Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

С.А. Ахманов, С.Ю. Никитин

# ФИЗИЧЕСКАЯ ОПТИКА

2-е издание

*Рекомендовано*
*Министерством образования Российской Федерации*
*в качестве учебника*
*для студентов высших учебных заведений,*
*обучающихся по направлению и специальности*
*«Физика»*

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МОСКВА 2004

ИЗДАТЕЛЬСТВО "НАУКА"

УДК 535
ББК 22.34
А95

*Печатается по решению Ученого совета Московского университета*

*Рецензенты.*

кафедра квантовой электроники
Московского физико-технологического института
(зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, профессор *Г М Зверев*);
д-р физ.-мат. наук, профессор *В А Выслоух*

**Ахманов С.А.**

А95 Физическая оптика: Учебник. 2-е изд. / С.А. Ахманов, С.Ю. Никитин. – М.: Изд-во МГУ; Наука, 2004. – 656 с. – (Классический университетский учебник).

ISBN 5-211-04858-X
ISBN 5-02-033596-X

Книга написана на основе курса лекций, читающегося авторами на физическом факультете Московского государственного университета Излагается электромагнитная теория света, физика излучения света, интерференция, дифракция, когерентность света, физика взаимодействия излучения с веществом. Представлены современные проблемы оптики: лазеры, нелинейная оптика, сверхкороткие световые импульсы и сверхсильные световые поля, новые методы оптической спектроскопии, фурье-оптика, голография, оптическая левитация, лазерный термоядерный синтез. Специальные дополнения посвящены теоретическим вопросам, таким как электродинамика излучения, квантовая двухуровневая система, метод спектральных разложений, теория случайных процессов. Приводятся сведения из истории физической оптики.

Для студентов, аспирантов и преподавателей университетов, а также для специалистов, работающих в области оптики и ее приложений.

**УДК 535**
**ББК 22.34**

*Учебное издание*

Ахманов Сергей Александрович, Никитин Сергей Юрьевич

ФИЗИЧЕСКАЯ ОПТИКА

*2-е издание*

Зав. редакцией *Г С Савельева*. Художественный редактор *Ю М Добрянская*. Художники *В А Чернецов, Н С Шувалова* Художественное оформление выполнено Издательством Московского университета и издательством "Проспект" по заказу Московского университета. Технический редактор *И В Головин*. Компьютерная верстка *А А Лукашев*

Подписано в печать 02 08 2004 Формат 70 x $100^1/_{16}$ Бумага офс № 1
Офсетная печать Усл печ л 53,3 Уч -изд л 49,98 Тираж 5000 экз.
Заказ № 10596 Изд № 7715

Ордена "Знак Почета" Издательство Московского университета. 125009, Москва, ул. Б. Никитская, 5/7 Тел.· 229-50-91 Факс: 203-66-71. Тел.. 939-33-23 (отдел реализации).
E-mail. kd_mgu@rambler.ru
В Издательстве МГУ работает служба "КНИГА–ПОЧТОЙ" Тел.: 229-75-41

Издательство "Наука". 117997, Москва, Профсоюзная ул., 90
E-mail:secret@naukaran ru Internet: www.naukaran.ru

ППП "Типография "Наука". 121099, Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 5-211-04858-X
ISBN 5-02-033596-X

© Ахманов С.А., Никитин С.Ю., 2004
© Издательство Московского университета, 2004
© МГУ им. М.В. Ломоносова, художественное оформление, 2004

# Оглавление

Предисловие (В.А.Садовничий) . . . . . 3

Часть I
ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ТЕОРИЯ СВЕТА . . . . . 11

Лекция 1. **Световые волны в вакууме** . . . . . 12

Электромагнитная природа света. Теория Максвелла (12). Опыты Герца (13). Уравнения Максвелла (14). Волновое уравнение (16). Плоская волна (17). Сферическая волна (18). Модулированные волны и излучение реальных источников света (19). Спектральное разложение светового поля (25). Принцип суперпозиции (27). Литература (28).

Лекция 2. **Поляризация света** . . . . . 29

Поперечность световой волны (29). Состояние поляризации плоской гармонической волны. Эллиптическая, круговая, линейная поляризации (30). Немонохроматический свет. Естественная поляризация (38). Экспериментальные методы измерения поляризации (39). Литература (46).

Лекция 3. **Энергия света** . . . . . 47

Поток энергии в световой волне. Интенсивность света (47). Световые пучки и импульсы: энергия, мощность, интенсивность (51). Концентрация световой энергии во времени и в пространстве (53). Основные понятия фотометрии (54). Литература (58).

Лекция 4. **Световое давление** . . . . . 59

Импульс световой волны (59). Измерение светового давления. Опыты Лебедева (62). Световое давление на классический атом (63). Момент импульса световой волны (65). Фотон (67). Оптическое охлаждение (68). Литература (69).

Дополнение 1. **Скорость света** . . . . . 71

Астрономические наблюдения (72). Измерения скорости света в земных условиях (73). Опыты Физо (75). Опыты Майкельсона (77). Современные методы измерения скорости света. Эталоны времени и длины (78). Литература (79).

Дополнение 2. **Тепловое действие света** . . . . . 80

Оптический нагрев поглощающей среды (80). Быстрый нагрев поверхности металла лазерным импульсом (81). Лазерный отжиг полупроводников (83). Светореактивное давление (86). Лазерное сверхсжатие вещества. Физические принципы лазерного термоядерного синтеза (86). Литература (87).

Дополнение 3. **Оптическая левитация** . . . . . 89

Световое давление в лазерных пучках (89). Оптическая левитация малых прозрачных частиц. Опыты Эшкина (90). Оптическая ловушка (90). Элементы теории оптической левитации (91). Геометрия отражения и преломления (92). Энергетика отражения и преломления (94). Формулы Френеля (95). Силы светового давления (97). Световое давление вдоль пучка (99). Световое давление поперек пучка (101). Численные оценки (102). Литература (103).

Дополнение 4. **Спектральные разложения в оптике** ..... 104

Метод спектральных разложений (104) Периодические функции Ряд Фурье Дискретный спектр (104) Спектральные амплитуды и фазы (106) Непериодические функции Интеграл Фурье Сплошной спектр (106) Отрицательные частоты (109) Комплексная запись (109) Косинус-преобразование Фурье (111) Примеры (111) Связь между длительностью импульса и шириной спектра (112) Спектр гармонического колебания (114) Дельта-функция и ее свойства (114) Дельтаобразный импульс (115) Полная и неполная спектральная информация Спектральная плотность (116) Равенство Парсеваля (117) Литература (118)

Дополнение 5. **Из истории физической оптики** ..... 119

Цитаты из оригинальных работ Галилея, Максвелла, Майкельсона, Герца (119) Литература (124)

Часть II

**ИЗЛУЧЕНИЕ И ГЕНЕРАТОРЫ СВЕТА** ..... 127

Лекция 5. **Классическая физика излучения** ..... 128

Опыт Герца (128) Атом как элементарный источник света (128) Классическая модель атома (129) Излучение заряда Условия излучения (130) Расчет поперечной компоненты поля (132) Строгое решение задачи об излучении диполя (133) Гармонические колебания диполя (134) Полная мощность излучения диполя (135) Радиационное затухание (136) Литература (138)

Лекция 6 **Излучение ансамбля осцилляторов** ..... 139

От динамики осциллятора к статистике ансамбля (139) Нелазерный источник света интенсивность, поляризация, диаграмма направленности излучения (139) Статистика излучения независимых осцилляторов (142) Спектр излучения (144) Механизмы уширения спектральной линии (146) Естественное уширение (146) Доплеровское уширение (148) Уширение и сдвиг спектральной линии, обусловленные столкновениями (150) Эффект Дики столкновительное сужение доплеровской спектральной линии в плотном газе (151) Литература (155)

Лекция 7. **Линейный осциллятор в световом поле** ..... 156

Поглощение света осциллятором и ансамблем осцилляторов (156) Закон Бугера (159) Спектроскопия поглощения (161) Уменьшение фазовой скорости света в среде. Показатель преломления (162) Неоднородный ансамбль осцилляторов (166) Однородная и неоднородная ширина спектра (167) Возбуждение коротким импульсом. Релаксация энергии и дефазировка (168) Принципы частотной и временнóй спектроскопии (169) Литература (175)

Лекция 8. **Нелинейный осциллятор в световом поле** ..... 176

Модель нелинейного осциллятора (176). Метод возмущений (177) Осциллятор с квадратичной нелинейностью. Генерация второй оптической гармоники (178) Осциллятор с кубичной нелинейностью Зависимость частоты колебаний от амплитуды (178) Фазировка осциллятора внешним полем (180) Эффекты самовоздействия света самофокусировка световых пучков, самомодуляция импульсов (181). Генерация третьей оптической гармоники (182) Нелинейный резонанс и гистерезис Оптическая бистабильность (182) Параметрическая генерация света Параметрический резонанс (184) Комбинационное рассеяние света. Модель нелинейно связанных осцилляторов (187). Неоднородный ансамбль нелинейных осцилляторов. Световое эхо (191) Литература (194)

Лекция 9. **Тепловое излучение** ..... 195

Основные опытные факты Методы исследования теплового излучения (195) Излучательная и поглощательная способность тел (196) Равновесное тепловое излучение (198) Закон Кирхгофа (198) Спектральная плотность равновесного теплового излучения (201) Термодинамика равновесного теплового излучения (202) Формула Рэлея–Джинса (207) "Ультрафиолетовая катастрофа" (208) Формула Планка (208) Необходимость квантовых представлений (208). Законы теплового излучения (211) Закон Стефана–Больцмана (211) Закон смещения Вина (212) Примеры (213) Литература (215)

Лекция 10 **Лазер** ..... 216

Квантовые свойства атомов Постулаты Бора (216) Световые кванты (216) Спонтанное и вынужденное излучение в квантовой системе (219) Принцип действия и устройство лазера (221) Характеристики лазерного излучения (229) Генерация сверхкоротких световых импульсов (230) Литература (236)

Дополнение 6. **Электродинамика излучения** ..... 237

Потенциалы электромагнитного поля (237) Излучение точечного заряда (239) Излучение диполя в дальней зоне (243) Излучение ротатора (246) Излучение квадруполя (248) Электрическое поле заряда, движущегося прямолинейно и равномерно (253) Литература (256).

Дополнение 7. **Элементы теории вероятностей** ..... 257

Случайные события и вероятность (257) Случайная величина (258) Дискретные случайные величины (258) Статистическое среднее и среднее арифметическое (261) Распределение Пуассона (262) Непрерывные случайные величины (262) Плотность вероятности (263) Распределение Гаусса (264) Центральная предельная теорема (265) Двумерная плотность вероятности (265) Преобразование распределений вероятности (266) Литература (267)

Дополнение 8. **Теория случайных процессов** ..... 268

Случайный процесс (268). Плотность вероятности, среднее значение и дисперсия случайного процесса (270). Двумерная плотность вероятности и корреляционная функция случайного процесса (270) Стационарные случайные процессы (270) Среднее значение, дисперсия и корреляционная функция стационарного случайного процесса (271) Многомерная плотность вероятности и многомерные корреляционные функции (273) Статистическое усреднение и усреднение по времени (274) Спектры случайных процессов (276) Связь спектральной плотности и корреляционной функции стационарного случайного процесса. Теорема Винера–Хинчина (278). Преобразование шума линейной системой (281) Литература (281).

Дополнение 9. **Модели строения атома** ..... 282

Модель Томсона (282). Модель Бора (283) Литература (286).

Дополнение 10. **Квантовая двухуровневая система и классический осциллятор** ..... 287

Двухуровневая система (287). Состояние квантовой системы (287). Физические величины и операторы (288). Измеряемые величины (288). Уравнение Шредингера (289). Гамильтониан (289). Изолированный атом (289). Частица в потенциальной яме (290) Гармонический осциллятор (290). Атом в переменном внешнем поле (292). Матрица плотности (293) Уравнение для матрицы плотности (294). Учет релаксации (296). Двухуровневая система

в резонансном внешнем поле (296). Система уравнений для поляризации, населенностей и поля (298). Двухуровневая квантовая система и классический осциллятор (299). Литература (300).

Дополнение 11. **Из истории физической оптики** ..... 301

Цитаты из оригинальных работ Планка и Меймана (301). Литература (304).

Часть III

**ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ, ДИФРАКЦИЯ, КОГЕРЕНТНОСТЬ** ..... 305

Лекция 11. **Интерференция света** ..... 306

Интерференционные явления в оптике (306). Опыт Юнга (307). Интерферометр Майкельсона (309). Интерференция монохроматических волн (309). Интерференция немонохроматического света (315). Интерференция случайной световой волны (317). Многолучевая интерференция (323). Интерферометр Фабри–Перо (326). Собственные моды и добротность лазерного резонатора (329). Литература (331).

Лекция 12. **Когерентность света** ..... 332

Временна́я когерентность света. Время когерентности. Длина когерентности (332). Пространственная когерентность света и радиус когерентности (335). Модель случайного светового поля (335). Расчет интерференционной картины в интерферометре Юнга (337). Измерение когерентности. Когерентность излучения реальных источников света (340). Литература (346).

Лекция 13. **Дифракция света** ..... 347

Дифракция как проявление волновой природы света. Основные опытные факты (347). Опыт Гримальди (348). Принцип Гюйгенса (349). Принцип Гюйгенса-Френеля (349). Дифракционный интеграл Френеля (350). Зоны Френеля (353). Построение дифракционных картин графическим способом (356). Дифракция на краю экрана (360). Дифракционная длина светового пучка. Ближняя и дальняя зоны дифракции (366). Дифракционная расходимость пучка в дальней зоне (368). Фокусировка света как дифракционное явление (370). Теория дифракции Кирхгофа (371). Литература (377).

Лекция 14. **Дифракция слаборасходящихся пучков** ..... 378

Приближение Френеля в теории дифракции (378). Интегралы Френеля и спираль Корню (380). Дифракция Френеля на одномерных структурах (380). Дифракция на краю экрана (380). Дифракция на щели (382). Дифракция Френеля на двумерных структурах (385). Дифракция на квадратиом отверстии (385). Дифракция на круглом отверстии (386). Дифракция гауссова пучка (389). Литература (390).

Лекция 15. **Дифракция в дальней зоне** ..... 391

Формирование устойчивой картины дифракции в дальней зоне (391). Дифракция Фраунгофера как пространственное преобразование Фурье (393). Дифракция Фраунгофера на одномерных структурах. Дифракция на щели (395). Дифракция Фраунгофера на двумерных структурах (397). Дифракция на прямоугольном отверстии (399). Дифракция на круглом отверстии (400). Дифракция гауссова пучка (403). Литература (404).

Лекция 16. **Дифракция на периодических структурах** ..... 405

Дифракционные решетки (405). Физика дифракции света иа решетке (405). Уравнение дифракционной решетки (406). Математическое описание дифракции плоской волны иа решетке (413). Синусоидальная решетка (414).

Ограниченная синусоидальная решетка (414). Прямоугольная амплитудная решетка (415). Дифракция на двумерных периодических структурах (418). Дифракция на трехмерных периодических структурах. Дифракция рентгеновских лучей в кристаллах (421). Рентгеновский структурный анализ (423). Литература (424).

Лекция 17. **Анализ, преобразование и синтез световых полей** ..... 426

Спектральное описание пространственной структуры поля (426). Линза как элемент, выполняющий пространственное преобразование Фурье (430). Формирование оптического изображения. Теория Аббе (434). Опыты Аббе–Портера (436). Метод темного поля (438). Метод фазового контраста (439). Разрешающая способность микроскопа и телескопа (441). Голография. Запись и восстановление светового поля (444). Дифракционная решетка и интерферометр Фабри–Перо как спектральные приборы. Разрешающая способность и область дисперсии (446). Фурье-спектроскопия (452). Спектроскопия оптического смешения (452). Литература (454).

Дополнение 12. **Зонная пластинка Френеля и линза** ..... 456

Зонная пластинка Френеля (456). Растровая фокусирующая оптика (458). Тонкая сферическая линза (459).

Дополнение 13. **Дифракция и фокусировка гауссова пучка** ..... 462

Параболическое уравнение. Приближение квазиоптики (462). Решение параболического уравнения (463). Распространение и дифракция гауссова пучка (464). Фокусировка гауссова пучка (467). Размеры фокальной области линзы (468). Критерий применимости приближения квазиоптики (469). Литература (470).

Дополнение 14. **Из истории физической оптики** ..... 471

Цитаты из оригинальных работ Габора, Лейта и Упатниекса (471). Литература (473).

Часть IV

**СВЕТ И ВЕЩЕСТВО** ..... 475

Лекция 18. **Физика взаимодействия света с веществом** ..... 476

Модель сплошной среды. Уравнения Максвелла (476). Материальные уравнения (476). Классификация сред (479). Плоская монохроматическая световая волна в линейной однородной изотропной среде (480). Комплексная диэлектрическая проницаемость, линейная оптическая восприимчивость и комплексный показатель преломления среды (481). Классическая осцилляторная модель среды (485). Литература (487).

Лекция 19. **Световые волны в линейной изотропной среде** ..... 488

Дисперсия и поглощение света в линейной изотропной среде (488). Факты, подтверждающие теорию дисперсии Лоренца (493). Методы изучения дисперсии и поглощения света. Оптическая спектроскопия (498). Распространение светового импульса в диспергирующей среде (501). Литература (510).

Лекция 20. **Оптическия явления на границе раздела сред** ..... 511

Отражение и преломление света на границе раздела (511). Граничные условия для электромагнитного поля (512). Геометрия отражения и преломления. Закон Снеллиуса (513). Полное внутреннее отражение (514). Энергетика отражения и преломления. Формулы Френеля (515). Эффект Брюстера (519). Изменение фазы световой волны при отражении и преломлении (521). Отражение света при нормальном падении (521). Просветление

оптики (522) Отражение света при наклонном падении (523) Отражение света от поверхности металла (524) Литература (526)

Лекция 21. **Оптика анизотропных сред** ..... 527

Анизотропные материалы Основные эффекты кристаллооптики (527) Структура световой волны в анизотропном кристалле (529) Материальное уравнение анизотропной среды (531) Классификация кристаллов (535) Собственные состояния поляризации световой волны в анизотропном кристалле (536) Обыкновенная и необыкновенная волны (541) Двойное лучепреломление света на границе с анизотропной средой (545) Получение и анализ поляризованного света (549) Интерференция поляризованных лучей (556) Наведенная анизотропия (557) Литература (559)

Лекция 22 **Нелинейная оптика** ..... 560

Основные эффекты нелинейной оптики Механизмы оптической нелинейности (560) Нарушение принципа суперпозиции для сильных световых волн в среде (565) Материальное уравнение нелинейной среды (566) Нелинейная поляризация (568) Нелинейная восприимчивость (569) Классическая модель нелинейной среды — ансамбль нелинейных осцилляторов (572) Оптическое детектирование (578) Литература (578)

Лекция 23 **Теоретическая нелинейная оптика** ..... 581

Генерация второй оптической гармоники (581) Вынужденное комбинационное рассеяние света (591) Самофокусировка света (598) Литература (601).

Дополнение 15. **Параметрический генератор света** ..... 602

Литература (604)

Дополнение 16. **Оптика фемтосекундных лазерных импульсов** ..... 605

Предельно короткие импульсы света и сверхсильные световые поля (605) Генерация фемтосекундных световых импульсов (606) Новое поколение твердотельных фемтосекундных лазеров (611) Фемтосекундные технологии (611) Фемтосекундные лазерные импульсы в спектроскопии (612) Управление амплитудой и фазой молекулярных колебаний с помощью фемтосекундных лазерных импульсов (616). Новые направления исследований (625) Литература (630).

Дополнение 17. **Нелинейная динамика световых полей** ..... 633

Самоорганизация светового поля в нелинейных системах с обратной связью (633) Оптическая синергетика (637) Оптическое моделирование нейронных сетей (638) Литература (640)

Дополнение 18. **Из истории физической оптики** ..... 641

Цитаты из оригинальных работ Франкена, Бломбергена, Ахманова, Хохлова (641) Литература (646)

Предметный указатель ..... 647

# Часть I

# Электромагнитная теория света

В этой части курса излагаются основные положения электромагнитной теории света — теории, лежащей в основе классической картины оптических явлений. Мы начинаем с формулировки уравнений Максвелла. Именно эти уравнения дали особенно убедительные доказательства электромагнитной природы света: "Скорость поперечных волновых колебаний в нашей гипотетической среде, вычисленная из электромагнитных опытов Кольрауша и Вебера, столь близко совпадает со скоростью света, вычисленной из опытов Физо, что мы едва ли можем отказаться от вывода, что свет состоит из поперечных колебаний той же самой среды, которая является причиной электрических и магнитных явлений" (Д. К. Максвелл, "Электромагнитная теория света"). Конкретные "оптические" результаты этого раздела относятся прежде всего к световым волнам в вакууме. Особый акцент сделан на описании и свойствах двух волновых процессов — плоской и сферической гармонических волн. Хотя сами по себе эти волны являются в значительной мере математической абстракцией, их роль в описании оптических явлений трудно переоценить. Во многих случаях реальный световой пучок можно рассматривать как квазиплоскую квазигармоническую волну. Сложные волновые пучки можно разложить в спектр по плоским гармоническим волнам. Как суперпозицию сферических волн можно часто представить поле излучения реальной среды, состоящей из возбужденных атомов и молекул.

Следствиями уравнений Максвелла являются законы сохранения и вытекающие из них представления о потоке энергии, потоке импульса и момента импульса, переносимых световой волной. Экспериментальная регистрация этих величин (в частности, регистрация обусловленного потоком импульса светового давления) сыграла важную роль в установлении электромагнитной природы света. Вместе с тем можно без преувеличения сказать, что энергия и импульс световых волн приобрели исключительно большое значение в современной лазерной оптике. Стремление к получению все больших значений мощности и энергии световых пучков, к реализации предельных возможностей концентрации световой энергии во времени и в пространстве уже на протяжении более чем двадцати лет составляет одну из главных тенденций развития лазерной физики и техники. В настоящее время созданы лазеры, способные генерировать световые вспышки с энергией до $10^5$ Дж. Получены световые импульсы длительностью $4{,}5 \times 10^{-15}$ с, а фокусировка лазерного излучения возможна на площадку вплоть до $10^{-8}$ см$^2$. В результате удается получить мощность светового излучения $10^{15}$ Вт и интенсивность $10^{21}$ Вт/см$^2$. Уникальные возможности концентрации световой энергии открыли совершенно новые перспективы перед оптикой. Стали реальностью сильные воздействия световых волн на вещество, приводящие к его быстрому, в том числе "холодному", плавлению, а также к мгновенному испарению, образованию высокотемпературной плазмы, сильному сжатию. Поэтому лекции, посвященные энергии и импульсу световой волны, иллюстрируются примерами, относящимися к таким новым областям как лазерная технология, оптическая левитация, лазерный термоядерный синтез.

# Лекция 1

# Световые волны в вакууме

*Электромагнитная природа света. Теория Максвелла. Опыты Герца. Уравнения Максвелла. Волновое уравнение. Плоская волна. Сферическая волна. Модулированные волны и излучение реальных источников света. Спектральное разложение светового поля. Принцип суперпозиции.*

Излагаются основания электромагнитной теории света. Представлены уравнения электромагнитного поля. Дан вывод волнового уравнения из уравнений Максвелла. Рассматриваются плоская и сферическая волны как фундаментальные решения волнового уравнения. Обсуждается структура излучения реальных источников света.

**Электромагнитная природа света. Теория Максвелла.** Вопрос о природе света представляет собой одну из центральных проблем физической оптики. Исследования в этом направлении всегда лежали на магистральном пути развития науки. Многие крупные открытия в области физики так или иначе связаны с попытками глубже понять, что такое свет.

К концу XIX века физика располагала набором фактов, свидетельствующих в пользу электромагнитной природы света. К их числу относятся опыты Фарадея, в которых наблюдалось влияние магнитного поля на распространение света в веществе, опыты Лебедева, в которых было измерено световое давление, опыты Герца, в которых было доказано существование электромагнитных волн, эксперименты по взаимодействию света с веществом.

Одним из первых аргументов в пользу электромагнитной природы света было совпадение скорости электромагнитных волн, вычисленной Максвеллом, со скоростью света. В 1849 г. Физо измерил скорость света и получил значение 315 000 км/с. В 1857 г. Вебер и Кольрауш измерили электродинамическую постоянную $c$, равную отношению электромагнитной и электростатической единиц заряда, и получили значение $c = 310\,800$ км/с. В 1861 г. Максвелл вывел систему уравнений для электромагнитного поля, из которой вытекала возможность существования электромагнитных волн, причем скорость распространения волны определялась значением электродинамической постоянной. Максвелл обратил внимание на то, что найденное Вебером и Кольраушем значение $c$ весьма близко к скорости света, измеренной Физо. Это позволило ему заключить, что свет представляет собой *электромагнитную волну.*

Скорость света. Трудность измерения скорости света связана с ее чрезвычайно большой величиной, которая составляет около 300 000 км/с. История измерений скорости света весьма увлекательна, о ней подробно рассказано в дополнении 1. В табл. 1.1 перечислены основные методы измерений и полученные результаты. Изобретение лазера позволило выполнить чрезвычайно точные измерения скорости света. По последним данным скорость света в вакууме равна

$$c = 299\,792\,458 \pm 1{,}2 \text{ м/с}. \tag{1.1}$$

Электродинамическая постоянная. Электродинамическая постоянная $c$ имеет смысл отношения электромагнитной единицы заряда к электростатической. Метод измерения этой величины поясним на примере опыта

Таблица 1.1

Скорость света в вакууме

| Год | Автор | Метод | Результат, км/с | Ошибка |
|---|---|---|---|---|
| 1676 | Ремер | Спутники Юпитера | 214 000 | |
| 1726 | Брадлей | Аберрация звезд | 301 000 | |
| 1849 | Физо | Зубчатое колесо | 315 000 | |
| 1862 | Фуко | Отклонение пучка света с помощью вращающегося зеркала | 298 000 | ±500 |
| 1872 | Корню | Зубчатое колесо | 298 500 | ±900 |
| 1874 | Корню | Отклонение пучка света | 300 400 | ±800 |
| 1878 | Майкельсон | То же | 300 140 | ±700 |
| 1879 | Майкельсон | То же | 299 910 | ±50 |
| 1882 | Ньюкомб | То же | 299 810 | ±30 |
| 1924 | Майкельсон | Зеркальная призма | 299 796 | ±30 |
| 1973 | Ивенсон | Лазер | 299 792,4562 | $\pm 10^{-3}$ |

Вебера и Кольрауша. Имея в своем распоряжении конденсатор известной емкости, можно с помощью электрометра измерить разность потенциалов на его обкладках и найти заряд в электростатических единицах. С другой стороны, тот же самый заряд можно измерить в электромагнитных единицах, для чего следует разрядить конденсатор через катушку баллистического гальванометра и измерить угол отклонения зеркальца. Приравнивая заряды, измеренные обоими способами, можно найти искомое отношение единиц заряда.

Сводка результатов измерений электродинамической постоянной представлена в табл. 1.2. Сопоставление этих данных с данными табл. 1.1 показывает, что электродинамическая постоянная $c$ совпадает со скоростью света в вакууме.

**Опыты Герца.** Предсказанное Максвеллом существование электромагнитных волн нуждалось в экспериментальной проверке. Эту задачу решил Герц, сумевший осуществить генерацию и прием электромагнитных волн и исследовавший их свойства.

В экспериментах с искровым разрядом мощной индукционной катушки Герцу удалось получить сверхбыстрые колебания электрического тока (период колебаний около $10^{-8}$ с). Продолжая опыты, Герц установил, что ток высокой

Таблица 1.2

Отношение электромагнитных единиц заряда к электростатическим

| Год | Автор | Значение в вакууме, км/с |
|---|---|---|
| 1857 | Вебер и Кольрауш | 310 800 |
| 1868 | Максвелл | 284 300 |
| 1880 | Столетов | 298 000 |
| 1883 | Томсон | 296 400 |
| 1898 | Перро и Фабри | 299 870 |

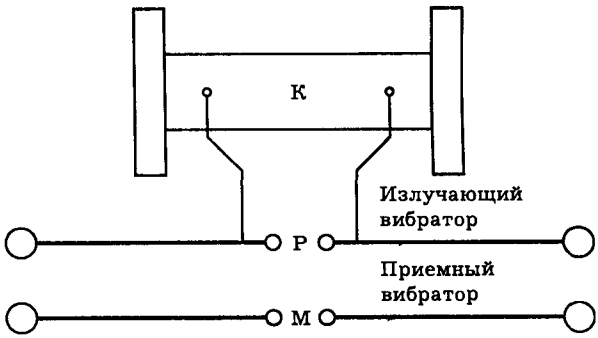



Рис 1.1. Схема опыта Герца. К — индукционная катушка, Р — разрядник, М — микрометр

частоты в прямолинейном отрезке проводника способен вызвать аналогичный ток в другом проводнике, удаленном от первого на некоторое расстояние. Так были открыты электромагнитные волны.

В одном из опытов Герц использовал собственные электрические колебания вибратора, состоящего из двух одинаковых металлических стержней, разделенных искровым промежутком (рис. 1.1). С помощью индукционной катушки обе половины вибратора заряжались до высокого напряжения. Когда разность потенциалов достигала пробойного значения, в разряднике проскакивала искра, замыкавшая обе половины вибратора, и в нем возникали затухающие электрические колебания высокой частоты. При этом вибратор испускал в пространство электромагнитную волну. Появление волны регистрировалось по возникновению искры в микрометре приемного вибратора.

Чтобы доказать единую сущность световых и электромагнитных волн, Герц попытался продемонстрировать отражение, преломление и поляризацию электромагнитных волн. Используя параболические зеркала из цинковой жести, Герц сумел сформировать пучок электромагнитных волн, подобный оптическому. При помощи изготовленной из твердой смолы призмы высотой 1,5 м и весом 1,2 т он добился отклонения пучка электромагнитных волн, соответствующего преломлению световых лучей в стеклянной призме. Наконец, он смог убедиться и в поляризации электромагнитных волн при помощи проволочной сетки. Подводя итог своим исследованиям, выполненным в 1886–1889 гг., Герц написал: "...мне представляется весьма вероятным, что описанные опыты доказывают идентичность света, тепловых лучей и электродинамического волнового движения".

Таким образом, единая сущность света и электричества была подтверждена экспериментально. Оптика могла быть теперь включена в электродинамику так же, как акустика давно уже вошла в механику.

Рис. 1.2 показывает место оптического диапазона на шкале электромагнитных волн. Этот диапазон простирается от 0,4 до 0,7 мкм по длине волны и от $4 \times 10^{14}$ до $7{,}5 \times 10^{14}$ Гц по частоте.

**Уравнения Максвелла.** Система уравнений для электромагнитного поля была выведена Максвеллом в середине XIX в. путем обобщения данных, полученных в опытах с электрическими зарядами, токами и магнитами. Дальнейшие исследования показали, что уравнения Максвелла имеют очень глубокое

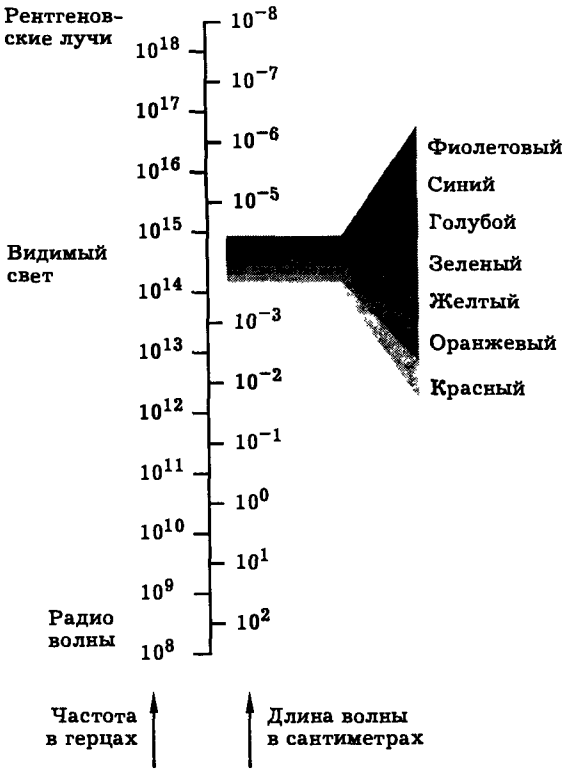



Рис. 1.2. Оптический диапазон на шкале электромагнитных волн

физическое содержание, далеко выходящее за рамки тех фактов и представлений, на основе которых были получены уравнения. Оказалось, что эти уравнения удовлетворяют условию релятивистской инвариантности, хорошо описывают быстропеременное электромагнитное поле, включая световые волны, могут быть положены в основу теории излучения электромагнитных волн движущимися зарядами и теории взаимодействия света и вещества.

В удобной для оптики гауссовой системе единиц уравнения Максвелла для электромагнитного поля в вакууме имеют вид

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \tag{1.2}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \tag{1.3}$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0, \tag{1.4}$$

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0. \tag{1.5}$$

Здесь $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей, $c$ — электродинамическая постоянная, равная скорости света в вакууме. Уравне-

ние (1.2) представляет собой математическую формулировку закона электромагнитной индукции. Уравнение (1.3) показывает, что магнитное поле порождается переменным электрическим полем. Уравнение (1.4) выражает факт отсутствия статического электрического поля в вакууме. Уравнение (1.5) постулирует отсутствие магнитных зарядов.

**Волновое уравнение.** Уравнения (1.2)–(1.5) позволяют вывести замкнутые уравнения для полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Дифференцируя уравнение (1.3) по времени и меняя порядок следования временнóй и пространственных производных, имеем

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Воспользовавшись уравнением (1.2), получим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Применяя известное из векторного анализа соотношение для дифференциальных операторов, преобразуем левую часть последнего уравнения к виду

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E} - \Delta\vec{E}.$$

Здесь $\Delta$ — оператор Лапласа, который в декартовых координатах записывается в виде

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{1.6}$$

Поскольку в рассматриваемом случае свободные заряды отсутствуют, т. е. $\operatorname{div}\vec{E} = 0$, для вектора напряженности электрического поля получаем уравнение

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{1.7}$$

Нетрудно убедиться, что вектор $\vec{H}$ удовлетворяет аналогичному уравнению

$$\Delta\vec{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \tag{1.8}$$

Уравнения (1.7), (1.8) линейны по полю. Поэтому они эквивалентны совокупности скалярных уравнений вида (1.7), (1.8), в каждое из которых входит только одна компонента напряженности электрического или магнитного поля. Действительно, запишем векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ через декартовы компоненты

$$\vec{E} = \vec{x}_0 E_x + \vec{y}_0 E_y + \vec{z}_0 E_z, \quad \vec{H} = \vec{x}_0 H_x + \vec{y}_0 H_y + \vec{z}_0 H_z, \tag{1.9}$$

где $\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$, $\vec{z}_0$ — единичные векторы ("орты"), направленные вдоль осей $x$, $y$, $z$ декартовой системы координат. Тогда каждая из компонент полей $E_\alpha$ или $H_\alpha$ ($\alpha = x, y, z$) удовлетворяет скалярному уравнению

$$\Delta E_\alpha - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_\alpha}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta H_\alpha - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 H_\alpha}{\partial t^2} = 0. \tag{1.10}$$

Это нетрудно проверить, умножая скалярно уравнения (1.7), (1.8) последовательно на $\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$, $\vec{z}_0$. Уравнения (1.7), (1.8), (1.10) называются *волновыми уравнениями*. Их решения имеют характер распространяющихся волн.

**Плоская волна.** Предположим, что произвольная компонента поля $f$ (например, $E_\alpha$ или $H_\alpha$) зависит лишь от одной пространственной координаты и времени, т. е. $f = f(z,t)$. Тогда уравнение (1.10) упростится и примет вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \tag{1.11}$$

Найдем решение этого уравнения. Для этого представим его в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) f = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta} = 0, \tag{1.12}$$

где введены переменные $\xi = t - z/c$, $\eta = t + z/c$. Уравнению (1.12) удовлетворяет функция вида

$$f(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

или, в переменных $z$, $t$,

$$f(z,t) = f_1(t - z/c) + f_2(t + z/c), \tag{1.13}$$

где $f_1$ и $f_2$ — произвольные (дифференцируемые) функции своих аргументов.

Формула (1.13) выражает общее решение уравнения (1.11). Данное решение описывает суперпозицию двух волн. Первая из них распространяется вдоль, вторая — против оси $z$. Скорости обеих волн одинаковы и равны $c$. Действительно, возмущение $f_1$, находившееся в момент времени $t_1$ в точке $z_1$, в момент времени $t_2$ приходит в точку $z_2$, определяемую соотношением $t_1 - z_1/c = t_2 - z_2/c$. Отсюда при $t_2 > t_1$ имеем $z_2 > z_1$ и скорость распространения волнового возмущения равна $v = (z_2 - z_1)/(t_2 - t_1) = c$.

Функции $f_1 = f_1(z,t)$ и $f_2 = f_2(z,t)$ описывают *плоские волны*, так как волновое возмущение имеет одно и то же значение во всех точках бесконечной плоскости, перпендикулярной направлению распространения. Конкретный вид функций $f_1$ и $f_2$ определяется граничными и начальными условиями задачи.

Плоская гармоническая волна. Конкретизируем теперь закон изменения светового поля во времени и в пространстве. Рассмотрим декартову компоненту поля $E_x(z,t)$. Пусть при $z = 0$

$$E_x(0,t) = A\cos\omega t, \tag{1.14}$$

т. е. напряженность светового поля изменяется по гармоническому закону. Тогда в соответствии с формулой (1.13) в области $z \geq 0$ будет распространяться плоская гармоническая волна

$$E_x(z,t) = A\cos[\omega(t - z/c)] = A\cos(\omega t - kz) = A\cos[\omega t - \varphi(z)]. \tag{1.15}$$

НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА МГУ 3

В этом выражении $A$ — *амплитуда волны*, $\omega$ — *круговая частота*, связанная с *периодом* $T$ и *частотой колебаний* $\nu = 1/T$ соотношениями

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu. \tag{1.16}$$

Параметры $k$ и $\lambda$, определяемые как

$$k = \omega/c = 2\pi\nu/c = 2\pi/\lambda, \tag{1.17}$$

$$\lambda = cT = c/\nu, \tag{1.18}$$

есть соответственно *волновое число* и *длина волны*. Величина

$$\Phi = \omega t - kz \tag{1.19}$$

называется *полной фазой* волны и зависит от $t$ и $z$. Фазу $\varphi(z) = kz$, связанную с изменением пути $z$, пройденного волной, будем называть *набегом фазы* или *фазовым сдвигом*. Геометрическое место одинаковых значений фаз называют волновым фронтом. В плоской гармонической волне это плоскость, перпендикулярная направлению распространения.

**Сферическая волна.** Нетрудно убедиться, что уравнениям (1.10) удовлетворяют и волны вида

$$E_\alpha = E_\alpha(t, r), \quad H_\alpha = H_\alpha(t, r),$$

в которых напряженности полей зависят только от одной пространственной переменной — модуля радиус-вектора

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Такие волны называют *сферическими*. Наряду с плоской, сферическая волна является эталонной волной, имеющей большое значение для оптики.

Рассмотрим скалярное волновое уравнение

$$\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \tag{1.20}$$

и будем искать решение вида $f = f(t, r)$. Для сферически симметричной функции $f$ оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf). \tag{1.21}$$

Подставив (1.21) в (1.20), получим уравнение

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \tag{1.22}$$

Введем вспомогательную функцию $F = rf$. Тогда уравнение (1.22) преобразуется к виду, аналогичному (1.11),

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \tag{1.23}$$

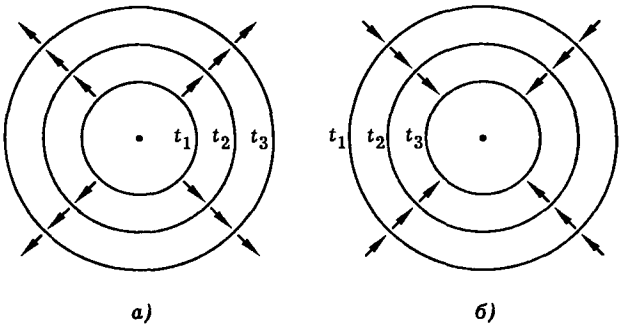



Рис. 1.3. Расходящаяся (*а*) и сходящаяся (*б*) сферические волны. Показаны положения волновых фронтов в последовательные моменты времени $t_1 < t_2 < t_3$

и, следовательно, его общее решение представляется в виде суперпозиции двух волн, бегущих во взаимно противоположных направлениях:

$$F(r,t) = F_1(t - r/c) + F_2(t + r/c). \tag{1.24}$$

Возвращаясь к искомой функции $f$, получим

$$f(r,t) = \frac{F_1(t - r/c)}{r} + \frac{F_2(t + r/c)}{r}. \tag{1.25}$$

Выражение (1.25) описывает две сферические волны: *расходящуюся* от начала координат и *сходящуюся* к нему (рис. 1.3).

Гармоническая сферическая волна. Если на сфере радиуса $r_0$ задать гармоническое возмущение, синфазное во всех точках сферы

$$f(r_0,t) = (A_0/r_0)\cos[\omega(t - r_0/c)], \tag{1.26}$$

то возбуждаемая таким источником расходящаяся волна при $r > r_0$ может быть представлена в виде

$$f(r,t) = (A_0/r)\cos[\omega(t - r/c)]. \tag{1.27}$$

Здесь в отличие от плоской волны амплитуда зависит от координаты, а фазовый и амплитудный фронты представляют собой сферы.

**Модулированные волны и излучение реальных источников света.** Реальные источники света генерируют излучение, которое, на первый взгляд, имеет мало общего с рассмотренными выше эталонными волнами. Сказанное относится в первую очередь к характеру изменения волнового возмущения в пространстве. Так, световой пучок гелий-неонового лазера — это, конечно, не плоская и не сферическая волна. Для многих лазерных и в особенности нелазерных источников света далека от реальности и модель гармонического изменения во времени напряженностей электрического и магнитного полей или, как принято говорить, модель *монохроматической волны*.[1] Картина излучения

[1] Монохроматический значит "одноцветный". Происхождение этого термина связано с тем, что в видимом диапазоне глаз регистрирует изменение частоты излучения как изменение цвета.

рубинового лазера — наглядный пример такой ситуации. Здесь мы имеем дело с короткой световой вспышкой, световым импульсом — негармоническим волновым процессом, имеющим конечную длительность.

Как описать реальные световые пучки и импульсы, каковы закономерности их распространения в пространстве? Детальный ответ на этот вопрос дает волновая оптика, изложению которой посвящена третья часть книги. Установление закономерностей излучения света, физики интерференции и дифракции позволяет дать полную картину поведения реальных волновых процессов. Здесь мы предпошлем такому последовательному рассмотрению обсуждение простых моделей, основанных на наглядных физических соображениях. Это позволит дать формулировку задач, возникающих при описании световых пучков и импульсов. Оказывается, что в основу такого описания могут быть положены плоская и сферическая гармонические волны.

Квазиплоские волны. На практике невозможно создать источник света, генерирующий поле вида (1.14). Конечная протяженность или, как принято говорить, конечная *апертура* источника приводит к тому, что амплитуда световых колебаний изменяется в плоскости, перпендикулярной направлению распространения света, — возникает *пространственно модулированная* волна. В пространственно модулированной световой волне значения амплитуды и фазы зависят от координаты, т. е. имеет место ситуация, принципиально отличающаяся от таковой для плоской волны. Тем не менее, имеются случаи, когда плоскую волну можно рассматривать не только как математическую абстракцию. Физические соображения подсказывают, что если апертура источника света равна $d$, то волновой процесс будет обладать свойствами плоской волны не только для $d \to \infty$, но и для конечных, но достаточно больших апертур.

Какой смысл в данном случае следует вкладывать в слова "большая апертура" (оптики говорят также "широкая апертура")? Величину $d$ следует сравнить, очевидно, с некоторым характерным пространственным масштабом процесса. Для световой волны в качестве такого масштаба выступает длина волны (1.18). В видимом диапазоне $\lambda \simeq 10^{-4}$ см, апертура типичного лазерного пучка $d \simeq 0{,}1$ см. Следовательно, $d/\lambda \approx 10^3 \gg 1$.

С помощью оптических резонаторов лазеров, различных коллимирующих устройств удается создавать широкоапертурные пучки, амплитуда и фаза в которых медленно (на масштабе длины световой волны) меняются в плоскости, перпендикулярной направлению распространения света. В таких случаях волновые фронты на значительных расстояниях мало отличаются от плоскостей. Следовательно, мы имеем дело с волнами близкими к плоским, т. е. с *квазиплоскими волнами*. В случае гармонической квазиплоской волны поле на выходной апертуре источника можно записать в виде

$$E_x(t, x, y, 0) = A(x, y) \cos \omega t. \tag{1.28}$$

Здесь волновой фронт плоский, а амплитуда волны медленно меняется в плоскости $x$, $y$ с характерным масштабом изменения $d$. Можно ожидать, что если $d \gg \lambda$, то существует область не слишком малых расстояний $z$ (во всяком случае $z \gg \lambda$, $z > d$), для которых волна, возбуждаемая источником вида (1.28), остается квазиплоской:

$$E_x(t, x, y, z) = A(x, y) \cos(\omega t - kz). \tag{1.29}$$

Критерий применимости модели (1.29) удается установить, лишь обращаясь к решению волнового уравнения (1.10) с граничным условием (1.28). Обсужде-

ние этого вопроса мы отложим до ч. III. Здесь же, забегая вперед, приведем один замечательный результат, описывающий распространение так называемого *гауссова светового пучка.*

Пусть при $z = 0$ фазовый фронт волны плоский, а распределение амплитуды описывается гауссовой кривой:

$$E_x(t, x, y, 0) = A_0 \exp[-(x^2 + y^2)/d^2] \cos \omega t \tag{1.30}$$

или

$$E_x(t, r, 0) = A_0 \exp(-r^2/d^2) \cos \omega t, \tag{1.31}$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, $d$ — радиус пучка.

Как показано в дополнении 13, приближенное решение волнового уравнения

$$\Delta E_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \tag{1.32}$$

с граничным условием (1.31) имеет вид

$$E_x(t, r, z) = \frac{1}{2} A_{\text{к}}(r, z) \exp[i(\omega t - kz)] + \text{к. с.} \tag{1.33}$$

Здесь сокращение "к. с." означает "комплексно сопряженное выражение", $A_{\text{к}}(r, z)$ — комплексная амплитуда волны, определяемая формулой

$$A_{\text{к}}(r, z) = \frac{A_0}{(1 - iz/z_{\text{д}})} \exp\left[-\frac{r^2}{(1 - iz/z_{\text{д}})d^2}\right], \tag{1.34}$$

и

$$z_{\text{д}} = kd^2/2. \tag{1.35}$$

Выражение (1.34) можно переписать как

$$A_{\text{к}}(r, z) = A \exp(-i\varphi), \tag{1.36}$$

где $A$ и $\varphi$ — вещественные амплитуда и фаза волны:

$$A(r, z) = \frac{A_0}{\sqrt{1 + (z/z_{\text{д}})^2}} \exp\left[-\frac{r^2/d^2}{1 + (z/z_{\text{д}})^2}\right], \tag{1.37}$$

$$\varphi(r, z) = \frac{r^2}{d^2} \frac{z/z_{\text{д}}}{1 + (z/z_{\text{д}})^2} - \operatorname{arctg}(z/z_{\text{д}}). \tag{1.38}$$

Согласно (1.37), (1.38) распределение амплитуды и фазы в поперечном сечении пучка определяется только одним параметром — отношением пути $z$, пройденного волной, к характерной длине $z_{\text{д}}$, определяемой формулой (1.35) и называемой *дифракционной длиной* светового пучка. При $z \ll z_{\text{д}}$ выражение для светового поля упрощается и приобретает вид

$$E_x(t, r, z) = A_0 \exp(-r^2/d^2) \cos(\omega t - kz), \tag{1.39}$$

т. е. мы действительно имеем волну вида (1.29).

Чем больше величина $z_д$, т. е. чем больше отношение $d/\lambda$, тем больше расстояние $z$, на котором сохраняется плоский фазовый фронт. Например, для излучения гелий-неонового лазера с длиной волны $\lambda = 0{,}63$ мкм и радиусом пучка $d = 0{,}1$ см дифракционная длина $z_д = \pi d^2/\lambda = 5$ м. Расширяя пучок до $d = 1$ см, получим $z_д = 500$ м. Таким образом, результаты расчета подтверждают предварительные качественные соображения.

Замечательное свойство гауссова пучка состоит в том, что он сохраняет свою форму и при $z > z_д$. В соответствии с (1.37) при этом изменяется лишь ширина пучка. В этой области, однако, пучок приобретает свойства сферической волны. Из (1.37), (1.38) следует, что при $z \gg z_д$ амплитуда волны убывает пропорционально пройденному расстоянию:

$$A(r, z) \simeq A_0 z_д/z \sim 1/z, \tag{1.40}$$

а фазовый фронт становится сферическим:

$$\varphi(r, z) \sim r^2/d^2. \tag{1.41}$$

Указанные свойства гауссова пучка иллюстрирует рис. 1.4, на котором показаны изменение поперечного размера и искривление волнового фронта пучка при его распространении в свободном пространстве.

Суперпозиция сферических волн. Случайно модулированная волна. Наблюдателю, находящемуся на достаточно большом удалении от источника света, последний кажется светящейся точкой. Естественно ожидать, что в этом случае характеристики светового поля в точке наблюдения будут близки к свойствам сферической волны. Типичным примером здесь является приходящее к Земле излучение звезд.

Результаты, приведенные выше, позволяют проследить процесс формирования сферической волны для конкретной модели излучения, а именно для гауссова пучка. В силу соотношений (1.40), (1.41) наблюдателю, рассматривающему выходное зеркало гелий-неонового лазера с расстояния $z \gg z_д$, лазер представляется источником сферической волны.

Элементарными оптическими излучателями являются отдельные атомы и молекулы. Характерный атомный размер составляет $10^{-8}$ см, поэтому излучение отдельных атомов и молекул можно рассматривать как сферические волны уже на микроскопических масштабах.

Обычно наблюдают излучение большого числа $N$ элементарных излучателей. Так, в кубическом сантиметре газа при нормальных условиях $N \simeq 10^{19}$, а в конденсированной среде $N \simeq 10^{22}$. Поэтому излучение обычных источников света есть суперпозиция большого числа сферических волн:

$$E_x(t, x, y, z) = \sum_{i=1}^{N} (A_{0i}/r_i) \cos[\omega(t - r_i/c)], \tag{1.42}$$

где

$$r_i = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{1/2}, \tag{1.43}$$

$x_i$, $y_i$, $z_i$ — координаты $i$-го излучателя (атома или молекулы). Качественное представление о волновом поле ансамбля излучателей дает рис. 1.5, на котором показана эволюция в пространстве суперпозиции сферических волн. Вблизи от излучателей поле имеет сложную структуру пространственно модулированной волны. По мере удаления от источника света сферические фронты отдельных

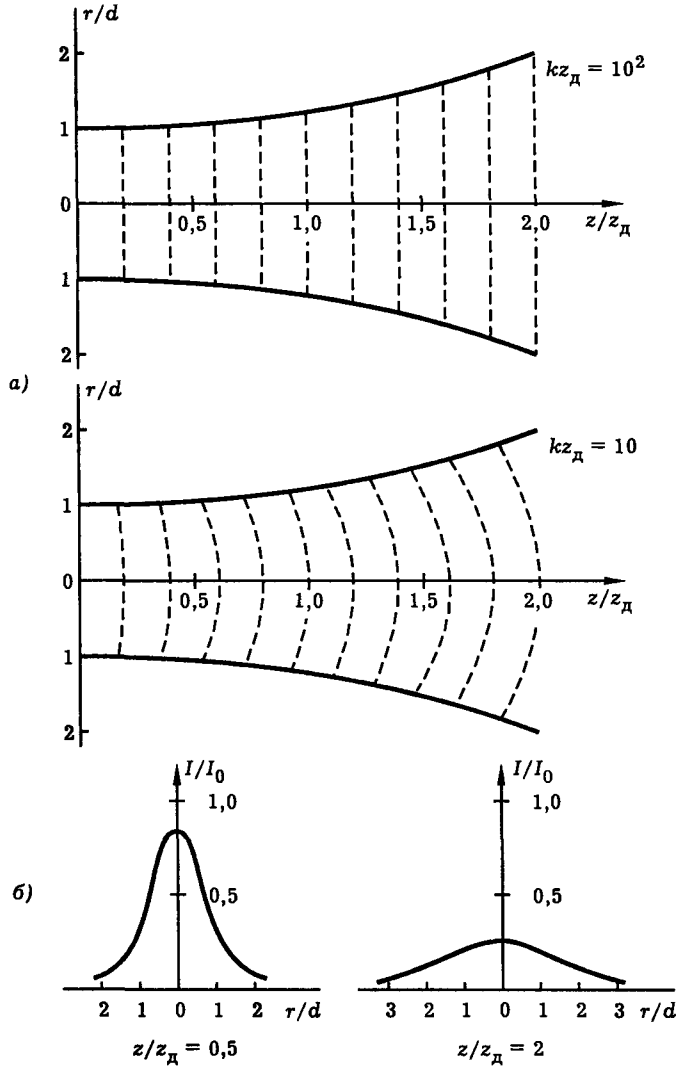



Рис. 1.4. Распространение гауссова светового пучка. Контур пучка в продольном сечении (сплошные кривые) и волновые фронты (пунктир) (*а*); поперечный профиль интенсивности излучения (*б*)

волн совпадают на все бóльших площадях. Наконец, при $z \to \infty$ суперпозиция многих сферических волн хорошо аппроксимируется одной сферической волной.

Как описать количественно свойства сложного волнового поля, представляющего собой суперпозицию множества сферических волн? Это один из главных вопросов физики излучения света, которой посвящена ч. II. Здесь же отметим только, что поскольку поведение большой совокупности атомов или молекул подчиняется статистическим законам, *статистический* характер носит и по-

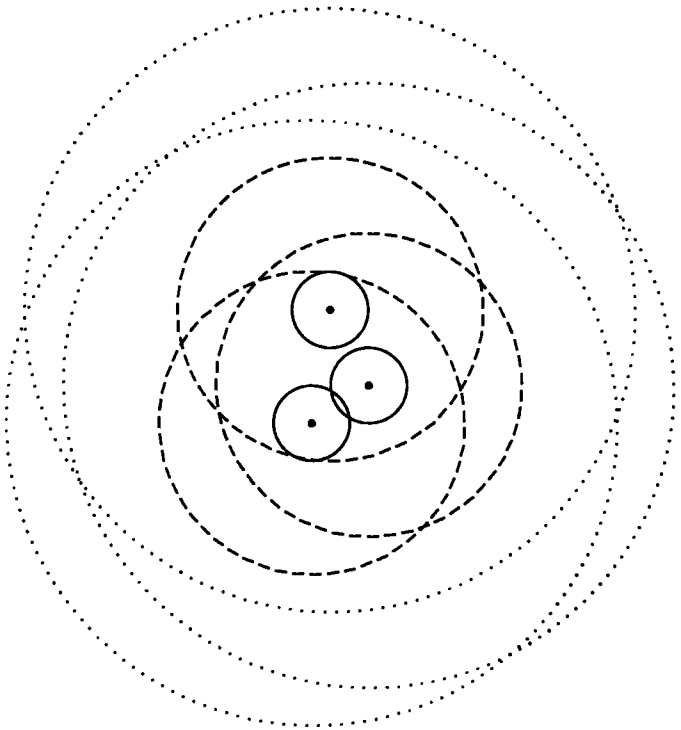


Рис. 1.5. Суперпозиция сферических волн

ведение суммарного светового поля. Так в оптике возникает представление о *случайно модулированной* световой волне — волне, амплитуда и фаза которой изменяются нерегулярным, случайным образом.

Квазигармонические волны. Как уже говорилось, на опыте мы обычно имеем дело с конечным по длительности световым импульсом, а не с идеальной гармонической волной. Реальные световые источники излучают волны, модулированные не только в пространстве, но и во времени. Принимая во внимание только временну́ю модуляцию поля, рассматривая расстояния $z \ll z_д$ и точки, не слишком удаленные от оси светового пучка ($x$, $y \ll d$), вместо (1.28) можно написать

$$E_x(t, x, y, 0) = f(t) = A(t)\cos\omega t. \tag{1.44}$$

В соответствии с (1.13) в области $z \geq 0$ источник вида (1.44) возбудит плоскую *амплитудно модулированную* волну

$$E_x(t, z) = A(t - z/c)\cos[\omega(t - z/c)], \tag{1.45}$$

являющуюся решением одномерного волнового уравнения (1.11). В более общем случае во времени изменяется не только амплитуда, но и фаза колебаний источника

$$E_x(t,0) = f(t) = A(t)\cos[\omega t - \varphi(t)]. \tag{1.46}$$

Тогда в пространстве возбуждается волна, имеющая временну́ю амплитудную и фазовую модуляцию.

Изменения функций $A(t)$ и $\varphi(t)$ могут быть достаточно быстрыми. Так, современные лазеры способны генерировать световые импульсы длительностью $\tau \sim 10^{-12}$–$10^{-14}$ с. Тем не менее в подавляющем большинстве случаев соответствующие изменения амплитуды и фазы остаются медленными в масштабе периода световых колебаний $T = 2\pi/\omega$. В видимом диапазоне $T \simeq 10^{-14}$–$10^{-15}$ с, и даже для пикосекундных импульсов (1 пс = $10^{-12}$ с) выполняется неравенство $\tau \gg T$. Свойства таких медленно модулированных во времени волн близки к свойствам гармонической волны. Поэтому их принято называть *квазигармоническими*.

Прямой подстановкой можно проверить, что (1.45) удовлетворяет волновому уравнению (1.10). Вид решения (1.45) показывает, что форма временно́й модуляции плоской волны остается неизменной при ее распространении в свободном пространстве. Этим поведение волн, модулированных во времени, принципиально отличается от поведения пространственно модулированных волн. Вместе с тем в материальной среде, как мы убедимся в ч. IV, форма и длительность светового импульса могут существенно изменяться.

Говоря о временно́й модуляции световых волн, коснемся и такого вопроса: с какой степенью точности можно приблизиться на практике к идеальной монохроматической волне? На первый взгляд может показаться, что речь идет о технической проблеме. Действительно, казалось бы повышение стабильности параметров одночастотного лазера непрерывного действия может привести к генерации оптических колебаний, сколь угодно близких к гармоническим. На самом же деле имеется принципиальный предел монохроматичности, определяемый квантовыми флуктуациями в излучающих атомах и молекулах. Эти флуктуации оказываются причиной неустранимых амплитудной и фазовой модуляций волны. Надо сказать, что связанная с квантовыми флуктуациями немонохроматичность излучения относительно невелика. Отклонение частоты от средней не превышает $10^2$ Гц. С ними, однако, приходится считаться в квантовых стандартах частоты и времени, прецизионных оптических экспериментах. Обращаясь же к принципиальной стороне дела, можно резюмировать, что идеальная монохроматическая волна есть такая же абстракция, как и идеальная плоская волна. Идеальная монохроматическая волна неосуществима.

**Спектральное разложение светового поля.** Итак, во многих случаях свойства излучения реальных оптических источников близки к свойствам плоской или сферической гармонических волн. Этим, однако, роль эталонных волн не исчерпывается. Произвольное волновое возмущение можно представить в виде суперпозиции эталонных волн или, иначе говоря, разложить его в спектр, выполнить *спектральное разложение*.

Особое значение в оптике имеет разложение волновых пучков и импульсов по плоским гармоническим волнам. Дело в том, что такое разложение оказывается не только удобной математической операцией, оно *фактически осуществляется* в реальном оптическом эксперименте. Один из классических экспериментов такого рода — знаменитый опыт Ньютона, в котором наблюдалось разложение в спектр света с помощью стеклянной призмы (рис. 1.6). Заключение Ньютона о том, что "солнечный свет состоит из лучей различной преломляемости", нетрудно перевести на математический язык спектраль-

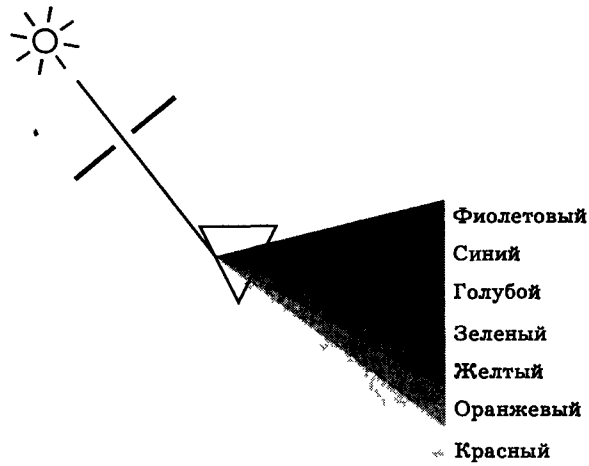



Рис. 1.6. Опыт Ньютона

ных разложений. Оно означает, что поле плоской немонохроматической волны $E_x(t, z)$ можно представить в виде суперпозиции плоских монохроматических волн.

Действительно, произвольную функцию $f(t)$, описывающую заданное при $z = 0$ световое возмущение, можно представить в виде интеграла Фурье (см. дополнение 4):

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [a(\omega)\cos\omega t + b(\omega)\sin\omega t]d\omega = \\ = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(\omega)\cos[\omega t - \varphi(\omega)]d\omega, \tag{1.47}$$

т. е. разложить в спектр по гармоническим колебаниям или, как мы будем говорить, в частотный спектр

$$f_\omega = f(\omega)\cos[\omega t - \varphi(\omega)]. \tag{1.48}$$

Амплитуды квадратурных спектральных компонент $a(\omega)$ и $b(\omega)$ или спектральные амплитуда $f(\omega)$ и фаза $\varphi(\omega)$, определяющие частотный спектр функции $f(t)$, вычисляются с помощью обратного преобразования Фурье

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt, \quad b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt, \\ f(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}, \qquad \operatorname{tg}\varphi(\omega) = b(\omega)/a(\omega). \tag{1.49}$$

Каждая гармоническая компонента заданного при $z = 0$ возмущения $f(t)$ возбуждает монохроматическую световую волну

$$E_\omega(t,z) = f(\omega)\cos[\omega t - kz - \varphi(\omega)]. \tag{1.50}$$

Функция вида (1.50) удовлетворяет волновому уравнению. Удовлетворяет ему и полное поле, являющееся суперпозицией волн (1.50):

$$E_x(t,z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty E_\omega d\omega. \tag{1.51}$$

Формула (1.51) наряду с (1.45) дает еще один способ описания немонохроматической плоской волны — в виде суперпозиции плоских монохроматических волн. Принято говорить, что выражение (1.45) описывает немонохроматическую волну во *временно́м представлении,* а (1.51) — в *спектральном представлении.*

Спектральные разложения естественным образом обобщаются и на волновые пучки — пространственно модулированные волны. Волновой пучок тоже можно представить в виде суперпозиции плоских волн, но теперь речь идет о разложении по волнам, распространяющимся в различных направлениях. Различные спектральные компоненты в таком разложении характеризуются углами между направлением распространения волны и координатным осями. Поэтому принято говорить об *угловом спектре* пространственно модулированной волны. Замечательно, что разложение в угловой спектр физически происходит в очень простых по постановке опытах. Так, форма углового спектра светового пучка определяется распределением освещенности на экране, расположенном на достаточно большом удалении от источника света (при $z \gg z_д$), либо в фокальной плоскости линзы. В таких опытах свободное пространство и линза выполняют такую же операцию фурье-разложения по отношению к угловому спектру, что призма по отношению к частотному. Подробное обсуждение этих вопросов мы отложим до ч. III; их анализ потребует более детальных представлений о физике распространения пространственно модулированных волн.

**Принцип суперпозиции.** Согласно этому принципу световые волны разных частот и разных направлений распространяются в вакууме независимо друг от друга. Можно указать простые эксперименты, наглядно иллюстрирующие принцип суперпозиции. Так, через одно и то же отверстие в экране два наблюдателя могут видеть разные объекты; при этом наблюдаемые ими картины, вообще говоря, никак не связаны между собой.

Математически принцип суперпозиции является следствием линейности волнового уравнения, описывающего распространение световых волн в вакууме. В самом деле, если поля $E_1, E_2, \ldots$ являются решениями волнового уравнения, то его решением оказывается и сумма полей

$$E = \sum_n E_n.$$

В этом можно убедиться, подставляя, например, в уравнение (1.10) плоские волны вида

$$E_{xn} = A_n\cos(\omega_n t - k_n z), \quad k_n = \omega_n/c.$$

При этом волновое уравнение распадается на независимые уравнения для отдельных волн.

Почти тривиальный в электромагнитной теории, принцип суперпозиции создавал проблемы для сторонников корпускулярной теории света. Казалось бы, что корпускулы, принадлежащие разным световым пучкам, должны как-то взаимодействовать, рассеиваться друг на друге. Даже основателю волновой теории Гюйгенсу принцип суперпозиции отнюдь не представлялся самоочевидным. В "Трактате о свете" Гюйгенс писал: "Удивительнейшее свойство света состоит в том, что лучи, идущие из разных и даже противоположных направлений, проходят один сквозь другой нисколько не препятствуя обоюдным действиям". Ниже мы убедимся, что сомнения Гюйгенса имеют под собой серьезные основания. Современная лазерная оптика дает много примеров сильных нарушений принципа суперпозиции для световых волн, распространяющихся в материальной среде. Квантовая электродинамика предсказывает (правда, при очень больших даже по современным меркам интенсивностях света) нарушения принципа суперпозиции и в вакууме. В очень мощных световых полях должно наблюдаться рассеяние света на свете в вакууме.[2] Таким образом, принцип суперпозиции в оптике отнюдь не является универсальным. Мы будем считать его справедливым для волн в вакууме. Вопрос о пределах применимости принципа суперпозиции в материальной среде обсуждается в ч. IV.

## Литература


1. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. — М.: Наука, 1973.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. — М.: Наука, 1973.
3. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. — М.: Наука, 1979.
4. Физическая энциклопедия/Под ред. А. М. Прохорова. — М.: Советская энциклопедия, 1988.
5. Творцы физической оптики. — М.: Наука, 1973.
6. *Гернек Ф.* Пионеры атомного века. Великие исследователи от Максвелла до Гейзенберга. — М.: Прогресс, 1974.
7. *Фрум К., Эссен Л.* Скорость света и радиоволн. — М.: Мир, 1973.
8. *Letokhov V. S., Chebotaev V. P.* Nonlinear Laser Spectroscopy. — Berlin: Springer-Verlag, 1977.
9. *Калашников С. Г.* Электричество. — М.: Наука, 1977.
10. Лекционные демонстрации по физике/Под ред. В. И. Иверновой. — М.: Наука, 1972.
11. Квантовая электроника. Маленькая энциклопедия/Под ред. М. Е. Жаботинского. — М.: Советская энциклопедия, 1969.
12. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике. — М.: Наука, 1967.
13. 50 лет волн Герца. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1938.
14. *Evenson K. M., Wells J. S., Petersen F. R., Danielson B. L., Day G. W.*//Appl. Phys. Lett. 1973. V. 22. P. 192.


[2]К настоящему времени нет экспериментов, подтверждающих это предсказание.

# Лекция 2

# Поляризация света

*Поперечность световой волны. Состояния поляризации плоской гармонической волны. Эллиптическая, круговая, линейная поляризации. Немонохроматический свет. Естественная поляризация. Экспериментальные методы измерения поляризации.*

Вводится понятие поляризации световой волны. Рассматриваются состояния поляризации гармонической волны, а также немонохроматического света. Излагаются основы теории и экспериментальные методы измерения поляризации.

**Поперечность световой волны.** Формулы (1.10), (1.13) описывают поведение произвольной компоненты вектора $\vec{E}$ или $\vec{H}$ в плоской световой волне. Информация, которую можно получить о плоской световой волне из уравнений Максвелла, этим, однако, не исчерпывается. Пользуясь уравнениями (1.2)–(1.5), можно определить соотношения между направлениями и величинами векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

Рассмотрим плоскую световую волну, распространяющуюся вдоль оси $z$. В такой волне $\vec{E} = \vec{E}(z,t)$, $\vec{H} = \vec{H}(z,t)$. Покажем, что данная волна является *поперечной*, т. е. компоненты полей в направлении распространения волны отсутствуют: $E_z = H_z = 0$. Действительно, из уравнения (1.4) следует, что

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0.$$

Поскольку в рассматриваемой волне $\partial E_x/\partial x = \partial E_y/\partial y = 0$, то и $\partial E_z/\partial z = 0$, т. е. компонента $E_z$ не меняется в пространстве. Выписав уравнение для $z$-й компоненты ротора вектора $\vec{H}$, получим

$$(\operatorname{rot}\vec{H})_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}.$$

Так как $\partial H_y/\partial x = \partial H_x/\partial y = 0$, то и $\partial E_z/\partial t = 0$. Отсюда следует, что $E_z$ есть константа, не зависящая ни от $z$, ни от $t$. Поскольку нас интересуют быстропеременные поля, ее следует положить равной нулю. Аналогичный вывод можно сделать относительно продольной компоненты магнитного поля $H_z$. Таким образом, в плоской электромагнитной волне, распространяющейся в свободном пространстве вдоль оси $z$, отличны от нуля компоненты $E_x$, $E_y$ и $H_x$, $H_y$, а $E_z = H_z = 0$.

Уравнения Максвелла позволяют найти связь между величинами векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в световой волне. Из уравнений (1.2), (1.3) имеем

$$\begin{aligned}(\operatorname{rot}\vec{E})_y &= \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t},\\ (\operatorname{rot}\vec{H})_x &= -\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Подобным образом устанавливаем взаимосвязь компонент $E_y$ и $H_x$ :

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t}. \tag{2.2}$$

Уравнения (2.1), (2.2) описывают две независимые плоские световые волны. Обе волны распространяются вдоль оси $z$, одна из них характеризуется взаимно ортогональными компонентами поля $E_x$, $H_y$, а другая — компонентами $E_y$, $H_x$.

Плоская гармоническая волна. Рассмотрим плоскую световую волну с конфигурацией поля "$E_x$, $H_y$". Положим

$$E_x = A\cos(\omega t - kz), \quad k = \omega/c. \tag{2.3}$$

Пользуясь формулами (2.1), (2.3), нетрудно показать, что

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -c\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z}.$$

Отсюда следует, что поля $E_x$ и $H_y$ могут отличаться лишь на константу. Но световое поле не содержит постоянной составляющей, поэтому

$$E_x = H_y = A\cos(\omega t - kz). \tag{2.4}$$

Таким образом, в плоской гармонической световой волне типа "$E_x$, $H_y$" обе компоненты поля меняются синфазно по гармоническому закону (рис. 2.1). Подобным образом для волны "$E_y$, $H_x$" получаем

$$-E_y = H_x = A\cos(\omega t - kz). \tag{2.5}$$

**Состояния поляризации плоской гармонической волны. Эллиптическая, круговая, линейная поляризации.** Две найденные нами поперечные волны $E_x$, $H_y$ и $E_y$, $H_x$ отличаются друг от друга направлениями векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$, т. е. направлением *поляризации*. Волны, описываемые уравнениями (2.1)–(2.5), называются *линейно поляризованными*, так как при фиксированном значении $z$ конец вектора $\vec{E}$ движется по прямой линии. Направление или вектор поляризации волны условимся связывать с направлением вектора $\vec{E}$. Введем также плоскость поляризации, определив ее как плоскость, в которой лежат вектор $\vec{E}$ и единичный вектор $\vec{z}_0$, характеризующий направление распространения волны. Линейно поляризованные волны будем называть также *плоско поляризованными*.

Предпочтение, которое отдается вектору напряженности электрического поля при формулировке этих понятий, есть прежде всего вопрос определения. "Световыми векторами" в равной мере являются векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Заметим, однако, что если говорить о взаимодействии света с веществом, то определенный приоритет должен быть отдан вектору $\vec{E}$. Это связано с тем, что сила, действующая со стороны светового поля на электрический заряд, равна $\vec{F} = e\vec{E} + (e/c)\left[\vec{v}, \vec{H}\right]$, и при $v/c \ll 1$ действие магнитного поля много слабее, нежели действие электрического.

Каждая из волн $E_x$, $H_y$ и $E_y$, $H_x$ удовлетворяет волновому уравнению. Удовлетворяет ему, очевидно, и сумма этих волн. В этом состоит одно из проявлений принципа суперпозиции для световых волн в вакууме. В общем случае у плоской гармонической волны отличны от нуля обе компоненты $E_x$, $E_y$, а вектор электрического поля имеет вид

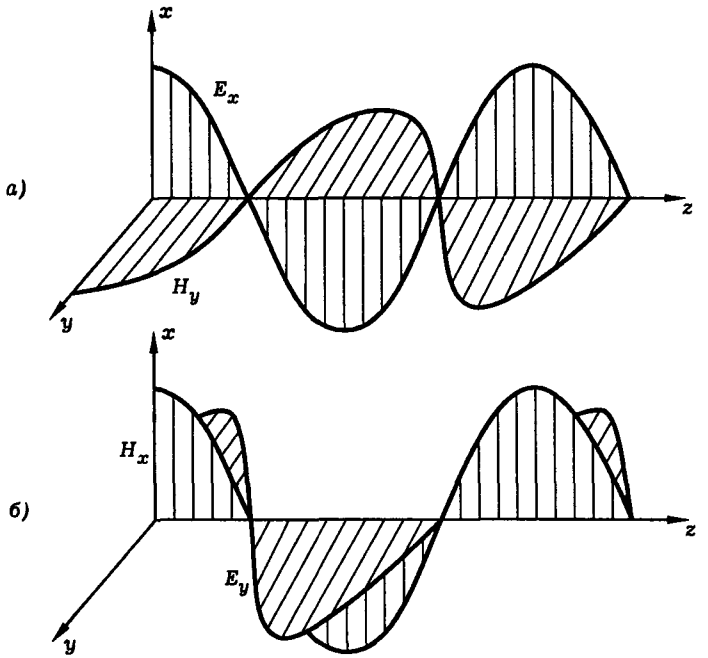



Рис 2.1. Плоские гармонические волны типа $E_x$, $H_y$ (*а*) и $E_y$, $H_x$ (*б*)

$$\vec{E}(t,z) = \vec{x}_0 E_x(t,z) + \vec{y}_0 E_y(t,z). \tag{2.6}$$

Рассмотрим плоскую волну, компоненты электрического поля которой изменяются по гармоническому закону

$$E_x(t,z) = A_1 \cos(\omega t - kz + \varphi_1), \quad E_y(t,z) = A_2 \cos(\omega t - kz + \varphi_2). \tag{2.7}$$

Найдем уравнение траектории, по которой движется конец вектора $\vec{E}$ в плоскости $z = \text{const}$. Для этого введем вспомогательное обозначение $\tau = \omega t - kz$ и преобразуем выражения (2.7) следующим образом:

$$E_x(t,z) = A_1(\cos\tau\cos\varphi_1 - \sin\tau\sin\varphi_1),$$

$$E_y(t,z) = A_2(\cos\tau\cos\varphi_2 - \sin\tau\sin\varphi_2).$$

Отсюда

$$\frac{E_x}{A_1}\sin\varphi_2 - \frac{E_y}{A_2}\sin\varphi_1 = \cos\tau\sin(\varphi_2 - \varphi_1),$$

$$\frac{E_x}{A_1}\cos\varphi_2 - \frac{E_y}{A_2}\cos\varphi_1 = \sin\tau\sin(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Возводя в квадрат правые и левые части этих уравнений и складывая, найдем

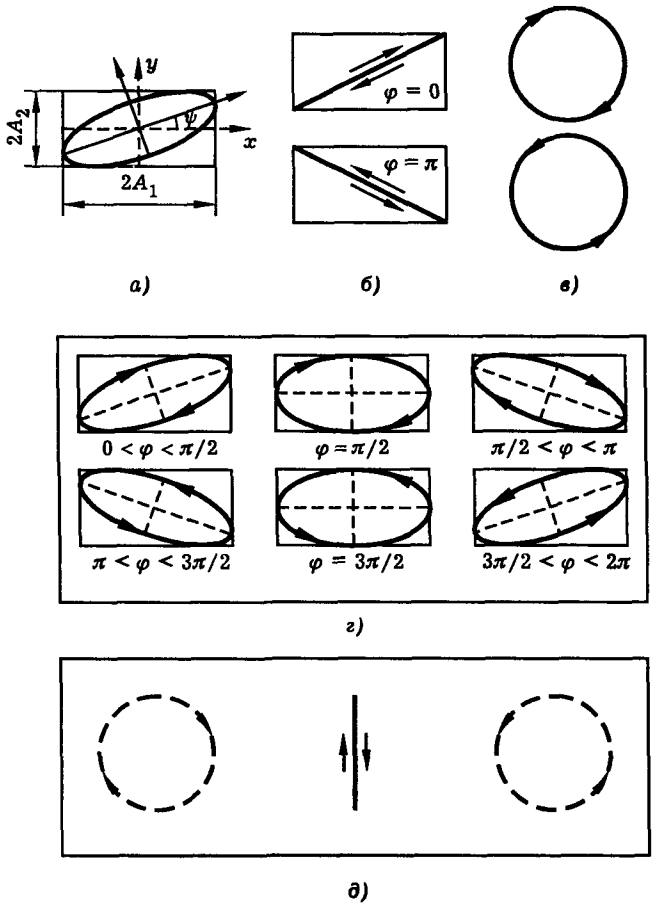
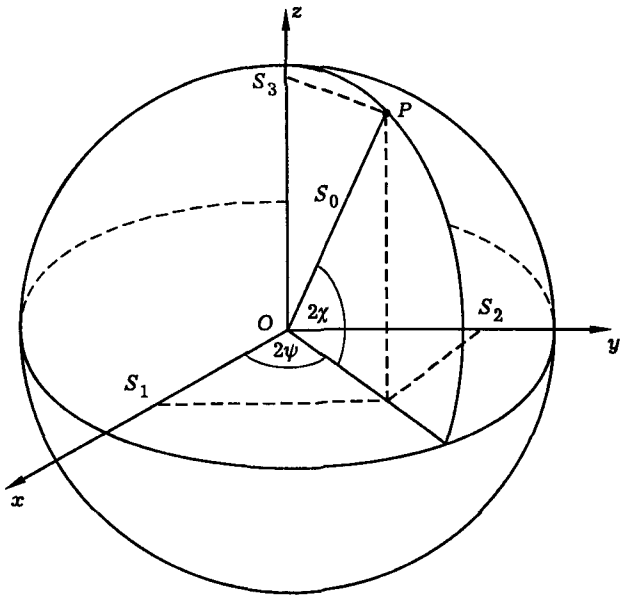



Рис. 2.2. Состояния поляризации плоской гармонической волны (*а–д*)

$$\left(\frac{E_x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_2}\right)^2 - 2\frac{E_x E_y}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \qquad (2.8)$$

Уравнение (2.8) является уравнением эллипса. Эллипс вписан в прямоугольник, стороны которого параллельны осям $x$, $y$ и имеют длины $2A_1$ и $2A_2$ (рис. 2.2, *а*). Итак, в общем случае при распространении плоской монохроматической световой волны конец вектора $\vec{E}$ в плоскости $z = \text{const}$ описывает эллипс. Аналогично ведет себя и вектор напряженности магнитного поля. Такая волна называется *эллиптически поляризованной*.

Двигаясь по эллипсу в плоскости $z = \text{const}$, конец вектора $\vec{E}$ может вращаться по часовой или против часовой стрелки. Для того чтобы различить эти два состояния, в оптике вводят понятия *правой* поляризации (для наблюдателя, смотрящего навстречу световому лучу, вращение вектора $\vec{E}$ происходит по




*е)*

Рис. 2.2. Состояния поляризации плоской гармонической волны (продолжение, рис. *е*)

часовой стрелке) и *левой* поляризации (вращение вектора $\vec{E}$ в противоположном направлении). Покажем, что направление вращения вектора $\vec{E}$ зависит от знака разности фаз $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Выберем момент времени $t_0$, для которого $\omega t_0 - kz + \varphi_1 = 0$. В этот момент, согласно формулам (2.7),

$$E_x(t_0, z) = A_1, \quad \dot{E}_y(t_0, z) = -\omega A_2 \sin\varphi. \tag{2.9}$$

Здесь точка над буквой обозначает дифференцирование по времени, т. е. $\dot{E}_y = dE_y/dt$. Из формул (2.9) видно, что в тот момент, когда конец вектора $\vec{E}$ достигает крайней правой точки своей траектории (рис. 2.2, *а*), имеем $\dot{E}_y < 0$, если $0 < \varphi < \pi$, и $\dot{E}_y > 0$, если $-\pi < \varphi < 0$. Очевидно, что первый из этих случаев соответствует право поляризованной волне, а второй — лево поляризованной. Рассмотрим теперь частные случаи.

Линейная поляризация. Если разность фаз $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = m\pi$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то эллипс переходит в прямую, описываемую уравнением

$$\frac{E_x}{E_y} = (-1)^m \frac{A_1}{A_2}.$$

В этом случае волна является линейно поляризованной или плоско поляризованной. На рис. 2.2, *б* показаны два возможных направления поляризации в плоско поляризованной волне, соответствующие $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$.

Круговая поляризация. Если $A_1 = A_2 = A$ и $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = m\pi/2$, где $m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$, то одна из компонент вектора $\vec{E}$ проходит через максимум в тот момент, когда другая обращается в нуль. В этом случае эллипс вырождается в окружность, которая описывается уравнением

$$E_x^2 + E_y^2 = A^2.$$

Итак, конец вектора $\vec{E}$ (разумеется и $\vec{H}$) движется по окружности, вращаясь по часовой или против часовой стрелки. Такое состояние поляризации волны называют круговой или циркулярной поляризацией. Различают правую и левую круговые поляризации. Для правой поляризации

$$\varphi = \pi/2 + 2m\pi, \quad \vec{E}^{(+)} = \vec{x}_0 E_x^{(+)} + \vec{y}_0 E_y^{(+)}, \tag{2.10}$$

где

$$E_x^{(+)} = A\cos(\tau + \varphi_1), \quad E_y^{(+)} = -A\sin(\tau + \varphi_1). \tag{2.11}$$

Для левой поляризации

$$\varphi = -\pi/2 + 2m\pi, \quad \vec{E}^{(-)} = \vec{x}_0 E_x^{(-)} + \vec{y}_0 E_y^{(-)}, \tag{2.12}$$

где

$$E_x^{(-)} = A\cos(\tau + \varphi_1), \quad E_y^{(-)} = A\sin(\tau + \varphi_1). \tag{2.13}$$

Из формул (2.10)–(2.13) следует, что

$$\vec{E} = \vec{E}^{(+)} + \vec{E}^{(-)} = \vec{x}_0 2A\cos(\tau + \varphi_1). \tag{2.14}$$

Это означает, что сумма право- и лево-поляризованных волн дает линейно поляризованную волну.

Параметры Стокса. Сфера Пуанкаре. В общем случае плоская монохроматическая световая волна имеет правую или левую эллиптическую поляризацию. Полная характеристика эллипса дается тремя параметрами, например, параметрами $A_1$, $A_2$, $\varphi$ или выражающимися через них полуосями эллипса $a$, $b$ и углом $\psi$ между осью $x$ и большой осью эллипса (рис. 2.2, *а*). Удобно также описание эллиптически поляризованной волны на основе параметров Стокса, определяемых формулами

$$\begin{aligned} S_0 &= A_1^2 + A_2^2, & S_1 &= A_1^2 - A_2^2, \\ S_2 &= 2A_1A_2\cos\varphi, & S_3 &= 2A_1A_2\sin\varphi. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Независимыми оказываются только три из них, так как справедливо тождество

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2. \tag{2.16}$$

Вводя вспомогательный угол $\chi$, определяемый формулой

$$\operatorname{tg}\chi = \pm b/a, \tag{2.17}$$

где $a$ и $b$ — полуоси эллипса поляризации, знак "+" соответствует правополяризованной волне, знак "−" — левополяризованной, нетрудно получить следующие соотношения для параметров Стокса[1]:

$$\begin{aligned} S_1 &= S_0 \cos(2\chi)\cos(2\psi), \\ S_2 &= S_0 \cos(2\chi)\sin(2\psi), \\ S_3 &= S_0 \sin(2\chi). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Формулы (2.15)–(2.18) могут быть положены в основу наглядного геометрического представления поляризации. Параметры Стокса $S_1$, $S_2$, $S_3$ можно рассматривать как декартовы координаты точки на сфере радиуса $S_0$. Углы $2\chi$ и $2\psi$ имеют смысл сферических угловых координат этой точки (рис. 2.2, *е*). Угол $\psi$ характеризует ориентацию эллипса поляризации, угол $\chi$ — его эллиптичность (отношение полуосей) и направление вращения. Такое геометрическое представление поляризации предложил Пуанкаре, поэтому изображенную на рис. 2.2, *е* сферу называют сферой Пуанкаре.

В заключение этого пункта перечислим возможные состояния поляризации плоской гармонической волны (рис. 2.2): *а* — эллиптически поляризованная волна, *б* — линейно поляризованная волна, *в* — циркулярно поляризованная волна (правая и левая поляризации), *г* — эллиптически поляризованная волна при различных значениях разности фаз $\varphi$ ортогональных компонент поля, *д* — линейно поляризованная волна как совокупность двух циркулярно поляризованных волн со встречными направлениями поляризации, *е* — представление состояния поляризации плоской гармонической волны на сфере Пуанкаре.

Комплексная запись световой волны. Компактное и удобное представление волновых полей основано на применении комплексной записи. Используя формулу Эйлера

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\exp(i\alpha) + \frac{1}{2}\exp(-i\alpha), \tag{2.19}$$

запишем электрическое поле плоской гармонической волны

$$\vec{E} = \vec{x}_0 A_1 \cos(\omega t - kz + \varphi_1) + \vec{y}_0 A_2 \cos(\omega t - kz + \varphi_2) \tag{2.20}$$

в виде

$$\vec{E} = \frac{1}{2}(\vec{x}_0\mathcal{E}_x + \vec{y}_0\mathcal{E}_y)\exp[i(\omega t - kz)] + \text{к. с.} \tag{2.21}$$

Здесь сокращение "к. с." означает "комплексно-сопряженное выражение", а величины $\mathcal{E}_x$ и $\mathcal{E}_y$ называются *комплексными амплитудами* и определяются формулами

$$\mathcal{E}_x = A_1\exp(i\varphi_1), \quad \mathcal{E}_y = A_2\exp(i\varphi_2). \tag{2.22}$$

Как видно из определения, модуль комплексной амплитуды равен действительной амплитуде, а аргумент — фазе световой волны. Для линейно поляризованной волны

$$\vec{E} = \frac{1}{2}\vec{e}\,\mathcal{E}\exp[i(\omega t - kz)] + \text{к. с.}, \tag{2.23}$$

[1] Подробное изложение можно найти в книге Борна и Вольфа "Основы оптики".

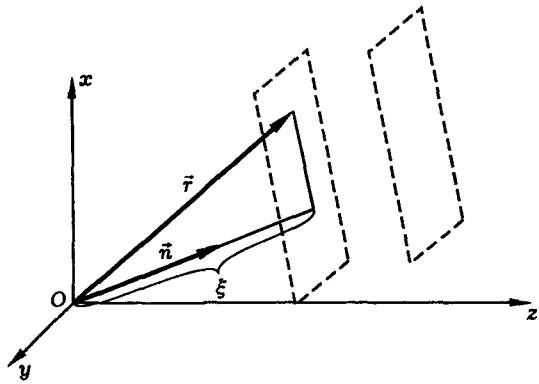



Рис. 2.3. Плоская волна, распространяющаяся в произвольном направлении $\vec{n}$. Показаны поверхности постоянных фаз — плоскости, перпендикулярные вектору $\vec{n}$

где $\mathcal{E}$ — комплексная амплитуда, $\vec{e}$ — единичный вектор, характеризующий направление поляризации ("вектор поляризации"). Если волна поляризована по кругу, то

$$\vec{e} = (\vec{x}_0 \pm i\vec{y}_0)/\sqrt{2}, \tag{2.24}$$

где знаки "+" и "−" соответствуют правому и левому вращению.

Волновой вектор. Пусть плоская гармоническая световая волна распространяется в произвольном направлении, задаваемом единичным вектором $\vec{n}$. Поверхности постоянных фаз волны имеют вид плоскостей, перпендикулярных вектору $\vec{n}$ (рис. 2.3). Введем волновой вектор

$$\vec{k} = \vec{n}\omega/c. \tag{2.25}$$

Согласно (2.25), вектор $\vec{k}$ указывает направление распространения волны, а его модуль равен волновому числу $k = \omega/c$. Обозначим расстояние, пройденное волной в направлении $\vec{n}$, через $\xi$ и проведем радиус-вектор $\vec{r}$ из начала координат в произвольную точку волнового фронта. Тогда, как видно из рис. 2.3,

$$\xi = \vec{n}\vec{r}. \tag{2.26}$$

Здесь и далее символом $\vec{a}\vec{b}$ обозначено скалярное произведение векторов, т. е. $\vec{a}\vec{b} \equiv \left(\vec{a}, \vec{b}\right)$. Используя (2.26), получаем

$$k\xi = k\vec{n}\vec{r} = \vec{k}\vec{r}. \tag{2.27}$$

Теперь поле волны можно представить в виде

$$\vec{E} = \frac{1}{2}\vec{\mathcal{E}}\exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})] + \text{к. с.}, \tag{2.28}$$

где $\vec{\mathcal{E}} = \vec{e}\mathcal{E}$, $\vec{e}$ — вектор поляризации.

Данное представление поля позволяет получить полезные общие соотношения для плоской монохроматической световой волны. Запишем магнитное поле в виде, аналогичном (2.28),

$$\vec{H} = \frac{1}{2}\vec{\mathcal{H}}\exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})] + \text{к. с.} \tag{2.29}$$

и подставим (2.28), (2.29) в уравнения Максвелла (1.2)–(1.5), предварительно введя векторный дифференциальный оператор "набла"

$$\vec{\nabla} = \vec{x}_0\frac{\partial}{\partial x} + \vec{y}_0\frac{\partial}{\partial y} + \vec{z}_0\frac{\partial}{\partial z}. \tag{2.30}$$

Тогда для произвольного векторного поля $\vec{a}(\vec{r})$

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \left[\vec{\nabla}, \vec{a}\right], \quad \operatorname{div}\vec{a} = \left(\vec{\nabla}, \vec{a}\right). \tag{2.31}$$

С учетом этих соотношений уравнения Максвелла (1.2)–(1.5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \left[\vec{\nabla}, \vec{E}\right] &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \left(\vec{\nabla}, \vec{E}\right) = 0, \\ \left[\vec{\nabla}, \vec{H}\right] &= \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \left(\vec{\nabla}, \vec{H}\right) = 0. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Действие операторов $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ на экспоненциальный множитель $\exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})]$ сводится к умножению на соответствующие декартовы компоненты волнового вектора:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})] = -ik_\alpha \exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})],$$

где $\alpha = x$, $y$, $z$. Поэтому вычисление дивергенции вектора $\vec{E}$ для поля вида (2.28) дает

$$\left(\vec{\nabla}, \vec{E}\right) = \frac{1}{2}\left(-i\vec{k}, \vec{\mathcal{E}}\right)\exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})] + \text{к. с.} \tag{2.33}$$

Аналогично вычисляем ротор $\vec{E}$ :

$$\left[\vec{\nabla}, \vec{E}\right] = \frac{1}{2}\left[-i\vec{k}, \vec{\mathcal{E}}\right]\exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})] + \text{к. с.} \tag{2.34}$$

Наконец,

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2}(i\omega)\vec{\mathcal{E}}\exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})] + \text{к. с.} \tag{2.35}$$

Аналогичные формулы можно написать и для вектора $\vec{H}$. Пользуясь ими, систему уравнений (2.32) представим в виде

$$\begin{aligned} \left[\vec{k}, \vec{\mathcal{E}}\right] &= \frac{\omega}{c}\vec{\mathcal{H}}, \quad \left(\vec{k}, \vec{\mathcal{E}}\right) = 0, \\ \left[\vec{k}, \vec{\mathcal{H}}\right] &= -\frac{\omega}{c}\vec{\mathcal{E}}, \quad \left(\vec{k}, \vec{\mathcal{H}}\right) = 0 \end{aligned}$$

или, с учетом (2.25),

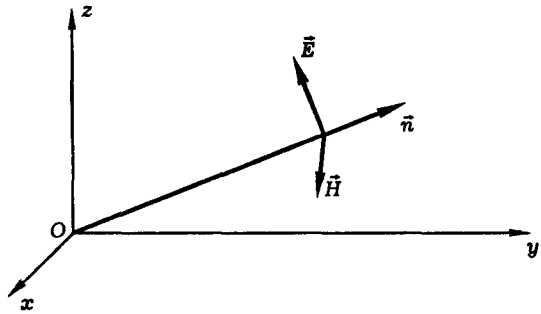



Рис. 2.4. Структура поля плоской световой волны

$$\begin{aligned} \left[\vec{n}, \vec{\mathcal{E}}\right] &= \vec{\mathcal{H}}, \quad \left(\vec{n}, \vec{\mathcal{E}}\right) = 0, \\ \left[\vec{n}, \vec{\mathcal{H}}\right] &= -\vec{\mathcal{E}}, \quad \left(\vec{n}, \vec{\mathcal{H}}\right) = 0. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Подставив выражения (2.36) для $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{H}}$ в формулы (2.28), (2.29), получим векторные соотношения, определяющие структуру поля плоской монохроматической световой волны:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\left[\vec{n}, \vec{H}\right], \quad \left(\vec{n}, \vec{E}\right) = 0, \\ \vec{H} &= \left[\vec{n}, \vec{E}\right], \quad \left(\vec{n}, \vec{H}\right) = 0. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Соотношения $\left(\vec{n}, \vec{E}\right) = 0$, $\left(\vec{n}, \vec{H}\right) = 0$ выражают свойство поперечности световой волны. Согласно формулам (2.37), для плоской гармонической световой волны, распространяющейся в вакууме в произвольном направлении $\vec{n}$, векторы $\vec{n}$, $\vec{E}$ и $\vec{H}$ образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов (рис. 2.4).

**Немонохроматический свет. Естественная поляризация.** В плоской монохроматической световой волне напряженность электрического поля $\vec{E}$ есть регулярная функция координат и времени. Такая волна называется полностью поляризованной или просто *поляризованной*. Материал предыдущего раздела дает исчерпывающее представление о состоянии поляризации плоской монохроматической волны. В общем случае такая волна поляризована эллиптически, а характеристики эллипса поляризации определяются амплитудами и фазами ортогональных компонент светового поля $E_x$, $E_y$.

Конечная апертура реальных световых пучков и немонохроматичность света приводят к отличиям от этой идеальной картины. Если свет лазера бывает близок по своей структуре к поляризованной волне, то поляризация излучения нелазерного источника света, как правило, испытывает быстрые хаотические изменения во времени.

Поле немонохроматической световой волны естественно рассматривать как *случайный* процесс. Для такой волны направление вектора $\vec{E}$ в плоскости фронта волны случайным образом меняется с течением времени. Если при этом все

направления $\vec{E}$ оказываются равновероятными, то свет называется неполяризованным или *естественно поляризованным*. Таков, например, солнечный свет или свет лампы накаливания. Если же существует преимущественное направление вектора $\vec{E}$, то говорят, что свет частично поляризован.

Световое поле плоской немонохроматической волны, распространяющейся вдоль оси $z$, можно представить в виде

$$\vec{E} = \vec{x}_0 E_x + \vec{y}_0 E_y, \tag{2.38}$$

где

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{2}\mathcal{E}_x \exp[i(\omega t - kz)] + \text{к. с.}, \\ E_y &= \frac{1}{2}\mathcal{E}_y \exp[i(\omega t - kz)] + \text{к. с.} \end{aligned} \tag{2.39}$$

Рассматривая комплексные амплитуды ортогональных компонент поля $\mathcal{E}_x$ и $\mathcal{E}_y$ как случайные функции времени, введем *матрицу когерентности* световой волны

$$\hat{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} \langle \mathcal{E}_x \mathcal{E}_x^* \rangle & \langle \mathcal{E}_x \mathcal{E}_y^* \rangle \\ \langle \mathcal{E}_y \mathcal{E}_x^* \rangle & \langle \mathcal{E}_y \mathcal{E}_y^* \rangle \end{pmatrix}, \tag{2.40}$$

где угловые скобки обозначают усреднение по времени. Элементы этой матрицы могут быть измерены экспериментально (см. ниже). Матрица когерентности полностью характеризует поляризацию плоской немонохроматической световой волны.

**Экспериментальные методы измерения поляризации.** Экспериментальные измерения поляризации света основаны на применении анизотропных кристаллов. Поэтому здесь мы коротко коснемся оптики анизотропных сред (подробнее см. ч. IV).

Анизотропия структуры кристаллической решетки приводит к тому, что характер распространения световой волны в кристалле зависит от поляризации света и направления распространения светового пучка в кристалле. Попадая в кристалл, световая волна с произвольным состоянием поляризации распадается на две линейно поляризованные волны с ортогональными направлениями поляризации — так называемые "обыкновенную" и "необыкновенную" волны. Скорости распространения этих волн вообще говоря различны. По мере распространения между обыкновенной и необыкновенной волнами возникает фазовый сдвиг $\Delta\varphi$, пропорциональный разности скоростей волн, а также пути, пройденному светом в кристалле.

Обыкновенная и необыкновенная волны. Для каждого направления $z$ в кристалле существуют два "собственных" направления поляризации $x$ и $y$ (рис. 2.5). Физически эти направления выделены тем, что световые волны, линейно поляризованные в этих направлениях, распространяются в кристалле, сохраняя свое состояние поляризации. Одна из этих волн называется "обыкновенной": скорость распространения этой волны одинакова для всех направлений в кристалле. Другая волна называется "необыкновенной": скорость распространения этой волны зависит от направления в кристалле.

В отличие от обыкновенной и необыкновенной волн, произвольно поляризованная волна изменяет состояние поляризации при распространении в кри-

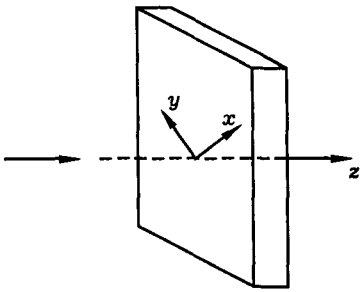



Рис. 2.5. Собственные направления поляризации световой волны в анизотропном кристалле

сталле. Такая волна как бы распадается на обыкновенную и необыкновенную волны, бегущие с разными скоростями.

В любом кристалле есть по крайней мере одно направление, для которого скорости обыкновенной и необыкновенной волн совпадают. Такое направление называют оптической осью кристалла. В зависимости от числа осей, анизотропные кристаллы делятся на одноосные и двуосные. В поляризационных оптических устройствах чаще применяют одноосные кристаллы, к числу которых относятся, например, кварц и кальцит. Как видно из определения, в направлении оптической оси кристалла может распространяться световая волна с произвольным состоянием поляризации, причем эта поляризация будет устойчивой. Иначе говоря, в направлении оптической оси кристалл ведет себя как изотропная среда. В противоположность этому в направлениях, перпендикулярных оптической оси, анизотропия кристалла выражена наиболее сильно.

Фазовый сдвиг, возникающий между обыкновенной и необыкновенной волнами, можно использовать для управления поляризацией света. Так, помещая на пути линейно поляризованного светового пучка кристаллическую пластинку, вносящую сдвиг фазы $\Delta\varphi = \pi/2$ между компонентами поля $E_x$, $E_y$, получим на выходе из пластинки свет с круговой поляризацией. Если далее на пути пучка поставить еще одну такую же пластинку, то снова получим линейно поляризованный свет с направлением поляризации ортогональным исходному. Подбирая толщину пластинки, можно преобразовать эллиптически поляризованный свет в свет с линейной или круговой поляризацией и наоборот.

Четвертьволновая и полуволновая пластинки. Пусть линейно поляризованный свет падает на прозрачный анизотропный кристалл так, что вектор $\vec{E}$ направлен под углом 45° к направлениям $x$ и $y$ собственных поляризаций волн в кристалле. При этом на входе кристалла возникают обыкновенная и необыкновенная волны, которые синфазны и одинаковы по амплитуде. Толщина кристаллической пластинки подбирается так, что на выходе разность фаз обыкновенной и необыкновенной волн становится равной $\pi/2$. Так как амплитуды этих волн по-прежнему равны, то свет имеет теперь круговую поляризацию (рис. 2.6).

Пластинку, выполняющую такое преобразование, называют "четвертьволновой", так как вносимой ею разности фаз $\Delta\varphi = \pi/2$ соответствует разность хода волн, равная $\lambda/4$. Такие пластинки широко применяются в современных лазерных установках для преобразования линейной поляризации света в круго-

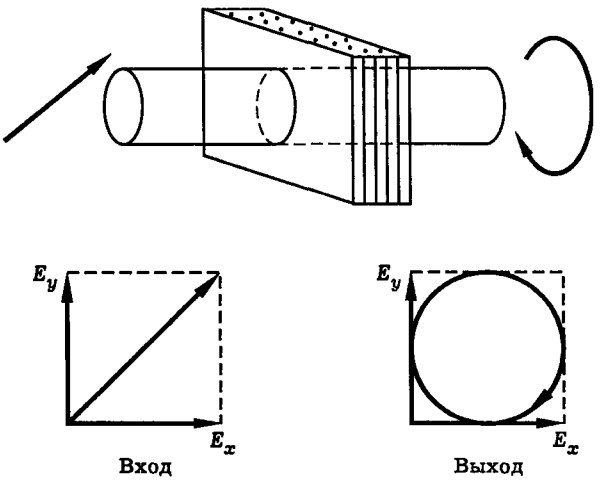



Рис. 2.6 Преобразование линейной поляризации света в круговую

вую и наоборот. Пластинки, вносящие разность фаз $\Delta\varphi = \pi$ ("полуволновые"), используют для поворота плоскости поляризации линейно поляризованной световой волны на 90°.

Поляризаторы, анализаторы, компенсаторы. В некоторых кристаллах (в частности, в турмалине) сильно отличаются коэффициенты поглощения обыкновенной и необыкновенной волн. Это приводит к тому, что уже при толщине кристаллической пластинки около миллиметра одна из волн практически полностью поглощается, а на выходе остается другая волна, имеющая линейную поляризацию. Таким образом, пластинка турмалина выделяет из света с произвольной поляризацией линейно поляризованную компоненту, т. е. работает как *поляризатор* света. Существуют полимерные материалы (например, обогащенный йодом синтетический поливиниловый спирт), которые обладают очень сильной анизотропией поглощения. Из таких материалов изготавливают поляроидные пленки. Такие пленки широко применяются в поляроидах — приборах, выделяющих из светового пучка линейно поляризованную компоненту с заданным направлением поляризации.

Различие в показателях преломления анизотропного кристалла для обыкновенной и необыкновенной волн можно использовать для разделения этих волн за счет эффекта полного внутреннего отражения; при этом также получается линейно поляризованный свет. На этом принципе основаны различные поляризационные призмы (призма Глана, призма Николя и т. п.), которые также используются в качестве поляризаторов.

Используя поляризатор, можно определить направление поляризации линейно поляризованной световой волны и установить сам факт линейной поляризации. Для этого вращают поляризатор относительно оси светового пучка и наблюдают за изменениями интенсивности прошедшего света. Если при некотором положении поляризатора свет полностью задерживается им, то исходный пучок линейно поляризован, причем направление поляризации ортогонально направлению пропускания ("оси") поляризатора в данном положении. В подобных экспериментах поляризатор выполняет функцию *анализатора*. При-

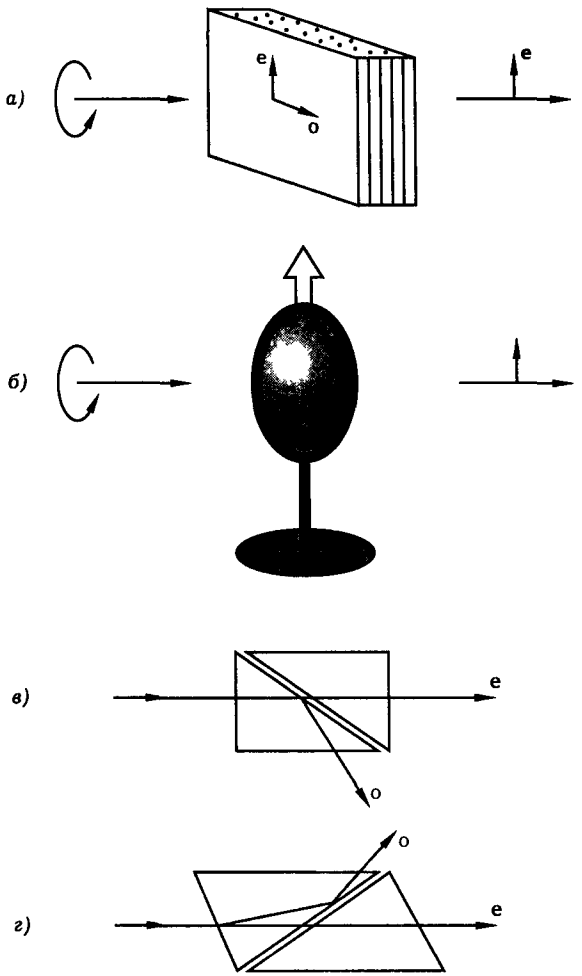



Рис. 2.7. Поляризаторы и анализаторы

меры поляризаторов и анализаторов показаны на рис. 2.7. Это турмалин (*а*), поляроид (*б*), призма Глана (*в*), призма Николя (*г*). Буквой "о" обозначена обыкновенная волна, буквой "е" — необыкновенная. Стрелка на оправе поляроида указывает направление его оси, т. е. направление поляризации световой волны, полностью пропускаемой поляроидом.

Для измерения параметров поляризации эллиптически поляризованного света применяют устройства, называемые *компенсаторами,* которые преобразуют эллиптически поляризованный свет в свет с линейной поляризацией. Компенсатор представляет собой пластинку, составленную из двух клиньев анизотропного кристалла так, что при сдвиге одного клина относительно другого толщина пластинки меняется. Такое устройство позволяет плавно варьировать толщину анизотропной пластинки и, следовательно, плавно менять разность фаз $\Delta\varphi$ между обыкновенной и необыкновенной волнами.

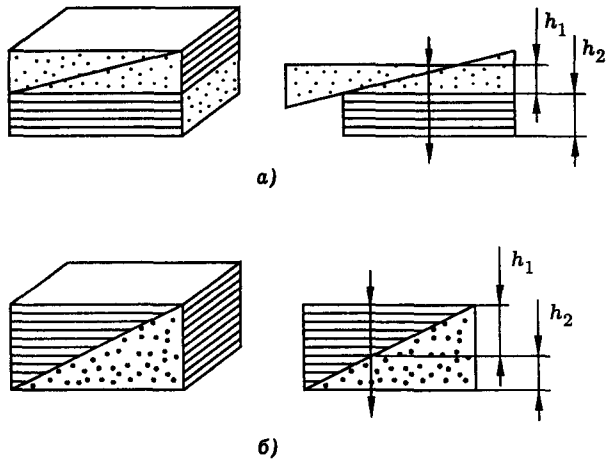



Рис. 2.8. Компенсаторы

На рис. 2.8, *а* показан *компенсатор Солейля*. В конфигурации, показанной на рисунке, компенсатор вносит сдвиг фазы $\Delta\varphi = (2\pi/\lambda)(n_e - n_o)(h_2 - h_1)$ между обыкновенной и необыкновенной волнами. Плавная регулировка фазового сдвига осуществляется путем смещения одного клина компенсатора относительно другого. На рис. 2.8, *б* представлена схема *компенсатора Бабине*. В конфигурации, показанной на рисунке, компенсатор вносит сдвиг фазы $\Delta\varphi = (2\pi/\lambda)(n_e - n_o)(h_1 - h_2)$ между обыкновенной и необыкновенной волнами. Плавная регулировка фазового сдвига осуществляется путем смещения светового пучка или компенсатора в поперечном направлении. В приведенных выше выражениях для фазового сдвига $n_o$ — показатель преломления анизотропного кристалла для обыкновенной волны, $n_e$ — для необыкновенной волны. Компенсаторы Солейля и Бабине изготавливаются из кварцевых клиньев. Для кварца $n_e = 1{,}553$, $n_o = 1{,}544$. Таким образом, измерение фазовых сдвигов, вносимых компенсаторами, сводятся к измерению смещений: либо смещения одного из клиньев компенсатора, либо смещения компенсатора относительно светового пучка. Поляризованный свет, пропущенный через систему компенсатор–анализатор, дает характерную картину чередования темных и светлых полос в поперечном сечении пучка. Естественный (неполяризованный) свет в тех же условиях сохраняет однородное распределение интенсивности.

Анализ поляризации плоской монохроматической световой волны. Рассмотрим плоскую монохроматическую световую волну вида (2.20). Как отмечалось выше, состояние поляризации волны (эллиптическая, круговая, линейная) однозначно определяется параметрами $A_1, A_2, \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, а также ориентацией векторов $\vec{x}_0$ и $\vec{y}_0$ в пространстве Анализ поляризации света сводится к экспериментальному измерению этих параметров.

Процедуру измерений можно построить следующим образом. Сначала с помощью компенсатора и анализатора преобразуем данную волну в волну с линейной поляризацией. В этом положении ребра компенсатора задают напра-

вление векторов $\vec{x}_0$ и $\vec{y}_0$. Измерив вносимую компенсатором разность фаз, найдем величину $\varphi$. Далее, не меняя положения компенсатора, установим анализатор на пропускание $x$-поляризации и измерим интенсивность прошедшего света $I_x$. Затем, повернув анализатор на 90°, установим его на пропускание $y$-поляризации и измерим интенсивность прошедшего света $I_y$. После этого определим $A_1$ и $A_2$ по формулам, связывающим между собой интенсивность и амплитуду световой волны (см. лекцию 3):

$$I_x = cA_1^2/8\pi, \quad I_y = cA_2^2/8\pi.$$

Можно выполнить измерение и более простым способом. Вращая анализатор вокруг оси светового пучка, мы будем наблюдать изменение интенсивности света, прошедшего через анализатор. Заметим направления оси анализатора, соответствующие максимуму ($I_{\max}$) и минимуму ($I_{\min}$) интенсивности. Очевидно, что первое из этих направлений определяет направление большой оси эллипса, а второе — направление его малой оси. Далее, так как интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды колебаний поля в световой волне, отношение осей эллипса поляризации можно определить по формуле

$$a/b = \sqrt{I_{\max}/I_{\min}}.$$

Измерение поляризации немонохроматического света. Как отмечалось выше, поле немонохроматической световой волны естественно рассматривать как случайный процесс. При этом характеристиками света являются различные средние: интенсивность, корреляционная функция и т. п. Математические определения этих понятий мы дадим ниже (см. ч. II). Здесь же остановимся на методах экспериментального измерения параметров поляризации. Заметим, что с точки зрения эксперимента усреднение может осуществляться как при обработке большого числа измерений, так и в процессе одного измерения за счет инерционности измерительного прибора.

Переходя к комплексной записи, представим поле плоской немонохроматической волны в виде (2.38), (2.39). Измерение параметров поляризации осуществляется с помощью компенсатора и анализатора. Сначала световая волна пропускается через компенсатор, вносящий фазовый сдвиг $\Delta\varphi = \varepsilon$ между компонентами поля $E_x$ и $E_y$ (оси $x$ и $y$ направлены вдоль ребер компенсатора), а затем — через анализатор, направление пропускания (ось) которого составляет угол $\theta$ с осью $x$ (рис. 2.9). На выходе анализатора возникает линейно поляризованная световая волна с интенсивностью

$$I = I(\theta, \varepsilon) = (c/8\pi)\langle|\mathcal{E}|^2\rangle, \tag{2.41}$$

где

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_x \cos\theta + \mathcal{E}_y e^{i\varepsilon} \sin\theta \tag{2.42}$$

и угловые скобки обозначают усреднение по времени. Интенсивность света $I = I(\theta, \varepsilon)$ измеряется измерительным прибором (рис. 2.9). Такие измерения повторяются для различных значений параметров $\theta$ и $\varepsilon$. Результаты измерений позволяют количественно охарактеризовать состояние поляризации световой волны, в частности определить элементы матрицы когерентности. В самом деле, подставив (2.42) в (2.41), получим

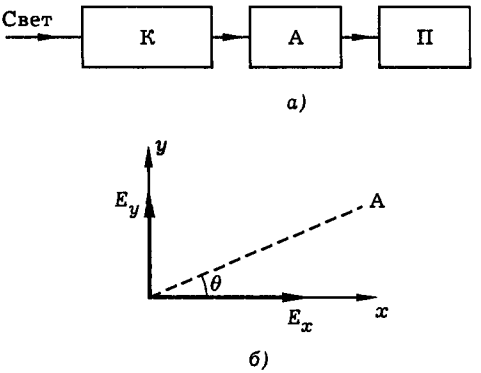



Рис. 2.9. Измерение поляризации немонохроматического света Схема измерения. К — компенсатор, А — анализатор, П — приемник (*а*). Ориентация оси анализатора (*б*)

$$I(\theta,\varepsilon) = (c/8\pi)(\mathcal{J}_{xx}\cos^2\theta + \mathcal{J}_{yy}\sin^2\theta + \\ + \mathcal{J}_{xy}e^{-i\varepsilon}\sin\theta\cos\theta + \mathcal{J}_{yx}e^{i\varepsilon}\sin\theta\cos\theta), \tag{2.43}$$

где $\mathcal{J}_{xx}$, $\mathcal{J}_{yy}$, $\mathcal{J}_{xy}$, $\mathcal{J}_{yx}$ — элементы матрицы когерентности (2.40). Пользуясь формулой (2.43), нетрудно показать, что

$$\mathcal{J}_{xx} = \frac{8\pi}{c}I(0°,0), \quad \mathcal{J}_{yy} = \frac{8\pi}{c}I(90°,0),$$

$$\mathcal{J}_{xy} = \frac{8\pi}{c}\left\{\frac{1}{2}\Big[I(45°,0) - I(135°,0)\Big] + \frac{i}{2}\left[I\Big(45°,\frac{\pi}{2}\Big) - I\Big(135°,\frac{\pi}{2}\Big)\right]\right\}, \tag{2.44}$$

$$\mathcal{J}_{yx} = \frac{8\pi}{c}\left\{\frac{1}{2}\Big[I(45°,0) - I(135°,0)\Big] - \frac{i}{2}\left[I\Big(45°,\frac{\pi}{2}\Big) - I\Big(135°,\frac{\pi}{2}\Big)\right]\right\}.$$

Формулы (2.44) выражают матрицу когерентности через экспериментально измеряемые величины.

Варьируя параметры $\theta$ и $\varepsilon$, можно измерить величину

$$P = \frac{I(\theta,\varepsilon)_{\max} - I(\theta,\varepsilon)_{\min}}{I(\theta,\varepsilon)_{\max} + I(\theta,\varepsilon)_{\min}}, \tag{2.45}$$

которая называется *степенью поляризации света.* Степень поляризации можно выразить через элементы матрицы когерентности. Из (2.43) и (2.45) следует, что

$$P = \sqrt{1 - \frac{4|\mathcal{J}|}{(\mathcal{J}_{xx} + \mathcal{J}_{yy})^2}}, \tag{2.46}$$

где определитель матрицы когерентности

$$|\mathcal{J}| = \mathcal{J}_{xx}\mathcal{J}_{yy} - \mathcal{J}_{xy}\mathcal{J}_{yx}. \tag{2.47}$$

Рассмотрим частные случаи.

Неполяризованный (естественный) свет. Так называется свет, у которого

$$I(\theta, \varepsilon) = \text{const} \tag{2.48}$$

для всех значений $\theta$ и $\varepsilon$. Из (2.43) видно, что в этом случае

$$\mathcal{J}_{xx} = \mathcal{J}_{yy} = \frac{1}{2} I_0 \frac{8\pi}{c}, \quad \mathcal{J}_{xy} = \mathcal{J}_{yx} = 0, \tag{2.49}$$

где интенсивность исходной световой волны

$$I_0 = \frac{c}{8\pi}(\mathcal{J}_{xx} + \mathcal{J}_{yy}).$$

По формулам (2.46), (2.47), (2.49) находим $P = 0$ Этот же результат вытекает и из (2.45), (2.48).

Полностью поляризованный свет. Положим

$$\mathcal{E}_x = A_1 \exp(\imath\varphi_1), \quad \mathcal{E}_y = A_2 \exp(i\varphi_2), \tag{2.50}$$

где $A_1$, $A_2$, $\varphi_1$, $\varphi_2$ — постоянные. Подставляя (2.50) в (2.40), получим

$$\widehat{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} A_1^2 & A_1 A_2 e^{-\imath\varphi} \\ A_1 A_2 e^{\imath\varphi} & A_2^2 \end{pmatrix},$$

где $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. При этом $|\mathcal{J}| = 0$ и $P = 1$.

Частично поляризованный свет. Модели неполяризованного и полностью поляризованного света являются идеализациями. Реальные световые пучки имеют степень поляризации $0 < P < 1$. Такой свет является частично поляризованным Отметим, что частично поляризованный свет можно представить как суперпозицию неполяризованной и полностью поляризованной компонент.

## Литература


1 *Борн М , Вольф Э.* Основы оптики — М . Наука, 1973

2 *Виноградова М Б., Руденко О В , Сухоруков А П* Теория волн — М Наука, 1979

3 *Ахманов С А , Дьяков Ю Е , Чиркин А. С* Введение в статистическую радиофизику и оптику — М Наука, 1981

4 *Ярив А , Юх П* Оптические волны в кристаллах — М Мир, 1987

5 *Аззам Р М , Башара Н М* Эллипсометрия и поляризованный свет — М Мир, 1981

6 *Сивухин Д В* Общий курс физики Оптика — М Наука, 1985

# Лекция 3

# Энергия света

*Поток энергии в световой волне. Интенсивность света. Световые пучки и импульсы: энергия, мощность, интенсивность Концентрация световой энергии во времени и в пространстве. Основные понятия фотометрии.*

Способность переносить энергию — одно из основных свойств света. В лекции показано, как возникает понятие энергии света в теории Максвелла. Обсуждаются предельные возможности концентрации световой энергии во времени и в пространстве. Приводятся численные оценки.

**Поток энергии в световой волне. Интенсивность света.** Представление об энергии светового поля непосредственно вытекает из уравнений Максвелла. Рассмотрим сначала наводящие соображения, относящиеся к плоской световой волне, а затем обобщим результат на случай светового поля общего вида.

Пусть плоская световая волна распространяется вдоль оси $z$ и имеет компоненты поля $E_x(z,t)$ и $H_y(z,t)$. Согласно формулам (2.1) в этом случае

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z}.$$

Умножим первое из этих уравнений на $E_x$, второе — на $H_y$ и сложим. Получим соотношение

$$\frac{1}{c}\left(E_x\frac{\partial E_x}{\partial t} + H_y\frac{\partial H_y}{\partial t}\right) = -\left(E_x\frac{\partial H_y}{\partial z} + H_y\frac{\partial E_x}{\partial z}\right) \tag{3.1}$$

Введем объемную плотность энергии поля

$$w = \frac{1}{8\pi}(E_x^2 + H_y^2). \tag{3.2}$$

Тогда соотношение (3.1) можно представить в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial S}{\partial z}, \tag{3.3}$$

где

$$S = \frac{c}{4\pi}E_x H_y. \tag{3.4}$$

Выясним физический смысл параметра $S$. Для этого рассмотрим световое поле в некоторой ограниченной области пространства. Пусть это будет прямоугольный параллелепипед высотой $z$ с площадью основания $\sigma$, расположенный как показано на рис. 3.1. Интегрируя равенство (3.3) по объему параллелепипеда, получим

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\sigma[S(t,z) - S(t,0)], \tag{3.5}$$

где

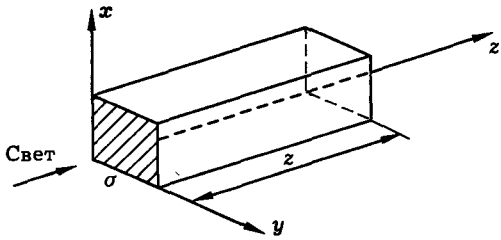



Рис. 3.1. К выводу закона сохранения энергии для световой волны

$$W = \int\limits_V w dV, \tag{3.6}$$

$W$ — энергия светового поля, находящегося внутри параллелепипеда, $V$ — объем параллелепипеда. Поскольку мы рассматриваем поле в вакууме, изменение энергии поля в некотором объеме может быть вызвано только потоком энергии через его границы. Следовательно, величина $S$ в формуле (3.5) имеет смысл *потока энергии* света. Как видно из формулы (3.3), размерность $S$ есть эрг/(см$^2$·с).

Для монохроматической плоской волны равенство (3.5) имеет тривиальный смысл, так как в этом случае $S(t,z) = S(t,0)$ и $W = \text{const}$. Однако для немонохроматической волны, в частности, светового импульса, производная $\partial W/\partial t$ может быть отлична от нуля, так как световой импульс пересекает границы параллелепипеда в разные моменты времени.

Итак, формулу (3.3) можно интерпретировать как закон сохранения энергии для плоской световой волны в вакууме. Теперь обобщим этот закон на случай произвольного светового поля, взаимодействующего с заряженными частицами. Будем исходить из уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \tag{3.7}$$

где $\vec{j}$ — плотность тока, создаваемого движением зарядов. Умножим первое уравнение скалярно на $\vec{H}$, а второе — на $\vec{E}$ и вычтем одно уравнение из другого. Получим

$$\frac{1}{c}\left(\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right) + \frac{4\pi}{c}\vec{j}\vec{E} = \vec{E}\operatorname{rot}\vec{H} - \vec{H}\operatorname{rot}\vec{E}. \tag{3.8}$$

Пользуясь формулой векторного анализа

$$\operatorname{div}\left[\vec{E},\vec{H}\right] = \vec{H}\operatorname{rot}\vec{E} - \vec{E}\operatorname{rot}\vec{H}, \tag{3.9}$$

соотношение (3.8) можно переписать в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{j}\vec{E} = -\operatorname{div}\vec{S}, \tag{3.10}$$

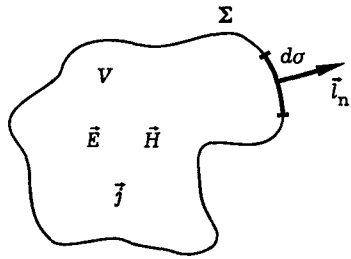



Рис 3.2. К выводу закона сохранения энергии для системы заряженных частиц в электромагнитном поле

где

$$w = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2), \tag{3.11}$$

$w$ — объемная плотность энергии поля,

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}, \vec{H}\right], \tag{3.12}$$

$\vec{S}$ — вектор потока энергии, или *вектор Пойнтинга.*

Проинтегрируем уравнение (3.10) по некоторому объему $V$. Получим

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \int\limits_V \vec{j}\vec{E}dV = -\int\limits_V \operatorname{div}\vec{S}dV, \tag{3.13}$$

где $W$ — полная энергия электромагнитного поля в объеме $V$, определяемая формулой (3.6). Предполагая, что электрические заряды представляют собой материальные точки, заменим интеграл в левой части уравнения (3.13) суммой по отдельным зарядам

$$\int\limits_V \vec{j}\vec{E}dV = \sum_i e_i\vec{v}_i\vec{E}, \tag{3.14}$$

где $\vec{v}_i$ — скорость заряда $e_i$, суммирование ведется по всем зарядам, находящимся в объеме $V$. Интеграл в правой части уравнения (3.13) преобразуем, используя теорему Гаусса

$$\int\limits_V \operatorname{div}\vec{S}dV = \int\limits_\Sigma \vec{S}\vec{l}_n d\sigma, \tag{3.15}$$

где $\vec{l}_n$ — единичный вектор нормали к элементу $d\sigma$ поверхности $\Sigma$, ограничивающей объем $V$ (рис. 3.2).

Используя уравнение движения заряда $m_i\dot{\vec{v}}_i = e_i\vec{E}$, нетрудно показать, что

$$\sum_i e_i\vec{v}_i\vec{E} = \frac{dK}{dt}, \tag{3.16}$$

где

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2, \tag{3.17}$$

$K$ — кинетическая энергия системы зарядов. Таким образом, приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}(W + K) = -\int\limits_{\Sigma} \vec{S}\vec{l}_{\text{n}} d\sigma, \tag{3.18}$$

которое показывает, что скорость изменения энергии электромагнитного поля и кинетической энергии системы зарядов в некотором объеме равна потоку энергии поля через поверхность этого объема.

Используя формулы (2.37), для плоской монохроматической волны можно записать

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}, \vec{H}\right] = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}, \left[\vec{n}, \vec{E}\right]\right] = \frac{c}{4\pi}E^2\vec{n} = \frac{c}{4\pi}H^2\vec{n}.$$

Отсюда с учетом формулы (3.11) получаем

$$\vec{S} = cw\vec{n}, \quad S = cw, \tag{3.19}$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор направления распространения волны. Таким образом, световая энергия перемещается в направлении распространения плоской волны. Скорость переноса энергии световой волной, распространяющейся в вакууме, равна $c$.

Интенсивность света. Рассмотрим плоскую гармоническую световую волну с компонентами

$$E_x = A\cos(\omega t - kz), \quad H_y = A\cos(\omega t - kz). \tag{3.20}$$

В этом случае модуль вектора Пойнтинга

$$S = \frac{c}{4\pi}A^2\cos^2(\omega t - kz) = \frac{c}{8\pi}A^2 + \frac{c}{8\pi}A^2\cos[2(\omega t - kz)]. \tag{3.21}$$

Видно, что поток энергии в световой волне содержит две составляющие: постоянную и осциллирующую во времени и в пространстве. В оптике частоты электромагнитных колебаний составляют около $10^{15}$ Гц. Измерительные приборы не способны отслеживать столь быстрые изменения, поэтому на практике может быть измерен лишь средний за период световых колебаний поток энергии

$$I = \widetilde{S} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T S dt, \quad T = 2\pi/\omega. \tag{3.22}$$

Эта величина называется *интенсивностью* световой волны.

Выражение для интенсивности через напряженность электрического поля $E$ волны имеет вид

$$I = \frac{c}{4\pi}\widetilde{E^2}, \tag{3.23}$$

где

$$\widetilde{E^2} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T E^2 dt. \tag{3.24}$$

Используя данное определение, нетрудно вывести соотношения, связывающие интенсивность с действительной амплитудой $A$ и комплексной амплитудой $\mathcal{E}$ волны. Полагая

$$E = A\cos(\omega t - kz), \tag{3.25}$$

или

$$E = \frac{1}{2}\mathcal{E}\exp[i(\omega t - kz)] + \text{к. с.}, \tag{3.26}$$

получим соответственно

$$I = \frac{c}{8\pi}A^2, \tag{3.27}$$

или

$$I = \frac{c}{8\pi}|\mathcal{E}|^2. \tag{3.28}$$

Данные формулы применимы для плоской монохроматической волны в вакууме. Обобщение на случай волны, распространяющейся в среде, дано в ч. IV. Размерность интенсивности, как и потока энергии, есть эрг/(см$^2$·с). Наряду с гауссовой единицей измерения, используется также внесистемная единица измерения интенсивности Вт/см$^2$ = $10^7$ эрг/(см$^2$·с).

**Световые пучки и импульсы: энергия, мощность, интенсивность.** В отличие от плоской волны, реальный световой пучок имеет конечный поперечный размер. Как показано в лекции 1, пучок можно описать квазиплоской волной, амплитуда которой зависит от координат в плоскости перпендикулярной направлению распространения:

$$E = A(x, y)\cos(\omega t - kz) \tag{3.29}$$

Аналогичным образом поле светового импульса можно описать квазиплоской квазигармонической волной, амплитуда которой зависит не только от координат, но и от времени:

$$E = A(x, y, t)\cos(\omega t - kz). \tag{3.30}$$

Энергетику световых пучков и импульсов характеризуют понятиями интенсивности света, полной мощности пучка и полной энергии импульса. Выражения для интенсивности света в моделях квазиплоской волны и квазиплоской квазигармонической волны получим, подставив выражения (3.29), (3.30) в формулу (3.23). При этом оказывается, что интенсивность света в пучке зависит от координат в плоскости поперечного сечения:

$$I(x, y) = \frac{c}{8\pi}A^2(x, y). \tag{3.31}$$

Интенсивность импульсного излучения зависит, кроме того, и от времени:

$$I(x,y,t) = \frac{c}{8\pi} A^2(x,y,t). \tag{3.32}$$

Полная мощность светового пучка определяется как интеграл от интенсивности по поперечному сечению пучка:

$$P = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} I(x,y)dx\,dy. \tag{3.33}$$

Аналогичным образом полная энергия импульса есть

$$W = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} I(x,y,t)dx\,dy\,dt. \tag{3.34}$$

Например, для осесимметричного гауссова пучка с распределением интенсивности

$$I(r) = I_0 \exp(-r^2/r_0^2) \tag{3.35}$$

полная мощность есть

$$P = \int\limits_0^{\infty} I(r)2\pi r dr = \pi r_0^2 I_0, \tag{3.36}$$

где $I_0$ — интенсивность в центре пучка, $r_0$ — его радиус.

Для измерения энергетических характеристик света используют его тепловое действие, а также явление фотоэффекта. Располагая измерительной аппаратурой с достаточным временны́м и пространственным разрешением, можно измерить поперечные распределения интенсивности непрерывного $I(x,y)$ и импульсного $I(x,y,t)$ излучений.

Для оценок удобно использовать такие параметры как эффективная интенсивность света $I_{эф}$, эффективная мощность импульса $P_{эф}$, эффективная напряженность электрического поля световой волны $E_{эф}$. Эффективная интенсивность непрерывного излучения определяется как отношение мощности пучка к площади его поперечного сечения

$$I_{эф} = P/S. \tag{3.37}$$

Для светового импульса

$$P_{эф} = W/\tau, \quad I_{эф} = W/(\tau S), \tag{3.38}$$

где $W$ — энергия импульса, $\tau$ — его длительность. Эффективная напряженность светового поля определяется как

$$E_{эф} = \sqrt{8\pi I_{эф}/c}. \tag{3.39}$$

Рассмотрим несколько примеров.

Солнечный свет. Интенсивность солнечного света вблизи поверхности Земли составляет около 0,1 Вт/см$^2$. Радиус земной орбиты $R = 1{,}5 \times 10^8$ км.

Отсюда можно определить полную мощность излучения Солнца. Она оказывается равной $P = 4\pi R^2 I = 3 \times 10^{26}$ Вт.

Гелий-неоновый лазер. Это газовый лазер непрерывного действия, излучающий свет с длиной волны $\lambda = 0{,}63$ мкм. Типичная мощность излучения составляет $P = 10^{-2}$ Вт. При радиусе пучка $r = 0{,}2$ см его эффективная интенсивность

$$I_{\text{эф}} = P/(\pi r^2) = 0{,}1\,\text{Вт/см}^2. \tag{3.40}$$

Это сравнительно небольшая интенсивность, она близка к интенсивности солнечного света на поверхности Земли. Относительно невелика и напряженность светового поля. Согласно (3.39) и (3.40)

$$E_{\text{эф}} = 3 \times 10^{-2}\,\text{СГСЭ} = 9\,\text{В/см}. \tag{3.41}$$

Лазер на углекислом газе. Этот лазер генерирует инфракрасное излучение на длине волны $\lambda = 10{,}6$ мкм. В непрерывном режиме мощность генерации составляет обычно $P = 10$–$100$ Вт. В импульсном режиме лазер генерирует импульсы с энергией $W = 0{,}1$ Дж при длительности импульса $\tau = 10^{-7}$ с и обладает эффективной мощностью $P_{\text{эф}} = 10^6$ Вт.

Лазер на гранате с неодимом. Твердотельный лазер на кристалле алюмоиттриевого граната, активированного ионами неодима ($\text{YAG:Nd}^{3+}$), излучает в ближнем инфракрасном диапазоне на длине волны $\lambda = 1{,}06$ мкм. В непрерывном режиме с возбуждаемого излучением газоразрядной лампы активного элемента длиной 6–8 см и диаметром около 1 см удается получить мощность $P = 1$–$10$ Вт. В импульсном режиме лазер генерирует импульс длительностью $\tau = 10^{-3}$ с с энергией $W = 1$ Дж (режим свободной генерации), при этом эффективная мощность излучения $P_{\text{эф}} = 10^3$ Вт. В режиме модулированной добротности лазер генерирует импульс длительностью $\tau = 10^{-8}$ с с энергией $W = 0{,}1$ Дж. Мощность такого ("гигантского") импульса составляет $P_{\text{эф}} = 10^7$ Вт.

**Концентрация световой энергии во времени и в пространстве.** Из формул (3.38), (3.39) видно, что при заданной энергии импульса мощность, интенсивность и напряженность светового поля определяются поперечными размерами пучка и длительностью импульса. Возникает вопрос: каковы предельные возможности концентрации световой энергии во времени и в пространстве?

Высокая монохроматичность и направленность лазерного излучения позволяют сконцентрировать его на очень малых пространственных и временны́х масштабах. Так, при фокусировке излучения мощностью $P = 10^7$ Вт (лазер на гранате с неодимом) в пятно радиусом $r = 10^{-2}$ см получим интенсивность $I = P/\pi r^2 = 3 \times 10^{10}$ Вт/см$^2$ и эффективную напряженность поля $E = 5 \times 10^6$ В/см.

В видимом диапазоне предельный диаметр фокального пятна имеет порядок длины световой волны (см. ч. III)

$$d_{\min} \approx \lambda \approx 0{,}5 \times 10^{-4}\,\text{см}, \tag{3.42}$$

а предельная длительность светового импульса определяется периодом колебаний поля

$$\tau_{\min} \approx T = 2\pi/\omega \approx 2 \times 10^{-15}\,\text{с}. \tag{3.43}$$

Переход к таким масштабам позволяет повысить интенсивность света при той же полной энергии еще на 8–10 порядков.

Устанавливаемые формулами (3.42), (3.43) фундаментальные пределы концентрации световой энергии уже достигнуты современной лазерной физикой. Интересные возможности, открывающиеся в связи с этим перед физической оптикой, мы обсудим в дальнейшем (см. ч. IV). Здесь же отметим только, что поистине к гигантским значениям интенсивности и напряженности светового поля приводит концентрация излучения мощных и сверхмощных лазерных систем. Так, на лазерных установках для управляемого термоядерного синтеза получены импульсы с энергией $W = 10^4$–$10^5$ Дж. При длительности $\tau = 10^{-9}$ с такой импульс имеет мощность $P = 10^{13}$–$10^{14}$ Вт. Фокусировка пучка позволяет достичь интенсивности $I = 10^{17}$–$10^{19}$ Вт/см$^2$ и напряженности светового поля $E = 10^{10}$ В/см, превышающей напряженность внутриатомного кулоновского поля

$$E_{\text{а}} = e/a_0^2 = 5 \times 10^9 \text{ В/см}. \tag{3.44}$$

Здесь $e = 4{,}8 \times 10^{-10}$ СГСЭ — заряд электрона, $a_0 = 0{,}5 \times 10^{-8}$ см — боровский радиус.

**Основные понятия фотометрии.** Для описания света обычных (нелазерных) источников используют фотометрические понятия и величины. К ним относятся: поток излучения, сила света, освещенность поверхности, энергетическая светимость поверхности, яркость источника света. В этом разделе даны определения указанных величин и рассмотрены примеры их использования.[1]

Поток излучения определяется как отношение энергии $dW$, переносимой светом через произвольную поверхность, к промежутку времени $dt$:

$$\Phi = dW/dt.$$

Эта величина имеет размерность эрг·с$^{-1}$.

Сила света определяется как отношение потока излучения $d\Phi$ к телесному углу $d\Omega$, в котором распространяется излучение:

$$I = d\Phi/d\Omega.$$

Размерность этой величины есть эрг·с$^{-1}$·стерад$^{-1}$.

Освещенность поверхности определяется как отношение потока излучения $d\Phi$ к площади $dS$ облучаемого элемента поверхности:

$$\varepsilon = d\Phi/dS.$$

Размерность освещенности есть эрг·с$^{-1}$·см$^{-2}$.

Энергетическая светимость поверхности определяется как отношение потока излучения $d\Phi$ к площади $dS_{\text{и}}$ элемента излучающей поверхности:

$$R = d\Phi/dS_{\text{и}}.$$

Размерность светимости есть эрг·с$^{-1}$·см$^{-2}$.

[1] Мы используем энергетические единицы измерения фотометрических величин. Для перехода к единицам, основанным на восприятии света глазом (кандела и др.), нужно умножить числовые значения величин на фактор видности, зависящий от длины световой волны (см., например, [12]).

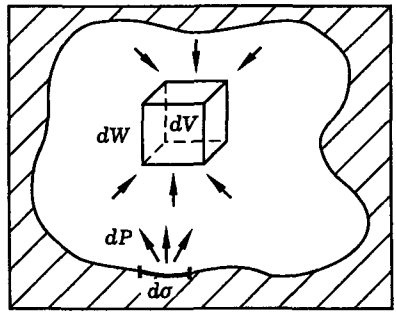



Рис. 3 3 К расчету энергетических характеристик теплового излучения

Яркость источника света определяется как отношение силы света $dI$ к площади проекции $dS_\perp$ светящегося элемента поверхности на плоскость, перпендикулярную направлению наблюдения:

$$B = dI/dS_\perp,$$

где

$$dS_\perp = dS_0 \cos\theta,$$

$dS_0$ — площадь элемента поверхности источника, $\theta$ — угол между нормалью к светящейся поверхности и направлением на точку наблюдения. Размерность яркости есть эрг·с$^{-1}$·стерад$^{-1}$·см$^{-2}$. Познакомимся с применением фотометрических величин на конкретных примерах.

Излучательная способность тела и энергия теплового излучения. Рассмотрим в качестве примера энергетические характеристики теплового излучения. Пусть внутри нагретого тела имеется полость, заполненная равновесным тепловым излучением (рис. 3.3). Не касаясь пока вопроса о спектральном составе излучения, найдем связь между энергетической светимостью стенок полости и объемной плотностью энергии излучения в полости.

Введем следующие обозначения: $d\sigma$ — площадь элемента поверхности полости, $dP$ — мощность, излучаемая площадкой $d\sigma$ во всех направлениях, $dV$ — элемент объема полости, $dW$ — энергия излучения в объеме $dV$,

$$\rho = dP/d\sigma, \tag{3.45}$$

$\rho$ — энергетическая светимость (излучательная способность) поверхности полости,

$$u = dW/dV, \tag{3.46}$$

$u$ — объемная плотность энергии излучения.

Запишем мощность излучения площадки $d\sigma$ в направлении элемента объема $dV$ в виде

$$dP(d\sigma, \theta, d\Omega) = B(\theta)\cos\theta d\sigma\, d\Omega, \tag{3.47}$$

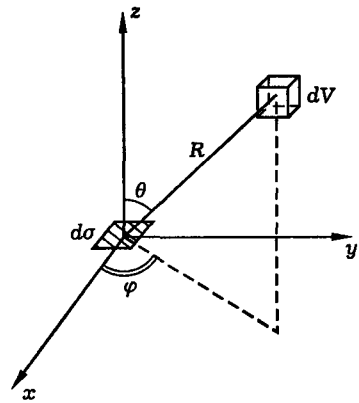



Рис. 3.4. К вычислению объемной плотности энергии теплового излучения

где $B(\theta)$ — яркость излучения, $\theta$ — угол между нормалью к площадке $d\sigma$ и направлением от $d\sigma$ к $dV$, $d\Omega$ — телесный угол, под которым виден объем $dV$ из центра площадки $d\sigma$ (рис. 3.4). Данную формулу можно рассматривать как определение яркости $B(\theta)$.

На рис. 3.4 показаны сферические координаты $R$, $\theta$, $\varphi$ элементарного объема $dV$ относительно площадки $d\sigma$. Объем $dV$ виден из центра площадки $d\sigma$ под телесным углом

$$d\Omega = \frac{dS}{R^2} = \sin\theta d\theta\, d\varphi. \tag{3.48}$$

В свою очередь, площадка $d\sigma$ видна из центра объема $dV$ под телесным углом

$$do = \frac{d\sigma_\perp}{R^2} = \frac{\cos\theta d\sigma}{R^2}. \tag{3.49}$$

Используя (3.47), (3.48), полную мощность излучения $dP$ площадки $d\sigma$ (во всех направлениях) можно записать в виде

$$dP = d\sigma \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} d\theta B(\theta)\cos\theta\, \sin\theta. \tag{3.50}$$

Далее необходимо конкретизировать вид зависимости $B(\theta)$. Для равновесного теплового излучения хорошо выполняется закон

$$B(\theta) = B = \text{const}, \tag{3.51}$$

называемый законом Ламберта. Подставляя (3.51) в (3.50), получим

$$dP = \pi B d\sigma. \tag{3.52}$$

Считая, что излучение поступает в объем $dV$ со всех сторон равномерно, запишем

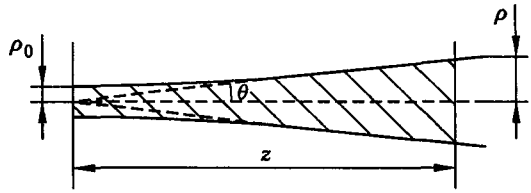



Рис. 3.5. К расчету яркости лазерного излучения

$$dW(dV, dt, d\sigma) = \frac{do}{4\pi} dW(dV, dt), \tag{3.53}$$

где $dW(dV, dt, d\sigma)$ — энергия, поступающая в объем $dV$ за время $dt$ со стороны площадки $d\sigma$, $dW(dV, dt)$ — полная энергия, поступающая в объем $dV$ за время $dt$ (со всех сторон). Величины $dW(dV, dt, d\sigma)$ и $dP(d\sigma, \theta, d\Omega)$ связаны между собою формулой

$$dW(dV, dt, d\sigma) = dP(d\sigma, \theta, d\Omega)dt. \tag{3.54}$$

Объемная плотность энергии излучения

$$u = \frac{dW}{dV} = \frac{dW(dV, dt)}{dV}, \tag{3.55}$$

где

$$dV = cdS\,dt, \tag{3.56}$$

$c$ — скорость света. Из формул (3.45)–(3.49), (3.51)–(3.56) получаем

$$\rho = \frac{c}{4}u. \tag{3.57}$$

Данная формула выражает искомое соотношение между энергетической светимостью (излучательной способностью) $\rho$ поверхности полости и объемной плотностью энергии $u$ равновесного теплового излучения в полости нагретого тела.

Сравнительные характеристики лазерного и солнечного света. Применительно к лазерному пучку яркость $B$ можно определить как интенсивность $I$, отнесенную к телесному углу пучка $\Omega$:

$$B = I/\Omega.$$

Введем угол расходимости пучка $\theta$, как показано на рис. 3.5. Тогда

$$\Omega = \pi\theta^2,$$

причем считается, что $\theta \ll 1$. Полагая далее

$$I = P/\pi\rho_0^2,$$

где $P$ — мощность, $\rho_0$ — начальный радиус пучка, получим

$$B = \frac{P}{\pi^2 \rho_0^2 \theta^2}.$$

Для лазерного пучка

$$\theta = \frac{\lambda}{2\pi\rho_0},$$

где $\lambda$ — длина волны излучения (см. дополнение 13), следовательно

$$B = 4P/\lambda^2.$$

Например, для гелий-неонового лазера с параметрами $\lambda = 0{,}63$ мкм, $P = 1$ мВт получаем $B = 10^6$ Вт·см$^{-2}$·стерад$^{-1}$.

Яркость Солнца вычислим по формуле

$$B = P/(4\pi R)^2,$$

где $P$ — полная мощность излучения Солнца, $R$ — радиус Солнца. Полагая $P = 3{,}83 \times 10^{26}$ Вт, $R = 6{,}96 \times 10^{10}$ см, получим $B = 5 \times 10^2$ Вт·см$^{-2}$·стерад$^{-1}$. Таким образом, яркость лазера на несколько порядков превышает яркость Солнца.

Еще выше превосходство лазера в спектральной яркости $B_\lambda$, которая определяется как отношение яркости $B$ к спектральной ширине $\Delta\lambda$ света

$$B_\lambda = B/\Delta\lambda.$$

Для гелий-неонового лазера $\Delta\lambda = 6 \times 10^{-10}$ нм (что соответствует $\Delta\nu = 500$ Гц), следовательно, $B_\lambda = 1{,}5 \times 10^{15}$ Вт·см$^{-2}$ · стерад$^{-1}$·нм$^{-1}$. В то же время для Солнца $\Delta\lambda = 400$ нм и $B_\lambda = 1{,}25$ Вт·см$^{-2}$·стерад$^{-1}$· нм$^{-1}$.

## Литература


1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. — М.: Наука, 1973.
2. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. — М.: Наука, 1973.
3. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. — М.: Наука, 1979.
4. *Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г.* Справочник по элементарной физике. — М.: Наука, 1988.
5. *Ландсберг Г. С.* Оптика. — М.: Наука, 1976.
6. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Оптика. — М.: Наука, 1985.
7. *Приезжев А. В., Тучин В. В., Шубочкин Л. П.* Лазерная диагностика в биологии и медицине. — М.: Наука, 1989.
8. *Коротеев Н. И., Шумай И. Л.* Физика мощного лазерного излучения. — М.: Наука, 1991.
9. *Рэди Дж.* Действие мощного лазерного излучения. — М.: Мир, 1974.
10. *Калашников С. Г.* Электричество. — М.: Наука, 1977.
11. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. — М.: Наука, 1976.
12. *Матвеев А. Н.* Оптика. — М.: Высшая школа, 1985.
13. Физическая энциклопедия/Под ред. А. М. Прохорова. — М.: СЭ, 1990.
14. *Демтредер В.* Лазерная спектроскопия. — М.: Наука, 1985.
15. Физические величины. Справочник/Под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. — М.: Энергоатомиздат, 1991.

# Лекция 4

# Световое давление

*Импульс световой волны. Измерение светового давления. Опыты Лебедева. Световое давление на классический атом. Момент импульса световой волны. Фотон. Оптическое охлаждение.*

Вводятся понятия импульса и момента импульса световой волны. Устанавливается связь между энергией и импульсом света. Обсуждаются проблемы измерения и использования светового давления.

**Импульс световой волны.** Из теории Максвелла следует, что световая волна несет не только энергию, но и *импульс*. В плоской монохроматической волне объемная плотность импульса есть

$$G = I/c^2, \tag{4.1}$$

где $I$ — интенсивность, $c$ — скорость света. В соответствии с законами механики на поглощающие, отражающие и преломляющие свет тела действуют силы, называемые силами *светового давления*. Световое давление на полностью поглощающее свет тело

$$\mathcal{P} = I/c = \widetilde{w}, \tag{4.2}$$

где $\widetilde{w}$ — объемная плотность энергии поля, усредненная по периоду световых колебаний. Если тело частично отражает свет, причем коэффициент отражения равен $R$, то в силу закона сохранения импульса

$$\mathcal{P} = (1 + R)I/c. \tag{4.2a}$$

В частности, световое давление на полностью отражающее тело, для которого $R = 1$, вдвое превышает давление на поглощающее тело, для которого $R = 0$. В этом смысле давление света на зеркало аналогично давлению газа на стенку сосуда. Последнее, как известно, объясняется тем, что, сталкиваясь со стенкой, молекулы газа передают ей импульс.

Как правило, силы светового давления весьма малы. В лазерных пучках, однако, они могут быть значительны, что позволяет использовать световое давление для управления движением микрочастиц (см. дополнение 3). Световое давление на атом способно затормозить его тепловое движение; этот эффект используют для получения сверхнизких температур. В принципе, на основе светового давления можно создать двигатель, в котором в качестве реактивной струи используется мощный пучок света.

Существование светового давления представлялось совершенно естественным сторонникам корпускулярной теории света: корпускулы должны нести количество движения, которое передается находящимся на их пути телам. Еще в 1619 г. Кеплер, исходя из представлений о солнечном свете как о потоке корпускул, объяснил искривление хвостов комет давлением солнечного излучения. С точки зрения волновой теории возникновение отличных от нуля постоянных сил в быстропеременном волновом поле не кажется столь очевидным. Тем не

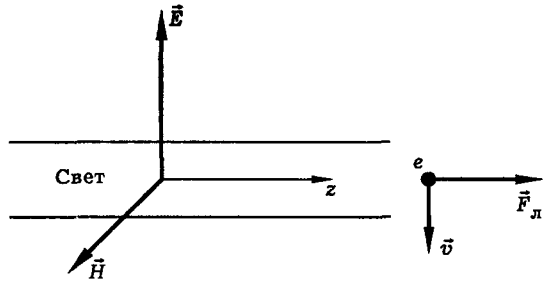



Рис 4 1 Механизм светового давления

менее почти сразу после установления электромагнитной природы света Максвелл вычислил величину светового давления на поверхность поглощающих и отражающих свет тел.

Механизм светового давления можно объяснить следующим образом. Предположим, что на поверхность некоторого тела падает по нормали плоская монохроматическая световая волна типа "$E_x, H_y$", т. е. волна, в которой вектор электрического поля совершает колебания вдоль оси $x$, а вектор напряженности магнитного поля колеблется вдоль оси $y$ (рис. 4.1). Под действием электрического поля волны элементарные заряды тела будут совершать колебания вдоль оси $x$. При этом со стороны магнитного поля волны на них действует сила Лоренца

$$\vec{F}_л = \frac{e}{c}\left[\vec{v}, \vec{H}\right], \tag{4.3}$$

направленная вдоль оси $z$, т. е. по ходу световой волны и по нормали к поверхности тела Это и есть элементарная сила светового давления.

Вычислим световое давление, предполагая, что свет полностью поглощается телом. Для этого воспользуемся уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}. \tag{4.4}$$

Здесь $\vec{j}$ — плотность тока, которая может быть записана в виде

$$\vec{j} = ne\vec{v}, \tag{4.5}$$

где $e$ и $\vec{v}$ — заряд и скорость электрона, $n$ — число электронов в кубическом сантиметре объема. В соответствии с формулой (4.3) на электроны, находящиеся в единице объема среды, действует сила

$$f = nF_л = n\frac{e}{c}vH,$$

направленная вдоль оси $z$. Используя формулу (4.5), эту силу можно записать в виде

$$f = \frac{1}{c}jH. \tag{4.6}$$

Теперь искомое световое давление есть

$$\mathcal{P} = \int_0^\infty \widetilde{f} dz, \tag{4.7}$$

где знак "~" обозначает усреднение по периоду световых колебаний.

Для плоской монохроматической световой волны с компонентами поля

$$E_x = A\cos(\omega t - kz), \quad H_y = A\cos(\omega t - kz) \tag{4.8}$$

из уравнений (4.4) получаем

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} j_x. \tag{4.9}$$

Умножим первое из уравнений (4.9) на $E_x$, второе — на $H_y$ и сложим. Тогда получим уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}(E_x H_y) - f, \tag{4.10}$$

где

$$w = \frac{1}{8\pi}(E_x^2 + H_y^2), \tag{4.11}$$

$w$ — объемная плотность энергии светового поля, а сила $f$ определяется формулой

$$f = \frac{1}{c} j_x H_y. \tag{4.12}$$

Теперь усредним уравнение (4.10) по периоду световых колебаний $T = 2\pi/\omega$. Принимая во внимание, что

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} E_x H_y \right\rangle = 0,$$

получим

$$\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial z} = -\widetilde{f}. \tag{4.13}$$

Наконец, подставив (4.13) в (4.7), получим для светового давления формулу

$$\mathcal{P} = \widetilde{w}, \tag{4.14}$$

которая совпадает с (4.2). Далее, записав световое давление в виде $\mathcal{P} = F/S$, где $F$ — сила давления, $S$ — площадь поперечного сечения светового пучка, используя второй закон Ньютона, согласно которому $F = dp/dt$ и вводя объемную плотность импульса световой волны $G$ с помощью формулы $dp = GdV$, где $dV = Scdt$, $c$ — скорость света, приходим к формуле (4.1). Этот результат получил Максвелл в 1873 г.

В 1879 г. Бартоли вычислил световое давление, основываясь на термодинамических соображениях. Лебедев в своей статье, подводящей итог экспериментов по измерению светового давления, излагает соображения Бартоли следующим образом: "Бартоли исходит из известного основного факта, который

в теории тепла называется вторым принципом термодинамики — именно, что невозможно без затраты работы перевести тепловую энергию с более холодного тела на более теплое. Бартоли указал на то, что всякое тело испускает лучи и что, в принципе, вполне возможно построить машину, состоящую из полого абсолютно зеркального цилиндра с перемещающимся в нем зеркальным поршнем; при помощи этой машины мы могли бы, выдвигая поршень, всасывать в цилиндр лучистую энергию холодного тела, потом, перенеся цилиндр к теплому телу, переводить в это последнее лучистую энергию, вдвигая поршень подобно тому, как при помощи садового насоса мы можем всасывать воду и выпрыскивать ее на значительную высоту. Хотя практическому выполнению такой машины и представляются огромные трудности, тем не менее принципиально возможность ее выполнения вполне обеспечена, поэтому Бартоли заключил, что второй принцип термодинамики только в том случае не будет нарушен, если переведение лучистой энергии из холодного тела в более теплое тело будет происходить с затратой работы. Другими словами, перемещение поршня должно преодолевать некоторую силу, обусловленную давлением лучей на поршень. Таким образом, Максвелл и Бартоли пришли к одинаковому утверждению, что световые лучи давят на те тела, на которые они падают".

**Измерение светового давления. Опыты Лебедева.** Оценки с помощью формулы (4.2а) показывают, что световое давление весьма мало. Так, давление солнечного света с интенсивностью $I = 0{,}1$ Вт/см$^2$ на зеркало ($R = 1$) составляет $\mathcal{P} = 2I/c \approx 10^{-4}$ дин/см$^2$. Поэтому регистрация светового давления с нелазерными источниками света оказывается довольно трудной экспериментальной задачей. Световое давление маскируется различными сопутствующими эффектами, главным из них оказывается световой нагрев пробного тела.

Первое корректное измерение светового давления было выполнено русским физиком П. Н. Лебедевым в 1898 г. В его опытах (рис. 4.2) свет дуговой лампы направлялся с помощью оптической системы на легкое крылышко из платиновой фольги. Крылышко было подвешено на упругой нити в откачанном сосуде. Угловое отклонение крылышка светом можно было измерить, а энергию падающего светового пучка вычислить по результатам калориметрических измерений. Основная трудность опыта была связана с тем, что световое давление маскируется радиометрическими силами и воздействием на крылышко конвективных потоков газа. Появление радиометрических сил обусловлено тем, что молекулы газа, сталкивающиеся с нагретой поверхностью крылышка, приобретают дополнительную скорость. В результате возникает избыточное давление на нагретую поверхность. Чтобы исключить радиометрические силы, Лебедев использовал максимально тонкую фольгу (толщиной около 0,02 мм) с тем, чтобы температура обеих поверхностей крылышка быстро выравнивалась за счет теплопроводности. Кроме того, радиометрические силы можно уменьшить, понижая давление воздуха в сосуде. Для исключения конвекции Лебедев охлаждал свой прибор и использовал подвижную систему зеркал, позволяющую направлять свет на обе поверхности крылышек. Полученные результаты Лебедев сформулировал следующим образом:

1. "Падающий пучок света производит давление как на поглощающие, так и на отражающие поверхности; эти пондеромоторные силы не связаны с уже известными конвекционными и радиометрическими силами, вызываемыми нагреванием.

2. Силы давления света прямо пропорциональны энергии падающего луча и не зависят от цвета (от длины волны).

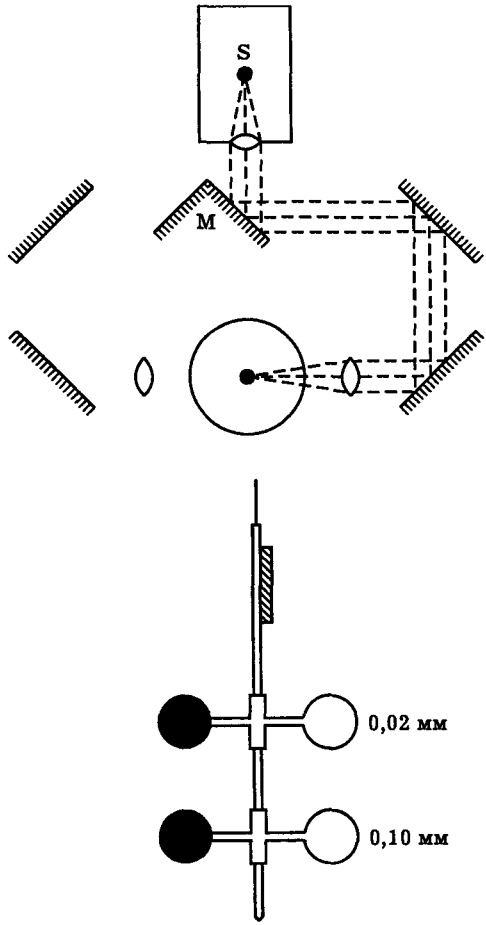



Рис. 4.2. Схема опыта Лебедева по измерению светового давления

3. Наблюдаемые силы давления света в пределах погрешностей наблюдений количественно равны максвелло-бартолиевым силам давления лучистой энергии.

Таким образом, существование максвелло-бартолиевых сил давления опытным путем установлено для лучей света."

**Световое давление на классический атом.** Световое давление можно использовать для управления движением атомов или молекул. Оценим давление света на атом, используя классическую модель атома. Будем считать, что внешний ("оптический") электрон, имеющий заряд $e$ и массу $m$, удерживается вблизи положительно заряженного ядра электростатическими силами. При смещении электрона на расстояние $x$ относительно ядра возникает квазиупругая кулоновская сила $F_в = -\alpha x$, стремящаяся вернуть электрон в положение равновесия. Уравнение движения электрона имеет вид

$$\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m}F(t), \tag{4.15}$$

где $\omega_0 = \sqrt{\alpha/m}$ — собственная частота колебаний электрона в атоме, $\Gamma$ — параметр, описывающий затухание колебаний, $F(t)$ — внешняя сила. Уравнение (4.15) представляет собой хорошо известное из механики уравнение осциллятора; следует заметить, что и в оптике модель осциллятора — одна из наиболее важных.

Расчет светового давления на атом проведем в два этапа. Сначала рассчитаем поведение осциллятора в электрическом поле световой волны, а затем определим силу Лоренца, связанную с воздействием магнитного поля волны.

Пусть на атом воздействует гармоническая световая волна с компонентами поля $E_x, H_y$, где

$$E_x = \frac{1}{2}A\exp(i\omega t) + \text{к. с.}, \tag{4.16}$$

$$H_y = \frac{1}{2}A\exp(i\omega t) + \text{к. с.} \tag{4.17}$$

Пренебрегая сначала действием магнитного поля, положим

$$F = eE_x. \tag{4.18}$$

Тогда уравнение (4.15) приобретает вид

$$\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m}E_x. \tag{4.19}$$

Решение уравнения (4.19) ищем в виде

$$x(t) = \frac{1}{2}\tilde{x}\exp(i\omega t) + \text{к. с.} \tag{4.20}$$

Подставив (4.16) и (4.20) в (4.19), найдем

$$\tilde{x} = \frac{e}{m}\frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma}. \tag{4.21}$$

Итак, движение электрона под действием электрического поля волны описывается формулами (4.20), (4.21).

Теперь вычислим силу Лоренца, действующую на электрон со стороны магнитного поля световой волны. Полагая $\vec{v} = \vec{x}_0\dot{x}$, $\vec{H} = \vec{y}_0 H_y$, получим

$$\vec{F}_л = \frac{e}{c}\left[\vec{v}, \vec{H}\right] = \vec{z}_0\frac{e}{c}\dot{x}H_y, \tag{4.22}$$

где $\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$, $\vec{z}_0$ — орты декартовой системы координат, $\dot{x} = dx/dt$. Сила светового давления есть сила Лоренца, усредненная по периоду световых колебаний:

$$F_д = \tilde{F}_л. \tag{4.23}$$

Подставив (4.17), (4.20) в (4.22) и выполнив усреднение по периоду $T = 2\pi/\omega$, получим

$$\vec{F}_{\text{д}} = \vec{z}_0 \frac{e}{c}\frac{1}{4} i\omega(\tilde{x}A^* - \tilde{x}^* A) \tag{4.24}$$

(здесь и далее звездочка обозначает комплексное сопряжение) или, с учетом (4.21),

$$\vec{F}_{\text{д}} = \vec{z}_0 \frac{e^2}{2mc}|A|^2 \frac{\omega^2\Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2}. \tag{4.25}$$

Итак, формула (4.25) определяет силу светового давления на классический атом. Полученный результат удобно представить в виде

$$\vec{F}_{\text{д}} = \vec{z}_0 \mathcal{P}\sigma, \tag{4.26}$$

где $\vec{z}_0$ — единичный вектор направления распространения световой волны, $\mathcal{P} = I/c$ — световое давление, $I = c|A|^2/8\pi$ — интенсивность света,

$$\sigma = \frac{4\pi e^2}{mc}\frac{\omega^2\Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2}, \tag{4.27}$$

$\sigma$ — сечение поглощения света атомом (см. лекцию 7). Заметим, что давление света на атом имеет резонансный характер: оно максимально, когда частота света совпадает с собственной частотой колебаний электрона в атоме, т. е. $\omega = \omega_0$. В этом случае

$$\sigma = \sigma_{\max} = 4\pi e^2/(mc\Gamma). \tag{4.28}$$

Сделаем численную оценку. Время радиационного затухания колебаний оптического осциллятора можно оценить как $\tau = 10^{-8}$ с (см. лекцию 5). При этом $\Gamma = 1/\tau = 10^8$ с$^{-1}$ и оценка по формуле (4.28) дает $\sigma_{\max} = 10^{-9}$ см$^2$. Полученная оценка примерно соответствует параметрам перехода $3\text{s}(^2\text{S}_{1/2}) \to 3\text{p}(^2\text{P}_{3/2})$ атома натрия, для которого $\tau = 1{,}6 \times 10^{-8}$ с, $\sigma = 1{,}6 \times 10^{-9}$ см$^2$.

**Момент импульса световой волны.** Под действием электрического поля циркулярно поляризованной световой волны заряженные частицы вещества должны совершать вращательное движение. Отсюда следует, что свет обладает моментом импульса. Вычислим момент импульса поляризованной по кругу световой волны на примере взаимодействия с классическим осциллятором.

Пусть электрическое поле световой волны есть

$$\vec{E} = \vec{x}_0 E_x + \vec{y}_0 E_y, \tag{4.29}$$

где

$$E_x = \frac{1}{2} iA\exp(i\omega t) + \text{к. с.}, \quad E_y = \frac{1}{2} A\exp(i\omega t) + \text{к. с.} \tag{4.30}$$

Уравнение колебаний элементарного оптического осциллятора запишем в виде

$$\ddot{\vec{r}} + \Gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{e}{m}\vec{E}, \tag{4.31}$$

где $e$ и $m$ — заряд и масса электрона, $\omega_0$ — собственная частота колебаний осциллятора, $\Gamma$ — коэффициент затухания колебаний. Решение уравнения (4.31) ищем в виде

$$\vec{r} = \vec{x}_0 x + \vec{y}_0 y, \tag{4.32}$$

где

$$x(t) = \frac{1}{2} i a \exp(i\omega t) + \text{к. с.}, \quad y(t) = \frac{1}{2} a \exp(i\omega t) + \text{к. с.} \tag{4.33}$$

Подставив (4.29), (4.30), (4.32), (4.33) в (4.31), получим

$$a = \frac{e}{m} \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma}. \tag{4.34}$$

Формулы (4.32)–(4.34) показывают, что в поле циркулярно поляризованной световой волны оптический электрон элементарного осциллятора вращается по окружности. Мощность, передаваемая светом электрону, есть

$$dW/dt = e\vec{E}\dot{\vec{r}} = e(E_x\dot{x} + E_y\dot{y}). \tag{4.35}$$

Одновременно свет передает электрону момент импульса, причем скорость этого процесса есть

$$d\vec{N}/dt = e\left[\vec{r}, \vec{E}\right] = \vec{z}_0 e(xE_y - yE_x). \tag{4.36}$$

Здесь использована известная из механики теорема моментов, согласно которой скорость изменения момента импульса системы равна моменту внешних сил. Подставим (4.30), (4.33) в (4.35), (4.36) и выполним усреднение по периоду световых колебаний. Получим

$$\langle d\vec{N}/dt\rangle = \vec{z}_0(1/\omega)\langle dW/dt\rangle. \tag{4.37}$$

Отсюда заключаем, что в циркулярно поляризованной световой волне момент импульса $\vec{N}$ и энергия $W$, усредненные по периоду световых колебаний, связаны соотношением

$$\widetilde{\vec{N}} = \vec{z}_0 \widetilde{W}/\omega, \tag{4.38}$$

где $\omega$ — частота света, $\vec{z}_0$ — единичный вектор направления распространения волны.

Формула (4.38) дает искомую величину момента импульса световой волны, поляризованной по кругу. Сделаем численную оценку. Световой импульс с энергией $W = 1$ Дж на длине волны $\lambda = 0{,}5$ мкм, имеющий круговую поляризацию, несет момент количества движения

$$N = W/\omega = W\lambda/2\pi c = 2{,}5 \times 10^{-9}\ \text{эрг} \cdot \text{с}.$$

Момент импульса света можно определить экспериментально, измерив момент силы, действующий на пластинку из анизотропного кристалла при прохождении через нее пучка поляризованного света. Так, четвертьволновая пластинка преобразует линейно поляризованный свет в свет с круговой поляризацией и наоборот (см. лекцию 2 и ч. IV). При таком преобразовании момент импульса света полностью передается пластинке, поскольку линейно поляризованный свет не обладает моментом импульса. Следовательно, на пластинку будет действовать момент силы

$$M = P/\omega = P\lambda/2\pi c, \tag{4.39}$$

где $P$ — мощность света. Например, при $P = 100$ Вт, $\lambda = 0{,}5$ мкм получим $M = 2{,}5 \times 10^{-7}$ дин·см. Эта оценка показывает, что измерение момента импульса света представляет собой весьма трудную задачу. Успешные опыты были проделаны с кварцевыми пластинками, после прохождения которых свет менял направление вращения вектора $\vec{E}$ на противоположное.

Измерение момента импульса света. Впервые идею о том, что циркулярно поляризованный свет должен обладать моментом импульса, высказал в 1897 г. профессор университета в Тарту А. И. Садовский. Он же предложил способ измерения момента импульса света, основанный на пропускании светового пучка через анизотропную кристаллическую пластинку. "... всякий аппарат, перерабатывающий плоско поляризованный свет в поляризованный по кругу, должен стремиться придти во вращение..." — отмечал Садовский в своей работе [5]. В 1935–1936 гг. Холборн в Англии [16] и Бет в США [17] экспериментально доказали существование момента импульса у циркулярно поляризованного света. В опытах Бета циркулярно поляризованная волна дважды пропускалась через полуволновую пластинку из кварца. Пластинка могла поворачиваться вокруг оси светового пучка. Оказалось, что пластинка приобретает момент импульса, пропорциональный энергии прошедшего через нее света. Эти чрезвычайно тонкие опыты не только подтвердили гипотезу Садовского, но и позволили с точностью около 10% определить величину постоянной Планка.

**Фотон.** Физические исследования, о которых будет рассказано ниже (см. лекцию 9), привели к представлению о том, что в некоторых отношениях свет проявляет себя как поток частиц — *фотонов*. Фотон представляет собой элементарную неделимую порцию света с энергией, определяемой формулой Планка

$$W = \hbar\omega, \tag{4.40}$$

где $\omega$ — частота света,

$$\hbar = 1{,}05 \times 10^{-27}\,\text{эрг} \cdot \text{с}, \tag{4.41}$$

$\hbar$ — постоянная Планка. Полученные выше соотношения между энергией, импульсом и моментом импульса света позволяют вычислить импульс и момент импульса фотона.

Объемную плотность энергии в световой волне можно представить в виде

$$dW/dV = I/c, \tag{4.42}$$

где $I$ — интенсивность, с — скорость света (см. лекцию 3). Из формулы (4.42) и формулы (4.1), определяющей объемную плотность импульса $G = dp/dV$, следует, что энергия $W$ и импульс $p$ света связаны между собой соотношением

$$W = pc. \tag{4.43}$$

Подставив (4.43) в (4.40), получим следующее выражение для импульса фотона:

$$p = \hbar k, \tag{4.44}$$

где $k = \omega/\text{с}$ — волновое число. Из выражения

$$W = N\omega, \tag{4.45}$$

связывающего между собой энергию и момент импульса циркулярно поляризованного света, определим момент импульса фотона. Подставив (4.45) в (4.40), получим

$$N = \hbar. \tag{4.46}$$

Таким образом, момент импульса фотона оказывается равным постоянной Планка.

Понятие фотона может быть введено и в теории относительности. В этой теории импульс $\vec{p}$ и энергия $W$ материальной точки определяются формулами

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{4.47}$$

где $m$ — масса частицы, $\vec{v}$ — ее скорость, $c$ — скорость света. Из формул (4.47) следует, что

$$\vec{p}c^2 = \vec{v}W, \quad W^2 = p^2c^2 + m^2c^4. \tag{4.48}$$

Полагая здесь $m = 0$, получим

$$W = pc, \quad v = c. \tag{4.49}$$

Таким образом, из теории относительности вытекает возможность существования частиц с нулевой массой, имеющих скорость, равную скорости света, в любой инерциальной системе отсчета, а также энергию и импульс, связанные между собой соотношением (4.43). Такие частицы можно назвать фотонами.

Фотонный двигатель. Оценим силу тяги двигателя, в котором в качестве реактивной струи используется мощный пучок света. Согласно второму закону Ньютона, сила равна производной импульса по времени: $F = \dot{p}$. Дифференцируя формулу (4.43) и учитывая, что производная энергии по времени есть мощность, получим

$$F = P/c, \tag{4.50}$$

где $P$ — мощность светового пучка, с — скорость света. Формула (4.50) показывает, что для создания значительной силы тяги нужна колоссальная мощность света. Так, полагая $F = 1$ Н, получим $P = 3 \times 10^8$ Вт. В теории относительности мерой энергии покоя тела является его масса: $W_0 = mc^2$. Представим себе идеальный фотонный двигатель, в котором горючее целиком превращается в свет. В этом случае для силы тяги получим выражение $F = \mu c$, где $\mu = \dot{m}$ — скорость расхода массы. Например, полагая $\mu = 1$ г/с, получим $F = 3 \times 10^{10}$ дин $= 30$ т. Таким образом, принципиально возможен фотонный двигатель с большой силой тяги.

**Оптическое охлаждение.** Импульс, передаваемый атому при поглощении света, способен затормозить его тепловое движение. Этот эффект используют для оптического охлаждения вещества. Схема оптического охлаждения показана на рис. 4.3. Лазерный луч, частота которого настроена в резонанс с атомным переходом, направлен навстречу пучку атомов (рис. 4.3, *а*). Атомы поглощают лазерный свет и переизлучают его во всевозможных направлениях (рис. 4.3, *б*).

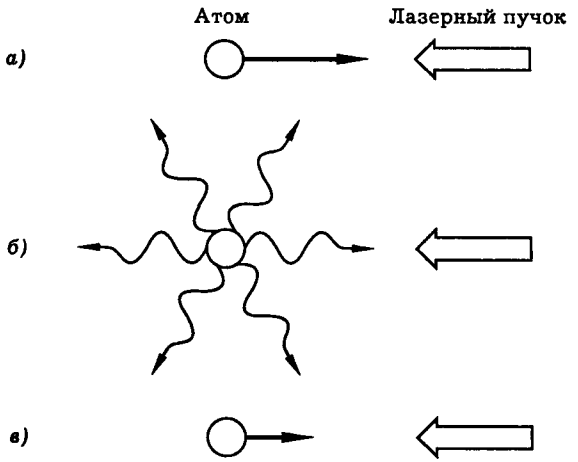



Рис. 4.3. Схема оптического охлаждения

Суммарный импульс света, излученного атомом, равен нулю, так как все направления испускания фотонов равновероятны. Вместе с тем суммарный импульс поглощенного света отличен от нуля, так как в падающем на атом лазерном пучке все фотоны имеют одно и то же направление движения. В итоге происходит торможение атомов лазерным светом и понижение их температуры.

Эксперименты показывают что оптическое охлаждение позволяет достичь сверхнизких температур порядка $10^{-5}$ К. В таком состоянии атомы проявляют совершенно необычные свойства. Например, они могут образовывать упорядоченные кристаллоподобные структуры в макроскопическом масштабе [12]. Быстро прогрессирующие оптические методы локализации и охлаждения атомных частиц позволяют проводить прецизионные спектроскопические измерения, создавать сверхточные оптические стандарты частоты, изучать фундаментальные свойства отдельных атомов и ионов.

## Литература

1. *Калашников С. Г.* Электричество. — М.: Наука, 1977.
2. *Шен И. Р.* Принципы нелинейной оптики. — М.: Наука, 1989.
3. *Крауфорд Ф.* Волны. — М.· Наука, 1974.
4. *Дитчберн Р.* Физическая оптика. — М.: Наука, 1965.
5. *Садовский А. И.* Пондеромоторные силы электромагнитных и световых волн// Журнал Русского Физико-Химического Общества. 1897. Т. 29, часть физическая, отдел 1, вып. 2. С. 82.
6. *Киттель Ч., Найт У., Рудерман М.* Механика. — М.: Наука, 1975.
7. *Окунь Л. Б.* Понятие массы//УФН. 1989. Т. 158. С. 511.
8. *Коротеев Н. И., Шумай И. Л.* Физика мощного лазерного излучения. — М.: Наука, 1991.
9. *Басов Н. Г., Колмогоров Г. Д.* Единый эталон частоты, времени и длины/Международный ежегодник "Наука и человечество". — М.: Знание, 1988. С. 245.
10. Тошек П. Э. Атомные частицы в ловушках//УФН. 1989. Т. 158. С. 451.

11. *Драбович К. Н.* Плененные атомные частицы в действии//УФН. 1989. Т. 158. С. 500.
12. *Dredrich F., Peik E., Chen J., Quint W., Walther H.*//Phys. Rev. Lett. 1987. V. 59. P. 2931.
13. *Ландсберг Г. С.* Оптика. — М.: Наука, 1976.
14. *Лебедев П. Н.* Максвелло-Бартолиевские силы давления лучистой энергии// Журнал Русского Физико-Химического Общества. 1900 Т. 32, вып. 8. С. 211
15. *Вульфсон К. С.* О моменте количества движения электромагнитных волн// УФН. 1987. Т. 152. С. 667.
16. *Holborn A. H. S.*//Nature. 1936. V. 137 P. 31.
17. *Beth B. A.*//Phys. Rev. 1935. V. 48. P. 471; 1936. V. 50. P. 115.
18. *Летохов В. С., Миногин В. Г.* Давление лазерного излучения на атомы. — М.: Наука, 1986.

# Дополнение 1

# Скорость света

*Астрономические наблюдения. Измерения скорости света в земных условиях Опыты Физо. Опыты Майкельсона. Современные методы измерения скорости света. Эталоны времени и длины.*

Скорость света в вакууме c — фундаментальная физическая константа. имеющая огромное значение не только для физической и прикладной оптики, но и для физики в целом, астрономии и астрофизики. Поэтому абсолютные и относительные измерения скорости света привлекают внимание астрономов, физиков и инженеров вот уже на протяжении более трехсот лет. За это время точность измерений величины $c$ возросла от значения $\Delta c/c = 0{,}3$, полученного из астрономических наблюдений, выполненных еще в XVII в., до $\Delta c/c \simeq 3 \times 10^{-9}$, реализованного в лазерных экспериментах последнего времени.

