widetilde{q}_i=\widetilde{q}_i(q_j,\widetilde{p}_j,t),\ p_i=p_i(q_j,\widetilde{p}_j,t)$, где $\widetilde{q}_i(q_j,\widetilde{p}_j,t)$ — произвольные функции, удовлетворяющие условиям $\dfrac{\partial\widetilde{q}_i}{\partial\widetilde{p}_l}=\dfrac{\partial\widetilde{q}_l}{\partial\widetilde{p}_i},\ \sum\limits_{l=1}^{n}\dfrac{\partial\widetilde{q}_i}{\partial\widetilde{p}_l}\widetilde{p}_l=0\ \ (i,l=\overline{1,n}),\ \left\|\dfrac{\partial\widetilde{q}_l}{\partial q_i}\right\|_{i,l=1}^{n}\neq 0$, а функции $p_i(q_j,\widetilde{p}_j,t)$ задаются соотношением $p_i(q_j,\widetilde{p}_j,t)=\dfrac{1}{c}\sum\limits_{l=1}^{n}\dfrac{\partial\widetilde{q}_l}{\partial q_i}\widetilde{p}_l\ \ (i=\overline{1,n}).$

23.146. $\Phi(q_j,\widetilde{p}_j,t)=\sum\limits_{i=1}^{n}q_i^*(q_j,\widetilde{p}_j,t)$, где $q_i^*(q_j,\widetilde{p}_j,t)=\widetilde{q}_i(q_j,p_j^*(q_k,\widetilde{p}_k,t),t)$, а функции $p_i^*(q_j,\widetilde{p}_j,t)$ получатся из последних n соотношений исходного преобразования, если выразить p_i через q_j и $\widetilde{p}_j$.

23.148. $\widetilde{q}_i=\widetilde{q}_i\left[\dfrac{c}{c_0}q_j+\dfrac{1}{c_0}\dfrac{\partial f_1(\mathbf{p},t)}{\partial p_j},p_j,t\right],\ \widetilde{p}_i=\widetilde{p}_i\left[\dfrac{c}{c_0}q_j+\dfrac{1}{c_0}\dfrac{\partial f_1(\mathbf{p},t)}{\partial p_j},p_j,t\right]-\Phi_i\left[\widetilde{q}_j\left(\dfrac{c}{c_0}q_k+\dfrac{1}{c_0}\dfrac{\partial f_1(\mathbf{p},t)}{\partial p_j},p_k,t\right),t\right]$, где $\Phi_i(\xi_j,t)=\partial f_2(\xi_j,t)/\partial\xi_i$ $(i=\overline{1,n})$.

23.149. $c=2,\ R=\sum\limits_{i=1}^{n}\operatorname{ctg}(p_i+\widetilde{q}_i t).$

23.150. $c=\lambda,\ R=-\sum\limits_{i=1}^{n}(\widetilde{q}_i-p_i)[\ln(\widetilde{q}_i-p_i)-1].$

23.151. $c=\lambda,\ R=\sum\limits_{i=1}^{n}\cos(p_i t)\cdot\sin(\widetilde{q}_i t).$

23.152. $c=1,\ R=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(\widetilde{q}_i+t)\cdot\sin p_i.$

23.153. $c=3,\ R=t\sum\limits_{i=1}^{n}(\widetilde{q}_i-a_ip_i)^{\alpha}.$

23.154. $c=-2,\ R=\sum\limits_{i=1}^{n}\exp(\widetilde{q}_it)\cdot\operatorname{tg}p_i.$

23.155. $c=-\lambda,\ R=\sum\limits_{i=1}^{n}\exp(a_i\widetilde{q}_i+b_ip_i+c_it).$

23.156. $c=\dfrac{\alpha}{\beta},\ R=-\dfrac{\alpha}{\beta}\sum\limits_{i=1}^{n}\widetilde{q}_i^{\beta}p_i^{\alpha t}.$

23.157. $c=1,\ R=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\exp(-\alpha_ip_i-t\widetilde{q}_i).$

23.158. $c=\lambda,\ R=\sum\limits_{i=1}^{n}p_i^{\alpha_i}\ln\widetilde{q}_i.$

23.159. $c=\lambda,\ R=t\sum\limits_{i=1}^{n}\widetilde{q}_i^{\gamma}+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(-p_i\sqrt{\widetilde{q}_i^2-\omega_i^2p_i^2}+\dfrac{\widetilde{q}_i^2}{\omega_i}\arccos\dfrac{\omega_ip_i}{\widetilde{q}_i}\right).$

23.160. $c=-n,\ R=\sum\limits_{i=1}^{n}\widetilde{q}_i^{n}p_i^{n}.$

23.161. $c=\gamma,\ R=\ln(p_1+\widetilde{q}_1)-p_1^2p_2^2+\ln(p_2+\widetilde{q}_2).$

23.162. $c=\gamma,\ R=\exp(\widetilde{q}_1+p_1)+p_1\widetilde{q}_2-\alpha(\widetilde{q}_2+p_2)^{\alpha}.$

23.163. $c=\gamma,\ R=-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}p_i^2\widetilde{q}_i^2+\gamma\exp\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\widetilde{q}_k\right).$

23.164. $\widetilde{q}_i=\varphi_i(t)^{-1/\beta}(c/\alpha)^{1/\beta}q_i^{1/\beta}p_i^{(1-\alpha)/\beta},$

$\widetilde{p}_i=-\varphi_i(t)^{1/\beta}\beta(c/\alpha)^{1-1/\beta}q_i^{1-1/\beta}p_i^{1-(1-\alpha)/\beta}.$

23.165. $\widetilde{q}_i=\dfrac{1}{t}\left(-p_i+\arccos\dfrac{1}{\sqrt{cq_i}}\right),\ \widetilde{p}_i=-cq_it.$

23.166. $\widetilde{\mathbf{q}}=c\mathbf{A}^{-1}\mathbf{q},\ \widetilde{\mathbf{p}}=-\mathbf{A}'\mathbf{p},\ \mathbf{A}=[a_{ij}]_{i,j=1}^{n}.$

23.167. $\widetilde{q}_i=\ln[cq_i/(t\cos p_it)],\ \widetilde{p}_i=-\alpha_icq_i\operatorname{tg}p_it.$

23.169. $c=\alpha,\ F=p_1\widetilde{q}_1+q_2\widetilde{q}_2+p_3\widetilde{p}_3+q_4\widetilde{p}_4.$

23.170. $c=\alpha,\ F=\sum\limits_{i=1}^{n_1}(\ln p_i)\widetilde{q}_i-\sum\limits_{j=n_1+1}^{n}p_j\exp(\widetilde{p}_j).$

23.171. $c=\gamma,\ F=\sum\limits_{i=1}^{n_1}\widetilde{p}_i\ln(\gamma q_i^{\gamma-1}-1)+\sum\limits_{j=n_1+1}^{n}(\widetilde{q}_j-q_j)[\ln(\widetilde{q}_j-q_j)-1].$

23.172. $c=\alpha,\ F=-p_1^{\alpha}\widetilde{q}_1^{\beta}+q_2^{\alpha}\widetilde{q}_2^{\gamma}-p_3^{\alpha}p_3^{\sigma}+p_4^{\alpha}\widetilde{p}_4^{\mu}.$

23.173. $c=1,\ F=\sum\limits_{i=1}^{n_1}\sin q_i\sin\widetilde{q}_i+\sum\limits_{j=n_1+1}^{n}\cos p_j\cos\widetilde{p}_j.$

23.174. $c=1,\quad F=\sum\limits_{i=1}^{n_1}p_i\ln\widetilde{q}_i+\sum\limits_{j=n_1+1}^{n}q_j\ln\widetilde{p}_j.$

23.175. $R=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\omega_i}\left[-\frac{\omega_i q_i p_{0i}}{\cos\omega_i t}+\frac{1}{2}\left(p_{0i}^2+\omega_i^2 q_i^2\right)\operatorname{tg}\omega_i t\right],$

$S=\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\left[\frac{q_i q_{0i}}{\sin\omega_i t}-\frac{1}{2}(q_i^2+q_{0i}^2)\operatorname{ctg}\omega_i t\right],$

$U=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\omega_i}\left[\frac{p_i p_{0i}}{\sin\omega_i t}-\frac{1}{2}(p_i^2+p_{0i}^2)\operatorname{ctg}\omega_i t\right],$

$\Phi=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\omega_i}\left[\frac{\omega_i p_i q_{0i}}{\cos\omega_i t}+\frac{1}{2}\left(p_i^2+\omega_i^2 q_{0i}^2\right)\operatorname{tg}\omega_i t\right].$

23.176. $c=1,\ F=F(t)$.

23.177. $c=\lambda^{-1},\quad F=-\lambda^{-1}\Phi[q_i(\widetilde{q}_j,\widetilde{p}_j,t),\ p_i(\widetilde{q}_j,\widetilde{p}_j,t),t]$, где $q_i=q_i(\widetilde{q}_j,\widetilde{p}_j,t)$, $p_i=p_i(\widetilde{q}_j,\widetilde{p}_j,t)$ $(i=\overline{1,n})$ — обратное преобразование.

23.178. $c=c_1c_2, F=c_1F_2(q_i,p_i,t)+F_1[\widetilde{q}_i(q_j,p_j,t),\widetilde{p}_i(q_j,p_j,t),t]$.

23.186. Элементом факторгруппы G_1/G_0 является совокупность всех канонических преобразований с нулевой производящей функцией и одной и той же валентностью c.

23.188. Для любого преобразования $g\in G$ класс смежности Mg содержит в себе все канонические преобразования с валентностью $c=c(g)$, т. е. произвольный элемент факторгруппы G/M есть совокупность всех канонических преобразований с фиксированной валентностью c. Групповое умножение в факторгруппе есть сопоставление двум элементам с валентностями c_1 и c_2 элемента с валентностью $c=c_1c_2$, т. е. эта факторгруппа изоморфна мультипликативной группе вещественных чисел.

23.189. $c=1,\ F=\frac{2}{3}\sum\limits_{i=1}^{n}p_iq_i$.

23.190. Не являются.

23.191. $Q_i=\partial K/\partial\widetilde{p}_i+\beta\widetilde{q}_i,\ \ P_i=-\partial K/\partial\widetilde{q}_i+\gamma\widetilde{p}_i,\ \ K(\widetilde{q},\widetilde{p},t)$ — произвольная функция, β, γ — произвольные числа.

23.196. $\varphi_i=\gamma p_i+\partial\psi(q,t)/\partial q_i$.

§ 24. Уравнение Гамильтона–Якоби

24.1. а) $x=\beta_x+\frac{\alpha_x}{m}t,\ \ y=\beta_y+\frac{\alpha_y}{m}t,\ \ z=\frac{\alpha_z}{mg}-\frac{g}{2}(\beta_z+t)^2$;

б) $r=\sqrt{\left(\frac{\beta_r+t}{m}\right)^2+\frac{\alpha_\varphi^2}{2m\alpha_r}},\ \ \cos(\varphi-\beta_\varphi)=\frac{\alpha_\varphi}{r\sqrt{2m\alpha_r}},\ \ z=\frac{\alpha_z}{mg}-\frac{g}{2}(\beta_x+t)^2.$

24.2. $S=mv_{0x}x+mv_{0y}y+mv_{0z}z-mv_0^2t/2$, где $v_0^2=v_{0x}^2+v_{0y}^2+v_{0z}^2$;
$x=v_{0x}t+x_0,\ \ y=v_{0y}t+y_0,\ \ z=v_{0z}t+z_0$;
$p_x=p_x(0)=mv_{0x},\ \ p_y=p_y(0)=mv_{0y},\ \ p_z=p_z(0)=mv_{0z}$.

24.3. $\beta+t=l\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{h+mgl\cos\varphi}},\ \ p=l\sqrt{2m(h+mgl\cos\varphi)}.$

24.5. $q_i = \sqrt{\dfrac{2\alpha_i}{c_i}} \sin\left[\sqrt{\dfrac{c_i}{m_i}}(\beta_i + t)\right], \ \alpha_i = \dfrac{1}{2}\left[c_i q_i^2(0) + m_i \dot{q}_i^2(0)\right],$

$$\beta_i = \sqrt{\frac{m_i}{c_i}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{c_i}{m_i}} \frac{q_i(0)}{\dot{q}_i(0)} \quad (i = 1, 2).$$

24.6. В сферических координатах полный интеграл имеет вид

$$S = -ht + \alpha_1\varphi + \int \sqrt{\alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{\sin^2\theta}}\, d\theta + \int \sqrt{2mh + \frac{2m\gamma}{r} - \frac{\alpha_2}{r^2}}\, dr.$$

24.7. Уравнение траектории находится из соотношения $\partial S/\partial\alpha_2 = \beta_2$, в котором следует положить $\alpha_1 = 0$, поскольку движение плоское. После интегрирования получается уравнение конического сечения $r = \rho/[1 + e\cos(\varphi - \beta_0)]$, где $\rho = \alpha_2/(m\gamma)$, $e = \sqrt{1 + 2h\alpha_2/(m\gamma^2)}$, $\beta_0 = 2\sqrt{\alpha_2}\,\beta_2$.

24.8. $$S = -ht + \alpha_\varphi\varphi + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\xi}\sqrt{-m\beta\xi^3 + 2mh\xi^2 + 2(\alpha_\xi - \alpha m)\xi - \alpha_\varphi^2}\, d\xi +$$
$$+ \frac{1}{2}\int \frac{1}{\eta}\sqrt{m\beta\eta^3 + 2mh\eta^2 - 2(\alpha_\xi + \alpha m)\eta - \alpha_\varphi^2}\, d\eta,$$

где ξ, η, φ — параболические координаты, связанные с координатами x, y, z формулами $x = \sqrt{\xi\eta}\cos\varphi$, $y = \sqrt{\xi\eta}\sin\varphi$, $z = (\xi - \eta)/2$. В задаче 1.37 д) введены иные парабалические координаты: $\xi = \tau^2$, $\eta = \sigma^2$, $\varphi = \varphi$.

24.9. В сферических координатах

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2\right] - \frac{\mu_1}{r} + \frac{\mu_2}{r^2} = 0,$$

$$S = -ht + \alpha_1\varphi + \int \sqrt{\alpha_2 - \frac{\alpha_1}{\sin^2\theta}}\, d\theta + \int \sqrt{2mh + \frac{2m\mu_1}{r} - \frac{2m\mu_2}{r^2} - \frac{\alpha_2}{r^2}}\, dr.$$

При исследовании этого движения без ограничения общности можно считать, что начальная скорость лежит в плоскости $\varphi = \mathrm{const}$ и, следовательно, в начальный момент $\partial\varphi/\partial\theta = 0$. Это условие вместе с равенством $\partial S/\partial\alpha_1 = \beta_1$ приводит к равенству $\alpha_1 = 0$. Для нахождения уравнений траектории воспользуемся равенством $\partial S/\partial\alpha_2 = \beta_2$ с учетом, что $\alpha_1 = 0$. В результате получим

$$\frac{\theta}{2\sqrt{\alpha_2}} - \int \frac{dr}{2r^2\sqrt{2mh + 2m\mu_1/r - (\alpha_2 + 2m\mu_2)/r^2}} = \beta_2.$$

Выполнив интегрирование, придем к соотношению

$$\arccos\frac{1/r - b}{\sqrt{b^2 + c}} = \omega\theta - \gamma,$$

где $\omega = \sqrt{1 + \dfrac{2m\mu_2}{\alpha_2}}$, $c = \dfrac{2mh}{\alpha_2 + 2m\mu_2}$, $b = \dfrac{m\mu_1}{\alpha_2 + 2m\mu_2}$, $\gamma = 2\omega\sqrt{\alpha_2}\,\beta_2$;

отсюда $r = \dfrac{p}{1 + e\cos(\omega\theta - \gamma)}$, $p = \dfrac{1}{b}$, $e = \sqrt{1 + \dfrac{c}{b^2}}$.

При $\mu_2 = 0$ полученное начальное решение переходит в решение ньютоновой задачи. Если начальные условия таковы, что $e < 1$, а ω иррационально, то траектория не будет замкнутой. Замкнутая траектория получится в случае рационального ω и $e < 1$.

24.10. $$S = -ht + \int \sqrt{2m(\alpha_\varphi - \Phi(\varphi))}\, d\varphi + \int \sqrt{2m\left(\alpha_\theta - \Theta(\theta) - \frac{\alpha_\varphi}{\sin^2\theta}\right)}\, d\theta + \\ + \int \sqrt{2m\left(h - R(r) - \frac{\alpha_\theta}{r^2}\right)}\, dr.$$

24.11. $$S = -\alpha_2 t + \int \sqrt{ml\left[\alpha_1 + 2(\gamma_1 + \gamma_2)\operatorname{ch}\xi + 2\alpha_2 l \operatorname{ch}^2\xi\right]}\, d\xi + \\ + \int \sqrt{ml\left[-\alpha_1 + 2(\gamma_1 - \gamma_2)\cos\eta - 2\alpha_2 l\cos^2\eta\right]}\, d\eta.$$

24.12. $$\varphi - \int \frac{\alpha_1\, d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1^2/\sin^2\theta - 2m^2 g r^3\cos\theta}} = \beta_1,$$

$$\frac{t}{2mr^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1^2/\sin^2\theta - 2m^2 g r^3\cos\theta}} = \beta_2,$$

$$p_1 = \alpha_1,\ p_2 = \sqrt{\alpha_2 - \alpha_1^2/\sin^2\theta - 2m^2 g r^3\cos\theta}.$$

24.13. $$S = -ht + \alpha\varphi + \\ + \int \sqrt{2(m_1 + m_2)r^2\left(h - \frac{\alpha^2}{2m_1 r^2\sin^2\theta} - m_2 g r\theta - m_1 g r\cos\theta\right)}\, d\theta.$$

24.14. $$S = -ht + \alpha\varphi + \int \sqrt{2(m + M)\left(h - \frac{\alpha^2}{2mr^2} - Mgr\right)}\, dr.$$

24.15. $$S = -\left(\sum_{i=1}^{3}\alpha_i + \alpha_r\right)t + \sum_{i=1}^{3}\sqrt{4m\alpha_i}\, x_i + \alpha_\varphi\varphi + \\ + \int \sqrt{\alpha_\theta - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}}\, d\theta + \int \sqrt{m\alpha_r - \frac{mc}{2}(r - l_0)^2 - \frac{\alpha_\theta}{r^2}}\, dr.$$

24.16. $$S = -ht + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4\psi + \\ + \int \sqrt{\alpha_5 - \frac{\alpha_4^2}{\sin^2\theta}}\, d\theta + \int \sqrt{2\mu\alpha_6 + \frac{2\mu\gamma m_1 m_2}{r} - \frac{\alpha_5}{r^2}}\, dr,$$

где $H = \dfrac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{2(m_1 + m_2)} + \alpha_6$, $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

24.17. $$S = -(\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z + \alpha_\theta)t + \sqrt{2m\alpha_x}\, x + \sqrt{2m\alpha_y}\, y + \\ + \sqrt{\alpha_\psi}\,\psi - \frac{1}{3m^2 g}(2m\alpha_z - 2m^2 g z)^{3/2} + \int \sqrt{\frac{2ml^2}{3}\alpha_\theta - \frac{\alpha_\psi}{\sin^2\theta}}\, d\theta.$$

24.18. $S = -(\alpha_\xi + \alpha_\eta + \alpha_\varphi)t + \int \sqrt{2m\alpha_\xi + (m\omega\xi)^2}\, d\xi +$

$$+ \int \sqrt{2m\alpha_\eta - 2(mg\eta)^2}\, d\eta + \int \sqrt{\frac{ml^2}{6}\alpha_\varphi + \left(\frac{ml^2\omega}{12}\right)^2 \cos^2\varphi}\, d\varphi.$$