Данные абсолютных измерений скорости света, выполненных в XIX в. Физо, пожалуй, впервые убедительным образом подтвердили электромагнитную теорию света. Как уже упоминалось выше, для Максвелла решающим в этом смысле стало совпадение прямо измеренного Физо в земных условиях значения $c$, с электродинамической постоянной.

Тщательные относительные измерения зависимости скорости света от направления распространения в земной системе отсчета позволили решить стоявшую перед физикой почти в течении двух столетий проблему эфира — гипотетической среды, "проводящей" световые волны. Опыт, накопленный физикой при изучении волн различной природы (распространения звука, волн на воде), прямо показывал, что для возникновения волнового движения необходима соответствующая среда. Поэтому, начиная с Гюйгенса, все сторонники волновой природы света считали очевидным существование специальной среды, эфира[1], в которой и распространяются световые волны.

Однако физические свойства эфира оставались загадкой не только для Гюйгенса, Юнга и Френеля, но и для ученых второй половины XIX в., когда стала очевидной электромагнитная природа света. Установленные к этому времени закономерности оптических явлений заставляли предполагать, что эфир заполняет все пространство, имеет пренебрежимо малую плотность, практически не взаимодействует с веществом — т. е. приписать эфиру совершенно необычные свойства.

Гипотеза эфира делала естественным выделение преимущественной системы отсчета, в которой он покоится; во всех же остальных координатных системах, в частности в координатной системе, связанной с Землей, тогда должно наблюдаться движение эфира или, как принято было говорить, "эфирный ветер". Непосредственным следствием эфирного ветра, как нетрудно убедиться, должна стать неодинаковость (анизотропия) скорости света вдоль и поперек направления движения Земли.

Прямой опыт, призванный измерить скорость эфирного ветра, был выполнен в 1881 г. Майкельсоном и дал четкий отрицательный результат — величина

[1] Слово "эфир" — греческого происхождения. Буквально "эфир" значит "воздух", "небо". Значение, которое придавали древние понятию "эфир", иллюстрирует цитата из Аристотеля: "Земля окружена водой, вода воздухом, воздух — эфиром. Дальше нет ничего".

скорости света не зависит от направления распространения. "Гипотеза неподвижного эфира ошибочна" — заключил Майкельсон в своей статье, опубликованной в 1881 г. Последующие эксперименты, выполненные Майкельсоном и Морли, многочисленные опыты других исследователей с высокой степенью точности подтвердили этот результат. Его значение вышло далеко за пределы собственно оптики. Опыт Майкельсона-Морли заложил экспериментальные основы специальной теории относительности. Эти и последующие эксперименты, в том числе многочисленные эксперименты, выполненные самыми разными методами уже в нынешнем столетии, с полной достоверностью показали, что нет никаких оснований сомневаться в постоянстве и универсальности скорости света в вакууме. Сейчас усилия физиков и инженеров направлены на повышение точности абсолютных измерений величины $c$.

Надо сказать, что и здесь лазерная физика и техника открыли совершенно новые возможности. Наиболее точное определение $c$, выполненное в недавних лазерных экспериментах, дало значение $c = 299\,792\,456{,}2$ м/с. История измерений скорости света — это история весьма трудоемких, зачастую уникальных для своего времени экспериментов. Вместе с тем, это и история блестящих идей и находок, история создания замечательных оптических инструментов, методов особо точных оптических измерений, нашедших затем важные применения. Здесь мы расскажем об оптических[2] методах и результатах абсолютных измерений скорости света.

**Астрономические наблюдения.** По-видимому, идея о том, что свет распространяется с конечной скоростью, возникла впервые по аналогии с распространением волн на поверхности воды или звука.

Первые измерения скорости света на основе астрономических наблюдений были выполнены датским астрономом Ремером еще в 1675 г. (рис. Д1.1). Он регистрировал моменты вхождения одного из спутников Юпитера в тень планеты и обнаружил, что, когда Земля находится на максимальном удалении от Юпитера, время наступления затмения запаздывает по сравнению с предсказанным. Ремер предположил, что разность времен запаздывания, соответствующих минимальному и максимальному расстояниям между Землей и Юпитером, и есть то время, за которое свет проходит расстояние, равное диаметру земной орбиты. Им было получено значение скорости света $c = 214\,000$ км/с, ее отличие от современных данных объясняется неточным знанием диаметра земной орбиты.

Последующие измерения были выполнены английским астрономом Брадлеем в 1726 г. на основе наблюдения звездных аберраций. Поясним идею метода рис. Д1.2, на котором изображена звезда $S$, находящаяся в плоскости эклиптики, и два положения Земли на орбите. В первом из них направление скорости движения Земли $v$ совпадает с направлением на звезду, а во втором — перпендикулярно к нему. Пусть в точке 1 орбиты наблюдатель видит звезду в зените, тогда в точке 2 кажущееся направление на звезду будет отличаться от истинного на угол $\alpha$, называемый углом аберрации. Поскольку $v \ll c$ (практически $v/c \simeq 10^{-4}$), угол аберрации удовлетворяет соотношению

[2]Как следует из уравнений Максвелла, величину $c$ можно определить, измеряя скорость распространения радиоволн; много измерений такого рода было выполнено в 50-х гг. этого столетия с помощью радиолокационных систем Разумеется, и эксперименты по определению электродинамической постоянной (отношения электромагнитной единицы заряда к электростатической), начало которым было положено опытом Вебера и Кольрауша (1857 г.), также следует рассматривать как эксперименты по определению скорости света "электрическими методами".

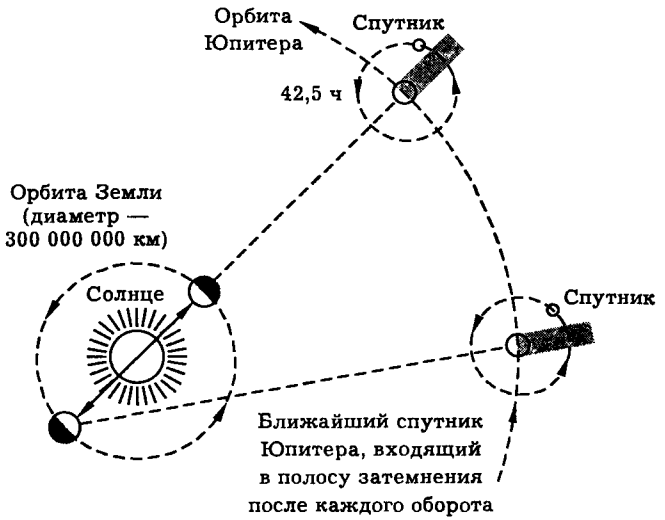



Рис. Д1.1. Схема рассуждений Ремера. Период обращения ближайшего к Юпитеру спутника равен приблизительно 42,5 ч. Поэтому спутник должен был заслоняться Юпитером или выходить из полосы затмения каждые 42,5 ч Но в течении полугода, когда Земля удаляется от Юпитера, затмения наблюдались каждый раз со все бо́льшим запаздыванием по сравнению с предсказанными сроками. Ремер пришел к выводу, что свет распространяется не мгновенно, а имеет конечную скорость, поэтому ему требуется все больше времени для достижения Земли, по мере того как она, двигаясь по орбите вокруг Солнца, удаляется от Юпитера.

$$\operatorname{tg}\alpha = v/c.$$

Брадлей получил результат $c = 301\,000$ км/с. Особое значение методов Ремера и Брадлея заключается в том, что они позволяют определить скорость света при распространении в одном направлении, в то время как в лабораторных методах обычно измеряется средняя скорость на двойном проходе туда и обратно.

**Измерения скорости света в земных условиях.** Наиболее естественным методом измерения скорости света на поверхности Земли представляется прямая регистрация времени, затрачиваемого светом на прохождение известного расстояния. Возможность постановки такого опыта обсуждалась еще Галилеем. Согласно идее Галилея, два наблюдателя, располагающиеся на расстоянии $L$ друг от друга, снабжены фонарями с заслонками. В некоторый момент времени один из наблюдателей открывает заслонку, создавая таким образом световой импульс. Второй наблюдатель делает то же самое, как только увидит свет первого фонаря. Тогда скорость света $c = 2L/\tau$, где $\tau$ — регистрируемое первым наблюдателем время, прошедшее между открытием заслонки его фонаря и моментом, когда он увидит свет другого фонаря. Совершенно правильный, в принципе, опыт Галилея был обречен, однако, на неудачу.

Причина этого заключена в огромной величине скорости света. Передний фронт светового импульса, формируемого галилеевским наблюдателем, вряд ли мог быть короче $\tau_ф \simeq 0{,}1$ с; за это время свет пробегает расстояние в

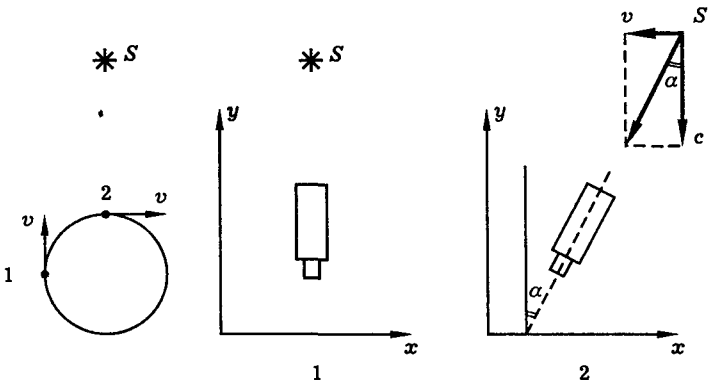



Рис. Д1.2. К измерению скорости света на основе наблюдений звездных аберраций

30 000 км. Очень инерционен и приемник света в обсуждаемом опыте — человеческий глаз — он имеет постоянную времени $\tau_{\text{пр}} \simeq 0{,}1$ с. Таким образом и длительность фронта светового импульса $\tau_{\text{ф}}$ и постоянная времени приемника $\tau_{\text{пр}}$ намного превышают время прохождения $\tau$, подлежащее измерению, поскольку в земных условиях расстояние $L$ не может превышать 1–10 км. Поэтому наблюдатели Галилея пришли бы к выводу, что скорость света равна бесконечности.

Надо сказать, что с современными экспериментальными средствами опыт Галилея может быть осуществлен даже в лаборатории. Сейчас мы располагаем лазерами, генерирующими импульсы длительностью $\tau_{\text{и}} \simeq 10^{-12}$ с (его продольный размер в направлении распространения — "длина" в пространстве $L_{\text{и}} = c\tau_{\text{и}} \simeq 3 \times 10^{-2}$ см) и приборами, регистрирующими короткие временные интервалы, достигающие $10^{-12}$ с. В этих условиях поставить опыт Галилея и получить точность в определении $\Delta c/c = 10^{-5}$ можно, проводя измерения на дистанции всего лишь в несколько метров. Такие эксперименты широко вошли сейчас в практику — они лежат, в частности, в основе оптической дальнометрии.

Важно подчеркнуть, однако, что впервые успешные опыты подобного рода были осуществлены более ста лет назад Физо и Фуко, разумеется с гораздо более скромными экспериментальными средствами. Надо сказать, что эти опыты представляют не только исторический интерес; разработанные Физо и Фуко методы управления световыми пучками использовали уже в наше время создатели лазеров.

Прежде чем перейти к более детальному изложению техники и результатов прямых измерений скорости света, обратим внимание на одно обстоятельство принципиального характера. Следует уточнить смысл, вкладываемый в наглядное на первый взгляд понятие — "время, затрачиваемое светом на прохождение заданной дистанции". Фактически измерение этого времени предполагает необходимость "поставить метку" на световом пучке (именно скорость ее перемещения в пространстве и регистрируется затем на опыте) или, другими словами, промодулировать волну. Сказанное означает, что в экспериментах рассматриваемого типа мы всегда имеем дело с модулированными волнами, а измеряемой величиной является скорость распространения модуляции.

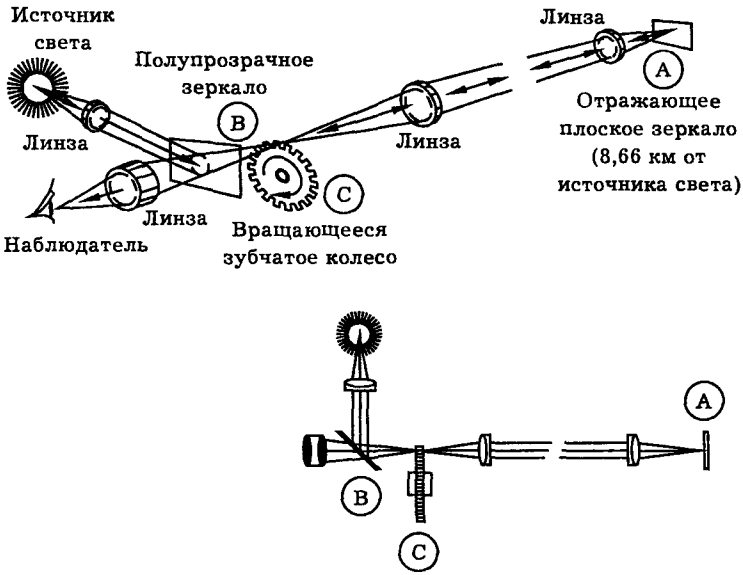



Рис. Д1.3. Опыт Физо. Через 174 года после того, как Ремер вычислил скорость света из наблюдений затмений спутника Юпитера, Физо сконструировал устройство для измерения скорости света в земных условиях. Зубчатое колесо С разбивало луч света на вспышки. Физо измерил время, за которое свет проходил расстояние до зеркала А и обратно, равное 17,32 км. Слабостью этого метода было то, что момент наибольшей яркости света определяется наблюдателем на глаз. Такие субъективные наблюдения недостаточно точны.

В каком отношении эта скорость находится с входящей в волновое уравнение скоростью света $c$? Если речь идет о распространении модулированной волны в вакууме, то ответ на этот вопрос дает лекция 1. Согласно полученным там соотношениям форма модуляции световой волны в вакууме остается неизменной, а скорость ее распространения в точности равна $c$.

**Опыты Физо.** В опытах Физо, выполненных в 1849 г., амплитудная модуляция света осуществлялась с помощью вращающегося зубчатого колеса (рис. Д1.3). Колесо, вращающееся со скоростью $n$ оборотов в секунду и имеющее $N$ зубцов, превращает падающий на него непрерывный пучок света в последовательность световых импульсов, длительность каждого из которых $\tau \simeq (Nn)^{-1}$. Если ширина щели равна ширине зубца, то $\tau_и = (2Nn)^{-1} = T/2$, где $T$ — период следования импульсов. Для измерения времени прохождения световым импульсом расстояния $L$ до зеркала и обратно Физо применил остроумный прием. Поскольку единственным оптическим приемником, которым он располагал, был глаз, необходимое временно́е разрешение достигалось путем прерывания приходящего от зеркала светового потока с помощью того же самого вращающегося колеса. Другими словами, с помощью колеса производилось временно́е стробирование приемника.

Схема эксперимента Физо изображена на рис. Д1.3. Свет от источника фокусируется линзой на край зубчатого колеса. Пройдя сквозь промежуток между зубцами, расходящийся световой пучок преобразовывался линзой в параллель-

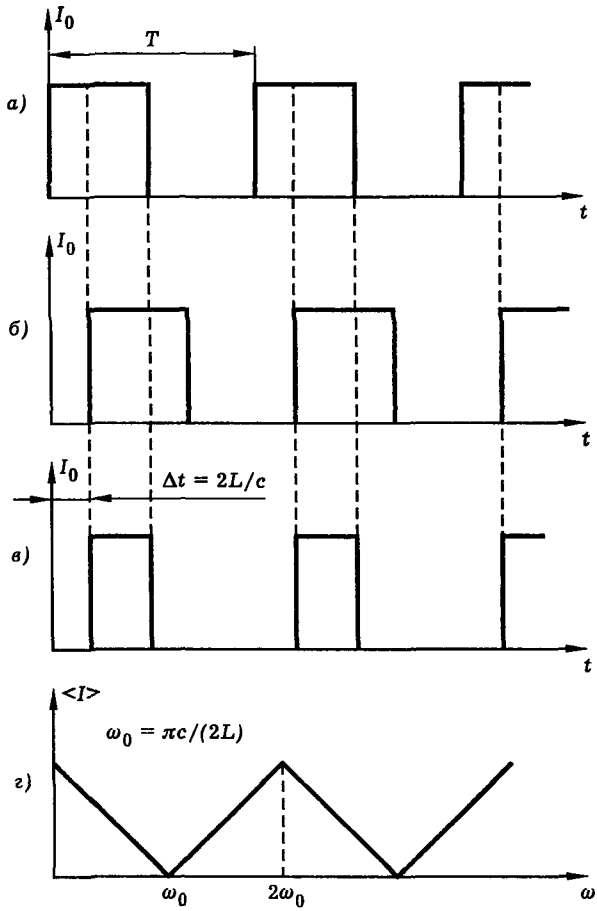



Рис. Д1.4. Результаты опыта Физо

ный и отражался от плоского зеркала на расстоянии 8,66 км от колеса. На обратном пути пучок вновь проходил сквозь промежуток между зубцами и через делительную пластинку попадал к наблюдателю. При сравнительно малой скорости вращения колеса экспериментатор видит яркую точку. По мере возрастания угловой скорости вращения $\omega$ яркость точки уменьшается, и источник света становится невидимым. При дальнейшем увеличении скорости вращения колеса светящаяся точка появляется вновь.

Рис. Д1.4 поясняет результаты опыта Физо. На рис. Д1.4, *а* показаны импульсы света, посылаемые к зеркалу. Проходя по трассе, световые импульсы испытывают временну́ю задержку $\Delta t = 2L/c$, и поэтому модулятор пропускает их лишь частично (рис. Д1.4, *б*, *в*). Благодаря инерционности восприятия света глазом, наблюдатель видит не последовательность "укороченных" импульсов, а среднюю интенсивность света $\langle I \rangle$. Иными словами, наблюдатель регистрирует постоянную составляющую импульсной последовательности. Если время

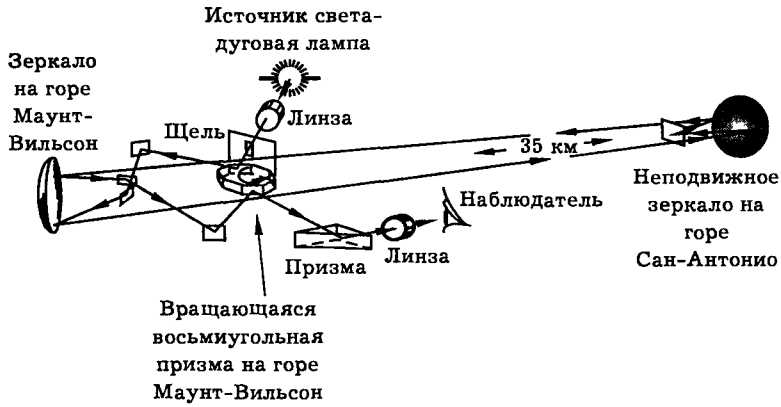



Рис. Д1.5. Установка Майкельсона

задержки $\Delta t = T/2$, то экспериментатор регистрирует полное затемнение и $c = 4L/T$. При $\Delta t = T$ яркость светящейся точки вновь становится максимальной и т. д. (рис. Д1.4, *г*). С помощью колеса, имевшего 720 зубцов, Физо наблюдал первое затемнение при 12,6 оборотах в секунду. Им было получено значение $c = 315\,000$ км/с. Важное достоинство схемы Физо состоит в том, что измерение коротких промежутков времени ($\Delta t \simeq 10^{-5}$ с) ему удалось заменить измерением частоты посылок; это оказалось гораздо проще осуществить технически.

Существенно повысить точность измерений в установке, предложенной Физо, сумел в 1872 г. Корню; он использовал несколько зубчатых колес различного типа и длину светового пути около 2,3 км. Корню получил значение $c = 298\,500$ км/с, а ошибка достигала $\Delta c = 900$ км/с. Погрешность измерения $c$ в этом эксперименте оценивалась в 3%.

В 1850 г. Фуко для модуляции светового пучка и стробирования приемника использовал вращающееся зеркало; это позволило уменьшить потери света, улучшило условия формирования светового пучка.

**Опыты Майкельсона.** Метод вращающегося зеркала существенно усовершенствовал Майкельсон, который в период с 1870 по 1931 г. провел несколько серий измерений. В опыте 1927 г. Майкельсон использовал дистанцию длиной $L = 35$ км между вершинами гор Маунт-Вильсон и Сан-Антонио в Калифорнии (рис. Д1.5). В качестве модулятора света применялась восьмигранная призма из никелированной стали. Частота вращения призмы измерялась с помощью камертона и достигала 500 оборотов в секунду. В качестве источника света в этом опыте использовался мощный дуговой прожектор, разработанный для военных целей. Погрешность измерения расстояния не превышала $10^{-6}$. Был получен результат $c = (299\,796 \pm 4)$ км/с.

В 1931 г. Майкельсон повторил опыт. На этот раз световой пучок распространялся в стальной трубе длиной 1,6 км и диаметром 1 м. Воздух из трубы был откачан до давления 0,5–5,5 мм рт. ст. С помощью многократных отражений удалось обеспечить длину оптического пути в 16 км. Однако существенного увеличения точности определения скорости света многочисленные эксперименты с этой системой не дали. Был получен результат $299\,744 \pm 11$ км/с.

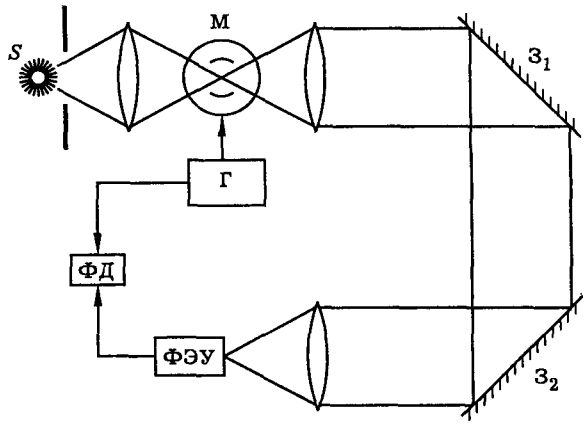



Рис. Д1.6. Фазовый метод измерения скорости света

Существенно повысить точность модуляционного метода удалось после перехода от механических методов модуляции и стробирования к электрическим. В основе действия таких модуляторов лежит изменение показателя преломления кристаллов и жидкостей под действием радиочастотных электрических полей. Быстродействие таких модуляторов оказывается достаточно высоким, оно достигает $10^{-9}$–$10^{-10}$ с. Блок-схема, иллюстрирующая этот метод, изображена на рис. Д1.6. Интенсивность света модулируется с помощью электрооптического модулятора по закону

$$I(t) = I_0[1 + \mu\cos(\Omega t + \varphi)],$$

где $\mu$ — глубина модуляции. Частота модуляции $\Omega$ задается стабилизированным генератором Г. Пройдя путь $L$ от модулятора до зеркал $З_1$ и $З_2$ и отразившись от них, световой пучок попадает на фотоприемник, в качестве которого обычно используют фотоэлектронный умножитель (ФЭУ). Интенсивность на входе приемника записывается в виде

$$I(t) = I_0\{1 + \mu\cos[\Omega(t - 2L/c) + \varphi]\}.$$

Сдвиг фаз между прямой и отраженной волнами $\Delta\varphi = 2\Omega L/c$ измеряется с помощью фазового детектора. Изменяя расстояние до зеркал $L$, можно построить линейную зависимость сдвига фаз от $L$, а из тангенса угла наклона этой прямой можно вычислить значение $c$. Характерные времена задержки при $L = 3$ м имеют порядок $10^{-8}$ с, поэтому для получения регистрируемого сдвига фаз приходится использовать частоты в десятки мегагерц.

**Современные методы измерения скорости света. Эталоны времени и длины.** В заключение остановимся на современных методах определения скорости света, которые основаны на одновременном измерении частоты света $\nu$ и длины волны $\lambda$, связанных простым соотношением $c = \lambda\nu$. В экспериментах Ивенсона и сотрудников (1972 г.) в качестве источника света использовался гелий-неоновый лазер, работающий на длине волны $\lambda = 3{,}39$ мкм. Рабочая частота лазера стабилизировалась линией поглощения молекулы $CH_4$ с огромной

точностью $\Delta\nu/\nu \simeq 6{,}25 \times 10^{-10}$ Затем возникла проблема сравнения частоты стабилизированного лазера с эталонной, в качестве которой в настоящее время принята частота $\nu_0$, соответствующая квантовому переходу между линиями сверхтонкой структуры атома цезия $^{133}$Cs ($\nu_0 = 9{,}19263177 \times 10^9$ Гц) С помощью пяти различных стабилизированных лазеров и устройств для умножения и смешения частот авторам удалось преобразовать эталонную частоту в ИК диапазон и, сравнив ее с частотой гелий-неонового лазера $\nu_L$, определить, что $\nu_L = 8{,}8376181627 \times 10^{13}$ Гц

Вторая часть проблемы — это сравнение длины волны лазера с эталонным метром, который определяется как $1{,}65076373 \times 10^6$ длин волн в вакууме излучения стандартной криптоновой лампы (переход $5d_5 \rightarrow 2p_{10}$ атомов $^{86}$Kr) Сравнение двух длин волн — лазерной и эталонной — проводилось в интерферометре Фабри–Перо, и дало результат $\lambda_L = 3{,}39231376$ мкм с точностью $\Delta\lambda/\lambda = 3{,}5 \times 10^{-9}$ Авторы получили значение скорости света $c = 299\,792{,}4562 \pm 0{,}0011$ км/с, повысив точность по сравнению с лучшими предыдущими результатами на два порядка Анализ экспериментальных ошибок показывает, что основным их источником является погрешность, связанная с асимметрией контура линии криптона, приводящая к неопределенности эталонного метра

Решением Генеральной ассамблеи Международного комитета по численным данным для науки и техники, обобщившим все известные экспериментальные данные, скорость света в вакууме принято считать равной

$$c = 299\,792\,458 \pm 1{,}2 \text{ м/с}$$

Чрезвычайно высокая точность, с которой известна эта фундаментальная физическая постоянная, послужила основой для пересмотра определения единицы длины В 1983 г международным соглашением установлено, что 1 метр — это расстояние, проходимое светом в вакууме за 1/299 792 458 долю секунды

# Литература


1 *Джефф Б* Майкельсон и скорость света — М ИЛ, 1963
2 *Фрум К , Эссен Л* Скорость света и радиоволн — М Мир, 1973
3 *Киттель Ч , Найт У , Рудерман М* Механика — М Наука, 1975
4 *Басов Н Г , Колмогоров Г Д* Единый эталон частоты, времени и длины//Наука и человечество Международный ежегодник — М Знание, 1988 С 245–261
5 *Летохов В С , Чеботаев В П* Нелинейная лазерная спектроскопия высокого разрешения — М Наука, 1990
6 *Evenson K M , Wells J S , Petersen F R , Danielson B L , Day G W*//Appl Phys Lett 1973 V 22 P 192

# Дополнение 2

# Тепловое действие света

*Оптический нагрев поглощающей среды. Быстрый нагрев поверхности металла лазерным импульсом. Лазерный отжиг полупроводников. Светореактивное давление. Лазерное сверхсжатие вещества. Физические принципы лазерного термоядерного синтеза.*

**Оптический нагрев поглощающей среды.** С тепловым действием оптического излучения — превращением энергии светового поля в тепло — мы хорошо знакомы из повседневного опыта. Концентрируя солнечное излучение с помощью линз или зеркал, можно сильно нагреть поглощающее свет тело. В современных "солнечных печах" металл удается нагреть до температур в несколько тысяч градусов — предел достижимой температуры ставят законы термодинамики. Тепловое действие солнечного излучения успешно используется в энергетике. Регистрация теплового действия может быть положена в основу прямых измерений энергии и мощности света.

Физика теплового действия света проста. Световая волна возбуждает движение свободных и связанных зарядов в среде. Кинетическая энергия зарядов частично рассеивается при столкновениях зарядов с другими частицами, при взаимодействии с колебаниями решетки в кристалле и т. п., превращаясь в конечном счете в тепло. В результате температура среды повышается.

Интенсивность же световой волны, в соответствии с законом сохранения энергии, уменьшается по мере увеличения расстояния, пройденного ею в среде, т. е. возникает поглощение света. Во многих случаях процесс поглощения бегущей волны описывается законом Бугера

$$I(z) = I_0 \exp(-\delta z). \tag{Д2.1}$$

Величина $\delta$, имеющая размерность см$^{-1}$, называется коэффициентом поглощения. На расстоянии

$$L_0 = \delta^{-1}, \tag{Д2.2}$$

называемом глубиной поглощения, интенсивность света уменьшается в $e$ раз.

Тепловые процессы в поглощающей свет среде описываются уравнением теплопроводности. Величина приращения температуры в некоторой точке среды $T(t, x, y, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + (1 - R)\delta I_0 \mathrm{e}^{-\delta z}, \tag{Д2.3}$$

где $\rho$ — плотность, $c_p$ — теплоемкость, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, $R$ — коэффициент отражения.

Поглощение света вызывает появление распределенных источников тепла. Выделение энергии в некоторой точке пространства приводит к росту температуры среды со скоростью $\sim \delta I_0/(\rho c_p)$. С этим процессом, однако, конкурирует процесс растекания тепла (термодиффузии), скорость которого пропорциональна

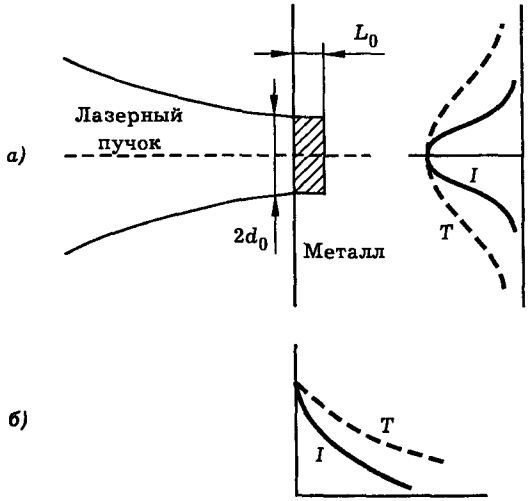



Рис. Д2.1. Схема облучения поверхности металла сфокусированным лазерным пучком. Показаны характерные распределения интенсивности света $I$ и температуры $T$ в направлениях вдоль (*а*) и поперек (*б*) поверхности металла

$$\frac{1}{\tau_T} = \frac{\varkappa}{\rho c_p L_0^2}, \tag{Д2.4}$$

где $L_0$ — характерный размер нагреваемой области.

Тепловые эффекты, возникающие при распространении мощных лазерных пучков, оказываются существенными даже в слабопоглощающих средах, коэффициент поглощения которых не превышает величины $\delta = 10^{-2}$–$10^{-3}$ см$^{-1}$. Здесь мы хотим обратить внимание на уникальные возможности, открывающиеся при использовании теплового действия коротких лазерных импульсов на сильно поглощающие среды — металлы и полупроводники, — для которых $\delta = 10^4$–$10^6$ см$^{-1}$. Фокусируя лазерное излучение на поверхность таких материалов, можно за время существенно меньшее времени термодиффузии, на дистанции порядка размера фокального пятна ($10^{-2}$–$10^{-3}$ см) расплавить и даже испарить поверхностный слой, получив скорости нагрева и охлаждения вещества порядка $10^9$–$10^{10}$ К/с. Это явление находит разнообразные технологические применения.

**Быстрый нагрев поверхности металла лазерным импульсом.** Рассмотрим тепловые процессы в поверхностном слое металла, подвергаемого воздействию сфокусированного лазерного импульса, несущего полную энергию $W_0$ (рис. Д2.1). Для металлов величина $\delta$ слабо зависит от длины волны и изменяется в пределах $10^5$–$10^6$ см$^{-1}$ и, следовательно, глубина проникновения света в металл

$$L_0 \simeq \delta^{-1} \leq 10^{-5}\,\text{см}. \tag{Д2.5}$$

Фактически речь идет об известной из электродинамики глубине скин-слоя $L_0 \simeq (c\lambda/\sigma)^{1/2}$, определяемого, однако, для оптических частот. В этих условиях

уравнение (Д2.3) можно существенно упростить. Поскольку радиус фокального пятна $d_0$ значительно превышает глубину проникновения света $L_0$, можно пренебречь переносом тепла в плоскости металла $(x, y)$. Реальное распределение интенсивности света по слою $L_0$ можно приближенно заменить прямоугольным. Доля интенсивности падающей волны $I_0$, перешедшая в тепло, $I_{\text{погл}} = I_0(1-R)$. Тогда вместо (Д2.3) можно записать

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\varkappa}{\rho c_p}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{I_{\text{погл}}}{L_0 \rho c_p}. \qquad \text{(Д2.6)}$$

На границе нагретый металл–воздух действуют различные механизмы тепловых потерь, которые приближенно можно описать с помощью формулы Ньютона

$$q_c = \sigma_T (T - T_0), \qquad \text{(Д2.7)}$$

где $q_c$ — поток тепла, $T_0$ — температура окружающего воздуха, $\sigma_T$ — коэффициент тепловых потерь. Для этой величины можно воспользоваться значением $\sigma_T \approx 10^{-3}$ Дж/(см$^2$·с·К). Поток тепла внутрь металла

$$q_{\text{м}} = \varkappa \frac{\partial T}{\partial z} \approx \varkappa \frac{T - T_0}{L_0}. \qquad \text{(Д2.8)}$$

для величины $\varkappa$ в металле можно взять значение $\varkappa \approx 0{,}5$ Дж/(см·с·К). Подставляя характерные значения параметров в (Д2.8), легко убедиться, что $q_{\text{м}} \gg q_c$.

Проанализируем, наконец, относительную роль процессов локального нагрева и переноса тепла. Для этого в уравнении (Д2.6) введем безразмерную координату $\zeta = z/L_0$ и время $\theta = t/\tau_{\text{и}}$, где $\tau_{\text{и}}$ — длительность лазерного импульса. После замены переменных (Д2.6) преобразуется к виду

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\tau_{\text{и}}}{\tau_T}\frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} + \frac{\tau_{\text{и}} I_{\text{погл}}}{L_0 \rho c_p}, \qquad \text{(Д2.9)}$$

где $\tau_T = \rho c_p L_0^2/\varkappa$ — характерное время теплопроводности. Если $\tau_{\text{и}} < \tau_T$, переносом тепла внутрь металла можно пренебречь. Тогда приращение температуры металла к моменту окончания лазерного импульса можно вычислить, пренебрегая процессами термодиффузии, просто поделив поглощенную энергию на теплоемкость освещаемой массы металла

$$T_{\text{макс}} = \frac{(1-R)W_0}{\rho c_p \pi d_0^2 L_0}. \qquad \text{(Д2.10)}$$

Подставляя в формулу (Д2.10) характерные значения параметров $\rho = 8$ г/см$^3$, $c_p = 0{,}4$ Дж/(г · К), $d_0 = 10^{-3}$ см, $L_0 = 10^{-5}$ см, $W_0 = 1$ Дж, $R = 0{,}9$, получим $T_{\text{макс}} \approx 10^9$ К.

Полученная цифра, однако, непосредственного физического смысла не имеет. В действительности, еще на более ранних этапах процесса, когда будут достигнуты температуры $10^3$–$10^4$ К, начнут меняться теплофизические параметры металла, затем начнется плавление металла, его испарение и т. д. Проведенная оценка, однако, убедительно показывает, что с помощью лазерного излучения можно локально и очень эффективно воздействовать на металлы.

Одно из перспективных направлений применения теплового действия лазерного излучения — это поверхностная термообработка металлов, использующая

возможность локального теплового воздействия на участке, подвергаемом износу. При поверхностном лазерном нагреве не возникают нежелательные тепловые деформации деталей, а твердость чугуна и сталей возрастает в 3–5 раз.

Второе направление технологического применения лазеров — это лазерная сварка различных металлов. Мощные технологические лазеры позволяют сваривать стальной лист толщиной около 20 мм со скоростью порядка 100 м/ч; при этом достигается высокое качество сварного шва. Дополнительные удобства предоставляет возможность вести обработку в труднодоступных местах и на больших расстояниях от источника излучения.

Лазерная резка происходит за счет испарения металла или его плавления с последующим удалением расплава струей инертного газа. Она особенно целесообразна, когда требуется малая зона термического воздействия и узкий рез. С помощью лазеров разрезают твердые керамические материалы, сплавы и металлы с защитными покрытиями.

**Лазерный отжиг полупроводников.** Выполненный выше расчет теплового действия света на поверхность металла иллюстрирует возможности быстрого локального нагрева вещества со скоростью $10^8$–$10^{14}$ К/с. Оказывается, что эта особенность лазерного нагрева позволяет не только резать или плавить металл, но и индуцировать фазовые переходы. В частности, с помощью лазера можно осуществлять импульсный отжиг ионно-имплантированных полупроводников.

Как мы уже убедились, характерной чертой лазерного нагрева вещества является то, что сравнительно большое количество энергии может поглотиться в течение очень короткого интервала времени. Поверхность поглощающего материала может быть доведена до точки плавления за время лазерного импульса, длящегося доли микросекунд. После окончания импульса происходит быстрая рекристаллизация расплавленного слоя. Временнóй и пространственный масштабы нагрева таковы, что диффузия вещества не играет заметной роли в фазе расплава, поэтому концентрация примесей, внедренных в кристаллическую решетку, в процессе кратковременного расплава может превышать равновесную. В результате облученный участок поверхности приобретает новые свойства.

Пусть прямоугольный лазерный импульс длительностью $\tau_и$ и интенсивностью $I_0$ падает на поверхность твердого тела по нормали. Коэффициент температуропроводности $\chi = \varkappa/(\rho c_p)$ определяет характерный масштаб $L_T = (\chi\tau_и)^{1/2}$, показывающий, на сколько расплывается первоначальный температурный профиль за время действия импульса. Если глубина $L_0$, на которую проникает световая энергия, мала по сравнению с характерной длиной температуропроводности, т. е. $L_0 \ll L_T$, то поглощенная энергия $W_п = (1-R)I_0\tau_и\pi d_0^2$ полностью пойдет на нагрев слоя вещества толщиной $L_T$, и рост его температуры составит

$$\Delta T = (1-R)I_0\tau_и/(\rho c_p L_T).$$

Характерное время остывания в этом случае равно длительности импульса $\tau_и$, т. е. времени, необходимому для диффузии тепла на расстояние $L_T = (\chi\tau_и)^{1/2}$. Скорости нагрева и охлаждения в этом случае совпадают и равны

$$\Delta T/\tau_и = (1-R)I_0/(\rho c_p L_T).$$

Напротив, если глубина проникновения $L_0 = \delta^{-1}$ много больше длины термодиффузии, т. е. $L_0 \gg L_T$, то при поглощении света формируется харак-

терный спадающий по экспоненте вглубь вещества температурный профиль с масштабом $L_0$, и рост температуры составит

$$\Delta T(z) = (1 - R)I_0\tau_и\delta\exp(-\delta z)/(\rho c_p).$$

Скорость нагрева выражается следующим образом: $\Delta T/\tau_и$. Поскольку при охлаждении тепло должно продиффундировать на глубину $L_0 = \delta^{-1}$, характерное время остывания равно $\tau_0 = L_0^2/\chi$, а скорость остывания есть

$$\Delta T/\tau_0 = (1 - R)\delta^3\chi I_0\tau_и/(\rho c_p).$$

Практически в большинстве случаев выполняется неравенство $L_T > L_0$, и реализуется локальный нагрев.

Приведем оценки типичных параметров для кремния при длине волны излучения $\lambda = 0{,}5$ мкм: $\delta = 10^4$ см$^{-1}$, $R = 0{,}35$, $\rho c_p = 0.56$ Дж/(см$^3$·К), $\chi = 0{,}7$ см$^2$/с, температура плавления $T_{пл} = 1420\,°$C. Типичные характеристики лазерного импульса, необходимого для нагрева поверхностного слоя кремния до температуры $\sim 10^3\,°$C, приведены ниже: $\tau_и = 30$ нс, $I_0 = 1{,}1\times10^7$ Вт/см$^2$, $I_0\tau_и = 0{,}33$ Дж/см$^2$, $L_T = (\chi\tau_и)^{1/2} = 1{,}5\times10^{-4}$ см. При этом скорость нагрева и охлаждения составляет $\approx 10^{11}$ К/с. Для пикосекундных импульсов длина термодиффузии будет уже меньше глубины поглощения и для получения больших скоростей нагрева и охлаждения следует использовать лазерные импульсы ультрафиолетового диапазона частот.

Быстрое плавление и последующая рекристаллизация полупроводников при поглощении лазерных импульсов нашли применение для лазерного отжига ионно-имплантированных полупроводников. Полупроводниковые материалы, используемые в настоящее время в электронике, получают путем внедрения ионов в кристаллическую решетку чистого полупроводника. При этом ионы имплантируются в толщу полупроводника с помощью ускорителя (характерные энергии ионов составляют $10^5$ эВ, дозы имплантации $10^{13}$–$10^{16}$ ионов/см$^2$, глубина внедрения ионов до $10^{-5}$ см). Ионная бомбардировка вызывает разупорядочение кристаллической решетки в приповерхностном слое. Ее восстановление обычно осуществляется с помощью длительного термического отжига в течение десятков минут при температурах в несколько сотен градусов Цельсия. При этом, однако, первоначальный профиль распределения примеси по глубине неизбежно расплывается вследствие диффузии.

Оказывается, что с помощью лазерных импульсов микросекундной или наносекундной длительности также можно произвести отжиг ионно-имплантированного слоя полупроводника, причем полученная при эпитаксиальной рекристаллизации решетка характеризуется меньшим количеством дефектов, отсутствием расплывания профиля концентрации внедренной примеси в глубину. Концентрация примесных ионов, внедренных в решетку, для некоторых режимов оказывается значительно выше достигаемой при термическом отжиге. Импульсный отжиг сделал возможным получение сверхмелких $p$–$n$ переходов, позволил формировать нужные профили примеси путем изменения энергии, дозы и вида имплантированных ионов.

Большой научный интерес связан с выявлением роли термических и атермических факторов при лазерном отжиге, в частности, роли плотной (до $10^{21}$ см$^{-3}$) электронно-дырочной плазмы, образующейся в толще полупроводника при поглощении лазерного импульса с интенсивностью до $10^9$ Вт/см$^2$. Динамика процесса рекристаллизации поверхности изучается обычно с применением линейных оптических методов путем регистрации с высоким временны́м

разрешением изменения коэффициентов отражения и пропускания пробного лазерного луча при поглощении на поверхности полупроводника мощного отжигающего импульса. Помимо этого используют регистрацию динамики появления и пространственного распределения по отжигаемому участку спектров спонтанного комбинационного рассеяния, а также картину дифракции быстрых электронов на восстановленной решетке. Началось применение нелинейных оптических методов диагностики состояния поверхности полупроводников при мощном импульсном воздействии, например путем регистрации оптических гармоник пробного излучения, генерируемых при отражении от отжигаемого участка поверхности полупроводника.

Большинство полученных к настоящему времени экспериментальных данных свидетельствуют в пользу тепловой модели лазерного отжига: при межзонном поглощении излучения в полупроводнике генерируется плотная электронно-дырочная плазма, затем вследствие электрон-фононного взаимодействия за время $\sim 10^{-12}$ с энергия от электронной подсистемы передается решетке и происходит ее плавление. Фаза расплава длится $10^{-8}$–$10^{-7}$ с и легко регистрируется в эксперименте по появлению высокого уровня отражения пробного луча. Если поглощенной энергии достаточно для того, чтобы расплавить на всю глубину аморфизованный ионной бомбардировкой слой полупроводника, то при охлаждении происходит эпитаксиальная рекристаллизация поверхностного слоя: восстановленная кристаллическая структура повторяет структуру решетки подложки, т. е. исходного монокристалла полупроводника, служащего затравкой при рекристаллизации. Скорость рекристаллизации по разным данным лежит в пределах 10–$10^5$ см/с. Если энергии импульса недостаточно для расплава всего аморфизованного слоя, то возникает поликристаллическая структура поверхностного слоя.

"Холодное плавление" поверхности полупроводника фемтосекундным лазерным импульсом. В эксперименте, выполненном Говорковым, Шумаем, Рудольфом и Шредером [10], исследовались начальные стадии плавления поверхности монокристалла арсенида галлия под действием лазерных импульсов длительностью 100 фс (1 фс = $10^{-15}$ с) с помощью регистрации зависимости интенсивности отраженного пробного импульса и его второй гармоники от времени, прошедшего после возбуждения образца более мощным импульсом накачки.

Поскольку при плавлении материал становится изотропной жидкостью, эффективность генерации второй гармоники при наступлении лазерно-индуцированного фазового перехода должна падать. Это действительно наблюдается в эксперименте. Однако спад интенсивности второй гармоники происходит неожиданно быстро — с характерным временем порядка 100 фс. В то же время коэффициент линейного отражения возрастает до значения, характерного для расплава данного материала, гораздо медленнее — с характерным временем порядка 1 пс (1 пс = $10^{-12}$ с). Результаты эксперимента показывают, что потеря решеткой дальнего порядка, проявляющаяся в падении интенсивности второй гармоники, происходит значительно быстрее, чем изменение линейных оптических свойств арсенида галлия. Характерное время $\tau_{\text{ВГ}} = 100$ фс оказывается меньшим, чем время передачи энергии от электронной подсистемы к решетке, в то время как характерное время нарастания линейного отражения согласуется с представлением о тепловом плавлении. Эти результаты позволяют предположить наличие короткоживущей промежуточной неравновесной фазы кристалла с нарушенным дальним порядком, предшествующей плавлению и существующей при относительно холодной решетке.

**Светореактивное давление.** Нагрев мишени, подвергающейся воздействию лазерного излучения, сопровождается возникновением сил теплового происхождения. В мощных лазерных пучках они на много порядков превышают световое давление. Условно их можно разделить на три группы: конвективные, радиометрические и светореактивные. Конвективные силы связаны с нагревом среды, окружающей облучаемое тело, и последующим возникновением потоков газа или жидкости, которые, в свою очередь, воздействуют на тело. Радиометрические силы возникают на молекулярном уровне и наиболее ярко проявляются в разреженных газах. Скорость молекулы после соударения с нагретой поверхностью больше, чем начальная, что и приводит к появлению дополнительного давления, пропорционального разности квадратных корней из температур поверхности и среды.

Светореактивное давление $p_{\text{ср}}$ возникает в процессе испарения вещества с поверхности облучаемого тела. По величине оно пропорционально скорости истечения $v_{\text{ист}}$ испаренного вещества и скорости изменения массы единицы поверхности $m_{\text{п}}$ :

$$p_{\text{ср}} \sim v_{\text{ист}} \frac{d}{dt} m_{\text{п}}. \qquad \text{(Д2.11)}$$

Скорость изменения массы можно грубо оценить, разделив интенсивность поглощенного света $I$ на удельную теплоту парообразования $Q_{\text{п}}$. При этом не учитывается энергия, затраченная на разогрев вещества до температуры плавления и само плавление, так как она обычно почти на порядок меньше $Q_{\text{п}}$. С учетом этого замечания запишем формулу (Д2.11) в виде

$$p_{\text{ср}} \sim v_{\text{ист}} I / Q_{\text{п}}.$$

С помощью мощных световых импульсов можно получить $p_{\text{ср}} \sim 10^{12}$ атм. Обсуждаются возможности использования светореактивного давления для ускорения микрочастиц и даже для изменения траектории искусственных спутников Земли.

**Лазерное сверхсжатие вещества. Физические принципы лазерного термоядерного синтеза.** Возможности получения с помощью фокусировки излучения мощных лазерных систем интенсивностей света порядка $10^{16}$ Вт/см$^2$, приводящих к быстрому разогреву вещества и его чрезвычайно сильному сжатию за счет светореактивного давления, стимулировали работы в области лазерного термоядерного синтеза. В основе термоядерного синтеза лежит реакция между ядрами дейтерия и трития $\mathrm{D} + \mathrm{T} \to {}^4\mathrm{He} + \mathrm{n}$, в результате которой выделяется энергия около 17 МэВ (1 МэВ = $1{,}6 \times 10^{-6}$ эрг). Расчет показывает, что для преодоления кулоновских сил отталкивания необходимо нагреть смесь дейтерия и трития (термоядерную плазму) до температуры порядка $10^8$ К. Кроме того, нужно, чтобы за время существования плазмы в ней произошло достаточно большое число единичных актов взаимодействия, и выделившаяся энергия превысила затраченную на разогрев. Это приводит к критерию Лоусона

$$n\tau \geq 10^{14} \text{ с/см}^3,$$

связывающему концентрацию частиц $n$ и время удержания плазмы $\tau$. Физический смысл этого критерия достаточно ясен: чем больше частиц в единице объема, тем скорее ион дейтерия встретит ион трития. С другой стороны, чем дольше удерживается плазма, тем больше времени для поисков партнера по реакции.

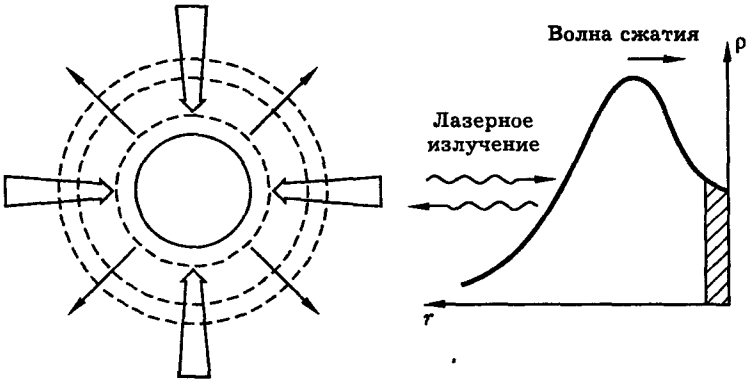



Рис. Д2.2. Схема лазерного термоядерного синтеза

В 1962 г. Н. Г. Басов и О. Н. Крохин выдвинули идею быстрого нагрева плазмы и инерциального удержания с помощью мощных лазерных импульсов. В современных установках лазерного термоядерного синтеза используются сферические мишени диаметром около 100 мкм, симметрично облучаемые со всех сторон (рис. Д2.2) Под действием света происходит быстрый разогрев вещества, сопровождаемый испарением поверхности мишени. Возникающее при этом светореактивное давление порождает волну сжатия, распространяющуюся к центру мишени. В свою очередь, кинетическая энергия ударной волны превращается в тепло. Все эти процессы разыгрываются за время $\tau \sim 10^{-9}$ с и носят характер микровзрыва. Плотность плазмы в центре мишени по теоретическим оценкам возрастает почти в $10^4$ раз относительно исходной.

Уже проведены успешные эксперименты по сверхсжатию вещества при всестороннем облучении. Достигнута плотность плазмы около 30 г/см$^3$ при температуре $T \sim 10^7$ К. В России и США созданы сверхмощные лазерные системы на неодимовом стекле ($\lambda = 1{,}06$ мкм) с энергией в импульсе $10^3$–$10^5$ Дж. Принципиальная возможность создания опытной термоядерной электростанции возникнет скорее всего после создания мощных импульсных лазеров с КПД около 10–20%. На пути к решению проблемы лазерного термоядерного синтеза достигнуты значительные успехи, но впереди еще трудный путь.

# Литература

1. *Коротеев Н. И., Шумай И. Л.* Физика мощного лазерного излучения. — М.: Наука, 1991.
2. *Рэди Дж.* Действие мощного лазерного излучения. — М.: Мир, 1974.
3. *Ахманов С. А., Выслоух В. А., Чиркин А. С.* Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. — М.: Наука, 1988.
4. *Басов Н. Г., Лебо И. Г., Розанов В. Б.* Физика лазерного термоядерного синтеза. — М.: Знание, 1988.
5. *Накколс Дж. Г.* Осуществимость инерциально-термоядерного синтеза//УФН. 1984. Т. 143. С. 467.
6. *Басов Н. Г.* О квантовой электронике. — М.: Наука, 1987.

7. *Матвеев А. Н.* Молекулярная физика. — М.: Высшая школа, 1987.
8. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.–Л.: ГИТТЛ, 1951.
9. *Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г.* Справочник по элементарной физике. — М.: Наука, 1988.
10. *Говорков С. В., Шумай И. Л., Рудольф В., Шредер Т.*//Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 52. С. 755.
11. *Paisner J. A., Boyes J. D., Kumpan S. A., Lowdermilk W. H., Soren M.* Conceptual Design of the National Ignition Facility//Proc. SPIE. 1996. V. 2633. P. 2.

# Дополнение 3

# Оптическая левитация

*Световое давление в лазерных пучках. Оптическая левитация малых прозрачных частиц. Опыты Эшкина. Оптическая ловушка. Элементы теории оптической левитации. Геометрия отражения и преломления. Энергетика отражения и преломления. Формулы Френеля. Силы светового давления. Световое давление вдоль пучка. Световое давление поперек пучка. Численные оценки.*

**Световое давление в лазерных пучках.** До недавнего времени казалось, что малость светового давления, говоря словами Пойнтинга, "...исключает его из рассмотрения в земных делах". С появлением лазеров ситуация коренным образом изменилась. Новые возможности в экспериментах со световым давлением, открывшиеся после создания лазеров, связаны, пожалуй, не столько с резким увеличением интенсивности излучения, сколько с возможностями "острой" фокусировки лазерного света. Высокая степень упорядоченности лазерного света (пространственная когерентность) позволяет сфокусировать лазерный пучок в пятно, размер которого имеет порядок длины световой волны.

Увеличение интенсивности света неизбежно связано с возрастанием роли тепловых эффектов. Как показывают оценки, сделанные в дополнении 2, уже при плотности энергии порядка 1 Дж/см$^2$ в коротком лазерном импульсе возможно плавление и испарение поверхостного слоя металлической мишени. Связанный с этим выброс вещества навстречу лазерному лучу приводит, очевидно, к возникновению сильного светореактивного давления, величина которого намного превышает "истинное" световое давление. Вместе с тем, оказывается возможным получить сильные эффекты, обусловленные "истинным" световым давлением, фокусируя непрерывное лазерное излучение небольшой мощности на малые тела.

Чтобы убедиться в этом, проведем простую оценку. Излучение аргонового лазера ($\lambda \simeq 0{,}5$ мкм) непрерывного действия мощностью $P = 1$ Вт можно сфокусировать на площадку диаметром $2d_0 \simeq (1\text{–}10)\lambda$. Если в фокусе поместить зеркально отражающий шарик радиусом $r_0 \approx d_0$, то сила светового давления на него $F = 2P/c = 10^{-3}$ дин. При плотности материала шарика $\rho = 1$ г/см$^3$ и $d_0 \approx \lambda$ его масса будет равна $m \approx 10^{-12}$ г и, следовательно, под влиянием силы светового давления шарик приобретает огромное ускорение $a = F/m = 10^6\,g$. Последнее позволяет ставить разнообразные опыты по управлению движением микроскопических частиц с помощью светового давления. Очень красивые опыты по оптической левитации частиц в лазерном поле были поставлены А. Эшкиным.

Следует отметить, что в полях лазеров непрерывного действия использование сильно поглощающих (например, металлических) частиц приводит к значительным тепловым эффектам. Поэтому Эшкин проводил опыты с маленькими прозрачными пластмассовыми частицами (шариками из латекса), находящимися в воде. Хотя отражение и преломление света пластмассой, погруженной в воду, относительно малы, возникающие силы достаточно велики, чтобы вызвать движение частиц, наблюдаемое в микроскоп. Тщательный анализ показал, что это движение действительно происходит за счет светового давления, а не остаточных тепловых эффектов.

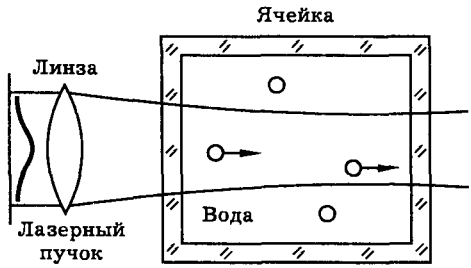



Рис. Д3.1 Наблюдение движениия микрочастиц вдоль лазерного луча под действием сил светового давления

**Оптическая левитация малых прозрачных частиц. Опыты Эшкина.** Вот как описаны опыты Эшкина в работе [1]. "В эксперименте использовались маленькие прозрачные пластмассовые частички с высокой степенью сферичности, изготовленные химической компанией "Доу". Это вещество обычно поставляется в воде, и поэтому представлялось естественным провести первый опыт в воде. Помимо этого, высокая оптическая прозрачность и высокая теплопроводность воды позволила бы поддерживать частички холодными. Несколько капель воды, содержащих некоторое количество частичек, были помещены под микроскопом в стеклянную ячейку, просвечиваемую снизу сфокусированным лучом ионного аргонового лазера. При использовании специальных очков, поглощающих только лазерный свет, можно было наблюдать частички в обычном свете. Лазерный пучок был видим за счет вызываемой им желтой флуоресценции. Следовательно, не представляет труда видеть пучок, фокусировать его и управлять им, перемещая фокусирующую линзу. Так как пластмассовые сферы имеют такую же плотность, как и вода, они остаются неподвижными, как фиксированные мишени. Когда лазерный луч диаметром 15 мкм с гауссовым распределением интенсивности и мощностью около 10 мВт, направленный вертикально вверх, попадал на частичку с поперечным сечением в несколько микрон, она начинала подниматься с постоянной скоростью 10 мкм/с, пока не достигала верхней части ячейки. (Частица, движущаяся в вязкой среде под действием постоянной силы, должна двигаться по закону Стокса с постоянной скоростью)".

В этой же работе продемонстрирована оптическая левитация частиц в воздухе. На фотографии, приведенной в работе [2], видна частица (прозрачная стеклянная сфера диаметром 20 мкм), которая висит в воздухе примерно на расстоянии 1 см над стеклянной пластинкой при воздействии сфокусированного лазерного пучка мощностью 250 мВт. Хотя частица едва видна невооруженным глазом, за счет рассеяния света она ярко сияет.

**Оптическая ловушка.** На рис. Д3.1 показана схема эксперимента, в котором лазерный луч, распространяющийся в горизонтальном направлении, вызывает движение частиц в направлении светового пучка [1]. Интересной особенностью опытов с преломляющими свет частицами, находящимися в поле ограниченного светового пучка, является возникновение радиальных сил светового давления, приводящих к движению частиц *поперек пучка*. Происхождение этих сил можно понять исходя из закона сохранения импульса.

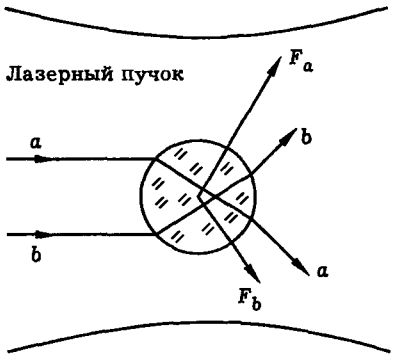



Рис. Д3.2. Схема возникновения радиальных сил светового давления, действующих на частицу в напралении поперек светового пучка

Преломляясь внутри частицы, показатель преломления которой превышает показатель преломления окружающей среды, световые лучи изменяют свое направление так, как это показано на рис. Д3.2. Изменение направления потока импульса в световой волне по закону сохранения импульса приводит к возникновению сил $F_a$ и $F_b$, действующих на частицу. Так как интенсивность света на оси пучка выше, чем на периферии, то $F_a > F_b$ и, следовательно, равнодействующая сил в рассматриваемом случае направлена к оси пучка. Если же показатель преломления вещества частицы меньше, чем у окружающей среды, частица будет выталкиваться к периферии.

Указанное обстоятельство позволяет с помощью двух пересекающихся пучков реализовать так называемую "световую ловушку" (рис. Д3.3). В такой ловушке любое смещение частицы от точки пересечения пучков, в которой интенсивность света максимальна, приводит к появлению силы, возвращающей частицу в положение равновесия. Радиальные силы позволяют "подвесить" микроскопическую частицу, что применяется при изучении явлений рассеяния, воздействии лазерного излучения на вещество и т. п.

**Элементы теории оптической левитации.** Рассмотрим световое давление лазерного пучка на идеально прозрачную диэлектрическую частицу сферической формы. Вычислим силы светового давления, действующие на частицу в направлениях вдоль и поперек лазерного пучка. В основу расчета положим представление о потоке импульса, переносимом световой волной, а также френелевские формулы для коэффициентов отражения и преломления света на границе раздела двух сред (см. ч. IV). Решение задачи проведем в три этапа.

1. Пользуясь законами геометрической оптики, определим направления лучей света, отраженных и преломленных на границах диэлектрической частицы. Используя закон сохранения импульса для системы "свет–тело", найдем направления сил светового давления, вызванных отражением и преломлением света.

2. Пользуясь формулами Френеля, вычислим интенсивность отраженных и преломленных волн, т. е. рассчитаем энергетику отражения и преломления света.

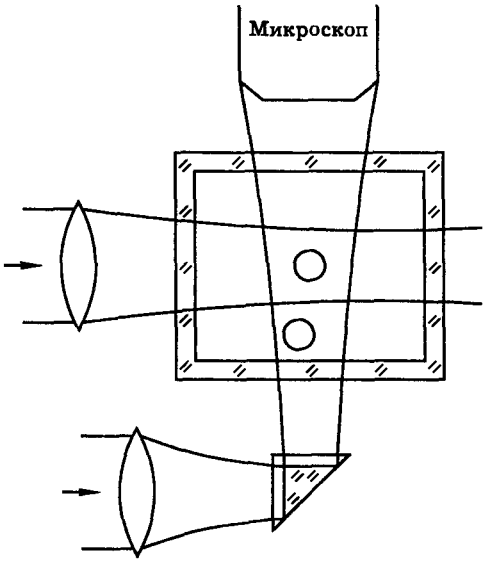



Рис. ДЗ.3. "Оптическая ловушка"

3. Пользуясь известным соотношением между интенсивностью $I$ и объемной плотностью импульса $G$ в световой волне $G = I/c^2$, а также вычисленными ранее интенсивностями волн, найдем потоки импульса в падающей, отраженной и преломленной световых волнах. Наконец, используя закон сохранения импульса для системы "свет–тело" $d\vec{p}_{\text{свет}} + d\vec{p}_{\text{тело}} = 0$ и второй закон Ньютона $\vec{F} = d\vec{p}_{\text{тело}}/dt$, вычислим силу светового давления $\vec{F}$ лазерного пучка на диэлектрическую частицу.

**Геометрия отражения и преломления.** При падении светового луча на границу раздела двух сред возникают отраженный и преломленный лучи света. Согласно законам геометрической оптики (см. ч. IV), все три луча (падающий, отраженный, преломленный) лежат в одной плоскости, содержащей также нормаль к границе раздела, восстановленную в точке падения луча. Эта плоскость называется плоскостью падения.

Угол падения $\theta$, угол отражения $\theta_0$ и угол преломления $\theta_2$ связаны между собой соотношениями $\theta = \theta_0$ (закон отражения) и

$$n_1 \sin\theta = n_2 \sin\theta_2 \qquad \text{(ДЗ.1)}$$

(закон преломления, или "закон Снеллиуса"), где $n_1$ и $n_2$ — показатели преломления сред, лежащих по разные стороны границы раздела.

Расчет сил светового давления начнем с построения хода лучей. Предположим, что облучаемая светом частица представляет собой однородный диэлектрический шар радиуса $a$, погруженный в однородную диэлектрическую среду с показателем преломления $n_1$. Показатель преломления материала частицы обозначим через $n_2$. Будем считать, для определенности, что $n_2 > n_1$. Именно такая ситуация имела место в опытах Эшкина по оптической левитации [1], где

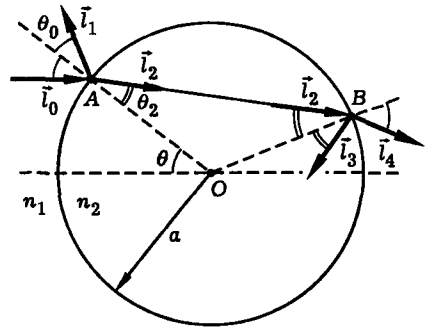



Рис. Д3.4. Картина отражения и преломления световых лучей на границах шара

изучалось давление сфокусированного лазерного пучка на прозрачные частицы из латекса ($n_2 = 1{,}58$), погруженные в воду ($n_1 = 1{,}33$).

Пусть в некоторую точку А на поверхности шара падает световой луч. Для описания отражения и преломления введем систему координат, начало которой поместим в центре шара, ось $z$ направим параллельно оси светового пучка, сферические угловые координаты точки А обозначим $\theta$ и $\psi$ (рис. Д3.4, Д3.5, Д3.6). Картина хода лучей в плоскости падения показана на рис. Д3.4. На этом рисунке $\vec{l}_0$, $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$, $\vec{l}_3$, $\vec{l}_4$ — единичные векторы направлений лучей.

Так как направление потока импульса $\vec{G}_i$ в каждом луче совпадает с направлением луча $\vec{l}_i$, т. е. $\vec{G}_i = \vec{l}_i G_i$, направления лучей однозначно определяют направления изменения импульсов $\Delta\vec{G}_i$ при отражении и преломлениии света и, следовательно, направления сил светового давления, действующих на частицу. На рис. Д3.5 показаны четыре таких элементарных силы: $d\vec{F}_1$, $d\vec{F}_2$, $d\vec{F}_3$, $d\vec{F}_4$. Первая из этих сил вызвана отражением луча света в точке А на передней (т. е. обращенной к свету) границе шара. Вторая — преломлением на той

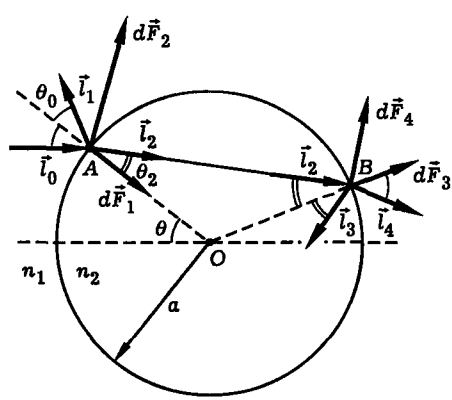



Рис. Д3.5. То же, что на рис. Д3.4, с добавлением сил светового давления

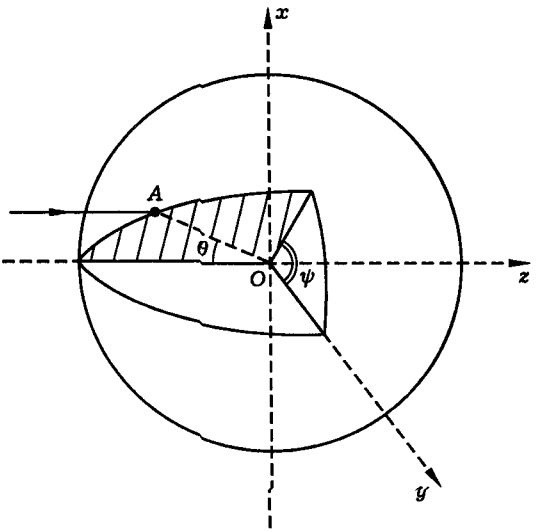



Рис. Д3.6. Сферические координаты $\theta$ и $\psi$ точки А. Заштрихована плоскость падения луча в точку А ($\psi$ =const)

же границе. Третья сила обусловлена отражением луча света в точке В на задней границе шара, и четвертая — преломлением луча на задней границе. Направления сил определяются формулами

$$d\vec{F}_1 = (\vec{l}_0 - \vec{l}_1)c_1, \quad d\vec{F}_2 = (\vec{l}_0 - \vec{l}_2)c_2,$$
$$d\vec{F}_3 = (\vec{l}_2 - \vec{l}_3)c_3, \quad d\vec{F}_4 = (\vec{l}_2 - \vec{l}_4)c_4,$$

где $c_i$ — скалярные величины. Для расчетов сил светового давления, направленных вдоль и поперек лазерного пучка, нам понадобятся формулы для проекций векторов $\vec{l}_i$ на ось параллельную оси светового пучка (ось $z$) и ось перпендикулярную оси пучка (скажем, ось $x$). Эти формулы могут быть получены на основании законов отражения и преломления света из рассмотрения рис. Д3.4 и Д3.6. Они имеют вид

$$\begin{aligned} l_{0z} &= 1, & l_{0x} &= 0, \\ l_{1z} &= -\cos 2\theta, & l_{1x} &= \sin 2\theta \sin\psi, \\ l_{2z} &= \cos(\theta - \theta_2), & l_{2x} &= -\sin(\theta - \theta_2)\sin\psi, \\ l_{3z} &= -\cos(3\theta_2 - \theta), & l_{3x} &= -\sin(3\theta_2 - \theta)\sin\psi, \\ l_{4z} &= \cos 2(\theta - \theta_2), & l_{4x} &= -\sin 2(\theta - \theta_2)\sin\psi. \end{aligned} \tag{Д3.2}$$

В этих формулах $\theta$ и $\psi$ — сферические координаты точки А на поверхности шара, $\theta$ — угол падения луча в точку А, $\theta_2$ — угол преломления луча в точке А.

**Энергетика отражения и преломления.** Рассмотрим луч света, падающий в точку А (рис. Д3.4). Обозначим интенсивности падающего, отраженного и преломленного лучей соответственно через $I_0$, $I_1$, $I_2$. По закону сохранения энергии

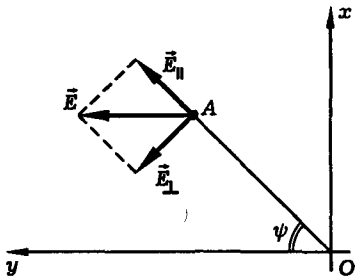



Рис. Д3.7. Разложение вектора напряженности электрического поля падающей волны $\vec{E}$ на компоненты параллельную ($\vec{E}_{\parallel}$) и перпендикулярную ($\vec{E}_{\perp}$) плоскости падения луча в точку А. Плоскость рисунка совпадает с плоскостью фронта падающей волны $x$, $y$. Плоскость падения луча в точку А изображена прямой линией ОА ($\psi$ =const)

$$I_0 = I_1 + I_2. \qquad \text{(Д3.3)}$$

Введем коэффициенты отражения $R$ и преломления $T$ света по интенсивности в точке А:

$$R_{\text{A}} = I_1/I_0, \quad T_{\text{A}} = I_2/I_0. \qquad \text{(Д3.4)}$$

В силу (Д3.3) сумма коэффициентов отражения и преломления равна единице:

$$R_{\text{A}} + T_{\text{A}} = 1.$$

Аналогично для точки В, расположенной на задней границе шара, можно написать

$$I_2 = I_3 + I_4, \quad R_{\text{B}} = I_3/I_2, \quad T_{\text{B}} = I_4/I_2, \quad R_{\text{B}} + T_{\text{B}} = 1.$$

Таким образом, для полного описания энергетики отражения и преломления света на границах шара достаточно вычислить два параметра: коэффициенты отражения $R_{\text{A}}$ и $R_{\text{B}}$. Эту задачу можно решить с помощью формул Френеля.

**Формулы Френеля.** Как известно из теории Френеля (см. ч. IV), коэффициенты отражения и преломления света на границе раздела двух сред зависят от состояния поляризации падающей световой волны. Поэтому предположим, что лазерный пучок, падающий на частицу, линейно поляризован (как это обычно имеет место в экспериментах). Не ограничивая общности рассмотрения, будем считать далее, что вектор напряженности электрического поля в падающей волне $\vec{E}$, лежащий в плоскости фронта волны $xy$, направлен вдоль оси $y$, как показано на рис. Д3.7.

Разложим вектор $\vec{E}$ поля падающей волны на компоненты параллельную ($\vec{E}_{\parallel}$) и перпендикулярную ($\vec{E}_{\perp}$) плоскости падения луча в точку А. Тогда

$$\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}, \qquad \text{(Д3.5)}$$

где модули соответствующих векторов связаны соотношениями

$$E_{\parallel} = E\cos\psi, \quad E_{\perp} = E\sin\psi \qquad \text{(Д3.6)}$$

(рис. Д3.7). Коэффициенты отражения света по интенсивности для компонент поля падающей волны параллельной и перпендикулярной плоскости падения определяются формулами Френеля:

$$R_{\parallel}(\theta) = \frac{\mathrm{tg}^2(\theta - \theta_2)}{\mathrm{tg}^2(\theta + \theta_2)}, \qquad R_{\perp}(\theta) = \frac{\sin^2(\theta - \theta_2)}{\sin^2(\theta + \theta_2)}, \tag{Д3.7}$$

где $\theta$ — угол падения луча в точку A, $\theta_2$ — угол преломления. Согласно закону Снеллиуса (Д3.1), величина угла $\theta_2$ определяется формулой

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta\right), \tag{Д3.8}$$

в которой $n_1$ и $n_2$ — показатели преломления среды, окружающей частицу, и материала самой частицы.

Из выражений (Д3.5)–(Д3.8) следует, что полный коэффициент отражения света по интенсивности в точке A дается формулой

$$R_{\mathrm{A}} = R_{\mathrm{A}}(\theta, \psi) = R_{\parallel}(\theta)\cos^2\psi + R_{\perp}(\theta)\sin^2\psi. \tag{Д3.9}$$

Отражение луча на задней границе шара (в точке B) описывается теми же формулами (Д3.7), (Д3.9), в которых углы $\theta$ и $\theta_2$ следует теперь поменять местами (рис. Д3.4). При этом получим

$$R_{\mathrm{B}} = R_{\mathrm{B}}(\theta, \psi) = R_{\mathrm{A}}(\theta, \psi)$$

и, соответственно,

$$T_{\mathrm{B}} = T_{\mathrm{B}}(\theta, \psi) = T_{\mathrm{A}}(\theta, \psi) = 1 - R_{\mathrm{A}}(\theta, \psi). \tag{Д3.10}$$

Таким образом, вся энергетика отражения и преломления света на границах шара описывается одной единственной независимой величиной

$$R_{\mathrm{A}} = R_{\mathrm{B}} \equiv R,$$

для которой имеем формулу

$$R = R(\theta, \psi) = R_{\parallel}(\theta)\cos^2\psi + R_{\perp}(\theta)\sin^2\psi. \tag{Д3.11}$$

Здесь $\theta$ и $\psi$ — сферические координаты точки A падения луча на поверхность шара, а функции $R_{\parallel}(\theta)$ и $R_{\perp}(\theta)$ определяются формулами (Д3.7), (Д3.8). Вид этих функций, а значит и вид коэффициента отражения $R$, зависят только от относительного показателя преломления

$$n = n_2/n_1.$$

Что же касается коэффициентов преломления света, то согласно формуле (Д3.10), они (как и коэффициенты отражения) одинаковы на обеих границах шара, т. е.

$$T_{\mathrm{A}} = T_{\mathrm{B}} \equiv T,$$

причем коэффициент преломления $T$ однозначно определяется значением коэффициента отражения $R$:

$$T = 1 - R. \tag{Д3.12}$$

В дальнейшем для расчета сил светового давления нам понадобятся средние вида

$$\langle R \rangle = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} R(\theta, \psi) d\psi, \quad \langle R^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} R^2(\theta, \psi) d\psi. \tag{Д3.13}$$

Подставляя (Д3.11) в (Д3.13) и выполняя интегрирование, получаем

$$\langle R \rangle = \frac{1}{2}(R_{\parallel} + R_{\perp}), \quad \langle R^2 \rangle = \frac{3}{8}(R_{\parallel}^2 + R_{\perp}^2) + \frac{1}{4} R_{\parallel} R_{\perp}, \tag{Д3.14}$$

где функции $R_{\parallel} = R_{\parallel}(\theta)$ и $R_{\perp} = R_{\perp}(\theta)$ определяются формулами (Д3.7). Формулы (Д3.12) и (Д3.14) позволяют вычислить и другие средние, а именно,

$$\begin{gathered} \langle T \rangle = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} T(\theta, \psi) d\psi, \qquad \langle T^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} T^2(\theta, \psi) d\psi, \\ \langle TR \rangle = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} T(\theta, \psi) R(\theta, \psi) d\psi. \end{gathered} \tag{Д3.15}$$

В силу линейности операции интегрирования по $\psi$ и линейности связи (Д3.12) величин $T$ и $R$ получаем

$$\begin{gathered} \langle T \rangle = \langle 1 - R \rangle = 1 - \langle R \rangle, \\ \langle TR \rangle = \langle R(1 - R) \rangle = \langle R \rangle - \langle R^2 \rangle, \\ \langle T^2 \rangle = \langle (1 - R)^2 \rangle = 1 - 2\langle R \rangle + \langle R^2 \rangle. \end{gathered} \tag{Д3.16}$$

Перейдем к расчету сил светового давления.

**Силы светового давления.** Начнем с вычисления элементарной силы $d\vec{F}_1$. Эта сила возникает из-за того, что при отражении луча света от поверхности шара в точке А часть потока импульса падающей волны с объемной плотностью

$$G_1 = I_1/c^2 \tag{Д3.17}$$

изменяет свое направление с первоначального направления, задаваемого падающим лучом $\vec{l}_0$ на направление отраженного луча $\vec{l}_1$. Таким образом, направление изменения импульса света при отражении луча в точке А описывается вектором

$$\Delta\vec{l}_1 = \vec{l}_1 - \vec{l}_0. \tag{Д3.18}$$

Согласно второму закону Ньютона, элементарную силу $d\vec{F}_1$, действующую на элемент поверхности шара $d\sigma$ в окрестности точки А, можно вычислить по формуле

$$d\vec{F}_1 = d\vec{p}^{\,(1)}_{\text{тело}}/dt, \tag{Д3.19}$$

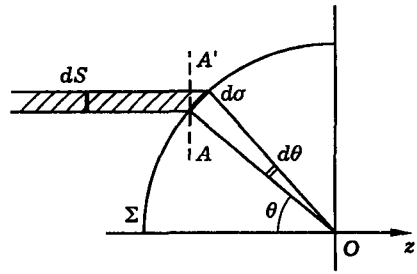



Рис. Д3.8. К выводу формулы (Д3.22). Площадь проекции $dS$ элемента поверхности шара $d\sigma$, расположенного в окрестности точки А, на плоскость фронта падающей волны АА$'$, выражается формулой $dS = d\sigma\cos\theta$. Изображена плоскость падения луча в точку А

где $d\vec{p}^{(1)}_{\text{тело}}$ — приращение импульса шара ("тела"), приобретаемое им за время $dt$. Величину $d\vec{p}^{(1)}_{\text{тело}}$ найдем из условия сохраненииия импульса для системы "свет–тело", которое имеет вид

$$d\vec{p}^{(1)}_{\text{тело}} + d\vec{p}^{(1)}_{\text{свет}} = 0. \qquad (\text{Д}3.20)$$

Величина $d\vec{p}^{(1)}_{\text{свет}}$ в формуле (Д3.20) имеет смысл изменения импульса света за время $dt$, возникающего при отражении луча в точке А. Эту величину запишем в виде

$$d\vec{p}^{(1)}_{\text{свет}} = \Delta\vec{l}_1 G_1 dV, \qquad (\text{Д}3.21)$$

где $G_1$ — объемная плотность импульса в отраженном луче, связанная с его интенсивностью $I_1$ формулой (Д3.17),

$$dV = c\,dt\,d\sigma\cos\theta, \qquad (\text{Д}3.22)$$

$dV$ — элементарный объем поля падающей световой волны, проходящий за время $dt$ через элемент поверхности шара $d\sigma$ в окрестности точки А. Величина $d\sigma$ определяется формулой

$$d\sigma = a^2\sin\theta\,d\theta\,d\psi, \qquad (\text{Д}3.23)$$

где $a$ — радиус шара, $\theta$ и $\psi$ — сферические координаты точки А. Множитель $\cos\theta$ в формуле (Д3.22) учитывает тот факт, что фронт падающей волны наклонен по отношению к поверхности шара в точке А под углом $\theta$ (рис. Д3.8).

Комбинируя формулы (Д3.17)–(Д3.22) и формулу (Д3.4), согласно которой $I_1 = RI_0$, получаем следующее выражение для элементарной силы $d\vec{F}_1$:

$$d\vec{F}_1 = \frac{1}{c}(\vec{l}_0 - \vec{l}_1)RI_0\cos\theta d\sigma.$$

Отсюда полная сила

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{c}\int\limits_{\Sigma}(\vec{l}_0 - \vec{l}_1)RI_0\cos\theta d\sigma, \qquad (\text{Д}3.24)$$

где интегрирование следует проводить по поверхности шара $\Sigma$ во всей области, освещенной падающим пучком ($\theta \leq \pi/2$). Принимая во внимание (Д3.23), формулу (Д3.24) можно переписать в виде

$$\vec{F}_1 = \frac{a^2}{c} \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} [\vec{l}_0 - \vec{l}_1(\theta, \psi)] R(\theta, \psi) I_0(\theta, \psi) d\psi. \qquad (Д3.25)$$

Формула (Д3.25) позволяет рассчитать силу светового давления $\vec{F}_1$, обусловленную отражением света на передней (обращенной к свету) поверхности шара. В этой формуле $a$ — радиус шара, $c$ — скорость света, $\vec{l}_0$ — единичный вектор направления падающей волны, $l_1(\theta, \psi)$ — единичный вектор направления волны, отраженной в точке поверхности шара с координатами $\theta$, $\psi$; $R(\theta, \psi)$ — френелевский коэффициент отражения, определяемый формулами (Д3.11), (Д3.7); $I_0(\theta, \psi)$ — распределение интенсивности света в падающем световом пучке.

Аналогичным образом можно вычислить и остальные элементарные силы $d\vec{F}_2$, $d\vec{F}_3$, $d\vec{F}_4$ (рис. Д3.5) и полные силы $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$. В результате получим

$$\vec{F}_i = \frac{1}{c} \int\limits_\Sigma \vec{f}_i I_0 \cos\theta d\sigma,$$

или

$$\vec{F}_i = \frac{a^2}{c} \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} \vec{f}_i I_0 d\psi,$$

где индекс "$i$" пробегает значения 1, 2, 3, 4 и

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= (\vec{l}_0 - \vec{l}_1)R, \quad \vec{f}_2 = (\vec{l}_0 - \vec{l}_2)T, \\ \vec{f}_3 &= (\vec{l}_2 - \vec{l}_3)TR, \quad \vec{f}_4 = (\vec{l}_2 - \vec{l}_4)T^2. \end{aligned} \qquad (Д3.26)$$

Векторная сумма всех сил, т. е. полная сила давления света на шар, выражается формулой

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{4} \vec{F}_i = \frac{a^2}{c} \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} \vec{f} I_0 d\psi, \qquad (Д3.27)$$

где

$$\vec{f} = \sum_{i=1}^{4} \vec{f}_i.$$

**Световое давление вдоль пучка.** Сила светового давления, действующая на шар в направлении оси лазерного пучка, определяется формулой

$$F_z = \sum_{i=1}^{4} F_{iz}, \qquad (Д3.28)$$

где

$$F_{\imath z} = \frac{a^2}{c} \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} f_{\imath z} I_0 d\psi. \qquad (Д3.29)$$

Факторы $f_{\imath z}$ вычислим, используя формулы (Д3.26) и (Д3.2). Они оказываются равными

$$\begin{aligned} f_{1z} &= (1 + \cos 2\theta)R, \\ f_{2z} &= [1 - \cos(\theta - \theta_2)]T, \\ f_{3z} &= [\cos(\theta - \theta_2) + \cos(3\theta_2 - \theta)]TR, \\ f_{4z} &= [\cos(\theta - \theta_2) - \cos 2(\theta - \theta_2)]T^2. \end{aligned} \qquad (Д3.30)$$

Подставляя (Д3.30) в (Д3.29), (Д3.28), можно вычислить силу светового давления $F_z$ для произвольного распределения интенсивности в падающем пучке $I_0(\theta, \psi)$. В частности, для пространственно однородного падающего светового потока с интенсивностью

$$I_0(\theta, \psi) = I_0 = \text{const}$$

получаем

$$F_{\imath z} = \frac{a^2 I_0}{c} \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} f_{\imath z} d\psi. \qquad (Д3.31)$$

Введем полную мощность света, падающего на частицу

$$P = \pi a^2 I_0 \qquad (Д3.32)$$

и силу

$$F_0 = 2P/c, \qquad (Д3.33)$$

имеющую смысл силы светового давления на плоское зеркало радиуса $a$. Тогда формулу (Д3.31) можно переписать в виде

$$F_{\imath z} = F_0 q_\imath, \qquad (Д3.34)$$

где

$$q_\imath = \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta \langle f_{\imath z} \rangle d\theta; \quad \langle f_{\imath z} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f_{\imath z} d\psi. \qquad (Д3.35)$$

Подставляя (Д3.30) в (Д3.35), получим

$$q_1 = \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta[1+\cos 2\theta]\langle R\rangle d\theta,$$

$$q_2 = \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta[1-\cos(\theta-\theta_2)]\langle T\rangle d\theta,$$

$$q_3 = \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta[\cos(\theta-\theta_2)+\cos(3\theta_2-\theta)]\langle TR\rangle d\theta, \qquad (Д3.36)$$

$$q_4 = \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta[\cos(\theta-\theta_2)-\cos 2(\theta-\theta_2)]\langle T^2\rangle d\theta,$$

где согласно (Д3.35), (Д3.30), (Д3.13)–(Д3.16), (Д3.7), (Д3.8),

$$\langle R\rangle = \frac{1}{2}(R_\parallel + R_\perp), \quad \langle T\rangle = 1-\langle R\rangle,$$

$$\langle R^2\rangle = \frac{3}{8}(R_\parallel^2 + R_\perp^2) + \frac{1}{4}R_\parallel R_\perp, \qquad (Д3.37)$$

$$\langle TR\rangle = \langle R\rangle - \langle R^2\rangle, \quad \langle T^2\rangle = 1 + \langle R^2\rangle - 2\langle R\rangle,$$

$$R_\parallel = R_\parallel(\theta) = \frac{\mathrm{tg}^2(\theta-\theta_2)}{\mathrm{tg}^2(\theta+\theta_2)}, \quad R_\perp = R_\perp(\theta) = \frac{\sin^2(\theta-\theta_2)}{\sin^2(\theta+\theta_2)}, \qquad (Д3.38)$$

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta\right). \qquad (Д3.39)$$

Задаваясь определенными значениями показателей преломления среды, окружающей шар ($n_1$), и самого шара ($n_2$), по формулам (Д3.36)–(Д3.39) можно вычислить величины $q_1$, $q_2$, $q_3$, $q_4$, после чего по формулам (Д3.34) и (Д3.28) нетрудно найти полную силу светового давления в направлениии оси пучка $F_z$.

**Световое давление поперек пучка.** Расчет поперечной компоненты силы светового давления проводится аналогично. Проектируя выражение (Д3.27) на ось $x$, получим

$$F_x = \sum_{i=1}^{4} F_{ix}, \qquad (Д3.40)$$

где

$$F_{ix} = \frac{a^2}{c}\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta d\theta \int_0^{\pi/2} f_{ix} I_0 d\psi. \qquad (Д3.41)$$

Факторы $f_{ix}$ вычислим, используя формулы (Д3.26) и (Д3.2). Они оказываются равными

$$f_{1x} = -R\sin 2\theta \sin\psi, \quad f_{2x} = T\sin(\theta - \theta_2)\sin\psi,$$
$$f_{3x} = TR[-\sin(\theta - \theta_2) + \sin(3\theta_2 - \theta)]\sin\psi, \qquad (Д3.42)$$
$$f_{4x} = T^2[-\sin(\theta - \theta_2) + \sin 2(\theta - \theta_2)]\sin\psi.$$

Подставляя (Д3.42) в (Д3.41), (Д3.40), можно вычислить силу светового давлениия $F_x$ для произвольного распределения интенсивности в падающем пучке $I_0 = I_0(\theta, \psi)$. В частности, для пространственно однородного падающего светового потока с интенсивностью

$$I_0(\theta, \psi) = I_0 = \text{const} \qquad (Д3.43)$$

получим

$$F_{ix} = \frac{a^2 I_0}{c} \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} f_{ix} d\psi. \qquad (Д3.44)$$

Используя обозначения (Д3.32), (Д3.33), формулу (Д3.44) можно переписать в виде

$$F_{ix} = F_0 q_{ix},$$

где

$$q_{ix} = \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\langle f_{ix}\rangle d\theta, \quad \langle f_{ix}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_{ix} d\psi. \qquad (Д3.45)$$

Подставляя (Д3.42), (Д3.11), (Д3.12) в (Д3.45), получим

$$\langle f_{ix}\rangle = 0$$

и, следовательно, $q_{ix} = 0$, $F_{ix} = 0$, $F_x = 0$.

Итак, поперечная компонента силы светового давления оказалась равной нулю. Физически этот результат вполне понятен, так как мы предполагали, что сферическая частица облучается пространственно однородным световым потоком. Заметим однако, что если условие однородности падающего светового потока (Д3.43) не выполняется, то компонента силы светового давления, перпендикулярная оси светового пучка, будет, вообще говоря, отлична от нуля. Такая сила возникает, в частности, если частица облучается световым пучком с гауссовым профилем интенсивности, а центр частицы смещен относительно оси пучка. В этом случае возникает сила, втягивающая частицу в пучок, если $n_2 > n_1$ и, наоборот, выталкивающая частицу из пучка, если $n_2 < n_1$. Количественный расчет этих сил можно выполнить по общим формулам (Д3.40)–(Д3.42).

**Численные оценки.** Рассмотрим в качестве примера оптическую левитацию частиц из латекса, погруженных в воду [1]. Полагая $n_1 = 1{,}33$, $n_2 = 1{,}58$, и выполнив численные расчеты по формулам (Д3.36)–(Д3.39), получим $q_1 = 0{,}0062$, $q_2 = 0{,}0078$, $q_3 = 0{,}0162$, $q_4 = 0{,}0208$ и значение полного "$q$-фактора"

$$q = \sum_{i=1}^{4} q_i = 0{,}051. \qquad (Д3.46)$$

Оценим теперь силу светового давления, действующую на частицу. Согласно формулам (Д3.28), (Д3.34), (Д3.46)

$$F_z = F_0 q,$$

где $F_0 = 2P/c$, $P$ — мощность света, падающего на частицу, $c$ — скорость света. Полагая $P = 1$ Вт, для $q = 0{,}051$ получим $F_0 = 0{,}67 \times 10^{-3}$ дин, $F_z = 3{,}4 \times 10^{-5}$ дин. Сравним эту силу с весом частицы. Пусть частица представляет собой шар радиуса $a = \lambda = 0{,}5$ мкм из материала с плотностью $\rho = 1$ г/см$^3$. При этом $mg = (4/3)\pi\lambda^3\rho g = 5 \times 10^{-10}$ дин. Таким образом, сила светового давления превышает вес частицы приблизительно в $10^5$ раз. Эти оценки показывают, что даже для прозрачных частиц силы светового давления в сфокусированных лазерных пучках могут быть весьма велики.

## Литература

1. *Эшкин А.* Давление лазерного излучения//УФН. 1973. Т. 110, вып. 1. С. 101.
2. *Ashkin A.* The Pressure of Laser Light//Scientific American. 1972. V. 226, No 2. P. 63.

# Дополнение 4

# Спектральные разложения в оптике

*Метод спектральных разложений. Периодические функции. Ряд Фурье. Дискретный спектр. Спектральные амплитуды и фазы. Непериодические функции. Интеграл Фурье. Сплошной спектр. Отрицательные частоты. Комплексная запись. Косинус-преобразование Фурье. Примеры. Связь между длительностью импульса и шириной спектра. Спектр гармонического колебания. Дельта-функция и ее свойства. Дельтаобразный импульс. Полная и неполная спектральная информация. Спектральная плотность. Равенство Парсеваля.*

Наряду с временны́м описанием модулированных колебаний и волн в оптике широко применяется альтернативный — *спектральный* метод. Познакомимся с этим методом, который базируется на математической теории рядов и интегралов Фурье.

**Метод спектральных разложений.** Основная идея спектрального описания состоит в том, чтобы представить некоторую функцию времени (например, электрическое поле световой волны) в виде суммы *гармонических колебаний* разных частот

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos\omega_n t + b_n \sin\omega_n t). \qquad (Д4.1)$$

Набор частот $\omega_n$ и амплитуд $a_n$, $b_n$ образуют *спектр* процесса $E(t)$. Если известен спектр, то можно восстановить временно́й ход процесса по формуле (Д4.1). Поэтому оба способа описания процессов (временно́й и спектральный) вполне эквивалентны. Однако по способу записи информации они существенно отличаются. В частности, возможен случай, когда сложной функции времени соответствует простой спектр (рис. Д4.1, *а*) или наоборот (рис. Д4.1, *б*).

Разложение в спектр не только удобная *математическая операция*. Во многих случаях оно осуществляется как реальное *физическое явление*. Классический пример такого рода — знаменитый опыт Ньютона, в котором стеклянная призма разлагает белый солнечный свет на семь основных цветов: красный, оранжевый, желтый, зеленый, голубой, синий, фиолетовый (рис. 1.6). Приборы, действие которых основано на спектральном разложении света (призмы, решетки и т. п.) давно и широко применяются в экспериментальной оптике.

**Периодические функции. Ряд Фурье. Дискретный спектр.** Пусть некоторая функция времени $f(t)$ является *периодической*, т. е. удовлетворяет условию

$$f(t) = f(t + nT), \qquad (Д4.2)$$

где $t$ — произвольный момент времени, $n$ — любое целое число, $T$ — *период* функции $f(t)$. Типичный вид периодической функции показан на рис. Д4.2.

Предположим, что функция $f(t)$ кусочно-непрерывна и ограничена. Тогда, согласно теореме Дирихле, она может быть представлена в виде ряда

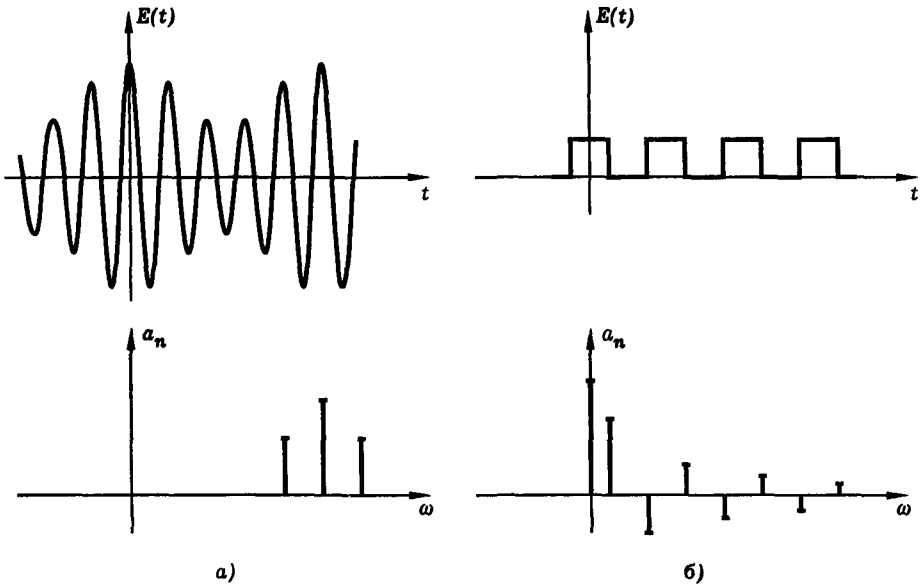



Рис. Д4.1. Временно́е и спектральное описание процессов

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos\omega_n t + \beta_n \sin\omega_n t), \qquad (Д4.3)$$

где

$$\omega_n = n\Delta\omega, \quad \Delta\omega = 2\pi/T, \quad \alpha_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt,$$
$$\alpha_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\omega_n t dt, \quad \beta_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\omega_n t dt. \qquad (Д4.4)$$

Ряд (Д4.3) называется *рядом Фурье*, а коэффициенты $\alpha_n$ и $\beta_n$ — *коэффициентами Фурье* функции $f(t)$. Индекс "$n$" в формуле (Д4.3) нумерует частоты $\omega_n$ составляющих функцию $f(t)$ гармонических колебаний ("гармоник"). Как видно из формул (Д4.4), эти частоты разделены одинаковыми интервалами $\Delta\omega = 2\pi/T$ и образуют эквидистантную последовательность.

Нетрудно убедиться в правильности формул (Д4.4) для коэффициентов Фурье. Для этого достаточно умножить равенство (Д4.3) на $\cos\omega_m t$ или $\sin\omega_m t$, где $m = 1, 2, \ldots$, и проинтегрировать полученные соотношения по периоду функции $f(t)$ от $-T/2$ до $T/2$. В математике доказывается единственность разложения (Д4.3). Тем самым математическая задача разложения периодических функций на гармонические колебания полностью решена.

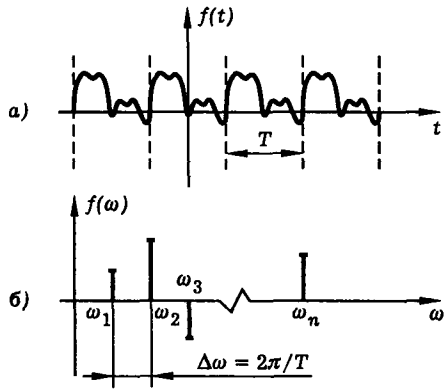



Рис. Д4.2. Периодическая функция времени (*а*) и ее спектр (*б*)

**Спектральные амплитуды и фазы.** Пользуясь известными тригонометрическими формулами, можно переписать ряд (Д4.3) несколько иначе:

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos(\omega_n t - \varphi_n), \tag{Д4.5}$$

где коэффициенты $f_n$ и $\varphi_n$ называются соответственно *спектральными амплитудами и фазами* функции $f(t)$. Они связаны с коэффициентами Фурье соотношениями

$$\begin{gathered} \alpha_n = f_n \cos\varphi_n, \qquad \beta_n = f_n \sin\varphi_n, \\ f_n = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}, \quad \varphi_n = \operatorname{arctg}(\beta_n/\alpha_n). \end{gathered} \tag{Д4.6}$$

Распределение спектральных амплитуд $f_n$ по соответствующим им частотам $\omega_n$ гармоник называется *спектром* функции $f(t)$. Спектр можно изобразить графически, откладывая по оси абсцисс частоты, а по оси ординат — спектральные амплитуды, как показано на рис. Д4.2, *б*.

Из нашего рассмотрения следует, что любой периодический процесс имеет *дискретный спектр,* т. е. спектр, состоящий из отдельных линий. Это важное свойство периодических процессов. Вместе с тем, обратное утверждение справедливо не всегда. Только в том случае, если частотные интервалы между линиями кратны некоторому интервалу $\Delta\omega \neq 0$, соответствующий процесс является периодическим и имеет конечный период $T = 2\pi/\Delta\omega$.

Однако в оптике мы не имеем дела со строго периодическими процессами (хотя бы потому, что такие процессы бесконечны во времени). Поэтому важно обобщить спектральные представления и на *непериодические процессы.* Примером такого процесса является излучение атома, которое затухает во времени и, следовательно, непериодично.

**Непериодические функции. Интеграл Фурье. Сплошной спектр.** Рассмотрим некоторую непериодическую функцию времени $f(t)$ и попытаемся найти ее спектр (рис. Д4.3). С математической точки зрения непериодическую

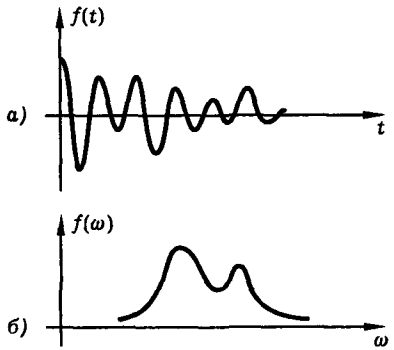



Рис. Д4.3. Непериодическая функция времени (*а*) и ее спектр (*б*)

функцию можно рассматривать как периодическую с периодом, стремящимся к бесконечности. Поэтому для спектрального разложения непериодической функции $f(t)$ нужно перейти к пределу $T \to \infty$ в формулах (Д4.3), (Д4.4). Такой переход возможен, если функция $f(t)$ удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty. \qquad \text{(Д4.7)}$$

Используя выражение (Д4.4) для $\Delta\omega$, перепишем формулу (Д4.3) в виде

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{T}{2}\alpha_n \cos\omega_n t + \frac{T}{2}\beta_n \sin\omega_n t\right)\Delta\omega. \qquad \text{(Д4.8)}$$

Теперь перейдем к пределу $T \to \infty$. При этом в силу формул (Д4.8) и (Д4.4) получаем

$$\begin{gathered} \alpha_0 = 0, \\ \frac{T}{2}\alpha_n = \lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\omega_n t dt, \\ \frac{T}{2}\beta_n = \lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\omega_n t dt. \end{gathered} \qquad \text{(Д4.9)}$$

Поскольку $\omega_n = n\Delta\omega$, где $\Delta\omega = 2\pi/T$, то в пределе при $T \to \infty$ частотный интервал $\Delta\omega$ стремится к нулю. При этом частота гармонических колебаний из дискретной переменной $\omega_n$ превращается в непрерывную переменную $\omega$. Поэтому, опуская индекс "$n$" в (Д4.9), введем новые обозначения

$$a(\omega) = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\omega t dt,$$
$$b(\omega) = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\omega t dt. \qquad (Д4.10)$$

Наконец, переходя к пределу $T \to \infty$, $\Delta\omega \to 0$ в (Д4.8), заменяя предел суммы на интеграл и учитывая (Д4.9), (Д4.10), получаем

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [a(\omega)\cos\omega t + b(\omega)\sin\omega t]d\omega, \qquad (Д4.11)$$

где

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt, \quad b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt. \qquad (Д4.12)$$

Интеграл (Д4.11) называется интегралом Фурье.

Формулы (Д4.11), (Д4.12) решают задачу о спектральном разложении непериодической функции времени. Выведем теперь несколько более компактных представлений для интеграла Фурье.

Спектральная амплитуда и спектральная фаза. Перепишем (Д4.11) в виде

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(\omega)\cos[\omega t - \varphi(\omega)]d\omega. \qquad (Д4.13)$$

Здесь $f(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ называются соответственно спектральной амплитудой и спектральной фазой функции $f(t)$[1]. Пользуясь тригонометрической формулой

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta, \qquad (Д4.14)$$

преобразуем подынтегральное выражение в (Д4.13) и приравняем его подынтегральному выражению в (Д4.11). Получим

$$f(\omega)\cos[\omega t - \varphi(\omega)] =$$
$$= f(\omega)\cos\omega t\cos\varphi + f(\omega)\sin\omega t\sin\varphi =$$
$$= a(\omega)\cos\omega t + b(\omega)\sin\omega t. \qquad (Д4.15)$$

[1] Для обозначения спектральной амплитуды мы используем тот же символ "$f$", что и для функции $f(t)$. Это делается для упрощения записи. Заметим, однако, что $f(t)$ и $f(\omega)$, вообще говоря, *разные* функции своих аргументов Ниже мы всякий раз будем указывать аргумент, чтобы было ясно, о какой из двух функций идет речь.

Приравнивая коэффициенты при функциях $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$, находим связь между спектральными амплитудой и фазой с одной стороны и квадратурными компонентами $a(\omega)$ и $b(\omega)$ с другой:

$$\begin{aligned} a(\omega) &= f(\omega)\cos\varphi(\omega), \quad f(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}, \\ b(\omega) &= f(\omega)\sin\varphi(\omega), \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left[\frac{b(\omega)}{a(\omega)}\right]. \end{aligned} \tag{Д4.16}$$

Обратим внимание на то, что непериодический процесс (в отличие от периодического) имеет *сплошной спектр*. Это следует из того, что спектральные характеристики процесса — $a(\omega)$ и $b(\omega)$ или $f(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, определяемые формулами (Д4.12) и (Д4.16) — являются непрерывными функциями частоты. График спектральной амплитуды $f(\omega)$ имеет вид непрерывной кривой (рис. Д4.3). Таким образом, непериодическая функция — это суперпозиция гармоник, частоты которых изменяются непрерывно.

Итак, по виду спектра можно судить о характере самого процесса. Например, из того, что спектр солнечного света сплошной (цвета плавно переходят один в другой, между ними нет промежутков), можно сделать вывод, что излучение Солнца — непериодический процесс.

**Отрицательные частоты.** Из формул (Д4.12), определяющих квадратурные компоненты $a(\omega)$ и $b(\omega)$, видно, что $a(\omega)$ — четная функция частоты, а $b(\omega)$ — нечетная:

$$a(-\omega) = a(\omega), \quad b(-\omega) = -b(\omega). \tag{Д4.17}$$

Поэтому (Д4.11) можно переписать в симметризованном по $\omega$ виде:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[a(\omega)\cos\omega t + b(\omega)\sin\omega t]d\omega, \tag{Д4.18}$$

где функции $a(\omega)$ и $b(\omega)$ определены фомулами (Д4.12).

В (Д4.18) мы впервые ввели *отрицательные частоты*, что позволило получить более симметричную запись преобразований Фурье (см. (Д4.18) и (Д4.12), где все интегралы берутся теперь в бесконечных пределах). Подчеркнем, что отрицательные частоты введены формально математически. Содержание этого понятия полностью исчерпывается формулами

$$\cos(-\omega t) = \cos\omega t, \quad \sin(-\omega t) = -\sin\omega t. \tag{Д4.19}$$

Никакого иного смысла термин "отрицательные частоты" не несет. Разумеется, на самом деле (физически) отрицательных частот не существует, так же как нет отрицательных периодов гармонических колебаний. Отрицательные частоты введены математически для удобства. Фактически они фигурируют только на промежуточных этапах расчетов, а в окончательные формулы для измеряемых физических величин никогда не входят.

**Комплексная запись.** Пользуясь формулой (Д4.15), перепишем (Д4.18) в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\cos[\omega t - \varphi(\omega)]d\omega. \tag{Д4.20}$$

Теперь введем *комплексную спектральную амплитуду*

$$f_{\text{к}}(\omega) = a(\omega) - ib(\omega). \tag{Д4.21}$$

Пользуясь формулой Эйлера

$$e^{\imath\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t, \tag{Д4.22}$$

выразим произведение $f_{\text{к}}(\omega)e^{\imath\omega t}$. Получим

$$\begin{aligned} f_{\text{к}}(\omega)e^{\imath\omega t} &= [a(\omega) - ib(\omega)](\cos\omega t + i\sin\omega t) = \\ &= a(\omega)\cos\omega t + b(\omega)\sin\omega t + i[a(\omega)\sin\omega t - b(\omega)\cos\omega t]. \end{aligned} \tag{Д4.23}$$

Обратим внимание на то, что действительная часть этого комплексного выражения является четной функцией частоты $\omega$, в то время как мнимая часть — нечетной. Поэтому, интегрируя правую и левую части выражения (Д4.23) по частоте $\omega$ в бесконечных пределах, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\text{к}}(\omega)e^{\imath\omega t}d\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [a(\omega)\cos\omega t + b(\omega)\sin\omega t]d\omega. \tag{Д4.24}$$

В силу соотношений (Д4.18), (Д4.24)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\text{к}}(\omega)e^{\imath\omega t}d\omega. \tag{Д4.25}$$

Теперь найдем функцию $f_{\text{к}}(\omega)$. По определению (Д4.21) и в соответствии с (Д4.12), (Д4.22) имеем

$$\begin{aligned} f_{\text{к}}(\omega) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt - \imath\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt = \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)[\cos\omega t - \imath\sin\omega t]dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\imath\omega t}dt. \end{aligned} \tag{Д4.26}$$

Суммируя результаты, запишем комплексные представления преобразований Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\text{к}}(\omega)e^{\imath\omega t}d\omega, \quad f_{\text{к}}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\imath\omega t}dt. \tag{Д4.27}$$

Для упрощения записи опустим индекс "к" у комплексной спектральной амплитуды, тогда интегралы Фурье приобретают вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{\imath\omega t}d\omega, \quad f(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\imath\omega t}dt. \tag{Д4.28}$$

**Косинус-преобразование Фурье.** Пусть $f(t)$ — четная функция времени, т. е.

$$f(-t) = f(t). \tag{Д4.29}$$

Тогда, в силу формул (Д4.28),

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)[\cos\omega t - i\sin\omega t]dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt. \tag{Д4.30}$$

Отсюда следует, что спектральная амплитуда $f(\omega)$ — действительная и четная функция частоты, т. е.

$$f(\omega) = f(-\omega). \tag{Д4.31}$$

Используя (Д4.28) и (Д4.31), получим следующее выражение для функции $f(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)[\cos\omega t + i\sin\omega t]d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\cos\omega t d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(\omega)\cos\omega t d\omega. \tag{Д4.32}$$

Итак, если $f(t)$ — четная функция времени, то ее спектральная амплитуда является действительной и четной функцией частоты, а преобразование Фурье может быть записано в виде интеграла от действительной функции по положительным частотам:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(\omega)\cos\omega t d\omega, \quad f(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt. \tag{Д4.33}$$

Интегралы (Д4.33) называются формулами *косинус-преобразования Фурье.*

**Примеры.** Рассмотрим в качестве примера прямоугольный импульс

$$f(t) = \begin{cases} f_0, & |t| \le \tau, \\ 0, & |t| > \tau. \end{cases} \tag{Д4.34}$$

Подставляя (Д4.34) в (Д4.33), получим

$$f(\omega) = 2f_0\tau\ \mathrm{sinc}(\omega\tau), \tag{Д4.35}$$

где введена функция “sinc”, определяемая формулой

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}. \tag{Д4.36}$$

Прямоугольный импульс и его спектр показаны на рис. Д4.4.

Для импульса гауссовой формы

$$f(t) = f_0 \exp\left(-t^2/\tau^2\right) \tag{Д4.37}$$

в соответствии с (Д4.28) имеем

$$f(\omega) = \sqrt{\pi} f_0 \tau \exp(-\omega^2\tau^2/4). \tag{Д4.38}$$

Для импульса экспоненциального вида

$$f(t) = f_0 \exp(-|t|/\tau) \tag{Д4.39}$$

фурье-спектр равен

$$f(\omega) = \frac{2\tau f_0}{1+\omega^2\tau^2}. \tag{Д4.40}$$

Графики функций (Д4.37)–(Д4.40) изображены на рис. Д4.5 и Д4.6.

**Связь между длительностью импульса и шириной спектра.** Обратим внимание на то, что во всех рассмотренных примерах ширина спектра $\Delta\omega$ обратно пропорциональна длительности импульса $\Delta t$, т. е.

$$\Delta\omega \sim 1/\Delta t. \tag{Д4.41}$$

Указанная закономерность имеет общий характер и выражает одно из основных свойств преобразования Фурье. Нетрудно обосновать это соотношение, исходя из формулы (Д4.33) для спектральной амплитуды. На рис. Д4.7 изображены график функции $f(t)$ (сплошная кривая) и график функции $\cos\omega t$ (пунктир). Согласно формуле (Д4.33),

$$f(\omega = 0) = 2\int_0^\infty f(t)dt,$$

т. е. спектральная амплитуда на нулевой частоте есть постоянная величина, определяемая площадью импульса. Если частота $\omega$ увеличивается, то, как видно из (Д4.33), спектральная амплитуда $f(\omega)$ уменьшается. Убывание $f(\omega)$ происходит медленно до тех пор пока период функции $\cos\omega t$, равный $2\pi/\omega$, значительно превышает длительность импульса $\Delta t$, т. е. в области частот, определяемой неравенством

$$T = 2\pi/\omega \gg \Delta t.$$

Если же

$$T \ll \Delta t,$$

то, как видно из рис. Д4.7, спектральная амплитуда стремится к нулю. Итак,

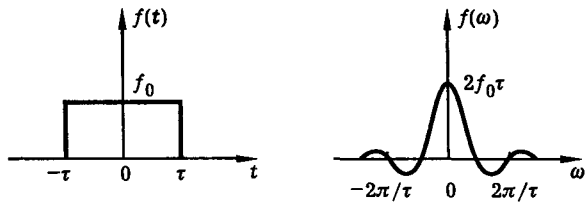



Рис. Д4.4. Прямоугольный импульс и его спектр

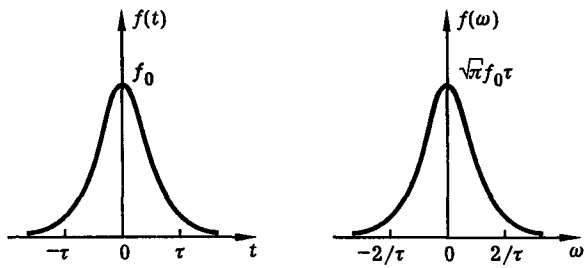



Рис. Д4.5. Гауссов импульс и его спектр

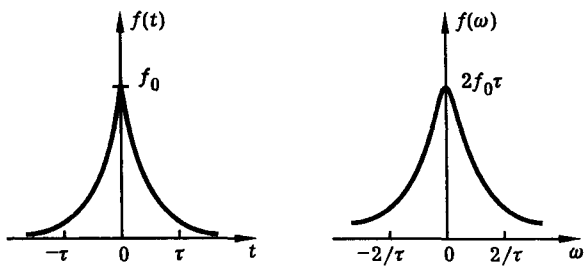



Рис. Д4.6. Экспоненциальный импульс и его спектр

$$\begin{cases} f(\omega) \approx f(\omega = 0), & \text{если } \omega \ll 2\pi/\Delta t, \\ f(\omega) \approx 0, & \text{если } \omega \gg 2\pi/\Delta t. \end{cases}$$

Область наиболее быстрого спада функции $f(\omega)$ приходится, очевидно, на частоту

$$\Delta\omega = 2\pi/\Delta t, \tag{Д4.42}$$

которую можно принять за меру ширины распределения $f(\omega)$. Добавим, что формула (Д4.42) из приближенной превращается в точную, если использовать интегральные определения длительности импульса и ширины спектра:

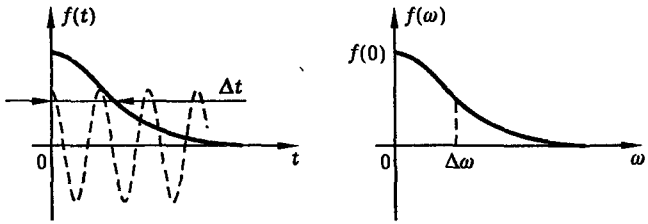



Рис. Д4.7. Анализ соотношения между длительностью импульса и шириной спектра

$$\Delta t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt/f(t=0), \quad \Delta\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\omega)d\omega/f(\omega=0). \tag{Д4.43}$$

В этом случае соотношение (Д4.42) есть прямое следствие формул (Д4.28), причем оно справедливо независимо от конкретного вида функции $f(t)$.

**Спектр гармонического колебания.** Модель гармонических колебаний и волн широко применяется в оптике, поэтому представляет интерес вычисление спектра монохроматического колебания

$$f(t) = f_0 \cos\omega_0 t. \tag{Д4.44}$$

Используя выражение (Д4.28) для $f(\omega)$, а так же формулу Эйлера

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}\left[\exp\left(i\omega_0 t\right) + \exp\left(-i\omega_0 t\right)\right], \tag{Д4.45}$$

нетрудно получить для спектральной плотности гармонического колебания (Д4.44) следующее представление

$$f(\omega) = \pi f_0[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)], \tag{Д4.46}$$

где введено обозначение

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\omega t}dt. \tag{Д4.47}$$

Формула (Д4.47) является одним из возможных определений обобщенной функции, называемой дельта-функцией Дирака. Появление обобщенной функции связано, очевидно, с тем, что функция (Д4.44) не удовлетворяет условию (Д4.7). Ввиду важности дельта-функции обсудим коротко ее основные свойства.

**Дельта-функция и ее свойства.** Из (Д4.47) следует, что интегральное представление для дельта-функции можно записать также в виде

$$\delta(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \cos\omega t dt. \tag{Д4.48}$$

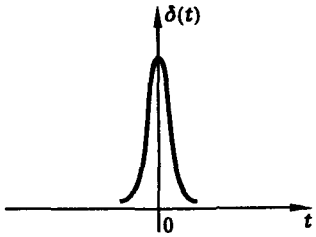



Рис. Д4.8. Образ дельта-функции

Из формулы (Д4.48) следует, что дельта-функция имеет вид бесконечно узкого и бесконечно высокого "выброса" в нуле (рис. Д4.8). При этом интеграл от дельта-функции есть конечная величина:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)d\omega = 1. \qquad (Д4.49)$$

Из (Д4.28) следует соотношение

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} f(\theta)e^{i\omega(t-\theta)}d\omega\, d\theta, \qquad (Д4.50)$$

называемое *формулой Фурье*. Учитывая (Д4.47), можно переписать (Д4.50) в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\delta(t-\theta)d\theta = f(t). \qquad (Д4.51)$$

Последняя формула выражает основное свойство дельта-функции, которое можно назвать "свойством стробирования". В частном случае, когда $f(t) = 1$, из (Д4.51) следует (Д4.49). Отметим еще несколько свойств дельта-функции, вытекающих из ее определения, и часто используемых в расчетах:

$$\delta(-t) = \delta(t), \qquad (Д4.52)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha t)dt = 1/|\alpha|, \qquad (Д4.53)$$

$$\int_{0}^{\infty} \delta(t)dt = 1/2. \qquad (Д4.54)$$

**Дельтаобразный импульс.** Еще одной полезной моделью в оптике является процесс с постоянным спектром:

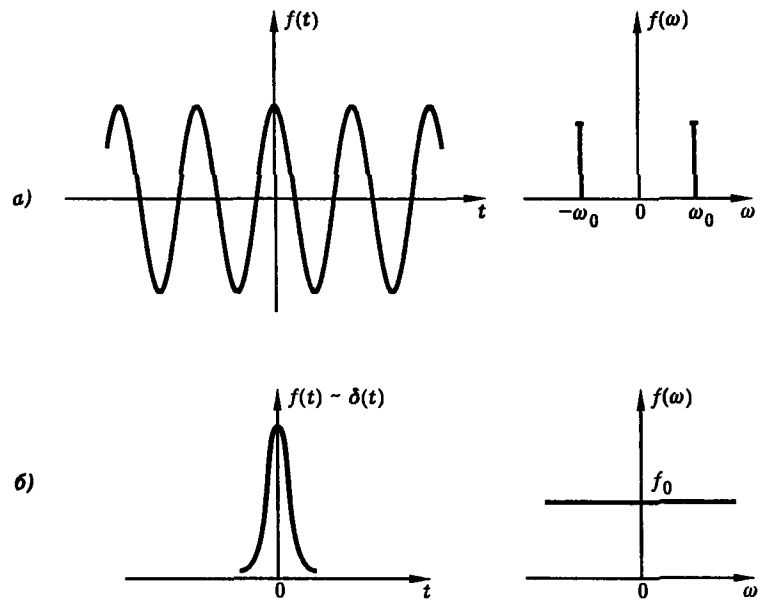



Рис. Д4.9. Гармоническое колебание (*а*) и дельтаобразный импульс (*б*): временно́е и спектральное представления

$$f(\omega) = f_0 = \text{const}. \tag{Д4.55}$$

Подстановка (Д4.55) в (Д4.28) приводит к следующему выражению для $f(t)$:

$$f(t) = f_0\delta(t). \tag{Д4.56}$$

Такой процесс мы будем называть *дельтаобразным импульсом* или процессом с *белым спектром*. Временны́е и спектральные картины гармонического колебания и дельтаобразного импульса показаны на рис. Д4.9. Отметим, что хотя оба эти предельные случая, строго говоря, нереализуемы физически, они весьма полезны как теоретические модели и наглядные образцы процессов с предельно узким и предельно широким спектрами.

Резюмируя, подчеркнем еще раз важный результат теории спектральных разложений: чем короче импульс, тем шире его частотный спектр. Применительно к оптике это означает, что чем плотнее сконцентрирована энергия светового поля во времени, тем шире она распределена по спектру. В частности, предельно короткие импульсы света, длительность которых соизмерима с периодом световых колебаний, обладают частотным спектром, ширина которого соизмерима с несущей частотой световой волны.

**Полная и неполная спектральная информация. Спектральная плотность.** В общем случае спектральная амплитуда $f(\omega)$, определяемая формулой (Д4.28), является *комплексной* функцией частоты:

$$f(\omega) = |f(\omega)|e^{i\varphi(\omega)}. \tag{Д4.57}$$

Модуль комплексной спектральной амплитуды представляет собой действительную амплитуду гармоники с частотой $\omega$ в спектре $f(t)$, а аргумент $\varphi(\omega)$ — действительную фазу этого колебания. Таким образом, комплексность спектральной амплитуды связана с тем, что разные гармоники, образующие в совокупности процесс $f(t)$, имеют, вообще говоря, различные фазы. Часто такая полная спектральная информация об оптическом процессе бывает не нужна. Более того, в оптике ее трудно экспериментально получить. Поэтому на практике обычно используют более грубую спектральную характеристику процессов — *спектральную плотность*. По определению спектральной плотностью называется величина, равная квадрату модуля комплексной спектральной амплитуды:

$$S(\omega) = |f(\omega)|^2. \qquad (Д4.58)$$

В этом выражении информация о фазах гармонических колебаний, составляющих процесс $f(t)$, утрачена. Тем не менее, для оптики спектральная плотность является важной характеристикой процессов, поскольку именно она обычно измеряется в экспериментах. Согласно формуле (5.23), энергия гармонического осциллятора определяется амплитудой и частотой колебаний. Это позволяет выявить физический смысл спектральной плотности светового поля. Он состоит в том, что спектральная плотность характеризует распределение *энергии света* по спектру. Именно эта характеристика света наблюдается и может быть экспериментально измерена в опытах типа опыта Ньютона (рис. 1.6).

**Равенство Парсеваля.** Докажем одну важную формулу, относящуюся к спектральной плотности, и позволяющую глубже понять ее физический смысл. В теории спектральных разложений эта формула носит название "равенство Парсеваля". Она имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)d\omega. \qquad (Д4.59)$$

Для доказательства воспользуемся интегралами Фурье (Д4.28). Получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{i\omega t}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} dt f(t)e^{i\omega t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(\omega)f^*(\omega) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)d\omega.$$

Напомним, что звездочка обозначает комплексное сопряжение.

Итак, равенство Парсеваля доказано. Применительно к оптике это соотношение имеет простой физический смысл. Если под процессом $f(t)$ понимать напряженность электрического поля световой волны в некоторой фиксированной точке пространства, то величина

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} E^2(t)dt = \frac{8\pi}{c}\int_{-\infty}^{\infty} I(t)dt = \frac{8\pi}{c\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} P(t)dt = \frac{8\pi}{c\sigma}W$$

оказывается пропорциональной энергии светового импульса, прошедшей через площадку единичной площади в окрестности данной точки. С другой стороны, согласно равенству Парсеваля, та же самая величина (энергия) равна интегралу по всем частотам от спектральной плотности поля $S(\omega)$. Это означает, что спектральная плотность описывает распределение энергии светового импульса по частотам. В этом состоит физический смысл данной характеристики излучения.

## Литература

1. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 2. — М.: Наука, 1974.
2. *Свешников А. Г., Тихонов А. Н.* Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1974.

# Дополнение 5

# Из истории физической оптики

*Цитаты из оригинальных работ Галилея, Максвелла, Майкельсона, Герца.*

**Опыт Галилея.** "Опыт, который я придумал, заключается в следующем. Два лица держат каждый по огню, заключенному в фонаре или в чем-либо подобном, который можно открывать и закрывать движением руки на виду у компаньона; став друг против друга на расстоянии нескольких локтей, участники начинают упражняться в закрывании и открывании огня на виду у компаньона таким образом, что как только один замечает свет другого, так тотчас же открывает и свой... Мне удалось произвести его лишь на малом расстоянии — менее одной мили, — почему я и не мог убедиться, действительно ли появление противоположного света совершается внезапно. Но если оно происходит и не внезапно, то, во всяком случае, с чрезвычайной быстротой".

**Джеймс Клерк Максвелл. Установление электромагнитной природы света.** "...Согласно электромагнитным опытам Вебера и Кольрауша[1]

$$v = 310\,740\,000\ \text{м/с}$$

является количеством электростатических единиц в одной электромагнитной единице электричества, и это согласно нашему результату должно быть равно скорости света в воздухе или вакууме.

Скорость света в воздухе по опытам Физо[2] равна

$$v = 314\,858\,000\ \text{м/с},$$

а согласно более точным опытам Фуко[3]

$$v = 298\,000\,000\ \text{м/с}.$$

Скорость света в пространстве, окружающем Землю, выведенная из коэффициента аберрации и из величины радиуса земной орбиты, равна

$$v = 308\,000\,000\ \text{м/с}.$$

Следовательно, скорость света, определенная экспериментально, достаточно хорошо совпадает с величиной $v$, выведенной из единственного ряда экспериментов, которыми мы до сих пор располагаем. Значение $v$ было определено путем измерения электродвижущей силы, при помощи которой заряжается конденсатор известной емкости, разряжая конденсатор через гальванометр, чтобы измерить количество электричества в нем в электромагнитных единицах. Единственным применением света в этих опытах было использование его для того, чтобы видеть инструменты. Значение $v$, найденное Фуко, было получено путем определения угла, на который поворачивается вращающееся зеркало, пока отраженный им свет прошел туда и обратно вдоль измеренного пути. При этом

[1] Pogg. Ann. C. 10, август 1856 г. (русск. изд. в сб.: "Из предыстории радио", Изд. АН СССР, 1948)

[2] Comptes Rendus. 1849. V. XXIX. P. 90.

[3] Там же, 1862. V. V. P. 501, 792.

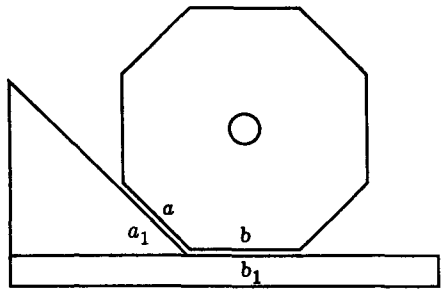



Рис. Д5.1. Точное измерение углов призмы на установке Майкельсона

не пользовались каким-либо образом электричеством и магнетизмом. Совпадение результатов, по-видимому, показывает, что свет и магнетизм являются проявлениями свойств одной и той же субстанции и что свет является электромагнитным возмущением, распространяющимся через поле в соответствии с законами электромагнетизма".

**Альберт Майкельсон. Измерение скорости света.** "В выражении для скорости света $v$, при определении вращающимся зеркалом $v = 4\pi ND/\alpha$, должны быть измерены три величины, именно, $N$ — скорость вращения зеркала, $D$ — расстояние между конечными пунктами и $\alpha$ — угловое смещение зеркала. Как уже упоминалось, величины $N$ и $D$ могут быть измерены до 1/100000 или еще лучше. Но $\alpha$ не может быть измерено с этой точностью. Ньюкомб[4] выяснил, что эта трудность может быть устранена приданием вращающемуся зеркалу призматической формы и увеличением расстояния между конечными пунктами настолько, чтобы возвращающийся свет отражался бы под тем же углом от следующей грани призмы.

Мы изложим вкратце попытку осуществления такого проекта между горой Вильсон и горой Сан-Антонио близ Пасадены, расстояние между которыми равно 35 км. Для этого расстояния при скорости вращения в 1060 оборотов в секунду угловое смещение зеркала в течение двойного пути было бы 90°, или при вдвое меньшей скорости получался бы угол в 45°[5]. Поэтому вращающееся зеркало имеет форму восьмиугольника. Конечно, крайне важно, чтобы углы были равны с наивысшей возможной степенью точности.

Этого достигали следующим образом. Восьмигранник с полированными плоскостями с почти правильными углами налагался на пробный угол $a_1b_1$, образованный прикрепленной к совершенно плоской пластинке призмой с углом в 45° (рис. Д5.1). Плоскость стороны $b_1b$ выверялась при помощи интерференции в монохроматическом свете. Грани $a_1a$ оказались, вообще говоря, не параллельными, и угол между ними измерялся по расстоянию и наклонению интерференционных полос. Так же проверялись все восемь углов, и затем сошлифовывались до полной точности углов и плоскости сторон.

Таким образом оказалось возможным добиться средней точности восьмигранника до 1/10, т. е. с точностью от 1/10 до 1/20 секунды.[6]

[4]Измерения скорости света. Nautical Almanac Office. 1882.

[5]Следует заметить, что при восьми гранях интенсивность в четыре раза больше, чем в случае плоско-параллельного диска.

[6]Следует заметить, что хотя при быстром вращении и можно ожидать искажения, но если

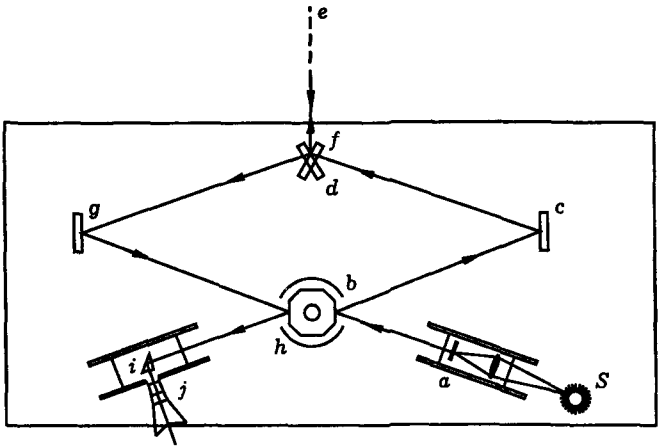



Рис. Д5.2. Схема установки Майкельсона для измерения скорости света

Другое затруднение возникает от прямого отражения и рассеяния света вращающимся зеркалом. Первое может, как уже упоминалось, быть устранено небольшим наклоном вращающегося зеркала, но для того чтобы избавиться от рассеяния, важно, чтобы обратный луч падал бы на другую поверхность, чем та, с которой свет ушел.

Для того чтобы устранить трудность поддержания удаленного зеркала перпендикулярно к падающему лучу, возвращение луча в исходную точку может быть осуществлено так, как это сделано в опыте Физо; единственная предосторожность, которую следует принять, — это очень точная фокусировка луча на малом плоском (лучше вогнутом) зеркале в фокусе удаленного коллиматора.

Наконец, гораздо дешевле применять в качестве отправляющего и принимающего коллиматора посеребренные зеркала вместо линз.

Рис. Д5.2 дает представление об установке, удовлетворяющей всем этим требованиям. Между обсерваторией на горе Вильсон и горой Сан-Антонио на расстоянии 35 км от первой были сделаны три измерения. Электрический камертон давал 132,25 колебаний в секунду, давая четыре устойчивых изображения вращающегося зеркала при вращении его со скоростью в 529 оборотов в секунду. Камертон сравнивали до и после каждого наблюдения со свободным маятником, период которого был найден сравнением с маятником из инвара, изготовленным и измеренным Службой берегового и геодезического надзора (Coast and Geodeic Survey).

Результат восьми опытов в 1924 г. дал

$$v_a = 299\,735.$$

Другой ряд наблюдений при непосредственном сравнении того же камертона с маятником Службы берегового надзора был выполнен летом 1925 г. с результатом

вещество зеркала достаточно однородно (стекло в настоящем случае), то такое искажение может повлечь за собой лишь легкое искривление, а следовательно, только небольшое смещение фокуса.

Таблица Д5.1

| Число оборотов в секунду | Зеркало | Число наблюдений | Скорость света в пустоте |
|---|---|---|---|
| 528 | Стекл. восьмиуг. | 576 | 299 797 |
| 528 | Стальн. восьмиуг. | 195 | 299 795 |
| 352 | Стекл. 12 гр. | 270 | 299 796 |
| 352 | Стальн. 12 гр. | 218 | 299 796 |
| 264 | Стекл. 16 гр. | 504 | 299 796 |
| Средняя величина | | | 299 796±1 |

$$v_a = 299\,690.$$

Третий ряд измерений — в котором камертон был заменен свободным камертоном с 528 колебаниями в секунду; колебания последнего поддерживались током лампового колебательного контура, давая таким образом большое постоянство. Результат этих измерений

$$v_a = 299\,704.$$

Придавая этим определениям соответственные веса 1, 2 и 4, получим для скорости света в воздухе

$$v_a = 299\,704.$$

Принимая поправку в 67 км для приведения к пустоте, получим окончательно

$$v = 299\,771.$$

Такой результат следует рассматривать как предварительный, и он зависит от значения расстояния $D$ между двумя пунктами наблюдениия, измеренного Службой берегового и геодезического надзора, которое, надеюсь, будет проверено при повторениях работ. Опыт также показал, что пользование гораздо бóльшим вращающимся зеркалом дает бóльшую резкость, больше света и более устойчивую скорость вращения. Весьма вероятно, что можно будет получить еще более точные результаты при дальнейшем исследовании.

*Окончательные измерения.* На той же установке летом 1926 г. произведено было несколько опытов с набором вращающихся зеркал.

Первое из них было прежним небольшим восьмигранным зеркалом из предыдущей работы. Результат, полученный в этом году: $v = 299813$. Давая этому результату вес 2 и результату прежней работы вес 1, получим среднее 299799.

Остальными зеркалами были стальной восьмигранниик, стеклянный 12-гранник, стальной 12-гранник и стеклянный 16-гранник.

Окончательные результаты собраны в таблице 1."

**Генрих Рудольф Герц. О весьма быстрых электрических колебаниях.** "Период электрических колебаний в разомкнутых индукционных катушках измеряется десятитысячными долями секунды. Приблизительно в сто раз быстрее совершаются колебательные разряды лейденской банки, которые

наблюдал Феддерсен. Теоретически возможны еще более быстрые колебания в незамкнутых проволоках из хорошо проводящего материала, концы которых не нагружены большими емкостями; но, конечно, теория не в состоянии решить, возможно ли в действительности возбудить эти колебания такой интенсивности, чтобы они стали заметными. На основании некоторых явлений я пришел к предположению, что колебания последнего рода действительно могут возникнуть при известных условиях, причем интенсивность колебаний настолько значительна, что действие их доступно наблюдению на расстоянии. Дальнейшие опыты подтвердили мое предположение, в виду чего здесь будут изложены наблюденные мною явления и произведенные опыты.

Колебания, о которых здесь будет идти речь, в свою очередь, приблизительно в сто раз быстрее наблюденных Феддерсеном. Период этих колебаний, определяемый, конечно, лишь при помощи теории, измеряется стомиллионными долями секунды. Следовательно, в отношении продолжительности они занимают среднее место между звуковыми колебаниями весомых тел и световыми колебаниями эфира. Последнее обстоятельство и объясняет интерес, представляемый этими колебаниями, помимо того, что изучение их может оказаться полезным для теории электродинамики.

*Предварительные опыты.* Если в разрядную цепь индукционной катушки последовательно с искровым промежутком включить искровой микрометр Риса, полюсы которого соединены металлическим ответвлением, то, — если только длина воздушного промежутка микрометра не превысит известного предела, — разряд пройдет скорее через воздушный промежуток, чем через металлический провод. Это явление не ново; как известно, построение громоотводов для телеграфных проводов имеет своим основанием именно это явление. Только в том случае, если металлическое ответвление коротко и обладает небольшим сопротивлением, можно рассчитывать на исчезновение искры в микрометре. И на самом деле длина получаемой искры уменьшается вместе с длиной ответвления, но, вообще говоря, полного потухания ее едва ли можно достигнуть. Даже в том случае, когда оба шарика микрометра соединены толстой медной проволокой, длиной всего в несколько сантиметров, можно наблюдать искорки, хотя и очень короткие.

Этот опыт непосредственно доказывает, что в момент разряда потенциал изменяется вдоль разрядной цепи на величину в сотни вольт на протяжении всего лишь нескольких сантиметров, косвенно же он показывает, что скорость, с которой происходит разряд, чрезвычайно велика. Это объясняется тем, что разность потенциалов у шариков искромера может рассматриваться как результат действия самоиндукции в металлическом ответвлении. Время, в течении которого потенциал на одном шарике испытывает заметные изменения, будет того же порядка, что и время, в продолжение которого изменения доходят до другого шарика через короткий отрезок хорошего проводника. Можно было предположить, пожалуй, столь большую плотность разрядного тока, что одно лишь сопротивление ответвления обусловит разность потенциалов на шариках микрометра. Но приблизительное рассмотрение количественных условий показывает, что такое предположение не основательно, а в дальнейших опытах такое предположение не может быть вовсе сделано.

Замкнем опять искровой микрометр при помощи металлического провода, например, медной проволоки, диаметром 2 мм и длиной 0,5 м, согнутой в прямоугольник; но при этом мы не включаем его в разрядную цепь индукционной катушки, а соединяем только один из ее полюсов с какой-нибудь точкой разрядной цепи при помощи промежуточной проволоки. На рис. Д5.3 представлено

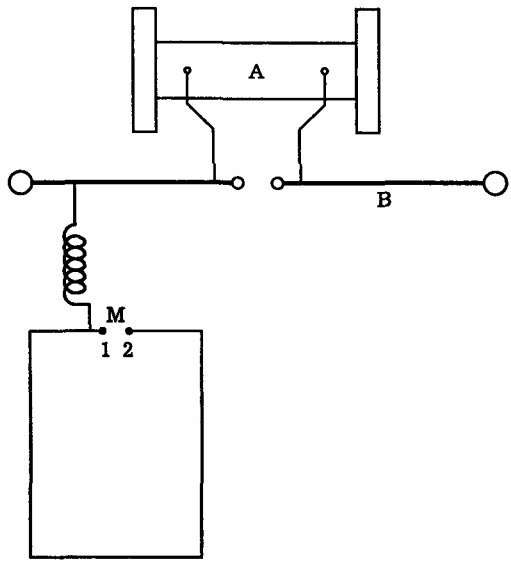



Рис. Д5.3. Схема установки Герца

раположение приборов: $A$ схематически изображает индукционную катушку, $B$ — разрядник, $M$ — микрометр. Во время действия индукционной катушки мы будем опять наблюдать в микрометре поток искр, достигающий иногда длины в несколько миллиметров.

Этот опыт показывает, во-первых, что в момент разряда интенсивные электрические движения происходят не только в разряднике, но и во всех соединенных с ним проводах; во-вторых, он показывает нагляднее, чем предыдущий опыт, что эти движения происходят очень быстро, и поэтому должен быть принят во внимание даже тот промежуток времени, в продолжение которого электрические волны проходят через короткие металлические провода. В самом деле, опыт этот можно объяснить только таким образом, что изменение потенциала, создаваемое индукционной катушкой, достигнет шарика 1 раньше, чем шарика 2, причем различие во времени оказывается доступным наблюдению. Это явление становится поразительным, если принять во внимание, что электрические волны, насколько это нам известно, распространяются в медной проволоке почти со скоростью света. Поэтому мне казалось достойным труда исследовать, какие условия будут способствовать появлению сильных искр в микрометре."

# Литература

1. *Галилео Галилей.* "Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящиеся к механике и местному движению" (опубликовано в Лейдене в 1638 г.). Цит. по: *Джефф Б.* Майкельсон и скорость света. — М.: ИЛ, 1963. С. 14.

2. Royal Society Transactions, 1864. V. CLV. Цит. по: *Джеймс Максвелл*. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. — М.: ГИТТЛ, 1954. С. 320.
3. *Michelson A. A.* Studies in optics. University of Chicago Press, 1927. Цит. по: *Майкельсон А. А.* Исследования по оптике. — М.–Л.: Госиздат, 1927. С. 148–153.
4. Über sehr schnelle elektrische Schwingungen//Wied. Ann. 1887. V. 31. P. 421. Цит. по: "50 лет волн Герца". — М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1938. С. 45.

# Часть II
# Излучение и генераторы света

В этой части книги излагается теория излучения электромагнитных волн движущимися заряженными частицами. Сначала дается простая качественная картина явления, основанная на понятии силовых линий электрического поля. Этот подход позволяет установить, что причиной возникновения электромагнитной волны является ускоренное движение (колебание) заряженной частицы. Кроме того, удается получить формулы для напряженностей электрического и магнитного полей в электромагнитной волне, которые затем строго обосновываются путем решения уравнений Максвелла.

Высокая частота колебаний электромагнитного поля в световой волне (около $10^{15}$ Гц) наводит на мысль о том, что элементарный излучатель световой волны должен быть чрезвычайно мал. Так возникает представление о том, что элементарным источником света является атом или молекула. Вводится классическая модель атома как системы заряженных частиц, связанных упругими силами. Оценка, сделанная с учетом реального размера атома и параметров электрона (заряд, масса), показывает, что частота колебаний дипольного момента такой системы действительно близка к частоте видимого света.

Реальные источники света содержат, как правило, огромное число излучающих атомов или молекул. Как описать совокупное световое поле, испускаемое большим ансамблем частиц? Эффективный путь решения этой задачи состоит в замене суммирования световых полей усреднением и применении правил статистики для вычисления средних.

Классическая модель атома позволяет дать теорию целого ряда явлений, возникающих при взаимодействии света с веществом. Это такие явления, как поглощение и дисперсия света, разнообразные нелинейные процессы (генерация оптических гармоник, самофокусировка света, вынужденное рассеяние и т. п.). Здесь эти явления рассматриваются с точки зрения взаимодействия света с элементарным оптическим осциллятором среды.

Наконец, в заключительных лекциях дана теория теплового излучения и лазера. Показано, как возникает в оптике представление об элементарной неделимой порции света ("квант", или "фотон"), а также о трех фундаментальных процессах взаимодействия света с веществом (поглощение света, спонтанное испускание, вынужденное излучение). Вывод о существовании вынужденного излучения позволил создать принципиально новый источник света — лазер. По своей структуре свет лазера близок к идеальной гармонической волне.

# Лекция 5

# Классическая физика излучения

*Опыт Герца. Атом как элементарный источник света. Классическая модель атома. Излучение заряда. Условия излучения. Расчет поперечной компоненты поля. Строгое решение задачи об излучении диполя. Гармонические колебания диполя. Полная мощность излучения диполя. Радиационное затухание.*

Как и почему возникает световое излучение? Что является источником электромагнитных волн? Исчерпывающие ответы на эти вопросы в состоянии дать только квантовая теория. Более того, исследование именно этих вопросов и привело в свое время к открытию квантовых законов природы. Само понятие "квант" было впервые введено Максом Планком в связи с исследованием излучения нагретых тел. Тем не менее, обсуждение физики излучения мы начнем с классической модели, развитой Максвеллом, Лоренцем, Герцем. Достоинство этой модели — простота и наглядность, возможность объяснить излучение света исходя из законов электродинамики макроскопических тел. Следует отметить также, что многие выводы классической теории находят качественное, а иногда и количественное подтверждение в квантовой теории излучения.

**Опыт Герца.** Первоначально излучение электромагнитных волн было продемонстрировано на установке, называемой *"вибратором Герца"*. Вибратор Герца представляет собой пару металлических стержней с шариками на концах, расположенных вдоль одной прямой на небольшом расстоянии друг от друга (рис. 5.1). Стержни укреплены на изолирующих подставках и разделены разрядным промежутком. Через высокоиндуктивные дроссели к стержням подводится постоянное высокое напряжение. Между стержнями происходит искровой высокочастотный разряд, при этом вибратор излучает электромагнитную волну. Это излучение можно зарегистрировать с помощью аналогичного приемного вибратора (рис. 5.2).

**Атом как элементарный источник света.** Частота излучения вибратора Герца составляет $10^7 - 10^8$ Гц. Частота видимого света на несколько порядков выше и составляет $10^{14} - 10^{15}$ Гц. Возникает вопрос: существуют ли "вибраторы Герца" с такими частотами? Если да, то они могли бы излучать свет. Поскольку частота излучения возрастает при уменьшении размеров вибратора, можно предположить, что элементарный источник света обладает чрезвычайно малыми размерами. Была высказана идея, что таким источником может быть атом или молекула.

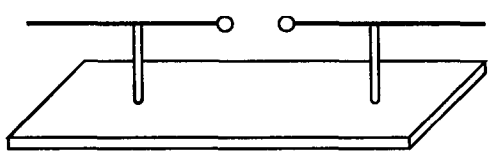


Рис. 5.1. Вибратор Герца

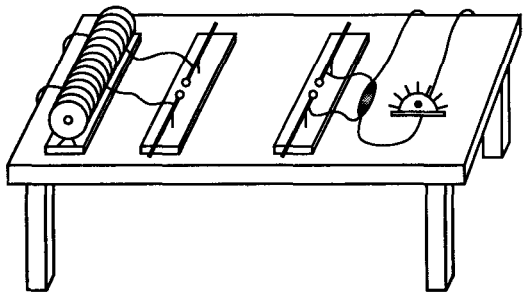


Рис. 5.2. Схема опыта Герца

**Классическая модель атома.** Классический образ атома — пара разноименных зарядов, связанных между собой упругой силой. Как могла бы выглядеть такая система? Один из возможных вариантов показан на рис. 5.3. Здесь точечный положительный заряд $+q$ расположен в центре атома ("ядро"), а отрицательный заряд $-q$ равномерно распределен внутри сферы, охватывающей ядро ("электрон"). Система находится в равновесии, если центр сферы совпадает с ядром (рис. 5.3, *а*). Если же центр сферы смещается относительно ядра, то возникает кулоновская возвращающая сила, пропорциональная величине смещения и стремящаяся вернуть атом в положение равновесия (рис. 5.3, *б*). Таким образом, заряды взаимодействуют подобно шарикам, связанным пружинкой (рис. 5.3, *в*).

Движение электрона относительно ядра описывается уравнением колебаний

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m}E, \tag{5.1}$$

где $e$, $m$ — заряд и масса электрона, $E$ — внешнее электрическое поле, $x$ — смещение электрона относительно положения равновесия; $\omega_0$ и $\tau$ — частота и время затухания свободных колебаний электрона. Точка над буквой обозначает дифференцирование по времени. Важной характеристикой атома является *дипольный момент*

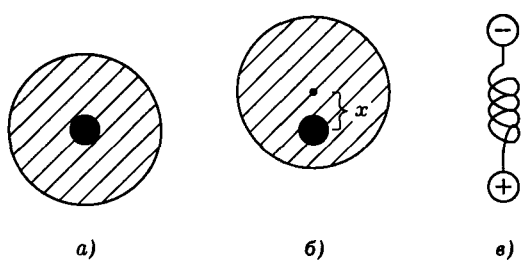



Рис. 5.3. Классическая модель атома

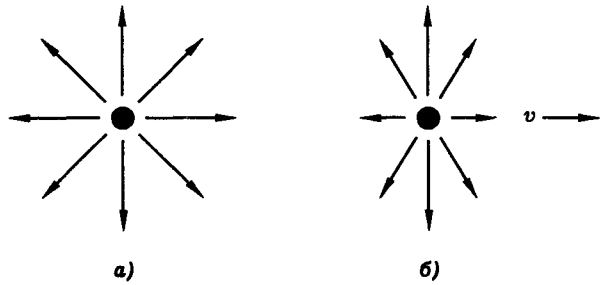



Рис. 5.4. Картина силовых линий электрического поля точечного заряда при равномерном прямолинейном движении: $v \ll c$ (*а*), $v \approx c$ (*б*)

$$p(t) = e\,x(t). \tag{5.1a}$$

Итак, согласно классической модели, атом представляет собой систему связанных зарядов, в которой электрон способен совершать колебания относительно ядра. Обсудим теперь механизм того, как колеблющийся в атоме электрон порождает электромагнитную волну.

**Излучение заряда. Условия излучения.** Попытаемся выяснить, при каких условиях движение заряда может вызывать появление электромагнитной волны. Не обращаясь пока к уравнениям Максвелла, рассмотрим более элементарную картину силовых линий.

*Покоящийся или равномерно движущийся заряд не излучает.* Хорошо известно, что силовые линии электрического поля неподвижного заряда представляют собой прямые лучи. Если заряд движется равномерно и прямолинейно, то силовые линии также имеют вид прямых лучей, направленных от мгновенного положения заряда. Поскольку силовые линии нигде не имеют "изломов", при таком движении невозможно образование поперечной электромагнитной волны, необходимой для излучения.

Если скорость движения заряда много меньше скорости света, то электрическое поле описывается формулой

$$\vec{E} = \vec{n}\frac{q}{r^2}, \tag{5.2}$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор, проведенный из точки мгновенного положения заряда в точку наблюдения, $\vec{n} = \vec{r}/r$ — единичный вектор, направленный вдоль $\vec{r}$. При скорости движения заряда близкой к скорости света электрическое поле выражается формулой (см. дополнение 6, формулу (Д6.117)):

$$\vec{E} = \vec{n}\frac{q}{r^2}\frac{(1-\beta^2)}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}, \tag{5.3}$$

где $\beta = v/c$, $\theta$ — угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{v}$. Картины силовых линий электрического поля заряда, движущегося прямолинейно и равномерно, показаны на рис. 5.4.

*К появлению поперечных компонент поля и излучению приводит ускорение заряда.* Рассмотрим теперь прямолинейное ускоренное движение заряда.

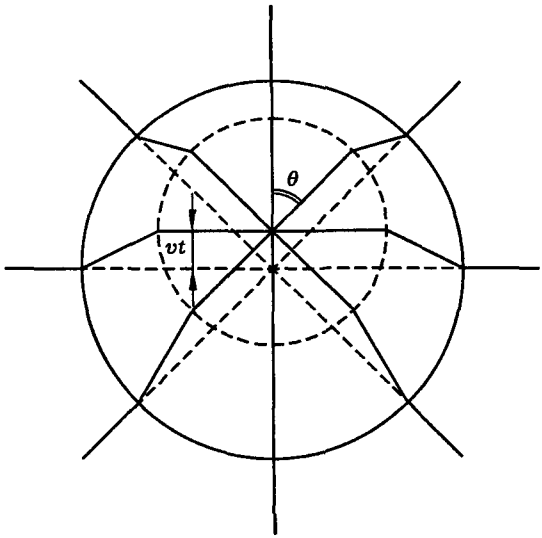



Рис. 5.5. Картина силовых линий при ускоренном движении заряда

Допустим, что заряд $q$ первоначально покоился, затем в течение промежутка времени $\Delta t$ двигался с ускорением, а потом равномерно. Последовательность различных состояний движения заряда такова:

$-\infty < t < 0$ заряд покоится в точке $x = 0$,

$0 \leq t \leq \Delta t$ заряд движется вдоль оси $x$ с постоянным ускорением $a$,

$\Delta t < t < \infty$ заряд движется равномерно со скоростью $v = a\,\Delta t$.

Предположим, что скорость заряда много меньше скорости света и рассмотрим момент времени $t \gg \Delta t$. Картина силовых линий электрического поля заряда в этот момент показана на рис. 5.5. За пределами сферы с центром в начале координат и радиусом $r = ct$ электрическое поле совпадает с полем заряда, покоящегося в начале координат. Это объясняется тем, что возмущение силовых линий, вызванное смещением заряда, распространяется в пространстве со скоростью света с и, следовательно, к моменту времени $t$ не успевает выйти за пределы сферы радиуса $ct$. Внутри сферы меньшего радиуса $r' = c(t - \Delta t)$, центр которой находится в точке мгновенного положения заряда $x \approx vt$, электрическое поле совпадает с полем неподвижного заряда, расположенного в точке $x$. Следовательно, в области пространства, заключенной между двумя указанными сферами, силовые линии электрического поля заряда *претерпевают излом* (рис. 5.5).

Появление излома означает появление поперечной компоненты электрического поля заряда. Именно эта компонента поля ответственна за излучение. Излом силовых линий распространяется в пространстве со скоростью света $c$. Согласно уравнениям Максвелла, переменное электрическое поле порождает вихревое магнитное поле. Поэтому распространяющиеся от заряда изломы силовых линий это фактически импульс электромагнитного излучения, распространяющийся в виде сферической волны.

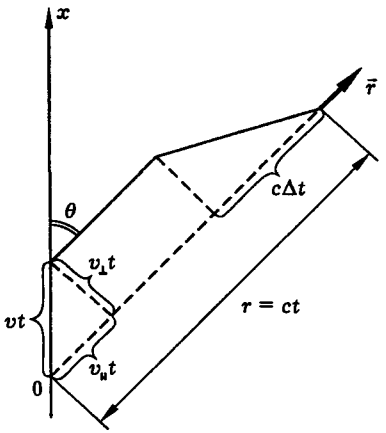



Рис. 5.6. К расчету поперечной компоненты электрического поля ускоренно движущегося заряда

Подчеркнем, что появление изломов силовых линий и, следовательно, излучения связано с *ускорением заряда,* поскольку силовые линии равномерно движущегося заряда всюду прямолинейны. Таким образом, приходим к выводу, что причиной электромагнитного излучения является ускорение заряженных частиц.

**Расчет поперечной компоненты поля.** Рассмотренная выше модель движения заряда позволяет не только качественно объяснить механизм излучения электромагнитных волн, но и количественно рассчитать электромагнитное поле, возникающее при ускоренном движении заряда.

Рассмотрим более детально одну из силовых линий электрического поля заряда в момент времени $t \gg \Delta t$ (рис. 5.6). Проведем радиус-вектор $\vec{r}$ из точки первоначального положения заряда ($x = 0$) в точку наблюдения поля. Смещение заряда за время $t$ можно приближенно записать в виде $x = vt$, поскольку при $t \gg \Delta t$ выполняется неравенство $a(\Delta t)^2/2 \ll vt$. Обозначим через $v_\parallel$ и $v_\perp$ продольную и поперечную компоненты скорости заряда по отношению к направлению радиус-вектора $\vec{r}$. Аналогичным образом введем продольную $E_\parallel$ и поперечную $E_\perp$ компоненты электрического поля. Из рис. 5.6 видно, что в области излома силовой линии продольная и поперечная компоненты поля связаны соотношением

$$\frac{E_\perp}{E_\parallel} = \frac{v_\perp t}{c\Delta t}. \tag{5.4}$$

Используя формулы

$$E_\parallel = q/r^2, \quad r = ct, \quad v = a\Delta t, \quad v_\perp t = vt\sin\theta, \tag{5.5}$$

получаем

$$E_\perp = \frac{aq\sin\theta}{c^2 r}. \tag{5.6}$$

Итак, мы вычислили поперечную компоненту электрического поля, связанную с ускорением заряда. В формуле (5.6) $a$ — ускорение заряда $q$, $r$ — расстояние от заряда до точки наблюдения поля, $\theta$ — угол между направлением ускорения и радиус-вектором, проведенным от заряда в точку наблюдения поля, $c$ — скорость света.

В силу уравнений Максвелла, переменное электрическое поле порождает магнитное поле. Можно показать (см. дополнение 6), что для достаточно удаленной точки наблюдения магнитное поле перпендикулярно поперечной компоненте электрического поля и радиус-вектору $\vec{r}$, а по абсолютной величине совпадает с электрическим полем (как и для плоской световой волны):

$$H_\perp = E_\perp. \tag{5.7}$$

Пользуясь формулами (5.6), (5.7), можно вычислить плотность потока энергии электромагнитного излучения ускоренно движущегося заряда

$$S = \frac{c}{4\pi} E_\perp H_\perp = \frac{(a\,q \sin\theta)^2}{4\pi c^3 r^2}. \tag{5.8}$$

Направление вектора $\vec{S}$ совпадает с $\vec{r}$, т. е. поток энергии направлен от заряда. Из формулы (5.8) видно, что плотность потока энергии уменьшается пропорционально квадрату расстояния от заряда (при этом полный поток энергии сохраняется), а наиболее интенсивное излучение распространяется в направлении перпендикулярном ускорению заряда: $S_{\max} = S(\theta = \pi/2)$. Из формул (5.6), (5.7) видно, что напряженность электромагнитного поля, излучаемого зарядом, убывает пропорционально расстоянию от заряда $r$, что характерно для сферической волны.

Применяя полученные результаты к частному случаю колебательного движения заряда, можно сделать вывод, что осциллирующий электрический заряд (или диполь) излучает в пространство сферическую электромагнитную волну, частота которой совпадает с частотой колебаний диполя.

**Строгое решение задачи об излучении диполя.** Имея ввиду классическую модель атома, рассмотрим излучение пары электрических зарядов $+q$ и $-q$, связанных между собой упругой силой. Такую систему будем называть *диполем*. Основной характеристикой диполя является *дипольный момент*, определяемый формулой

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i = q(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \tag{5.9}$$

где $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ — радиус-векторы зарядов. Динамика дипольного момента атома описывается уравнениями (5.1), (5.1a). В векторной форме можно записать

$$\vec{p}(t) = \vec{x}_0\, p(t), \qquad p(t) = q\, x(t), \tag{5.10}$$

где $\vec{x}_0$ — единичный вектор, направленный вдоль линии, соединяющей заряды.

Строгое решение задачи об излучении диполя может быть получено путем решений уравнений Максвелла с учетом переменного тока, вызванного движением зарядов:

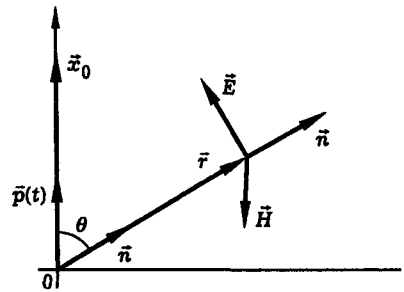



Рис. 5.7. Электромагнитное излучение диполя

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, & \operatorname{div}\vec{E} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot}\vec{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}, & \operatorname{div}\vec{H} &= 0. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Это решение имеет вид (см. дополнение 6)

$$\vec{E} = \frac{1}{c^2 r}\left[\vec{n}, \left[\vec{n}, \ddot{\vec{p}}(t - r/c)\right]\right], \qquad \vec{H} = -\frac{1}{c^2 r}\left[\vec{n}, \ddot{\vec{p}}(t - r/c)\right]. \tag{5.12}$$

В формулах (5.12) $\vec{r}$ — радиус-вектор, проведенный от диполя в точку наблюдения поля, $\vec{n} = \vec{r}/r$, $c$ — скорость света, точка над буквой обозначает дифференцирование по времени. Решение (5.12) справедливо для так называемой *дальней зоны*, т. е. области пространства, находящейся от диполя на расстоянии много большем размера диполя и длины волны излучения.

Структура поля излучения диполя показана на рис. 5.7. Заметим, что она фактически совпадает со структурой поля, найденной выше на основе анализа картины силовых линий.

**Гармонические колебания диполя.** Вычислим энергетические характеристики излучения считая, что диполь совершает гармонические колебания:

$$x(t) = X\cos\omega t. \tag{5.13}$$

Используя формулы (5.10), (5.12), (5.13), получим

$$\vec{E} = \vec{e}A\cos\omega(t - r/c), \qquad \vec{H} = \vec{h}A\cos\omega(t - r/c), \tag{5.14}$$

где

$$A = \frac{\omega^2 qX}{c^2 r}\sin\theta, \quad \vec{e} = -\left[\vec{n}, \vec{h}\right], \quad \vec{h} = \frac{[\vec{n}, \vec{x}_0]}{\sin\theta}, \tag{5.15}$$

$\theta$ — угол между векторами $\vec{n}$ и $\vec{x}_0$. Формулы (5.14), (5.15) показывают, что излучение диполя *линейно поляризовано*, причем вектор $\vec{E}$ лежит в плоскости векторов $\vec{n}$ и $\vec{x}_0$, а вектор $\vec{H}$ ортогонален этой плоскости (рис. 5.7). Вектор потока энергии

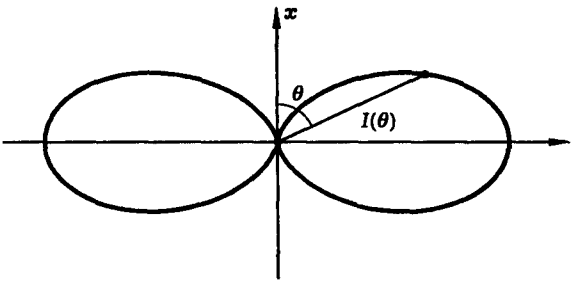



Рис. 5.8. Диаграмма направленности излучения диполя

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}, \vec{H}\right] = \frac{cA^2}{4\pi}\left[\vec{e}, \vec{h}\right]\cos^2\omega(t - r/c). \tag{5.16}$$

Учитывая формулы (5.15), можно записать

$$\left[\vec{e}, \vec{h}\right] = \left[\vec{h}, \left[\vec{n}, \vec{h}\right]\right] = \vec{n}h^2 = \vec{n}. \tag{5.17}$$

Интенсивность излучения

$$I = \langle S\rangle = \frac{cA^2}{8\pi} = \frac{q^2X^2\omega^4}{8\pi c^3 r^2}\sin^2\theta. \tag{5.18}$$

Диаграмма направленности излучения показана на рис. 5.8.

**Полная мощность излучения диполя.** Используя формулу (5.18), нетрудно найти полную мощность излучения диполя, т. е. суммарную мощность излучения, испускаемого диполем во всех направлениях. Для этого следует проинтегрировать интенсивность излучения по поверхности сферы, охватывающей диполь. Проведем вокруг диполя сферу радиуса $r$ и введем углы сферической системы координат $\theta$, $\varphi$ (рис. 5.9). Задавая приращение углов $d\theta$, $d\varphi$, получим на сфере *элемент поверхности* с площадью

$$d\sigma = r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi. \tag{5.19}$$

Полная мощность излучения диполя выражается формулой

$$P = \int I\, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} I r^2 \sin\theta\, d\theta. \tag{5.20}$$

Подставляя (5.18) в (5.20) и интегрируя, получим

$$P = \frac{q^2X^2\omega^4}{3c^3}. \tag{5.21}$$

В этой формуле $q$ — заряд диполя, $X$ и $\omega$ — амплитуда и частота колебаний, $c$ — скорость света, $P$ — мощность излучения. Обратим внимание на сильную зависимость мощности излучения от частоты колебаний диполя.

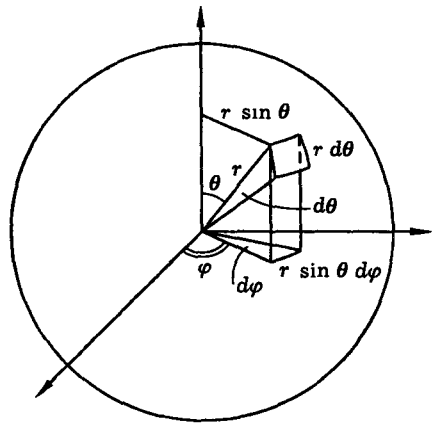



Рис. 5.9. К расчету мощности излучения диполя

**Радиационное затухание.** Излучая электромагнитные волны, диполь теряет энергию, что приводит к затуханию свободных колебаний. Затухание колебаний атомного осциллятора, связанное с потерей энергии на излучение, получило название *радиационного затухания*. Время радиационного затухания можно оценить как отношение начальной энергии осциллятора к мощности излучения:

$$\tau = W/P. \tag{5.22}$$

Из механики известно, что энергию гармонического осциллятора можно представить в виде

$$W = m\omega^2 X^2/2, \tag{5.23}$$

где $m$ — масса осциллятора, $X$ и $\omega$ — амплитуда и частота его колебаний. Подставляя (5.21) и (5.23) в (5.22), получим для времени радиационного затухания оценку

$$\tau = \frac{3mc^3}{2q^2\omega^2}. \tag{5.24}$$

Интересно оценить по этой формуле время затухания колебаний электрона в атоме на оптической частоте. Полагая $m = 9{,}1 \times 10^{-28}$ г, $c = 3 \times 10^{10}$ см/с, $q = e = 4{,}8 \times 10^{-10}$ СГСЭ, $\omega = 4 \times 10^{15}$ с$^{-1}$, получим

$$\tau = 10^{-8} \text{ с}. \tag{5.25}$$

Итак, согласно нашей оценке, время высвечивания классического атома составляет примерно $10^{-8}$ с. Экспериментальные исследования подтверждают этот результат.

Согласно уравнению (5.1), затухание свободных колебаний атомного осциллятора можно приближенно описать формулой

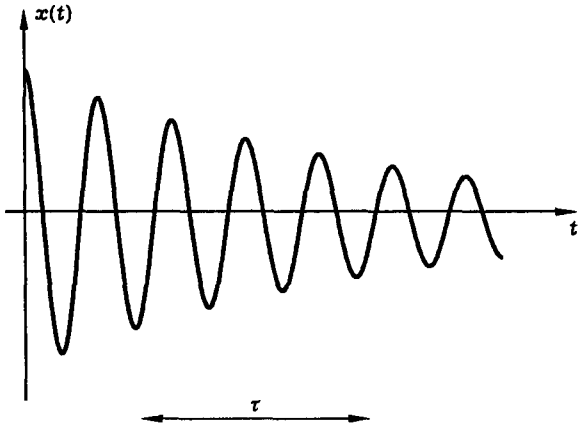



Рис. 5.10. Затухание свободных колебаний атомного осциллятора

$$x(t) = x_0 e^{-t/2\tau} \cos\omega_0 t \tag{5.26}$$

или

$$x(t) = X \cos\omega_0 t, \tag{5.27}$$

где амплитуда колебаний

$$X = x_0 e^{-t/2\tau} \tag{5.28}$$

уменьшается с течением времени (рис. 5.10). Подставляя (5.28) в (5.23), находим закон изменения энергии осциллятора

$$W = W(t) = W_0 e^{-t/\tau}, \tag{5.29}$$

где

$$W_0 = m\omega_0^2 x_0^2/2 = W(t=0), \tag{5.30}$$

$W_0$ — начальная энергия осциллятора.

Заметим, что в масштабе периода световых колебаний ($T_0 \approx 10^{-15}$ с) уменьшение амплитуды колебаний происходит очень медленно ($\tau \approx 10^{-8}$ с). Поэтому поле излучения отдельного атома можно приближенно записать в виде

$$E(t) = a_0 \exp\left(-\frac{t-t_0}{2\tau}\right) \cos[\omega(t-t_0) - \psi], \tag{5.31}$$

где $t_0$ — момент возбуждения колебаний (возбуждение атомного осциллятора может быть вызвано, например, столкновением атома с другим атомом или электроном), $a_0$ и $\psi$ — начальные амплитуда и фаза колебаний электрического поля в точке наблюдения, $\omega$ и $\tau$ — частота и время затухания свободных

электронных колебаний. Зависимость поля излучения отдельного атома от времени подобна зависимости, показанной на рис. 5.10. В фиксированной точке пространства поле излучения имеет вид *модулированного колебания*.

## Литература

1. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. — М.: Наука, 1973.
2. *Крауфорд Ф.* Волны. — М.: Наука, 1970.
3. *Друде П.* Оптика. — Л.–М.: Глав. ред. общетех. лит., 1935.
4. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. — М.: Наука, 1965.

# Лекция 6

# Излучение ансамбля осцилляторов

*От динамики осциллятора к статистике ансамбля Нелазерный источник света интенсивность, поляризация, диаграмма направленности излучения. Статистика излучения независимых осцилляторов Спектр излучения. Механизмы уширения спектральной линии Естественное уширение Доплеровское уширение. Уширение и сдвиг спектральной линии, обусловленные столкновениями Эффект Дики. столкновительное сужение доплеровской спектральной линии в плотном газе*

**От динамики осциллятора к статистике ансамбля.** При описании излучения реальных источников света на первый план выходит проблема *суммирования* вкладов огромного числа отдельных осцилляторов (атомов, молекул). Эффективный путь решения этой задачи состоит в замене суммирования *усреднением* и использовании правил *статистики* для вычисления средних.

**Нелазерный источник света: интенсивность, поляризация, диаграмма направленности излучения.** Рассмотрим излучение совокупности осцилляторов в некоторой фиксированной точке пространства (рис. 6.1). Напряженность светового поля в данной точке можно представить в виде

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i, \tag{6.1}$$

где $N$ — число осцилляторов,

$$\vec{E}_i = \vec{e}_i\, a_i \cos(\omega t - \varphi_i), \tag{6.2}$$

$\vec{E}_i$ — поле излучения отдельного осциллятора. Формулу (6.1) можно, очевидно, переписать в виде,

$$\vec{E} = N\langle \vec{E}_i \rangle, \tag{6.3}$$

где

$$\langle \vec{E}_i \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i, \tag{6.4}$$

$\langle \vec{E}_i \rangle$ — среднее по ансамблю осцилляторов значение поля. Вычислим эту величину, считая параметры $\vec{e}_i$, $a_i$, $\varphi_i$ независимыми случайными величинами. Получим

$$\langle \vec{E}_i \rangle = \langle \vec{e}_i \rangle \langle a_i \rangle \langle \cos(\omega t - \varphi_i) \rangle = 0, \tag{6.5}$$

поскольку фазы осцилляторов распределены равномерно (рис 6.2)

$$w(\varphi_i) = 1/2\pi \qquad (-\pi \le \varphi_i \le \pi) \tag{6.6}$$

и, следовательно,

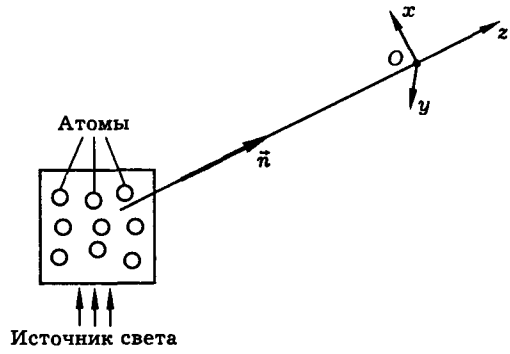



Рис 6.1 К расчету характеристик излучения ансамбля осцилляторов

$$\langle \sin\varphi_i \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin\varphi_i \, w(\varphi_i)\, d\varphi_i = 0,$$
$$\langle \cos\varphi_i \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos\varphi_i \, w(\varphi_i)\, d\varphi_i = 0, \tag{6.7}$$
$$\langle \cos(\omega t - \varphi_i) \rangle = \cos\omega t \langle \cos\varphi_i \rangle + \sin\omega t \langle \sin\varphi_i \rangle = 0.$$

Итак, вследствие хаотического распределения фаз среднее значение напряженности светового поля, создаваемого ансамблем осцилляторов, оказывается равным нулю. По этой же причине интенсивность излучения

$$I = \frac{c}{4\pi} \langle E^2 \rangle \tag{6.8}$$

оказывается равной сумме средних интенсивностей излучения отдельных осцилляторов:

$$I = N \langle I_i \rangle, \tag{6.9}$$

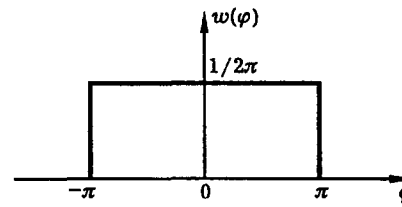



Рис. 6.2. Распределение вероятности для фазы колебаний осциллятора

где

$$\langle I_i \rangle = \frac{c}{4\pi}\langle E_i^2 \rangle, \qquad \langle E_i^2 \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E_i^2. \tag{6.10}$$

В самом деле,

$$E^2 = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i \sum_{j=1}^{N} \vec{E}_j = \sum_{i=1}^{N} E_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j\neq i=1}^{N} \vec{E}_i \vec{E}_j =$$

$$= N\langle E_i^2 \rangle + (N^2 - N)\langle \vec{E}_i \vec{E}_j \rangle = N\langle E_i^2 \rangle. \tag{6.11}$$

При выводе (6.11) мы использовали формулы (6.1), (6.5) и условие независимости осцилляторов

$$\langle \vec{E}_i \vec{E}_j \rangle = \langle \vec{E}_i \rangle \langle \vec{E}_j \rangle \qquad (i \neq j). \tag{6.12}$$

Из (6.9) следует, что мощность излучения ансамбля осцилляторов равна сумме средних мощностей отдельных осцилляторов:

$$P = N\langle P_i \rangle. \tag{6.13}$$

Вследствие хаотической ориентации дипольных моментов осцилляторов диаграмма направленности излучения изотропна.

Поляризация излучения. Спроектируем вектор $\vec{E}$, определяемый формулами (6.1), (6.2), на оси $x$, $y$, расположенные в плоскости фронта световой волны (рис. 6.1). Используя формулу Эйлера

$$\cos(\omega t - \varphi_i) = \frac{1}{2}\exp\left[i(\omega t - \varphi_i)\right] + \text{к. с.}, \tag{6.14}$$

получим

$$E_x = \frac{1}{2}\mathcal{E}_x e^{i\omega t} + \text{к. с.}, \qquad E_y = \frac{1}{2}\mathcal{E}_y e^{i\omega t} + \text{к. с.}, \tag{6.15}$$

где

$$\mathcal{E}_x = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{E}_{xi}, \qquad \mathcal{E}_y = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{E}_{yi},$$
$$\mathcal{E}_{xi} = \cos\alpha_i a_i \exp\left(-i\varphi_i\right), \quad \mathcal{E}_{yi} = \sin\alpha_i a_i \exp\left(-i\varphi_i\right), \tag{6.16}$$

$\alpha_i$ — угол между вектором $\vec{e}_i$ и осью $x$ (рис. 6.3).

Вычислим матрицу когерентности излучения (см ч. I)

$$\widehat{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} \langle \mathcal{E}_x \mathcal{E}_x^* \rangle & \langle \mathcal{E}_x \mathcal{E}_y^* \rangle \\ \langle \mathcal{E}_y \mathcal{E}_x^* \rangle & \langle \mathcal{E}_y \mathcal{E}_y^* \rangle \end{pmatrix}. \tag{6.17}$$

Подставляя (6.16) в (6.17) и используя процедуру, подобную (6.11), найдем

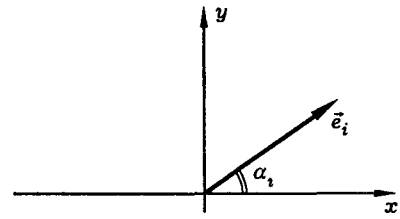



Рис. 6.3. К анализу состояния поляризации излучения ансамбля осцилляторов

$$\widehat{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}N\langle a_i^2\rangle & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}N\langle a_i^2\rangle \end{pmatrix}. \tag{6.18}$$

При выводе (6.18) мы считали величину $\alpha_i$ случайным параметром с плотностью вероятности

$$w(\alpha_i) = 1/2\pi \qquad (-\pi \le \alpha_i \le \pi). \tag{6.19}$$

Выражение (6.18) для матрицы когерентности показывает, что излучение ансамбля осцилляторов имеет *естественную поляризацию* (см. ч. I). Такое состояние поляризации излучения, очевидно, есть следствие хаотичной пространственной ориентации дипольных моментов осцилляторов.

**Статистика излучения независимых осцилляторов.** Запишем поле излучения ансамбля осцилляторов в виде

$$\vec{E} = \vec{x}_0 E_x + \vec{y}_0 E_y, \tag{6.20}$$

где

$$E_x = \sum_{i=1}^{N} \cos\alpha_i a_i \cos(\omega t - \varphi_i), \quad E_y = \sum_{i=1}^{N} \sin\alpha_i a_i \cos(\omega t - \varphi_i). \tag{6.21}$$

Рассмотрим одну из компонент поля, например $E_x$. Выражение для $E_x$ можно записать так:

$$E_x = a\cos\omega t + b\sin\omega t, \tag{6.22}$$

где параметры $a$ и $b$ называются *квадратурными компонентами* колебания $E_x$ и определяются формулами

$$a = \sum_{i=1}^{N} \cos\alpha_i a_i \cos\varphi_i, \quad b = \sum_{i=1}^{N} \cos\alpha_i a_i \sin\varphi_i. \tag{6.23}$$

Помимо квадратурных компонент для характеристики поля $E_x$ введем понятия огибающей, фазы и интенсивности. *Огибающая* $A$ и *фаза* $\varphi$ колебания $E_x$ определяются формулой

$$E_x = A\cos(\omega t - \varphi) \qquad (A \geq 0). \tag{6.24}$$

*Интенсивностью* $I$ назовем величину

$$I = \frac{c}{4\pi}\widetilde{E_x^2} = \frac{cA^2}{8\pi}, \tag{6.25}$$

где знак " ~ " обозначает усреднение по периоду световых колебаний $T = 2\pi/\omega$, т. е.

$$\widetilde{E_x^2} = \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} E_x^2\,dt. \tag{6.26}$$

Из (6.22), (6.24) следует, что

$$a = A\cos\varphi, \qquad b = A\sin\varphi. \tag{6.27}$$

Будем считать параметры $\alpha_i$, $a_i$, $\varphi_i$ в формулах (6.21), (6.23) случайными величинами. Тогда, как видно из (6.22), (6.23), (6.25), (6.27), параметры $E_x$, $a$, $b$, $A$, $\varphi$, $I$ также будут случайными. Найдем распределения вероятности для этих величин.