24.19. В эйлеровых углах полный интеграл имеет вид

$$S = -\alpha_\theta t + \alpha_\varphi\varphi + \alpha_\psi\psi + \int \sqrt{2A\alpha_\theta - \frac{A}{C}\alpha_\varphi^2 - \frac{(\alpha_\psi - \alpha_\varphi\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}}\, d\theta.$$

24.20. Если в качестве обобщенных координат выбрать координаты центра масс $x_C = x, y_C = y$ и три эйлеровых угла φ, ψ, θ, то полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби равен

$$S = -\left[\frac{\alpha_x^2 + \alpha_y^2}{2m} + \frac{\alpha_\varphi^2}{2C} + \alpha_\theta\right] t + \alpha_x x + \alpha_y y + \alpha_\varphi\varphi + \alpha_\psi\psi +$$

$$+ \int \sqrt{(ml^2\sin^2\theta + A)\left(2\alpha_\theta - \frac{(\alpha_\psi - \alpha_\varphi\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta} - 2mgl\cos\theta\right)}\, d\theta.$$

24.21. $S = -ht + \alpha_x x + \alpha_y y + \alpha_\psi\psi + \alpha_\varphi\varphi +$

$$+ \int \sqrt{m\left(\frac{\partial z(\theta)}{\partial\theta}\right)^2 + 2hA - 2mgz(\theta) - \frac{\alpha_x^2 + \alpha_y^2}{m} - \frac{\alpha_\varphi^2}{c} - \frac{(\alpha_\psi - \alpha_\varphi\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta}}\, d\theta$$

(x, y, $z(\theta)$ — координаты центра инерции тела, ψ, θ, φ — эйлеровы углы).

24.22. $S = -ht + \alpha_\psi\psi + \int \frac{\sqrt{\alpha_\theta\sin^2\theta - (\alpha_\psi + \lambda\cos\theta)^2}}{\sin\theta}\, d\theta + \int \frac{1}{r}\sqrt{2mhr^2 - \alpha_\theta}\, dr.$

24.23. $S = -ht + \int \left[\sqrt{2m(\alpha_\theta - \beta f_3(\theta)) - \frac{(\alpha_\psi + af_1(\theta))^2}{\sin^2\theta}} - bf_2(\theta)\right] d\theta +$

$$+ \int \sqrt{2m[h - f_4(r)] - \frac{\alpha_\theta}{r^2}}\, dr + \alpha_\psi\psi.$$

24.24. $\dfrac{d\varphi_{ij}}{dt} = -\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k,l=1}^{n} a_{kl}(t)\varphi_{ki}\varphi_{lj} - c_{ij}(t),$

$$\frac{d\varphi_k}{dt} = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t)\varphi_{ik}\psi_j - \sum_{i=1}^{n} A_i(t)\varphi_{ik} - C_k(t),$$

$$\frac{df}{dt} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t)\psi_i\psi_j - \sum_{i=1}^{n} A_i(t)\psi_i.$$

24.25. $x = A\,\mathrm{sh}\,(\omega t + \gamma) - (g/2\omega^2)\cos\omega t.$

24.26. $S = \alpha_1\xi + \dfrac{1}{12}ml^2\omega\int\sqrt{\alpha^2 + \sin^2\varphi}\, d\varphi + \dfrac{1}{2}m\omega\eta^2 +$

$$+ \left[\alpha_3 e^{-\omega t} - \frac{\sqrt{2}mg}{2\omega}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \omega t\right)\right]\eta - \left(\frac{\alpha_1^2}{2m} + \frac{\alpha_2 ml^2\omega^2}{24}\right) t +$$

$$+\frac{1}{2m}\int\left[\alpha_3 e^{-\omega t}-\frac{\sqrt{2}mg}{2\omega}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\omega t\right)\right]^2 dt,$$

где ξ и η — координаты центра стержня, а φ — угол поворота.

24.27. $S=-ct\sqrt{m_0c^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}+\alpha_1x+\alpha_2y+\alpha_3z.$

24.28. В сферических координатах гамильтониан записывается так:

$$H=c\sqrt{m_0^2c^2+p_r^2+\left(\frac{p_\theta}{r}\right)^2+\left(\frac{p_\varphi}{r\sin\theta}\right)^2}-\frac{\alpha}{r}.$$

Полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби ищем в виде $S=-ht+\alpha_\varphi\varphi+V_r+$ $+V_\theta$, что дает

$$\frac{1}{c^2}\left(h+\frac{\alpha}{r}\right)^2=m_0^2c^2+\left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\alpha_\varphi}{\sin\varphi}\right)^2\right].$$

Положим $\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\alpha_\varphi}{\sin\theta}\right)^2=\alpha_\theta$; тогда $\left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right)^2=\left(h+\frac{\alpha}{r}\right)^2\frac{1}{c^2}-\frac{\alpha_\theta}{r^2}-m_0^2c^2$,

откуда $V_\theta=\int\sqrt{\alpha_\theta-\left(\frac{\alpha_\varphi}{\sin\theta}\right)^2}\,d\theta,\quad V_r=\int\sqrt{\left(h+\frac{\alpha}{r}\right)^2\frac{1}{c^2}-\frac{\alpha_\theta}{r^2}-m_0^2c^2}\,dr.$

Без нарушения общности можно считать, что начальная скорость лежит в плоскости меридиана $\varphi=\mathrm{const}$. Тогда в начальный момент $\dot\varphi=0$ и, следовательно, $p_\varphi=\partial S/\partial\varphi=\alpha_\varphi=0$. По полному интегралу находим уравнение траектории

$$\frac{\partial S}{\partial\alpha_\theta}=\int\frac{d\theta}{2\sqrt{\alpha_\theta}}-\frac{1}{2}\int\frac{dr}{r^2\sqrt{(h-\alpha/r)^2c^{-2}-\alpha_\theta/r^2-m_0^2c^2}}=\beta_0.$$

Преобразуем это выражение к виду

$$\theta\omega-\gamma=\int\frac{dr}{r^2\sqrt{-r^{-2}+2/(rp)+(e^2-1)/p^2}},$$

где $\gamma=2\beta_\theta\sqrt{\alpha_\theta-\frac{\alpha^2}{c^2}},\ \omega=\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{\alpha_\theta^2c^2}},\ \frac{e^2-1}{p^2}=\frac{h^2/c^2-m_0^2c^2}{\alpha_\theta-\alpha^2/c^2},$

$p=\frac{c^2(\alpha^2/c^2-\alpha_\theta)}{\alpha h}$, тогда $\theta\omega-\gamma=\arccos\frac{p/r-1}{e}$, или $r=\frac{p}{1+e\cos(\omega\theta-\gamma)}$.

24.29. $S=-ht+\alpha_\varphi\varphi+\int\sqrt{\left(h-\frac{kr^2}{2}\right)^2c^{-2}-\frac{\alpha_\theta}{r^2}-m_0^2c^2}\,dr+\int\sqrt{\alpha_\theta-\frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}}\,d\theta,$

$$\frac{\partial S}{\partial\varphi}=\alpha_\varphi=p_\varphi,\quad\frac{\partial S}{\partial\theta}=\sqrt{\alpha_\theta-\frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}}=p_\theta,$$

$$\frac{\partial S}{\partial r}=\sqrt{\frac{(h-kr^2/2)^2}{c^2}-\frac{\alpha_\theta}{r^2}-m_0^2c^2}=p_r,$$

$$\frac{\partial S}{\partial\alpha_\varphi}=\varphi-\alpha_\varphi\int\frac{d\theta}{\sin\theta\sqrt{\alpha_\theta\sin^2\theta-\alpha_\varphi^2}}=\beta_\varphi,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_\theta}=\frac{1}{2}\int\frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{\alpha_\theta\sin^2\theta-\alpha_\varphi^2}}-\frac{1}{2}\int\frac{dr}{r^2\sqrt{(h-kr^2/2)^2c^{-2}-\alpha_\theta/r^2-m_0^2c^2}}=\beta_\theta,$$

$$\frac{\partial S}{\partial h}=-t+\int\frac{(h-kr^2/2)c^{-2}}{\sqrt{(h-kr^2/2)^2c^{-2}-\alpha_\theta/r^2-m_0^2c^2}}\,dr=-t_0.$$

24.30. $\gamma=-t+\int\dfrac{2h}{(\alpha x^2+\beta)(h^2-\alpha x^2-\beta)}\,dx,\ \ p_x=\sqrt{\dfrac{h^2-\alpha x^2-\beta}{\alpha x^2+\beta}}.$

24.31. $q_i=\dfrac{\sqrt{\alpha_i}}{\omega_i}\sin\{2\omega_i[\beta_i t+\gamma(t)]\},\ p_i=\sqrt{\alpha_i}\cos\{2\omega_i(\beta_i t+\gamma(t)]\},$

$$\gamma(t)=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{\sum\alpha_i+\varphi(t)}}\quad(i=\overline{1,n}).$$

24.32. Каноническое преобразование $\widetilde{p}_1=(p_1+p_2)/2$, $\widetilde{q}_1=(q_1+q_2)/2$, $\widetilde{p}_2=(p_1-p_2)/2$, $\widetilde{q}_2=(q_1-q_2)/2$;

$$\begin{bmatrix}q_1\\q_2\end{bmatrix}=C_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\sin(t+\beta_1)+C_2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\sin(t+\beta_2),$$

$$\begin{bmatrix}p_1\\p_2\end{bmatrix}=C_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\cos(t+\beta_1)+C_2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\cos(t+\beta_2).$$

24.33. Каноническое преобразование

$$\widetilde{p}_1=\frac{1}{2}(p_1+q_2),\quad \widetilde{q}_1=\frac{1}{2}(q_1-p_2),\quad \widetilde{p}_2=\frac{1}{2}(p_1-q_2),\quad \widetilde{q}_2=\frac{1}{2}(q_1+p_2);$$

$$q_1=C_1\operatorname{sh}(t+\beta_1)+C_2\operatorname{sh}(t+\beta_2),\quad q_2=C_1\operatorname{ch}(t+\beta_1)-C_2\operatorname{ch}(t+\beta_2),$$

$$p_1=C_1\operatorname{ch}(t+\beta_1)+C_2\operatorname{ch}(t+\beta_2),\quad p_2=-C_1\operatorname{sh}(t+\beta_1)+C_2\operatorname{sh}(t+\beta_2).$$