Отдельные осцилляторы нелазерного источника света излучают свет независимо друг от друга. Это дает основание считать параметры $\alpha_i$, $a_i$, $\varphi_i$ статистически независимыми. Обратившись к формулам (6.21), (6.23), видим, что напряженность светового поля $E_x$, а также квадратурные компоненты $a$ и $b$ представляют собой суммы большого числа независимых случайных величин. В силу центральной предельной теоремы теории вероятностей это означает, что $E_x$, $a$, $b$ имеют гауссово распределение вероятности:

$$w(E_x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{E_x^2}{2\sigma^2}\right), \tag{6.28}$$

$$w(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right), \qquad w(b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{b^2}{2\sigma^2}\right). \tag{6.29}$$

Здесь обозначено $\langle E_x^2\rangle = \sigma^2$ и учтено, что

$$\langle E_x\rangle = \langle a\rangle = \langle b\rangle = 0, \quad \langle a^2\rangle = \langle b^2\rangle = \langle E_x^2\rangle, \quad \langle ab\rangle = 0. \tag{6.30}$$

Считая квадратурные компоненты статистически независимыми, найдем двумерную плотность вероятности

$$w(a,b) = w(a)\,w(b). \tag{6.31}$$

Подставляя (6.29) в (6.31), получим

$$w(a,b) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{a^2+b^2}{2\sigma^2}\right). \tag{6.32}$$

Далее нетрудно найти распределения вероятностей $w(A)$, $w(\varphi)$, $w(I)$. Используя правило замены переменных в распределении вероятностей (см. дополнение 7) и формулы (6.25), (6.27), (6.32), получаем

$$w(A,\varphi) = \frac{A}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right), \tag{6.33}$$

$$w(A) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} w(A,\varphi)\,d\varphi = \frac{A}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right), \tag{6.34}$$

$$w(\varphi) = \int\limits_{0}^{\infty} w(A,\varphi)\,dA = \frac{1}{2\pi}, \tag{6.35}$$

$$w(I) = \frac{1}{\langle I\rangle}\exp\left(-\frac{I}{\langle I\rangle}\right), \qquad \langle I\rangle = \frac{c}{4\pi}\sigma^2, \tag{6.36}$$

где

$$\langle I\rangle = \int\limits_{0}^{\infty} I\,w(I)\,dI, \tag{6.37}$$

$\langle I\rangle$ — средняя интенсивность. Распределение вероятности вида (6.34) называется *распределением Рэлея*.

Суммируя результаты этого раздела, отметим, что основные характеристики излучения нелазерного (например, теплового) источника света имеют следующие распределения вероятности: напряженность светового поля и ее квадратурные компоненты — гауссово распределение, огибающая — распределение Рэлея, фаза — прямоугольное распределение, интенсивность — экспоненциальное распределение. Графики соответствующих плотностей вероятности показаны на рис. 6.4.

**Спектр излучения.** Излучение ансамбля независимых осцилляторов естественно рассматривать как стационарный случайный процесс. В этом случае спектр излучения определяется теоремой Винера–Хинчина (см. дополнение 8)

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} B(\tau)\mathrm{e}^{-i\omega\tau}\,d\tau, \tag{6.38}$$

где

$$B(\tau) = \langle E_x(t)E_x(t+\tau)\rangle, \tag{6.39}$$

$B(\tau)$ — корреляционная функция светового поля.

Запишем $E_x(t)$ в виде суммы полей, испускаемых отдельными осцилляторами:

$$E_x(t) = \sum_{j=1}^{N} E_{xj}(t). \tag{6.40}$$

Тогда

$$E_x(t)E_x(t+\tau) = N\langle E_{xj}(t)E_{xj}(t+\tau)\rangle, \tag{6.41}$$

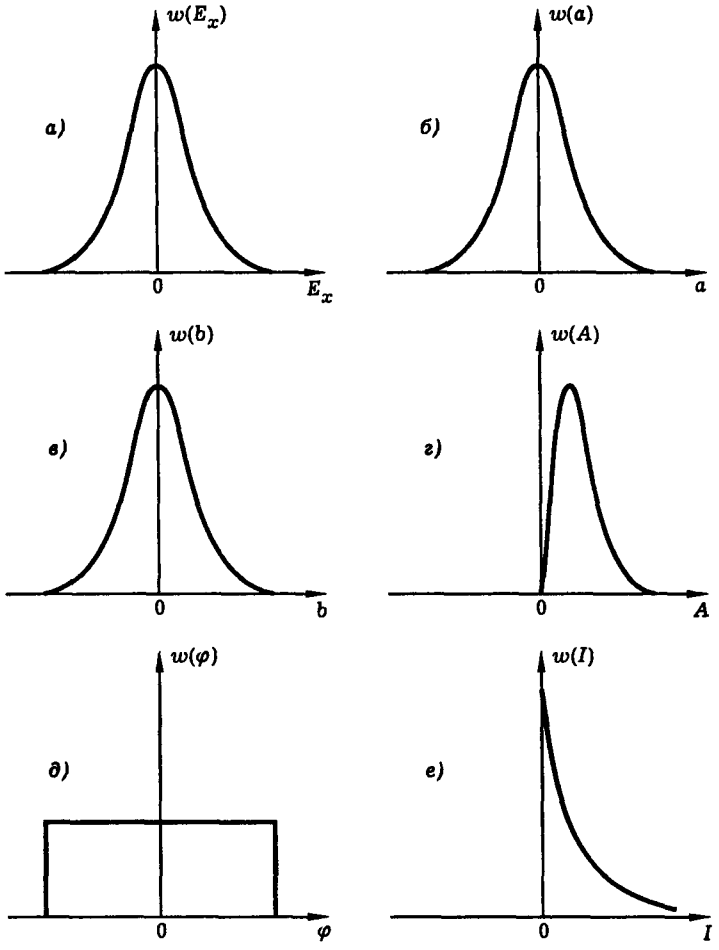



Рис. 6.4. Распределения вероятности, характеризующие излучение нелазерного источника света

где $N$ — полное число осцилляторов, угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю осцилляторов. При выводе (6.41) мы учли независимость осцилляторов и заменили суммирование сатистическим усреднением. Смысл этой операции можно выразить формулой

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} E_{xj}(t)E_{xj}(t+\tau) = \langle E_{xj}(t)E_{xj}(t+\tau)\rangle \equiv B_0(\tau). \tag{6.42}$$

Подставляя (6.41), (6.42) в (6.38), (6.39), получаем формулы

$$B(\tau) = NB_0(\tau), \tag{6.43}$$

$$S(\omega) = NS_0(\omega), \tag{6.44}$$

где

$$S_0(\omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} B_0(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \tag{6.45}$$

или, в силу четности корреляционной функции,

$$S_0(\omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} B_0(\tau) \left(e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}\right) d\tau. \tag{6.45a}$$

Таким образом, расчет спектра излучения сводится к вычислению корреляционной функции $B_0(\tau)$, определяемой формулой (6.42).

**Механизмы уширения спектральной линии.** Как видно из формул (6.38), (6.42), (6.43), частотный спектр излучения определяется характером изменения во времени напряженности светового поля $E_{xj}(t)$. Вид этой зависимости, в свою очередь, определяется такими физическими факторами как радиационное затухание колебаний, тепловое движение осцилляторов, столкновения, сбивающие фазу колебаний, разброс осцилляторов по частотам и т. п. Каждый из этих факторов обусловливает свой механизм уширения спектральной линии: естественное, доплеровское, столкновительное, неоднородное уширения и т. п. Рассмотрим некоторые из этих механизмов.

**Естественное уширение.** Этот, наиболее фундаментальный, механизм уширения спектральной линии обусловлен радиационным затуханием колебаний излучающего осциллятора.

Представим излучение осциллятора в виде последовательности вспышек стандартной формы $F(t)$, возникающих в случайные моменты времени $t_{pj}$. Тогда можно написать

$$E_{xj}(t) = \sum_{p=1}^{n} F(t - t_{pj}), \tag{6.46}$$

где $n$ — число вспышек (импульсов) за некоторое время $T$. Процесс вида (6.46) называется *случайной импульсной последовательностью*, и нам необходимо вычислить корреляционную функцию этого процесса.

Исходя из физической картины излучения ансамбля независимых осцилляторов, возбуждаемых, например, за счет столкновений, можно сделать некоторые предположения относительно статистических характеристик случайного процесса $E_{xj}(t)$. А именно, будем считать, что отдельные импульсы появляются независимо друг от друга, случайные моменты времени $t_{pj}$ имеют равномерное распределение вероятности на интервале времени $0 \le t \le T$, число импульсов $n$ есть независимая случайная величина, подчиняющаяся распределению Пуассона. Кроме того предположим, что длительность отдельного импульса значительно меньше времени наблюдения $T$, а среднее значение функции $F(t)$ равно нулю. Тогда

$$B_0(\tau) = \overline{n}\langle F(t - t_{pj}) F(t + \tau - t_{pj})\rangle, \tag{6.47}$$

или

$$B_0(\tau) = \frac{\overline{n}}{T} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\theta) F(\theta + \tau)\, d\theta, \tag{6.48}$$

где $\overline{n}$ — среднее число импульсов, испускаемых осциллятором за время $T$. Подставляя (6.48) в (6.45), получим

$$S_0(\omega) = \frac{\Omega}{\pi} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} F(\theta)\, F(\theta + \tau) \mathrm{e}^{-i\omega\tau} d\theta\, d\tau =$$

$$= \frac{\Omega}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\theta\, F(\theta) \mathrm{e}^{i\omega\theta} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\theta + \tau) \mathrm{e}^{-i\omega(\theta+\tau)} d\tau = \frac{\Omega}{\pi} |F(\omega)|^2, \tag{6.49}$$

где $\Omega = \overline{n}/T$ — средняя частота следования импульсов,

$$F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(t) \mathrm{e}^{-i\omega t}\, dt, \tag{6.50}$$

$F(\omega)$ — спектральная амплитуда, определяемая формой отдельного импульса.

Итак, мы приходим к выводу, что спектр случайной импульсной последовательности определяется спектральной плотностью отдельного импульса. Физически это связано с тем, что случайный момент появления импульса, как легко показать, не влияет на его спектральную плотность.

В частности, полагая

$$F(t) = a(t) \cos \omega_0 t, \tag{6.51}$$

где

$$a(t) = a_0 \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \exp(-t/2\tau), & t \geq 0, \end{cases} \tag{6.52}$$

$\omega_0$ — собственная частота, $\tau$ — время радиационного затухания колебаний осциллятора, получим

$$S_0(\omega) = \frac{\Omega}{\pi} \frac{a_0^2/4}{\Gamma^2/4 + (\omega - \omega_0)^2}. \tag{6.53}$$

Таким образом, естественный спектр имеет лоренцеву форму, центральную частоту $\omega_0$ и ширину $\Gamma = 1/\tau$ (рис. 6.5). Мощность излучения пропорциональна числу осцилляторов $N$, а также средней частоте вспышек отдельного осциллятора $\Omega$. Поскольку в оптическом диапазоне $\tau = 10^{-8}$ с (см. лекцию 5), типичная величина естественного уширения составляет

$$\Delta f_{\mathrm{e}} = \Gamma/2\pi = 1{,}6 \times 10^7 \text{ Гц}. \tag{6.54}$$

На практике, однако, редко можно наблюдать столь узкие спектральные линии. Обычно естественное уширение маскируется другими, более сильными механизмами уширения. Одним из них является доплеровский механизм.

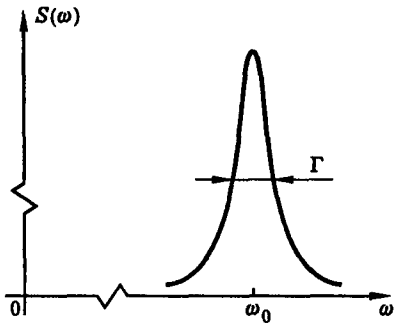



Рис. 6.5. Естественное уширение спектральной линии

**Доплеровское уширение** спектральной линии обусловлено хаотическим тепловым движением атомов или молекул. Оно наиболее характерно для разреженных газообразных светящихся сред. В частности, доплеровский спектр имеет излучение, испускаемое в боковых направлениях газоразрядной трубкой гелий-неонового лазера.

Вычислим форму и ширину доплеровской спектральной линии. Излучение ансамбля осцилляторов будем, как и прежде, описывать формулой (6.40). Принимая во внимание тепловое движение частиц и пренебрегая (для простоты) радиационным затуханием колебаний, запишем

$$E_{xj} = a_0 \cos(\omega_0 t - k_0 z_j), \tag{6.55}$$

где $k_0 = \omega_0/c$ — волновое число световой волны, $z_j$ — координата осциллятора по отношению к оси $z$, проведенной от источника света в точку наблюдения (рис. 6.1). В отсутствие столкновений, изменяющих скорость молекулы,

$$z_j = z_j(t) = z_{0j} + v_{zj} t, \tag{6.56}$$

где $t$ — время, $z_{0j}$ — начальная координата, $v_{zj}$ — скорость данной молекулы в проекции на ось $z$. Подставив (6.56) в (6.55), получим

$$E_{xj}(t) = a_0 \cos(\omega_j t - \varphi_j), \tag{6.57}$$

где

$$\varphi_j = k_0 z_{0j}, \qquad \omega_j = \omega_0 - k_0 v_{zj}. \tag{6.58}$$

Для вычисления корреляционной функции (6.42) предположим, что случайные величины $z_{0j}$ и $v_{zj}$ статистически независимы, а фаза $\varphi_j$ распределена равномерно на интервале периодичности $-\pi \le \varphi_j \le \pi$, т. е. $w(\varphi_j) = 1/2\pi$. Нетрудно показать, что в этом случае

$$B_0(\tau) = \frac{a_0^2}{2}\langle \cos \omega_j \tau \rangle = \frac{a_0^2}{4}\langle \exp(i\omega_j \tau)\rangle + \text{к. с.} \tag{6.59}$$

Подставляя (6.58) в (6.59), получим

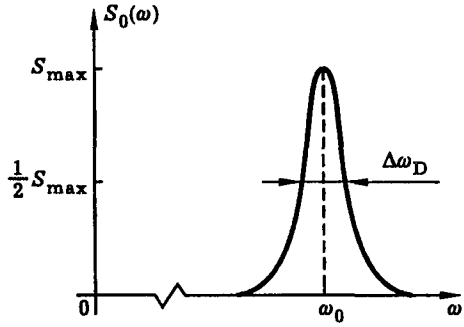



Рис. 6.6. Доплеровская спектральная линия

$$B_0(\tau) = \frac{a_0^2}{4}\exp(i\omega_0\tau)\langle\exp(-ik_0v_{zj}\tau)\rangle + \text{к. с.} \tag{6.60}$$

Декартова компонента скорости газовой молекулы имеет гауссово распределение вероятности

$$w(v_{zj}) = \frac{1}{\sigma_v\sqrt{2\pi}}\exp(-v_{zj}^2/2\sigma_v^2), \tag{6.61}$$

где

$$\sigma_v^2 = kT/m, \tag{6.62}$$

$\sigma_v^2$ — дисперсия тепловой скорости, $k$ — постоянная Больцмана, $T$ — абсолютная температура газа, $m$ — масса молекулы. Следовательно,

$$\langle\exp(-ik_0v_{zj}\tau)\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}k_0^2\sigma_v^2\tau^2\right) \tag{6.63}$$

и

$$B_0(\tau) = \frac{a_0^2}{4}\exp\left(i\omega_0\tau - \frac{1}{2}k_0^2\sigma_v^2\tau^2\right) + \text{к. с.} \tag{6.64}$$

Наконец, подставляя (6.64) в (6.45), получаем (в области положительных частот):

$$S_0(\omega) = \frac{a_0^2}{2}\frac{1}{\sigma_\omega\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\sigma_\omega^2}\right], \qquad \sigma_\omega = k_0\sigma_v. \tag{6.65}$$

Функция $S_0(\omega)$ изображена на рис. 6.6.

Итак, доплеровская спектральная линия имеет вид гауссовой кривой с центром на частоте $\omega_0$ и полной шириной по полувысоте

$$\Delta\omega_D = \omega_0\sqrt{\frac{8kT}{mc^2}\ln 2}. \tag{6.66}$$

Оценим доплеровскую ширину спектральной линии излучения гелий-неонового лазера. Полагая $\lambda = 6328$ Å, $m = 3 \times 10^{-23}$ г (масса атома неона), $T = 300$ К, $k = 1{,}38 \times 10^{-16}$ эрг/град, $c = 3 \times 10^{10}$ см/с, получим по формуле (6.66):

$$\Delta f_{\mathrm{D}} = 10^9 \text{ Гц}, \quad \text{или} \quad \Delta\nu_{\mathrm{D}} = 0{,}04 \text{ см}^{-1}, \quad \text{или} \quad \Delta\lambda_{\mathrm{D}} = 0{,}016 \text{ Å}. \tag{6.67}$$

Заметим, что доплеровское уширение примерно на два порядка превышает естественное уширение спектральной линии.

**Уширение и сдвиг спектральной линии, обусловленные столкновениями.** При столкновении излучающего осциллятора с другой частицей, осциллятор испытывает внешнее силовое воздействие, которое модулирует частоту и вызывает сбой фазы колебаний. Столкновения, быстро следующие одно за другим, приводят к случайной фазовой модуляции колебаний, что, в свою очередь, вызывает уширение спектральной линии излучения.

Оценим величину столкновительного уширения. Для этого запишем поле излучения осциллятора в виде колебания со случайно модулированной фазой

$$E_{xj}(t) = a_0 \cos[\omega_0 t + \varphi_j(t)]. \tag{6.68}$$

Подставляя (6.68) в (6.42), получим

$$B_0(\tau) = \frac{a_0^2}{4} \exp(i\omega_0\tau) \langle \exp[i\Delta\varphi_j(t,\tau)] \rangle + \text{к. с.}, \tag{6.69}$$

где

$$\Delta\varphi_j(t,\tau) = \varphi_j(t+\tau) - \varphi_j(t), \tag{6.70}$$

$\Delta\varphi_j(t,\tau)$ — фазовый набег за время $\tau$.

Будем считать $\varphi_j(t)$ стационарным случайным процессом. Тогда среднее в формуле (6.69) не зависит от $t$ и можно обозначить

$$\langle \exp[i\Delta\varphi_j(t,\tau)] \rangle = b(\tau). \tag{6.71}$$

Рассмотрим бесконечно малый промежуток времени $d\tau$ и вычислим дифференциал функции $b(\tau)$. Используя (6.70), (6.71), получим

$$db(\tau) = \langle \exp[i\Delta\varphi_j(t,\tau)] (e^{i\varepsilon} - 1) \rangle, \tag{6.72}$$

где

$$\varepsilon = \Delta\varphi_j(t, \tau + d\tau) - \Delta\varphi_j(t,\tau), \tag{6.73}$$

$\varepsilon$ — набег фазы за время $d\tau$.

Предположим далее, что приращение фазы в результате столкновения никак не связано с фазой колебания до столкновения. Тогда величины $\Delta\varphi_j$ и $\varepsilon$ можно считать статистически независимыми и записать

$$db(\tau) = b(\tau)\langle e^{i\varepsilon} - 1 \rangle. \tag{6.74}$$

Усреднение по ансамблю частиц в формуле (6.74) можно заменить усреднением по параметрам, характеризующим процесс столкновения. Главным из этих параметров является принципиальное расстояние $R$, которое определяется как минимальное расстояние между центрами масс сталкивающихся частиц. Выполним усреднение по этому параметру.

Пусть газ имеет плотность $N$, а средняя скорость относительного движения частиц равна $\langle v\rangle$. Тогда за время $d\tau$ осциллятор испытывает

$$dn = 2\pi N\langle v\rangle R\,dR\,d\tau \tag{6.75}$$

столкновений, для которых прицельный параметр лежит в области от $R$ до $R + dR$. Обозначим через $\varepsilon(R)$ набег фазы в результате столкновения, характеризуемого прицельным параметром $R$. Тогда можно записать

$$\langle e^{i\varepsilon} - 1\rangle = 2\pi N\langle v\rangle d\tau \int\limits_0^\infty \left[e^{i\varepsilon(R)} - 1\right] R\,dR \tag{6.76}$$

или

$$\langle e^{i\varepsilon} - 1\rangle = -N\langle v\rangle d\tau(\sigma_1 - i\sigma_2), \tag{6.77}$$

где

$$\sigma_1 = 2\pi \int\limits_0^\infty [1 - \cos\varepsilon(R)]R\,dR, \qquad \sigma_2 = 2\pi \int\limits_0^\infty \sin\varepsilon(R)R\,dR. \tag{6.78}$$

Подстановка (6.77) в (6.74) приводит к следующему дифференциальному уравнению для функции $b(\tau)$:

$$db(\tau) = -b(\tau)N\langle v\rangle(\sigma_1 - i\sigma_2)d\tau, \tag{6.79}$$

откуда

$$b(\tau) = \exp\left[-N\langle v\rangle(\sigma_1 - i\sigma_2)\tau\right]. \tag{6.80}$$

Теперь нетрудно вычислить спектр излучения. Используя формулы (6.45), (6.69), (6.71), (6.80) и учитывая четность корреляционной функции, получаем (для области положительных частот)

$$S_0(\omega) = \frac{a_0^2}{2\pi}\frac{N\langle v\rangle\sigma_1}{(\omega - \omega_0 - N\langle v\rangle\sigma_2)^2 + (N\langle v\rangle\sigma_1)^2}. \tag{6.81}$$

Формула (6.81) показывает, что спектр излучения, обусловленный упругими столкновениями осцилляторов, имеет лоренцеву форму, ширину

$$\Delta\omega_{\text{ст}} = 2N\langle v\rangle\sigma_1 \tag{6.82}$$

и сдвиг центра линии

$$\delta\omega = N\langle v\rangle\sigma_2. \tag{6.83}$$

Как ширина, так и сдвиг спектральной линии излучения пропорциональны плотности газа $N$ и средней скорости относительного движения частиц $\langle v\rangle$.

**Эффект Дики: столкновительное сужение доплеровской спектральной линии в плотном газе.** Расчет доплеровского уширения спектральной линии, выполненный выше, был сделан в предположении, что тепловые скорости молекул не меняются с течением времени. Это допущение оправдано для газов низкой плотности, в которых столкновения между молекулами

сравнительно редки и молекулы имеют возможность свободно перемещаться на большие расстояния. Если же плотность газа повышается, то столкновения между молекулами происходят чаще, что ограничивает возможность свободных перемещений осцилляторов. В очень плотных газах, а также в конденсированных средах осцилляторы практически локализованы. Естественно, что изменение характера движения осцилляторов (от свободного к локализованному) должно привести к изменению формы и ширины спектральной линии излучения. В этом пункте мы рассмотрим вопрос о том, как изменяется доплеровский спектр излучения при повышении плотности газа.

Обобщая формулу (6.56) на случай, когда скорость молекулы изменяется с течением времени, запишем

$$z_j = z_j(t) = z_{0j} + \int_0^t v_{zj}(\theta)\, d\theta. \tag{6.84}$$

Подставляя (6.84) в (6.55), получим

$$E_{xj} = a_0 \cos[\omega_0 t - \varphi_j(t)], \tag{6.85}$$

где

$$\varphi_j(t) = k_0 z_{0j} + k_0 \int_0^t v_{zj}(\theta)\, d\theta. \tag{6.86}$$

По формуле (6.42) находим

$$B_0(\tau) = \frac{a_0^2}{4} \exp(i\omega_0\tau) \langle \exp[-i\Delta\varphi_j(t,\tau)]\rangle + \text{к. с.}, \tag{6.87}$$

где

$$\Delta\varphi_j(t,\tau) = \varphi_j(t+\tau) - \varphi_j(t) = k_0 \int_t^{t+\tau} v_{zj}(\theta)\, d\theta. \tag{6.88}$$

Тепловую скорость молекулы $v_{zj}(t)$ естественно рассматривать как стационарный случайный процесс. В этом случае среднее в формуле (6.87) не зависит от $t$ и можно обозначить

$$\langle \exp[-i\Delta\varphi_j(t,\tau)]\rangle = b(\tau). \tag{6.89}$$

Случайный процесс $v_{zj}(t)$ имеет нулевое среднее значение и гауссово распределение вероятности. Известно, что при линейных преобразованиях гауссова шума его статистика сохраняется. Следовательно, случайный процесс $\Delta\varphi_j(t,\tau)$, связанный с $v_{zj}(t)$ линейным преобразованием (6.88), есть также гауссов процесс с нулевым средним. Отсюда

$$b(\tau) = \exp\left[-\frac{1}{2}\langle \Delta\varphi_j^2(t,\tau)\rangle\right]. \tag{6.90}$$

Подставив (6.88) в (6.90), получим

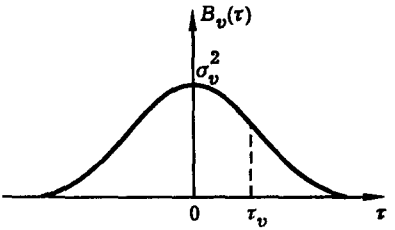



Рис. 6.7. Корреляционная функция тепловых скоростей газовых молекул

$$\langle \Delta\varphi_j^2(t,\tau)\rangle = k_0^2 \int_0^\tau \int_0^\tau \langle v_{zj}(\theta_1) v_{zj}(\theta_2)\rangle \, d\theta_1 \, d\theta_2, \tag{6.91}$$

или

$$\langle \Delta\varphi_j^2(t,\tau)\rangle = 2k_0^2 \int_0^\tau (\tau - \theta) B_v(\theta) \, d\theta, \tag{6.92}$$

где

$$B_v(\theta) = \langle v_{zj}(t) v_{zj}(t+\theta)\rangle, \tag{6.93}$$

$B_v(\theta)$ — корреляционная функция тепловых скоростей молекул. Эта функция характеризуется двумя основными параметрами: дисперсией $\sigma_v^2 = kT/m$ и временем корреляции $\tau_v$ тепловых скоростей. Смысл этих параметров иллюстрирует рис. 6.7. Пользуясь этим рисунком и формулами (6.90), (6.92), нетрудно показать, что

$$b(\tau) = \begin{cases} \exp\left[-\dfrac{1}{2}(k_0\sigma_v\tau)^2\right], & \tau \ll \tau_v, \\ \exp\left[-(\tau-\tau_0)k_0^2 D\right], & \tau \gg \tau_v, \end{cases} \tag{6.94}$$

где

$$D = \int_0^\infty B_v(\tau) d\tau = \sigma_v^2 \tau_v, \qquad \tau_0 = D^{-1} \int_0^\infty \tau B_v(\tau) d\tau. \tag{6.95}$$

Параметр $D$ называется корреляционной постоянной или коэффициентом диффузии. Первую формулу (6.95) можно рассматривать как определение времени корреляции $\tau_v$.

Проанализируем полученные результаты. В предельном случае сильно разреженного газа, когда столкновения между молекулами отсутствуют, можно положить $\tau_v = \infty$. В этом случае, как видно из формул (6.87), (6.94), для $B_0(\tau)$ восстанавливается выражение (6.64) и, следовательно, спектр излучения описывается формулой (6.65). Таким образом, рассматриваемая модель правильно описывает предел низких давлений газа.

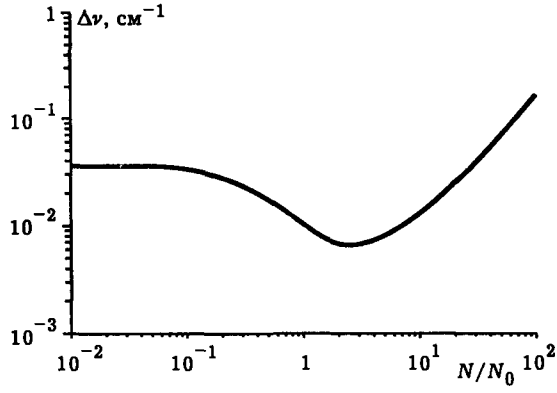



Рис 6.8. Эффект Дики

В противоположном предельном случае $\tau_v \to 0$ (плотный газ) из (6.45), (6.87), (6.89), (6.94) получаем (для области положительных частот):

$$S_0(\omega) = \frac{a_0^2}{2\pi} \frac{k_0^2 D \exp(\tau_0 k_0^2 D)}{(\omega - \omega_0)^2 + k_0^2 D^2}. \tag{6.96}$$

Как видно из этой формулы, спектр излучения имеет лоренцеву форму и ширину

$$\Delta\omega = 2k_0^2 D = 2k_0^2 \sigma_v^2 \tau_v. \tag{6.97}$$

Время корреляции тепловых скоростей (время свободного пробега молекул газа) уменьшается с ростом плотности газа $N$ согласно формуле

$$\tau_v^{-1} = N\langle v\rangle S, \tag{6.98}$$

где $\langle v\rangle$ — средняя тепловая скорость относительного движения, $S$ — газокинетическое сечение молекул. Поэтому по мере увеличения плотности газа спектральная линия излучения будет становиться все более узкой. Этот эффект получил название "столкновительное сужение спектральной линии" или "эффект Дики" — по имени американского физика Р. Дики, впервые исследовавшего его в 1953 г.

Для того чтобы вычислить спектр излучения при произвольном давлении газа, следует задаться определенной моделью корреляционной функции тепловых скоростей молекул. Пусть, например,

$$B_v(\tau) = \sigma_v^2 \exp\left(-|\tau|/\tau_v\right). \tag{6.99}$$

Тогда по формулам (6.90), (6.92) получим

$$b(\tau) = \exp\left[-\beta(y - 1 + \mathrm{e}^{-y})\right], \tag{6.100}$$

где

$$\beta = (k_0 \sigma_v \tau_v)^2, \qquad y = \tau/\tau_v. \tag{6.101}$$

Спектр излучения определяется формулами (6.45а), (6.87), (6.89), (6.100).

На рис. 6.8 показана зависимость ширины спектральной линии спонтанного комбинационного рассеяния в водороде от давления газа. Хорошо видно сужение спектральной линии в области давлений 0,1–3 атм, обусловленное эффектом Дики. Уширение спектральной линии при высоких давлениях обусловлено столкновительным механизмом.

# Литература

1. *Dicke R. H*//Physical Review. 1953. V. 89. P. 472.
2. *Wittke J. P., Dicke R. H*//Physical Review. 1956. V. 103. P. 620.

# Лекция 7

# Линейный осциллятор в световом поле

*Поглощение света осциллятором и ансамблем осцилляторов. Закон Бугера. Спектроскопия поглощения. Уменьшение фазовой скорости света в среде. Показатель преломления. Неоднородный ансамбль осцилляторов. Однородная и неоднородная ширина спектра. Возбуждение коротким импульсом. Релаксация энергии и дефазировка. Принципы частотной и временно́й спектроскопии.*

На основе модели гармонического осциллятора рассматриваются основные эффекты взаимодействия света с веществом: поглощение света и уменьшение скорости световой волны, распространяющейся в среде. Анализируются особенности взаимодействия света с неоднородным ансамблем осцилляторов, в котором отдельные осцилляторы имеют разные собственные частоты колебаний. Обсуждаются оптические методы исследования вещества, принципы стационарной и нестационарной спектроскопии.

**Поглощение света осциллятором и ансамблем осцилляторов.** Одним из основных эффектов, возникающих при взаимодействии света с веществом, является эффект поглощения света. Причина этого явления состоит в том, что свет возбуждает колебания элементарных оптических осцилляторов среды (атомов, молекул) и передает им свою энергию. В результате энергия среды возрастает, а энергия самой световой волны уменьшается — среда поглощает свет.

Основные закономерности поглощения света средой удается описать в рамках простой классической модели среды как ансамбля гармонических осцилляторов. Рассмотрение этой задачи мы начнем с оценки мощности, передаваемой световой волной отдельному осциллятору.

Возбуждение осциллятора гармоническим полем. Возбуждение осциллятора световым полем описывается уравнением

$$\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m}E. \tag{7.1}$$

Здесь $e$ и $m$ — заряд и масса осциллятора, $\omega_0$ и $\Gamma$ — собственная частота и коэффициент затухания колебаний, $x$ — координата, $E$ — напряженность электрического поля световой волны (рис. 7.1).

Запишем световое поле в виде

$$E = \frac{1}{2}\mathcal{E}\exp(i\omega t) + \text{к. с.}, \tag{7.2}$$

где $\omega$ — частота, $\mathcal{E}$ — комплексная амплитуда поля. Подставив (7.2) в (7.1), получим уравнение вынужденных колебаний

$$\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m}\frac{1}{2}\mathcal{E}\exp(i\omega t) + \text{к. с.} \tag{7.3}$$

Решение уравнения (7.3) ищем в виде

$$x = \frac{1}{2}\tilde{x}\exp(i\omega t) + \text{к. с.}, \tag{7.4}$$

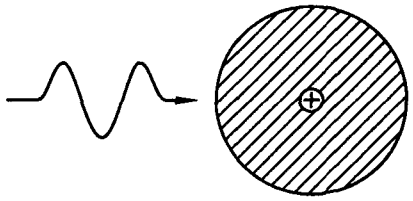


Рис. 7.1. Возбуждение осциллятора световым полем

где $\tilde{x}$ — комплексная амплитуда колебаний осциллятора. Подставив (7.4) в (7.3), находим

$$\tilde{x} = \frac{e}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma}\mathcal{E}. \tag{7.5}$$

Формулы (7.4) и (7.5) описывают установившиеся колебания осциллятора в поле монохроматической световой волны.

Индуцированное поглощение. Вычислим мощность $P$, передаваемую светом осциллятору. По определению мощности

$$P = dA/dt, \tag{7.6}$$

где

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = eE\,dx, \tag{7.7}$$

$dA$ — элементарная работа, совершаемая световым полем над осциллятором. Подставив (7.7) в (7.6), получим

$$P = eE\dot{x}. \tag{7.8}$$

Согласно (7.2), (7.4), (7.8),

$$P = \frac{e}{4}i\omega\left(\mathcal{E}^*\tilde{x} + \mathcal{E}\tilde{x}e^{2i\omega t}\right) + \text{к. с.},$$

т. е. мгновенная мощность $P$ осциллирует на частоте $2\omega$. Средняя по периоду световых колебаний мощность

$$\langle P\rangle \equiv P_0 = \frac{e}{4}i\omega\mathcal{E}^*\tilde{x} + \text{к. с.} \tag{7.9}$$

Подставив (7.5) в (7.9), получим

$$P_0 = \frac{e^2}{2m}\frac{\omega^2\Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2}|\mathcal{E}|^2,$$

или

$$P_0 = \frac{4\pi e^2}{mc}\frac{\omega^2\Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2}I, \tag{7.10}$$

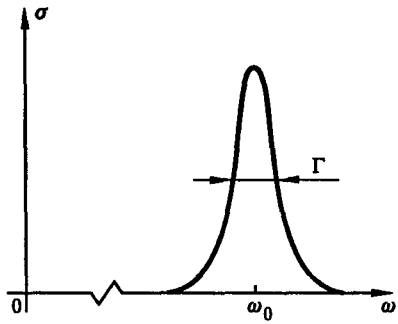



Рис 7 2 Зависимость сечения поглощения света осциллятором от частоты света

где

$$I = c|\mathcal{E}|^2/8\pi, \tag{7.11}$$

$I$ — интенсивность световой волны.

Из (7.10) видно, что $P_0 > 0$. Это значит, что свет передает свою мощность осциллятору, при этом сам свет поглощается. Для характеристики величины поглощения удобно ввести сечение $\sigma$, определив его формулой

$$P_0 = \sigma I. \tag{7.12}$$

Тогда

$$\sigma(\omega) = \frac{4\pi e^2}{mc}\frac{\omega^2\Gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2} \tag{7.13}$$

Резонансная кривая. В области частот вблизи резонанса $|\omega-\omega_0| \ll \omega_0$ формула (7 13) приобретает вид

$$\sigma(\omega) = \frac{\pi e^2}{mc}\frac{\Gamma}{(\omega_0-\omega)^2+\Gamma^2/4}. \tag{7.14}$$

Таким образом, зависимость сечения поглощения от частоты света имеет вид лоренцевой кривой (рис. 7 2). Максимум сечения поглощения приходится на частоту $\omega = \omega_0$, совпадающую с собственной частотой колебаний осциллятора. Ширина распределения $\sigma(\omega)$ (полная ширина по полувысоте) равна коэффициенту затухания колебаний осциллятора

$$\Delta\omega = \Gamma.$$

Отметим, что при точном резонансе $\omega = \omega_0$, когда сечение поглощения достигает максимума, его величина

$$\sigma_{\max} = \frac{4\pi e^2}{mc\Gamma} \tag{7.14a}$$

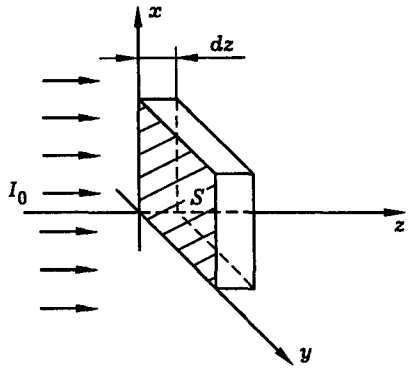



Рис. 7.3. К выводу закона Бугера

обратно пропорциональна параметру Г. Физически это связано с тем, что при резонансе именно параметр Г, определяющий величину потерь, ограничивает амплитуду установившихся вынужденных колебаний осциллятора (см. формулу (7.5)). Считая, что потери обусловлены собственным излучением осциллятора и используя формулу (5.24), параметр Г можно оценить как

$$\Gamma = \frac{1}{\tau} = \frac{2e^2\omega^2}{3mc^3}. \tag{7.14б}$$

Подставив (7.14б) в (7.14а), получим

$$\sigma_{\max} = \frac{3}{2\pi}\lambda^2, \tag{7.14в}$$

где $\lambda$ — длина световой волны. Итак, сечение резонансного поглощения света атомом имеет порядок квадрата длины световой волны. Например, для $\lambda = 0{,}5$ мкм имеем $\sigma_{\max} \approx 10^{-9}$ см$^2$.

**Закон Бугера.** Рассмотрим теперь поглощение света модельной средой, представляющей собой ансамбль гармонических осцилляторов. Пусть плоская монохроматическая световая волна проходит отрезок среды длиной $dz$, причем среда содержит $N$ элементарных осцилляторов (атомов) в единице объема (рис. 7.3). Обозначив площадь поперечного сечения светового пучка буквой $S$, запишем полное число осцилляторов, находящихся в поле световой волны, в виде

$$dN = NS\,dz. \tag{7.15}$$

Будем считать, что каждый осциллятор поглощает мощность $P_0$, определяемую формулами (7.12), (7.13). Тогда суммарное изменение мощности света на данном отрезке среды составит

$$dP = -P_0\,dN. \tag{7.16}$$

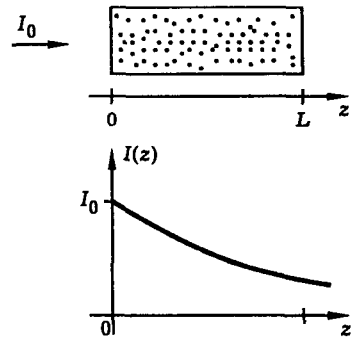



Рис. 7.4. Экспоненциальное затухание света в среде (закон Бугера)

Соответственно, изменение интенсивности света будет равно $dI = S^{-1}dP$ или, в силу (7.15), (7.16),

$$dI = -P_0 N\, dz. \tag{7.17}$$

Подставив (7.12) в (7.17), получаем уравнение для интенсивности света: $dI = -I\sigma N\, dz$, решение которого есть

$$I(z) = I_0 \exp(-\delta z), \tag{7.18}$$

где $I_0$ — интенсивность падающей волны,

$$\delta = \sigma N, \tag{7.19}$$

$\delta$ — коэффициент поглощения.

Формула (7.18) выражает закон поглощения света в среде, называемой также законом Бугера–Ламберта–Бэра. Согласно этому закону, интенсивность света экспоненциально уменьшается по мере увеличения дистанции, пройденной светом в среде (рис. 7.4).

Из (7.14), (7.19) вытекает следующее выражение для коэффициента поглощения:

$$\delta(\omega) = \frac{\pi N e^2}{mc} \frac{\Gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma^2/4}. \tag{7.20}$$

Как видно из формулы (7.20), коэффициент поглощения $\delta$ не зависит ни от интенсивности падающего света, ни от геометрических размеров облучаемого образца, а является характеристикой самого поглощающего материала. Для разных веществ и разных условий коэффициент поглощения света меняется в широких пределах. Например, для оптических волокон $\delta = 10^{-4} - 10^{-6}$ см$^{-1}$, а для металлов и полупроводников $\delta = 10^3 - 10^6$ см$^{-1}$. Наряду с показателем преломления, коэффициент поглощения света представляет собой важнейшую оптическую характеристику вещества.

Выше мы вывели закон Бугера, исходя из простейшей модели среды как ансамбля неподвижных невзаимодействующих между собой классических осцилляторов. Однако экспериментальные исследования показывают, что этот закон

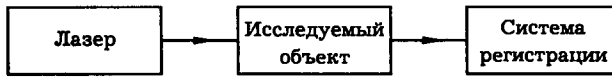



Рис 7 5 Блок-схема установки для измерения оптических спектров поглощения

справедлив для широкого класса объектов: жидких, твердых и газообразных сред, а также смесей различных веществ, причем в очень широких пределах изменения интенсивности излучения. Таким образом, закон Бугера почти универсален. Отклонения от этого закона начинают проявляться лишь для очень мощных (лазерных) световых пучков. Эти отклонения связаны с нелинейностью отклика вещества на сильное световое поле, квантовыми эффектами и т. п.

**Спектроскопия поглощения.** Зависимость коэффициента поглощения света веществом $\delta$ от частоты $\omega$ называют оптическим *спектром поглощения*. Измеряя спектр поглощения, можно экспериментально определить характеристики элементарных оптических осцилляторов — собственные частоты и коэффициенты затухания колебаний. Эти параметры, в свою очередь, несут важную информацию о строении и свойствах атомов и молекул, процессах взаимодействия частиц, позволяют определять состав и термодинамическое состояние среды и т. п. Получение и анализ этой информации составляют предмет *оптической спектроскопии*.

Идеальным прибором для измерения оптического спектра поглощения является узкополосный, перестраиваемый по частоте лазер. Схема измерений показана на рис. 7.5. Излучение лазера пропускается через исследуемую среду и направляется на регистрирующую аппаратуру, с помощью которой измеряется интенсивность (мощность, энергия) света. При перестройке частоты лазера сигнал на выходе системы изменяется, передавая частотную зависимость коэффициента поглощения $\delta(\omega)$.

На рис. 7.6 показана схема спектроскопии поглощения, в которой используется источник излучения с широким спектром (например, дуговая лампа). В этом случае анализ спектра осуществляется с помощью спектрального прибора (призма, дифракционная решетка). В качестве примера на рис. 7.7 показана схема опыта по наблюдению спектра поглощения света раствором марганцовокислого калия. В этом опыте пучок белого света дуговой лампы проходит через раствор, затем через стеклянную призму и направляется на экран. При этом в желто-зеленой области спектра на экране наблюдается темная полоса. Появление этой полосы вызвано поглощением желто-зеленого света раствором марганцовокислого калия. Аналогичный опыт можно проделать с парами натрия. Помещая в пучок света натриевую горелку, наблюдаем поглощение света в желтой области спектра.

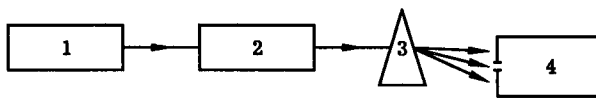



Рис 7 6 "Широкополосный" вариант спектроскопии поглощения 1 — источник света, 2 — исследуемый объект, 3 — спектральный прибор, 4 — измерительная аппаратура

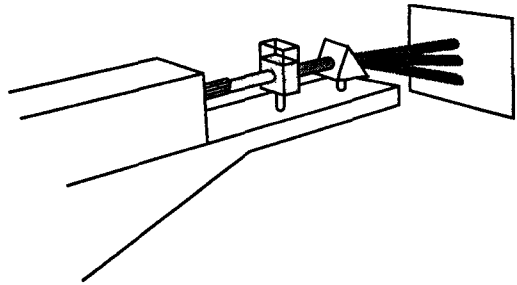


Рис. 7.7. Наблюдение спектра поглощения света водным раствором марганцовокислого калия

**Уменьшение фазовой скорости света в среде. Показатель преломления.** Выше мы рассмотрели эффект поглощения света в среде. Теперь рассмотрим процесс *переизлучения* света ансамблем возбужденных осцилляторов. Это позволит выяснить механизм другого важного эффекта, возникающего при взаимодействии света с веществом — эффекта уменьшения скорости света или *замедления* световой волны в среде.

Рассмотрим распространение плоской монохроматической световой волны в прозрачной среде. Известно, что в этом случае влияние среды сводится к уменьшению скорости распространения световой волны; скорость света в среде есть

$$v = c/n, \tag{7.21}$$

где c — скорость света в вакууме, $n$ — действительная положительная величина, бóльшая единицы, называемая *показателем преломления* среды. В этом пункте мы выведем выражение для $n$, исходя из представления о среде как ансамбле осцилляторов.

Предположим сначала, что показатель преломления среды $n$ известен. Тогда распространение света в среде можно описать формулой

$$E = \frac{1}{2}\mathcal{E}e^{i(\omega t - kz)} + \text{к. с.}, \tag{7.22}$$

где $\omega$ — частота, $\mathcal{E}$ — комплексная амплитуда волны,

$$k = \omega n/c, \tag{7.23}$$

$k$ — волновое число для света в среде. Вводя волновое число для света в вакууме

$$k_0 = \omega/c, \tag{7.24}$$

перепишем (7.23) в виде

$$k = k_0 + (n-1)k_0. \tag{7.25}$$

Из (7.22) и (7.25) видно, что световая волна приобретает в среде дополнительный фазовый набег, пропорциональный толщине среды. Например, для слоя среды толщиной $\Delta z$ дополнительный фазовый набег равен

$$\Delta\varphi = (n-1)k_0\Delta z. \tag{7.26}$$

Поле на выходе из среды в этом случае есть

$$E = \frac{1}{2}\mathcal{E}\exp\left[i(\omega t - k\Delta z)\right] + \text{к.с.} = \frac{1}{2}\mathcal{E}\exp\left[i(\omega t - k_0\Delta z) - i\Delta\varphi\right] + \text{к.с.} \tag{7.27}$$

Предположим теперь, что толщина слоя среды $\Delta z$ настолько мала (много меньше длины световой волны), что

$$\Delta\varphi \ll 1. \tag{7.28}$$

Тогда, воспользовавшись формулой $\exp(-i\Delta\varphi) \approx 1 - i\Delta\varphi$, получим из (7.27)

$$E = E_{\text{п}} + E_{\text{д}}, \tag{7.29}$$

где

$$E_{\text{п}} = \frac{1}{2}\mathcal{E}\exp\left[i(\omega t - k_0\Delta z)\right] + \text{к.с.},$$

$$E_{\text{д}} = \frac{1}{2}\mathcal{E}_{\text{д}}\exp\left[i(\omega t - k_0\Delta z)\right] + \text{к.с.}, \qquad \mathcal{E}_{\text{д}} = -i\Delta\varphi\mathcal{E}.$$

Первое слагаемое в формуле (7.29) можно интерпретировать как поле исходной световой волны, падающей на среду и прошедшей через нее без искажения. Второе слагаемое описывает некоторое дополнительное слабое поле, сдвинутое по фазе относительно падающей волны на $\pi/2$. С учетом формулы (7.26) амплитуду дополнительного поля можно представить в виде

$$\mathcal{E}_{\text{д}} = -ik_0\Delta z(n-1)\mathcal{E}. \tag{7.30}$$

В проделанном выше расчете дополнительное поле возникает как следствие эффекта замедления света в среде. С другой стороны, оно не может быть ничем иным, кроме поля, *переизлученного* элементарными осцилляторами (атомами) среды. Вычислим теперь это переизлученное поле, исходя из представлений об излучении осцилляторов, совершающих вынужденные колебания в поле падающей световой волны.

На рис. 7.8 показан тонкий слой среды, на который падает плоская монохроматическая световая волна. Пусть $\Delta z$ — толщина слоя, $N$ — число атомов в единице объема среды. Будем считать, что среда достаточно разрежена для того, чтобы влиянием атомов друг на друга можно было пренебречь.

Пренебрегая затуханием колебаний, уравнение вынужденных колебаний осциллятора в поле падающей световой волны

$$E = \frac{1}{2}\mathcal{E}e^{i\omega t} + \text{к.с.} \tag{7.31}$$

запишем в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m}E, \tag{7.32}$$

где $e$ и $m$ — заряд и масса электрона, $\omega_0$ — собственная частота осциллятора. Решение уравнения (7.32) ищем в виде

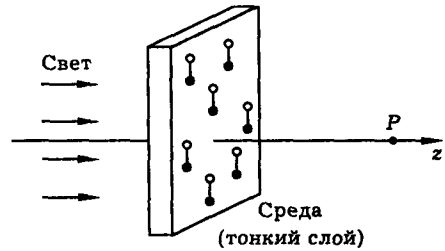



Рис. 7.8. К расчету показателя преломления модельной среды. Тонкий слой среды облучается плоской монохроматической световой волной. $P$ — точка наблюдения

$$x = \frac{1}{2}\tilde{x}e^{i\omega t} + \text{к. с.} \tag{7.33}$$

Подставив (7.31), (7.33) в (7.32), получим

$$\tilde{x} = \frac{e}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\mathcal{E}. \tag{7.34}$$

Формула (7.34) устанавливает связь между комплексными амплитудами колебаний диполя $\tilde{x}$ и поля падающей волны $\mathcal{E}$.

Колеблющийся диполь сам становится источником вторичного излучения. Используя результаты лекции 5, поле вторичного излучения представим в виде

$$E_0 = \frac{1}{2}\mathcal{E}_0 e^{i\omega(t-r/c)} + \text{к. с.}, \tag{7.35}$$

где

$$\mathcal{E}_0 = \frac{e\omega^2\tilde{x}}{c^2 r}\sin\theta, \tag{7.36}$$

$r$ — расстояние от диполя до точки наблюдения, $\theta$ — угол между осью диполя и направлением на точку наблюдения (рис. 7.9). В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением углов $\theta$ близких к $\pi/2$. В этом случае $\sin\theta \approx 1$, и формула (7.36) для амплитуды вторичной волны принимает вид

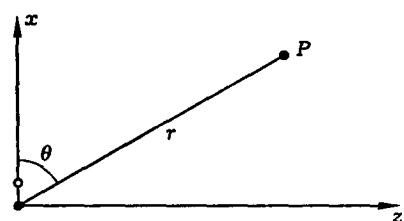



Рис. 7.9. К расчету поля вторичного излучения

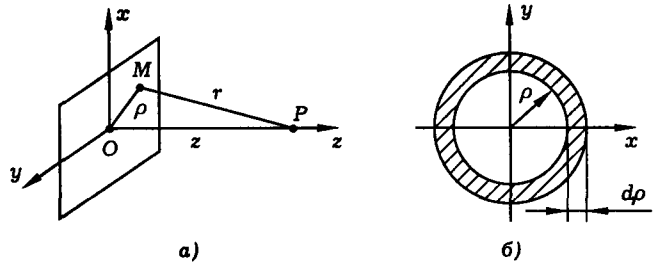



Рис. 7.10. К расчету поля излучения совокупности осцилляторов, расположенных в одной плоскости

$$\mathcal{E}_0 = \frac{e\omega^2\tilde{x}}{c^2 r}. \tag{7.37}$$

Теперь перейдем к суммированию излучений всех осцилляторов, заключенных в рассматриваемом тонком слое среды. Выберем точку наблюдения поля $P$ на достаточно большом расстоянии от слоя (рис. 7.8). Излучение отдельного атома в точке наблюдения описывается формулами (7.35), (7.37). Проводя суммирование, следует учесть, что разные осцилляторы среды расположены на разных расстояниях $r$ от точки наблюдения и поэтому испускаемые ими световые волны приходят в эту точку с разными фазами.

Предположим, что толщина слоя среды много меньше длины световой волны: $\Delta z \ll \lambda$. Тогда можно вообще пренебречь толщиной слоя и считать, что все осцилляторы расположены в одной и той же плоскости. Введем в этой плоскости оси $x$, $y$, а ось $z$ проведем перпендикулярно плоскости осцилляторов через точку $P$ (рис. 7.10, *а*). На рис. 7.10, *б* показано тонкое кольцо радиуса $\rho$ и ширины $d\rho$, расположенное в плоскости осцилляторов так, что ось $z$ совпадает с осью кольца. Все осцилляторы, расположенные в пределах данного кольца, находятся на одном и том же расстоянии от точки $P$, и поэтому испускаемые ими световые волны складываются в точке $P$ в одной и той же фазе. Результирующее световое поле можно, следовательно, вычислить по формуле

$$dE = E_0\, dN, \tag{7.38}$$

где $E_0$ определяется формулой (7.35) и описывает поле одного отдельно взятого осциллятора,

$$dN = N\Delta z 2\pi\rho\, d\rho, \tag{7.39}$$

$dN$ — число осцилляторов в пределах кольца. Теперь, чтобы найти полное световое поле, создаваемое в точке $P$ всеми осцилляторами плоскости, следует подставить (7.39) в (7.38) и проинтегрировать по $\rho$. В итоге получим

$$E_д = N\Delta z 2\pi \int_0^\infty E_0 \rho\, d\rho. \tag{7.40}$$

Из рис. 7.10 видно, что $r^2 = z^2 + \rho^2$. Так как нас интересует случай $z \gg \rho$, с хорошей степенью точности можно считать, что

$$r = z + \rho^2/2z. \tag{7.41}$$

По формулам (7.35), (7.40), (7.41) получаем

$$E_д = \frac{1}{2}\mathcal{E}_д \exp\left[i(\omega t - k_0 z)\right] + \text{к. с.}, \tag{7.42}$$

где использовано обозначение (7.24),

$$\mathcal{E}_д = 2\pi N \Delta z \mathcal{E}_0 \mathcal{J}, \tag{7.43}$$

$$\mathcal{J} = \int\limits_0^\infty \exp(-ik_0\rho^2/2z)\rho\, d\rho. \tag{7.44}$$

Интеграл (7.44) вычислим следующим образом:

$$\mathcal{J} = \lim_{\alpha\to 0}\int\limits_0^\infty \exp(-\alpha\rho^2 - ik_0\rho^2/2z)\rho\, d\rho = \frac{z}{ik_0}. \tag{7.45}$$

Подставляя (7.37), (7.45) в (7.43) и пренебрегая отличием $r$ от $z$, получим

$$\mathcal{E}_д = -ik_0\Delta z 2\pi N e x$$

или, с учетом (7.34),

$$\mathcal{E}_д = -ik_0\Delta z \frac{2\pi N e^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\mathcal{E}. \tag{7.46}$$

Итак выражения для комплексной амплитуды дополнительного поля, возникающего в результате взаимодействия света со средой, получены с помощью двух разных подходов. Формула (7.30) выведена феноменологически на основе представления о замедлении световой волны в среде, характеризуемом показателем преломления материала $n$. Формула (7.46) получена с помощью модели, в которой среда представляется как ансамбль гармонических осцилляторов. Если приравнять выражения (7.30) и (7.46), то получим формулу

$$n = 1 + \frac{2\pi N e^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}, \tag{7.47}$$

выражающую показатель преломления $n$ через микроскопические параметры среды: заряд $e$, массу $m$, собственную частоту $\omega_0$ элементарного осциллятора, а также число атомов в единице объема среды $N$ и частоту световой волны $\omega$. Согласно использованным приближениям, эта формула справедлива для прозрачных разреженных сред. Проделанный расчет показывает, что механизм замедления света в среде связан с взаимодействием (интерференцией) вторичных световых волн, испускаемых атомами среды.

**Неоднородный ансамбль осцилляторов.** Рассмотрим ансамбль, в котором отдельные осцилляторы имеют разные собственные частоты колебаний. Такой ансамбль можно назвать *неоднородным*. В реальных системах причинами неоднородности могут быть различие квантовых состояний атомов или

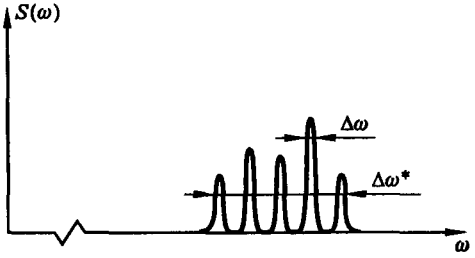



Рис. 7 11. Спектр колебаний неоднородного ансамбля осцилляторов

молекул, неоднородность изотопного или химического состава среды, хаотическое тепловое движение частиц и т. п. Нас будут интересовать особенности взаимодействия неоднородного ансамбля со световым полем.

Пусть индекс "$J$" нумерует различные резонансные частоты (типы осцилляторов) в неоднородном ансамбле. Основными характеристиками ансамбля являются набор частот колебаний $\{\omega_J\}$ и статистические веса осцилляторов $\{p_J\}$.

Уравнение движения осцилляторов под действием светового поля $E(t)$ запишем в виде

$$\ddot{x}_J + \Gamma\dot{x}_J + \omega_J^2 x_J = \frac{e}{m}E. \tag{7.48}$$

Обратное воздействие осцилляторов на световую волну (излучение, поглощение или рассеяние света) определяется суммарным дипольным моментом среды — ее *поляризацией* (см. ч. IV), которая в данном случае имеет вид

$$P = Ne\langle x\rangle, \qquad \langle x\rangle = \sum_J p_J x_J, \tag{7.49}$$

где $N$ — среднее число частиц в единице объема среды.

**Однородная и неоднородная ширина спектра.** На рис. 7.11 показан типичный спектр колебаний (оптического излучения, поглощения или рассеяния) неоднородного ансамбля. Подобную структуру имеет, например, спектр поглощения или комбинационного рассеяния света в молекулярных газах при не слишком высоких давлениях.

Спектр колебаний неоднородного ансамбля осцилляторов характеризуется двумя основными параметрами: однородной шириной $\Delta\omega$ и неоднородной шириной $\Delta\omega^*$. *Однородная ширина* характеризует спектр колебаний отдельно взятого осциллятора. *Неоднородная ширина* есть мера разброса осцилляторов по частотам (дисперсия или ширина полосы резонансных частот). Для неоднородного ансамбля характерна ситуация, когда

$$\Delta\omega^* \gg \Delta\omega \tag{7.50}$$

(рис. 7.11). Такое соотношение имеет место, в частности, между доплеровской (неоднородной) и естественной (однородной) шириной спектра газообразной среды.

Для модели, описываемой уравнениями (7.48), (7.49), можно записать

$$\Delta\omega = \Gamma, \qquad \Delta\omega^* = \sqrt{\langle\tilde{\omega}_J^2\rangle}, \tag{7.51}$$

где

$$\langle\tilde{\omega}_J^2\rangle = \sum_J p_J\tilde{\omega}_J^2, \tag{7.52}$$

$\langle\tilde{\omega}_J^2\rangle$ — дисперсия резонансных частот,

$$\tilde{\omega}_J = \omega_J - \overline{\omega}, \tag{7.53}$$

$\tilde{\omega}_J$ — частоты осцилляторов, отсчитываемые относительно средней по ансамблю частоты колебаний

$$\overline{\omega} = \sum_J p_J\omega_J. \tag{7.54}$$

Итак, однородно уширенной называется спектральная линия, которая образуется путем наложения спектральных линий отдельных осцилляторов, имеющих одинаковую собственную частоту колебаний $\omega_0$. В противоположность этому, неоднородно уширенной называется спектральная линия, представляющая собой суперпозицию спектральных линий осцилляторов, имеющих отличающиеся собственные частоты колебаний $\omega_J \neq \omega_0$. В первом случае формы спектральных линий отдельного осциллятора и всего ансамбля совпадают, во втором — отличаются, причем спектральная линия ансамбля оказывается, как правило, значительно шире линий отдельных осцилляторов. Примерами однородного уширения являются естественное (радиационное) и столкновительное уширения. Для данных типов уширения характерно то, что они присущи спектру каждой отдельной частицы. Примерами неоднородного уширения являются доплеровское, изотопическое, вращательное (в молекулярных газах) и т. п. Эти типы уширения присущи только спектру ансамбля частиц, а для отдельных осцилляторов они не имеют места.

**Возбуждение коротким импульсом. Релаксация энергии и дефазировка.** Предположим, что ансамбль осцилляторов возбужден коротким световым импульсом. В этом случае процесс перехода к равновесному состоянию можно охарактеризовать двумя разными временами — *временем релаксации энергии* $T_1$ и *временем затухания поляризации* $T_2$. Согласно модели (7.48), (7.49), поляризация среды может затухать не только из-за уменьшения энергии, но и вследствие относительного изменения фаз (*дефазировки*) осцилляторов. Поэтому в общем случае имеет место соотношение

$$T_1 \geq T_2. \tag{7.55}$$

В частности, возможно сильное неравенство

$$T_1 \gg T_2, \tag{7.56}$$

означающее, что затухание поляризации целиком обусловлено дефазировкой колебаний.

В рамках модели (7.48), (7.49) время релаксации энергии есть

$$T_1 = 1/\Gamma = 1/\Delta\omega. \tag{7.57}$$

Что же касается дефазировки колебаний, то ясно, что в неоднородном ансамбле она происходит тем быстрее, чем больше разброс осцилляторов по частотам. Используя понятие неоднородной ширины спектра, можно, следовательно, записать

$$T_2 \sim 1/\Delta\omega^*. \tag{7.58}$$

**Принципы частотной и временнóй спектроскопии.** Ансамбль осцилляторов, описываемый уравнениями (7.48),(7.49), представляет собой *линейную систему*. Как и всякая линейная система, он может быть охарактеризован частотным коэффициентом передачи (в терминах оптики — линейной оптической восприимчивостью) $\chi(\omega)$ и импульсной переходной функцией (функцией Грина) $h(t)$. *Частотный коэффициент передачи* характеризует отклик системы на гармоническое воздействие, в то время как *функция Грина* описывает ее реакцию на очень короткий возбуждающий импульс. В общем случае эти две характеристики линейной системы связаны между собой преобразованием Фурье:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega)\mathrm{e}^{\imath\omega t}d\omega, \tag{7.59}$$

$$\chi(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t)\mathrm{e}^{-\imath\omega t}dt, \tag{7.60}$$

В соответствии с *принципом причинности*, согласно которому отклик системы не может опережать воздействие на нее, функция Грина отлична от нуля лишь для положительных значений своего аргумента, а для отрицательных значений времени она равна нулю:

$$h(t < 0) = 0. \tag{7.61}$$

Поэтому формула (7.60) может быть записана в следующем виде:

$$\chi(\omega) = \int\limits_{0}^{\infty} h(t)\mathrm{e}^{-\imath\omega t}dt. \tag{7.62}$$

В настоящее время в оптике разработаны и применяются спектроскопические методики, которые позволяют измерять как дисперсию восприимчивости $\chi(\omega)$, так и импульсный отклик среды $h(t)$. Методы стационарной или частотной спектроскопии, в которых характеристики исследуемой среды (коэффициент поглощения, показатель преломления, интенсивность рассеяния) измеряются в зависимости от частоты излучения $\omega$, несут информацию о дисперсии восприимчивости $\chi(\omega)$. Идеальным прибором для частотной спектроскопии является лазер с перестраиваемой частотой излучения. Импульсные или нестационарные методы, появившиеся после создания лазеров, генерирующих сверхкороткие световые импульсы, дают возможность прямого измерения импульсного отклика среды $h(t)$. Поскольку функции $\chi(\omega)$ и $h(t)$ связаны между собой преобразованием Фурье, обе группы методов, в принципе, дают эквивалентную спектроскопическую информацию. На практике нестационарную спектроскопию применяют, как правило, для исследования узких спектральных линий.

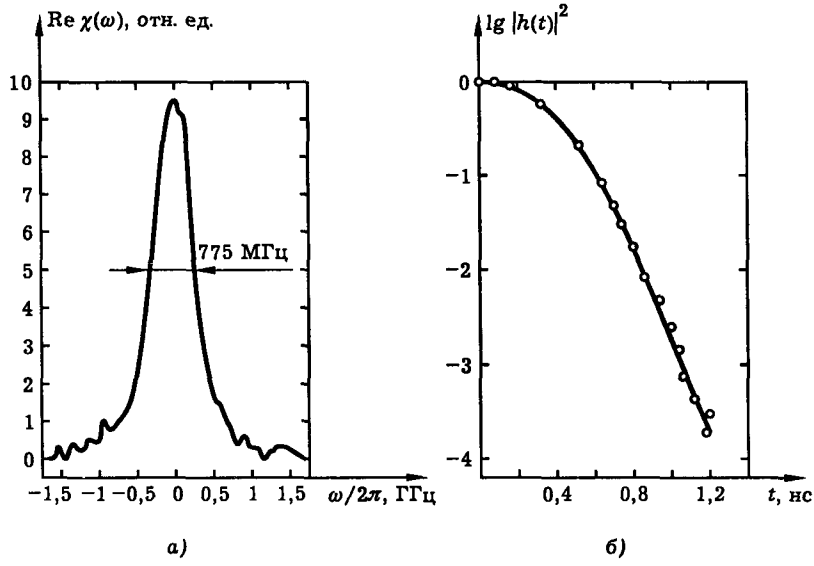



Рис. 7.12. Спектр колебаний молекул водорода, измеренный с помощью узкополосного перестраиваемого по частоте лазера [5]. Спектр получен при комнатной температуре и давлении водорода 200 торр. Ширина спектральной линии при этом давлении (775 МГц) близка к доплеровской. Средняя частота молекулярных колебаний водорода $\nu_0 = 4155$ см$^{-1}$ (*а*). Импульсный отклик (дефазировка) колебательно возбужденных молекул водорода, измеренный с помощью сверхкоротких лазерных импульсов [6]. Импульсный отклик получен при комнатной температуре и давлении водорода 100 торр. При этом давлении дефазировка молекулярных колебаний обусловлена преимущественно доплеровским механизмом. Время дефазировки (порядка $10^{-9}$ с) обратно пропорционально ширине спектральной линии (*б*)

Один из примеров показан на рис. 7.12. На рис. 7.12, *а* представлен спектр колебаний молекул водорода, измеренный с помощью узкополосного, перестраиваемого по частоте лазера. На рис. 7.12, *б* изображен импульсный отклик (дефазировка) колебательно возбужденных молекул водорода, измеренный с помощью сверхкоротких лазерных импульсов.

Частотная восприимчивость и импульсный отклик неоднородного ансамбля осцилляторов. В качестве примера вычислим функции $\chi(\omega)$ и $h(t)$ для модельной неоднородной системы, описываемой уравнениями (7.48), (7.49).

Обычно в оптике хорошо выполняются условия

$$\overline{\omega} \gg \Delta\omega^* \geq \Gamma, \tag{7.63}$$

т. е. средняя частота колебаний осцилляторов значительно превышает как однородное, так и неоднородное уширения. В этом случае целесообразно перейти от уравнения (7.48) к укороченному уравнению для амплитуды колебаний.

Предположим, что световое поле представляет собой узкополосный (квазигармонический) процесс, причем средняя частота поля настроена на центр неоднородно уширенной полосы:

$$E(t) = \frac{1}{2}\mathcal{E}(t)\exp(i\overline{\omega}t) + \text{к. с.} \tag{7.64}$$

Подставив (7.64) в (7.48), будем искать решение в виде

$$x_J(t) = \frac{1}{2}\tilde{x}_J(t)\exp(i\overline{\omega}t) + \text{к. с.} \tag{7.65}$$

В приближении медленно меняющихся амплитуд, означающем, что $\mathcal{E}(t)$ и $\tilde{x}_J(t)$ мало меняются за время порядка периода световых колебаний, получим

$$\dot{\tilde{x}}_J + \frac{\Gamma}{2}\tilde{x}_J = i\tilde{\omega}_J\tilde{x}_J + A(t), \tag{7.66}$$

где

$$\begin{aligned} A(t) &= \gamma\mathcal{E}(t), \\ \gamma &= \frac{e}{2im\overline{\omega}}. \end{aligned} \tag{7.67}$$

Подставив (7.65) в (7.49), получим

$$P = \frac{1}{2}\mathcal{P}\exp(i\overline{\omega}t) + \text{к. с.}, \tag{7.68}$$

где

$$\mathcal{P} = Ne\langle\tilde{x}\rangle, \qquad \langle\tilde{x}\rangle = \sum_J p_J\tilde{x}_J. \tag{7.69}$$

Итак для расчета поляризации среды необходимо вычислить среднюю амплитуду колебаний $\langle\tilde{x}\rangle$, определяемую формулами (7.66), (7.69).

Найдем решение уравнения (7.66). Применяя спектральный метод, разложим функцию $A(t)$ и $\tilde{x}_J(t)$ в интеграл Фурье:

$$A(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \tag{7.70}$$

$$\tilde{x}_J(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}_J(\omega)e^{i\omega t}d\omega. \tag{7.71}$$

Подставив (7.70), (7.71) в (7.66), находим связь между спектральными амплитудами

$$\tilde{x}_J(\omega) = \chi_J(\omega)A(\omega), \tag{7.72}$$

где

$$\chi_J(\omega) = \frac{1}{i\omega - i\tilde{\omega}_J + \Gamma/2}, \tag{7.73}$$

$\chi_J(\omega)$ — частотный коэффициент передачи (линейная оптическая поляризуемость) для данного осциллятора.

Подставив (7.72) в (7.71) и используя формулу обратного преобразования Фурье

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}dt, \tag{7.74}$$

вытекающую из (7.70), получим

$$\tilde{x}_J(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t-\theta)h_J(\theta)\,d\theta, \tag{7.75}$$

где

$$h_J(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \chi_J(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}d\omega, \tag{7.76}$$

$h_J(t)$ — функция Грина осциллятора, соответствующая частотному коэффициенту передачи $\chi_J(\omega)$. Наконец, подставив (7.73) в (7.76), найдем явное выражение для $h_J(t)$:

$$h_J(t) = \begin{cases} \exp(i\tilde{\omega}_J t - \frac{1}{2}\Gamma t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{7.77}$$

Заметим, что согласно (7.77),

$$h_J(0) = 1, \qquad h_J(\infty) = 0. \tag{7.78}$$

Формула (7.77) позволяет переписать (7.75) в виде

$$\tilde{x}_J(t) = \int_{0}^{\infty} A(t-\theta)h_J(\theta)\,d\theta. \tag{7.79}$$

Итак, решение уравнения (7.66) дается формулами (7.79), (7.77). Интеграл (7.79) носит название *интеграла Дюамеля*. Формула (7.79) выражает тот факт, что "отклик" линейной системы $\tilde{x}_J(t)$ есть линейный запаздывающий функционал относительно "входного сигнала" $A(t)$. С помощью (7.79) нетрудно выяснить физический смысл функции Грина $h_J(t)$. В самом деле, полагая

$$A(t) = \mathrm{const}\cdot\delta(t), \tag{7.80}$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция, получим

$$\tilde{x}_J(t) = \mathrm{const}\cdot h_J(t). \tag{7.81}$$

Таким образом, функция Грина характеризует отклик системы на очень короткий возбуждающий импульс. Подставив (7.79) в (7.66), нетрудно показать, что функция Грина удовлетворяет следующим уравнению и начальному условию:

$$\dot{h}_J + \frac{\Gamma}{2}h_J = i\tilde{\omega}_J h_J, \qquad h_J(0) = 1. \tag{7.82}$$

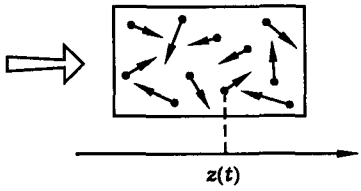



Рис 7 13 Механизм доплеровской дефазировки

Таким образом, функция Грина может быть найдена либо путем фурье-преобразования частотного коэффициента передачи, либо как решение однородного уравнения, описывающего свободные колебания линейной системы. Разумеется, оба подхода дают один и тот же результат.

Используя формулы (7.79), (7.69), среднюю амплитуду колебаний $\langle\tilde{x}\rangle$ также можно представить в виде интеграла Дюамеля

$$\langle\tilde{x}\rangle = \int_0^\infty A(t-\theta)h(\theta)\,d\theta, \tag{7.83}$$

где

$$h(t) = \sum_J p_J h_J(t), \tag{7.84}$$

$h(t)$ — функция Грина ансамбля осцилляторов. Из условия нормировки вероятностей $\sum_J p_J = 1$ и (7.82) следует, что в общем случае $h(0) = 1$. Кроме того, из (7.84) и (7.77) вытекает (7.61).

Итак, функция Грина рассматриваемого неоднородного ансамбля осцилляторов описывается формулами (7.84), (7.77). Частотная восприимчивость среды определяется формулой (7.62)

Пример: доплеровская дефазировка. Рассмотрим возбуждение газообразной атомарной или молекулярной среды коротким импульсом света

$$E(t) = \frac{1}{2}\mathcal{E}(t)e^{i(\omega t - kz)} + \text{к. с.} \tag{7.85}$$

Из-за того, что скорость света есть конечная величина, элементарные осцилляторы среды, расположенные в разных точках пространства $z$, начнут колебаться в разные моменты времени. Это приведет к тому, что непосредственно после прохождения светового импульса все осцилляторы будут совершать колебания на одной и той же частоте, но с разными фазами, причем изменение фазы колебаний в пространстве будет закономерно связано с длиной волны возбуждающего излучения ("волна когерентных колебаний"). Затем под влиянием хаотического теплового движения частиц начнется разрушение пространственно-сфазированной решетки осцилляторов (рис. 7.13) и вследствие этого — затухание оптической поляризации среды. Описанный механизм релаксации поляризации назовем *доплеровской дефазировкой.*

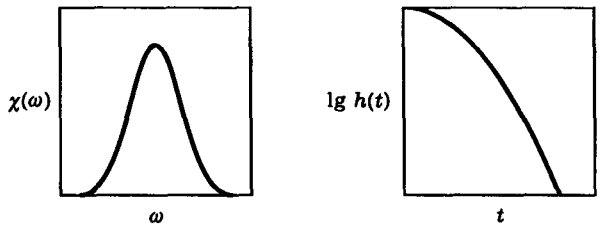



Рис. 7 14. Характеристики доплеровской дефазировки

Выведем выражения для частотной восприимчивости среды $\chi(\omega)$ и функции Грина $h(t)$, соответствующих доплеровской дефазировке. Для этого воспользуемся формулой.

$$\tilde{\omega} = kv_z \tag{7.86}$$

для доплеровского сдвига частоты осциллятора и функцией распределения тепловых скоростей

$$w(v_z) = \frac{1}{\sigma_v\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v_z^2}{2\sigma_v^2}\right). \tag{7.87}$$

В формулах (7.86), (7.87) $k$ — волновое число световой волны,

$$\sigma_v^2 = k_Б T/M, \tag{7.88}$$

$\sigma_v^2$ — дисперсия тепловых скоростей, $k_Б$ — постоянная Больцмана, $T$ — абсолютная температура газа, $M$ — масса осциллятора (атома или молекулы).

Пренебрегая затуханием колебаний, запишем функцию Грина отдельного осциллятора, обладающего скоростью $v_z$, в виде

$$h(v_z) = \exp(ikv_z t), \tag{7.89}$$

а функцию Грина для всего ансамбля как

$$h = \langle h(v_z)\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(v_z)w(v_z)dv_z. \tag{7.90}$$

Подставив (7.87), (7.89) в (7.90), найдем

$$h(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right), \tag{7.91}$$

$$\chi(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t)\mathrm{e}^{-\imath\omega t}dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}\exp(-\omega^2/2\sigma^2), \tag{7.92}$$

где

$$\sigma = k\sigma_v. \tag{7.93}$$

Итак, поставленная задача решена. Графики функций $\chi(\omega)$ и $h(t)$ показаны на рис. 7.14 (ср. с рис. 7.12). Полученные здесь результаты могут быть обобщены с учетом столкновений, изменяющих тепловые скорости, а также квантовые состояния и зависящие от них собственные частоты колебаний осцилляторов. Соответствующая теория развита в работах [6; 8; 9] (см. также лекцию 6).

## Литература


1. Физическая энциклопедия/Под ред. А. М. Прохорова. М., СЭ, 1988.
2. *Коротеев Н. И., Шумай И. Л.* Физика мощного лазерного излучения. — М.: Наука, 1991.
3. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Том 3. Излучение. Волны. Кванты. — М · Мир, 1967.
4. *Ахманов С. А., Коротеев Н. И.* Методы нелинейной оптики в спектроскопии рассеяния света. — М.: Наука, 1981
5. *Owyoung A*//Opt. Lett. 1978. V. 2. P. 91.
6. *Дьяков Ю. Е., Крикунов С. А., Магницкий С. А., Никитин С. Ю., Тункин В. Г.*//ЖЭТФ. 1983. Т. 84. С. 2013.
7. *Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981.
8. *Дьяков Ю. Е., Никитин С. Ю.* Задачи по статистической радиофизике и оптике. — М.: Изд-во МГУ, 1985.
9. *Kolomoitsev D. V., Nikitin S. Yu*//Proc. SPIE. 1991. V. 1402. P. 11.
10. *Лёвшин Л. В., Салецкий А. М.* Оптические методы исследования молекулярных систем. Молекулярная спектроскопия. — М.: Изд-во МГУ, 1994.

# Лекция 8

# Нелинейный осциллятор в световом поле

*Модель нелинейного осциллятора. Метод возмущений. Осциллятор с квадратичной нелинейностью. Генерация второй оптической гармоники. Осциллятор с кубичной нелинейностью. Зависимость частоты колебаний от амплитуды. Фазировка осциллятора внешним полем. Эффекты самовоздействия света: самофокусировка световых пучков, самомодуляция импульсов. Генерация третьей оптической гармоники. Нелинейный резонанс и гистерезис. Оптическая бистабильность. Параметрическая генерация света. Параметрический резонанс. Комбинационное рассеяние света. Модель нелинейно связанных осцилляторов. Неоднородный ансамбль нелинейных осцилляторов. Световое эхо.*

В современной оптике видное место занимают явления, связанные с *нелинейностью* отклика вещества на световое поле. Это такие явления как генерация оптических гармоник (например, удвоение или утроение частоты света), параметрические процессы (в частности, удвоение длины световой волны), вынужденное рассеяние света, самофокусировка световых пучков, самомодуляция импульсов и т. п. Для всех этих явлений, объединяемых понятием "нелинейная оптика", характерна сильная зависимость от интенсивности света; как правило, они становятся заметными лишь в мощных лазерных пучках.

Здесь мы рассмотрим элементарную картину явлений нелинейной оптики, пользуясь моделью *нелинейного осциллятора*. Более полное обсуждение этой темы дано в ч. IV.

**Модель нелинейного осциллятора.** В общем случае уравнение колебаний одномерного оптического осциллятора можно представить в виде

$$\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{e}{m}E, \tag{8.1}$$

где $e$ и $m$ — заряд и масса осциллятора, $\Gamma$ — коэффициент затухания колебаний, $U = U(x)$ — потенциальная энергия связанного заряда, характеризующая внутреннее силовое поле осциллятора (атома, молекулы), $E$ — электрическое поле световой волны.

Будем отсчитывать координату $x$ и энергию $U$ относительно значений, соответствующих положению равновесия осциллятора. Тогда для точки равновесия имеем: $x = 0$, $U = 0$, $U^{(1)}(0) = 0$. Равенство нулю производной $U^{(1)} = \partial U/\partial x$ имеет место в силу того, что в положении равновесия осциллятора его потенциальная энергия имеет экстремум (минимум). Разлагая функцию $U(x)$ в ряд по степеням $x$, получим

$$U(x) = \frac{x^2}{2!}U^{(2)}(0) + \frac{x^3}{3!}U^{(3)}(0) + \frac{x^4}{4!}U^{(4)}(0) + \dots,$$

или

$$U(x) = ax^2 + bx^3 + cx^4 + \dots. \tag{8.2}$$

В случае малых колебаний можно ограничиться в разложении (8.2) членом, квадратичным по $x$:

$$U(x) = ax^2. \tag{8.3}$$

Это приближение соответствует гармоническому осциллятору и линейному уравнению колебаний

$$\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m}E, \tag{8.4}$$

где $\omega_0$ — собственная частота малых колебаний осциллятора. Если же амплитуда колебаний становится большой, то необходимо учитывать в (8.2) слагаемые, пропорциональные $x^3$, $x^4$ и т. д. При этом уравнение колебаний (8.1) становится нелинейным и движение осциллятора приобретает новые качественные особенности. Из уравнения (8.1) видно, что проявления нелинейных эффектов следует ожидать, прежде всего, в сильных световых полях.

Конкретный вид нелинейности определяется типом осциллятора. Если функция $U(x)$ является четной, т. е. система обладает *центром симметрии,* то в низшем нелинейном приближении имеем

$$U(x) = ax^2 + cx^4, \tag{8.5}$$

и уравнение колебаний содержит кубичную нелинейность:

$$\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x - \beta x^3 = \frac{e}{m}E. \tag{8.6}$$

Для систем *без центра симметрии* учет первой нелинейной поправки дает

$$U(x) = ax^2 + bx^3 \tag{8.7}$$

и, соответственно, квадратично-нелинейное уравнение колебаний

$$\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \gamma x^2 = \frac{e}{m}E. \tag{8.8}$$

В уравнениях (8.6), (8.8) $\beta$ и $\gamma$ — параметры нелинейности.

Кубичной оптической нелинейностью обладают изотропные среды (газы, жидкости, стекла), квадратичная нелинейность характерна для анизотропных кристаллов (см. ч. IV).

Графики потенциальной энергии гармонического осциллятора, симметричного нелинейного осциллятора и ассиметричного осциллятора показаны на рис. 8.1.

**Метод возмущений.** Обычно точные решения нелинейных дифференциальных уравнений или вообще отсутствуют, или же настолько сложны, что ими трудно воспользоваться. Поэтому для анализа нелинейных систем часто используют различные *приближенные* методы. Одним из таких методов является *метод возмущений.*

Основная идея этого метода состоит в том, чтобы рассмотреть движение системы в *слабо нелинейном режиме,* т. е. в условиях, когда нелинейность проявляет себя лишь как *малое возмущение.* Например, в случае осциллятора можно рассмотреть колебания, амплитуда которых достаточно мала. Из физических соображений ясно, что колебания вблизи минимума потенциальной энергии должны мало отличаться от гармонических (рис. 8.1). Это дает возможность рассматривать нелинейные искажения колебаний как малую поправку, для которой может быть получено приближенное *линейное* уравнение.

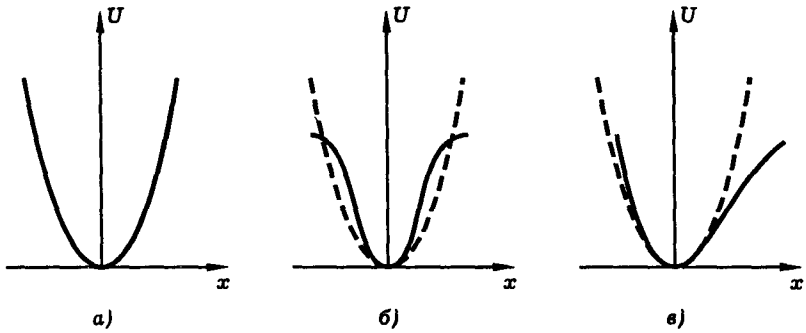



Рис. 8 1 Потенциальная энергия осцилляторов гармонического (*а*), симметричного нелинейного (*б*), асимметричного (*в*). На рис *б, в* пунктиром показана энергия в параболическом (гармоническом) приближении

**Осциллятор с квадратичной нелинейностью. Генерация второй оптической гармоники.** Обсуждение нелинейных явлений в оптике начнем с эффекта удвоения частоты света в кристалле — *генерации второй оптической гармоники.* Данный эффект состоит в том, что под действием мощного лазерного излучения в нелинейном кристалле возникает излучение на удвоенной частоте (рис. 8.2).

В лекционном опыте демонстрируется генерация второй гармоники излучения неодимового лазера в кристалле KDP. Исходное инфракрасное лазерное излучение ("накачка") имеет длину волны $\lambda_н = 1{,}06$ мкм. При фокусировке лазерного импульса в кристалл, на выходе последнего возникает яркая вспышка зеленого цвета ("гармоника"). При этом длина волны генерируемого излучения $\lambda_г = 0{,}53$ мкм оказывается ровно в два раза меньше длины волны исходного лазерного луча.

Механизм генерации второй гармоники можно пояснить с помощью модели квадратично-нелинейного осциллятора. Уравнение колебаний такого осциллятора имеет вид (8.8). Из этого уравнения видно, что если под действием светового поля $E$ осциллятор колеблется на частоте $\omega$, то *нелинейное* слагаемое $\gamma x^2$ совершает колебания на *удвоенной* частоте $2\omega$. Эти колебания и являются источником излучения второй гармоники.

**Осциллятор с кубичной нелинейностью. Зависимость частоты колебаний от амплитуды.** Важным свойством нелинейного осциллятора является зависимость частоты колебаний от амплитуды

$$\omega = \omega(A). \tag{8.9}$$

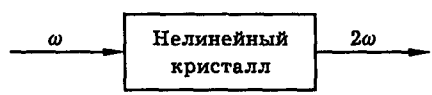



Рис. 8 2. Генерация второй оптической гармоники

Это свойство, присущее нелинейным осцилляторам различной природы, например математическому маятнику, называется *неизохронностью колебаний*. В оптике оно приводит к своеобразным эффектам самовоздействия световых волн: самофокусировке или самодефокусировке световых пучков, самомодуляции импульсов и т. п.

Рассмотрим неизохронность нелинейных колебаний на примере кубично-нелинейного осциллятора без затухания. Свободные колебания такого осциллятора описываются уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \beta x^3 = 0. \tag{8.10}$$

Применяя метод малых возмущений, потребуем, чтобы нелинейный член в этом уравнении был значительно меньше линейного. Для этого достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\beta x^2 \ll \omega_0^2, \tag{8.11}$$

т. е. чтобы амплитуда колебаний осциллятора была достаточно мала. Предположим, что в условиях слабого проявления нелинейности колебания осциллятора близки к гармоническим, однако их частота $\omega$ отличается от частоты бесконечно малых колебаний $\omega_0$. Обозначив амплитуду колебаний буквой $A$, ищем приближенное решение уравнения (8.10) в виде

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t), \tag{8.12}$$

где

$$x_1(t) = A\cos\omega t \tag{8.13}$$

и

$$|x_2| \ll |x_1|. \tag{8.14}$$

Выведем уравнение для $x_2$. Подставив (8.12) в (8.10), получим уравнение

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \omega_0^2(x_1 + x_2) - \beta(x_1 + x_2)^3 = 0.$$

Условие (8.14) позволяет линеаризовать это уравнение по $x_2$, сохранив в нем лишь слагаемые наинизшего порядка малости (линейные) по $x_2$:

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \omega_0^2(x_1 + x_2) - \beta(x_1^3 + 3x_1^2 x_2) = 0. \tag{8.15}$$

Используя (8.13), перепишем это уравнение следующим образом:

$$\ddot{x}_2 + (\omega_0^2 - 3\beta x_1^2)x_2 = (\omega^2 - \omega_0^2)x_1 + \beta x_1^3$$

или, с учетом (8.11), (8.12), (8.14), как

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = (\omega^2 - \omega_0^2)x_1 + \beta x_1^3. \tag{8.16}$$

Теперь подставим (8.13) в (8.16) и используем известную тригонометрическую формулу

$$\cos^3\alpha = \frac{1}{4}(3\cos\alpha + \cos 3\alpha).$$

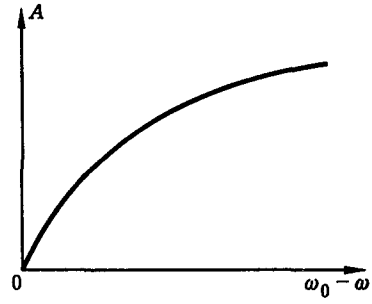



Рис. 8.3. Неизохронность колебаний нелинейного осциллятора: зависимость частоты колебаний $\omega$ от амплитуды колебаний $A$ ($\omega_0$ — частота бесконечно малых (линейных) колебаний)

Получим уравнение

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = (\omega^2 - \omega_0^2 + \frac{3}{4}\beta A^2)x_1 + \frac{1}{4}\beta A^3 \cos 3\omega t. \tag{8.17}$$

Итак, изменение во времени малой компоненты $x_2$ определяется линейным уравнением (8.17). Для того чтобы компонента $x_2$ не содержала осцилляций на частоте $\omega$ основного колебания $x_1$, потребуем, чтобы коэффициент при $x_1$ в (8.17) обратился в ноль. Это приводит к соотношению

$$\omega^2 - \omega_0^2 + \frac{3}{4}\beta A^2 = 0, \tag{8.18}$$

а уравнение для $x_2$ принимает вид

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = \frac{1}{4}\beta A^3 \cos 3\omega t. \tag{8.19}$$

Соотношение (8.18) определяет искомую зависимость частоты колебаний $\omega$ от амплитуды колебаний нелинейного осциллятора $A$. Принимая во внимание (8.11), эту зависимость можно приближенно представить в виде

$$\omega = \omega_0 - \varkappa A^2, \tag{8.20}$$

где

$$\varkappa = 3\beta/8\omega_0. \tag{8.21}$$

График зависимости $\omega(A)$ показан на рис. 8.3. Обратимся теперь к проявлению неизохронности колебаний в оптике.

**Фазировка осциллятора внешним полем.** Неизохронность нелинейного осциллятора в оптике приводит к тому, что частота осциллятора, возбужденного световым полем, зависит от интенсивности световой волны:

$$\omega = \omega(I). \tag{8.22}$$

Эта зависимость, в свою очередь, вызывает появление дополнительного фазового набега $\varphi = \int \omega(t)\,dt$, пропорционального интенсивности света:

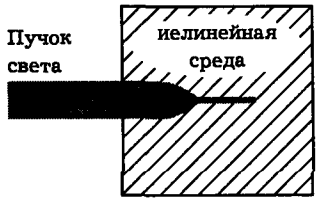



Рис. 8.4. Картина самофокусировки мощного светового пучка в нелинейной среде

$$\varphi = \varphi(I). \tag{8.23}$$

Таким образом, возникает возможность *фазировки* осциллятора внешним полем. Это обстоятельство принципиально отличает нелинейный осциллятор от обычного гармонического осциллятора.

Нелинейная фазировка осцилляторов приводит к эффектам самовоздействия мощных модулированных световых волн: самофокусировке пучков и самомодуляции импульсов.

**Эффекты самовоздействия света: самофокусировка световых пучков, самомодуляция импульсов.** В ограниченном световом пучке интенсивность света зависит от поперечной пространственной координаты:

$$I = I(\vec{r}). \tag{8.24}$$

Через механизм нелинейной фазировки (8.23) эта зависимость переносится на фазу колебаний осцилляторов

$$\varphi = \varphi(\vec{r}) \tag{8.25}$$

и, следовательно, на фазу испускаемых ими вторичных световых волн. В результате этого волновой фронт мощного светового пучка в среде *искривляется*, что может привести, в частности, к изменению поперечных размеров пучка, т. е. к явлениям типа *самофокусировки* или *самодефокусировки света* (рис. 8.4).

Разумеется, нелинейный фазовый набег может зависеть не только от пространственных координат, но и от времени. В коротком световом импульсе интенсивность излучения быстро меняется во времени:

$$I = I(t). \tag{8.26}$$

Вследствие (8.22), (8.23), (8.26) частота и фаза колебаний осцилляторов, возбуждаемых импульсом, а также частота и фаза испускаемого осцилляторами вторичного излучения оказываются промодулированными во времени:

$$\omega = \omega(t), \qquad \varphi = \varphi(t). \tag{8.27}$$

Таким образом, мощный световой импульс в нелинейной среде испытывает *самомодуляцию*. В некоторых случаях это может приводить к значительному уширению частотного спектра импульса. Подобный эффект имеет место, например, при распространении мощного короткого лазерного импульса в оптическом волокне (рис. 8.5).

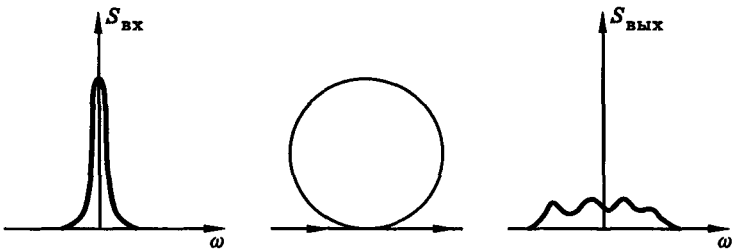



Рис. 8.5. Уширение спектра мощного светового импульса в оптическом волокне в результате эффекта самомодуляции

**Генерация третьей оптической гармоники.** Предположим, что кубично-нелинейный осциллятор находится в поле монохроматической световой волны, частота которой $\omega$ близка к собственной частоте осциллятора $\omega_0$. Согласно уравнению (8.6), резонансное поле возбудит вынужденные колебания осциллятора, которые в силу (8.12), (8.13), (8.19) будут содержать сильную спектральную компоненту на частоте возбуждающей световой волны ("накачки") $\omega$ и слабую спектральную компоненту на частоте $3\omega$. В спектре вторичного излучения осциллятора также будут присутствовать частоты $\omega$ и $3\omega$, следовательно, нелинейный осциллятор в поле световой волны будет генерировать *третью оптическую гармонику*. Можно ожидать, что генерация гармоники будет наиболее эффективной при использовании в качестве накачки мощного лазерного излучения.

Эксперименты подтверждают эти выводы. Генерация третьей оптической гармоники наблюдалась при использовании лазеров в различных газах. Наибольшая эффективность процесса достигнута в опытах с парами металлов. Так, при использовании паров рубидия и импульсов лазера на гранате с неодимом длительностью 30 пс и мощностью 300 МВт, удалось осуществить генерацию третьей гармоники на длине волны 354,7 нм с коэффициентом преобразования около 10% [6; 7]. Добавим в этой связи, что использование *высших оптических нелинейностей* открывает возможность генерации когерентного излучения в *вакуумном УФ* и *мягком рентгеновском* диапазонах. Так, путем генераций *седьмой* гармоники в гелии удалось получить когерентное излучение на длине волны 38 нм [8]. Эффективность генерации гармоники в этом случае составляла $10^{-6}$.

**Нелинейный резонанс и гистерезис. Оптическая бистабильность.** Предположим, что кубично-нелинейный осциллятор, описываемый уравнением

$$\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x - \beta x^3 = \frac{e}{m}E, \tag{8.28}$$

возбуждается монохроматическим световым полем

$$E = \frac{1}{2}\mathcal{E}e^{i\omega t} + \text{к.с.} \tag{8.29}$$

Вычислим зависимость амплитуды колебаний осциллятора $A$ от частоты поля $\omega$. Применяя к решению этой задачи метод возмущений, рассмотрим слабо нелинейный режим колебаний, т. е. будем считать, что амплитуда колебаний осциллятора достаточно мала, так что выполняется условие (8.11). Сначала

вычислим амплитуду вынужденных колебаний в линейном приближении. В этом случае уравнение колебаний есть

$$\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m}E. \tag{8.30}$$

Решение задачи (8.29), (8.30) хорошо известно (см. лекцию 7). Оно имеет вид

$$x = \frac{1}{2}\tilde{x}e^{\imath\omega t} + \text{к. с.}, \tag{8.31}$$

причем действительная амплитуда колебаний осциллятора $A = |\tilde{x}|$ в области частот вблизи резонанса ($\omega \approx \omega_0$) определяется формулой

$$4\omega_0^2 A^2 = \frac{B^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma^2/4}, \qquad B = \frac{e}{m}|\mathcal{E}|. \tag{8.32}$$

Итак, в линейном приближении резонансная кривая осциллятора $A(\omega)$ дается формулой (8.32). Теперь "подправим" эту формулу, приняв во внимание неизохронность нелинейного осциллятора. Согласно формуле (8.20), для этого следует заменить $\omega_0$ на $\omega_0 - \varkappa A^2$, где $\varkappa$ — параметр нелинейности осциллятора, определяемый формулой (8.21). В итоге получим соотношение

$$4\omega_0^2 A^2 = \frac{B^2}{(\omega_0 - \omega - \varkappa A^2)^2 + \Gamma^2/4}. \tag{8.33}$$

Формула (8.33) определяет искомую зависимость $A(\omega)$. Однако выразить эту зависимость в явном виде сложно, так как для этого необходимо решить кубическое уравнение относительно $A^2$. Вместо этого напишем простую формулу для обратной функции $\omega = \omega(A)$:

$$\omega_0 - \omega = \varkappa A^2 \pm \sqrt{\left(\frac{B}{2\omega_0 A}\right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}. \tag{8.34}$$

Задавая то или иное значение $A$, по этой формуле можно вычислить соответствующее значение $\omega$, и таким образом построить резонансную кривую $A = A(\omega)$. Результат представлен на рис. 8.6. Резонансная кривая имеет вид "клюва". Показанная пунктиром "скелетная" линия соответствует значениям параметров $\Gamma = B = 0$ и описывает неизохронность свободных колебаний нелинейного осциллятора (ср. рис. 8.3 и 8.6, *а*).

Важной особенностью нелинейного резонанса является существование области частот в которой возможны различные амплитуды колебаний (рис. 8.6, *а*). То, какая из них устанавливается в действительности, зависит от *предыстории*, а именно от того, какова была частота внешней силы (выше или ниже резонанса) в предшествующие моменты времени (рис. 8.6, *б*). Указанное свойство нелинейного осциллятора называется *гистерезисом*. Оно может быть положено в основу *бистабильных* оптических элементов, необходимых для создания полностью оптического компьютера.

Одна из возможных схем бистабильного оптического элемента показана на рис. 8.7, *а*. Данный элемент представляет собой оптический резонатор (пара зеркал), заполненный нелинейной средой. Если направить на эту систему пучок света, то оказывается, что при одной и той же интенсивности входного пучка $I_{\text{вх}}$ в некоторой области ее изменения интенсивность света на выходе

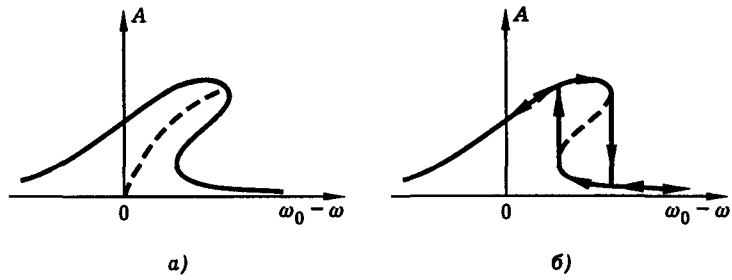



Рис 8 6 Нелинейный резонанс (*а*) и гистерезис (*б*)

$I_{\text{вых}}$ имеет два возможных значения (рис. 8.7, *б*). Иначе говоря, данная система обладает двумя устойчивыми состояниями с высоким и низким пропусканием света, которые могут быть использованы в качестве логических "0" и "1". Ясно, что бистабильный элемент является принципиально нелинейным, так как выходную интенсивность $I_{\text{вых}}$ нельзя получить путем умножения входной интенсивности $I_{\text{вх}}$ на постоянное число.

Оптическая бистабильность подобного типа впервые наблюдалась в 1974 г. Макколом с сотрудниками, которые использовали в своих опытах резонансную нелинейность паров натрия (рис. 8.7, *в*).

**Параметрическая генерация света. Параметрический резонанс.** Одним из важных эффектов нелинейной оптики является параметрическая генерация света. Этот эффект наблюдается в анизотропных кристаллах, обладающих квадратичной нелинейностью (KDP, ниобат лития и др.) и состоит в том, что под действием мощного лазерного излучения частоты $\omega_{\text{н}}$ ("накачки") в кристалле генерируется пара световых волн с частотами $\omega_1$ и $\omega_2$, сумма которых равна частоте накачки

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_{\text{н}} \tag{8.35}$$

(рис. 8.8). В частности, в *вырожденном режиме* параметрический генератор света генерирует *оптическую субгармонику,* частота которой равна половине частоты накачки:

$$\omega = \frac{1}{2}\omega_{\text{н}}. \tag{8.36}$$

При повороте кристалла относительно лазерного луча частоты генерируемых световых волн изменяются, что позволяет осуществлять плавную перестройку частоты излучения. Например, в кристалле ADP при накачке излучением с длиной волны 0,347 мкм удается осуществить плавную перестройку длины волны излучения в диапазоне от 450 до 1000 нм. При этом величина перестройки оказывается порядка 1000 см$^{-1}$ при повороте кристалла на один градус от точки вырожденного режима (рис. 8.9).

В настоящее время параметрические генераторы света используются как источники когерентного излучения, перестраиваемые в видимом и ИК диапазонах длин волн.

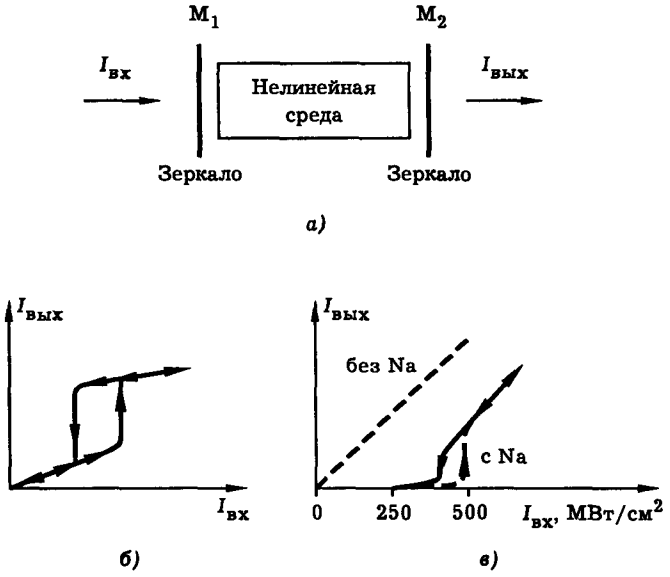



Рис 8 7 Оптическая бистабильность. Схема бистабильного элемента (*а*), бистабильная характеристика (*б*), оптическая бистабильность в парах натрия [11] (*в*)

Механизм параметрической генерации света можно пояснить с помощью модели *параметрического осциллятора*, т. е. осциллятора, параметр которого (частота) заданным образом изменяется во времени. Колебания такого осциллятора описываются уравнением

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0. \tag{8.37}$$

Основной физический эффект в подобной системе — *параметрический резонанс*. Это явление состоит в резком увеличении амплитуды колебаний при совпадении частоты изменения параметра $\omega_н$ ("частоты накачки") с удвоенной частотой собственных колебаний осциллятора $\omega_0$:

$$\omega_н = 2\omega_0. \tag{8.38}$$

Иначе говоря, при параметрическом резонансе колебания на частоте накачки эффективно преобразуются в колебания вдвое меньшей частоты

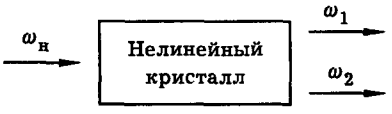



Рис 8 8 Схема параметрической генерации света

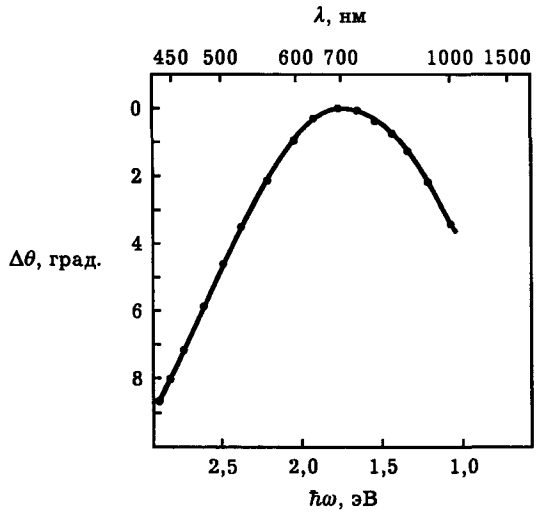



Рис. 8.9. Перестроечная кривая параметрического генератора света на кристалле ADP Длина волны накачки равна 0,347 мкм. Угол поворота кристалла $\Delta\theta$ измеряется относительно направления, соответствующего вырожденному режиму генерации [4]

$$\omega_0 = \frac{1}{2}\omega_{\text{н}}, \tag{8.39}$$

т. е. имеет место процесс, аналогичный вырожденной параметрической генерации света (ср. (8.39) и (8.36)).

Покажем, что при выполнении условия параметрического резонанса (8.38), колебания осциллятора начинают экспоненциально нарастать, т. е. возникает *параметрическая неустойчивость*.

Полагая

$$\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + h\cos 2\omega_0 t), \tag{8.40}$$

где $h$ — глубина модуляции, получим из (8.37) уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\cos 2\omega_0 t)x = 0. \tag{8.41}$$

Будем считать далее, что $h \ll 1$.

Ищем решение уравнения (8.41) в виде

$$x(t) = a(t)\cos\omega_0 t + b(t)\sin\omega_0 t, \tag{8.42}$$

где $a(t)$, $b(t)$ — медленно меняющиеся амплитуды. Подставляя (8.42) в (8.41) и пренебрегая величинами $\ddot{a}$, $\ddot{b}$, получаем

$$-2\dot{a}\sin\omega_0 t + 2\dot{b}\cos\omega_0 t + \omega_0 h(a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t)\cos 2\omega_0 t = 0.$$

Пользуясь формулами

$$\cos\omega_0 t\cos 2\omega_0 t = \frac{1}{2}(\cos\omega_0 t + \cos 3\omega_0 t),$$

$$\sin\omega_0 t\cos 2\omega_0 t = \frac{1}{2}(-\sin\omega_0 t + \sin 3\omega_0 t),$$

и опуская "нерезонансные" члены, осциллирующие с частотой $3\omega_0$, получаем

$$-(2\dot{a} + \omega_0 hb/2)\sin\omega_0 t + (2\dot{b} + \omega_0 ha/2)\cos\omega_0 t = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при $\sin\omega_0 t$ и $\cos\omega_0 t$, приходим к уравнениям

$$2\dot{a} + \omega_0 hb/2 = 0, \qquad 2\dot{b} + \omega_0 ha/2 = 0. \tag{8.43}$$

Решение системы (8.43) имеет вид

$$a(t) = c_1 e^{\gamma t} + c_2 e^{-\gamma t}, \qquad b(t) = -c_1 e^{\gamma t} + c_2 e^{-\gamma t}, \tag{8.44}$$

где

$$\gamma = \omega_0 h/4, \tag{8.45}$$

$\gamma$ — *инкремент параметрического усиления*; $c_1$ и $c_2$ — постоянные, зависящие от начальных условий. В частности, если

$$x(t=0) = x_0, \qquad \dot{x}(t=0) = 0, \tag{8.46}$$

то $c_1 = c_2 = x_0/2$ и

$$x(t) = x_0(\operatorname{ch}\gamma t\cos\omega_0 t - \operatorname{sh}\gamma t\sin\omega_0 t).$$

На достаточно больших временах ($\gamma t \gg 1$) справедлива приближенная формула

$$x(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \pi/4),$$

где

$$A(t) = \frac{x_0}{\sqrt{2}}e^{\gamma t}.$$

Таким образом, в условиях параметрического резонанса амплитуда колебаний осциллятора экспоненциально нарастает во времени. При этом инкремент параметрического усиления определяется формулой (8.45).

Эффект параметрической раскачки колебаний легко продемонстрировать с помощью простых механических систем, например, с помощью маятника или качелей (рис. 8.10).

**Комбинационное рассеяние света. Модель нелинейно связанных осцилляторов.** Явление *комбинационного рассеяния света* было открыто в 1928 г. независимо Г. С. Ландсбергом и Л. И. Мандельштамом в России и Ч. В. Раманом и К. С. Кришнаном в Индии. Ландсберг и Мандельштам обнаружили, что при облучении кристалла кварца светом ртутной лампы каждой спектральной линии падающего света в рассеянном свете соответствует не одна линия той же частоты, но еще некоторое количество новых спектральных линий ("сателлитов").

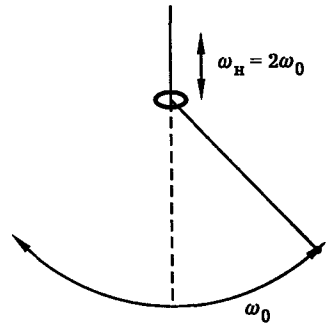



Рис. 8.10. Демонстрация парамерического резонанса с помощью математического маятника

Схема эксперимента Ландсберга и Мандельштама, а также полученные ими экспериментальные данные показаны на рис. 8.11. Следует отметить, что новые спектральные линии в этих опытах были чрезвычайно слабыми; для их фотографической регистрации требовалось время экспозиции около 100 ч. На спектрограммах света, рассеянного кварцем, было обнаружено 72 новых (т. е. не содержащихся в ртутном спектре) линий, которые были подразделены на пять систем, так что внутри каждой системы разность частоты сателлита и основной линии постоянна по абсолютной величине. Касаясь механизма явления, Ландсберг и Мандельштам высказали идею о том, что появление новых спектральных линий в рассеянном свете вызвано *модуляцией* падающего излучения собственными колебаниями кристаллической решетки кварца.

В 1962 г. Вудбери и Нга обнаружили, что рубиновый лазер, в резонатор которого была вставлена кювета с нитробензолом, в дополнение к обычному излучению рубина с длиной волны 6943 Å испускал интенсивное излучение с длиной волны 7670 Å. Когда между зеркалами резонатора лазера помещались другие жидкости, наблюдалось дополнительное излучение света на других частотах. Во всех случаях новые частоты были смещены по отношению к частоте излучения рубина на величину, равную колебательной частоте молекул жидкости. Правильное объяснение этого эффекта было дано Хеллуортом, который интерпретировал его как *вынужденное* комбинационное рассеяние света.

Процесс вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР) света относится к классу нелинейно-оптических эффектов, в которых мощная световая волна индуцирует элементарные возбуждения в среде (оптические и акустические фононы, поляритоны, температурные волны и т. п.) и когерентным образом рассеивается на них. При ВКР речь идет о когерентном возбуждении оптических фононов; данный процесс есть вынужденный аналог спонтанного комбинационного рассеяния (СКР), при котором свет рассеивается на хаотических тепловых колебаниях среды.

В рамках классической теории процесс ВКР можно описать с помощью модели *нелинейно связанных осцилляторов*. Рассмотрим изотропную среду, например жидкость. Обозначим через $y$ нормальную координату колебаний атомов в молекуле, а через $x$ — нормальную координату колебаний электронов. В линейном приближении колебания атомов и определяющие оптическую поляризацию среды электронные колебания совершаются независимо друг от друга. Иная ситуация имеет место, если учесть нелинейные члены в выражении для

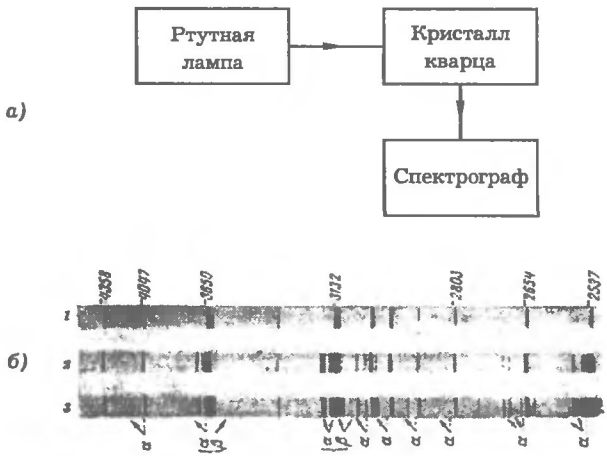



Рис. 8.11. Наблюдение комбинационного рассеяния света в кварце [12; 13]. Схема эксперимента (*а*). Спектр излучения ртутной лампы (спектр сравнения) и спектры света, рассеянного в кварце (*б*): 1 — спектр сравнения, 2 и 3 — спектры рассеянного света, снятые при 20 °C и 210 °C (экспозиция 105 ч). $\alpha$ — красные сателлиты, $\beta$ — фиолетовые сателлиты

потенциальной энергии молекулы. При учете одного из младших нелинейных членов потенциальная энергия записывается в виде

$$U(x,y) = \frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{2}\beta y^2 + \frac{1}{2}\gamma x^2 y. \tag{8.47}$$

Здесь $\alpha$ и $\beta$ — коэффициенты упругости связей в молекуле, коэффициент $\gamma$ описывает нелинейное взаимодействие электронов и ядер. Именно это взаимодействие, взаимовлияние электронных и ядерных колебаний лежит в основе явления ВКР.

В соответствии с (8.47), уравнения движения электронов и ядер имеют вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m}E - \frac{\gamma}{m}xy, \tag{8.48}$$

$$\ddot{y} + \Omega^2 y = -\frac{\gamma}{2M}x^2. \tag{8.49}$$

Здесь $M$ и $m$ — приведенные массы атомного и электронного осцилляторов, $\omega_0 = \sqrt{\alpha/m}$ — собственная частота колебаний электронов, $\Omega = \sqrt{\beta/M}$ — собственная частота колебаний ядер в молекуле, $e$ — заряд электрона, $E$ — электрическое поле световых волн. Для реальных молекул частоты колебаний имеют следующие порядки величин: $\omega_0 \simeq 10^{15}$ Гц, $\Omega \simeq 10^{13}$ Гц.

В приближении малых возмущений нелинейные слагаемые в уравнениях (8.48), (8.49) можно рассматривать как дополнительные вынуждающие силы, действующие на электронный и молекулярный осцилляторы.

Пусть на молекулу воздействует световое поле частоты $\omega$. В соответствии с уравнением (8.48) свет возбуждает электронные колебания на той же самой частоте. Предположим далее, что одновременно происходят коле-

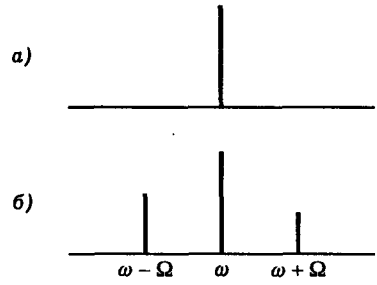



Рис. 8.12. Явление комбинационного рассеяния света. Спектры возбуждающего (*а*) и рассеянного (*б*) излучений ($\Omega$ — частота молекулярных колебаний среды)

бания ядер в молекуле ("молекулярные колебания") на частоте $\Omega$ (это могут быть, например, тепловые колебания). В этом случае $x \sim \cos\omega t$, $y \sim \cos\Omega t$, $xy \sim \cos(\omega - \Omega)t + \cos(\omega + \Omega)t$. Таким образом, вследствие связи электронных и ядерных движений в молекуле, на электронный осциллятор действует эффективная вынуждающая сила, пропорциональная произведению колебательных координат $xy$ и содержащая колебания на *комбинационных* частотах $\omega - \Omega$ и $\omega + \Omega$. Иначе говоря, колебания ядер *модулируют* электронные колебания в молекуле. В результате молекула переизлучает свет не только на частоте $\omega$ действующей на нее световой волны, но и на новых — "комбинационных" — частотах $\omega \pm \Omega$, где $\Omega$ — частота собственных молекулярных колебаний среды. В этом и состоит объяснение явления комбинационного рассеяния света (рис. 8.12).

Обратимся теперь к уравнению (8.49), описывающему колебания ядер в молекуле. Нетрудно видеть, что если электронная координата $x$ содержит колебания на частоте $\omega$, возбуждаемые исходной световой волной ("накачкой"), а также колебания на частоте $\omega - \Omega$, возбуждаемые рассеянным излучением ("стоксовой компонентой"), то величина $x^2$ содержит колебания на частоте собственных колебаний молекулы $\Omega$. Таким образом, в результате комбинационного рассеяния света возникает *резонансная сила,* возбуждающая молекулярные колебания. Если эта сила достаточно велика, то в системе возникает *положительная обратная связь*: рассеяние света усиливает молекулярные колебания, а молекулярные колебания усиливают рассеяние света. В результате система самовозбуждается и переходит в режим *вынужденного* рассеяния, при котором интенсивность рассеяния скачком возрастает на много порядков и становится соизмеримой с интенсивностью лазерного луча.

Нетрудно показать, что пара световых волн (накачка и стоксова компонента ВКР) не только резонансно раскачивают молекулярные колебания, но и *фазируют* их в большом объеме среды. Иначе говоря, при ВКР возникает волна *когерентных* молекулярных колебаний. Эта волна наведена световым полем и эффективно взаимодействует с ним, приводя к усилению излучения на стоксовой частоте. Таким образом, благодаря нелинейности, в ансамбле классических осцилляторов возникают принципиально новые эффекты: *фазировка колебаний* осцилляторов вследствие их взаимодействия через поле излучения и *усиление света.* В этом смысле ансамбль нелинейных классических осцилляторов близок к ансамблю квантовых осцилляторов (см. ниже), обеспечивающему когерентность и усиление света в лазере.

На практике вынужденное рассеяние может выступать как причина неустойчивости мощной световой волны, например при распространении в оптическом волокне или в термоядерной плазме. Важное применение вынужденного рассеяния — управление параметрами лазерного излучения: преобразование частоты, сокращение длительности (компрессия) импульсов, улучшение пространственной когерентности. Так, комбинационные генераторы на сжатом водороде и жидком азоте позволяют осуществлять ВКР-преобразование лазерного излучения с квантовой эффективностью до 90%. При вынужденном рассеянии в направлении назад возможна эффективная компрессия лазерных импульсов с одновременным повышением их пиковой мощности. Практически таким образом удается сжимать импульсы в 10–20 раз, а при использовании нескольких каскадов компрессии — в 100–1000 раз.

Вынужденное рассеяние света можно использовать для обращения волнового фронта излучения. Другая возможность — исправление волнового фронта. В этом случае речь идет о преобразовании энергии частично когерентного лазерного излучения в энергию полностью когерентного светового пучка на другой (стоксовой) частоте. Это метод можно назвать "ВКР-коррекцией волнового фронта". Эксперименты показывают, что данный метод позволяет значительно (в 100 и более раз) уменьшить угловую расходимость излучения. При этом энергетическая эффективность преобразования составляет обычно порядка 50%.

**Неоднородный ансамбль нелинейных осцилляторов. Световое эхо.** Рассмотрим ансамбль нелинейных осцилляторов, в котором отдельные осцилляторы имеют разные собственные частоты колебаний. Такой ансамбль называется неоднородным. Здесь мы обсудим своеобразное оптическое явление, возникающее в неоднородном нелинейном ансамбле — явление *светового эха.*

Явление эха состоит в излучении средой светового импульса через некоторое время после того, как она была возбуждена парой коротких лазерных импульсов, разнесенных по времени (рис. 8.13). Световое эхо было предсказано в 1963 г. Копвиллемом и Нагибаровым [17] и позднее экспериментально обнаружено в рубине Кенитом, Абеллой и Хартманом [18]. Поскольку сигналы эха излучаются средой через некоторое время после импульсов возбуждения, в ряде работ была высказана идея применения явления светового эха в устройствах записи информации.

Для того чтобы выяснить механизм возникновения эха, рассмотрим динамику кубично-нелинейного осциллятора, возбужденного парой коротких световых импульсов. Пренебрегая затуханием колебаний, запишем уравнение движения осциллятора в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \gamma x^3 = F(t). \tag{8.50}$$

Будем считать амплитуду колебаний достаточно малой и воспользуемся методом возмущений. Приближенное решение уравнения (8.50) ищем в виде

$$x = x_{\text{л}} + x_{\text{нл}}, \tag{8.51}$$

где $x_{\text{л}}$ есть решение линейного уравнения

$$\ddot{x}_{\text{л}} + \omega_0^2 x_{\text{л}} = F(t), \tag{8.52}$$

а $x_{\text{нл}}$ — малая нелинейная добавка. Подставив (8.51) в (8.50), получаем для $x_{\text{нл}}$ приближенное линейное уравнение

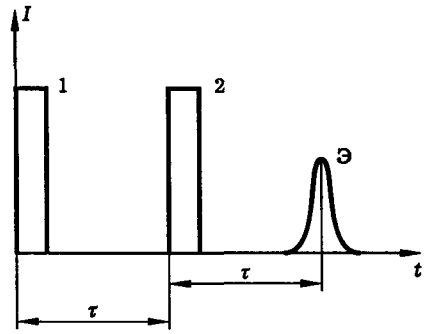



Рис. 8 13. Явление светового эха: нелинейная среда последовательно возбуждается парой коротких лазерных импульсов ("1" и "2") и спустя время, равное задержке между импульсами, самопроизвольно испускает импульс света — сигнал эха ("Э")

$$\ddot{x}_{\text{нл}} + \omega_0^2 x_{\text{нл}} = \gamma x_{\text{л}}^3. \tag{8.53}$$

Теперь предположим, что осциллятор возбуждается последовательно двумя короткими световыми импульсами, следующими друг за другом с интервалом времени $\tau$. В этом случае

$$F(t) = f_1(t) + f_2(t - \tau), \tag{8.54}$$

где функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ описывают формы импульсов. В пределе бесконечно коротких импульсов можно считать $f(t) \sim \delta(t)$, где $\delta(t)$ — дельта-функция.

В силу линейности уравнения (8.52), решение задачи (8.52), (8.54) можно представить в виде суммы откликов на каждый импульс в отдельности. Например, в случае бесконечно коротких импульсов, используя известное выражение для функции Грина уравнения (8.52) (см. дополнение 16), получим

$$x_{\text{л}}(t) = a_1 \sin\omega_0 t + a_2 \sin\omega_0(t - \tau), \tag{8.55}$$

где $a_1$ и $a_2$ — постоянные, пропорциональные энергиям возбуждающих импульсов. Выражение (8.55) входит в (8.53) нелинейно, поэтому фазы колебаний (8.55) войдут в него в различных комбинациях. Опуская слагаемые с частотами $3\omega_0$, получим

$$x_{\text{л}}^3 = \frac{3}{4}(a_1^3 + 2a_1a_2^2)\sin\omega_0 t + \frac{3}{4}(a_2^3 + 2a_1^2a_2)\sin\omega_0(t - \tau) +$$
$$+ \frac{3}{4}a_1a_2^2 \sin\omega_0(t - 2\tau) + \frac{3}{4}a_1^2a_2 \sin\omega_0(t + \tau). \tag{8.56}$$

Существуют моменты времени, в которые фазы колебаний (8.56) имеют строго определенные значения независимо от величины собственной частоты колебаний нелинейного осциллятора $\omega_0$. Это моменты времени

$$t = 0, \qquad t = \tau, \qquad t = 2\tau. \tag{8.57}$$

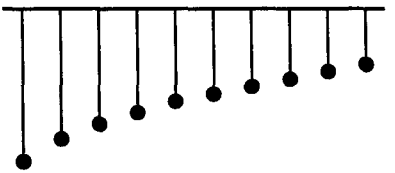


Рис 8.14. Механическая модель для демонстрации явления осцилляторного эха ("Маятники Чеботаева")

Если теперь обратиться к неоднородному ансамблю осцилляторов, в котором отдельные осцилляторы имеют разные собственные частоты колебаний, то из сказанного можно сделать вывод о том, что при возбуждении ансамбля двумя короткими импульсами света, в моменты времени, определяемые формулами (8.57), происходит *фазировка* (синхронизация) слабых нелинейных составляющих колебаний $x_{\text{нл}}$ для *всех осцилляторов* ансамбля. Это приводит к формированию импульсов макроскопической оптической поляризации (суммарного дипольного момента) среды и испусканию импульсов света в соответствующие моменты времени. Последний из этих импульсов, испускаемый в момент времени $t = 2\tau$, представляет собой сигнал светового эха (рис. 8.13).

Данный сигнал называется сигналом *первичного* эха. Его существование можно продемонстрировать на модели механических осцилляторов (маятников — см. рис. 8.14), как это было сделано в работе [19].

Аналогичным образом можно показать, что при возбуждении тремя короткими импульсами света, посылаемыми в моменты времени $t = 0$, $t = \tau$, $t = \tau + T$, среда испускает световой импульс в момент времени $t = T + 2\tau$, называемый сигналом *стимулированного* эха (рис. 8.15). Стимулированное эхо можно использовать в устройствах записи информации. В самом деле, поскольку времена $\tau$ и $T$ независимы, можно считать, что первые два импульса *записывают* информацию в системе осцилляторов, затем она *хранится* там в течении времени $T$, а третий импульс *считывает* информацию, вызывая сигнал эха.

В 1979 г. были проведены эксперименты по изучению стимулированного светового эха в кристаллах $LaF_3{:}Pr^{3+}$ [20; 21] и было обнаружено, что в этом кристалле временнóй интервал между вторым и третьим возбуждающими импульсами может достигать нескольких минут и даже нескольких десятков ми-

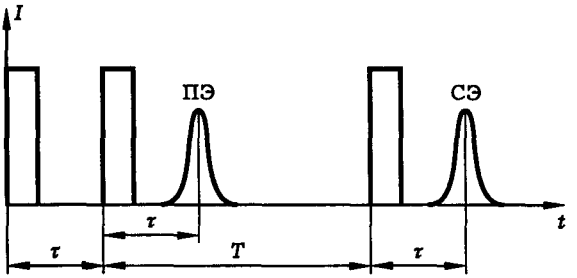



Рис. 8.15. Возбуждение сигналов первичного (ПЭ) и стимулированного (СЭ) эха

нут при наложении внешнего магнитного поля. Этот эффект получил название *долгоживущего фотонного эха*. Была высказана идея создания на его основе оптического запоминающего устройства [16].

Резюмируя, подчеркнем еще раз наиболее важные для оптики особенности нелинейных осцилляторов. Это — чувствительность фазы колебаний к интенсивности возбуждающей световой волны и вытекающая отсюда возможность фазировки осцилляторов световым полем, переизлучение света на оптических гармониках и комбинационных частотах, возможность усиления световой волны, взаимодействующей с ансамблем осцилляторов. Именно эти свойства нелинейных элементарных осцилляторов лежат в основе многообразных эффектов и явлений нелинейной оптики.

## Литература


1. *Ахманов С. А., Хохлов Р. В.* Проблемы нелинейной оптики. — М.: Изд-во АН СССР, 1965.
2. *Бломберген Н.* Нелинейная оптика. — М.. Мир, 1966.
3. Квантовая электроника. Маленькая энциклопедия/Под ред. М. Е. Жаботинского — М., СЭ, 1969.
4. *Шен И. Р.* Принципы нелинейной оптики. — М.: Наука, 1989.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика. — М.: Наука, 1965.
6. *Bloom D. M., Bekkers G. W., Young J. F., Harris S. E*//Appl. Phys. Lett. 1975. V. 26. P. 687.
7. *Bloom D. M., Young J. F., Harris S. E*//Appl. Phys. Lett. 1975. V. 27. P. 390.
8. *Райнтжес Дж.* Нелинейные оптические параметрические процессы в жидкостях и газах — М.: Мир, 1987.
9. *Ахманов С. А.* Обработка информации и нелинейная физика: от видеоимпульсов к волнам и структурам//Новые физические принципы оптической обработки информации/Под ред. С. А. Ахманова и М. А. Воронцова. — М.: Наука, 1990.
10. *Гиббс Х.* Оптическая бистабильность. — М.: Мир, 1988.
11. *McCall S. L., Gibbs H. M., Churchill G. G., Venkateson T. N. C.* Optical transition and bistability//Bull. Am. Phys. Soc. 1975. V. 20. P. 636.
12 *Landsberg G. S., Mandelstam L. I*//Zeitschrift für Physik, 1928. V. 50. P. 769.
13. *Ландсберг Г. С.* Избранные труды. — М.: Изд-во АН СССР, 1958.
14. *Зельдович Б. Я., Пилипецкий Н. Ф., Шкунов В. В.* Обращение волнового фронта. — М.: Наука, 1985.
15. *Дьяков Ю. Е., Никитин С. Ю.* Вынужденное комбинационное рассеяние лазерного излучения с широким угловым спектром (обзор)//Квантовая электроника. 1987. Т. 14. С. 1925.
16. *Ахмедиев Н. Н., Самарцев В. В.* Долгоживущее оптическое эхо и оптическая память//Новые физические принципы оптической обработки информации/Под ред. С. А. Ахманова и М. А. Воронцова. — М.: Наука, 1990.
17. *Копвиллем У. Х., Нагибаров В. Р*//Физика металлов и металловедение. 1963. Т. 15. С. 313.
18. *Kurnit N. A., Abella I. D., Hartmann S. R*//Phys. Rev. Lett. 1964. V. 6. P. 567.
19. *Chebotaev V. P., Dubetski B. Ya*//Appl. Phys. B. 1983. V. 31. P. 45.
20. *Chen Y. C., Chiang K., Hartmann S. R*//Opt. Comm. 1979. V. 29. P. 181.
21. *Morsink J.B.W., Wiersma D.A*//Chem. Phys. Lett. 1979. V. 65. P. 105
22. *Дмитриев В. Г., Тарасов Л. В.* Прикладная нелинейная оптика. генерация второй гармоники и параметрическая генерация света. — М.: Радио и связь, 1982.
23 *Платоненко В. Т., Хохлов Р. В.* О механизме работы комбинационного лазера//ЖЭТФ. 1964. Т. 46, вып. 2. С. 555.

# Лекция 9

# Тепловое излучение

*Основные опытные факты. Методы исследования теплового излучения. Излучательная и поглощательная способность тел. Равновесное тепловое излучение. Закон Кирхгофа. Спектральная плотность равновесного теплового излучения. Термодинамика равновесного теплового излучения. Формула Рэлея–Джинса "Ультрафиолетовая катастрофа". Формула Планка Необходимость квантовых представлений Законы теплового излучения Закон Стефана–Больцмана. Закон смещения Вина. Примеры.*

Представлены результаты экспериментальных исследований и основы теории теплового излучения. Обсуждается вопрос о том, как на основе исследований теплового излучения возникло представление о кванте.

Тепловое излучение — это свет, испускаемый нагретым телом. Солнечный свет, пламя свечи, свет лампы накаливания, электрическая дуга, инфракрасное излучение человеческого тела — все это примеры теплового излучения. Тепловое излучение используется в различных источниках света. Оно существенно влияет на тепловой баланс во многих физических системах, в частности определяет среднюю температуру поверхности Земли. Теория этого вида излучения важна для физики, поскольку, с одной стороны, тепловое излучение универсально, его природа не связана ни с конкретным материалом, ни даже с устройством атома, а, с другой стороны, происхождение теплового излучения обусловлено фундаментальной термодинамикой света и вещества, и свойства этого излучения прямо указывают на тот факт, что атомы способны излучать и поглощать свет данной частоты не в любых количествах, а лишь строго определенными дискретными порциями (квантами)

**Основные опытные факты. Методы исследования теплового излучения.** Из опыта известно, что сильно нагретые тела начинают светиться. При увеличении температуры тела яркость свечения возрастает, а его цвет изменяется от темно-красного до белого. Подобные закономерности можно заметить, наблюдая, например, нагревание куска металла в кузнечном горне, нагревание спирали электроплиты или нити лампы накаливания

Характерной чертой теплового излучения является широкий сплошной спектр. В этом можно убедиться с помощью опыта, схема которого показана на рис. 9.1. Излучение электрической дуги (свет дугового фонаря) направляется на стеклянную призму, которая разлагает его в спектр. Спектр наблюдается в затемненной аудитории на экране. Он представляет собой яркую радужную полосу и содержит красный, желтый, зеленый, голубой цвета, переходы между которыми непрерывны. С помощью термопары, которую экспериментатор перемещает вдоль радужной полоски, и стрелочного прибора можно измерить распределение энергии излучения по спектру. Такие измерения показывают, что в пределах видимой части спектра интенсивность излучения монотонно возрастает по мере увеличения длины световой волны, максимум интенсивности излучения дуги лежит в инфракрасной области спектра.

Результаты измерений можно представить в виде графика зависимости интенсивности излучения от длины волны или частоты света.

На рис. 9.2 показаны спектры излучения нагретых тел, измеренные Люммером и Прингсгеймом (1899 г.). Графики отчетливо демонстрируют увеличение

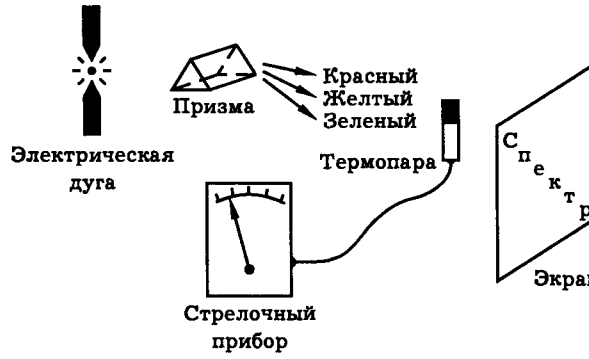



Рис. 9.1 Наблюдение спектра излучения электрической дуги

полной мощности теплового излучения и смещение максимума спектральной плотности в коротковолновую область спектра при повышении температуры излучающего тела. На рубеже XIX — XX веков перед физикой встал вопрос: как объяснить спектр теплового излучения? Исследование этой проблемы привело к появлению квантовых представлений.

**Излучательная и поглощательная способность тел.** Разные тела поразному поглощают свет. Черные тела сильно поглощают свет, белые — слабо. В подтверждение этого можно привести много примеров. Так, вода в бочке, выставленной на солнце, нагреется быстрее, если бочка выкрашена в черный цвет.

Для количественной характеристики поглощательной способности тела введем величину

$$\alpha = \frac{W_{\text{погл}}}{W_{\text{пад}}}. \tag{9.1}$$

Здесь $W_{\text{пад}}$ — энергия падающего на тело света, $W_{\text{погл}}$ — энергия света, поглощенного телом. Величину $\alpha$ будем называть "поглощательной способностью" тела. Поглощательную способность можно измерить экспериментально по нагреванию тела.

Для непрозрачных тел сумма энергий поглощенного и отраженного света равна энергии падающего светового потока (рис. 9.3):

$$W_{\text{пад}} = W_{\text{отр}} + W_{\text{погл}},$$

поэтому безразмерная величина $\alpha$ лежит в пределах

$$0 \leq \alpha \leq 1.$$

Предельные случаи можно назвать так: $\alpha = 0$ — "абсолютно белое тело"; $\alpha = 1$ — "абсолютно черное тело". Хорошим примером белого тела является мел, черного — уголь или сажа.

Опыт показывает, что поглощательная способность одного и того же тела меняется при изменении температуры тела $T$ и частоты падающего на него све-

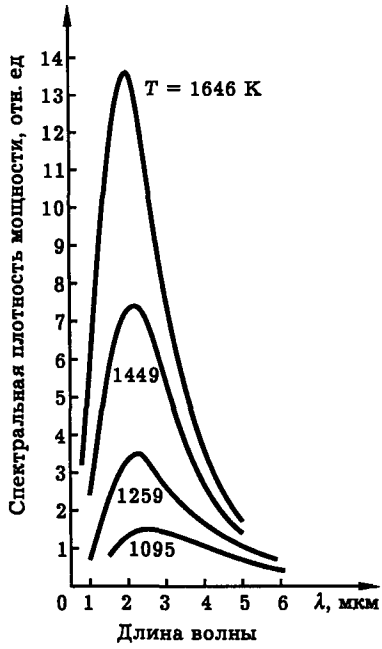



Рис 9 2 Спектры излучения нагретых тел, измеренные Люммером и Прингсгеймом

та $\nu = \omega/2\pi$. Следовательно, каждое тело можно охарактеризовать некоторой функцией

$$\alpha = \alpha(\nu, T)$$

("поглощательная способность"). Разумеется, у разных тел эти функции совершенно различны.

Излучение света. Рассмотрим какое-нибудь нагретое тело, например, раскаленную нить лампы накаливания. Выделим элемент поверхности тела

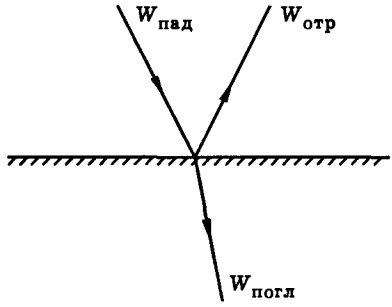



Рис. 9.3. Картина отражения и поглощения света непрозрачным телом

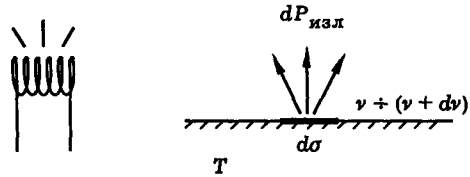



Рис. 9.4. К определению понятия излучательной способности тела

площадью $d\sigma$ и обозначим мощность излучения этого участка поверхности в интервале частот от $\nu$ до $\nu + d\nu$ через $dP_{изл}$ (рис. 9.4).

Ясно, что величина $dP_{изл}$ пропорциональна величинам $d\sigma$ и $d\nu$. Поэтому можно написать

$$dP_{изл} = \varepsilon\, d\nu\, d\sigma. \tag{9.2}$$

Коэффициент пропорциональности $\varepsilon$ в этой формуле назовем "излучательной способностью" тела. Опыт показывает, что излучательная способность, так же как и поглощательная способность, зависит от температуры тела $T$ и частоты света $\nu$, т. е.

$$\varepsilon = \varepsilon(\nu, T).$$

**Равновесное тепловое излучение.** Пусть есть некоторое тело, нагретое до температуры $T$, внутри которого вырезана полость (рис. 9.5). Так как стенки полости испускают тепловое излучение, полость будет заполнена этим излучением. В стационарных условиях, когда температура тела поддерживается постоянной, характеристики теплового излучения в полости также будут иметь постоянные и строго определенные значения, а именно, такие значения, при которых процессы испускания и поглощения света стенками полости взаимно уравновешивают друг друга. Иначе говоря, в стационарных условиях между стенками полости и излучением внутри нее устанавливается тепловое равновесие. В этом случае тепловое излучение в полости называется *равновесным*.

Экспериментально исследовать равновесное излучение можно, проделав небольшое отверстие (канал), соединяющее полость с внешним пространством. Через это отверстие равновесное тепловое излучение будет выходить из полости наружу и его характеристики могут быть измерены (рис. 9.5, *б*).

**Закон Кирхгофа.** В 1859 г. немецкий физик Густав Кирхгоф установил закон, согласно которому в состоянии теплового равновесия отношение излучательной способности к поглощательной способности не зависит от природы тела:

$$\frac{\varepsilon(\nu, T)}{\alpha(\nu, T)} = \rho(\nu, T) = \mathrm{inv}. \tag{9.3}$$

Здесь $\rho(\nu, T)$ — универсальная (одинаковая для всех тел) функция частоты света $\nu$ и температуры тела $T$, называемая *излучательной способностью абсолютно черного тела*. Смысл этого термина ясен из определения абсолютно черного тела, согласно которому для такого тела $\alpha(\nu, T) = 1$ и, следовательно,

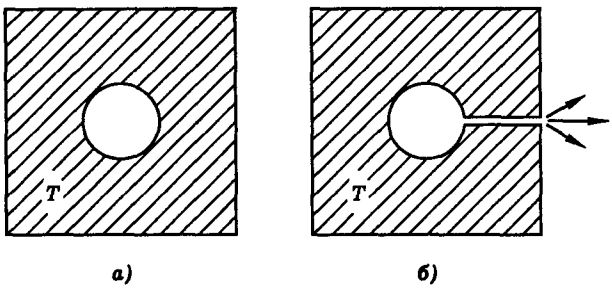



Рис. 9 5. К понятию равновесного теплового излучения. Под равновесным понимается излучение, находящееся в равновесии с нагретым телом, например, излучение, заполняющее полость, вырезанную внутри нагретого тела (*а*). Способ измерения характеристик равновесного излучения (*б*)

$\varepsilon(\nu, T) = \rho(\nu, T)$. Первоначально Кирхгоф вывел данный закон теоретически, используя соображения термодинамики. Позднее этот закон был подтвержден экспериментально.

Рассмотрим теоретические соображения, подтверждающие закон Кирхгофа. Предположим, что внутри полости, занятой равновесным тепловым излучением, находится некоторое тело, например кусок мела (рис. 9.6, *а*). Очевидно, что в состоянии теплового равновесия мощность излучения, поглощаемого телом, равна излучаемой им мощности

$$dP_{\text{погл}} = dP_{\text{изл}}, \tag{9.4}$$

так как в противном случае тело начало бы нагреваться или охлаждаться, а это привело бы к нарушению равновесия. Используя определения излучательной и поглощательной способностей тела, можно записать

$$dP_{\text{погл}} = \alpha\, dP_{\text{пад}}, \tag{9.5}$$

$$dP_{\text{изл}} = \varepsilon\, d\nu\, d\sigma, \tag{9.6}$$

где $\varepsilon$ — излучательная способность, $\alpha$ — поглощательная способность, $dP_{\text{пад}}$ — мощность излучения, падающего на элемент поверхности тела площадью $d\sigma$ и имеющего частоту в спектральном интервале от $\nu$ до $\nu + d\nu$. Из (9.4)–(9.6) следует, что

$$\alpha\, dP_{\text{пад}} = \varepsilon\, d\nu\, d\sigma. \tag{9.7}$$

Теперь заменим наше пробное тело (кусок мела) каким-либо другим телом такого же размера и формы, например, куском угля (рис. 9.6, *б*). Поскольку характеристики теплового излучения остаются неизменными (пробные тела можно считать достаточно малыми по сравнению с термостатом, так чтобы они не влияли на характеристики теплового излучения в полости), во втором случае на элемент поверхности тела той же площади $d\sigma$ в пределах той же полосы частот $d\nu$ будет падать излучение той же самой мощности $dP_{\text{пад}}$. Формулы (9.4)–(9.7) по-прежнему остаются в силе, хотя коэффициенты $\alpha$ и $\varepsilon$ имеют теперь другие значения. Итак, в формуле (9.7) инвариантны все величины, кроме $\varepsilon$ и $\alpha$. Но тогда должно быть инвариантно отношение

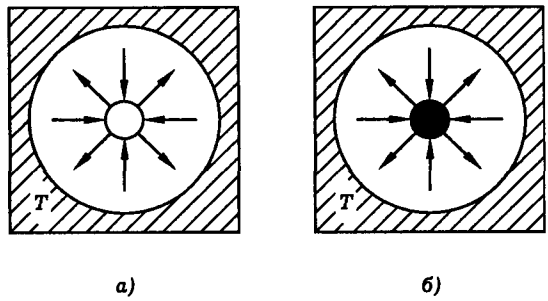



Рис. 9.6. К выводу закона Кирхгофа. Стрелками показаны потоки излучения, поглощаемого и испускаемого телами

$$\varepsilon/\alpha = \mathrm{inv},$$

что и составляет содержание закона Кирхгофа.

В лекционной демонстрации закона Кирхгофа используется нагретая до температуры около 1000 °C (в трубчатой или муфельной печи) фарфоровая тарелка, привязанная к стальной проволоке. На поверхности фарфора нанесен темный рисунок ("цветок") на светлом фоне. Когда нагретый фарфор быстро вынимают за проволоку из печи в затемненной аудитории, рисунок на нем ярко светится на фоне слабого свечения неокрашенных частей фарфора (рис. 9.7, *а*). Однако по мере остывания фарфора яркие места рисунка становятся более темными и на остывающей тарелке снова становится виден темный цветок на светлом фоне (рис. 9.7, *б*). Таким образом, опыт показывает, что участки поверхности тела с большей поглощательной способностью имеют и бóльшую излучательную способность, т. е. $\varepsilon \sim \alpha$, что подтверждает закон Кирхгофа.

Существенно также следующее обстоятельство. Если наблюдать тарелку непосредственно в нагретой печи через небольшое отверстие, то оказывается, что рисунок на тарелке вообще не виден (рис. 9.7, *в*), и даже сама тарелка едва раз-

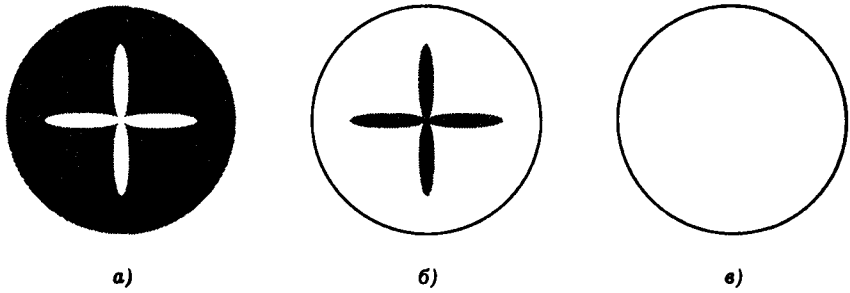



Рис. 9.7. Демонстрация связи между излучательной и поглощательной способностями тела. Свечение нагретой фарфоровой тарелки в затемненной аудитории (*а*). Вид остывшей тарелки (*б*). Вид тарелки в печи (*в*)

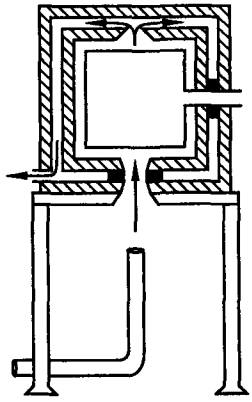


Рис. 9.8. Схема установки Люммера и Прингсгейма

личима на фоне светящихся раскаленных стенок печи. Равновесное тепловое излучение, выходящее из печи, не несет никакого изображения, оно однородно. Это означает, что те тела или участки тела, которые сильно поглощают, одновременно сильно испускают свет, т. е. излучательная способность тел пропорциональна их поглощательной способности — в полном соответствии с законом Кирхгофа.

**Спектральная плотность равновесного теплового излучения.** Равновесное тепловое излучение характеризуют спектральной плотностью $u(\omega, T)$, которая определяется как энергия равновесного излучения при температуре $T$, приходящаяся на единицу объема пространства и бесконечно малый интервал частот шириной $d\omega$ вблизи частоты $\omega$. Энергия теплового излучения в объеме $V$ и полосе частот от $\omega$ до $\omega + d\omega$ есть

$$dW = V\,u(\omega, T)\,d\omega. \tag{9.8}$$

Величина $dW$ измеряется в эргах. Формулу (9.8) можно рассматривать как определение функции $u(\omega, T)$.

Функцию $u(\omega, T)$ называют также *спектральной плотностью излучения черного тела,* поскольку эта функция однозначно связана с универсальной функцией Кирхгофа $\rho(\nu, T)$, имеющей смысл излучательной способности абсолютно черного тела.

Люммер и Прингсгейм экспериментально исследовали спектральную плотность равновесного теплового излучения с помощью установки, схема которой показана на рис. 9.8. Основной элемент установки — железная полость с отверстием для вывода излучения. Эта полость нагревалась с помощью специальной печи с двойными стенками. Нагретые пламенем газы протекали между стенками полости и внутренними стенками печи, затем попадали в пространство между двойными стенками печи и, наконец, выходили в дымоход. Температура измерялась ртутными термометрами либо термопарой.

Мощность теплового излучения, выходящего из полости, измерялась с помощью болометра. В этом приборе излучение, мощность которого необходимо определить, падает на одну из двух зачерненных платиновых проволочек и по-

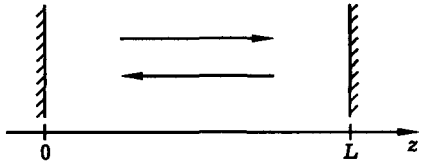



Рис. 9.9. Оптический резонатор — элементарная система, позволяющая подсчитать число степеней свободы светового поля

глощается ею, повышая ее температуру и, следовательно, увеличивая ее электрическое сопротивление. Изменение сопротивления определяется сравнением с сопротивлением другой проволочки.

Были приняты все меры предосторожности, чтобы можно было с уверенностью считать, что регистрируемая мощность излучается именно полостью, и в результаты измерений вносились поправки на возможные ошибки, связанные с поглощением излучения воздухом по пути от полости до чувствительного элемента. Для спектрального разложения излучения использовался призменный спектрометр. Результаты этих исследований были приведены в серии работ, опубликованных в 1899–1900 гг. Они показаны на рис. 9.2.

Перейдем теперь к теоретическому расчету спектральной плотности равновесного теплового излучения $u(\omega, T)$.

**Термодинамика равновесного теплового излучения.** Теоретический расчет функции $u(\omega, T)$ можно выполнить на основе известного из термодинамики закона о *равнораспределении энергии по степеням свободы*. Согласно этому закону, в состоянии теплового равновесия на каждую степень свободы системы в среднем приходится одинаковая энергия, равная $kT/2$. Здесь $T$ — абсолютная температура системы, $k$ — постоянная Больцмана. Для того чтобы применить этот закон к тепловому излучению, необходимо подсчитать число степеней свободы электромагнитного поля, находящегося в замкнутой полости.

Основная идея расчета состоит в том, что равновесное тепловое излучение в полости можно представить в виде *набора стоячих волн*. По существу речь идет о спектральном разложении стационарной пространственной структуры равновесного излучения на элементарно простые структуры — синусоидальные стоячие волны.

Существенны следующие два обстоятельства. Первое — пространственная структура равновесного теплового излучения стационарна, второе — энергия излучения, падающего на стенку полости, равна излучаемой стенкой энергии. Простейшая система, в которой выполняются оба эти условия, представляет собой пару параллельных зеркал — *оптический резонатор* (рис. 9.9). Известно, что световое поле в таком резонаторе можно представить в виде дискретного счетного набора стоячих волн ("осцилляторов поля"). Количество разных стоячих волн и определяет собой искомое число степеней свободы поля.

Итак, рассмотрим световое поле, заключенное между двумя плоскими зеркалами. Расстояние между зеркалами обозначим буквой $L$. Направим ось $z$ по нормали к поверхности зеркал. В плоском резонаторе световое поле удовлетворяет одномерному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \tag{9.9}$$

Считая зеркала идеальными проводниками, граничные условия запишем в виде

$$E(0,t) = E(L,t) = 0. \tag{9.10}$$

Решение задачи (9.9), (9.10) есть

$$E(z,t) = A(t)\sin k_z z. \tag{9.11}$$

Подставив (9.11) в (9.9), получим уравнение для амплитуды $A(t)$:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + c^2 k_z^2 A = 0. \tag{9.12}$$

Таким образом, амплитуда подчиняется уравнению гармонического *осциллятора*. Решение этого уравнения есть

$$A(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi), \qquad \omega = ck_z. \tag{9.13}$$

С другой стороны, подставив (9.11) в (9.10), получим уравнение

$$\sin k_z L = 0, \tag{9.14}$$

откуда

$$k_z L = m_z \pi; \qquad m_z = 1, 2, 3, \ldots . \tag{9.15}$$

Соответственно

$$\omega = ck_z = m_z \frac{\pi c}{L}, \qquad m_z = 1, 2, 3, \ldots . \tag{9.16}$$

Таким образом, световое поле в резонаторе имеет структуру дискретного набора волн. Каждую стоячую волну, характеризуемую определенным пространственным распределением интенсивности света, можно назвать "осциллятором поля". Несколько простейших структур показаны на рис. 9.10. Важно, что осцилляторы поля в резонаторе образуют *счетный набор*, т. е. могут быть перенумерованы. Поскольку различные осцилляторы независимы (их амплитуды совершенно произвольны), полное их число имеет смысл *числа степеней свободы поля*.

Согласно формуле (9.15), в пространстве волновых чисел $k_z$ на долю каждого осциллятора поля приходится ячейка размером $\Delta k = \pi/L$ (рис. 9.11), где $L$ — длина резонатора.

Обобщая рассмотрение на случай трех пространственных координат, рассмотрим световое поле внутри полости с зеркальными стенками, имеющей форму куба (рис. 9.12). Пусть длина ребра куба $L$, объем $V = L^3$, оси координат направлены вдоль ребер куба.

Для каждой из декартовых компонент поля $E_x$, $E_y$, $E_z$ справедливо волновое уравнение

$$\Delta E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \tag{9.17}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

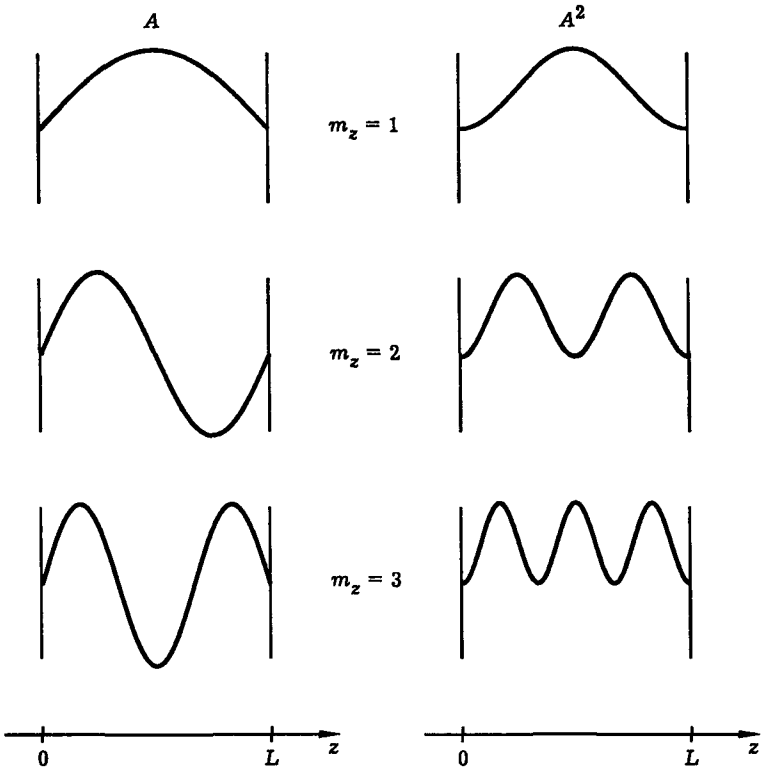



Рис. 9.10. Пространственные структуры простейших осцилляторов поля в оптическом резонаторе

$\Delta$ — оператор Лапласа. Решение уравнения (9.17) ищем в виде

$$E(x,y,z,t) = A_0 \sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)\cos(\omega t + \varphi). \tag{9.18}$$

Подстановка (9.18) в (9.17) приводит к уравнению

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \equiv k^2 = \omega^2/c^2, \tag{9.19}$$

связывающему между собой модуль волнового числа $k$ и частоту $\omega$ световой волны (так называемое "дисперсионное уравнение"). По аналогии с (9.15), граничные условия приводят к соотношениям

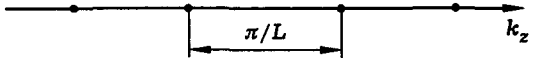



Рис. 9.11. Изображение осцилляторов поля в пространстве волновых чисел

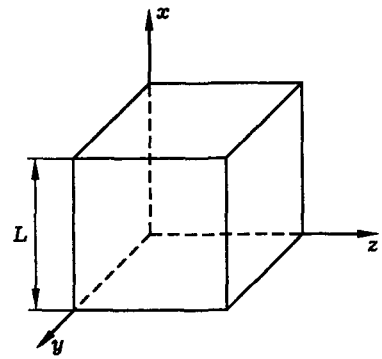



Рис. 9.12. К подсчету числа степеней свободы светового поля, заполняющего трехмерную полость

$$k_x L = m_x \pi, \qquad k_y L = m_y \pi, \qquad k_z L = m_z \pi, \tag{9.20}$$

где $m_x$, $m_y$, $m_z$ — любые натуральные числа, т. е.

$$m_x, m_y, m_z = 1, 2, 3, \ldots \ . \tag{9.21}$$

Величины $k_x$, $k_y$, $k_z$ можно трактовать как декартовы компоненты волнового вектора световой волны $\vec{k}$.

Итак, в трехмерном случае каждый осциллятор поля характеризуется тройкой натуральных чисел $m_x$, $m_y$, $m_z$. Картина, изображающая осцилляторы поля в пространстве волновых чисел ("$k$-пространство"), показана на рис. 9.13. Из этого рисунка видно, что все $k$-пространство разбито на кубики объемом

$$v_k = (\pi/L)^3 \tag{9.22}$$

каждый, при этом каждому отдельному кубику соответствует свой осциллятор поля.

Теперь нетрудно подсчитать полное число степеней свободы поля. Рассмотрим световое поле, занимающее диапазон частот от 0 до $\omega$. Согласно дисперсионному уравнению (9.19), волновые числа поля занимают диапазон от 0 до $k = \omega/c$. В пространстве волновых чисел эта область имеет вид шара радиуса $k$, а ее объем равен $4\pi k^3/3$. Согласно формуле (9.18), изменение знаков величин $k_x$, $k_y$, $k_z$ приводит лишь к изменению знака (фазы) поля, но не меняет его пространственной структуры (рис. 9.10). Поэтому физически различным конфигурациям (осцилляторам) поля отвечают лишь числа $k_x$, $k_y$, $k_z$ определенного знака, например,

$$k_x, \ k_y, \ k_z > 0. \tag{9.23}$$

В указанную область (положительный октант пространства волновых чисел) попадает лишь 1/8 часть шара радиуса $k$, объем этой части составляет

$$V_k = \frac{1}{6}\pi k^3. \tag{9.24}$$

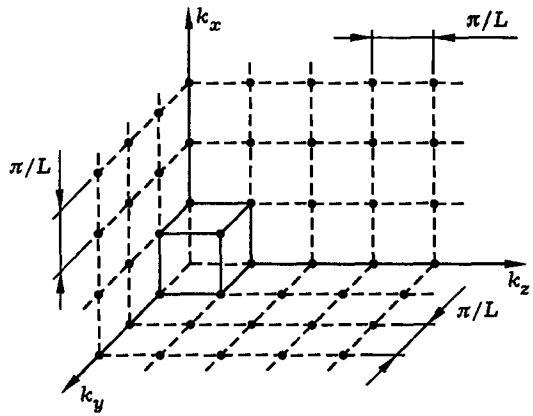



Рис. 9.13. Изображение осцилляторов поля в пространстве волновых чисел

Искомое число осцилляторов поля равно, очевидно, отношению объема $V_k$, который занимают в $k$-пространстве все осцилляторы поля, к объему $v_k$ ячейки, соответствующей одному осциллятору. Обозначив это число $Z'$, можно записать

$$Z' = V_k/v_k. \tag{9.25}$$

Используя (9.22), (9.24), (9.19), эту же величину можно записать как

$$Z' = \frac{\omega^3 L^3}{6\pi^2 c^3}. \tag{9.26}$$

Итак, формула (9.26) определяет число осцилляторов поля, занимающего область пространства объемом $L^3$ и частотный интервал от 0 до $\omega$. Эта формула дает число степеней свободы поля, связанных с возможными направлениями распространения световых волн. Однако волна, распространяющаяся в определенном направлении, может иметь два независимых состояния поляризации (например, плоская волна, распространяющаяся вдоль оси $z$, есть, вообще говоря, суперпозиция волн типа $E_x$, $H_y$ и $E_y$, $H_x$ — см. ч. I). Поэтому полное число степеней свободы светового поля вдвое превышает число $Z'$ и составляет величину

$$Z = \frac{\omega^3 L^3}{3\pi^2 c^3}. \tag{9.27}$$

Теперь вычислим число степеней свободы поля, приходящихся на спектральный интервал от $\omega$ до $\omega + d\omega$. Взяв дифференциал от обеих частей равенства (9.27), получим

$$dZ = \frac{\omega^2 L^3}{\pi^2 c^3} d\omega. \tag{9.28}$$

Итак, задача подсчета числа степеней свободы равновесного теплового излучения решена. Используя этот результат, спектральную плотность равновесного теплового излучения, т. е. энергию излучения, приходящуюся на единицу

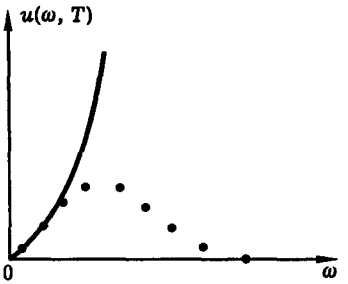



Рис. 9.14. Соотношение между экспериментальными данными по измерению спектральной плотности равновесного теплового излучения (точки) и теорией Рэлея–Джинса (сплошная кривая)

объема пространства и спектральный интервал от $\omega$ до $\omega + d\omega$, можно представить в виде

$$u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}\langle w \rangle, \tag{9.29}$$

где $\langle w \rangle$ — средняя энергия, приходящаяся на осциллятор поля.

**Формула Рэлея–Джинса.** Согласно закону равнораспределения энергии по степеням свободы, в состоянии теплового равновесия средняя энергия осциллятора

$$\langle w \rangle = kT, \tag{9.30}$$

где $k$ — постоянная Больцмана, $T$ — абсолютная температура системы. Так, для механического осциллятора средняя кинетическая энергия равна средней потенциальной энергии и равна $kT/2$. Для осциллятора поля средняя энергия электрического поля равна средней энергии магнитного поля и равна $kT/2$. В обоих случаях полная средняя энергия осциллятора равна $kT$.

Подставив (9.30) в (9.29), получим

$$u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT. \tag{9.31}$$

Данное выражение для спектральной плотности равновесного теплового излучения носит название *формулы Рэлея–Джинса.*

На рис. 9.14 показаны вид экспериментально измеренного распределения $u(\omega, T)$ и теоретическая кривая, построенная по формуле Рэлея–Джинса. Видно, что экспериментальная и теоретическая зависимости качественно различаются, следовательно, формула Рэлея–Джинса не может быть признана правильной во всей области частот. Однако в длинноволновой области данная формула хорошо согласуется с экспериментом. Этот факт, а также ясность и простота положений, на которых основана формула Рэлея–Джинса, позволяют утверждать, что в области низких частот эта формула является правильной, и более полная формула для спектральной плотности, которая была бы пригодна для всей области частот и которую еще предстоит найти, должна в соответствующем пределе переходить в формулу Рэлея–Джинса.

**"Ультрафиолетовая катастрофа".** Главный недостаток формулы Рэлея–Джинса состоит, очевидно, в предсказываемом ею неограниченном росте спектральной плотности излучения в области высоких частот. Этот вывод находится в вопиющем противоречии с экспериментом, согласно которому спектральная плотность стремится к нулю при $\omega \to \infty$ (рис. 9.2 и 9.14). Кроме того, из формулы Рэлея–Джинса следует, что полная (интегральная по частоте) энергия теплового излучения равна бесконечности:

$$\int_0^\infty u(\omega, T)\, d\omega = \infty, \tag{9.32}$$

что, конечно, противоречит здравому смыслу. Поскольку данные обстоятельства связаны с коротковолновой (ультрафиолетовой) частью спектра, за ними закрепилось название *ультрафиолетовой катастрофы* или *парадокса Рэлея–Джинса*. К 1900 г. это противоречие было ясно осознано и достигло предельной остроты; ему было суждено разрешиться рождением квантовой физики.

**Формула Планка.** К концу 1900 г. в исследованиях равновесного теплового излучения сложилась следующая ситуация. Были проведены точные экспериментальные измерения спектральной плотности излучения (Люммер и Прингсгейм, Рубенс и Курлбаум и др. — см. рис. 9.2). Была известна формула Рэлея–Джинса (9.31) и было ясно, что она правильно описывает низкочастотную часть кривой $u(\omega, T)$. Наконец была известна формула Вина

$$u(\omega, T) \sim \omega^3 e^{-\gamma\omega/T}, \qquad \gamma = \text{const}, \tag{9.33}$$

которая хорошо согласуется с экспериментом в области средних и высоких частот. Таким образом, были известны асимптотики распределения $u(\omega, T)$:

$$u(\omega, T) \sim \begin{cases} \omega^2 T, & \omega \to 0 \quad \text{(закон Рэлея–Джинса)} \\ \omega^3 e^{-\gamma\omega/T}, & \omega \to \infty \quad \text{(закон Вина)}. \end{cases} \tag{9.34}$$

Пытаясь построить выражение для $u(\omega, T)$, пригодное для всей области частот, Макс Планк придумал несколько формул, удовлетворяющих условиям (9.34), среди которых одна поразила его своей красотой. В современных обозначениях эта формула имеет вид

$$u(\omega, T) = \frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega^3}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \tag{9.35}$$

и называется *формулой Планка*. В этой формуле $\hbar$ — постоянная, численное значение которой

$$\hbar = 1{,}05 \times 10^{-27}\ \text{эрг} \cdot \text{с}. \tag{9.36}$$

Эта постоянная называется *постоянной Планка*.

Очень скоро выяснилось, что формула (9.35) прекрасно согласуется с экспериментом. Тогда встал вопрос обоснования этой формулы, выяснения ее физического смысла. Макс Планк приступил к решению этой задачи.

**Необходимость квантовых представлений.** Вывод, к которому пришел Планк спустя некоторое время, был обескураживающим. Оказалось, что формула (9.35) может быть выведена в предположении, что атомы, образующие

стенки нагретой полости, в которой заключено равновесное тепловое излучение, способны излучать и поглощать свет данной частоты $\omega$ не в любых количествах, а лишь дискретными порциями ("квантами") с энергией

$$w_0 = \hbar\omega. \tag{9.37}$$

Данное предположение резко противоречит господствовавшим в то время представлениям классической физики, согласно которым энергия любой физической системы может изменяться непрерывно. Нетрудно видеть, однако, что это предположение разрешает парадокс Рэлея–Джинса. В самом деле, формула (9.37) показывает, что высокочастотное излучение может излучаться лишь достаточно большими порциями, и в условиях, когда $\hbar\omega \gg kT$, в стенках полости просто не найдется атомов, способных испускать высокочастотные кванты; тепловая энергия атомов, имеющая порядок величины $kT$, будет для этого слишком мала. Таким образом, в пределе $\omega \to \infty$ спектральная плотность излучения должна стремиться к нулю — в полном соответствии с экспериментальными данными. С другой стороны, в низкочастотном пределе, когда $\hbar\omega \ll kT$, дискретность излучения, очевидно, не будет играть существенной роли, и становится ясно, почему в этой области справедлива классическая теория.

Итак, несмотря на всю необычность гипотезы Планка, сразу появились веские аргументы в ее пользу. Дальнейшее развитие физики окончательно подтвердило его правоту. Последствия открытия Планка оказались таковы, что оно с полным правом может быть отнесено к числу самых главных открытий в истории физики.

Остановимся коротко на том, как исходя из (9.35) можно прийти к (9.37).

Предположим, что атом, взаимодействующий с излучением, может изменять свою энергию не непрерывно, а скачкообразно, некоторыми порциями $w_0$. В этом случае возможные значения энергии атома $w$ можно перенумеровать, записать в виде

$$w_n = nw_0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{9.38}$$

и изобразить в виде "лестницы" энергетических уровней, как показано на рис. 9.15.

Заметим, что данное предположение еще не означает отказа от классической модели, если в дальнейшем предполагается предельный переход $w_0 \to 0$.

Вероятность того, что атом находится на энергетическом уровне с номером $n$, определяется распределением Больцмана

$$P(n) = C\,\mathrm{e}^{-nw_0/kT}, \tag{9.39}$$

или

$$P(n) = C\,\mathrm{e}^{-nx}, \tag{9.40}$$

где введено обозначение

$$x = w_0/kT. \tag{9.41}$$

В формулах (9.39)–(9.41) $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $w_0$ — элемент энергии, $T$ — абсолютная температура системы, $k$ — постоянная Больцмана, $C$ — постоянная, определяемая условием нормировки

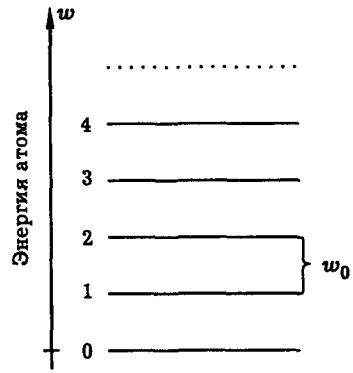



Рис. 9.15. Уровни энергии атома в модели Планка

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1. \tag{9.42}$$

Подставив (9.40) в (9.42), получим

$$C^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-nx} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}, \tag{9.43}$$

откуда

$$C = 1 - \mathrm{e}^{-x}. \tag{9.44}$$

При вычислении суммы ряда в (9.43), мы воспользовались известной формулой для суммы геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \qquad q < 1. \tag{9.45}$$

Средняя энергия атома определяется выражением

$$\langle w \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} w_n P(n). \tag{9.46}$$

Подставив (9.38), (9.40) в (9.46), получим

$$\langle w \rangle = C w_0 \sum_{n=0}^{\infty} n \mathrm{e}^{-nx}. \tag{9.47}$$

Сумму ряда в (9.47) вычислим, используя (9.43), путем дифференцирования по параметру:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx} = -\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1-\mathrm{e}^{-x})^2}. \tag{9.48}$$

Подставив (9.48) и (9.44) в (9.47), найдем

$$\langle w\rangle = \frac{w_0}{\mathrm{e}^x - 1} \tag{9.49}$$

или, в силу (9.41),

$$\langle w\rangle = \frac{w_0}{\mathrm{e}^{w_0/kT} - 1}. \tag{9.50}$$

Итак, формула (9.50) определяет среднюю энергию атома в модели дискретных энергетических уровней Планка. Заметим, что согласно этому выражению, средняя тепловая энергия элементарного осциллятора среды (атома), отнюдь не равна величине $kT$, как этого требует закон равнораспределения энергии по степеням свободы. Выражение $\langle w\rangle = kT$ получается из (9.50) только в предельном случае $w_0 \to 0$, т. е. когда планковский элемент энергии $w_0$ устремляется к нулю.

Атом среды Планк моделировал гармоническим осциллятором. В силу закона равнораспределения энергии по степеням свободы в состоянии теплового равновесия средняя энергия осциллятора вещества (атома) должна быть равна средней энергии осциллятора поля:

$$\langle w\rangle_{\text{осциллятор вещества}} = \langle w\rangle_{\text{осциллятор поля}}. \tag{9.51}$$

Это дает основание подставить выражение (9.50) в формулу (9.29) для спектральной плотности равновесного теплового излучения. В результате такой подстановки получим

$$u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}\frac{w_0}{\mathrm{e}^{w_0/kT} - 1}. \tag{9.52}$$

В предельном случае $w_0 \to 0$, соответствующем классической модели непрерывной энергии атома, данное выражение переходит в формулу Рэлея–Джинса (9.31). Однако сопоставление (9.52) с формулой Планка (9.35), идеально описывающей эксперимент, указывает на то, что планковский элемент энергии $w_0$ есть не бесконечно малая, а *конечная* величина, пропорциональная частоте излучения $\omega$. Если принять для $w_0$ выражение (9.37), то формула (9.52) переходит в (9.35).

Так в результате исследований теплового излучения было установлено, что атом обладает *дискретным набором уровней энергии*. Этот вывод, подтвержденный всеми дальнейшими исследованиями, послужил отправной точкой для развития квантовой физики.

**Законы теплового излучения.** Еще до открытия Планка были известны два закона, характеризующие свойства теплового излучения. Это *закон Стефана–Больцмана* и *закон смещения Вина*. Мы выведем эти законы как следствия формулы Планка (9.35).

**Закон Стефана–Больцмана.** Согласно этому закону, полная мощность теплового излучения возрастает пропорционально четвертой степени абсолютной температуры тела.

Из формулы (9.35) для объемной плотности энергии равновесного теплового излучения получаем:

$$\frac{dW}{dV} = \int_0^\infty u(\omega, T)dw = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} =$$

$$= \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \text{const} \cdot T^4. \tag{9.53}$$

Таким образом, формула Планка подтверждает закон Стефана–Больцмана.

Используя значение интеграла

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \pi^4/15, \tag{9.54}$$

запишем закон Стефана–Больцмана в виде

$$\frac{dW}{dV} = aT^4, \tag{9.55}$$

где

$$a = \frac{\pi^2 k^4}{15\hbar^3 c^3} = 7{,}55 \times 10^{-15}\,\text{эрг} \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}. \tag{9.56}$$

При вычислении постоянной $a$ мы использовали известные значения физических постоянных: постоянная Больцмана $k = 1{,}38 \times 10^{-16}$ эрг·К$^{-1}$, постоянная Планка $\hbar = 1{,}05 \times 10^{-27}$ эрг·с, скорость света $c = 3 \times 10^{10}$ см·с$^{-1}$, $\pi = 3{,}14$.

**Закон смещения Вина.** Согласно этому закону, длина волны $\lambda_{\max}$, на которую приходится максимум спектральной плотности теплового излучения, уменьшается обратно пропорционально абсолютной температуре тела:

$$\lambda_{\max} = \frac{\text{const}}{T}. \tag{9.57}$$

Для того чтобы вывести этот закон, выразим спектральную плотность равновесного теплового излучения через длину волны излучения $\lambda$. Для этого используем формулу связи между частотой и длиной волны $\omega = 2\pi c/\lambda$ и правило преобразования плотности вероятности

$$u(\omega, T)|d\omega| = u(\lambda, T)|d\lambda|. \tag{9.58}$$

Смысл этой формулы поясняет рис. 9.16.

Из (9.58) получаем

$$u(\lambda, T) = u(\omega(\lambda), T) \left|\frac{d\omega(\lambda)}{d\lambda}\right|. \tag{9.59}$$

Подставив (9.35) в (9.59), находим

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi ch}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}, \tag{9.60}$$

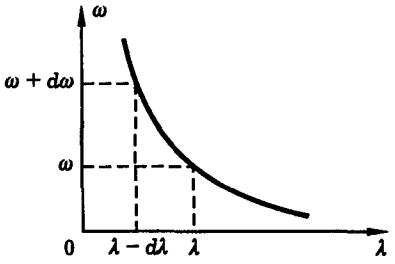



Рис. 9.16. К выводу формулы замены переменной в распределении вероятности

где $h = 2\pi\hbar$. Вид распределения $u(\lambda, T)$ показан на рис. 9.17. Искомую длину волны $\lambda_{\max}$ определим из условия

$$\frac{\partial u(\lambda, T)}{\partial \lambda} = 0. \tag{9.61}$$

Подставив (9.60) в (9.61), получим уравнение

$$\frac{x e^x}{e^x - 1} = 5, \tag{9.62}$$

где

$$x = \frac{hc}{kT\lambda_{\max}}. \tag{9.63}$$

Решение трансцендентного уравнения (9.62) есть

$$x = 4{,}965 \tag{9.64}$$

(оно может быть найдено численно или графическим способом). Следовательно,

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{4{,}965kT} = \frac{0{,}29\,\text{см}}{T(K)} \tag{9.65}$$

в соответствии с законом смещения Вина.

**Примеры.** Рассмотрим два примера на применение законов теплового излучения.

1. Известно, что максимум интенсивности излучения Солнца приходится на длину волны около 0,5 мкм. Определить температуру поверхности Солнца.

Считая Солнце абсолютно черным телом и полагая $\lambda_{\max} = 0{,}5 \times 10^{-4}$ см, по формуле (9.65) получим $T \approx 6000$ К. Таким образом, температура поверхности Солнца составляет примерно шесть тысяч градусов.

2. До какой температуры может нагреть солнечный свет некоторое черное тело на поверхности Земли?