24.34. Каноническое преобразование

$$\widetilde{q}=p^2+q^2,\quad \widetilde{p}=\operatorname{arctg}\frac{p}{q};$$

$$q=\sqrt{2t+\gamma}\,\cos(2t+\beta),\quad p=-\sqrt{2t+\gamma}\sin(2t+\beta).$$

24.35. Преобразование совпадает с преобразованием в предыдущей задаче:

$$q_i=A_ie^t\cos(B_ie^{-2t}),\quad p_i=A_ie^t\sin(B_ie^{-2t})\quad(i=\overline{1,n}).$$

24.36. $S=-\alpha_1t+\dfrac{1}{\alpha_2}\left(2\alpha_1q_1-\dfrac{q_1^3}{3}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\alpha_2q_2-\dfrac{q_2^2}{2}\right).$

24.37. $S=\alpha_1t+\displaystyle\int\frac{1}{q_1^2}\sqrt{2\alpha_1-\alpha_2q_1^2}\,dq_1+\int\sqrt{\alpha_2+2q_2}\,dq_2.$

24.38. $S=-\alpha_1t+\alpha_2q_2+\displaystyle\int\sqrt{2\alpha_1-2b\sin q_1-\frac{\alpha_2^2}{\cos^2q_1}}\,dq_1.$

24.39. $S=-\alpha_2t+\displaystyle\int\sqrt{\alpha_1-q_1^2\cos q_1}\,dq_1+\int\sqrt{\frac{2\alpha_2-\alpha_1q_2^2}{\cos q_2}}\,dq_2.$

24.40. $S=-\alpha_1t+\alpha_2q_2+\alpha_3q_3+\displaystyle\int\sqrt{2\alpha_1-\alpha_2^2-\frac{(\alpha_3-\alpha_2\sin q_1)^2}{\cos^2q_1}}\,dq_1.$

24.41. $S = -(\alpha_1+\alpha_2^2)t + \int \sqrt{\alpha_1 - \sin q_1}\, dq_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 q_2^2 + \alpha_3 q_3 - \alpha_3 \sin q_2.$

24.42. $$S = -ht + \frac{1}{2}\left(q_1\sqrt{\alpha_1 - q_1^2} + \alpha_1 \arcsin\frac{q_1}{\sqrt{\alpha_1}}\right) + \\ + \frac{1}{2}\sqrt{h-\alpha_1}\left(q_2\sqrt{\frac{\alpha_2}{h-\alpha_1} + q_2^2} + \frac{\alpha_2}{h-\alpha_1}\operatorname{arsh}\frac{q_2\sqrt{h-\alpha_1}}{\sqrt{\alpha_2}} + \right. \\ \left. + q_3\sqrt{q_3^2 - \frac{\alpha_2}{h-\alpha_1}} - \frac{\alpha_2}{h-\alpha_1}\operatorname{arch}\frac{q_3\sqrt{h-\alpha_1}}{\sqrt{\alpha_2}}\right).$$

24.43. $$S = -\alpha_1 t + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_1}\left(q_1\sqrt{q_1^2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\operatorname{arch}\frac{q_1\sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{\alpha_2}}\right) + \\ + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_2}\left(q_2\sqrt{q_2^2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}} - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\operatorname{arch}\frac{q_2\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_3}}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_3}q_3^2.$$

24.44. $$S = -ht + \int\sqrt{\alpha_1 - \alpha_3 q_1^2 + 2hq_1}\, dq_1 + \\ + \int\sqrt{-\alpha_1 + \alpha_3 q_2^2 - 2hq_2}\, dq_2 + \int\sqrt{\alpha_3 - q_3^{-2}}\, dq_3.$$

24.45. $$S = -ht + \int\sqrt{\frac{\alpha_1 - (1+h)\sin^2 q_1}{1-h}}\, dq_1 + \int\sqrt{\frac{-\alpha_1 - (1+h)\cos^2 q_2}{1-h}}\, dq_2.$$

24.46. $S = \frac{\alpha_2+\alpha_2}{2\alpha_1+3\alpha_2}\cos t + \sqrt{\alpha_1}\ln q_1 + \sqrt{\alpha_2}\ln q_2.$

24.47. $S = \frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{2(\alpha_1+\alpha_2)}\int f(t)\, dt + q_1\ln\alpha_1 + q_2\ln\alpha_2 - \frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2).$

24.48. $$S = -(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)t + 2\sqrt{\alpha_3}\, q_3 + \sqrt{3/2}\,\alpha_1\arcsin\sqrt{2/\alpha_1}\, q_1 + \\ + q_1\sqrt{3(\alpha_1 - 2q_1^2)} + \sqrt{2/3}\,\alpha_2\arcsin\sqrt{3/\alpha_2}\, q_2 + q_2\sqrt{2(\alpha_3 - 3q_2^2)}.$$

24.49. $S = -(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)t + \sqrt{\alpha_2/2}\, q_2^2 + \sqrt{2\alpha_3}q_3 + \sqrt{2}\int q_1\sqrt{\alpha_1 - \cos q_1}\, dq_1.$

24.50. $S = -(\alpha_2+\alpha_3^2)t + 2\alpha_3 q_3 + \int\sqrt{\alpha_1 - 2q_1^2}\, dq_1 + \int\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1 q_2^2}\, dq_2.$

24.51. $S = \alpha_1 t + \alpha_2\ln q_2 + \int\sqrt{2\alpha_1 q_1^2 - \alpha_2^2}\,\frac{dq_1}{q_1}.$

24.52. $S = -\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3)t + \alpha_3 q_3 + \int\sqrt{\alpha_1 - q_1^2}\, dq_1 + \int\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1 q_2^2}\, dq_2.$

24.53. $S = -\alpha_1 t + \int q_1\sqrt{2\alpha_1 q_1^2 - \alpha_2}\, dq_1 + \int\sqrt{\alpha_2 - 2q_2^2}\, dq_2.$

24.54. $S = -\alpha_2 t + \int\sqrt{\alpha_1 - 3q_1^2}\, dq_1 + \int\sqrt{\alpha_2 + f(q_2) - \alpha_1 q_2^2}\,\frac{dq_2}{q_2}.$

24.55. $S = -\alpha_2 t + \int\sqrt{\alpha_1 - \cos q_1}\, dq_1 + \int\sqrt{(\alpha_2 - \alpha_1 q_2^2)\operatorname{ctg} q_2}\, dq_2.$

24.56. $S = -(\alpha_2+\alpha_3^2)t + 2\int\sqrt{\alpha_1 - q_1^2\sin q_1}\, dq_1 + \int\sqrt{(\alpha_2 - \alpha_1 q_2^2)\operatorname{ctg} q_2}\, dq_2 + 2\alpha_3 q_3.$

24.57. $S = -\alpha_1 t + \int \sqrt{2(\alpha_1 - \alpha_2 \cos q_1)} q_1^2 \, dq_1 + \int \sqrt{2(\alpha_2 - q_2^2) \sin q_2} \, dq_2.$

24.58. $S = -\dfrac{\alpha_1 t}{2} + \int \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2 \cos q_1) \operatorname{tg} q_1} \, dq_1 + \int \sqrt{\alpha_2 \cos q_2} \, dq_2.$

24.59. $S = -(\alpha_1 + \alpha_2)t + \int \sqrt{2\alpha_1 - q_1^2} \, dq_1 + \int \sqrt{(2\alpha_2 - q_2^2) \sin q_2} \, dq_2.$

24.60. $q_i = \beta_i - \int \dfrac{\partial \Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, t)}{\partial \alpha_i} \, dt, \;\; p_i = \alpha_i \quad (i = \overline{1, n}).$

24.61. $S = -\int H_1(q, t) \, dt + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i q_i.$

24.62. $q_i = \beta_i - \sum\limits_{i=1}^{n} \int a_{ij}(t) \left(\int \varphi_j(t) \, dt - \alpha_j \right) dt, \;\; p_i = \alpha_i - \int \varphi_i(t) \, dt \quad (i = \overline{1, n}).$

24.63. Используя результат задачи 24.62, находим

$$q_i = \beta_i + \frac{1}{m} \int \left(\int F_i(t) \, dt \right) dt + \alpha_i t \quad (i = \overline{1, 2}),$$

$$q_3 = \beta_3 + \frac{1}{m} \int \left(\int F_3(t) \, dt \right) dt + \alpha_3 t - \frac{1}{2} g t^2;$$

$$p_i = \alpha_i + \int F_i(t) \, dt \quad (i = \overline{1, 2}), \quad p_3 = \alpha_3 - mgt + \int F_3(t) \, dt.$$

24.64. $S = -\sum\limits_{i=1}^{n} q_i \int \varphi_i(t) \, dt + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i q_i + \psi(t, \alpha),$

где $\psi(t, \alpha) = -\dfrac{1}{2} \int \left[\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t) \left(\int \varphi_i(t) \, dt - \alpha_i \right) \left(\int \varphi_j(t) \, dt - \alpha_j \right) \right] dt +$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int \left(\int \varphi_i(t) \, dt - \alpha_i \right) f_i(t) \, dt.$$

24.65. $q_i = \sqrt{\alpha_i} \, \sin \gamma_i(t), \;\; p_i = \sqrt{\alpha_i} \, \cos \gamma_i(t)$, где $\gamma_i(t) = 2 \int \psi_i(t) \, dt + \beta_i \quad (i = \overline{1, n}).$

24.66. $S = -\int F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, t) \, dt + \sum\limits_{i=1}^{n} \int \psi_i(q_i, \alpha_i) \, dq_i.$

24.67. $S = -\int F(\alpha_n, t) \, dt + \int \varphi_1(q_1, \alpha_1) \, dq_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \int \varphi_k(q_k, \alpha_k, \alpha_{k-1}) \, dq_k.$

24.68. $S = -ht + \sum\limits_{i=1}^{n} \int \sqrt{2A_i(q_i)(\alpha_i + hB_i(q_i) - C_i(q_i))} \, dq_i, \;\; \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 0.$

24.70. $S = -ht + \sum\limits_{k=1}^{n} \int \left[B_k(q_k) + \sqrt{A_k(q_k)(\alpha_k + C_k(q_k) + 2hF_k(q_k))} \right] dq_k,$

$\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 0.$

24.71. $-\dfrac{\partial S}{\partial t} + \widetilde{H}(\widetilde{q}_i, -\dfrac{\partial S}{\partial \widetilde{q}_i}, t) = 0.$

24.72. $S(q_i, \alpha_i, t) = S_0(q_i, \alpha_i, t) - F(q_i, t)$.

24.74. Искомое множество преобразований определяется совокупностью производящих функций $\{(\lambda/c)S(q, \tilde{q}, t)\}$.

24.75. В качестве функций $\varphi_i(\alpha_j, t)$ следует взять общее решение системы уравнений $d\varphi_i/dt = -\Phi_i(\varphi_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$, а в качестве $f(\alpha_j, t)$ — функцию $f(\alpha_j, t) = -\int F(\varphi_i(\alpha_j, t), t)\, dt$.

24.77. $$\frac{\partial R}{\partial t} + H\left(-\frac{\partial R}{\partial p_i}, p_i, t\right) = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = 0,$$
$$\frac{\partial U}{\partial t} + H\left(-\frac{\partial U}{\partial p_i}, p_i, t\right) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}, t\right) = 0.$$

24.78. $$\frac{\partial R}{\partial t} + H\left(-\frac{\partial R}{\partial p_i}, p_i, t\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[\tilde{q}_i^{\,2} + \left(\frac{\partial R}{\partial \tilde{q}_i}\right)^2\right],$$
$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[\tilde{q}_i^{\,2} + \left(\frac{\partial S}{\partial \tilde{q}_i}\right)^2\right],$$
$$\frac{\partial U}{\partial t} + H\left(-\frac{\partial U}{\partial p_i}, p_i, t\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[\tilde{p}_i^{\,2} + \left(\frac{\partial U}{\partial \tilde{p}_i}\right)^2\right],$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}, t\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[\tilde{p}_i^{\,2} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{p}_i}\right)^2\right].$$

24.79. $U(p, h, t) = -ht + \dfrac{1}{\sqrt{mc}}\displaystyle\int \sqrt{2mh - p^2}\, dp$.

24.80. $U(p_j, \alpha_j, t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\left[\alpha_i p_i - \left(\frac{p_i^2}{2m}\right)t\right] \quad (j = \overline{1, 3})$.

24.81. $U(p, h, t) = -ht + \dfrac{1}{m\omega}\displaystyle\int \sqrt{p^2 - 2mh}\, dp$.

24.82. $U(p_j, \alpha_j, t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i p_i - G(p_1, \ldots, p_n)t \quad (j = \overline{1, n})$.

24.83. $U(p_j, \alpha_j, t) = -\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i p_i - F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)t$.

24.84. $H = -f(t)\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i^2 f_i(q_i)\left[\sum_{i=1}^{n} p_i^2 \psi_i(q_i)\right]^{-1}$.

24.85. $H = f(t)\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(p_i^2 + f_i(q_i))\left[\sum_{i=1}^{n}\psi_i(q_i)\right]^{-1}$.

24.86. $H = f(t)\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k^2}{\psi_k(q_k)}\prod_{i=1}^{k}\frac{\psi_i(q_i)}{f_i(q_i)}$.

24.87. $H = f(t)\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i^2}{f_i(q_i)}$.

24.88. $H = f(t)\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{p_i^2}{f_i(q_i)}$.

24.89. $H = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(p_i^2 + q_i\dfrac{\partial f_i(t)}{\partial t}\right)$.

24.90. Запишем производные $\dfrac{\partial S_1}{\partial \theta_k} = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial S}{\partial q_i}\right)_{\mathbf{q}=\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta},t)}\dfrac{\partial f_i}{\partial \theta_k}$ так:

$\dfrac{\partial S_1}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \left(\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)^{\mathrm{T}}\left(\dfrac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}\right)_{\mathbf{q}=\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta},t)}$, где $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \left[\dfrac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \boldsymbol{\theta}_k}\right]_{i,k=1}^{n}$ и $\dfrac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} = \left[\dfrac{\partial S}{\partial q_k}\right]_{k=1}^{k=n}$.

Частная производная функции S_1 по времени равна

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_{\mathbf{q}=\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta},t)} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)_{\mathbf{q}=\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta},t)}\frac{\partial f_i}{\partial t}.$$

В силу исходного уравнения и равенства

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}\right)_{\mathbf{q}=\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta},t)} = \left(\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\frac{\partial S_1}{\partial \boldsymbol{\theta}}$$

имеем

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} - \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}, \left(\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\frac{\partial S_1}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right) + H\left(\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta},t), \left(\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\frac{\partial S_1}{\partial \boldsymbol{\theta}}, t\right) = 0$$

(здесь $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum\limits_{i=1}^{3} x_i y_i$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$). Полученное уравнение является уравнением Гамильтона–Якоби для системы с гамильтонианом

$$H_1(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}_{\boldsymbol{\theta}}, t) = H\left(\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}), \left(\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_{\boldsymbol{\theta}}, t\right) - \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}, \left(\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_{\boldsymbol{\theta}}\right).$$

24.91. Точечному преобразованию $\mathbf{q} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}, t)$ соответствует унивалентное каноническое преобразование $\mathbf{q} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}, t)$, $\mathbf{p}_{\mathbf{q}} = \left(\left(\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_{\boldsymbol{\theta}}$ с производящей функцией F, зависящей только от времени. Так как из тождества $\mathbf{q} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{q}, t), t)$ следует, что $\dfrac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial t} = -\left(\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)^{-1}\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}$, из закона преобразования гамильтониана $\widetilde{H} = cH + \dfrac{\partial F}{\partial t} + \left(\widetilde{\mathbf{p}}, \dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{q}}}{\partial t}\right)$ получаем

$$H_1 = H\left(\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}, t), \left(\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_{\boldsymbol{\theta}}, t\right) - \left(\mathbf{p}_{\boldsymbol{\theta}}, \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)^{-1}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\right).$$

24.93. $S = -\varphi(f(\alpha))t + V(q_k, \alpha_i)$.

24.95. Производящая функция $S(q_i, \widetilde{q}_i, t)$ определяет преобразование $\dfrac{\partial S}{\partial q_i} = p_i$, $\dfrac{\partial S}{\partial \widetilde{q}_i} = -\widetilde{p}_i$ $(i = \overline{1,n})$. Поскольку $\left|\dfrac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \widetilde{q}_j}\right|_{i,j=1}^{n} \neq 0$, эти уравнения разрешимы относительно p_i и q_i, т. е. позволяют найти формулы преобразования

$q_i = q_i(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t)$, $p_i = p_i(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t)$ $(i, j = \overline{1, n})$, переводящего исходную гамильтонову систему в систему с гамильтонианом

$$\widetilde{H} = \frac{\partial S(q_i(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t), \widetilde{q}_i, t)}{\partial t} + H_1(q_i(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t), p_i(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t)) + \\ + H_2(q_i(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t), p_i(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t)).$$

Так как $S(q_i, \widetilde{q}_i, t)$ — полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби $\dfrac{\partial S}{\partial t} + H_1\left(q_j, \dfrac{\partial S}{\partial q_i}\right) = 0$, получаем $\widetilde{H} = H_2(q_i(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t), p_i(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t))$, откуда

$$\dot{\widetilde{q}}_i = \frac{\partial H_2(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t)}{\partial \widetilde{p}_i}, \quad \dot{\widetilde{p}}_i = -\frac{\partial H_2(\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j, t)}{\partial \widetilde{q}_i}, \quad (i, j = \overline{1, n}).$$

24.96. $q = \exp\left(\int f(t)\,dt\right)\left[c + \int \psi(t) \exp\left(-\int f(t)\,dt\right) dt\right]$, $p = \exp\left(-\int f(t)\,dt\right) c_1$.

24.97. $q = \exp\left(\int f(t)\,dt\right)\left\{\left[c_2 - \int \psi(t) \exp\left((n-1)\int f(t)\,dt\right) dt\right](n-1)\right\}^{-1/(n-1)}$,

$$p = c_1(n-1)\exp\left(-\int f(t)\,dt\right)\left[c_2 - \int \psi(t)\exp\left((n-1)\int f(t)\,dt\right) dt\right]^{n/(n-1)}.$$

24.98. $q = \exp\left(\int f(t)\,dt - c\right)$,

$$p = \exp\left(c - \int f(t)\,dt\right)\left[c_1 - ne^{-nc}\int \psi(t)\exp\left(n\int f(t)\,dt\right) dt\right].$$

24.99. Функция $S(q_j, \widetilde{q}_j, t)$ определяет свободное унивалентное преобразование $\widetilde{q}_i = f_i(q_j, p_j, t), \widetilde{p}_i = F_i(q_j, p_j, t)$. При помощи скобок Пуассона условия каноничности этого преобразования могут быть записаны так: $(f_i, f_k) = 0, (F_i, F_k) = 0, (f_i, F_k) = \delta_{ik}$ $(i, k = \overline{1, n})$, где δ_{ik} — символ Кронекера. Требуемый результат вытекает из первых n соотношений.

24.100. Из условия задачи следуют тождества

$$f_i(q_j, F_j(q_k, \alpha_k, t), t) \equiv \alpha_i \quad (i, j, k = \overline{1, n});$$

продифференцируем их по q_k:

$$\left.\frac{\partial f_i}{\partial q_k}\right|_{p=F} + \sum_{l=1}^{n} \left.\frac{\partial f_i}{\partial p_l}\right|_{p=F} \frac{\partial F_l}{\partial q_k} = 0. \tag{1}$$

Равенства $F_i = \dfrac{\partial S}{\partial q_i}$ эквивалентны условиям

$$\frac{\partial F_i}{\partial q_k} - \frac{\partial F_k}{\partial q_i} = 0 \quad (i, k = \overline{1, n}). \tag{2}$$

Из (1) выразим $\dfrac{\partial f_i}{\partial q_k}$ и подставим в скобки Пуассона, что даст

$$(f_i, f_j) = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial p_l}\frac{\partial f_j}{\partial p_k}\left(\frac{\partial F_k}{\partial q_l} - \frac{\partial F_l}{\partial q_k}\right).$$

Отсюда в силу невырожденности матрицы $\left[\dfrac{\partial f_i}{\partial p_j}\right]_{i,j=1}^{n}$ следует (2), если скобки Пуассона равны нулю. Обратно, если имеет место (2), то скобки Пуассона равны нулю.