Будем считать, что предел нагреванию кладет собственное тепловое излучение нагреваемого тела. Тогда условие теплового баланса для некоторого малого элемента поверхности тела $d\sigma$ (рис. 9.18) можно представить в виде равенства

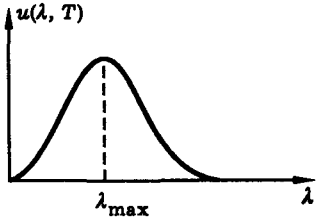



Рис. 9.17. К выводу закона смещения Вина: спектральная плотность равновесного теплового излучения в зависимости от длины волны излучения

мощностей излучения падающего на данный участок солнечного света $dP_{\text{пад}}$ и испускаемого им собственного теплового излучения $dP_{\text{изл}}$:

$$dP_{\text{пад}} = dP_{\text{изл}}. \tag{9.66}$$

Величины, входящие в формулу (9.66), можно представить в виде

$$dP_{\text{пад}} = I_{\text{c}} d\sigma, \tag{9.67}$$

где $I_{\text{c}}$ — интенсивность солнечного света,

$$dP_{\text{изл}} = d\sigma \int_0^\infty \rho(\omega, T)\, d\omega, \tag{9.68}$$

где $\rho(\omega, T)$ — излучательная способность абсолютно черного тела. Эта величина связана со спектральной плотностью равновесного теплового излучения $u(\omega, T)$ формулой (см. лекцию 3):

$$\rho(\omega, T) = \frac{c}{4} u(\omega, T), \tag{9.69}$$

где $c$ — скорость света. Поэтому, используя формулу Планка (9.35), и закон Стефана–Больцмана

$$\int_0^\infty u(\omega, T)\, d\omega = aT^4, \tag{9.70}$$

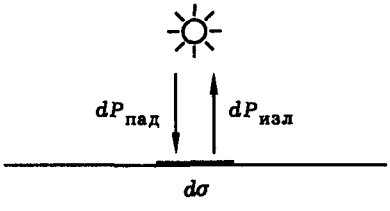



Рис. 9.18. К расчету предельной температуры черного тела на поверхности Земли

получим

$$\frac{dP_{\text{изл}}}{d\sigma} = \varkappa T^4, \tag{9.71}$$

где

$$\varkappa = \frac{c}{4}a, \tag{9 72}$$

а постоянная $a$ определяется формулой (9.56). Величина $dP_{\text{изл}}/d\sigma$ называется "энергетической светимостью" тела; формула (9.71) выражает закон Стефана–Больцмана, записанный для этой величины.

Подставив (9.56) в (9.72), получим

$$\varkappa = 5{,}66 \times 10^{-12}\,\text{Вт} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}. \tag{9 73}$$

Подставив (9.67), (9 71) в (9.66), найдем

$$T = \sqrt[4]{I_c/\varkappa}. \tag{9.74}$$

Данная формула определяет предельную температуру, до которой может нагреть свет черное тело Известно, что интенсивность солнечного света у поверхности Земли составляет величину

$$I_c \approx 0{,}1\ \text{Вт/см}^2. \tag{9.75}$$

Подставив (9.75) и (9 73) в (9.74), получим численную оценку:

$$T = 365\,\text{К} = 92\,^\circ\text{C}. \tag{9.76}$$

Опыт подтверждает этот результат. Добавим к этому, что путем концентрации солнечного света с помощью зеркал или линз можно значительно увеличить температуру нагревания тела. Эта возможность используется на установках солнечной энергетики.

# Литература


1 *Планк М* Избранные труды. — М Наука, 1975
2 *Тригг Дж* Решающие эксперименты в современной физике — М Мир, 1974
3 *Мигдал А Б* Квантовая физика для больших и маленьких Библиотечка "Квант", вып 75 — М Наука, 1989
4 Физический энциклопедический словарь/Под ред А М Прохорова — М СЭ, 1983
5 Лекционные демонстрации по физике/Под ред В И Ивероновой — М Наука, 1972
6 *Ландсберг Г. С* Оптика — М Наука, 1976
7 *Сивухин Д В* Общий курс физики Оптика — М Наука, 1985
8 *Матвеев А Н* Оптика — М , Высшая школа, 1985
9 *Собельман И И* К проблеме солнечной энергетики//УФН 1976 Т 120 С 85
10 Творцы физической оптики — М Наука, 1973
11 *Гернек Ф* Пионеры атомного века Великие исследователи от Максвелла до Гейзенберга — М Прогресс, 1974

# Лекция 10

# Лазер

*Квантовые свойства атомов. Постулаты Бора. Световые кванты. Спонтанное и вынужденное излучение в квантовой системе. Принцип действия и устройство лазера. Характеристики лазерного излучения. Генерация сверхкоротких световых импульсов.*

Лекция посвящена физике лазеров. Рассматриваются механизм лазерной генерации, принцип действия и устройство лазера, свойства лазерного излучения.

Трудно найти пример открытия, которое оказало бы на науку и технику XX в. столь сильное влияние, как создание лазера. Сверхсильные световые поля и лазерный термоядерный синтез, сверхкороткие световые импульсы и сверхнизкие температуры, нелинейная оптика и лазерная спектроскопия, голография и оптическая связь, обработка материалов и оптический компьютер, лазерная медицина и контроль окружающей среды — вот лишь краткий перечень применений лазера, который находит все новые и новые сферы приложения.

С принципиальной физической точки зрения лазер демонстрирует новый тип излучения — *вынужденное* излучение в квантовой системе. Главная особенность этого излучения в том, что оно *когерентно,* т. е. имеет структуру, близкую к плоской монохроматической волне.

**Квантовые свойства атомов. Постулаты Бора.** Исследования теплового излучения, открытие квантов энергии, изучение спектров испускания и поглощения света атомами, а также другие экспериментальные и теоретические исследования, выполненные в конце XIX — начале XX веков, позволили сформулировать следующие два постулата, касающиеся свойств атомных систем (Нильс Бор, 1913 г.):

1. Существуют стационарные состояния атомов, в которых они не излучают и не поглощают свет. В этих состояниях атомы обладают энергиями, образующими дискретный ряд $W_1$, $W_2, \ldots$ (уровни энергии).

2. Излучение, испускаемое или поглощаемое атомом при переходе с уровня энергии $W_m$ на уровень $W_n$, монохроматично, а его частота $\omega$ определяется условием

$$W_m - W_n = \hbar\omega, \tag{10.1}$$

где $\hbar$ — постоянная Планка.

Эти постулаты резко противоречат основным представлениям классической механики и электродинамики, однако полностью подтверждаются на опыте. Постулаты Бора можно рассматривать как краткое и точное описание свойств атомных систем, установленных путем обобщения и анализа экспериментальных данных. На рис. 10.1 показана схема энергетических уровней атома. Каждый уровень характеризуется своим номером $n$ и энергией $W_n$.

**Световые кванты.** Уже сама формула Планка

$$W = \hbar\omega, \tag{10.2}$$

казалось бы, говорит о том, что понятие "квант энергии" следует отнести к *свету как таковому* — ведь единственная физическая переменная в правой

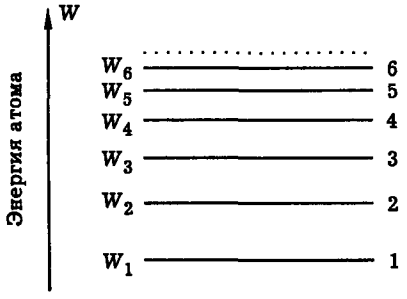



Рис. 10.1. Схема энергетических уровней атома

части (10.2) — частота $\omega$ — есть характеристика света, а не вещества. Однако после открытия Планка прошло еще немало времени, прежде чем в физике возникло и закрепилось понятие "квант света".

В 1905 г. А. Эйнштейн в своей работе "Об эвристической точке зрения на возникновение и превращение света" пишет: "...Может оказаться, что теория света, оперирующая непрерывными пространственными функциями, приведет к противоречию с опытом, когда ее будут применять к явлениям возникновения и превращения света". И дальше: "...Согласно этому сделанному здесь предположению, энергия пучка света, вышедшего из некоторой точки, не распределяется непрерывно во все возрастающем объеме, а складывается из конечного числа локализованных в пространстве неделимых квантов энергии, поглощаемых или возникающих только целиком. Ниже я излагаю ход мыслей и факты, натолкнувшие меня на этот путь, в надежде, что предлагаемая здесь точка зрения, возможно, принесет пользу и другим исследователям в их изысканиях".

В этой работе Эйнштейн рассматривает флуктуации плотности теплового излучения и заключает, что плотность энергии излучения в области больших частот флуктуирует как плотность энергии газа независимых частиц, каждая из которых имеет энергию $\hbar\omega$. Эйнштейн пишет: "Но если монохроматическое излучение (достаточно малой плотности) ... ведет себя как дискретная среда, состоящая из квантов энергии величины $\hbar\omega$, то напрашивается вопрос, не являются ли законы возникновения и превращения света такими, как будто свет состоит из подобных же квантов энергии".

Фотоэффект. Важный аргумент в пользу гипотезы световых квантов дали исследования фотоэффекта. Фотоэффект был обнаружен Генрихом Герцем в 1887 г. при исследовании распространения электромагнитных волн. Когда Герц закрыл принимающий вибратор экраном, чтобы лучше видеть проскакивающую искру, обнаружилось, что экран влияет на условия образования разряда, и что причина этого влияния — свет от искры излучателя. Он исследовал это явление и показал, что при освещении экрана светом электрической дуги ионизация воздуха вблизи экрана увеличивается и искра проскакивает при меньшем напряжении.

В 1888 г. А. Ф. Столетов исследовал фотоэффект более детально и установил, что освещение металлической пластины вызывает поток отрицательно заряженных частиц, причем сила электрического тока пропорциональна интенсивности излучения.

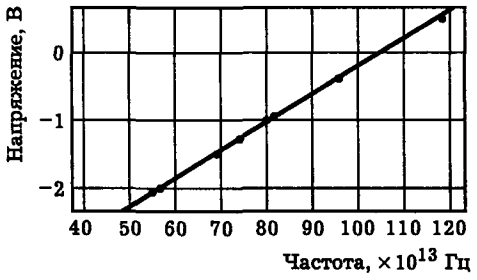



Рис. 10.2. График зависимости максимальной энергии фотоэлектронов (измеренной по задерживающей разности потенциалов) от частоты падающего света для натрия [13]

В 1902 г. Филипп Ленард установил, что энергия вылетающих при фотоэффекте электронов не зависит от интенсивности падающего света.

Используя гипотезу световых квантов, Эйнштейн получил для фотоэффекта формулу

$$W_{\max} = \hbar\omega - A, \tag{10.3}$$

где $W_{\max}$ — максимальная энергия вылетающих электронов, $\omega$ — частота света, $A$ — работа выхода, т. е. энергия, необходимая для удаления электрона из металла, $\hbar$ — постоянная Планка. Формула (10.3) предсказывала, что график функции $W_{\max}(\omega)$ есть прямая линия, наклон которой не зависит от вещества и определяется постоянной Планка. Исследования, выполненные Робертом Милликеном в 1915 г., подтвердили этот вывод (рис. 10.2).

Эффект Комптона. В 1922 г. американский физик А. Комптон открыл явление увеличения длины волны рентгеновского излучения при рассеянии на свободных электронах. Этот эффект послужил экспериментальным доказательством того, что квант света обладает импульсом

$$p = \hbar k, \tag{10.4}$$

где $k = \omega/c$, $\omega$ — частота, $c$ — скорость света. Только после этого световые кванты перестали быть гипотетическими частицами.

Итак, *квант света*, или *фотон* — это элементарная неделимая порция света, обладающая энергией $W = \hbar\omega$ и импульсом $p = \hbar k$. Заметим, что формула (10.4) может быть получена как следствие формулы (10.2) и соотношения

$$\mathcal{P} = I/c, \tag{10.5}$$

связывающего между собой поток энергии и поток импульса в световой волне (см. ч. I). В формуле (10.5) $I$ — интенсивность света, $\mathcal{P}$ — световое давление на поглощающее свет тело. Соотношение между энергией и импульсом света

$$W = pc \tag{10.6}$$

вытекает также из эйнштейновской теории относительности; данная формула описывает частицы с массой, равной нулю, и имеющие скорость, равную скорости света в любой инерциальной системе отсчета.

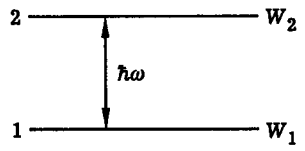



Рис. 10.3. К выводу формулы Планка по Эйнштейну

**Спонтанное и вынужденное излучение в квантовой системе.** Чрезвычайно важный шаг на пути к созданию лазера был сделан А. Эйнштейном в 1916 г. В своей работе "К квантовой теории излучения" Эйнштейн рассмотрел взаимодействие атомов с равновесным тепловым излучением с точки зрения гипотезы световых квантов. Он ввел понятия спонтанного и вынужденного излучения в квантовой системе и на этой основе нашел удивительно простой вывод формулы Планка.

Рассмотрим пару энергетических уровней атомов вещества, находящего в равновесии с тепловым излучением при температуре $T$. Пусть нижний энергетический уровень имеет номер 1, верхний — номер 2 (рис. 10.3). Обозначим число атомов, находящихся в состоянии с энергией $W_1$, через $N_1$, а число атомов с энергией $W_2$ через $N_2$. В состоянии теплового равновесия заселенности уровней $N_1$ и $N_2$ подчиняются распределению Больцмана:

$$N_i = \text{const} \cdot \exp\left(-W_i/kT\right). \tag{10.7}$$

Данная пара уровней взаимодействует с излучением, частота которого подчиняется условию Бора:

$$W_2 - W_1 = \hbar\omega. \tag{10.8}$$

Следуя Эйнштейну, предположим, что возможны следующие типы радиационных процессов.

1. *Спонтанное излучение.* Квант света испускается при самопроизвольном переходе атома из состояния "2" в состояние "1". Вероятность этого процесса пропорциональна числу атомов на верхнем энергетическом уровне, поэтому можно записать

$$P_{21}^{\text{спонт}} = A_{21} N_2, \tag{10.9}$$

где $A_{21}$ — коэффициент Эйнштейна.

2. *Вынужденное поглощение.* Атом поглощает квант света и переходит из состояния "1" в состояние "2". Вероятность этого процесса, индуцируемого излучением, пропорциональна спектральной плотности излучения на частоте $\omega$, а также числу атомов на нижнем энергетическом уровне. Следовательно, можно записать

$$P_{12}^{\text{вын}} = B_{12} N_1 u(\omega, T). \tag{10.10}$$

Коэффициент пропорциональности $B_{12}$ в этой формуле также называется коэффициентом Эйнштейна.

3. *Вынужденное излучение.* Переход атома из состояния "2" в состояние "1" происходит под действием резонансного кванта света и сопровождается излучением точно такого же кванта. Вероятность данного процесса есть

$$P_{21}^{\text{вын}} = B_{21} N_2 u(\omega, T), \tag{10.11}$$

где $B_{21}$ — коэффициент Эйнштейна.

В состоянии равновесия переходы, сопровождающиеся испусканием и поглощением квантов света, должны, очевидно, уравновешивать друг друга. Это возможно, если вероятности перечисленных выше радиационных процессов удовлетворяют условию

$$P_{21}^{\text{спонт}} + P_{21}^{\text{вын}} = P_{12}^{\text{вын}}. \tag{10.12}$$

Подставив (10.9)–(10.11) в (10.12), получим уравнение

$$A_{21} N_2 + B_{21} N_2 u(\omega, T) = B_{12} N_1 u(\omega, T). \tag{10.13}$$

Принимая во внимание (10.7) и (10.8), из (10.13) находим следующее выражение для спектральной плотности равновесного теплового излучения:

$$u(\omega, T) = \frac{A_{21}/B_{21}}{(B_{12}/B_{21})e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \tag{10.14}$$

Отношения коэффициентов Эйнштейна можно найти из рассмотрения предельных случаев. В самом деле, пусть температура термостата стремится к бесконечности

$$T \to \infty. \tag{10.15}$$

Тогда спектральная плотность теплового излучения будет неограниченно возрастать

$$u(\omega, T) \to \infty,$$

а населенности уровней будут выравниваться

$$N_1 \to N_2.$$

В этих условиях из формулы (10.13) следует, что

$$B_{12} = B_{21}. \tag{10.16}$$

Теперь рассмотрим низкочастотный предел

$$\omega \to 0. \tag{10.17}$$

В этом случае $\hbar\omega \ll kT$, квантовая структура излучения не проявляется, и для спектральной плотности теплового излучения справедлива классическая формула Рэлея–Джинса (см. лекцию 9)

$$u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT. \tag{10.18}$$

С другой стороны, при условии (10.17) из (10.14) и (10.16) следует, что

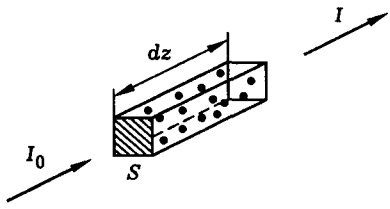



Рис. 10.4. К расчету коэффициента усиления вынужденного излучения

$$u(\omega, T) = \frac{A_{21}}{B_{21}} \frac{kT}{\hbar\omega}. \tag{10.19}$$

Сравнивая формулы (10.18) и (10.19), находим

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}. \tag{10.20}$$

Наконец, подставив (10.16) и (10.20) в (10.14), получим

$$u(\omega, T) = \frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega^3}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \tag{10.21}$$

Итак, вывод формулы Планка завершен. Простота и ясность этого вывода убедительно свидетельствуют в пользу эйнштейновской гипотезы световых квантов, а также его предположения о существовании в квантовой системе трех типов радиационных процессов: *спонтанного излучения, вынужденного поглощения* и *вынужденного излучения* света. Весьма плодотворной оказалась также эйнштейновская идея *вероятностного* описания процессов испускания и поглощения световых квантов атомами.

**Принцип действия и устройство лазера.** Генерация света лазером основана на эффекте усиления вынужденного излучения в квантовой системе. Само английское слово "laser" представляет собой аббревиатуру фразы "Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation", которая дословно переводится как "Усиление света за счет вынужденного испускания излучения". Обратимся теперь к вопросу о том, как и при каких условиях возможно усиление света за счет вынужденного излучения.

Вычислим изменение интенсивности света при прохождении им слоя вещества. Пусть плоская световая волна частоты $\omega$, резонансной некоторому квантовому переходу, падает на слой вещества толщиной $dz$ (рис. 10.4). Выделим некоторую площадку $S$ на поверхности слоя и рассмотрим элемент среды объемом $dV = S\,dz$. Обозначим число атомов в единице объема среды через $N$. Тогда число атомов в рассматриваемом элементе среды составляет $dN = N\,dV$. При этом на нижнем энергетическом уровне находится $dN_1 = N_1 dV$ атомов, а на верхнем — $dN_2 = N_2 dV$ атомов, где $N_i$ — число атомов на соответствующем уровне $i$, отнесенное к единице объема.

Используя модель Эйнштейна, запишем мощности спонтанного излучения $dP_{21}^{\text{спонт}}$, вынужденного поглощения $dP_{12}^{\text{вын}}$ и вынужденного излучения $dP_{21}^{\text{вын}}$ для данного элемента среды в виде

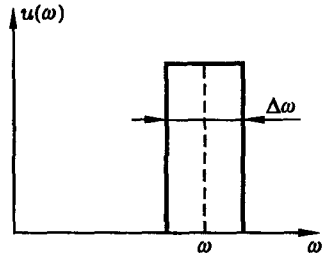



Рис. 10.5. Прямоугольная аппроксимация спектра световой волны

$$\begin{aligned} dP_{21}^{\text{спонт}} &= A_{21}\hbar\omega\, dN_2, \\ dP_{12}^{\text{вын}} &= B_{12}\hbar\omega\, u(\omega)\, dN_1, \\ dP_{21}^{\text{вын}} &= B_{21}\hbar\omega\, u(\omega)\, dN_2. \end{aligned} \tag{10.22}$$

Здесь $u(\omega)$ — спектральная плотность падающего излучения на частоте $\omega$, $\hbar\omega$ — энергия кванта, $A_{21}$ — вероятность спонтанного излучения кванта света атомом в единицу времени, $B_{12}$ — вероятность вынужденного поглощения кванта света атомом в поле излучения единичной спектральной плотности за единицу времени, $B_{21}$ — вероятность вынужденного испускания кванта света атомом в поле излучения единичной спектральной плотности за единицу времени. По существу, формулы (10.22) можно рассматривать как определения коэффициентов $A_{21}$, $B_{12}$, $B_{21}$.

Полная мощность излучения данного элемента среды есть

$$dP = dP_{21}^{\text{спонт}} + dP_{21}^{\text{вын}} - dP_{12}^{\text{вын}}. \tag{10.23}$$

Используя, для простоты, прямоугольную аппроксимацию спектра излучения (рис. 10.5), нетрудно показать, что для плоской волны интенсивность $I$ и спектральная плотность $u$ света связаны между собой соотношением

$$I = cu\Delta\omega, \tag{10.24}$$

где $\Delta\omega$ — ширина спектра, $c$ — скорость света.

Из (10.22)–(10.24) для приращения интенсивности света $dI = dP/S$ получаем выражение

$$dI = \left[A_{21}N_2 + (B_{21}N_2 - B_{12}N_1)\frac{I}{c\Delta\omega}\right]\hbar\omega\, dz. \tag{10.25}$$

Теперь предположим, что интенсивность света достаточно велика, так, чтобы можно было пренебречь спонтанным излучением, и введем обозначение $B_{12} = B_{21} = B$. Тогда из (10.25) следует, что

$$dI = B(N_2 - N_1)\frac{I}{c\Delta\omega}\hbar\omega\, dz, \tag{10.26}$$

или

$$dI = GI\,dz, \tag{10.27}$$

где

$$G = B(N_2 - N_1)\frac{\hbar\omega}{c\Delta\omega}. \tag{10.28}$$

Из (10.27) находим закон изменения интенсивности света по мере увеличения расстояния $z$, пройденного в среде

$$I(z) = I_0 e^{Gz}. \tag{10.29}$$

Итак, наш расчет показывает, что интенсивность света в среде меняется по экспоненциальному закону, причем знак показателя экспоненты зависит от знака разности населенностей уровней $N_2 - N_1$.

Если среда находится в состоянии теплового равновесия, то в соответствии с формулами (10.7), (10.8) отношение населенностей уровней выражается формулой

$$N_2/N_1 = \exp(-\hbar\omega/kT). \tag{10.30}$$

Оценим величину параметра $\hbar\omega/kT$ для видимого диапазона частот и комнатной температуры. Полагая $T = 300$ К, $\omega = 2\pi c/\lambda$, $\lambda = 0{,}5 \times 10^{-4}$ см, $c = 3 \times 10^{10}$ см/с, $k = 1{,}38 \times 10^{-16}$ эрг/К, $\hbar = 1{,}05 \times 10^{-27}$ эрг·с, получим

$$\hbar\omega/kT \approx 10^2. \tag{10.31}$$

Из (10.30), (10.31) следует, что тепловой заселенностью верхнего рабочего уровня можно пренебречь. Полагая $N_1 = N$, $N_2 = 0$, получим из (10.28), (10.29)

$$I(z) = I_0 \exp(-|G|z), \tag{10.32}$$

где

$$|G| = NB\frac{\hbar\omega}{c\Delta\omega}. \tag{10.33}$$

Очевидно, формула (10.32) описывает обычное поглощение света в среде ("закон Бугера"). При этом выражение для коэффициента поглощения (10.33), который может быть вычислен также в классической модели (см. лекцию 7), позволяет установить следующее соотношение между параметрами классической и квантовой моделей:

$$G = \left(\frac{N_2 - N_1}{N}\right)\delta(\omega). \tag{10.34}$$

Здесь $\delta(\omega)$ — классический коэффициент поглощения света.

Однако в отличие от классической модели, квантовая модель предсказывает возможность экспоненциального *усиления света* в среде. Согласно (10.28), (10.29) для этого необходимо, чтобы населенность верхнего рабочего уровня превышала населенность нижнего уровня

$$N_2 > N_1, \tag{10.35}$$

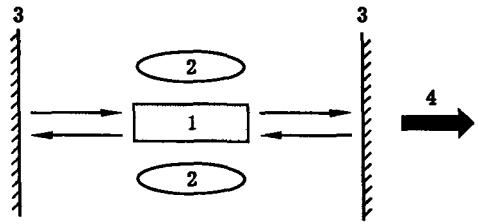



Рис. 10.6. Принципиальная схема лазера. 1 — активный элемент, 2 — система накачки, 3 — оптический резонатор, 4 — генерируемое излучение

т. е. чтобы имела место *инверсия населенностей*. Именно этот эффект используется в лазере.

Инверсию населенностей в лазерах создают разными способами. Чаще всего для этого используют облучение светом ("оптическая накачка"), электрический разряд, электрический ток, химические реакции.

Для того чтобы от режима *усиления* перейти к режиму *генерации* света, в лазере, как и в любом генераторе, используют *обратную связь*. Обратная связь в лазере осуществляется с помощью *оптического резонатора*, который в простейшем случае представляет собой пару параллельных зеркал.

Принципиальная схема лазера показана на рис. 10.6. Она содержит *активный элемент, резонатор, источник накачки*.

Лазер работает следующим образом. Сначала источник накачки (например, мощная лампа-вспышка), воздействуя на рабочее вещество (активный элемент) лазера, создает в нем инверсию населенностей. Затем инвертированная среда начинает спонтанно испускать кванты света. Под действием спонтанного излучения начинается процесс вынужденного излучения света. Благодаря инверсии населенностей этот процесс носит лавинообразный характер и приводит к экспоненциальному усиления света. Потоки света, идущие в боковых направлениях, быстро покидают активный элемент, не успевая набрать значительную энергию. В то же время световая волна, распространяющаяся вдоль оси резонатора, многократно проходит через активный элемент, непрерывно набирая энергию. Благодаря частичному пропусканию света одним из зеркал резонатора, излучение выводится наружу, образуя лазерный луч.

В полном виде концепцию лазера разработали Н. Г. Басов, А. М. Прохоров в России и Ч. Таунс, А. Шавлов в США. Первый лазер на кристалле рубина создал в 1960 г. американский исследователь Т. Мейман.

Условия самовозбуждения лазера. Рассмотрим модель лазера, показанную на рис. 10.7. Будем считать, для простоты, что резонатор лазера целиком заполнен активной средой. Пусть $\lambda$ — длина волны генерируемого излучения, $G$ — коэффициент усиления света в инвертированной среде, $L$ — длина резонатора, $R_1$ и $R_2$ — коэффициенты отражения зеркал по амплитуде световой волны.

Для самовозбуждения лазера необходимо, чтобы усиление света за счет вынужденного излучения в инвертированной среде превышало величину потерь. Если считать, что потери связаны только с выводом света из резонатора, т. е. с неполным отражением света зеркалами, то условие возникновения генерации можно представить в виде

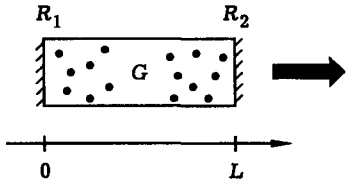



Рис. 10.7. К выводу условий самовозбуждения лазера

$$R_1 R_2 \, e^{GL} \geq 1. \tag{10.36}$$

Данное условие называют амплитудным условием самовозбуждения лазера.

Другое условие самовозбуждения, называемое *фазовым,* состоит в том, что на длине резонатора должно укладываться целое число полуволн генерируемого излучения:

$$L = n\frac{\lambda}{2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \,. \tag{10.37}$$

При выполнении этого условия фазовый набег световой волны при двойном проходе резонатора кратен величине $2\pi$, что обеспечивает оптимальные условия для усиления света.

Рассмотрим теперь некоторые конкретные типы лазеров.

Рубиновый лазер. Рубин представляет собой кристалл окиси алюминия, в котором часть атомов алюминия заменена атомами хрома. Чем больше хрома, чем ярче окраска кристалла. Рубин имеет красный или розовый цвет. Это объясняется тем, что атомы хрома в кристалле поглощают широкую полосу зеленого и желтого света и пропускают только красный и голубой свет. В лазере Меймана был использован бледно-розовый кристалл рубина, содержащий 0,05% хрома.

На рис. 10.8 показана схема энергетических уровней атома хрома в кристалле рубина. Рубиновый лазер работает по так называемой "трехуровневой" схеме. Сначала уровень 3 большой спектральной ширины заселяется атомами хрома под воздействием мощной вспышки света ксеноновой лампы. С уровня 3 атомы совершают быстрый безызлучательный переход на узкий энергетический уровень 2. Уровень 2 является *метастабильным,* время жизни атома на этом уровне достаточно велико; оно составляет порядка $10^{-3}$ с. Это позволяет атомам хрома накапливаться на уровне 2, и если скорость перевода атомов из основного состояния 1 в возбужденное состояние 3 достаточно велика, то через некоторое время заселенность уровня 2 может превысить заселенность уровня 1, т. е. возникнет инверсия населенностей. Далее атомы совершают переход с уровня 2 на уровень 1, при котором генерируется излучение с длиной волны 6943 Å.

На рис. 10.9 показан основной элемент конструкции лазера Меймана: кристалл рубина и ксеноновая лампа-вспышка.

Отметим здесь важное достоинство трехуровневой схемы лазера, заключающееся в том, что в такой схеме частота возбуждающего света накачки не совпадает с частотой генерируемого излучения (см. рис. 10.8). Оптическая накачка в

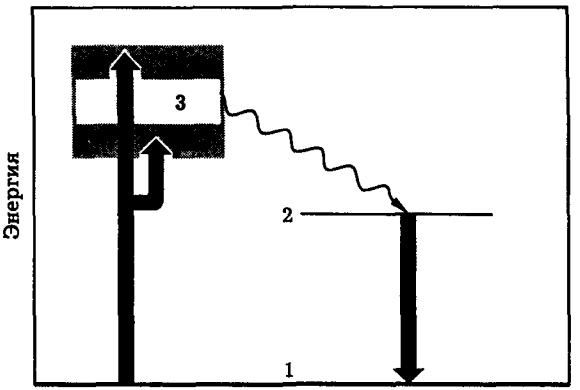



Рис. 10.8. Схема энергетических уровней атома хрома в кристалле рубина и принцип работы рубинового лазера

двухуровневой схеме, когда ее частота совпадает с частотой генерируемого излучения, не позволяет создать инверсию населенностей. Причина заключается в том, что в последнем случае кванты накачки вызывают переходы атомов в обоих направлениях одновременно: как с нижнего рабочего уровня на верхний, так и обратно — с верхнего на нижний. В итоге даже при очень большой мощности накачки удается добиться лишь выравнивания населенностей уровней, но не инверсии населенностей.

На лекции демонстрируется вспышка рубинового лазера. В качестве активного элемента в этом лазере используется рубиновый стержень диаметром 10 мм и длиной 140 мм. Оптическая накачка осуществляется с помощью двух импульсных ксеноновых ламп. Питание ламп осуществляется с помощью батареи высоковольтных конденсаторов общей емкостью 800 мкф, заряжаемой от сети через выпрямитель до напряжения 3000 В.

Физические процессы в лазере поясняются с помощью явления *люминесценции* (рис. 10.10). В этом опыте кристалл рубина просвечивается зеленым лучом аргонового лазера, направленным вдоль оси кристалла. В затемненной аудитории хорошо видно боковое свечение рубина, которое имеет красный цвет.

Процесс люминесценции идет по схеме, показанной на рис. 10.8, и отличается от лазерной генерации только тем, что в данном случае мощность накачки невелика, и между уровнями энергии 1 и 2 не достигается инверсия населенно-

Рис. 10.9. Конструкция лазера Меймана

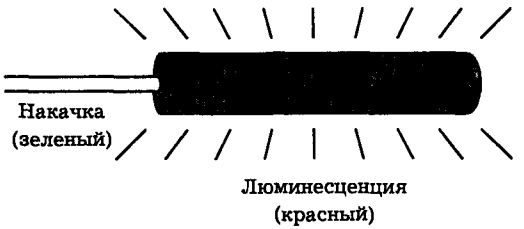



Рис. 10.10. Наблюдение люминесценции кристалла рубина в луче аргонового лазера

стей. Аналогичным образом в лазере Меймана наблюдается люминесценция, а не лазерная генерация, если мощность лампы-вспышки недостаточно велика. Лишь при использовании очень мощной лампы вспышки возникает лазерная генерация.

Оценим, в качестве примера, мощность импульсной лампы накачки, необходимой для работы рубинового лазера. Рубин содержит около $10^{19}$ атомов хрома в кубическом сантиметре. Для возбуждения генерации нужно перевести по крайней мере половину этих атомов, т. е. $5 \times 10^{18}$ атомов в каждом кубическом сантиметре на уровень 3 (рис. 10.8). На перевод каждого атома тратится энергия $W_3 - W_1 = 4 \times 10^{-12}$ эрг/атом. Полная энергия равна $2 \times 10^7$ эрг/см$^3$. Но при этом атомы должны переходить в состояние 2 за время, равное или меньшее, чем *время жизни* $\Delta t$ атомов на уровне $W_2$ (это время равно примерно $2 \times 10^{-3}$ с). Если переход атомов в возбужденное состояние будет происходить медленнее, то из-за спонтанных и релаксационных переходов в состояние 1 инверсия населенностей не создается. Таким образом, для работы рубинового лазера в каждом кубическом сантиметре кристалла рубина должна поглощаться энергия накачки порядка $2 \times 10^7$ эрг за время $10^{-3}$ с. Это означает, что поглощаемая мощность должна составлять около 2 кВт на 1 кубический сантиметр кристалла. При объеме кристалла в 10 см$^3$ необходимая мощность накачки равна 20 кВт. Лампа-вспышка испускает свет, близкий к белому, т. е. имеющий широкий частотный спектр. Энергетические полосы хрома в рубине позволяют использовать около 15% света лампы-вспышки. Поэтому полная мощность лампы-вспышки должна быть около 200 кВт.

Гелий-неоновый лазер. Этот лазер работает на смеси газов гелия и неона. Активным веществом лазера является неон. Атомы гелия играют вспомогательную роль, они необходимы для создания инверсии населенностей.

В лазере смесь гелия и неона заключена в стеклянную трубку, в которой с помощью специального устройства поддерживается непрерывный электрический разряд. Электроны, набирающие энергию в электрическом поле разряда, играют роль первичных носителей энергии.

Принцип работы лазера иллюстрирует рис. 10.11. В электрическом разряде происходит возбуждение атомов гелия электронным ударом (рис. 10.11, *а*). При столкновении атома гелия с атомом неона происходит передача возбуждения последнему (рис. 10.11, *б*), при этом атом гелия возвращается в основное состояние, а атом неона оказывается в возбужденном состоянии 3. Вероятность столкновительной передачи энергии весьма велика из-за того, что возбужденные состояния атомов гелия и неона характеризуются почти одинаковыми энергиями. Итак, в результате атомных столкновений часть атомов неона переходит в возбужденное состояние 3. Между этим состоянием и состоянием 2 с меньшей

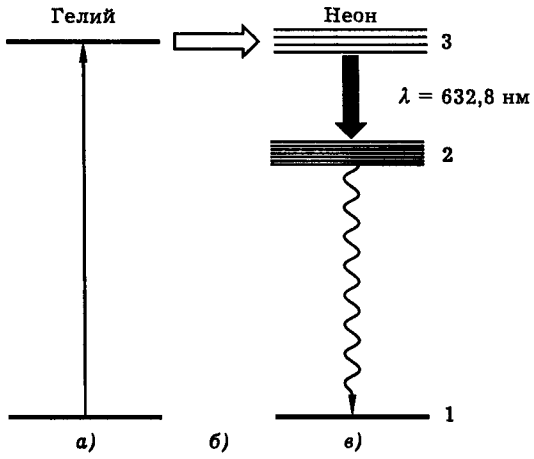



Рис. 10.11. Схема работы гелий-неонового лазера

энергией возникает инверсия населенностей, так как состояние 2, в котором энергия атома неона составляет около 20 эВ, почти не заселено. Наконец, при переходе атомов неона из состояния 3 в состояние 2 испускается излучение с длиной волны 6328 Å, которое и образует лазерный луч.

Особенностью гелий-неонового лазера является то, что нижний рабочий уровень (уровень 2 на рис. 10.11, *в*) расположен достаточно высоко и вследствие этого имеет очень малую населенность. Это облегчает создание инверсии населенностей. В итоге возникает возможность непрерывной работы лазера при очень малом потреблении энергии — около 50 Вт в первых моделях. Мощность излучения гелий-неонового лазера составляет обычно порядка 10 мВт.

Лазер на углекислом газе. Этот лазер относится к семейству молекулярных лазеров, в которых лазерное излучение генерируется в результате переходов между колебательными энергетическими уровнями молекул. $CO_2$ лазер генерирует инфракрасное излучение на длине волны 10,6 мкм. Данный лазер отличается высоким КПД (15–20%) и высокой мощностью генерации в непрерывном режиме, которая может достигать $10^6$ Вт.

На рис. 10.12 показаны типы колебаний молекулы $CO_2$ (симметричное, деформационное, антисимметричное колебания), а на рис. 10.13 — квантовые уровни энергии, соответствующие этим колебаниям.

Возбуждение колебаний молекулы $CO_2$ осуществляется путем электронного удара в электрическом разряде. Рабочее вещество $CO_2$ лазера состоит из смеси углекислого газа, азота и гелия. Столкновения электронов газового разряда, атомов и молекул в такой смеси приводят к эффективному заселению верхнего и быстрому опустошению нижнего уровней лазерного перехода, что увеличивает инверсию населенностей и мощность генерируемого излучения.

В одной из первых моделей $CO_2$ лазера, созданной С. Пейтелом, рабочее вещество состояло из углекислого газа и азота с давлениями 3 тор и гелия при 20 тор. Лазер генерировал непрерывное излучение на длине волны 10,6 мкм при выходной мощности около 80 Вт на метр разрядной трубки. Рабочая эффективность в этом случае превышала 20%.

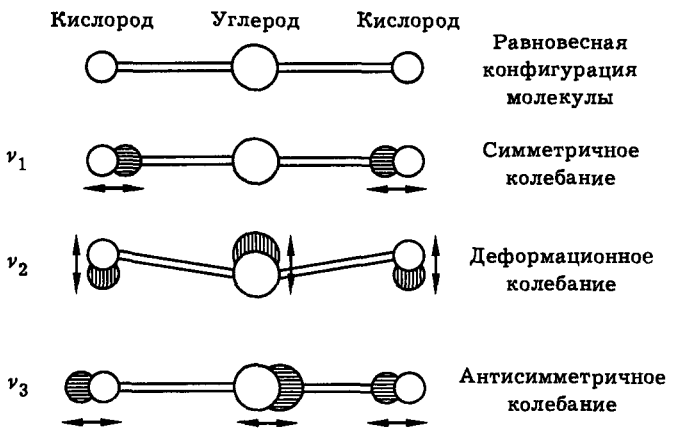



Рис. 10.12. Типы колебаний молекулы углекислого газа

Типичные лазеры на углекислом газе имеют длину около двух метров и могут создавать непрерывное лазерное излучение мощностью около 150 Вт. Ничто не препятствует созданию очень длинного лазера для излучения значительно большей выходной мощности, так как она линейно увеличивается с увеличением длины. Действительно, сотрудники компании "Рейтиэн" сконструировали "складной" лазер на углекислом газе длиной 182,5 м, который генерировал непрерывное излучение мощностью 8,8 кВт. В настоящее время имеются еще более мощные установки.

**Характеристики лазерного излучения.** К числу основных параметров, характеризующих лазерное излучение, относятся длина волны излучения, энергия и длительность импульса, мощность генерации в непрерывном режиме, ширина спектра, диапазон перестройки, угловая расходимость излучения. Для разных типов лазеров эти параметры меняются в очень широких пределах. Так, эксимерные лазеры генерируют ультрафиолетовое излучение с

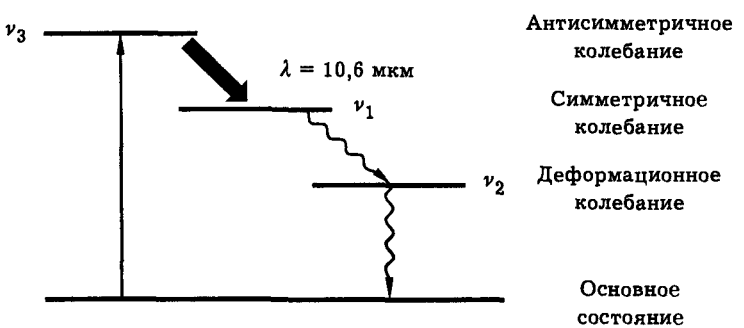



Рис. 10.13. Уровни энергии, соответствующие колебаниям молекулы углекислого газа, и схема работы $CO_2$ — лазера

длиной волны 200–300 нм, а лазер на углекислом газе генерирует инфракрасное излучение с длиной волны около 10 мкм. Лазеры на растворах органических красителей способны плавно менять длину волны излучения в пределах полосы частот шириной порядка 1000 см$^{-1}$. Специальные модели гелий-неонового лазера генерируют излучение с очень узкой спектральной линией, ширина которой составляет $10^2 - 10^3$ Гц. Угловая расходимость лазерного луча близка к дифракционному пределу. С помощью лазеров фактически достигнут предел длительности световых импульсов. Так, получены импульсы длительностью $4{,}5 \times 10^{-15}$ с — всего лишь в два раза превышающей период световых колебаний. Мощность непрерывной генерации $CO_2$ лазера достигает $10^6$ Вт. На установках для лазерного термоядерного синтеза созданы лазеры, генерирующие импульсы длительностью порядка $10^{-9}$ с энергией $10^5$ Дж и мощностью до $10^{14}$ Вт. Фокусировка такого излучения позволяет получить интенсивность света на уровне $10^{19}$ Вт/см$^2$, при этом напряженность поля в световой волне достигает $10^{11}$ В/см, т. е. превышает напряженность внутриатомного электрического поля.

Столь широкий диапазон свойств лазера открывает чрезвычайно широкие возможности его применения. О некоторых применениях сверхкоротких световых импульсов и сверхсильных световых полей рассказано в дополнении "Оптика фемтосекундных лазерных импульсов" (см. ч. IV).

**Генерация сверхкоротких световых импульсов.** Рассмотрим подробнее спектральные и временны́е характеристики излучения лазера.

Фазовое условие самовозбуждения лазера (10.37) показывает, что лазерная генерация идет на дискретных частотах, определяемых формулой

$$\nu_n = n\,\Delta\nu, \quad \Delta\nu = 1/2L, \quad n = 1, 2, 3, \ldots\,. \tag{10.38}$$

Так как эти частоты зависят только от длины резонатора $L$, их можно назвать частотами *собственных мод резонатора.*

Количество возбуждаемых собственных мод $M$ зависит от соотношения между величиной межмодового интервала $\Delta\nu$ и шириной спектральной полосы усиления лазера $\Delta\nu_y$, а именно

$$M = \Delta\nu_y/\Delta\nu. \tag{10.39}$$

Заметим, что, согласно формуле (10.34), ширина линии усиления лазера $\Delta\nu_y$ совпадает с шириной спектральной линии $\Delta\nu_п$ поглощения активного элемента лазера в отсутствие инверсии населенностей. Для разных типов лазеров эта величина меняется в широких пределах. Например, для гелий-неонового лазера величина $\Delta\nu_y$ определяется доплеровским уширением спектральной линии и составляет $\Delta\nu_y \approx 0{,}04$ см$^{-1}$ (см. лекцию 6). Для рубинового лазера, а также для лазера на кристалле граната с неодимом $\Delta\nu_y = 2 - 4$ см$^{-1}$. Для лазера на стекле с неодимом $\Delta\nu_y = 10^2$ см$^{-1}$, а для лазера на растворе органического красителя $\Delta\nu_y = 10^3$ см$^{-1}$. Полагая длину резонатора $L = 50$ см, получим $\Delta\nu = 1/2L = 10^{-2}$ см$^{-1}$, и число генерируемых мод $M \approx 4$ для гелий-неонового лазера, $M \approx 10^2$ для рубинового лазера, $M \approx 10^4$ для лазера на стекле с неодимом. Таким образом, лазерное излучение является, как правило, существенно *многомодовым.* Характерный вид спектра излучения многомодового лазера показан на рис. 10.14.

Одномодовый лазер. Одна из принципиальных проблем лазерной физики заключается в том, как получить *монохроматическое излучение,* т. е.

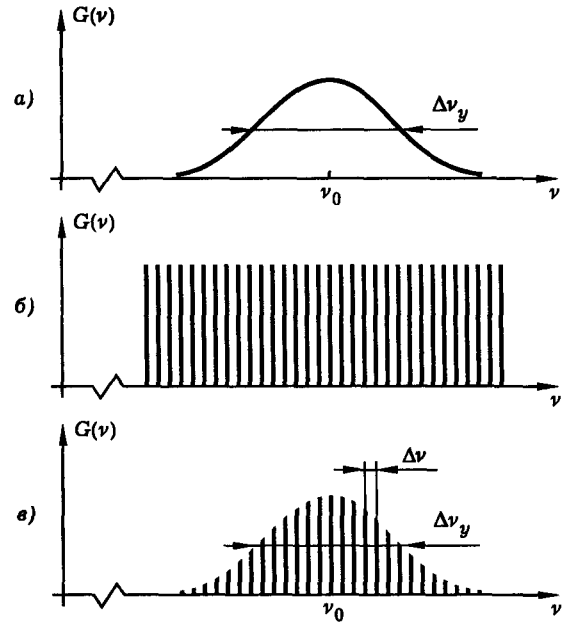



Рис. 10.14. Спектр излучения многомодового лазера. Спектр полосы усиления (*а*), частоты собственных мод резонатора (*б*), спектр генерации лазера (*в*)

излучение, близкое по своей структуре к идеальной гармонической волне. Для решения этой задачи используют *одномодовый лазер* — лазер, работающий в режиме генерации отдельной продольной моды.

Принципиальная схема одномодового лазера показана на рис. 10.15. Особенность этого лазера состоит в том, что внутри резонатора находится элемент, осуществляющий частотную фильтрацию излучения. Частотный фильтр состоит из дисперсионного элемента (призма, дифракционная решетка, эталон Фабри–Перо) и диафрагмы. Действие фильтра состоит в том, что дисперсионный элемент "разворачивает" частотный спектр излучения по пространству, а диафрагма выделяет нужную компоненту (моду). Таким образом, лазер генерирует излучение на частоте отдельной продольной моды. Поворотом призмы можно изменять частоту генерации.

Наиболее узкополосное излучение получают в настоящее время с помощью гелий-неоновых лазеров. Специальные модели лазеров генерируют излучение с шириной спектральной линии около $10^2$ Гц. Добротность такого излучения, т. е. отношение средней частоты излучения к его спектральной ширине

$$Q = \nu/\Delta\nu \tag{10.40}$$

(рис. 10.16) достигает величины $10^{13}$. Отметим, что данная величина на много порядков превышает добротность излучения любого нелазерного источника света.

Работа лазера в режиме синхронизации мод. Генерация сверхкоротких световых импульсов. Если узкополосный одномодовый лазер генерирует световые колебания синусоидальной формы, то вре-

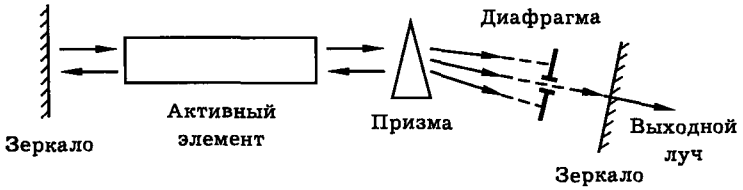



Рис. 10.15. Принципиальная схема одномодового лазера

менно́й ход излучения многомодового лазера может быть разным, и зависит от того, каковы амплитуды и фазы световых колебаний на частотах отдельных мод. Сказанное иллюстрирует рис. 10.17, на котором показан временно́й ход излучения многомодового лазера в двух противоположных предельных случаях — для полностью независимых (*а*) и жестко синхронизованных (*б*) колебаний отдельных мод. Видно, что в первом случае излучение подобно *оптическому шуму*, в то время как во втором лазер генерирует мощный *короткий импульс*. Режим генерации коротких импульсов называют режимом *синхронизации мод*.

Остановимся подробнее на этом режиме, представляющем большой практический интерес. Покажем принципиальную возможность генерации коротких импульсов света многомодовым лазером и оценим предельную длительность импульса.

Согласно формулам (10.38), частоты собственных мод резонатора образуют эквидистатный спектр (рис. 10.14, *б*). Обозначим межмодовый интервал $\Delta\omega$, полное число мод $N$, несущую частоту $\omega_0$, и будем считать, для простоты, что амплитуды и фазы всех мод одинаковы. Тогда напряженность светового поля в некоторой фиксированной точке пространства можно представить в виде

$$E(t) = \sum_{n=1}^{N} A_0 \cos \omega_n t, \tag{10.41}$$

где

$$\omega_n = \omega_0 + n\Delta\omega, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, N. \tag{10.42}$$

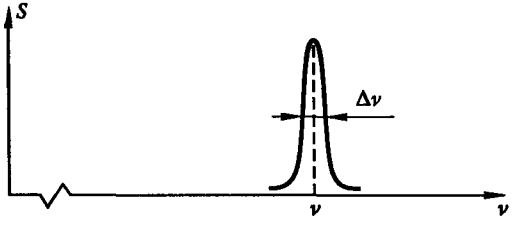



Рис. 10.16. К понятию добротности излучения

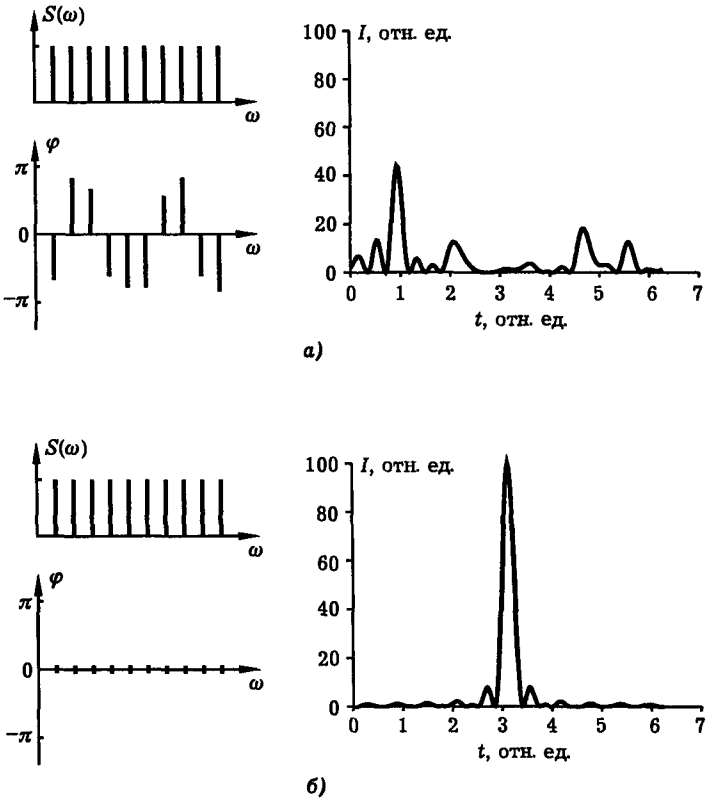



Рис. 10 17. Сектры (слева) и временóй ход (справа) излучения лазера с несинхронизованными модами (*а*) и в режиме полной синхронизации мод (*б*)

Вычислим сумму (10.41). Для этого воспользуемся формулами Эйлера

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \tag{10.43}$$

и выражением для суммы конечной геометрической прогрессии

$$S_N = a_1 \frac{1 - q^N}{1 - q}, \tag{10.44}$$

где $a_1$ — первый член прогрессии, $q$ — знаменатель прогрессии, $N$ — число суммируемых членов прогрессии. После несложных преобразований получим

$$E(t) = A(t)\cos\omega t, \tag{10.45}$$

где

$$\omega = \omega_0 + \left(\frac{N+1}{2}\right)\Delta\omega, \tag{10.46}$$

$\omega$ — средняя частота,

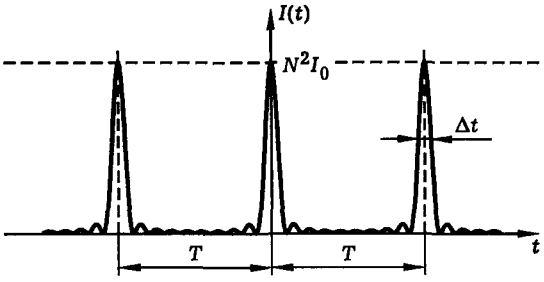



Рис. 10.18. Временнóй ход излучения лазера в режиме синхронизации мод

$$A(t) = A_0 \frac{\sin(N\Delta\omega t/2)}{\sin(\Delta\omega t/2)}, \tag{10.47}$$

$A(t)$ — амплитуда колебаний поля. Интенсивность излучения как функция времени выражается формулой

$$I(t) = I_0 \frac{\sin^2(N\Delta\omega t/2)}{\sin^2(\Delta\omega t/2)}, \tag{10.48}$$

где $I_0$ — интенсивность, соответствующая отдельной моде.

Характерный вид зависимости $I(t)$ при $N \gg 1$ показан на рис. 10.18. Видно, что излучение лазера представляет собой последовательность мощных коротких импульсов.

Пользуясь формулой (10.48), нетрудно определить основные параметры импульсов. Длительность отдельного импульса обратно пропорциональна полной ширине спектра лазера:

$$\Delta t = \frac{2\pi}{N\Delta\omega}. \tag{10.49}$$

Максимальная интенсивность излучения пропорциональна квадрату числа мод:

$$I_{\max} = I_0 N^2. \tag{10.50}$$

Период следования импульсов определяетя межмодовым интервалом:

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}. \tag{10.51}$$

Наглядное представление о процессе синхронизации мод можно получить с помощью механической модели, показанной на рис. 10.19. Модель представляет собой набор маятников, длины которых подобраны так, что частоты колебаний образуют эквидистантную последовательность вида (10.42). Отклонив все маятники от положения равновесия и одновременно отпустив их, можно наблюдать сначала расфазировку колебаний, а затем обратный процесс фазировки, что эквивалентно синхронизации мод.

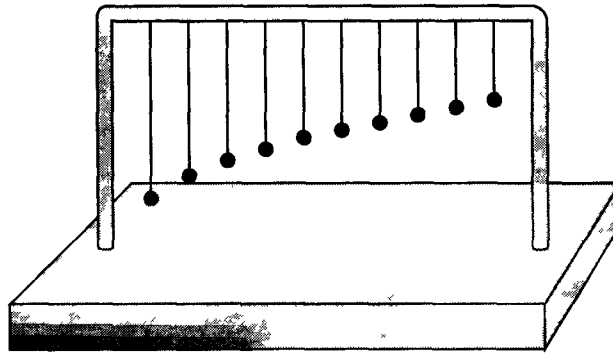


Рис. 10.19. Механическая модель для демонстрации явления синхронизации мод

Используя формулу (10.38), выражение для периода следования импульсов (10.51) можно представить в виде

$$T = \frac{2L}{c}. \tag{10.52}$$

Формула (10.52) показывает, что период следования импульсов равен двойному времени пробега света через резонатор. Это позволяет сделать вывод, что в режиме синхронизации мод в резонаторе формируется короткий плотный "сгусток" излучения. При каждом попадании этого сгустка на выходное зеркало резонатора часть излучения выходит наружу, образуя последовательность световых импульсов, следующих с периодом $T = 2L/c$. В связи с этим становится ясно, что роль синхронизатора мод может играть *насыщающийся поглотитель* (просветляющийся фильтр), помещенный внутрь лазерного резонатора. Препятствуя усилению света постоянной интенсивности, такой элемент становится прозрачным для мощных, коротких импульсов света. Данный способ генерации сверхкоротких лазерных импульсов широко используется на практике и называется способом *пассивной синхронизации мод*. Принципиальная схема лазера с пассивной синхронизацией мод показана на рис. 10.20. В качестве насыщающегося поглотителя используют обычно тонкую кювету со специально подобранным красителем. Существуют и другие способы синхронизации мод.

Оценки. Используя формулу $\Delta\omega = 2\pi c\Delta\nu_y$, где $\Delta\nu_y$ — ширина спектральной полосы усиления лазера в см$^{-1}$, перепишем формулу (10.49) в виде

$$\Delta t = \frac{1}{c\Delta\nu_y}. \tag{10.53}$$

Таким образом, предельная длительность импульса, генерируемого в режиме синхронизации мод, оределяется шириной линии усиления лазера.

*Лазер на неодимовом стекле* имеет полосу усиления шириной 100 см$^{-1}$. В этом случае $\Delta t$ = 0,33 пс = 330 фс (1 пс = 1 пикосекунда = $10^{-12}$ с, 1 фс = 1 фемтосекунда = $10^{-15}$ с). Еще более широкой полосой усиления обладают *лазеры на красителях*: $\Delta\nu_y$ = 1000 см$^{-1}$. В этом случае возможна генерация импульсов с длительностью $\Delta t$ = 33 фс. Наконец, лазер на кристалле сапфира, легированном трехвалентными ионами титана (титан-сапфировый

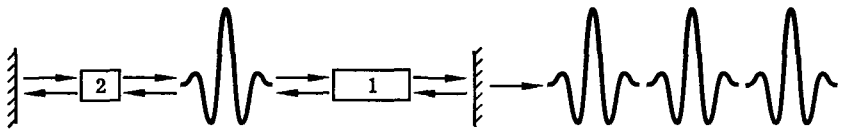



Рис 10 20 Работа многомодового лазера в режиме пассивной синхронизации мод Внутри лазерного резонатора находится активный элемент (1), а также элемент, осуществляющий синхронизацию мод — насыщающийся поглотитель (просветляющийся фильтр — 2) Под действием фильтра излучение в резонаторе приобретает вид короткого плотного сгустка При каждом попадании сгустка на выходное зеркало часть излучения выходит наружу, образуя последовательность импульсов лазерного излучения, следующих с периодом $T = 2L/c$

лазер, Ti:sapphire) имеет полосу усиления шириной $\Delta\nu_y = 3500\,\text{см}^{-1}$, что позволяет генерировать импульсы длительностью $\Delta t = 10$ фс. Принципиальный предел длительности импульса устанавливает период световых колебаний, равный примерно $2 \times 10^{-15}$ с. В настоящее время получены импульсы длительностью $4{,}5 \times 10^{-15}$ с, что близко к фундаментальному пределу. О методах генерации предельно коротких импульсов света и их применениях рассказано в дополнении "Оптика фемтосекундных лазерных импульсов" (см. ч IV).

## Литература


1 Лазеры Сборник из серии "Над чем думают физики", вып 11 — М Наука, 1977
2 Квантовая электроника Маленькая энциклопедия/Под ред М Е Жаботинского — М Сов радио, 1969
3 *Клышко Д Н* Физические основы квантовой электроники —М Наука, 1986
4 *Карлов Н В* Лекции по квантовой электронике —М Наука, 1988
5 *Басов Н. Г* О квантовой электронике —М Наука, 1987
6 *Фок В А* Начала квантовой механики —М Наука, 1976
7 Физическая энциклопедия/Под ред А М Прохорова — М СЭ, 1988
8 *Мигдал А Б* Квантовая физика для больших и маленьких Библиотечка "Квант" Вып 75 — М Наука, 1989
9 *Алешкевич В А , Киселев Д. Ф , Корчажкин В. В* Лазеры в лекционном эксперименте — М Изд-во МГУ, 1985
10 *Тригг Дж* Решающие эксперименты в современной физике — М Мир, 1974
11 Сверхкороткие световые импульсы/Под ред С Шапиро — М Мир, 1981
12 *Бронштейн И Н., Семендяев К А.* Справочник по математике — М . Наука, 1967
13 *Millikan R A*//Physical Review 1916 V 7 P 355
14 *Einstein A*//Annalen der Physik 1905 V 17 P 132
15 *Einstein A*//Mitteilungen Physikalischen Gesellschaft 1916, No 18 P 47
16 *Maiman T H*//Nature 1960 V 187 P 493
17 *Schavlow A L , Townes C H*//Physical Review 1958 V 112 P 1940

# Дополнение 6

# Электродинамика излучения

*Потенциалы электромагнитного поля. Излучение точечного заряда. Излучение диполя в дальней зоне. Излучение ротатора. Излучение квадруполя. Электрическое поле заряда, движущегося прямолинейно и равномерно.*

Согласно классическим представлениям, элементарным источником света является ускоренно движущаяся заряженная частица. Поэтому математическое описание излучения заряда, основанное на уравнениях Максвелла, имеет для оптики принципиальное значение. В этом дополнении рассказано о том как проблема излучения решается в классической электродинамике. Сначала излагается общий подход, основанный на теории потенциалов электромагнитного поля. Затем вычисляются характеристики излучения точечного заряда, диполя, ротатора, квадруполя. Наше изложение следует в основном книгам [1–3].

**Потенциалы электромагнитного поля.** Рассмотрим произвольную систему электрических зарядов, движущихся в вакууме. Для отыскания поля излучения будем исходить из уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \tag{Д6.1}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \tag{Д6.2}$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho, \tag{Д6.3}$$

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0. \tag{Д6.4}$$

Заметим, что плотность заряда $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ и плотность тока $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t)$ не являются здесь независимыми. Они связаны соотношением

$$\operatorname{div}\vec{j} + \partial\rho/\partial t = 0, \tag{Д6.5}$$

которое вытекает из уравнений (Д6.2), (Д6.3) и называется *уравнением непрерывности.* Это уравнение выражает закон сохранения электрического заряда.

Для решения уравнений Максвелла удобно ввести некоторые вспомогательные функции, называемые *потенциалами электромагнитного поля. Векторный потенциал* $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$ определяется формулой

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}. \tag{Д6.6}$$

Такое представление поля $\vec{H}$ обращает уравнение (Д6.4) в тождество. Подстановка (Д6.6) в (Д6.1) приводит к уравнению

$$\operatorname{rot}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0,$$

которое будет удовлетворено, если положить

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi. \qquad (Д6.7)$$

Здесь $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$ — *скалярный потенциал*. Подставив (Д6.6) и (Д6.7) в (Д6.2), получим уравнение

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} + \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right). \qquad (Д6.8)$$

Так как формулы (Д6.6) и (Д6.7) определяют только ротор векторного потенциала и градиент скалярного потенциала, т. е. определяют $\vec{A}$ и $\varphi$ неоднозначно, оказывается возможным наложить на потенциалы некоторые дополнительные условия. В частности, можно потребовать, чтобы

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \qquad (Д6.9)$$

Это уравнение называют лоренцевой калибровкой потенциала. Условие (Д6.9) позволяет переписать уравнение (Д6.8) в виде

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}. \qquad (Д6.10)$$

Наконец, подставляя (Д6.7) в (Д6.5) и принимая во внимание (Д6.9), получим уравнение

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho. \qquad (Д6.11)$$

Для отыскания структуры поля излучения достаточно найти решение уравнений (Д6.10), (Д6.11) для потенциалов поля. После этого поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ можно вычислить по формулам (Д6.6), (Д6.7).

Рассмотрим уравнение (Д6.11). Так как это уравнение линейно, его решение может быть представлено в виде суперпозиции скалярных потенциалов, создаваемых точечными электрическими зарядами, находящимися в различных точках пространства. Таким образом, решение уравнения (Д6.11) в своей главной части сводится к отысканию потенциала неподвижного точечного заряда, который, однако, может меняться во времени (с этой точки зрения движение заряда есть "перетекание" его из одной точки пространства в другую).

Пусть $q = q(t)$ — мгновенная величина электрического заряда, расположенного в некоторой фиксированной точке "О". Если другие заряды отсутствуют, то везде, кроме точки "О", уравнение (Д6.11) является однородным:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0. \qquad (Д6.12)$$

Поле точечного заряда должно обладать сферической симметрией. Решение уравнения (Д6.12), удовлетворяющее этому условию, есть сферическая волна:

$$\varphi = \frac{1}{r}f(t - r/c), \qquad (Д6.13)$$

где $r$ есть расстояние от заряда до точки наблюдения, $f$ — произвольная (дифференцируемая) функция своего аргумента, $t$ — время, $c$ — скорость света. С другой стороны ясно, что в пределе $r \to 0$ эффекты распространения должны исчезать, и потенциал точечного заряда должен стремиться к своему квазистатическому значению:

$$\lim_{r\to 0} \varphi(r,t) = \frac{1}{r} q(t). \tag{Д6.14}$$

Сопоставляя (Д6.13) и (Д6.14), находим искомый потенциал поля переменного точечного заряда:

$$\varphi(r,t) = \frac{1}{r} q(t - r/c) \tag{Д6.15}$$

или

$$\varphi(r,t) = \frac{1}{r} \rho(t - r/c)\, dV.$$

Отсюда для произвольной системы движущихся зарядов

$$\varphi(\vec{r},t) = \int \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, \rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right) d^3r'. \tag{Д6.16}$$

Аналогичный вид имеет решение уравнения (Д6.10):

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c} \int \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right) d^3r'. \tag{Д6.17}$$

В формулах (Д6.16), (Д6.17) интегрирование следует проводить по всей области пространства, где имеются заряды и токи.

**Излучение точечного заряда.** Вычислим поле излучения точечного заряда $q$, движущегося по заданному закону $\vec{r} = \vec{r}_0(t)$. Предварительно перепишем формулы (Д6.16), (Д6.17) в виде

$$\varphi(\vec{r},t) = \iint \frac{1}{R} \rho(\vec{r}', t')\, \delta\left(t' + \frac{R}{c} - t\right) d^3r'\, dt', \tag{Д6.18}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c} \iint \frac{1}{R} \vec{j}(\vec{r}', t')\, \delta\left(t' + \frac{R}{c} - t\right) d^3r'\, dt', \tag{Д6.19}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция, $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$. Данные выражения удобны тем, что они в явном виде устанавливают связь между распределениями зарядов и токов и потенциалами электромагнитного поля.

Для точечного заряда

$$\rho(\vec{r},t) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)), \qquad \vec{j}(\vec{r},t) = q\vec{v}(t)\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)), \tag{Д6.20}$$

где $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}_0(t)$ — скорость заряда. Подставляя (Д6.20) в (Д6.18), (Д6.19) и выполняя интегрирование по пространственным координатам, получим

$$\varphi(\vec{r},t) = q \int \frac{1}{R(t')}\, \delta\left(t' + \frac{R(t')}{c} - t\right) dt', \tag{Д6.21}$$

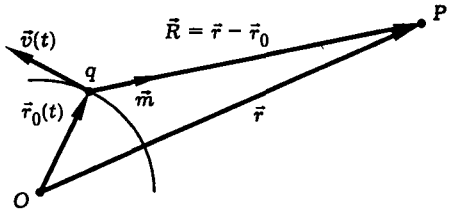



Рис. Д6.1. К расчету поля излучения точечного заряда

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{q}{c}\int \frac{\vec{v}(t')}{R(t')}\,\delta\left(t' + \frac{R(t')}{c} - t\right)\,dt', \tag{Д6.22}$$

где теперь $R$ — расстояние от заряда до точки наблюдения поля, т. е.

$$R(t') = \sqrt{[x - x_0(t')]^2 + [y - y_0(t')]^2 + [z - z_0(t')]^2}. \tag{Д6.23}$$

Взаимное расположение векторов $\vec{r}$, $\vec{r}_0(t)$, $\vec{v}(t)$, а также

$$\vec{R}(t) = \vec{r} - \vec{r}_0(t), \qquad \vec{m} = \vec{R}/R \tag{Д6.24}$$

показано на рис. Д6.1. Из (Д6.23), (Д6.24) вытекают соотношения

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = -\vec{v}, \quad \frac{dR}{dt} = -\vec{m}\vec{v}, \quad \frac{d\vec{m}}{dt} = \frac{\vec{m}(\vec{m},\vec{v}) - \vec{v}}{R}, \quad \vec{\nabla}R = \vec{m}. \tag{Д6.25}$$

Выполним интегрирование по времени в формулах (Д6.21), (Д6.22). В этих формулах аргумент дельта-функции в подынтегральных выражениях является функцией переменной интегрирования. Поэтому предварительно рассмотрим интеграл вида

$$\mathcal{J} = \int g(t)\delta[f(t)]\,dt. \tag{Д6.26}$$

Обозначим через $t_0$ корень уравнения $f(t) = 0$. Тогда в окрестности точки $t_0$

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)\left.\frac{df}{dt}\right|_{t_0} = (t - t_0)\dot{f}(t_0). \tag{Д6.27}$$

Подставляя (Д6.27) в (Д6.26) и интегрируя, получим

$$\int g(t)\delta[f(t)]\,dt = \frac{g(t_0)}{|\dot{f}(t_0)|}. \tag{Д6.28}$$

Введем функцию

$$f(t') = t' + \frac{R(t')}{c} - t. \tag{Д6.29}$$

Применяя правило (Д6.28), получим из (Д6.21), (Д6.22)

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{q}{R(t')}\frac{1}{|\dot{f}(t')|}, \tag{Д6.30}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{q\vec{v}(t')}{cR(t')}\frac{1}{|\dot{f}(t')|}, \tag{Д6.31}$$

где время $t'$ — есть решение уравнения

$$t' + \frac{R(t')}{c} - t = 0 \tag{Д6.32}$$

и

$$\dot{f}(t') = \frac{df}{dt'} = 1 + \frac{1}{c}\frac{dR(t')}{dt'} = 1 - \frac{\vec{m}(t')\vec{v}(t')}{c}. \tag{Д6.33}$$

Подставляя (Д6.33) в (Д6.30), (Д6.31), получим следующие выражения для скалярного и векторного потенциалов:

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{q}{R(t') - \dfrac{\vec{R}(t')\vec{v}(t')}{c}}, \tag{Д6.34}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{q\vec{v}(t')}{c\left[R(t') - \dfrac{\vec{R}(t')\vec{v}(t')}{c}\right]}, \tag{Д6.35}$$

или, в краткой форме,

$$\varphi(\vec{r},t) = q\left[\frac{1}{\varkappa R}\right]_{\text{запазд}}, \tag{Д6.36}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = q\left[\frac{\vec{\beta}}{\varkappa R}\right]_{\text{запазд}}, \tag{Д6.37}$$

где введены обозначения

$$\vec{\beta} = \vec{v}/c, \qquad \varkappa = 1 - \vec{m}\vec{\beta} \tag{Д6.38}$$

и индекс "запазд" указывает на то, что величины в скобках следует брать в момент времени $t'$, определяемый уравнением (Д6.32).

Формулы (Д6.36), (Д6.37) выражают потенциалы электромагнитного поля, создаваемого движущимся точечным зарядом. Они носят название *потенциалов Лиенара–Вихерта*. Согласно этим формулам, поле излучения в точке наблюдения $P$ в момент времени $t$ определяется состоянием движения заряда в предшествующий момент времени $t'$, для которого время распространения светового сигнала из точки нахождения заряда в точку $P$ равно разности $t - t'$.

Для вычисления напряженностей электрического и магнитного полей по формулам (Д6.6), (Д6.7) надо дифференцировать $\varphi$ и $\vec{A}$ по координатам точки наблюдения $x$, $y$, $z$ и по моменту наблюдения $t$. Между тем формулы (Д6.36), (Д6.37) выражают потенциалы как функции от $\vec{r}$ и $t'$. Время же $t'$ в силу уравнения (Д6.32) есть неявная функция от $\vec{r}$ и $t$. Следовательно, при подстановке

формул (Д6.36), (Д6.37) в (Д6.6), (Д6.7) придется дифференцировать неявные функции. Чтобы избежать этого, воспользуемся для потенциалов выражениями (Д6.21), (Д6.22), в которых переменные $x$, $y$, $z$, $t$ фигурируют явным образом.

Заметим, что координаты точки наблюдения $x$, $y$, $z$ входят в (Д6.21), (Д6.22) только через величину $R$, определяемую формулой (Д6.23). С учетом (Д6.25) это позволяет записать оператор дифференцирования по координатам следующим образом:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial R}\vec{\nabla}R = \vec{m}\frac{\partial}{\partial R}. \tag{Д6.39}$$

Подставляя (Д6.21), (Д6.22) в (Д6.6), (Д6.7) и дифференцируя подынтегральные выражения, получим

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &= q\int\left\{\frac{\vec{m}}{R^2}\,\delta\left(t'+\frac{R}{c}-t\right)+\frac{(\vec{\beta}-\vec{m})}{cR}\,\delta'\left(t'+\frac{R}{c}-t\right)\right\}dt', \\ \vec{H}(\vec{r},t) &= q\int\left[\vec{m},\vec{\beta}\right]\left\{-\frac{1}{R^2}\,\delta\left(t'+\frac{R}{c}-t\right)+\frac{1}{cR}\,\delta'\left(t'+\frac{R}{c}-t\right)\right\}dt', \end{aligned} \tag{Д6.40}$$

Здесь штрих у дельта-функции обозначает дифференцирование по ее аргументу, т. е.

$$\delta'(x) = \frac{d}{dx}\delta(x). \tag{Д6.41}$$

Используя это обозначение, можно записать

$$\frac{d}{dt'}\,\delta\left(t'+\frac{R(t')}{c}-t\right) = \delta'\left(t'+\frac{R(t')}{c}-t\right)\left[1+\frac{1}{c}\frac{dR(t')}{dt'}\right]$$

или, с учетом (Д6.33), (Д6.38),

$$\delta'\left(t'+\frac{R}{c}-t\right) = \frac{1}{\varkappa}\frac{d}{dt'}\,\delta\left(t'+\frac{R}{c}-t\right). \tag{Д6.42}$$

Подставляя (Д6.42) в (Д6.40) и вычисляя интегралы с производной дельта-функции интегрированием по частям, находим

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &= q\left\{\frac{\vec{m}}{\varkappa R^2}+\frac{1}{c\varkappa}\frac{d}{dt'}\left(\frac{\vec{m}-\vec{\beta}}{\varkappa R}\right)\right\}_{\text{запазд}}, \\ \vec{H}(\vec{r},t) &= q\left\{\frac{\left[\vec{\beta},\vec{m}\right]}{\varkappa R^2}+\frac{1}{c\varkappa}\frac{d}{dt'}\left(\frac{\left[\vec{\beta},\vec{m}\right]}{\varkappa R}\right)\right\}_{\text{запазд}}. \end{aligned} \tag{Д6.43}$$

В формулах (Д6.43) удобно сначала выполнить дифференцирование единичного вектора $\vec{m}$. Учитывая (Д6.25), получаем следующие выражения для напряженностей электрического и магнитного полей:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = q\left\{\frac{\vec{m}-\vec{\beta}}{\varkappa^2R^2} + \frac{\vec{m}}{c\varkappa}\frac{d}{dt'}\left(\frac{1}{\varkappa R}\right) - \frac{1}{c\varkappa}\frac{d}{dt'}\left(\frac{\vec{\beta}}{\varkappa R}\right)\right\}_{\text{запазд}},$$
$$\vec{H}(\vec{r},t) = q\left\{\left[\frac{\vec{\beta}}{\varkappa^2R^2} + \frac{1}{c\varkappa}\frac{d}{dt'}\left(\frac{\vec{\beta}}{\varkappa R}\right), \vec{m}\right]\right\}_{\text{запазд}}. \tag{Д6.44}$$

Из (Д6.44) следует, что поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ связаны между собой соотношением

$$\vec{H} = \left[\vec{m}, \vec{E}\right]. \tag{Д6.45}$$

Оставшиеся производные в (Д6.44) вычисляются следующим образом:

$$\frac{d\vec{\beta}}{dt'} = \dot{\vec{\beta}}, \qquad \frac{d(\varkappa R)}{dt'} = c\beta^2 - c\vec{m}\vec{\beta} - R\vec{m}\dot{\vec{\beta}}. \tag{Д6.46}$$

Подставляя (Д6.46) в (Д6.44), находим

$$\vec{E}(\vec{r},t) = q\left\{\frac{(\vec{m}-\vec{\beta})(1-\beta^2)}{\varkappa^3R^2}\right\}_{\text{запазд}} + \frac{q}{c}\left\{\frac{\left[\vec{m}, \left[\vec{m}-\vec{\beta}, \dot{\vec{\beta}}\right]\right]}{\varkappa^3R}\right\}_{\text{запазд}}. \tag{Д6.47}$$

Итак, поле излучения точечного заряда описывается формулами (Д6.45), (Д6.47). Эти формулы справедливы при любом законе движения заряда и при любом расстоянии от заряда до точки наблюдения поля. В частности, при $\vec{v} = \dot{\vec{v}} = 0$ из (Д6.45), (Д6.47) следует $\vec{H} = 0$, $\vec{E} = \vec{m}q/R^2$.

**Излучение диполя в дальней зоне.** Для описания излучения диполя можно воспользоваться общими формулами (Д6.45), (Д6.47). Однако здесь мы хотели бы продемонстрировать иной подход, основанный на том, что в оптике можно наложить сильные ограничения на такие параметры как размер диполя ($a$), длина волны излучения ($\lambda$), расстояние от диполя до точки наблюдения поля ($r$). А именно,

$$a \ll \lambda \ll r. \tag{Д6.48}$$

В самом деле, полагая $a \simeq 10^{-8}$ см (характерный размер атома или молекулы), $\lambda \simeq 10^{-4}$ см (длина световой волны), $r \simeq 1$ см, видим, что условия (Д6.48) хорошо выполняются.

Условия (Д6.48) позволяют построить простые приближенные выражения для полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$, описывающие дипольное излучение в вакууме в так называемой *дальней* (или *волновой*) *зоне*. Эти выражения имеют вид

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2r}\left[\vec{n}, \left[\vec{n}, \ddot{\vec{p}}(t-r/c)\right]\right],$$
$$\vec{H}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c^2r}\left[\vec{n}, \ddot{\vec{p}}(t-r/c)\right], \tag{Д6.49}$$

где $\vec{p}$ — дипольный момент, $\vec{n} = \vec{r}/r$ — единичный вектор, направленный от диполя в точку наблюдения поля (рис. Д6.2).

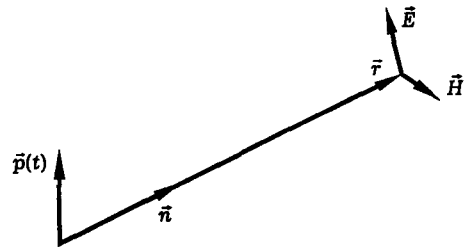



Рис. Д6.2. Структура дипольного излучения в волновой зоне

Остановимся на выводе формул (Д6.49). Будем исходить из общих формул (Д6.16), (Д6.17) для потенциалов поля. Пользуясь тем, что расстояние до точки наблюдения поля значительно превышает размер диполя, в формулах (Д6.16), (Д6.17) можно положить

$$|\vec{r} - \vec{r}\,'| = r - \vec{n}\vec{r}\,' \tag{Д6.50}$$

(рис. Д6.3). Подставляя (Д6.50) в (Д6.16), (Д6.17), получим

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{r} \int \rho\left(\vec{r}\,', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n}\vec{r}\,'}{c}\right) d^3r', \tag{Д6.51}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{cr} \int \vec{j}\left(\vec{r}\,', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n}\vec{r}\,'}{c}\right) d^3r'. \tag{Д6.52}$$

Если, кроме того, расстояние до точки наблюдения значительно превышает длину волны излучения, т. е. $r \gg \lambda$, то поле излучения в малых участках пространства можно рассматривать как *плоскую волну*. В плоской волне векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ связаны между собой соотношением

$$\vec{E} = -\left[\vec{n}, \vec{H}\right] \tag{Д6.53}$$

(см. формулу (2.37)). Кроме того, можно записать

$$\vec{E} = \vec{e} f(t - \vec{n}\vec{r}/c), \qquad \vec{H} = \vec{h} f(t - \vec{n}\vec{r}/c),$$

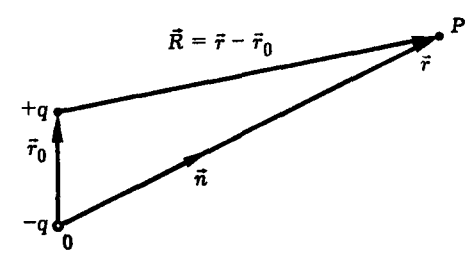



Рис. Д6.3. К расчету излучения диполя

понимая под $\vec{n}$ единичный вектор направления на некоторую фиксированную точку $P$, а под $\vec{r}$ — радиус-вектор некоторой близкой к $P$ точки. Соотношение (Д6.6) позволяет предположить, что векторный потенциал также имеет вид плоской волны:

$$\vec{A} = \vec{a}F(t - \vec{n}\vec{r}/c).$$

Пользуясь этой формулой, нетрудно показать, что

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A} = -\frac{1}{c}\left[\vec{n}, \dot{\vec{A}}\right], \qquad (Д6.54)$$

где $\dot{\vec{A}} = d\vec{A}/dt$.

Формулы (Д6.53), (Д6.54) показывают, что для полного описания поля излучения в волновой зоне достаточно вычислить только векторный потенциал $\vec{A}$. После этого поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ могут быть вычислены по формулам

$$\vec{E} = \frac{1}{c}\left[\vec{n}, \left[\vec{n}, \dot{\vec{A}}\right]\right], \qquad \vec{H} = -\frac{1}{c}\left[\vec{n}, \dot{\vec{A}}\right]. \qquad (Д6.55)$$

Допустим теперь, что размер системы зарядов значительно меньше длины волны излучения, т. е. $a \ll \lambda$. В этом случае выражение (Д6.52) для векторного потенциала приобретает вид

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{cr}\int \vec{j}(\vec{r}\,', t - r/c)\, d^3r'. \qquad (Д6.56)$$

Конкретизируем это выражение, полагая, что система зарядов представляет собой элементарный электрический диполь. Для простоты один из зарядов диполя (например, отрицательный) будем считать неподвижным и совместим с этим зарядом начало системы координат (рис. Д6.3). Тогда можно написать

$$\vec{j} = \rho\vec{v}, \qquad \vec{p} = q\vec{r}_0, \qquad \vec{v} = d\vec{r}_0/dt, \qquad (Д6.57)$$

где $q$ и $\vec{p}$ — заряд и дипольный момент диполя, $\vec{r}_0$ и $\vec{v}$ — радиус-вектор и скорость подвижного заряда. Из (Д6.56) и (Д6.57) следует, что

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{cr}q\vec{v}(t - r/c) = \frac{1}{cr}\dot{\vec{p}}(t - r/c). \qquad (Д6.58)$$

Наконец, подставляя (Д6.58) в (Д6.55), получим искомые формулы (Д6.49).

Гармонический осциллятор. Рассмотрим частный случай, когда дипольный момент, сохраняя постоянную ориентацию в пространстве, меняется во времени по гармоническому закону:

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \cos\omega t. \qquad (Д6.59)$$

Вычислим диаграмму направленности и полную мощность излучения осциллятора.

Введем систему координат, совместив ее начало с неподвижным зарядом и направив ось $z$ вдоль направления колебаний диполя. Пусть $\vec{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения поля $\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$, $\vec{z}_0$, — орты декартовой системы координат, $\vec{n} = \vec{r}/r$ — единичный вектор направления на точку наблюдения; $r$, $\theta$, $\varphi$ — сферические координаты точки наблюдения (рис. Д6.4). Тогда

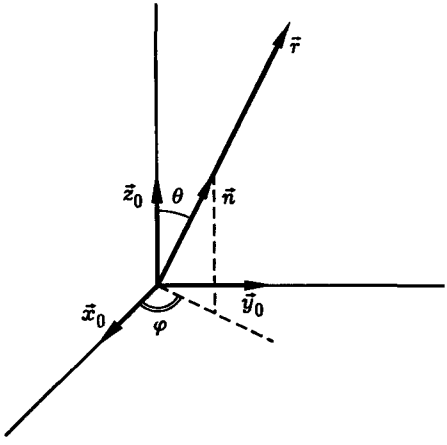



Рис. Д6.4. Система координат для расчета характеристик излучения

$$\vec{p}_0 = \vec{z}_0 p_0, \qquad p_0 = qA, \tag{Д6.60}$$

где $q$ — заряд, $A$ — амплитуда колебаний диполя.

Подставляя (Д6.59) в (Д6.49), получим следующие выражения для полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в волновой зоне:

$$\vec{E} = -\left[\vec{n}, \vec{H}\right], \qquad \vec{H} = \frac{k^2}{r}\left[\vec{n}, \vec{p}_0\right]\cos(\omega t - kr), \tag{Д6.61}$$

где $k = \omega/c$ — волновое число световой волны. Интенсивность $I$ и полная мощность $P$ излучения выражаются формулами

$$I = \frac{c}{4\pi}\langle E^2\rangle, \qquad P = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} I r^2 \sin\theta\, d\theta; \tag{Д6.62}$$

угловые скобки обозначают усреднение по периоду колебаний. Пользуясь формулами (Д6.60)–(Д6.62), получаем

$$I = \frac{cq^2A^2k^4}{8\pi r^2}\sin^2\theta, \qquad P = \frac{cq^2A^2k^4}{3}. \tag{Д6.63}$$

Диаграмма направленности излучения осциллятора показана на рис. Д6.5.

**Излучение ротатора.** Ротатором называется жесткий вращающийся диполь. Вычислим основные характеристики излучения ротатора: полную мощность, диаграмму направленности, состояние поляризации. В основу расчета положим формулы для излучения осциллятора, поскольку ротатор можно рассматривать как суперпозицию двух линейных диполей, колеблющихся во взаимно перпендикулярных направлениях со сдвигом по фазе, равным $\pi/2$.

Введем систему координат, показанную на рис. Д6.4, совместив плоскость $x, y$ с плоскостью вращения ротатора. Тогда дипольный момент ротатора можно

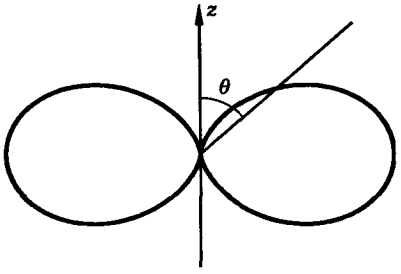



Рис. Д6.5. Диаграмма направленности излучения осциллятора

записать в виде

$$\vec{p} = \vec{x}_0 p_x + \vec{y}_0 p_y, \tag{Д6.64}$$

где

$$p_x = p_0 \cos\omega t, \quad p_y = p_0 \sin\omega t, \quad p_0 = qA, \tag{Д6.65}$$

$q$ — заряд, $A$ — радиус, $\omega$ — частота вращения ротатора.

Подставляя (Д6.64), (Д6.65) в (Д6.49), получим

$$\vec{E} = -\left[\vec{n}, \vec{H}\right], \qquad \vec{H} = \frac{k^2}{r}\left[\vec{n}, \vec{p}(t - r/c)\right]. \tag{Д6.66}$$

Теперь по формулам (Д6.62), (Д6.64)–(Д6.66) находим

$$I = \frac{cq^2A^2k^4}{8\pi r^2}(1 + \cos^2\theta), \qquad P = \frac{2}{3}cq^2k^4A^2.$$

Диаграмма направленности излучения ротатора показана на рис. Д6.6.

Рассмотрим теперь поляризацию излучения ротатора. Как видно из формулы (Д6.66), в волновой зоне поляризация излучения определяется вектором

$$\vec{a} = \left[\vec{n}, \vec{p}\right]. \tag{Д6.67}$$

Введем систему координат на плоскости фронта волны. В качестве осей координат удобно выбрать оси $x_1$, $x_2$, определяемые ортами

$$\vec{e}_1 = \left[\vec{n}, \vec{z}_0\right] / \sin\theta, \qquad \vec{e}_2 = \left[\vec{n}, \vec{e}_1\right]. \tag{Д6.68}$$

Как видно из (Д6.68), одна из осей координат лежит в плоскости, задаваемой векторами $\vec{n}$ и $\vec{z}_0$, а другая — перпендикулярна этой плоскости. Проекции вектора поляризации $\vec{a}$ на оси $x_1$, $x_2$ выражаются формулами

$$a_1 = \vec{a}\vec{e}_1, \qquad a_2 = \vec{a}\vec{e}_2. \tag{Д6.69}$$

Пользуясь формулами (Д6.64), (Д6.65), (Д6.67)–(Д6.69), получим

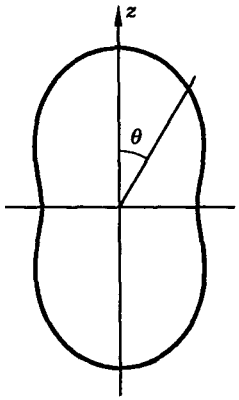



Рис. Д6.6. Диаграмма направленности излучения ротатора

$$a_1 = -(n_x p_x + n_y p_y) n_z / \sin\theta, \qquad a_2 = (n_y p_x - n_x p_y) / \sin\theta, \tag{Д6.70}$$

где $n_x$, $n_y$, $n_z$ — декартовы компоненты вектора $\vec{n}$. При выводе (Д6.70) учтено, что

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1.$$

Подставляя (Д6.65) в (Д6.70) и выполняя несложные преобразования, находим

$$a_1 = b n_z \cos(\omega t - \psi), \qquad a_2 = b \sin(\omega t - \psi), \tag{Д6.71}$$

где параметры $b$ и $\psi$ определяются формулами

$$b = -qA, \quad \cos\psi = n_x / \sin\theta, \quad \sin\psi = n_y / \sin\theta \tag{Д6.72}$$

и учтено, что $n_x^2 + n_y^2 = \sin^2\theta$.

Формулы (Д6.71) показывают, что излучение ротатора имеет эллиптическую поляризацию. Оси эллипса поляризации повернуты относительно векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ на угол $\psi$, определяемый формулами (Д6.72). Отношение осей эллипса равно $n_z = \cos\theta$. В частности, в направлении $\theta = 0$ ротатор излучает свет с круговой поляризацией.

**Излучение квадруполя.** *Квадруполем* называется пара близко расположенных диполей, колеблющихся в противофазе. Дипольный момент квадруполя тождественно равен нулю, поэтому дипольное излучение отсутствует. Если же принять во внимание конечный размер квадруполя и уточнить расчет, то оказывается, что электромагнитные волны, излучаемые отдельными диполями, приходят в дальнюю зону со слегка различными задержками, а потому не полностью гасят друг друга. Возникающее при этом слабое остаточное излучение называется *квадрупольным излучением*.

Вычислим сначала квадрупольное излучение, создаваемое элементарным электрическим зарядом. Пусть точечный электрический заряд $q$ движется по

закону $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t)$. Введем радиус-вектор $\vec{r}$ точки наблюдения поля, а также вектор

$$\vec{R}(t) = \vec{r} - \vec{r}_0(t), \tag{Д6.73}$$

соединяющий заряд с точкой наблюдения (рис. Д6.1).

Поле излучения в точке наблюдения $P$ в момент времени $t$ определяется состоянием движения заряда в предшествующий момент времени $t'$ такой, что

$$c(t - t') = R(t'), \tag{Д6.74}$$

где $R$ — расстояние от заряда до точки наблюдения, т. е.

$$R(t') = \sqrt{[x - x_0(t')]^2 + [y - y_0(t')]^2 + [z - z_0(t')]^2}. \tag{Д6.75}$$

Формулы (Д6.74), (Д6.75) определяют неявную функцию

$$t' = t'(\vec{r}, t). \tag{Д6.76}$$

Предположим, что скорость движения заряда много меньше скорости света:

$$v \ll c. \tag{Д6.77}$$

Из общей формулы (Д6.47) для поля излучения точечного заряда следует, что в этом случае напряженность электрического поля в точке $P$ есть

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{c^2} \frac{\left[\vec{m}, \left[\vec{m}, \ddot{\vec{r}}_0(t')\right]\right]}{R(t')}. \tag{Д6.78}$$

Здесь

$$\vec{m} = \vec{R}/R, \tag{Д6.79}$$

точка над буквой обозначает дифференцирование функции по ее аргументу. Формула (Д6.78) описывает переменную компоненту поля точечного заряда на произвольном расстоянии от него.

Если размер области движения заряда значительно меньше расстояния до точки наблюдения, т. е.

$$r_0 \ll r, \tag{Д6.80}$$

то в формуле (Д6.78) можно заменить переменный вектор $\vec{m} = \vec{m}(t')$ на постоянный вектор

$$\vec{n} = \vec{r}/r. \tag{Д6.81}$$

При этом (Д6.78) приобретает вид

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{c^2} \frac{\left[\vec{n}, \left[\vec{n}, \ddot{\vec{r}}_0(t')\right]\right]}{R(t')}. \tag{Д6.82}$$

Теперь нужно конкретизировать вид зависимости (Д6.76). Однако, как видно из формул (Д6.74), (Д6.75), сделать это в общем случае не представляется возможным. Поэтому воспользуемся условием (Д6.80), которое обычно хорошо выполняется в оптике, и попытаемся получить приближенное выражение,

пригодное для описания поля $\vec{E}(\vec{r},t)$ на достаточно больших расстояниях от заряда. Как видно из рис. Д6.1, при условии (Д6.80) для величины $R(t')$ можно записать приближенную формулу

$$R(t') = r - \vec{n}\vec{r}_0(t'). \tag{Д6.83}$$

Подставляя (Д6.83) в (Д6.74), получим

$$t' = t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n}}{c}\vec{r}_0(t'). \tag{Д6.84}$$

Далее можно написать

$$\begin{aligned} \vec{r}_0(t') &= \vec{r}_0\left[t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n}}{c}\vec{r}_0(t')\right] \approx \\ &\approx \vec{r}_0\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\vec{n}}{c}\vec{r}_0(t')\left[\dot{\vec{r}}_0\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \approx \\ &\approx \vec{r}_0\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\vec{n}}{c}\vec{r}_0\left(t - \frac{r}{c}\right)\left[\dot{\vec{r}}_0\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \end{aligned} \tag{Д6.85}$$

или, короче,

$$\vec{r}_0(t') = \vec{r}_0 + \frac{1}{c}(\vec{n},\vec{r}_0)\dot{\vec{r}}_0, \tag{Д6.86}$$

где величины $\vec{r}_0$ и $\dot{\vec{r}}_0$ в правой части относятся к моменту времени $t - r/c$.

Преобразуем выражение $(\vec{n},\vec{r}_0)\dot{\vec{r}}_0$, входящее в (Д6.86), следующим образом:

$$\begin{aligned} (\vec{n},\vec{r}_0)\dot{\vec{r}}_0 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{(\vec{n},\vec{r}_0)\vec{r}_0\right\} + \frac{1}{2}(\vec{n},\vec{r}_0)\dot{\vec{r}}_0 - \frac{1}{2}(\vec{n},\dot{\vec{r}}_0)\vec{r}_0 = \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{(\vec{n},\vec{r}_0)\vec{r}_0\right\} + \frac{1}{2}\left[\left[\vec{r}_0,\dot{\vec{r}}_0\right],\vec{n}\right]. \end{aligned} \tag{Д6.87}$$

Подставив (Д6.87) в (Д6.86), получим

$$\vec{r}_0(t') = \vec{r}_0 + \frac{1}{2c}\dot{\vec{a}} + \frac{1}{2c}\left[\vec{b},\vec{n}\right], \tag{Д6.88}$$

где введены векторы

$$\vec{a} = (\vec{n},\vec{r}_0)\vec{r}_0, \qquad \vec{b} = \left[\vec{r}_0,\dot{\vec{r}}_0\right]. \tag{Д6.89}$$

Из (Д6.88) следует, что

$$\ddot{\vec{r}}_0(t') = \ddot{\vec{r}}_0 + \frac{1}{2c}\dddot{\vec{a}} + \frac{1}{2c}\left[\ddot{\vec{b}},\vec{n}\right]. \tag{Д6.90}$$

Подставляя теперь (Д6.90) в (Д6.82), находим

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{c^2 r}\left\{\left[\vec{n},\left[\vec{n},\ddot{\vec{r}}_0\right]\right] + \frac{1}{2c}\left[\vec{n},\left[\vec{n},\dddot{\vec{a}}\right]\right] + \frac{1}{2c}\left[\vec{n},\ddot{\vec{b}}\right]\right\}. \tag{Д6.91}$$

Здесь учтено, что

$$\left[\vec{n}, \left[\vec{n}, \left[\ddot{\vec{b}}, \vec{n}\right]\right]\right] = \left[\vec{n}, \ddot{\vec{b}}\right].$$

В знаменателе выражения (Д6.91) мы пренебрегли отличием $R$ от $r$. Введем векторы

$$\begin{gathered} \vec{D} = (\vec{a} - \vec{n}r_0^2/3)q = \left\{(\vec{n}, \vec{r}_0)\vec{r}_0 - \vec{n}r_0^2/3\right\} q, \\ \vec{p} = q\vec{r}_0, \qquad \vec{M} = q\vec{b}/2c = \frac{q}{2c}\left[\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0\right]. \end{gathered} \tag{Д6.92}$$

Тогда формулу (Д6.91) можно представить в виде

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2 r}\left\{\left[\vec{n}, \left[\vec{n}, \ddot{\vec{p}}\right]\right] + \frac{1}{2c}\left[\vec{n}, \left[\vec{n}, \dddot{\vec{D}}\right]\right] + \left[\vec{n}, \ddot{\vec{M}}\right]\right\}. \tag{Д6.93}$$

Формула (Д6.93) дает искомое приближенное выражение для поля излучения точечного заряда. Формула применима при условии (Д6.80). В ней использованы обозначения:

$$\vec{p} = q\vec{r}_0, \quad \vec{D} = \left\{(\vec{n}, \vec{r}_0)\vec{r}_0 - \vec{n}r_0^2/3\right\} q, \quad \vec{M} = \frac{q}{2c}\left[\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0\right], \tag{Д6.94}$$

где $q$ — величина заряда, $\vec{r}_0$ — радиус вектор заряда, $\dot{\vec{r}}_0$ — его скорость. Точка над буквой обозначает дифференцирование по времени. Все переменные величины в правой части формулы (Д6.93) берутся в момент времени $t - r/c$.

Как видно из (Д6.94), векторы $\vec{p}$ и $\vec{M}$ характеризуют движущийся точечный заряд как таковой. Вектор $\vec{p}$ называется *дипольным моментом*, а вектор $\vec{M}$ — *магнитным моментом* заряда. Аналогичные векторы для системы зарядов определяются путем суммирования по всем зарядам. Что же касается вектора $\vec{D}$, то он, как видно из (Д6.94), зависит не только от движения заряда, но и от выбора точки наблюдения поля. Зависимость $\vec{D}$ от координат заряда можно выделить в явном виде, если ввести *тензор квадрупольного момента*

$$D_{\alpha\beta} = q(x_{0\alpha}x_{0\beta} - \delta_{\alpha\beta}r_0^2/3). \tag{Д6.95}$$

Это позволяет записать компоненты вектора $\vec{D}$ в виде

$$D_\alpha = \sum_\beta D_{\alpha\beta}n_\beta \equiv D_{\alpha\beta}n_\beta. \tag{Д6.96}$$

В формулах (Д6.95), (Д6.96) величины $x_{0\alpha}$, $D_\alpha$, $n_\beta$ обозначают соответственно декартовы компоненты векторов $\vec{r}_0$, $\vec{D}$, $\vec{n}$; $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера.

Выпишем полностью матрицу $D$:

$$D = q\begin{pmatrix} x_0^2 - r_0^2/3 & x_0y_0 & x_0z_0 \\ y_0x_0 & y_0^2 - r_0^2/3 & y_0z_0 \\ z_0x_0 & z_0y_0 & z_0^2 - r_0^2/3 \end{pmatrix}. \tag{Д6.97}$$

Как видно из (Д6.97), сумма диагональных элементов матрицы $D$ равна нулю. Именно для этого в выражение (Д6.92), определяющее вектор $\vec{D}$, введено слагаемое, пропорциональное $\vec{n}$.

Компоненты излучения, описываемые отдельными слагаемыми в формуле (Д6.93), называются *дипольным, квадрупольным* и *магнитодипольным* излучениями.

Гармонический осциллятор. Рассмотрим в качестве примера излучение гармонического осциллятора, т. е. точечного заряда, движущегося по закону

$$\vec{r}_0(t) = \vec{z}_0 A \cos \omega t. \qquad (Д6.98)$$

Здесь $\vec{z}_0$ — единичный вектор, направленный вдоль оси $z$, $A$ и $\omega$ — амплитуда и частота колебаний. Пользуясь формулами (Д6.98), (Д6.89), (Д6.91), нетрудно показать, что в этом случае

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{qk^2 A}{r} \left[\vec{n}, \left[\vec{n}, \vec{z}_0\right]\right] \{-\cos(\omega t - kr) + 2kA(\vec{n}, \vec{z}_0) \sin 2(\omega t - kr)\}, \quad (Д6.99)$$

где $k = \omega/c$. В пределе $kA \to 0$, который соответствует осциллятору исчезающе малого размера, из (Д6.99) получаем

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{qk^2 A}{r} \left[\vec{n}, \left[\vec{n}, \vec{z}_0\right]\right] \cos(\omega t - kr), \qquad (Д6.100)$$

что совпадает с выражением для поля (Д6.61), полученным выше в дипольном приближении. Из (Д6.99) следует, что при условии

$$kA \ll 1, \qquad (Д6.101)$$

означающем, что размер осциллятора много меньше длины световой волны, квадрупольное излучение осциллятора значительно слабее его дипольного излучения. Другой вывод состоит в том, что частота квадрупольного излучения осциллятора не совпадает с частотой его колебаний, а вдвое превышает ее. Иначе говоря, квадрупольное излучение осциллятора происходит на частоте *второй гармоники*. Физически это связано с тем, что запаздывание поля, приходящего в данную точку пространства, изменяется в течение периода колебаний осциллятора. Излучение осциллятора, следовательно, есть волна, фаза которой модулирована во времени. Наличие же фазовой модуляции приводит к тому, что частота квадрупольного излучения не совпадает с частотой колебаний самого осциллятора.

Другая ситуация имеет место, если

$$\vec{r}_0(t) = \vec{z}_0(A_0 + A \cos \omega t),$$

где $A_0 \gg A$. В этом случае вместо (Д6.99) получим:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{qk^2 A}{r} \left[\vec{n}, \left[\vec{n}, \vec{z}_0\right]\right] \{-\cos(\omega t - kr) + kA_0(\vec{n}, \vec{z}_0) \sin(\omega t - kr)\},$$

т. е. квадрупольное излучение происходит на частоте основной гармоники.

Квадруполь. Вычислим поле излучения линейного симметричного квадруполя, образованного неподвижным центральным зарядом величины $-2q$ и двумя зарядами величины $q$ каждый, осциллирующими в противофазе (рис. Д6.7). Радиус-векторы движущихся зарядов запишем в виде

$$\vec{r}_1(t) = \vec{z}_0 A \cos \omega t, \qquad \vec{r}_2(t) = -\vec{r}_1(t). \qquad (Д6.102)$$

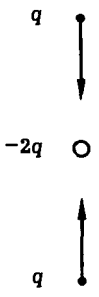



Рис. Д6.7. Квадруполь

В силу принципа суперпозиции поле излучения можно вычислить по формуле

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_1(\vec{r},t) + \vec{E}_2(\vec{r},t), \qquad (Д6.103)$$

где $\vec{E}_1(\vec{r},t)$ и $\vec{E}_2(\vec{r},t)$ — поля, создаваемые отдельными движущимися зарядами. Первое из них, очевидно, совпадает с полем, описываемым формулой (Д6.99), а второе — получается из первого заменой $\vec{z}_0$ на $-\vec{z}_0$. Таким образом, полное поле излучения есть

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{4qk^3A^2}{r}\left[\vec{n},\left[\vec{n},\vec{z}_0\right]\right](\vec{n},\vec{z}_0)\sin 2(\omega t - kr). \qquad (Д6.104)$$

Если же вместо (Д6.102) использовать формулы

$$\vec{r}_1(t) = \vec{z}_0(A_0 + A\cos\omega t), \qquad \vec{r}_2(t) = -\vec{r}_1(t),$$

где $A_0 \gg A$, то

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{2qk^3AA_0}{r}\left[\vec{n},\left[\vec{n},\vec{z}_0\right]\right](\vec{n},\vec{z}_0)\sin(\omega t - kr).$$

Нетрудно вычислить интенсивность и полную мощность излучения. Используя (Д6.104), (Д6.62), получаем

$$I = \frac{2cq^2k^6A^4}{\pi r^2}\sin^2\theta\cos^2\theta, \qquad (Д6.105)$$

$$P = \frac{16}{15}cq^2k^6A^4. \qquad (Д6.106)$$

Здесь $\theta$ — угол между векторами $\vec{n}$ и $\vec{z}_0$. Диаграмма направленности изучения квадруполя показана на рис. Д6.8.

**Электрическое поле заряда, движущегося прямолинейно и равномерно.** Рассмотрим точечный электрический заряд $q$, движущийся вдоль оси $z$ с постоянной скоростью $v$. Найдем связь между параметрами движения заряда и создаваемым им электрическим полем в *один и тот же момент времени.*

Пусть в момент времени $t$ заряд находится в начале координат, т. е. имеет радиус-вектор $\vec{r}_0(t) = 0$, как показано на рис. Д6.9. Для отыскания поля $\vec{E}(\vec{r},t)$ воспользуемся формулой (Д6.47). Полагая $\dot{\vec{\beta}} = 0$, получим

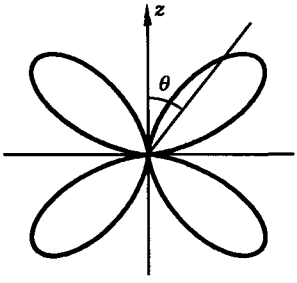



Рис. Д6.8. Диаграмма направленности излучения квадруполя

$$\vec{E}(\vec{r},t) = q\left\{\frac{(\vec{m}-\vec{\beta})(1-\beta^2)}{\varkappa^3 R^2}\right\}_{\text{запазд}}. \qquad (Д6.107)$$

Здесь $\vec{\beta} = \vec{v}/c$, $\vec{m} = \vec{R}/R$, $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0$, $\varkappa = 1 - \vec{m}\vec{\beta}$, индекс "запазд" указывает на то, что величина в скобках берется в предшествующий момент времени $t'$ такой, что

$$c(t-t') = R(t'). \qquad (Д6.108)$$

На рис. Д6.9 положение заряда в момент времени $t'$ изображено точкой $O'$. Из определения времени $t'$ следует, что

$$t - t' = \frac{R}{c} = \frac{O'O}{v}. \qquad (Д6.109)$$

Отсюда

$$O'O = \beta R. \qquad (Д6.110)$$

Используя обозначения рис. Д6.9, можно записать

$$\begin{gathered}\vec{m}\vec{\beta} = \beta\cos\alpha, \quad O'Q = O'O\cos\alpha, \quad OQ = O'O\sin\alpha,\\ b = R\sin\alpha = r\sin\theta, \quad OS = R\cos\alpha - O'O = r\cos\theta,\\ PQ = R - O'Q, \quad (PQ)^2 = r^2 - (OQ)^2.\end{gathered} \qquad (Д6.111)$$

Из (Д6.110), (Д6.111) следует, что

$$O'Q = R\vec{m}\vec{\beta}, \quad PQ = \varkappa R, \quad \cos\alpha - \beta = \frac{r}{R}\cos\theta \qquad (Д6.112)$$

и

$$(\varkappa R)^2 = r^2(1 - \beta^2\sin^2\theta). \qquad (Д6.113)$$

Последняя формула выражает величину $\varkappa R$ через параметры движения заряда в данный момент времени. Покажем теперь, что

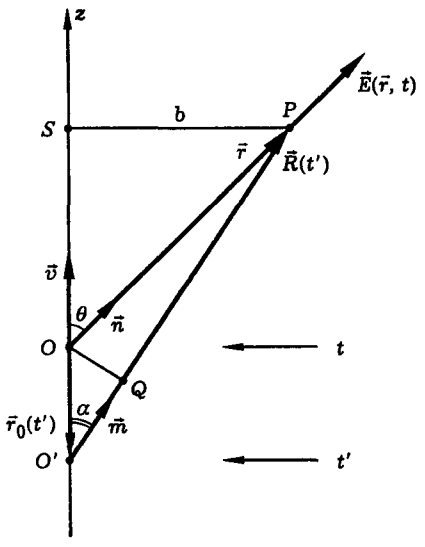



Рис. Д6.9. К расчету электрического поля заряда, движущегося прямолинейно и равномерно

$$\vec{m} - \vec{\beta} = \frac{r}{R}\vec{n}. \qquad (Д6.114)$$

Векторное соотношение (Д6.114) эквивалентно двум скалярным соотношениям

$$m_{\parallel} - \beta_{\parallel} = \frac{r}{R}n_{\parallel}, \qquad m_{\perp} - \beta_{\perp} = \frac{r}{R}n_{\perp}, \qquad (Д6.115)$$

где с помощью знаков $\parallel$ и $\perp$ обозначены проекции соответствующих векторов на направление вектора $\vec{v}$ и перпендикулярное ему направление. Как видно из рис. Д6.9,

$$\begin{aligned} \beta_{\parallel} &= \beta, & \beta_{\perp} &= 0, \\ m_{\parallel} &= \cos\alpha, & m_{\perp} &= \sin\alpha, \\ n_{\parallel} &= \cos\theta, & n_{\perp} &= \sin\theta. \end{aligned} \qquad (Д6.116)$$

Соотношения (Д6.115) непосредственно следуют из (Д6.111), (Д6.112), (Д6.116). Тем самым формула (Д6.114) доказана.

Подставляя (Д6.113), (Д6.114) в (Д6.107), получим

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{n}\frac{q}{r^2}\frac{(1-\beta^2)}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}. \qquad (Д6.117)$$

Формула (Д6.117) решает поставленную задачу. Она выражает напряженность электрического поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$ заряда, движущегося прямолинейно и равномерно, через характеристики движения заряда в тот же момент времени $t$.

## Литература

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. — М.: Наука, 1973.
2. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. — М.: Наука, 1976.
3. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. — М.: Мир, 1965.

# Дополнение 7

# Элементы теории вероятностей

*Случайные события и вероятность. Случайная величина. Дискретные случайные величины. Статистическое среднее и среднее арифметическое. Распределение Пуассона. Непрерывные случайные величины. Плотность вероятности. Распределение Гаусса. Центральная предельная теорема. Двумерная плотность вероятности. Преобразование распределений вероятности.*

При описании излучения реальных источников света мы сталкиваемся с необходимостью оценить совокупное действие огромного числа элементарных излучателей — атомов. Адекватный подход к решению этой задачи — использование теории вероятностей. Ниже коротко излагаются основные понятия этой теории, применяемые в оптике Для более глубокого знакомства с этой проблематикой рекомендуем книгу [1].

**Случайные события и вероятность.** *Случайным* называется событие, исход которого заранее неизвестен и которое может быть повторено много раз при неизменных условиях. Закономерности, присущие случайным событиям, могут быть установлены именно благодаря возможности их многократного повторения, т. е. при наличии *серии испытаний* или *ансамбля реализаций* события. Например, подбрасывая монету, мы не можем заранее предсказать какая из ее сторон ("орел" или "решка") окажется при падении верхней в данном конкретном испытании, однако повторяя испытание многократно, можно заметить *статистическую закономерность* состоящую в том, что число выпадания обеих сторон примерно одинаково.

*Вероятностью* случайного события называется предел отношения числа появлений события $A$ в серии испытаний к полному числу испытаний:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}. \qquad (Д7.1)$$

Пусть есть два случайных события. Тогда если эти события *несовместимы,* то вероятность наступления одного из них $P(A+B)$ равна сумме вероятностей этих событий ("аксиома сложения вероятностей"):

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \qquad (Д7.2)$$

Так, при бросании монеты вероятность выпадения "орла" или "решки" равна единице: $P(A+B) = 1/2 + 1/2 = 1$. Если случайные события *совместимы* (например, выпадение "орлов" при бросании двух монет или выпадение четных чисел при бросании двух игральных костей), то вероятность наступления обоих событий $P(AB)$ такова:

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A), \qquad (Д7.3)$$

где $P_A(B)$ — *условная вероятность события* $B$, т. е. вероятность наступления события $B$ при условии, что событие $A$ уже произошло. Если случайные события *независимы* (например, бросание двух монет или двух игральных костей), то

$$P_B(A) = P(A), \qquad P_A(B) = P(B). \qquad (Д7.4)$$

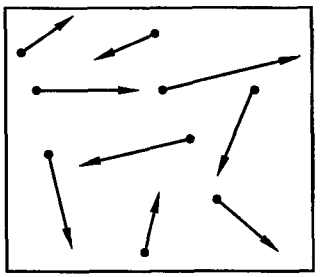


Рис. Д7.1. Сосуд с газом, молекулы которого совершают беспорядочное тепловое движение

В этом случае вероятность совместного наступления событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A)P(B) \tag{Д7.5}$$

("аксиома умножения вероятностей"). Формулы (Д7.2) и (Д7.5) не доказываются, а проверяются экспериментально (путем проведения серии статистических испытаний). Поэтому устанавливаемые ими соотношения называют иногда *аксиомами теории вероятностей*. Что же касается формулы (Д7.3), то ее можно рассматривать как *определение* условной вероятности.

Как применить вероятностные представления к задаче об излучении ансамбля осцилляторов? Понятие случайного события здесь не совсем удобно, хотя можно говорить о событии, состоящем, например, в том, что в некоторый момент времени напряженность электрического поля световой волны в точке наблюдения превысит некоторую наперед заданную величину: $E(t_0) > A_0$. Однако для физики удобнее ввести понятие случайной величины.

**Случайная величина.** Пусть мы проводим серию испытаний (опытов) и измеряем некоторую физическую величину. Назовем эту величину *случайной*, если ее значение в каждом конкретном опыте непредсказуемо, а сами опыты допускают многократное повторение при неизменных условиях. Случайной величиной является, например, смещение броуновской частицы за некоторый фиксированный промежуток времени. Различают дискретные и непрерывные случайные величины. *Дискретной* называется случайная величина, которая может принимать конечное или бесконечное, но *счетное* множество значений. Все эти значения можно перенумеровать: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Непрерывной* называется случайная величина, которая может принимать бесконечное и несчетное множество значений из некоторого интервала (например, $0 \le x \le 1$).

**Дискретные случайные величины.** Рассмотрим сосуд с газом. Частицы газа (атомы или молекулы) совершают беспорядочное тепловое движение (рис. Д7.1). Пусть объем сосуда равен $V$, а полное число частиц $N$. Выделим мысленно часть сосуда объемом $v$ (рис. Д7.2). Поставим вопрос: сколько частиц $n$ находится в объеме $v$? Ясно, что число частиц в выделенной части сосуда *случайно*. Оно может принимать значения $0 \le n \le N$ и меняется с течением времени. Вычислим *вероятность* попадания в объем $v$ заданного числа частиц $n$.

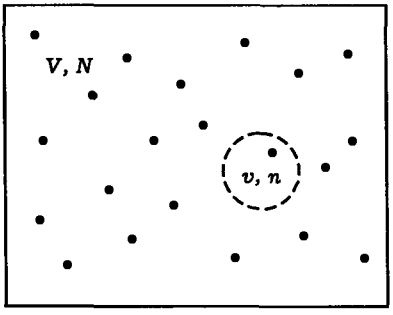



Рис. Д7.2. К выводу распределений Бернулли и Пуассона

Рассмотрим сначала одну молекулу. Вероятность ее попадания в часть сосуда объемом $v$ равна

$$p = v/V. \tag{Д7.6}$$

Формула (Д7.6) — аксиома для случая невзаимодействующих частиц и отсутствия внешних силовых полей. Данная формула является исходной для расчета интересующего нас распределения вероятностей. Вообще в статистической физике нужно задавать исходные вероятности, которые очевидны или следуют из опыта. Именно так мы поступаем в данном случае.

Какова вероятность попадания в выделенную часть сосуда $n$ молекул газа? Чтобы вычислить ее, представим себе, что мы каким-то образом пометили $n$ молекул газа. Тогда вероятность того, что все эти молекулы одновременно окажутся в части сосуда объемом $v$ равна

$$p^n = (v/V)^n. \tag{Д7.7}$$

Формула (Д7.7) получена в предположении, что отдельные молекулы независимы. Тогда вероятность осуществления сразу нескольких случайных событий равна произведению их вероятностей (аксиома умножения вероятностей). Кроме того, нужно, чтобы остальные (непомеченные) $N - n$ молекул не попали в объем $v$, т. е. остались бы в части сосуда объемом $V - v$. Вероятность этого события подсчитывается аналогично. Она равна

$$\left(\frac{V - v}{V}\right)^{N-n} = (1 - p)^{N-n}. \tag{Д7.8}$$

Вероятность того, что произойдут оба указанных события одновременно (все помеченные молекулы газа соберутся в объеме $v$, а остальные останутся за его пределами) равна произведению вероятностей (Д7.7) и (Д7.8):

$$p^n(1 - p)^{N-n}.$$

Теперь учтем, что такая ситуация может осуществиться многими способами, а именно, числом способов $C_N^n$, где $C_N^n$ — число сочетаний из $N$ по $n$. Именно таким числом способов можно выбрать $n$ молекул из $N$. Однако все такие

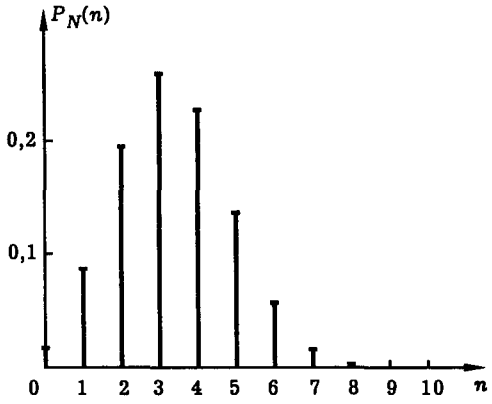



Рис. Д7.3. Биномиальное распределение вероятности. Показан пример распределения $P_N(n)$ при $N = 10$, $p = 1/3$

возможности взаимно исключают друг друга. Поэтому вероятность того, что произойдет какое-то одно из этих событий, равна сумме их вероятностей:

$$C_N^n p^n (1-p)^{N-n}$$

(аксиома сложения вероятностей). Это и есть искомая вероятность попадания $n$ любых молекул в выделенную часть сосуда объемом $v$:

$$P_N(n) = C_N^n p^n (1-p)^{N-n}. \qquad (Д7.9)$$

Здесь величина $p$ определяется формулой (Д7.6).

Из рассмотренного примера видно, что сила и смысл теории вероятностей заключаются в том, что она позволяет по известной простой вероятности $p$ (известной из опыта или очевидной) находить вероятности более сложных событий.

Распределение вероятности (Д7.9) называется *биномиальным распределением* или *распределением Бернулли*. Коэффициенты этого распределения $C_N^n$ определяются формулой

$$C_N^n = \frac{N(N-1)\ldots(N-n+1)}{n!} = \frac{N!}{n!(N-n)!}. \qquad (Д7.10)$$

Вид биномиального распределения показан на рис. Д7.3.

Распределение вероятности удовлетворяет *условию нормировки*

$$\sum_{n=0}^{N} P_N(n) = 1. \qquad (Д7.11)$$

Математически формула (Д7.11) вытекает из формулы (Д7.9) и формулы бинома Ньютона. С точки зрения физики сумма (Д7.11) есть вероятность того, что в объем $v$ попадает любое число молекул $n$ от 0 до $N$. Поскольку такое событие является достоверным, его вероятность равна единице. В этом состоит физический смысл условия нормировки.

*Среднее значение* случайной величины $n$ вычисляется по формуле

$$\overline{n} = \sum_{n=0}^{N} nP_N(n). \qquad (Д7.12)$$

Формула (Д7.12) имеет простой физический смысл: среднее статистическое значение случайной величины равно ее среднему арифметическому значению в серии испытаний. Заметим, что именно средние значения случайных величин представляют первоочередной интерес для физики. Аналогичным образом вычисляются и другие средние. Например, среднее значение квадрата случайной величины $n$ равно

$$\overline{n^2} \equiv \langle n^2 \rangle = \sum_{n=0}^{N} n^2 P_N(n) \qquad (Д7.13)$$

и т. д. Покажем теперь, что статистическое среднее имеет смысл среднего арифметического.

**Статистическое среднее и среднее арифметическое.** Пусть есть случайная величина $x$, которую мы измерили $m$ раз. Получили значения

$$\begin{cases} \nu_1 \text{ раз}: & \text{значение} \quad x_1, \\ \nu_2 \text{ раз}: & \text{значение} \quad x_2, \\ \dots & \qquad\qquad \dots \\ \nu_n \text{ раз}: & \text{значение} \quad x_n. \end{cases}$$

Вычислим среднее арифметическое значение величины $x$:

$$\langle x \rangle = \frac{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \dots + \nu_n x_n}{m}. \qquad (Д7.14)$$

Это выражение можно переписать следующим образом:

$$\langle x \rangle = x_1 \frac{\nu_1}{m} + x_2 \frac{\nu_2}{m} + \dots + x_n \frac{\nu_n}{m}, \qquad (Д7.15)$$

где величина $\nu_i/m$ равна отношению числа появлений величины $x_i$ к полному числу испытаний. Следовательно, $\nu_i/m$ есть *вероятность* того, что случайная величина $x$ принимает значение $x = x_i$. Итак,

$$\nu_i/m = P(x_i), \quad \text{если } m \to \infty. \qquad (Д7.16)$$

Поэтому

$$\langle x \rangle = \sum_i x_i P(x_i) = \overline{x}, \qquad (Д7.17)$$

т. е. среднее статистическое совпадает со средним арифметическим. Точнее, среднее статистическое значение случайной величины есть предел среднего арифметического значения при числе испытаний, стремящемся к бесконечности.

**Распределение Пуассона.** Одним из важнейших распределений вероятности, которому подчиняются многие дискретные случайные величины, является *распределение Пуассона*

$$P(n) = \mathrm{e}^{-\alpha}\frac{\alpha^n}{n!}, \qquad \alpha = \overline{n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{Д7.18}$$

Это распределение может быть получено из распределения Бернулли (Д7.9) в предельном случае

$$N \to \infty, \qquad p \ll 1, \qquad Np \text{ – конечно.} \tag{Д7.19}$$

Помимо среднего значения, важнейшей статистической характеристикой любой случайной величины является *дисперсия* ("разброс"). Дисперсия определяется как средний квадрат отклонения случайной величины от ее среднего значения. Например, для дискретной случайной величины $n$

$$Dn = \langle (n - \overline{n})^2 \rangle \tag{Д7.20}$$

или, подробнее,

$$Dn = \sum_{n=0}^{N} (n - \overline{n})^2 P_N(n). \tag{Д7.21}$$

В силу того, что операция усреднения *линейна*, она коммутирует (т. е. допускает перестановку местами) с любой другой линейной операцией (сложением, умножением на константу и т. п.). Поэтому в общем случае

$$Dn = \left\langle (n^2 - 2n\overline{n} + \overline{n}^2) \right\rangle = \overline{n^2} - \overline{n}^2. \tag{Д7.22}$$

Нетрудно показать, что для пуассоновской случайной величины дисперсия равна среднему значению

$$Dn = \overline{n}. \tag{Д7.23}$$

Это свойство распределения Пуассона доказывается путем простых операций с числовыми рядами.

**Непрерывные случайные величины.** Пусть в некотором опыте измеряется непрерывная физическая величина $x$ — например, амплитуда или фаза колебаний. Если при многократном повторении опыта в неизменных условиях измеренные значения $x$ не совпадают одно с другим, то величина $x$ является случайной.

Пусть есть непрерывная случайная величина $x$, которая может принимать любые вещественные значения (например, напряженность электрического поля световой волны), т. е. $-\infty < x < \infty$. Количественной характеристикой непрерывной случайной величины может служить вероятность попадания этой величины в небольшую область значений в окрестности заданной точки, скажем, вероятность попадания $x$ в интервал $x_1 \le x \le x_1 + dx$ (рис. Д7.4). Обозначим эту вероятность

$$P(x_1 \le x \le x_1 + dx).$$

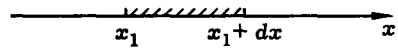



Рис. Д7.4. К определению плотности вероятности

Как определить эту вероятность? Это можно сделать экспериментально, проведя серию испытаний (измерений) и вычислив вероятность по формуле

$$P(x_1 \le x \le x_1 + dx) = \lim_{m\to\infty} \frac{n}{m}, \qquad (Д7.24)$$

где $n$ — число испытаний, в которых измеренное значение попало в заданную область, $m$ — полное число испытаний. Если предел в (Д7.24) существует и не зависит от процедуры испытаний, то он дает искомую вероятность. Введем теперь понятие плотности вероятности.

**Плотность вероятности.** Если в формуле (Д7.24) выбирать интервал $dx$ достаточно малым, то естественно ожидать, что вероятность попадания случайной величины в этот интервал будет пропорциональна его величине, т. е.

$$P(x_1 \le x \le x_1 + dx) = w(x_1)dx. \qquad (Д7.25)$$

Коэффициент пропорциональности в этой формуле может зависеть от выбора точки $x_1$, в окрестности которой взят интервал наблюдения, поскольку разные значения $x$, вообще говоря не равновероятны. Функция $w(x)$, отражающая статистические свойства случайной величины $x$, называется *плотностью вероятности.* Она равна пределу отношения вероятности попадания случайной величины в заданный интервал к величине этого интервала

$$w(x_1) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{P(x_1 \le x \le x_1 + \Delta x)}{\Delta x}. \qquad (Д7.26)$$

Формула (Д7.26) является определением плотности вероятности. Из определения следует, что плотность вероятности неотрицательна

$$w(x) \ge 0. \qquad (Д7.27)$$

Если функция $w(x)$ известна, то можно вычислить вероятность попадания случайной величины $x$ в любую наперед заданную область по формуле

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b w(x)\,dx. \qquad (Д7.28)$$

Формула (Д7.28) доказывается путем деления отрезка $[a, b]$ на бесконечно малые интервалы и применения аксиомы о сложении вероятностей. В частности, интеграл от плотности вероятности по всей области возможных значений $x$ имеет смысл вероятности того, что величина $x$ примет какое-либо одно из всех своих возможных значений. Поскольку такое событие является достоверным, его вероятность равна единице:

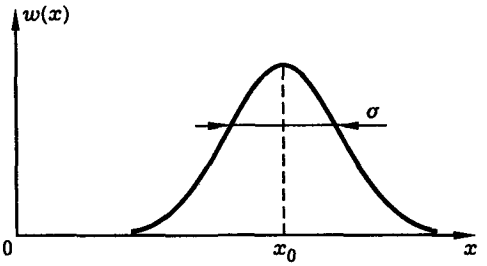



Рис. Д7.5. Гауссово распределение вероятности

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)dx = 1. \qquad (Д7.29)$$

Формула (Д7.29) называется *условием нормировки*. Любое распределение вероятности должно удовлетворять этому условию.

Зная распределение плотности вероятности, можно находить различные средние. Например, среднее значение самой случайной величины

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xw(x)\,dx \qquad (Д7.30)$$

или ее дисперсию

$$Dx = \langle (x-\overline{x})^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\overline{x})^2 w(x)\,dx. \qquad (Д7.31)$$

Среднее значение произвольной функции $f(x)$ случайной переменной $x$ вычисляется по формуле

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)w(x)\,dx. \qquad (Д7.32)$$

**Распределение Гаусса.** Закон распределения многих случайных физических величин имеет вид

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right], \qquad (Д7.33)$$

где случайная величина $x$ может принимать любые вещественные значения $-\infty < x < \infty$, $x_0$ и $\sigma$ — постоянные параметры. Распределение вероятности (Д7.33) называется гауссовым или *нормальным*. Вид этого распределения показан на рис. Д7.5. Нетрудно показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\,dx = 1, \tag{Д7.34}$$

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xw(x)\,dx = x_0, \tag{Д7.35}$$

$$Dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\overline{x})^2 w(x)\,dx = \sigma^2. \tag{Д7.36}$$

Таким образом, плотность вероятности (Д7.33) является нормированной. Параметры $x_0$ и $\sigma^2$ в формуле (Д7.33) имеют смысл среднего значения и дисперсии гауссовой случайной величины (рис. Д7.5).

**Центральная предельная теорема.** В теории вероятностей доказывается следующая теорема, носящая название *центральной предельной теоремы теории вероятностей*: сумма большого числа независимых случайных величин имеет гауссово распределение вероятности. Заметим, что именно в силу этой теоремы большинство случайных величин в физике являются гауссовыми (нормальными) случайными величинами.

**Двумерная плотность вероятности.** Если есть две случайные величины $x_1$ и $x_2$, то можно ввести *двумерную* (совместную) плотность вероятности

$$w(\xi_1,\xi_2) = \lim_{\substack{\Delta x_1\to 0\\ \Delta x_2\to 0}} \frac{P(\xi_1 \le x_1 \le \xi_1+\Delta x_1; \xi_2 \le x_2 \le \xi_2+\Delta x_2)}{\Delta x_1 \Delta x_2}. \tag{Д7.37}$$

Эта функция характеризует вероятность того, что случайная величина $x_1$ попадает в малую окрестность точки $\xi_1$, а величина $x_2$ — в малую окрестность точки $\xi_2$. Из определения вытекают следующие свойства двумерной плотности вероятности:

$$w(x_1,x_2) \ge 0, \tag{Д7.38}$$

$$P(a_1 \le x_1 \le b_1; a_2 \le x_2 \le b_2) = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2\, w(x_1,x_2), \tag{Д7.39}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w(x_1,x_2) dx_1\,dx_2 = 1, \tag{Д7.40}$$

$$w(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x_1,x_2)\,dx_2, \qquad w(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x_1,x_2)\,dx_1. \tag{Д7.41}$$

Наконец, если случайные величины $x_1$ и $x_2$ независимы, то

$$w(x_1,x_2) = w(x_1)w(x_2). \tag{Д7.42}$$

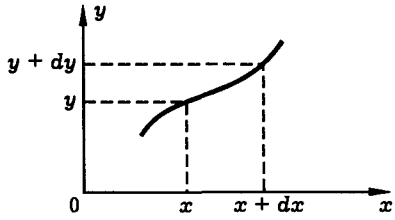



Рис. Д7.6. К выводу формулы преобразования распределения вероятности

**Преобразование распределений вероятности.** Пусть есть случайная величина $x$, имеющая распределение плотности вероятности $w(x)$, и другая случайная величина $y$, связанная с величиной $x$ известным функциональным соотношением

$$y = y(x), \qquad x = x(y). \tag{Д7.43}$$

Каким будет распределение плотности вероятности для случайной величины $y$? Ответ на этот вопрос можно дать в общем виде. Нарисуем зависимость $y(x)$ (рис. Д7.6). Из рисунка видно, что если величина $x$ попадает в область $[x, x + dx]$, то величина $y$ попадает в область $[y, y + dy]$. Следовательно, вероятности этих случайных событий совпадают:

$$P(x \le x \le x + dx) = P(y \le y \le y + dy).$$

Теперь выразим эти вероятности через функции распределения плотности вероятности величин $x$ и $y$. Получим

$$w(x)dx = w(y)dy,$$

откуда

$$w(y) = w(x(y))\frac{dx(y)}{dy}. \tag{Д7.44}$$

Аналогичным образом можно получить формулу преобразования двумерной плотности вероятности:

$$w(y_1, y_2) = w\Big(x_1(y_1, y_2); x_2(y_1, y_2)\Big)\frac{D(x_1, x_2)}{D(y_1, y_2)}. \tag{Д7.45}$$

Итак, для того чтобы перейти к новой переменной (переменным) в распределении вероятности, нужно, во-первых, сделать замену переменной в самой функции распределения вероятности и, во-вторых, умножить ее на производную (якобиан преобразования) от старых переменных к новым. Для того чтобы полученная таким образом плотность вероятности была неотрицательной, производную (якобиан) следует взять по абсолютной величине:

$$w(y) = w(x(y))\left|\frac{dx(y)}{dy}\right| \tag{Д7.46}$$

в одномерном случае и

$$w(y_1, y_2) = w\Big(x_1(y_1, y_2); x_2(y_1, y_2)\Big) \left| \frac{D(x_1, x_2)}{D(y_1, y_2)} \right| \qquad (Д7.47)$$

в двумерном случае. Напомним, что якобианом преобразования называется определитель, составленный из производных:

$$\frac{D(x_1, x_2)}{D(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}. \qquad (Д7.48)$$

Примеры использования статистических понятий в оптике даны в лекции 6.

# Литература

1. *Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981.
2. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1988.
3. *Дьяков Ю. Е., Никитин С.Ю.* Задачи по статистической радиофизике и оптике. — М.: Изд-во МГУ, 1985.

# Дополнение 8

# Теория случайных процессов

*Случайный процесс. Плотность вероятности, среднее значение и дисперсия случайного процесса. Двумерная плотность вероятности и корреляционная функция случайного процесса. Стационарные случайные процессы. Среднее значение, дисперсия и корреляционная функция стационарного случайного процесса. Многомерная плотность вероятности и многомерные корреляционные функции. Статистическое усреднение и усреднение по времени. Спектры случайных процессов. Связь спектральной плотности и корреляционной функции стационарного случайного процесса. Теорема Винера–Хинчина. Преобразование шума линейной системой.*

**Случайный процесс.** *Случайной функцией* времени или *случайным процессом* называется функция, значение которой в каждый фиксированный момент времени есть случайная величина.

Понятие случайного процесса предполагает наличие нескольких реализаций этого процесса. Поясним это на примере. Пусть мы наблюдаем за движением броуновской частицы. Проследим за изменением какой-либо координаты частицы с течением времени. Полученную зависимость обозначим $x_1(t)$. Теперь повторим опыт и снова измерим координату частицы как функцию времени — получим зависимость $x_2(t)$. Повторяя опыт многократно, можно получить *набор реализаций* $x(t)$

$$x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t), \tag{Д8.1}$$

показанный на рис. Д8.1.

Сравнивая между собой отдельные реализации, мы видим, что они не совпадают друг с другом. Кроме того, конкретный вид реализации не может быть предсказан заранее. Это дает основание считать $x(t)$ случайным процессом.

Однако отдельные реализации случайного процесса не только различны, но и в чем-то схожи между собой. Например, присматриваясь к рис. Д8.1, можно заметить, что реализации процесса $x(t)$, показанные на этом рисунке, имеют одинаковые средние значения, одинаковый средний "размах" колебаний, одинаковую среднюю длительность отдельного "выброса" и т. д. Уловить это сходство и количественно описать его — главная задача статистической теории случайных процессов. Решение этой задачи достигается введением статистических характеристик процесса: различных средних значений, а также вероятностей попадания процесса в ту или иную область значений.

Ранее мы познакомились с понятиями вероятности и средних для случайных величин. Теперь введем аналогичные понятия для случайных функций времени — случайных процессов.

Пусть одна из реализаций случайного процесса $x(t)$ имеет вид. показанный на рис. Д8.2. Выделим некоторый интервал значений $x$, например, $x_1 \le x \le x_2$ и поставим вопрос: какова вероятность попадания $x(t)$ в указанный интервал? Для отыскания вероятности $p(x_1 \le x \le x_2)$ можно поступить следующим образом. Повторим многократно ($m$ раз, $m \to \infty$) наблюдение процесса $x(t)$ и запишем набор реализаций $x_1(t)$, $x_2(t), \ldots, x_m(t)$. Выберем и зафиксируем

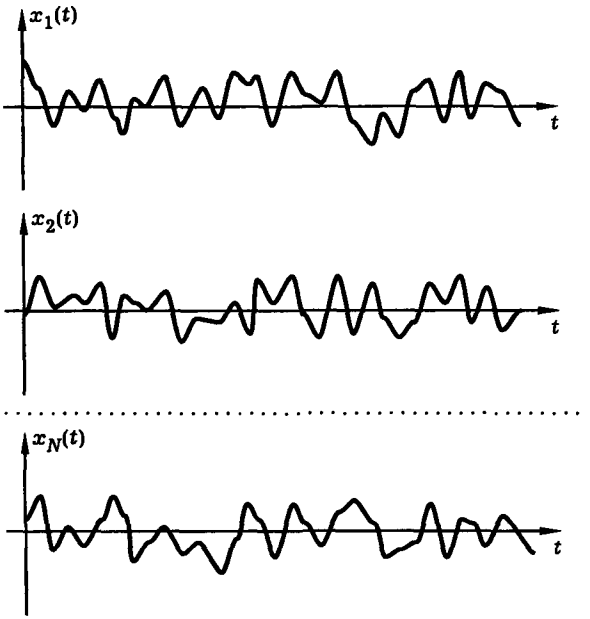



Рис. Д8.1. Набор реализаций случайного процесса $x(t)$

некоторый момент времени $t = t_0$. Подсчитаем число величин $x_i(t_0)$, удовлетворяющих условию $x_1 \leq x_i(t_0) \leq x_2$ и обозначим это число буквой $n$. Тогда в соответствии с определением вероятности случайного события, вероятность попадания случайного процесса в интервал значений $x_1 \leq x \leq x_2$ в момент времени $t = t_0$ есть

$$p(x_1 \leq x(t_0) \leq x_2) = \lim_{m \to \infty} \frac{n}{m}, \qquad \text{(Д8.2)}$$

где $m$ — полное число реализаций процесса $x(t)$. Повторяя всю процедуру для других моментов времени $t$, найдем вероятность $p(x_1 \leq x(t) \leq x_2)$ на всем интересующем нас интервале времени.

Рис. Д8.2. К вероятностному описанию случайного процесса

**Плотность вероятности, среднее значение и дисперсия случайного процесса.** Вероятностная характеристика $p(x_1 \le x(t) \le x_2)$ процесса $x(t)$ является первичной, но не основной. На практике чаще используют плотность вероятности случайного процесса, определяемую формулой

$$w(x_1, t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{p(x_1 \le x(t) \le x_1 + \Delta x)}{\Delta x}. \qquad (Д8.3)$$

С помощью функции $w(x, t)$ можно вычислить другие статистические характеристики процесса: среднее значение

$$\overline{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, w(x, t)\, dx, \qquad (Д8.4)$$

дисперсию

$$Dx(t) = \sigma^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{x})^2\, w(x, t)\, dx, \qquad (Д8.5)$$

моменты различных порядков и т. п. Заметим, что в отличие от аналогичных характеристик случайных величин, статистические характеристики случайного процесса, вообще говоря, зависят от времени.

**Двумерная плотность вероятности и корреляционная функция случайного процесса.** Рассмотрим значения случайной функции $x(t)$ в два момента времени $t_1$ и $t_2$. По аналогии с (Д8.3) можно ввести двумерную плотность вероятности

$$w(x_1, t_1; x_2, t_2) =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0}} \frac{p(x_1 \le x(t_1) \le x_1 + \Delta x_1; x_2 \le x(t_2) \le x_2 + \Delta x_2)}{\Delta x_1 \Delta x_2}. \qquad (Д8.6)$$

Эта характеристика случайного процесса определяет вероятность того, что значение случайной функции попадает в малую окрестность точки $x_1$ в момент времени $t_1$ и в малую окрестность точки $x_2$ в момент времени $t_2$ (рис. Д8.3).

С помощью двумерной плотности можно вычислить *корреляционную функцию* случайного процесса $B(t_1, t_2)$, определяемую следующим образом:

$$B(t_1, t_2) = \Big\langle [x(t_1) - \overline{x}(t_1)] \times [x(t_2) - \overline{x}(t_2)] \Big\rangle. \qquad (Д8.7)$$

Используя (Д8.6), получаем

$$B(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [x(t_1) - \overline{x}(t_1)] \times [x(t_2) - \overline{x}(t_2)] w(x_1, t_1; x_2, t_2)\, dx_1\, dx_2, \qquad (Д8.8)$$

где $\overline{x}(t)$ определено формулой (Д8.4).

**Стационарные случайные процессы.** Указанный выше способ измерения вероятности $p(x_1 \le x(t) \le x_2)$ является универсальным. Он применим для любых случайных процессов, в том числе таких, у которых эта вероятность

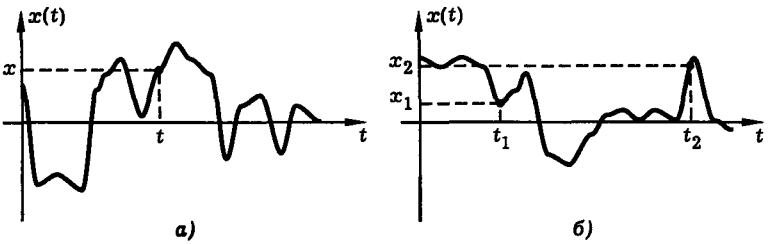



Рис. Д8.3. К понятию плотности вероятности случайного процесса. Одномерная плотность вероятности $w(x,t)$ характеризует вероятность попадания случайного процесса в малую окрестность точки $x$ в момент времени $t$ (*а*). Двумерная плотность вероятности $w(x_1,t_1;x_2,t_2)$ характеризует вероятность попадания случайного процесса в малую окрестность точки $x_1$ в момент времени $t_1$ и в малую окрестность точки $x_2$ в момент времени $t_2$ (*б*)

меняется при изменении момента времени $t$. Для таких (нестационарных) процессов способ измерения распределения вероятности путем обработки статистического ансамбля реализаций является единственно возможным.

Однако существует весьма широкий класс случайных процессов, статистические характеристики которых не зависят от времени (точнее, не меняются при сдвиге начала отсчета времени). Такие процессы называются *стационарными*. С физической точки зрения стационарным является процесс, протекающий в неизменных условиях. Таковыми являются, например, излучение нити накаливания, имеющей постоянную температуру, или излучение газового лазера при постоянном токе разряда и постоянных параметрах газовой среды и т. д. В противоположность этому *нестационарными* называются процессы, характеристики которых меняются с течением времени. К числу нестационарных относятся импульсные и переходные процессы (процессы включения и выключения, процессы установления), а также процессы, протекающие в меняющихся внешних условиях. Примеры типичных реализаций стационарного и нестационарных случайных процессов показаны на рис. Д8.4.

**Среднее значение, дисперсия и корреляционная функция стационарного случайного процесса.** Для стационарного случайного процесса одномерная плотность вероятности, среднее значение и дисперсия не зависят от времени:

$$w(x,t) = w(x), \tag{Д8.9}$$

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, w(x)\, dx, \tag{Д8.10}$$

$$Dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{x})^2 w(x)\, dx, \tag{Д8.11}$$

а двумерная плотность вероятности и корреляционная функция зависит только от разности моментов времени $t_2 - t_1 = \tau$:

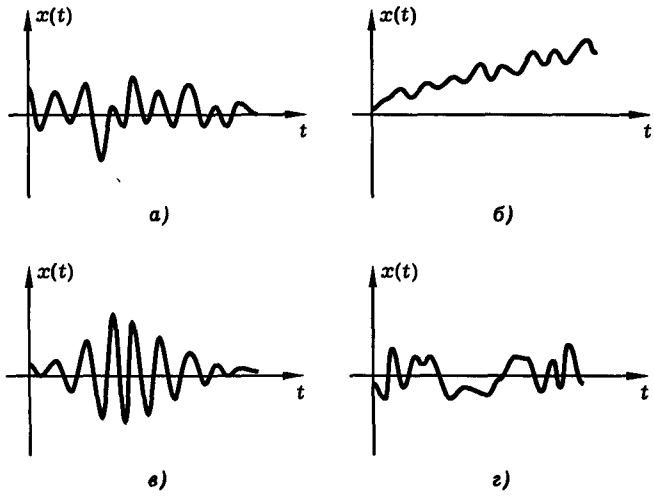



Рис. Д8.4. Вид типичных реализаций стационарного (*а*) и нестационарных (*б–г*) случайных процессов. Среднее значение, дисперсия и время корреляции постоянны (*а*), среднее значение меняется с течением времени (*б*), дисперсия меняется с течением времени (*в*), время корреляции меняется с течением времени (*г*)

$$w(x_1, t_1; x_2, t_2) = w(x_1, x_2, \tau), \tag{Д8.12}$$

$$B(t_1, t_2) = B(\tau). \tag{Д8.13}$$

Определение корреляционной функции стационарного случайного процесса выглядит так:

$$B(\tau) = \Big\langle [x(t) - \overline{x}] \times [x(t+\tau) - \overline{x}] \Big\rangle. \tag{Д8.14}$$

Если же обозначить

$$x - \overline{x} = \xi, \tag{Д8.15}$$

то

$$B(\tau) = \overline{\xi \xi_\tau}. \tag{Д8.16}$$

Укажем основные свойства корреляционной функции.

$$\text{а) } B(0) = \big\langle (x - \overline{x})^2 \big\rangle = \sigma^2 = Dx > 0, \tag{Д8.17}$$

$$\text{б) } B(\tau \to \infty) = 0, \tag{Д8.18}$$

$$\text{в) } B(\tau) = B(-\tau). \tag{Д8.19}$$

Типичный вид корреляционной функции показан на рис. Д8.5. Характерное время спада корреляционной функции называется *временем корреляции* случайного процесса. Время корреляции имеет простой физический смысл: это

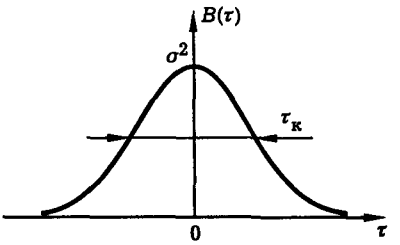



Рис. Д8.5. Типичный вид корреляционной функции стационарного случайного процесса

средняя длительность отдельного "выброса" случайного процесса (рис. Д8.6). Ясно, что это одна из важнейших характеристик процесса.

Безразмерная функция

$$R(\tau) = B(\tau)/B(0) = B(\tau)/\sigma^2 \qquad (Д8.20)$$

называется *коэффициентом корреляции* случайного процесса.

**Многомерная плотность вероятности и многомерные корреляционные функции.** По аналогии с (Д8.6) можно ввести понятие многомерной плотности вероятности случайного процесса.

$$w(x_1, t_1; \ldots; x_n, t_n) =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \cdots \\ \Delta x_n \to 0}} \frac{p(x_1 \le x(t_1) \le x_1 + \Delta x_1; \ldots; x_n \le x(t_n) \le x_n + \Delta x_n)}{\Delta x_1 \cdots \Delta x_n}. \qquad (Д8.21)$$

Это — наиболее полная характеристика случайного процесса. С ее помощью могут быть вычислены *многомерные корреляционные функции* (*"корреляторы"*)

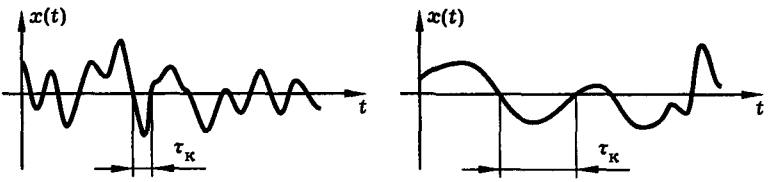



Рис. Д8.6. К понятию времени корреляции случайного процесса. Показаны реализации двух стационарных случайных процессов, имеющих разные времена корреляции. Время корреляции имеет смысл средней длительности "выброса" процесса. Чем быстрее процесс меняется во времени, тем меньше время корреляции. Например, если $x(t)$ есть скорость газовой молекулы, то время $\tau_к$ имеет смысл среднего времени свободного пробега молекулы

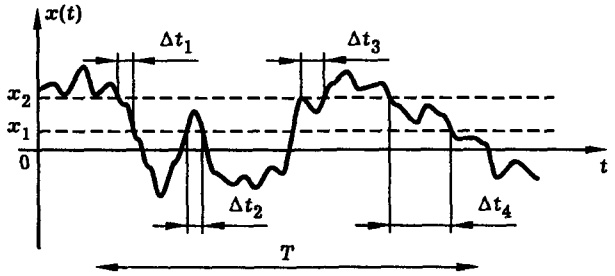



Рис. Д8.7. Отрезок реализации стационарного случайного процесса

$$B_{1122} = \langle x^2 x_\tau^2 \rangle, \quad B_{1112} = \langle x^3 x_\tau \rangle,$$
$$B_{1222} = \langle x x_\tau^3 \rangle, \quad B_{111222} = \langle x^3 x_\tau^3 \rangle \tag{Д8.22}$$

и т. п. Замечательным свойством гауссова случайного процесса является то, что для него все многомерные корреляторы нечетных порядков равны нулю, а корреляторы четных порядков выражаются через парную корреляцию. Например,

$$\begin{aligned} \langle x^2 x_\tau^2 \rangle &= B_{1122} = B_{11}B_{22} + B_{12}B_{12} + B_{12}B_{12} = \\ &= \sigma^4 + 2B^2(\tau) = \sigma^4\left[1 + 2R^2(\tau)\right], \\ \langle x x_\tau^3 \rangle &= B_{1222} = B_{12}B_{22} + B_{12}B_{22} + B_{12}B_{22} = \\ &= 3\sigma^2 B(\tau) = 3\sigma^4 R(\tau) \end{aligned} \tag{Д8.23}$$

и т. п. В формулах (Д8.23) использованы обозначения

$$B_{12} = \langle x x_\tau \rangle = B(\tau) = \sigma^2 R(\tau),$$
$$B_{11} = \langle x^2 \rangle = \sigma^2, \quad B_{22} = \langle x_\tau^2 \rangle = \sigma^2$$

и предполагается, что гауссов стационарный случайный процесс является чисто флуктуационным (т. е. его среднее значение равно нулю: $\overline{x} = 0$).

**Статистическое усреднение и усреднение по времени.** Рассмотрим одну из реализаций стационарного случайного процесса $x(t)$ на достаточно длинном интервале времени $T$ (рис. Д8.7). Выделим некоторый интервал значений $x$, например $x_1 \le x \le x_2$, и отметим промежутки времени $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots$, в течение которых процесс $x(t)$ находится в данном интервале. Из физических соображений ясно, что вероятность попадания $x$ в данный интервал значений равна относительному времени пребывания процесса в этом интервале:

$$p(x_1 \le x \le x_2) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{N} \Delta t_i. \tag{Д8.24}$$

Покажем, что в этом случае статистическое среднее равно среднему по времени, т. е.

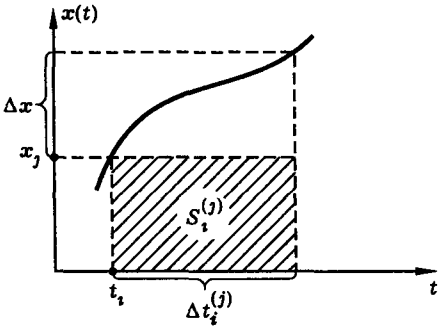



Рис. Д8 8. К обоснованию процедуры временнóго усреднения. Жирной кривой показан отрезок реализации случайного процесса $x(t)$. Заштрихован прямоугольник площади $S_i^{(j)} = x_j \Delta t_i^{(j)}$

$$\overline{x} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt. \qquad (Д8.25)$$

Действительно,

$$\overline{x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, w(x) dx = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{j=1}^{M} x_j w(x_j) \Delta x =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{j=1}^{M} x_j p(x_j \le x \le x_j + \Delta x) = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{j=1}^{M} x_j \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{N} \Delta t_i^{(j)} =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} x_j \Delta t_j^{(j)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt. \qquad (Д8.26)$$

Смысл использованных обозначений разъясняет рис. Д8.8. Произведение $x_j \Delta t_i^{(j)}$ под знаком двойной суммы в формуле (Д8.26) имеет смысл площади $S_i^{(j)}$, показанной на рис. Д8.8. Предел суммы таких площадей, взятый для всех моментов времени $t_i$ и всех значений случайного процесса $x_j$, равен интегралу по времени от функции $x(t)$. Таким образом показано, что для стационарного случайного процесса статистическое усреднение эквивалентно усреднению по времени.

Указанное свойство позволяет построить простые экспериментальные схемы для измерения различных средних. Так, например, среднее значение случайной разности потенциалов можно измерить с помощью схемы, показанной на рис. Д8.9. Аналогичным образом можно измерить и другие характеристики стационарных случайных процессов: дисперсию, корреляционную функцию, моменты и т. п.

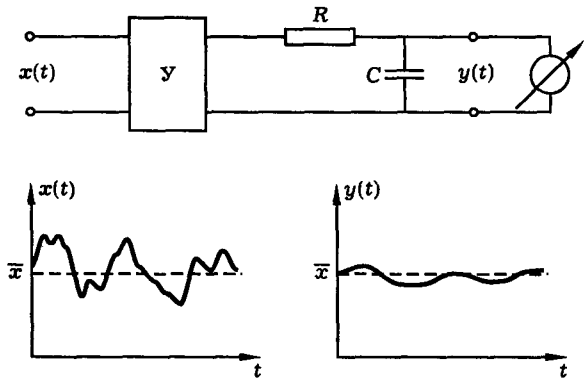



Рис. Д8.9. Схема измерения среднего значения случайной разности потенциалов $x(t)$, использующая операцию временнóго усреднения. После усилителя У, воспроизводящего $x(t)$ без искажений, стоит простейший интегратор в виде $RC$ — цепи и вольтметр

**Спектры случайных процессов.** Обсудим теперь вопрос о том, как ввести понятие спектра случайного процесса. Пусть есть некоторый стационарный случайный процесс $x(t)$. Рассмотрим одну из реализаций процесса на интервале времени $-T/2 \le t \le T/2$. Обозначим

$$x_T = \begin{cases} 0, & t < -T/2, \\ x(t), & -T/2 \le t \le T/2, \\ 0, & t > T/2. \end{cases} \qquad (Д8.27)$$

Вид функций $x(t)$ и $x_T(t)$ показан на рис. Д8.10. Разложим функцию $x_T(t)$ в интеграл Фурье:

$$x_T(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_T(\omega)e^{i\omega t}d\omega,$$
$$x_T(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_T(t)e^{-i\omega t}dt. \qquad (Д8.28)$$

Формулы (Д8.28) ставят в соответствие процессу $x_T(t)$ его спектральную амплитуду $x_T(\omega)$. Так как $x_T(t)$ есть случайная функция времени, спектральная амплитуда $x_T(\omega)$ есть случайная функция частоты.

Для отрезка реализации случайного процесса $x_T(t)$ запишем равенство Парсеваля

$$\int\limits_{-T/2}^{T/2} x_T^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x_T(\omega)|^2 d\omega. \qquad (Д8.29)$$

Разделим равенство (Д8.29) на длительность интервала времени $T$ и перейдем к пределу $T \to \infty$. Получим

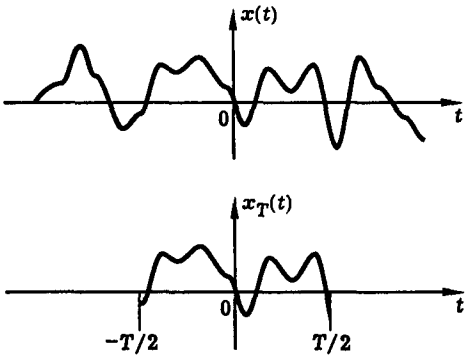



Рис. Д8.10. Реализация случайного процесса $x(t)$ и отрезок реализации $x_T(t)$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} x_T^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{|x_T(\omega)|^2}{T}\,d\omega, \qquad (Д8.30)$$

или

$$\overline{x^2} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\,d\omega, \qquad (Д8.31)$$

где введена функция

$$S(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{|x_T(\omega)|^2}{\pi T} \qquad (Д8.32)$$

и учтено, что

$$\overline{x^2} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} x_T^2(t)\,dt. \qquad (Д8.33)$$

Функция $S(\omega)$, определяемая формулой (Д8.32), называется *спектральной плотностью* случайного процесса $x(t)$. Из формул (Д8.32) и (Д8.28) видно, что $S(\omega)$ представляет собой усредненную спектральную характеристику процесса. Следовательно, в отличие от спектральной амплитуды $x_T(\omega)$, спектральная плотность $S(\omega)$ является уже не случайной, а регулярной функцией своего аргумента.

Пользуясь определением (Д8.32), нетрудно показать, что спектральная плотность $S(\omega)$ является вещественной, четной и неотрицательной функцией частоты:

$$S(\omega) = S^*(\omega) = S(-\omega) \geq 0. \qquad (Д8.34)$$

Поэтому формулу (Д8.31) можно переписать в виде интеграла только по положительным частотам:

$$\overline{x^2} = \int_0^\infty S(\omega)\, d\omega. \qquad (Д8.35)$$

Спектральная плотность описывает распределение по частотам средней мощности (интенсивности) стационарного случайного процесса.

**Связь спектральной плотности и корреляционной функции стационарного случайного процесса. Теорема Винера–Хинчина.** Пусть $x(t)$ — стационарный случайный процесс со средним значением, равным нулю

$$\overline{x} = 0. \qquad (Д8.36)$$

Покажем, что корреляционная функция и спектральная плотность данного процесса связаны между собой преобразованием Фурье:

$$B(\tau) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\mathrm{e}^{i\omega\tau} d\omega, \qquad S(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)\mathrm{e}^{-i\omega\tau} d\tau. \qquad (Д8.37)$$

Это утверждение составляет содержание теоремы Винера–Хинчина — основной теоремы теории случайных процессов. Докажем эту теорему.

Используя определение корреляционной функции (Д8.14), формулу (Д8.36), и заменяя статистическое усреднение усреднением по времени, запишем:

$$B(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) x_T(t+\tau)\, dt. \qquad (Д8.38)$$

Из (Д8.28) следует, что

$$x_T(t+\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x_T(\omega)\mathrm{e}^{i\omega(t+\tau)} d\omega. \qquad (Д8.39)$$

Подставляя (Д8.39) в (Д8.38), получим

$$B(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, x_T(t) \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x_T(\omega)\mathrm{e}^{i\omega(t+\tau)} d\omega =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} x_T(\omega)\mathrm{e}^{i\omega\tau} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t)\mathrm{e}^{i\omega t} dt. \qquad (Д8.40)$$

В силу (Д8.28)

$$\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t)\mathrm{e}^{i\omega t} dt = x_T^*(\omega), \qquad (Д8.41)$$

где звездочка обозначает комплексное сопряжение. Поэтому

$$B(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega\tau} x_T(\omega) x_T^*(\omega) =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left|x_T(\omega)\right|^2 e^{i\omega\tau} = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \qquad (Д8.42)$$

где функция $S(\omega)$ определяется формулой (Д8.32). Итак, мы вывели первую из формул (Д8.37). Вторая формула (Д8.37) получается из первой путем обратного преобразования Фурье. Тем самым теорема Винера–Хинчина доказана. Используя свойства четности корреляционной функции и спектральной плотности, связь между ними можно записать в виде косинус-преобразования Фурье:

$$B(\tau) = \int\limits_{0}^{\infty} S(\omega) \cos\omega\tau \, d\omega, \qquad S(\omega) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} B(\tau) \cos\omega\tau \, d\tau. \qquad (Д8.43)$$

Ввиду важности теоремы Винера–Хинчина, приведем еще одно доказательство, в котором не используется замена статистического усреднения усреднением по времени. Оно состоит в следующем.

Разложим случайный процесс $x(t)$ в интеграл Фурье

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \qquad x(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \qquad (Д8.44)$$

и вычислим корреляционную функцию:

$$B(\tau) = \langle x(t) x(t+\tau) \rangle =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle x(\omega) x(\omega') \rangle \exp\left[i(\omega+\omega')t + i\omega\tau\right] d\omega \, d\omega'. \qquad (Д8.45)$$

Здесь мы воспользовались тем, что операция усреднения линейна и, следовательно, коммутирует с другими линейными операциями, в частности с интегрированием по частоте.

Поскольку процесс $x(t)$ предполагается стационарным, его корреляционная функция не должна зависеть от $t$. Как видно из формулы (Д8.45), это условие будет выполнено, если коррелятор спектральных амплитуд имеет вид

$$\langle x(\omega) x(\omega') \rangle = \text{const} \cdot S(\omega) \delta(\omega + \omega'). \qquad (Д8.46)$$

Полагая const $= 2\pi^2$, из (Д8.45), (Д8.46) получим

$$B(\tau) = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \qquad (Д8.47)$$

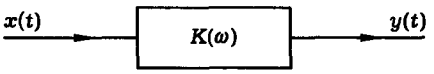



Рис. Д8.11. Преобразование шума линейной системой

Таким образом оказывается, что функции $B(\tau)$ и $S(\omega)$ связаны между собой преобразованием Фурье. Обратное преобразование дает

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} B(\tau)\mathrm{e}^{-i\omega\tau}d\tau, \tag{Д8.48}$$

что и доказывает теорему Винера–Хинчина.

Функция $S(\omega)$, определяемая формулой (Д8.46), называется *спектральной плотностью* или просто *спектром* стационарного случайного процесса $x(t)$. Выясним ее физический смысл. Для этого предположим, что стационарный шум $x(t)$ проходит через линейный узкополосный фильтр и вычислим среднюю мощность шума на выходе фильтра (рис. Д8.11). Вводя частотный коэффициент передачи фильтра $K(\omega)$, для сигнала на выходе фильтра можно записать:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} y(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}d\omega, \qquad y(\omega) = K(\omega)x(\omega). \tag{Д8.49}$$

Пользуясь формулами (Д8.49), (Д8.46), для средней мощности шума на выходе фильтра получим

$$\overline{y^2} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle x(\omega)x(\omega')\rangle K(\omega)K(\omega')\mathrm{e}^{i(\omega+\omega')t}d\omega\, d\omega' =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\delta(\omega+\omega')K(\omega)K(\omega')\mathrm{e}^{i(\omega+\omega')t}d\omega\, d\omega' =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\omega)K(\omega)K(-\omega)d\omega = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\left|K(\omega)\right|^2 d\omega. \tag{Д8.50}$$

Полагая теперь

$$\left|K(\omega)\right|^2 \sim \delta(\omega-\omega_0), \tag{Д8.51}$$

получим

$$\overline{y^2} \sim S(\omega_0). \tag{Д8.52}$$

Формула (Д8.52) показывает, что средняя мощность шума на выходе линейного узкополосного фильтра, настроенного на частоту $\omega_0$, пропорциональна

спектральной плотности входного шума на этой частоте. Следовательно, спектральная плотность $S(\omega)$ характеризует распределение по частотам мощности стационарного случайного процесса. В этом и состоит ее физический смысл.

**Преобразование шума линейной системой.** Пусть на вход линейной системы с частотным коэффициентом передачи $K(\omega)$ воздействует стационарный шум $x(t)$ с нулевым средним значением и спектром $S(\omega) = S_{\text{вх}}(\omega)$. Вычислим спектр шума на выходе системы $S_{\text{вых}}(\omega)$.

По теореме Винера–Хинчина

$$B_y(\tau) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вых}}(\omega)\mathrm{e}^{i\omega\tau}d\omega, \tag{Д8.53}$$

где

$$B_y(\tau) = \langle y(t)y(t+\tau)\rangle, \tag{Д8.54}$$

$B_y(\tau)$ — корреляционная функция выходного сигнала. Используя формулы (Д8.49) и (Д8.46), находим

$$B_y(\tau) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(\omega)\left|K(\omega)\right|^2\mathrm{e}^{i\omega\tau}d\omega. \tag{Д8.55}$$

Сравнивая (Д8.53) и (Д8.55), получаем

$$S_{\text{вых}}(\omega) = S_{\text{вх}}(\omega)\left|K(\omega)\right|^2. \tag{Д8.56}$$

Формула (Д8.56) позволяет вычислить спектр шума на выходе линейной системы, если известен спектр шума на входе и частотный коэффициент передачи системы.

# Литература


1. *Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981.
2. *Тихонов В. И.* Статистическая радиотехника. — М.: Радио и связь, 1982.
3. *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1976.
4. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. — М.: Радио и связь, 1989.
5. *Дьяков Ю. Е., Никитин С. Ю.* Задачи по статистической радиофизике и оптике. — М.: Изд-во МГУ, 1985.

# Дополнение 9

# Модели строения атома

*Модель Томсона. Модель Бора.*

Классическая осцилляторная модель атома, описываемая уравнением

$$\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m}E, \qquad (Д9.1)$$

содержит два основных параметра: частоту собственных колебаний осциллятора $\omega_0$ и коэффициент затухания свободных колебаний $\Gamma$. Оба эти параметра могут быть, с одной стороны, измерены экспериментально (например, путем измерения спектра поглощения вещества — см. ч. IV), а с другой стороны — вычислены теоретически, исходя из той или иной модели атома. Сопоставление экспериментальных и теоретических данных позволяет получить ценную физическую информацию о строении и свойствах атома.

Если предположить, что затухание свободных колебаний оптического осциллятора связано с потерей энергии на излучение, то, используя результаты лекции 5, можно оценить параметр $\Gamma$ следующим образом:

$$\Gamma = \tau^{-1} = \frac{2e^2\omega^2}{3mc^3} \approx 10^8\,\text{с}^{-1}. \qquad (Д9.2)$$

Что же касается собственной частоты осциллятора $\omega_0$, то для ее оценки необходима конкретная модель атома. Ниже мы рассмотрим две таких модели (на примере атома водорода) — модель Томсона и модель Бора.

**Модель Томсона.** Согласно модели, предложенной Дж. Дж. Томсоном, атом представляет собой непрерывно распределенный в некотором объеме положительный заряд, внутри которого находится электрон, удерживаемый в положении равновесия упругой электростатической силой. Будучи выведенным из положения равновесия, электрон совершает гармонические колебания, частота которых $\omega_0$ определяется зарядом и массой электрона, а также размером атома.

Конкретный пример системы подобного типа показан на рис. Д9.1, *а*. Здесь точечный отрицательно заряженный электрон находится внутри однородного положительно заряженного шара. На рис. Д9.1, *б* показана аналогичная модель, которая в большей степени соответствует современным представлениям о строении атома. В этой модели точечное положительно заряженное атомное ядро окружено "электронным облаком", которое в простейшем случае имеет вид однородно заряженного шара.

В обеих моделях при смещении центра распределенного заряда относительно точечного заряда противоположного знака возникает возвращающая сила $F = kx$, пропорциональная величине смещения $x$. Как известно из механики, в этом случае движение заряда описывается уравнением гармонического осциллятора $m\ddot{x} + kx = 0$. Собственная частота осциллятора $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ определяется массой электрона $m$ и силовой постоянной $k$. Нетрудно вычислить эту постоянную для случая, когда распределенный заряд представляет собой однородно заряженный шар. Используя решение эквивалентной задачи механики о гравитационном взаимодействии материальной точки и шара (см., на-

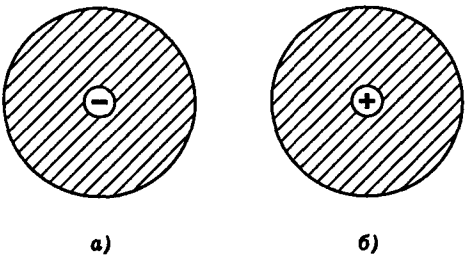



Рис. Д9.1. Осцилляторные модели атома

пример, [1, с. 286]), получим $k = e^2/a_0^3$, где $e$ — заряд электрона, $a_0$ — радиус атома. Следовательно,

$$\omega_0 = \sqrt{e^2/ma_0^3}. \qquad (Д9.3)$$

Итак, частота колебаний электрона в атоме Томсона определяется формулой (Д9.3). Полагая $e = 4{,}8 \times 10^{-10}$ СГСЭ, $m = 9{,}1 \times 10^{-28}$ г, $a_0 = 0{,}5 \times 10^{-8}$ см, получим $\omega_0 = 4{,}5 \times 10^{16}$ $c^{-1}$ или, в герцах, $f_0 = \omega_0/2\pi = 7{,}2 \times 10^{15}$ Гц. Таким образом, частота атомного осциллятора в модели Томсона, вычисленная исходя из известных параметров атома (заряд и масса электрона, размер атома), оказывается близкой к частоте оптических колебаний.

**Модель Бора.** Итак, модель Томсона дает правильный порядок величины собственной частоты колебаний атомного осциллятора. Однако с точки зрения этой (чисто классической) модели кажется совершенно необъяснимым то, что реальные атомы имеют *несколько* собственных частот колебаний. Например, спектральные линии атома водорода в видимой области спектра образуют *серию Бальмера,* которую можно эмпирически описать формулой

$$\hbar\omega\,(\text{эВ}) = 13{,}64\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right). \qquad (Д9.4)$$

Здесь для удобства введена постоянная Планка $\hbar$ и $n = 3, 4, 5$. Объяснение этого факта было впервые дано Нильсом Бором в 1913 г., когда он предложил свою квантовую модель атома.

В основе модели Бора лежит резерфордовская планетарная модель атома, квантовый постулат Планка о том, что осциллятор, имеющий собственную частоту колебаний $\omega$, может получать или отдавать энергию только дискретными порциями $\hbar\omega$, и предложенный самим Бором принцип соответствия, согласно которому движение электрона по орбите большого радиуса, когда электрон почти уже оторван от ядра, должно подчиняться законам классической физики.

На рис. Д9.2 показана планетарная модель атома водорода. Точечный электрон вращается вокруг точечного ядра по круговой орбите. Уравнение движения электрона имеет вид

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{r^2}, \qquad (Д9.5)$$

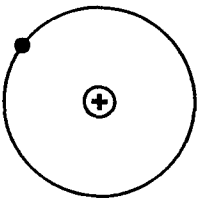


Рис Д9.2. Планетарная модель атома

где $e$ и $m$ — заряд и масса электрона, $v$ — его скорость, $r$ — радиус орбиты. Кинетическая энергия электрона $\text{К} = mv^2/2$, потенциальная энергия $\Pi = -e^2/r$, полная механическая энергия $E = \text{К} + \Pi$ в силу формулы (Д9.5) может быть представлена в виде

$$E = -\frac{mv^2}{2} = -\frac{e^2}{2r}. \qquad (\text{Д}9.6)$$

Предположим, что двигаясь по орбите большого радиуса $r$, атом в соответствии с классической электродинамикой излучает свет на частоте

$$\omega = v/r, \qquad (\text{Д}9.7)$$

равной частоте вращения электрона. С другой стороны, согласно квантовому постулату Планка, излучение частоты $\omega$ испускается атомом не иначе как дискретными порциями с энергией $\hbar\omega$, а это значит, что атом имеет дискретный набор уровней энергии $E_n$, причем

$$E_n - E_{n-1} = \hbar\omega. \qquad (\text{Д}9.8)$$

Для больших значений числа $n$, т. е. для больших орбит, разность энергий $E_n - E_{n-1}$ можно приближенно заменить производной $dE/dn$. При этом, в силу (Д9.6), (Д9.7), уравнение (Д9.8) преобразуется в дифференциальное уравнение относительно энергии

$$\frac{dE}{dn} = \frac{\hbar}{e^2\sqrt{m}}(-2E)^{3/2}. \qquad (\text{Д}9.9)$$

Решение уравнения (Д9.9), удовлетворяющее условию $\lim\limits_{n\to\infty} E = 0$, есть

$$E = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}, \qquad (\text{Д}9.10)$$

или

$$E_n = -\mathcal{E}/n^2, \qquad (\text{Д}9.11)$$

где $n$ — натуральное число, $\mathcal{E}$ — некоторая постоянная энергия, равная

$$\mathcal{E} = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13{,}64\,\text{эВ}. \qquad (\text{Д}9.12)$$

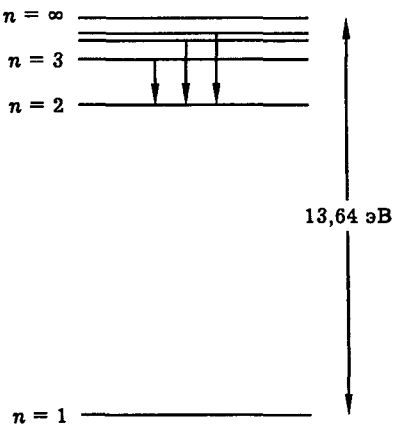



Рис. Д9.3. Энергетические уровни атома водорода и некоторые переходы, соответствующие спектральным линиям серии Бальмера

Теория Бора имела поразительный успех в описании высоких возбужденных уровней атомов. Однако главная ее ценность состоит в возможности экстраполяции формулы (Д9.11) к низким значениям $n$. Поскольку такая экстраполяция противоречит одному из исходных пунктов теории (предположению о достаточно большом радиусе электронной орбиты), Бор заменил первоначальную основу теории новым квантовым постулатом, который также приводит к формуле (Д9.11). Этот постулат требует, чтобы момент импульса электрона был целым кратным постоянной Планка:

$$l = n\hbar \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{Д9.13}$$

Квантовая теория опиралась на формулу (Д9.13) вплоть до появления квантовой механики. Тогда было показано, что это постулат есть приближенное следствие новой теории.

Формулы (Д9.11), (Д9.12) объясняют частоты спектральных линий атома водорода. Согласно Бору, испускание света атомом происходит при его переходе из некоторого возбужденного состояния в состояние с меньшей энергией, причем частота излучения связана с энергией этих двух состояний формулой

$$\hbar\omega = E_m - E_n. \tag{Д9.14}$$

Например, серия Бальмера возникает в результате переходов атомов водорода из возбужденных состояний с квантовым числом $n = 3, 4, 5, \ldots$ в состояние с $n = 2$. Из (Д9.11), (Д9.12), (Д9.14) получаем формулу для частот спектральных линий этой серии:

$$\hbar\omega(\text{эВ}) = 13{,}64\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right). \tag{Д9.15}$$

Это выражение в точности совпадает с эмпирической формулой (Д9.4).

На рис. Д9.3 показана система энергетических уровней атома водорода и несколько переходов, соответствующих спектральным линиям серии Бальмера.

Стабильность атома водорода в теории Бора объясняется тем, что согласно (Д9.11), (Д9.12), энергия электрона не может быть меньше величины

$$E_1 = -13{,}64\,\text{эВ}, \tag{Д9.16}$$

соответствующей минимальному квантовому числу $n = 1$. Энергия $E_1$ имеет смысл потенциала ионизации атома (рис. Д9.3) и очень близка к экспериментальному значению этой величины.

Теория Бора дает также оценку размера атома водорода. Полагая $n = 1$ и используя формулы (Д9.6), (Д9.10), получаем для радиуса электронной орбиты в основном состоянии

$$r = \frac{\hbar^2}{me^2} \equiv a_0 = 0{,}529\,\text{Å} \tag{Д9.17}$$

(1 Å = 1 ангстрем = $10^{-8}$ см). Эта величина, называемая боровским радиусом, служит основным масштабом атомных размеров.

## Литература

1. *Киттель Ч., Найт У., Рудерман М.* Механика. — М.: Наука, 1975.
2. *Фано У., Фано Л.* Физика атомов и молекул. — М.: Наука, 1980.
3. *Ярив А.* Введение в теорию и приложения квантовой механики. — М.: Мир, 1984.
4. *Матвеев А. Н.* Атомная физика. — М.: Высшая школа, 1989.
5. *Вихман Э.* Квантовая физика. — М.: Наука, 1974.
6. *Данин Д.* Нильс Бор — М.: Молодая гвардия, 1978.
7. *Друде П.* Оптика. — Л.–М.: Глав. ред. общетех. лит., 1935.

# Дополнение 10

# Квантовая двухуровневая система и классический осциллятор

*Двухуровневая система. Состояние квантовой системы. Физические величины и операторы. Измеряемые величины. Уравнение Шредингера. Гамильтониан. Изолированный атом. Частица в потенциальной яме. Гармонический осциллятор. Атом в переменном внешнем поле. Матрица плотности. Уравнение для матрицы плотности. Учет релаксации. Двухуровневая система в резонансном внешнем поле. Система уравнений для поляризации, населенностей и поля. Двухуровневая квантовая система и классический осциллятор.*

**Двухуровневая система** — простейшая модель квантового объекта (атома, молекулы или ансамбля частиц). В двухуровневом приближении объект имеет лишь два энергетических уровня с энергиями $E_1$, $E_2$ и характеризуется частотой перехода

$$\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar, \tag{Д10.1}$$

где $\hbar$ — постоянная Планка. Уровни энергии системы показаны на рис. Д10.1.