24.101. Из соотношений $f_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \alpha_i$ $(i = \overline{1, n})$ находим, что $p_i = F_i(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)$. Используя решение задачи 24.99, получаем, что в условиях данной задачи существует функция $S_0(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)$ такая, что

$$p_i = F_i(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t) = \frac{\partial S_0(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial q_i}, \quad \det\left(\frac{\partial^2 S_0}{\partial q_i \partial \alpha_k}\right)_{i,k=1}^{n} \neq 0. \tag{1}$$

Соотношениям (1) наряду с функцией $S_0(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)$ будут удовлетворять также функции $S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)$ вида

$$S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t) = S_0(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t) + S_1(\boldsymbol{\alpha}, t), \tag{2}$$

где $S_1(\boldsymbol{\alpha}, t)$ — произвольная функция переменных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и t. Из уравнения Гамильтона–Якоби с полный интегралом $S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)$ получим

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S_0}{\partial t} + \frac{\partial S_1}{\partial t} = -\varphi_0(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t) - \varphi_1(\boldsymbol{\alpha}, t), \quad \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial S_0}{\partial q_i} = F_i(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t). \tag{3}$$

Из последних n соотношений находим $\alpha_i = f_i\left(q_j, \dfrac{\partial S}{\partial q_j}, t\right)$, и после подстановки в 1-е соотношение (3) приходим к уравнению Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \varphi_0\left(q_i, f_i\left(q_j, \frac{\partial S}{\partial q_j}, t\right), t\right) + \varphi_1\left(f_i\left(q_j, \frac{\partial S}{\partial q_j}, t\right), t\right) = 0.$$

Следовательно, гамильтониан H системы равен

$$H = \varphi_0[\mathbf{q}, \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t] + \varphi_1[\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t],$$

где $\varphi_1(\alpha, t)$ — произвольная функция.

24.102. $W = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2(t - t_0)} \left[(x_i - x_{i0})^2 + (y_i - y_{i0})^2 + (z_i - z_{i0})^2\right].$

24.103. $W = \dfrac{m}{2(t - t_0)} \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - \right.$

$$\left. - g(z + z_0)(t - t_0)^2\right] - \frac{mg^2}{24}(t - t_0)^3.$$

24.104. $W = \dfrac{m\omega}{2\sin\omega(t - t_0)} \left[\left(x^2 + x_0^2\right)\cos\omega(t - t_0) - 2xx_0\right].$

24.105. $W = \dfrac{m\omega}{2\operatorname{sh}\omega(t - t_0)} \left[\left(x^2 + x_0^2\right)\operatorname{ch}\omega(t - t_0) - 2xx_0\right].$

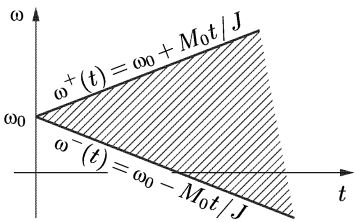
24.107. $\widetilde{H}(\lambda, \mu) = f_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\dot{\lambda}_i = 0$, $\dot{\mu}_i = -\dfrac{\partial f_n}{\partial \lambda_i}$ $\quad (i = \overline{1, n})$

24.109. $I = \dfrac{p^2}{2m\omega} + \dfrac{cq^2}{2\omega}$, $\varphi = -\arcsin\sqrt{\dfrac{mcq^2}{p^2 + mcq^2}}.$

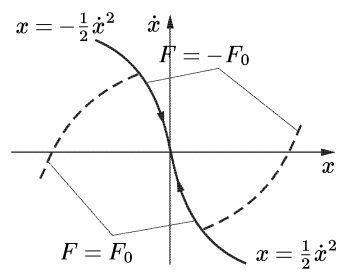
24.110. $H = -\dfrac{m\gamma^2}{2(I_\varphi + I_\theta + I_r)^2}.$

§ 25. Методы оптимального управления в задачах механики

25.2.



25.4.



25.5. Если ось Ox направлена по вертикали вверх, то

$$\widetilde{F}(t) = \begin{cases} -F_0, & 0 \leqslant t < \tau_1, \\ F_0, & \tau_1 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \quad \text{где } \tau_1 = \sqrt{\frac{2mH}{F_0 + mg}},\ T = \frac{2F_0\tau_1}{F_0 - mg}.$$

25.6.
$$\widetilde{F}(t) = \begin{cases} F_0, & 0 \leqslant t \leqslant \pi\sqrt{\dfrac{m}{c}}, \\ -F_0, & \pi\sqrt{\dfrac{m}{c}} < t \leqslant 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{c}}, \\ F_0, & 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{c}} < t \leqslant 3\pi\sqrt{\dfrac{m}{c}}. \end{cases}$$

25.7. Начальное отклонение x_0 от положения равновесия и начальная скорость $\dot{x}_0$ должны удовлетворять соотношениям

а) $z\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{\mu}{\beta}\ln\dfrac{\sqrt{z^2+\mu^2\dot{x}_0^2}}{2F_0}\right) = \mu\dot{x}_0,\ |x_0| \leqslant \dfrac{F_0}{c}[1+e^{(\beta/\mu)\pi}]$;

б) $(z+\mu\dot{x}_0)^{\beta-\mu}F_0^{2\mu} = (z-\mu\dot{x}_0)^{\beta+\mu}$;

в) $z\ln\dfrac{|z|}{2F_0} = \beta\dot{x}_0$, где $z = \beta\dot{x}_0 - 2cx_0 \pm 2F_0$, $\mu = \sqrt{|4mc-\beta^2|}$.

25.8. а) $t = \sqrt{\dfrac{2mlP}{(P-R)R}}, \quad v_{\max} = \sqrt{\dfrac{2Rl(P-R)}{mP}}$;

б) $t = \sqrt{\dfrac{4mlP}{P^2-R^2}}, \quad v_{\max} = \sqrt{\dfrac{(P^2-R^2)l}{mP}}$.

25.9. Задача сводится к рассмотрению одномерного осциллятора массы M под действием пружины жесткости $(2+M/m)c$.

25.12. $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t_0} + \min\limits_{\{v_i\}}\left\{L(q_i^0, v_i, t_0) + \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial\varphi}{\partial q_i^0}v_i\right\} = 0$, причем $\varphi(\mathbf{q}^0, T) = 0$.

§ 26. Уравнения механики неголономных систем

26.1. Непосредственно или рассуждениями, используемыми при выводе уравнений Лагранжа 2-го рода, можно показать, что при любых зависимостях $q_k = q_k(t)$ $(k = \overline{1, n})$ справедливы тождества (по времени)

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(m_i\ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i)\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}\right]_{r_i = r_i(\mathbf{q},\, t)} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k\right).$$

Из этих тождеств после несложных преобразований вытекает соотношение (1). Ответ на второй вопрос отрицательный, поскольку виртуальные перемещения δq_k не являются независимыми. Так в случае линейных кинематических связей $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{sk}(q, t)\dot{q}_k + a_{s0}(q, t) = 0$ виртуальные перемещения удовлетворяют системе линейных соотношений $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{sk}(q, t)\,\delta q_k = 0,\ \ s = \overline{1, d}.$

26.2. Система уравнений движения имеет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k + \sum_{\nu=1}^{d} a_{\nu k}(q, t)\lambda_\nu, \quad k = \overline{1, n},$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{s\nu}\dot{q}_\nu + a_{s0} = 0, \quad s = \overline{1, d}.$$

Эта система относительно $(n + d)$ переменных запишется в виде $\{q_1, \ldots$ $\ldots, q_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_d\}$.

26.7. $\dot{q}_i = \dfrac{\partial \widehat{T}}{\partial p_i},\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial \widehat{T}}{\partial q_i} + Q_i,\ \widehat{T} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}p_ip_j.$

26.8. $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \dfrac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \lambda l_j,\ \sum\limits_{j=1}^{n} l_j\dot{q}_j = 0, \quad i = \overline{1, n}.$

26.9. $\dfrac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} = \widetilde{Q}_i,\ \dot{q}_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{n} l_iq_i.$

26.10. $A\dot{\omega}_1 + (C - B)\omega_2\omega_3 = M_1 + \lambda a_1,\ \ B\dot{\omega}_2 + (A - C)\omega_3\omega_1 = M_2 + \lambda a_2,$
$C\dot{\omega}_3 + (B - A)\omega_1\omega_2 = M_3 + \lambda a_3.$

26.12. $\sum\limits_i m_i\dot{\mathbf{v}}_ia_{is} = Q_s,\ \sum\limits_i \mathbf{l}_{\nu i}\mathbf{v}_i = 0$, где $Q_s = \sum F_ia_{is}.$

26.13. $\sum\limits_i a_{is}\dot{K}_i = \sum a_{is}M_i,\ \sum \mathbf{l}_{\nu i}\boldsymbol{\omega}_i = 0.$

26.14. а) $m\ddot{x} = -\dfrac{2T}{a^2}x,\ m\ddot{y} = -\dfrac{2T}{a^2}y,\ m\ddot{z} = -\dfrac{2T}{a^2}z;$

б) $m\ddot{x} = 2\lambda x,\ m\ddot{y} = 2\lambda y,\ m\ddot{z} = -2\lambda z,\ \lambda = \dfrac{T - m\dot{z}^2}{a^2 + 2z^2};$

в) $m\ddot{x} = 4\lambda x,\ \ m\ddot{y} = 4\lambda y,\ \ m\ddot{z} = -2\lambda a,\ \ \lambda = \dfrac{m\dot{z}^2 - 2T}{a^2 + 4az};$