Строго говоря, объекта с двумя энергетическими уровнями в природе не существует. Реальные атомы и молекулы обладают значительно бóльшим числом уровней энергии. Однако в резонансных условиях, когда частота света близка к частоте перехода между определенной парой уровней энергии вещества, влиянием остальных уровней можно пренебречь, и мы получаем возможность ограничиться рассмотрением только двух выделенных уровней. Так возникает модель двухуровнего атома. В квантовой физике эта модель играет такую же роль, как гармонический осциллятор в классической физике. В оптике двухуровневая модель применяется для описания лазера, а также взаимодействия лазерного излучения с веществом.

Прежде чем обсуждать двухуровневую систему, остановимся, коротко, на общих положениях квантовой модели взаимодействия света с веществом. Мы ограничимся рассмотрением полуклассической модели, в которой вещество описывается квантово-механически, а свет — как классическая электромагнитная волна.

**Состояние квантовой системы.** Состояние квантовой системы считается известным, если известна *волновая функция* системы

$$\psi = \psi(\vec{r}, t),$$

которая в случае одной частицы определяет вероятность найти частицу в точке с радиус-вектором $\vec{r}$ в момент времени $t$. Точнее, величина

$$dp = \left|\psi(\vec{r}, t)\right|^2 d^3r \tag{Д10.2}$$

есть вероятность того, что в момент времени $t$ частица находится в бесконечно малом объеме $d^3r$ около точки $\vec{r}$.

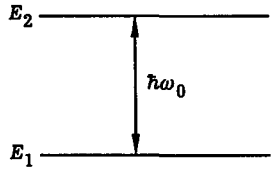



Рис. Д10.1. Квантовая двухуровневая система

Обратим внимание на принципиальное отличие способов описания состояния систем в классической и квантовой физике. В квантовой модели состояние физической системы описывается на языке *вероятностей*.

**Физические величины и операторы.** Задача об определении стационарных состояний атома, характеризуемых определенными значениями энергии, есть задача, в которой определенные состояния системы выделяются из ряда остальных. В математике к такому типу задач относятся задачи на *линейные операторы* и их *собственные значения*. Оператор $\widehat{L}$ есть правило, позволяющее по заданной функции $\varphi(x)$ вычислить другую функцию

$$\psi(x) = \widehat{L}[\varphi(x)].$$

Уравнение вида

$$\widehat{L}f = \lambda f,$$

где $\lambda$ — постоянная, называется *задачей на собственные значения и собственные функции оператора*. Решением этой задачи является, вообще говоря, *дискретный набор* собственных значений и собственных функций, т. е. ряд значений некоторой величины сам собой выделяется из всех мыслимых значений. Эти дискретные значения и можно сопоставить дискретным квантовым состояниям атома. Такого рода обоснование идеи квантования осуществляет квантовая механика, начиная с основополагающей работы Шредингера 1926 г. о квантовании как задаче на собственные значения операторов. Квантовая механика сопоставляет каждой физической величине определенный линейный *оператор*.

**Измеряемые величины.** Среднее значение физической величины, изображаемой оператором $\widehat{A}$, вычисляется по формуле

$$\langle A\rangle = \int \psi^* \widehat{A}\psi \, d^3r, \qquad (Д10.3)$$

где $\psi$ — волновая функция. Средние вида (Д10.3) сопоставляются с измеряемыми величинами. Например, оператор координаты частицы определяется формулой

$$\widehat{x}\psi = x\psi.$$

Нетрудно видеть, что в этом случае операция, выражаемая формулой (Д10.3), есть операция квантово-механического усреднения с плотностью вероятности $|\psi|^2$.

**Уравнение Шредингера.** Волновая функция подчиняется уравнению Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \widehat{H}\psi, \tag{Д10.4}$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, $t$ — время, $\widehat{H}$ — оператор энергии или гамильтониан системы. Уравнение Шредингера описывает изменение волновой функции и, следовательно, состояния системы во времени. В квантовой механике это уравнение играет такую же роль, как второй закон Ньютона в классической механике.

**Гамильтониан.** Оператор Гамильтона определяется формулой

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{\vec{p}}^2}{2m} + U(\vec{r}), \tag{Д10.5}$$

где $\widehat{\vec{p}}^2/2m$ — оператор кинетической энергии, $U(\vec{r})$ — потенциальная энергия, $m$ — масса частицы,

$$\widehat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}, \tag{Д10.6}$$

$\widehat{\vec{p}}$ — оператор импульса,

$$\vec{\nabla} = \vec{x}_0\frac{\partial}{\partial x} + \vec{y}_0\frac{\partial}{\partial y} + \vec{z}_0\frac{\partial}{\partial z}, \tag{Д10.7}$$

$\vec{\nabla}$ — оператор "набла".

**Изолированный атом.** Гамильтониан изолированного атома не зависит от времени. В этом случае решение уравнения (Д10.4) можно представить в виде

$$\psi = \sum_n c_n\varphi_n(\vec{r})\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_n t\right), \tag{Д10.8}$$

где $c_n$ — постоянные. Подставив (Д10.8) в (Д10.4), получим уравнение

$$\widehat{H}\varphi_n = E_n\varphi_n, \tag{Д10.9}$$

которое называется *стационарным уравнением Шредингера.* Функции $\varphi_n(\vec{r})$ есть собственные функции гамильтониана $\widehat{H}$, соответствующие собственным значениям (энергиям) $E_n$. Индекс $n$ нумерует стационарные состояния атома. Каждое такое состояние характеризуется соответствующей координатной волновой функцией $\varphi_n$ и энергией $E_n$. Систему функций $\{\varphi_n\}$ можно считать ортонормированной, так что

$$\int \varphi_n^*\varphi_m\, d^3r = \delta_{mn}, \tag{Д10.10}$$

где $\delta_{mn}$ — символ Кронекера.

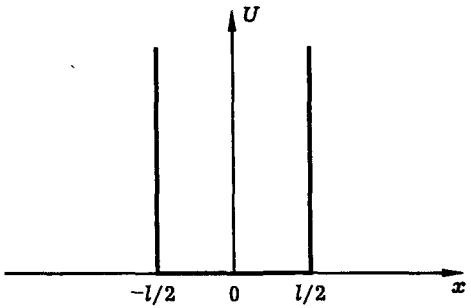



Рис. Д10.2. Одномерная прямоугольная потенциальная яма

**Частица в потенциальной яме.** Рассмотрим в качестве примера движение частицы в потенциальной яме. Потенциальную энергию запишем в виде

$$U = U(x) = \begin{cases} 0, & |x| \le l/2, \\ \infty, & |x| > l/2, \end{cases} \qquad (Д10.11)$$

где $l$ — ширина ямы (рис. Д10.2).

Модель (Д10.11) соответствует яме с абсолютно жесткими стенками. Поскольку частица не может выйти за пределы ямы, волновая функция должна удовлетворять граничным условиям.

$$\varphi(x = \pm l/2) = 0. \qquad (Д10.12)$$

Стационарное уравнение Шредингера имеет вид $\widehat{H}\varphi = E\varphi$ или

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi = 0, \qquad (Д10.13)$$

где $m$ — масса частицы, $E$ — ее энергия. Решение задачи (Д10.12), (Д10.13), удовлетворяющее условиям (Д10.10), есть

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \begin{cases} \cos(\pi n x/l), & n = 1, 3, 5, \ldots \\ \sin(\pi n x/l), & n = 2, 4, 6, \ldots . \end{cases} \qquad (Д10.14)$$

При этом энергия частицы принимает значения

$$E_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \frac{\hbar^2}{2m}. \qquad (Д10.15)$$

На рис. Д10.3 показаны несколько нижних энергетических уровней частицы и соответствующие им волновые функции.

**Гармонический осциллятор.** Рассмотрим одномерный гармонический осциллятор. Потенциальная энергия частицы в этом случае есть

$$U = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2, \qquad (Д10.16)$$

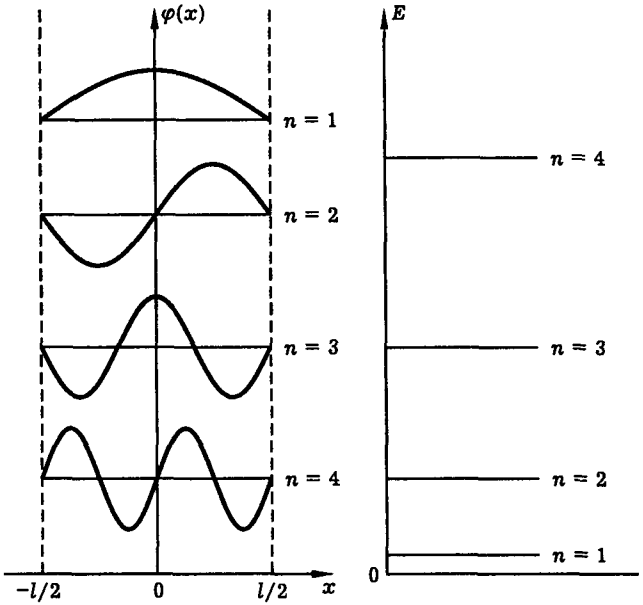



Рис. Д10.3. Волновые функции и уровни энергии частицы в потенциальной яме

где $x$ — координата, $m$ — масса осциллятора, $\omega_0$ — собственная частота колебаний. Подставив (Д10.16) в стационарное уравнение Шредингера $\hat{H}\varphi = E\varphi$, получим уравнение

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 = E\varphi, \qquad (Д10.17)$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + (\varepsilon - \xi^2)\varphi = 0, \qquad (Д10.18)$$

где введены обозначения

$$\xi = x\sqrt{m\omega_0/\hbar}, \qquad \varepsilon = \frac{2E}{\hbar\omega_0}. \qquad (Д10.19)$$

Решение стационарного уравнения Шредингера дает набор собственных значений энергии

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 \qquad (Д10.20)$$

и волновых функций

$$\varphi_n = A_n H_n(\xi)\exp\left(-\xi^2/2\right), \qquad (Д10.21)$$

где

$$A_n = \pi^{-1/4}(2^n n!)^{-1/2}, \qquad (Д10.22)$$

$A_n$ — нормировочные коэффициенты, обеспечивающие выполнение условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^2 d\xi = 1, \qquad (Д10.23)$$

$H_n$ — полиномы Эрмита. Индекс $n$, нумерующий стационарные состояния осциллятора, пробегает значения $0, 1, 2, \ldots$ .

На рис. Д10.4 показаны потенциал $U(x)$, уровни энергии $E_n$ и волновые функции $\varphi_n(\xi)$ одномерного гармонического осциллятора. Отличные от нуля матричные элементы координаты $x$

$$x_{nk} = \int \varphi_n^* x \varphi_k \, dx \qquad (Д10.24)$$

имеют вид

$$x_{n,n-1} = x_{n-1,n} = \sqrt{\frac{n\hbar}{2m\omega_0}}. \qquad (Д10.25)$$

В частности,

$$x_{01} = x_{10} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}. \qquad (Д10.26)$$

**Атом в переменном внешнем поле.** Гамильтониан атома, находящегося в переменном внешнем поле, например поле световой волны, запишем в виде

$$\widehat{H} = \widehat{H}_0 + V(t), \qquad (Д10.27)$$

где $\widehat{H}_0$ — гамильтониан изолированного атома, $V(t)$ — энергия взаимодействия атома с полем. Волновую функцию запишем как

$$\psi = \sum_n c_n(t)\varphi_n(\vec{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_n t\right). \qquad (Д10.28)$$

Здесь координатные волновые функции $\varphi_n(\vec{r})$ и энергии $E_n$ описывают стационарные состояния изолированного атома и подчиняются уравнению

$$\widehat{H}_0\varphi_n = E_n\varphi_n. \qquad (Д10.29)$$

Система функций $\{\varphi_n\}$ удовлетворяет условию (Д10.10). Формула (Д10.28) подобна формуле (Д10.8). Однако, в отличие от (Д10.8), коэффициенты $c_n$ в (Д10.28) зависят от времени, что учитывает возможность изменения состояния атома под действием поля. Конкретная зависимость $c_n(t)$ определяется видом возмущения $V(t)$.

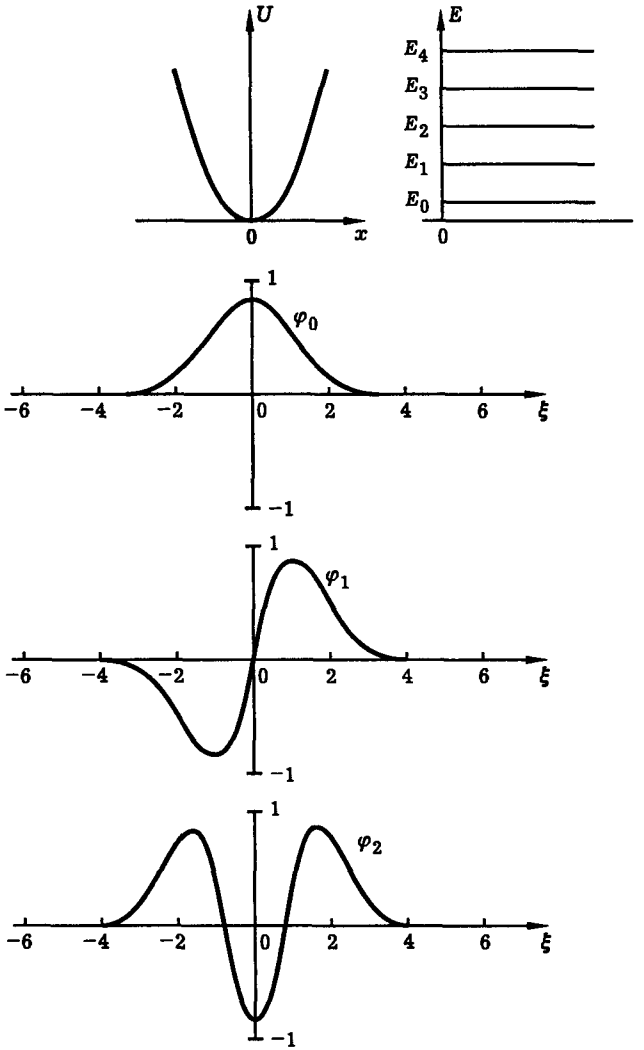



Рис. Д10.4. Потенциал, уровни энергии и волновые функции одномерного гармонического осциллятора

**Матрица плотности.** Обозначив

$$b_n = c_n \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_n t\right), \tag{Д10.30}$$

перепишем (Д10.28) в виде

$$\psi = \sum_n b_n \varphi_n. \tag{Д10.31}$$

Подставив (Д10.31) в (Д10.3), получим

$$\langle A\rangle = \sum_m \sum_n b_n^* b_m A_{nm}, \tag{Д10.32}$$

где величина

$$A_{nm} = \int \varphi_n^* \widehat{A} \varphi_m \, d^3 r \tag{Д10.33}$$

называется *матричным элементом* оператора $A$.

Обычно на практике мы имеем дело с большим числом частиц (атомов, молекул). В этом случае, для того чтобы вычислить измеряемое значение величины $A$, нужно выполнить не только усреднение (Д10.3), относящееся к отдельной частице и связанное с принципиально вероятностным описанием событий в квантовой механике, но и обычное статистическое усреднение по ансамблю частиц. Обозначая это усреднение чертой над буквой, представим измеряемое значение величины $A$ в виде

$$\overline{\langle A\rangle} = \sum_m \sum_n \overline{b_n^* b_m} A_{nm}, \tag{Д10.34}$$

или

$$\overline{\langle A\rangle} = \sum_m \sum_n \rho_{mn} A_{nm}, \tag{Д10.35}$$

где введена матрица

$$\rho_{mn} = \overline{b_m b_n^*}, \tag{Д10.36}$$

называемая *матрицей плотности*.

Используя правило умножения матриц, согласно которому элементы матрицы-произведения $C = AB$ выражаются через элементы матриц-сомножителей $A$ и $B$ по формуле

$$C_{mn} = \sum_k A_{mk} B_{kn} \tag{Д10.37}$$

и вводя определение *следа матрицы* как суммы ее диагональных элементов

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_n A_{nn}, \tag{Д10.38}$$

представим (Д10.35) в виде

$$\overline{\langle A\rangle} = \mathrm{Tr}(\rho A). \tag{Д10.39}$$

Итак, формула (Д10.39) позволяет вычислить измеряемое значение величины $A$ для большого ансамбля частиц.

**Уравнение для матрицы плотности.** Подставив (Д10.31) в (Д10.4), получим уравнение

$$i\hbar \sum_n \dot{b}_n \varphi_n = \sum_n b_n \widehat{H} \varphi_n. \tag{Д10.40}$$

Здесь точка над буквой обозначает дифференцирование по времени. Умножим это уравнение слева на $\varphi_m^*$ и проинтегрируем по всему пространству. Принимая во внимание условие ортонормированности волновых функций (Д10.10), получим уравнение

$$i\hbar\dot{b}_m = \sum_n b_n H_{mn}, \tag{Д10.41}$$

где

$$H_{mn} = \int \varphi_m^* \widehat{H} \varphi_n \, d^3r, \tag{Д10.42}$$

$H_{mn}$ — матричный элемент гамильтониана.

Пользуясь формулами (Д10.36), (Д10.41), нетрудно получить следующее уравнение для матрицы плотности:

$$i\hbar\dot{\rho}_{mn} = \sum_k (\rho_{kn} H_{mk} - \rho_{mk} H_{nk}^*), \tag{Д10.43}$$

или

$$i\hbar\dot{\rho}_{mn} = \sum_k (H_{mk} \rho_{kn} - \rho_{mk} H_{kn}), \tag{Д10.44}$$

где учтено свойство *эрмитовости* оператора $\widehat{H}$, выражаемое формулой

$$H_{kn} = H_{nk}^*. \tag{Д10.45}$$

Покажем, что оператор $\widehat{H}$ эрмитов. Для этого запишем выражение для среднего значения гамильтониана (энергии системы). Пользуясь формулой (Д10.3), получим

$$\langle H \rangle \equiv E = \int \psi^* \widehat{H} \psi \, d^3r. \tag{Д10.46}$$

Подставив (Д10.31) в (Д10.46), преобразуем это выражение к виду

$$E = \sum_m \sum_n b_n^* b_m H_{nm}, \tag{Д10.47}$$

где матричный элемент гамильтониана определяется формулой (Д10.42). Энергия системы должна быть действительной величиной, т. е.

$$E = E^*. \tag{Д10.48}$$

Подставив (Д10.47) в (Д10.48), приходим к равенству (Д10.45). Аналогичным образом можно показать, что любой оператор $\widehat{A}$, соответствующий измеряемой физической величине, эрмитов, а его матричные элементы удовлетворяют соотношению типа (Д10.45). Заметим, что матрица плотности также является эрмитовой:

$$\rho_{mn} = \rho_{nm}^*. \tag{Д10.49}$$

Эта формула непосредственно вытекает из определения матрицы плотности (Д10.36).

Используя правило умножения матриц (Д10.37) и знак коммутации

$$[A, B] = AB - BA, \tag{Д10.50}$$

можно записать (Д10.44) в более компактном виде

$$i\hbar\dot{\rho} = [H, \rho]. \tag{Д10.51}$$

Это уравнение, описывающее эволюцию матрицы плотности, называется *уравнением Неймана.*

**Учет релаксации.** Тепловое движение атомов и молекул, столкновения между ними приводят к появлению *релаксационных процессов,* стремящихся привести систему к состоянию термодинамического равновесия, при котором элементы матрицы плотности — постоянные величины. Для того чтобы учесть эти процессы, дополним уравнение Неймана релаксационным членом и перепишем его следующим образом

$$\dot{\rho} = \frac{i}{\hbar}[\rho, H] + R. \tag{Д10.52}$$

Здесь $R$ — релаксационный оператор (релаксационная матрица).

Итоги. Итак, сформулируем окончательно уравнения, описывающие динамику квантовой системы в переменном внешнем поле. Эти уравнения имеют вид

$$\overline{\langle A \rangle} = \mathrm{Tr}(\rho A) = \sum_m \sum_n \rho_{mn} A_{nm}, \tag{Д10.53}$$

$$\frac{d\rho}{dt} \equiv \dot{\rho} = \frac{i}{\hbar}[\rho, H] + R. \tag{Д10.54}$$

**Двухуровневая система в резонансном внешнем поле.** Применим теперь общие результаты к случаю двухуровневой квантовой системы, находящейся в резонансном внешнем поле.

Выведем уравнение для поляризации двухуровневой среды. Ограничиваясь для простоты одномерной задачей, запишем

$$P = Ne\langle x \rangle, \tag{Д10.55}$$

$$\langle x \rangle = \mathrm{Tr}(\rho x) = \sum_m \sum_n \rho_{mn} x_{nm}, \tag{Д10.56}$$

$$\dot{\rho} = \frac{i}{\hbar}[\rho, H]. \tag{Д10.57}$$

Последнее уравнение записано без учета релаксации; соответствующую поправку мы сделаем в конце расчета. В двухуровневом приближении из (Д10.57) получаем

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{11} &= \frac{i}{\hbar}(\rho_{12}H_{21} - H_{12}\rho_{21}),\\
\dot{\rho}_{22} &= \frac{i}{\hbar}(\rho_{21}H_{12} - H_{21}\rho_{12}),\\
\dot{\rho}_{12} &= \frac{i}{\hbar}(H_{22} - H_{11})\rho_{12} + \frac{i}{\hbar}H_{12}n,\\
\dot{\rho}_{21} &= -\frac{i}{\hbar}(H_{22} - H_{11})\rho_{21} - \frac{i}{\hbar}H_{21}n,
\end{aligned} \tag{Д10.58}$$

где введена величина

$$n = \rho_{11} - \rho_{22}, \tag{Д10.59}$$

имеющая смысл разности населенностей уровней, отнесенной к полному числу частиц.

Записав гамильтониан в виде

$$\widehat{H} = \widehat{H}^{(0)} + V(t), \tag{Д10.60}$$

где $\widehat{H}^{(0)}$ — гамильтониан невозмущенного атома,

$$V(t) = -pE, \tag{Д10.61}$$

$V(t)$ — энергия возмущения, $E$ — напряженность электрического поля световой волны,

$$p = ex, \tag{Д10.62}$$

$p$ — дипольный момент атома, получим

$$H_{mn} = H_{mn}^{(0)} + V_{mn}. \tag{Д10.63}$$

Матричные элементы в (Д10.63) вычисляются по системе собственных функций $\varphi_n$ оператора $\widehat{H}^{(0)}$. Эти функции подчиняются стационарному уравнению Шредингера

$$\widehat{H}^{(0)}\varphi_n = E_n\varphi_n, \tag{Д10.64}$$

где $E_n$ — энергии стационарных состояний, и условиям ортогональности и нормировки

$$\int \varphi_m^*\varphi_n\,dx = \delta_{mn}. \tag{Д10.65}$$

В силу (Д10.64), (Д10.65) матричные элементы оператора $\widehat{H}^{(0)}$

$$H_{mn}^{(0)} = \int \varphi_m^*\widehat{H}^{(0)}\varphi_n\,dx \tag{Д10.66}$$

равны

$$H_{11}^{(0)} = E_1, \quad H_{22}^{(0)} = E_2, \quad H_{12}^{(0)} = H_{21}^{(0)} = 0. \tag{Д10.67}$$

Матричные элементы оператора возмущения, в силу (Д10.61), (Д10.62), выражаются через матричные элементы электронной координаты

$$V_{mn} = -eEx_{mn}, \tag{Д10.68}$$

где

$$x_{mn} = \int \varphi_m^* x \varphi_n \, dx. \tag{Д10.69}$$

Предположим, что волновые функции стационарных состояний атома действительны

$$\varphi_n(x) = \varphi_n^*(x) \tag{Д10.70}$$

и являются либо четными, либо нечетными функциями координаты $x$:

$$\varphi_n(x) = \pm\varphi_n(-x). \tag{Д10.71}$$

Такими свойствами обладают, например, волновые функции частицы в потенциальной яме (рис. Д10.3), а также гармонического осциллятора (рис. Д10.4). Поскольку атом обладает центральной симметрией, для него также должно выполняться условие (Д10.71). В этом случае

$$x_{11} = x_{22} = 0, \qquad x_{12} = x_{21}. \tag{Д10.72}$$

Итак, матричные элементы гамильтониана имеют вид

$$H_{11} = E_1, \quad H_{22} = E_2, \quad H_{12} = H_{21} = -eEx_{12}. \tag{Д10.73}$$

Величина $\langle x \rangle$, согласно (Д10.56) и (Д10.72), определяется формулой

$$\langle x \rangle = (\rho_{12} + \rho_{21})x_{12}. \tag{Д10.74}$$

Подставив (Д10.73) в (Д10.58), получим уравнения

$$\dot{n} = \frac{2i}{\hbar}(\rho_{12} - \rho_{21})H_{12}, \tag{Д10.75}$$

$$\dot{\rho}_{12} = i\omega_0\rho_{12} + \frac{i}{\hbar}H_{12}n, \tag{Д10.76}$$

$$\dot{\rho}_{21} = -i\omega_0\rho_{21} - \frac{i}{\hbar}H_{12}n, \tag{Д10.77}$$

где использованы обозначения (Д10.1), (Д10.59).

**Система уравнений для поляризации, населенностей и поля.** Складывая последние два уравнения, и вычитая одно из другого, получим

$$(\dot{\rho}_{12} + \dot{\rho}_{21}) = i\omega_0(\rho_{12} - \rho_{21}), \tag{Д10.78}$$

$$(\dot{\rho}_{12} - \dot{\rho}_{21}) = i\omega_0(\rho_{12} + \rho_{21}) + \frac{2i}{\hbar}H_{12}n, \tag{Д10.79}$$

откуда следует, что

$$(\ddot{\rho}_{12} + \ddot{\rho}_{21}) + \omega_0^2(\rho_{12} + \rho_{21}) = -\frac{2\omega_0}{\hbar} H_{12} n. \qquad (Д10.80)$$

Из (Д10.75) и (Д10.78) получаем уравнение

$$\dot{n} = \frac{2}{\hbar\omega_0}(\dot{\rho}_{12} + \dot{\rho}_{21}) H_{12}. \qquad (Д10.81)$$

Итак, для поляризации среды $P$ получаем следующие уравнения:

$$\begin{gathered} P = Ne\langle x\rangle, \\ \langle\ddot{x}\rangle + \omega_0^2\langle x\rangle = \frac{2\omega_0}{\hbar} eEx_{12}^2 n, \\ \dot{n} = -\frac{2}{\hbar\omega_0}\langle\dot{x}\rangle eE, \end{gathered} \qquad (Д10.82)$$

или

$$\begin{gathered} \ddot{P} + \omega_0^2 P = \frac{2\omega_0}{\hbar} p_0^2 E\Delta N, \\ \Delta\dot{N} = -\frac{2}{\hbar\omega_0}\dot{P}E, \end{gathered} \qquad (Д10.83)$$

где обозначено

$$ex_{12} = p_0, \qquad Nn = \Delta N. \qquad (Д10.84)$$

Величина $p_0$ есть матричный элемент дипольного момента атома $p = ex$, соответствующий переходу $1 \to 2$; величина $\Delta N$ имеет смысл разности населенностей уровней.

С учетом процессов релаксации уравнения (Д10.83) записываются в виде

$$\begin{gathered} \ddot{P} + \frac{2}{T_2}\dot{P} + \omega_0^2 P = \frac{2\omega_0 p_0^2}{\hbar} E\Delta N, \\ \Delta\dot{N} + \frac{\Delta N - \Delta N_0}{T_1} = -\frac{2}{\hbar\omega_0}E\dot{P}, \end{gathered} \qquad (Д10.85)$$

где $\Delta N_0$ — равновесное значение разности населенностей в отсутствие поля; $T_2$ — время релаксации поляризации, $T_1$ — время релаксации населенностей.

Итак, уравнения (Д10.85) описывают состояние среды, возникающее под действием резонансного светового поля. Вместе с волновым уравнением

$$\Delta E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \qquad (Д10.86)$$

(см. ч. IV) эти уравнения составляют основную модель в теории лазера.

**Двухуровневая квантовая система и классический осциллятор.** Согласно (Д10.82), в отсутствие движения населенностей, когда

$$n = n_0 = \text{const} \qquad (Д10.87)$$

(это условие выполняется при достаточно слабом поле $E$), среднее значение электронной координаты $x$ подчиняется уравнению осциллятора

$$\langle \ddot{x} \rangle + \omega_0^2 \langle x \rangle = \text{const} \cdot E. \qquad (Д10.88)$$

Таким образом, при не слишком сильном световом поле квантовое уравнение движения электрона переходит в классическое. С точки зрения теории этот факт является главным аргументом в пользу классической модели атома. Как показывает наш расчет, условием применимости классической модели является отсутствие заметного изменения населенностей квантовых энергетических уровней вещества под действием светового поля. При этом двухуровневая квантовая система оказывается прямым аналогом классического гармонического осциллятора.

## Литература


1. *Аллен Л., Эберли Дж.* Оптический резонанс и двухуровневые атомы. — М.: Мир, 1978.
2. *Клышко Д. Н.* Физические основы квантовой электроники. — М.: Наука, 1986.
3. *Ярив А.* Введение в теорию и приложения квантовой механики. — М.: Мир, 1984.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. — М.: Наука, 1974.
5. *Страховский Г. М., Успенский А. В.* Основы квантовой электроники. — М.: Высшая школа, 1979.
6. *Пиппард А.* Физика колебаний. Квантово-механические системы. — М.: Высшая школа, 1989.
7. *Бломберген Н.* Нелинейная оптика. — М.: Мир, 1966.
8. *Ахманов С. А., Коротеев Н. И.* Методы нелинейной оптики в спектроскопии рассеяния света. — М.: Наука, 1981.
9. Нелинейная спектроскопия/Под ред. Н. Бломбергена. — М.: Мир, 1979.
10. Сверхкороткие световые импульсы/Под ред. С. Шапиро. — М.: Мир, 1981.
11. *Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С.* Введение в статистическую радиофизику о оптику. — М.: Наука, 1981.
12. *Коротеев Н. И., Шумай И. Л.* Физика мощного лазерного излучения. — М.: Наука, 1991.
13. *Мигдал А. Б.* Квантовая физика для больших и маленьких. Библиотечка "Квант". Выпуск 75. — М.: Наука, 1989.
14. *Фок В. А.* Начала квантовой механики. —М.: Наука, 1976.
15. *Вихман Э.* Квантовая физика. — М.: Наука, 1974.
16. *Крауфорд Ф.* Волны. — М.: Наука, 1974.
17. *Тарасов Л. В.* Основы квантовой механики. — М.: Высшая школа, 1978.

# Дополнение 11

# Из истории физической оптики

*Цитаты из оригинальных работ Планка и Меймана.*

**Макс Планк "Об одном улучшении закона излучения Вина".** "Интересные результаты, относящиеся к измерению длинноволновой части спектра излучения, о которых г-н Курльбаум сообщил на сегодняшнем заседании и которые были получены им и г-ном Рубенсом, убедительно подтверждают утверждение Луммера и Прингсхейма, основывающееся на их наблюдениях, что закон распределения энергии в спектре Вина справедлив не всегда, в отличие от того, что представлялось многим вплоть до последнего времени; он скорее носит характер предельного случая, применимого в простой форме лишь в области коротких длин волн и низких температур[1]. Поскольку сам я на заседаниях этого общества высказал ту точку зрения, что закон Вина необходимо должен быть справедлив, мне, быть может, будет позволено пояснить соотношение между электромагнитной теорией излучения, развитой мною, и экспериментальными данными.

В соответствии с этой теорией закон распределения энергии излучения определен постольку, поскольку известна зависимость энтропии $S$ линейного резонатора, взаимодействующего с излучением, от колебательной энергии $U$. В моей последней работе по этому вопросу[2] я, однако, установил, что закон возрастания энтропии сам по себе еще недостаточен для полного определения этой функции. Моя точка зрения о том, что закон Вина существенно ограничен, основывалась на соображениях, вытекающих из оценки бесконечно малого возрастания энтропии системы $n$ одинаковых резонаторов в стационарном поле излучения, которую я произвел двумя различными методами и которая привела к уравнению

$$dU_n \Delta U_n f(U_n) = n dU \Delta U f(U),$$

где

$$U_n = nU \quad \text{и} \quad f(U) = -\frac{3d^2S}{5dU^2}.$$

Отсюда выражение закона Вина принимает вид

$$\frac{d^2S}{dU^2} = \text{const}/U.$$

Выражение, стоящее в правой части этого функционального уравнения, и есть упомянутое выше изменение энтропии, поскольку $n$ одинаковых процессов протекают независимо друг от друга, и изменения их энтропии поэтому должны просто складываться. Я смог рассмотреть, однако, еще одну возможность, хотя ее и не так легко себе представить и, во всяком случае, трудно проверить. А именно, было показано, что выражение, стоящее в левой части вышеприведенной формулы, не имеет того общего значения, которое я с ним

[1] Г-н Пашен писал мне, что он также обнаружил недавно отклонения от закона Вина.

[2] *Plank M*//Ann. Phys. 1900, v. 1, p. 730.

связывал ранее; иначе говоря, что величины $U_n$, $dU_n$, $\Delta U_n$ сами по себе несущественны для определения рассматриваемого изменения энтропии, но что для этого необходимо знать значение самой энергии $U$. В связи с этим я в конце концов приступил к построению полностью произвольных уравнений для энтропии, которые, хотя и выглядели более сложными, чем формула Вина, все же представлялись удовлетворяющими всем требованиям термодинамики и электромагнитной теории.

Особенно привлекательно одно из построенных мною выражений, которое почти так же просто, как и формула Вина, и заслуживает рассмотрения, поскольку эта формула недостаточна для того, чтобы охватить всю область наблюдаемых величин. Мы получим это выражение, полагая[3]

$$\frac{d^2S}{dU^2} = \frac{\alpha}{U(\beta + U)}.$$

Это самое простое из всех соотношений, которые приводят к выражению $S$ как логарифмической функции $U$, получается из вероятностных соображений и, кроме того, для малых значений $\beta$ дает формулу Вина. Используя

$$\frac{dS}{dU} = \frac{1}{T}$$

и закон смещения Вина[4], получим формулу, содержащую две константы:

$$E = \frac{C\lambda^{-5}}{e^{c/\lambda T} - 1}.$$

Эта формула, насколько я могу сейчас судить, соответствует экспериментальным данным, опубликованным к настоящему времени, в той же мере удовлетворительно, как и лучшие выражения, а именно данные Тизеном[5], Луммером и Янке[6] и Луммером и Прингсхеймом[7]. Это будет проиллюстрировано некоторыми численными примерами.

Поэтому я полагаю возможным обратить ваше внимание на приведенную новую формулу, которую я считаю наипростейшей (не считая формулы Вина) — с точки зрения электромагнитной теории излучения."

**Теодор Мейман. "Вынужденное оптическое излучение в рубине".** "Шавлов и Таунс[8] предложили способ генерации очень монохроматичного излучения в ближней инфракрасной области спектра путем использования паров щелочных металлов в качестве активной среды. Джаван[9] и Сандерс[10]

---

[3] Я использую вторую производную $S$ по $U$, поскольку эта величина имеет простое физическое истолкование.

[4] Закон смещения Вина имеет вид $S = f(U/\nu)$, где $\nu$ — частота резонатора, как это будет показано в другом месте.

[5] *Thiesen M*//Verhandl. Dtsch. Phys. Ges. 1900. V. 2. P. 67. Из этой работы можно усмотреть, что г-н Тизен предложил свою формулу до того, как господа Луммер и Прингсхейм распространили свои измерения на область длинных волн. Я подчеркиваю это обстоятельство, поскольку я сделал противоположное утверждение (Ann. Phys. 1900. V. 1. P. 719) до того, как эта работа была опубликована.

[6] *Lummer O., Jahnke E*//Ann. Phys. 1900. V. 3. P. 288.

[7] *Lummer O., Pringsheim E*//Verhandl. Dtsch. Phys. Ges. 1900. V. 2. P. 174.

[8] *Schawlow A. L., Townes C. H*//Phys. Rev. 1958. V. 112. P. 1940.

[9] *Javan A*//Phys. Rev. Lett. 1959. V. 3. P. 87.

[10] *Sanders J. H*//Phys. Rev. Lett. 1959. V. 3. P. 86.

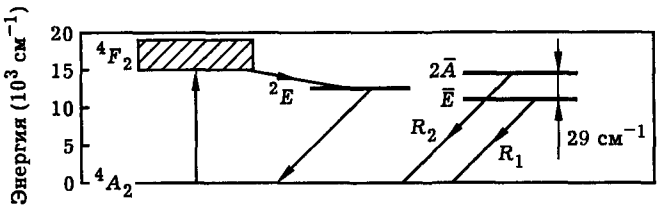



Рис. Д11.1. Схема энергетических уровней ионов хрома в корунде, показывающая рассматриваемый процесс

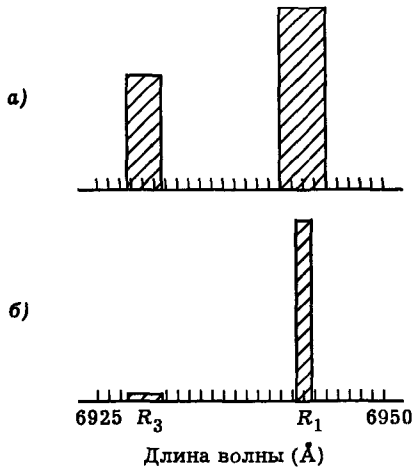



Рис. Д11.2. Спектр испускания рубина. Возбуждение низкой мощности (*а*), возбуждение высокой мощности (*б*)

обсудили предложения использовать электронно возбужденные газовые системы. В нашей лаборатории метод оптической накачки был применен для флуоресцентного твердого тела, что позволило достичь отрицательных абсолютных температур и вынужденного оптического излучения на длине волны 6943 Å; в качестве активного материала использовался рубин (хром в корунде).

Упрощенная схема энергетических уровней для трехкратно ионизованного хрома в этом кристалле показана на рис. Д11.1. Когда этот материал облучается светом с длиной волны около 5500 Å, ионы хрома возбуждаются в состояние $^4F_2$, и затем быстро теряют часть энергии возбуждения в процессе безызлучательного перехода в состояние $^2E$ [11]. Это состояние затем медленно распадается за счет спонтанного излучения дублета узких спектральных линий, которые при температуре 300 К имеют длины волн 6943 Å и 6929 Å (рис. Д11.2, *а*). В случае очень интенсивного возбуждения населенность этого метастабильного состояния ($^2E$) может превысить населенность основного состояния; это есть условие возникновения отрицательной абсолютной температуры и, следовательно, усиления света за счет вынужденного излучения.

[11] *Maiman T. H*//Phys. Rev. Lett. 1960. V. 4. P. 564.

Для демонстрации описанного выше эффекта кристалл рубина размером в 1 сантиметр, покрытый на двух параллельных торцах серебром, облучался мощной лампой-вспышкой; спектр испускания, полученный при этих условиях, показан на рис. Д11.2, *б*. Эти результаты можно объяснить тем, что достигаются отрицательные абсолютные температуры, и имеет место регенеративное усиление. Я ожидаю, в принципе, значительно большего ($\sim 10^8$) сужения спектральной линии при использовании техники селекции мод[12]."

## Литература

1. *Planck M*//Verhandl. Dtsch. Phys. Ges. 1900. V. 2. P. 202. Доклад, сделанный на заседании 19 октября 1900 г. Перевод В. Я. Френкеля.
2. *Maiman T. H* Stimulated Optical Radiation in Ruby//Nature. 1960. V. 187. P. 493.

[12] *Schawlow A. L., Townes C. H.*//Phys. Rev. 1958, v. 112, p. 1940.

# Часть III
# Интерференция, дифракция, когерентность

В этой части книги рассказано о физических явлениях, обусловленных волновой природой света.

Два световых пучка, складываясь, могут образовывать темноту! Это удивительное явление, открытое Юнгом в 1801 году, получило название *интерференции* света. Объяснить интерференцию удается только на основе представления о свете как о волне. Так, задолго до открытия электромагнитной природы света было установлено, что свет представляет собой волну.

Способность интерферировать называют *когерентностью* света. Однако не всякий свет является когерентным. Например, свет лазера когерентен, а свет Солнца — нет. С точки зрения структуры света, когерентность — это близость света к идеальной гармонической волне.

*Дифракция* — это огибание световой волной препятствия, находящегося на ее пути. Одно из проявлений дифракции — так называемое "пятно Пуассона" — светлая точка в центре области геометрической тени, наблюдаемая при освещении непрозрачного диска когерентной световой волной. Другой пример — дифракция лазерного луча на дифракционной решетке (системе щелей в непрозрачном экране), когда прошедший свет образует яркий "веер" лучей, распространяющихся в различных направлениях.

Интерференция, дифракция, когерентность света чрезвычайно важны в таких процессах как передача оптической энергии на расстояние, концентрация светового поля в пространстве, формирование оптического изображения. На основе интерференции работают оптические приборы, позволяющие анализировать спектральный состав света — дифракционные решетки и многолучевые интерферометры. Эти же приборы позволяют очень точно измерить длину световой волны. Дифракция рентгеновских лучей позволяет исследовать структуру кристаллов и сложных молекул.

Ясное понимание физики интерференции и дифракции света позволило реализовать новый способ записи световых полей — голографию. Принципиальное отличие этого способа от фотографической регистрации состоит в том, что записывается не само световое поле, отраженное объектом, а картина интерференции этого поля с когерентной опорной световой волной. При этом удается сохранить информацию не только о пространственном распределении интенсивности света, но и о распределении фазы колебаний в световом поле. Практическая голография стала возможной после создания источника когерентного оптического излучения — лазера.

# Лекция 11

# Интерференция света

*Интерференционные явления в оптике. Опыт Юнга. Интерферометр Майкельсона. Интерференция монохроматических волн. Интерференция немонохроматического света. Интерференция случайной световой волны. Многолучевая интерференция. Интерферометр Фабри–Перо. Собственные моды и добротность лазерного резонатора.*

Лекция посвящена интерференции света. Описаны опыты по наблюдению интерференции. Обсуждается физическая природа явления. Излагаются основы теории интерференции. На примере интерферометра Фабри–Перо рассматриваются особенности многолучевой интерференции. Сделана оценка добротности лазерного резонатора.

**Интерференционные явления в оптике.** Если при наложении двух световых пучков интенсивность света на экране оказывается не равной сумме интенсивностей, а периодически меняется от точки к точке, образуя систему темных и светлых линий, то говорят, что имеет место *интерференция* света.

Принцип наблюдения интерференции иллюстрирует рис. 11.1. Два однородных световых пучка сводятся на экране и образуют систему темных и светлых линий — *интерференционную картину.* Подобный опыт можно осуществить, используя пучки лазерного света. Опыт показывает, что в пределах темных полос на экране два световых пучка практически полностью *гасят* друг друга. Коротко, интерференцию света можно определить как явление, в котором

$$\text{свет} + \text{свет} = \text{темнота}.$$

Интерференция света весьма тонкое физическое явление, которое редко наблюдается в обыденной жизни. Так, из опыта хорошо известно, что если комната освещается двумя лампочками, то освещенность в любой точке равна сумме

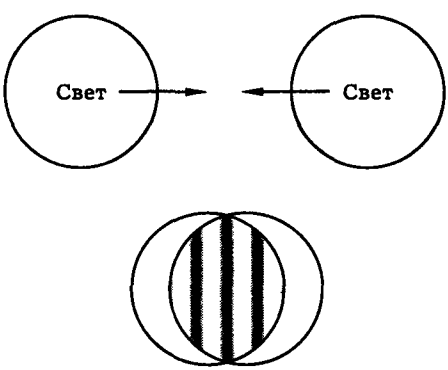



Рис. 11.1. Явление интерференции света. При наложении двух однородных световых пучков образуется картина чередования темных и светлых линий — интерференционная картина

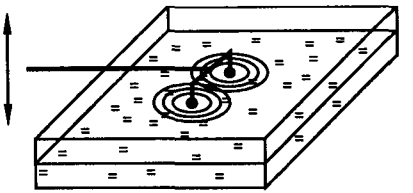


Рис. 11.2. Наблюдение интерференции волн на поверхности воды

освещенностей, создаваемых каждой лампочкой отдельно. Этот экспериментальный факт, который можно назвать *законом сложения интенсивностей,* имеет место для независимых источников света (ламп, свечей и т. п.). Оказывается, однако, что возможны ситуации, когда закон сложения интенсивностей нарушается. Так бывает, если накладываются пучки света, исходящие из одного и того же источника, но прошедшие разные оптические пути. Опыт показывает, что при определенных условиях наложение таких пучков дает распределение интенсивности света в виде чередующихся темных и светлых полос — так называемую *интерференционную картину.*

Интерференция как волновое явление. Если допустить, что свет представляет собой *волну,* то явление интерференции легко объяснить. В самом деле, если складываются две одинаковые сферические волны, то в некоторых точках пространства колебания усиливают друг друга, в то время как в других точках, напротив, колебания взаимно гасятся. Это легко наблюдать в опыте с волнами на поверхности жидкости (рис. 11.2). В плоскую стеклянную кювету налита вода. С помощью специального вибратора два вертикальных стержня с шариками на концах периодически касаются поверхности воды, возбуждая волны. Наложение волн дает интерференционную картину, которую можно наблюдать на экране, используя просвечивающее кювету стробоскопическое освещение, синхронизованное с колебаниями вибратора.

**Опыт Юнга.** Можно ли наблюдать интерференцию в в оптике? Положительный ответ на этот вопрос был получен в опыте Юнга (1801 г). Схема опыта показана на рис. 11.3. В этом опыте свет от источника $S$ проходил через маленькое отверстие в экране $Q_1$, затем падал на экран $Q_2$ с двумя маленькими отверстиями, разнесенными на некоторое расстояние. Прошедший через отверстия свет падал на экран $Q_3$, где и наблюдалась интерференционная картина.

Как видим, схема опыта Юнга очень похожа на схему наблюдения интерференции волн на поверхности воды. Если свет, испускаемый отверстиями в экране $Q_2$, представляет собой волны, то на экране $Q_3$ должно наблюдаться чередование темных и светлых полос, т. е. интерференционная картина.

Опыт подтвердил это предположение. Сначала Юнг пропустил солнечные лучи в темное помещение и на их пути расположил два экрана: темный с двумя точечными отверстиями и белый (на некотором расстоянии позади первого). По обе стороны от яркой линии на белом экране он увидел две темноватые полоски, что привело к решению повторить опыт. На этот раз в качестве источника света он использовал спиртовую горелку, добавив в ее пламя небольшое количество поваренной соли для получения яркого желтого излучения натрия. На экране возникла картина из регулярно расположенных темных полос (рис. 11.3, *б*).

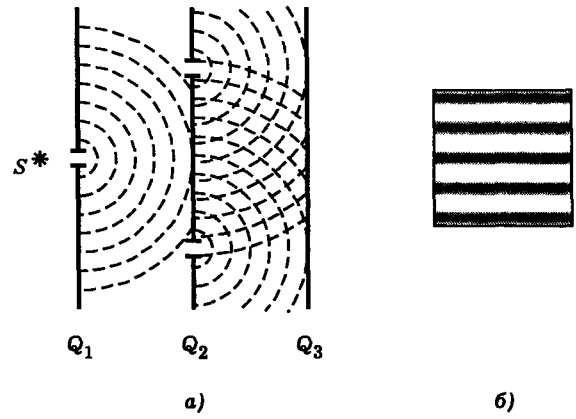



Рис. 11.3. Опыт Юнга. Схема опыта (*а*), фрагмент наблюдаемой интерференционной картины (*б*)

Опыт Юнга явился первым убедительным доказательством того, что наложение света может образовать темноту. Наблюдение интерференции в опыте Юнга послужило экспериментальным доказательством *волновой природы света*.

Задачи теории интерференции. Теория интерференции должна, с одной стороны, дать детальное описание результатов опыта Юнга и других интерференционных опытов, а с другой стороны, объяснить, почему при наложении пучков света от независимых источников интерференция не наблюдается, а имеет место закон сложения интенсивностей. Забегая вперед, укажем, что последнее связано со сложной, *случайной* структурой светового поля, создаваемого обычными (нелазерными) источниками света. Свет таких источников образуется в результате наложения огромного числа элементарных сферических волн, испускаемых независимыми осцилляторами (атомами) и вследствие этого сильно отличается по своей структуре от идеальной гармонической волны. Поэтому в теории интерференции мы будем использовать представление о *случайном световом поле* и методы *статистического описания* световых полей. Развивая теорию интерференции, мы придем к важному понятию когерентности света.

Когерентность света. Исторически понятие когерентности света возникло в связи с интерференционными опытами. Было выяснено, что появление интерференционной картины в опыте Юнга зависит от того, какой свет падает на экран $Q_2$ с двумя точечными отверстиями. Если это свет точечного источника, каковым является маленькое отверстие в экране $Q_1$ (рис. 11.3), то интерференция есть. Если же это свет от протяженного источника или свет, рассеянный матовой пластинкой, то интерференции нет. Когерентностью и была названа *способность света давать интерференционную картину*.

Ясно, что когерентность связана со структурой света. Ниже мы увидим, что когерентный свет — это свет, структура которого близка к плоской или сферической гармонической волне. Иначе говоря, это свет с *высоко упорядоченной структурой*. В противоположность этому некогерентный свет, т. е. свет, не способный давать интерференцию и подчиняющийся закону сложения интенсивностей, имеет структуру хаотически модулированной волны.

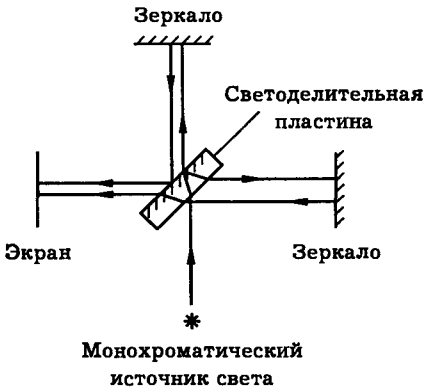



Рис. 11.4. Схема интерферометра Майкельсона

**Интерферометр Майкельсона.** В конце XIX в. американский физик Альберт Майкельсон выполнил серию важных оптических экспериментов. Наиболее известны его опыты по измерению скорости света (см. ч. I), а также опыты по интерференции света, проведенные на специально созданном приборе, получившем позднее его имя. На интерферометре Майкельсона был проведен знаменитый опыт, показавший, что скорость света относительно поверхности земли одинакова в направлении движения Земли по ее орбите и в перпендикулярном направлении. Убедительность и высокая точность экспериментальных результатов Майкельсона позволили установить важный физический принцип — *принцип постоянства скорости света,* согласно которому скорость света одинакова во всех направлениях и не зависит от движения источника. На основании этого принципа Альберт Эйнштейн создал теорию относительности.

Схема интерферометра Майкельсона показана на рис. 11.4. Интерферометр работает следующим образом. Пучок света от монохроматического источника направляется на светоделительную пластину, где делится на два пучка — прошедший и отраженный — примерно одинаковой интенсивности. Пройдя некоторые расстояния, эти пучки попадают на зеркала, отражаются ими в обратных направлениях и вновь падают на делительную пластину. Пластина снова частично отражает и частично пропускает свет, в результате чего образуется пучок света, представляющий собой смесь пучков, прошедших через разные плечи интерферометра. Этот пучок света наблюдается на экране. Двигая одно из зеркал интерферометра в направлении падающего на него светового пучка, можно изменять оптическую разность хода лучей и наблюдать изменение интерференционной картины.

Светоделительная пластина представляет собой плоскопараллельную стеклянную пластину, покрытую с тыльной стороны тонкой пленкой серебра. Пленка серебра настолько тонка, что она частично отражает и частично пропускает свет. Таким образом, пластина играет роль полупрозрачного зеркала.

**Интерференция монохроматических волн.** Пусть источник света направляет в интерферометр Майкельсона плоскую монохроматическую световую волну вида

$$E_0 = A_0 \cos(\omega t - kz). \tag{11.1}$$

Обозначим через $R$ и $T$ коэффициенты отражения и пропускания света (по интенсивности) делительной пластинкой. Пренебрегая поглощением света в пластинке, можно записать

$$R + T = 1. \tag{11.2}$$

Так как амплитуда $A$ плоской монохроматической волны связана с ее интенсивностью $I$ формулой (см. ч. I)

$$I = \frac{cA^2}{8\pi}, \tag{11.3}$$

коэффициенты отражения и пропускания света делительной пластинкой по амплитуде световой волны будут равны, соответственно, $\sqrt{R}$ и $\sqrt{T}$.

На пути от источника света до плоскости наблюдения световая волна делится на две волны, причем каждая из этих двух волн по одному разу пропускается и по одному разу отражается делительной пластинкой. В итоге на выходе интерферометра образуется световая волна вида

$$E = \sqrt{RT} A_0 \left[\cos(\omega t - kl_1) + \cos(\omega t - kl_2)\right], \tag{11.4}$$

где $l_1$ и $l_2$ — длины плеч интерферометра, или

$$E = A \cos(\omega t - kl), \tag{11.5}$$

где

$$A = 2\sqrt{RT} A_0 \cos(\delta/2), \qquad l = (l_1 + l_2)/2. \tag{11.6}$$

Величина $\delta$ имеет смысл разности фаз волн, прошедших разные плечи интерферометра:

$$\delta = k\Delta, \qquad \Delta = l_1 - l_2, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{11.7}$$

Полагая

$$R = T = 1/2 \tag{11.8}$$

и используя формулы (11.3)–(11.7), интенсивность света в плоскости наблюдения можно представить в виде

$$I = \frac{1}{2} I_0 (1 + \cos\delta), \tag{11.9}$$

где $I_0 = cA_0^2/8\pi$ — интенсивность световой волны на входе интерферометра.

Если одно из зеркал интерферометра Майкельсона, установленное на салазках, смещается на расстояние $\Delta z$, то разность хода лучей изменяется на $\Delta = 2\Delta z$, а разность фаз $\delta$ — на $2\pi\Delta/\lambda$. На рис. 11.5 показана зависимость интенсивности света $I$ на экране наблюдения от $\delta$ для случая падающей плоской монохроматической волны. Из рисунка видно, что в максимуме при

$$\delta = 2m\pi, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{11.10}$$

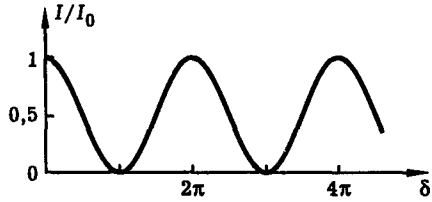



Рис. 11.5. Пропускание интерферометра Майкельсона в зависимости от разности фаз интерферирующих волн

интенсивность прошедшего света $I$ становится равной интенсивности падающего света $I_0$. Иначе говоря, при условии (11.10) интерферометр Майкельсона полностью пропускает падающую на него плоскую монохроматическую световую волну. Напротив, в минимуме при

$$\delta = (2m+1)\pi, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{11.11}$$

интенсивность прошедшего света оказывается равной нулю. Это означает, что падающая плоская волна полностью отражается назад в источник.

Отсюда следует, что интерферометр Майкельсона может служить фильтром, пропускание которого зависит от длины волны, или селективным по длинам волн отражателем света. В этой последней роли он часто используется для селекции мод в лазерах.

В случае *расходящегося* падающего излучения разность хода двух волн зависит от угла падения (рис. 11.6). В этом случае на экране наблюдения возникает интерференционная картина, состоящая из чередующихся темных и светлых колец, концентричных с осью симметрии системы. Смещение какого-либо из зеркал приводит к изменению диаметра колец.

В случае параллельного падающего пучка света, но слегка *наклоненных* зеркал интерферометра или делительной пластинки интерференционная картина состоит из параллельных полос, которые сдвигаются в перпендикулярном полосам направлении при изменении разности хода лучей $\Delta$.

Интерферометр Майкельсона можно использовать для абсолютного измерения длин световых волн. Для этого нужно подсчитать число $N$ максимумов, возникающих на экране наблюдения при смещении подвижного зеркала интерферометра на известное расстояние $\Delta z$. Тогда длина волны

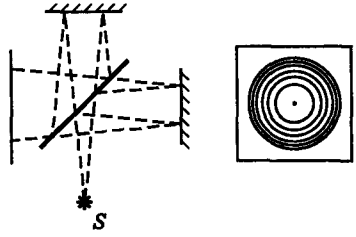



Рис. 11.6. Картина колец, образующаяся в интерферометре Майкельсона при расходящемся падающем излучении

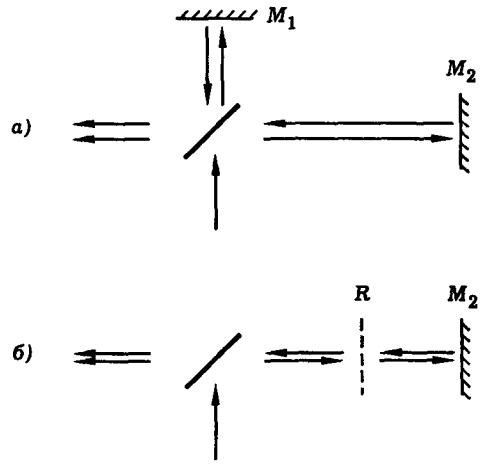



Рис. 11.7. Интерферометр Майкельсона (*а*) и его эквивалентная схема (*б*). Пунктиром показано положение референтной плоскости

$$\lambda = 2\Delta z/N. \tag{11.12}$$

Эта техника использовалась для очень точных измерений длин волн излучения лазеров.

Референтная плоскость. На рис. 11.7, *а* показана упрощенная схема интерферометра Майкельсона, а на рис. 11.7, *б* — эквивалентная схема, в которой вместо зеркала $M_1$ введена так называемая "референтная плоскость", занимающая место изображения зеркала $M_1$ в длительной пластинке.

Из рис. 11.7, *б* видно, что для анализа работы интерферометра Майкельсона достаточно рассмотреть интерференцию волн, отраженных референтной плоскостью $R$ и зеркалом $M_2$. Иначе говоря, возникает задача об интерференции волн, отраженных гранями *плоскопараллельной пластинки*.

Полосы равного наклона. Пусть плоская монохроматическая световая волна падает на плоскопараллельную пластинку, обе грани которой частично отражают свет (рис. 11.8). Подсчитаем оптическую разность хода лучей $\Delta$, отраженных передней и задней гранями пластинки.

Обозначим толщину пластинки $h$, угол падения света $\alpha$, угол преломления $\beta$, показатель преломления материала пластинки $n$. В силу закона Снеллиуса

$$\sin\alpha = n\sin\beta. \tag{11.13}$$

Так как фазовый набег световой волны в среде пропорционален показателю преломления $n$ (см. ч. IV), искомая разность хода лучей есть

$$\Delta = 2ABn - AD. \tag{11.14}$$

Из рис. 11.8 видно, что

$$AD = AC\sin\alpha, \quad AC = 2AB\sin\beta, \quad AB = h/\cos\alpha. \tag{11.15}$$

Из (11.13)–(11.15) получаем

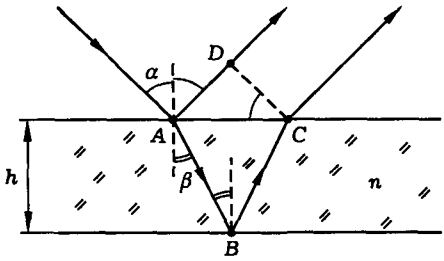



Рис. 11.8. Интерференция света на плоскопараллельной пластинке

$$\Delta = 2hn\cos\beta. \tag{11.16}$$

Формулы (11.13), (11.16) показывают, что разность хода лучей, отраженных гранями плоскопараллельной пластинки, зависит от угла падения света на пластинку ("угла наклона"). Поэтому при падении на пластинку расходящегося светового пучка образуется интерференционная картина, называемая *"полосы равного наклона"*. В частности, в случае осесимметричного лазерного пучка интерференционная картина имеет вид системы концентрических колец. Эту картину можно наблюдать с помощью интерферометра Майкельсона, используя в качестве источника света гелий-неоновый лазер (рис. 11.6).

Полосы равной толщины. Если одно из зеркал в интерферометре Майкельсона (рис. 11.7, *а*) слегка отклонено так, что плоскости зеркал $M_1$ и $M_2$ не являются взаимно перпендикулярными, то референтная плоскость $R$ (напомним, это плоскость, занимающая место изображения зеркала $M_1$ в делительной пластине) и зеркало $M_2$ будут не параллельны друг другу, образуя как бы грани *клиновидной пластинки*.

Картина отражения параллельных световых лучей от граней клина показана на рис. 11.9. Разность хода лучей в этом случае приближенно описывается той же формулой (11.16), где $h$ — толщина пластинки в том месте, где происходит отражение света. Так как величина $h$ меняется вдоль клиновидной пластинки, получающаяся интерференционная картина получила название *"полосы равной толщины"*.

На лекции демонстрируется работа лазерного интерферометра Майкельсона. Схема интерферометра показана на рис. 11.4. В качестве источника света используется гелий-неоновый лазер. Интерференционная картина наблюдается на экране или потолке аудитории. Одно из зеркал демонстрационного интерферометра установлено неподвижно, второе — закреплено на салазках и может перемещаться вдоль светового луча на расстояние около 20 см. Подвижное зеркало смонтировано в специальной карданной оправе и может поворачиваться вокруг двух взаимно перпендикулярных осей, лежащих в вертикальной плоскости. С помощью интерферометра демонстрируются картины "кольца равного наклона" и "полосы равной толщины". Для увеличения линейных размеров интерференционной картины оба интерферирующих луча направляют на специальную отражательную пластинку, а затем пропускают через рассеивающую линзу с небольшим фокусным расстоянием (5–10 см). Для стабилизации интерференционной картины используется специальная следящая система.

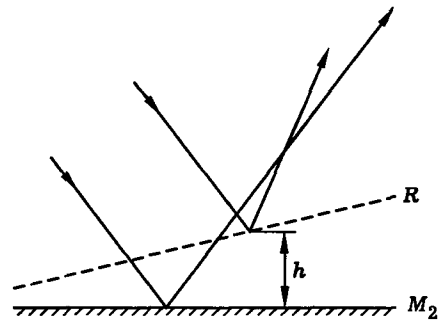



Рис. 11.9. Интерференция света на клине

Кольца Ньютона. Интерференционную картину типа "полосы равной толщины" можно наблюдать с помощью стеклянной пластинки и линзы. Если плотно прижать выпуклую поверхность линзы к пластинке и направить на эту систему параллельный пучок света, то лучи, отраженные пластинкой и поверхностью линзы, будут интерферировать, образуя систему интерференционных линий в виде концентрических темных и светлых колец ("кольца Ньютона").

Вычислим радиусы интерференционных колец. В данном случае разность хода интерфирирующих лучей есть $\Delta = 2h$, где $h$ — расстояние от поверхности линзы до пластинки. Из рис. 11.10 видно, что $h = R - \sqrt{R^2 - r^2}$, где $R$ — радиус кривизны поверхности линзы, $r$ — расстояние от точки касания линзы и пластинки до светового луча. Полагая $r \ll R$, получим приближенное выражение $\Delta = r^2/R$. Радиусы светлых колец определяются условием $\Delta = m\lambda$, где $\lambda$ — длина световой волны, $m = 0, 1, 2, \ldots$ . Таким образом, для радиусов колец Ньютона получаем выражение

$$r_m = \sqrt{mR\lambda}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots . \tag{11.17}$$

Этот результат можно проверить экспериментально.

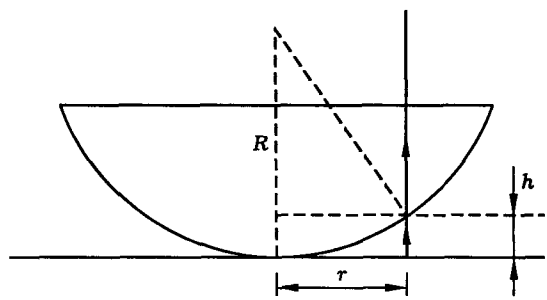



Рис. 11.10. К расчету радиусов колец Ньютона

Диагностическая интерферометрия. Интерференционная картина, наблюдаемая с помощью интерферометра Майкельсона, весьма чувствительна к различным малым возмущениям, таким как механическое смещение зеркал, изменение состава, температуры и плотности среды, через которую проходят световые лучи. Поэтому интерферометр можно использовать для различных точных измерений. Например, с помощью интерферометра можно измерить механическое смещение порядка длины световой волны, т. е. около $10^{-4}$ см. При необходимости точность измерения может быть повышена еще на несколько порядков. Такие точные измерения используют, например, в сейсмологии для регистрации движений земной коры.

**Интерференция немонохроматического света.** Характер интерференции существенно зависит от спектрального состава света. Анализ этой зависимости мы начнем с рассмотрения простого случая интерференции двухчастотного излучения.

Предположим, что на вход интерферометра Майкельсона поступают две плоские монохроматические световые волны с частотами $\omega_1$ и $\omega_2$. Считая, для простоты, амплитуды волн одинаковыми, запишем входной сигнал в виде

$$E_0 = A_0 \cos(\omega_1 t - k_1 z) + A_0 \cos(\omega_2 t - k_2 z). \tag{11.18}$$

Здесь $k_1$ и $k_2$ — волновые числа, связанные с длинами волн соотношениями

$$k_1 = 2\pi/\lambda_1, \qquad k_2 = 2\pi/\lambda_2. \tag{11.19}$$

Так как интерферометр представляет собой *линейную систему,* каждая из монохроматических волн проходит через него *независимо* от другой волны и дает интерференционную картину, описываемую формулами (11.4)–(11.9). Это позволяет записать интенсивность света $I$ на выходе интерферометра в зависимости от разности хода лучей $\Delta = l_1 - l_2$ следующим образом:

$$I = \frac{1}{2} I_0 (1 + \cos\delta_1) + \frac{1}{2} I_0 (1 + \cos\delta_2), \tag{11.20}$$

где

$$I_0 = \mathrm{c}A_0^2/8\pi, \qquad \delta_1 = k_1\Delta, \qquad \delta_2 = k_2\Delta, \tag{11.21}$$

или

$$I = I_0 + I_0 \cos k\Delta \cos \varkappa\Delta, \tag{11.22}$$

где

$$k = (k_1 + k_2)/2, \qquad \varkappa = (k_1 - k_2)/2. \tag{11.23}$$

На рис. 11.11 показаны зависимости интенсивности света $I$ на выходе интерферометра Майкельсона от разности хода лучей $\Delta$ для случаев, когда на вход интерферометра поступают плоские монохроматические волны: одна волна на частоте $\omega_1$ (*а*), одна волна на частоте $\omega_2$ (*б*), пара волн на частотах $\omega_1$ и $\omega_2$ (*в*). Распределение "*в*" есть сумма распределений "*а*" и "*б*".

Из рисунка видно, что немонохроматичность света приводит к зависимости *видности* интерференционной картины от разности хода лучей. Для двухчастотного излучения эта зависимость периодична: видность максимальна при $\Delta = 0$, затем она уменьшается, потом снова возрастает и т. д.

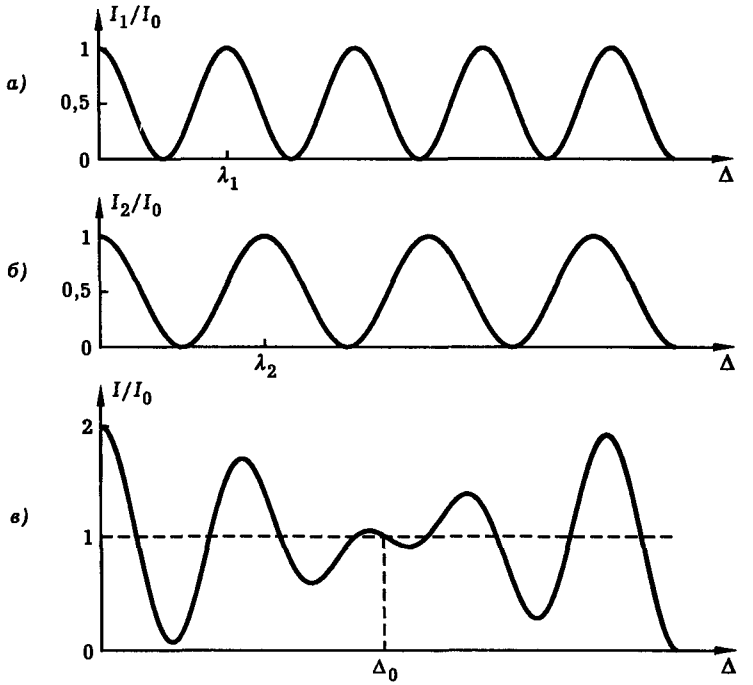



Рис. 11.11. Интенсивность света на выходе интерферометра Майкельсона $I$ в зависимости от разности хода лучей $\Delta$ для случаев, когда на вход интерферометра поступают: волна частоты $\omega_1$ (*а*), волна частоты $\omega_2$ (*б*), пара волн с частотами $\omega_1$ и $\omega_2$ (*в*)

Определим характерную разность хода лучей $\Delta_0$, при которой происходит первое "смазывание" интерференционной картины (рис. 11.11, *в*). Из формулы (11.22) следует, что условие, определяющее $\Delta_0$, есть $\cos \varkappa\Delta = 0$ или $(k_1 - k_2)\Delta_0 = \pi$, откуда

$$\Delta_0 = \pi/(k_1 - k_2), \tag{11.24}$$

или

$$\Delta_0 = \frac{1}{2\delta\nu}, \tag{11.25}$$

где $\delta\nu = \nu_1 - \nu_2$ — спектральная ширина излучения, $\nu = 1/\lambda$ — частота в обратных сантиметрах. Например, если $\lambda_1 = 0{,}5$ мкм, $\lambda_2 = 0{,}4$ мкм, то $\Delta_0 = 1$ мкм.

Итак, в случае интерференции немонохроматического света в интерферометре Майкельсона период интерференционной картины определяется средней длиной волны, а видность интерференционных полос меняется при изменении разности хода лучей. При этом характерная разность хода лучей, при которой происходит "смазывание" интерференционной картины, обратно пропорциональна спектральной ширине излучения.

Видность интерференционной картины. Для характеристики контрастности интерференционной картины вводят параметр, называемый видностью, и определяемый формулой

$$\gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \tag{11.26}$$

где $I_{\max}$, $I_{\min}$ — значения интенсивности света в соседних максимуме и минимуме интерференционной картины.

Параметр $\gamma$ может быть измерен экспериментально или вычислен теоретически, исходя из той или иной модели световой волны. В общем случае безразмерный параметр $\gamma$ лежит в области $0 \leq \gamma \leq 1$. При этом случай $\gamma = 1$ соответствует плоской монохроматической волне, которая дает наиболее контрастную интерференционную картину (см. формулу (11.9)). Для двухчастотного излучения, используя формулу (11.22), получаем $I_{\max} = I_0(1 + \cos \varkappa\Delta)$, $I_{\min} = I_0(1 - \cos \varkappa\Delta)$, откуда

$$\gamma = \cos \varkappa\Delta. \tag{11.27}$$

Таким образом, для немонохроматического излучения видность интерференционной картины зависит от разности хода лучей: $\gamma = \gamma(\Delta)$. Используя (11.27), можно переписать (11.22) в виде

$$I = I_0[1 + \gamma(\Delta) \cos k\Delta]. \tag{11.28}$$

**Интерференция случайной световой волны.** Как мы уже отмечали выше (см. ч. II), наиболее адекватной моделью излучения нелазерного источника света является модель *случайной* световой волны. Рассмотрим особенности интерференции случайного светового поля на примере интерферометра Майкельсона.

В общем случае напряженность поля световой волны есть векторная случайная функция пространственных координат и времени

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t). \tag{11.29}$$

Описание такого поля представляет собой весьма сложную задачу. Мы начнем рассмотрение с более простого случая, а именно рассмотрим одну из декартовых компонент поля $\vec{E}$ в некоторой фиксированной точке пространства $\vec{r} = \text{const}$. В этом случае поле описывается скалярной функцией времени

$$E = E(t), \tag{11.30}$$

т. е. представляет собой *случайное колебание*. Модель (11.30) удобна для описания светового поля, если последнее представляет собой линейно поляризованную плоскую немонохроматическую волну. Рассчитаем картину интерференции случайного светового поля вида (11.30) на примере интерферометра Майкельсона.

Характеристики случайных световых колебаний. Пусть напряженность светового поля

$$E = E(t)$$

есть *стационарный случайный процесс*. Напомним, что наиболее полной статистической характеристикой произвольного случайного процесса $x(t)$ явля-

ется многомерная плотность вероятности (см. дополнение 8). На практике, однако, чаще всего необходимы более простые характеристики, к числу которых относятся: распределение вероятности $w(x)$, среднее значение $\overline{x}$, дисперсия $\sigma^2 = \langle (x-\overline{x})^2 \rangle$, корреляционная функция $B(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle$ и спектр $G(\omega)$. В общем случае $B(\tau)$ и $G(\omega)$ — вещественные четные функции своих аргументов, связанные между собой преобразованием Фурье ("теорема Винера–Хинчина", см. ч. II):

$$B(\tau) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\mathrm{e}^{i\omega\tau}d\omega, \qquad G(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} B(\tau)\mathrm{e}^{-i\omega\tau}d\tau. \tag{11.31}$$

Кроме того, функции $w(x)$ и $G(\omega)$ в общем случае неотрицательны. Корреляционная функция и спектр, в свою очередь, характеризуются временем корреляции $\tau_{\text{к}}$ и шириной спектра $\Delta\omega$, которые имеют смысл меры ширины распределений $B(\tau)$ и $G(\omega)$. В общем случае параметры $\tau_{\text{к}}$ и $\Delta\omega$ обратно пропорциональны друг другу:

$$\tau_{\text{к}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}. \tag{11.32}$$

Применительно к световому полю введем среднюю интенсивность

$$\overline{I} = \frac{c}{4\pi}\overline{E^2}, \tag{11.33}$$

корреляционную функцию

$$B(\tau) = \langle E(t)E(t+\tau) \rangle \tag{11.34}$$

и спектр $G(\omega)$. Средняя интенсивность излучения $\overline{I}$, спектр $G(\omega)$ и ширина спектра $\Delta\omega$ могут быть измерены экспериментально.

Часто можно рассматривать световое колебание $E(t)$ как *узкополосный* случайный процесс, для которого ширина спектра значительно меньше средней частоты колебаний:

$$\Delta\omega \ll \omega_0. \tag{11.35}$$

В этом случае целесообразно ввести комплексную амплитуду поля $\mathcal{E}(t)$, определив ее формулой

$$E(t) = \frac{1}{2}\mathcal{E}(t)\mathrm{e}^{i\omega_0 t} + \text{к. с.} \tag{11.36}$$

Подобно полю $E(t)$ амплитуда $\mathcal{E}(t)$ является случайной функцией времени и, следовательно, характеризуется корреляционной функцией и спектром. Подставив (11.36) в (11.34), и учитывая стационарность случайного процесса $E(t)$, приходим к требованию

$$\langle \mathcal{E}(t)\mathcal{E}(t+\tau) \rangle = 0. \tag{11.37}$$

Поэтому корреляционная функция комплексной амплитуды вводится формулой

$$b(\tau) = \langle \mathcal{E}(t)\mathcal{E}^*(t+\tau) \rangle, \tag{11.38}$$

где звездочка обозначает комплексное сопряжение. Будем считать величину $b(\tau)$ вещественной. Тогда из (11.34), (11.36)–(11.38) следует, что

$$B(\tau) = \frac{1}{2} b(\tau) \cos \omega_0 \tau. \tag{11.39}$$

Средняя интенсивность излучения выражается через комплексную амплитуду поля следующим образом:

$$\overline{I} = \frac{c}{8\pi} \langle \mathcal{E}\mathcal{E}^* \rangle. \tag{11.40}$$

Часто бывает удобно наряду с корреляционной функцией $B(\tau)$ ввести безразмерную функцию — *коэффициент корреляции* —

$$R(\tau) = B(\tau)/B(0). \tag{11.41}$$

Аналогичным образом коэффициент корреляции комплексной амплитуды есть

$$r(t) = b(\tau)/b(0). \tag{11.42}$$

Из (11.39), (11.41), (11.42) следует, что

$$R(\tau) = r(\tau) \cos \omega_0 \tau. \tag{11.43}$$

Интерференция случайной световой волны в интерферометре Майкельсона. Предположим, что на вход интерферометра Майкельсона (рис. 11.4) поступает случайное световое поле вида (11.30) со средней интенсивностью

$$\overline{I} = \frac{c}{4\pi} \overline{E^2}. \tag{11.44}$$

В этом случае результирующее световое поле на выходе интерферометра можно представить в виде

$$E_{\text{р}} = \sqrt{RT} \big[ E(t) + E(t+\tau) \big], \tag{11.45}$$

где

$$\tau = \Delta / c, \tag{11.46}$$

$\Delta = l_1 - l_2$ — разность хода лучей в интерферометре, $c$ — скорость света, $R$ и $T$ — коэффициенты отражения и пропускания света делительной пластинкой по интенсивности световой волны. Согласно (11.45), поле на выходе интерферометра пропорционально сумме входных полей, взятых в два разных момента времени. Эти моменты времени разделены между собой промежутком $\tau$, имеющим смысл задержки одной из волн в интерферометре относительно другой, возникающей из-за различия длин плеч интерферометра.

В дальнейшем будем считать выполненным условие (11.8) и введем краткие обозначения

$$E(t) = E, \qquad E(t+\tau) = E_\tau. \tag{11.47}$$

Тогда

$$E_{\text{р}} = \frac{1}{2}(E + E_\tau). \tag{11.48}$$

Так как поле $E$ случайно, поле $E_{\text{р}}$ тоже будет случайным, следовательно, его можно охарактеризовать средней интенсивностью

$$\overline{I_{\text{р}}} = \frac{c}{4\pi}\overline{E_{\text{р}}^2}. \tag{11.49}$$

Подставив (11.48) в (11.49) и принимая во внимание, что для стационарного случайного процесса

$$\overline{E^2} = \overline{E_\tau^2}, \qquad \overline{EE_\tau} = B(\tau), \qquad B(\tau)/B(0) = R(\tau), \tag{11.50}$$

получим

$$\overline{I_{\text{р}}} = \frac{1}{2}\overline{I}\left[1 + R(\tau)\right] \tag{11.51}$$

или, в силу (11.43),

$$\overline{I_{\text{р}}} = \frac{1}{2}\overline{I}\left[1 + r(\tau)\cos\omega_0\tau\right]. \tag{11.52}$$

Итак, формула (11.52), полученная с использованием модели случайной световой волны, выражает среднюю интенсивность света на выходе интерферометра Майкельсона $\overline{I_{\text{р}}}$ через среднюю интенсивность входного пучка $\overline{I}$, среднюю частоту входного поля $\omega_0$, задержку $\tau = \Delta/c$, зависящую от разности хода лучей в интерферометре $\Delta = l_1 - l_2$, и коэффициент корреляции $r(\tau)$ комплексной амплитуды поля.

Используя (11.52), нетрудно рассчитать видность интерференционной картины. В самом деле, согласно (11.52), при некоторой величине $\tau$ интенсивность света в максимуме интерференционной картины есть

$$I_{\max} = \frac{1}{2}\overline{I}\left[1 + r(\tau)\right], \tag{11.53}$$

а интенсивность света в минимуме

$$I_{\min} = \frac{1}{2}\overline{I}\left[1 - r(\tau)\right]. \tag{11.54}$$

Из (11.26), (11.53), (11.54) следует, что

$$\gamma = r(\tau). \tag{11.55}$$

Итак, формула (11.55) связывает между собой видность интерференционной картины $\gamma$, определяемую формулой (11.26), и коэффициент корреляции комплексной амплитуды светового поля $r(\tau)$, определяемый формулами (11.38), (11.42). Так как видность интерференционной картины может быть экспериментально измерена с помощью интерферометра Майкельсона, формула (11.55) дает рецепт прямого экспериментального измерения коэффициента корреляции комплексной амплитуды светового поля $r(\tau)$.

Используя теорему Винера–Хинчина (11.31) и задаваясь той или иной моделью спектра излучения $G(\omega)$, можно теоретически вычислить функцию $r(\tau)$. Пусть, например, спектр имеет прямоугольную форму, центральную частоту $\omega_0$ и ширину $\Delta\omega$ (рис. 11.12). Полагая

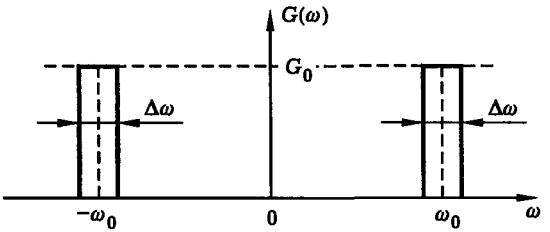



Рис. 11.12. Модель спектра излучения

$$G(\omega) = \begin{cases} G_0, & |\omega \pm \omega_0| \le \Delta\omega/2, \\ 0, & |\omega \pm \omega_0| > \Delta\omega/2 \end{cases} \tag{11.56}$$

и используя формулу (11.31) для $B(\tau)$, получим

$$B(\tau) = G_0 \Delta\omega \, \mathrm{sinc}(\Delta\omega\tau/2) \cos\omega_0\tau, \tag{11.57}$$

где

$$\mathrm{sinc}(x) \equiv \frac{\sin x}{x}. \tag{11.58}$$

Отсюда $B(0) = G_0\Delta\omega$, и для $R(\tau) = B(\tau)/B(0)$ получаем выражение

$$R(\tau) = \mathrm{sinc}(\Delta\omega\tau/2) \cos\omega_0\tau. \tag{11.59}$$

Наконец, сравнивая (11.59) и (11.43), находим

$$r(\tau) = \mathrm{sinc}(\Delta\omega\tau/2). \tag{11.60}$$

Итак, модели спектра (11.56) соответствует коэффициент корреляции амплитуды поля вида (11.60).

По формулам (11.60) и (11.52) можно рассчитать распределение интенсивности света в интерференционной картине. Это распределение имеет вид

$$\overline{I_\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\overline{I}\,\left[1 + \mathrm{sinc}(\Delta\omega\tau/2)\cos\omega_0\tau\right]. \tag{11.61}$$

В частном случае монохроматического излучения, когда $\Delta\omega = 0$, имеем $\mathrm{sinc}(\Delta\omega\tau/2) = 1$, и формула (11.61) переходит в формулу (11.9).

График функции $\overline{I_\mathrm{p}}(\tau)$, построенный по формуле (11.61) для случая малой, но конечной ширины спектра $\Delta\omega \ll \omega_0$, показан на рис. 11.13. Из рис. 11.13 и формулы (11.61) видно, что в случае немонохроматического светового поля период интерференционной картины, наблюдаемой с помощью интерферометра Майкельсона, определяется средней частотой излучения $\omega_0$. Что же касается видности интерференционной картины, то она уменьшается с ростом задержки $\tau = \Delta/c$, определяемой разностью хода лучей в интерферометре $\Delta = l_1 - l_2$. В качестве характерного ("критического") времени $\tau$, разделяющего области хорошо выраженной интерференции и практического отсутствия

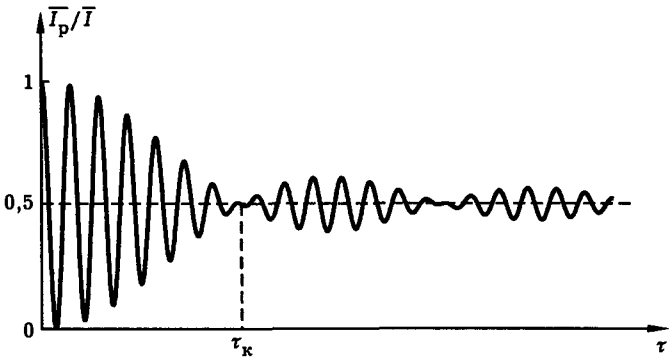



Рис. 11.13. Распределение средней интенсивности света в интерференционной картине, вычисленное для модели узкополосный световой волны с прямоугольным спектром

таковой (рис. 11.13), можно взять время $\tau_к$, при котором видность интерференционной картины первый раз обращается в ноль. Согласно (11.55) и (11.60), время $\tau_к$ определяется условием $\Delta\omega\tau_к/2 = \pi$, откуда

$$\tau_к = \frac{2\pi}{\Delta\omega}. \tag{11.62}$$

Заметим, что, с точки зрения статистической модели поля, время $\tau_к$ характеризует ширину распределения $r(\tau)$ и, следовательно, имеет смысл *времени корреляции* световой волны. Таким образом, формула (11.62) связывает между собой ширину спектра $\Delta\omega$ и время корреляции плоской немонохроматической волны $\tau_к$. Соотношение (11.62) между этими параметрами, полученное нами для модели узкополосной световой волны с прямоугольным спектром, совпадает с общей формулой (11.32), вытекающей из теоремы Винера–Хинчина.

Проведенное рассмотрение позволяет сделать вывод о том, что интерференция немонохроматического света возможна лишь при достаточно малой разности хода лучей. Критическая разность хода лучей, при которой еще может наблюдаться интерференционная картина, определяется формулой $\Delta_к = c\tau_к = 2\pi c/\Delta\omega$ или

$$\Delta_к = \frac{1}{\delta\nu}, \tag{11.63}$$

где $\delta\nu = \Delta\omega/2\pi c$ — спектральная ширина излучения, выраженная в обратных сантиметрах. Например, при ширине спектра излучения $\delta\nu = 1000$ см$^{-1}$ получаем критическую разность хода лучей $\Delta_к = 0{,}001$ см. Опыт подтверждает этот результат. Так, интерференция *белого света* наблюдается в *тонких пленках,* например пленке мыльного пузыря или пленке бензина на поверхности воды. Вследствие интерференции света и неоднородной толщины тонкие пленки при естественном освещении приобретают яркую цветную окраску.

Интерференционная картина "кольца Ньютона" при освещении белым светом наблюдается лишь в непосредственной близости от точки касания линзы и стеклянной пластины, т. е. в области, где толщина воздушной прослойки и разность хода интерферирующих лучей достаточно малы (рис. 11.10). Если же использовать излучение с более узким спектром, например свет, прошедший че-

а) б)

Рис. 11.14. Вид интерференционной картины "кольца Ньютона", наблюдаемой при освещении белым (*а*) и окрашенным (*б*) светом

рез красный фильтр, то видность и размер интерференционной картины заметно увеличиваются (рис. 11.14). Аналогичный результат дают опыты с тонким стеклянным клином, мыльными пленками и т. п.

Интерференция немонохроматического света в интерферометре Майкельсона возможна лишь при условии, что оптические длины плеч интерферометра с высокой точностью совпадают. Для выравнивания длин плеч в оригинальной конструкции интерферометра использовалась специальная *компенсационная пластина* (рис. 11.15). В лазерном интерферометре Майкельсона нет необходимости в компенсационной пластинке, так как интерферирующее излучение имеет узкий спектр и допустимая разность хода лучей достаточно велика. Например, для гелий-неонового лазера, используемого в лазерном демонстрационном интерферометре Майкельсона, имеем $\delta\nu = 0{,}04$ см$^{-1}$ и $\Delta_к = 1/\delta\nu = 25$ см.

Таким образом, опыты по интерференции света подтверждают основные выводы теории, основанной на модели случайной световой волны.

Фурье - спектроскопия. Проведенное рассмотрение показывает, что интерферометр Майкельсона можно использовать для прямого экспериментального измерения корреляционной функции $B(\tau)$ световой волны. Используя теорему Винера–Хинчина, по измеренной функции $B(\tau)$ можно вычислить спектр излучения

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} B(\tau)\mathrm{e}^{-i\omega\tau}d\tau. \qquad (11.64)$$

Такой метод измерения спектра получил название "фурье-спектроскопия". Схему метода иллюстрирует рис. 11.16. На практике фурье-спектрометры используют для исследования узких спектральных линий, а также спектральных линий инфракрасного излучения, анализ которых с помощью обычных дисперсионных приборов (призмы, дифракционные решетки) встречает определенные трудности.

**Многолучевая интерференция.** Явление интерференции применяют на практике для диагностики оптического излучения — анализа структуры светового поля, измерения спектра и т. п. При этом для увеличения резкости интерференционной картины часто используют принцип многолучевой интерференции, когда в образовании интерференционного поля участвуют сразу несколько световых лучей. Рассмотрим основные особенности многолучевой интерференции на примере интерферометра Фабри–Перо.

Предположим, что плоская монохроматическая световая волна падает на плоскопараллельную стеклянную пластинку, обе грани которой хорошо отражают свет (рис. 11.17). Частично проникая в пластинку, свет многократно отра-

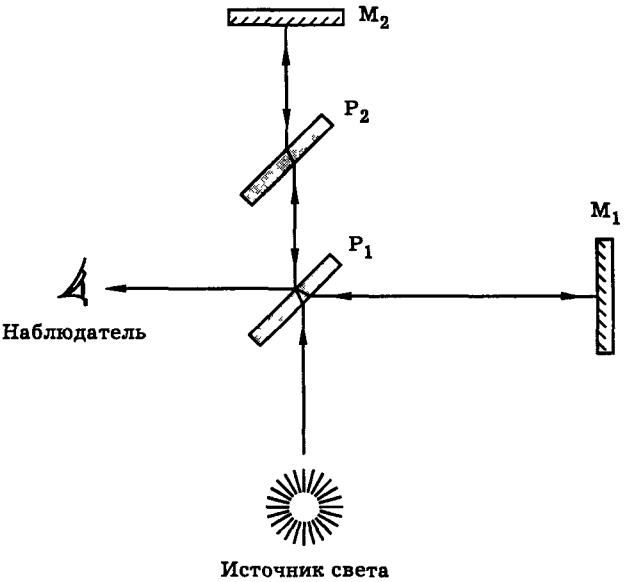



Рис. 11.15. Схема интерферометра Майкельсона с компенсационной пластинкой

жается от ее граней. При каждом отражении часть излучения выходит наружу, образуя набор плоских волн, которые интерферируют между собой. Вычислим основные характеристики возникающей при этом интерференционной картины.

Пусть $R$ — коэффициент отражения, а $T$ — коэффициент пропускания света по интенсивности для каждой из граней пластинки. Характеристики обеих граней будем считать, для простоты, одинаковыми. Пренебрегая поглощением света, можно записать

$$T + R = 1. \tag{11.65}$$

Введем также коэффициенты отражения и пропускания света на гранях пластинки по амплитуде световой волны: $\rho$ и $\tau$. Так как интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды волны, имеем

$$\rho^2 = R, \qquad \tau^2 = T. \tag{11.66}$$

Обозначив через $A_0$ амплитуду падающей волны, а через $A$ — амплитуду волны, прошедшей через пластинку, можно записать

Рис. 11.16. Схема фурье-спектроскопии

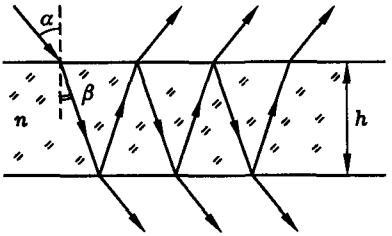



Рис. 11.17. Схема многолучевой интерференции света

$$A = A_0\tau^2(1 + \rho^2 e^{i\delta} + \rho^4 e^{2i\delta} + \cdots), \tag{11.67}$$

где $\delta$ — набег фазы световой волны за двойной проход через пластинку. В формуле (11.67) учтено, что первый прошедший луч дважды проходит через границы пластинки, второй — дважды проходит и дважды отражается на границах, третий — дважды проходит и четырежды отражается и т. д.

Используя формулу (11.16), фазовый набег $\delta$ можно представить в виде $\delta = k\Delta$, где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, $\Delta = 2hn\cos\beta$ — оптическая длина пути, $n$ — показатель преломления материала пластинки, $h$ — ее толщина, $\beta$ — угол преломления света в пластинке (рис. 11.8 и 11.17), связанный с углом падения $\alpha$ формулой

$$\sin\alpha = n\sin\beta. \tag{11.68}$$

Таким образом,

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda}hn\cos\beta. \tag{11.69}$$

Обратим внимание на то, что в круглых скобках в формуле (11.67) стоит сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем

$$q = \rho^2 e^{i\delta}, \tag{11.70}$$

модуль которого меньше единицы. Поэтому, пользуясь формулой

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \tag{11.71}$$

справедливой при $|q| < 1$, находим

$$A = A_0\frac{\tau^2}{1-\rho^2 e^{i\delta}}. \tag{11.72}$$

Используя эту формулу, для коэффициента пропускания света пластинкой $T(\delta) = I/I_0 = |A/A_0|^2$ получаем

$$T(\delta) = \frac{T^2}{|1 - Re^{i\delta}|^2}, \tag{11.73}$$

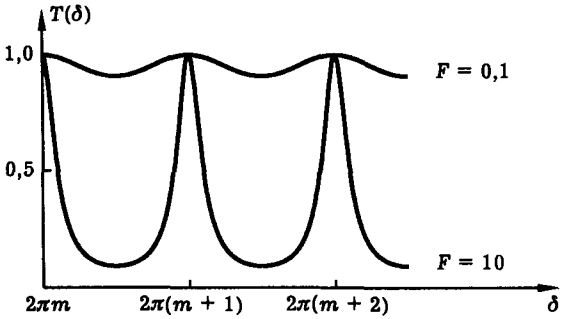



Рис. 11.18. Графики функций $T(\delta)$, построенные по формуле (11.74) при разных значениях фактора резкости $F$

или, в действительной форме,

$$T(\delta) = \frac{1}{1 + F\sin^2(\delta/2)}, \tag{11.74}$$

где учтено соотношение (11.65) и введена величина

$$F = \frac{4R}{(1-R)^2}, \tag{11.75}$$

называемая *фактором резкости*. Смысл этого термина ясен из рис. 11.18, на котором показаны зависимости $T(\delta)$ для двух разных значений параметра $F$. Видно, что фактор $F$ непосредственно характеризует резкость интерференционной картины.

Насколько большой может быть величина $F$? Из формулы (11.75) видно, что фактор резкости тем больше, чем выше коэффициент отражения света на гранях пластинки. Для зеркальной поверхности коэффициент отражения может достигать величины $R = 0{,}99$. В этом случае фактор резкости $F = 4 \times 10^4$, а функция пропускания пластинки (эталона Фабри–Перо) $T(\delta)$ представляет собой набор дискретных линий (рис. 11.19).

Плоскопараллельная пластинка как частотный фильтр. Из рисунка 11.19 видно, что плоскопараллельная пластинка с зеркальными гранями прозрачна для излучения некоторого дискретного набора частот и совершенно не пропускает остальное излучение. Таким образом, плоскопараллельная пластинка представляет собой высокодобротный *частотный фильтр*. В этом качестве она используется, например, для селекции мод в лазерах. Вставляя в лазерный резонатор пластинку той или иной толщины (рис. 11.20), можно эффективно управлять шириной спектра лазерного излучения. В спектроскопических экспериментах такие фильтры используют для калибровки длины волны излучения.

**Интерферометр Фабри–Перо.** Интерферометр Фабри–Перо предназначен для исследования тонкой структуры спектра оптического излучения. Схема прибора показана на рис. 11.21. Его основным элементом является пара зеркальных пластинок, установленных параллельно друг другу на некотором расстоянии $d$. Так же как и в эталоне Фабри–Перо, в интерферометре используется многолучевая интерференция света, позволяющая получать резкие ин-

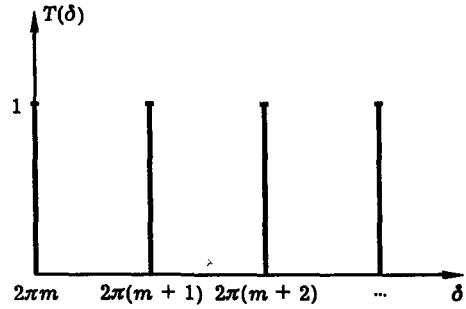



Рис. 11.19. Функция пропускания эталона Фабри–Перо

терференционные картины. В отличие от эталона, в интерферометре предусмотрена возможность изменения расстояния между пластинами для плавного изменения фазового набега $\delta$, определяемого формулой (11.69). В некоторых случаях с этой же целью используют систему напуска газа в пространство между пластинами. Изменяя давление газа, можно плавно изменять показатель преломления газа $n$ и зависящий от него фазовый набег $\delta$ (см. формулу (11.69)). Во избежание нежелательной интерференции лучей, отраженных задними поверхностями пластинок, последним придают клиновидную форму.

На лекции демонстрируется работа лазерного интерферометра Фабри–Перо. В данном интерферометре использована жесткая конструкция, при которой положение зеркал фиксируется с помощью специального калибровочного кольца толщиной 5 мм. Предусмотрена возможность накачки воздуха с помощью резиновой груши.

В эксперименте на интерферометр направляется пучок света гелий-неонового лазера, рассеянный линзой с фокусным расстоянием около 30 см. Из выражений (11.68), (11.69), (11.74), (11.75) следует, что при фиксированной длине волны излучения $\lambda$, интерферометр характеризуется дискретным набором направлений в пространстве (углы $\alpha$ и $\beta$ ), в которых он пропускает свет. Таким образом, в данной конфигурации наблюдается интерференционная картина типа "кольца равного наклона".

На белой стене затемненной аудитории наблюдаются резкие яркие кольца света, разделенные широкими темными промежутками. Таким образом, наблюдаемая интерференционная картина совпадает с показанной на рис. 11.19. При накачивании воздуха резиновой грушей радиусы колец меняются (рис. 11.22).

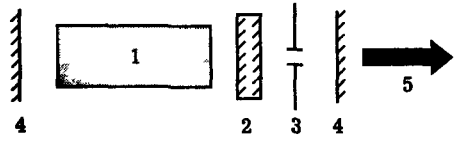



Рис. 11.20. Применение плоскопараллельной пластинки для селекции мод в лазере. 1 — активный элемент лазера, 2 — плоскопараллельная пластинка, 3 — диафрагма, 4 — зеркала резонатора, 5 — выходной пучок лазера

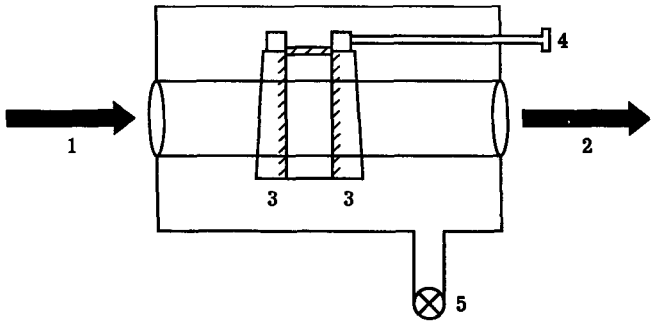



Рис. 11.21. Схема интерферометра Фабри–Перо: 1 — входной пучок света, 2 — выходной пучок света, 3 — зеркальные пластины, 4 — винт для юстировки зеркал, 5 — система напуска газа

Сравнивая между собой интерференционные картины, наблюдаемые с помощью интерферометра Майкельсона и интерферометра Фабри–Перо, можно сделать вывод, что многолучевая интерференция значительно увеличивает резкость интерференционной картины. Высокая резкость интерференции в интерферометре Фабри–Перо позволяет использовать его как спектральный прибор высокой разрешающей способности (см. лекцию 17).

Резкость интерферометра. На рис. 11.23 показан фрагмент зависимости $T(\delta)$ для случая, когда ширина интерференционных максимумов соизмерима с расстоянием между ними, т. е. когда фактор резкости $F$ не слишком велик.

Резкость интерференционной картины можно охарактеризовать отношением расстояния между соседними максимумами к ширине отдельного максимума

$$\mathcal{F} = 2\pi/\varepsilon. \tag{11.76}$$

Величину $\mathcal{F}$ называют *резкостью* интерферометра. Резкость можно определить экспериментально как отношение расстояния между соседними интерференционными кольцами к ширине отдельного кольца.

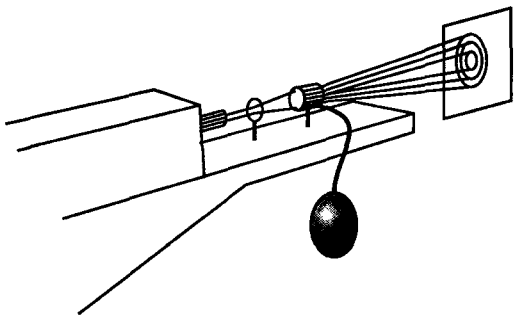


Рис. 11.22. Наблюдение интерференции лазерного света с помощью интерферометра Фабри–Перо

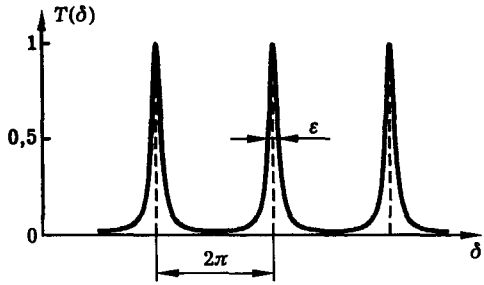



Рис. 11.23. К расчету резкости интерферометра Фабри–Перо

Пользуясь формулой (11.74) и предполагая, что

$$R \approx 1, \qquad F \gg 1, \tag{11.77}$$

нетрудно показать, что

$$\varepsilon = 4/\sqrt{F}, \tag{11.78}$$

или, в силу (11.75), (11.77),

$$\varepsilon = 2(1 - R). \tag{11.79}$$

Из (11.76), (11.79) следует, что

$$\mathcal{F} = \pi/(1 - R). \tag{11.80}$$

Например, если $R = 0{,}9$, то $\mathcal{F} = 30$. Эту оценку можно проверить экспериментально.

**Собственные моды и добротность лазерного резонатора.** Лазерный резонатор, представляющий собой пару параллельных зеркал (рис. 11.24), можно рассматривать как вариант интерферометра Фабри–Перо, соответствующий параметрам

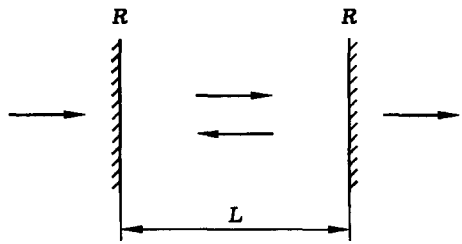



Рис. 11.24. Оптический резонатор

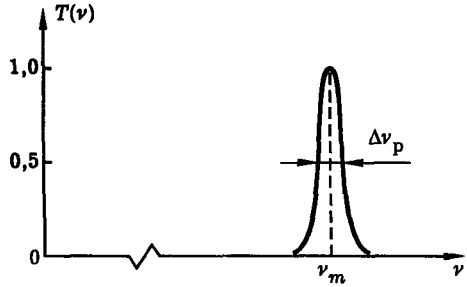



Рис. 11.25. К расчету добротности оптического резонатора

$$n = 1, \qquad \alpha = \beta = 0. \tag{11.81}$$

Пусть $L$ — длина резонатора, $R$ — коэффициент отражения зеркал по интенсивности света. Оба зеркала будем считать, для простоты, одинаковыми. Из (11.69) и (11.81) следует, что

$$\delta = 4\pi\nu L, \tag{11.82}$$

где $\nu = 1/\lambda$ — частота излучения, выраженная в см$^{-1}$.

Согласно (11.74), максимумы пропускания интерферометра Фабри–Перо приходятся на значения $\delta$, определяемые формулой

$$\delta_m = 2\pi m, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots . \tag{11.83}$$

Формулы (11.82), (11.83) выделяют дискретный набор частот

$$\nu_m = m\Delta\nu, \qquad \Delta\nu = 1/2L, \qquad m = 1, 2, \ldots, \tag{11.84}$$

на которых пропускание интерферометра Фабри–Перо достигает максимума. Частоты (11.84) можно назвать частотами *собственных мод* резонатора. Нетрудно показать, что для собственных мод на длине резонатора укладывается целое число полуволн. Таким образом, условие (11.83) фактически совпадает с фазовым условием самовозбуждения лазера (см. лекцию 10), определяющим частоты лазерной генерации.

Добротность резонатора. Используя формулы (11.74) и (11.82), можно построить зависимость $T(\nu)$ — коэффициента пропускания интерферометра Фабри–Перо от частоты света. Характерный вид этой зависимости вблизи частоты $\nu_m$ одной из собственных мод резонатора при $F \gg 1$ показан на рис. 11.25. Обозначим ширину интерференционного максимума, показанного на рис. 11.25, через $\Delta\nu_{\text{р}}$. Эту величину можно назвать *шириной спектральной линии оптического резонатора*. Далее можно ввести добротность резонатора, определив ее формулой

$$Q = \nu/\Delta\nu_{\text{р}}, \tag{11.85}$$

где $\nu = 1/\lambda$ — частота света в обратных сантиметрах. Из формул (11.82), (11.79) следует, что $\Delta\nu_{\text{р}} = \varepsilon/4\pi L$ и

$$\Delta\nu_{\text{р}} = \frac{1-R}{2\pi L} \tag{11 86}$$

Отсюда

$$Q = \frac{2\pi L}{(1-R)\lambda} \tag{11 87}$$

Итак, формулы (11 86), (11 87) определяют ширину спектральной линии и добротность оптического резонатора В этих формулах $L$ — длина резонатора, $R$ — коэффициент отражения зеркал, $\lambda$ — длина световой волны

Сделаем численную оценку Полагая $L = 50$ см, $\lambda = 0{,}5$ мкм, $R = 0{,}9$, получим $\Delta\nu = 1/2L = 10^{-2}$ см$^{-1}$, $\Delta\nu_{\text{р}} = 3 \times 10^{-4}$ см$^{-1}$, $Q = 6 \times 10^{7}$ Таким образом, оптический резонатор представляет собой высокодобротную колебательную систему

# Литература


1 *Демтредер В* Лазерная спектроскопия —М Наука, 1985
2 *Reynolds G O , De Velis J B , Parrent G B , Thompson B J* Physical optics notebook tutorials in Fourier optics — New York//SPIE-AIP, 1989
3 *Алешкевич В А , Киселев Д Ф , Корчажкин В В* Лазеры в лекционном эксперименте — М Изд-во МГУ, 1985
4 Лекционные демонстрации по физике/Под ред В И Ивероновой — М Наука, 1972
5 *Ахманов С А , Дьяков Ю Е , Чиркин А С* Введение в статистическую радиофизику и оптику — М Наука, 1981
6 *Дьяков Ю Е , Никитин С Ю* Задачи по статистической радиофизике и оптике — М Изд-во МГУ, 1985
7 Физический энциклопедический словарь/Под ред А М Прохорова — М СЭ, 1983
8 Квантовая электроника Маленькая энциклопедия/Под ред М Е Жаботинского — М СЭ, 1969
9 *Крауфорд Ф* Волны — М Наука, 1974
10 *Сивухин Д В* Общий курс физики Оптика — М Наука, 1989
11 *Габор Д* Голография//УФН 1973 Т 109, № 1 С 5
12 *Стюард И Г* Введение в фурье-оптику – М Мир, 1985
13 *Дитчберн Р* Физическая оптика — М Наука, 1965
14 *Киттель Ч , Найт У, Рудерман М* Механика — М Наука, 1975
15 *Борн М , Вольф Э* Основы оптики — М Наука, 1973
16 *Бронштейн И Н , Семендяев К А* Справочник по математике — М Наука, 1967

# Лекция 12

# Когерентность света

*Временна́я когерентность света. Время когерентности. Длина когерентности. Пространственная когерентность света и радиус когерентности. Модель случайного светового поля. Расчет интерференционной картины в интерферометре Юнга. Измерение когерентности. Когерентность излучения реальных источников света.*

Лекция посвящена когерентности света. Рассматриваются временна́я и пространственная когерентность оптического излучения, характеристики когерентности, методы экспериментального измерения и основы теории когерентности, когерентность излучения реальных источников света.

В современной оптике важную роль играет понятие *когерентности* света. Под когерентностью понимают упорядоченность структуры света, степень близости светового поля к идеальной гармонической волне. Когерентность — главное свойство лазерного излучения, принципиально отличающее его от излучения других источников света. Когерентность света играет решающую роль в голографии, она важна в таких процессах как запись и обработка информации, оптическая связь, формирование заданных структур светового поля и оптических изображений, передача световой энергии на расстояние, концентрация энергии света во времени и в пространстве, генерация сверхсильных световых полей и т. п.

Исторически понятие когерентности возникло в связи с опытами по интерференции света. Когерентностью была названа способность света интерферировать, т. е. давать картину чередования темных и светлых полос при наложении световых пучков. Различают два вида когерентности — пространственную и временну́ю. Начнем с рассмотрения временно́й когерентности света.

**Временна́я когерентность света. Время когерентности. Длина когерентности.** Предположим, что мы наблюдаем интерференцию света некоторого источника $S$ с помощью интерферометра Майкельсона, схема которого показана на рис. 12.1, *а*.

На рис. 12.1, *б* показан фрагмент наблюдаемой интерференционной картины, на рис. 12.1, *в* — распределение интенсивности света в интерференционной картине. Здесь $I_0$ и $I$ — интенсивности света соответственно на входе и выходе интерферометра, $\tau = \Delta/c$ — задержка, пропорциональная разности хода лучей $\Delta = l_1 - l_2$ в интерферометре, $c$ — скорость света.

Для количественной характеристики интерференционной картины вводят параметр $\gamma$, называемый *видностью* и определяемый формулой

$$\gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \tag{12.1}$$

где $I_{\max}$ и $I_{\min}$ — значения интенсивности света в соседних максимуме и минимуме интерференционной картины.

Опыт показывает, что видность интерференционной картины меняется при изменении разности хода интерферирующих лучей, причем типичная зависимость $\gamma(\tau)$ имеет вид, показанный на рис. 12.1, *г*. В зависимости от величины относительной задержки лучей в интерферометре $\tau$, можно выделить две

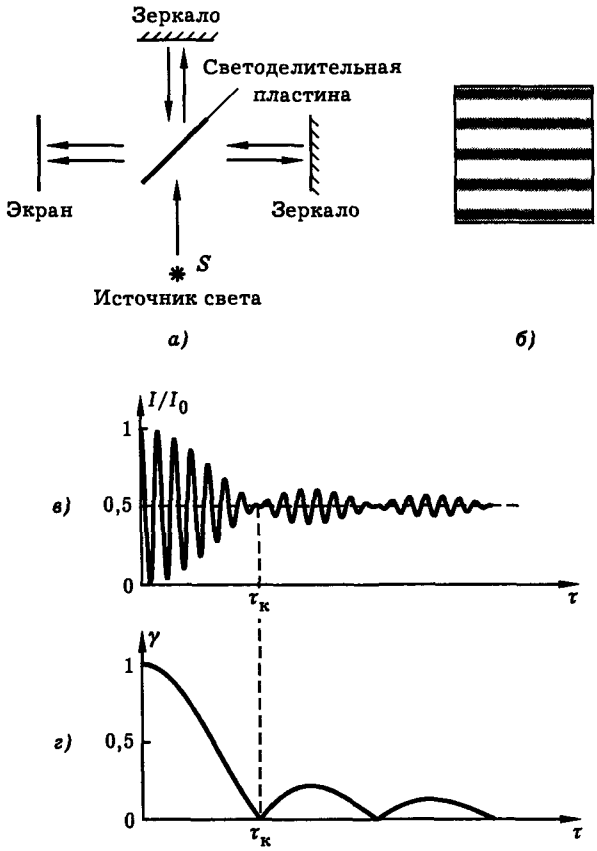



Рис. 12.1. К понятию временно́й когерентности света: схема интерферометра Майкельсона (*а*), фрагмент наблюдаемой интерференционной картины (*б*), распределение интенсивности света в интерференционной картине (*в*), зависимость видности интерференционной картины от задержки $\tau$, пропорциональной разности хода лучей в интерферометре (*г*)

характерные области: область хорошо выраженной интерференции $\tau < \tau_к$ и область практического отсутствия таковой $\tau > \tau_к$. Значение критического времени $\tau_к$, разделяющего две эти области, можно определить экспериментально.

В соответствии с данным выше определением, согласно которому когерентность есть способность света давать интерференционную картину, можно сказать, что при $\tau < \tau_к$ свет *когерентен*, а при $\tau > \tau_к$ свет *некогерентен*. Время $\tau_к$, следовательно, характеризует саму *световую волну*. Это время называют *временем когерентности* света.

Времени $\tau_к$ соответствует разность хода световых волн $\Delta_к = c\tau_к$, где $c$ — скорость света. Эта величина также характеризует световую волну и называется *длиной когерентности* света. Обозначив длину когерентности $l_к$, получим

$$l_к = c\tau_к. \tag{12.2}$$

Таковы характеристики временнóй или "продольной" когерентности света с точки зрения эксперимента. Теория временнóй когерентности строится на основе представления о световом поле как стационарном *случайном процессе*. Записав поле в виде

$$E(t) = \frac{1}{2}\mathcal{E}(t)\mathrm{e}^{\imath\omega_0 t} + \text{к. с.} \tag{12.3}$$

и введя коэффициент корреляции комплексной амплитуды

$$r(\tau) = \frac{\langle \mathcal{E}(t)\mathcal{E}^*(t+\tau)\rangle}{\langle \mathcal{E}\mathcal{E}^*\rangle}, \tag{12.4}$$

можно теоретически рассчитать видность интерференционной картины, наблюдаемой с помощью Майкельсона (см. лекцию 11), и показать, что

$$\gamma = r(\tau). \tag{12.5}$$

Формула (12.5) устанавливает связь между экспериментально измеряемой величиной — видностью интерференционной картины — и статистической характеристикой света — коэффициентом корреляции амплитуды световых колебаний.

Характерное время спада функции $r(\tau)$ называется *временем корреляции* световых колебаний. Обозначим это время $\tau_{\text{кор}}$. Так как время когерентности света $\tau_{\text{к}}$ мы определили выше как характерное время спада функции $\gamma(\tau)$, из соотношения (12.5) вытекает простая связь времен $\tau_{\text{к}}$ и $\tau_{\text{кор}}$, а именно

$$\tau_{\text{к}} = \tau_{\text{кор}}. \tag{12.6}$$

Итак, время когерентности света $\tau_{\text{к}}$, которое может быть измерено экспериментально, оказывается равным времени корреляции света $\tau_{\text{кор}}$ — параметру теоретической модели.

В теории доказывается *теорема Винера–Хинчина,* согласно которой корреляционная функция $B(\tau) = \langle E(t)E(t+\tau)\rangle$ связана со спектром мощности $G(\omega)$ светового поля преобразованием Фурье (см. дополнение 8) :

$$B(\tau) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\mathrm{e}^{-\imath\omega\tau}d\omega, \qquad G(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} B(\tau)\mathrm{e}^{\imath\omega\tau}d\tau. \tag{12.7}$$

Из этой теоремы вытекает соотношение между временем корреляции света $\tau_{\text{кор}}$ и его спектральной шириной $\Delta\omega$, а именно

$$\tau_{\text{кор}} = 2\pi/\Delta\omega. \tag{12.8}$$

Из (12.6) и (12.8) получаем удобную формулу для оценки времени когерентности света:

$$\tau_{\text{к}} = 2\pi/\Delta\omega. \tag{12.9}$$

Данное соотношение, в котором оба параметра $\tau_{\text{к}}$ и $\Delta\omega$ могут быть измерены в независимых оптических экспериментах, допускает прямую экспериментальную проверку. Опыт подтверждает соотношение (12.9). Тем самым получает подтверждение теория, основанная на статистической модели светового поля.

Из (12.2) и (12.9) получаем выражение для длины когерентности света

$$l_к = 1/\Delta\nu, \tag{12.10}$$

где $\Delta\nu = \Delta\omega/2\pi c$ — спектральная ширина света, выраженная в см$^{-1}$. Например, для белого света, занимающего весь видимый диапазон от $\lambda_1 = 0{,}4$ мкм до $\lambda_2 = 0{,}8$ мкм, получаем $\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2 = 1/\lambda_1 - 1/\lambda_2 \approx 10^4$ см$^{-1}$. Отсюда по формуле (12.10) $l_к = 10^{-4}$ см $= 1$ мкм. Таким образом, длина когерентности белого света оказывается порядка длины световой волны. Эта оценка объясняет результаты опытов с *тонкими пленками,* в которых наблюдается интерференция белого света.

Сделаем аналогичную оценку для излучения демонстрационного гелий-неонового лазера. В данном случае спектральная ширина излучения определяется доплеровской шириной $\Delta\nu = \Delta\nu_D = 0{,}04$ см$^{-1}$ (см. лекцию 6). Следовательно, $l_к = 1/\Delta\nu = 25$ см. Таким образом, когерентность лазера намного превышает когерентность естественного света. Это объясняет результаты опытов с лазерным интерферометром Майкельсона, в которых наблюдаются контрастные интерференционные картины при достаточно большой (порядка нескольких сантиметров) оптической разности хода лучей.

**Пространственная когерентность света и радиус когерентности.** Предположим, что мы наблюдаем интерференцию излучения некоторого источника в интерферометре Юнга. Схема интерферометра показана на рис. 12.2, *а*. На рис. 12.2, *б* представлен фрагмент наблюдаемой интерференционной картины, на рис. 12.2, *в* — распределение интенсивности света в плоскости наблюдения.

Видность интерференционной картины можно охарактеризовать параметром $\gamma$, определяемым формулой (12.1). Опыт показывает, что видность зависит от расстояния $s$ между двумя точечными отверстиями (или щелями) в интерферометре Юнга. Характерный вид этой зависимости показан на рис. 12.2, *г*; видность интерференционной картины уменьшается с ростом расстояния $s$.

Назовем пространственной когерентностью света его способность давать интерференционную картину в интерферометре Юнга. Характер зависимости $\gamma(s)$ позволяет выделить некоторое критическое значение $s_к$ расстояния $s$, разделяющее области сильной и слабой интерференции. В соответствии с данным определением можно сказать, что при $s < s_к$ свет обладает пространственной когерентностью, а при $s > s_к$ свет некогерентен. Критическое расстояние $s_к$ характеризует саму световую волну. Это расстояние называют пространственным радиусом когерентности или просто *радиусом когерентности* света. Будем обозначать это расстояние $r_к$. Итак, радиус когерентности света $r_к$ может быть экспериментально измерен с помощью интерферометра Юнга.

**Модель случайного светового поля.** Для того чтобы выявить физический смысл пространственной когерентности света с точки зрения структуры световой волны, необходимо проделать расчет интерференционной картины в интерферометре Юнга на основе некоторой модели светового поля.

Как и в случае временно́й когерентности света, в основу теории пространственной когерентности кладется понятие *случайного* светового поля. Однако в данном случае случайность понимается в смысле зависимости поля от пространственных координат, а не от времени.

Рассмотрим, для простоты, монохроматическое световое поле. Считая, что колебания поля в каждой точке пространства происходят по гармоническому закону, можно записать

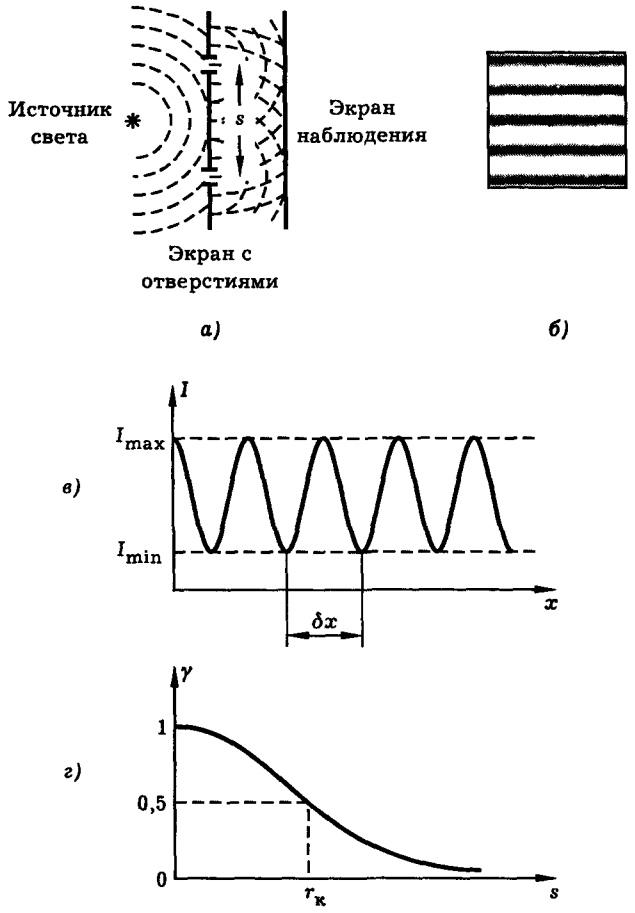



Рис. 12.2. К понятию пространственной когерентности света: схема интерферометра Юнга (*а*), фрагмент наблюдаемой интерференционной картины (*б*), распределение интенсивности света на экране наблюдения (*в*), видность интерференционной картины в зависимости от расстояния между щелями *s* (*г*)

$$E(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\mathcal{E}(\vec{r})e^{i\omega_0 t} + \text{к. с.} \tag{12.11}$$

Зависимость $\mathcal{E}(\vec{r})$ комплексной амплитуды от пространственных координат допускает возможность того, что в разных точках пространства световые колебания имеют разные амплитуды и разные фазы. В частности, если $\mathcal{E}(\vec{r})$ — *случайная функция*, то модель (12.11) описывает случайно неоднородное по пространству световое поле. Такое поле можно охарактеризовать средней интенсивностью

$$\overline{I} = \frac{c}{4\pi}\overline{E^2} \tag{12.12}$$

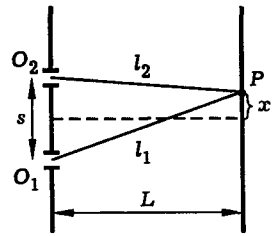



Рис. 12.3. К расчету интерференционной картины в интерферометре Юнга

и пространственным коэффициентом корреляции комплексной амплитуды

$$b(\vec{s}) = \frac{\langle \mathcal{E}(\vec{r})\mathcal{E}^*(\vec{r}+\vec{s})\rangle}{\langle \mathcal{E}\mathcal{E}^*\rangle}, \tag{12.13}$$

где звездочка обозначает комплексное сопряжение.

Используя модель (12.11)–(12.13), можно теоретически рассчитать интерференционную картину в интерферометре Юнга. При этом оказывается, что видность интерференционной картины $\gamma$ совпадает с коэффициентом корреляции $b(\vec{s})$:

$$\gamma = b(\vec{s}). \tag{12.14}$$

Таким образом устанавливается смысл видности интерференционной картины с точки зрения структуры светового поля.

**Расчет интерференционной картины в интерферометре Юнга.** Остановимся коротко на выводе формулы (12.14). На рис. 12.3 показана схема интерференции в интерферометре Юнга и введены обозначения: $L$ — расстояние между экраном с отверстиями и экраном наблюдения, $s$ — расстояние между отверстиями, $x$ — координата точки наблюдения поля $P$, отсчитываемая от оси симметрии системы, $l_1$ и $l_2$ — расстояния от отверстий до точки наблюдения.

Световые колебания в точке $P$ образуются в результате наложения световых волн, приходящих из отверстий $O_1$ и $O_2$. Запишем это следующи образом:

$$E = E_1 + E_2. \tag{12.15}$$

Обычно в эксперименте хорошо выполняются условия

$$L \gg x \gg s. \tag{12.16}$$

Поэтому с точностью до постоянных множителей, зависящих от размеров отверстий, колебания $E_1$ и $E_2$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2}\mathcal{E}_1 \exp\left[i\omega_0(t - l_1/c)\right] + \text{к. с.}, \\ E_2 &= \frac{1}{2}\mathcal{E}_2 \exp\left[i\omega_0(t - l_2/c)\right] + \text{к. с.}, \end{aligned} \tag{12.17}$$

где

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}(\vec{r}_1), \qquad \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}(\vec{r}_2), \tag{12.18}$$

$\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ — радиус-векторы отверстий $O_1$ и $O_2$. Подставив (12.15) в (12.12), для средней интенсивности излучения в точке $P$ получим

$$\overline{I} = 2I_0(1 + R), \tag{12.19}$$

где $I_0$ — интенсивность, соответствующая случаю, когда одно из отверстий открыто, а другое закрыто,

$$R = \frac{\langle E_1 E_2 \rangle}{\langle E^2 \rangle}, \tag{12.20}$$

$R$ — пространственный коэффициент корреляции светового поля.

Используя формулы (12.17) и предполагая для простоты, что

$$\langle \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2^* \rangle = \langle \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2 \rangle, \tag{12.21}$$

т. е. что корреляционная функция комплексной амплитуды поля действительна, получим

$$\langle E_1 E_2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2^* \rangle \cos(k_0 \Delta), \tag{12.22}$$

где

$$k_0 = \omega_0 / c, \qquad \Delta = l_1 - l_2. \tag{12.23}$$

Положим

$$\vec{r}_1 = \vec{r}, \qquad \vec{r}_2 = \vec{r} + \vec{s}, \tag{12.24}$$

где $\vec{s}$ — вектор, проведенный от отверстия $O_1$ к отверстию $O_2$ (рис. 12.3). Тогда из (12.20), (12.22), (12.24) следует, что

$$R = b(\vec{s}) \cos(k_0 \Delta), \tag{12.25}$$

где $b(\vec{s})$ определяется формулой (12.13).

Используя рис. 12.3 и принимая во внимание соотношения (12.16), нетрудно показать, что разность хода лучей в интерферометре Юнга есть

$$\Delta = (s/L)x. \tag{12.26}$$

Вводя обозначение

$$q = (s/L)k_0 \tag{12.27}$$

и подставляя (12.25) в (12.19), получим окончательно

$$\overline{I} = 2I_0 \left[1 + b(\vec{s}) \cos qx\right]. \tag{12.28}$$

Итак, формула (12.28) описывает распределение средней интенсивности излучения в интерференционной картине, наблюдаемой с помощью интерферометра Юнга. В этой формуле $I_0$ интенсивность света в точке $P$ в условиях, когда одно из отверстий $O_1$ или $O_2$ открыто, а другое закрыто, $x$ — координата в

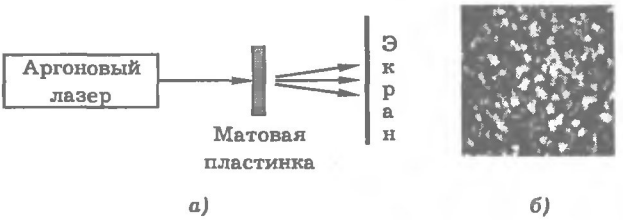



Рис. 12.4. Демонстрация спеклов: схема экспериментальной установки (*а*), вид картины спеклов (*б*)

плоскости наблюдения, отсчитываемая относительно оси симметрии интерферометра (рис. 12.3), $q$ — параметр, определяемый формулами (12.27), (12.23), $L$ — расстояние между экраном с отверстиями и экраном наблюдения в интерферометре Юнга, $s$ — расстояние между отверстиями. Функция $b(\vec{s})$ в (12.28) имеет смысл пространственного коэффициента корреляции комплексной амплитуды светового поля и определяется формулой (12.13).

Исходя из (12.28), нетрудно вычислить видность интерференционной картины. В самом деле, полагая $\cos qx = 1$ и $\cos qx = -1$, для интенсивностей света в соседних максимуме и минимуме интерференционной картины получим

$$I_{\max} = 2I_0\left[1 + b(\vec{s})\right], \qquad I_{\min} = 2I_0\left[1 - b(\vec{s})\right]. \tag{12.29}$$

Подставив (12.29) в (12.1), получим (12.14). Тем самым вывод формулы (12.14) завершен.

Формула (12.14) показывает, что видность интерференционной картины в интерферометре Юнга непосредственно связана с пространственной корреляцией светового поля. При этом радиус когерентности совпадает с радиусом корреляции света.

Используя формулы (12.28), (12.27), (12.23), нетрудно определить период интерференционной картины в интерферометре Юнга (рис. 12.2). Он составляет величину

$$\delta x = \lambda L/s, \tag{12.30}$$

где $\lambda$ — длина волны излучения.

На лекции демонстрируется лазерный интерферометр Юнга. В качестве источника света используется гелий-неоновый или аргоновый лазер. Лазерный пучок падает на пластину, в которой прорезаны две узкие щели. Интерференционная картина наблюдается на экране, она представляет собой систему темных и светлых линий. Значения основных параметров таковы: $L = 5$ м, $\lambda = 0{,}5$ мкм, $s = 0{,}1$ мм. Оценка периода интерференционной картины по формуле (12.30) дает $\delta x = 2{,}5$ см, что хорошо согласуется с экспериментом.

Хороший образ монохроматического пространственно неоднородного светового поля дает картина *спеклов* (пятен), которую можно наблюдать на экране, пропустив луч аргонового лазера через матовую пластинку (рис. 12.4).

Проходя через матовую пластинку, лазерный луч приобретает мелкомасштабную поперечную неоднородность, при этом его угловая расходимость резко возрастает. Картина, наблюдаемая на экране, имеет вид стационарного пятнистого поля и называется *картиной спеклов*. Картина спеклов имеет интер-

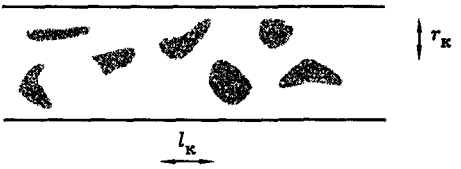



Рис. 12.5. Характеристики когерентности и структура светового пучка

ференционное происхождение и, следовательно, свидетельствует о пространственной когерентности исходного лазерного пучка. При просвечивании матовой пластинки некогерентным светом, например пучком дуговой лампы, картина спеклов не образуется и экран выглядит освещенным равномерно.

Используя понятия радиуса когерентности $r_к$ и длины когерентности $l_к$, можно дать наглядный образ когерентности с точки зрения структуры светового пучка (рис. 12.5). Параметры $r_к$ и $l_к$ характеризуют средние размеры области пространства, в пределах которой свет имеет структуру, близкую к идеальной гармонической волне. Световой пучок состоит из отдельных областей когерентности. Для некогерентного света эти области весьма малы, их линейные размеры порядка длины световой волны. В когерентном свете, напротив, области когерентности велики; можно представить себе идеальный световой пучок, когерентный во всем своем объеме (рис. 12.6).

**Измерение когерентности. Когерентность излучения реальных источников света.** Итак, классические интерференционные опыты Юнга и Майкельсона оказываются прямыми методами измерения пространственных и временны́х корреляционных функций; распределение средней интенсивности света в интерференционной картине непосредственно дает корреляционную функцию светового поля.

В качестве примера на рис. 12.7 показаны пространственные корреляционные функции лазерного излучения, измеренные с помощью интерферометра Юнга. Разные кривые на этом рисунке относятся к разным лазерам. Видно, что в некоторых случаях радиус когерентности света приближается к радиусу самого лазерного пучка. Следовательно, свет лазера близок по своей структуре к идеальной гармонической волне.

Точечный источник света. Для наблюдения интерференции света с помощью интерферометра Юнга существенно, чтобы свет, падающий на экран с отверстиями, был достаточно когерентным. В своем опыте Юнг добивался

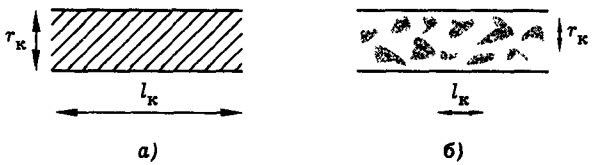



Рис. 12.6. Образы когерентного (*а*) и некогерентного (*б*) световых пучков

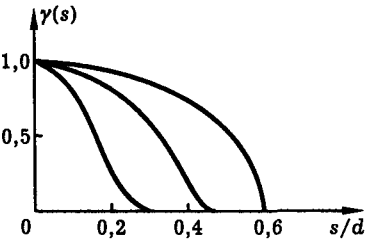



Рис. 12.7. Пространственные корреляционные функции лазерного излучения, измеренные с помощью интерферометра Юнга: $s$ — расстояние между отверстиями интерферометра, $d$ — диаметр лазерного пучка. Разные кривые относятся к разным лазерам

этого, пропуская солнечный свет через *точечное отверстие* (рис. 11.3). Очевидно, что свет, прошедший через достаточно маленькое отверстие, должен быть близок по своей структуре к сферической волне, т. е. должен обладать пространственной когерентностью.

Оценим размер отверстия в экране $Q_1$ (рис. 11.3), необходимый для получения контрастной интерференционной картины в интерферометре Юнга. Для этого рассмотрим случаи, когда экран с отверстиями облучается одним точечным источником света (рис. 12.8) и двумя точечными источниками света, разнесенными на некоторое расстояние $a$ (рис. 12.9).

Из рис. 12.8 видно, что при использовании одного точечного источника света интерференционная картина имеет видность, равную единице. Распределение интенсивности света на экране наблюдения имеет синусоидальную форму. Если же экран с отверстиями облучается двумя точечными источниками (рис. 12.9), то на экране наблюдения накладываются два синусоидальных распределения интенсивности, сдвинутые друг относительно друга. В результате образуется интерференционная картина с тем же пространственным периодом, но *меньшей видности*. Отсюда следует, что видность интерференционной картины в интерферометре Юнга, вообще говоря, зависит от размера источника света.

Обозначим разность хода лучей от источника $A_1$ до отверстий $O_1$ и $O_2$ через $\Delta_1$. Аналогичную величину для источника $A_2$ обозначим $\Delta_2$. Итак,

$$\Delta_1 = A_1O_1 - A_1O_2, \qquad \Delta_2 = A_2O_1 - A_2O_2. \tag{12.31}$$

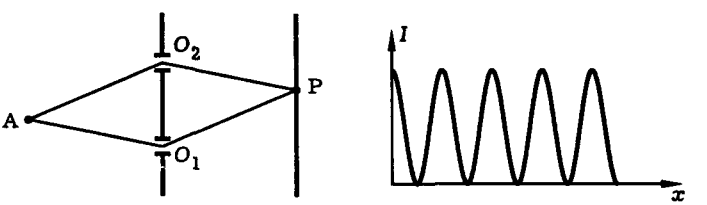



Рис. 12.8. Схема интерференции излучения точечного источника в интерферометре Юнга. Справа показано распределение интенсивности света в интерференционной картине

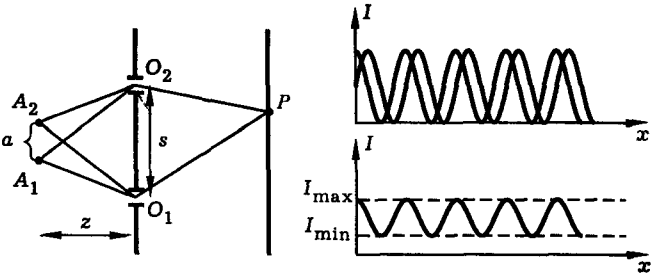



Рис. 12.9. Схема интерференции излучения двух точечных источников в интерферометре Юнга. Справа показаны распределения интенсивности света в интерференционной картине для каждого источника отдельно и для обоих вместе

Очевидно, что конечность размера источника света не влияет на видность интерференционной картины, если будет выполнено условие

$$|\Delta_1 - \Delta_2| \ll \lambda, \tag{12.32}$$

где $\lambda$ — длина световой волны. Обозначим размер источника света через $a$, расстояние между отверстиями в интерферометре Юнга через $s$, расстояния от источника до экрана с отверстиями через $z$, как показано на рис. 12.9. Обычно в эксперименте хорошо выполняются условия

$$a \ll s \ll z. \tag{12.33}$$

Нетрудно показать, что в этом случае

$$|\Delta_1 - \Delta_2| \approx as/z. \tag{12.34}$$

Таким образом, реальный источник света можно считать *точечным*, если его размер $a$ удовлетворяет условию

$$as/z \ll \lambda. \tag{12.35}$$

Здесь $\lambda$ — длина световой волны, $z$ — расстояние от источника света до приемного оптического устройства, $s$ — апертура приемника света. Простая формула (12.35) имеет ряд важных практических следствий. Рассмотрим некоторые из них.

Разрешающая сила оптических приборов. Предположим, что мы наблюдаем некоторый объект с помощью оптического прибора, например, телескопа (рис. 12.10). Пусть $a$ — размер объекта, $d$ — апертура прибора, $z$ — расстояние от объекта до прибора, $\lambda$ — длина волны излучения. Из вывода формулы (12.35) ясно, что предел разрешающей способности прибора определяется соотношением

$$ad/z = \lambda. \tag{12.36}$$

Если же объект расположен так далеко или настолько мал, что выполняется условие (12.35), то внутренняя структура объекта не может быть разрешена и его изображение будет выглядеть как точка.

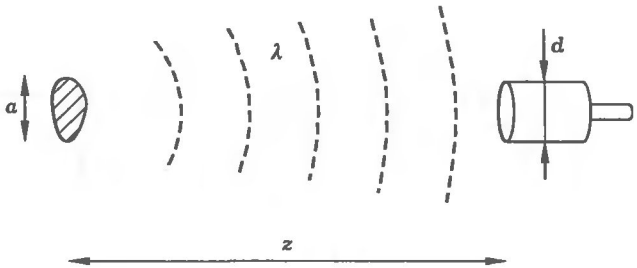



Рис. 12.10. К оценке разрешающей силы оптических приборов

С помощью формулы (12.36) можно оценить разрешающую способность прибора. Предел разрешения по размеру объекта есть $a_{\min} = z\lambda/d$, по угловому размеру объекта: $\theta_{\min} = a_{\min}/z = \lambda/d$, по расстоянию до объекта: $z_{\max} = ad/\lambda$. Согласно этим формулам, для увеличения разрешающей способности необходимо увеличивать входную апертуру прибора. На рис. 12.11 показано изображение двух близких светящихся точек, наблюдаемых с расстояния много меньшего $z_{\max}$ (рис. 12.11, *а*), примерно равного $z_{\max}$ (рис. 12.11, *б*) и много большего $z_{\max}$ (рис. 12.11, *в*).

Приведем несколько примеров и оценок.

*Глаз человека.* С какого расстояния можно различить глазом две светящиеся точки, расстояние между которыми $a = 5$ см? Полагая $d = 1$ мм (диаметр зрачка глаза), $\lambda = 0{,}5$ мкм, получим $z_{\max} = 100$ м.

*Подзорная труба.* При наблюдении того же объекта через подзорную трубу с диаметром входного отверстия $d = 10$ см, оценка по формуле (12.36) дает $z_{\max} = 10$ км.

*Телескоп.* Один из крупнейших оптических телескопов, установленный на Северном Кавказе над долиной реки Зеленчук, имеет диаметр главного зеркала $d = 6$ м. Какого размера объект можно рассмотреть в этот телескоп на поверхности Луны? Расстояние от Земли до Луны $z = 384000$ км. Полагая $\lambda = 0{,}5$ мкм, по формуле (12.36) получим $a_{\min} = 30$ м.

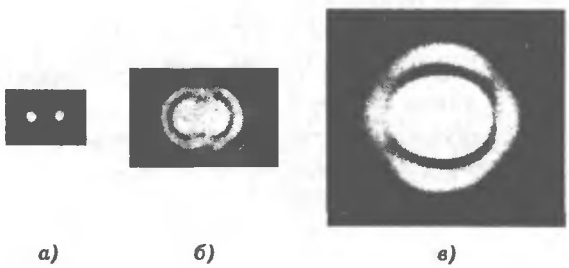



Рис. 12.11. Изменение изображения двух близких светящихся точек по мере увеличения расстояния до принимающего оптического прибора. Дистанция наблюдения достаточно мала, точки хорошо разрешены (*а*), вид точек на пределе разрешения (*б*), дистанция велика, изображения точек сливаются (*в*)

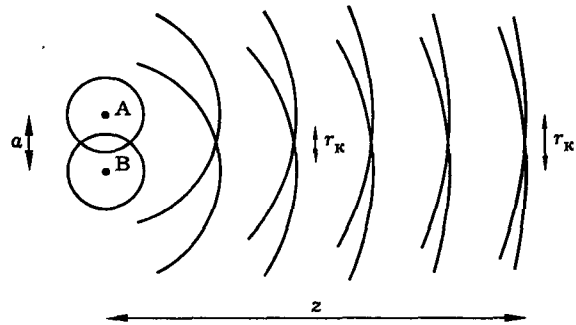



Рис. 12.12. Увеличение радиуса когерентности света по мере удаления от источника

*Микроскоп.* Оценивая минимальный размер объекта, который можно разглядеть в микроскоп, по формуле (12.36), получим $a_{\min} = z\lambda/d$. На практике минимальная величина отношения $z/d$ составляет порядка единицы. Отсюда получаем оценку $a_{\min} \approx \lambda \approx 10^{-4}$ см. Опыт подтверждает этот результат — предел разрешающей способности оптического микроскопа действительно имеет порядок длины световой волны.

Оценка радиуса когерентности света. Формулы (12.35), (12.36) позволяют дать оценку радиуса когерентности излучения нелазерного источника, например, теплового излучения нагретого тела. Согласно (12.36)

$$d = \lambda z/a. \tag{12.37}$$

Эта формула дает оценку предельно малой апертуры приемника света $d$, при которой световая волна, попадающая в приемник, еще содержит в себе информацию о размере источника света $a$. Как отмечалось выше, пространственная когерентность света связана с размером источника. Так, точечный источник дает идеально когерентный свет (рис. 12.8), а источник конечного размера — частично когерентное излучение (рис. 12.9). Поэтому размер $d$, определяемый формулой (12.37), можно принять за оценку радиуса когерентности света. Таким образом, получаем

$$r_к = \lambda z/a. \tag{12.38}$$

В этой формуле $z$ — расстояние от источника света до точки наблюдения, $a$ — размер источника, $\lambda$ — длина световой волны.

Согласно (12.38), радиус когерентности света возрастает пропорционально расстоянию от источника: $r_к \sim z$. Физический смысл этого результата состоит в том, что по мере удаления от источника волновые фронты сферических волн, испускаемых отдельными точками источника, все больше сближаются между собой (рис. 12.12). Структура излучения все более приближается к сферической волне, а радиус когерентности света возрастает.

В качестве примера оценим по формуле (12.38) радиус когерентности прямого солнечного света. Для оценки используем следующие значения параметров: расстояние от Земли до Солнца $z = 150$ млн км, диаметр Солнца $a = 0{,}7$ млн км, длина световой волны $\lambda = 0{,}5$ мкм. Получим $r_к = 10^{-2}$ см.

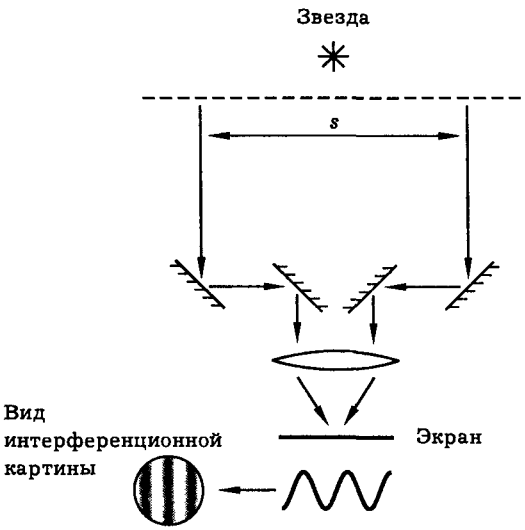



Рис. 12.13. Схема звездного интерферометра Майкельсона

Для рассеянного солнечного света, например света, рассеиваемого облаками в пасмурный день, следует, очевидно, положить $a/z \approx 1$. В этом случае $r_к \approx \lambda \approx 10^{-4}$ см.

Для сравнения напомним, что свет лазера может быть когерентным по всему поперечному сечению лазерного пучка. Так, для получения крупных голограмм используют широкие лазерные пучки с радиусом когерентности порядка 1 м.

Звездный интерферометр Майкельсона. Формулу (12.38) можно использовать для оценки размера удаленного источника света. Так, угловой размер звезды можно найти по формуле

$$a/z = \lambda/r_к, \tag{12.39}$$

если известен радиус когерентности приходящего от нее света. Эту идею использовал Майкельсон для оценки размеров звезд. В конце XIX в. он выполнил серию измерений с помощью "звездного интерферометра", схема которого показана на рис. 12.13.

Для измерения радиуса когерентности $r_к$ используются два телескопа, направленные на звезду, и разнесенные на некоторое расстояние $s$. С помощью системы зеркал пучки света от телескопов сводятся вместе и дают интерференционную картину, подобную той, что наблюдается в интерферометре Юнга. Раздвигая телескопы и измеряя видность интерференционной картины в зависимости от расстояния $s$, можно измерить радиус когерентности света звезды.

Измерения Майкельсона показали, что радиус когерентности света некоторых звезд имеют порядок $r_к \approx 10$ м. Следовательно, угловой размер звезд имеет порядок $\theta = a/z = \lambda/r_к = 5 \times 10^{-8}$ рад. Например для звезды Бетельгейзе было получено $\theta = 0{,}0047'' = 10^{-8}$ рад. Для сравнения укажем, что угловой размер спутников Юпитера составляет $\theta = 1''$.

Измерив угловой размер звезды и зная расстояние до нее, можно определить линейный размер звезды Расстояние до звезд измеряют, используя явления *параллакса* Это явление состоит в том, что из-за годичного движения Земли по орбите вокруг Солнца, взаимное расположение звезд на небе изменяется Измеряя угловые смещения звезд и зная диаметр земной орбиты (около 300 млн км), можно приближенно определить расстояния до звезд Таким путем Майкельсону удалось установить, что диаметр звезды Бетельгейзе примерно равен диаметру орбиты планеты Марс, т е составляет около 400 млн км

## Литература


1 Гудмен Дж Введение в фурье-оптику — М Мир, 1970
2 *Крауфорд Ф* Волны — М Наука, 1974
3 Квантовая электроника Маленькая энциклопедия/Под ред М Е Жаботинского — М СЭ, 1969
4 Физический энциклопедический словарь/Под ред А М Прохорова — М СЭ, 1983
5 *Стюард И Г* Введение в фурье-оптику — М Мир, 1985
6 *Ахманов С А , Дьяков Ю Е , Чиркин А С* Введение в статистическую радиофизику и оптику — М Наука, 1981
7 *Дьяков Ю Е , Никитин С Ю* Задачи по статистической радиофизике и оптике — М Изд-во МГУ, 1985
8 Лазеры//Сборник из серии "Над чем думают физики", вып 11 — М Наука, 1977
9 *Габор Д* Голография//УФН 1973 Т 109, № 1 С 5
10 Оптическая голография/Под ред Г Колфилда — М Мир, 1982
11 *Алешкевич В А , Киселев Д Ф , Корчажкин В В* Лазеры в лекционном эксперименте — М Изд-во МГУ, 1985
12 *Ландсберг Г С* Оптика – М Наука, 1976
13 *Зельдович Б Я , Пилипецкий Н Ф , Шкунов В В* Обращение волнового фронта — М Наука, 1985
14 Физическая знциклопедия/Под ред А М Прохорова — М СЭ, 1990
15 Наука и человечество Международный ежегодник — М Изд-во "Знание", 1988
16 *Ben Bova* The beauty of light — N Y John Wiley and Sons, 1988

# Лекция 13

# Дифракция света

*Дифракция как проявление волновой природы света. Основные опытные факты. Опыт Гримальди. Принцип Гюйгенса. Принцип Гюйгенса–Френеля. Дифракционный интеграл Френеля. Зоны Френеля. Построение дифракционных картин графическим способом. Дифракция на краю экрана. Дифракционная длина светового пучка. Ближняя и дальняя зоны дифракции. Дифракционная расходимость пучка в дальней зоне. Фокусировка света как дифракционное явление. Теория дифракции Кирхгофа.*

Лекция посвящена дифракции света. Излагаются основные опытные факты. Дается элементарное объяснение дифракционных явлений на основе представления о свете как о волне.

Вводятся понятия дифракционной длины светового пучка, ближней и дальней зон дифракции. Дана оценка дифракционной расходимости светового пучка в дальней зоне. Оценивается размер фокального пятна при фокусировке света линзой. Дается математическое обоснование дифракционного интеграла Гюйгенса–Френеля на основе приближенного решения волнового уравнения.

**Дифракция как проявление волновой природы света. Основные опытные факты.** Многие наблюдаемые нами явления говорят о том, что свет распространяется прямолинейно. Солнечный луч, луч прожектора, луч лазера ассоциируются в нашем сознании с прямыми или почти прямыми линиями. Прямолинейность распространения — одно из главных и наиболее очевидных свойств света. Несомненно, именно оно породило в свое время представление о том, что свет представляет собой поток частиц. С другой стороны, казалось бы, нет ничего менее похожего на волну, чем прямолинейный луч света.

Между тем, некоторые весьма тонкие оптические явления и эксперименты указывают на нарушение закона прямолинейного распространения света. Так, солнечный луч или луч лазера всегда обладает пусть малой, но *конечной расходимостью*. Граница светового пучка, граница между светом и тенью никогда *не бывает резкой*, а всегда имеет пусть малую, но конечную ширину.

В некоторых случаях свет распространяется *вовсе не прямолинейно*. Например, в опыте Юнга (см. лекцию 11) свет глубоко проникает в область геометрической тени и именно в этой области наблюдается интерференционная картина. Проходя через маленькое отверстие, пучок света приобретает большую угловую расходимость — тем бóльшую, чем меньше размер отверстия. В центре геометрической тени, создаваемой круглым непрозрачным диском, существует маленькое светлое пятно ("пятно Пуассона"). Лазерный луч, падающий на дифракционную решетку, образует широкий расходящийся "веер" лучей.

Все перечисленные факты можно объяснить, если допустить, что свет это *волна*. Прямолинейность распространения света не противоречит его волновой природе, так как длина световой волны очень мала — менее $10^{-4}$ см. Сильных волновых эффектов можно ожидать в случае, если поперечный размер светового пучка становится соизмеримым с длиной волны. Это хорошо подтверждается многими экспериментами, в частности опытом по дифракции лазерного пучка на дифракционной решетке.

Понятие "дифракция" в оптике связывается с нарушением прямолинейности распространения света. Арнольд Зоммерфельд определил дифракцию как

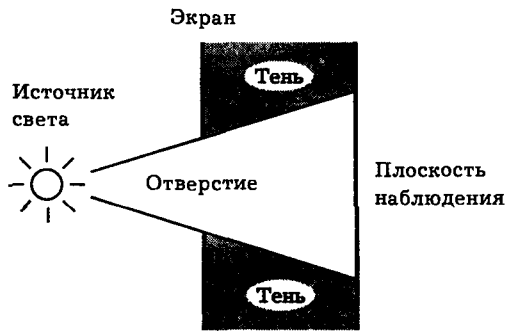



Рис. 13.1. Схема наблюдения дифракции света

"любое отклонение распространения света от прямолинейного, не связанное с отражением или преломлением". В более узком смысле дифракцией называют явление огибания волной препятствия. Такие явления хорошо известны для длинных волн, например звуковых волн или волн на поверхности воды. В оптике этому соответствует проникновение света в область геометрической тени. В теории волн под дифракцией понимают всю совокупность явлений в волновом поле, возникающих при наличии препятствий распространению волны. Наконец, используя понятие интерференции света, можно сказать, что дифракция — это интерференция в ограниченных световых пучках.

Принципиальное значение дифракции состоит в том, что она, как и интерференция, доказывает волновую природу света. Дифракция имеет большое практическое значение, поскольку она ограничивает возможности концентрации света в пространстве, кладет предел разрешающей способности оптических приборов, влияет на формирование оптического изображения и т. п.

**Опыт Гримальди.** Первое сообщение о наблюдении дифракции света было сделано Гримальди; оно было опубликовано в 1665 г. вскоре после его смерти. Гримальди проводил свои опыты на установке, схема которой показана на рис. 13.1. Источник света освещает отверстие в непрозрачном экране, а в плоскости, расположенной на некотором расстоянии позади экрана, измеряется освещенность. Гримальди установил, что переход от света к тени происходит постепенно, а не резко (рис. 13.2). Этот результат не мог найти удовлетворительного объяснения в рамках корпускулярной теории света, согласно которой свет должен распространяться прямолинейно, а изображение отверстия в плоскости наблюдения должно иметь резкую границу.

Еще более удивительный результат получается, если повторить опыт Гримальди, используя в качестве источника света лазер. На лекции демонстрируется дифракция света аргонового лазера на краю экрана, в качестве которого используется лезвие бритвы. Принципиальная схема опыта показана на рис. 13.3. Распределение освещенности в плоскости наблюдения показано на рис. 13.4. В данном случае, как и в опыте Гримальди, нет резкой границы между светом и тенью. Более того, вблизи границы геометрической тени наблюдается чередование темных и светлых линий, параллельных краю экрана. Такой характер наблюдаемой картины указывает на интерференционную природу явления дифракции.

Рис. 13.2. Освещенность в плоскости наблюдения вблизи границы области геометрической тени (некогерентное освещение)

**Принцип Гюйгенса.** Понимание природы дифракционных явлений связано с развитием представлений о свете как о волне. Первый шаг на этом пути сделал в конце XVII в. (1678) голландский ученый Христиан Гюйгенс. Основываясь на догадке о том, что свет это волна, он выдвинул идею, раскрывающую механизм распространения света. Гюйгенс полагал, что свет распространяется от источника подобно волне на поверхности воды. На фронте светового возмущения каждая точка есть источник вторичной сферической волны. Положение волнового фронта в следующий момент времени определяется огибающей вторичных волн. Принцип Гюйгенса иллюстрирует рис. 13.5, на котором показаны волновой фронт светового возмущения, элементарные вторичные волны, огибающая вторичных волн. Пользуясь этим принципом, можно объяснить такие явления, как распространение света от точечного источника, распространение светового пучка, отражение и преломление света. Примеры соответствующих построений показаны на рис. 13.6.

**Принцип Гюйгенса–Френеля.** В начале XIX в. (1818) идеи Гюйгенса получили развитие в работах французского ученого Огюстена Жана Френеля. Френель дополнил принцип Гюйгенса представлением о том, что вторичные световые волны могут как усиливать, так и ослаблять друг друга. Иначе говоря, они могут интерферировать. Световое поле есть результат интерференции элементарных вторичных волн, испускаемых каждым элементом некоторой волновой поверхности — это утверждение составляет содержание принципа Гюйгенса–Френеля. Основываясь на этом принципе, Френель смог с большой

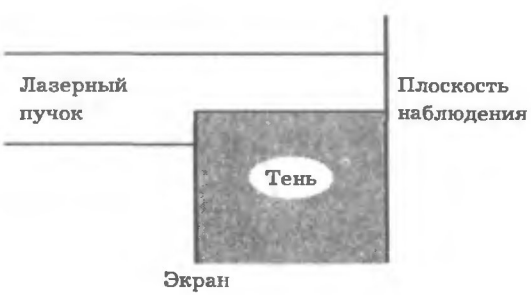



Рис. 13.3. Схема наблюдения дифракции лазерного пучка на краю экрана

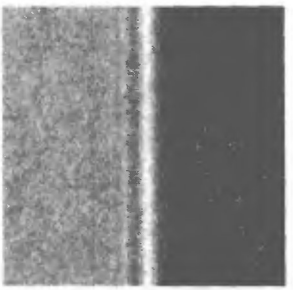


Рис. 13.4. Освещенность в плоскости наблюдения вблизи границы области геометрической тени (когерентное освещение)

точностью рассчитать распределение света в дифракционных картинах. В конце XIX в. (1882) немецкий ученый Густав Кирхгоф показал, что особенности амплитуд и фаз, приписываемые Френелем вторичным источникам, логически вытекают из волновой природы света.

**Дифракционный интеграл Френеля.** Принцип Гюйгенса–Френеля позволяет построить элементарную теорию дифракции света. Одну из простых задач можно сформулировать следующим образом. Пусть есть точечный источник света $S$. Требуется найти световое поле в некоторой точке $P$, если между точками $S$ и $P$ имеются препятствия распространению света, например экран с отверстием или непрозрачный диск (рис. 13.7).

Решение задачи начнем с математической формулировки принципа Гюйгенса–Френеля. Введем некоторую замкнутую поверхность $\Sigma$, охватывающую источник света, и будем считать каждый элемент $d\sigma$ этой поверхности источником вторичной сферической световой волны (рис. 13.8). Рассмотрим некоторую точку $M$ на поверхности $\Sigma$. Считая источник света $S$ точечным, обозначим расстояние от $S$ до $M$ через $\rho_1$, а расстояние от $M$ до точки наблюдения $P$ через $\rho$. Введем также угол $\varphi$ между нормалью $\vec{n}$ к поверхности $\Sigma$ в точке $M$ и направлением на точку наблюдения $MP$.

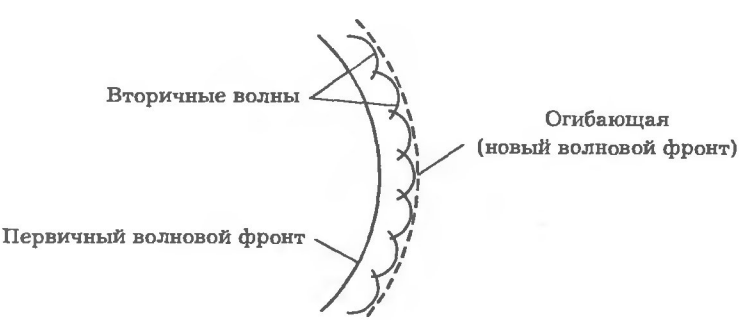



Рис. 13.5. Построение огибающей световой волны по Гюйгенсу

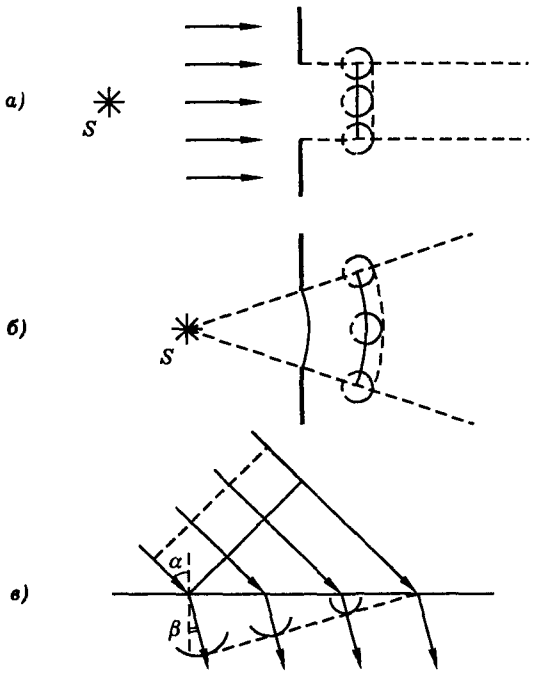



Рис 13 6 Объяснение прямолинейности распространения света (*а*, *б*) и закона преломления света (*в*) по Гюйгенсу Распространение через отверстие параллельного пучка света Источник света удален на большое расстояние (например, Солнце) (*а*) Распространение через отверстие расходящегося пучка света Источник расположен недалеко от экрана с отверстием и считается точечным (*б*). Объяснение закона преломления света на границе раздела двух сред. Скорость распространения света во второй среде меньше, чем в первой (*в*)

Предположим для простоты, что источник света испускает монохроматическую световую волну. Тогда световое поле в любой точке пространства также будет монохроматическим и его можно представить в виде

$$E = \frac{1}{2}\mathcal{E}e^{i\omega t} + \text{к. с.}, \tag{13.1}$$

где $\omega$ — частота, $\mathcal{E}$ — комплексная амплитуда колебаний. Согласно принципу Гюйгенса–Френеля, световое поле в точке $P$ образуется в результате наложения световых волн, испускаемых элементами поверхности $\Sigma$. Следовательно, можно записать

$$\mathcal{E}(P) = \int\limits_{\Sigma} \mathcal{E}(M)\frac{\exp(-ik\rho)}{\rho}K(\varphi)\,d\sigma. \tag{13.2}$$

Здесь $\mathcal{E}(P)$ и $\mathcal{E}(M)$ — комплексные амплитуды поля в точке $P$ и в точке $M$,

$$k = \omega/c = 2\pi/\lambda, \tag{13.3}$$

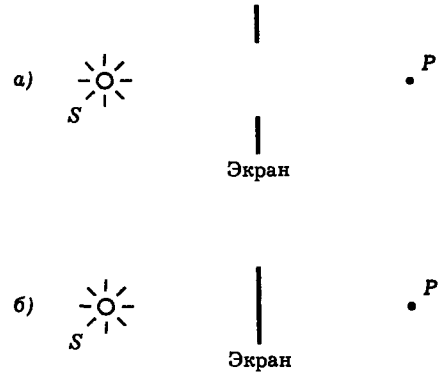



Рис. 13.7. Примеры дифракционных задач: дифракция на отверстии (*а*), дифракция на диске (*б*)

$k$ — волновое число световой волны, $K(\varphi)$ — "коэффициент наклона", учитывающий то обстоятельство, что вклад элемента $d\sigma$ в результирующее поле зависит от ориентации данного элемента поверхности по отношению к направлению на точку наблюдения.

Интеграл (13.2) носит название *интеграла Гюйгенса–Френеля*. Формула (13.2) построена на основе качественных физических соображений. Множитель $(1/\rho)\exp(-ik\rho)$ в подынтегральном выражении описывает распространение элементарной вторичной сферической световой волны. Наиболее существенно то, что интеграл Гюйгенса–Френеля учитывает фазы элементарных вторичных волн, приходящих в точку $P$ от различных элементов поверхности $\Sigma$. Иными словами, принимается во внимание *интерференция вторичных волн*.

Функция $K(\varphi)$ в (13.2) остается пока неопределенной. Френель полагал, что $K(\varphi)$ монотонно убывает от некоторого начального значения $K(0)$ до нуля при изменении угла $\varphi$ от нуля до $\pi/2$ (рис. 13.9).

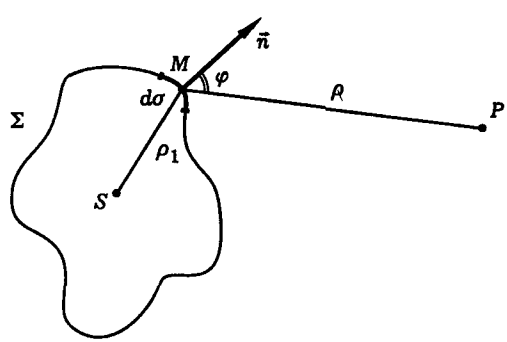



Рис. 13.8. К выводу интеграла Гюйгенса–Френеля

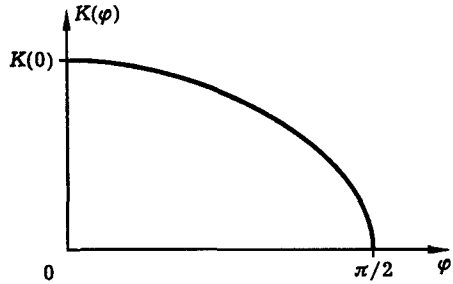



Рис. 13.9. Вид функции $K(\varphi)$ в интеграле Гюйгенса–Френеля

**Зоны Френеля.** Френель предложил приближенный способ расчета дифракционных картин, основанный на представлении о так называемых *полуволновых зонах* или *зонах Френеля.*

Зоны Френеля вводятся следующим образом. Выберем поверхность $\Sigma$ в виде сферы с центром в точке $S$. Согласно принципу Гюйгенса–Френеля, данную поверхность можно рассматривать как источник вторичных световых волн. Выделим на сфере кольцевые зоны так, чтобы расстояния от границ зоны до точки наблюдения отличались на *половину длины световой волны.* Обозначив границы зон буквами $M_0, M_1, M_2, \ldots$, получим

$$\begin{cases} M_0P = OP + \lambda/2, \\ M_1P = M_0P + \lambda/2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_nP = M_{n-1}P + \lambda/2, \end{cases} \tag{13.4}$$

где $\lambda$ — длина световой волны, $P$ — точка наблюдения поля, $O$ — центр нулевой зоны Френеля (рис. 13.10).

Итак, формулы (13.4) определяют положение границ зон Френеля. Смысл разбиения поверхности $\Sigma$ на зоны состоит в том, что разность фаз элемен-

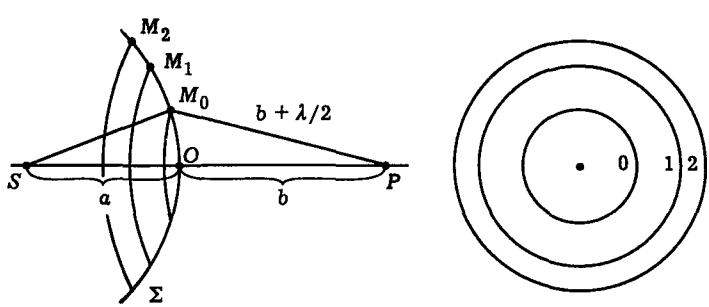



Рис. 13.10. Зоны Френеля

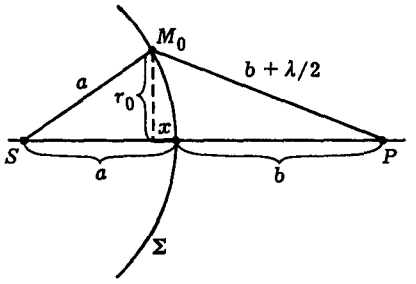



Рис. 13.11. К расчету размеров френелевских зон

тарных вторичных волн, приходящих в точку наблюдения от данной зоны, не превышает величины $\pi$. Сложение таких волн приводит к их взаимному усилению. Поэтому каждую зону Френеля можно рассматривать как источник вторичных волн, имеющих определенную фазу. Напротив, две соседние зоны Френеля действуют как источники, колеблющиеся в противофазе. Подчеркнем, что положение границ френелевских зон зависит от выбора точки наблюдения.

Размеры зон Френеля. Для того, чтобы оценить относительный вклад френелевских зон в интеграл Гюйгенса–Френеля, оценим радиусы зон и их площади.

На рис. 13.11 показаны точечный источник света $S$, точка наблюдения поля $P$, часть сферической поверхности $\Sigma$ (источника вторичных волн) и граница нулевой зоны Френеля $M_0$. Пусть $a$ — радиус сферы $\Sigma$, $b$ — кратчайшее расстояние от точки $P$ до сферы, $r_0$ — радиус нулевой зоны Френеля. Из рис. 13.11 видно, что

$$r_0^2 = a^2 - (a - x)^2, \tag{13.5}$$

где $x$ — длина отрезка, выделенного жирной линией. С другой стороны,

$$r_0^2 = (b + \lambda/2)^2 - (b + x)^2. \tag{13.6}$$

Из (13.5), (13.6) следует, что

$$2ax = b\lambda - 2bx + (\lambda/2)^2. \tag{13.7}$$

Как правило в оптике нас интересует случай

$$a, b \gg \lambda, x. \tag{13.8}$$

Поэтому, пренебрегая слагаемыми, пропорциональными $\lambda^2$ и $x^2$, получим

$$x = \frac{b\lambda}{2(a + b)}$$

и $r_0^2 \approx 2ax$, откуда

$$r_0 = \sqrt{\frac{\lambda ab}{a + b}}. \tag{13.9}$$

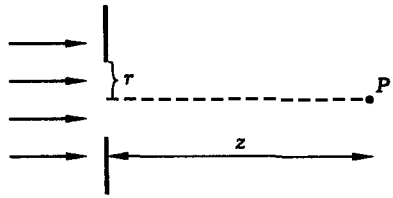



Рис. 13.12. Схема дифракции плоской волны на круглом отверстии

Итак, формула (13.9) дает радиус нулевой зоны Френеля. В этой формуле $\lambda$ — длина световой волны, $a$ и $b$ — длины отрезков показанных на рис. 13.11.

Аналогичным образом находим внешний радиус $n$-й зоны Френеля

$$r_n = \sqrt{(n+1)\frac{\lambda ab}{a+b}}. \tag{13.10}$$

Дифракция плоской волны. Физическое содержание задачи почти не изменится, а формулы станут проще, если вместо дифракции сферической волны точечного источника рассмотреть дифракцию плоской световой волны.

Пусть, например, плоская монохроматическая световая волна дифрагирует на круглом отверстии (рис. 13.12). Выберем некоторую точку $P$ на оси пучка и попытаемся выяснить, как будет меняться интенсивность света в данной точке при изменении радиуса отверстия.

Обозначим через $z$ расстояние от точки наблюдения до экрана с отверстием, а через $r$ — радиус отверстия. В качестве поверхности $\Sigma$ — источника вторичных волн — введем круг радиуса $r$, лежащий в плоскости экрана и совпадающий с отверстием. Пользуясь определением, данным выше, произведем разбиение поверхности $\Sigma$ на зоны Френеля. В данном случае зоны Френеля представляют собой кольца на плоскости. Их радиусы можно подсчитать по формуле (13.10), полагая $a \to \infty$, $b = z$. Получим

$$r_n = \sqrt{(n+1)\lambda z}. \tag{13.11}$$

Из (13.11) следует, что зоны Френеля имеют одинаковые площади, определяемые формулой

$$S_n = \pi(r_n^2 - r_{n-1}^2) = \pi\lambda z. \tag{13.12}$$

Число Френеля. Если известны параметры $\lambda$ — длина световой волны, $r$ — радиус отверстия, $z$ — расстояние от экрана с отверстием до точки наблюдения поля, то, используя (13.11), можно вычислить число $N_{\mathrm{F}}$ зон Френеля, попадающих в пределы отверстия, или *число открытых френелевских зон*. Это число называется *числом Френеля*, оно играет важную роль в теории дифракции. Полагая

$$r_n = r, \qquad n+1 = N_{\mathrm{F}}, \tag{13.13}$$

получим из (13.11), (13.13)

$$N_{\mathrm{F}} = r^2/\lambda z. \tag{13.14}$$

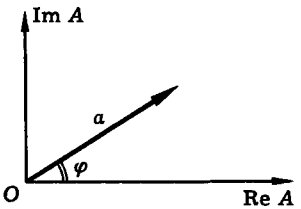



Рис. 13.13. Изображение гармонического колебания на комплексной плоскости

**Построение дифракционных картин графическим способом.** Графический способ анализа дифракционных явлений основан на применении так называемой "спирали Френеля". Это понятие возникает следующим образом.

Вычисление результирующего светового поля, описываемого интегралом Гюйгенса–Френеля, сводится к суммированию световых колебаний, возбуждаемых элементарными вторичными источниками. С математической точки зрения задача сводится к суммированию гармонических колебаний, имеющих одну и ту же частоту, но разные амплитуды и фазы. Наглядный способ решения этой задачи — построение *векторной диаграммы*.

Векторная диаграмма. Как известно, гармоническое колебание с амплитудой $a$ и фазой $\varphi$ можно охарактеризовать комплексной амплитудой $A = a\exp(i\varphi)$ либо вектором на плоскости переменных $\mathrm{Re}A$, $\mathrm{Im}A$, причем длина вектора равна $a$, а угол наклона к оси $\mathrm{Re}A$ равен $\varphi$ (рис. 13.13).

Сумма нескольких гармонических колебаний частоты $\omega$ с произвольными амплитудами и фазами есть также гармоническое колебание на частоте $\omega$. Действительные амплитуду $A$ и фазу $\Phi$ результирующего колебания можно найти, складывая по правилу сложения векторов векторы, изображающие колебания-слагаемые. Каждый такой вектор имеет длину, равную амплитуде колебания и угол наклона к оси абсцисс, равный фазе данного колебания. После построения векторной суммы, амплитуда результирующего колебания находится как длина полученного вектора-суммы, а фаза результирующего колебания — как угол наклона этого вектора к оси абсцисс. Данную процедуру (на примере сложения трех колебаний) иллюстрирует рис. 13.14.

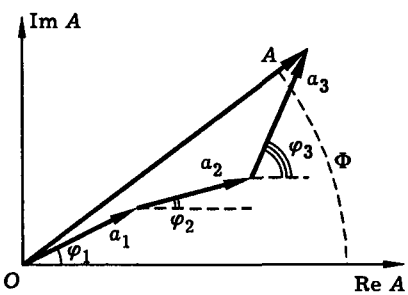



Рис. 13.14. Сложение гармонических колебаний методом векторной диаграммы

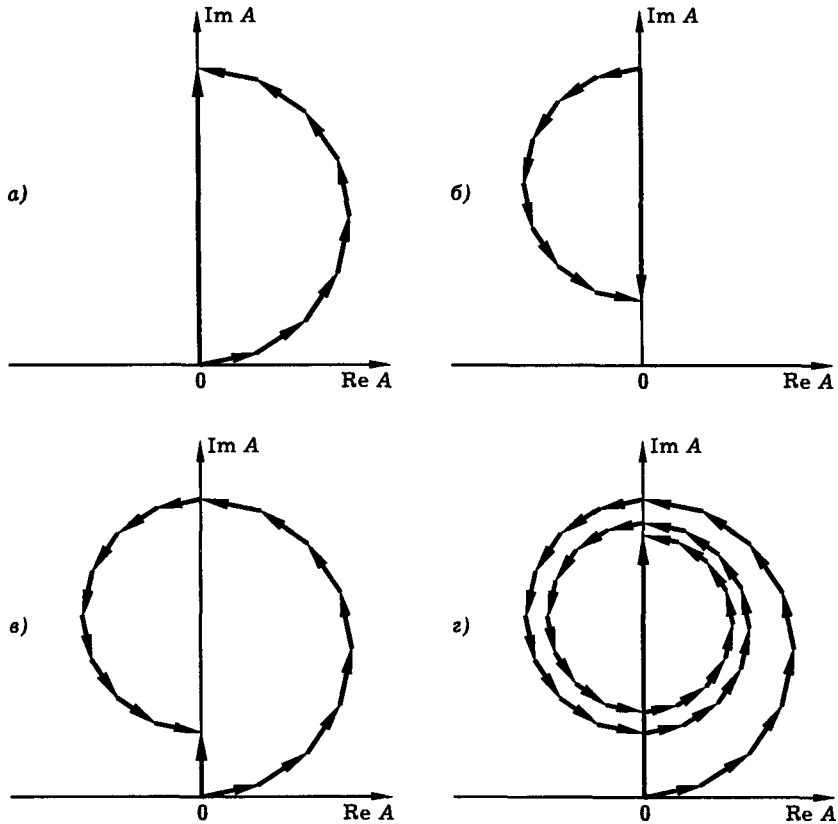



Рис. 13.15. Примеры построения векторных диаграмм для расчета комплексной амплитуды $A$ дифракционного светового поля. Открыта только нулевая зона Френеля (остальные зоны закрыты) (*а*), открыта только первая зона Френеля (*б*), открыты нулевая и первая зоны Френеля (*в*), открыты нулевая, первая, вторая, третья и четвертая зоны Френеля (*г*). Короткие векторы обозначают комплексные амплитуды полей, приходящих в точку наблюдения от отдельных подзон зон Френеля. Жирными линиями изображены векторы суммарных комплексных амплитуд светового поля в точке наблюдения

Спираль Френеля. Применим метод векторной диаграммы для расчета дифракционного интеграла Гюйгенса–Френеля. Сначала вычислим вклад в дифракционный интеграл какой-нибудь одной, например нулевой зоны Френеля.

Соответствующее построение показано на рис. 13.15, *а*. Оно выполняется следующим образом. Разбиваем зону Френеля на множество концентрических колец (подзон). Очевидно, разбиение можно произвести таким образом, чтобы площади подзон были примерно одинаковы, а число подзон было достаточно большим. В этом случае вклады подзон изображаются векторами, которые имеют одинаковую длину, но разные углы наклона к оси абсцисс. Первый и последний векторы повернуты друг относительно друга на угол $\pi$ — в соответствии с определением зоны Френеля. По мере увеличения радиуса вклад подзоны (и, следовательно, длина соответствующего вектора) немного уменьшается

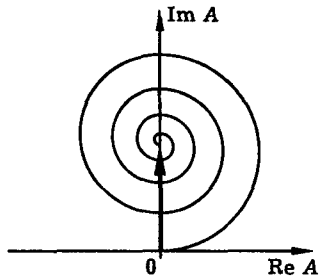



Рис. 13.16. Предельный вид векторной диаграммы в случае, когда открыты все зоны Френеля, и число подзон каждой зоны стремится к бесконечности; $A$ — комплексная амплитуда светового поля в точке $P$

вследствие увеличения угла между нормалью к поверхности $\Sigma$ и направлением на точку наблюдения (рис. 13.8–13.12).