г) $m\ddot{x} = -\dfrac{2T}{a^2}x,\ \ m\ddot{y} = -\dfrac{2T}{a^2}y,\ \ m\ddot{z} = 0.$

26.15. а) $m\ddot{x} = -\dfrac{2T}{a^2}x,\ \ m\ddot{y} = -\dfrac{2T}{a^2}y,\ \ m\ddot{z} = -\dfrac{2T}{a^2}z;$

б) $m\ddot{x} = \lambda_1 2x + \lambda_2\alpha,\ \ m\ddot{y} = \lambda_1 2y + \lambda_2\beta,\ m\ddot{z} = \lambda_2\gamma,$

$\lambda_1 = \dfrac{m\dot{z}^2 - 2T}{2(1-\gamma^2 z^2)},\ \ \lambda_2 = \dfrac{m\dot{z}^2 - 2T}{1-\gamma^2 z^2}\gamma z.$

26.16. $m\ddot{x}_C = F_x + \lambda_1,\ \ m\ddot{y}_C = F_y + \lambda_2,$

$A\dot{p} + (C - B)qr = M_1 - \lambda_1\alpha_{12}R + \lambda_2\alpha_{11}R,$

$B\dot{q} + (A - C)pr = M_2 - \lambda_1\alpha_{22}R + \lambda_2\alpha_{21}R,$

$C\dot{r} + (B - A)qp = M_3 - \lambda_1\alpha_{32}R + \lambda_2\alpha_{31}R,$

$\dot{x}_C - (p\alpha_{12} + q\alpha_{22} + r\alpha_{32})R = 0,\ \ \dot{y}_C + (p\alpha_{11} + q\alpha_{21} + r\alpha_{31})R = 0.$

К этим уравнениям следует добавить уравнения кинематики.

26.17. $A\dot{\omega}_1\lambda_0 - B\dot{\omega}_2\lambda_3 + C\dot{\omega}_3\lambda_2 - mr\left(\dot{\tilde{\omega}}_2\lambda_3 - \dot{\tilde{\omega}}_1\lambda_0\right) = 2\varkappa\lambda_1,$

$A\dot{\omega}_1\lambda_3 + B\dot{\omega}_2\lambda_0 - C\dot{\omega}_3\lambda_1 - mr\left(\dot{\tilde{\omega}}_2\lambda_0 + \dot{\tilde{\omega}}_1\lambda_3\right) = 2\varkappa\lambda_2,$

$-A\dot{\omega}_1\lambda_2 + B\dot{\omega}_2\lambda_1 + C\dot{\omega}_3\lambda_0 + mr\left(\dot{\tilde{\omega}}_2\lambda_1 - \dot{\tilde{\omega}}_1\lambda_2\right) = 2\varkappa\lambda_3,$

$-A\dot{\omega}_1\lambda_1 - B\dot{\omega}_2\lambda_2 - C\dot{\omega}_3\lambda_3 + mr\left(\dot{\tilde{\omega}}_2\lambda_2 - \dot{\tilde{\omega}}_1\lambda_1\right) = 2\varkappa\lambda_0,$

где $\dot{\tilde{\omega}}_1 = 2(\lambda_0\ddot{\lambda}_1 - \lambda_1\ddot{\lambda}_0 + \lambda_2\ddot{\lambda}_3 - \lambda_3\ddot{\lambda}_2),\ \ \dot{\tilde{\omega}}_2 = 2(\lambda_0\ddot{\lambda}_2 - \lambda_2\ddot{\lambda}_0 + \lambda_3\ddot{\lambda}_1 - \lambda_1\ddot{\lambda}_3).$

26.18. Центр конька движется по окружности радиуса $R = v/\dot{\varphi}$, угловая скорость конька $\dot{\varphi} = \mathrm{const},\ \ N = mv\dot{\varphi}$.

26.19. Траектория центра диска — окружность радиуса $R = v/\dot{\psi}$, угловая скорость поворота плоскости $\dot{\psi} = \mathrm{const},\ \ N = mv\dot{\psi}$.

26.20. $4A(\lambda_0\ddot{\lambda}_1 - \ddot{\lambda}_0\lambda_1) - 2mr\left[\ddot{x}\left(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\right) + \ddot{y}\left(\lambda_0^2 - \lambda_1^2\right)\right] = 0,$

$4A(\lambda_0\ddot{\lambda}_2 - \ddot{\lambda}_0\lambda_2) - 2mr\left[\ddot{x}\left(\lambda_0^2 + \lambda_2^2\right) + \ddot{y}\left(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3\right)\right] = 0,$

$4A(\lambda_0\ddot{\lambda}_3 - \ddot{\lambda}_0\lambda_3) - 2mr\left[\ddot{x}\left(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1\right) + \ddot{y}\left(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3\right)\right] = 0,$

$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1,$

$\dot{x} + 2r(\lambda_0\dot{\lambda}_2 - \lambda_2\dot{\lambda}_0 + \lambda_3\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{\lambda}_3) = 0,$

$\dot{y} - 2r(\lambda_0\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{\lambda}_0 + \lambda_2\dot{\lambda}_3 - \lambda_3\dot{\lambda}_2) = 0,$

где λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 — параметры Родрига–Гамильтона.

26.21. $-10r\ddot{\theta} + 5r\dot{\varphi}^2\sin 2\theta + 12r\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta + 8g\sin\theta = 0,$

$\ddot{\varphi}\cos\theta + 2\dot{\theta}\dot{\psi} = 0,\ 3(\ddot{\varphi}\sin\theta + \ddot{\psi}) + 5\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta = 0.$

26.22. Скорость центра оси $v = \mathrm{const}$, угловая скорость оси $\dot{\varphi} = \mathrm{const}$.

26.23. В сферических координатах

$\omega_n = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{e}_n = \mathrm{const},\ \ J\omega_n\cos\theta + (J + mr^2)\omega_\theta\sin\theta = \mathrm{const},$

$[J + m(R-r)^2](\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + J\omega_n^2 + 2mg(R-r)(1-\cos\theta) = \mathrm{const},$

где $\omega = \sqrt{\dfrac{(R-r)^2}{r^2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + \omega_n^2}$ — угловая скорость шара.

26.24. В сферических координатах

$$\omega_n = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{e}_n = \text{const},\ \ (J+mr^2)\omega_\rho\cos\alpha + J\omega_n\sin\alpha = \text{const},$$

$$J\omega^2 + m(\dot\rho^2+\rho^2\dot\varphi^2\sin^2\alpha) + 2mg(\rho\cos\alpha + r\sin\alpha) = \text{const},$$

где $\omega = \sqrt{(\dot\rho^2+\rho^2\dot\varphi^2\sin^2\alpha)/r}$ — угловая скорость шара.

26.25. Тела совершают регулярную прецессию с одинаковыми угловыми скоростями собственного вращения.

§ 27. Устойчивость движения

27.1. $\dot x = \dfrac{B-C}{A}yz,\ \ \dot y = \dfrac{C-A}{B}(p_0+x)z,\ \ \dot z = \dfrac{A-B}{C}(p_0+x)y.$

27.15. Решение задачи основано на решении дифференциального неравенства $\dot v \leqslant (c/b)v$, которое вытекает из условия задачи.

27.16. Рассмотрим линейную стационарную систему $\dot x = P_0 x$, где P_0 — гурвицева матрица. Для этой системы существует функция Ляпунова $v = \sum\limits_{i,k=1}^{n} c_{ik}x_ix_k$ с отрицательно определенной производной в силу системы $\dot x = P_0x$. Эта функция рассматривается для системы $\dot x = P(t)x$. Из анализа $\dot v$ в силу $\dot x = P(t)x$ получается утверждение задачи.

27.37. Если через λ_i обозначить собственные числа матрицы A, то совокупность всех собственных чисел Λ_s задается выражением $\{\lambda_i+\lambda_j,\, i,j=\overline{1,n}\}$. Все собственные функции $u(t)$ получаются как всевозможные попарные произведения собственных функций оператора $\mathbf{L}\{v(x)\}$ в пространстве линейных форм.

27.38. Полная совокупность собственных чисел Λ_m определяется выражениями $\sum m_k\lambda_k$, где m_k — произвольные неотрицательные числа, для которых $\sum m_k = m$. Соответствующие собственные функции $u_m(x)$ оператора $\mathbf{L}\{v(x)\}$ получаются как произведения вида $\{u_1^{m_1}(x)u_2^{m_2}(x)\ldots u_n^{m_n}(x)\}$, где через $u_j(x)$ обозначены собственные функции оператора $\mathbf{L}\{v(x)\}$ в пространстве линейных форм.

27.44. Кривая на фазовой плоскости $p^2+\omega^2q^2 = p_0^2+\omega^2q_0^2$.

27.45. Ω-предельное множество решения $X(x_0,t)$ состоит из одной точки $x=0$.

§ 28. Дискретные модели механических систем

28.1. $E_s = (1+h^2)^sE_0$.

28.2. $V_s = (1+h^2)^sV_0,\ \ s=0,1,2,\ldots$

28.3. $\sigma+\lambda=1$.

28.4. $\sigma=\lambda=1/2$.

28.5. $\dfrac{\partial L_k}{\partial\dot q_i} - \dfrac{\partial L_{k-1}}{\partial\dot q_i} - L_k\dfrac{\partial L_k}{\partial q_i} = 0$, где $L_k = L\left(t_k, q_k, \dfrac{q_{k+1}-q_k}{h_k}\right),\ \ h_k = t_{k+1}-t_k$.

28.6. $q_{k+1} = q_k + hy_k, y_{k+1} = -hq_k + (1-h^2)y_k, k=0,1,2\ldots$

28.8. Не сохраняется.