Аналогичным образом строится вектор, изображающий вклад в дифракционный интеграл первой зоны Френеля (рис. 13.15, *б*), а также нулевой и первой зон вместе (рис. 13.15, *в*). С увеличением номера зоны, элементарные векторы, изображающие ее подзоны, становятся короче. Это отражает уменьшение общего вклада данной зоны в суммарное дифракционное поле, связанное с увеличением угла наклона зоны, т. е. с фактором $K(\varphi)$.

Продолжая процедуру построения векторной диаграммы для все большего числа зон (см., например, рис. 13.15, *г*), получим скручивающуюся *спираль*. Нетрудно видеть, что при увеличении числа подзон каждой зоны, ломанная линия векторной диаграммы будет все больше приближаться к гладкой кривой. В предельном случае, когда открыты все зоны Френеля и число подзон каждой зоны стремится к бесконечности, получим векторную диаграмму, показанную на рис. 13.16. Эта предельная диаграмма имеет вид гладкой скручивающейся спирали — *спирали Френеля.*

Рассмотрим несколько примеров.

*Дифракция на круглом отверстии.* Пусть плоская монохроматическая световая волна нормально падает на экран с круглым отверстием, как показано на рис. 13.12. Выберем некоторую точку $P$ на оси отверстия и проанализируем характер изменения амплитуды $A$ светового поля в данной точке при изменении радиуса отверстия $r$.

На рис. 13.17. показаны построения на спирали Френеля, выполненные для случаев, когда в пределах отверстия укладывается разное число зон Френеля: одна (*а*), две (*б*), три (*в*), бесконечное множество (*г*); последний случай соответствует отсутствию экрана, т. е. свободному распространению световой волны.

Используя данные рис. 13.17, а также формулу (13.11) для радиуса френелевских зон, можно построить искомую зависимость $|A(r)|$. Результат представлен на рис. 13.18. Как видно из этого рисунка, френелевская теория предсказывает немонотонное изменение амплитуды поля при увеличении радиуса отверстия. Рис. 13.18. показывает, что максимальная интенсивность света в точке наблюдения достигается, когда отверстие совпадает с нулевой зоной Френеля. В этом случае амплитуда поля в два раза (а интенсивность света в 4 раза) больше, чем в отсутствие экрана. Этот результат можно проверить экспериментально, используя когерентный лазерный пучок и ирисовую диафрагму.

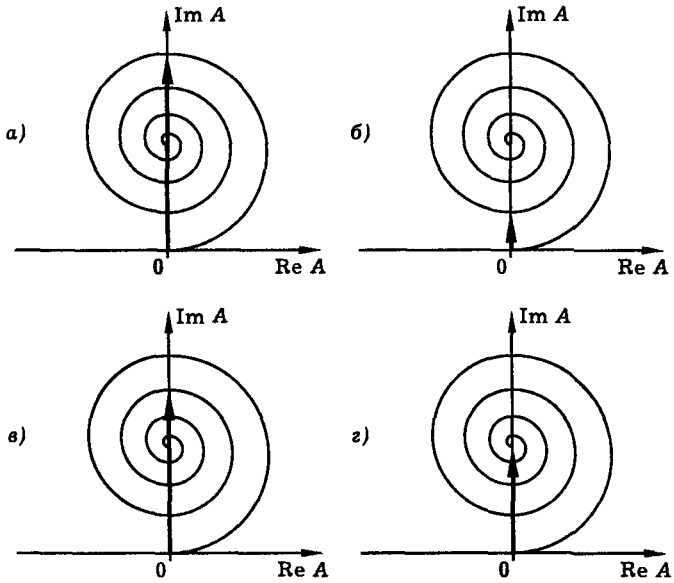



Рис. 13.17. Анализ дифракции на круглом отверстии. Амплитуда поля в точке наблюдения при разных радиусах отверстия: $r = r_0$ (*а*), $r = r_1$ (*б*), $r = r_2$ (*в*), $r = \infty$ (*г*)

Например, если $\lambda = 0{,}5$ мкм, а $z = 100$ см, то по формуле (13.11) получаем $r_0 = 0{,}7$ мм, $r_1 = r_0\sqrt{2} = 1$ мм и т. д. Таким образом, заметных дифракционных эффектов можно ожидать при радиусе отверстия порядка радиуса нулевой зоны Френеля, в данном случае, при $r \simeq 1$ мм.

*Дифракция на диске и пятно Пуассона.* Схема дифракции света на диске показана на рис. 13.19. Предположим, что плоская монохроматическая световая волна падает по нормали на круглый непрозрачный диск радиуса $r$, а наблюдение поля ведется в некоторой точке $P$, расположенной в области геометрической тени на оси диска.

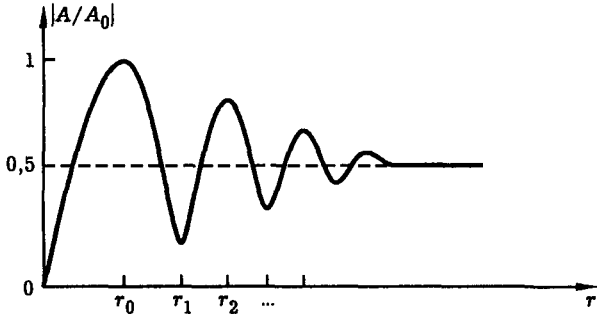



Рис. 13.18. Зависимость амплитуды поля в точке наблюдения от радиуса отверстия. $r_0$, $r_1$, $r_2, \ldots$ — радиусы френелевских зон

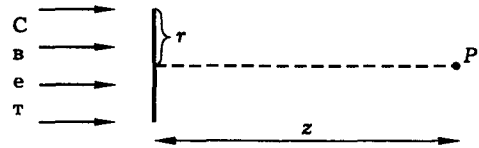



Рис. 13.19. Схема дифракции света на диске

Построение векторов комплексной амплитуды поля с помощью спирали Френеля показано на рис. 13.20. На рис. 13.21 изображена зависимость амплитуды световых колебаний $A$ в точке наблюдения от радиуса диска $r$. В данном случае зависимость $|A(r)|$ является монотонно убывающей. Это значит, что чем больше радиус диска, тем меньше интенсивность света в точке наблюдения. Вместе с тем, из рис. 13.21 видно, что даже в случае достаточно большого экрана, закрывающего сразу несколько зон Френеля, интенсивность света в центре геометрической тени отлична от нуля.

Итак, теория Френеля предсказывает проникновение света в центр геометрической тени диска, установленного на пути плоской монохроматической световой волны. В свое время этот результат рассматривался как аргумент против теории Френеля. Однако эксперименты, выполненные Араго (Доменик Франсуа Араго, 1786–1853), показали, что при освещении непрозрачного диска светом точечного источника в центре области геометрической тени действительно существует маленькое светлое пятно! Это пятно получило название "пятно Пуассона" — по имени автора идеи эксперимента. Схема опыта Араго и его результат показаны на рис. 13.22.

Опыт "диск Пуассона" демонстрируется на лекции с использованием света лазера. Непрерывное излучение аргонового лазера направляется на маленький стальной шарик (радиусом около 1 мм), прижатый стеклянной пластиной к центру линзы с фокусным расстоянием 6 см. Линза проецирует дифракционную картину (в сильно увеличенном виде) на стену аудитории. Наблюдаемая дифракционная картина имеет вид большого круглого темного пятна со светлым ореолом по краю и маленьким, но хорошо заметным светлым пятном в центре (рис. 13.23).

**Дифракция на краю экрана.** К числу основных проблем теории дифракции, несомненно, относится задача о дифракции на краю экрана или, иными словами, вопрос о том, как происходит переход от света к тени на границе области геометрической тени. Напомним, что само понятие дифракции зародилось после опытов Гримальди, в которых было установлено отсутствие резкой границы между светом и тенью (рис. 13.1, 13.2).

Предположим, что плоская монохроматическая световая волна встречает на своем пути полубесконечную непрозрачную плоскость с прямолинейной границей ("край экрана"). Считая, что световая волна распространяется по нормали к экрану, найдем распределение света в плоскости наблюдения, параллельной экрану и находящейся на некотором расстоянии $l$ от него (рис. 13.24).

Для построения дифракционной картины воспользуемся методом зон Френеля. В качестве поверхности $\Sigma$, излучающей вторичные волны, выберем полуплоскость, являющуюся продолжением экрана; эта поверхность совпадает с волновым фронтом световой волны.

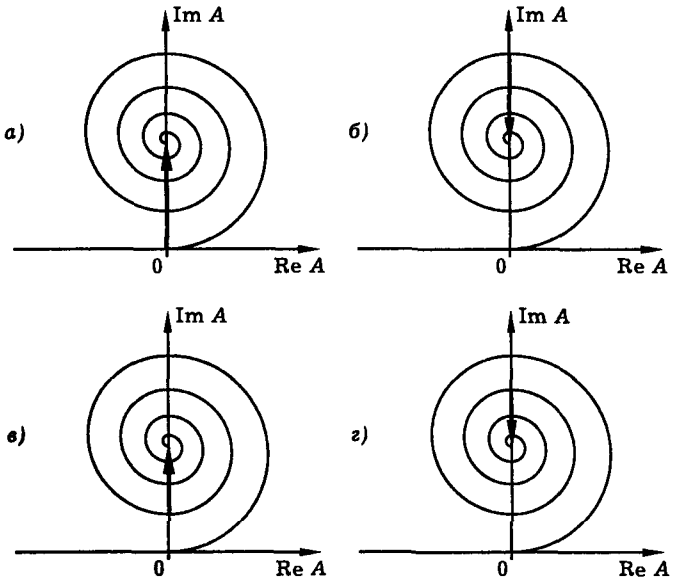



Рис. 13.20. К расчету дифракции света на диске. Амплитуда поля в точке наблюдения при разных радиусах диска: $r = 0$ (*а*), $r = r_0$ (*б*), $r = r_1$ (*в*), $r = r_2$ (*г*)

Введем френелевские зоны для точки $M$, лежащей в плоскости наблюдения точно под краем экрана (рис. 13.25). В данном случае зоны Френеля имеют вид плоских полос, параллельных краю экрана. Обозначая границы зон буквами $O_1, O_2, O_3, \ldots$, можно записать:

$$\begin{cases} OM = l, \\ O_1M = l + \lambda/2, \\ O_2M = O_1M + \lambda/2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases} \tag{13.15}$$

где $\lambda$ — длина световой волны. Обозначим через $d_n$ расстояние от края экрана до начала френелевской зоны с номером $n$. Из рис. 13.25 видно, что

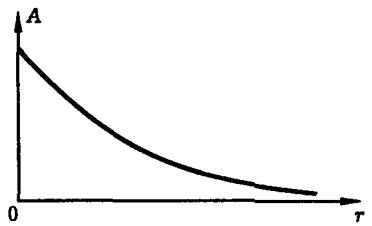



Рис. 13.21. Зависимость амплитуды поля в точке наблюдения от радиуса диска

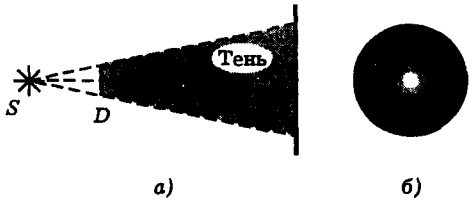



Рис. 13.22. Наблюдение "пятна Пуассона" в опыте Араго. Схема эксперимента (*а*), вид дифракционной картины (*б*). В центре области геометрической тени наблюдается светлое пятно ("пятно Пуассона")

$$d_n^2 = OO_n^2 = (l + n\lambda/2)^2 - l^2 = nl\lambda + (n\lambda/2)^2.$$

Учитывая, что $l \gg \lambda$ и пренебрегая последним слагаемым, получим приближенно

$$d_n = \sqrt{nl\lambda}. \tag{13.16}$$

Пользуясь формулой (13.16), нетрудно подсчитать площадь $n$-й зоны Френеля:

$$S_n = (d_{n+1} - d_n)L,$$

где $L$ — длина края экрана. Имеем

$$S_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})L\sqrt{\lambda l} = \frac{L\sqrt{\lambda l}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \approx \frac{L}{2}\sqrt{\lambda l/n}.$$

Итак, в данном случае площади френелевских зон уменьшаются с ростом номера зоны $n$:

$$S_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{13.17}$$

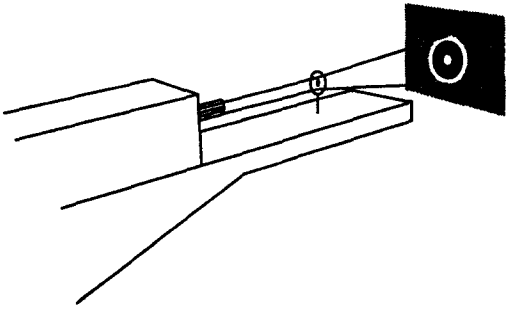


Рис. 13.23. Демонстрация "диск Пуассона"

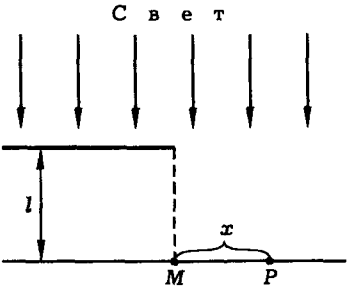



Рис. 13.24. Схема дифракции на краю экрана

Теперь разделим каждую зону Френеля на большое (в пределе — бесконечно большое) число подзон. Для определения дифракционного светового поля нужно просуммировать световые колебания, создаваемые в точке наблюдения элементарными вторичными волнами, приходящими от всех открытых зон и подзон. Суммирование будем проводить методом векторной диаграммы. При этом следует учесть, что поскольку при удалении от края экрана ширина френелевских зон уменьшается, длина вектора, изображающего вклад отдельной подзоны, будет тем меньше, чем дальше расположена зона от края экрана. В итоге векторная диаграмма приобретает вид, показанный на рис. 13.26.

Предположим теперь, что при фиксированной точке наблюдения поля $M$ (рис. 13.25) край экрана начинает отодвигаться влево. Ясно, что в этом случае будут "открываться" зоны Френеля, расположенные слева от первоначального положения края экрана. Картина расположения границ зон Френеля справа и слева от точки $O$ симметрична, поэтому симметричной будет и соответствующая спираль Френеля (рис. 13.27).

Пользуясь спиралью Френеля, изображенной на рис. 13.27, можно построить полную картину дифракции света на краю экрана. Процедуру построения иллюстрируют рис. 13.28, *а–в*. Результат удобно представить в виде зависимости интенсивности света $I$ от расстояния $x$, показанного на рис. 13.24. Вид

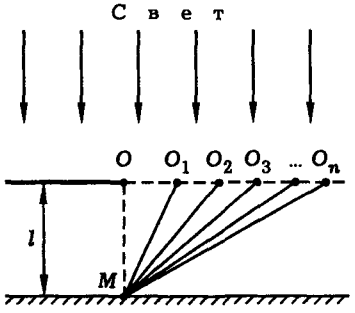



Рис. 13.25. Построение зон Френеля

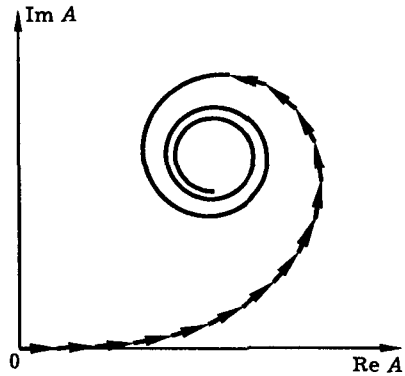



Рис. 13.26. Построение векторной диаграммы для случая дифракции плоской световой волны на краю экрана

зависимости $I(x)$ показан на рис. 13.28, *г*. Полученный результат хорошо согласуется с данными эксперимента по дифракции лазерного пучка на краю экрана (рис. 13.3, 13.4).

Итак, метод зон Френеля позволяет на качественном уровне объяснить целый ряд дифракционных явлений: дифракцию на отверстии, дифракцию на диске, дифракцию на краю экрана. Это позволяет сделать вывод о том, что в основе дифракционных явлений действительно лежит интерференция элементарных вторичных волн.

Свободное распространение плоской волны и нормировка интеграла Гюйгенса–Френеля. Интеграл (13.2) можно использовать для количественного расчета дифракционных картин. В качестве простой тестовой задачи целесообразно рассмотреть свободное распространение плоской световой волны.

Введем обозначения, показанные на рис. 13.29. Направим ось $z$ вдоль направления распространения волны, а в качестве поверхности — источника вторичных волн выберем плоскость $\Sigma$, совпадающую с волновым фронтом. Пусть $P$ — точка наблюдения поля, $O$ — начало координат, $M$ — точка, лежащая на по-

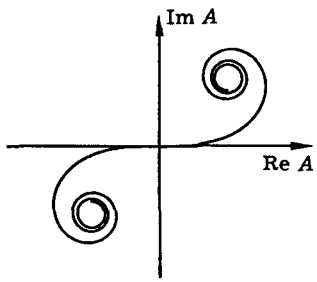



Рис. 13.27. Симметричная спираль Френеля

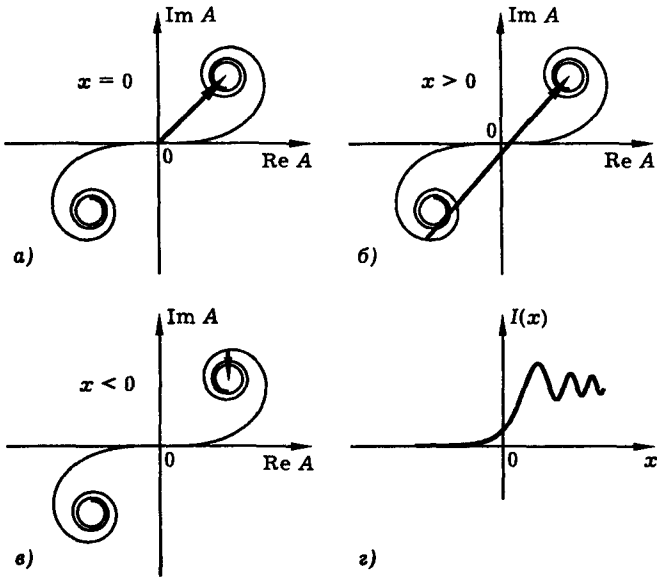



Рис. 13.28. Построение функции $I(x)$, описывающей дифракцию на краю экрана

верхности $\Sigma$ на расстоянии $r$ от точки $O$. Введем также расстояние $z$ от точки $O$ до точки $P$ и расстояние $\rho$ от точки $M$ до точки $P$. Как видно из рис. 13.29, $\rho^2 = r^2 + z^2$. Отсюда при $z \gg r$ получаем приближенное выражение

$$\rho = z + r^2/2z. \tag{13.18}$$

Подставив (13.18) в (13.2), получим

$$\mathcal{E}(P) = \mathcal{E}_0 \frac{e^{-ikz}}{z} \int\limits_{\Sigma} \exp\left(-ikr^2/2z\right) K(\varphi)\, d\sigma, \tag{13.19}$$

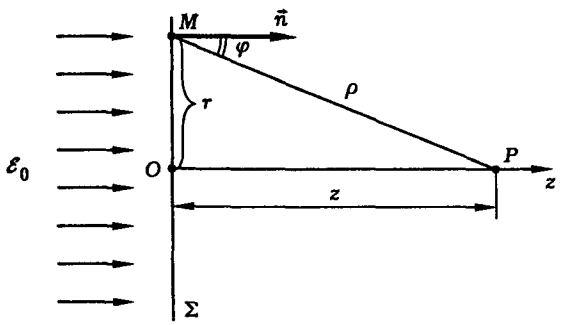



Рис. 13.29. К расчету распространения плоской волны

где $\mathcal{E}_0$ — амплитуда световой волны в плоскости $z = 0$. В знаменателе подынтегрального выражения в (13.2) мы пренебрегли отличием $\rho$ от $z$. В плоскости $\Sigma$ введем полярные координаты с центром в точке $O$. Тогда $d\sigma = 2\pi r\,dr$, а коэффициент наклона $K(\varphi)$ можно считать функцией аргумента $r$. При этом формула (13.19) приобретает вид

$$\mathcal{E}(P) = \mathcal{E}_0 e^{-ikz}\frac{2\pi}{z}\int\limits_0^\infty \exp\left(-ikr^2/2z\right)K(r)r\,dr. \tag{13.20}$$

Положим

$$K(r) = K(0)f(r), \tag{13.21}$$

где $K(0)$ — постоянная, $f(r)$ — некоторая убывающая функция аргумента $r$, изменяющаяся от 1 до 0 при изменении $r$ от 0 до $\infty$. Выберем эту функцию так, чтобы интеграл (13.20) имел как можно более простой вид. Например, полагая

$$f(r) = \exp(-\alpha r^2), \tag{13.22}$$

получим

$$\mathcal{E}(P) = \mathcal{E}_0 e^{-ikz}K(0)\frac{\pi}{z(\alpha + ik/2z)}. \tag{13.23}$$

Перейдем к пределу $\alpha \to 0$. Тогда

$$\mathcal{E}(P) = \mathcal{E}_0 e^{-ikz}K(0)\frac{2\pi}{ik}. \tag{13.24}$$

С другой стороны, при свободном распространении плоской волны должно выполняться соотношение (рис. 13.29)

$$\mathcal{E}(P) = \mathcal{E}_0 e^{-ikz}. \tag{13.25}$$

Сравнивая формулы (13.24) и (13.25), находим $K(0) = ik/2\pi$ или

$$K(0) = i/\lambda. \tag{13.26}$$

Итак мы показали, что дифракционный интеграл Гюйгенса–Френеля правильно описывает свободное распространения плоской световой волны, если выполняется условие (13.26). Полагая $K(\varphi) = K(0) = i/\lambda$, запишем интеграл (13.2) в виде

$$\mathcal{E}(P) = \frac{i}{\lambda}\int\limits_\Sigma \mathcal{E}(M)\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}\,d\sigma. \tag{13.27}$$

Ниже мы используем интеграл Гюйгенса–Френеля, записанный в виде (13.27), для количественный расчетов дифракционных картин.

**Дифракционная длина светового пучка. Ближняя и дальняя зоны дифракции.** Обратимся еще раз к задаче о дифракции плоской световой волны на круглом отверстии, и попытаемся выяснить как меняется интенсивность света $I$ на оси отверстия по мере увеличения расстояния от экрана $z$ (рис. 13.30.)

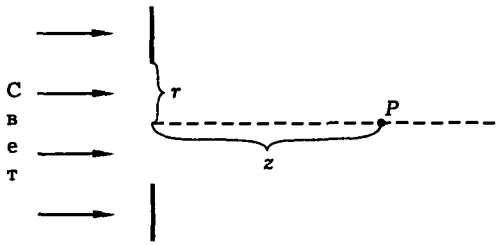



Рис. 13.30. Схема дифракции света на круглом отверстии

Если расстояние $z$ фиксировано, то радиусы френелевских зон выражаются формулой

$$r_n = \sqrt{(n+1)\lambda z}, \tag{13.28}$$

где $n$ — номер зоны, $\lambda$ — длина световой волны. Теперь будем считать фиксированным радиус отверстия $r$. Тогда по мере удаления от экрана периферийные зоны Френеля одна за другой начнут выходить за пределы отверстия, пока, наконец, в пределах отверстия не останется одна нулевая зона Френеля. Используя построение на спирали Френеля (рис. 13.31), нетрудно видеть, что в этот момент интенсивность света $I$ в точке наблюдения достигает максимума (рис. 13.32), после чего монотонно убывает с ростом расстояния $z$.

Назовем расстояние $z$, при котором отверстие совпадает с нулевой зоной Френеля, *дифракционной длиной* светового пучка. Будем обозначать это расстояние $z_д$. Из рис. 13.32 видно, что дифракционная длина определяет границу между двумя различными зонами. Зона, для которой

$$z \ll z_д, \tag{13.29}$$

называется *ближней зоной* дифракции. В этой зоне световой пучок сохраняет структуру, заданную формой отверстия, а интенсивность света на оси пучка примерно равна интенсивности исходной световой волны. Для точек ближней зоны в пределах отверстия помещается множество зон Френеля, поперечный

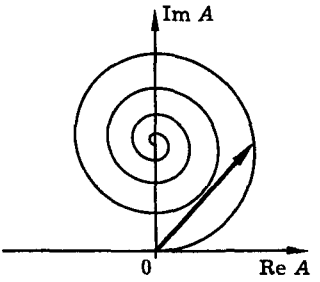



Рис. 13.31. Спираль Френеля

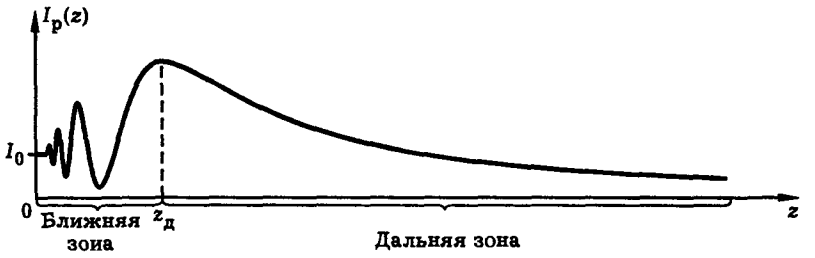



Рис. 13.32. Характер зависимости интенсивности света на оси отверстия от расстояния до экрана ($z_д$ — дифракционная длина светового пучка)

профиль пучка поддерживается постоянным за счет интерференции элементарных вторичных волн, идущих от разных зон Френеля. Зона, для которой

$$z \gg z_д, \tag{13.30}$$

называется *дальней зоной* дифракции. В этой зоне интенсивность света на оси пучка много меньше интенсивности исходной волны, следовательно, световой пучок *расширяется*. Для точек дальней зоны в пределах отверстия помещается только центральная часть нулевой зоны Френеля. Интерференция элементарных вторичных волн выражена слабее. Она уже не в состоянии поддерживать исходный поперечный профиль пучка, пучок становится расходящимся.

Используя данное выше определение дифракционной длины $z_д$ и формулу (13.28), нетрудно показать, что

$$z_д = r^2/\lambda, \tag{13.31}$$

где $r$ — радиус пучка, $\lambda$ — длина световой волны. Дифракционная длина связана с числом Френеля, определяемым формулой

$$N_F = r^2/\lambda z, \tag{13.32}$$

соотношением

$$N_F = z_д/z. \tag{13.33}$$

Из (13.29), (13.30), (13.33) следует, что в ближней зоне

$$N_F \gg 1, \tag{13.34}$$

а в дальней

$$N_F \ll 1. \tag{13.35}$$

**Дифракционная расходимость пучка в дальней зоне.** Характер изменения поперечного размера светового пучка в процессе дифракции показан на рис. 13.33. Оценим дифракционную расходимость пучка $\theta_д$ (рис. 13.34).

Исходя из представления об интерференции элементарных вторичных волн, естественно допустить, что положение границы светового пучка определяется условием

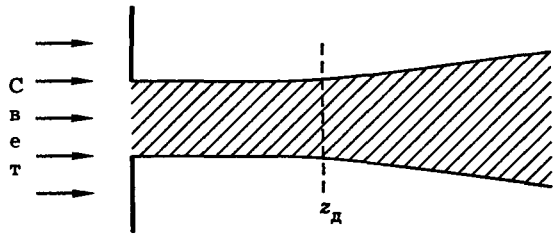



Рис. 13.33. Дифракция светового пучка

$$\Delta = \lambda/2, \tag{13.36}$$

где $\lambda$ — длина световой волны, $\Delta$ — разность хода лучей, приходящих в данную точку от противоположных границ отверстия (рис. 13.35).

Из рис. 13.35 видно, что $\Delta \approx d\sin(\theta_д/2)$, где $d$ — диаметр отверстия, $\theta_д$ — угол дифракционной расходимости. Как правило, дифракционная расходимость невелика ($\theta_д \ll 1$), поэтому можно записать приближенное соотношение $\Delta = d\theta_д/2$, из которого следует, что

$$\theta_д = \lambda/d. \tag{13.37}$$

Итак, формула (13.37) определяет дифракционную расходимость светового пучка в дальней зоне. В этой формуле $\lambda$ — длина световой волны, $d$ — начальный размер пучка. Диаметр пучка в дальней зоне выражается формулой

$$d(z) = \frac{\lambda z}{d}, \tag{13.38}$$

где $z$ — координата, отсчитываемая вдоль пучка от экрана с отверстием.

Формула (13.37) показывает, что дифракционная расходимость пучка тем больше, чем меньше его начальный размер. Этот результат можно проверить экспериментально, используя лазерный пучок и ирисовую диафрагму или раздвижную щель; опыт подтверждает закономерность, выражаемую формулой (13.37).

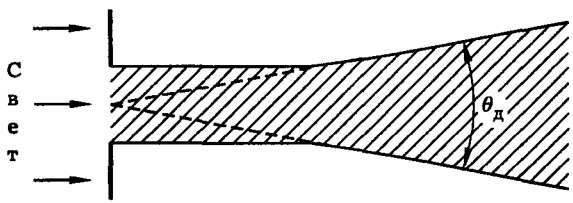



Рис. 13.34. К определению угла дифракционной расходимости светового пучка

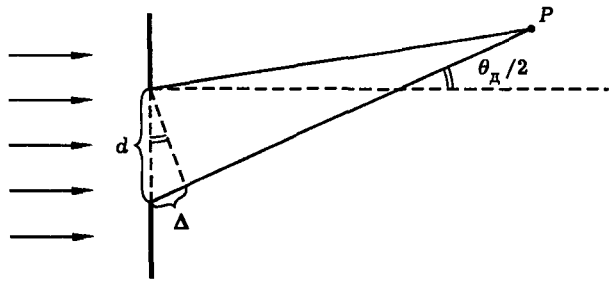



Рис. 13.35. К расчету дифракционной расходимости светового пучка

Оценим дифракционную длину $z_д$ и угловую расходимость $\theta_д$ для пучка гелий-неонового лазера. Полагая $d = 2$ мм, $\lambda = 0{,}6$ мкм, получим $z_д = 1{,}5$ м; $\theta_д = 3 \times 10^{-4}$ рад. В справедливости этой оценки можно убедиться, наблюдая свободную дифракцию лазерного пучка.

**Фокусировка света как дифракционное явление.** Оценка дифракционной расходимости светового пучка (13.37) позволяет оценить минимальный поперечный размер пучка, который может быть получен при фокусировке света линзой. Этот параметр важен для физической оптики, так как он устанавливает предел концентрации света в пространстве.

Схема фокусировки показана на рис. 13.36. Будем исходить из того, что картина фокусировки симметрична относительно фокальной плоскости линзы. Справедливость этого предположения подтверждает опыт, правила геометрической оптики, а также теория, основанная на решении волнового уравнения (см. дополнение 13).

Очевидно, что расходимость пучка справа от фокальной плоскости определяется дифракцией. Используя формулу (13.37), угол расходимости можно записать в виде

$$\theta_д = \lambda/d_ф, \tag{13.39}$$

где $d_ф$ — диаметр пучка в фокальной плоскости. С другой стороны, тот же самый угол можно выразить через фокусное расстояние линзы $F$ и диаметр пучка $D$, падающего на линзу:

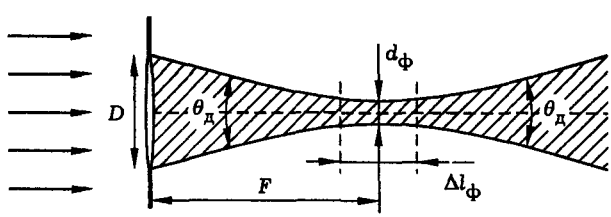



Рис. 13.36. Схема фокусировки светового пучка

$$\theta_д = D/F. \tag{13.40}$$

Из (13.39), (13.40) находим

$$d_ф = \lambda F/D. \tag{13.41}$$

Итак, диаметр фокального пятна определяется формулой (13.41). В этой формуле $\lambda$ — длина световой волны, $F$ — фокусное расстояние линзы, $D$ — диаметр пучка, падающего на линзу.

Какова минимальная возможная величина $d_ф$? Формула (13.41) показывает, что если диаметр исходного светового пучка равен диаметру линзы, то величина $d_ф$ тем меньше, чем больше отношение диаметра линзы к ее фокусному расстоянию. Параметр $D/F$ называется *относительным отверстием линзы.* На практике удается изготавливать линзы с относительным отверстием не более единицы. В наиболее благоприятном случае, когда $D/F = 1$, по формуле (13.41) получаем

$$d_ф^{\min} = \lambda, \tag{13.42}$$

т. е. диаметр фокального пятна оказывается порядка длины световой волны.

Отметим, что формула (13.41) справедлива для пространственно когерентных пучков. В случае некогерентного пучка величину $D$ в (13.41) следует заменить на радиус когерентности света $r_к$ (см., например, [10]). При этом величина $d_ф$, вообще говоря, увеличивается.

Оценим теперь длину фокальной перетяжки $\Delta l_ф$. Из рис. 13.36 и 13.33 видно, что длину перетяжки можно принять равной удвоенной дифракционной длине пучка с начальным диаметром $d_ф$:

$$\Delta l_ф = 2z_д, \qquad z_д = d_ф^2/4\lambda.$$

Таким образом,

$$\Delta l_ф = d_ф^2/2\lambda \tag{13.43}$$

или, с учетом (13.41),

$$\Delta l_ф = \lambda F^2/2D^2. \tag{13.44}$$

Итак, диаметр и длина фокальной перетяжки определяются формулами (13.41), (13.43). Данные формулы следует рассматривать как оценки, полученные на основе физических соображений. Более точные выражения могут быть получены на основе математической теории дифракции, т. е. путем решения волнового уравнения при соответствующих граничных условиях (см. дополнение 13).

Сделаем численные оценки. Предположим, что когерентный лазерный пучок с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм и диаметром $d = 2{,}5$ мм фокусируется линзой с фокусным расстоянием $F = 16$ см. Используя формулы (13.41), (13.43), получим $d_ф = \lambda F/d = 3 \times 10^{-3}$ см, $\Delta l_ф = d_ф^2/2\lambda = 0{,}1$ см.

**Теория дифракции Кирхгофа.** Основная задача теории дифракции состоит в отыскании структуры светового поля при наличии препятствий распространению волны.

После открытия уравнений электродинамики и электромагнитной природы света (Д. К. Максвелл, 1870) была сформулирована математическая задача дифракции как задача отыскания решений волнового уравнения, удовлетворяющих определенным граничным условиям:

$$\begin{cases} \Delta E - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \\ + \textit{граничные условия.} \end{cases} \tag{13.45}$$

Общий метод решения данной задачи был предложен Густавом Кирхгофом в 1882 г. Кирхгофу удалось показать, что дифракционный интеграл Гюйгенса–Френеля можно рассматривать как приближенное решение задачи дифракции (13.45). Таким образом, френелевская теория дифракции получила математическое обоснование. Рассмотрим коротко основные идеи теории Кирхгофа.

Уравнение Гельмгольца. Поскольку в задачах дифракции интересуются, в первую очередь, пространственной структурой поля, рассмотрим монохроматическое поле вида

$$E(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}\mathcal{E}(\vec{r})\mathrm{e}^{i\omega t} + \text{к. с.}, \tag{13.46}$$

где $\omega$ — частота, $\mathcal{E}(\vec{r})$ — комплексная амплитуда. Подставив (13.46) в волновое уравнение (13.45), получим для $\mathcal{E}(\vec{r})$ *уравнение Гельмгольца*

$$\Delta\mathcal{E} + k^2\mathcal{E} = 0, \tag{13.47}$$

где $k = \omega/c$ — волновое число, $c$ — скорость света, $\Delta$ — оператор Лапласа.

Простейшие решения уравнения Гельмгольца представляют собой плоскую волну

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0\mathrm{e}^{-i\vec{k}\vec{r}} \tag{13.48}$$

и сферическую волну

$$\mathcal{E} = A\frac{\mathrm{e}^{-ikr}}{r} \tag{13.49}$$

(см. ч. I).

В силу линейности уравнения Гельмгольца ему удовлетворяют также произвольная совокупность плоских волн, распространяющихся во всевозможных направлениях, и произвольная совокупность сферических волн, возникающих в разных точках пространства. Отсюда следует, что в основу решения задачи дифракции (13.45) можно положить идею спектрального разложения, согласно которой любое световое поле можно представить в виде набора плоских или сферических волн. В теории Кирхгофа в качестве эталонной волны принята сферическая световая волна; реальное световое поле представляется в виде совокупности сферических волн.

Интегральная теорема Кирхгофа–Гельмгольца. Согласно этой теореме, амплитуду поля в некоторой точке $P$ можно вычислить, если известна амплитуда поля $\mathcal{E}$ и ее производная по нормали $\partial\mathcal{E}/\partial n$ на какой-либо поверхности $S$, охватывающей точку $P$ (рис. 13.37). А именно,

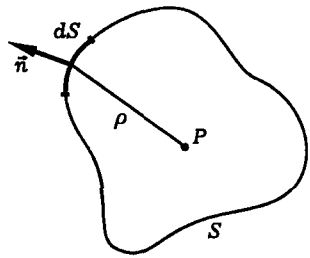



Рис. 13.37. К теореме Кирхгофа–Гельмгольца

$$\mathcal{E}(P) = \frac{1}{4\pi} \oint\limits_S \left( G\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n} - \mathcal{E}\frac{\partial G}{\partial n} \right) dS, \tag{13.50}$$

где

$$G = \frac{e^{-ik\rho}}{\rho}, \tag{13.51}$$

$G$ — функция точечного источника, или функция Грина для уравнения Гельмгольца.

Граничные условия Кирхгофа. Применительно к задаче дифракции, когда распространению световой волны препятствует экран или система экранов, Кирхгоф предложил использовать следующие приближенные граничные условия для светового поля: в пределах отверстий поле таково, как если бы экранов не было, а на теневой стороне экранов поле равно нулю. Итак,

$$\begin{cases} \textit{на теневой стороне экранов } \mathcal{E} = 0,\ \partial\mathcal{E}/\partial n = 0, \\ \textit{в пределах отверстий } \mathcal{E} \textit{ и } \partial\mathcal{E}/\partial n \textit{ таковы,} \\ \textit{как если бы экранов не было.} \end{cases} \tag{13.52}$$

Несмотря на очевидно приближенный характер данных условий, оказывается, что в оптике (ввиду малости длины световой волны) они обеспечивают достаточную точность вычислений.

Дифракционный интеграл Кирхгофа–Гельмгольца. Для задачи о дифракции сферической световой волны на отверстии (рис. 13.38) теория Кирхгофа дает следующий результат:

$$\mathcal{E}(P) = \int\limits_\Sigma \mathcal{E}(M)\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}K(\varphi)\,d\sigma, \tag{13.53}$$

где

$$K(\varphi) = \frac{i}{\lambda}\left(\frac{1+\cos\varphi}{2}\right). \tag{13.54}$$

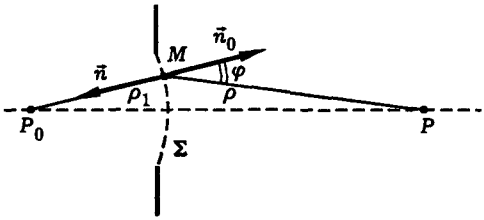



Рис. 13.38. К расчету дифракции сферической волны на отверстии

Интеграл (13.53) в точности совпадет с дифракционным интегралом Гюйгенса–Френеля (13.2). Однако вид функции $K(\varphi)$, предполагаемый Френелем (рис. 13.9), оказывается не совсем точным. Теория Кирхгофа показывает, что на самом деле коэффициент наклона $K(\varphi)$ определяется формулой (13.54); график этой функции показан на рис. 13.39.

Основной вклад в дифракционный интеграл вносят центральные (приосевые) зоны Френеля, для которых $\varphi \ll 1$. Полагая $K(\varphi) = K(0) = i/\lambda$, получим

$$\mathcal{E}(P) = \frac{i}{\lambda} \int\limits_{\Sigma} \mathcal{E}(M) \frac{e^{-ik\rho}}{\rho}\, d\sigma. \tag{13.55}$$

В такой форме дифракционный интеграл совпадает с интегралом (13.27). Итак, теория Кирхгофа обосновывает и уточняет теорию Френеля.

Остановимся, коротко, на выводе формул (13.53), (13.54). Пусть есть точечный монохроматический источник света, расположенный в точке $P_0$. Вычислим световое поле в некоторой точке $P$ при условии, что между точками $P_0$ и $P$ имеется препятствие распространению световой волны, например, экран с отверстием (рис. 13.38).

Согласно теореме Кирхгофа–Гельмгольца, дифракционное световое поле в точке $P$ определяется интегралом (13.50) по произвольной поверхности $S$, охватывающей эту точку. Выберем поверхность $S$ состоящей из трех частей: поверхности $\Sigma$, стягивающей отверстие в экране, поверхности $S_1$ теневой части экрана и сферической поверхности достаточно большого радиуса с центром в точке $P$. Вид поверхности $S$ показан на рис. 13.40.

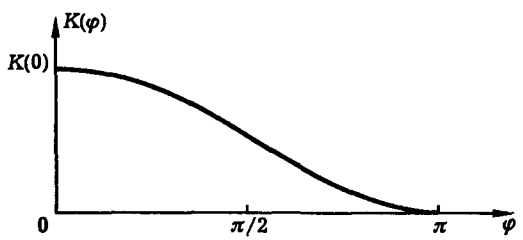



Рис. 13.39. Вид функции "коэффициент наклона" в теории Кирхгофа

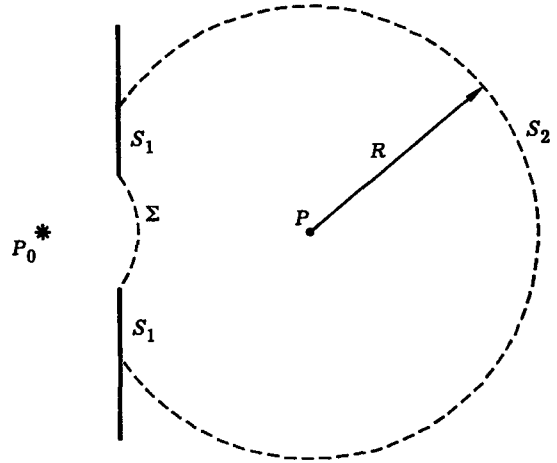



Рис. 13.40. К вычислению дифракционного интеграла в теории Кирхгофа

Физические соображения показывают, что основной вклад в световое поле в точке $P$ должен давать интеграл по поверхности $\Sigma$, поскольку именно через отверстие в экране, а не с какой-либо другой стороны свет от источника проникает в точку $P$. Следовательно,

$$\mathcal{E}(P) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Sigma} \left( G\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n} - \mathcal{E}\frac{\partial G}{\partial n} \right) d\sigma, \tag{13.56}$$

где

$$G = \frac{e^{-ik\rho}}{\rho}, \tag{13.57}$$

$G$ — функция Грина, $k$ — волновое число световой волны, $\rho$ — расстояние между точками $M$ и $P$, $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности $\Sigma$ в точке $M$. В данном случае поверхность $\Sigma$ удобно выбрать в виде сферической поверхности с центром в точке $P_0$, где расположен точечный источник света. Математическое обоснование перехода от интеграла по замкнутой поверхности $S$ к интегралу по поверхности $\Sigma$ дано, например в [12].

Итак, дифракционное световое поле в точке $P$ описывается формулами (13.56), (13.57). Преобразуем выражение для $\mathcal{E}(P)$. Начнем с вычисления производной $\partial G/\partial n$. Как видно из рис. 13.38, $\vec{n} = -\vec{n}_0$. Следовательно, можно записать $\partial G/\partial n = -\partial G/\partial n_0$. Далее, поскольку функция Грина, определяемая формулой (13.57), зависит от $n_0$ неявно, воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции: $\partial G/\partial n_0 = (\partial G/\partial \rho)(\partial \rho/\partial n_0)$. В силу (13.57)

$$\frac{\partial G}{\partial \rho} = -\left( ik + \frac{1}{\rho} \right) G \approx -ikG.$$

Это приближение, называемое *оптическим,* обычно обеспечивает достаточную точность, поскольку в оптике, как правило, $\rho \gg \lambda$ и, следовательно, $k \gg 1/\rho$.

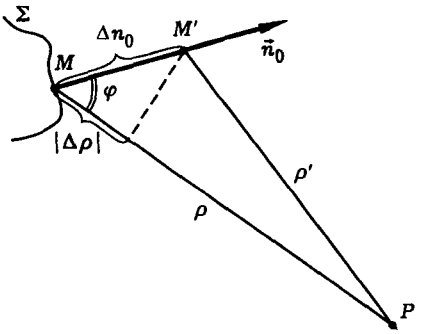



Рис. 13.41. К вычислению производной по направлению

Вычисление производной по направлению $\partial\rho/\partial n_0$ иллюстрирует рис. 13.41. Как видно из этого рисунка,

$$\frac{\partial\rho}{\partial n_0} = \lim_{\Delta n_0 \to 0} \frac{\Delta\rho}{\Delta n_0} = -\cos\varphi.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial G}{\partial n} = -ikG\cos\varphi. \tag{13.58}$$

Теперь вычислим производную $\partial\mathcal{E}/\partial n$. Так как эта производная вычисляется в точке $M$ на поверхности $\Sigma$,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(M) = A_0\frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1},$$

где $A_0$ — постоянная, $\rho_1$ — расстояние от точки $P_0$ до точки $M$. Вычисления выполняем подобно тому, как это сделано выше для производной $\partial G/\partial n$. Получаем $\partial\mathcal{E}/\partial n = (\partial\mathcal{E}/\partial\rho_1)(\partial\rho_1/\partial n)$, $\partial\rho_1/\partial n = -1$, $\partial\mathcal{E}/\partial\rho_1 = -(ik + 1/\rho_1)\mathcal{E} \approx -ik\mathcal{E}$. Итак,

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial n} = ik\mathcal{E}. \tag{13.59}$$

Подставив (13.57)–(13.59) в (13.56), получим (13.53), (13.54), что и требовалось показать.

Итак, приближенное решение волнового уравнения для светового поля, данное Кирхгофом, подтверждает френелевскую теорию дифракции. Френель правильно угадал структуру дифракционного интеграла! В настоящее время теория Френеля сохраняет свое значение, прежде всего, как система наглядных образов, хорошо раскрывающая физику дифракции света. Математическая формулировка задачи дифракции (13.45), основанная на теории Максвелла, позволяет использовать для решения дифракционных задач хорошо разработанный аппарат математической физики, в частности, метод спектрального разложения, метод параболического уравнения (см. лекцию 17 и дополнение 13), а также применять мощные и универсальные методы численного моделирования.

# Литература

1. *Гудмен Дж.* Введение в фурье-оптику. — М.: Мир, 1970.
2. Квантовая электроника. Маленькая энциклопедия/Под ред. М. Е. Жаботинского — М.: СЭ, 1969.
3. *Алешкевич В. А., Киселев Д. Ф., Корчажкин В. В.* Лазеры в лекционном эксперименте. — М.: Изд-во МГУ, 1985.
4. Физический энциклопедический словарь/Под ред. А. М. Прохорова — М.: СЭ, 1983.
5. *Крауфорд Ф.* Волны. — М.: Наука, 1974.
6. *Матвеев А. Н.* Оптика. — М.: Высшая Школа, 1985.
7. *Ландсберг Г. С.* Оптика. — М.: Наука, 1976.
8. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. — М.: Наука, 1973.
9. *Стюард И. Г.* Введение в фурье-оптику. — М.: Мир, 1985.
10. *Дьяков Ю. Е., Никитин С. Ю.* Задачи по статистической радиофизике и оптике. — М.: Изд-во МГУ, 1985.
11. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1951.
12. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. — М.: Наука, 1979.

# Лекция 14

# Дифракция слаборасходящихся пучков

*Приближение Френеля в теории дифракции. Интегралы Френеля и спираль Корню. Дифракция Френеля на одномерных структурах. Дифракция на краю экрана. Дифракция на щели. Дифракция Френеля на двумерных структурах. Дифракция на квадратном отверстии. Дифракция на круглом отверстии. Дифракция гауссова пучка.*

Рассматривается дифракция слаборасходящихся световых пучков. Обсуждается физическое содержание френелевского приближения в теории дифракции. Рассчитываются картины френелевской дифракции на одномерных и двумерных структурах.

**Приближение Френеля в теории дифракции.** При расчетах дифракционных картин широко применяются два основных приближения теории дифракции: *приближение Френеля* и *приближение Фраунгофера*. Первое из них описывает дифракцию *слаборасходящихся ("параксиальных") пучков света*, второе — дифракцию в *дальней зоне*. Познакомимся с френелевским приближением в теории дифракции.

Рассмотрим дифракцию плоской монохроматической световой волны на отверстии. Общее решение задачи дифракции дается в этом случае интегралом Гюйгенса–Френеля (см. лекцию 13)

$$\mathcal{E}(P) = \frac{i}{\lambda} \int\limits_{\Sigma} \mathcal{E}(M) \frac{\mathrm{e}^{-ik\rho}}{\rho} d\sigma, \tag{14.1}$$

где $\mathcal{E}$ — комплексная амплитуда светового поля, $\Sigma$ — поверхность, стягивающая отверстие, $P$ — точка наблюдения поля, $M$ — некоторая точка на поверхности $\Sigma$, $\rho$ — расстояние между точками $M$ и $P$, $\lambda$ — длина световой волны, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число.

Введем координаты $x$, $y$ в плоскости экрана с отверстием и координаты $x_0$, $y_0$ в плоскости наблюдения, находящейся на расстоянии $z$ от экрана с отверстием и параллельной ему (рис. 14.1). В этом случае дифракционный интеграл можно записать в виде

$$\mathcal{E}(x_0, y_0, z) = \frac{i}{\lambda} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(x, y) \frac{\mathrm{e}^{-ik\rho}}{\rho} dx\, dy, \tag{14.2}$$

где

$$\rho = \sqrt{z^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \tag{14.3}$$

Часто в оптике приходится иметь дело с узкими слаборасходящимися пучками света. В этом случае хорошо выполняются неравенства

$$z \gg x, y, x_0, y_0. \tag{14.4}$$

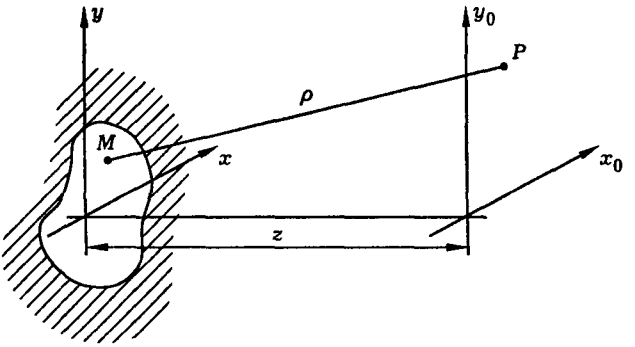



Рис. 14.1. Постановка задачи дифракции

Неравенства (14.4) позволяют написать приближенное выражение для $\rho$

$$\rho = z + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2z}. \tag{14.5}$$

Подставив (14.5) в (14.2) и пренебрегая отличием $\rho$ от $z$ в знаменателе подынтегрального выражения, получим

$$\mathcal{E}(x_0, y_0, z) = \frac{i}{\lambda z} \times$$

$$\times\, \mathrm{e}^{-ikz} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(x, y) \exp\left\{-\frac{ik}{2z}\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right]\right\} dx\, dy. \tag{14.6}$$

Формула (14.6) дает решение задачи дифракции в *приближении Френеля*. В этой формуле $\mathcal{E}(x_0, y_0, z)$ — распределение комплексной амплитуды поля в плоскости наблюдения, $\mathcal{E}_0(x, y)$ — распределение амплитуды поля в плоскости экрана с отверстием, $z$ — расстояние между плоскостью экрана и плоскостью наблюдения, $\lambda$ — длина световой волны, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число. Обсудим физическое содержание и условия применимости приближения Френеля.

Основная формула френелевского приближения (14.5) с физической точки зрения означает замену сферических волновых фронтов вторичных волн Гюйгенса параболическими поверхностями. Вообще говоря, такое приближение накладывает определенные ограничения на допустимые размеры отверстия и положение точки наблюдения поля. Приближение Френеля исключает из рассмотрения некоторые области пространства, а именно область, вплотную прилегающую к экрану с отверстием, а также периферийные точки пространства, лежащие на больших расстояниях от оси пучка. Однако из физических соображений ясно, что в первой из указанных областей световое поле почти такое же, как в падающей волне, а во вторую область свет почти не проникает. Поэтому мы не будем интересоваться этими областями, хотя, в принципе, соответствующие расчеты можно провести на основе общих формул (14.2), (14.3).

**Интегралы Френеля и спираль Корню.** На практике расчеты по формуле (14.6) сводятся к вычислению интегралов

$$C(\alpha) = \int_0^\alpha \cos(\pi t^2/2)\,dt, \qquad S(\alpha) = \int_0^\alpha \sin(\pi t^2/2)\,dt, \tag{14.7}$$

называемых *интегралами Френеля*. Специальные функции $C(\alpha)$ и $S(\alpha)$ табулированы, соответствующие таблицы имеются, например, в справочниках [7; 8]. Разработан также *графический способ* построения дифракционных картин, основанный на применении так называемой *"спирали Корню"*. Эта кривая строится следующим образом. На плоскости $x, y$ наносятся точки с декартовыми координатами, равными значениям интегралов Френеля:

$$x = C(\alpha), \qquad y = S(\alpha). \tag{14.8}$$

При непрерывном изменении параметра $\alpha$ эти точки образуют гладкую кривую, которая и называется спиралью Корню. Вид этой кривой показан на рис. 14.2, *а*. На рис. 14.2, *б* показан пример построения на спирали Корню. Длина отрезка $AB$ на этом рисунке определяется формулой

$$l^2(\alpha_1, \alpha_2) = [C(\alpha_1) - C(\alpha_2)]^2 + [S(\alpha_1) - S(\alpha_2)]^2\,. \tag{14.9}$$

**Дифракция Френеля на одномерных структурах.** Если начальное распределение поля $\mathcal{E}_0(x, y)$ зависит лишь от одной пространственной переменной, например

$$\mathcal{E}_0(x, y) = \mathcal{E}_0(x), \tag{14.10}$$

то говорят, что имеет место дифракция на *одномерной структуре*. Подставив (14.10) в (14.6) и используя формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{ik}{2z}y^2\right) dy = \sqrt{\frac{2\pi z}{ik}} = (1-i)\sqrt{\frac{\pi z}{k}}, \tag{14.11}$$

получим

$$\mathcal{E}(x_0, z) = \frac{(1+i)}{\sqrt{2\lambda z}} e^{-ikz} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(x) \exp\left[-\frac{ik}{2z}(x - x_0)^2\right] dx. \tag{14.12}$$

Таким образом, дифракционный интеграл сводится к однократному интегралу.

**Дифракция на краю экрана.** Направим ось $x$ перпендикулярно краю экрана. Тогда можно написать

$$\mathcal{E}_0(x) = \mathcal{E}_0 \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{14.13}$$

Подставив (14.13) в (14.12), получим

$$\mathcal{E}(x_0, z) = \mathcal{E}_0 \frac{(1+i)}{\sqrt{2\lambda z}} e^{-ikz} \mathcal{J}(x_0), \tag{14.14}$$

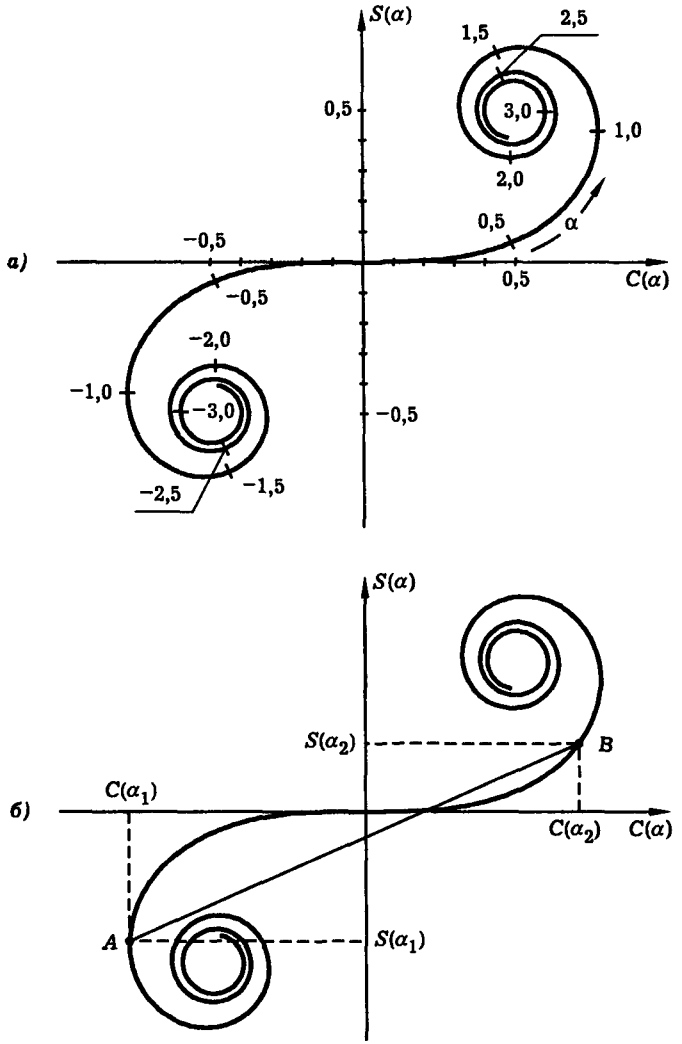



Рис. 14.2. Спираль Корню (*а*) и построение на спирали (*б*)

где

$$\mathcal{J}(x_0) = \int\limits_0^\infty \exp\left[-\frac{ik}{2z}(x - x_0)^2\right] dx. \tag{14.15}$$

Выразим интеграл (14.15) через интегралы Френеля (14.7). Для этого введем переменную

$$\xi = (x - x_0)\sqrt{k/\pi z}. \tag{14.16}$$

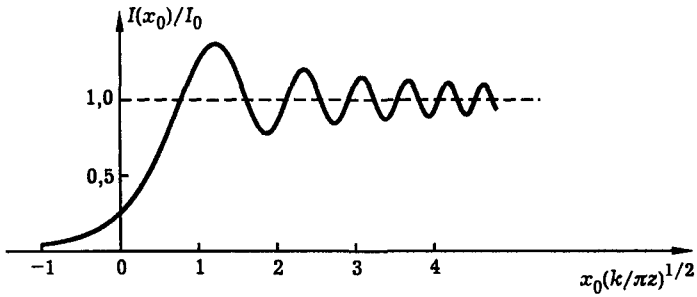



Рис. 14.3. Дифракция плоской световой волны на краю экрана: распределение интенсивности света в дифракционной картине

Тогда

$$\mathcal{J}(x_0) = \sqrt{\pi z/k} \int\limits_{\xi_1}^{\infty} \exp(-i\pi\xi^2/2)\, d\xi, \tag{14.17}$$

где

$$\xi_1 = -x_0\sqrt{k/\pi z}. \tag{14.18}$$

Используя обозначение (14.9), интенсивность света в точке наблюдения можно представить в виде

$$I(x_0, z) = \frac{1}{2} I_0 l^2(\xi_1, \infty), \tag{14.19}$$

где $I_0$ — интенсивность падающей плоской волны. Результат построения, выполненного с помощью спирали Корню (см. рис. 14.2), показан на рис. 14.3. Результат расчета хорошо согласуется с данными эксперимента (рис. 13.3, 13.4).

**Дифракция на щели.** Обозначим ширину щели буквой $d$ и направим ось $x$ перпендикулярно щели, как показано на рис. 14.4. В этом случае

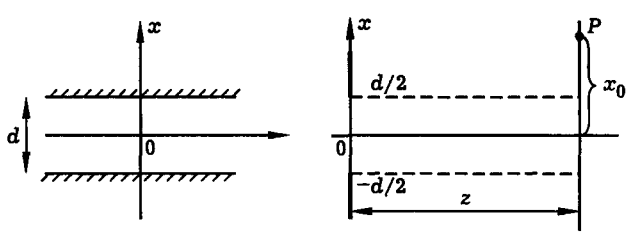



Рис. 14.4. К расчету дифракции плоской волны на щели

$$\mathcal{E}_0(x) = \mathcal{E}_0 \begin{cases} 1, & |x| \le d/2, \\ 0, & |x| > d/2. \end{cases} \tag{14.20}$$

Подставив (14.20) в (14.12), получим

$$\mathcal{E}(x_0, z) = \mathcal{E}_0 \frac{(1+i)}{\sqrt{2\lambda z}} \mathrm{e}^{-ikz} \mathcal{J}_1(x_0), \tag{14.21}$$

где

$$\mathcal{J}_1(x_0) = \int\limits_{-d/2}^{d/2} \exp\left[-\frac{ik}{2z}(x - x_0)^2\right] dx. \tag{14.22}$$

Введем переменную

$$\xi = (x - x_0)\sqrt{k/\pi z}. \tag{14.23}$$

Тогда

$$\mathcal{J}_1(x_0) = \sqrt{\pi z/k} \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \exp(-i\pi\xi^2/2)\, d\xi, \tag{14.24}$$

где

$$\xi_1 = -\left(\frac{d}{2} + x_0\right)\sqrt{k/\pi z}, \qquad \xi_2 = \left(\frac{d}{2} - x_0\right)\sqrt{k/\pi z}. \tag{14.25}$$

Используя обозначение (14.9), распределение интенсивности света в дифракционной картине запишем в виде

$$I(x_0, z) = \frac{1}{2} I_0\, l^2(\xi_1, \xi_2), \tag{14.26}$$

где $I_0$ — интенсивность падающей волны. Для удобства построения графиков перепишем формулы (14.25), (14.26) в виде

$$I(x_0)/I_0 = \frac{1}{2}\, l^2(\xi_1, \xi_2), \tag{14.27}$$

$$\xi_1 = -\alpha(1+p), \qquad \xi_2 = \alpha(1-p). \tag{14.28}$$

Здесь введены безразмерные параметры

$$\alpha = \sqrt{\frac{kd^2}{4\pi z}} = \sqrt{2N_{\mathrm{F}}}, \qquad p = 2x_0/d \tag{14.29}$$

и число Френеля

$$N_{\mathrm{F}} = (d/2)^2/\lambda z. \tag{14.30}$$

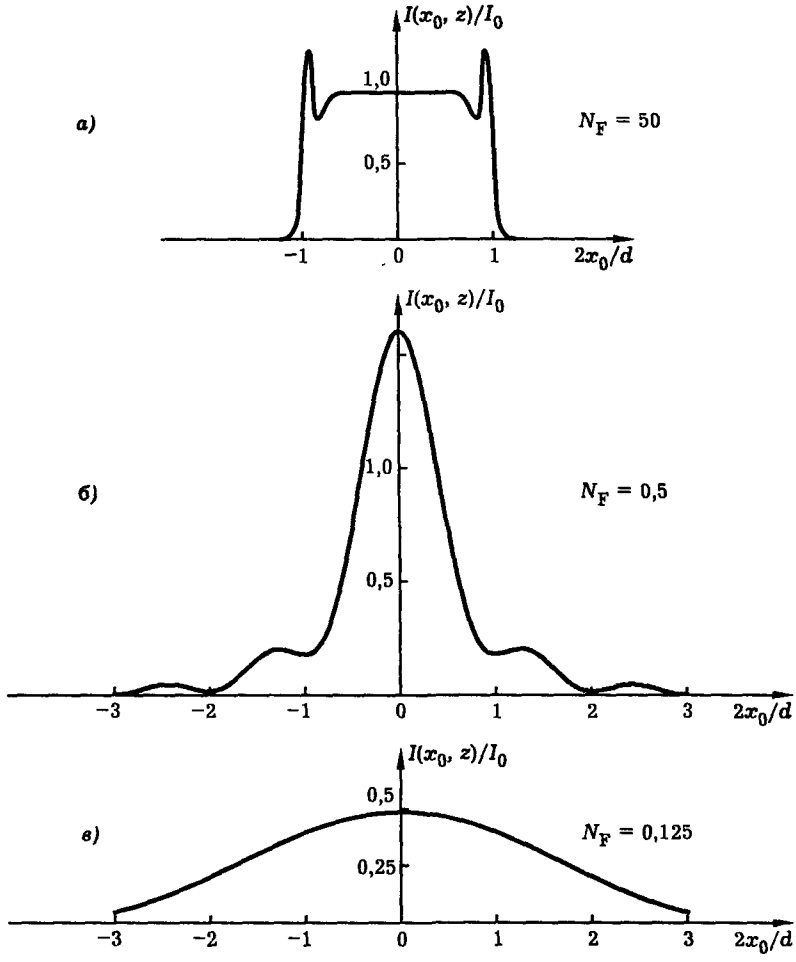



Рис. 14.5. Дифракция плоской волны на щели: распределение интенсивности света в дифракционной картине

Дифракционная картина, построенная с помощью спирали Корню, показана на рис. 14.5. Из нее видно, что характер дифракции меняется при изменении числа Френеля $N_F$. Так, если $N_F \gg 1$ (рис. 14.5, *а*), то дифракция почти не проявляется и хорошую точность дает приближение геометрической оптики. В данном случае профиль интенсивности излучения остается почти прямоугольным, ширина пучка остается равной ширине щели, а интенсивность света на оси пучка совпадает с интенсивностью падающей волны. Влияние дифракции в этом случае заметно лишь вблизи границы области геометрической тени, где наблюдаются осцилляции интенсивности и свет слегка проникает в область геометрической тени.

По мере удаления точки наблюдения от экрана со щелью, число Френеля $N_F$ уменьшается. В области, где $N_F \simeq 1$ (рис. 14.5, *б*), интенсивность света на оси пучка испытывает значительные осцилляции, появляются боковые макси-

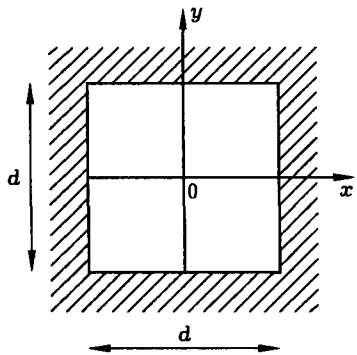



Рис. 14.6. К расчету дифракции плоской волны на квадратном отверстии

мумы интенсивности, однако ширина светового пучка все еще примерно равна ширине щели. В области же, где $N_F \ll 1$ (дальняя зона дифракции), световой пучок сильно уширяется и поперечный профиль пучка не имеет ничего общего с исходным (прямоугольным) профилем (рис. 14.5, *в*).

**Дифракция Френеля на двумерных структурах.** Для описания дифракции на двумерных структурах необходимо пользоваться общей формулой (14.6). Вычисления в этом случае, вообще говоря, сложнее, чем в случае дифракции на одномерных структурах. Рассмотрим несколько конкретных примеров.

**Дифракция на квадратном отверстии.** Пусть отверстие в экране имеет вид квадрата со стороной $d$ (рис. 14.6). В этом случае

$$\mathcal{E}_0(x,y) = \mathcal{E}_0 \begin{cases} 1, & \textit{если: } |x| \le d/2 \textit{ и } |y| \le d/2, \\ 0, & \textit{вне этой области.} \end{cases} \tag{14.31}$$

Подставив (14.31) в (14.6), получим

$$\mathcal{E}(x_0, y_0, z) = \mathcal{E}_0 \frac{i}{\lambda z} e^{-ikz} \mathcal{J}(x_0)\mathcal{J}(y_0), \tag{14.32}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x_0) &= \int\limits_{-d/2}^{d/2} \exp\left[-\frac{ik}{2z}(x-x_0)^2\right] dx, \\ \mathcal{J}(y_0) &= \int\limits_{-d/2}^{d/2} \exp\left[-\frac{ik}{2z}(y-y_0)^2\right] dy. \end{aligned} \tag{14.33}$$

Введем переменные

$$\xi = (x - x_0)\sqrt{k/\pi z}, \qquad \eta = (y - y_0)\sqrt{k/\pi z}. \tag{14.34}$$

Тогда

$$\mathcal{J}(x_0) = \sqrt{\frac{\pi z}{k}} \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \exp(-i\pi\xi^2/2)\, d\xi. \qquad \mathcal{J}(y_0) = \sqrt{\frac{\pi z}{k}} \int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} \exp(-i\pi\eta^2/2)\, d\eta,$$

где

$$\begin{cases} \xi_1 = -\sqrt{k/\pi z}\left(\dfrac{d}{2} + x_0\right), & \eta_1 = -\sqrt{k/\pi z}\left(\dfrac{d}{2} + y_0\right), \\ \xi_2 = \sqrt{k/\pi z}\left(\dfrac{d}{2} - x_0\right), & \eta_2 = \sqrt{k/\pi z}\left(\dfrac{d}{2} - y_0\right). \end{cases}$$

Используя обозначение (14.9), распределение интенсивности света в дифракционной картине можно представить в виде

$$I(x_0, y_0, z) = \frac{1}{4} I_0\, l^2(\xi_1, \xi_2)\, l^2(\eta_1, \eta_2).$$

В частности, для интенсивности света на оси пучка, т. е. в точках с координатами $x_0 = y_0 = 0$, получаем

$$I(0, 0, z) = \frac{1}{4} I_0 \left[l^2(-A, A)\right]^2,$$

где введен безразмерный параметр

$$A = (d/2)\sqrt{k/\pi z} = \sqrt{z_{\text{д}}/z} = \sqrt{N_{\text{F}}}$$

и дифракционная длина пучка

$$z_{\text{д}} = kd^2/4\pi$$

(см. лекцию 13).

Распределение интенсивности света вдоль оси пучка, построенное с помощью спирали Корню, показано на рис. 14.7. Анализ распределения интенсивности в плоскости, перпендикулярной оси пучка, показывает, что на небольших расстояниях от экрана с отверстием дифракционные эффекты заметны лишь вблизи границы области геометрической тени. В дальней зоне дифракции световой пучок утрачивает свой первоначальный профиль, его поперечный размер возрастает пропорционально пройденному расстоянию $z$, а интенсивность света на оси пучка монотонно уменьшается. Экспериментальные наблюдения подтверждают эти выводы.

**Дифракция на круглом отверстии.** Обозначим радиус отверстия $R$ и введем полярные координаты $r, \varphi$ на плоскости $xy$ (рис. 14.8) и $r_0, \varphi_0$ на плоскости $x_0y_0$. Для вычисления дифракционного поля воспользуемся, как и прежде, формулой (14.6). Делая переход к полярным координатам

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, & y = r\sin\varphi, \\ x_0 = r_0\cos\varphi_0, & y_0 = r_0\sin\varphi_0 \end{cases}$$

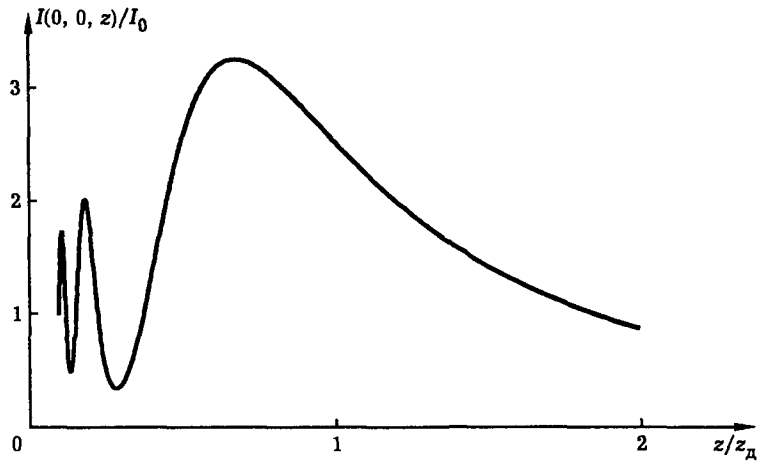



Рис. 14.7. Дифракция плоской световой волны на квадратном отверстии: распределение интенсивности света вдоль оси пучка

и записывая элемент площади в виде $d\sigma = r\,dr\,d\varphi$, получим

$$\mathcal{E}(r_0, \varphi_0, z) = \frac{i}{\lambda z} e^{-ikz} \int\limits_0^\infty r\,dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\, \mathcal{E}_0(r, \varphi) \exp\left\{-\frac{ik}{2z}\left[r_0^2 + r^2 - 2rr_0\cos(\varphi - \varphi_0)\right]\right\},$$

где $\mathcal{E}_0(r, \varphi)$ — распределение амплитуды поля в плоскости экрана с отверстием. В силу осевой симметрии этого распределения

$$\mathcal{E}_0(r, \varphi) = \mathcal{E}_0(r).$$

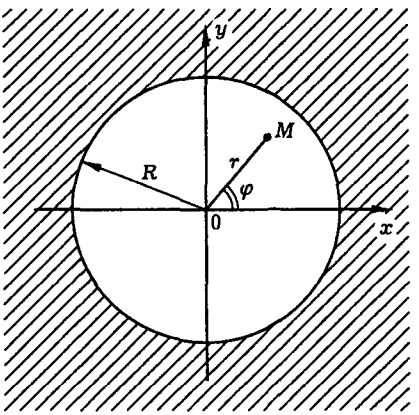



Рис. 14.8. К расчету дифракции плоской волны на круглом отверстии

При этом

$$\mathcal{E}(r_0,\varphi_0,z)=\frac{i}{\lambda z}\exp\left[-ik\left(z+\frac{r_0^2}{2z}\right)\right]\int\limits_0^\infty \mathcal{E}_0(r)\mathcal{J}(r,r_0)\exp\left(-\frac{ikr^2}{2z}\right)r\,dr,$$

где

$$\mathcal{J}(r,r_0)=\int\limits_0^{2\pi}\exp\left[\frac{ikrr_0}{z}\cos(\varphi-\varphi_0)\right]d\varphi.$$

Последний интеграл выражается через функцию Бесселя нулевого порядка $J_0(\alpha)$. По определению [7]

$$J_0(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{i\alpha\sin t}dt.$$

Вводя новую переменную

$$\psi=\frac{\pi}{2}-\varphi_0+\varphi,$$

получим

$$\mathcal{J}(r,r_0)=\int\limits_0^{2\pi}\exp\left[\frac{ikrr_0}{z}\sin\psi\right]d\psi=2\pi J_0\left(\frac{krr_0}{z}\right)$$

и, следовательно,

$$\mathcal{E}(r_0,\varphi_0,z)=\mathcal{E}(r_0,z)=$$

$$=\frac{2\pi i}{\lambda z}\exp\left[-ik\left(z+\frac{r_0^2}{2z}\right)\right]\int\limits_0^\infty \mathcal{E}_0(r)J_0\left(\frac{krr_0}{z}\right)\exp\left(-\frac{ikr^2}{2z}\right)r\,dr. \qquad (14.35)$$

Данная формула позволяет рассчитать дифракционное световое поле для любого осесимметричного начального распределения $\mathcal{E}_0(r)$. В частности, полагая

$$\mathcal{E}_0(r)=\mathcal{E}_0\begin{cases}1, & \textit{если } r\le R,\\ 0, & \textit{если } r>R\end{cases}$$

(дифракция на круглом отверстии), получим

$$\mathcal{E}(r_0,z)=\frac{2\pi i\mathcal{E}_0}{\lambda z}\exp\left[-ik\left(z+\frac{r_0^2}{2z}\right)\right]\int\limits_0^R J_0\left(\frac{krr_0}{z}\right)\exp\left(-\frac{ikr^2}{2z}\right)r\,dr. \qquad (14.36)$$

Формула (14.36) описывает распределение амплитуды дифракционного светового поля $\mathcal{E}(r_0,z)$ во всем пространстве. Ввиду сложности выражения (14.36), ограничимся далее рассмотрением поля только на оси пучка. Полагая $r_0=0$ и учитывая, что $J_0(0)=1$, получим из (14.36)

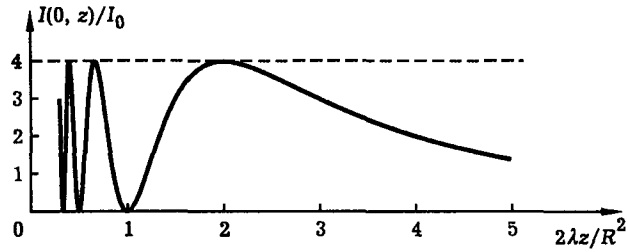



Рис. 14.9. Дифракция плоской световой волны на круглом отверстии: распределение интенсивности света вдоль оси пучка; $z$ — расстояние от экрана с отверстием, $R$ — радиус отверстия, $I_0$ — интенсивность падающей волны, $\lambda$ — длина световой волны

$$\mathcal{E}(0,z) = 2i\mathcal{E}_0 \exp\left[-ik\left(z + \frac{R^2}{4z}\right)\right] \sin(kR^2/4z).$$

Соответственно интенсивность излучения на оси пучка определяется формулой

$$I(0,z) = 4I_0 \sin^2(kR^2/4z), \tag{14.37}$$

где

$$I_0 = \frac{c}{8\pi}|\mathcal{E}_0|^2,$$

$I_0$ — интенсивность падающей плоской волны. Полученный результат (14.37) показывает, что при дифракции плоской волны на круглом отверстии интенсивность света на оси пучка осциллирует в пределах от нуля до величины, вчетверо превышающей интенсивность падающей плоской волны. Зависимость $I(0,z)$ показана на рис. 14.9.

**Дифракция гауссова пучка.** Анализ дифракции гауссова светового пучка проведем на основе общей формулы (14.35). Полагая в этой формуле

$$\mathcal{E}_0(r) = \mathcal{E}_0 \exp(-r^2/2\rho_0^2), \tag{14.38}$$

получим

$$\mathcal{E}(r_0,z) = \frac{\mathcal{E}_0 \exp(-ikz)}{(1 + z/ik\rho_0^2)} \exp\left(-\frac{r_0^2/2\rho_0^2}{1 + z/ik\rho_0^2}\right). \tag{14.39}$$

(при вычислении использован интеграл 6.631.1 из справочника [13]). Данная формула описывает распределение дифракционного поля во всем пространстве. В частности, на оси пучка

$$\mathcal{E}(0,z) = \frac{\mathcal{E}_0 \exp(-ikz)}{(1 + z/ik\rho_0^2)}. \tag{14.40}$$

Соответственно интенсивность излучения на оси

$$I(0,z) = \frac{I_0}{1 + (z/z_д)^2}, \tag{14.41}$$

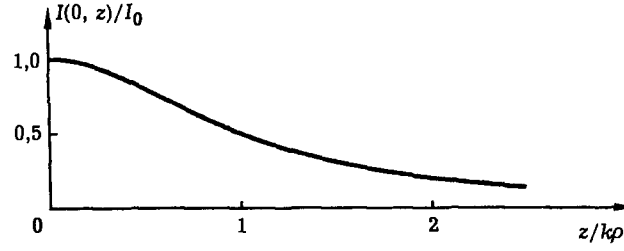



Рис 14 10 Дифракция гауссова пучка распределение интенсивности света вдоль оси пучка, $z$ — координата, измеряемая вдоль оси пучка, $\rho_0$ — начальный радиус пучка, $I_0$ — интенсивность света на оси пучка в плоскости $z = 0$, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, $\lambda$ — длина световой волны

где

$$z_д = k\rho_0^2, \tag{14.42}$$

$z_д$ — дифракционная длина пучка, $I_0$ — интенсивность, определяемая формулой $I_0 = c|\mathcal{E}_0|^2/8\pi$ График зависимости $I(0, z)$ представлен на рис 14 10 Заметим, что, в отличие от дифракции на круглом отверстии, в данном случае нет осцилляций интенсивности вдоль оси пучка — интенсивность на оси убывает с расстоянием монотонно

# Литература


1 *Гудмен Дж* Введение в фурье-оптику — М Мир, 1970
2 *Виноградова М Б , Руденко О В , Сухоруков А П* Теория волн — М Наука, 1979
3 *Борн М , Вольф Э* Основы оптики — М Наука 1973
4 *Ландсберг Г С* Оптика — М Наука, 1976
5 *Матвеев А Н* Оптика — М Высшая школа, 1985
6 *Ахманов С А , Дьяков Ю Е , Чиркин А С* Введение в статистическую радиофизику и оптику — М Наука, 1981
7 *Янке Е , Эмде Ф , Леш Ф* Специальные функции — М Наука, 1977
8 Справочник по специальным функциям/Под ред М Абрамовица и И Стиган — М Наука, 1979
9 *Ландау Л Д , Лифшиц Е М* Теория поля — М Наука, 1973
10 *Ильичева Е Н , Кудеяров Ю А , Матвеев А Н* Методика решения задач оптики — М Изд-во МГУ, 1981
11 *Дьяков Ю Е , Никитин С Ю* Задачи по статистической радиофизике и оптике — М Изд-во МГУ, 1985
12 Физическая энциклопедия/Под ред А М Прохорова — М СЭ, 1988
13 *Градштейн И С , Рыжик И М* Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений — М Наука, 1971

# Лекция 15

# Дифракция в дальней зоне

*Формирование устойчивой картины дифракции в дальней зоне. Дифракция Фраунгофера как пространственное преобразование Фурье. Дифракция Фраунгофера на одномерных структурах. Дифракция на щели. Дифракция Фраунгофера на двумерных структурах. Дифракция на прямоугольном и круглом отверстиях. Дифракция гауссова пучка.*

Лекция посвящена фраунгоферовой дифракции. Показано, что при распространении светового пучка в дальней зоне возникает устойчивая картина дифракции, повторяющая по форме угловой спектр поля. Рассматриваются примеры фраунгоферовой дифракции на одномерных и двумерных структурах. Сопоставляются данные теории и эксперимента.

**Формирование устойчивой картины дифракции в дальней зоне.** Опыты по дифракции световых пучков показывают, что в дальней зоне угловое распределение интенсивности излучения перестает зависеть от координаты $z$, отсчитываемой вдоль оси пучка. Картина дифракции приобретает устойчивую структуру, вид которой зависит только от распределения поля в начальном сечении. Дифракцию в дальней зоне называют *дифракцией Фраунгофера*. Рассмотрим особенности дифракции в дальней зоне с позиций теории, изложенной выше (см. лекцию 14).

Пусть плоская монохроматическая световая волна нормально падает на экран с отверстием, расположенный в плоскости $z = 0$ (рис. 15.1). Вычислим распределение интенсивности излучения в некоторой плоскости $x_0, y_0$, параллельной экрану с отверстием и расположенной на достаточно большом расстоянии $z$ от него.

Используя формулы (14.2), (14.3), запишем дифракционное световое поле в виде

$$\mathcal{E}(x_0, y_0, z) = \frac{i}{\lambda} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(x, y) \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} dx\, dy, \tag{15.1}$$

где $\mathcal{E}_0(x, y)$ — распределение поля в сечении $z = 0$, определяемое формой отверстия в экране, $\lambda$ — длина световой волны, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число,

$$\rho = \sqrt{z^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \tag{15.2}$$

$x, y$ — координаты некоторой точки $M$ в плоскости экрана с отверстием, $x_0, y_0, z$ — координаты точки наблюдения поля.

Пусть $O$ — некоторая точка в плоскости экрана с отверстием, которую мы примем за начало отсчета, а $b$ — расстояние от точки $O$ до точки наблюдения поля $P$. Как видно из рис. 15.1,

$$b = \sqrt{z^2 + x_0^2 + y_0^2}. \tag{15.3}$$

Следовательно, в параксиальном приближении, когда

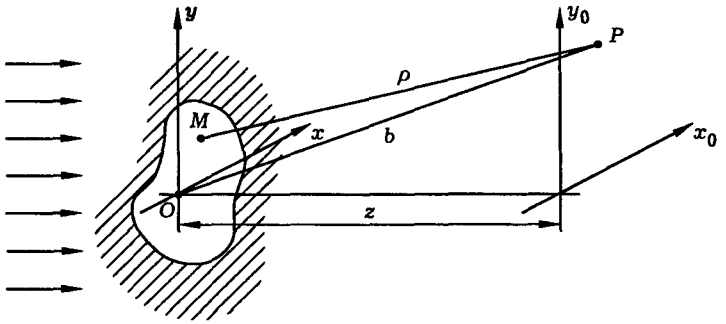



Рис. 15.1. Постановка задачи дифракции

$$z \gg x, y, x_0, y_0, \tag{15.4}$$

можно записать

$$\rho = b + \frac{x^2 + y^2}{2b} - \frac{xx_0 + yy_0}{b}. \tag{15.5}$$

Формула (15.5) отличается от (14.5) лишь тем, что в качестве нулевого приближения величины $\rho$ выбрана величина $b$, а не $z$. Такое уточнение необходимо сделать из-за того, что в дальней зоне размеры картины дифракции, вообще говоря, весьма велики, а потому разница между величинами $b$ и $z$ становится существенной.

Подставив (15.5) в (15.1), получим

$$\mathcal{E}(x_0, y_0, z) = \frac{i}{\lambda b} \exp(-ikb) \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(x, y) \exp\left[-\frac{ik}{2b}(x^2 + y^2)\right] \exp\left[\frac{ik}{b}(xx_0 + yy_0)\right] dx\, dy. \tag{15.6}$$

Здесь, как обычно, мы пренебрегли отличием $\rho$ от $b$ в знаменателе подынтегрального выражения.

В частности, при дифракции на одномерных структурах

$$\mathcal{E}(x_0, z) = \frac{(i+1)}{\sqrt{2\lambda b}} \exp(-ikb) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(x) \exp\left(-\frac{ik}{2b}x^2\right) \exp\left(\frac{ik}{b}xx_0\right) dx \tag{15.7}$$

(ср. с формулой (14.12)), или

$$\mathcal{E}(\theta, z) = \frac{(i+1)}{\sqrt{2\lambda b}} \exp(-ikb) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(x) \exp\left(-\frac{ik}{2b}x^2\right) \exp(ikx \sin\theta)\, dx, \tag{15.8}$$

где введен угол $\theta$, определяемый формулой

$$\sin\theta = x_0/b, \tag{15.9}$$

и имеющий смысл угловой координаты точки наблюдения поля.

Формулы (15.6)–(15.8) соответствуют френелевскому приближению. Из формулы (15.8) следует, что угловое распределение поля в дифракционной картине, вообще говоря, меняется по мере изменения расстояния $z$. Однако в области больших $z$ это изменение становится все более и более слабым и, наконец, при

$$kd^2/2b \ll 1, \tag{15.10}$$

где $d$ — начальный поперечный размер пучка, устанавливается устойчивое угловое распределение поля, определяемое формулой

$$\mathcal{E}(\theta) = \frac{(i+1)}{\sqrt{2\lambda b}} e^{-ikb} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(x) e^{ikx\sin\theta} dx. \tag{15.11}$$

Используя (15.3), (15.4), неравенство (15.10) можно представить в виде

$$z \gg z_{\text{д}}, \tag{15.12}$$

где параметр

$$z_{\text{д}} = kd^2/2 \tag{15.13}$$

называется *дифракционной длиной пучка*. Область пространства, определяемая условием (15.12), называется *дальней зоной* дифракции или *зоной Фраунгофера*. Таким образом, мы показали, что в дальней зоне формируется устойчивое угловое распределение поля, не меняющееся при дальнейшем распространении светового пучка.

Выражение для дифракционного светового поля (15.11) носит название дифракционного интеграла в *приближении Фраунгофера*. Это приближение справедливо в дальней дифракционной зоне.

**Дифракция Фраунгофера как пространственное преобразование Фурье.** Разумеется, возникающая в дальней зоне картина дифракции представляет для оптики первостепенный интерес, хотя бы потому, что вследствие устойчивости этой картины ее проще всего наблюдать экспериментально.

С математической точки зрения выражение (15.11) представляет собой *пространственный интеграл Фурье*. По аналогии с интегралом Фурье по времени (см. дополнение 4) величину $k\sin\theta$ назовем *пространственной частотой*. Физический смысл этого понятия раскрывает рис. 15.2, из которого видно, что величина

$$k_x = k\sin\theta \tag{15.14}$$

есть *поперечная компонента волнового вектора*, направленного из точки $O$ (отверстия) в точку наблюдения поля $P$.

Формула (15.14) показывает, что между пространственной частотой $k_x$ и угловой координатой $\theta$ точки наблюдения поля имеется взаимно однозначное соответствие. Это позволяет записать комплексную амплитуду поля в точке наблюдения следующим образом:

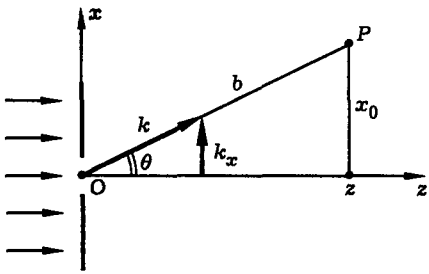



Рис. 15.2. К анализу физического смысла пространственной частоты

$$\mathcal{E}(P) = \frac{(1+i)}{\sqrt{2\lambda b}} e^{-ikb} \mathcal{E}_0(k_x), \tag{15.15}$$

где

$$\mathcal{E}_0(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(x) e^{ik_x x} dx, \tag{15.16}$$

$\mathcal{E}_0(k_x)$ — *пространственная спектральная амплитуда,* соответствующая распределению поля $\mathcal{E}_0(x)$.

Итак, дифракционное поле в дальней зоне пропорционально пространственной фурье-амплитуде исходного пучка. Используя (15.15), нетрудно вычислить распределение интенсивности излучения в дальней зоне:

$$I(P) = \frac{c}{8\pi} |\mathcal{E}(P)|^2. \tag{15.17}$$

Подставив (15.15) в (15.17), получим

$$I(P) = \frac{c}{8\pi} \frac{1}{\lambda b} S_0(k_x), \tag{15.18}$$

где

$$S_0(k_x) = |\mathcal{E}_0(k_x)|^2, \tag{15.19}$$

$S_0(k_x)$ — *пространственная спектральная плотность,* или *угловой спектр* излучения.

Итак, угловое распределение интенсивности излучения в дальней зоне повторяет форму углового спектра светового пучка. Этот вывод раскрывает физический смысл фраунгоферовой дифракции как *пространственного разложения ограниченного светового пучка на плоские волны.* Картину преобразования углового спектра при дифракции плоской волны на отверстии иллюстрирует рис. 15.3.

Согласно спектральным представлениям, поперечная компонента волнового вектора возникает вследствие ограничения апертуры (т. е. поперечных размеров) пучка отверстием. Представление ограниченного пучка в виде набора

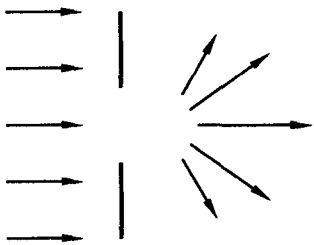


Рис. 15.3. Картина преобразования углового спектра при дифракции плоской волны на отверстии

плоских волн, распространяющихся в разных направлениях, вполне аналогично представлению импульса конечной длительности в виде суммы гармонических колебаний разных частот.

**Дифракция Фраунгофера на одномерных структурах. Дифракция на щели.** Теперь обратимся к конкретным примерам фраунгоферовой дифракции. Начнем с рассмотрения дифракции плоской волны на одномерной структуре — щели шириной $d$ (рис. 15.4). Полагая

$$\mathcal{E}_0(x) = \mathcal{E}_0 \begin{cases} 1, & |x| \le d/2, \\ 0, & |x| > d/2, \end{cases} \tag{15.20}$$

по формуле (15.16) получим

$$\mathcal{E}_0(k_x) = \mathcal{E}_0 \int\limits_{-d/2}^{d/2} \exp(ik_x x)\, dx = \mathcal{E}_0 d \operatorname{sinc}(k_x d/2), \tag{15.21}$$

где использовано стандартное обозначение

$$\operatorname{sinc}(x) \equiv \frac{\sin(x)}{x}. \tag{15.22}$$

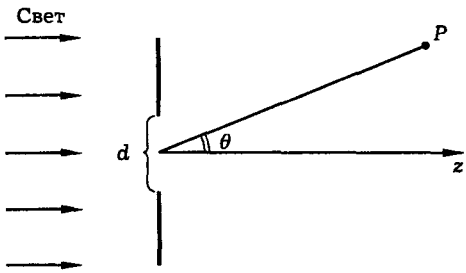



Рис. 15.4. К расчету картины дифракции света на щели

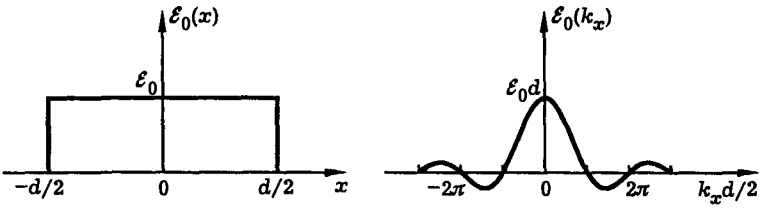



Рис. 15.5. Начальное распределение амплитуды поля $\mathcal{E}_0(x)$ и пространственная спектральная амплитуда $\mathcal{E}_0(k_x)$ при дифракции плоской волны на щели шириной $d$

Графики функций $\mathcal{E}_0(x)$ и $\mathcal{E}_0(k_x)$ показаны на рис. 15.5. По формулам (15.15), (15.17) находим амплитуду поля

$$\mathcal{E}(P) = \mathcal{E}_0 \frac{(1+i)d}{\sqrt{2\lambda b}} \mathrm{e}^{-ikb} \operatorname{sinc}(k_x d/2) \tag{15.23}$$

и интенсивность света в точке $P$:

$$I(P) = I_{\max} \operatorname{sinc}^2(k_x d/2). \tag{15.24}$$

Здесь использованы обозначения

$$I_{\max} = I_0 d^2/\lambda b, \qquad I_0 = \frac{c}{8\pi}|\mathcal{E}_0|^2, \tag{15.25}$$

где $I_0$ — интенсивность падающей волны.

Подставляя (15.14) в (15.24), находим угловое распределение интенсивности излучения в дальней зоне

$$I(\theta) = I_{\max} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{1}{2} kd \sin\theta\right), \tag{15.26}$$

или

$$I(\theta) = I_{\max} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}\right). \tag{15.27}$$

График распределения (15.27) показан на рис. 15.6. Заметим, что дифракционная расходимость пучка в дальней зоне оказывается порядка

$$\Delta\theta = \lambda/d \tag{15.28}$$

в соответствии с общим результатом, полученным выше (см. лекцию 13).

Теоретически рассчитанное угловое распределение интенсивности излучения, показанное на рис. 15.6, можно проверить экспериментально. На лекции демонстрируется дифракция излучения аргонового лазера на щели (рис.15.7). Наблюдаемая дифракционная картина имеет вид центральной светлой полосы и боковых чередующихся темных и светлых полос убывающей яркости. В лекционной демонстрации имеется возможность плавно изменять ширину щели с помощью специального микрометрического винта. При этом наблюдается изменение дифракционной картины, которое происходит в соответствии с предсказанием теории: чем у́же щель, тем шире светлые полосы на экране и,

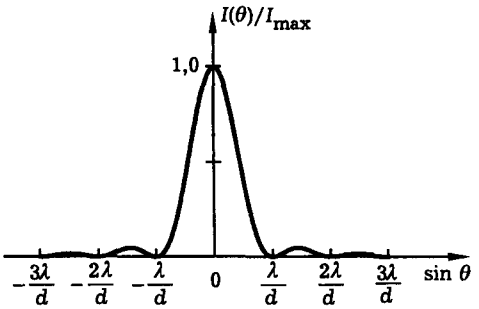



Рис. 15.6. Дифракция плоской волны на щели: угловое распределение интенсивности света в дальней зоне; $d$ — ширина щели, $\lambda$ — длина световой волны

следовательно, тем больше угловая расходимость излучения в дальней зоне. Таким образом, изложенная выше теория фраунгоферовой дифракции получает экспериментальное подтверждение.

**Дифракция Фраунгофера на двумерных структурах.** Изложенную выше теорию нетрудно обобщить на случай дифракции световой волны на двумерной структуре. Постановку задачи дифракции иллюстрирует рис. 15.1. Дифракционное световое поле в приближении Френеля (слаборасходящийся пучок) описывает формула (15.6). В дальней дифракционной зоне, определяемой условием

$$z \gg z_{\text{д}} = kd^2/2, \tag{15.29}$$

где $z_{\text{д}}$ — дифракционная длина, $k$ — волновое число, $d$ — максимальный поперечный размер отверстия в экране, формула (15.6) упрощается и приобретает вид

$$\mathcal{E}(P) = \frac{i}{\lambda b}\mathrm{e}^{-ikb}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}_0(x,y)\exp\left[\frac{ik}{b}(xx_0+yy_0)\right]dx\,dy. \tag{15.30}$$

Введем угловые координаты $\theta$ и $\psi$ точки наблюдения поля $P$, определив их следующим образом (рис. 15.8):

$$\sin\theta = x_0/b, \qquad \sin\psi = y_0/b, \tag{15.31}$$

а также пространственные частоты

$$k_x = k\sin\theta, \qquad k_y = k\sin\psi. \tag{15.32}$$

Тогда формулу (15.30) можно переписать в виде

$$\mathcal{E}(P) = \frac{i}{\lambda b}\mathrm{e}^{-ikb}\mathcal{E}_0(k_x,k_y), \tag{15.33}$$

где

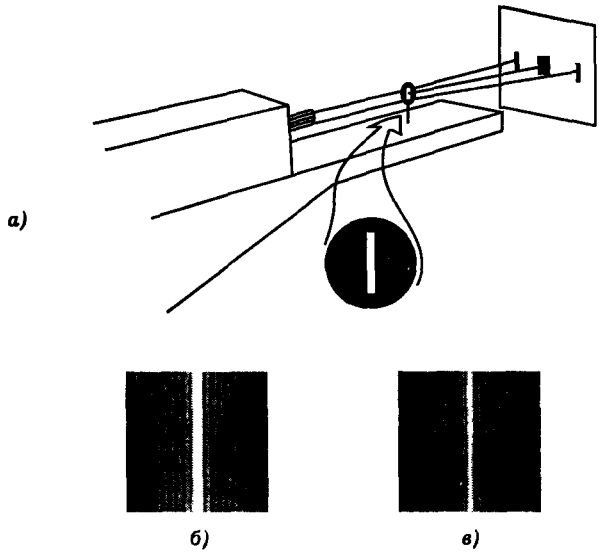



Рис. 15.7. Опыт по наблюдению дифракции света на щели. Схема опыта (*а*), вид дифракционной картины при узкой (*б*) и широкой (*в*) щели

$$\mathcal{E}_0(k_x, k_y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(x, y) \exp\left[i(k_x x + k_y y)\right] dx\, dy, \tag{15.34}$$

$\mathcal{E}_0(k_x, k_y)$ — пространственная спектральная амплитуда, соответствующая двумерному начальному распределению поля $\mathcal{E}_0(x, y)$. Итак, при дифракции на двумерной структуре распределение поля в дальней зоне имеет вид двумерного преобразования Фурье исходного распределения поля $\mathcal{E}_0(x, y)$.

В соответствии с (15.17), (15.33) интенсивность света в точке наблюдения выражается формулой

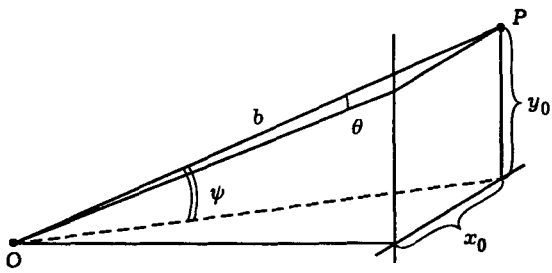



Рис. 15.8. Угловые координаты точки наблюдения поля

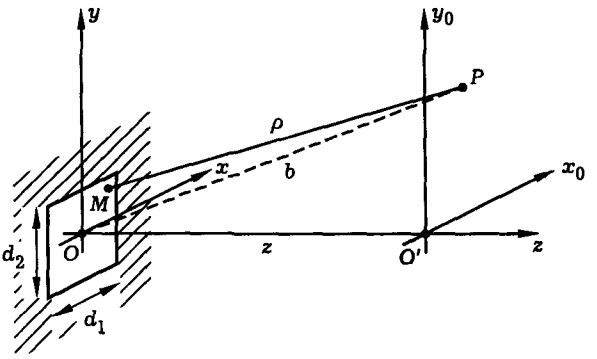



Рис. 15.9. К расчету картины дифракции света на прямоугольном отверстии

$$I(P) = \frac{c}{8\pi}\frac{1}{(\lambda b)^2}S_0(k_x, k_y), \tag{15.35}$$

где

$$S_0(k_x, k_y) = |\mathcal{E}_0(k_x, k_y)|^2, \tag{15.36}$$

$S_0(k_x, k_y)$ — пространственная спектральная плотность или угловой спектр излучения. Таким образом, как и в одномерном случае, пространственное распределение интенсивности излучения в дальней зоне имеет форму углового спектра излучения.

**Дифракция на прямоугольном отверстии.** Пусть плоская монохроматическая световая волна дифрагирует на прямоугольном отверстии, длины сторон которого равны $d_1$ и $d_2$ (рис. 15.9). Записав начальное распределение амплитуды поля в виде

$$\mathcal{E}_0(x, y) = \mathcal{E}_0 \begin{cases} 1, & |x| \le d_1/2,\ |y| \le d_2/2, \\ 0, & \textit{вне этой области} \end{cases} \tag{15.37}$$

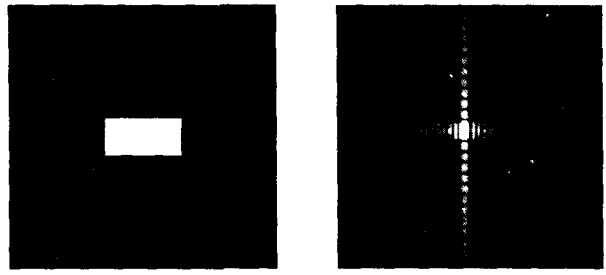
и подставив (15.37) в (15.34), получим

$$\mathcal{E}_0(k_x, k_y) = \mathcal{E}_0 \int\limits_{-d_1/2}^{d_1/2} dx \int\limits_{-d_2/2}^{d_2/2} dy\, \exp\left[i(k_x x + k_y y)\right] =$$

$$= \mathcal{E}_0 d_1 d_2\, \mathrm{sinc}(k_x d_1/2)\, \mathrm{sinc}(k_y d_2/2). \tag{15.38}$$

Подставляя (15.38) в (15.35), (15.36) и учитывая (15.32), получим следующую формулу для углового распределения интенсивности излучения в дальней зоне:

$$I(\theta, \psi) = I_{\max}\, \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi d_1 \sin\theta}{\lambda}\right) \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi d_2 \sin\psi}{\lambda}\right), \tag{15.39}$$



а) б)

Рис. 15.10. Дифракция Фраунгофера на прямоугольном отверстии. Форма отверстия (*а*), картина дифракции (*б*)

где

$$I_{\max} = I_0(d_1 d_2/\lambda b)^2, \tag{15.40}$$

$I_0$ — интенсивность падающей волны.

Экспериментально наблюдаемая картина дифракции на прямоугольном отверстии полностью совпадает с предсказаниями теории (рис. 15.10).

**Дифракция на круглом отверстии.** Введем полярные координаты $r, \varphi$ на плоскости отверстия $x, y$ и $r_0, \varphi_0$ на плоскости наблюдения $x_0, y_0$ (рис. 15.11). Тогда можно написать

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \quad & x_0 &= r_0\cos\varphi_0, \\ y &= r\sin\varphi, \quad & y_0 &= r_0\sin\varphi_0. \end{aligned} \tag{15.41}$$

Далее введем угол $\theta$ между осью $z$ и направлением из центра отверстия на точку наблюдения (рис. 15.12). Из рисунка видно, что

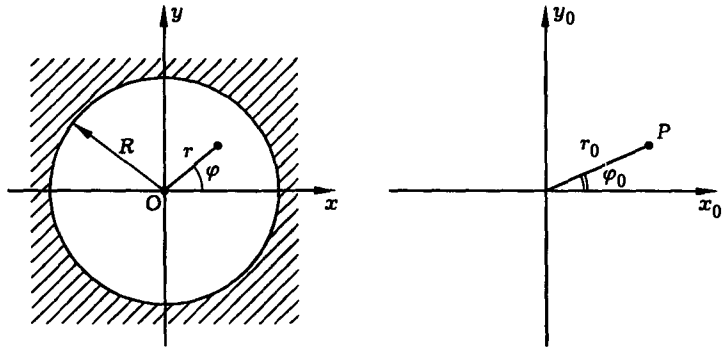



Рис. 15.11. Система координат для расчета дифракции на круглом отверстии

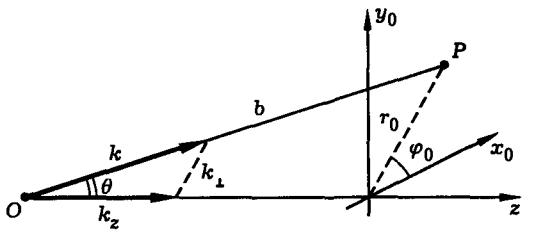



Рис. 15.12. К расчету дифракции на круглом отверстии

$$\sin\theta = r_0/b. \tag{15.42}$$

Обозначим

$$k\sin\theta = k_\perp. \tag{15.43}$$

Тогда величины $k_x, k_y$, входящие в формулу (15.34), можно записать следующим образом:

$$k_x = kx_0/b = k_\perp\cos\varphi_0, \qquad k_y = ky_0/b = k_\perp\sin\varphi_0. \tag{15.44}$$

Из (15.41), (15.44) следует, что

$$k_x x + k_y y = k_\perp r\cos(\varphi - \varphi_0). \tag{15.45}$$

В новых переменных пространственная спектральная амплитуда поля принимает вид

$$\mathcal{E}(k_\perp, \varphi_0) = \int\limits_0^\infty r\,dr \int\limits_0^{2\pi} \mathcal{E}_0(r,\varphi)\exp\left[ik_\perp r\cos(\varphi - \varphi_0)\right]d\varphi. \tag{15.46}$$

Ограничимся рассмотрением случая осесимметричного начального распределения поля, полагая

$$\mathcal{E}_0(r,\varphi) = \mathcal{E}_0(r). \tag{15.47}$$

Подставив (15.47) в (15.46), получим

$$\mathcal{E}(k_\perp, \varphi_0) = \int\limits_0^\infty \mathcal{E}_0(r) r\,dr \int\limits_0^{2\pi} \exp\left[ik_\perp r\cos(\varphi - \varphi_0)\right]d\varphi. \tag{15.48}$$

Используя табличный интеграл

$$\int\limits_0^{2\pi} \exp\left[i\alpha\cos(\varphi - \varphi_0)\right]d\varphi = 2\pi J_0(\alpha), \tag{15.49}$$

где $J_0(\alpha)$ — функция Бесселя нулевого порядка, получаем

$$\mathcal{E}(k_\perp) = 2\pi \int_0^\infty \mathcal{E}_0(r) J_0(k_\perp r) r\, dr. \tag{15.50}$$

Преобразование вида (15.50) называется *преобразованием Фурье–Бесселя* или *преобразованием Ханкеля* нулевого порядка. Таким образом, мы показали, что в случае изотропного начального распределения поля двумерное преобразование Фурье сводится к преобразованию Ханкеля.

В формуле (15.50) функция $\mathcal{E}_0(r)$ описывает начальное осесимметричное распределение поля. В частности, для круглого отверстия радиуса $R$

$$\mathcal{E}_0(r) = \mathcal{E}_0 \begin{cases} 1, & r \le R, \\ 0, & r > R. \end{cases} \tag{15.51}$$

При этом

$$\mathcal{E}(k_\perp) = \mathcal{E}_0 2\pi \int_0^R J_0(k_\perp r) r\, dr = \mathcal{E}_0 2\pi R^2 \frac{J_1(k_\perp R)}{k_\perp R}. \tag{15.52}$$

Здесь мы использовали табличный интеграл

$$\int_0^x x J_0(x)\, dx = x J_1(x). \tag{15.53}$$

Вычислим угловое распределение интенсивности света в дифракционной картине. Используя формулы (15.35), (15.36), (15.52) и полагая $\theta \ll 1$, $\sin\theta = \theta$, $k_\perp = k \sin\theta = k\theta$, получим

$$I(\theta) = I_{\max} \left[ \frac{J_1(2\pi\theta R/\lambda)}{\pi\theta R/\lambda} \right]^2, \tag{15.54}$$

где

$$I_{\max} = I_0 \left( \frac{\pi R^2}{\lambda b} \right)^2, \tag{15.55}$$

$I_0$ — интенсивность падающей волны. Вид распределения (15.54) показан на рис. 15.13, это распределение называется *картиной Эри*. Полная угловая ширина центрального максимума дифракционной картины (по основанию)

$$\Delta\theta = 1{,}22\lambda/R, \tag{15.56}$$

где $\lambda$ — длина световой волны, $R$ — радиус отверстия.

На лекции демонстрируется фраунгоферова дифракция на отверстиях прямоугольной и круглой формы. Схема эксперимента аналогична показанной на рис. 15.7, в качестве источника света используется непрерывный аргоновый лазер. В опыте с прямоугольным отверстием дифракционная картина имеет вид крестообразной сетки пятен, яркость которых убывает от центра к периферии

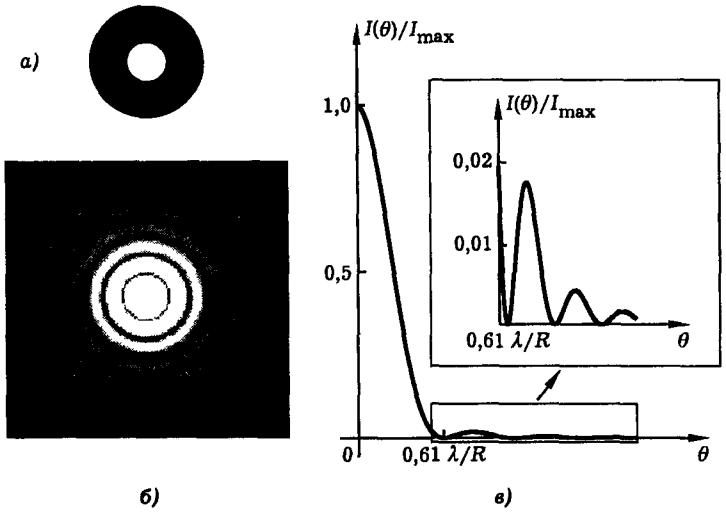



Рис. 15.13. Фраунгоферова дифракция на круглом отверстии. Вид отверстия (*а*), наблюдаемая дифракционная картина ("картина Эри") (*б*), теоретически рассчитанное угловое распределение интенсивности света в дифракционной картине (*в*)

картины (рис. 15.10). В опыте с круглым отверстием наблюдаемая дифракционная картина имеет вид центрального светлого пятна круглой формы, окруженного концентрическими темными и светлыми кольцами убывающей яркости (рис. 15.13). В обоих случаях наблюдаемые картины хорошо согласуются с результатами теоретического расчета.

**Дифракция гауссова пучка.** Излучение лазера, как правило, имеет гауссово распределение интенсивности по поперечному сечению пучка. Рассчитаем картину дифракции в дальней зоне для гауссова пучка. Полагая

$$\mathcal{E}_0(r) = \mathcal{E}_0 \exp(-r^2/2\rho_0^2), \tag{15.57}$$

по формуле (15.50) получим

$$\mathcal{E}(k_\perp) = \mathcal{E}_0 2\pi\rho_0^2 \exp(-k_\perp^2\rho_0^2/2). \tag{15.58}$$

Полагая далее $\theta \ll 1$, $k_\perp = k\theta$, найдем угловое распределение интенсивности излучения в дальней зоне

$$I(\theta) = I_{max} \exp\left[-(2\pi\theta\rho_0/\lambda)^2\right], \tag{15.59}$$

где

$$I_{max} = I_0 \left(\frac{2\pi\rho_0^2}{\lambda b}\right)^2, \qquad I_0 = \frac{c}{8\pi}|\mathcal{E}_0|^2, \tag{15.60}$$

$I_0$ — интенсивность на оси пучка при $z = 0$, $\rho_0$ — начальный радиус пучка. Таким образом, профиль интенсивности гауссова пучка сохраняет свою форму в процессе дифракции. По мере распространения пучка его радиус увели-

чивается, а интенсивность на оси уменьшается. Этот вывод подтверждается наблюдением свободной дифракции лазерного пучка.

## Литература

1. *Гудмен Дж.* Введение в фурье-оптику. — М.: Мир, 1970.
2. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. — М.: Наука, 1979.
3. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. — М.: Наука, 1973.
4. *Ландсберг Г. С.* Оптика. — М.: Наука. 1976.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. — М.: Наука, 1973.
6. *Алешкевич В. А., Киселев Д. Ф., Корчажкин В. В.* Лазеры в лекционном эксперименте. — М., Изд-во МГУ, 1985.
7. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. — М.: Наука, 1977.
8. Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. — М.: Наука, 1979.

# Лекция 16

# Дифракция на периодических структурах

*Дифракционные решетки. Физика дифракции света на решетке. Уравнение дифракционной решетки. Математическое описание дифракции плоской волны на решетке. Синусоидальная решетка. Ограниченная синусоидальная решетка. Прямоугольная амплитудная решетка. Дифракция на двумерных периодических структурах. Дифракция на трехмерных периодических структурах. Дифракция рентгеновских лучей в кристаллах. Рентгеновский структурный анализ.*

Дифракция света на периодических структурах отличается резким, контрастным характером наблюдаемой дифракционной картины. Данное явление используется для измерений длины световой волны, а также для анализа спектрального состава оптического излучения. В опытах по дифракции лазерного луча на дифракционной решетке наиболее отчетливо проявляется основная закономерность фраунгоферовой дифракции — формирование в дальней зоне устойчивой угловой структуры поля, повторяющей форму углового спектра пучка. Дифракция рентгеновских лучей в кристаллах доказывает волновую природу этих лучей и является мощным инструментом исследования структуры кристаллов.

**Дифракционные решетки.** Дифракционная решетка представляет собой пространственную периодическую структуру, период которой соизмерим с длиной световой волны. Поскольку пространственная периодическая структура характеризуется дискретным угловым спектром, можно ожидать, что плоская волна, прошедшая через решетку, преобразуется в дискретный набор плоских волн, распространяющихся под разными углами относительно направления распространения исходной волны. Опыт по дифракции лазерного пучка на дифракционной решетке подтверждает этот вывод: картина дифракции имеет характерный вид дискретного набора — "веера" световых лучей (рис. 16.1).

Различают пропускательные и отражательные, а также амплитудные и фазовые решетки. Пропускательные решетки работают на пропускание света, отражательные — на отражение. Амплитудные решетки пространственно модулируют амплитуду, а фазовые — фазу световой волны. Простейшая амплитудная пропускательная решетка представляет собой систему щелей в непрозрачном экране (рис. 16.2, *а*). Отражательную амплитудную решетку изготавливают путем нанесения штрихов на плоское или вогнутое зеркало (рис. 16.2, *в*). Фазовая решетка может представлять собой профилированную стеклянную пластину (пропускательная решетка — рис. 16.2, *б*) или профилированное зеркало (отражательная решетка — рис. 16.2, *г*).

**Физика дифракции света на решетке.** Элементарную теорию дифракции света на решетке можно дать на основе представлений Гюйгенса–Френеля об интерференции вторичных волн.

Рассмотрим дифракцию плоской монохроматической световой волны на периодической системе щелей, образующей амплитудную пропускательную решетку (рис. 16.3). Процесс дифракции состоит в следующем. Падающая на решетку световая волна создает в щелях когерентные (сфазированные) источники вторичных световых волн. Результирующее световое поле образуется в

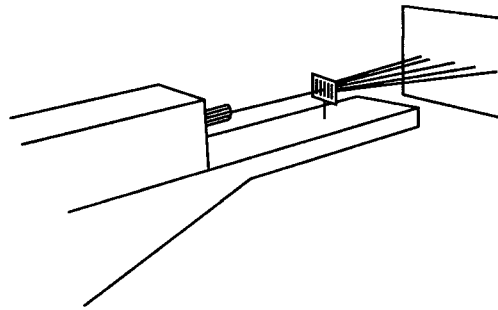


Рис. 16.1. Наблюдение дифракции лазерного пучка на дифракционной решетке

результате интерференции этих волн. На рис. 16.3 показаны волновые фронты вторичных источников Гюйгенса. Продолжая построение, можно заметить, что точки пересечения волновых фронтов, т. е. точки синфазного сложения полей, выстраиваются в прямые линии, образующие в пространстве дискретный набор направлений, вдоль которых вторичные волны усиливают друг друга. В этих направлениях и формируются главные максимумы дифракционной картины. В то же время для всех остальных направлений интерференция вторичных волн носит деструктивный характер, т. е. фазовые соотношения между волнами таковы, что волны гасят друг друга. В результате узкие главные максимумы дифракционной картины оказываются разделенными широкими темными промежутками. Так возникает "веер" лучей, наблюдаемый в опыте с лазерным пучком и дифракционной решеткой (рис. 16.1).

**Уравнение дифракционной решетки.** Пользуясь френелевскими представлениями об интерференции вторичных волн, нетрудно определить направления на главные максимумы дифракционной картины. Очевидно, это будут те направления, для которых разность хода лучей, идущих от соседних щелей, кратна длине волны.

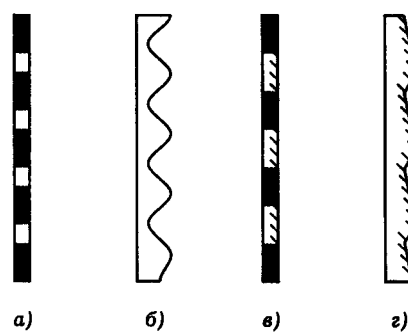



Рис. 16.2. Основные типы дифракционных решеток

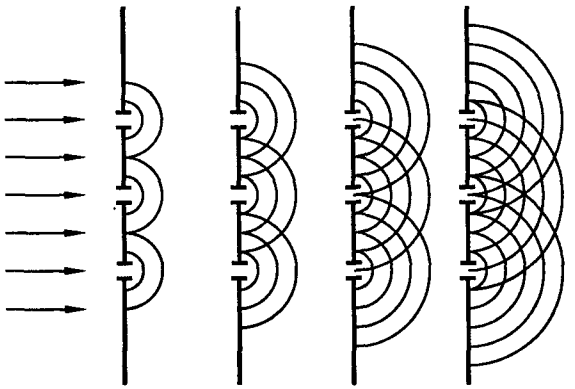


Рис. 16.3. К анализу механизма дифракции света на решетке

Обозначим период решетки буквой $d$. Из рис. 16.4 видно, что разность хода лучей, идущих от соседних щелей в направлении $\theta$, равна $d \sin\theta$. Следовательно, направления на главные максимумы определяются уравнением

$$d \sin\theta = m\lambda, \tag{16.1}$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и $\lambda$ — длина световой волны. Уравнение (16.1) называют *уравнением дифракционной решетки.*

Дифракция плоской волны на пропускательной решетке схематически показана на рис. 16.5. Лучи, идущие в разных направлениях, соответствуют различным значениям числа $m$ в формуле (16.1) или, как говорят, различным *порядкам дифракции.* Так, луч света, проходящий в прямом направлении, называют нулевым порядком, ближайшие к нему отклоненные лучи — "первым" и "минус первым" порядками и т. д. Как видно из уравнения решетки (16.1),

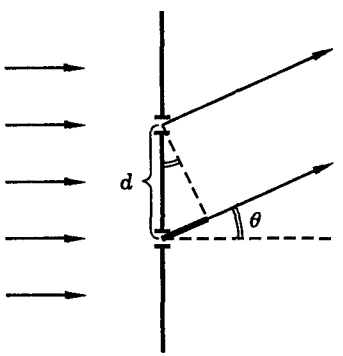



Рис. 16.4. К расчету направлений на главные максимумы дифракционной картины. Жирной линией показана разность хода лучей, идущих от соседних щелей решетки в направлении $\theta$

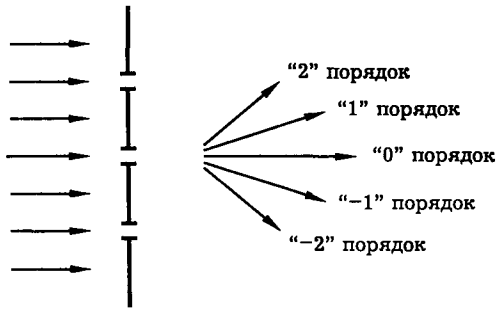



Рис. 16.5 Направления распространения световых волн при дифракции плоской волны на пропускательной дифракционной решетке

порядок дифракции указывает на то, сколько длин волн составляет разность хода лучей, идущих от двух соседних щелей решетки в данном направлении $\theta$.

Уравнение дифракционной решетки (16.1) позволяет сделать важные выводы. Во-первых, из этого уравнения следует, что решетка будет давать заметную дифракцию (значительные углы отклонения $\theta$) только в том случае, если период решетки соизмерим с длиной световой волны, т. е.

$$d \simeq \lambda \simeq 10^{-4}\ \text{см}. \tag{16.2}$$

Следовательно, оптическая дифракционная решетка должна иметь число штрихов (щелей) на миллиметр порядка $10^2 - 10^3$. Изготовить такую решетку — сложная техническая задача. Поэтому неслучайно, что первые дифракционные решетки хорошего качества появились лишь в XIX в. Из (16.1) следует, что решетка с мелким периодом должна отклонять лучи сильнее, чем решетка с крупным периодом. Вместе с тем, решетка со слишком мелким периодом (период меньше длины волны) вообще не будет давать дифракции, так как согласно (16.1) через такую решетку может проходить только неотклоненная волна ($m = 0$, $\theta = 0$).

Во-вторых, из уравнения (16.1) следует, что положение главных максимумов дифракционной картины зависит от длины волны. Поэтому, если направить на решетку пучок немонохроматического излучения, то разные спектральные составляющие излучения будут отклоняться решеткой на разные углы. Отсюда вытекает возможность использовать дифракционную решетку как спектральный прибор, который, подобно призме, осуществляет пространственное разложение немонохроматического излучения по длинам волн.

Оба эти вывода подтверждаются экспериментом, в котором пучок излучения аргонового лазера пропускается через дифракционные решетки с разным числом штрихов на миллиметр (рис. 16.6). Последовательно вставляя в лазерный пучок разные решетки, можно наблюдать увеличение углов отклонения лучей при уменьшении периода решетки. Так, при использовании решетки с числом штрихов 50/мм наблюдаем на экране большое количество дифракционных максимумов, отстоящих друг от друга на небольшие углы. Если вблизи решетки создать мутную среду, например напустить табачного дыма, то становится отчетливо виден "веер" световых лучей, распространяющихся от решетки по разным направлениям. Решетка с числом штрихов 200/мм дает значительно более редкую картину максимумов, при этом число видимых максимумов ста-

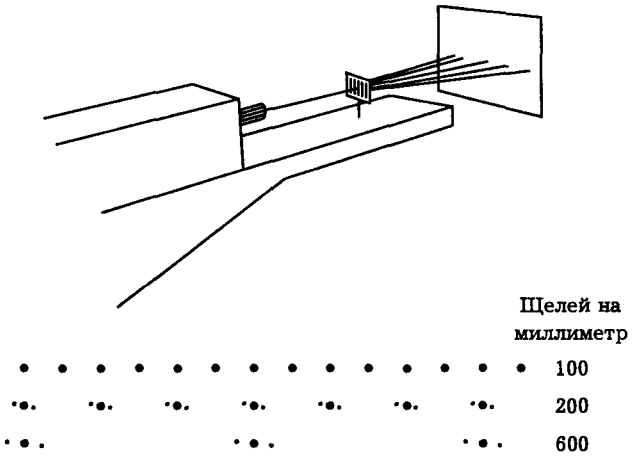



Рис. 16.6. Опыт по наблюдению дифракции света на дифракционной решетке и вид дифракционных картин, наблюдаемых при использовании решеток с разным числом щелей на миллиметр

новится значительно меньше. Наконец, решетка с числом штрихов 600/мм дает всего 3–4 максимума, разнесенных на большие углы. В последнем случае хорошо заметна спектральная структура излучения аргонового лазера (зеленые и желто-зеленые пятна). Из этого опыта видно, что дифракционная решетка с достаточно малым периодом может работать как сильный спектральный прибор — анализатор спектра. Именно в этом качестве дифракционные решетки используются в современных спектрометрах.

Дифракционная решетка была изобретена в 1821 г. Фраунгофером. Первые решетки Фраунгофер изготавливал из проволоки, намотанной на два параллельно расположенных винта. Таким образом ему удалось получить решетки с числом штрихов от 40 до 340 на дюйм. Уже с этими решетками Фраунгофер определил длину волны D-линии натрия — 5886 Å. Для изготовления более совершенных решеток Фраунгофер перешел к нанесению штрихов на тонком золотом слое, покрывавшем стекло, а затем непосредственно на стекле (алмазом). Лучшая решетка Фраунгофера была шириной в 1/2 дюйма и имела период около 3 мкм (8000 штрихов на дюйм). Фраунгофер указал на принципиальную возможность изготовления отражательных решеток, хотя все его решетки работали как пропускающие.

Переход от примитивных решеток Фраунгофера к современным дифракционным решеткам явился сложной технической задачей, в решении которой принимали участие многие исследователи. Важный шаг был сделан Роуландом, построившим специальные делительные машины для изготовления тончайших решеток большого размера. Роуланд первым стал делать вогнутые отражательные решетки, выполняющие одновременно роль решетки и собирающей линзы. Решетки Роуланда имели до 20000 штрихов на дюйм при ширине до 10 см и превосходном качестве. Дальнейшие усовершенствования в машинах Роуланда ввели Андерсон, Вуд и др.

В современных спектрометрах обычно используют отражательные решетки с треугольным профилем штриха — так называемые *эшелетты* (рис. 16.2, *г*),

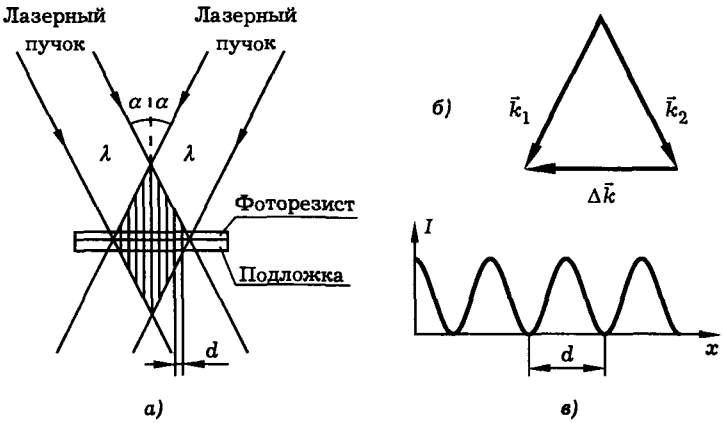



Рис. 16.7. Схема изготовления голографической дифракционной решетки

концентрирующие до 70–80% падающего на решетку света в дифракционный максимум какого-либо одного ненулевого порядка. Изготавливаются решетки для различных областей спектра, от инфракрасной ($\lambda \approx 1$ мкм) до ультрафиолетовой ($\lambda \approx 100$ нм) и ближней рентгеновской ($\lambda \approx 1$ нм), с размерами до $400 \times 400$ мм$^2$ и с числом штрихов (в зависимости от области спектра) от 4 до 3600 на миллиметр. Широкое распространение получили копии с гравированных решеток (*реплики*), которые получаются путем изготовления отпечатков решеток на специальных пластмассах с последующим нанесением на них металлического отражающего слоя. По качеству реплики почти не отличаются от оригиналов.

В 70-х гг. была разработана новая технология изготовления решеток, основанная на интерференции лазерного излучения. В результате интерференции двух когерентных лазерных пучков создается периодическое распределение интенсивности света в пространстве, которое записывается на специальном фоточувствительном материале. Такого рода решетки, называемые *голографическими*, имеют высокое качество и изготавливаются для видимой и ультрафиолетовой областей спектра с числом штрихов от 600 до 6000 на миллиметр и с размерами до $600 \times 400$ мм$^2$. Схема изготовления голографической дифракционной решетки показана на рис. 16.7.

Нетрудно рассчитать период голографической решетки. Запишем электрическое поле двух неколлинеарных плоских волн (лазерных пучков) в виде

$$E = A\cos(\omega t - \vec{k}_1\vec{r}) + A\cos(\omega t - \vec{k}_2\vec{r}).$$

Тогда интенсивность результирующего поля

$$I = 2I_0[1 + \cos(\Delta\vec{k}\vec{r})],$$

где

$$\Delta\vec{k} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2.$$

Отсюда

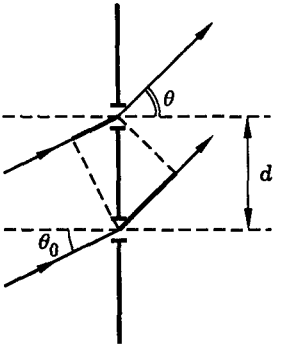



Рис. 16.8. К анализу картины дифракции при наклонном падении лучей на решетку

$$d = \frac{\lambda}{2\sin\alpha}.$$

Как видно из этой формулы, период голографической решетки имеет порядок длины световой волны и может варьироваться при изменении угла $\alpha$. Ясно, что для изготовления качественных решеток необходимо лазерное излучение с высокой степенью когерентности.

Наклонное падение лучей на решетку. Выше мы рассмотрели случай нормального падения плоской волны на дифракционную решетку. Теперь обобщим наше рассмотрение на случай наклонного падения. Обозначим угол падения через $\theta_0$, а угловую координату точки наблюдения, как и прежде, будем обозначать $\theta$ (рис. 16.8). Приравнивая разность хода лучей, идущих от соседних щелей решетки в направлении $\theta$, целому числу длин волн, получим уравнение

$$d(\sin\theta - \sin\theta_0) = m\lambda, \tag{16.3}$$

где $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ и $d$ — период решетки. Формула (16.3) определяет направления на главные максимумы дифракционной картины при наклонном падении. Из нее следует, что при скользящем падении, когда угол $\theta_0$ близок к прямому,

$$\theta_0 \approx \pi/2, \tag{16.4}$$

даже грубая решетка, период которой много больше длины световой волны, может давать заметную дифракцию. В самом деле, полагая $d \gg \lambda$, получим из (16.3) $\theta \approx \theta_0$ и следовательно,

$$\sin\theta - \sin\theta_0 = 2\sin\left(\frac{\theta-\theta_0}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}\right) \approx (\theta-\theta_0)\cos\theta_0.$$

Уравнение решетки (16.3) приобретает вид

$$\theta - \theta_0 = m\lambda/d_э,$$

где

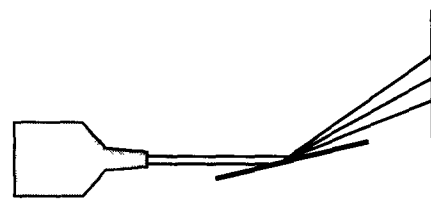


Рис. 16.9. Наблюдение дифракции при скользящем падении пучка белого света на граммофонную пластинку

$$d_э = d\cos\theta_0,$$

$d_э$ — эффективный период решетки. В силу (16.4) $d_э \ll d$, т. е. эффективный период может быть много меньше $d$. Это и создает условия для возникновения дифракции.

Сказанное подтверждает опыт, показанный на рис. 16.9, в котором наблюдается дифракция света на граммофонной пластинке. В этом опыте концентрически расположенные бороздки звукозаписи выполняют функции штрихов отражательной дифракционной решетки. Период такой решетки значительно превышает длину световой волны. Тем не менее, располагая пластинку почти параллельно световому лучу, удается наблюдать дифракцию. Дифракция проявляется в том, что пучок белого света, отражаясь от пластинки, приобретает радужную окраску.

Отражательная решетка. Отражательная решетка представляет собой зеркало со штрихами. Изготовить такую решетку проще, чем пропускательную, поэтому отражательные решетки получили широкое распространение. Как и решетки, работающие на пропускание света, отражательные решетки могут быть амплитудными и фазовыми. Примеры отражательных решеток показаны па рис. 16.2, *в,г*.

Математическое описание дифракции на отражательных решетках подобно изложенному выше для пропускательных решеток. В частности, уравнение отражательной решетки имеет вид (16.3), где $\theta_0$ — угол падения, $\theta$ — угол отражения света (рис. 16.10).

Отражательные решетки имеют следующую полезную особенность. Подбирая форму штриха, можно добиться перераспределения энергии между различными порядками дифракции. В частности, можно сделать наиболее ярким

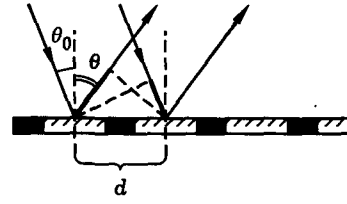



Рис. 16.10. К выводу уравнения отражательной дифракционной решетки

Рис. 16.11. Спектр излучения ртутной лампы, полученный с помощью отражательной дифракционной решетки

не нулевой, а первый или второй порядок дифракции. Такие решетки называются эшелеттами, они широко применяются в оптической спектроскопии. В качестве примера на рис. 16.11 показан вид спектра излучения ртутной лампы, полученного с помощью фазовой отражательной решетки. Решетка, используемая в этой демонстрации, имеет период 0,002 мм. Форма штриха подобрана так, что наиболее ярким оказывается второй порядок дифракции. На экране хорошо видны дискретные цветные линии спектра ртути, в том числе дублет желтых линий.

На рис. 16.12 показано применение отражательной дифракционной решетки в качестве дисперсионного элемента резонатора лазера. В лазере на красителе с помощью такой решетки можно плавно менять длину волны генерируемого излучения.

Итак, наиболее важные закономерности дифракции света на дифракционной решетке могут быть поняты на основе наглядных френелевских представлений об интерференции вторичных волн. Теперь перейдем к более полному математическому описанию дифракции света на решетке.

**Математическое описание дифракции плоской волны на решетке.** Ограничимся рассмотрением дифракционной картины в дальней зоне. Общая схема расчета фраунгоферовой дифракции изложена в лекции 15. Задавая начальное распределение амплитуды поля $\mathcal{E}_0(x)$, находим пространственную спектральную амплитуду $\mathcal{E}_0(k_x)$, затем угловой спектр $S(k_x)$ и угловое распределение интенсивности $I(\theta)$. Рабочие формулы имеют вид

$$\begin{gathered}\mathcal{E}_0(k_x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(x) \exp(ik_x x)\, dx, \\ S(k_x) = |\mathcal{E}_0(k_x)|^2, \quad k_x = k\sin\theta, \\ I(P) = \frac{c}{8\pi}\frac{1}{\lambda b} S(k_x).\end{gathered} \tag{16.5}$$

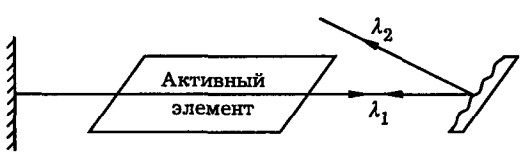



Рис. 16.12. Схема применения отражательной дифракционной решетки в лазере на красителе

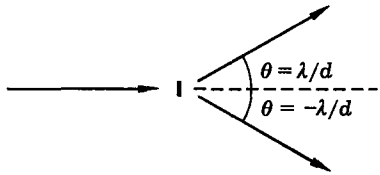



Рис. 16.13. Картина дифракции плоской волны на синусоидальной решетке

Рассмотрим для определенности пропускательную дифракционную решетку. Характеристикой решетки является ее *комплексный коэффициент пропускания*, определяемый как отношение комплексной амплитуды прошедшей волны $\mathcal{E}_0(x)$ к амплитуде падающей волны $\mathcal{E}_0$:

$$T(x) = \mathcal{E}_0(x)/\mathcal{E}_0. \tag{16.6}$$

Начнем с рассмотрения элементарной пространственной периодической структуры — *синусоидальной решетки.*

**Синусоидальная решетка.** Так называется решетка, коэффициент пропускания которой имеет вид

$$T(x) = \cos(\varkappa x), \tag{16.7}$$

где $\varkappa = 2\pi/d$, $d$ — период решетки. Подставив (16.6), (16.7) в (16.5), получим

$$\mathcal{E}_0(k_x) = \pi\mathcal{E}_0[\delta(k_x + \varkappa) + \delta(k_x - \varkappa)]. \tag{16.8}$$

Итак, спектральная амплитуда дифрагированной волны представляет собой сумму двух дельта-функций, т. е. пару бесконечно узких спектральных линий, расположенных на пространственных частотах $\pm\varkappa$. Этим пространственным частотам соответствуют углы

$$\theta = \pm\lambda/d, \tag{16.9}$$

где $\lambda$ — длина световой волны, $d$ — период решетки. Картина дифракции плоской волны на синусоидальной решетке показана на рис. 16.13.

**Ограниченная синусоидальная решетка.** Выясним теперь как влияет на вид дифракционной картины ограниченность размера решетки. Это важно понять, поскольку в реальных условиях как дифракционная решетка, так и падающий на нее световой пучок имеют конечные поперечные размеры.

Обозначив полную ширину решетки буквой $D$, запишем начальное распределение амплитуды поля в виде

$$\mathcal{E}_0(x) = \mathcal{E}_0 \begin{cases} \cos(\varkappa x), & |x| \le D/2, \\ 0, & |x| > D/2. \end{cases} \tag{16.10}$$

Подставив (16.10) в (16.5) и предполагая, что $D \gg d$, $\theta \ll 1$, получим для $I(\theta)$ следующее приближенное выражение

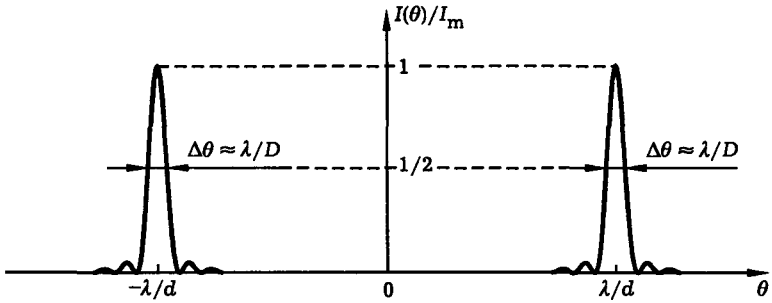



Рис. 16.14. Угловое распределение интенсивности излучения в дальней зоне при дифракции плоской волны на ограниченной синусоидальной решетке

$$I(\theta) \approx I_m \left\{ \mathrm{sinc}^2 \left[ \left( \theta + \frac{\lambda}{d} \right) \frac{\pi D}{\lambda} \right] + \mathrm{sinc}^2 \left[ \left( \theta - \frac{\lambda}{d} \right) \frac{\pi D}{\lambda} \right] \right\}, \tag{16.11}$$

где

$$I_m = I_0 \frac{D^2}{4\lambda b}, \qquad I_0 = \frac{c}{8\pi} |\mathcal{E}_0|^2 \tag{16.12}$$

и $\mathrm{sinc}(x) \equiv \sin x / x$. График зависимости $I(\theta)$ показан на рис. 16.14. Из этого рисунка видно, что дифракционная картина имеет два главных максимума, соответствующих углам (16.9), однако теперь эти максимумы имеют конечную угловую ширину, определяемую формулой

$$\Delta\theta = \lambda / D, \tag{16.13}$$

где $\lambda$ — длина волны, $D$ — апертура решетки.

**Прямоугольная амплитудная решетка.** Эта решетка представляет собой систему щелей в непрозрачном экране. Функция пропускания на каждом периоде имеет вид прямоугольника (рис. 16.15), чем и объясняется термин "прямоугольная" решетка. Коэффициент пропускания прямоугольной решетки можно записать в виде

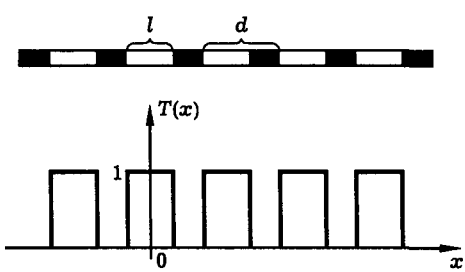



Рис. 16.15. Амплитудная прямоугольная решетка и ее функция пропускания; $l$ — ширина щели, $d$ — период решетки

$$T(x) = \sum_{n=0}^{N} t(x - x_n), \tag{16.14}$$

где $N$ — число щелей,

$$x_n = nd, \qquad n = 0, 1, \ldots, N, \tag{16.15}$$

$x_n$ — координаты центров щелей, $d$ — период решетки,

$$t(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le l/2, \\ 0, & |x| > l/2, \end{cases} \tag{16.16}$$

$t(x)$ — коэффициент пропускания одной щели, ширина которой обозначена буквой $l$. Подставив (16.14)–(16.16) в (16.5), получим

$$\mathcal{E}_0(k_x) = \mathcal{E}_1(k_x) f_N(k_x), \tag{16.17}$$

где

$$\mathcal{E}_1(k_x) = \mathcal{E}_0 l \ \mathrm{sinc}(k_x l/2), \tag{16.18}$$

$\mathcal{E}_1(k_x)$ — пространственная спектральная амплитуда волны, испытавшей дифракцию на отдельной щели,

$$f_N(k_x) = \sum_{n=0}^{N} \exp\left(ik_x nd\right), \tag{16.19}$$

$f_N(k_x)$ — фактор многолучевой интерференции, описывающий совокупное действие всех щелей. Вычислив этот фактор по формуле для суммы конечной геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{in\varepsilon} = \frac{1 - \exp(iN\varepsilon)}{1 - \exp(i\varepsilon)}, \tag{16.20}$$

получим окончательно

$$I(\theta) = I_m F_1(\theta) F_N(\theta), \tag{16.21}$$

где

$$\begin{gathered} I_m = I_0 \frac{l^2}{\lambda b}, \qquad I_0 = \frac{\mathrm{c}}{8\pi} |\mathcal{E}_0|^2, \\ F_1(\theta) = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{1}{2} kl \sin\theta\right), \\ F_N(\theta) = \left[\frac{\sin\left(\frac{1}{2} Nkd \sin\theta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2} kd \sin\theta\right)}\right]^2. \end{gathered} \tag{16.22}$$

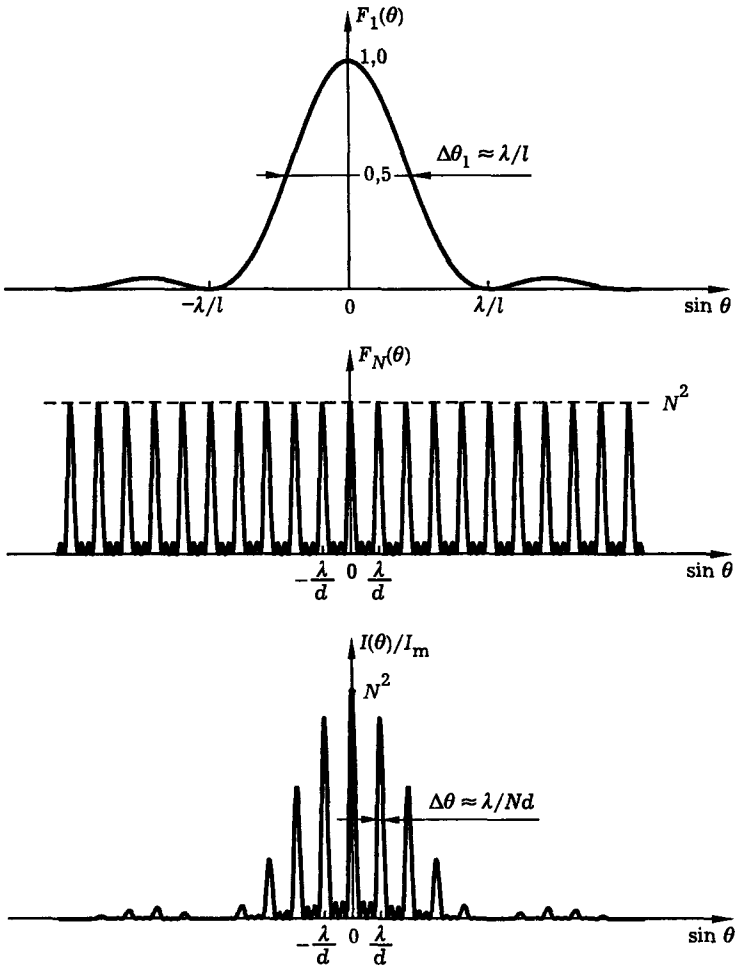



Рис. 16.16. Картина дифракции плоской волны на амплитудной прямоугольной решетке

Вид функций $F_1(\theta)$, $F_N(\theta)$, $I(\theta)$ показан на рис. 16.16. В дополнение к рисункам укажем основные характеристики дифракционной картины. Направления на главные максимумы

$$\sin\theta = \lambda m/d, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{16.23}$$

Угловая ширина главных максимумов

$$\Delta\theta = \lambda/Nd. \tag{16.24}$$

Интенсивность света в максимуме

$$I_{\max} = I_m N^2. \tag{16.25}$$

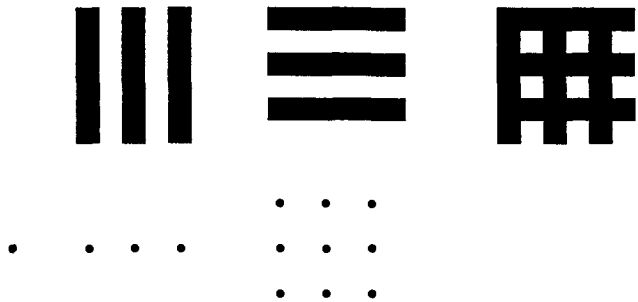


Рис. 16.17. Построение двумерной периодической структуры путем наложения скрещенных решеток и качественный вид дифракционных картин после первой и второй решеток при освещении системы лазерным пучком

Число главных максимумов

$$M = d/l. \tag{16.26}$$

Последняя формула показывает, что число главных максимумов дифракционной картины может быть как порядка единицы, так и много больше единицы в зависимости от соотношения параметров $d$ и $l$.

**Дифракция на двумерных периодических структурах.** Двумерная периодическая структура ("двумерная решетка") может быть получена путем наложения двух скрещенных дифракционных решеток. В частности, если щели одной решетки направлены перпендикулярно щелям другой, то получается прямоугольная структура, показанная на рис. 16.17. Вид дифракционной картины, возникающей при дифракции лазерного пучка на скрещенных решетках, показан на рис. 16.18. Такая картина демонстрируется на лекции с помощью пары дифракционных решеток, вмонтированных во вращающиеся оправы, и пучка непрерывного аргонового лазера.

Качественное объяснение наблюдаемой дифракционной картины дано на рис. 16.17. Оно состоит в том, что первая дифракционная решетка, штрихи которой направлены вертикально, разворачивает лазерный луч в "веер" лучей, лежащих в горизонтальной плоскости. Затем вторая решетка, штрихи которой

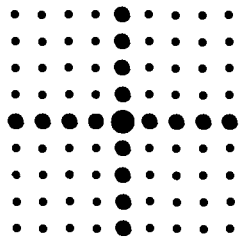


Рис. 16.18. Вид дифракционной картины, возникающей при дифракции лазерного пучка на скрещенных пропускательных дифракционных решетках. В лекционной демонстрации в качестве источника излучения используется непрерывный аргоновый лазер

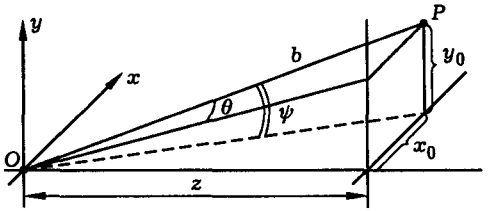



Рис. 16.19. К описанию дифракции света на скрещенных решетках. Скрещенные решетки расположены в плоскости $xy$ (точка $O$), $P$ — точка наблюдения поля

направлены горизонтально, каждый из падающих на нее лучей разворачивает в "веер", лежащий в вертикальной плоскости. В итоге возникает двумерная дифракционная картина, показанная на рис. 16.18.

Нетрудно определить направления на главные максимумы дифракционной картины. Введем декартовы $x_0, y_0$ и угловые $\theta, \psi$ координаты точки наблюдения поля $P$, как показано на рис. 16.19. Тогда, в соответствии с изложенным выше для одномерных решеток, направления на главные максимумы дифракционной картины определятся формулами

$$\begin{aligned} \sin\theta &= m_1\lambda/d_1, \\ \sin\psi &= m_2\lambda/d_2, \end{aligned} \tag{16.27}$$

где $\lambda$ — длина волны света, $d_1$ — период решетки вдоль оси $x$, $d_2$ — период решетки вдоль оси $y$, $m_1$ и $m_2$ — целые числа. Углы $\theta$ и $\psi$, показанные на рис. 16.19, определяются формулами

$$\begin{aligned} \sin\theta &= x_0/b, \\ \sin\psi &= y_0/b. \end{aligned} \tag{16.28}$$

Для дальнейшего удобно ввести также другие угловые координаты точки $P$, а именно, углы между прямой $OP$ и осями координат $x, y, z$. Назовем эти углы, соответственно, $\alpha, \beta, \gamma$. Они показаны на рис. 16.20. Для углов $\alpha, \beta, \gamma$ можно записать

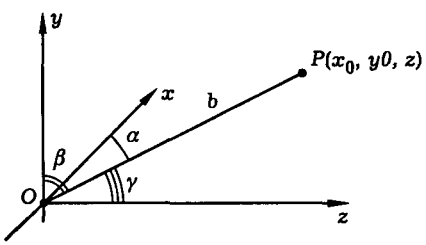



Рис. 16.20. Угловые координаты $\alpha, \beta, \gamma$ точки наблюдения поля $P$

$$\cos\alpha = x_0/b = \sin\theta, \quad \cos\beta = y_0/b = \sin\psi, \quad \cos\gamma = z/b,$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{16.29}$$

Последняя формула выражает теорему Пифагора и показывает, что из трех углов $\alpha, \beta, \gamma$ независимыми являются только два, например, $\alpha, \beta$. Направления на главные максимумы дифракционной картины в этих переменных выражаются формулами

$$d_1 \cos\alpha = m_1\lambda,$$
$$d_2 \cos\beta = m_2\lambda. \tag{16.30}$$

Математическое описание дифракции плоской волны на скрещенных решетках. Пользуясь общими формулами, описывающими дифракцию Фраунгофера на произвольных двумерных структурах (см. лекцию 15), нетрудно математически рассчитать картину дифракции в дальней зоне, возникающую при дифракции плоской волны на скрещенных прямоугольных решетках. Напомним общую схему расчета. Задаваясь начальным распределением амплитуды поля $\mathcal{E}_0(x,y)$, вычисляем пространственную спектральную амплитуду поля $\mathcal{E}_0(k_x,k_y)$, затем спектральную плотность $S(k_x,k_y)$ и, наконец, угловое распределение интенсивности излучения $I(\theta,\psi)$. Рабочие формулы имеют вид

$$\mathcal{E}_0(k_x,k_y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(x,y)\exp\left[i(k_x x + k_y y)\right] dx\,dy,$$
$$S(k_x,k_y) = |\mathcal{E}_0(k_x,k_y)|^2,$$
$$I(P) = \frac{c}{8\pi}\frac{1}{(\lambda b)^2} S(k_x,k_y), \tag{16.31}$$
$$k_x = k\sin\theta = k\cos\alpha,$$
$$k_y = k\sin\psi = k\cos\beta.$$

Начальное распределение поля можно представить как

$$\mathcal{E}_0(x,y) = \mathcal{E}_0 T(x,y), \tag{16.32}$$

где $\mathcal{E}_0$ — амплитуда падающей плоской волны, $T(x,y)$ — коэффициент пропускания двумерной решетки. В частности, для случая ортогонально скрещенных решеток можно написать

$$T(x,y) = T_1(x)T_2(y), \tag{16.33}$$

где $T_1(x)$ и $T_2(y)$ — коэффициенты пропускания одномерных решеток. При этом двойной интеграл в (16.31) распадается на произведение двух однократных интегралов, и дальнейший расчет фактически повторяет сделанный выше для одномерной решетки. Используя обозначения, смысл которых ясен из рис. 16.21, окончательно получаем:

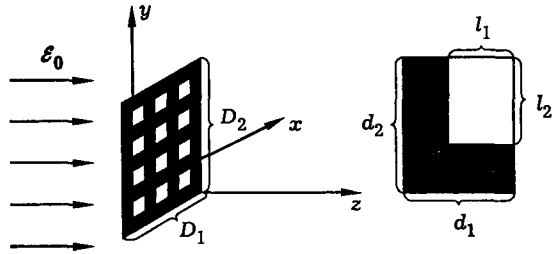



Рис. 16.21. Геометрические параметры двумерной дифракционной решетки

$$I(\theta,\psi) = I_0(\theta,\psi)F(\theta,\psi), \qquad I_0(\theta,\psi) = I_m F_1(\theta,\psi),$$

$$I_m = I_0\left(\frac{l_1 l_2}{\lambda b}\right)^2, \qquad I_0 = \frac{c}{8\pi}|\mathcal{E}_0|^2,$$

$$F(\theta,\psi) = \left[\frac{\sin\left(\frac{1}{2}N_1 k d_1 \sin\theta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}k d_1 \sin\theta\right)}\frac{\sin\left(\frac{1}{2}N_2 k d_2 \sin\psi\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}k d_2 \sin\psi\right)}\right]^2, \tag{16.34}$$

$$N_1 d_1 = D_1, \qquad N_2 d_2 = D_2,$$

$$F_1(\theta,\psi) = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{1}{2}k l_1 \sin\theta\right)\mathrm{sinc}^2\left(\frac{1}{2}k l_2 \sin\psi\right).$$

Формулы (16.34) допускают прямую экспериментальную проверку. Опыт показывает, что они хорошо описывают экспериментальные данные.

**Дифракция на трехмерных периодических структурах. Дифракция рентгеновских лучей в кристаллах.** Кристаллы представляют собой естественные трехмерные периодические структуры с периодом $d \simeq 1$ Å. Поскольку длина волны видимого излучения ($10^{-4}$ см) на несколько порядков превышает период кристаллической решетки ($10^{-8}$ см), видимое излучение не испытывает дифракции в кристаллах. Иначе обстоит дело с *рентгеновским* излучением, длина волны которого соизмерима с периодом кристаллической решетки. В соответствии с уравнением дифракционной решетки, такое излучение должно испытывать сильную дифракцию в кристаллах.

Выясним основные закономерности дифракции электромагнитных волн на трехмерных периодических структурах. Предположим, для простоты, что элементарная ячейка кристалла имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Длины ребер параллелепипеда (периоды решетки) обозначим $d_1$, $d_2$, $d_3$ (рис. 16.22).

Пусть на кристалл падает плоская монохроматическая электромагнитная волна, как показано на рис. 16.22. Определим направления на главные максимумы дифракционной картины. Кристаллическую решетку можно, очевидно, рассматривать как последовательность двумерных плоских решеток, отстоящих друг от друга на расстояние $d_3$. Воспользуемся системой координат, по-

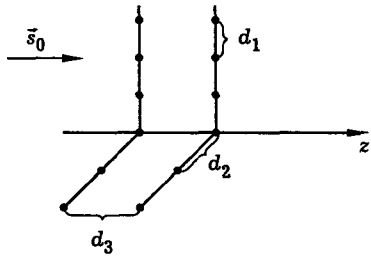



Рис. 16.22. Схема расположения атомов в кристалле; $d_1, d_2, d_3$ — периоды кристаллической решетки, $\vec{s}_0$ — единичный вектор направления падающей волны

казанной на рис. 16.20. Тогда направления на главные максимумы дифракционной картины, возникающей при дифракции волны на отдельной двумерной решетке, определяются формулами (16.30). Однако выполнение этих условий еще не дает гарантии того, что в соответствующих направлениях $\alpha$ и $\beta$ будут возникать дифракционные максимумы. Это зависит от того, как будут интерферировать между собой волны, дифрагированные на разных атомных плоскостях.

Условие интерференционного усиления волн, идущих от двух соседних атомных плоскостей, имеет вид (рис. 16.23)

$$d_3 - d_3 \cos\gamma = m_3\lambda, \tag{16.35}$$

где $m_3$ — целое число. Формула (16.35) выражает требование того, чтобы разность хода лучей, идущих от двух соседних атомных плоскостей в направлении $\gamma$, была кратна длине волны. Если это условие выполнено, то волны, дифрагированные на разных атомных плоскостях кристалла, будут складываться в фазе и усиливать друг друга. Для направлений $\gamma$, не удовлетворяющих условию (16.35), произойдет взаимное погашение интерферирующих волн. Таким образом, полная система уравнений для углов $\alpha, \beta, \gamma$, определяющих направления на главные максимумы дифракционной картины при дифракции плоской волны в кристалле, имеет вид

$$\begin{gathered} d_1\cos\alpha = m_1\lambda, \qquad d_2\cos\beta = m_2\lambda, \qquad d_3(1-\cos\gamma) = m_3\lambda, \\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \end{gathered} \tag{16.36}$$

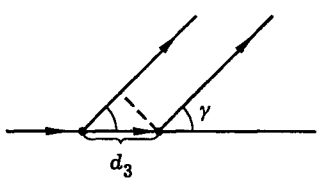



Рис. 16.23. К выводу условия интерференционного усиления волн в кристалле

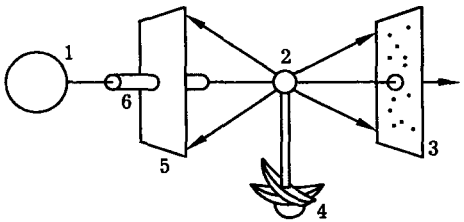



Рис. 16.24. Схема установки для получения лауэграммы: 1 — источник рентгеновского излучения, 2 — исследуемый кристалл, 3 — положение фотопластинки при прямой фотосъемке, 5 — положение фотопластинки при обратной фотосъемке, 4 — гониометрическое устройство, 6 — коллиматор

Уравнения (16.36) называются *уравнениями Лауэ*. Здесь они записаны для случая, когда падающая на кристалл волна распространяется вдоль оси $z$, перпендикулярной атомным плоскостям кристалла. Нетрудно обобщить эти уравнения для произвольного направления падающей волны $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ относительно осей кристалла $x, y, z$. В этом случае уравнения Лауэ приобретают вид

$$\begin{aligned} d_1(\cos\alpha - \cos\alpha_0) &= m_1\lambda, \\ d_2(\cos\beta - \cos\beta_0) &= m_2\lambda, \\ d_3(\cos\gamma - \cos\gamma_0) &= m_3\lambda, \\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= 1. \end{aligned} \tag{16.37}$$

Система уравнений (16.37) имеет решения лишь для некоторых определенных значений длины волны излучения $\lambda$ или определенных значений углов $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$, определяющих ориентацию кристалла относительно падающей волны. Поэтому для получения дифракционных картин на практике используют рентгеновское излучение с широким частотным спектром либо вращают кристалл относительно монохроматического пучка рентгеновского излучения с помощью специального гониометрического устройства. Схема установки для получения картины дифракции рентгеновских лучей в кристалле — так называемой *лауэграммы* — показана на рис. 16.24. Типичная лауэграмма кристалла представлена на рис. 16.25.

Дифракция рентгеновских лучей в кристаллах впервые наблюдалась немецкими физиками М. фон Лауэ, В. Фридрихом и П. Книппингом в 1912 г. Их опыты послужили экспериментальным доказательством волновой природы рентгеновских лучей. В настоящее время дифракция рентгеновских лучей широко применяется для исследования структур кристаллов.

**Рентгеновский структурный анализ.** Применительно к дифракции рентгеновских лучей в кристаллах большое значение имеет решение обратной задачи дифракции, т. е. определения структуры кристалла по виду наблюдаемой дифракционной картины. Получение такой информации составляет предмет рентгеновского структурного анализа.

В основе рентгеноструктурного анализа лежат формулы, описывающие фраунгоферову дифракцию на трехмерной структуре:

$$I(\vec{k}) \sim |\mathcal{E}_0(\vec{k})|^2, \tag{16.38}$$

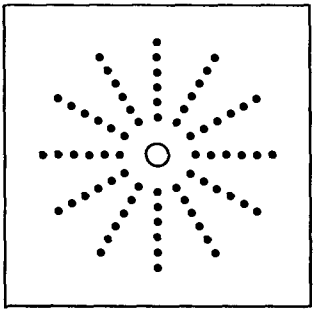


Рис. 16.25. Пример картины дифракции рентгеновских лучей в кристалле

$$\mathcal{E}_0(\vec{k}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(\vec{r}) e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3r. \tag{16.39}$$

Здесь $I(\vec{k})$ — распределение интенсивности излучения в дифракционной картине, $\vec{k}$ — вектор, направленный от объекта на точку наблюдения, $\mathcal{E}_0(\vec{r})$ — исходное распределение поля в пространстве. Последнее определяется структурой объекта, на котором дифрагирует рентгеновская волна, а именно, пространственным распределением электронной плотности $\rho(\vec{r})$ в кристалле: $\mathcal{E}_0(\vec{r}) \sim \rho(\vec{r})$. Формулы (16.38), (16.39) можно рассматривать как обобщение формул (16.5), (16.31) на случай трехмерной исходной структуры поля.

Обращая формулу (16.39), напишем

$$\mathcal{E}_0(\vec{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d^3k. \tag{16.40}$$

Итак, формула (16.39) описывает фурье-анализ электронной плотности кристалла, выполняемый автоматически в рентгеновском дифракционном эксперименте, а формула (16.40) — фурье-синтез структуры кристалла, который может быть выполнен численно на ЭВМ. В настоящее время рентгеновский структурный анализ представляет собой хорошо разработанную методику, с помощью которой определено строение многих минералов и сложных молекул, включая биологические молекулы (ДНК, гемоглобин и т. п.).

# Литература

1. *Гудмен Дж.* Введение в фурье-оптику. — М.: Мир, 1970.
2. *Ландсберг Г. С.* Оптика. — М.: Наука, 1976.
3. Физическая энциклопедия/Под ред. А. М. Прохорова — М.: СЭ, 1988.
4. Физический энциклопедический словарь/Под ред. А. М. Прохорова — М.: СЭ, 1983.

5. Лекционные демонстрации по физике/Под ред. В. И. Ивероновой. — М.: Наука, 1972.
6. *Алешкевич В. А., Киселев Д. Ф., Корчажкин В. В.* Лазеры в лекционном эксперименте. — М.: Изд-во МГУ, 1985.
7. *Матвеев А. Н.* Оптика. — М.: Высшая школа, 1985.
8. *Блейкмор Дж.* Физика твердого тела. — М.: Мир, 1988.
9. *Стюард И. Г.* Введение в фурье-оптику. — М.: Мир, 1985.
10. *Франк-Каменецкий М. Д.* Самая главная молекула. Библиотечка "Квант", вып. 25. — М.: Наука, 1988.
11. *Reynolds G. O., De Velis J. B., Parrent G. B., Thompson B. J.* Physical optics notebook: tutorials in Fourier optics. — New York, SPIE-AIP, 1989.
12. *Жданов Г. С.* "75-летие открытия дифракции рентгеновских лучей"//УФН. 1987. Т. 153, вып. 4. С. 619.

# Лекция 17

# Анализ, преобразование и синтез световых полей

*Спектральное описание пространственной структуры поля. Линза как элемент, выполняющий пространственное преобразование Фурье. Формирование оптического изображения. Теория Аббе. Опыты Аббе–Портера. Метод темного поля. Метод фазового контраста. Разрешающая способность микроскопа и телескопа. Голография. Запись и восстановление светового поля. Дифракционная решетка и интерферометр Фабри–Перо как спектральные приборы. Разрешающая способность и область дисперсии. Фурье-спектроскопия. Спектроскопия оптического смешения.*

Рассматриваются вопросы формирования оптического изображения и спектрального анализа света. Излагаются физические основы голографии как метода записи и восстановления световых полей.

Методы теории линейных систем, широко применяемые в радиофизике для исследования временны́х сигналов, оказываются весьма полезными и в оптике, где объектом исследования являются световые поля. Спектральное разложение, основанное на преобразовании Фурье, позволяет представить произвольное световое поле со сложной пространственно-временно́й структурой в виде суперпозиции плоских монохроматических волн. В силу линейности волнового уравнения, каждая их этих волн распространяется в вакууме или в линейной оптической среде независимо от других волн, что дает возможность свести анализ преобразования сложного поля к задаче о преобразовании элементарной волны. Результирующее поле находят затем путем суммирования прошедших через систему плоских монохроматических волн.

Указанные процедуры — анализ, преобразование и синтез световых полей — являются не просто математическими операциями, но во многих случаях отчетливо проявляются как реальные физические процессы. Так, при свободной дифракции светового пучка в дальней зоне формируется устойчивое пространственное распределение интенсивности излучения, повторяющее по форме угловой спектр пучка. Такую же форму, только в значительно меньшем масштабе, имеет распределение поля в фокальной плоскости линзы. В обоих случаях осуществляется пространственное спектральное разложение поля. Различные операции над световыми полями, выполняемые в фокальной плоскости линзы с помощью разного рода экранов, масок, фазовых пластин, являются пространственными аналогами частотной фильтрации электрических колебаний, применяемой в радиотехнике.

Идеи и методы, связанные с направленным воздействием на световые поля с целью формирования заданной структуры поля, объединяют понятием “фурье-оптика”. Этот термин подчеркивает основополагающую роль спектральных представлений для решения задач, связанных с анализом, преобразованием и синтезом световых полей.

**Спектральное описание пространственной структуры поля.** Поле световой волны, распространяющейся в свободном пространстве, подчиняется волновому уравнению

$$\Delta E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \tag{17.1}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{17.2}$$

$\Delta$ — оператор Лапласа. Ограничимся рассмотрением дифракции монохроматической волны. Полагая

$$E(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}\mathcal{E}(\vec{r})\mathrm{e}^{\omega t} + \text{к. с.}, \tag{17.3}$$

получим для комплексной амплитуды $\mathcal{E}(\vec{r})$ уравнение Гельмгольца

$$\Delta\mathcal{E} + k^2\mathcal{E} = 0, \tag{17.4}$$

где $k = \omega/c$. Задача дифракции состоит в отыскании решения уравнения (17.4), удовлетворяющего граничному условию

$$\mathcal{E}(x, y, z = 0) = \mathcal{E}_0(x, y). \tag{17.5}$$

Такое условие возникает, например, при прохождении света через экран типа "черная маска", плоский транспарант, вносящий фазовую неоднородность и т. п.

Выше мы познакомились с решением задачи дифракции, основанным на применении теоремы Грина и интегральной теоремы Кирхгофа–Гельмгольца. Это позволило математически обосновать принцип Гюйгенса–Френеля, записать дифракционный интеграл в приближениях Френеля и Фраунгофера, решить ряд дифракционных задач (см. лекции 13–15). Покажем теперь, что задача дифракции может быть решена и другим способом — с помощью *спектрального* подхода. Этот путь решения оказывается даже более простым.

Разложим двумерное световое поле $\mathcal{E}_0(x, y)$, заданное в начальном сечении $z = 0$, в интеграл Фурье

$$\mathcal{E}_0(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(k_x, k_y) \exp\left[-i(k_x x + k_y y)\right] dk_x\, dk_y. \tag{17.6}$$

Здесь пространственная спектральная амплитуда $\mathcal{E}_0(k_x, k_y)$ определяется обратным преобразованием Фурье:

$$\mathcal{E}_0(k_x, k_y) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(x, y) \exp\left[i(k_x x + k_y y)\right] dx\, dy. \tag{17.7}$$

Световое поле $\mathcal{E}(x, y, z)$ в произвольной точке пространства ищем в виде, аналогичном (17.6), но со спектральной амплитудой, зависящей от $z$:

$$\mathcal{E}(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(k_x, k_y, z) \exp\left[-i(k_x x + k_y y)\right] dk_x\, dk_y. \tag{17.8}$$

Подставляя (17.8) в (17.4), находим уравнение для спектральной амплитуды $\mathcal{E}(k_x, k_y, z)$:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} + (k^2 - k_x^2 - k_y^2)\mathcal{E} = 0 \tag{17.9}$$

и его решение

$$\mathcal{E}(k_x, k_y, z) = \mathcal{E}_0(k_x, k_y) \exp\left(-iz\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}\right). \tag{17.10}$$

Подставив теперь (17.10) в (17.8), получим

$$\mathcal{E}(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(k_x, k_y) \times$$
$$\times \exp\left[-i\left(k_x x + k_y y + z\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}\right)\right] dk_x\, dk_y, \tag{17.11}$$

или, с учетом (17.7),

$$\mathcal{E}(x, y, z) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(x', y') h(x - x', y - y', z) dx'\, dy', \tag{17.12}$$

где введена функция

$$h(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-i\left(k_x x + k_y y + z\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}\right)\right] dk_x\, dk_y, \tag{17.13}$$

называемая *функцией Грина* данной линейной системы. Введем также функцию

$$\chi(k_x, k_y, z) = \exp\left(-iz\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}\right), \tag{17.14}$$

называемую *частотным коэффициентом передачи* системы. Из формул (17.10) и (17.14) следует, что

$$\mathcal{E}(k_x, k_y, z) = \mathcal{E}_0(k_x, k_y)\, \chi(k_x, k_y, z). \tag{17.15}$$

Кроме того, в силу (17.13), (17.14),

$$h(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \chi(k_x, k_y, z) \exp\left[-i(k_x x + k_y y)\right] dk_x\, dk_y \tag{17.16}$$

и, следовательно,

$$\chi(k_x, k_y, z) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} h(x, y, z) \exp\left[i(k_x x + k_y y)\right] dx\, dy. \tag{17.17}$$

Таким образом, частотный коэффициент передачи и функция Грина связаны между собой преобразованием Фурье. Это общее свойство всех линейных систем.

Прямой подстановкой (17.12), (17.13) в (17.4), (17.5) нетрудно проверить, что найдено *точное* решение задачи дифракции. Простота решения указывает на адекватность использованного математического метода физическому содержанию задачи дифракции.

Инварианты распространения светового пучка. Введем интенсивность $I$, мощность $P$ и угловой спектр $S(k_x, k_y)$ светового пучка, определив их формулами:

$$I(x,y,z) = \frac{c}{8\pi}|\mathcal{E}(x,y,z)|^2, \tag{17.18}$$

$$P = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} I(x,y,z)\,dx\,dy, \tag{17.19}$$

$$S(k_x, k_y) = |\mathcal{E}(k_x, k_y)|^2. \tag{17.20}$$

В силу теоремы Парсеваля

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{E}(x,y,z)|^2 dx\,dy = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint\limits_{-\infty}^{\infty} S(k_x, k_y)\,dk_x\,dk_y. \tag{17.21}$$

Из формул (17.14), (17.15), (17.18)–(17.21) следует, что угловой спектр пучка и его полная мощность не зависят от $z$, т. е. являются *инвариантами распространения*:

$$S(k_x, k_y, z) = S_0(k_x, k_y) = \text{inv}, \tag{17.22}$$

$$P(z) = P_0 = \text{inv}. \tag{17.23}$$

Нетрудно проверить, что результаты конкретных расчетов, проделанных выше (см. лекции 14, 15) удовлетворяют общим соотношениям (17.22), (17.23). Формула (17.22) раскрывает причину устойчивости картины фраунгоферовой дифракции. Согласно этой формуле, картина дифракции, возникающая в дальней зоне, устойчива потому, что она повторяет форму углового спектра пучка, а угловой спектр является инвариантом распространения.

Приближение Френеля. Для слабо расходящегося светового пучка имеют место неравенства

$$k_x^2, k_y^2 \ll k^2, \tag{17.24}$$

т. е. угловой спектр является достаточно узким. В этом случае можно записать приближенное равенство

$$\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} = k - (k_x^2 + k_y^2)/2k. \tag{17.25}$$

Частотный коэффициент передачи приобретает вид

$$\chi(k_x, k_y, z) = \exp\left[-ikz + i\left(\frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}\right)z\right]. \tag{17.26}$$

Подставив (17.26) в (17.16) и выполнив интегрирование, получим следующее выражение для функции Грина:

$$h(x, y, z) = \frac{i}{\lambda z}\exp\left[-ik\left(z + \frac{x^2 + y^2}{2z}\right)\right]. \tag{17.27}$$

Подстановка (17.27) в (17.12) приводит к формуле

$$\mathcal{E}(x, y, z) = \frac{i}{\lambda z}e^{-ikz} \times$$
$$\times \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(x', y')\exp\left\{-\frac{ik}{2z}\left[(x - x')^2 + (y - y')^2\right]\right\}dx'\,dy'. \tag{17.28}$$

Полученное выражение совпадает с дифракционным интегралом в приближении Френеля (см. формулу (14.6)). Таким образом, в рамках спектрального подхода удается воспроизвести все результаты френелевской теории дифракции. Кроме того, спектральные представления позволяют глубже понять физический смысл такого понятия как дифракционная расходимость светового пучка.

Дифракционная расходимость излучения. Рассмотрим, для определенности, дифракцию плоской волны на щели (рис. 15.2). Согласно спектральным представлениям, ограничение поперечного размера светового пучка приводит к уширению его углового спектра (рис. 15.3). При этом связь между поперечным размером пучка $\Delta x$ и шириной углового спектра $\Delta k_x$ выражается формулой

$$\Delta x \Delta k_x = 2\pi, \tag{17.29}$$

которая вполне аналогична формуле $\Delta t \Delta\omega = 2\pi$, связывающей между собой длительность импульса $\Delta t$ и ширину частотного спектра $\Delta\omega$ (см. дополнение 4). Пространственная частота $k_x$ выражается через угол, показанный на рис. 15.2, следующим образом: $k_x = k\sin\theta$, где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, $\lambda$ — длина световой волны. Для малых углов $\theta$ можно, следовательно, записать $k_x = k\theta$ и $\Delta k_x = k\Delta\theta$, где $\Delta\theta$ — ширина углового спектра или угловая расходимость пучка. Пусть ширина щели $\Delta x = d$. Тогда из формулы (17.29) следует, что

$$\Delta\theta = \lambda/d \tag{17.30}$$

в соответствии с формулой (13.37), полученной выше. Таким образом, в спектральной теории оценка дифракционной расходимости излучения может быть получена как следствие фундаментального соотношения (17.29) между поперечным размером пучка и шириной его углового спектра.

**Линза как элемент, выполняющий пространственное преобразование Фурье.** Из геометрической оптики известно, что линза собирает параллельный пучок света в точку, расположенную в фокальной плоскости (рис. 17.1). Произвольное световое поле можно представить как совокупность

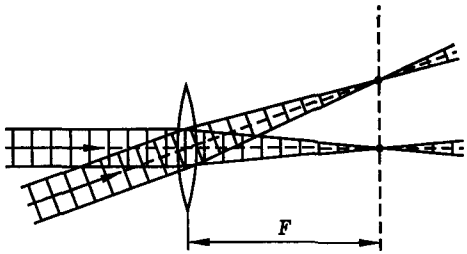



Рис. 17.1. Формирование линзой пространственного спектра светового поля

плоских волн (параллельных пучков), падающих на линзу под разными углами. Каждой такой волне линза ставит в соответствие определенную точку в фокальной плоскости. При этом распределение света в фокальной плоскости приобретает форму *пространственного спектра* поля, падающего на линзу. В этом смысле линза действует как элемент, выполняющий пространственное спектральное разложение света, или *пространственное преобразование Фурье.*

Указанное свойство линзы нетрудно описать на языке волновой оптики. Для этого введем коэффициент передачи линзы и воспользуемся френелевской теорией дифракции.

Коэффициент передачи тонкой линзы. Рассмотрим линзу, для которой луч, входящий в точке с координатами $x, y$ на одной поверхности, выходит на другой поверхности в точке с такими же координатами. Разумеется, данное условие является приближенным, однако оно выполняется тем точнее, чем тоньше линза. Этим и объясняется термин "тонкая" линза.

Определим комплексный *коэффициент передачи* тонкой линзы $t(x, y)$ как отношение комплексных амплитуд прошедшей и падающей волн

$$t(x, y) = \frac{\mathcal{E}_1(x, y)}{\mathcal{E}_0(x, y)}. \tag{17.31}$$

Для вычисления этой характеристики линзы необходимо описать распространение света в стекле. Распространение света в различных оптических средах будет подробно рассмотрено ниже (см. ч. IV). Здесь же воспользуемся одним простым результатом, необходимым нам для расчета. Этот результат заключается в том, что в прозрачной линейной изотропной оптической среде световая волна распространяется со скоростью

$$v = c/n, \tag{17.32}$$

где $c$ — скорость света в вакууме, $n$ — действительная положительная величина, бóльшая единицы, называемая *показателем преломления* среды.

Принимая во внимание (17.32), запишем световую волну в стекле в виде

$$E(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}\mathcal{E}(\vec{r})\mathrm{e}^{i\omega t} + \text{к. с.}, \tag{17.33}$$

где комплексная амплитуда

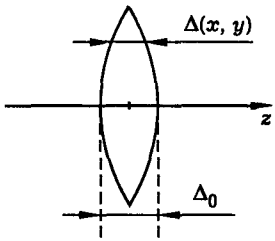



Рис. 17.2. К расчету коэффициента передачи линзы

$$\mathcal{E}(\vec{r}) = A\exp(-iknz) \tag{17.34}$$

и $k = \omega/c$.

Обозначим через $\Delta(x,y)$ толщину линзы в точке с координатами $x, y$, а через $\Delta_0$ — ее максимальную толщину (рис. 17.2). Тогда нетрудно показать, что коэффициент передачи линзы есть

$$t(x,y) = \exp[-i\varphi(x,y)], \tag{17.35}$$

где

$$\varphi(x,y) = k\Delta_0 + (n-1)k\Delta(x,y). \tag{17.36}$$

Теперь вычислим функцию $\Delta(x,y)$. Сделаем это на примере плоско-выпуклой линзы, показанной на рис. 17.3. Как видно из этого рисунка,

$$\Delta(x,y) = \Delta_0 - R + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \tag{17.37}$$

где $R$ — радиус кривизны сферической поверхности линзы. Полагая, что

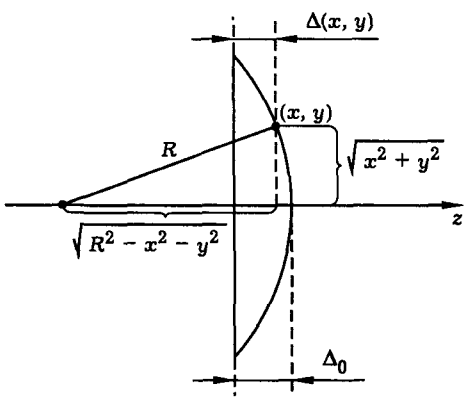



Рис. 17.3. К расчету функции толщины линзы $\Delta(x,y)$

$$x^2 \ll R^2, \qquad y^2 \ll R^2 \tag{17.38}$$

("параксиальное" приближение), запишем выражение для $\Delta(x,y)$ в виде

$$\Delta(x,y) = \Delta_0 - (x^2+y^2)/2R. \tag{17.39}$$

Тогда коэффициент передачи линзы приобретает вид

$$t(x,y) = \exp\left[i(n-1)k(x^2+y^2)/2R\right]. \tag{17.40}$$

Для упрощения записи мы опустили здесь постоянный фазовый множитель.

Далее введем фокусное расстояние линзы $f$, определив его формулой

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{R} \tag{17.41}$$

(см. дополнение 12). Тогда

$$t(x,y) = \exp\left[ik(x^2+y^2)/2f\right]. \tag{17.42}$$

В такой форме коэффициент передачи описывает не только плоско-выпуклую, но и вообще любую тонкую линзу.

Распределение света в фокальной плоскости линзы. Вычислим теперь распределение интенсивности света в фокальной плоскости линзы. Пусть на линзу с фокусным расстоянием $f$ падает монохроматическая световая волна с комплексной амплитудой $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0(x,y)$. Тогда комплексная амплитуда волны на выходе из линзы есть

$$\mathcal{E}_1(x,y) = \mathcal{E}_0(x,y)\exp\left[ik(x^2+y^2)/2f\right]. \tag{17.43}$$

Далее световая волна распространяется в соответствии с законами дифракции. Используя дифракционный интеграл в приближении Френеля (см. лекцию 14)

$$\mathcal{E}(x,y,z) = \frac{i}{\lambda z}\mathrm{e}^{-ikz} \times$$
$$\times \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_1(x',y')\exp\left\{-\frac{ik}{2z}\left[(x-x')^2+(y-y')^2\right]\right\} dx'\,dy', \tag{17.44}$$

можно найти распределение амплитуды поля на любом расстоянии $z$ от линзы

$$\mathcal{E}(x,y,z) = \frac{i}{\lambda z}\exp\left[-ik\left(z+\frac{x^2+y^2}{2z}\right)\right]\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}_0(x',y') \times$$
$$\times \exp\left[-ik\left(\frac{x'^2+y'^2}{2}\right)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{f}\right)+\frac{ik}{z}(xx'+yy')\right] dx'\,dy'. \tag{17.45}$$

В частности, полагая $z = f$, найдем распределение поля в фокальной плоскости линзы

$$\mathcal{E}(x,y,f) = \frac{i}{\lambda f}\exp\left[-ik\left(f+\frac{x^2+y^2}{2f}\right)\right]\times$$
$$\times\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}_0(x',y')\exp\left[\frac{ik}{f}(xx'+yy')\right]dx'\,dy', \qquad (17.46)$$

или

$$\mathcal{E}(x,y,f) = \frac{i}{\lambda f}\exp\left[-ik\left(f+\frac{x^2+y^2}{2f}\right)\right]\mathcal{E}_0(k_x,k_y)\Big|_{\substack{k_x=kx/f\\ k_y=ky/f}}, \qquad (17.47)$$

где

$$\mathcal{E}_0(k_x,k_y) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}_0(x,y)\exp\left[i(k_x x+k_y y)\right]dx\,dy. \qquad (17.48)$$

Формула (17.47) показывает, что в фокальной плоскости линзы формируется распределение поля, пропорциональное пространственному фурье-образу поля, падающего на линзу. Распределение интенсивности света в фокальной плоскости имеет форму углового спектра излучения падающего на линзу, а именно

$$I(x,y,f) = \frac{c}{8\pi}\frac{1}{\lambda^2 f^2}S_0(k_x,k_y)\Big|_{\substack{k_x=kx/f\\ k_y=ky/f}}. \qquad (17.49)$$

Спектральный анализ оптических изображений. Тот факт, что в фокальной плоскости образуется распределение интенсивности света, имеющее форму пространственного спектра поля, падающего на линзу, можно использовать для получения фурье-спектров оптических изображений. Для этого достаточно поместить транспарант с изображением непосредственно перед линзой, направить на него пучок когерентного света и поместить фотопластинку в задней фокальной плоскости линзы. Записанное на фотопластинке изображение будет иметь форму пространственной спектральной плотности изображения на транспаранте. Указанную процедуру иллюстрирует рис. 17.4, на котором показаны пример оптического изображения и его фурье-спектр, полученный оптическим способом.

**Формирование оптического изображения. Теория Аббе.** В 70-х годах XIX века Эрнст Аббе проводил опыты, направленные на улучшение качества объективов для микроскопов. Работая в Йенском университете как сотрудник (а затем и как компаньон) Карла Цейса, Аббе обнаружил, что объектив микроскопа дает тем лучшее разрешение, чем больше его апертура. В экспериментах с объектами, имеющими периодическую структуру (чешуйки насекомых), он показал, что влияние апертуры микроскопа связано с дифракцией света на самом образце. Аббе ввел волновую теорию в инструментальную оптику, бывшую ранее исключительно сферой приложения геометрической оптики.

Согласно теории, развитой Аббе, процесс формирования линзой оптического изображения можно разбить на два этапа: фурье-анализ волнового поля объекта и фурье-синтез изображения. При этом важную роль играет фокальная плоскость линзы, в которой образуется распределение поля, пропорциональное фурье-образу поля источника.

*а)* *б)*

Рис. 17.4. Пример оптического изображения (*а*) и его пространственный спектр (*б*)

Схема формирования изображения по Аббе показана на рис. 17.5. В качестве объекта, изображение которого строит линза, выбрана дифракционная решетка. Так как свет, прошедший через решетку, имеет дискретный угловой спектр, имеется возможность проследить ход отдельных спектральных компонент пространственного спектра поля. Как видно из рисунка, на первом этапе линза осуществляет фурье-анализ волнового поля, испускаемого объектом. Эта операция осуществляется в области пространства между линзой и ее задней фокальной плоскостью и математически выражается преобразованием Фурье. Распределение интенсивности света в задней фокальной плоскости линзы представляет собой фурье-образ поля, испускаемого объектом. На втором этапе в процессе свободной дифракции осуществляется фурье-синтез изображения. Эта операция происходит в области пространства между задней фокальной плоскостью линзы и плоскостью изображения, и математически также выражается преобразованием Фурье. В итоге в плоскости изображения формируется световое поле, структура которого повторяет структуру объекта.

Разумеется, теория Аббе не противоречит принципам геометрической оптики, хорошо проверенным на опыте. Однако она позволяет глубже понять физику формирования оптических изображений, оценить предельную разрешающую способность оптических приборов и, кроме того, несет в себе плодотворную идею обработки изображений путем воздействия на пространственный спектр

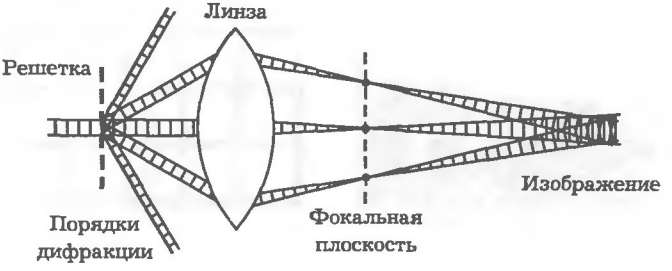



Рис. 17.5. Формирование изображения по Аббе

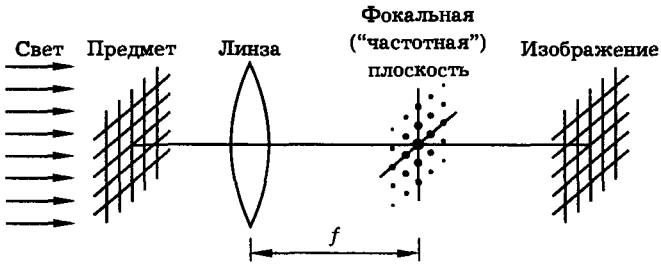
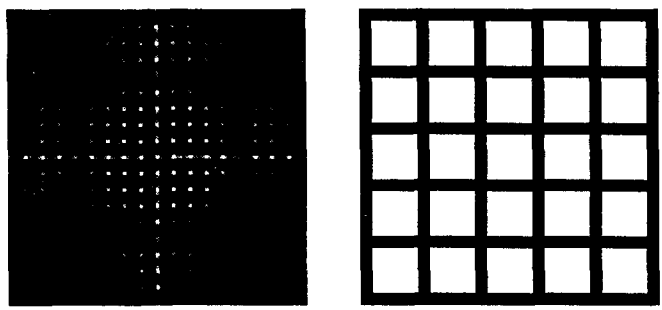



Рис. 17.6. Схема опыта Аббе-Портера

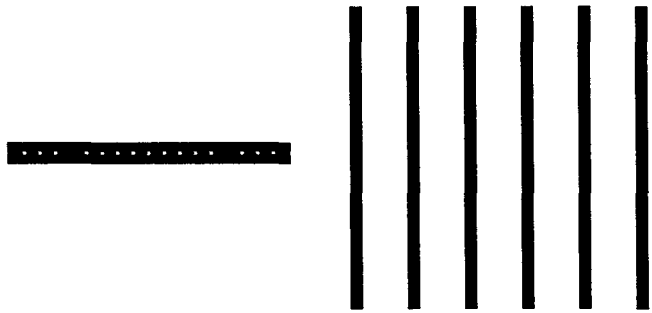
излучения. Так, помещая в фокальной плоскости линзы диафрагму, экран или фазовую пластину, можно осуществить такое преобразование углового спектра излучения, при котором нужные детали изображения будут подчеркнуты, а помехи удалены. Таким образом в оптике удается реализовать частотную фильтрацию оптических полей — операцию, аналогичную фильтрации электрических колебаний, применяемой в радиотехнике. Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих принципы фурье-оптики.

**Опыты Аббе–Портера.** Схема эксперимента показана на рис. 17.6. Предмет, которым служит сетка из тонкой проволоки, освещается когерентным светом. Свет, прошедший через сетку, падает на линзу, которая строит изображение сетки на экране. На рис. 17.7, *а* приведена фотография исходного спектра сетки, а на рис. 17.7, *б* показано соответствующее изображение. Из-за периодичности структуры сетки ее фурье-спектр имеет вид системы пятен. При этом размер отдельного пятна определяется размером сетки, а расстояние между пятнами определяется периодом сетки (см. лекцию 16). Вертикальные столбцы пятен соответствуют вертикальной неоднородности сетки, т. е. системе проволок, вытянутых в горизонтальном направлении. Горизонтальные "строки" пятен соответствуют системе проволок, вытянутых по вертикали.



*а)* *б)*

Рис. 17.7. Фурье-спектр (*а*) и изображение (*б*) проволочной сетки

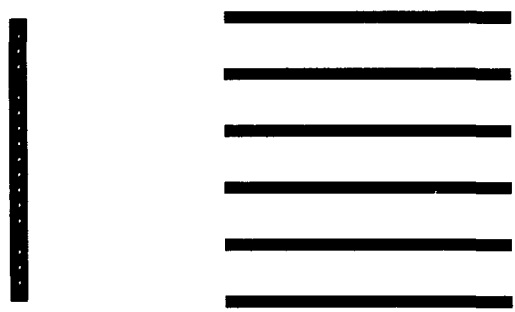


*а)* *б)*

Рис. 17.8. Спектр сетки, отфильтрованный горизонтальной щелью (*а*) и соответствующее изображение (*б*)

Возможности спектральной фильтрации изображения хорошо видны на примере эксперимента, в котором в заднюю фокальную плоскость линзы помещают узкую щель, которая пропускает только один ряд спектральных компонент. На рис. 17.8, *а* показан спектр, пропускаемый горизонтальной щелью. Соответствующее изображение, показанное на рис. 17.8, *б*, содержит систему проволок, вытянутых по вертикали. Горизонтально вытянутые проволоки исчезают из изображения. Если повернуть щель на 90° так, чтобы она пропускала лишь вертикальный ряд пятен (рис. 17.9, *а*), то получающееся изображение содержит лишь систему горизонтальных линий (рис. 17.9, *б*).

Можно наблюдать и другие интересные эффекты. Например, если в фокальную плоскость линзы поместить ирисовую диафрагму и установить ее так, чтобы через нее проходила только осевая фурье-компонента спектра, то при постепенном расширении диафрагмы можно шаг за шагом проследить фурье-синтез сетки. Если же вместо диафрагмы поместить в фокальной плоскости маленький экран, который закрывал бы центральное пятно фурье-спектра, то получим изображение сетки с обращенным контрастом.



*а)* *б)*

Рис. 17.9. Спектр сетки, отфильтрованный вертикальной щелью (*а*) и соответствующее изображение (*б*)

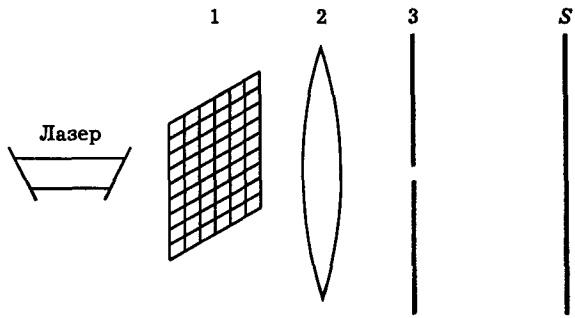



Рис. 17.10. Схема лазерной установки для демонстрации опытов Аббе–Портера

Опыт Аббе–Портера демонстрируется на лекции с помощью установки, схема которой показана на рис. 17.10. Излучение гелий-неонового лазера падает нормально на проволочную сетку 1, изготовленную из проволоки толщиной 0,1 мм. Элементарная ячейка сетки представляет собой квадрат со стороной 0,4 мм. Сеточка выполняет роль оригинала. В непосредственной близости от нее размещается собирающая линза 2 с фокусным расстоянием $f = 5$ см, дающая на экране $S$, удаленном на 5 м, увеличенное изображение сетки. В процессе эксперимента линза 2 может перемещаться вдоль оптической скамьи для получения резкого изображения сетки. В фокальной плоскости линзы устанавливается раздвижная щель 3, ширину которой можно менять при помощи микрометрического винта. Смонтированная в круглой вращающейся оправе, щель может осуществлять фильтрацию пространственных частот по различным направлениям.

В начале демонстрации щель устанавливают вертикально и, постепенно уменьшая ее ширину, наблюдают размывание изображения сетки в горизонтальном направлении. При достаточно малой ширине щели на экране формируется изображение, показанное на рис. 17.9, *б*. Затем, не меняя ширину щели, постепенно поворачивают ее в обойме. При этом изображение на экране меняется. Наконец, при горизонтальном положении щели на экране наблюдается картина, показанная на рис. 17.8, *б*.

**Метод темного поля.** Метод темного поля используют в микроскопии для наблюдения структуры слабо поглощающих свет объектов, таких как срезы живых тканей, клетки и т. п. Идею метода иллюстрирует схема, показанная на рис. 17.11. Свет от источника проходит через исследуемый объект $O$ и линзу $Л_1$. В точке фокуса расположен небольшой непрозрачный диск Д. Линза $Л_2$ проецирует изображение на экран. В отсутствие диска Д на экране видно светлое поле с почти однородной засветкой. При внесении диска освещенность экрана резко уменьшается — возникает "темное поле". При этом на темном фоне становится отчетливо видной структура объекта.

Объяснение опыта состоит в следующем. Неоднородная оптическая плотность или толщина прозрачного объекта вызывает преломление света и появление отклоненных лучей. Эти лучи, несущие информацию о структуре объекта и являющиеся полезным сигналом, пропускаются диском Д, размер которого достаточно мал. В то же время прямые лучи, которые не несут информации

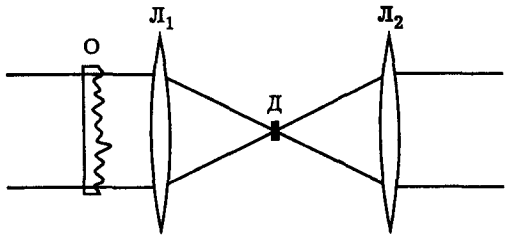



Рис. 17.11. Метод темного поля: О — объект, Д — непрозрачный диск, $Л_1, Л_2$ — линзы

об объекте и являются помехой, задерживаются диском Д. Это и приводит к улучшению видности структуры объекта.

В лекционной демонстрации в качестве объекта *О* используют стеклянную палочку или трубку. Изображение палочки ярко светится на экране вследствие того, что преломленный ею свет проходит мимо диска. Более эффектный опыт состоит в том, что в кювету с водой, расположенную перед линзой $Л_1$, погружают на тонкой проволоке кристалл гипосульфита или кусок сахара; тогда на экране видна ярко светящаяся струйка раствора, которая стекает с растворяющегося вещества. В этом опыте можно двигать растворяющееся тело внутри кюветы и тем нарушать правильность стекания раствора, а также помешивать стеклянной палочкой раствор, уже опустившийся на дно кюветы.

В лабораторных условиях этот метод, называемый также *методом свилей,* допускает гораздо бо́льшую чувствительность, так что можно наблюдать, например потоки теплого воздуха, поднимающиеся от руки человека. На лекции же можно показать светящуюся струйку горячего воздуха, поднимающегося от зажженной спички или от газовой горелки.

**Метод фазового контраста.** Этот метод, предложенный Фрицем Цернике в 1935 г., также используют в микроскопии для получения изображений прозрачных и бесцветных объектов. Неоднородность показателя преломления объекта, например живой клетки, приводит к тому, что прошедшая через объект световая волна претерпевает в разных точках объекта разные изменения фазы, т. е. приобретает *фазовый рельеф.* В методе фазового контраста этот рельеф преобразуется в изменения яркости света — *амплитудный рельеф* — с помощью специальной фазовой пластинки, расположенной вблизи заднего фокуса объектива микроскопа.

Упрощенная схема метода показана на рис. 17.12. Она подобна схеме, используемой в методе темного поля, только вместо непрозрачного диска в фокальной плоскости линзы расположен стеклянный диск — фазовая пластина. Толщина пластины подобрана так, что она осуществляет изменение фазы падающей на нее световой волны на $\pi/2$.

Как и в методе темного поля, на пластину падает свет, не претерпевший преломления в объекте. Этот свет, не несущий информации о структуре объекта, линза собирает в точке фокуса. В то же время преломленные объектом лучи — полезный сигнал — минуют фазовую пластину, проходя сбоку от нее. Затем фоновая волна, фаза которой сдвинута на $\pi/2$, и сигнальная волна интерферируют, в результате чего формируется изображение структуры объекта.

Поясним сказанное с помощью простых формул. Пусть объект характеризуется комплексным коэффициентом пропускания

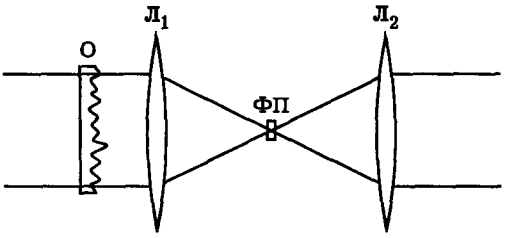



Рис. 17.12. Метод фазового контраста: О — объект, ФП — фазовая пластинка, Л$_1$, Л$_2$ — линзы

$$T(x,y) = \exp[i\varphi(x,y)], \tag{17.50}$$

где $\varphi(x,y)$ — действительная функция, модуль которой много меньше единицы:

$$|\varphi(x,y)| \ll 1. \tag{17.51}$$

В этом случае можно приближенно написать

$$T(x,y) = 1 + i\varphi(x,y). \tag{17.52}$$

Комплексную амплитуду волны, падающей на объект, обозначим через $\mathcal{E}_0$. Тогда волна, прошедшая через объект, имеет амплитуду

$$\mathcal{E}(x,y) = \mathcal{E}_0 T(x,y) = \mathcal{E}_0 + i\mathcal{E}_0\varphi(x,y). \tag{17.53}$$

В отсутствие фазовой пластины поле с амплитудой (17.53) непосредственно проецируется на экран или наблюдается в окуляр микроскопа. При этом наблюдаемое распределение интенсивности

$$I(x,y) = I_0[1 + \varphi^2(x,y)] \tag{17.54}$$

почти однородно, структура объекта просматривается плохо. Иная ситуация имеет место, если в фокусе линзы находится фазовая пластинка, сдвигающая фазу фоновой волны на $\pi/2$. В этом случае слагаемое $\mathcal{E}_0$ в правой части формулы (17.53) следует заменить на $i\mathcal{E}_0$. При этом второе слагаемое $i\mathcal{E}_0\varphi(x,y)$, описывающее волну, преломленную в объекте, остается без изменения, так как преломленные волны проходят мимо фазовой пластины, размер которой достаточно мал. В итоге амплитуда волны, прошедшей через объект и фазовую пластину, приобретает вид

$$\mathcal{E}(x,y) = i\mathcal{E}_0[1 + \varphi(x,y)], \tag{17.55}$$

а соответствующее распределение интенсивности есть

$$I(x,y) \approx I_0[1 + 2\varphi(x,y)]. \tag{17.56}$$

Сравнивая формулы (17.54) и (17.56) и учитывая условие (17.51), видим, что при наличии фазовой пластины в фокусе линзы контраст наблюдаемой картины должен значительно возрасти. Эксперименты подтверждают этот вывод (см., например, [2]).

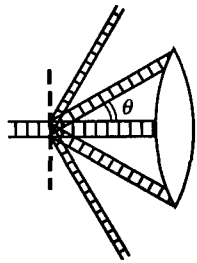



Рис. 17.13. К оценке разрешающей способности линзы

**Разрешающая способность микроскопа и телескопа.** Из теории Аббе следует, что даже самая совершенная линза строит изображение с некоторой ошибкой. Это связано с тем, что световое поле объекта имеет, вообще говоря, произвольный спектр пространственных частот, в то время как линза из-за конечности своей апертуры способна уловить лишь конечную полосу частот из этого спектра. Не все лучи, испускаемые объектом, попадают на линзу. Лучи, соответствующие высоким пространственным частотам, проходят мимо линзы и, следовательно, не принимают участие в формировании изображения. Поэтому изображение, формируемое линзой, не является точной копией самого объекта, в нем отсутствуют наиболее мелкие детали структуры объекта.

Высказанные соображения становятся особенно наглядными, если в качестве объекта, изображение которого строит линза, рассматривать дифракционную решетку. Предположим, что в пределы апертуры линзы попадают только нулевой и первый порядки дифракции на решетке, т. е. имеет место ситуация, показанная на рис. 17.5. Как будет в этом случае выглядеть изображение решетки? Согласно уравнению дифракционной решетки

$$d \sin \theta = m\lambda, \tag{17.57}$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, информация о периоде решетки содержится в угле отклонения от оси первого дифракционного максимума, поэтому она будет передана через линзу и будет содержаться в изображении. В то же время, мелкие детали структуры решетки будут искажены, так как информация о них содержится во втором и более высоких порядках дифракции, которые не попадают на линзу. Поэтому, если исходная решетка является, например, прямоугольной, то в изображении резкие края щелей будут смазаны и будет сформирована решетка, близкая к синусоидальной.

Рассмотренный пример позволяет оценить предел разрешающей способности линзы и микроскопа. Минимальный период решетки $d$, который может быть разрешен с помощью линзы, соответствует случаю, когда дифракционный максимум первого порядка направлен точно на край линзы. Этот случай показан на рис. 17.13. Из этого рисунка видно, что чем больше диаметр линзы и чем ближе линза к решетке, тем более мелкая решетка может быть разрешена. Однако если угол отклонения $\theta$ первого дифракционного максимума близок к $\pi/2$, то этот максимум неизбежно выходит за пределы апертуры линзы и, следовательно, решетка не может быть разрешена. Таким образом, можно записать

$$\theta_{\max} = \pi/2 \tag{17.58}$$

и, в силу (17.57),

$$d_{\min} = \lambda. \tag{17.59}$$

Итак, разрешающая способность линзы, во всяком случае, ограничена *длиной световой волны*. Это и есть принципиальный предел разрешения в оптике.

Электронный микроскоп. Радикальный путь увеличения разрешающей способности лежит уже за пределами оптики — это *электронная микроскопия*.

Известно, что при определенных условиях электрон и другие микрочастицы проявляют волновые свойства. Яркий пример подобного рода — дифракция электронов, наблюдавшаяся Дэвиссоном и Джермером в 1927 г. Длина волны электрона, называемая де-бройлевской длиной волны, зависит от его энергии, и уже при энергиях в несколько электрон-вольт становится на несколько порядков меньше длины волны видимого света. Возникла идея построить микроскоп, в котором вместо видимого света использовались бы электронные волны. Поскольку электроны имеют очень малую длину волны, такой микроскоп мог бы иметь чрезвычайно высокую разрешающую способность. Реализация этой идеи и привела к созданию электронного микроскопа.

Оценим разрешающую способность электронного микроскопа. Будем считать, что как и в случае оптического микроскопа, она определяется формулой (17.59), где под $\lambda$ следует теперь понимать де-бройлевскую длину волны электрона.

Рассмотрим для простоты нерелятивистский электрон, т. е. электрон, скорость которого значительно меньше скорости света,

$$v \ll c = 3 \times 10^{10} \text{ см/с}.$$

В этом случае импульс $p$ и кинетическая энергия $W$ электрона выражаются формулами

$$p = mv, \qquad W = mv^2/2,$$

а де-бройлевская длина волны

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mW}},$$

где $h$ — постоянная Планка, $m$ — масса электрона, $v$ — его скорость. Сделаем численную оценку. Полагая $W = 100$ эВ (1 эВ $= 1{,}6 \times 10^{-12}$ эрг), $h = 6{,}6 \times 10^{-27}$ эрг $\cdot$ с, $m = 9{,}1 \times 10^{-28}$ г, получим

$$v = \sqrt{2W/m} = 0{,}59 \times 10^9 \text{ см/с} \quad \text{и} \quad \lambda = 1{,}2 \times 10^{-8} \text{ см} = 1{,}2 \text{ Å}. \tag{17.60}$$

Таким образом, согласно нашей оценке, разрешающая способность электронного микроскопа на 3–4 порядка выше, чем у оптического микроскопа.

На практике современные электронные микроскопы позволяют достичь разрешающей способности порядка 1–10 Å при энергиях электронов $10^4 - 10^5$ эВ. При микроскопии твердых тел это дает возможность наблюдать группы атомов или даже отдельные атомы!

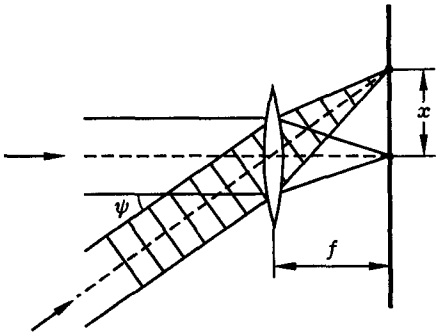



Рис. 17.14. К оценке разрешающей способности телескопа

Телескоп. Телескоп предназначен для наблюдения удаленных объектов — звезд, планет, астероидов и т. п. Одной из основных характеристик телескопа является *разрешающая способность*, под которой понимается минимальный угловой размер объекта, различимого в телескоп. Как и в случае микроскопа, принципиальное ограничение на величину разрешающей способности накладывает дифракция.

Оценим разрешающую способность телескопа. Предположим, что на входную линзу телескопа падает свет от двух удаленных точечных источников (звезд). Найдем величину угла между направлениями на звезды, при котором звезды еще различимы.

Пусть свет от одной звезды падает на линзу по нормали, а от другой — под некоторым углом $\psi$. Ввиду большого расстояния до звезд, свет от каждой из них представляет собой почти параллельный пучок (рис. 17.14).

В приближении геометрической оптики параллельный пучок света, падающий на линзу, фокусируется ею в точку, расположенную в фокальной плоскости. Дифракция приводит к тому, что пятно фокусировки для каждого из пучков имеет *конечный размер*. Поэтому при достаточно малых углах $\psi$ изображения звезд начнут накладываться одно на другое и уже не будут разрешаться как отдельные элементы.

Как показано в лекции 13, размер фокального пятна определяется формулой

$$d = \lambda f/D, \tag{17.61}$$

где $f$ и $D$ — фокусное расстояние и апертура линзы, $\lambda$ — длина световой волны. Из рис. 17.14 видно, что условие разрешения звезд есть

$$x_{\min} = d, \tag{17.62}$$

где

$$x_{\min} = f\psi_{\min}. \tag{17.63}$$

Отсюда

$$\psi_{\min} = \lambda/D, \tag{17.64}$$

что совпадает с оценкой, полученной в лекции 12.

Итак, разрешающая способность телескопа определяется формулой (17.64), где $\lambda$ — длина световой волны, $D$ — апертура телескопа. Например, зеленчукский телескоп, главное зеркало которого имеет диаметр $D = 6$ м, характеризуется разрешающей способностью порядка $\psi_{\min} = 10^{-7}$ рад.

**Голография. Запись и восстановление светового поля.** В обычной фотографии на фотопластинке фиксируется только часть информации о световом поле, а именно пространственное распределение *интенсивности* света. Весьма важная для оптики информация о пространственном распределении *фазы* поля полностью теряется. Возникает вопрос: нельзя ли так построить процесс записи светового поля, чтобы сохранить информацию и об амплитуде и о фазе? Оказывается, такая возможность существует. Соответствующий способ записи волновых полей получил название *голография*.

Основная идея голографии весьма проста. Она заключается в том, чтобы фотографировать не само световое поле, идущее от объекта, а картину *интерференции* этого поля с когерентной опорной волной. Картина интерференции предметной и опорной волн, записанная на фотопластинку, называется *голограммой*. Так как вид интерференционной картины зависит не только от амплитуд, но и от фаз интерферирующих полей, на голограмме оказывается записанной вся информация о предметной волне — и амплитуда, и фаза поля. Для восстановления предметной волны достаточно просветить голограмму опорной волной.

Из сказанного ясно, что для голографии существенна *когерентность* опорной волны, а также волны, освещающей объект. Именно поэтому первые хорошие голограммы были получены лишь после создания лазера (Э. Лейт, Ю. Упатниекс, 1964), хотя основные идеи голографии были высказаны значительно раньше (Д. Габор, 1948).

Схема записи и восстановления светового поля в голографии показана на рис. 17.15. Для получения голограммы когерентный лазерный пучок делится на две части. Один пучок ("сигнальный") освещает объект, а другой пучок ("опорный") падает непосредственно на фотопластинку. Свет, отраженный объектом, образует "объектный" пучок, который также направляется на фотопластинку, где интерферирует с опорной волной. Картина интерференции записывается на фотопластинку и после проявления образует голограмму. Для восстановления светового поля, испускаемого объектом, голограмму просвечивают опорным пучком. Пучок дифрагирует на голограмме, в результате чего возникают дифрагированные волны, одна из которых точно повторяет по своей структуре объектную волну. Так происходит восстановление светового поля. Покажем теперь с помощью формул, как в голографии записываются и восстанавливаются световые поля.

Запись светового поля. Обозначим комплексную амплитуду предметной волны $\mathcal{E}_{\text{п}}$, а опорной волны $\mathcal{E}_{\text{о}}$. Выделяя действительные амплитуды и фазы этих волн и считая опорную волну плоской, можно написать

$$\mathcal{E}_{\text{п}} = |\mathcal{E}_{\text{п}}(x,y)| \exp\left[i\varphi_{\text{п}}(x,y)\right], \qquad \mathcal{E}_0 = |\mathcal{E}_0| \exp\left(-i\vec{k}_0\vec{r}\right). \tag{17.65}$$

Комплексная амплитуда поля в плоскости голограммы есть

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{п}} + \mathcal{E}_{\text{о}}, \tag{17.66}$$

а распределение интенсивности

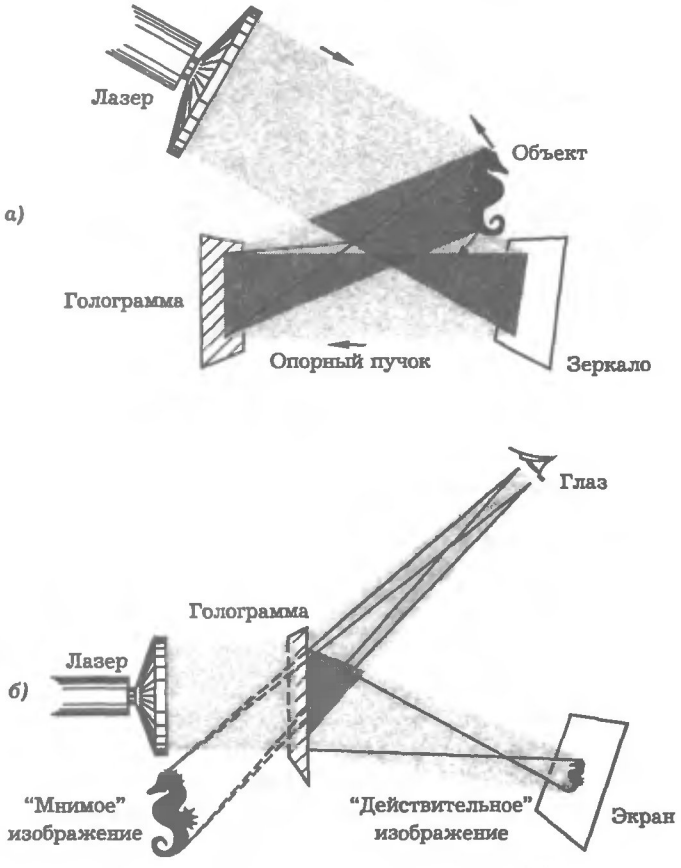



Рис. 17.15. Голография: запись (*а*) и восстановление (*б*) светового поля

$$I(x,y) = \frac{c}{8\pi}|\mathcal{E}|^2 = \frac{c}{8\pi}\left(|\mathcal{E}_{\text{п}}|^2 + |\mathcal{E}_{\text{о}}|^2 + \mathcal{E}_{\text{п}}\mathcal{E}_{\text{о}}^* + \mathcal{E}_{\text{п}}^*\mathcal{E}_{\text{о}}\right). \tag{17.67}$$

Это распределение фиксируется на фотопластинке. Важно, что в этом выражении есть слагаемые, содержащие информацию о фазе предметной волны.

Восстановление поля. Для восстановления поля голограмму освещают опорной волной. При этом возникает несколько световых волн, одна из которых в точности повторяет поле предметной волны. Покажем это.

При освещении голограммы пробной волной на ее задней поверхности образуется поле с комплексной амплитудой

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0 T(x,y), \tag{17.68}$$

где $T(x,y)$ — коэффициент пропускания света голограммой. Запишем эту величину в виде

$$T(x,y) = 1 - D(x,y), \tag{17.69}$$

где

$$D(x,y) = \alpha I(x,y), \tag{17.70}$$

$D(x,y)$ — функция, пропорциональная распределению интенсивности излучения при экспонировании фотопластинки. Коэффициент $\alpha$ зависит от чувствительности пластинки. Подставив (17.67), (17.69), (17.70) в (17.68), получим

$$\mathcal{E}_1 = (1 - \beta|\mathcal{E}_п|^2 - \beta|\mathcal{E}_о|^2)\mathcal{E}_0 - \beta|\mathcal{E}_о|^2\mathcal{E}_п - \beta\mathcal{E}_о^2\mathcal{E}_п^*, \tag{17.71}$$

где $\beta = \alpha c/8\pi$.

Формула (17.71) обосновывает высказанное выше утверждение. Согласно этой формуле, одна из волн, возникающих при дифракции опорной волны на голограмме, а именно волна с амплитудой, пропорциональной $\mathcal{E}_п$, точно повторяет волновое поле, исходившее от объекта съемки при экспонировании голограммы. Эта волна несет *мнимое* изображение объекта. Наблюдение мнимого изображения, как показано на рис. 17.15, создает полную иллюзию наблюдения реального объекта, который кажется находящимся за голограммой. В частности, меняя положение глаз относительно голограммы можно осмотреть "объект" с разных сторон и даже немного заглянуть за него — точно так же, как если бы мы наблюдали не голографическое изображение, а сам реальный объект.

Другая волна, амплитуда которой пропорциональна $\mathcal{E}_п^*$, создает *действительное* изображение объекта, которое можно наблюдать на экране. Кроме того, как видно из формулы (17.71), при дифракции опорной волны на голограмме возникают и другие волны, в частности проходящая в прямом направлении опорная волна. Эти волны создают помехи при наблюдении. На практике, однако, удается построить схемы записи и восстановления светового поля таким образом, что помехи не играют существенной роли.

На рис. 17.16 показан вид голограммы на просвет. Обратим внимание на то, что вид голограммы не имеет ничего общего с изображением снятого на ней объекта. При обычном некогерентном освещении голограмма выглядит как почти однотонная мутноватая пластинка. Однако в ней скрыто прекрасное голографическое изображение некоторого объекта. Это изображение проявляется при освещении голограммы когерентным лазерным пучком.

**Дифракционная решетка и интерферометр Фабри–Перо как спектральные приборы. Разрешающая способность и область дисперсии.** Приборы, действие которых основано на явлениях интерференции и дифракции света, — интерферометры и дифракционные спектрометры — широко применяются в современной оптической спектроскопии. Важнейшими характеристиками спектральных приборов являются *разрешающая способность* и *область дисперсии*. Разрешающая способность

$$A = \lambda/\delta\lambda \tag{17.72}$$

определяется как отношение длины световой волны $\lambda$ к разности длин волн $\delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, которые могут быть разрешены прибором. Область дисперсии

$$G = \Delta\lambda \tag{17.73}$$

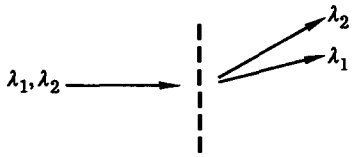



Рис. 17.18. Дифракция плоской немонохроматической волны на дифракционной решетке: разложение в спектр (показан один из порядков дифракции)

Спектральное разложение света можно наблюдать в опыте по дифракции луча аргонового лазера на дифракционной решетке. Излучение лазера содержит несколько спектральных компонент, в частности компоненты с длинами волн $\lambda_1 = 488$ нм и $\lambda_2 = 514{,}5$ нм, которые слегка отличаются по цвету. Решетка пространственно разделяет данные компоненты, что хорошо видно в опыте.

Другой опыт демонстрирует дифракцию света ртутной лампы на отражательной дифракционной решетке. Излучение ртутной лампы содержит несколько спектральных компонент с цветами от желтого до фиолетового, так что свет, падающий на решетку, выглядит белым. Из опыта видно, что в нулевом порядке дифракции не происходит разложения в спектр. Луч, отраженный от решетки в этом направлении, выглядит белым. В первом порядке дифракции отчетливо видно разложение в спектр. Во втором порядке дифракции также происходит разложение в спектр, но уже с большей дисперсией. Последний эффект хорошо заметен по расщеплению желтой спектральной линии, которая в спектре первого порядка не разрешена. Обращаем внимание на широкую область дисперсии дифракционной решетки. Форма штриха отражательной решетки, используемой в этой демонстрации, подобрана так, что наибольшая энергия приходится на спектр второго порядка. Это очень удобно для спектральных наблюдений.

На рис. 17.19 показана схема спектрометра с дифракционной решеткой. С помощью пары вогнутых зеркал и дифракционной решетки спектрометр формирует изображения входной щели, которые сдвинуты друг относительно друга в боковом направлении для различных длин волн $\lambda$ падающего излучения.

Физическим фактором, ограничивающим разрешающую способность дифракционной решетки, является, очевидно, конечная ширина дифракционного максимума $\varepsilon$ (рис. 17.20). Форму дифракционного максимума можно назвать *аппаратной функцией* решетки. Как показано в лекции 16,

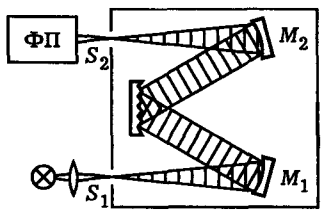



Рис. 17.19. Спектрометр с дифракционной решеткой

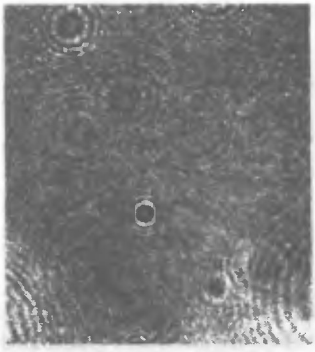


Рис. 17.16. Вид голограммы на просвет при некогерентном освещении

определяется как интервал длин волн, доступный для измерений. Рассмотрим эти характеристики на примерах дифракционной решетки и интерферометра Фабри–Перо.

Дифракционная решетка. На рис. 17.17 показана картина дифракции на решетке плоской монохроматической световой волны. Свет, пропущенный или отраженный решеткой, представляет собой дискретный набор лучей, направления которых определяются уравнением решетки

$$d\sin\theta = m\lambda. \tag{17.74}$$

Здесь $\lambda$ — длина световой волны, $d$ — период решетки, $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ — целое число, называемое порядком дифракции. Принимая во внимание, что разность хода лучей от соседних щелей решетки в направлении $\theta$ выражается формулой $\Delta = d\sin\theta$, нетрудно видеть, что $m = \Delta/\lambda$, т. е. порядок дифракции имеет смысл отношения разности хода лучей к длине световой волны.

Предположим теперь, что на решетку падает плоская *немонохроматическая* световая волна. Тогда, как видно из уравнения (17.74), спектральные компоненты излучения с длинами волн $\lambda_1$ и $\lambda_2$ будут отклоняться решеткой на разные углы в соответствии с уравнениями

$$\sin\theta_1 = m\lambda_1/d, \qquad \sin\theta_2 = m\lambda_2/d, \tag{17.75}$$

т. е. решетка осуществляет *пространственное разложение* спектра (рис. 17.18). Этот эффект и лежит в основе действия дифракционных спектрометров.

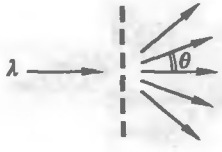



Рис. 17.17. Картина дифракции плоской монохроматической волны на дифракционной решетке

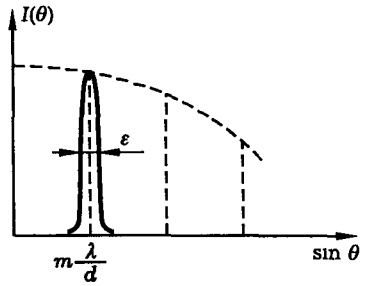



Рис 17.20. Дифракция плоской монохроматической волны на дифракционной решетке· фрагмент углового распределения интенсивности света

$$\varepsilon = \lambda/Nd, \tag{17.76}$$

где $N$ — число щелей или штрихов решетки. Из формул (17.72), (17.75), (17.76) получаем

$$A = mN. \tag{17.77}$$

Итак, разрешающая способность решетки равна произведению порядка дифракции на число штрихов.

Область дисперсии дифракционной решетки определяется условием наложения дифракционных максимумов соседних порядков:

$$m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda. \tag{17.78}$$

Отсюда

$$G = \lambda/m. \tag{17.79}$$

Пусть, например, $m = 2$, $N = 10^4$, $\lambda = 5000$ Å. Тогда получим $A = 2 \times 10^4$, $G = 2500$ Å, $\delta\lambda = \lambda/A = 0{,}25$ Å (рис. 17.21).

Интерферометр Фабри–Перо. Плоский интерферометр Фабри–Перо состоит из двух клиновидных пластинок, у каждой из которых на одной стороне нанесено отражающее, а на другой — просветляющее покрытия (рис. 17.22). Клиновидная форма пластинок предотвращает нежелательную интерференцию лучей, отраженных от задних поверхностей пластин.

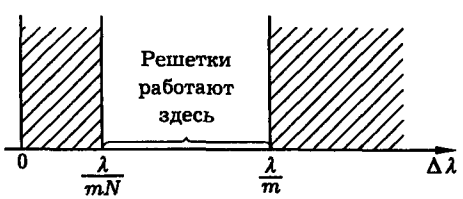



Рис 17 21 Область применения дифракционных решеток в качестве спектральных приборов

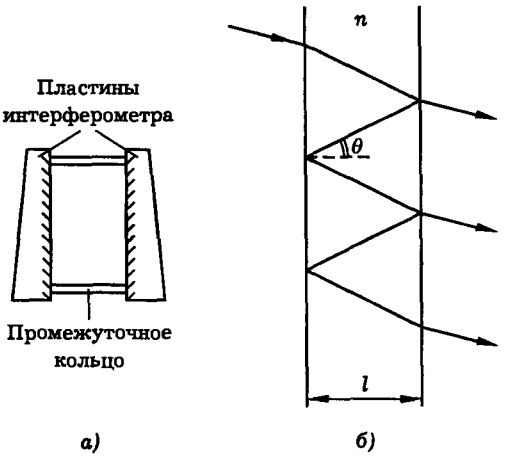



Рис. 17.22. Интерферометр Фабри–Перо: схема (*а*) и ход лучей в интерферометре (*б*)

Уравнение интерферометра Фабри–Перо можно записать в виде, аналогичном уравнению дифракционной решетки:

$$2nl\cos\theta = m\lambda. \tag{17.80}$$

Здесь $l$ — расстояние между пластинами интерферометра, $n$ — показатель преломления среды, заполняющей промежуток между пластинами, $\theta$ — угол между лучом и нормалью к пластине (рис. 17.22*б*). Величина $\Delta = 2nl\cos\theta$ есть разность хода двух соседних лучей в интерферометре, $m = \Delta/\lambda$ — порядок интерференции.

Формула (17.80) определяет направления на главные максимумы интерференционной картины. Если на интерферометр падает расходящийся пучок монохроматического света, то на выходе возникает картина резких интерференционных колец (рис. 17.23). При этом разные кольца соответствуют разным значениям числа $m$ в формуле (17.80).

Предположим теперь, что на интерферометр падает немонохроматическое излучение, например, пара световых волн с длинами $\lambda_1$ и $\lambda_2$. Тогда каждая из этих волн даст свою систему интерференционных колец. При фиксированном значении числа $m$ направления на интерференционные максимумы для раз-

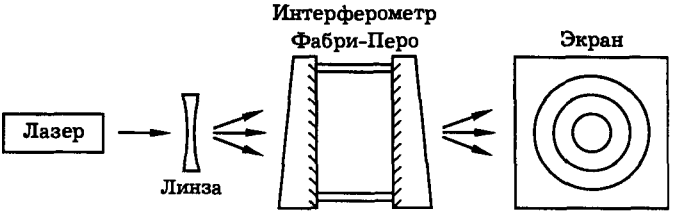



Рис. 17.23. Схема наблюдения интерференционных колец с помощью интерферометра Фабри–Перо

ных спектральных компонент будут различными, т. е. интерферометр будет осуществлять пространственное разложение спектра.

Из уравнения (17.80) следует, что область дисперсии интерферометра Фабри–Перо, как и в случае дифракционной решетки, определяется формулой (17.79). Разрешающая способность интерферометра определяется шириной отдельного интерференционного кольца. Записывая условие разрешения двух близких спектральных линий в виде

$$\delta_1 - \delta_2 = \varepsilon \tag{17.81}$$

(см. рис. 11.23), где $\delta = k\Delta = 2\pi\Delta/\lambda$, получим $\delta\lambda = \lambda^2\varepsilon/2\pi\Delta$, или, с учетом формулы (11.76), $\delta\lambda = \lambda^2/\mathcal{F}\Delta$, где $\mathcal{F}$ — резкость интерферометра. Для разрешающей способности интерферометра получаем формулу

$$A = \mathcal{F}\Delta/\lambda. \tag{17.82}$$

Принимая во внимание, что $\Delta/\lambda = m$, а резкость $\mathcal{F}$ примерно равна числу лучей в интерферометре $N$, формулу (17.82) можно привести к виду (17.77), удобному для оценок.

В качестве примера рассмотрим интерферометр Фабри–Перо с параметрами $l = 2{,}5$ см и $R = 0{,}9$. Полагая $\lambda = 5000$ Å и используя формулу (11.80), получим $\Delta = 2l = 5$ см, $m = \Delta/\lambda = 10^5$, $N = \mathcal{F} = 30$, $A = 3 \times 10^6$, $\delta\lambda = \lambda/A = 0{,}0017$ Å, $G = \lambda/m = 0{,}05$ Å. Эти цифры показывают, что интерферометр Фабри–Перо обладает весьма высокой разрешающей способностью, однако имеет очень узкую область дисперсии. На практике интерферометр Фабри–Перо часто используют в комбинации с дифракционным спектрометром, что позволяет проводить спектральные измерения с высоким разрешением в широком диапазоне длин волн.

Сканирующий интерферометр Фабри–Перо. Обратимся еще раз к формуле (17.80), определяющей направление $\theta$ на интерференционный максимум порядка $m$. Выше мы рассмотрели случай, когда параметры $n$ и $l$ интерферометра Фабри–Перо фиксированы. При этом различным длинам волн $\lambda$ соответствуют разные углы $\theta$ направления светового луча, т. е. интерферометр осуществляет пространственное разложение спектра. Спектральная плотность $S(\omega)$ может быть найдена из углового распределения интенсивности света $I(\theta)$ в интерференционной картине.

Формула (17.80) указывает и на другую возможность измерения $S(\omega)$. Спектр излучения может быть измерен при фиксированном направлении наблюдения $\theta = \text{const}$, если в процессе измерения варьируются параметры $n$ или $l$. Последнего можно добиться управляя движением пластин интерферометра с помощью специального двигателя, либо изменяя давление газа (воздуха) в пространстве между пластинами. Интерферометр Фабри–Перо с переменными параметрами $n$ или $l$ называется *сканирующим*. Ввиду необходимости сохранять с высокой точностью параллельность пластин на практике чаще используют интерферометры с жесткой механической конструкцией (пластины прижаты к промежуточному кольцу — см. рис. 17.22) и сканированием по давлению. Схема такого интерферометра показана на рис. 17.24.

На лекции демонстрируется интерферометр Фабри–Перо, сканируемый по давлению. На интерферометр направляется луч гелий-неонового лазера. На экране возникает картина узких и ярких интерференционных колец. При постоянном давлении воздуха в пространстве между пластинами интерферометра картина на экране стационарна. Если же давление воздуха меняется (воз-

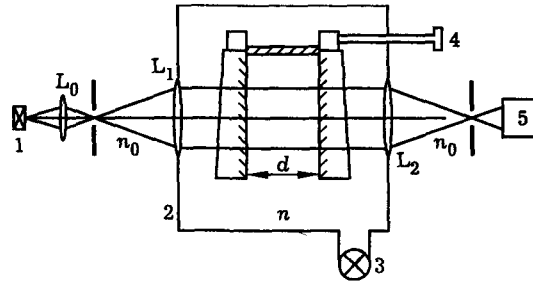



Рис. 17.24. Сканирующий интерферометр Фабри–Перо: 1 — источник света, 2 — герметичная камера, 3 — вентиль для напуска газа, 4 — система юстировки зеркал, 5 — фотоприемник

дух накачивается рукой с помощью резиновой груши), то изменение показателя преломления воздуха вызывает движение интерференционных колец на экране.

**Фурье-спектроскопия.** С помощью сканирующего интерферометра Майкельсона можно измерить корреляционную функцию излучения. Преобразуя по Фурье корреляционную функцию, можно найти спектр излучения. Такова основная идея метода фурье-спектроскопии, успешно используется для спектроскопии высокого разрешения в ИК области спектра (см. лекцию 11).

Эффективное спектральное разрешение фурье-спектрометра можно оценить как $\delta\omega = 2\pi/\tau$ или $\delta\nu = 1/\Delta$, где $\tau$ — максимальная задержка, $\Delta$ — максимальная разность хода лучей. Разрешающая способность интерферометра

$$A = \Delta/\lambda. \tag{17.83}$$

Например, при $\lambda = 0{,}5$ мкм и $\Delta = 100$ см получаем $A = 2 \times 10^6$.

**Спектроскопия оптического смешения.** Даже самые лучшие оптические спектрометры, использующие интерферометры Фабри–Перо, не позволяют разрешить две спектральные линии, если их частоты отличаются менее, чем на 10 МГц. Между тем имеется ряд задач, в которых требуется спектральное разрешение на уровне 10 Гц - 10 МГц. К ним относятся, в частности, некоторые задачи оптической диагностики в биологии и медицине: измерение коэффициентов диффузии, скоростей направленного транспорта и миграционного движения, параметров внутримолекулярной и внутриклеточной подвижности и т. п. По этим измеряемым характеристикам можно рассчитывать размеры, массу и ряд других характеристик биологических микрообъектов.

Для решения подобных задач успешно применяется метод, называемый *спектроскопией оптического смешения*. Основная идея этого метода заключается в следующем. Пусть есть две монохроматические световые волны с близкими частотами $\omega_1$ и $\omega_2$:

$$E_1 = A_1 \cos(\omega_1 t - k_1 z), \qquad E_2 = A_2 \cos(\omega_2 t - k_2 z).$$

Разность частот этих волн

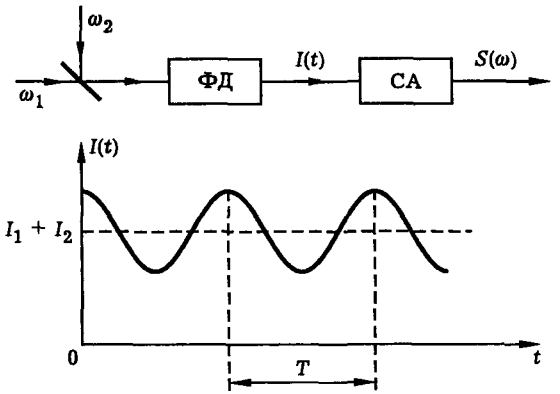



Рис. 17.25. Схема спектроскопии смешения: ФД — фотодетектор, СА — спектроанализатор. Период биений $T$ интенсивности связан с разностью частот световых волн $\Delta\omega$ формулой $T = 2\pi/\Delta\omega$

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$$

можно измерить путем наблюдения *биений интенсивности* суммарного светового поля

$$E = E_1 + E_2.$$

В самом деле, для интенсивности суммарного светового поля получаем

$$I = \frac{c}{4\pi}\widetilde{E^2} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\Delta\omega t - \Delta kz), \tag{17.84}$$

где $I_i = cA_i^2/8\pi$ — интенсивность отдельных волн, $\Delta k = k_1 - k_2$. Из (17.84) видно, что интенсивность суммарного поля ("поля смешения") модулирована во времени с частотой $\Delta\omega$, равной разности частот световых волн. Эта модуляция, если частота ее не слишком велика, может быть измерена радиотехническими средствами.

Принципиальная схема спектроскопии смешения показана на рис. 17.25. Ее основными элементами являются фотодетектор и спектроанализатор. Фотодетектор, на вход которого поступают световые волны, вырабатывает ток, пропорциональный интенсивности света: $i(t) \sim I(t)$. Спектроанализатор строит спектр колебаний фототока.

Эффективная разрешающая способность спектроскопии оптического смешения

$$A = \omega/\Delta\omega$$

может быть чрезвычайно высокой и ограничена в принципе лишь временем измерения сигнала $I(t)$. Более того, чем меньше величина $\Delta\omega$, тем проще измерить сигнал биений, так как при этом уменьшаются требования к быстродействию фотоприемника.

Первый эксперимент по спектроскопии оптического смешения был выполнен в 1955 г. [19]. В этом эксперименте наблюдались биения тока фотоумно-

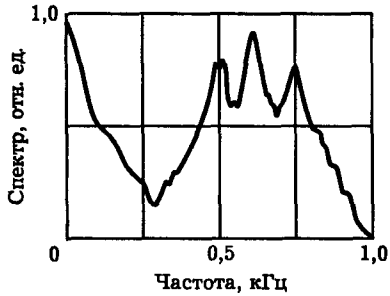



Рис. 17.26. Спектр, полученный при зондировании харовой водоросли Нителла [17]. Центральный пик — нулевая скорость, два симметричных пичка — потоки противоположных направлений в клетке

жителя, обусловленные расщеплением линии излучения ртути 5461 Å на две компоненты вследствие эффекта Зеемана. Разность частот компонент составляла около $10^{10}$ Гц. Фототок квадратичного детектора содержал переменную составляющую, частота которой также была равна $10^{10}$ Гц.

Широкое применение спектроскопии оптического смешения началось после создания лазера. В начале 60-х годов был проведен ряд экспериментов, показавших, что лазерный свет, рассеянный на некотором движущемся объекте, можно смешивать с несмещенным по частоте светом того же источника, причем разность частот оказывается точно равной доплеровскому сдвигу. Например, свет, рассеянный на движущейся жидкости, можно смешать на фотоумножителе с опорным световым сигналом. При этом частота биений фототока определяет доплеровский сдвиг, по величине которого можно измерить скорость потока (*лазерная доплеровская анемометрия*).

На рис. 17.26 приведены данные, иллюстрирующие возможность измерения скоростей порядка 100 мкм/с. Эти данные получены с помощью лазерного доплеровского микроскопа. Нетрудно показать, что доплеровский сдвиг частоты излучения, соответствующий указанной скорости, составляет всего 200 Гц (длину световой волны считаем равной 0,5 мкм). Эффективная разрешающая способность в этом случае составляет $3 \times 10^{12}$.

## Литература

1. *Гудмен Дж.* Введение в фурье-оптику. — М.: Мир, 1970,
2. *Стюард И. Г.* Введение в фурье-оптику. — М.: Мир, 1985.
3. *Алешкевич В. А., Киселев Д. Ф., Корчажкин В. В.* Лазеры в лекционном эксперименте. — М.: Изд-во МГУ, 1985.
4. Лекционные демонстрации по физике/Под ред. В. И. Ивероновой. — М.: Наука, 1972.
5. *Reynolds G. O., De Velis J. B., Parrent G. B., Thompson B. J.* Physical optics notebook: tutorials in Fourier optics. — New York, SPIE-AIP, 1989.
6. *Зверев В. А.* Радиооптика. — М.: Сов. радио, 1975.
7. Квантовая электроника. Маленькая энциклопедия/Под ред. М. Е. Жаботинского — М.: СЭ, 1969.

8. *Лейт Э., Упатниекс Ю.* Фотография в лучах лазера/Лазеры. Сборник из серии "Над чем думают физики". — М.: Наука, 1977.
9. *Porter A. B.* On the diffraction theory of microscopic vision//Phil. Mag. 1906. Ser. 6. V. 11. P. 154.
10. *Микаэлян А. Л.* Голография. — М.: Знание, 1968.
11. Новые физические принципы оптической обработки информации/Под ред. С. А. Ахманова и М. А. Воронцова. — М.: Наука, 1990.
12. *Дитчберн Р.* Физическая оптика. — М.: Наука, 1965.
13. *Демтредер В.* Лазерная спектроскопия. — М.: Наука, 1985.
14. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. — М.: Наука, 1973.
15. Оптическая голография/Под ред. Г. Колфилда. — М.: Мир, 1982.
16. Спектроскопия оптического смешения и корреляция фотонов/Под ред. Г. Камминса и Э. Пайка. — М.: Мир, 1978.
17. *Приезжев А. В.* Лазерный доплеровский микроскоп. (Рекламный проспект.) Международный лазерный центр МГУ. — М.: 1988.
18. *Приезжев А. В., Тучин В. В., Шубочкин Л. П.* Лазерная диагностика в биологии и медицине. — М.: Наука, 1989.
19. *Forrester A. T., Gudmundsen R. A., Johnson P. O*//Phys. Rev. 1955. V 99. P 1691.

# Дополнение 12

# Зонная пластинка Френеля и линза

*Зонная пластинка Френеля. Растровая фокусирующая оптика. Тонкая сферическая линза.*

На основе френелевских представлений о дифракции света дается элементарное объяснение фокусировки света с помощью зонной пластинки, растровой фокусирующей пластинки и тонкой сферической линзы.

**Зонная пластинка Френеля.** Из определения френелевских зон следует, что по отношению к данной точке наблюдения поля любые две соседние зоны действуют как источники света, колеблющиеся в противофазе: посылаемые ими световые волны в значительной степени гасят друг друга. Все четные зоны Френеля дают вклад в результирующее световое поле одного знака, все нечетные зоны дают вклад противоположного знака. Поэтому, если тем или иным способом "выключить" все четные, либо все нечетные зоны Френеля, можно ожидать значительного увеличения интенсивности света в точке наблюдения. Эта идея лежит в основе простого оптического устройства, называемого *зонной пластинкой Френеля.*

На рис. Д12.1 показана пластинка, на которой зачернены все нечетные зоны Френеля. На рис. Д12.2 показана соответствующая ей векторная диаграмма. Видно, что внесение зонной пластинки в световой пучок должно значительно увеличить интенсивность света в точке наблюдения. Так как мощность света, пропускаемого пластинкой, меньше мощности падающей на нее волны, можно сделать вывод, что пластинка *перераспределяет* световое поле в пространстве, т. е. *фокусирует* свет аналогично тому, как это делает линза. Опыт подтверждает это предположение: внесение зонной пластинки между источником света и точкой $P$ многократно увеличивает интенсивность света в этой точке (рис. Д12.3).

Итак, зонная пластинка Френеля способна фокусировать свет подобно собирающей линзе. Нетрудно оценить фокусное расстояние зонной пластинки. Из формулы (13.11) следует, что фокусное расстояние $F$ связано с радиусами френелевских зон $r_n$ соотношением

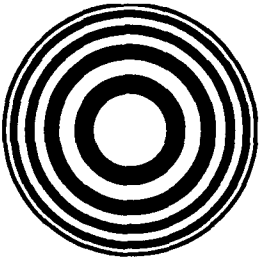


Рис. Д12.1. Вид зонной пластинки Френеля

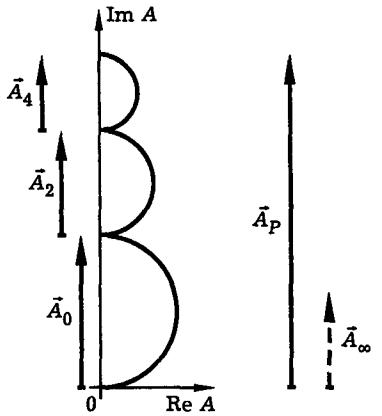



Рис. Д12.2. Векторная диаграмма для зонной пластинки Френеля. Векторы $\vec{A}_0$, $\vec{A}_2$, $\vec{A}_4, \ldots$ изображают вклады в амплитуду суммарного поля открытых (четных) зон Френеля. Амплитуда суммарного поля $\vec{A}_p$ многократно превышает амплитуду поля $\vec{A}_\infty$, которое наблюдалось бы в точке $P$ в отсутствие зонной пластинки

$$r_n = \sqrt{(n+1)\lambda F}, \qquad (Д12.1)$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\lambda$ — длина световой волны.

Подобно линзе, зонная пластинка способна строить оптическое изображение. На лекции демонстрируется опыт, схема которого показана на рис. Д12.4. Пучок света дуговой лампы направляется на транспарант с изображением. Далее пучок света проходит через зонную пластинку и проецируется на экран. Перемещая зонную пластинку вдоль оси пучка, можно добиться четкого изображения на экране. Если же убрать зонную пластинку из пучка, изображение исчезает. Таким образом, опыт показывает, что зонная пластинка Френеля строит оптическое изображение подобно собирающей линзе.

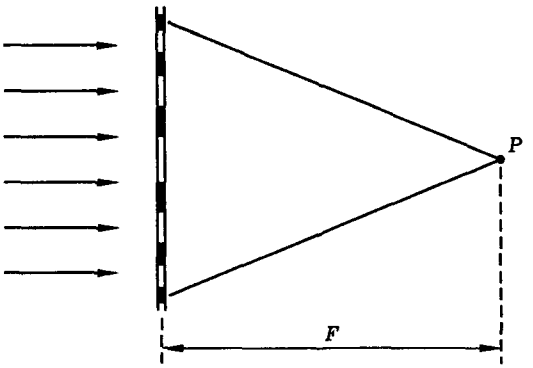



Рис. Д12.3. Фокусировка света зонной пластинкой

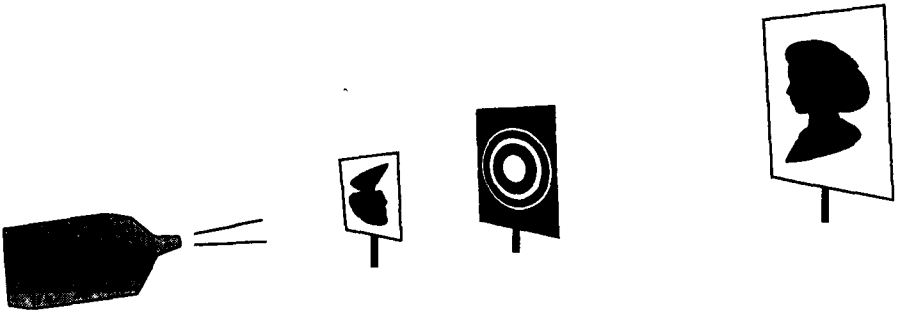


Рис. Д12.4. Формирование оптического изображения зонной пластинкой Френеля

**Растровая фокусирующая оптика.** Можно усовершенствовать зонную пластинку Френеля, заставив "работать в фазе" четные и нечетные зоны Френеля. Для этого необходимо каким-то образом ввести для каждой нечетной зоны дополнительный фазовый набег, равный $\pi$. В частности, можно изготовить профилированную ("фазовую") зонную пластинку, имеющую разную толщину четных и нечетных зон (рис. Д12.5). Профиль, показанный на рис. Д12.5, *а*, дает векторную диаграмму сложения полей, показанную на рис. Д12.5, *в*. Возникает вопрос: нельзя ли вообще "распрямить" спираль векторной диаграммы, т. е. добиться идеальных фазовых соотношений между вторичными волнами, при которых интенсивность света в точке $P$ достигает предельной величины? Очевидно, для этого необходимо *плавно* изменять фазу выходящей световой волны в пределах каждой зоны Френеля.

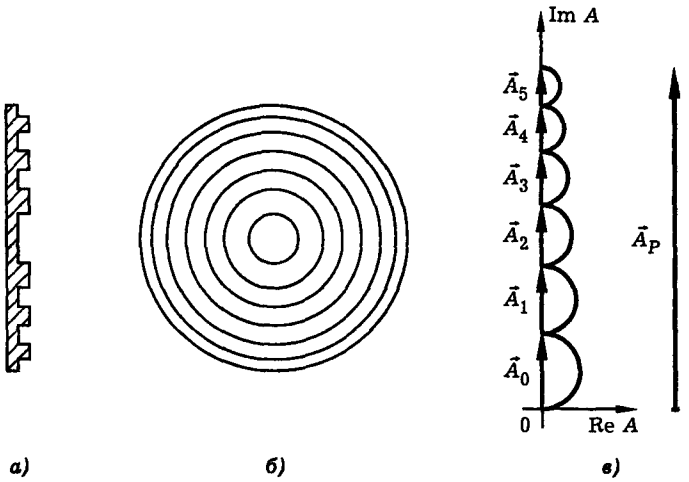



Рис. Д12.5. Фазовая зонная пластинка: вид сбоку (*а*), вид спереди (*б*), векторная диаграмма (*в*)

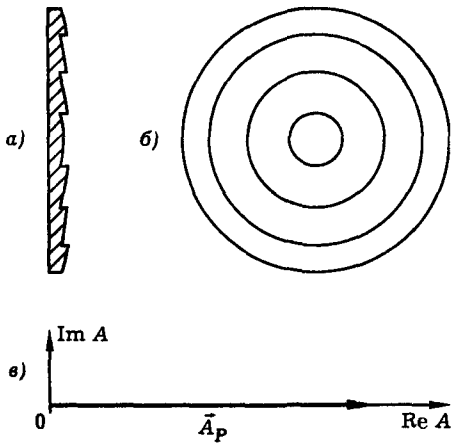



Рис. Д12.6. Фазовая зонная пластинка с криволинейным профилем ("плоская линза"): вид сбоку (*а*), вид спереди (*б*), векторная диаграмма (*в*)

Этой цели удовлетворяет фазовая зонная пластинка с ***криволинейными профилями*** зон, показанная на рис. Д12.6. На векторной диаграмме, определяющей амплитуду результирующего светового поля в точке $P$, элементарные векторы, изображающие вклады всех френелевских зон и подзон, направлены вдоль одной прямой (рис. Д12.6, *в*). Таким образом, фазовая зонная пластинка с криволинейным профилем собирает *весь* падающий на нее свет в точке $P$ (точнее, в малой окрестности этой точки). Системы подобного типа называют ***плоскими линзами*** или ***растровой фокусирующей оптикой***. На практике они используются, например, в прожекторах и автомобильных фарах.

**Тонкая сферическая линза.** Линзу можно рассматривать как фазовую пластинку с плавным криволинейным профилем. Схема фокусировки света линзой показана на рис. Д12.7. Слева на линзу падает плоская световая волна. Элементарные вторичные волны, испускаемые правой (сферической) поверхностью линзы, приходят в точку $P$ (точку фокуса) с одинаковыми фазами. Геометрическая разность хода лучей от центральной и периферийной частей линзы до точки $P$ компенсируется за счет неоднородной толщины стекла, т. е. кривизны поверхности линзы. Данные представления относительно принципа действия линзы позволяют математически рассчитать форму поверхности, которую должна иметь идеальная линза, а также вычислить фокусное расстояние линзы.

Фокусное расстояние тонкой сферической линзы. Рассмотрим плоско-выпуклую тонкую сферическую линзу (рис. Д12.8). Пусть $R$ — радиус кривизны сферической поверхности линзы, $O$ — центр кривизны, $F$ — фокусное расстояние линзы, $n$ — показатель преломления стекла, из которого изготовлена линза. Вывод формулы для фокусного расстояния линзы основан на условии, что два световых луча 1 и 2, показанные на рис. Д12.8, приобретают на участках $O_1N_1P$ и $O_2N_2P$ одинаковые фазовые набеги. Математически это можно записать так:

$$O_1N_1n + N_1P = O_2N_2n + N_2P,$$

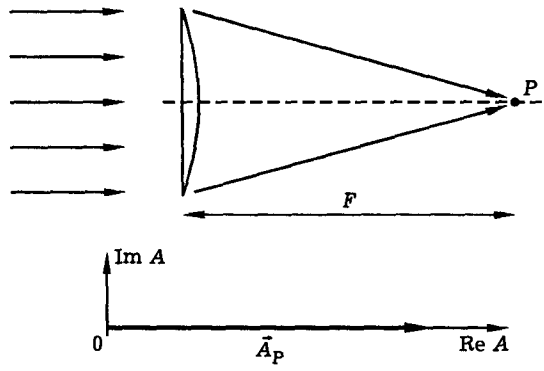



Рис. Д12.7. Фокусировка света тонкой сферической линзой

где $n$ — показатель преломления стекла, из которого изготовлена линза. Выполнение данного условия обеспечивает фокусировку параллельного пучка света в точке $P$. Следовательно, расстояние от точки $P$ до линзы есть ее фокусное расстояние $F$.

Используя рис. Д12.8, нетрудно вывести следующую формулу для фокусного расстояния, называемую *формулой тонкой линзы*:

$$\frac{1}{F} = \frac{n-1}{R}.$$

Величина, обратная фокусному расстоянию, называется *оптической силой* линзы. Оптическая сила двояковыпуклой линзы равна сумме оптических сил составляющих ее плоско-выпуклых линз:

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

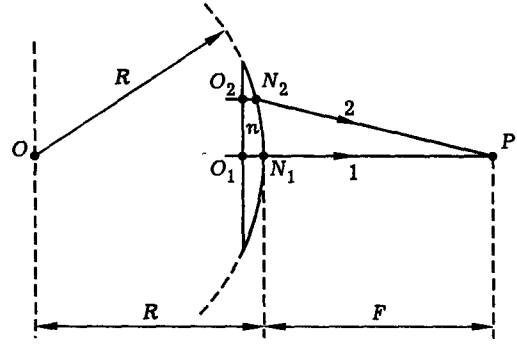



Рис. Д12.8. К выводу формулы для фокусного расстояния линзы

В этой формуле $R_1$ и $R_2$ — радиусы кривизны сферических поверхностей линзы, $F$ — фокусное расстояние линзы, $n$ — показатель преломления материала, из которого приготовлена линза.

Формулу тонкой линзы можно проверить экспериментально. Таким образом, представления френелевской теории дифракции позволяют дать элементарное объяснение фокусировки света.

# Дополнение 13
# Дифракция и фокусировка гауссова пучка

*Параболическое уравнение. Приближение квазиоптики. Решение параболического уравнения. Распространение и дифракция гауссова пучка. Фокусировка гауссова пучка. Размеры фокальной области линзы. Критерий применимости приближения квазиоптики.*

**Параболическое уравнение. Приближение квазиоптики.** Будем описывать распространение света скалярным волновым уравнением

$$\Delta E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \qquad (Д13.1)$$

Рассмотрим распространение ограниченного светового пучка. Предположим, что пучок обладает осевой симметрией. Тогда для описания процесса распространения достаточно двух цилиндрических координат: расстояние вдоль оси пучка $z$ и расстояние от оси пучка $r$. Запишем поле пучка в виде

$$E(r,z) = a(r,z)\cos[\omega t - kz + \varphi(r,z)], \qquad (Д13.2)$$

где $a(r,z)$, $\varphi(r,z)$ — действительные амплитуда и фаза волны в пучке. Формула (Д13.2) выражает тот факт, что световая волна гармоническая, и ось пучка направлена вдоль оси $z$. Поле вида (Д13.2) с переменными амплитудой и фазой называется *пространственно-модулированной* или *квазиплоской* волной. Отметим сразу, что такое поле не является точным решением волнового уравнения (Д13.1), поэтому ниже речь пойдет о построении приближенных решений.

Для дальнейшего удобно перейти к комплексному представлению

$$E = \frac{1}{2}A(r,z)\mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} + \text{к. с.}, \qquad (Д13.3)$$

где $A(r,z)$ — комплексная амплитуда поля. Комплексная амплитуда содержит в себе информацию как о действительной амплитуде, так и о действительной фазе волны и связана с ними соотношениями

$$A = a\mathrm{e}^{i\varphi}, \qquad a = |A|, \qquad \varphi = \arg A. \qquad (Д13.4)$$

Согласно (Д13.3)

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\omega^2 E = -\omega^2\frac{1}{2}A\mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} + \text{к. с.} \qquad (Д13.5)$$

и

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - 2ik\frac{\partial A}{\partial z} - k^2 A\right)\mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} + \text{к. с.} \qquad (Д13.6)$$

Допустим, что

$$\left|\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\right| \ll k\left|\frac{\partial A}{\partial z}\right|. \qquad (Д13.7)$$

Тогда можно пренебречь слагаемым $\partial^2 A/\partial z^2$ в формуле (Д13.6). Подставляя (Д13.5), (Д13.6) в (Д13.1), учитывая формулу $\omega^2/c^2 = k^2$ и условие (Д13.7), получим для комплексной амплитуды волнового пучка уравнение

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i}{2k}\Delta_\perp A = 0, \tag{Д13.8}$$

где

$$\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{Д13.9}$$

$\Delta_\perp$ — оператор Лапласа по поперечным координатам пучка, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, $\lambda$ — длина световой волны. Уравнение (Д13.8) называется *параболическим уравнением.*

Приближение, в котором справедливо параболическое уравнение (Д13.8), называется *приближением квазиоптики.* Согласно (Д13.7) это приближение оправдано, если производная амплитуды световой волны $\partial A/\partial z$ относительно мало изменяется на расстоянии порядка длины световой волны. Более удобный для практики критерий мы дадим ниже. Здесь же отметим, что решение параболического уравнения (Д13.8) во всяком случае не должно противоречить условию (Д13.7).

**Решение параболического уравнения.** Представим комплексную амплитуду волнового пучка в виде пространственного разложения Фурье по поперечным координатам пучка $x, y$:

$$A(\vec{r}, z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A_{\vec{\varkappa}}(z) \exp(i\vec{\varkappa}\vec{r})\, d^2\varkappa, \qquad A_{\vec{\varkappa}}(z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\vec{r}, z) \exp(-i\vec{\varkappa}\vec{r})\, d^2 r. \tag{Д13.10}$$

Здесь $\vec{r}$ — радиус-вектор в поперечном сечении пучка, $\vec{\varkappa}$ — поперечная компонента волнового вектора. В более подробной записи

$$\begin{gathered} A(x, y, z) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} A_{\varkappa_x, \varkappa_y}(z) \exp[i(\varkappa_x x + \varkappa_y y)]\, d\varkappa_x\, d\varkappa_y, \\ A_{\varkappa_x, \varkappa_y}(z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint\limits_{-\infty}^{\infty} A(x, y, z) \exp[-i(\varkappa_x x + \varkappa_y y)]\, dx\, dy. \end{gathered} \tag{Д13.11}$$

Подставляя (Д13.10) в уравнение (Д13.8), получим следующее уравнение для фурье-амплитуды пучка $A_{\vec{\varkappa}}(z)$:

$$\frac{\partial A_{\vec{\varkappa}}}{\partial z} - \frac{i\varkappa^2}{2k} A_{\vec{\varkappa}} = 0, \tag{Д13.12}$$

где $\varkappa^2 = \varkappa_x^2 + \varkappa_y^2$. Решение уравнения (Д13.12) имеет вид

$$A_{\vec{\varkappa}}(z) = A_{\vec{\varkappa}}(z = 0) \exp(i\varkappa^2 z/2k). \tag{Д13.13}$$

Формула (Д13.13) описывает преобразование пространственных фурье-амплитуд пучка в процессе распространения света в вакууме. В этой формуле

$A_{\vec{\varkappa}}(z=0)$ — спектральная амплитуда волнового пучка в начальном сечении $z=0$. Она выражается через начальное распределение комплексной амплитуды пучка $A(\vec{r}, z=0) = A_0(\vec{r})$:

$$A_{\vec{\varkappa}}(z=0) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} A_0(\vec{r}) e^{-i\vec{\varkappa}\vec{r}} d^2r. \qquad (Д13.14)$$

Подставляя (Д13.14) в (Д13.13) и далее (Д13.13) в (Д13.10), можно получить формулу, связывающую комплексную амплитуду пучка $A_0(\vec{r})$ в начальном сечении $z=0$ с амплитудой $A(\vec{r}, z)$ на произвольном расстоянии $z$:

$$A(\vec{r}, z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A_0(\vec{r}\,') H(\vec{r} - \vec{r}\,', z)\, d^2r'. \qquad (Д13.15)$$

Здесь функция $H(\vec{r}, z)$ называется *функцией Грина* свободного пространства и определяется формулой

$$H(\vec{r}, z) = \frac{ik}{2\pi z} \exp\left(-i\frac{kr^2}{2z}\right), \qquad (Д13.16)$$

где $r^2 = x^2 + y^2$. Формулы (Д13.15), (Д13.16) дают общее решение параболического уравнения (Д13.8).

**Распространение и дифракция гауссова пучка.** Теперь конкретизируем вид комплексной амплитуды пучка в плоскости $z=0$. Положим

$$A_0(\vec{r}) = A_0 \exp(-r^2/2\rho_0^2), \qquad A_0 = \text{const}. \qquad (Д13.17)$$

Согласно (Д13.17) волновой фронт исходного пучка плоский, а распределение интенсивности в поперечном сечении имеет вид гауссовой кривой

$$I_0(\vec{r}) = I_0 \exp(-r^2/\rho_0^2). \qquad (Д13.18)$$

Пучок такого вида называется *гауссовым*. Гауссова модель наиболее удобна для расчетов.

Поперечный размер пучка будем характеризовать радиусом (полушириной) по уровню интенсивности, равному $e^{-1}$ максимальной интенсивности. Таким образом, согласно (Д13.18), радиус исходного пучка равен

$$\rho_0 = HWe^{-1}M. \qquad (Д13.19)$$

Эта запись означает, что $\rho_0$ равен полуширине (радиусу) пучка по уровню интенсивности $e^{-1}$ относительно максимума, а для сокращения использованы первые буквы английских слов “half width $e^{-1}$ maximum”.

Рассмотрим теперь как будет меняться пучок в процессе распространения. Для этого подставим (Д13.16) и (Д13.17) в (Д13.15) и выполним интегрирование. Получим

$$A(\vec{r}, z) = \frac{A_0}{(1 + z/ik\rho_0^2)} \exp\left[-\frac{r^2}{2\rho_0^2(1 + z/ik\rho_0^2)}\right]. \qquad (Д13.20)$$

Формула (Д13.20) является основной и позволяет рассчитать характеристики пучка (волновой фронт, профиль интенсивности, радиус) в произвольной точке $z$. Прежде чем написать соответствующие формулы, обратим внимание на то, что в формуле (Д13.20) фигурирует характерная длина, равная $k\rho_0^2$. Назовем эту длину *дифракционной длиной пучка* и обозначим

$$k\rho_0^2 = z_{\text{д}}. \tag{Д13.21}$$

По принятой в оптике терминологии величину

$$D = z/z_{\text{д}} \tag{Д13.22}$$

называют *волновым параметром,* а обратную величину

$$N_{\text{ф}} = z_{\text{д}}/z \tag{Д13.23}$$

называют *числом Френеля.*

В соответствии с (Д13.20) действительные амплитуда $a$ и фаза $\varphi$ пучка равны

$$a = |A_0|\frac{\rho_0}{\rho(z)}\exp\left[-\frac{r^2}{2\rho^2(z)}\right], \qquad \varphi = \alpha - k\frac{r^2}{2R(z)}, \tag{Д13.24}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} &\rho(z) = \rho_0\sqrt{1+(z/z_{\text{д}})^2}, \quad z_{\text{д}} = k\rho_0^2, \\ &R(z) = z(1+z_{\text{д}}^2/z^2), \qquad \alpha = \operatorname{arctg}(z/z_{\text{д}}). \end{aligned} \tag{Д13.25}$$

Полное электрическое поле

$$\begin{aligned} E(r,z) = \frac{1}{2}A_0\frac{\rho_0}{\rho(z)} \times \\ \times \exp\left[-\frac{r^2}{2\rho^2(z)}\right]\exp\left\{i\left[\omega t - kz - k\frac{r^2}{2R(z)} + \alpha\right]\right\} + \text{к. с.} \end{aligned} \tag{Д13.26}$$

Интенсивность излучения

$$I(r,z) = I_0\frac{\rho_0^2}{\rho^2(z)}\exp\left[-\frac{r^2}{\rho^2(z)}\right]. \tag{Д13.27}$$

Формулы (Д13.26), (Д13.27) выражают основной результат данного пункта. Они описывают электрическое поле и интенсивность гауссова светового пучка в произвольной точке с координатами $r, z$. Из (Д13.26), (Д13.27) следует, что в процессе распространения пучок сохраняет гауссову форму профиля интенсивности, т. е. на любых расстояниях остается "гауссовым". Радиус пучка $\rho(z)$ монотонно увеличивается с ростом $z$ (т. е. пучок расширяется — см. рис. Д13.1), а интенсивность, наоборот, уменьшается, так что полная мощность пучка остается неизменной:

$$P = \int_0^\infty I(r,z)2\pi r\,dr = \pi\rho_0^2 I_0 = P_0. \tag{Д13.28}$$

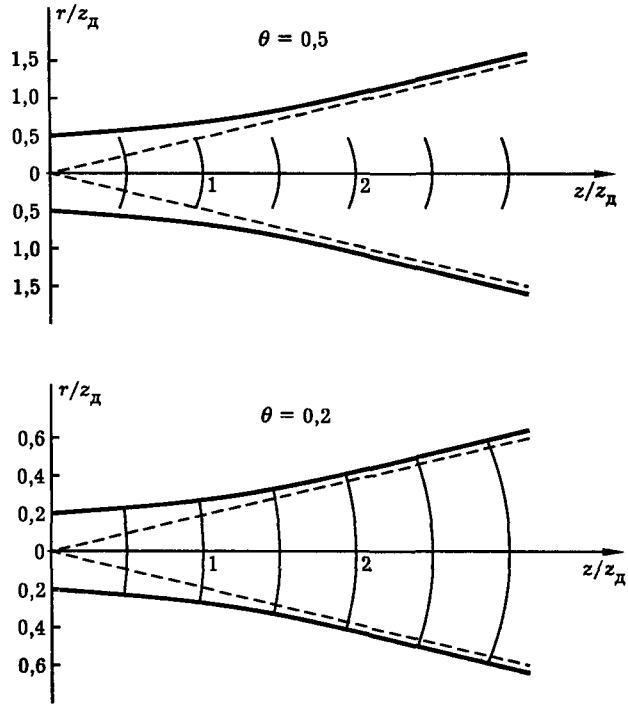



Рис. Д13.1 Дифракционное расплывание и трансформация волнового фронта гауссова пучка, распространяющегося в свободном пространстве: $\theta = (k\rho_0)^{-1}$ — угол дифракционной расходимости пучка в дальней зоне, $z_д = k\rho_0^2$ — дифракционная длина пучка, $\rho_0$ — начальный радиус пучка, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, $\lambda$ — длина волны

Покажем, что параметр $R(z)$ в формулах (Д13.24)–(Д13.26) имеет смысл радиуса кривизны волнового фронта гауссова пучка в приосевой зоне. Для этого рассмотрим сферическую волну

$$E = \frac{\text{const}}{R}\exp[i(\omega t - kR)] + \text{к. с.}, \qquad R = \sqrt{z^2 + r^2}. \tag{Д13.29}$$

В области, где

$$z^2 \gg r^2, \tag{Д13.30}$$

справедливы приближенные формулы: $R \approx z$ и

$$E = \frac{\text{const}}{R}\exp[i(\omega t - kz - k\frac{r^2}{2R})] + \text{к. с.} \tag{Д13.31}$$

Сравнивая формулы (Д13.26) и (Д13.31) видим, что параметр $R(z)$ в (Д13.26) имеет смысл радиуса кривизны волнового фронта. Зависимость кривизны волнового фронта от пройденного гауссовым пучком расстояния $z$, вычисленная по формуле (Д13.25), показана на рис. Д13.2.

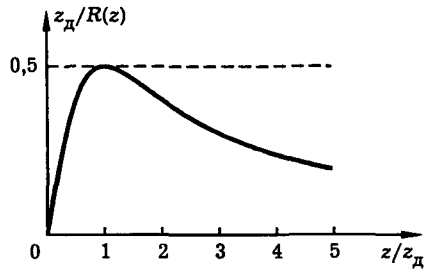



Рис. Д13.2. Изменение кривизны волнового фронта гауссова светового пучка при распространении в свободном пространстве

**Фокусировка гауссова пучка.** Действие тонкой сферической линзы на световой пучок математически можно описать с помощью комплексного коэффициента передачи $\Lambda(r)$, зависящего от поперечной координаты пучка $r$. А именно, можно написать

$$A_1(r) = \Lambda(r)A_0(r), \tag{Д13.32}$$

где $A_0(r)$ и $A_1(r)$ — распределения комплексных амплитуд световой волны вдоль радиуса пучка $r$ соответственно на входной и выходной поверхностях линзы. Так как линза не изменяет распределение интенсивности, а лишь искривляет волновой фронт пучка, положим

$$\Lambda(r) = \exp\left(ikr^2/2f\right), \tag{Д13.33}$$

где $k$ — волновое число световой волны, $f$ — фокусное расстояние линзы. Формула (Д13.33) написана по аналогии с множителем $\exp(-ikr^2/2R)$, описывающим кривизну волнового фронта в формуле (Д13.26). За радиус кривизны волнового фронта пучка, вносимой линзой, естественно принять ее фокусное расстояние. Знак "+" в показателе экспоненты в (Д13.33) соответствует вогнутой форме волнового фронта пучка, прошедшего линзу, т. е. описывает действие фокусирующей (выпуклой) линзы.

Пусть слева на линзу, расположенную в плоскости $z = 0$, падает гауссов световой пучок с плоским волновым фронтом и комплексной амплитудой, определяемой формулой (Д13.17). Тогда в соответствии с (Д13.32), (Д13.33), комплексная амплитуда пучка на выходе из линзы будет равна

$$A_1(r) = A_0 \exp\left[-\frac{r^2}{2\rho_0^2} + ik\frac{r^2}{2f}\right], \tag{Д13.34}$$

или

$$A_1(r) = A_0 \exp\left(-\frac{r^2}{2\rho_1^2}\right), \tag{Д13.35}$$

где

$$\frac{1}{\rho_1^2} = \frac{1}{\rho_0^2} - \frac{ik}{f}. \tag{Д13.36}$$

Итак, действие линзы сводится к замене вещественного радиуса пучка $\rho_0$ на комплексную величину $\rho_1$. Поэтому световое поле во всей зоне фокусировки $r, z \geq 0$ можно определить по формулам (Д13.20), (Д13.24)–(Д13.26), сделав в них замену

$$\rho_0 \to \rho_1, \tag{Д13.37}$$

где $\rho_1$ определяется формулой (Д13.36). Так, делая замену (Д13.37) в (Д13.20), для комплексной амплитуды сфокусированного пучка получаем

$$A(r,z) = \frac{A_0}{(1 + z/ik\rho_1^2)} \exp\left[-\frac{r^2}{2\rho_1^2(1 + z/ik\rho_1^2)}\right]. \tag{Д13.38}$$

Далее, подставляя (Д13.36) в (Д13.38), находим

$$A(r,z) = A_0 \frac{\rho_0}{\rho(z)} \exp\left[-\frac{r^2}{2\rho^2(z)}\right] \exp\left\{i\left[\alpha - k\frac{r^2}{2R(z)}\right]\right\}, \tag{Д13.39}$$

где

$$\rho^2(z) = \rho_0^2\left[\left(1 - \frac{z}{f}\right)^2 + \left(\frac{z}{z_д}\right)^2\right], \qquad z_д = k\rho_0^2 \tag{Д13.40}$$

и

$$\frac{1}{R(z)} = \frac{1}{z_д}\left[\frac{\dfrac{z}{z_д} - \dfrac{z_д}{f}\left(1 - \dfrac{z}{f}\right)}{\left(1 - \dfrac{z}{f}\right)^2 + \left(\dfrac{z}{z_д}\right)^2}\right], \quad \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{z/z_д}{1 - z/f}\right). \tag{Д13.41}$$

Как и для фундаментального гауссова пучка, электрическое поле и интенсивность излучения можно записать в виде (Д13.26), (Д13.27), однако для сфокусированного пучка параметры $\rho(z)$, $R(z)$, $\alpha$ выражаются теперь формулами (Д13.40), (Д13.41). Итак, фокусировка гауссова пучка полностью описана. На практике удобно записывать формулу для радиуса гауссова сфокусированного пучка в виде

$$\rho^2(z) = \rho_0^2(1 - z/f)^2 + (z/k\rho_0)^2, \qquad k = 2\pi/\lambda. \tag{Д13.42}$$

Обобщение этой формулы на случай пространственно-некогерентного падающего пучка с радиусом $\rho_0$ и поперечным радиусом когерентности $\rho_{ко}$ имеет вид

$$\rho^2(z) = \rho_0^2(1 - z/f)^2 + (z/k)^2(1/\rho_0^2 + 1/\rho_{ко}^2). \tag{Д13.43}$$

**Размеры фокальной области линзы.** Как видно из формулы (Д13.40), минимальный радиус сфокусированного пучка (перетяжка) достигается в точке $z = z_w$, где

$$z_w = \frac{f}{1 + (f/z_д)^2}. \tag{Д13.44}$$

Таким образом, точка перетяжки пучка расположена немного левее фокуса. Согласно (Д13.41), в этой же точке обращается в ноль кривизна волнового фронта пучка. В точке перетяжки радиус пучка равен

$$\rho_{\mathrm{w}} = \rho_0 \frac{f/z_{\text{д}}}{\sqrt{1+(f/z_{\text{д}})^2}}, \tag{Д13.45}$$

а в точке фокуса

$$\rho_{\mathrm{f}} = \rho_0 \frac{f}{z_{\text{д}}}. \tag{Д13.46}$$

Обычно в оптике хорошо выполняется условие

$$(f/z_{\text{д}})^2 \ll 1. \tag{Д13.47}$$

Поэтому с хорошей степенью точности можно считать, что точка перетяжки пучка находится в фокусе. Радиус фокального пятна определяется формулой (Д13.46) или, с учетом (Д13.40),

$$\rho_{\mathrm{f}} = \frac{f}{k\rho_0}. \tag{Д13.48}$$

Соответственно площадь фокального пятна

$$S_{\mathrm{f}} = \pi\rho_{\mathrm{f}}^2. \tag{Д13.49}$$

По мере удаления от фокуса площадь поперечного сечения пучка $S(z) = \pi\rho^2(z)$ нарастает и в точках

$$z_{1,2} = f \pm \frac{b}{2} \tag{Д13.50}$$

становится вдвое больше площади фокального пятна, т. е.

$$\rho^2(z_1) = \rho^2(z_2) = 2\rho_{\mathrm{f}}^2. \tag{Д13.51}$$

Величина $b$ в формуле (Д13.50) определяется выражением

$$b = 2\frac{f^2}{k\rho_0^2} \tag{Д13.52}$$

и называется *конфокальным параметром*. Физический смысл этой величины — расстояние между плоскостями, расположенными симметрично относительно фокуса, на которых площадь поперечного сечения сфокусированного пучка вдвое превышает площадь фокальной перетяжки. Общая картина фокусировки гауссова пучка дана на рис. Д13.3. В заключение этого раздела рассмотрим численный пример. Пусть $\lambda = 0{,}5$ мкм, $f = 10$ см, $\rho_0 = 0{,}1$ см. Тогда $k = 2\pi/\lambda = 1{,}3 \times 10^5$ см$^{-1}$, и по формулам (Д13.40), (Д13.48), (Д13.52) получаем $z_{\text{д}} = 13$ м, $\rho_{\mathrm{f}} = 0{,}8 \times 10^{-3}$ см, $b = 0{,}16$ см.

**Критерий применимости приближения квазиоптики.** Опираясь на решения параболического уравнения, данные выше, можно показать, что условие (Д13.7) выполняется в пределах пучка ($r \leq \rho$) для не слишком узких и

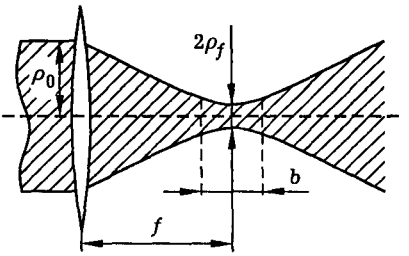



Рис Д13 3 Картина фокусировки гауссова светового пучка

достаточно когерентных световых пучков, чьи характерные поперечные размеры (радиус $\rho$ и поперечный радиус когерентности $\rho_к$) значительно превышают длину световой волны

$$\rho,\ \rho_к \gg \lambda \qquad (Д13\ 53)$$

Для излучения тепловых источников, обладающего малым радиусом когерентности $\rho_к$, условие (Д13 53), вообще говоря, выполняется не всегда В то же время для когерентных лазерных пучков условие (Д13 53) как правило хорошо выполняется Поэтому квазиоптическое приближение, существенно облегчающее описание дифракционных эффектов, широко применяется на практике, и в первую очередь для решения задач лазерной оптики

# Литература

1 *Виноградова М Б , Руденко О В , Сухоруков А П* Теория волн — М Наука, 1979
2 *Ландсберг Г С* Оптика — М Наука, 1976
3 *Ахманов С А , Дьяков Ю Е , Чиркин А С* , Введение в статистическую радиофизику и оптику — М Наука, 1981
4 *Дьяков Ю Е , Никитин С Ю* Задачи по статистической радиофизике и оптике — М Изд-во МГУ, 1985
5 *Ярив А , Юх П* Оптические волны в кристаллах — М Мир, 1987

# Дополнение 14
# Из истории физической оптики

*Цитаты из оригинальных работ Габора, Лейта и Упатниекса.*

**Дэннис Габор. Новый принцип микроскопии.** "Известно, что сферическая аберрация электронных линз устанавливает предел разрешающей способности электронных микроскопов на уровне 5 Å. Были сделаны предложения об улучшении объективов, однако они сложны сами по себе и, кроме того, перспективы улучшения осложняются тем обстоятельством, что предел разрешения пропорционален корню четвертой степени из сферической аберрации. Поэтому улучшение разрешения на порядок потребовало бы уменьшения аберрации на четыре порядка, что является практически безнадежной задачей.

Новый принцип микроскопии, описанный ниже, дает возможность обойти эту трудность, поскольку позволяет вообще обойтись без электронных объективов. Изображения получаются в результате процесса, включающего в себя два этапа: электронный анализ и оптический синтез — как в рентгеновском микроскопе сэра Лоурэнса Брэгга. Однако если рентгеновский микроскоп применим только в очень специальных случаях, когда фазы известны заранее, новый принцип обеспечивает полную запись амплитуд и фаз на одной диаграмме и применим для очень широкого класса объектов.

В общих чертах принцип объясняется рис. Д14.1. Объект освещается сфокусированным электронным пучком, расходящимся из точки фокуса с полууглом расходимости $\alpha$. Достаточная когерентность будет обеспечена, если номинальный или гауссов диаметр фокуса будет меньше, чем предел разрешения, $(\lambda/2)\sin\alpha$. Физический диаметр, определяемый дифракцией и сферической аберрацией освещающей системы, может быть много больше. Объект располагается на небольшом расстоянии позади (или впереди) точки фокуса, а фотографическая пластинка помещается позади объекта на расстоянии, многократно превышающем расстояние между объектом и фокусом. Таким образом, схема напоминает электронный теневой микроскоп, однако она используется в области, где теневой микроскоп бесполезен, поскольку дает изображения, совершенно непохожие на оригинал. Желательно, чтобы объект был меньше, чем освещенная область в плоскости объекта, и он должен быть установлен на опоре, которая пропускает значительную часть первичной волны. На фотопластинке записывается картина интерференции первичной волны с когерентной частью вторичной волны, испускаемой объектом. Можно показать, что по крайней мере во внешних частях диаграммы интерференционные максимумы будут возникать очень близко к тем точкам, где фазы первичной и вторичной волн совпали, как показано на рис. Д14.1.

Если эта фотография проявлена обратимым образом или напечатана, то местоположения максимумов пропускания будут указывать районы, в которых первичная волна имела ту же фазу, что и модифицированная волна; при этом изменения пропускания в этих точках будут приблизительно пропорциональны интенсивности модифицированной волны. Таким образом, если осветить фотографическую запись оптической имитацией электронной волны, то фотопластинка хорошо пропустит только ту часть первичной волны, которая имитирует модифицированную волну как по фазам, так и по амплитудам. Можно

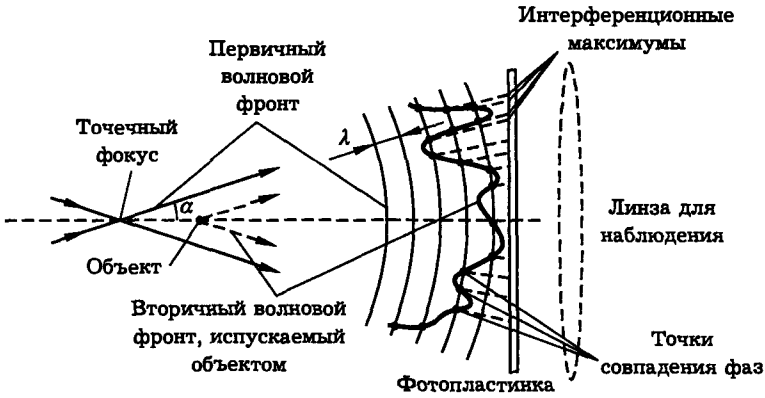



Рис. Д14.1. Интерференция между гомоцентрической освещающей волной и вторичной волной, испускаемой небольшим объектом

показать, что "маскировка" районов вне местоположений максимального пропускания дает лишь слабый искажающий эффект. Можно ожидать, что глядя через такую соответствующим образом обработанную диаграмму, наблюдатель будет видеть позади нее исходный объект так, как если бы он действительно был на месте."

**Эммет Лейт, Юрис Упатниекс. Восстановление волнового фронта с использованием рассеянного освещения и трехмерных объектов.** "Получены голограммы транспарантов в рассеянном свете. Восстановленные изображения свободны от дефектов и имеют качество, сравнимое с качеством изображения в традиционной фотографии, использующей некогерентное освещение. С помощью отраженного света получены голограммы трехмерных объектов. Эти голограммы позволяют воспроизводить трехмерное световое поле, которое обладает всеми видимыми свойствами поля исходного объекта: параллаксом между ближними и дальними деталями заснятой сцены, необходимостью перефокусировать глаз при наблюдении различных частей сцены, а также стерео эффектом, подобным эффекту обычной стереоскопической фотографии."

**Первая демонстрация голографических изображений** (из рекламного проспекта к выставке "Фотография в США"). "Полугодовые съезды Американского оптического общества редко бывают захватывающе интересными событиями, и 800 ученых, собравшихся в апреле 1964 года под крышей старой гостиницы Шератон-Парк в Вашингтоне, никаких потрясений не ожидали. Название одного доклада, который представили на рассмотрение съезда ученые Мичиганского университета Эммет Н. Лейтс и Юрис Упатниекс "Реконструкция волнового фронта при рассеянном освещении трехмерных объектов", не содержало, казалось, и намека на феноменальное открытие. Но демонстрация результатов работы молодых ученых вызвала сенсацию. Фурор был, по словам Лейтса, "неописуемым". Сотни маститых ученых и научных сотрудников промышленных предприятий растянулись в очередь по всему коридору, дожидаясь возможности взглянуть на объемное изображение игрушечного поезда — самое реалистичное фотографическое изображение, которое когда-либо существовало. Большинство присутствовавших, никогда до сих пор не видевших голографического изображения, с недоумением спрашивали: "А где же этот

поезд спрятан?" Они не могли поверить, что перед ними лишь изображение, и оглядывались в поисках зеркального устройства, которое бы отображало запрятанную в каком-нибудь тайнике игрушку."

## Литература

1. *Gabor D*//Nature. 1948. V 161, No 4098. P. 777.
2. *Leith E. N.*, *Upatnieks J*//Journal of the Optical Society of America. 1964. V 54, No 11. P. 1295.

# Часть IV
# Свет и вещество

Эта часть книги посвящена физике взаимодействия света и вещества. В общих чертах это взаимодействие представляется следующим образом. Электромагнитное поле световой волны воздействует на заряженные частицы среды, заставляя их совершать вынужденные колебания на частоте поля. При этом часть энергии светового поля передается частицам — световая волна поглощается. Колеблющиеся электроны, в свою очередь, становятся источниками вторичных световых волн. Интерференция этих волн приводит к тому, что скорость распространения световой волны в среде становится меньше, чем скорость света в вакууме и, кроме того, зависит от частоты света. Это явление называется *дисперсией света*. Одно из ярких проявлений дисперсии — разложение белого света в спектр с помощью стеклянной призмы — было продемонстрировано Ньютоном. Другой пример — изменение формы и длительности светового импульса при его распространении в диспергирующей среде.

Своеобразные оптические явления происходят на границе раздела сред. Здесь вторичное излучение, испускаемое частицами обеих сред, интерферирует таким образом, что имеет место сильное нарушение прямолинейности распространения света: возникают отраженный и преломленный лучи. На отражении и преломлении света основано действие зеркал, линз и призм. Явление полного внутреннего отражения позволяет передавать свет по оптическому волокну. Силы светового давления, возникающие при отражении и преломлении, можно использовать для управления движением микрочастиц.

В анизотропных средах (кристаллах) смещение заряженных частиц под действием электрического поля световой волны происходит не в направлении поля, а в направлении, определяемом структурой кристалла. Вследствие этого распространение света в кристалле имеет ряд специфических особенностей. Одна из них — двойное лучепреломление света на границе анизотропной среды.

Наконец, в сильном световом поле, достигаемом в сфокусированных лазерных пучках, становится существенной нелинейность (ангармонизм) вынужденных колебаний элементарных осцилляторов среды. С нею связан целый класс новых оптических явлений — явлений нелинейной оптики — общей чертой которых является сильная зависимость от интенсивности света. Это такие явления как генерация оптических гармоник, самофокусировка и вынужденное рассеяние света.

Резюмируя, отметим, что взаимодействие света с веществом предоставляет широкие возможности как для управления светом, так и для исследования вещества.

# Лекция 18

# Физика взаимодействия света с веществом

*Модель сплошной среды. Уравнения Максвелла. Материальные уравнения. Классификация сред. Плоская монохроматическая световая волна в линейной однородной изотропной среде. Комплексная диэлектрическая проницаемость, линейная оптическая восприимчивость и комплексный показатель преломления среды. Классическая осцилляторная модель среды.*

Рассматривается взаимодействие света и вещества. Теория строится на основе модели сплошной среды, уравнений Максвелла и материальных уравнений. Дается классификация оптических сред. Излагается классическая осцилляторная модель среды — модель Лоренца.

**Модель сплошной среды. Уравнения Максвелла.** Физическая картина взаимодействия света и вещества представляется следующим образом. Падающий на среду свет раскачивает колебания электронов в атомах. Отдавая им свою энергию, свет поглощается, однако колеблющиеся заряды сами становятся источниками вторичных световых волн. Световое поле в среде формируется в результате интерференции падающего излучения и вторичных световых волн.

В обычных условиях число атомов столь велико и они расположены настолько близко друг к другу, что дискретная структура среды не проявляется. Вещество ведет себя как *сплошная среда*. Это дает возможность ввести такие характеристики вещества как поляризация (дипольный момент единицы объема среды), электрическая и магнитная индукция.

Теория взаимодействия света и вещества строится на основе уравнений электромагнитного поля (уравнения Максвелла) и уравнений, описывающих свойства сред (материальные уравнения). Система уравнений Максвелла имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot}\vec{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0. \end{aligned} \tag{18.1}$$

Здесь $\vec{E}$ и $\vec{D}$ — напряженность и индукция электрического поля, $\vec{H}$ и $\vec{B}$ — напряженность и индукция магнитного поля, $\rho$ — плотность заряда, $\vec{j}$ — плотность тока, $c$ — электродинамическая постоянная, равная скорости света в вакууме. Уравнения (18.1) записаны в гауссовой системе единиц.

**Материальные уравнения.** Систему (18.1) дополняют *материальные уравнения*

$$\begin{gathered} \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}, \qquad \vec{P} = \vec{P}(\vec{E}), \\ \vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}, \qquad \vec{M} = \vec{M}(\vec{H}), \\ \vec{j} = \vec{j}(\vec{E}). \end{gathered} \tag{18.2}$$

Эти уравнения описывают отклик среды на электромагнитное поле: возникновение электрического дипольного момента единицы объема — *поляризации*

*среды* $\vec{P}$, магнитного момента единицы объема — *намагниченности среды* $\vec{M}$, тока проводимости $\vec{j}$.

Как ведут себя поляризация, намагниченность, ток проводимости в среде, возбуждаемой световой волной? Это центральный вопрос физики взаимодействия света с веществом. Надо сказать что много принципиальных результатов было получено здесь в последние тридцать лет, т. е. в "лазерную эпоху". Физика взаимодействия света с веществом и по сей день остается одним из наиболее динамичных разделов физической оптики.

Для радиочастотных полей не слишком большой напряженности материальные уравнения обычно записывают в виде

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}, \qquad \vec{j} = \sigma\vec{E}, \tag{18.3}$$

т. е. фактически в той же форме, что и для постоянных полей. Уравнения (18.3) оказываются следствием того обстоятельства, что векторы $\vec{P}$ и $\vec{M}$ можно представить в виде

$$\vec{P} = \varkappa_{\mathrm{e}}\vec{E}, \qquad \vec{M} = \varkappa_{\mathrm{m}}\vec{H}, \tag{18.4}$$

а диэлектрическая проницаемость $\varepsilon$ и магнитная проницаемость $\mu$ связаны с диэлектрической восприимчивостью $\varkappa_{\mathrm{e}}$ и магнитной восприимчивостью $\varkappa_{\mathrm{m}}$ соотношениями

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\varkappa_{\mathrm{e}}, \qquad \mu = 1 + 4\pi\varkappa_{\mathrm{m}}. \tag{18.5}$$

В силу (18.4) связь между электрическим и магнитным откликом среды и значениями напряженностей электрического и магнитного полей, воздействующих на среду, сводится к простой пропорциональности. С физической точки зрения в основе соотношений (18.4) лежат предположения о *безынерционности* (поляризация и намагниченность точно повторяют, "отслеживают" временно́е поведение полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$), *локальности* (значения $\vec{P}$ и $\vec{M}$ в некоторой точке пространства определяются значениями полей в то же самой точке), *линейности* (уравнения (18.4) линейны) и *изотропии* (восприимчивости описываются скалярными величинами) отклика среды.

Как обстоит дело в оптике, можно ли здесь пользоваться материальными уравнениями в форме (18.3), (18.4)? Подробный ответ на этот вопрос дан в лекциях 19–23. Здесь же заметим, что и в оптике довольно часто пользуются материальными уравнениями типа (18.3), (18.4). Имеется много ситуаций, когда лежащие в основе (18.4) предположения хорошо выполняются и в быстропеременных световых полях.

Следует подчеркнуть вместе с тем, что наибольший интерес для физической оптики представляют случаи, когда описание оптического отклика среды с помощью (18.4) оказывается неадекватным физике явления. С таким положением мы сталкиваемся вблизи оптических резонансов в атомах, молекулах и конденсированных средах. Здесь весьма существенной становится инерционность отклика, когда, например, для поляризации вместо соотношения (18.4) надо писать

$$\vec{P}(t) = \int_0^\infty \varkappa_{\mathrm{e}}(\tau)\vec{E}(t-\tau)\,d\tau. \tag{18.6}$$

Согласно (18.6), значение поляризации в некоторый момент времени определяется значениями поля не только в тот же, но и в предшествующие моменты — проявляется "память" среды.

В сильных лазерных полях отклик среды перестает быть линейным по полю. В поле мощного лазерного излучения линейное соотношение (18.4) для поляризации $\vec{P}$ следует заменить, вообще говоря, бесконечным рядом по степеням напряженности электрического поля

$$\vec{P} = \varkappa_e \vec{E} + \chi^{(2)} \vec{E}\vec{E} + \chi^{(3)} \vec{E}\vec{E}\vec{E} + \cdots. \tag{18.7}$$

Строго говоря, если речь идет о нелинейном отклике среды на сильное световое поле, то в разложение поляризации типа (18.7) войдет не только электрическое, но и магнитное поле, так что в общем случае $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}, \vec{H})$.

Коэффициенты $\chi^{(2)}$, $\chi^{(3)}$ и т. д. в выражении (18.7) носят название *нелинейных восприимчивостей.* Оказывается, что во многих практически важных случаях именно нелинейные восприимчивости определяют главные черты поведения мощного светового пучка в среде. Еще более сложным оказывается отклик среды, если наряду с нелинейностью необходимо учитывать и ее инерционность. Такая ситуация возникает, когда мощное лазерное излучение попадает в резонанс с собственными колебаниями атомов или молекул среды.

Заметим, наконец, что лежащее в основе соотношений (18.3), (18.4) условие локальности отклика также является лишь приближением. Отклик реальной физической системы на световое возмущение, вообще говоря, нелокален, так что, например, для поляризации, обобщая (18.4), надо писать

$$\vec{P}(t, \vec{r}) = \iint\limits_0^\infty \varkappa(\tau, \vec{r}, \vec{r}\,')\vec{E}(t - \tau, \vec{r}\,')\, d\tau\, d^3r'. \tag{18.8}$$

Формула (18.8) показывает, что отклик среды в момент времени $t$ и в некоторой точке пространства $\vec{r}$ определяется значениями поля не только в $(t, \vec{r})$, но и в предшествующие моменты времени и в других (во всяком случае близлежащих) точках пространства. Имеется ряд важных оптических явлений, обусловленных нелокальностью отклика. Среди них надо назвать в первую очередь естественную оптическую активность — вращение плоскости поляризации линейно поляризованной волны.

Волновое уравнение для света в среде. Из всего многообразия сред выделим наиболее важные для оптики. Это — диэлектрические, нейтральные и немагнитные среды, в которых

$$\vec{j} = 0, \qquad \rho = 0, \qquad \vec{B} = \vec{H}. \tag{18.9}$$

Для таких сред материальное уравнение имеет вид

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}), \tag{18.10}$$

а уравнения Максвелла приобретают форму

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\vec{D} = 0, \\ \operatorname{rot}\vec{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\vec{H} = 0. \end{aligned} \tag{18.11}$$

Класс сред, определяемых условиями (18.9), довольно широк. К нему относятся, например, воздух, вода, кристаллы, стекла, пластмассы и т. п. В силу соотношения

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \tag{18.12}$$

материальное уравнение, эквивалентное (18.10), может быть представлено в виде зависимости поляризации от поля:

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}). \tag{18.13}$$

В дальнейшем под материальным уравнением мы будем понимать, как правило, именно уравнение вида (18.13).

Из (18.11), (18.12) нетрудно вывести уравнение

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2}, \tag{18.14}$$

называемое *волновым уравнением* для света в среде. Это уравнение показывает, что оптическая поляризация среды является источником светового поля. Поляризация, в свою очередь, наводится полем световой волны, падающей на среду. Поскольку поляризация имеет смысл дипольного момента единицы объема среды, отыскание материального уравнения сводится к решению уравнения, описывающего движение зарядов. Таким уравнением является уравнение Ньютона в классической модели и уравнение Шредингера в квантовой теории. Уравнения (18.13) и (18.14) образуют в совокупности замкнутую систему уравнений, которая, будучи дополненной соответствующими начальными и граничными условиями, полностью определяет процесс распространения света в диэлектрической нейтральной немагнитной среде.

**Классификация сред.** Формальную классификацию сред проведем на основе материального уравнения (18.13).

Среды, в которых зависимость $\vec{P}(\vec{E})$ является локальной и безынерционной, т. е. значение поляризации среды в некоторой точке пространства и в некоторый момент времени определяется значением поля в той же самой точке и в тот же момент, называются *недиспергирующими*. Нелокальность отклика приводит к *пространственной дисперсии* среды, а его инерционность, т. е. запаздывание $\vec{P}$ относительно $\vec{E}$, — к *временно́й* или *частотной дисперсии*.

*Линейными* называются среды, в которых зависимость поляризации от поля выражается линейным оператором:

$$\vec{P} = \widehat{L}(\vec{E}). \tag{18.15}$$

Оператор $\widehat{L}$ может быть, в частности, линейным запаздывающим функционалом или тензорным оператором. Соответственно, *нелинейными* называются среды, для которых зависимость $\vec{P}$ от $\vec{E}$ нелинейна:

$$\vec{P} = \widehat{NL}(\vec{E}). \tag{18.16}$$

*Изотропными* называют среды, в которых поляризация ориентирована параллельно полю:

$$\vec{P} \parallel \vec{E}. \tag{18.17}$$

Наконец, в *анизотропных* средах вектор $\vec{P}$, вообще говоря, не параллелен вектору $\vec{E}$ :

$$\vec{P} \nparallel \vec{E}. \tag{18.18}$$

Заметим, что свойства дисперсии, линейности и изотропии не связаны между собой. Например, линейная среда может быть как диспергирующей, так и недиспергирующей, изотропной или анизотропной. То же самое относится и к нелинейным средам.

Некоторые важные свойства сред можно установить, не конкретизируя модель среды, а опираясь только на данные определения. Рассмотрим эти свойства.

**Плоская монохроматическая световая волна в линейной однородной изотропной среде.** В силу линейности уравнений Максвелла и материального уравнения, в линейных средах действует оптический *принцип суперпозиции,* согласно которому разные световые волны взаимодействуют со средой независимо друг от друга.

Принцип суперпозиции чрезвычайно упрощает описание взаимодействия света с линейной средой. В самом деле, на основе спектрального подхода любое световое поле можно представить в виде совокупности плоских монохроматических волн. Если среда линейна, то каждая из таких волн распространяется в ней независимо от всех остальных. Следовательно, достаточно рассмотреть распространение световой волны элементарного вида, а именно, плоской монохроматической волны, после чего распространение произвольных полей (например, пучков или импульсов) может быть рассчитано на основе принципа суперпозиции и техники спектральных разложений.

Пусть в некоторой линейной среде распространяется плоская монохроматическая световая волна

$$\vec{E} = \frac{1}{2}\vec{\mathcal{E}} \exp\left[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})\right] + \text{к. с.} \tag{18.19}$$

Здесь $\omega$ — частота, $\vec{k}$ — волновой вектор, $\vec{\mathcal{E}}$ — комплексная амплитуда волны. В силу линейности уравнений (18.11), (18.12), (18.15), магнитное поле $\vec{H}$, электрическая индукция $\vec{D}$ и оптическая поляризация $\vec{P}$ также будут иметь структуру плоских монохроматических волн с частотой $\omega$ и волновым вектором $\vec{k}$:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{2}\vec{\mathcal{H}} \exp\left[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})\right] + \text{к. с.}, \\ \vec{D} &= \frac{1}{2}\vec{\mathcal{D}} \exp\left[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})\right] + \text{к. с.}, \\ \vec{P} &= \frac{1}{2}\vec{\mathcal{P}} \exp\left[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})\right] + \text{к. с.}, \end{aligned} \tag{18.20}$$

где $\vec{\mathcal{H}}$, $\vec{\mathcal{D}}$, $\vec{\mathcal{P}}$ — комплексные амплитуды волн. Подставим выражения (18.19), (18.20) в уравнения Максвелла (18.11). Тогда получим систему алгебраических уравнений для комплексных амплитуд:

$$\left[-i\vec{k},\vec{\mathcal{E}}\right] = -(i\omega/c)\vec{\mathcal{H}}, \quad \left(-i\vec{k},\vec{\mathcal{D}}\right) = 0,$$
$$\left[-i\vec{k},\vec{\mathcal{H}}\right] = (i\omega/c)\vec{\mathcal{D}}, \quad \left(-i\vec{k},\vec{\mathcal{H}}\right) = 0, \tag{18.21}$$

или

$$\left[\vec{k},\vec{\mathcal{E}}\right] = (\omega/c)\vec{\mathcal{H}}, \quad \left(\vec{k},\vec{\mathcal{D}}\right) = 0,$$
$$\left[\vec{k},\vec{\mathcal{H}}\right] = -(\omega/c)\vec{\mathcal{D}}, \quad \left(\vec{k},\vec{\mathcal{H}}\right) = 0. \tag{18.22}$$

Исключим из этих уравнений $\vec{\mathcal{H}}$. Для этого умножим первое уравнение векторно на $\vec{k}$. Получим:

$$\left[\vec{k},\left[\vec{k},\vec{\mathcal{E}}\right]\right] = \frac{\omega}{c}\left[\vec{k},\vec{\mathcal{H}}\right] = -\frac{\omega^2}{c^2}\vec{\mathcal{D}},$$

или

$$\left[\vec{k},\left[\vec{k},\vec{\mathcal{E}}\right]\right] + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{\mathcal{D}} = 0. \tag{18.23}$$

Раскрывая здесь двойное векторное произведение, приходим к уравнению

$$\left(\vec{k},\vec{\mathcal{E}}\right)\vec{k} - k^2\vec{\mathcal{E}} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{\mathcal{D}} = 0. \tag{18.24}$$

Данное уравнение справедливо для любых линейных сред: как изотропных, так и анизотропных. Если же световая волна распространяется в вакууме, то $\vec{\mathcal{D}} = \vec{\mathcal{E}}$ и из (18.24) следует, что $k = \omega/c$.

В изотропной среде вектор $\vec{P}$ параллелен вектору $\vec{E}$. В силу (18.12) отсюда следует, что и вектор $\vec{D}$ параллелен вектору $\vec{E}$. Но тогда из уравнения Максвелла $\operatorname{div}\vec{D} = 0$ вытекает уравнение $\operatorname{div}\vec{E} = 0$, откуда в свою очередь следует, что

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E} - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}. \tag{18.25}$$

С учетом (18.25) общее волновое уравнение (18.14) преобразуется к виду

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2}. \tag{18.26}$$

Данное уравнение справедливо как для линейных, так и для нелинейных изотропных сред, причем для светового поля любого вида, а не только для плоской монохроматической волны.

**Комплексная диэлектрическая проницаемость, линейная оптическая восприимчивость и комплексный показатель преломления среды.** Вернемся к уравнению (18.24) и применим его для анализа распространения плоской монохроматической световой волны в линейной изотропной среде. В силу изотропии среды векторы $\vec{E}$, $\vec{P}$ и $\vec{D}$ должны быть параллельны. Но тогда должны быть параллельны и векторы комплексных амплитуд $\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{P}}$, и $\vec{\mathcal{D}}$, которые не зависят от времени. Это дает основание написать

$$\vec{\mathcal{D}} = \varepsilon(\omega)\vec{\mathcal{E}} \tag{18.27}$$

и

$$\vec{\mathcal{P}} = \varkappa(\omega)\vec{\mathcal{E}}, \tag{18.28}$$

где $\varepsilon(\omega)$ и $\varkappa(\omega)$ — скалярные величины, которые могут зависеть от частоты света. Величина $\varepsilon(\omega)$, являющаяся коэффициентом пропорциональности между комплексными амплитудами электрической индукции и напряженности электрического поля, называется *комплексной диэлектрической проницаемостью* среды. Величина $\varkappa(\omega)$, определенная как коэффициент пропорциональности между комплексными амплитудами поляризации и поля, называется *линейной оптической восприимчивостью* среды.

Подставив (18.27) в уравнение $\left(\vec{k}, \vec{\mathcal{D}}\right) = 0$, получим $\left(\vec{k}, \vec{\mathcal{E}}\right) = 0$. При этом уравнение (18.24) принимает вид

$$-k^2\vec{\mathcal{E}} + (\omega^2/c^2)\varepsilon(\omega)\vec{\mathcal{E}} = 0, \tag{18.29}$$

откуда

$$k^2 = (\omega^2/c^2)\varepsilon(\omega), \tag{18.30}$$

или

$$k = (\omega/c)n(\omega), \tag{18.31}$$

где введена величина

$$n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}, \tag{18.32}$$

называемая *комплексным показателем преломления* среды.

Уравнение (18.31), связывающее между собой частоту $\omega$ и волновое число $k$ световой волны, называется *дисперсионным уравнением*. Данное уравнение справедливо для линейных изотропных сред. Если же световая волна распространяется в вакууме, то $\varepsilon = n = 1$ и из (18.31) получаем $k = \omega/c$.

Формула (18.31) позволяет записать волновой вектор $\vec{k}$ для световой волны в среде в виде

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c}n\vec{m}, \tag{18.32a}$$

где $\vec{m} = \vec{k}/k$ — единичный вектор, направленный вдоль $\vec{k}$.

Интенсивность световой волны в среде. Интенсивность световой волны как в вакууме, так и в среде определяется средним значением вектора Пойнтинга $I = \langle S \rangle$, где

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}, \vec{H}\right],$$

а угловые скобки обозначают усреднение по периоду световых колебаний. Пользуясь формулами (18.19), (18.20), можно выразить $\left\langle \vec{S} \right\rangle$ через комплексные амплитуды электрического и магнитного полей:

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{c}{16\pi}\left[\vec{\mathcal{E}}^*, \vec{\mathcal{H}}\right] + \text{к. с.} \tag{18.32б}$$

Здесь звездочка обозначает комплексное сопряжение. Из (18.22), (18.32а) следует, что

$$\vec{\mathcal{H}} = n\left[\vec{m}, \vec{\mathcal{E}}\right]. \tag{18.32в}$$

Подставив (18.32в) в (18.32б), получим

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{cn}{8\pi}|\mathcal{E}|^2\vec{m}$$

и выражение для интенсивности

$$I = \frac{cn}{8\pi}|\mathcal{E}|^2. \tag{18.32г}$$

Формула (18.32г) определяет интенсивность света в прозрачной линейной изотропной среде. В этой формуле $\mathcal{E}$ — комплексная амплитуда электрического поля световой волны, $n$ — показатель преломления среды (в области прозрачности среды ее показатель преломления действителен — см. лекцию 19), $c$ — скорость света в вакууме. При $n = 1$ выражение (18.32г) переходит в формулу (3.28) для интенсивности света в вакууме.

Частотный коэффициент передачи. Функция Грина. Интеграл Дюамеля. Выше мы установили связь между поляризацией и полем для случая, когда в линейной изотропной среде распространяется плоская монохроматическая световая волна. Теперь обобщим расчет на случай светового сигнала произвольного вида.

Рассмотрим некоторую фиксированную точку среды. В предположении локальности отклика среды на световое поле запишем напряженность поля и оптическую поляризацию среды в виде интегралов Фурье:

$$E(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \tag{18.33}$$

$$P(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P(\omega)e^{i\omega t}d\omega. \tag{18.34}$$

В силу линейности среды спектральные амплитуды поляризации и поля связаны между собой соотношением

$$P(\omega) = \chi(\omega)E(\omega), \tag{18.35}$$

где $\chi(\omega)$ — *частотный коэффициент передачи данной линейной системы* или, в терминах оптики, *линейная оптическая восприимчивость среды*. Подставив (18.35) в (18.34) и используя формулу обратного преобразования Фурье

$$E(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t)e^{-i\omega t}dt, \tag{18.36}$$

вытекающую из (18.33), получим

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\tau) E(t-\tau)\, d\tau, \tag{18.37}$$

где

$$\chi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \tag{18.38}$$

Итак, поставленная задача решена: задавая конкретный вид функций $E(t)$ и $\chi(\omega)$, по формулам (18.37), (18.38) можно вычислить функцию $P(t)$. В частности, если $E(t)$ имеет вид очень короткого импульса, т. е.

$$E(t) = \text{const} \cdot \delta(t), \tag{18.39}$$

то по формуле (18.37) находим

$$P(t) = \text{const} \cdot \chi(t). \tag{18.40}$$

Этот результат показывает, что функция $\chi(\tau)$ в (18.37) описывает отклик системы на воздействие типа бесконечно короткого импульса. Функцию $\chi(\tau)$ называют *функцией импульсного отклика* или *функцией Грина* данной линейной системы. Как видно из (18.38), функция Грина связана с частотным коэффициентом передачи преобразованием Фурье. Это общее свойство всех линейных систем.

Обращая формулу (18.38), можно записать

$$\chi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \tag{18.41}$$

Так как отклик системы не может опережать воздействие на нее (*принцип причинности*), из (18.39), (18.40) следует, что

$$\chi(t < 0) = 0, \tag{18.42}$$

т. е. функция Грина отлична от нуля лишь при положительных значениях своего аргумента. Это дает основание переписать формулы (18.37) и (18.41) в виде

$$P(t) = \int_{0}^{\infty} \chi(\tau) E(t-\tau)\, d\tau, \tag{18.43}$$

$$\chi(\omega) = \int_{0}^{\infty} \chi(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \tag{18.44}$$

Формула (18.43) носит название *интеграла Дюамеля*. Согласно этой формуле, отклик линейной системы есть линейный запаздывающий функционал относительно входного воздействия. Иными словами, интеграл Дюамеля описывает

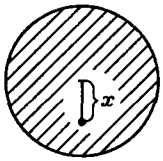



Рис. 18.1. Классическая модель атома

отклик линейной системы на произвольный входной сигнал с учетом инерционности системы.

Таким образом, в общем случае материальное уравнение линейной изотропной среды имеет вид (18.43). В этой формуле $\chi(\tau)$ — функция Грина, зависящая только от свойств среды и связанная с линейной оптической восприимчивостью $\chi(\omega)$ формулой (18.38).

**Классическая осцилляторная модель среды.** Допустим, что рассматриваемая линейная изотропная среда однородна. В этом случае оптическую поляризацию среды $\vec{P}$, имеющую смысл дипольного момента единицы объема, можно представить в виде

$$\vec{P} = N\vec{p}, \tag{18.45}$$

где $N$ — число атомов в единице объема, $\vec{p}$ — дипольный момент отдельного атома. По определению дипольного момента

$$\vec{p} = e\vec{x}, \tag{18.46}$$

где $e$ — заряд электрона, $\vec{x}$ — смещение электрона относительно атомного ядра (рис. 18.1).

Смещение электрона относительно ядра происходит под действием светового поля, следовательно $\vec{x} = \vec{x}(\vec{E})$. Для установления вида этой зависимости необходимо конкретизировать модель атома.

Рассмотрим классическую осцилляторную модель атома, предложенную Лоренцем. Согласно этой модели, атом представляет собой гармонический осциллятор и подчиняется уравнению

$$\ddot{\vec{x}} + \Gamma\dot{\vec{x}} + \omega_0^2\vec{x} = \frac{e}{m}\vec{E}. \tag{18.47}$$

Здесь $m$ — масса электрона, $\omega_0$ — собственная частота колебаний электрона в атоме, параметр $\Gamma$ описывает затухание колебаний. Подставив (18.19) в (18.47), получим уравнение

$$\ddot{\vec{x}} + \Gamma\dot{\vec{x}} + \omega_0^2\vec{x} = \frac{e}{m}\frac{1}{2}\vec{\mathcal{E}}\exp\left[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})\right] + \text{к. с.}, \tag{18.48}$$

где $\vec{r}$ имеет смысл радиус-вектора электрона. Поскольку размер атома $a$ много меньше длины световой волны $\lambda$, имеем оценку $\vec{k}\vec{r} \approx ka = 2\pi a/\lambda \ll 1$. Это соотношение позволяет приближенно считать атом точечным.

Вычислим поляризацию среды в модели Лоренца. Ищем решение уравнения (18.48) в виде

$$\vec{x} = \frac{1}{2}\tilde{\vec{x}} \exp\left[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})\right] + \text{к. с.}, \tag{18.49}$$

где $\tilde{\vec{x}}$ — комплексная амплитуда смещения электрона относительно атомного ядра. Подставляя (18.49) в (18.48) находим

$$\tilde{\vec{x}} = \frac{e}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma}\vec{\mathcal{E}}. \tag{18.50}$$

Согласно (18.45), (18.46), (18.49), поляризация среды есть

$$\vec{P} = Ne\vec{x} = Ne\frac{1}{2}\tilde{\vec{x}} \exp\left[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})\right] + \text{к. с.} \tag{18.51}$$

Из (18.51), (18.20) следует, что

$$\vec{\mathcal{P}} = Ne\tilde{\vec{x}} \tag{18.52}$$

или, с учетом (18.50),

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{Ne^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma}\vec{\mathcal{E}}. \tag{18.53}$$

Сравнивая формулы (18.28) и (18.53), находим выражение для линейной оптической восприимчивости среды в модели Лоренца:

$$\varkappa(\omega) = \frac{Ne^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma}. \tag{18.54}$$

Из (18.12), (18.19), (18.20) следует, что

$$\vec{\mathcal{D}} = \vec{\mathcal{E}} + 4\pi\vec{\mathcal{P}}. \tag{18.55}$$

Принимая во внимание (18.27), (18.28), (18.55) можно записать

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi\varkappa(\omega) \tag{18.56}$$

или, с учетом (18.54),

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi Ne^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma}. \tag{18.57}$$

Формула (18.57) дает выражение для комплексной диэлектрической проницаемости среды в модели Лоренца.

Выражение для линейной оптической восприимчивости можно получить и другим способом, не прибегая к модели гармонической световой волны (18.19). В самом деле, умножив на $Ne$ уравнение (18.47), получим уравнение, связывающее между собой поляризацию и поле:

$$\ddot{\vec{P}} + \Gamma\dot{\vec{P}} + \omega_0^2\vec{P} = \frac{Ne^2}{m}\vec{E}. \tag{18.58}$$

Используя условие изотропии среды, положим

$$\vec{E} = \vec{e}E, \qquad \vec{P} = \vec{e}P \tag{18.59}$$

и перейдем к скалярному уравнению

$$\ddot{P} + \Gamma\dot{P} + \omega_0^2 P = \frac{Ne^2}{m}E. \tag{18.60}$$

Нетрудно найти решение этого уравнения при произвольной функции $E(t)$. Для этого воспользуемся спектральным методом и подставим (18.33), (18.34) в (18.60). Тогда получим следующую формулу, связывающую между собой спектральные амплитуды поляризации и поля:

$$P(\omega) = \frac{Ne^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma}E(\omega). \tag{18.61}$$

Сравнивая (18.35) и (18.61), находим

$$\chi(\omega) = \frac{Ne^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma}. \tag{18.62}$$

что совпадает с (18.54). Подставив (18.62) в (18.38) и выполнив интегрирование, получим

$$\chi(\tau) = \frac{Ne^2}{m}\begin{cases} 0, & \tau < 0, \\ \dfrac{1}{\Omega}e^{-\gamma\tau}\sin\Omega\tau, & \tau \geq 0, \end{cases} \tag{18.63}$$

где $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, $\gamma = \Gamma/2$. Формула (18.63) определяет функцию импульсного отклика среды в модели Лоренца. Заметим, что выражение (18.63) подчиняется условию (18.42). Теперь искомое общее решение уравнения (18.60) определяется формулами (18.43), (18.63).

Итак, мы вывели материальное уравнение для линейной изотропной среды, состоящей из микроскопических гармонических осцилляторов. В следующей лекции будет показано, что данная модель позволяет объяснить целый ряд явлений, связанных с дисперсией и поглощением света.

# Литература


1. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. — М.: Наука, 1973.
2. *Ахманов С. А., Хохлов Р. В.* Проблемы нелинейной оптики. — М.: Изд-во АН СССР, 1965.
3. *Бломерген Н.* Нелинейная оптика. — М.: Мир, 1966.
4. Квантовая электроника. Маленькая энциклопедия./Под ред. М. Е. Жаботинского. — М.: СЭ, 1969.
5. *Цернике Ф., Мидвинтер Дж.* Прикладная нелинейная оптика. — М.: Мир, 1976.
6. *Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981.

# Лекция 19

# Световые волны в линейной изотропной среде

*Дисперсия и поглощение света в линейной изотропной среде. Факты, подтверждающие теорию дисперсии Лоренца. Методы изучения дисперсии и поглощения света. Оптическая спектроскопия. Распространение светового импульса в диспергирующей среде.*

Рассматривается распространение света в линейной однородной изотропной среде. Обсуждаются явления дисперсии и поглощения света. Анализируется распространение светового импульса в диспергирующей среде.

**Дисперсия и поглощение света в линейной изотропной среде.** Взаимодействие света с линейной изотропной средой приводит к двум основным физическим эффектам: уменьшению фазовой скорости света в среде и поглощению света. Выше мы рассмотрели эти эффекты, используя представление о среде как ансамбле гармонических осцилляторов (см. лекцию 7). Обсудим теперь явления дисперсии и поглощения света на языке модели сплошной среды.

Оптические свойства линейной изотропной среды можно охарактеризовать комплексным показателем преломления (см. лекцию 18). Введем действительную и мнимую части комплексного показателя преломления среды $n$ с помощью формулы

$$n = n' - in''. \tag{19.1}$$

Подставив (19.1) в (18.31), получим следующее выражение для волнового числа:

$$k = k' - ik'', \tag{19.2}$$

где параметры

$$k' = \omega n'/c, \qquad k'' = \omega n''/c \tag{19.3}$$

имеют смысл действительной и мнимой частей волнового числа. Для того чтобы выяснить физический смысл этих величин, представим себе, что световая волна падает нормально на границу среды. В этом случае световую волну в среде можно записать в виде

$$E = \frac{1}{2}\mathcal{E}\exp[i(\omega t - kz)] + \text{к. с}, \tag{19.4}$$

или, с учетом (19.2),

$$E = \frac{1}{2}\mathcal{E}\exp(-k''z)\exp[i(\omega t - k'z)] + \text{к. с.} \tag{19.5}$$

Из формул (19.1)–(19.5) следует, что мнимая часть показателя преломления определяет затухание световой волны, а действительная часть — скорость распространения света в среде. А именно, записав фазовую скорость света в виде $v_\text{ф} = \omega/k'$, получим

$$v_\text{ф} = c/n'. \tag{19.6}$$

Поскольку $n' = n'(\omega)$, фазовая скорость зависит от частоты света. Это явление носит название *дисперсии*. Из (19.5) вытекает также закон поглощения света в среде (закон Бугера):

$$I = I_0 \exp(-\delta z), \tag{19.7}$$

где коэффициент поглощения $\delta$ определяется формулами

$$\delta = 2k'' = 2\omega n''/c. \tag{19.8}$$

Используя формулу (18.32), можно выразить показатель преломления $n'$ и коэффициент поглощения света $\delta$ через комплексную диэлектрическую проницаемость среды $\varepsilon$:

$$n'(\omega) = \mathrm{Re}\sqrt{\varepsilon(\omega)}, \tag{19.9}$$

$$\delta(\omega) = -2(\omega/c)\mathrm{Im}\sqrt{\varepsilon(\omega)}. \tag{19.10}$$

Здесь $\omega$ — частота световой волны, $c$ — скорость света в вакууме.

Вычислим показатель преломления и коэффициент поглощения света, используя выражение для $\varepsilon(\omega)$, полученное в модели Лоренца. Введем обозначение

$$\omega_\mathrm{p} = \sqrt{4\pi N e^2/m} \tag{19.11}$$

и перепишем формулу (18.57) в виде

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma}. \tag{19.12}$$

Параметр $\omega_\mathrm{p}$ имеет размерность частоты и называется "плазменной" частотой. Выделяя действительную и мнимую части $\varepsilon$, преобразуем выражение (19.12) следующим образом:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_\mathrm{p}^2(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2}. \tag{19.13}$$

Пусть среда является достаточно разреженной, т. е. величина $N$ достаточно мала. Тогда, как видно из (19.11) и (19.12), величина $\varepsilon$ мало отличается от единицы:

$$\varepsilon = 1 + \mu, \qquad |\mu| \ll 1, \tag{19.14}$$

следовательно, $n = \sqrt{\varepsilon} \approx 1 + \mu/2$. В этом приближении

$$n'(\omega) = 1 + \frac{1}{2}\frac{\omega_\mathrm{p}^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2} \tag{19.15}$$

и

$$\delta(\omega) = \frac{\omega_\mathrm{p}^2\omega^2\Gamma/c}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2}. \tag{19.16}$$

Рассмотрим область частот вблизи резонанса, когда $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$. Полагая $\omega_0^2 - \omega^2 \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$, получим

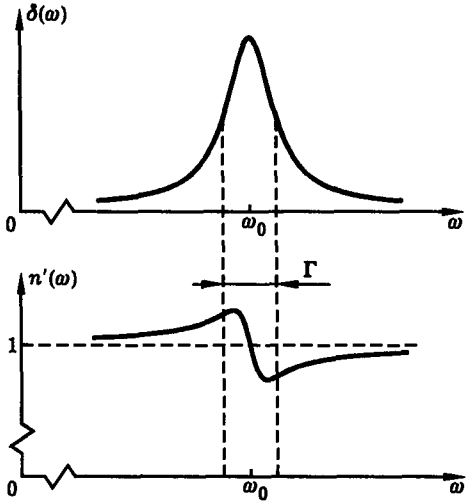



Рис. 19.1. Поглощение и дисперсия света в разреженной линейной изотропной среде

$$n'(\omega) = 1 + \frac{\pi N e^2}{m\omega_0^2} \frac{(\omega_0 - \omega)}{(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma^2/4} \tag{19.17}$$

и

$$\delta(\omega) = \frac{\pi N e^2}{mc} \frac{\Gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma^2/4}. \tag{19.18}$$

Итак, формулы (19.17), (19.18), полученные с помощью модели Лоренца, описывают дисперсию и поглощение света в разреженной линейной изотропной среде. Заметим, что выражение для коэффициента поглощения (19.18) совпадает с выражением (7.20), полученным выше для ансамбля осцилляторов. В частном случае $\Gamma = 0$ формула для показателя преломления (19.15) переходит в формулу (7.47).

Обычно в оптике имеет место соотношение $\Gamma \ll \omega_0$. Типичные зависимости $\delta(\omega)$ и $n'(\omega)$ для этого случая показаны на рис. 19.1. Как видно из этого рисунка, спектральная линия поглощения имеет ширину порядка $\Gamma$, ее центр расположен на частоте $\omega_0$, форма линии лоренцева. Показатель преломления $n'(\omega)$ заметно отличается от единицы лишь вблизи полосы поглощения. Ниже мы будем обозначать показатель преломления буквой $n$ (без штриха).

Нормальная и аномальная дисперсия. В зависимости от знака производной $\partial n/\partial\omega$ выделяют две области частот: область *нормальной* дисперсии, где показатель преломления возрастает с ростом частоты света ($\partial n/\partial\omega > 0$), и область *аномальной* дисперсии, где показатель преломления уменьшается с ростом частоты ($\partial n/\partial\omega < 0$). Как видно из рис. 19.1, область нормальной дисперсии расположена за пределами полосы поглощения, следовательно, она совпадает с областью прозрачности вещества. Значительно более узкая область аномальной дисперсии, напротив, расположена вблизи центра линии, т. е. там, где поглощение света максимально.

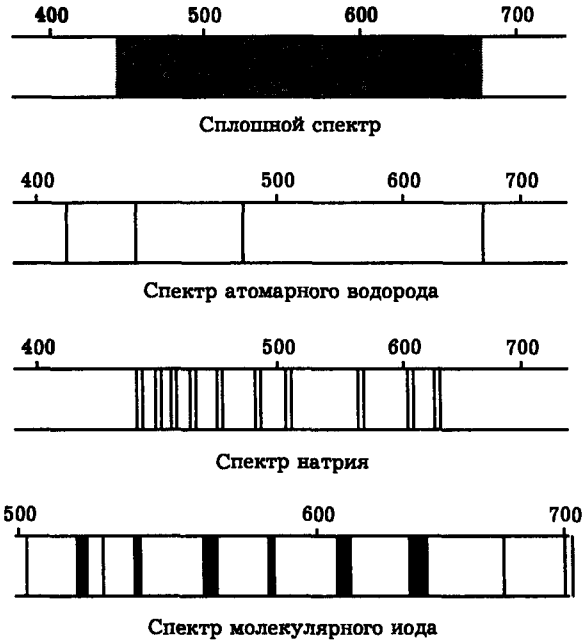



Рис. 19.2. Примеры оптических спектров

Силы осцилляторов. Реальные атомы обладают, как правило, не одной, а несколькими спектральными линиями поглощения (рис. 19.2). Если обозначить частоты и ширины этих спектральных линий соответственно через $\omega_j$ и $\Gamma_j$, то выражение (18.57) для комплексной диэлектрической проницаемости среды можно обобщить следующим образом:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma_j},$$

где параметры $f_j$ характеризуют относительные интенсивности различных спектральных линий и называются *силами осцилляторов*.

Обычно силы осцилляторов нормируют таким образом, чтобы их сумма была равна числу электронов на внешней электронной оболочке атома. Для атомов щелочных металлов, имеющих на внешней оболочке один электрон, условие нормировки имеет вид

$$\sum_j f_j = 1.$$

Например, для двух D-линий натрия силы осцилляторов равны

$$f(3\,^2S_{1/2} - 3\,^2P_{1/2}) = 0{,}325,$$

$$f(3\,^2S_{1/2} - 3\,^2P_{3/2}) = 0{,}65.$$

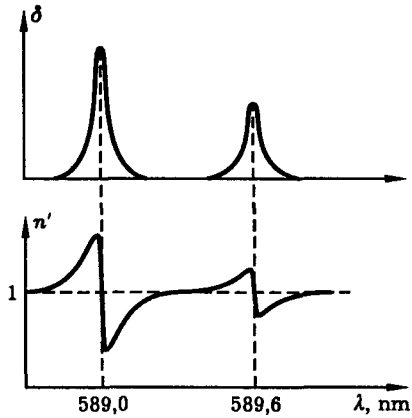



Рис. 19.3. Дисперсия и поглощение света в парах натрия вблизи D-линий

Их сумма близка к единице, а вклад всех остальных переходов пренебрежимо мал. Дисперсия и поглощение паров натрия вблизи D-линий показаны на рис. 19.3. Экспериментальные данные о параметрах спектральных линий различных атомов имеются в справочниках (см., например, [2–4]).

Показатель преломления плотных сред. Теория дисперсии, изложенная выше, предполагает, что на атом воздействует только поле световой волны, а влиянием полей, создаваемых соседними атомами, можно пренебречь. Очевидно, что такой подход применим лишь для достаточно разреженных сред, в которых атомы расположены на больших расстояниях друг от друга. Если же расстояния между атомами невелики, то создаваемое ими поле может быть соизмеримым со световым полем. Это обстоятельство требует внести в теорию соответствующую поправку. Здесь мы обобщим теорию дисперсии на случай сред произвольной плотности.

Как известно из электродинамики, эффективное поле, действующее в среде, отличается от внешнего поля $\vec{E}$ на величину, пропорциональную поляризации среды $\vec{P}$, а именно

$$\vec{E}_{\text{эфф}} = \vec{E} + \frac{4\pi}{3}\vec{P}. \tag{19.19}$$

Делая замену $\vec{E}$ на $\vec{E}_{\text{эфф}}$ в модели Лоренца (18.47), получим уравнение

$$\ddot{\vec{x}} + \Gamma\dot{\vec{x}} + \omega_0^2\vec{x} = \frac{e}{m}\vec{E}_{\text{эфф}}. \tag{19.20}$$

Из (19.19), (19.20) вытекает следующее уравнение для поляризации среды $\vec{P} = Ne\vec{x}$:

$$\ddot{\vec{P}} + \Gamma\dot{\vec{P}} + \omega_0^2\vec{P} = \frac{Ne^2}{m}\left(\vec{E} + \frac{4\pi}{3}\vec{P}\right). \tag{19.21}$$

Рассмотрим световую волну элементарного вида — плоскую монохроматическую. Подставив (18.19) и (18.20) в (19.21), получим соотношение между комплексными амплитудами поляризации и поля:

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma)\vec{\mathcal{P}} = \frac{Ne^2}{m}\left(\vec{\mathcal{E}} + \frac{4\pi}{3}\vec{\mathcal{P}}\right). \tag{19.22}$$

Из (18.28) и (19.22) следует уравнение для оптической восприимчивости

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma)\varkappa(\omega) = \frac{Ne^2}{m}\left[1 + \frac{4\pi}{3}\varkappa(\omega)\right], \tag{19.23}$$

а из (18.32), (18.56) и (19.23) — уравнение для показателя преломления

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi Ne^2}{3m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma}. \tag{19.24}$$

Итак, уравнение (19.24) учитывает то обстоятельство, что поле внутри среды отличается от поля падающей световой волны. Дополнительное поле в среде возникает за счет ее поляризации, т. е. за счет смещения зарядов по действием света. В предельном случае сильно разреженной среды, когда показатель преломления мало отличается от единицы, формула (19.24) переходит в формулу (18.57). В области прозрачности материала, определяемой условием $|\omega - \omega_0| \gg \Gamma$, формула (19.24) приобретает вид

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi Ne^2}{3m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{19.25}$$

и называется *формулой Лоренц–Лоренца.*

**Факты, подтверждающие теорию дисперсии Лоренца.** Классическая теория дисперсии Лоренца объясняет, по крайней мере качественно, целый ряд оптических эффектов. В частности, она правильно предсказывает зависимость показателя преломления от плотности среды и частоты света.

Рефракция. Зависимость показателя преломления от плотности среды описывается формулой Лоренц–Лоренца. Эта формула удобна для экспериментальной проверки. Обозначим плотность вещества буквой $\rho$. Так как $\rho \sim N$, то из (19.25) следует, что величина

$$r = \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}\right)\frac{1}{\rho} \tag{19.26}$$

не должна зависеть от плотности. Параметр $r$, определяемый формулой (19.26), называется *удельной рефракцией вещества.* Опыт показывает, что для многих веществ (воздух, кислород, водяной пар и др.) удельная рефракция действительно почти не зависит от плотности. Этот вывод подтверждается данными, представленными в табл. 19.1 и 19.2. Как видно из этих данных, даже при конденсации пара в жидкость удельная рефракция, как правило, изменяется всего на несколько процентов, в то время как плотность вещества изменяется примерно в тысячу раз. Таким образом, зависимость показателя преломления от плотности вещества, предсказываемая теорией Лоренца, хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Нормальная дисперсия. Теория Лоренца предсказывает, что прозрачные оптические материалы должны обладать нормальной дисперсией:

$$\frac{\partial n}{\partial \omega} > 0, \tag{19.27}$$

Таблица 19.1

Удельная рефракция воздуха при температуре 14,5 °C для различных давлений (D-линия натрия)

| Давление, атм | Показатель преломления | Рефракция, отн. ед. |
|---|---|---|
| 1,00 | 1,0002929 | 4,606 |
| 42,13 | 1,01241 | 4,661 |
| 96,16 | 1,02842 | 4,713 |
| 136,21 | 1,04027 | 4,743 |
| 176,27 | 1,05213 | 4,772 |

Таблица 19.2

Изменение удельной рефракции при конденсации пара в жидкость для излучения на частоте D-линии натрия

| Вещество | $n$, пар | $n$, жидкость | $r$, пар, отн. ед. | $r$, жидкость, отн. ед. |
|---|---|---|---|---|
| Кислород | 1,000271 | 1,221 | 4,05 | 4,00 |
| Соляная кислота | 1,000447 | 1,245 | 6,68 | 5,95 |
| Вода | 1,000249 | 1,334 | 3,72 | 3,71 |
| Сероуглерод | 1,00147 | 1,628 | 21,99 | 21,33 |
| Ацетон | 1,00108 | 1,3589 | 16,16 | 16,14 |

т. е. показатель преломления должен увеличиваться с ростом частоты света. В частности, на границе среды короткие волны должны преломляться сильнее, чем длинные. Это действительно наблюдается во всех прозрачных средах (воздух, вода, стекло и т. п.). В качестве примера можно привести опыт Ньютона (рис. 1.6), в котором стеклянная призма разлагает белый солнечный свет на цветные компоненты, причем коротковолновое излучение (фиолетовый цвет) преломляется призмой сильнее, чем длинноволновое (красный цвет).

Аномальная дисперсия. Существование аномальной дисперсии, предсказываемое теорией Лоренца, также подтверждается экспериментом. Как видно из рис. 19.1, аномальная дисперсия имеет место в узкой полосе частот вблизи центра линии поглощения. Поэтому ее экспериментальное наблюдение представляет собой довольно трудную задачу.

Схема демонстрационного опыта показана на рис. 19.4. Пучок белого света от дуговой лампы пропускается через пламя натриевой горелки, затем проходит через призму с вертикальным преломляющим ребром и проецируется на экран. Сначала на экране видна яркая горизонтальная радужная полоска. По мере разогрева горелки и увеличения плотности паров натрия в желтой части спектра на экране все отчетливее проступает узкая темная полоса. Эта полоса соответствует спектральной линии поглощения атома натрия.

В хорошо прогретой натриевой горелке устанавливается пространственное распределение плотности паров, характеризуемое вертикальной неоднородностью. При этом пары натрия начинают действовать на проходящий через них пучок света подобно призме с горизонтальным преломляющим ребром. В итоге края радужной полоски вблизи полосы поглощения загибаются и расходятся

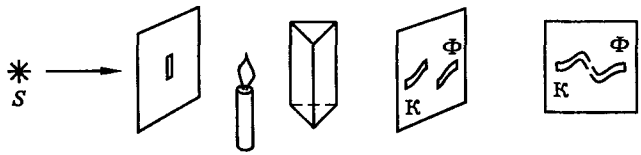



Рис. 19.4. Схема опыта по наблюдению аномальной дисперсии света в парах натрия. Справа показана картина, наблюдаемая на экране

один вверх, а другой вниз, как показано на рис. 19.4. Такая деформация спектра на экране и интерпретируется как проявление аномальной дисперсии (см. рис. 19.1 и 19.4).

Дисперсия в области низких частот. Рассмотрим дисперсию разреженной газообразной среды ($n - 1 \ll 1$) в пределе низких частот ($\omega \ll \omega_0$). В этом случае, исходя из формулы (19.25), нетрудно получить следующее приближенное выражение для показателя преломления:

$$n - 1 = A(1 + B/\lambda^2), \tag{19.28}$$

где $\lambda$ — длина световой волны, $A$ и $B$ — постоянные.

Формула (19.28) носит название *дисперсионной формулы Коши*. Экспериментальные измерения показывают, что она хорошо описывает дисперсию газов в видимой и инфракрасной областях спектра. Значения постоянных $A$ и $B$ в дисперсионной формуле Коши для различных газов представлены в табл. 19.3. Сопоставление рассчитанных по этой формуле и наблюдаемых значений показателя преломления воздуха дано в табл. 19.4.

*Водород.* Оценим параметры A и B для водорода. Используя формулы (19.15), (19.11), (19.28) и полагая $\Gamma = 0$, $\omega \ll \omega_0$, получим

$$A = 2\pi N\alpha_0, \qquad B = \lambda_0^2,$$

где

$$\alpha_0 = \frac{e^2}{m\omega_0^2}, \qquad \lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0},$$

$N$ — число атомов в единице объема, $\alpha_0$ — поляризуемость атома на нулевой частоте, $\omega_0$ — собственная частота колебаний электрона в атоме, $e$ — заряд электрона, $m$ — масса электрона, c — скорость света. Согласно модели атома Бора (см. дополнение 9), величину $\omega_0$ можно оценить по формуле $\hbar\omega_0 = \varepsilon$, где $\varepsilon = me^4/2\hbar^2 = 13{,}6$ эВ и $\hbar$ — постоянная Планка. Отсюда для величины $\lambda_0$ получаем оценку: $\lambda_0 = 10^{-5}$ см. При этом $\alpha_0 = 0{,}7 \times 10^{-24}$ см$^3$. При нормальных условиях $N = N_0 = 2{,}7 \times 10^{19}$ см$^{-3}$. Следовательно, $A = 1{,}2 \times 10^{-4}$, $B = 10^{-10}$ см$^2$. Результаты измерений подтверждают эти оценки (табл. 19.3).

Дисперсия в области высоких частот. Как видно из рис. 19.1, в пределе высоких частот излучения показатель преломления любой среды стремится к единице. Полагая $n^2 + 2 = 3$ и $\omega \gg \omega_0$, по формуле (19.25) получим

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \tag{19.29}$$

Таблица 19.3

Значения постоянных $A$ и $B$ в дисперсионной формуле Коши для различных газов

| Газ | $A \times 10^5$ | $B \times 10^{11}$, см$^2$ |
|---|---|---|
| Аргон | 27,92 | 5,6 |
| Азот | 29,19 | 7,7 |
| Гелий | 3,48 | 2,3 |
| Водород | 13,6 | 7,7 |
| Кислород | 26,63 | 5,07 |
| Воздух | 28,79 | 5,67 |
| Этан | 73,65 | 9,08 |
| Метан | 42,6 | 14,41 |

Таблица 19.4

Наблюдаемые значения показателя преломления для воздуха и значения, даваемые дисперсионной формулой Коши

| $\lambda \times 10^5$, см | $(n-1) \times 10^4$ | | Разность |
|---|---|---|---|
| | наблюдаемые | рассчитанные | |
| 7,594 | 2,905 | 2,907 | 0,002 |
| 6,563 | 2,916 | 2,917 | 0,001 |
| 5,896 | 2,926 | 2,926 | 0,000 |
| 5,378 | 2,935 | 2,935 | 0,000 |
| 5,184 | 2,940 | 2,940 | 0,000 |
| 4,861 | 2,948 | 2,948 | 0,000 |
| 4,677 | 2,951 | 2,954 | 0,003 |
| 4,308 | 2,966 | 2,967 | 0,001 |
| 3,969 | 2,983 | 2,983 | 0,000 |
| 3,728 | 2,995 | 2,996 | 0,001 |
| 3,441 | 3,016 | 3,017 | 0,001 |
| 3,180 | 3,040 | 3,041 | 0,001 |
| 3,021 | 3,056 | 3,058 | 0,002 |
| 2,948 | 3,065 | 3,067 | 0,002 |

где частота $\omega_p$, называемая плазменной частотой, определяется формулой (19.11): $\omega_p = \sqrt{4\pi N e^2/m}$. Здесь $e$ и $m$ — заряд и масса электрона, $N$ — число атомов в единице объема среды.

Оценим частоту $\omega_p$, взяв в качестве $N$ величину, характерную для конденсированных сред: $N = 10^{22}$ см$^{-3}$. Полагая $e = 4{,}8 \times 10^{-10}$ СГСЭ, $m = 9{,}1 \times 10^{-28}$ г, получим оценку $\lambda_p = 2\pi c/\omega_p = 0{,}3$ мкм. Итак, плазменная частота для конденсированной среды лежит в ультрафиолетовом диапазоне.

Для рентгеновской области, где $\omega \gg \omega_p$, по формуле (19.29) получаем следующую оценку:

$$n = 1 - \delta, \qquad \delta \ll 1,$$

согласно которой показатель преломления среды близок к единице. Иначе говоря, в рентгеновской области среды почти не обладают дисперсией.

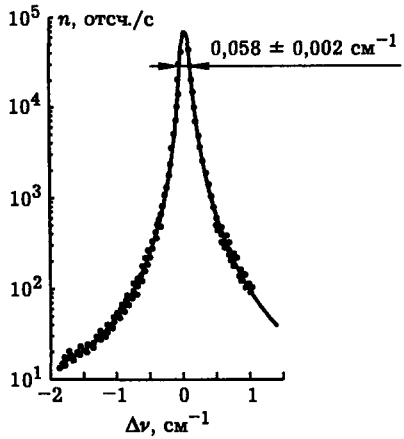



Рис. 19.5. Форма спектральной линии комбинационного рассеяния света в жидком азоте, полученная с помощью спектрометра высокого разрешения [6]: по оси абсцисс отложена отстройка от центра линии, по оси ординат — скорость фотоотсчетов; точки — эксперимент, сплошная линия — лоренцева кривая

Опыт подтверждает этот результат. Рентгеновское излучение проходит через вещество и границы раздела сред, почти не испытывая отражения и преломления. Физически это связано с тем, что инерция электронов не позволяет им отслеживать слишком высокочастотные колебания электромагнитного поля. Амплитуда вынужденных колебаний электронов в таком поле оказывается весьма мала, излучение и вещество взаимодействуют очень слабо. Отметим в этой связи, что указанное обстоятельство сильно осложняет создание устройств рентгеновской оптики, аналогичных обычным призмам, линзам, зеркалам. В частности, сложно создать резонатор для рентгеновского излучения — один из главных элементов рентгеновского лазера.

Форма спектральной линии. Формы спектральных линий реальных атомов и молекул отличаются большим разнообразием. Известны, однако, случаи, когда наблюдаемая в эксперименте спектральная линия имеет простую лоренцеву форму. Такова, например, линия комбинационного рассеяния света в жидком азоте, показанная на рис. 19.5. Эта линия соответствует колебаниям ядер атомов в молекуле азота; она имеет частоту 2326,5 см$^{-1}$ и полную ширину по полувысоте 0,058 см$^{-1}$. Данная линия примечательна тем, что она имеет идеальную лоренцеву форму в динамическом диапазоне четырех порядков по величине сигнала.

Итак, главным аргументом в пользу классической модели Лоренца является то, что предсказания этой модели хорошо согласуются с экспериментальными фактами. Другой аргумент состоит в том, что эта модель находит свое подтверждение в квантовой теории. Квантовая теория показывает, что при не слишком сильных световых полях (когда можно пренебречь изменением заселенностей квантовых уровней энергии под действием света) динамика дипольного момента атома действительно описывается уравнением классического осциллятора. Таким образом, основной постулат модели Лоренца оказывается обоснованным. Подробнее о соотношении классической и квантовой моделей атома см. в дополнении 10.

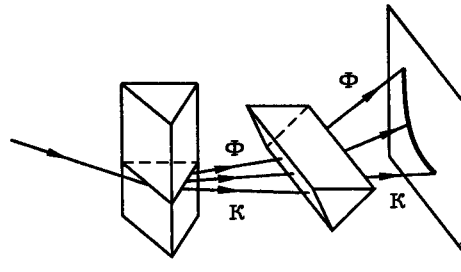



Рис. 19.6. Измерение дисперсии по методу скрещенных призм Ньютона

**Методы изучения дисперсии и поглощения света. Оптическая спектроскопия.** Зависимости коэффициента поглощения и показателя преломления от длины волны света несут в себе ценную информацию о структуре и свойствах атомов и молекул, а также механизмах взаимодействия частиц в среде. Получение и анализ этой информации составляют предмет *оптической спектроскопии.* О том, насколько важны спектральные измерения в физике, красноречиво говорит тот факт, что именно спектроскопические исследования излучения нагретых тел и атома водорода сыграли решающую роль в возникновении квантовой механики.

Простой способ измерения зависимости показателя преломления от длины волны был предложен Ньютоном и носит название *метода скрещенных призм.* В этом методе пучок белого света пропускается сначала через призму с вертикальным преломляющим ребром, затем через призму с горизонтальным преломляющим ребром и образует на экране цветную изогнутую полоску (рис. 19.6). Расположение и форма этой полоски дают информацию о зависимости $n(\lambda)$ для материала обеих призм.

Наиболее чувствительные методы измерения дисперсии основаны на применении спектрального прибора (призмы или дифракционной решетки) в сочетании с интерферометром. При этом исследуемое вещество помещается на пути одного из лучей интерферометра. Схема измерений показана на рис. 19.7, *а*. Типичная интерференционная картина, наблюдаемая в подобной схеме, показана на рис. 19.7, *б*. На этой картине полосы интерференции вычерчивают в определенном масштабе зависимость $n - 1$ от $\lambda$, т. е. дают непосредственно кривую дисперсии. Интерференционные методы особенно удобны для исследования дисперсии вблизи полос поглощения вещества.

Схема измерения спектра поглощения света включает в себя источник света, спектральный прибор, исследуемый объект и систему регистрации излучения. Работу схемы можно продемонстрировать на установке, показанной на рис. 19.8. В этой установке луч света дуговой лампы проходит через стеклянную кювету с водой, затем через призму и падает на экран. В исходном положении на экране видна яркая радужная полоска, в которой представлены все цвета спектра. Если теперь добавить в кювету раствор какой-либо поглощающей свет жидкости (например, раствор марганцовки), то часть спектра на экране замещается темными линиями, которые и соответствуют спектральным линиям поглощения вещества.

Лазерная спектроскопия. Идеальным источником света для спектроскопии является узкополосный перестраиваемый лазер. При использова-

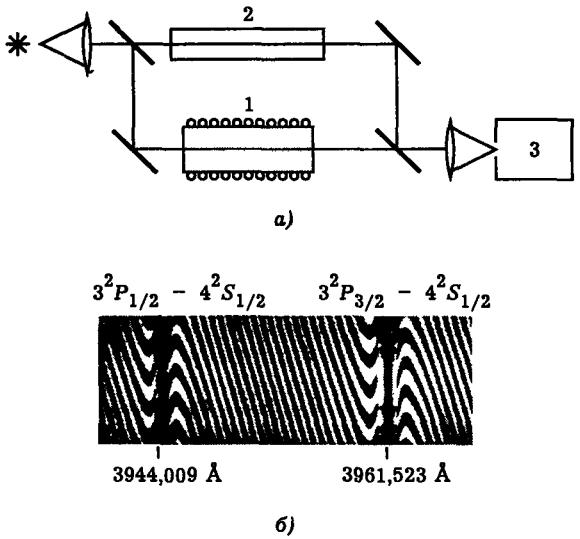



Рис. 19.7. Схема установки для измерения дисперсии атомных паров: 1 — кювета с парами, 2 — компенсационная кювета, 3 — спектрограф (*а*). Интерференционая картина ("крюки") в зависимости от длины волны $\lambda$ вблизи резонансных линий алюминия (*б*)

нии такого источника отпадает необходимость спектральных приборов и схема измерений становится предельно простой: она содержит лазер, исследуемый объект и систему регистрации.

Разрешающая способность лазерного спектрометра определяется шириной спектра излучения лазера. При исследовании узких спектральных линий разрешающая способность достигает величин порядка $10^8$. В качестве примера можно привести спектр комбинационного рассеяния в жидком азоте, показанный на рис. 19.5. Этот спектр получен с помощью непрерывного перестраиваемого лазера на растворе красителя. Лазер на красителе (родамин 6Ж в этиленгликоле) накачивается излучением аргонового лазера. Мощность излучения перестраиваемого лазера составляет 200 мВт, ширина спектральной линии излучения менее 40 МГц, область плавной перестройки длины волны от 570 до 620 нм. Отметим, что лазеры подобного типа обладают рекордно узкими линиями генерации в видимой области спектра (до 10 кГц) и являются одними из наиболее перспективных с точки зрения применения в спектроскопии высокого разре-

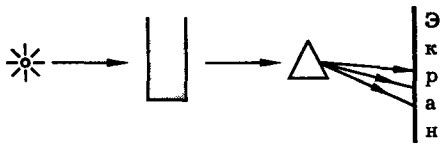



Рис. 19.8. Схема опыта по наблюдению спектра поглощения света раствором марганцовки

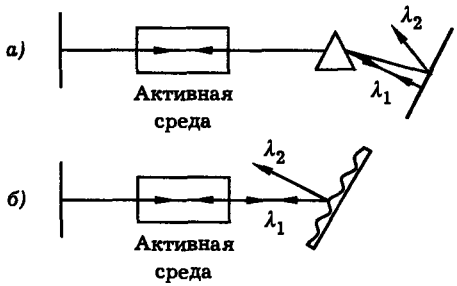



Рис. 19.9. Схемы перестройки частоты излучения лазера на красителе: с дисперсионной призмой (*а*) и с дифракционной решеткой (*б*)

шения. Управление частотой излучения лазера на красителе осуществляется с помощью дисперсионного элемента (призмы или дифракционной решетки), вставленного в резонатор лазера (рис. 19.9).

На лекции демонстрируется лазер на красителе родамин 6Ж. В качестве накачки используется излучение второй гармоники (0,53 мкм) лазера на алюмоиттриевом гранате с неодимом. Система работает в квазинепрерывном режиме с частотой повторения импульсов около 10 Гц. Луч лазера на красителе направляется на экран. Вращением микрометрического винта медленно перестраивают резонатор лазера. При этом хорошо заметно изменение цвета лазерного луча от желто-зеленого до оранжевого.

В инфракрасной спектроскопии применяют перестраиваемые лазеры других типов, а также параметрические генераторы света — специальные устройства для управления частотой света, основанные на эффектах нелинейной оптики (см. лекции 8, 22 и 23).

Помимо стандартной схемы, в лазерной спектроскопии применяют ряд других методов, основанных на специфических свойствах лазеров и лазерного излучения. Например, одним из самых чувствительных методов спектроскопии в настоящее время является метод *внутрирезонаторной лазерной спектроскопии*. В этом методе кювету с исследуемым веществом помещают внутрь резонатора лазера и измеряют мощность излучения как функцию длины волны. Другим высокочувствительным методом является *оптико-акустическая спектроскопия*. В этом методе лазерный импульс проходит через кювету с исследуемым веществом, в котором часть излучения поглощается. Атомы или молекулы, поглотившие свет, переходят в возбужденное состояние. Поскольку это состояние термодинамически неустойчиво, частицы быстро возвращаются в исходное невозбужденное состояние, отдавая избыток энергии в поступательные степени свободы. В результате под действием лазерного импульса происходит быстрый локальный нагрев поглощающей среды и ее расширение, сопровождающееся возникновением звуковой волны. Иначе говоря, поглощение импульса света сопровождается небольшим "щелчком". Этот щелчок улавливается чувствительным микрофоном, встроенным в кювету. При изменении частоты излучения лазера сигнал с микрофона описывает спектр поглощения.

Существуют и другие методы лазерной спектроскопии, среди которых отметим уже упоминавшиеся в нашем курсе методы фурье-спектроскопии (см. лекцию 11) и спектроскопии смешения (см. лекцию 17), а также методы нестационарной (импульсной) спектроскопии (см. лекцию 7) и методы, основан-

ные на явлениях нелинейной оптики. Следует отметить, что лазерная спектроскопия быстро прогрессирует и находит новые интересные применения в таких областях как физика, химия, биология, медицина, контроль окружающей среды. Методам и применениям лазерной спектроскопии посвящены книги [1; 5; 11; 13; 14].

**Распространение светового импульса в диспергирующей среде.** До сих пор мы предполагали, что свет, распространяющийся в среде, имеет структуру плоской монохроматической волны. Теперь обобщим рассмотрение на случай светового сигнала произвольного вида. Пространственную структуру поля будем по-прежнему моделировать плоской волной.

С физической точки зрения интересующий нас процесс представляется следующим образом. Зависимость показателя преломления от частоты света приводит к тому, что различные спектральные компоненты поля при распространении через среду приобретают разные фазовые набеги. Результат суммирования колебаний, естественно, зависит от распределения фаз. Поэтому форма выходного импульса, вообще говоря, отличается от формы импульса на входе. Иными словами, в процессе распространения в диспергирующей среде световой импульс *деформируется*. Следует ожидать, что эта деформация будет максимальной в резонансных условиях, когда частота света близка к частоте собственных колебаний среды. О том, что деформация светового импульса в резонансной среде действительно может быть значительной, говорят данные, представленные на рис. 19.10.

Другой пример — распространение светового импульса в прозрачном оптическом волокне. В этом случае резонансный эффект отсутствует, однако искажение импульса может быть значительным из-за большой длины волокна. Отметим здесь, что анализ искажений импульсов в волокнах представляет практический интерес в связи с проблемой передачи информации по оптическому волокну, оценкой информационной емкости канала связи и т. п.

Итак, попытаемся рассчитать форму светового импульса на выходе линейной диспергирующей среды $E_{\text{вых}}(t)$, если известны форма входного импульса $E_{\text{вх}}(t)$ и комплексный показатель преломления среды $n(\omega)$ (рис. 19.11).

Как отмечалось выше, решение этой задачи сводится к разложению входного импульса в интеграл Фурье, описанию распространения через среду отдельной монохроматической компоненты поля и суммированию полей на выходе. Данный подход основан на том, что среда линейна и, следовательно, каждая световая волна распространяется в ней независимо от всех остальных.

Монохроматическая световая волна. Как показано выше, распространение плоской монохроматической световой волны в линейной изотропной диспергирующей среде описывается формулой

$$\vec{E} = \frac{1}{2}\vec{\mathcal{E}}\exp\left\{i\left[\omega t - k(\omega)z\right]\right\} + \text{к. с.}, \tag{19.30}$$

где $\vec{\mathcal{E}}$ — комплексная амплитуда поля, $k(\omega)$ — волновое число, зависящее от частоты света $\omega$ и связанное с комплексным показателем преломления среды $n(\omega)$ соотношением

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c}n(\omega). \tag{19.31}$$

Узкополосный световой сигнал. Ограничим рассмотрение случаем узкополосного импульса, т. е. предположим, что ширина спектра импульса много меньше несущей частоты:

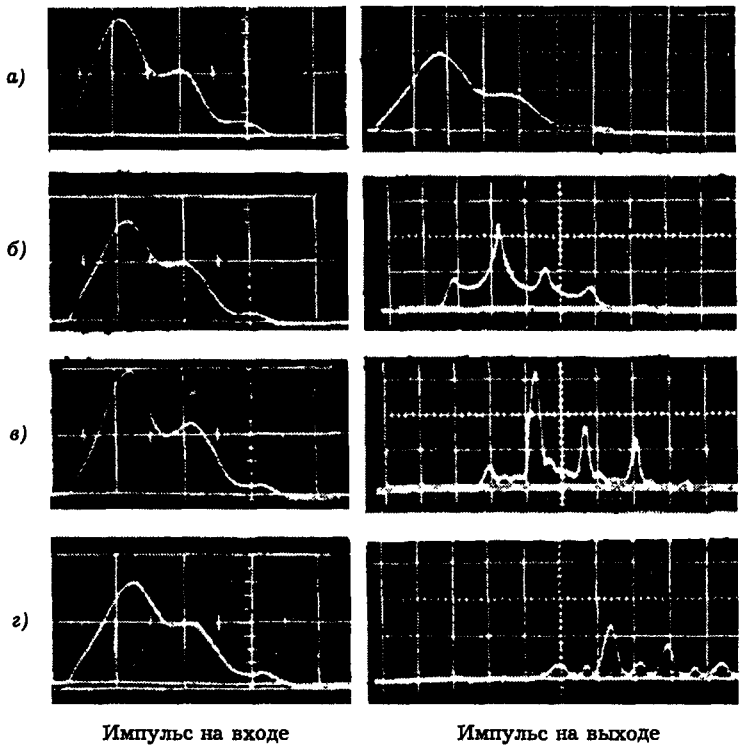



Рис 19 10 Изменение формы коротких световых импульсов при распространении в сильно диспергирующей среде [20]. Для входных импульсов масштаб 10 нс на деление, для выходных — 5 нс. Импульсы, генерируемые перестраиваемым лазером, имели среднюю частоту, близкую к частоте резонанса $^2P_{1/2}$ в парах рубидия. Отстройка от резонанса уменьшается при переходе от случая "*а*" к случаю "*г*"

$$\Delta\omega \ll \omega_0, \tag{19.32}$$

как показано на рис. 19.12. На временно́м языке это означает, что импульс должен быть существенно продолжительнее периода световых колебаний

$$\tau_{\text{р}} \gg T_0. \tag{19.33}$$

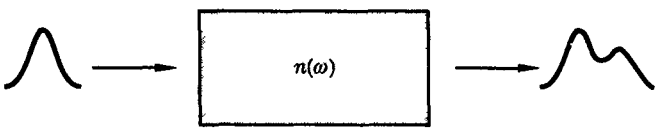



Рис 19.11. Постановка задачи о распространении импульса света в диспергирующей среде

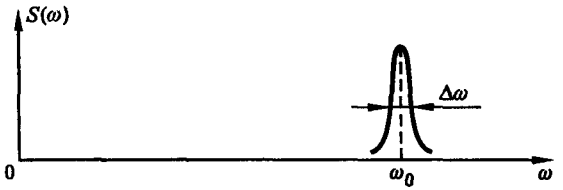



Рис. 19.12. Вид спектра узкополосного светового сигнала

Поскольку в оптике $T_0 = 10^{-14}$–$10^{-15}$ с, условие (19.33) выполняется для импульсов длительностью $\tau_p \geq 10^{-13}$ с.