28.9. $m(x_{k+1}-2x_k+x_{k-1})+h^2\alpha x_k\left(x_k^2+y_k^2\right)^{-3/2}=0,$

$m(y_{k+1}-2y_k+y_{k-1})+h^2\alpha y_k\left(x_k^2+y_k^2\right)^{-3/2}=0.$

28.10. $m(r_{k+1}-2r_k+r_{k-1})-mr_k(\varphi_{k+1}-\varphi_k)+h\alpha/r_k^2=0,$

$mr_k^2(\varphi_{k+1}-2\varphi_k+\varphi_{k-1})=0.$

28.11. $\dfrac{\partial\widetilde{L}_k}{\partial x_i'}-\dfrac{\partial\widetilde{L}_{k-1}}{\partial x_i'}-h\dfrac{\partial\widetilde{L}_k}{\partial x_i}=0$, где $x=(x_0,\ldots,x_n)=(t,q_1,\ldots,q_n)$,

$\widetilde{L}_k=L\left(t_k,\,q_k,\,\dfrac{q_{k+1}-q_k}{t_{k+1}-t_k}\right)\dfrac{t_{k+1}-t_k}{h}.$

28.12. $\dfrac{q_{k+1}-q_k}{h_{k+1}}-\dfrac{q_k-q_{k-1}}{h_k}+q_kh_{k+1}=0,$

$\left(\dfrac{q_{k+1}-q_k}{h_{k+1}}\right)^2-\left(\dfrac{q_k-q_{k-1}}{h_k}\right)^2+q_k^2-q_{k-1}^2=0$, где $h_k=t_k-t_{k-1}$.

Список литературы

1. *Айзерман М.А.* Лекции по классической механике. — 2-е изд., перераб. — М.: Наука, 1980.
2. *Андронов А.А.*, *Витт А.А.*, *Хайкин С.Э.* Теория колебаний. — 2-е изд. — М.: Физматгиз, 1959.
3. *Аппель П.* Теоретическая механика: Пер. с франц. — Т. I, т. II. — М.: Физматгиз, 1960.
4. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. — 2-е изд., стереотип. — М.: Наука, 1979.
5. *Архангельский Ю.А.* Аналитическая динамика твердого тела. — М.: Наука, 1977.
6. *Балк М.Б.*, *Демин В.Г.*, *Куницын А.Л.* Сборник задач по небесной механике и космодинамике. — М.: Наука, 1972.
7. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. — М.: Наука, 1965.
8. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. — М.: Изд. МГУ, 1975.
9. *Беллман Р.* Динамическое программирование: Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1960.
10. *Биркгоф Дж.Д.* Динамические системы: Пер. с англ. — М.: Гостехиздат, 1941; — Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.
11. *Боголюбов Н.Н.*, *Митропольский Ю.А.* Асимптотические метода в теории нелинейных колебаний. — М.: Физматгиз, 1963.
12. *Бражниченко Н.Л.*, *Кан В.Л.*, *Минцберг Б.Л.*, *Морозов В.И.* Сборник задач по теоретической механике. — Л.: Судпромгиз, 1962.
13. *Булгаков Б.В.* Колебания. — М.: Гостехиздат, 1954.
14. *Бутенин Н.В.* Введение в аналитическую механику. — М.: Наука, 1971.
15. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. В 2-х частях. — М.: Наука, 1972.
16. *Бухгольц Н.Н.*, *Воронков И.М.*, *Минаков А.П.* Сборник задач по теоретической механике. — М.; Л.: Гостехиздат, 1949.
17. Вариационные принципы: Сборник статей / Под ред. Л.С. Полака. — М.: Физматгиз, 1959.
18. *Валле Пуссен Ш.-Ж.* Лекции по теоретической механике: Пер. с франц. — В 2-х томах. — М.: ИЛ, т. I, 1948; т. II, 1949.
19. *Веселовский И.Н.* Сборник задач по теоретической механике. — М.: Гостехиздат, 1955.
20. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — 3-е изд. — М.: Наука, 1967.
21. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. — 2-е изд., исправл. — М.: Наука, 1966.
22. *Гантмахер Ф.Р.*, *Крейн М.Г.* Осцилляционные матрицы, ядра и малые колебания механических систем. — 2-е изд. — М.: Гостехиздат, 1950.
23. *Голубев В.В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. — М.: Гостехиздат, 1953.

24. *Голдстейн Г.* Классическая механика: Пер. с англ. — 2-е изд. — М.: Наука, 1975.
25. *Демин В.Г.* Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. — М.: Наука, 1968.
26. *Ден-Гартог Дж. П.* Механические колебания: пер. с англ. — М.: Физматгиз, 1960.
27. *Жуковский Н.Е.* Теоретическая механика. — М.; Л.: Гостехиздат, 1952.
28. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. — М.: Наука, 1997.
29. *Зоммерфельд А.* Механика / Пер. с нем. — М.: ИЛ, 1947.
30. *Идельсон Н.И.* Этюды по истории небесной механики. — М.: Наука, 1975.
31. *Картан Э.* Интегральные инварианты / Пер. с англ. — М., Л.: Гостехиздат, 1952.
32. *Козлов В.В.* Симметрии топология и резонансы в гамильтоновой механике. — Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. ун-та, 1995.
33. *Колесников К.С.*, *Блюмин Г.Д.*, *Дронг В.И.*, *Дубинин В.В.*, *Ильин М.М.*, *Огурцов А.И.*, *Пожалостин А.А.*, *Саратов Ю.С.* Сборник задач по теоретической механике. — 2-е изд. — М.: Наука, 1989.
34. *Коткин Г.Л.*, *Сербо В.Г.* Сборник задач по классической механике. — 2-е изд., исправл. — М.: Наука, 1977.
35. *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. — М.: Наука, 1965.
36. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Физматгиз, 1959.
37. *Лагранж Ж.Л.* Аналитическая механика / Пер. с франц. В 2-х томах. — М.: Гостехиздат, 1950.
38. *Ландау Л.Д.*, *Лифшиц Е.М.* Механика. — 3-е изд. — М.: Наука, 1973.
39. *Ландау Л.Д.*, *Лифшиц Е.М.* Теория поля. — М.: Наука, 1973.
40. *Ланцош К.* Вариационные принципы механики / Пер. с англ. — М.: Мир, 1965.
41. *Леви-Чивита Т.*, *Амальди У.* Курс теоретической механики / Пер. с итал. — В 2-х томах. — М.: ИЛ, 1951.
42. *Лич Дж. У.* Классическая механика / Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1961.
43. *Лойцянский Л.Г.*, *Лурье А.И.* Курс теоретической механики. — В 2-х частях. — М.: Гостехиздат, 1955.
44. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961.
45. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. — М.: Гостехиздат, 1950.
46. *Магнус К.* Гироскоп: теория и применение / Пер. с нем. — М.: Мир, 1974.
47. *Мак-Миллан В.Д.* Динамика твердого тела / Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1951.
48. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. — М.: Наука, 1990.
49. *Мещерский И.В.* Работы по механике тел переменной массы. — М.: Гостехиздат, 1952.
50. *Мещерский И.В.* Сборник задач по теоретической механике. — 34-е изд. — М.: Наука, 1975.
51. *Неймарк Ю.И.*, *Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. — М.: Наука, 1967.

52. *Ольховский И.И.* Курс теоретической механики для физиков. — 2-е изд., перераб. и дополн. — М.: Изд-во Московск. ун-та, 1974.
53. *Ольховский И.И.*, *Павленко Ю.Г.*, *Кузьменков Л.С.* Задачи по теоретической механике для физиков. — М.: Изд-во Московск. ун-та, 1977.
54. *Парс Л.А.* Аналитическая динамика: Пер. с англ. — М.: Наука, 1971.
55. *Поляхов Н.Н.*, *Зегжда С.А.*, *Юшков М.П.* Теоретическая механика. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
56. *Поляхова Е.Н.* Сборник задач по динамике течки в поле центральных сил. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1974.
57. *Понтрягин Л.С.*, *Болтянский В.Г.*, *Гамкрелидзе Р.В.*, *Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Физматгиз, 1961.
58. *Пуанкаре А.* Избранные труды: Пер. с франц. — М.: Наука, т. I, 1971; т. II, 1972.
59. *Розе Н.В.* Лекции по аналитической механике. — Ч. I. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1938.
60. *Рубановский В.Н.*, *Самсонов В.А.* Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. — М.: Наука, 1988.
61. *Румянцев В.В.*, *Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. — М.: Наука, 1987.
62. Сборник задач по теоретической механике. — М.: Изд-во МФТИ, 1972.
63. *Светлицкий В.А.*, *Стасенко И.В.* Сборник задач по теории колебаний. — М.: Высшая школа, 1973.
64. *Синг Д.Л.* Классическая динамика: Пер. с англ. — М.: Физматгиз, 1963.
65. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. — М.; Л.: Гостехиздат, 1946.
66. *Тер Хаар Д.* Основы гамильтоновой механики / Пер. с англ. — М.: Наука, 1974.
67. *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика / Пер. с англ. — М.: ОНТИ, 1937.
68. *Халфман Р.Л.* Динамика: Пер с англ. — М.: Наука, 1972.
69. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. — М.: Наука, 1965.
70. *Шмутцер Э.* Основные принципы классической механики и классической теории поля / Пер. с нем. — М.: Мир, 1976.
71. *Якоби К.* Лекции по динамике / Пер. с нем. — М.: ГОНТИ, 1936.

Учебное издание

ПЯТНИЦКИЙ Евгений Серафимович
ТРУХАН Надежда Михайловна
ХАНУКАЕВ Юрий Исламович
ЯКОВЕНКО Геннадий Николаевич

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Редакторы: *Н. А. Михалина*, *Д. А. Миртова*
Оригинал-макет: *В. В. Худяков*
Дизайн обложки: *А. А. Логунов*

ЛР № 071930 от 06.07.99
Подписано в печать 05.03.02. Формат 60×90/16
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная
Усл. печ. л. 25. Уч.-изд. л. 25,5. Тираж 3000 экз. Заказ №

Издательская фирма
«Физико-математическая литература»
117864 Москва, Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в ПФ «Полиграфист»,
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3.
Тел.: (8172) 72-55-31, 72-61-75, факс (8172) 72-60-72.
E-mail: pfpv@vologda.ru http://www.vologda/~pfpv

ISBN 5-9221-0182-X

9 785922 101820