Итак, пусть на вход отрезка диспергирующей среды длиной $z$ поступает узкополосный световой сигнал вида

$$\vec{E}_0(t) = \frac{1}{2}\vec{e}\mathcal{E}_0(t)e^{i\omega_0 t} + \text{к. с.} \tag{19.34}$$

Сигнал на выходе среды ищем в виде

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2}\vec{e}\mathcal{E}(t)e^{i\omega_0 t} + \text{к. с.} \tag{19.35}$$

Разложим амплитуды $\mathcal{E}_0(t)$ и $\mathcal{E}(t)$ в интеграл Фурье:

$$\mathcal{E}_0(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \tag{19.36}$$

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \tag{19.37}$$

Тогда процесс распространения света можно описать формулой

$$\mathcal{E}(\omega) = \mathcal{E}_0(\omega)\exp\left[-ik(\omega)z\right]. \tag{19.38}$$

Спектральная амплитуда $\mathcal{E}_0(\omega)$ выражается через комплексную амплитуду входного сигнала $\mathcal{E}_0(t)$ с помощью обратного преобразования Фурье:

$$\mathcal{E}_0(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(t)e^{-i\omega t}dt. \tag{19.39}$$

Таким образом, поставленная задача, в принципе, решена. Исходя из того или иного вида амплитуды входного сигнала $\mathcal{E}_0(t)$, по формулам (19.37)–(19.39) можно найти амплитуду сигнала на выходе диспергирующей среды. Формулы (19.37)–(19.39) выражают три последовательных этапа решения: фурье-анализ входного сигнала, преобразование спектральной компоненты поля диспергирующей средой, фурье-синтез сигнала на выходе.

Частотный коэффициент передачи и функция Грина диспергирующей среды. Результаты решения становятся особенно наглядными, если выразить их в терминах общей теории линейных систем. Введем частотный коэффициент передачи диспергирующей среды

$$\chi(\omega) = \exp\left[-ik(\omega)z\right]. \tag{19.40}$$

Тогда формулу (19.38) можно переписать в виде

$$\mathcal{E}(\omega) = \mathcal{E}_0(\omega)\chi(\omega). \tag{19.41}$$

Подставив (19.41) и (19.39) в (19.37), получим формулу, которая непосредственно связывает между собой амплитуды выходного и входного сигналов:

$$\mathcal{E}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(\theta)h(t-\theta)\,d\theta, \tag{19.42}$$

где

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}d\omega. \tag{19.43}$$

Формула (19.42) носит название *интеграла Дюамеля*, а функция $h(t)$, определяемая формулой (19.43), называется *функцией Грина* данной линейной системы. Видно, что частотный коэффициент передачи и функция Грина связаны между собой преобразованием Фурье.

Модели диспергирующих сред. Используя условие узкополосности сигнала (19.32) и не конкретизируя закон дисперсии среды (19.31), можно разложить волновое число в ряд Тэйлора по степеням частоты в окрестности точки $\omega_0$:

$$k(\omega) = k_0 + \omega k_0' + \frac{1}{2}\omega^2 k_0'' + \ldots. \tag{19.44}$$

Здесь частота $\omega$ отсчитывается относительно $\omega_0$, и введены обозначения

$$k_0 = k(0), \quad k_0' = \left.\frac{\partial k}{\partial \omega}\right|_0, \quad k_0'' = \left.\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\right|_0. \tag{19.45}$$

Учитывая то или иное число членов ряда (19.44), мы будем получать различные модели диспергирующей среды. Наиболее важны модель среды с дисперсией первого порядка

$$k(\omega) = k_0 + \omega k_0' \tag{19.46}$$

и модель среды с дисперсией второго порядка

$$k(\omega) = k_0 + \omega k_0' + \frac{1}{2}\omega^2 k_0''. \tag{19.47}$$

Рассмотрим каждую из этих моделей отдельно.

Среда с дисперсией первого порядка. Фазовая и групповая скорости света. Подставив (19.46) в (19.40), (19.43), (19.42), получим

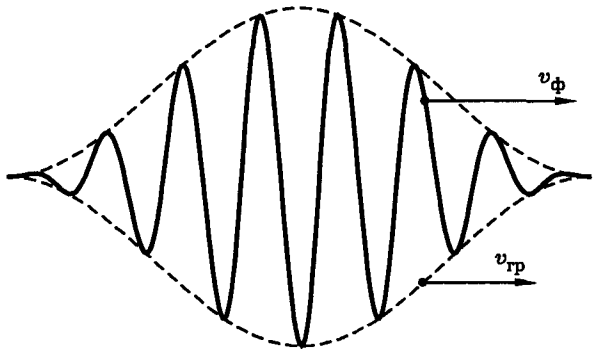



Рис. 19.13. К понятию групповой скорости света

$$h(t) = \delta(t - k_0' z)\exp(-ik_0 z), \quad \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0(t - k_0' z)\exp(-ik_0 z),$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция и

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2}\vec{e}\mathcal{E}_0(t - k_0' z)\exp[i(\omega_0 t - k_0 z)] + \text{к.с.} \tag{19.48}$$

Формула (19.48) показывает, что в среде с дисперсией первого порядка узкополосный световой импульс распространяется без изменения формы, однако скорость распространения импульса

$$u = \frac{1}{k_0'} = \left.\frac{\partial\omega}{\partial k}\right|_0 \equiv v_{гр} \tag{19.49}$$

отличается, вообще говоря, от фазовой скорости света в данной среде:

$$v = \frac{\omega_0}{k_0} = \frac{c}{n(\omega_0)} \equiv v_ф. \tag{19.50}$$

Синусоида несущей частоты как бы "протягивается" через медленнее бегущую огибающую импульса (рис. 19.13). Скорость перемещения огибающей импульса в диспергирующей среде, определяемая формулой (19.49), называется *групповой скоростью света*. Именно эта величина определяет скорость движения световой энергии.

Понятие групповой скорости можно пояснить на простом примере бигармонической световой волны

$$E = A\cos(\omega_1 t - k_1 z) + A\cos(\omega_2 t - k_2 z).$$

В этом случае поле можно представить в виде

$$E = F\left(t - \frac{\Delta k}{\Delta\omega}z\right)\cos(\omega t - kz), \tag{19.51}$$

где $F(t) = 2A\cos(\Delta\omega t)$, $\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$, $\Delta k = (k_1 - k_2)/2$, $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$, $k = (k_1 + k_2)/2$. Формула (19.51) показывает, что распространение бигармони-

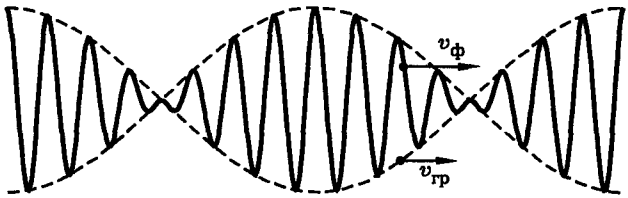



Рис. 19.14. Фазовая и групповая скорости света на примере распространения бигармонической световой волны

ческой волны также можно охарактеризовать двумя скоростями: фазовой скоростью $v_ф = \omega/k$ и групповой скоростью $v_{гр} = \Delta\omega/\Delta k$. При этом фазовая скорость характеризует движение фазового фронта несущей, а групповая — движение максимума огибающей (рис. 19.14).

Итак, групповая скорость света есть скорость движения огибающей светового импульса (волнового пакета, "группы" волн) в диспергирующей среде. Подчеркнем однако, что понятие групповой скорости отнюдь не универсально. Оно имеет смысл лишь для узкополосных световых сигналов, распространяющихся в прозрачных средах. В резонансных условиях, когда световой импульс сильно искажается и поглощается средой, понятие групповой скорости неприменимо.

Исходя из (19.31), (19.49), (19.50), нетрудно получить следующее соотношение:

$$v_{гр} = \frac{v_ф}{1 + \dfrac{\omega}{n}\dfrac{\partial n}{\partial \omega}}. \tag{19.52}$$

Поскольку понятие групповой скорости применимо лишь к областям нормальной дисперсии, в которых комплексный показатель преломления среды действителен и $\partial n/\partial\omega > 0$ (см. рис. 19.1), из формулы (19.52) следует, что групповая скорость света, вообще говоря, меньше, чем фазовая:

$$v_{гр} < v_ф.$$

Это означает, что модуляция световой волны и световая энергия, перемещаются в диспергирующей среде медленнее, чем несущая. Для вакуума ($n = 1$) фазовая и групповая скорости света одинаковы и равны $c$.

Среда с дисперсией второго порядка. Дисперсия групповых скоростей. Особенность сред с дисперсией второго порядка заключается в том, что в таких средах групповая скорость зависит от частоты света или, как говорят, имеет место *дисперсия групповых скоростей*:

$$v_{гр} = v_{гр}(\omega).$$

Это непосредственно видно из формул (19.47),(19.49), согласно которым

$$\frac{1}{v_{гр}} = \frac{\partial k}{\partial \omega} = k_0' + k_0''\omega.$$

Дисперсия групповых скоростей приводит к своеобразным физическим эффектам, таким как дисперсионное расплывание световых импульсов образование импульсов с устойчивой формой огибающей, повторяющей их частотный спектр

("спектрон") и т. п. Это же обстоятельство позволяет создать на основе оптического волокна устройства для управления длительностью световых импульсов, в частности, генераторы предельно коротких импульсов света.

Подставив (19.47) в (19.40), (19.43), получим

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \exp(-ik_0 z) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i\omega\theta - i\frac{1}{2}\omega^2\tau_0^2\right) d\omega,$$

где

$$\theta = t - k_0' z, \qquad \tau_0 = \sqrt{k_0'' z}. \tag{19.53}$$

Используя интеграл Пуассона

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\pi/\alpha},$$

находим явное выражение для $h(t)$:

$$h(t) = \exp(-ik_0 z) \frac{\exp(i\theta^2/2\tau_0^2)}{\sqrt{2\pi i \tau_0^2}}. \tag{19.54}$$

Подставив (19.54) в (19.42), получим окончательно

$$\mathcal{E}(t) = \exp(-ik_0 z) \frac{\exp(i\theta^2/2\tau_0^2)}{\sqrt{2\pi i \tau_0^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(\tau) \exp\left(\frac{i\tau^2}{2\tau_0^2} - \frac{i\theta\tau}{\tau_0^2}\right) d\tau. \tag{19.55}$$

Формула (19.55) выражает комплексную амплитуду сигнала в среде через амплитуду входного сигнала.

Дальная зона. Спектрон. Из структуры выражения (19.55) видно, что область изменения переменной интегрирования ограничена длительностью входного импульса $\tau_{и0}$. Отсюда следует, что на достаточно больших расстояниях $z$, таких, что

$$\frac{\tau_{и0}^2}{2\tau_0^2} = \frac{\tau_{и0}^2}{2k_0'' z} \ll \pi, \tag{19.56}$$

выражение (19.55) упрощается и приобретает вид

$$\mathcal{E}(t) = \exp(-ik_0 z) \frac{\exp(i\theta^2/2\tau_0^2)}{\sqrt{2\pi i \tau_0^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(\tau) \exp\left(-i\theta\tau/\tau_0^2\right) d\tau. \tag{19.57}$$

Интеграл в (19.57) представляет собой преобразование Фурье от комплексной амплитуды входного импульса. Учитывая (19.39), выражение (19.57) можно переписать как

$$\mathcal{E}(t) = \exp(-ik_0 z) \frac{\exp(i\theta^2/2\tau_0^2)}{\sqrt{2\pi i \tau_0^2}} \mathcal{E}_0(\omega)\big|_{\omega=\theta/\tau_0^2} \tag{19.58}$$

или, раскрывая обозначение $\tau_0$, как

$$\mathcal{E}(t) = \exp(-ik_0 z)\,\frac{\exp(i\theta^2/2k_0'' z)}{\sqrt{2\pi i k_0'' z}}\,\mathcal{E}_0(\omega)\big|_{\omega=\theta/k_0'' z}, \tag{19.59}$$

где параметр $\theta$ определяется формулой (19.53).

Условие (19.56) можно представить в виде

$$z \gg z_{\text{дис}}, \tag{19.60}$$

где

$$z_{\text{дис}} = \frac{\tau_{\text{и}0}^2}{2\pi k_0''}, \tag{19.61}$$

$z_{\text{дис}}$ — характерная *дисперсионная длина*. Расстояния $z$, удовлетворяющие условию (19.60), назовем дальней дисперсионной зоной или просто *дальней зоной*. Тогда полученный результат можно сформулировать следующим образом: в дальней зоне световой импульс приобретает устойчивую форму, определяемую спектром входного импульса. Такой импульс получил название "спектрон" [17].

Дисперсионное расплывание импульса. Обозначим через $\Delta\omega$ ширину спектра входного импульса; эта величина связана с длительностью входного импульса $\tau_{\text{и}0}$ формулой

$$\tau_{\text{и}0}\Delta\omega = 2\pi. \tag{19.62}$$

Из соотношения $\omega = \theta/k_0'' z$ между $\theta$ и $\omega$ в (19.59) следует, что если величина $\Delta\omega$ характеризует ширину распределения $\mathcal{E}_0(\omega)$, то величина $\Delta\theta = \Delta\omega k_0'' z$ характеризует ширину распределения $\mathcal{E}(t)$, т. е. имеет смысл длительности импульса. Поэтому длительность светового импульса в дальней зоне можно найти по формуле

$$\tau_{\text{и}}(z) = \Delta\omega k_0'' z. \tag{19.63}$$

Формула (19.63) показывает, что длительность импульса линейно возрастает по мере увеличения расстояния, пройденного импульсом в диспергирующей среде. Этот эффект называют *дисперсионным расплыванием* импульса. Его можно наблюдать в средах с дисперсией второго порядка или, иначе говоря, в средах, обладающих *дисперсией групповых скоростей*.

Эффект образования спектрона в дальней зоне и его дисперсионное расплывание можно пояснить с помощью простой аналогии. Представим себе, что на длинную дистанцию бегут спортсмены, каждый из которых поддерживает свою постоянную скорость бега. Тогда независимо от того в каком порядке и с какими интервалами во времени они принимали старт, найдется такое расстояние, пробежав которое на первую позицию выйдет самый быстрый бегун, на вторую — второй по скорости и т. д., а последним окажется самый медленный. Начиная с этого момента, порядок следования бегунов уже не будет меняться, а расстояния и временные интервалы между ними будут постепенно возрастать. Со световым импульсом в диспергирующей среде происходит то же самое, только роль бегунов играют спектральные компоненты света, распространяющиеся в среде с разными скоростями.

Рис. 19.15. Пример трансформации светового импульса в оптическом волокне

Другой аналог рассматриваемого явления — фраунгоферова дифракция световых пучков. Это явление, напомним, состоит в том, что в дальней дифракционной зоне формируется устойчивое угловое распределение поля, повторяющее угловой спектр пучка, а поперечные размеры пучка увеличиваются пропорционально пройденной дистанции.

Для оценок удобно переписать (19.63) в следующем виде, приняв во внимание (19.61), (19.62):

$$\tau_{\text{и}}(z) = \tau_{\text{и}0} z / z_{\text{дис}}. \tag{19.64}$$

Рассмотрим в качестве примера распространение светового импульса в оптическом волокне. Для оптических волокон в диапазоне длин волн около 1 мкм характерной является величина $k_0'' = 3 \times 10^{-28}$ с$^2$/см. Поэтому, если начальный импульс имеет длительность $\tau_{\text{и}0} = 10^{-12}$ с, то дисперсионная длина, определяемая формулой (19.61), составит величину $z_{\text{дис}} = 5$ м. Если же длина волокна равна, например, 50 м, то импульс на выходе будет иметь длительность $\tau_{\text{и}}(z) = 10^{-11}$ с, т. е. произойдет его десятикратное дисперсионное расплывание.

В случае прямоугольного входного импульса длительностью $\tau_{\text{и}0}$ импульс интенсивности в дальней зоне будет иметь вид

$$I(t) = I_{\max} \operatorname{sinc}^2[\pi\theta/\tau_{\text{и}}(z)],$$

где $\theta = t - k_0' z$, $\tau_{\text{и}}(z)$ — длительность выходного импульса, определяемая формулой (19.64), нормировочная интенсивность $I_{\max}$ не зависит от времени (рис. 19.15).

Инварианты распространения. Если диспергирующая среда является прозрачной (оптическое волокно), то в процессе распространения светового импульса его энергия

$$W = \text{const} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{E}(t)|^2 \, dt \tag{19.65}$$

и спектр

$$S(\omega) = |\mathcal{E}(\omega)|^2 \tag{19.66}$$

остаются постоянными, т. е. являются инвариантами распространения. Инвариантность спектра вытекает из (19.40), (19.41), поскольку для прозрачной сре-

ды $|\chi(\omega)| = 1$. Инвариантность энергии следует из инвариантности спектра и равенства Парсеваля, согласно которому

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{E}(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \, d\omega.$$

Разумеется, инвариантом распространения является также ширина спектра импульса $\Delta\omega$.

## Литература


1. *Демтредер В.* Лазерная спектроскопия. — М.: Наука, 1985.
2. *Корлисс Ч., Бозман У.* Вероятности переходов и силы осцилляторов 70 элементов. — М.: Мир, 1968.
3. *Moore C. E.* Atomic Energy Levels. — Washington, National Bureau of Standards, 1958.
4. *Стриганов А. Р., Одинцова Г. А.* Таблица спектральных линий атомов и ионов (справочник). — М.: Энергоиздат, 1982.
5. *Ахманов С. А., Коротеев Н. И.* Методы нелинейной оптики в спектроскопии рассеяния света. — М.: Наука, 1981.
6. *Akhmanov S. A., Gadjiev F. N., Koroteev N. I. et al.*//Appl. Opt. — 1980. V 19. P. 859.
7. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. — М.: Наука, 1973.
8. Физическая энциклопедия/Под ред. А. М. Прохорова. — М.: СЭ, 1988.
9. *Ландсберг Г. С.* Оптика. — М.: Наука, 1976.
10. *Алешкевич В. А., Киселев Д. Ф., Корчажкин В. В.* Лазеры в лекционном эксперименте. — М.: Изд-во МГУ, 1985.
11. Лазерная спектроскопия атомов и молекул/Под ред. Г. Вальтера. — М.: Мир, 1979.
12. *Лебедева В. В.* Экспериментальная оптика. — М.: Изд-во МГУ, 1994.
13. *Летохов В. С., Жаров В. П.* Лазерная оптико-акустическая спектроскопия. — М.: Наука, 1984.
14. Нелинейная спектроскопия/Под ред. Н. Бломбергена. — М.: Мир, 1979.
15. Лёвшин Л. В., Салецкий А. М. Оптические методы исследования молекулярных систем. — М.: Изд-во МГУ, 1994.
16. *Ахманов С. А., Выслоух В. А., Чиркин А. С.* Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. — М.: Наука, 1988.
17. *Дьяков Ю. Е., Никитин С. Ю.* Задачи по статистической радиофизике и оптике. — М.: Изд-во МГУ, 1985.
18. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. — М.: Наука, 1979.
19. Физический энциклопедический словарь/Под ред. А. М. Прохорова. — М.: СЭ, 1983.
20. *Grischkowsky D.*//Appl. Phys. Lett. — 1974. V. 25. P. 566.

# Лекция 20

# Оптические явления на границе раздела сред

*Отражение и преломление света на границе раздела. Граничные условия для электромагнитного поля. Геометрия отражения и преломления. Закон Снеллиуса. Полное внутреннее отражение. Энергетика отражения и преломления. Формулы Френеля. Эффект Брюстера. Изменение фазы световой волны при отражении и преломлении. Отражение света при нормальном падении. Просветление оптики. Отражение света при наклонном падении. Отражение света от поверхности металла.*

**Отражение и преломление света на границе раздела.** Из опыта хорошо известно, что луч света, падающий на границу раздела двух различных оптических сред, разделяется на два луча: отраженный и преломленный (рис. 20.1). Характеристики отраженного и преломленного лучей, такие как направления распространения, мощность, поляризация, зависят как от состава обеих сред, так и от параметров исходного светового пучка — его направления, частоты, поляризации и мощности. Эти свойства отражения и преломления находят широкое применение в устройствах управления светом — линзах, призмах, зеркалах — которые позволяют фокусировать свет и формировать оптические изображения, осуществлять спектральное разложение света, получать полностью поляризованный свет и т. п. Явление отражения света используется в лазерных резонаторах и интерферометрах. Полное внутреннее отражение позволяет передавать свет на большие расстояния по оптическому волокну. Перечень подобных примеров можно было бы продолжить.

Следует иметь в виду еще одно обстоятельство. Поскольку световая волна обладает импульсом, изменение направления пучка, имеющее место при отражении и преломлении, приводит к появлению сил, действующих со стороны света на материальные тела. Обычно эти силы малы, однако существуют явления, в которых они играют заметную роль, например, оптическая левитация прозрачных частиц в сфокусированном лазерном пучке (см. дополнение 3).

Механизм отражения и преломления. Оптические явления, возникающие на границе раздела — отражение и преломление света — можно рассматривать как эффекты, связанные с неоднородностью среды. Чтобы убедиться в этом, вспомним сначала причины прямолинейного распространения света в однородной среде.

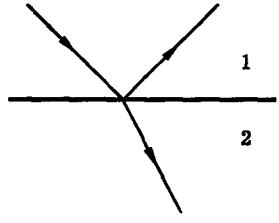



Рис. 20.1. Отражение и преломление светового луча на границе раздела сред

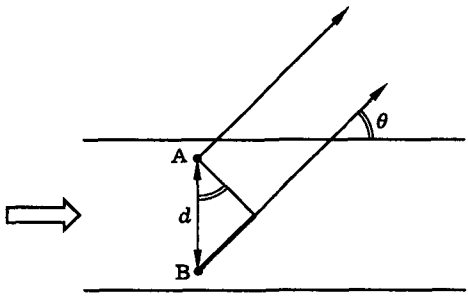



Рис. 20.2. К объяснению механизма прямолинейного распространения света в однородной среде

Как известно из френелевской теории дифракции, прямолинейное распространение света в вакууме связано с взаимным интерференционным гашением вторичных сферических световых волн, идущих от разных точек пространства. Такое гашение имеет место для всех направлений, кроме прямого, что и обусловливает прямолинейность светового луча. Аналогичным образом в однородной среде сферические световые волны, испускаемые отдельными атомами, интерферируют так, что световой луч также оказывается прямолинейным.

Механизм подавления бокового свечения и расплывания светового пучка поясняет рис. 20.2. Пусть A есть некоторый атом среды, расположенный в пределах светового пучка. Под действием падающей световой волны оптический электрон атома начинает совершать вынужденные колебания, в результате чего атом становится источником вторичной сферической световой волны. Рассмотрим излучение атома, идущее под углом $\theta$ к оси светового пучка. Как видно из рисунка, для любого угла $\theta$, кроме $\theta = 0$, найдется такой атом B, который в том же самом направлении спускает волну, находящуюся в противофазе к волне первого атома. В самом деле, если, например, падающее излучение имеет структуру плоской волны, то атом B находится в том же самом поперечном сечении пучка на расстояние $d$ от атома A, определяемом условием $d \sin\theta = \lambda/2$, где $\lambda$ — длина световой волны. Таким образом, атомы A и B взаимно гасят излучение друг друга в направлении $\theta$. Поскольку аналогичную пару атомов можно подобрать для любого угла $\theta \neq 0$, приходим к выводу, что свет распространяется прямолинейно.

Нетрудно видеть, что в приведенном рассуждении существенна идентичность всех атомов, т. е. *однородность* среды. Вместе с тем можно ожидать, что в *неоднородной* среде луч света не будет прямолинейным. Действительно, опыт показывает, что для неоднородных сред характерно сильное рассеяние света. Именно по этой причине, например, задымленный воздух и туман выглядят "мутными". С этой точки зрения кажется естественным, что на границе раздела сред нарушается прямолинейность распространения света и возникают отраженный и преломленный лучи.

**Граничные условия для электромагнитного поля.** Количественная теория отражения и преломления света строится на основе уравнений Максвелла и граничных условий для электромагнитного поля. Как известно из электродинамики, на границе раздела диэлектриков должны быть непрерывны тангенциальные (т. е. параллельные поверхности раздела) компоненты напряжен-

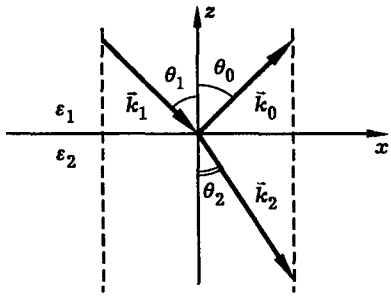



Рис. 20.3. Отражение и преломление плоской волны на границе раздела двух сред

ности электрического и магнитного поля. Итак, граничные условия имеют вид

$$E_{1\mathrm{t}} = E_{2\mathrm{t}}, \qquad H_{1\mathrm{t}} = H_{2\mathrm{t}}. \tag{20.1}$$

Здесь индекс "$t$" обозначает тангенциальную компоненту, цифры "1" и "2" обозначают среды по разные стороны границы раздела.

**Геометрия отражения и преломления. Закон Снеллиуса.** Пусть на плоскую границу раздела двух сред падает плоская монохроматическая линейно поляризованная световая волна

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{2}\vec{\mathcal{E}}_1 \exp\left[i(\omega t - \vec{k}_1\vec{r})\right] + \text{к.с.} \tag{20.2}$$

Угол между нормалью к границе раздела $\vec{n}$ и волновым вектором $\vec{k}_1$ падающей волны обозначим $\theta_1$ и назовем углом падения (рис. 20.3), комплексные диэлектрические проницаемости сред обозначим через $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$. Световые поля отраженной и преломленной волн запишем в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}_0 &= \frac{1}{2}\vec{\mathcal{E}}_0 \exp\left[i(\omega t - \vec{k}_0\vec{r})\right] + \text{к.с.}, \\ \vec{E}_2 &= \frac{1}{2}\vec{\mathcal{E}}_2 \exp\left[i(\omega t - \vec{k}_2\vec{r})\right] + \text{к.с.}, \end{aligned} \tag{20.3}$$

а углы $\theta_0$ и $\theta_2$, показанные на рис. 20.3, назовем соответственно углом отражения и углом преломления. Направим ось $z$ по нормали к границе раздела.

Записывая граничное условие $E_{1\mathrm{t}} = E_{2\mathrm{t}}$ в плоскости границы раздела $z = 0$, получим соотношение

$$\mathcal{E}_{1\mathrm{t}} \exp\left[i(\omega t - \vec{k}_1\vec{r})\right] + \mathcal{E}_{0\mathrm{t}} \exp\left[i(\omega t - \vec{k}_0\vec{r})\right] = \mathcal{E}_{2\mathrm{t}} \exp\left[i(\omega t - \vec{k}_2\vec{r})\right], \tag{20.4}$$

где $\mathcal{E}_{i\mathrm{t}}$ — постоянные величины. Условие (20.4) должно выполняться в любой момент времени $t$ и для всех точек $\vec{r}$, лежащих на границе раздела. Отсюда следует, что

$$\omega t - \vec{k}_1\vec{r} = \omega t - \vec{k}_0\vec{r} = \omega t - \vec{k}_2\vec{r},$$

а также

$$\vec{k}_1\vec{r} = \vec{k}_0\vec{r} = \vec{k}_2\vec{r}, \tag{20.5}$$

или, в декартовых координатах,

$$k_{1x}x + k_{1y}y = k_{0x}x + k_{0y}y = k_{2x}x + k_{2y}y. \tag{20.6}$$

Условия (20.6) должны выполняться для любых $x$ и $y$. В частности, полагая $x = 0$, получим

$$k_{1y} = k_{0y} = k_{2y}. \tag{20.7}$$

Аналогично, положив $y = 0$, найдем

$$k_{1x} = k_{0x} = k_{2x}. \tag{20.8}$$

Из (20.7) и (20.8) следует, что волновые векторы отраженной и преломленной волн $\vec{k}_0$ и $\vec{k}_2$ лежат в *плоскости падения*, т. е. в плоскости, проведенной через волновой вектор падающей волны $\vec{k}_1$ и нормаль к границе раздела $\vec{n}$. Таким образом, все четыре вектора: $\vec{n}$, $\vec{k}_1$, $\vec{k}_0$, $\vec{k}_2$ лежат в одной плоскости (компланарны).

Направим ось $x$ вдоль границы раздела так, чтобы плоскость $xz$ совпадала с плоскостью падения (рис. 20.3). Тогда $k_{1y} = k_{0y} = k_{2y} = 0$, $k_{1x} = k_{0x} = k_{2x}$, где

$$k_{1x} = k_1 \sin\theta_1, \quad k_{0x} = k_0 \sin\theta_0, \quad k_{2x} = k_2 \sin\theta_2, \tag{20.9}$$

$$k_1 = \frac{\omega}{c}n_1 = k_0, \quad k_2 = \frac{\omega}{c}n_2, \tag{20.10}$$

$n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}$ и $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$ — комплексные показатели преломления первой и второй сред. Из условия $k_{1x} = k_{0x}$ и формул (20.9), (20.10) получаем соотношение

$$\theta_1 = \theta_0, \tag{20.11}$$

согласно которому угол падения равен углу отражения. Это — *закон отражения* света.

Предположим теперь, что обе среды прозрачны; тогда показатели преломления $n_1$ и $n_2$ действительны. Подставив (20.9), (20.10) в соотношение $k_{1x} = k_{2x}$, получим

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2. \tag{20.12}$$

Формула (20.12) связывает между собой угол падения и угол преломления света. Она выражает *закон преломления*, или *закон Снеллиуса*. Оба соотношения (20.11) и (20.12) хорошо известны из опыта.

**Полное внутреннее отражение.** Предположим, что световой луч пересекает границу раздела, переходя из оптически более плотной среды в менее плотную, т. е. $n_1 > n_2$. Тогда, согласно закону Снеллиуса, угол преломления будет больше угла падения: $\theta_2 > \theta_1$. Картина преломления для этого случая показана на рис. 20.4, *а*. Если угол падения составляет величину

$$\theta_1^{\text{кр}} = \arcsin(n_2/n_1), \tag{20.13}$$

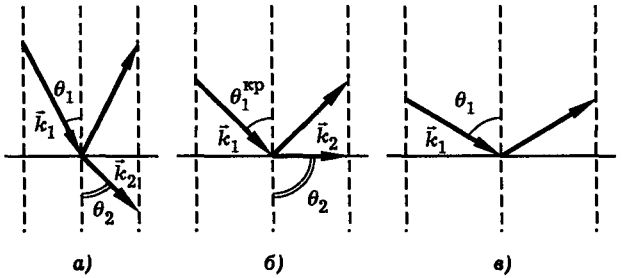



Рис. 20.4. Картина отражения и преломления света при переходе луча из оптически более плотной среды в менее плотную ($n_1 > n_2$). Угол падения меньше критического (*а*), угол падения равен критическому (*б*), угол падения больше критического (*в*). В последнем случае преломленный луч отсутствует и имеет место эффект полного внутреннего отражения света

то по формуле (20.12) получаем $\theta_2 = 90°$ и, следовательно, преломленный луч не проникает во вторую среду, а распространяется вдоль границы раздела (рис. 20.4, *б*). Если же $\theta_1 > \theta_1^{кр}$, т. е. угол падения превышает критический, то преломленный луч отсутствует, и свет полностью отражается от границы раздела (рис. 20.4, *в*). Этот эффект называется *полным внутренним отражением света*. Угол падения, определяемый формулой (20.13), называется *предельным углом полного отражения*. Например, для границы стекло–воздух ($n_1 = 1{,}5$; $n_2 = 1{,}0$) этот угол составляет около 40°.

Эффект полного внутреннего отражения можно наблюдать в опыте, показанном на рис. 20.5. В этом опыте пучок света вводится в струю воды, вытекающую через отверстие в стенке сосуда. Струя воды имеет форму параболы, а луч света оказывается как бы "запертым" в ней благодаря эффекту полного внутреннего отражения. В затемненной аудитории распространение света в струе хорошо видно благодаря флуоресценции красителя, добавленного в воду.

В другом опыте демонстрируется передача излучения гелий-неонового лазера по оптическому волокну (рис. 20.6). В этом опыте волокно изогнуто в виде кольца, однако свет не выходит наружу через прозрачную боковую поверхность волокна, так как испытывает на границе полное внутреннее отражение.

Передачу света через волокно можно наблюдать с помощью жгута оптических волокон; при этом свет передается независимо от того, какая форма придается жгуту (его можно, например, завязать узлом). Возможность передачи света по оптическому волокну используется в настоящее время в таких областях как оптическая связь, медицинская диагностика, лазерная терапия и др.

**Энергетика отражения и преломления. Формулы Френеля.** Каково соотношение энергий отраженного и преломленного лучей? Как зависит эта величина от угла падения и поляризации падающего пучка? Чтобы ответить на эти вопросы, необходимо вычислить амплитуды отраженной и преломленной волн. Сделаем этот расчет, используя граничные условия (20.1), а также связь между полями $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в световой волне, вытекающую из уравнений Максвелла.

Будем, по-прежнему, считать падающую, отраженную и преломленную световые волны плоскими и монохроматическими. Среды, образующие границу раздела, будем считать линейными и изотропными и характеризовать ком-

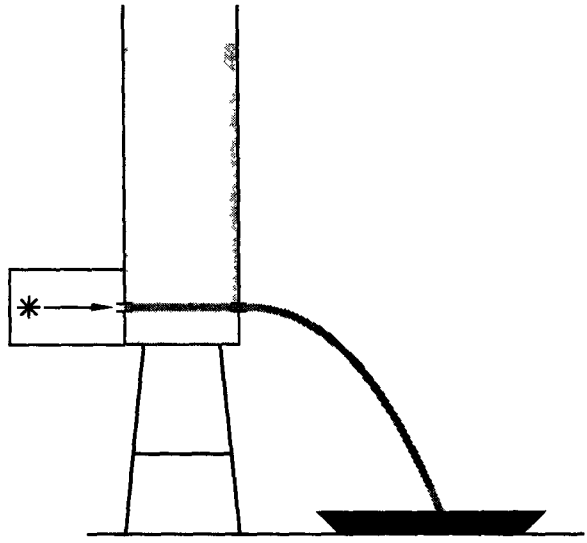


Рис. 20.5. Схема опыта по наблюдению полного внутреннего отражения света

плексными диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$. Распространение света в обеих средах описывается уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}. \tag{20.14}$$

Запишем $\vec{E}$, $\vec{H}$ и $\vec{D}$ в виде плоских монохроматических волн

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{2}\vec{\mathcal{E}}\exp\left[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})\right] + \text{к. с.}, \\ \vec{H} &= \frac{1}{2}\vec{\mathcal{H}}\exp\left[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})\right] + \text{к. с.}, \\ \vec{D} &= \frac{1}{2}\vec{\mathcal{D}}\exp\left[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})\right] + \text{к. с.} \end{aligned} \tag{20.15}$$

Подставив (20.15) в (20.14), получим следующие соотношения между амплитудами электрического и магнитного полей в световой волне:

$$\left[\vec{k}, \vec{\mathcal{E}}\right] = \frac{\omega}{c}\vec{\mathcal{H}}, \qquad \left[\vec{k}, \vec{\mathcal{H}}\right] = -\frac{\omega}{c}\varepsilon\vec{\mathcal{E}}. \tag{20.16}$$

Здесь учтено, что в линейной изотропной среде $\vec{\mathcal{D}} = \varepsilon\vec{\mathcal{E}}$, где $\varepsilon$ — комплексная диэлектрическая проницаемость среды.

Величина тангенциальной компоненты поля зависит от состояния поляризации падающей световой волны. Рассмотрим отдельно случаи, когда вектор $\vec{E}$ перпендикулярен и параллелен плоскости падения. Волну с произвольным состоянием поляризации можно представить в виде суперпозиции двух линейно поляризованных волн указанных типов, поскольку в общем случае

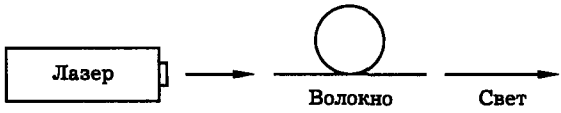



Рис. 20.6. Демонстрация передачи света по оптическому волокну. Свет не выходит наружу через прозрачную боковую поверхность волокна благодаря эффекту полного внутреннего отражения

$$\vec{E} = \vec{E}_\perp + \vec{E}_\parallel. \tag{20.17}$$

Пусть вектор $\vec{E}$ падающей волы перпендикулярен плоскости падения, т. е.

$$\vec{E} = \vec{E}_\perp. \tag{20.18}$$

Такую поляризацию волны называют "s" поляризацией. В этом случае отраженная и преломленная волны будут также поляризованы перпендикулярно плоскости падения. Векторы $\vec{H}$ всех трех волн, наоборот, будут лежать в плоскости падения. Используя систему координат, показанную на рис. 20.3, можно записать

$$E_t = E_y = E, \qquad H_t = H_x.$$

При этом граничные условия (20.1) принимают вид

$$E_1 + E_0 = E_2, \qquad H_{1x} + H_{0x} = H_{2x}$$

или, с учетом (20.15), (20.2), (20.3), (20.5)

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_2, \tag{20.19}$$

$$\mathcal{H}_{1x} + \mathcal{H}_{0x} = \mathcal{H}_{2x}. \tag{20.20}$$

Из первой формулы (20.16) следует, что

$$\mathcal{H}_x = -\frac{c}{\omega} k_z \mathcal{E}. \tag{20.21}$$

Подставив (20.21) в (20.20), получим уравнение

$$k_{1z}\mathcal{E}_1 + k_{0z}\mathcal{E}_0 = k_{2z}\mathcal{E}_2,$$

или

$$k_{1z}(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0) = k_{2z}\mathcal{E}_2, \tag{20.22}$$

где учтено, что

$$k_{0z} = -k_{1z} \tag{20.23}$$

(см. рис. 20.3).

Введем комплексные коэффициенты отражения ($r_\perp$) и преломления ($t_\perp$) света, определив их формулами

$$r_\perp = \mathcal{E}_0/\mathcal{E}_1, \qquad t_\perp = \mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1. \tag{20.24}$$

Тогда, используя (20.19) и (20.22), получим

$$r_\perp = \frac{k_{1z} - k_{2z}}{k_{1z} + k_{2z}}, \qquad t_\perp = \frac{2k_{1z}}{k_{1z} + k_{2z}}. \tag{20.25}$$

Формулы (20.24) и (20.25) решают поставленную задачу: они устанавливают связь между амплитудами падающей, отраженной и преломленной световых волн.

Аналогичным образом рассмотрим случай, когда вектор $\vec{E}$ падающей световой волны параллелен плоскости падения, т. е.

$$\vec{E} = \vec{E}_\parallel. \tag{20.26}$$

Такую поляризацию волны называют "p" поляризацией. В данном случае

$$H_t = H_y = H, \qquad E_t = E_x.$$

Граничные условия (20.1) принимают вид

$$H_1 + H_0 = H_2, \qquad E_{1x} + E_{0x} = E_{2x}.$$

Отсюда следуют соотношения для комплексных амплитуд:

$$\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_2, \tag{20.27}$$

$$\mathcal{E}_{1x} + \mathcal{E}_{0x} = \mathcal{E}_{2x}. \tag{20.28}$$

Из второй формулы (20.16) следует, что

$$\mathcal{E}_x = \frac{c}{\omega}\frac{k_z}{\varepsilon}\mathcal{H}. \tag{20.29}$$

Подставив (20.29) в (20.28), получим уравнение

$$\frac{k_{1z}}{\varepsilon_1}\mathcal{H}_1 + \frac{k_{0z}}{\varepsilon_1}\mathcal{H}_0 = \frac{k_{2z}}{\varepsilon_2}\mathcal{H}_2,$$

или

$$\frac{k_{1z}}{\varepsilon_1}(\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_0) = \frac{k_{2z}}{\varepsilon_2}\mathcal{H}_2, \tag{20.30}$$

где учтено (20.23).

Определим коэффициенты отражения и преломления формулами

$$r_\parallel = \mathcal{H}_0/\mathcal{H}_1, \qquad t_\parallel = \mathcal{H}_2/\mathcal{H}_1. \tag{20.31}$$

Используя (20.27) и (20.30), получим

$$r_\parallel = \frac{(k_{1z}/\varepsilon_1) - (k_{2z}/\varepsilon_2)}{(k_{1z}/\varepsilon_1) + (k_{2z}/\varepsilon_2)}, \qquad t_\parallel = \frac{2k_{1z}/\varepsilon_1}{(k_{1z}/\varepsilon_1) + (k_{2z}/\varepsilon_2)}. \tag{20.32}$$

Предположим теперь, что обе среды прозрачны. В этом случае диэлектрические проницаемости $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, а также показатели преломления сред

$$n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}, \qquad n_2 = \sqrt{\varepsilon_2} \tag{20.33}$$

действительны. Нормальные компоненты волновых векторов падающей и преломленной волн выражаются формулами (рис. 20.3):

$$k_{1z} = -k_1 \cos\theta_1, \qquad k_{2z} = -k_2 \cos\theta_2, \tag{20.34}$$

где волновые числа

$$k_1 = (\omega/c)n_1, \qquad k_2 = (\omega/c)n_2. \tag{20.35}$$

Подставив (20.33)–(20.35) в (20.25), (20.32), получим

$$r_\perp = \frac{n_1 \cos\theta_1 - n_2 \cos\theta_2}{n_1 \cos\theta_1 + n_2 \cos\theta_2} \tag{20.36}$$

и

$$r_\parallel = \frac{n_2 \cos\theta_1 - n_1 \cos\theta_2}{n_2 \cos\theta_1 + n_1 \cos\theta_2}. \tag{20.37}$$

Принимая во внимание закон Снеллиуса (20.12), эти выражения нетрудно преобразовать к виду

$$r_\perp = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}, \qquad r_\parallel = \frac{\mathrm{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\mathrm{tg}(\theta_1 + \theta_2)}. \tag{20.38}$$

Итак, формулы (20.38) определяют амплитудные коэффициенты отражения света на границе раздела линейных изотропных прозрачных сред. В этих формулах $\theta_1$ — угол падения, $\theta_2$ — угол преломления светового луча на границе раздела (рис. 20.3); эти углы связаны между собой законом Снеллиуса (20.12). Выражение $r_\perp$ относится к случаю, когда падающая световая волна поляризована перпендикулярно плоскости падения, а выражение $r_\parallel$ — к случаю поляризации в плоскости падения. Формулы (20.38) называются *формулами Френеля*. Эти формулы позволяют вычислить энергии отраженного и преломленного пучков света, а также определить изменения фаз световых волн при отражении и преломлении. В частном случае $n_1 = n_2$ (однородная среда, нет границы раздела) формулы (20.38), (20.32), (20.25) описывают обычное прямолинейное распространение света. Интересно отметить, что формулы Френеля были получены еще до установления электромагнитной природы света.

**Эффект Брюстера.** Наиболее примечательная особенность выражений (20.38) состоит в том, что при определенных условиях коэффициент отражения $r_\parallel$ обращается в ноль:

$$r_\parallel = 0. \tag{20.39}$$

Это имеет место, если сумма углов падения и преломления равна $\pi/2$:

$$\theta_1 + \theta_2 = \pi/2. \tag{20.40}$$

Итак, изложенная выше теория предсказывает полное исчезновение отраженной волны, если падающая световая волна поляризована в плоскости падения, и выполняется соотношение (20.40). Опыт подтверждает этот результат. Эффект отсутствия отраженной волны называется *эффектом Брюстера*.

Используя соотношение (20.40) и закон преломления (20.12), нетрудно вычислить величину угла падения, при котором имеет место эффект Брюстера. Этот угол, называемый углом Брюстера, определяется выражением

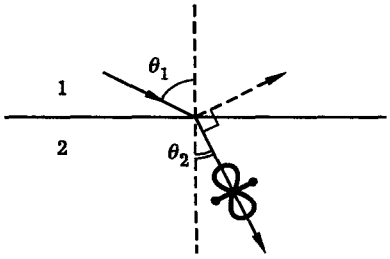



Рис. 20.7. К пояснению механизма эффекта Брюстера: сплошными прямыми показаны падающий и преломленный лучи; пунктиром — направление отраженного луча. Показаны также направление колебаний диполя во второй среде и диаграмма направленности излучения диполя (тор)

$$\theta_Б = \operatorname{arctg}(n_2/n_1). \tag{20.41}$$

Например, для границы раздела "воздух–стекло", когда $n_1 = 1$, $n_2 = 1{,}52$, получаем $\theta_Б = 56°40'$.

Брюстеровский угол называют еще *углом полной поляризации*. Действительно, если падающий под этим углом свет неполяризован, то отраженный пучок света линейно поляризован перпендикулярно плоскости падения. Таким образом, эффект Брюстера можно использовать для получения линейно поляризованного света.

В опыте, демонстрируемом на лекции, пучок белого неполяризованного света от дуговой лампы падает на стеклянную пластинку под углом Брюстера. Отраженный пучок света направляется на экран. Он имеет линейную поляризацию, в чем легко убедиться с помощью поляроида. Таким образом, эффект полной поляризации действительно имеет место.

В другом варианте опыта отраженный луч направляют на вторую стеклянную пластинку ориентированную так, что луч оказывается поляризованным в плоскости падения. Наблюдают отражение света от второй пластинки. Поворачивая вторую пластинку, меняют угол падения на нее света и наблюдают при некотором угле падения полное исчезновение отраженного луча — эффект Брюстера.

Причину эффекта Брюстера можно пояснить следующим образом. Отраженный луч света представляет собой нескомпенсированное излучение диполей второй среды, распространяющееся в первой среде. Из рис. 20.7 видно, что при выполнении условия (20.40) отраженный и преломленный лучи оказываются взаимно перпендикулярными. При этом диполи второй среды, колеблющиеся параллельно вектору $\vec{E}$ преломленной волны и, следовательно, перпендикулярно преломленному лучу, не испускают свет в направлении отраженного луча, так как это направление совпадает с направлением колебаний диполей (см. лекцию 5 и дополнение 6). В результате отраженный луч отсутствует, и вся энергия света передается преломленному лучу.

Из сказанного следует, что эффект Брюстера возможен лишь при поляризации падающего луча в плоскости падения. Если же падающий луч поляризован перпендикулярно плоскости падения, то отраженный луч должен наблюдаться при любом угле падения. Этот вывод также согласуется с формулами (20.38).

**Изменение фазы световой волны при отражении и преломлении.** Из формул (20.25) и (20.32) следует, что если обе среды прозрачны, то амплитудные коэффициенты пропускания $t_\perp$ и $t_\parallel$ есть действительные положительные числа. Это значит, что фаза преломленной волны совпадает с фазой падающей волны на границе раздела.

Амплитудные коэффициенты отражения $r_\perp$ и $r_\parallel$ также действительны, но могут быть как положительными, так и отрицательными. Следовательно, в зависимости от условий, фаза отраженной волны может либо совпадать с фазой падающей волны на границе раздела, либо отличаться от нее на $\pi$.

**Отражение света при нормальном падении.** Если $\theta_1 = 0$, то по формулам (20.11), (20.12), (20.38) получаем $\theta_0 = 0$, $\theta_2 = 0$,

$$r_\perp = -\frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}, \qquad r_\parallel = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}. \tag{20.42}$$

Следовательно, при нормальном падении

$$r_\perp = -r_\parallel. \tag{20.43}$$

Смысл этого результата состоит в том, что при отражении назад один из векторов $\vec{E}$ или $\vec{H}$ световой волны должен изменить свое направление на обратное; только в этом случае векторы $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{k}$ как в падающей, так и в отраженной волне образуют правую тройку векторов в соответствии с требованием уравнений Максвелла (см. лекцию 2).

Рассмотрим конкретный пример. Пусть плоская монохроматическая световая волна падает по нормали на границу оптически более плотной среды, например на границу "воздух–стекло" — так, что $n_2 > n_1$. В соответствии с (20.42) в этом случае $r_\perp = \mathcal{E}_0/\mathcal{E}_1 < 0$, $r_\parallel = \mathcal{H}_0/\mathcal{H}_1 > 0$ и, следовательно, при отражении вектор $\vec{H}$ сохраняет свое направление, а вектор $\vec{E}$ меняет направление на противоположное (рис. 20.8). Иными словами, при отражении от более плотной среды фаза волны "$H$" сохраняется, а фаза волны "$E$" меняется на $\pi$. При отражении от менее плотной среды ($n_2 < n_1$), наоборот, фаза волны "$E$" сохраняется, а фаза волны "$H$" меняется на $\pi$.

Что же касается световой волны, прошедшей через границу раздела, то, как видно из рис. 20.8, в этой волне оба вектора $\vec{E}$ и $\vec{H}$ имеют на границе те же направления, что и в падающей волне. Иначе говоря, фазы обеих волн "$E$" и "$H$" при прохождении границы не меняются.

Используя формулы (20.24), (20.25), (20.29), (20.31), (20.32), нетрудно проверить, что при отражении и преломлении света выполняется закон сохранения энергии. В частности, при нормальном падении интенсивность падающей волны $I_1 = (cn_1/8\pi)|\mathcal{E}_1|^2$ равна сумме интенсивностей отраженной $I_0 = (cn_1/8\pi)|\mathcal{E}_0|^2$ и прошедшей $I_2 = (cn_2/8\pi)|\mathcal{E}_2|^2$ волн:

$$I_1 = I_0 + I_2. \tag{20.44}$$

При этом между коэффициентами отражения и пропускания имеют место соотношения

$$|r_\perp|^2 + \frac{n_2}{n_1}|t_\perp|^2 = 1, \qquad |r_\parallel|^2 + \frac{n_1}{n_2}|t_\parallel|^2 = 1.$$

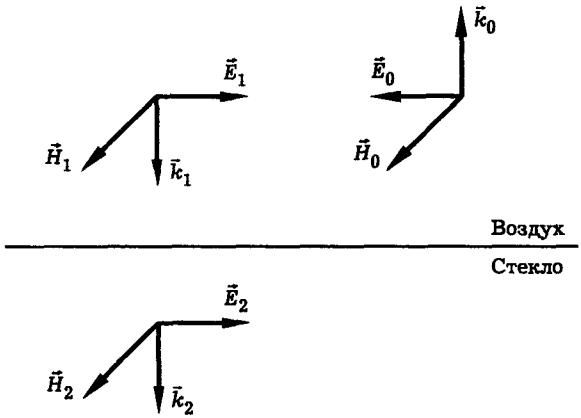



Рис. 20.8. Взаимная ориентация векторов $\vec{E}$, $\vec{H}$ и $\vec{k}$ в падающей, отраженной и прошедшей волнах при нормальном падении световой волны на границу раздела "воздух–стекло" ($n_2 > n_1$)

Здесь величины $r_\perp$ и $r_\parallel$ определяются формулами (20.42), и

$$t_\perp = 2n_1/(n_1 + n_2), \qquad t_\parallel = 2n_2/(n_1 + n_2)$$

в соответствии с (20.25), (20.32).

Энергетический коэффициент отражения света при нормальном падении $R = |r|^2$ составляет величину

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2. \tag{20.45}$$

Например, для границы воздух–стекло, когда $n_1 = 1$, $n_2 = 1{,}5$, получаем $R = 0{,}04$, т. е. отражение составляет 4%.

**Просветление оптики.** В системах, формирующих оптическое изображение, таких как объективы фотоаппаратов, микроскопов и др., используется, как правило, несколько линз, и число границ раздела типа "воздух–стекло" весьма велико. Если не принять специальных мер, то световой пучок, проходя через объектив, будет терять значительную долю своей энергии. Поэтому возникает задача уменьшения френелевского отражения света на границах раздела.

Один из способов решения этой задачи состоит в использовании интерференционного подавления отраженной волны. С этой целью на поверхность стекла наносят прозрачный слой вещества (просветляющее покрытие или пленку) с таким расчетом, чтобы световые волны, отраженные от обеих границ этого слоя, взаимно гасили друг друга (рис. 20.9).

Пусть $l$ — толщина пленки, $n_0$ — показатель преломления воздуха, $n_1$ — показатель преломления пленки, $n_2$ — показатель преломления стекла. Нетрудно видеть, что френелевское отражение будет полностью устранено, если толщину пленки взять равной четверти длины световой волны

$$l = \lambda/4,$$

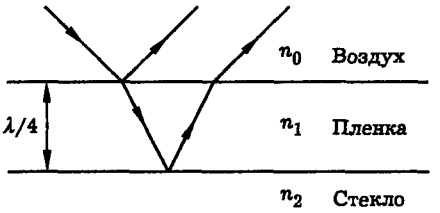



Рис. 20.9. Схема просветления оптики

а показатель преломления пленки выбрать таким, чтобы коэффициенты отражения света на обеих ее границах были одинаковы. Отсюда получаем следующее уравнение для $n_1$:

$$\left(\frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1}\right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2,$$

решение которого есть

$$n_1 = \sqrt{n_0 n_2}.$$

Итак, показатель преломления пленки должен быть равен среднему геометрическому показателей преломления воздуха и стекла. Например, полагая $n_0 = 1$, $n_2 = 1{,}5$, получим $n_1 = 1{,}22$. Для длины волны света в вакууме 5500 Å соответствующая длина волны в покрытии 5500 Å/1,22 = 4500 Å. Это соответствует толщине покрытия 4500 Å/4 = 1120 Å = $1{,}12 \times 10^{-5}$ см. Такой слой можно нанести испарением соответствующего материала в вакуумной камере.

Показатели преломления большинства твердых веществ заключены между 1,5 и 2,2 и подбор вещества со столь низким показателем преломления как 1,22 является непростой задачей. Достаточно хорошо этому требованию удовлетворяют виллиолент NaF, имеющий показатель преломления 1,33 и криолит $Na_3AlF_6$ примерно с тем же показателем преломления. Коэффициент отражения при этом становится равным 0,008, что значительно меньше коэффициента отражения от обычного стекла, равного примерно 0,04. Коэффициент отражения для других волн несколько больше, но все равно остается достаточно малым практически для всего оптического диапазона. Описанный способ уменьшения отражения света от стеклянных поверхностей называется *просветлением оптики*.

**Отражение света при наклонном падении.** Коэффициент отражения света при наклонном падении луча на границу раздела зависит от поляризации света. Если падающий пучок поляризован перпендикулярно плоскости падения или параллельно плоскости падения, то энергетические коэффициенты отражения есть

$$R_\perp = r_\perp^2, \qquad R_\parallel = r_\parallel^2, \tag{20.46}$$

где величины $r_\perp$ и $r_\parallel$ определяются формулами (20.38). Если падающий пучок света имеет линейную поляризацию, а вектор $\vec{E}$ составляет угол $\psi$ с плоскостью падения, то коэффициент отражения будет

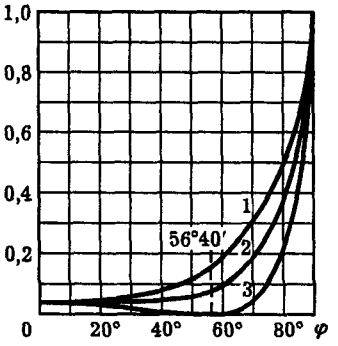



Рис.20.10. Зависимость коэффициента отражения света на границе раздела воздух–стекло от угла падения: 1 — линейно поляризованный свет, поляризация перпендикулярна плоскости падения, 2 — естественно поляризованный свет, 3 — линейно поляризованный свет, поляризация параллельна плоскости падения

$$R = R_{\parallel} \cos^2 \psi + R_{\perp} \sin^2 \psi. \tag{20.47}$$

Для неполяризованного (естественного) света следует усреднить выражение (20.47) по всем углам $\psi$. В итоге получим

$$R = \frac{1}{2}(R_{\perp} + R_{\parallel}). \tag{20.48}$$

Графики зависимостей коэффициентов отражения поляризованного и неполяризованного света от угла падения на границе воздух–стекло, построенные для $n_1 = 1$ и $n_2 = 1,52$, показаны на рис. 20.10.

**Отражение света от поверхности металла.** Оптические свойства металлов, такие как отражение и поглощение света определяются, в основном, наличием в металле свободных электронов. Комплексную диэлектрическую проницаемость металла можно приближенно вычислить, используя модель Лоренца и полагая равными нулю параметры, определяющие упругую связь электрона в атоме ($\omega_0$) и затухание электронных колебаний ($\Gamma$). В этом случае по формуле (19.12) получим

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{\text{p}}^2}{\omega^2}, \tag{20.49}$$

где $\omega_{\text{p}}$ — так называемая "плазменная частота", определяемая формулой (19.11):

$$\omega_{\text{p}} = \sqrt{\frac{4\pi N e^2}{m}}. \tag{20.50}$$

Как показано в лекции 19, при плотности свободных электронов $N = 10^{22}$ см$^{-3}$ плазменная частота соответствует длине волны $\lambda_{\text{p}} = 0{,}3$ мкм, т. е. лежит в ультрафиолетовом диапазоне спектра. В этом случае для частот оптического диапазона выполняется неравенство $\omega < \omega_{\text{p}}$ и величина $\varepsilon$, определяемая формулой (20.49), оказывается отрицательной

$$\varepsilon < 0, \tag{20.51}$$

а комплексный показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$ оказывается чисто мнимым, так как

$$\mathrm{Re}\sqrt{\varepsilon} = 0. \tag{20.52}$$

Следовательно, комплексный показатель преломления металла можно записать как

$$n = in'', \tag{20.53}$$

где $n''$ — действительная величина.

В соответствии с формулами (20.25), (20.32), коэффициент отражения света от металла при нормальном падении можно записать в виде

$$R = \left|\frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}\right|^2, \tag{20.54}$$

где $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ — комплексные диэлектрические проницаемости сред, образующих границу раздела. Например, для границы раздела воздух–металл имеем $\sqrt{\varepsilon_1} = 1$, $\sqrt{\varepsilon_2} = in_2''$. В этом случае по формуле (20.54) находим

$$R = 1, \tag{20.55}$$

т. е. металл должен полностью отражать падающий на него свет.

Действительно, большинство металлов хорошо отражают свет. Именно этим обусловлен характерный блеск чистых металлических поверхностей. Следует отметить также, что чем ниже частота излучения, тем лучше выполняется неравенство $\omega < \omega_\mathrm{p}$, и тем выше должен быть коэффициент отражения. Опыт подтверждает этот вывод (см. табл. 20.1). Коэффициенты отражения металлов увеличиваются с ростом длины волны и при $\lambda = 10$ мкм почти все они близки к 100%.

Для некоторых металлов плазменная частота лежит в видимом диапазоне. Поскольку для частот $\omega > \omega_\mathrm{p}$ отражение металла резко падает, поверхность металла в этом случае выглядит не белой, а имеет определенный цвет. Так, например, золото имеет плазменную частоту, соответствующую длине волны около 0,6 мкм. Поэтому оно слабо отражает сине-зеленый свет и при освещении белым светом выглядит желтым. Для алюминия же плазменная частота лежит в ультрафиолетовом диапазоне, поэтому алюминий хорошо отражает весь видимый свет и при обычном освещении выглядит белым.

Таблица 20.1

Коэффициенты отражения света полированными поверхностями металлов при нормальном падении (в процентах) [6]

| $\lambda$, мкм | 0,188 | 0,2 | 0,251 | 0,305 | 0,357 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Алюминий | — | — | 80 | — | 84 | 88 |
| Медь | — | — | 26 | 25 | 27 | 44 |
| Сталь | 22 | 27 | 38 | 44 | 50 | 56 |
| Серебро | 22 | 25 | 34 | 9 | 75 | 91 |
| Никель | — | — | 38 | 44 | 49 | 61 |
| Хром | 33 | 36 | — | 37 | 41 | 55 |
| Цинк | 17 | 22 | 39 | 48 | 51 | 55 |
| Кремний | 64 | 73 | 75 | 73 | 60 | 34 |
| $\lambda$, мкм | 0,6 | 0,7 | 0,9 | 1,0 | 5,0 | 10,0 |
| Алюминий | 89 | 87 | 85 | 93 | 94 | 97 |
| Медь | 72 | 83 | 89 | 90 | 98 | 98 |
| Сталь | 57 | 58 | 61 | 63 | 90 | 94 |
| Серебро | 93 | 95 | 97 | 97 | 99 | 99 |
| Никель | 65 | 69 | 70 | 72 | 94 | — |
| Хром | — | 56 | — | 57 | 81 | 93 |
| Цинк | 58 | 61 | 62 | 69 | 97 | — |
| Кремний | 32 | — | — | — | — | — |

# Литература


1. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. — М.: Наука, 1979.
2. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. — М.: Наука, 1973.
3. *Фабелинский И. Л.* Молекулярное рассеяние света. — М.: Наука, 1965.
4. *Калашников С. Г.* Электричество. — М.: Наука, 1977.
5. *Ярив А., Юх П.* Оптические волны в кристаллах. — М.: Мир, 1987.
6. *Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г.* Справочник по элементарной физике. — М.: Наука, 1988.
7. *Крауфорд Ф.* Волны. — М.: Наука, 1974.
8. *Матвеев А. Н.* Оптика. — М.: Высшая Школа, 1985.
9. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Оптика. — М.: Наука, 1985.
10. *Ландсберг Г. С.* Оптика. — М.: Наука, 1976.

# Лекция 21

# Оптика анизотропных сред

*Анизотропные материалы. Основные эффекты кристаллооптики. Структура световой волны в анизотропном кристалле. Материальное уравнение анизотропной среды. Классификация кристаллов. Собственные состояния поляризации световой волны в анизотропном кристалле. Обыкновенная и необыкновенная волны. Двойное лучепреломление света на границе с анизотропной средой. Получение и анализ поляризованного света. Интерференция поляризованных лучей. Наведенная анизотропия.*

Рассмотрены оптические эффекты в кристаллах, связанные с анизотропией структуры среды. Изложены теоретические основы оптики анизотропных сред. Обсуждается применение анизотропных кристаллов для получения и анализа поляризованного света.

**Анизотропные материалы. Основные эффекты кристаллооптики.** Еще во времена Гюйгенса было известно, что некоторые кристаллы обладают необычными оптическими свойствами. Так, кристалл исландского шпата (кальцит) преломляет свет по-разному в зависимости от того, с какой стороны падает свет на кристалл. В этом кристалле есть одно направление, вдоль которого при нормальном падении луч света проходит прямолинейно (рис. 21.1, *а*). В других направлениях луч, проходя через кристалл, раздваивается, демонстрируя так называемое *двойное лучепреломление* (рис. 21.1, *б*). Такая зависимость оптических свойств от направления в кристалле называется *оптической анизотропией*. Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих анизотропные свойства кристаллов.

Двойное лучепреломление. Один из первых экспериментов по двойному лучепреломлению схематически показан на рис. 21.1, *б*. Пучок белого света дуговой лампы проходит через кристалл исландского шпата и дает на экране

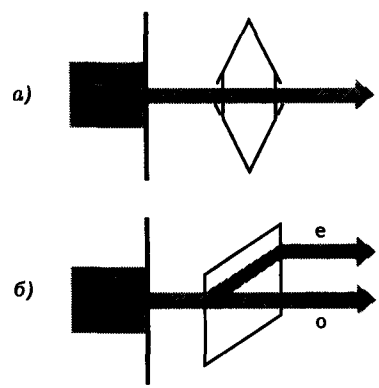



Рис. 21.1. Прохождение света вдоль оптической оси исландского шпата (*а*). Двойное лучепреломление света, падающего нормально к естественной грани кристалла исландского шпата (*б*)

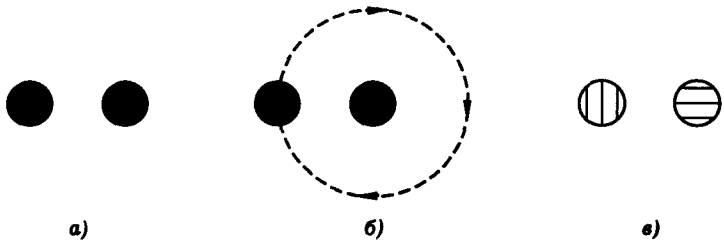



Рис. 21.2. Картины, наблюдаемые на экране в опытах с кристаллом исландского шпата (*а*, *б*). Поляризация лучей (*в*)

два белых пятна примерно одинаковой интенсивности (рис. 21.2, *а*). При повороте кристалла относительно оси падающего пучка одно из пятен на экране остается неподвижным, а второе поворачивается вокруг первого синхронно с поворотом кристалла (рис. 21.2, *б*). Анализ поляризации лучей с помощью поляроида показывает, что оба луча, вышедших из кристалла, линейно поляризованы, причем направления поляризации в них взаимно ортогональны (рис. 21.2, *в*). Это особенно хорошо видно при вращении кристалла относительно оси падающего пучка. В этом случае пучки света, вышедшие из кристалла и прошедшие через поляроид, периодически меняют свою интенсивность, причем в тот момент, когда один из пучков полностью "гаснет", другой имеет максимальную интенсивность. Аналогичная картина наблюдается при вращении поляроида и неподвижном кристалле.

Анизотропное поглощение. В другом опыте демонстрируется анизотропное поглощение света в кристалле турмалина. Тонкая пластинка турмалина наклеена на специальную насадку, которая надевается на объектив проекционного фонаря. Изображение турмалиновой пластинки в прошедшем свете наблюдается на экране; оно имеет вид слегка затемненной полосы зеленоватого цвета (рис. 21.3, *а*). Затем в пучок света вставляют поляроид и, вращая его, наблюдают изменение картины на экране. При определенном положении поляроида изображение турмалиновой пластинки становится совершенно темным. Это значит, что свет, прошедший через турмалин, полностью поляризован и имеет линейную поляризацию.

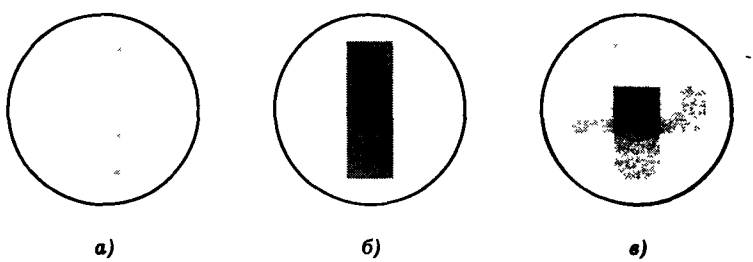



Рис. 21.3. Изображения турмалиновых пластин на экране. Одна пластина (*а*), две пластины, наложенные параллельно друг другу (*б*), две пластины, наложенные перпендикулярно друг другу (*в*)

После этого убирают поляроид и надевают на объектив проекционного фонаря еще одну насадку с пластиной турмалина так, что две турмалиновые пластинки оказываются наложенными одна на другую. При повороте одной пластинки относительно другой видно, что при параллельной ориентации они пропускают свет, хотя изображение пластинки на экране и становится более темным (рис. 21.3, *б*). Если же пластинки скрещены крест накрест, то в области их пересечения образуется совершенно темный квадрат (рис. 21.3, *в*). Результат опыта говорит о том, что поглощение света в турмалиновой пластине, вообще говоря, зависит от ее ориентации. Иными словами, турмалин демонстрирует *анизотропное поглощение* света.

Механизм анизотропного поглощения можно пояснить следующим образом. Анизотропия структуры турмалина приводит к тому, что электроны имеют возможность двигаться преимущественно в одном направлении относительно кристалла. Если поляризация падающей световой волны совпадает с этим направлением, то световое поле вызывает сильную раскачку электронов, передает им свою энергию, а те, в свою очередь, передают энергию кристаллической решетке. В результате световая волна поглощается. Если же поляризация падающей волны перпендикулярна направлению возможного движения электронов в кристалле, то колебания электронов практически не возбуждаются, либо электроны колеблются с небольшой амплитудой, отдавая свою энергию вторичному излучению, а не решетке кристалла. В этом случае световая волна испытывает лишь незначительное поглощение. Из сказанного ясно также, почему при облучении неполяризованным (естественным) светом на выходе из кристалла образуется линейно поляризованный свет: турмалин пропускает свет лишь той поляризации, которая ортогональна направлению возможного движения электронов в кристалле.

В описанном выше опыте пластинки турмалина имеют толщину около 1 мм. Как показывает опыт, такую пластинку можно использовать для получения линейно поляризованного света, т. е. как *поляризатор* света. Хорошим поляризатором является также пленка на основе синтетического поливинилового спирта, обогащенного иодом. Из таких пленок изготавливают поляроиды.

Причиной оптической анизотропии является анизотропия структуры среды. Именно поэтому анизотропные свойства наблюдаются у кристаллов, но отсутствуют у газов, жидкостей (кроме жидких кристаллов), пластмасс, стекол. В некоторых случаях оптическая анизотропия может возникнуть и в изотропной среде в результате какого-либо воздействия на нее — механического напряжения, внешнего электрического поля и др. Например, двойное лучепреломление может возникать под действием постоянного электрического поля (эффект Керра). Аналогичное явление наблюдается и в переменном электрическом поле, а также в поле мощного лазерного импульса.

**Структура световой волны в анизотропном кристалле.** Структура световой волны в линейной анизотропной среде определяется уравнениями Максвелла

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad && \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ &\operatorname{div}\vec{D} = 0, && \operatorname{div}\vec{H} = 0. \end{aligned} \tag{21.1}$$

Представим $\vec{E}$, $\vec{H}$ и $\vec{D}$ в виде плоских монохроматических волн:

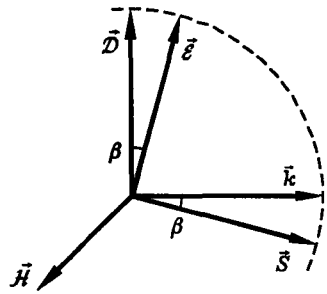



Рис. 21.4. Взаимная ориентация векторов, определяющих структуру световой волны в анизотропном кристалле. Векторы $\vec{\mathcal{D}}$, $\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{k}$, $\vec{S}$, концы которых соединены пунктирной линией, лежат в одной плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{\mathcal{H}}$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{2}\vec{\mathcal{E}}e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})} + \text{к. с.}, \\ \vec{H} &= \frac{1}{2}\vec{\mathcal{H}}e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})} + \text{к. с.}, \\ \vec{D} &= \frac{1}{2}\vec{\mathcal{D}}e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})} + \text{к. с.}, \end{aligned} \tag{21.2}$$

где $\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{H}}$ и $\vec{\mathcal{D}}$ — комплексные амплитуды, $\omega$ — частота, $\vec{k}$ — волновой вектор. Подставив (21.2) в (21.1), получим алгебраические соотношения

$$\begin{gathered} \left[\vec{k},\vec{\mathcal{E}}\right] = \frac{\omega}{c}\vec{\mathcal{H}}, \quad \left[\vec{k},\vec{\mathcal{H}}\right] = -\frac{\omega}{c}\vec{\mathcal{D}}, \\ \left(\vec{k},\vec{\mathcal{D}}\right) = 0, \qquad \left(\vec{k},\vec{\mathcal{H}}\right) = 0. \end{gathered} \tag{21.3}$$

Из (21.3) видно, что векторы $\vec{\mathcal{D}}$, $\vec{\mathcal{H}}$, $\vec{k}$ образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов (рис. 21.4). Что же касается вектора $\vec{\mathcal{E}}$, то он перпендикулярен вектору $\vec{\mathcal{H}}$ и, следовательно, лежит в плоскости векторов $\vec{\mathcal{D}}$ и $\vec{k}$, но вообще говоря, не параллелен вектору $\vec{\mathcal{D}}$. Вектор Пойнтинга

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right], \tag{21.4}$$

определяющий направление распространения световой энергии, перпендикулярен обоим векторам $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{H}}$ и, следовательно, лежит в плоскости векторов $\vec{k}$, $\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{D}}$, однако он, вообще говоря, не параллелен вектору $\vec{k}$ (рис. 21.4). Это означает, что направление светового луча ($\vec{S}$) в анизотропном кристалле может не совпадать с направлением нормали к волновому фронту световой волны ($\vec{k}$). Угол между векторами $\vec{k}$ и $\vec{S}$ равен углу между векторами $\vec{\mathcal{D}}$ и $\vec{\mathcal{E}}$ и называется *углом анизотропии*. На рис. 21.4 этот угол обозначен буквой $\beta$. Ниже мы покажем, что именно непараллельность векторов $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{D}}$ световой волны обусловливает своеобразные оптические свойства анизотропных кристаллов. Рассмотрим причину этого явления.

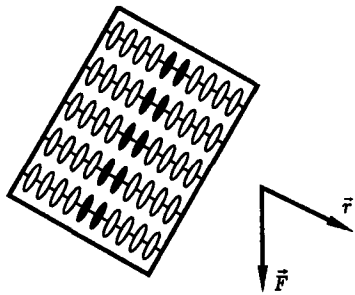



Рис. 21.5. Счеты — простая механическая модель анизотропной системы. Важное свойство такой системы состоит в том, что смещение частиц $\vec{r}$, вообще говоря, не параллельно приложенной внешней силе $\vec{F}$

Интересующее нас свойство анизотропной среды можно пояснить, используя механическую аналогию, например, такую простую систему как канцелярские счеты. Возьмем в руки счеты и наклоним их так, чтобы косточки начали соскальзывать по проволокам (рис. 21.5). Хорошо видно, что в этом случае движение косточек происходит не в направлении внешней силы (в данном случае это сила тяжести, направленная вертикально вниз), а в направлении проволок, т. е. в *направлении, определяемом структурой системы.*

Примерно то же самое происходит и в анизотропном кристалле. При распространении световой волны на электроны действует внешняя сила, направленная вдоль вектора $\vec{E}$ волны. Однако смещение электронов происходит не в направлении этой внешней силы, а в *направлении, определяемом структурой кристалла.* В результате вектор поляризации среды $\vec{P}$ оказывается не параллельным вектору $\vec{E}$. В свою очередь вектор электрической индукции $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ также не параллелен вектору $\vec{E}$. Так возникает картина, показанная на рис. 21.4.

**Материальное уравнение анизотропной среды.** Существенное для нас свойство анизотропной среды состоит в том, что подвижность оптических электронов по отношению к различным направлениям в кристалле неодинакова. Имея в виду это обстоятельство, рассмотрим простейшую модель анизотропной среды, в которой движение электронов возможно вообще лишь в одном единственном направлении. Это направление будем характеризовать единичным вектором $\vec{f}$, называемым "директором" (рис. 21.6). Данная модель наиболее проста в математическом отношении. Заметим, однако, что анизотропия подобного типа наблюдается и в реальных средах, в частности у некоторых жидких кристаллов.

Оптическую поляризацию среды запишем в виде

$$\vec{P} = N\vec{p}, \tag{21.5}$$

где $N$ — число молекул в единице объема,

$$\vec{p} = e\vec{x}, \tag{21.6}$$

$\vec{p}$ — дипольный момент отдельной молекулы,

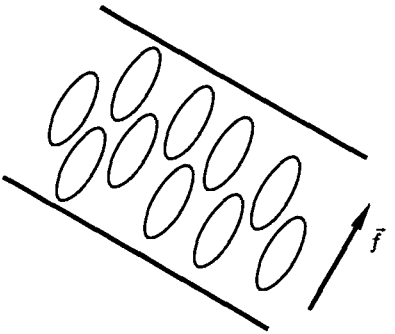



Рис. 21.6. Простейшая модель анизотропной среды, в которой движение электронов возможно лишь в одном направлении, определяемом вектором $\vec{f}$

$$\vec{x} = x\vec{f}, \tag{21.7}$$

$x$ — величина смещения электрона относительно положения равновесия, $\vec{f}$ — направление смещения (директор).

Уравнение движения электрона запишем в виде уравнения осциллятора (модель Лоренца):

$$\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m}\left(\vec{f}, \vec{E}\right), \tag{21.8}$$

где $\left(\vec{f}, \vec{E}\right)$ — скалярное произведение векторов $\vec{f}$ и $\vec{E}$, равное проекции вектора $\vec{E}$ на направление директора. Подставим в (21.8) выражение для $\vec{E}$ в виде плоской монохроматической волны (21.2) и будем искать решение в виде

$$x = \frac{1}{2}\widetilde{x}\,\mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + \text{к. с.} \tag{21.9}$$

Подставляя (21.9) в (21.8), находим связь комплексных амплитуд электрического поля и смещения электрона

$$\widetilde{x} = \frac{e}{m}\frac{\left(\vec{f}, \vec{\mathcal{E}}\right)}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma}. \tag{21.10}$$

Согласно (21.5)–(21.7), (21.10), оптическую поляризацию среды можно записать как

$$\vec{P} = \frac{1}{2}\vec{\mathcal{P}}\mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + \text{к. с.}, \tag{21.11}$$

где

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{Ne^2}{m}\frac{\left(\vec{f}, \vec{\mathcal{E}}\right)}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma}\vec{f}. \tag{21.12}$$

Формула (21.12), связывающая между собой комплексные амплитуды поляризации $\vec{\mathcal{P}}$ и поля $\vec{\mathcal{E}}$, представляет собой материальное уравнение модельной анизотропной среды. В этой формуле $N$ — число молекул в единице объема среды, $e$ — заряд электрона, $m$ — масса электрона, $\omega_0$ — собственная частота колебаний элементарного осциллятора, $\Gamma$ — коэффициент затухания колебаний, $\vec{f}$ — вектор направления движения электронов. В соответствии с основной идеей нашей модели формула (21.12) показывает, что вектор оптической поляризации среды $\vec{P}$ может быть не параллелен вектору напряженности электрического поля световой волны $\vec{E}$:

$$\vec{P} \nparallel \vec{E}.$$

Как мы уже отмечали, причина этого состоит в том, что смещение электронов в анизотропном кристалле происходит не в направлении электрического поля световой волны, а в направлении, определяемом структурой кристалла.

Тензор оптической восприимчивости. Выясним, каким образом связаны между собой декартовы компоненты поляризации и поля. Здесь удобно ввести тензорную систему обозначений, при которой оси декартовой системы координат обозначаются $x_1, x_2, x_3$, а декартовы компоненты векторов также нумеруются индексами "1", "2", "3". Например, компоненты директора $\vec{f}$ есть $f_1, f_2, f_3$. Записав скалярное произведение $\left(\vec{f}, \vec{\mathcal{E}}\right)$ в декартовых компонентах как

$$\left(\vec{f}, \vec{\mathcal{E}}\right) = f_1\mathcal{E}_1 + f_2\mathcal{E}_2 + f_3\mathcal{E}_3 \tag{21.13}$$

и подставив (21.13) в (21.12), получим

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_1 &= \frac{Ne^2}{m}\frac{f_1f_1\mathcal{E}_1 + f_1f_2\mathcal{E}_2 + f_1f_3\mathcal{E}_3}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma},\\
\mathcal{P}_2 &= \frac{Ne^2}{m}\frac{f_2f_1\mathcal{E}_1 + f_2f_2\mathcal{E}_2 + f_2f_3\mathcal{E}_3}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma},\\
\mathcal{P}_3 &= \frac{Ne^2}{m}\frac{f_3f_1\mathcal{E}_1 + f_3f_2\mathcal{E}_2 + f_3f_3\mathcal{E}_3}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma}.
\end{aligned} \tag{21.14}$$

Здесь $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ — декартовы компоненты вектора $\vec{\mathcal{P}}$, а $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ — декартовы компоненты вектора $\vec{\mathcal{E}}$. Как видно из (21.14), каждая декартова компонента вектора $\vec{\mathcal{P}}$ выражается, вообще говоря, через все три декартовых компоненты вектора $\vec{\mathcal{E}}$. Такая связь векторов называется *тензорной*. Тензор выражает операцию перехода от одного вектора к другому в случае, если эти векторы не параллельны друг другу.

Тензором линейной оптической восприимчивости анизотропной среды называется матрица, связывающая между собой декартовы компоненты комплексных амплитуд поляризации и поля. Обозначим эту матрицу $\varkappa_{\alpha\beta}$. Тогда по определению

$$\mathcal{P}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} \varkappa_{\alpha\beta}(\omega)\mathcal{E}_\beta. \tag{21.15}$$

Согласно (21.14), в нашей модели эта матрица имеет вид

$$\varkappa_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{Ne^2}{m}\frac{f_\alpha f_\beta}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma}. \tag{21.16}$$

Иногда в формуле (21.15) опускают знак суммы и записывают ее так:

$$\mathcal{P}_\alpha = \varkappa_{\alpha\beta}(\omega)\mathcal{E}_\beta. \tag{21.17}$$

В этом случае предполагается суммирование по повторяющемуся индексу. Еще более компактна операторная система обозначений, когда индексы вообще не выписываются, а матрица (оператор) обозначается с помощью знака "шляпка" над буквой:

$$\vec{\mathcal{P}} = \widehat{\varkappa}(\omega)\vec{\mathcal{E}}. \tag{21.18}$$

Итак, формулы (21.15), (21.17) выражают тензорный характер связи между поляризацией и полем в анизотропной среде.

Общий вид материального уравнения линейной анизотропной среды. Обобщая формулы (18.43), (18.38), материальное уравнение линейной анизотропной среды запишем в виде

$$P_\alpha(t) = \int\limits_0^\infty \varkappa_{\alpha\beta}(\tau)E_\beta(t-\tau)\,d\tau. \tag{21.19}$$

Здесь $P_\alpha(t)$ — декартова компонента поляризации среды, $E_\beta(t)$ — декартова компонента электрического поля световой волны, $\varkappa_{\alpha\beta}(\tau)$ — тензорная функция Грина, зависящая только от свойств среды и связанная с тензором линейной оптической восприимчивости $\varkappa_{\alpha\beta}(\omega)$ преобразованием Фурье:

$$\varkappa_{\alpha\beta}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varkappa_{\alpha\beta}(\omega)\mathrm{e}^{i\omega\tau}d\omega. \tag{21.20}$$

В частности, в модели Лоренца тензор $\varkappa_{\alpha\beta}(\omega)$ описывается формулой (21.16). Обращая формулу (21.20), получим

$$\varkappa_{\alpha\beta}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varkappa_{\alpha\beta}(\tau)\mathrm{e}^{-i\omega\tau}d\tau \tag{21.20а}$$

или, с учетом того, что $\varkappa_{\alpha\beta}(\tau < 0) = 0$ (принцип причинности),

$$\varkappa_{\alpha\beta}(\omega) = \int\limits_0^\infty \varkappa_{\alpha\beta}(\tau)\mathrm{e}^{-i\omega\tau}d\tau. \tag{21.20б}$$

Тензор диэлектрической проницаемости. По определению, вектор электрической индукции $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$. Подставив в эту формулу выражения (21.2), (21.11), найдем связь векторов комплексных амплитуд:

$$\vec{\mathcal{D}} = \vec{\mathcal{E}} + 4\pi\vec{\mathcal{P}}.$$

В декартовых компонентах

$$\mathcal{D}_\alpha = \mathcal{E}_\alpha + 4\pi\mathcal{P}_\alpha. \tag{21.21}$$

Подставив (21.17) в (21.21), получим

$$\mathcal{D}_\alpha = \mathcal{E}_\alpha + 4\pi\varkappa_{\alpha\beta}(\omega)\mathcal{E}_\beta, \tag{21.22}$$

или

$$\mathcal{D}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega)\mathcal{E}_\beta, \tag{21.23}$$

где

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega) = \delta_{\alpha\beta} + 4\pi\varkappa_{\alpha\beta}(\omega), \tag{21.24}$$

$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega)$ — *тензор диэлектрической проницаемости* линейной анизотропной среды, $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера. В формуле (21.23) подразумевается суммирование по повторяющемуся индексу. Как видно из (21.16), (21.24), тензоры линейной оптической восприимчивости и диэлектрической проницаемости симметричны:

$$\varkappa_{\alpha\beta} = \varkappa_{\beta\alpha}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\beta\alpha}; \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \tag{21.25}$$

Главные оси координат анизотропного кристалла. До сих пор мы считали систему координат $x_1, x_2, x_3$ произвольной. Можно показать, однако, что для любого анизотропного кристалла существует такая система координат $x, y, z$, в которой тензор диэлектрической проницаемости среды является диагональным:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}. \tag{21.26}$$

Такие оси $x, y, z$ называются *главными осями координат*. Например, в случае системы, показанной на рис. 21.6, одна из главных осей направлена вдоль директора $\vec{f}$; направление двух других осей произвольно. В дальнейшем мы будем пользоваться исключительно этой системой координат. В главных осях соотношения между декартовыми компонентами индукции и поля (21.23) приобретают вид

$$\mathcal{D}_x = \varepsilon_{xx}\mathcal{E}_x, \quad \mathcal{D}_y = \varepsilon_{yy}\mathcal{E}_y, \quad \mathcal{D}_z = \varepsilon_{zz}\mathcal{E}_z. \tag{21.27}$$

Параметры $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$, называются *главными диэлектрическими проницаемостями* анизотропного кристалла.

**Классификация кристаллов.** В зависимости от соотношения между главными диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ все кристаллы делятся на три группы: изотропные, одноосные и двуосные. *Изотропными* называются кристаллы, у которых все три главные диэлектрические проницаемости одинаковы:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz}. \tag{21.28}$$

Если одинаковы две из трех главных диэлектрических проницаемостей, т. е.

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \neq \varepsilon_{zz}, \tag{21.29}$$

то кристалл называется *одноосным*. У *двуосного* кристалла все три главные диэлектрические проницаемости различны:

$$\varepsilon_{xx} \neq \varepsilon_{yy} \neq \varepsilon_{zz}. \tag{21.30}$$

В области прозрачности кристаллы характеризуют также *показателями преломления*. Изотропный кристалл характеризуется одним показателем преломления

$$n = \sqrt{\varepsilon}. \tag{21.31}$$

Одноосный кристалл имеет два главных показателя преломления

$$\begin{aligned} n_o &= \sqrt{\varepsilon_{xx}} = \sqrt{\varepsilon_{yy}}, \\ n_e &= \sqrt{\varepsilon_{zz}}. \end{aligned} \tag{21.32}$$

И, наконец, двуосный кристалл имеет три главных показателя преломления:

$$\begin{aligned} n_x &= \sqrt{\varepsilon_{xx}}, \\ n_y &= \sqrt{\varepsilon_{yy}}, \\ n_z &= \sqrt{\varepsilon_{zz}}. \end{aligned} \tag{21.33}$$

В зависимости от соотношения между главными показателями преломления одноосные кристаллы делятся на положительные и отрицательные. *Положительными* принято называть кристаллы, у которых

$$n_o < n_e, \tag{21.34}$$

а *отрицательными* — кристаллы, у которых

$$n_o > n_e. \tag{21.35}$$

В табл. 21.1 — 21.3 приведены показатели преломления некоторых конкретных кристаллов.

**Собственные состояния поляризации световой волны в анизотропном кристалле.** Основная особенность распространения света в анизотропном кристалле состоит в том, что световая волна с произвольным состоянием поляризации распадается на две линейно поляризованные волны с ортогональными направлениями поляризации, бегущие с разными фазовыми скоростями. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим сначала простые частные случаи.

Пусть плоская монохроматическая световая волна распространяется вдоль одной из главных осей кристалла, например оси $z$ (рис. 21.7). Обозначая орты главных осей кристалла $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$, а волновой вектор волны $\vec{k}$, можно записать

$$\vec{k} \parallel \vec{z}_0. \tag{21.36}$$

В силу поперечности световой волны, выражаемой условием $\left(\vec{k}, \vec{\mathcal{D}}\right) = 0$, и условия (21.36) вектор $\vec{\mathcal{D}}$ лежит в плоскости $x, y$. Далее рассмотрим следующие варианты.

Таблица 21.1

Показатели преломления изотропных кристаллов

| Кристалл | $n$ |
|---|---|
| CdTe | 2,69 |
| NaCl | 1,544 |
| Алмаз | 2,417 |
| Плавиковый шпат | 1,392 |
| GaAs | 3,40 |

Таблица 21.2

Показатели преломления одноосных кристаллов

| Кристалл | $n_o$ | $n_e$ |
|---|---|---|
| *положительные* | | |
| Лед | 1,309 | 1,310 |
| Кварц | 1,544 | 1,553 |
| BeO | 1,717 | 1,732 |
| Циркон | 1,923 | 1,968 |
| Рутил | 2,616 | 2,903 |
| ZnS | 2,354 | 2,358 |
| *отрицательные* | | |
| $(NH_4)H_2PO_4$ (ADP) | 1,552 | 1,478 |
| Берилл | 1,598 | 1,590 |
| $KH_2PO_4$ (KDP) | 1,507 | 1,467 |
| $NaNO_3$ | 1,587 | 1,336 |
| Кальцит | 1,658 | 1,486 |
| Турмалин | 1,638 | 1,618 |
| $LiNbO_3$ | 2,300 | 2,208 |
| $BaTiO_3$ | 2,416 | 2,364 |
| Прустит | 3,019 | 2,739 |

Таблица 21.3

Показатели преломления двуосных кристаллов

| Кристалл | $n_x$ | $n_y$ | $n_z$ |
|---|---|---|---|
| Гипс | 1,520 | 1,523 | 1,530 |
| Полевой шпат | 1,522 | 1,526 | 1,530 |
| Слюда | 1,552 | 1,582 | 1,588 |
| Топаз | 1,619 | 1,620 | 1,627 |
| $NaNO_2$ | 1,344 | 1,411 | 1,651 |
| SbSi | 2,7 | 3,2 | 3,8 |
| $YAlO_3$ | 1,923 | 1,938 | 1,947 |

а) Предположим, что

$$\vec{\mathcal{D}} \parallel \vec{x}_0, \tag{21.37}$$

т. е. волна поляризована вдоль главной оси $x$ кристалла. Тогда $\mathcal{D}_y = \mathcal{D}_z = 0$, и по формулам (21.27) получаем $\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_z = 0$, $\mathcal{D}_x = \varepsilon_{xx}\mathcal{E}_x$, откуда следует, что вектор $\vec{\mathcal{D}}$ параллелен вектору $\vec{\mathcal{E}}$:

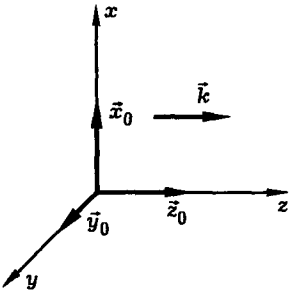



Рис. 21.7. К анализу собственных состояний поляризации световой волны в анизотропном кристалле. Показаны главные оси кристалла $x$, $y$, $z$ и волновой вектор световой волны $\vec{k}$

$$\vec{\mathcal{D}} \parallel \vec{\mathcal{E}}. \tag{21.38}$$

Это означает, что по отношению к данной волне среда подобна изотропной. Волна бежит со скоростью

$$v_1 = c/\sqrt{\varepsilon_{xx}}. \tag{21.39}$$

Поляризация волны устойчива (рис. 21.8, *а*).

б) Пусть по-прежнему выполняется условие (21.36), но теперь

$$\vec{\mathcal{D}} \parallel \vec{y}_0, \tag{21.40}$$

т. е. световая волна линейно поляризована вдоль главной оси $y$ кристалла. Используя формулы (21.27), нетрудно убедиться, что и в этом случае векторы $\vec{\mathcal{D}}$ и $\vec{\mathcal{E}}$ будут параллельны друг другу

$$\vec{\mathcal{D}} \parallel \vec{\mathcal{E}} \parallel \vec{y}_0, \tag{21.41}$$

однако скорость волны будет теперь иной:

$$v_2 = c/\sqrt{\varepsilon_{yy}}. \tag{21.42}$$

Поляризация волны устойчива (рис. 21.8, *б*).

в) Пусть по-прежнему $\vec{k} \parallel \vec{z}_0$, но вектор $\vec{\mathcal{D}}$ не параллелен ни одной из главных осей кристалла, т. е.

$$\vec{\mathcal{D}} \nparallel \vec{x}_0, \qquad \vec{\mathcal{D}} \nparallel \vec{y}_0. \tag{21.43}$$

Используя формулы (21.27) и учитывая анизотропию кристалла, выражаемую неравенством

$$\varepsilon_{xx} \neq \varepsilon_{yy}, \tag{21.44}$$

приходим к выводу, что векторы $\vec{\mathcal{D}}$ и $\vec{\mathcal{E}}$ лежат в плоскости $x, y$, но не параллельны друг другу (рис. 21.8, *в*). Однако в этом случае векторы $\vec{\mathcal{D}}$, $\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{k}$ *не будут компланарны* и, следовательно, волна с такой структурой *не может* распространяться в кристалле в силу уравнений Максвелла (рис. 21.4).

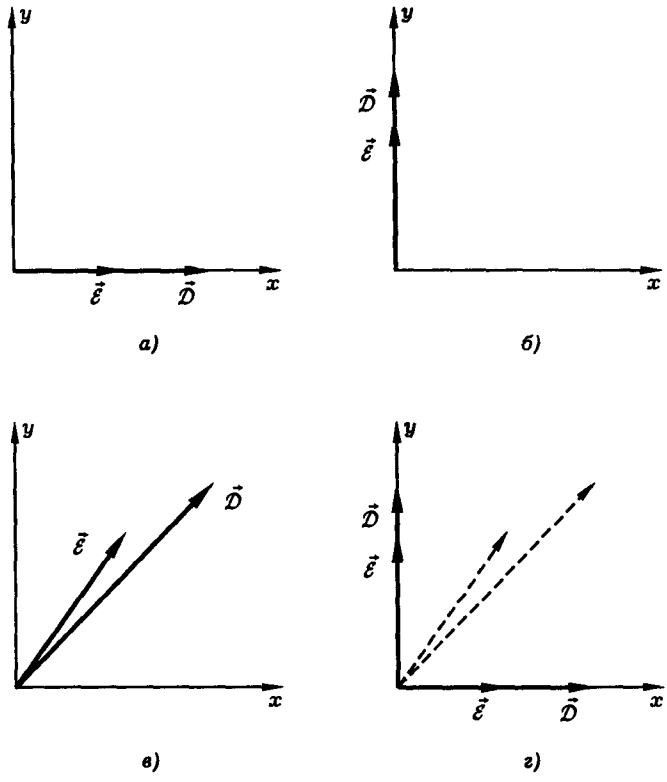



Рис. 21.8. Механизм возникновения собственных состояний поляризации световой волны в анизотропном кристалле

Что же произойдет, если волна с поляризацией (21.43) будет падать на границу кристалла? Очевидно, что в кристалле волна *распадается* на две волны с устойчивыми поляризациями, бегущие с разными скоростями:

$$\vec{\mathcal{D}} = \vec{x}_0 \mathcal{D}_x + \vec{y}_0 \mathcal{D}_y \tag{21.45}$$

(рис. 21.8, *г*). По мере распространения в кристалле разность фаз между ортогональными компонентами поля будет меняться. Поэтому волна в кристалле будет иметь эллиптическую поляризацию, причем параметры эллипса поляризации будут меняться по мере изменения дистанции, пройденной волной в кристалле.

Итак, на частном примере мы показали, что в анизотропном кристалле произвольная световая волна неустойчива: она распадается на две линейно поляризованные волны с ортогональными направлениями поляризации, которые бегут в одном и том же направлении, но с разными фазовыми скоростями. В рассмотренном примере, когда световая волна распространяется вдоль главной оси $z$ кристалла, есть только два устойчивых состояния поляризации волны: линейная поляризация вдоль оси $x$ и линейная поляризация вдоль оси $y$. Эти состояния поляризации можно назвать *собственными состояниями поляризации* световой волны в анизотропном кристалле. Оказывается, что и в общем слу-

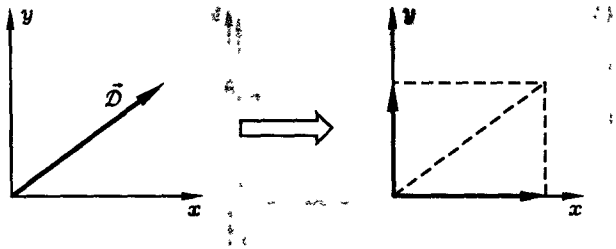



Рис. 21.9. Разложение линейно поляризованной световой волны на волны с собственными состояниями поляризации в анизотропном кристалле

чае, когда волна распространяется в произвольном направлении относительно кристалла, имеет место аналогичный эффект, т. е. происходит разложение световой волны на волны с собственными состояниями поляризации (рис. 21.9).

Для каждого направления $\vec{k}$ распространения световой волны в кристалле имеются два "разрешенных" ("собственных") направления поляризации, которые ортогональны друг другу. Произвольно поляризованная волна распадается на две линейно поляризованные "собственные" волны, распространяющиеся с разными скоростями. Как найти собственные состояния поляризации, если световая волна распространяется в произвольном направлении относительно главных осей кристалла? Наиболее просто ответить на этот вопрос, если анизотропный кристалл является одноосным.

Одноосный кристалл. В силу условия (21.29) в одноосном кристалле физически выделена главная ось $z$, которая называется оптической осью кристалла. Используя рассуждение предыдущего пункта, нетрудно показать, что любая световая волна, распространяющаяся вдоль оптической оси, сохраняет свою поляризацию, при этом скорость волны не зависит от ее поляризации. В одноосном кристалле такое направление только одно. Это обстоятельство можно использовать для экспериментального определения направления оптической оси в кристалле.

Пусть плоская монохроматическая световая волна распространяется в одноосном анизотропном кристалле в некотором направлении, характеризуемом волновым вектором $\vec{k}$. Допустимые состояния поляризации волны определяются следующими обстоятельствами. С одной стороны, из-за анизотропии кристалла векторы $\vec{\mathcal{D}}$ и $\vec{\mathcal{E}}$ световой волны, вообще говоря, не параллельны друг другу. С другой стороны, в силу уравнений Максвелла векторы $\vec{\mathcal{D}}$, $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{k}$ должны лежать в одной плоскости.

Первое из этих условий (неколлинеарность векторов $\vec{\mathcal{D}}$ и $\vec{\mathcal{E}}$) математически выражается формулами (21.27), которые для одноосного кристалла могут быть записаны в виде

$$\mathcal{D}_x = n_0^2\mathcal{E}_x, \qquad \mathcal{D}_y = n_0^2\mathcal{E}_y, \qquad \mathcal{D}_z = n_e^2\mathcal{E}_z \tag{21.46}$$

(см. (21.32)). Второе условие (компланарность векторов $\vec{\mathcal{D}}$, $\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{k}$) может быть записано в виде равенства нулю смешанного произведения векторов, например как

$$\left(\vec{k}, \left[\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{D}}\right]\right) = 0. \tag{21.47}$$

Подчеркнем, что уравнения (21.46) и (21.47) являются независимыми: (21.46) представляют собой материальные уравнения среды, а (21.47) есть следствие уравнений Максвелла. Все вместе они выполняются не для всякой поляризации волны, а лишь для некоторых избранных поляризаций, которые и называются собственными поляризациями световой волны в анизотропном кристалле.

Составим векторное произведение векторов $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{D}}$. Обозначив через $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ орты, направленные вдоль главных осей одноосного анизотропного кристалла с оптической осью $z$ и принимая во внимание материальные уравнения (21.46), получим

$$\left[\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{D}}\right] = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \mathcal{E}_x & \mathcal{E}_y & \mathcal{E}_z \\ n_o^2\mathcal{E}_x & n_o^2\mathcal{E}_y & n_e^2\mathcal{E}_z \end{vmatrix}. \tag{21.48}$$

Из (21.48) видно, что вектор $\left[\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{D}}\right]$ перпендикулярен оси $z$. Это можно записать в виде равенства

$$\left(\vec{z}_0, \left[\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{D}}\right]\right) = 0. \tag{21.49}$$

Но отсюда следует, что векторы $\vec{z}_0, \vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{D}}$ должны быть компланарны. Условия (21.47), (21.49) и определяют возможные состояния поляризации световой волны в одноосном кристалле.

Оба указанных условия выполняются в двух случаях. Во-первых, если вектор $\vec{\mathcal{D}}$ параллелен вектору $\vec{\mathcal{E}}$ и, следовательно,

$$\left[\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{D}}\right] = 0. \tag{21.50}$$

Во-вторых, если вектор $\vec{\mathcal{D}}$ лежит в плоскости векторов $\vec{z}_0$ и $\vec{k}$, что математически можно записать в виде равенства

$$\left(\vec{z}_0, \left[\vec{k}, \vec{\mathcal{D}}\right]\right) = 0. \tag{21.51}$$

**Обыкновенная и необыкновенная волны.** Оба полученных условия наиболее просто выразить, если ввести понятие *главной плоскости*, определив ее как плоскость векторов $\vec{k}$ и $\vec{z}_0$, т. е. как плоскость, в которой лежат волновой вектор световой волны и оптическая ось одноосного анизотропного кристалла (рис. 21.10).

Нетрудно видеть, что условие (21.50) выполняется для волны, *поляризованной перпендикулярно главной плоскости*. Такая волна называется *обыкновенной* и обозначается индексом "о". Вектор поляризации этой волны перпендикулярен оптической оси кристалла, векторы $\vec{\mathcal{D}}_o$ и $\vec{\mathcal{E}}_o = \vec{\mathcal{D}}_o/n_o^2$ параллельны, скорость обыкновенной волны $v_o = c/n_o$ не зависит от направления распространения в кристалле.

Условие (21.51) выполняется для волны, *поляризованной в главной плоскости*. Такая волна называется *необыкновенной* и обозначается индексом "е". Вектор поляризации этой волны $\vec{\mathcal{D}}_e$ не перпендикулярен оптической оси кристалла, векторы $\vec{\mathcal{D}}_e$ и $\vec{\mathcal{E}}_e$ не параллельны друг другу (рис. 21.10), скорость распространения необыкновенной волны $v_e = c/n$ зависит от направления в кри-

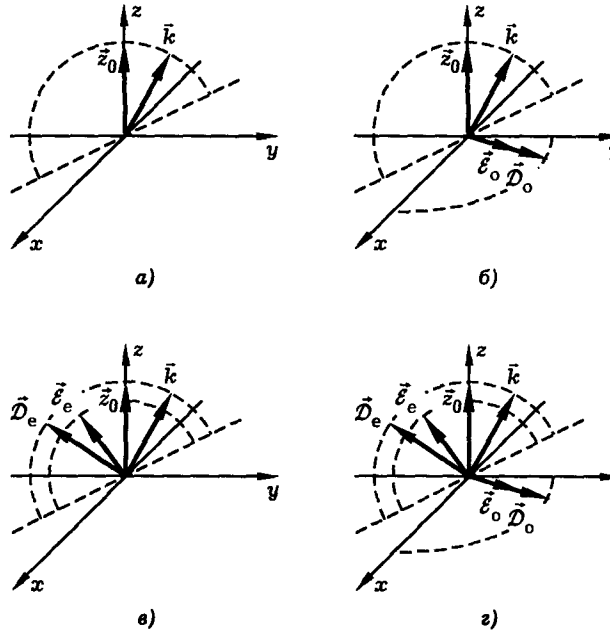



Рис. 21.10. Поляризации обыкновенной и необыкновенной световых волн в одноосном анизотропном кристалле. Главная плоскость (*а*), поляризация обыкновенной волны (*б*), поляризация необыкновенной волны (*в*), взаимная ориентация поляризаций обыкновенной и необыкновенной волн (*г*). Пунктирной линией соединены концы векторов, лежащих в одной и той же плоскости

сталле. Векторы поляризаций обыкновенной и необыкновенной волн $\vec{\mathcal{D}}_o$ и $\vec{\mathcal{D}}_e$ взаимно перпендикулярны:

$$\vec{\mathcal{D}}_o \perp \vec{\mathcal{D}}_e. \tag{21.52}$$

Итак, мы показали, что для любого направления $\vec{k}$ в одноосном анизотропном кристалле существует два разрешенных ("собственных") направления поляризации световой волны. Одно из них перпендикулярно главной плоскости, другое ей параллельно. Волна с произвольным состоянием поляризации распадается в кристалле на две линейно поляризованные волны со взаимно ортогональными ("собственными") направлениями поляризации. Скорости распространения этих волн различны. Скорость обыкновенной волны не зависит от направления распространения и равна $v_o = c/n_o$. Скорость необыкновенной волны зависит от направления распространения в кристалле и лежит в диапазоне между $c/n_o$ и $c/n_e$. Рассмотрим теперь вопрос о том, как вычислить скорость необыкновенной волны для заданного направления распространения в кристалле.

Скорость распространения необыкновенной волны. Эллипсоид показателя преломления. Предположим, что необыкновенная волна распространяется в некотором направлении $\vec{k}$, не совпадающем ни с одной из главных осей одноосного анизотропного кристалла (рис. 21.11). Вычи-

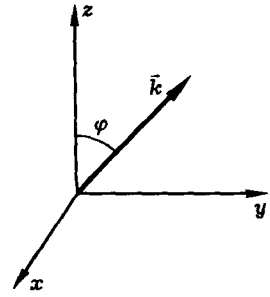



Рис. 21.11. К расчету скорости необыкновенной волны в одноосном анизотропном кристалле: $\vec{k}$ — волновой вектор световой волны, $z$ — оптическая ось кристалла

слим скорость волны как функцию направления распространения $v = v(\vec{k})$. Для этого воспользуемся дисперсионным уравнением, вытекающим из (21.3):

$$\left[\vec{k}, \left[\vec{k}, \vec{\mathcal{E}}\right]\right] + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{\mathcal{D}} = 0,$$

или

$$\left(\vec{k}, \vec{\mathcal{E}}\right)\vec{k} - k^2\vec{\mathcal{E}} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{\mathcal{D}} = 0. \tag{21.53}$$

Для обыкновенной волны имеем: $\vec{\mathcal{D}} = n_0^2\vec{\mathcal{E}}$, $\left(\vec{k}, \vec{\mathcal{E}}\right) = 0$, и, согласно уравнению (21.53), $k = (\omega/c)n_0$, $v_0 = c/n_0$ вне зависимости от направления $\vec{k}$. Для необыкновенной волны $\left(\vec{k}, \vec{\mathcal{E}}\right) \neq 0$ и, следовательно, необходимо решать полное уравнение (21.53).

Введем единичный вектор $\vec{m}$, направленный вдоль вектора $\vec{k}$ световой волны

$$\vec{m} = \vec{k}/k, \tag{21.54}$$

и показатель преломления для необыкновенной волны $n$, связанный с ее волновым числом $k$ формулой

$$k = \frac{\omega}{c}n. \tag{21.55}$$

Подставив (21.54), (21.55) в (21.53), получим уравнение

$$\vec{\mathcal{E}} - \frac{1}{n^2}\vec{\mathcal{D}} = \left(\vec{m}, \vec{\mathcal{E}}\right)\vec{m}. \tag{21.56}$$

Для одноосного анизотропного кристалла компоненты вектора индукции связаны с компонентами вектора напряженности электрического поля световой волны формулами (21.46). Записав уравнение (21.56) в декартовых компонентах и учитывая (21.46), получим три скалярных уравнения

$$\mathcal{D}_x = \frac{\left(\vec{m}, \vec{\mathcal{E}}\right) m_x}{\dfrac{1}{n_o^2} - \dfrac{1}{n^2}}, \quad \mathcal{D}_y = \frac{\left(\vec{m}, \vec{\mathcal{E}}\right) m_y}{\dfrac{1}{n_o^2} - \dfrac{1}{n^2}}, \quad \mathcal{D}_z = \frac{\left(\vec{m}, \vec{\mathcal{E}}\right) m_z}{\dfrac{1}{n_e^2} - \dfrac{1}{n^2}}, \tag{21.57}$$

где $n_o$ и $n_e$ — главные показатели преломления одноосного кристалла. Теперь воспользуемся уравнением

$$\left(\vec{m}, \vec{\mathcal{D}}\right) = 0, \tag{21.58}$$

вытекающим из уравнения $\left(\vec{k}, \vec{\mathcal{D}}\right) = 0$ (см. (21.3)). Из (21.58) следует, что

$$m_x \mathcal{D}_x + m_y \mathcal{D}_y + m_z \mathcal{D}_z = 0. \tag{21.59}$$

Подставив (21.57) в (21.59) и учитывая, что в данном случае $\left(\vec{m}, \vec{\mathcal{E}}\right) \neq 0$, получим уравнение

$$\frac{m_x^2 + m_y^2}{\dfrac{1}{n_o^2} - \dfrac{1}{n^2}} + \frac{m_z^2}{\dfrac{1}{n_e^2} - \dfrac{1}{n^2}} = 0. \tag{21.60}$$

Уравнение (21.60), в принципе, решает поставленную задачу: оно позволяет рассчитать показатель преломления необыкновенной волны $n$ для любого направления $\vec{m}$ в кристалле. Это уравнение называется *уравнением нормалей Френеля*.

Уравнение Френеля можно записать в более компактном виде, если направление распространения световой волны в кристалле характеризовать не вектором $\vec{m}$, а углом $\varphi$ между волновым вектором и оптической осью кристалла (см. рис. 21.11). Учитывая, что $|\vec{m}| = 1$ и, следовательно,

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1,$$

получим $m_z = \cos\varphi$, $m_x^2 + m_y^2 = \sin^2\varphi$. При этом (21.60) принимает вид

$$\frac{\sin^2\varphi}{\dfrac{1}{n_o^2} - \dfrac{1}{n^2}} + \frac{\cos^2\varphi}{\dfrac{1}{n_e^2} - \dfrac{1}{n^2}} = 0,$$

или

$$\frac{\sin^2\varphi}{n_e^2} + \frac{\cos^2\varphi}{n_o^2} = \frac{1}{n^2}. \tag{21.61}$$

Решение уравнения (21.61) есть

$$n(\varphi) = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_e^2 \cos^2\varphi + n_o^2 \sin^2\varphi}}. \tag{21.62}$$

Таким образом, зная главные показатели преломления одноосного кристалла $n_o$ и $n_e$, по формуле (21.62) можно вычислить показатель преломления необыкновенной волны $n$ и ее скорость

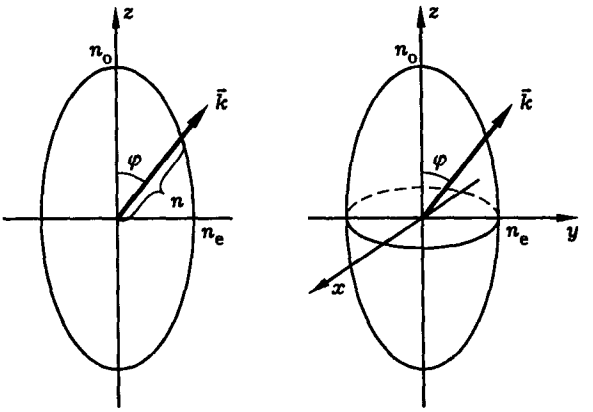



Рис. 21.12. Эллипс и эллипсоид показателя преломления

$$v = c/n \tag{21.63}$$

для любого направления $\varphi$ в кристалле. Значения $n_o$ и $n_e$ для некоторых конкретных кристаллов приведены в табл. 21.2.

Зависимость $n(\varphi)$ показана графически на рис. 21.12. На этом рисунке построен эллипс с полуосями, равными главным показателям преломления кристалла $n_o$ и $n_e$. Значение показателя преломления необыкновенной волны $n$, распространяющейся в некотором направлении $\vec{k}$, равно длине отрезка, выделенного жирной линией. На рис. 21.12 дана картина в плоскости главного сечения. В силу осевой симметрии одноосного кристалла, поверхность показателя преломления в трехмерном пространстве имеет вид эллипсоида вращения с полуосями $n_o$ и $n_e$ (см. рис. 21.12, *б*). Этот эллипсоид называется *эллипсоидом показателя преломления*.

Поверхность показателя преломления для обыкновенной волны представляет собой сферу радиуса $n_o$. Сфера и эллипсоид показателей преломления соприкасаются в направлении оптической оси кристалла. При этом для положительного одноосного кристалла ($n_o < n_e$) сфера лежит внутри эллипсоида, а для отрицательного кристалла ($n_o > n_e$), наоборот, эллипсоид лежит внутри сферы (рис. 21.13).

**Двойное лучепреломление света на границе с анизотропной средой.** Как показывает опыт, преломление света на границе анизотропного кристалла имеет ряд особенностей. Наиболее важные из них следующие.

1. Попадая в кристалл, световой луч раздваивается, демонстрируя эффект *двойного лучепреломления*. При этом независимо от состояния поляризации падающего света оба преломленных луча оказываются линейно поляризованными, а направления их поляризаций взаимно перпендикулярны (см. рис. 21.1, 21.2).

2. Один из преломленных лучей может не лежать в плоскости падения.

3. Преломление луча может иметь место даже при нормальном падении света на границу анизотропного кристалла.

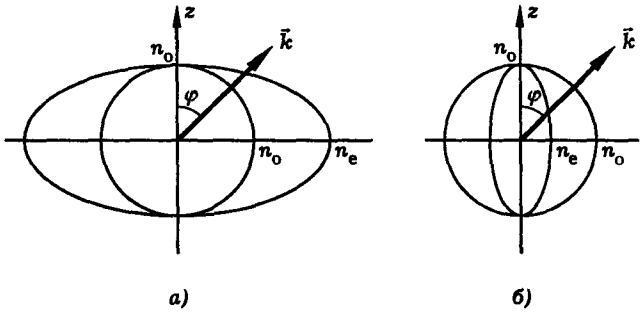



Рис. 21.13. Сфера и эллипсоид показателей преломления для положительного (*а*) и отрицательного (*б*) одноосных анизотропных кристаллов

Для объяснения этих особенностей рассмотрим преломление света на границе одноосного анизотропного кристалла (рис. 21.14). Граничные условия для электромагнитного поля требуют непрерывности тангенциальных (т. е. параллельных границе раздела) компонент электрического и магнитного ролей:

$$E_{t1} = E_{t2}, \qquad H_{t1} = H_{t2}.$$

Как и в случае изотропных сред (см. лекцию 20), отсюда следует равенство тангенциальных компонент волновых векторов для падающей, отраженной и преломленной волн:

$$k_{1x} = k_{0x} = k_{2x}. \tag{21.64}$$

Из (21.64), в свою очередь, следует закон отражения (угол падения равен углу отражения):

$$\theta_1 = \theta_0 \tag{21.65}$$

и закон преломления (закон Снеллиуса)

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2. \tag{21.66}$$

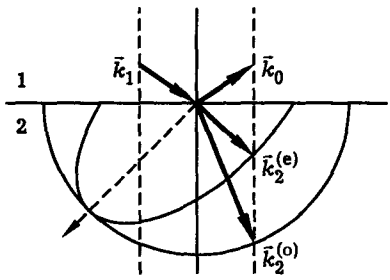



Рис. 21.14. Преломление света на границе одноосного анизотропного кристалла. Предполагается, что оптическая ось кристалла (показана пунктиром) лежит в плоскости падения

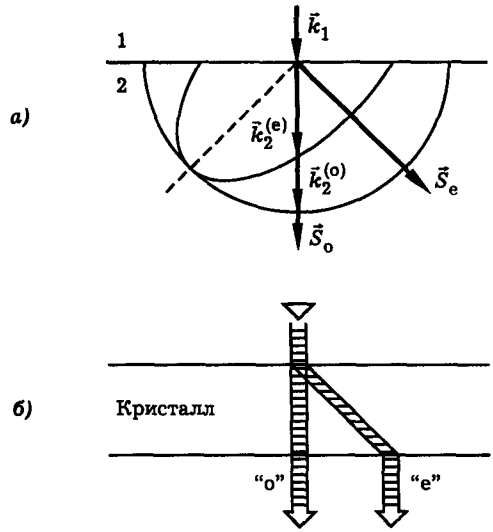



Рис. 21.15. Картина двойного лучепреломления при нормальном падении. Волновые векторы (*а*), световые пучки (*б*)

Однако, поскольку показатели преломления для обыкновенной и необыкновенной волн в анизотропном кристалле, вообще говоря, различны, закон преломления (21.66) следует записать отдельно для обыкновенной и необыкновенной волн:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2^{(o)} \sin\theta_2^{(o)}, \tag{21.67}$$

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2^{(e)} \sin\theta_2^{(e)}. \tag{21.68}$$

Построение волновых векторов преломленных волн показано на рис. 21.14. Как видно из этого рисунка, углы преломления для обыкновенной и необыкновенной волн, вообще говоря, различны.

Следует также иметь в виду, что для необыкновенной волны направление луча, задаваемое направлением вектора Пойнтинга

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}, \vec{H}\right]$$

вообще говоря, не совпадает с направлением волнового вектора (см. рис. 21.4, 21.10, *в*). Именно это обстоятельство объясняет эффект преломления света в анизотропном кристалле при нормальном падении. Картина преломления показана на рис. 21.15. Плоская монохроматическая световая волна с волновым вектором $\vec{k}_1$ падает нормально на границу одноосного анизотропного кристалла так, что оптическая ось кристалла, показанная на рисунке пунктиром, лежит в плоскости падения. В соответствии с (21.64), при нормальном падении $k_{1x} = k_{0x} = k_{2x} = 0$ и, следовательно, волновые векторы световых волн в кристалле направлены, как и вектор падающей волны, по нормали к границе раздела. Такое же направление имеет луч $\vec{S}_o$ обыкновенной волны. В то же время

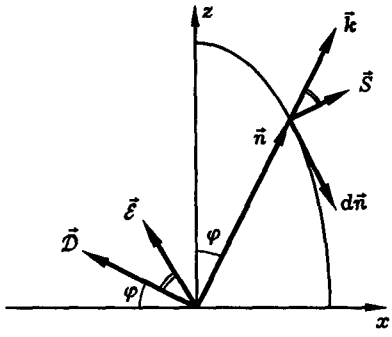



Рис. 21.16. К определению направления необыкновенного луча

необыкновенный луч $\vec{S}_e$ отклоняется от нормали, что и обусловливает эффект двойного лучепреломления, который мы наблюдали в эксперименте (рис. 21.1).

Как определить направление необыкновенного луча? Покажем, что в одноосном анизотропном кристалле необыкновенный луч направлен по нормали к эллипсоиду показателя преломления.

Поскольку луч $\vec{S}$ ортогонален вектору напряженности электрического поля световой волны $\vec{\mathcal{E}}$, достаточно показать, что вектор $\vec{\mathcal{E}}$ необыкновенной волны параллелен касательной к эллипсоиду показателя преломления. Обозначим через $\vec{n}$ вектор, проведенный из центра эллипсоида показателя преломления в точку пересечения эллипсоида с волновым вектором $\vec{k}$ необыкновенной волны (рис. 21.16). Модуль вектора $\vec{n}$ равен показателю преломления $n$ для необыкновенной волны, распространяющейся в данном направлении $\vec{k}$. Направление касательной к эллипсоиду показателя преломления будет определяться вектором $d\vec{n}$, который имеет смысл приращения вектора $\vec{n}$, возникающего при увеличении угла $\varphi$ на величину $d\varphi$.

Нам нужно показать, что вектор $\vec{\mathcal{E}}$ параллелен вектору $d\vec{n}$. Для этого достаточно показать, что равно нулю векторное произведение этих векторов, т. е.

$$\left[\vec{\mathcal{E}}, d\vec{n}\right] = 0. \tag{21.69}$$

Предположим для простоты, что плоскость главного сечения, показанная на рис. 21.16, перпендикулярна одной из главных осей кристалла, например оси $y$. Тогда векторное произведение (21.69) можно записать в декартовых координатах как

$$\left[\vec{\mathcal{E}}, d\vec{n}\right] = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \mathcal{E}_x & 0 & \mathcal{E}_z \\ dn_x & 0 & dn_z \end{vmatrix} = \vec{y}_0(\mathcal{E}_z dn_x - \mathcal{E}_x dn_z).$$

Теперь покажем, что

$$\mathcal{E}_z dn_x - \mathcal{E}_x dn_z = 0. \tag{21.70}$$

Используя материальные уравнения (21.46), а также выражения

$$\mathcal{D}_x = -\mathcal{D}\cos\varphi, \qquad \mathcal{D}_z = \mathcal{D}\sin\varphi,$$

вытекающие из рис. 21.16, перепишем (21.70) в виде

$$n_o^2 \sin\varphi\, dn_x + n_e^2 \cos\varphi\, dn_z = 0. \tag{21.71}$$

Из рис. 21.16 видно, что

$$n_x = n\sin\varphi, \qquad n_z = n\cos\varphi, \tag{21.72}$$

где зависимость $n(\varphi)$ определяется уравнением Френеля (21.61). Из (21.72) и (21.61) следует, что

$$dn_x = n\cos\varphi\, d\varphi + \sin\varphi\, dn, \qquad dn_z = -n\sin\varphi\, d\varphi + \cos\varphi\, dn, \tag{21.73}$$

где

$$dn = \left(\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2}\right) n^3 \sin\varphi\, \cos\varphi\, d\varphi. \tag{21.74}$$

Подставив (21.73), (21.74) в (21.71) и учитывая (21.61), получим тождество. Это означает, что соотношение (21.69) выполняется и, следовательно, вектор Пойнтинга

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}, \vec{H}\right]$$

действительно направлен по нормали к эллипсоиду показателя преломления.

В рассмотренных выше примерах предполагалось, что оптическая ось одноосного анизотропного кристалла лежит в плоскости падения световой волны на границу кристалла (см. рис. 21.14, 21.15). В этом случае преломление света происходит в плоскости падения. Если же плоскость падения и плоскость главного сечения не совпадают, то преломленный необыкновенный луч не будет лежать в плоскости падения, так как отклонение этого луча от волнового вектора происходит в главной плоскости, т. е. в направлении оптической оси кристалла. Таким образом, преломление света в анизотропном кристалле происходит не обязательно в плоскости падения.

**Получение и анализ поляризованного света.** Для получения и анализа поляризованного света можно использовать любое физическое явление, чувствительное к поляризации света. К таким явлениям относятся: анизотропное отражение, анизотропное поглощение, анизотропное преломление.

Анизотропное отражение. Как известно, отражение света на границе раздела двух изотропных сред существенно зависит от поляризации падающей световой волны. Если падающий свет линейно поляризован, то при определенных условиях отражение может быть полностью подавлено. Для этого нужно, чтобы световая волна была поляризована в плоскости падения и падала на границу раздела под углом Брюстера

$$\theta_Б = \operatorname{arctg}(n_2/n_1).$$

Используя это явление, можно установить сам факт линейной поляризации света (рис. 21.17). Если же направить на стеклянную пластинку под углом Брюстера неполяризованный (естественный ) свет, то отраженный пластинкой свет будет линейно поляризован перпендикулярно плоскости падения (рис. 21.17, *б*).

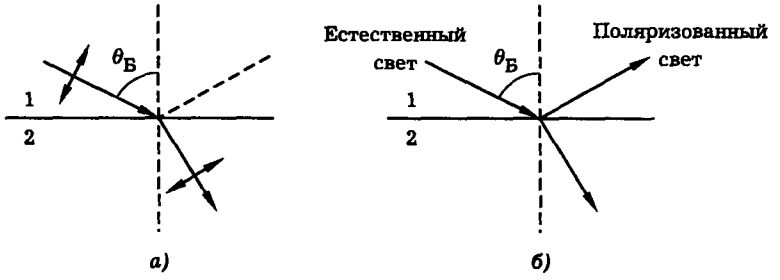



Рис. 21.17. Анизотропное отражение света. Отражение света под углом Брюстера позволяет анализировать поляризацию света (*а*), а также получать поляризованный свет (*б*)

Анизотропное поглощение. Существуют анизотропные кристаллы, обладающие различным поглощением по отношению к обыкновенной и необыкновенной волнам. Так, в кристалле турмалина сильно поглощается обыкновенная волна. Если направить на кристалл неполяризованный свет, то при достаточной толщине пластинки можно получить на выходе линейно поляризованный свет (необыкновенная волна проходит через кристалл, обыкновенная поглощается). В этом случае кристалл работает как поляризатор света (рис. 21.18). Если же направить на кристалл линейно поляризованный свет, то пропускание света будет зависеть от взаимной ориентации кристалла и направления поляризации света. Вращая кристалл относительно оси светового пучка и наблюдая изменение интенсивности прошедшего света, можно установить сам факт линейной поляризации, а также ее направление. В этом случае кристалл работает как анализатор (рис. 21.18, *б*). Аналогичным образом работают пленочные поляроиды, использующие синтетические анизотропные материалы.

Анизотропное преломление. Для получения поляризованного света можно использовать явление двойного лучепреломления (рис. 21.19). В этом случае оба вышедшие из кристалла световых луча (обыкновенный и необыкновенный) линейно поляризованы. Как видно из рис. 21.15, угол двойного лучепреломления максимален, если кристаллическая пластинка вырезана под углом 45° к оптической оси.

Призма Глана. Для получения и анализа поляризованного света на практике широко применяют призменные поляроиды (призма Глана, призма Николя и др.). На рис. 21.20 показана схема *призмы Глана*. Призма состоит

Рис. 21.18. Анизотропное поглощение. Получение (*а*) и анализ (*б*) поляризованного света с помощью кристалла турмалина

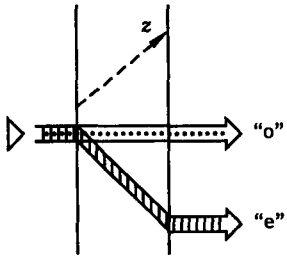



Рис. 21.19. Получение поляризованного света с помощью явления двойного лучепреломления

из двух кристаллов кальцита, разделенных воздушным промежутком. Главные показатели преломления кальцита $n_o = 1{,}658$ и $n_e = 1{,}486$. Оптическая ось кристалла перпендикулярна плоскости рисунка. Исходный пучок света падает нормально на входную грань призмы. Так как этот пучок перпендикулярен оптической оси кристалла, двойного лучепреломления не происходит (см. рис. 21.15). Световой пучок в кристалле не раздваивается и сохраняет направление исходного пучка, однако световая волна распадается на обыкновенную и необыкновенную волны, причем разность показателей преломления для этих волн достигает максимальной возможной величины:

$$\Delta n = n_o - n = n_o - n_e = \Delta n_{max}$$

(см. рис. 21.13). При этом угол $\alpha$ подбирается таким образом, чтобы свет падал на границу раздела кристалл–воздух под углом, близким к предельному углу полного внутреннего отражения. Так как на этой границе скачок показателя преломления больше для обыкновенной волны, эта волна испытывает полное внутреннее отражение. При том же самом угле падения необыкновенная волна не испытывает полного внутреннего отражения. Эта волна проходит воздушный промежуток и второй кристалл и образует на выходе линейно поляризованный пучок света. В таком варианте призма работает как поляризатор света. Разумеется, призма Глана может работать и как анализатор. Коэффициент пропускания призмой линейно поляризованного света зависит от взаимной ориентации вектора поляризации волны и оптической оси кристаллов.

Компенсатор. Компенсаторами называются устройства, позволяющие плавно изменять разность фаз ортогональных колебаний светового поля. С помощью компенсатора можно преобразовать эллиптически поляризованный свет в линейно поляризованный, а также измерить параметры эллипса поляризации.

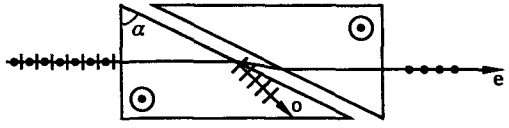



Рис. 21.20. Призма Глана

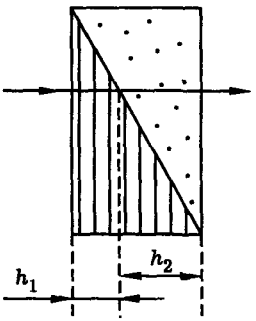



Рис. 21.21. Компенсатор Бабине

На рис. 21.21 показана схема *компенсатора Бабине*. Компенсатор представляет собой пару кварцевых клиньев, образующих вместе плоскопараллельную пластину. Главные показатели преломления кварца $n_o = 1{,}544$ и $n_e = 1{,}553$. Оптические оси клиньев направлены перпендикулярно друг другу и перпендикулярно световому пучку. В такой конфигурации не происходит двойного лучепреломления, однако пучок распадается на обыкновенную и необыкновенную волны, бегущие с разными скоростями. Разность фаз ортогональных колебаний поля, вносимая компенсатором, определяется выражением

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)(h_1 - h_2),$$

где $\lambda$ — длина световой волны, $n_o$ и $n_e$ — главные показатели преломления кристалла, $h_1$ и $h_2$ — расстояния, пройденные световым лучом в первом и во втором клиньях. Разность фаз $\Delta\varphi$ плавно меняется при перемещении компенсатора поперек светового пучка.

На рис. 21.22 показана схема измерения степени поляризации света. Широкий световой пучок проходит последовательно через компенсатор и анализатор и дает на экране картину чередования темных и светлых полос. Степень контрастности этой картины

$$\gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

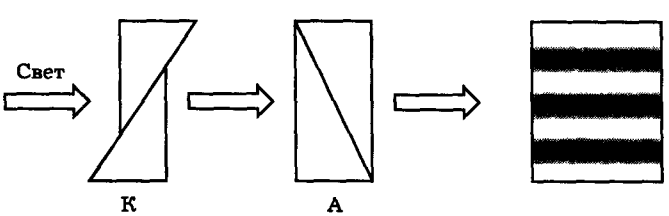



Рис. 21.22. Схема измерения степени поляризации света. К — компенсатор, А — анализатор. В правой части рисунка показан вид картины, наблюдаемой на экране

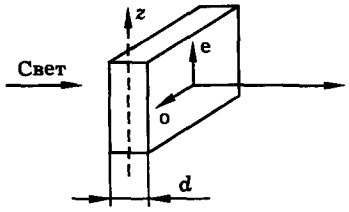



Рис. 21.23. Управление поляризацией света с помощью кристаллической пластинки ($z$ — оптическая ось кристалла)

характеризует степень поляризации света. Предельные случаи $\gamma = 1$ и $\gamma = 0$ соответствуют полностью поляризованному и полностью неполяризованному свету.

Управление поляризацией света. Физические явления, происходящие при распространении света в анизотропном кристалле, можно использовать для управления поляризацией света. Так, с помощью компенсатора можно управлять параметрами эллипса поляризации поляризованного светового пучка. На практике часто бывает нужно преобразовать линейную поляризацию в круговую и наоборот, а также менять направление линейной поляризации или направление вращения в циркулярно-поляризованной волне. Для этих целей служат специальные пластинки из анизотропных кристаллов — так называемые четвертьволновые и полуволновые пластинки.

Пусть плоская монохроматическая световая волна нормально падает на кристаллическую пластинку, вырезанную из одноосного анизотропного кристалла параллельно его оптической оси, т. е. так, что оптическая ось кристалла параллельна грани пластинки, на которую падает свет (рис. 21.23). Попадая в кристалл, световая волна распадается на две линейно поляризованные волны с ортогональными направлениями поляризации — обыкновенную и необыкновенную. Показатель преломления кристалла для обыкновенной волны равен $n_o$, а для необыкновенной волны $n_e$, поэтому при распространении в кристалле между обыкновенной и необыкновенной волнами возникает фазовый набег

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d, \tag{21.75}$$

где $\lambda$ — длина волны, $d$ — толщина пластинки. Изменение разности фаз ортогональных компонент светового поля изменяет состояние поляризации световой волны. Этот эффект и лежит в основе действия пластинок, управляющих поляризацией света.

Четвертьволновая пластинка. Такая пластинка преобразует линейную поляризацию света в круговую и наоборот. Толщина пластинки $d$ подбирается так, что $\Delta\varphi = \pi/2$, или

$$(n_o - n_e)d = \lambda/4.$$

При этом разность хода обыкновенного и необыкновенного лучей в пластинке равна четверти длины волны.

Для преобразования линейной поляризации света в круговую пластинку устанавливают так, что оптическая ось кристалла составляет угол в 45° с направлением поляризации падающей на нее световой волны (рис. 21.24). При

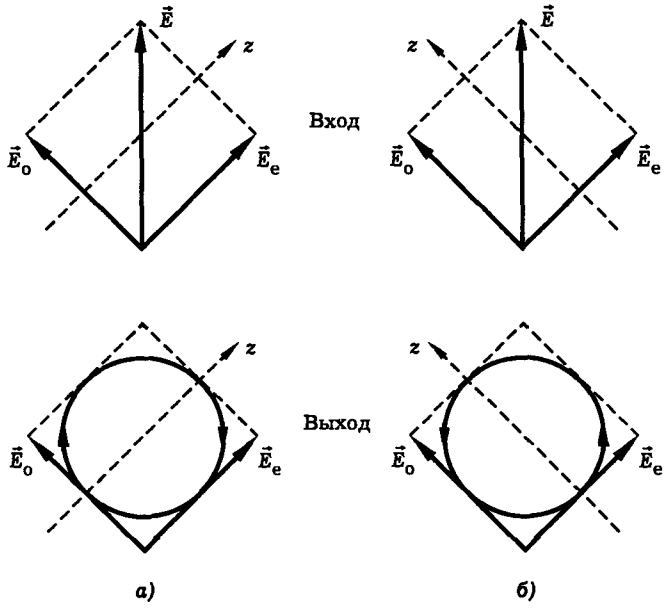



Рис 21 24 Преобразование линейной поляризации света в круговую в четвертьволновой пластинке Входная световая волна линейно поляризована в вертикальном направлении Оптическая ось кристалла установлена под углом 45° к вертикали Показаны варианты получения правополяризованного и левополяризованного света

этом на входе пластинки ортогональные колебания светового поля в обыкновенной и необыкновенной волнах синфазны и одинаковы по амплитуде. На выходе пластинки эти колебания оказываются сдвинутыми по фазе на $\pi/2$ и, следовательно, выходной пучок имеет круговую поляризацию. Поворотом пластинки на 90° относительно оси светового пучка можно изменить направление круговой поляризации на обратное. Аналогичным образом можно осуществить и обратную операцию — преобразования круговой поляризации света в линейную.

Полуволновая пластинка. Такая пластинка поворачивает плоскость поляризации света на 90°. В этом случае $\Delta\varphi = \pi$ и

$$(n_o - n_e)d = \lambda/2.$$

Действие полуволновой пластинки иллюстрирует рис. 21.25.

Действие пластинок $\lambda/4$ и $\lambda/2$ можно продемонстрировать с помощью гелий-неонового лазера. Схема опыта показана на рис. 21.26. Сначала лазерный луч направляют на экран, где наблюдают яркое световое пятно красного цвета. Затем в лазерный пучок вносят поляроид и наблюдают изменение яркости пятна на экране при вращении поляроида относительно оси пучка. Отмечают, что при некотором положении поляроида пятно на экране полностью исчезает. Это говорит о том, что лазерное излучение имеет линейную поляризацию.

Затем в лазерный пучок вносят пластинку $\lambda/4$ и устанавливают так, чтобы оптическая ось кристалла составляла угол 45° с плоскостью поляризации лазерного луча. Отмечают, что внесение пластинки не меняет яркости светового

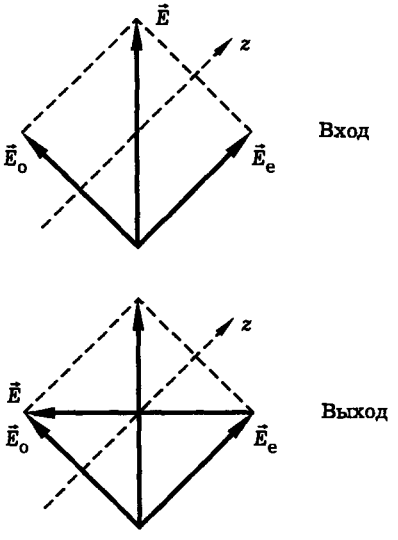



Рис. 21.25. Преобразование вертикально поляризованной световой волны в горизонтально поляризованную с помощью полуволновой пластинки

пятна на экране. Поляризацию света, выходящего из пластинки, исследуют с помощью поляроида. Опыт показывает, что вращение поляроида в этом случае не меняет яркости пятна на экране. Это указывает на то, что преобразованный пластинкой свет имеет круговую поляризацию.

Если же угол между оптической осью кристалла и направлением поляризации лазерного луча отличен от 45°, то вращение поляроида вызывает периодическое изменение интенсивности света на экране, однако полного затемнения не происходит. Это означает, что свет, выходящий из пластинки, имеет эллиптическую поляризацию.

Аналогичным образом демонстрируют действие полуволновой пластинки. Опыт показывает, что полуволновая пластинка поворачивает плоскость поляризации лазерного луча на 90°. Демонстрация проводится следующим образом. Анализатор устанавливают "на темноту" и вносят в лазерный луч пластинку. На экране появляется свет. Затем поворачивают анализатор на 90° и получают снова темноту.

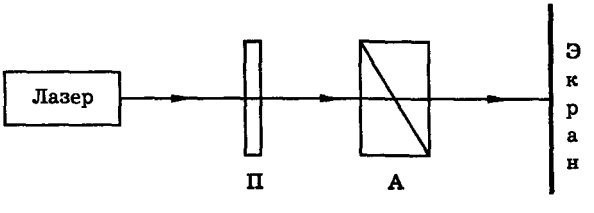



Рис. 21.26. Демонстрация действия пластинок в четверть волны и полволны: П — пластинка, А — анализатор

**Интерференция поляризованных лучей.** Явление интерференции, при котором две световые волны способны взаимно погасить друг друга, возможно, очевидно, лишь при условии, что волны имеют одинаковое направление поляризации. Если же волны поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях, то они не могут погасить друг друга ни при какой разности фаз и, следовательно, не могут давать интерференционную картину. Более того, нетрудно показать, что интенсивность света вообще не зависит от разности фаз ортогональных компонент поля. В самом деле, полагая

$$\vec{E} = \vec{x}_0 A_1 \cos(\omega t - kz) + \vec{y}_0 A_2 \cos(\omega t - kz + \varphi),$$

получим

$$I = I_1 + I_2,$$

где

$$I = \frac{c}{4\pi}\langle E^2 \rangle, \qquad I_1 = \frac{c}{8\pi}A_1^2, \qquad I_2 = \frac{c}{8\pi}A_2^2,$$

а угловые скобки обозначают усреднение по периоду световых колебаний.

Отсюда следует, что обыкновенная и необыкновенная волны, распространяющиеся в анизотропном кристалле, не могут интерферировать между собой. Опыт подтверждает этот вывод. Наблюдения показывают, что при прохождении светового пучка через пластину прозрачного анизотропного кристалла его интенсивность не меняется, т. е. интенсивность света на выходе равна интенсивности входного пучка. При этом сохранение интенсивности света имеет место независимо от разности фаз, возникающей между обыкновенной и необыкновенной волнами в кристалле.

Фазовый набег, возникающий между обыкновенной и необыкновенной волнами в анизотропном кристалле влияет не на интенсивность, а на поляризацию света. Изменение поляризации можно трансформировать в изменение интенсивности, если пропустить световой луч через поляроид. Таким образом, используя поляризационные приспособления, можно наблюдать зависимость интенсивности света от разности фаз ортогональных компонент поля световой волны. Такие явления получили название *интерференции поляризованных лучей*. Схема наблюдения интерференции поляризованных лучей показана на рис. 21.27. Ее основными элементами являются источник света, поляризатор и анализатор. Обычно поляризатор и анализатор устанавливают в "скрещенном" положении, т. е. так, что система в целом не пропускает свет. Если теперь в световой пучок между поляризатором и анализатором внести пластинку из анизотропного кристалла, то система начнет пропускать свет, что видно по появлению светового пятна на экране.

Если положения поляризатора и анализатора фиксированы, то интенсивность света на экране зависит от взаимной ориентации поляризатора и кристалла, а также от фазового набега $\Delta\varphi$, возникающего между обыкновенной и необыкновенной волнами в кристалле и определяемого формулой (21.75). В частности, если оптическая ось кристалла составляет угол 45° с плоскостью поляризации падающего на него света и $\Delta\varphi = \pi$, т. е. кристаллическая пластинка работает как полуволновая (рис. 21.25), то плоскость поляризации света поворачивается в пластинке на 90° и вышедший из пластинки свет полностью пропускается анализатором. В этом случае свет на экране имеет максимальную интенсивность, равную интенсивности входного светового пучка. При этом

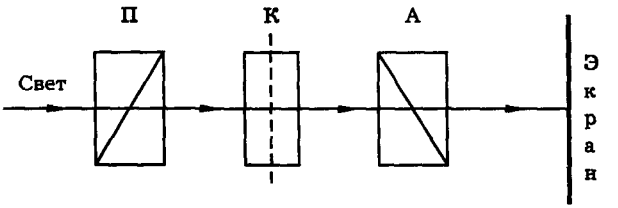



Рис. 21.27. Схема наблюдения интерференции поляризованных лучей: П — поляризатор, К — кристалл, А — анализатор

же положении кристалла, но $\Delta\varphi = 2\pi$ вращения плоскости поляризации света не происходит и свет на экране не появляется.

Фазовый набег, возникающий между обыкновенной и необыкновенной волнами в кристалле, зависит от материала пластинки, ее толщины, а также от длины световой волны $\lambda$ (см. (21.75)). Поэтому, если в системе, показанной на рис. 21.27, используется белый свет, волны разных частот приобретают в кристалле разные фазовые набеги $\Delta\varphi$, по-разному изменяют состояние поляризации и, следовательно, по-разному пропускаются анализатором. Таким образом, коэффициент пропускания системы зависит от длины световой волны. Это приводит к тому, что свет, прошедший через систему, приобретает окраску.

Цвета кристаллических пластинок. В лекционной демонстрации, проводимой по схеме рис. 21.27, используется белый свет и кристаллические пластинки, составленные из листочков гипса или слюды разной толщины. Демонстрируются следующие явления.

Скрещивая поляризатор и анализатор, добиваются полной темноты на экране. Перед анализатором ставят кристаллическую пластинку. На экране появляется свет, имеющий яркую окраску. Поворачивают анализатор на 90°, окраска пластинки меняется на дополнительную. Например, красный цвет меняется на голубой, зеленый на фиолетовый, синий на желтый. При повороте на 45° цвета исчезают.

При скрещенных поляризаторе и анализаторе делают полный оборот пластинки, наблюдая за четырехкратными погасаниями, чередующимися с максимальной яркостью света на экране.

Проводят опыты с пластинками неодинаковой толщины. На экране наблюдают разноцветную окраску. В частности, грубо отколотые по плоскостям слойности пластинки гипса дают исключительно красивый пестрый узор с различной окраской, отвечающей местам разной толщины.

Демонстрируются мозаики, подобранные из листочков слюды, гипса или обычного целлофана разной толщины. Цветные картины на экране наблюдаются только в том случае, если в опыте используются оба поляризационных приспособления: поляризатор и анализатор (рис. 21.27). Изъятие любого из этих элементов приводит к тому, что свет на экране становится белым.

**Наведенная анизотропия.** Свойства анизотропной среды могут приобретать и изотропные материалы, если они подвергаются "анизотропному" внешнему воздействию. Жидкости, пластмассы, стекла демонстрируют оптическую анизотропию под воздействием механического напряжения, внешнего электрического поля, мощного поляризованного лазерного импульса. Эти явления, которые можно назвать "наведенной анизотропией", находят разнообразные практические применения.

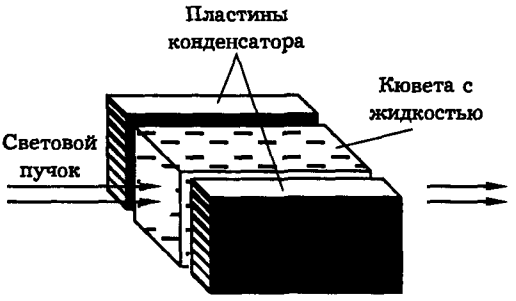



Рис. 21.28. Ячейка Керра

Изотропный в обычных условиях плексиглас становится анизотропным под действием механического напряжения. Так, если в схеме наблюдения интерференции поляризованных лучей (рис. 21.27) заменить анизотропный кристалл на прозрачный плексигласовый кубик, зажатый в тиски, то можно наблюдать на экране интерференционную картину, связанную с появлением внутренних анизотропных напряжений в плексигласе. Сжимая тиски, можно наблюдать увеличение контраста картины, сдвиг и деформацию интерференционных полос на экране. Подобные наблюдения можно использовать для моделирования и исследования внутренних напряжений и деформаций в различных материалах и конструкциях, например, в крюках, валках прокатных станов и т. п.

Эффект Керра. Некоторые газы, жидкости, стекла приобретают анизотропию под действием внешнего электрического поля. Механизм этого эффекта, называемого *эффектом Керра,* состоит в том, что внешнее электрическое поле ориентирует определенным образом элементарные электрические диполи (молекулы), формируя таким образом "оптическую ось" среды (рис. 21.6).

На рис. 21.28 показана *ячейка Керра,* применяемая как электрооптический модулятор светового потока. Ячейка состоит из кюветы, наполненной жидкостью (обычно нитробензолом), стенки которой пропускают свет, и конденсатора, создающего электрическое поле. До и после ячейки Керра ставятся поляри-

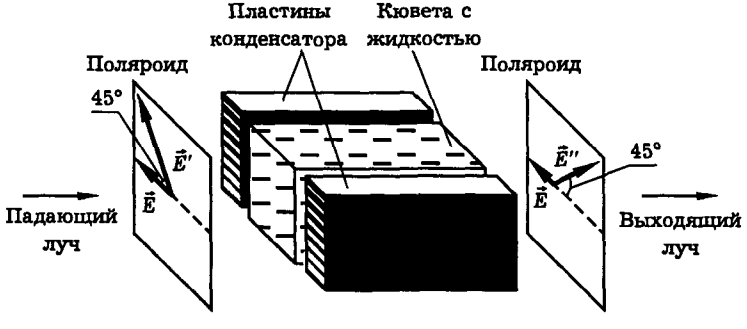



Рис. 21.29. Модулятор света

затор и анализатор света, например поляроиды, выделяющие световые волны, направления поляризаций которых $\vec{E}'$ и $\vec{E}''$ взаимно перпендикулярны и составляют угол 45° с направлением поля $\vec{E}$, создаваемого конденсатором. Если электрическое поле отсутствует, то свет через такую систему не проходит. При включении поля $\vec{E}$ вследствие эффекта Керра поляризация света изменится, и часть света пройдет через прибор (рис. 21.29). Если электрическое поле переменное (частоты $\omega$), то световой поток на выходе прибора будет промодулирован по интенсивности с той же частотой. Таким образом, ячейку Керра можно использовать как *электрооптический модулятор* в системах оптической связи. Ячейка применяется также в лазерах в качестве "затвора" для получения мощных ("гигантских") световых импульсов.

*Высокочастотный эффект Керра.* Высокочастотным, или оптическим, называется эффект Керра, вызванный электрическим полем мощной поляризованной световой волны. В результате высокочастотного эффекта Керра показатель преломления жидкости зависит от интенсивности света, т. е. среда становится *нелинейной*. Эффект Керра, наведенный коротким лазерным импульсом, можно использовать для создания *сверхскоростного оптического затвора* [13].

# Литература


1. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. — М.: Наука, 1979.
2. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. — М.: Наука, 1973.
3. *Ярив А., Юх П.* Оптические волны в кристаллах. — М.: Мир, 1987.
4. Квантовая электроника. Маленькая энциклопедия/Под ред. М. Е. Жаботинского. — М.: СЭ, 1969.
5. *Цернике Ф., Мидвинтер Дж.* Прикладная нелинейная оптика. — М.: Мир, 1976.
6. *Ландсберг Г. С.* Оптика. — М.: Наука, 1976.
7. *Матвеев А. Н.* Оптика. — М.: Высшая Школа, 1985.
8. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Оптика. — М.: Наука, 1985.
9. Физическая энциклопедия/Под ред. А. М. Прохорова. — М.: СЭ, 1988.
10. *Блейкмор Дж.* Физика твердого тела. — М.: Мир, 1988.
11. Лекционные демонстрации по физике/Под ред. В. И. Ивероновой. — М.: Наука, 1972.
12. *Ben Bova.* The Beauty of Light. — Wiley Science Editions. N.Y.: 1988.
13. *Дюге М.* "Свет, сфотографированный на лету"//УФН. 1973. Т. 109, № 1.
14. *Гурзадян Г. Г., Дмитриев В. Г., Никогосян Д. Н.* Нелинейно-оптические кристаллы. Свойства и применение в квантовой электронике. Справочник. — М.: Радио и связь, 1991.

# Лекция 22

# Нелинейная оптика

*Основные эффекты нелинейной оптики. Механизмы оптической нелинейности. Нарушение принципа суперпозиции для сильных световых волн в среде. Материальное уравнение нелинейной среды. Нелинейная поляризация. Нелинейная восприимчивость. Классическая модель нелинейной среды — ансамбль нелинейных осцилляторов. Оптическое детектирование.*

Лекция посвящена физике взаимодействия мощного лазерного излучения с веществом. Рассматриваются основные эффекты нелинейной оптики, излагаются основы теории, обсуждаются применения нелинейно-оптических явлений.

**Основные эффекты нелинейной оптики. Механизмы оптической нелинейности.** Нелинейная оптика изучает процессы взаимодействия света и вещества, характер протекания которых зависит от интенсивности света. Это такие явления, как генерация оптических гармоник, "выпрямление" света, вынужденное рассеяние света, самофокусировка световых пучков и самомодуляция импульсов, двухфотонное или многофотонное поглощение света, оптический пробой среды и т. п. Рассмотрим некоторые из этих явлений.

Генерация второй оптической гармоники. Это явление состоит в удвоении частоты света при распространении мощного лазерного пучка в кристалле. Механизм процесса связан с нелинейностью элементарного атомного осциллятора.

Удвоение частоты света в кристалле было первым нелинейно-оптическим эффектом, обнаруженным вскоре после создания лазера. Схема опыта Франкена, в котором наблюдался этот эффект, показана на рис. 22.1. Излучение рубинового лазера, имеющее длину волны $\lambda_1 = 6943$ Å, фокусировалось в кристалл кварца. Излучение, выходящее из кристалла, разворачивалось в спектр с помощью дисперсионной призмы и фокусировалось на фотопластинку. Опыт показал, что помимо света на частоте лазера из кристалла выходит свет на удвоенной частоте ("вторая гармоника"), имеющий длину волны $\lambda_2 = \lambda_1/2 = 3471{,}5$ Å. Несмотря на то, что излучение второй гармоники в опыте Франкена было чрезвычайно слабым, этот опыт сыграл принципиальную роль, положив начало развитию нелинейной оптики.

Последующие опыты показали, что при использовании других кристаллов эффективность генерации второй гармоники может быть резко повышена. К настоящему времени разработаны методы, позволяющие преобразовывать в гармонику значительную долю лазерного излучения; в некоторых случаях удается получить КПД генерации близкий к 100%.

На лекции демонстрируется генерация второй гармоники излучения неодимового лазера в кристалле ниобата лития или KDP. Схема опыта подобна показанной на рис. 22.1. Лазерное излучение имеет длину волны 1,06 мкм, вторая гармоника — 0,53 мкм. На белом экране в затемненной аудитории наблюдаются яркие вспышки зеленого цвета (вторая гармоника). Эффективность генерации гармоники в этом опыте превышает 10%. Опыт показывает, что мощность гармоники максимальна при некотором определенном положении кристалла. Поворот кристалла относительно этого положения резко уменьшает эффективность генерации. Следует отметить также, что гармоника генерируется лишь

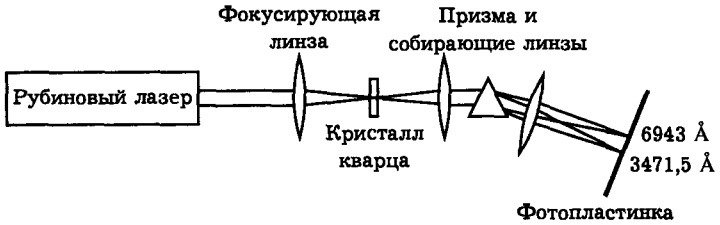



Рис. 22.1. Схема опыта Франкена по генерации второй оптической гармоники

при достаточно высокой интенсивности лазерного излучения, достигаемой за счет фокусировки лазерного пучка в кристалл.

Генерация второй оптической гармоники была впервые продемонстрирована в 1961 г. В настоящее время этот эффект широко применяется для преобразования частоты лазерного излучения.

Вынужденное комбинационное рассеяние света. Этот эффект состоит в том, что в поле мощного лазерного пучка среда генерирует интенсивное излучение, сдвинутое по частоте относительно лазера на величину, равную частоте молекулярных колебаний. Механизм процесса тот же, что при спонтанном рассеянии — модуляции света молекулярными колебаниями. Однако в отличие от спонтанного рассеяния, которое является очень слабым и направлено во все стороны, вынужденное рассеяние напоминает лазерную генерацию. Мощность и направленность вынужденного рассеяния соизмеримы с аналогичными параметрами лазерного пучка. Причина этого состоит в том, что вынужденное рассеяние происходит не на хаотических тепловых молекулярных колебаниях, а на колебаниях, возбужденных и сфазированных светом в большом объеме среды. Переход спонтанного рассеяния в вынужденное происходит при превышении интенсивностью возбуждающего света некоторой определенной величины, называемой *порогом ВКР*.

Впервые вынужденное комбинационное рассеяние наблюдали Вудбери и Нг (1962) при изучении режима модуляции добротности рубинового лазера с помощью керровской ячейки с нитробензолом. Они обнаружили появление в излучении лазера инфракрасной компоненты, частота которой была на 1345 см$^{-1}$ меньше частоты основного излучения лазера. Поскольку частотный сдвиг совпадал с одной из собственных частот колебаний молекулы нитробензола, было высказано предположение, что появление инфракрасной компоненты связано с комбинационным рассеянием света в нитробензоле, а большая интенсивность излучения обусловлена вынужденным характером процесса, при котором молекулярные колебания сильно раскачиваются светом. Это предположение было подтверждено в последующих опытах с различными жидкостями, а также с газами и твердыми телами.

На лекции демонстрируется вынужденное комбинационное рассеяние света в жидком азоте. Схема опыта показана на рис. 22.2. Излучение второй гармоники неодимового лазера с длиной волны 0,53 мкм фокусируется в кювету с жидким азотом. Излучение, выходящее из кюветы, через призму направляется на экран. Во время лазерного импульса на экране появляются пятна зеленого и оранжевого цвета. Зеленое пятно соответствует второй гармонике лазера, а оранжевое пятно — излучению вынужденного комбинационного рассеяния с

Рис. 22.2. Демонстрация вынужденного комбинационного рассеяния света в жидком азоте

длиной волны 0,61 мкм. Частотный сдвиг между этими волнами равен частоте молекулярных колебаний в жидком азоте и составляет 2326 см$^{-1}$. Опыт показывает, что вынужденное комбинационное рассеяние наблюдается лишь при достаточно высокой интенсивности света, достигаемой с помощью фокусировки пучка в кювету. В отличие от процесса спонтанного комбинационного рассеяния, характеризуемого очень малой интенсивностью, вынужденное рассеяние имеет высокую интенсивность, соизмеримую с интенсивностью лазерного луча. Это обстоятельство позволяет создавать эффективные преобразователи лазерного излучения на основе процесса ВКР. В настоящее время такие преобразователи используются как для преобразования частоты излучения, так и для улучшения пространственной когерентности света, а также для компрессии (сокращения длительности и увеличения мощности) лазерных импульсов. Кроме того, на основе процесса ВКР можно осуществлять когерентное суммирование излучений нескольких лазерных модулей.

Возбуждение когерентных молекулярных колебаний с помощью пары световых волн (*метод бигармонической накачки*) используется в спектроскопии когерентного антистоксова рассеяния света (КАРС).

Самофокусировка света. Эффект состоит в том, что в поле мощного лазерного пучка среда приобретает фокусирующие (линзовые) свойства. В результате световой пучок "схлопывается", превращаясь в тонкую светящуюся нить, или распадается на несколько таких нитей.

Механизм самофокусировки связан с изменением показателя преломления среды под действием мощной световой волны. Причины этого могут быть разными. Например, электрострикция в световом поле приводит к появлению давления, изменяющего плотность среды в области, занятой световым пучком, а следовательно, и показатель преломления среды. В жидкости сильное световое поле приводит к ориентации анизотропно поляризующихся молекул за счет взаимодействия света с наведенным дипольным моментом, при этом среда становится анизотропной, а средний показатель преломления для ориентирующего поля возрастает. Этот эффект принято называть высокочастотным эффектом Керра; изменение показателя преломления здесь, как и в хорошо известном статическом эффекте Керра, происходит за счет "выстраивания" молекул по полю. Зависящая от интенсивности световой волны добавка к показателю преломления может быть связана также с нелинейностью электронной поляризации. Наконец, изменение плотности, а следовательно и показателя преломления, может быть связано с нагревом среды, вызванным диссипацией энергии мощной световой волны.

Самофокусировка света была теоретически предсказана Аскарьяном в 1962 г., а экспериментально впервые наблюдалась Пилипецким и Рустамовым в 1965 г. В их опытах были фотографически зарегистрированы узкие светящиеся нити в органических жидкостях, облучаемых сфокусированным пучком рубинового лазера.

*а)* *б)* *в)*

Рис. 22.3. Самофокусировка света в толуоле [4]

На рис. 22.3 показана фотография одномодового лазерного пучка на выходном окне кюветы с толуолом при различных длинах кюветы. Рис. 22.3, *а* соответствует короткой кювете, в которой пучок не успел сфокусироваться (диаметр пучка 700 мкм). На рис. 22.3, *б* длина кюветы близка к длине самофокусировки, диаметр пучка составляет примерно одну десятую от первоначального значения (50 мкм). На рис. 22.3, *в* длина кюветы достаточна для наступления самофокусировки, пучок имеет вид нити с предельным значением диаметра 10 мкм. На рис. 22.4 показана фотография испытавшего самофокусировку многомодового лазерного пучка на выходном окне кюветы с сероуглеродом.

На лекции демонстрируется тепловое самовоздействие излучения аргонового лазера в слабопоглощающей жидкости. Схема опыта показана на рис. 22.5. Лазерный луч проходит через кювету, заполненную спиртом, и направляется на экран. Для увеличения эффекта в спирт добавляют поглощающий лазерный свет краситель, например фуксин. В режиме малой мощности лазера на экране наблюдается пятно, размер которого определяется обычной дифракционной расходимостью лазерного пучка. При переключении лазера на полную мощность расходимость пучка и размер пятна на экране резко возрастают, что обусловлено действием тепловой (в данном случае дефокусирующей) линзы, наведенной в жидкости лазерным пучком. Самодефокусировка света вызвана тем, что поглощающая свет жидкость сильнее нагревается вблизи оси лазерного пучка, где интенсивность света максимальна. Нагревание приводит к

Рис. 22.4. Самофокусировка многомодового лазерного пучка в сероуглероде

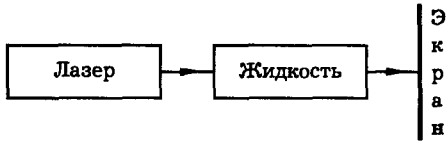



Рис. 22.5. Демонстрация тепловой самодефокусировки света в жидкости

тепловому расширению жидкости, уменьшению ее плотности и показателя преломления и, в конечном счете, формирует тепловую дефокусирующую линзу, увеличивающую угловую расходимость лазерного пучка. Механизм эффекта поясняет рис. 22.6.

Те же самые механизмы обусловливают и другой эффект нелинейного самовоздействия света — самомодуляцию светового импульса. При самомодуляции импульса, которая может происходить, например, в оптическом волокне, резко расширяется частотный спектр импульса, что дает возможность путем последующей компрессии получать предельно короткие световые импульсы. Данный эффект используется в системах генерации фемтосекундных лазерных импульсов.

Нелинейный материал, помещенный в оптический резонатор, демонстрирует свойства бистабильного элемента и может быть использован как элемент оптического компьютера (см. рис. 8.7). Нелинейный элемент в системе с двумерной обратной связью позволяет генерировать структуры светового поля типа спиральных волн, вращающихся волн, а также наблюдать "оптическую турбулентность". Адаптивные нелинейно-оптические системы используют в настоящее время для моделирования динамики нейронных сетей (рис. 22.7, 22.8, см. также дополнение 17). Краткая сводка основных эффектов нелинейной опти-

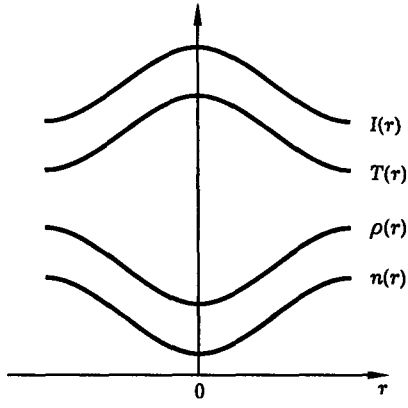



Рис. 22.6. Механизм тепловой самофокусировки света в слабопоглощающей свет жидкости: $r$ — координата в поперечном сечении светового пучка, $I$ — интенсивность света, $T$ — температура среды, $\rho$ — плотность среды, $n$ — показатель преломления среды

Таблица 22.1

Основные эффекты нелинейной оптики и их применение

| Эффект | Материал | Механизм | Применение |
|---|---|---|---|
| Генерация оптических гармоник. Параметрическая генерация света. | Кристаллы, полупроводники, инертные газы, пары металлов. | Нелинейность атомного осциллятора. | Преобразование частоты лазерного излучения. Плавная перестройка частоты лазера. Генерация когерентного излучения в ИК, УФ и рентгеновском диапазонах. Визуализация ИК изображения. Диагностика поверхности полупроводников. |
| Вынужденное рассеяние света. | Газы, жидкости, кристаллы, пары металлов, оптическое волокно. | Нелинейность атомного или молекулярного осцияллятора. Рассеяние света на электронных, молекулярных, звуковых или других колебаниях. Возбуждение колебаний среды световыми волнами. | Преобразование частоты лазерного излучения. Компрессия лазерных импульсов. Обращение волнового фронта излучения. Коррекция волнового фронта. Улучшение пространственной когерентности лазеров. Когерентное суммирование излучения нескольких лазерных модулей. Нелинейная спектроскопия, в частности, спектроскопия когерентного антистоксова рассеяния света (КАРС). |
| Самовоздействие света. | Жидкости, газы, кристаллы, жидкие кристаллы, оптическое волокно. | Нелинейность атомного осциллятора. Ориентация анизотропных молекул световой волной. Электрострикция. Нагрев среды. | Самомодуляция световых импульсов. Генерация фемтосекундных лазерных импульсов. Бистабильные оптические элементы. Элементы оптического компьютера. Моделирование нейронных сетей. |

ки и их применений дана в табл. 22.1. Отметим, что нелинейная оптика, прошедшая уже почти 40-летний путь развития, продолжает прогрессировать, а область ее приложений непрерывно растет.

**Нарушение принципа суперпозиции для сильных световых волн в среде.** При всем многообразии нелинейно-оптических явлений можно выделить некоторые общие черты, присущие каждому из них. Во-первых, это сильная зависимость от интенсивности света. Как правило, нелинейно-оптический эффект становится заметным лишь при достаточно большой интенсивности света. Не случайно поэтому, что нелинейная оптика появилась лишь после создания лазера. Нелинейная оптика — это оптика сильных световых полей, оптика мощных лазерных пучков. Во-вторых, для нелинейных эффектов характерно нарушение принципа суперпозиции. Принцип суперпозиции состоит в том,

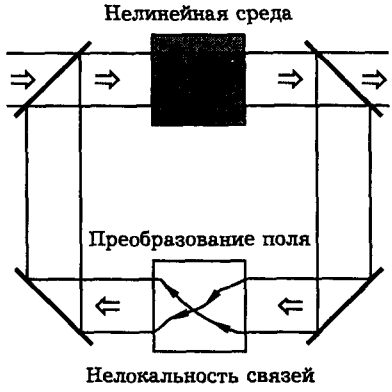



Рис. 22.7. Нелинейный резонатор с двумерной обратной связью

что различные световые волны, отличающиеся частотой, направлением распространения, поляризацией, распространяются и взаимодействуют со средой независимо друг от друга. В нелинейной оптике это не так. Как мы видели, в нелинейно-оптических процессах возникают новые спектральные компоненты поля, различные световые волны сильно взаимодействуют между собой, происходит энергообмен между ними вплоть до полного преобразования одной волны в другую. Типичный пример такого рода — генерация второй оптической гармоники. Итак, в нелинейно-оптических процессах мы сталкиваемся с нарушением принципа суперпозиции. Можно сделать и обратное утверждение: нарушение принципа суперпозиции так или иначе связано с нелинейным эффектом.

**Материальное уравнение нелинейной среды.** Теория нелинейно-оптических явлений строится на основе материальных уравнений и уравнений Максвелла. Уравнения Максвелла для диэлектрической нейтральной немагнитной среды имеют вид

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\vec{D} = 0, \qquad \operatorname{div}\vec{H} = 0,$$

где

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}.$$

Из уравнений Максвелла вытекает волновое уравнение

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2}, \tag{22.1}$$

которое в случае изотропной среды принимает вид

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2}. \tag{22.2}$$

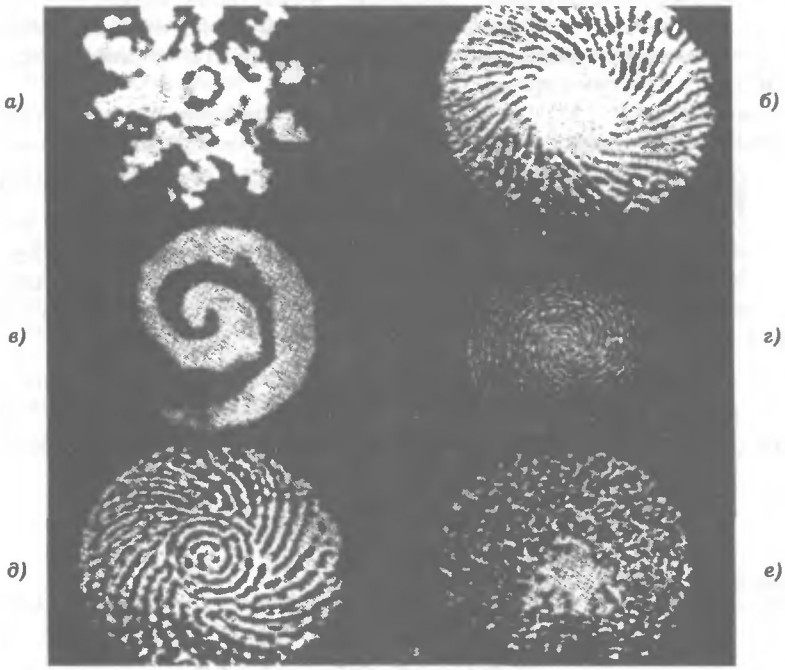



Рис. 22.8. Структуры светового поля, наблюдаемые в нелинейном резонаторе с двумерной обратной связью: вращающиеся волны (оптические реверберaторы) (*а*, *б*), спиральные волны (*в*, *г*) (случаю *г* соответствует меньший коэффициент диффузии), сосуществование структур (*д*), оптическая турбулентность (*е*) [14]

В уравнениях (22.1), (22.2) $\vec{E}$ — напряженность электрического поля световой волны, $\vec{P}$ — поляризация среды. Уравнения (22.1) и (22.2) справедливы в равной мере как для линейных, так и для нелинейных сред. Согласно этим уравнениям, поляризация среды есть источник светового поля.

Поляризация среды, в свою очередь, возникает под действием падающей световой волны. Наведение поляризации световым полем описывается материальным уравнением

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}),$$

которое отражает структуру и свойства среды. Простейшее материальное уравнение нелинейной среды имеет вид

$$P = \varkappa E + \chi^{(2)} E^2 + \chi^{(3)} E^3 + \cdots . \tag{22.3}$$

Согласно этому уравнению поляризация среды есть *нелинейная* функция напряженности светового поля. С математической точки зрения именно это обстоятельство (нелинейность материального уравнения) является причиной нарушения принципа суперпозиции для световых волн в нелинейной среде. Из уравнений (22.1)–(22.3) непосредственно вытекает возможность генерации оптических гармоник и других нелинейно-оптических эффектов. Заметим, что отно-

сительная величина нелинейных слагаемых в (22.3) возрастает с увеличением напряженности светового поля, т. е. с увеличением интенсивности световой волны. Это объясняет тот факт, что нелинейные эффекты наблюдаются прежде всего в сильных световых полях.

Коэффициенты $\varkappa$, $\chi^{(2)}$, $\chi^{(3)}, \ldots$ зависят от свойств среды и называются *оптическими восприимчивостями*. В частности, $\varkappa$ — линейная оптическая восприимчивость, $\chi^{(2)}$ — нелинейная восприимчивость второго порядка, $\chi^{(3)}$ — нелинейная восприимчивость третьего порядка и т. д.

**Нелинейная поляризация.** Часть поляризации среды, нелинейно зависящая от напряженности светового поля, называется *нелинейной поляризацией*. Выделяя в поляризации среды линейную и нелинейную компоненты, можно записать:

$$\vec{P} = \vec{P}_{\text{л}} + \vec{P}_{\text{нл}}. \tag{22.4}$$

Подставив (22.4) в (22.1), (22.2), получим волновые уравнения в форме

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2\vec{P}_{\text{л}}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2\vec{P}_{\text{нл}}}{\partial t^2} \tag{22.5}$$

для нелинейной анизотропной среды и

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2\vec{P}_{\text{л}}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2\vec{P}_{\text{нл}}}{\partial t^2} \tag{22.6}$$

для нелинейной изотропной среды. Из (22.3)–(22.6) видно, что нелинейная поляризация среды является источником новых спектральных компонент поля (оптических гармоник, комбинационных частот и т. п.).

Материальное уравнение вида (22.3) описывает изотропную нелинейную среду с безынерционным локальным откликом на световое поле. Аналогичное уравнение для анизотропной нелинейной диспергирующей среды имеет вид

$$\begin{aligned} P_\alpha(t) = &\int_0^\infty \varkappa_{\alpha\beta}(\tau)E_\beta(t-\tau)\,d\tau + \\ &+ \int_0^\infty\int_0^\infty \chi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}(\tau_1,\tau_2)E_\beta(t-\tau_1)E_\gamma(t-\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2 + \\ &+ \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \chi^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\times \\ &\times E_\beta(t-\tau_1)E_\gamma(t-\tau_2)E_\delta(t-\tau_3)\,d\tau_1\,d\tau_2\,d\tau_3 + \cdots . \end{aligned} \tag{22.7}$$

Здесь индексы $\alpha$, $\beta$, $\gamma, \ldots$ пробегают значения, нумерующие декартовы оси координат. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Функции

$$\varkappa_{\alpha\beta}(\tau), \quad \chi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}(\tau_1,\tau_2), \quad \chi^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(\tau_1,\tau_2,\tau_3), \ldots$$

имеют смысл тензорных функций Грина, характеризующих линейный и нелинейный отклик среды на импульсное воздействие.

Для сред с *нелокальным откликом* функции Грина зависят не только от времени, но и от координат:

$$\varkappa_{\alpha\beta} = \varkappa_{\alpha\beta}(\tau;\vec{r}), \qquad \chi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma} = \chi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}(\tau_1,\tau_2;\vec{r}_1,\vec{r}_2)$$

и т. д. В этом случае в материальное уравнение (22.7) следует добавить интегрирование по пространственным переменным. Учет нелокальности важен в тех случаях, когда элементарные осцилляторы среды, расположенные в различных точках пространства, связаны и взаимодействуют между собой. Среды, обладающие таким свойством, называют средами с *пространственной дисперсией*. К их числу относятся некоторые типы кристаллов, а также плазма.

**Нелинейная восприимчивость.** Материальное уравнение (22.7) представляет собой обобщение уравнения (21.19) на случай нелинейной среды. Обобщая формулу (21.20б)

$$\varkappa_{\alpha\beta}(\omega) = \int\limits_0^\infty \varkappa_{\alpha\beta}(\tau)\mathrm{e}^{-i\omega\tau}\,d\tau, \tag{22.8}$$

определяющую линейную оптическую восприимчивость $\varkappa_{\alpha\beta}(\omega)$, введем *нелинейные восприимчивости среды*

$$\chi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}(\omega_1,\omega_2) = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \chi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}(\tau_1,\tau_2)\exp\left[-i(\omega_1\tau_1+\omega_2\tau_2)\right]d\tau_1 d\tau_2,$$

$$\chi^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(\omega_1,\omega_2,\omega_3) = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \chi^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\times$$

$$\times\exp\left[-i(\omega_1\tau_1+\omega_2\tau_2+\omega_3\tau_3)\right]d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \tag{22.9}$$

и т. д. Аналогичные величины для сред с пространственной дисперсией зависят не только от частот, но и от волновых векторов $\vec{k}$, $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$ и т. д. Заметим, что восприимчивости среды, определенные формулами (22.8), (22.9), имеют ту же размерность, что и восприимчивости в формуле (22.3).

Зависящий от интенсивности света показатель преломления. Обычно в изотропных нелинейных средах низшей нелинейностью, отличной от нуля, является кубичная нелинейность. В приближении безынерционного отклика материальное уравнение такой среды имеет вид

$$P = \varkappa E + \chi^{(3)}E^3. \tag{22.10}$$

В этом же приближении показатель преломления среды $n$ определяется формулами $D = E + 4\pi P = \varepsilon E = n^2 E$, откуда

$$n = \sqrt{1 + 4\pi P/E}. \tag{22.11}$$

Подставив (22.10) в (22.11) и учитывая относительную малость нелинейного слагаемого, получим

$$n = n_0 + \frac{2\pi}{n_0}\chi^{(3)}E^2, \tag{22.12}$$

где

$$n_0 = \sqrt{1 + 4\pi\varkappa}. \tag{22.13}$$

Выразим квадрат напряженности электрического поля через интенсивность $I$ световой волны. Пользуясь формулой $I = cE^2/8\pi$, получим

$$n = n_0 + n_2 I, \tag{22.14}$$

где

$$n_2 = \frac{16\pi^2}{n_0 c}\chi^{(3)}; \tag{22.15}$$

здесь $n_0$ — линейный показатель преломления среды, $c$ — скорость света.

Формула (22.14) показывает, что в средах с кубичной нелинейностью показатель преломления зависит от интенсивности света. Этот эффект приводит к самовоздействию световых волн, в частности, к таким эффектам как самофокусировка светового пучка, фазовая самомодуляция импульса, бистабильность резонатора, заполненного нелинейной средой и т. п. Величина $n_2$, имеющая размерность обратной интенсивности света, является удобной характеристикой кубичной нелинейности среды. Например, для кристалла кварца $n_2 = 3 \times 10^{-16}$ см$^2$/Вт.

Конкретный механизм, приводящий к нелинейности типа (22.14), может быть связан, например, с поворотом анизотропных молекул жидкости в поле мощной поляризованной световой волны. Поскольку такой же механизм лежит в основе двойного лучепреломления света, наведенного постоянным электрическим полем ("эффект Керра"), зависимость показателя преломления от интенсивности света называют *высокочастотным эффектом Керра,* а нелинейность (22.14) — *нелинейностью керровского типа.*

Оценки. Оценим линейную и нелинейные оптические восприимчивости среды, например кристалла. Линейная оптическая восприимчивость $\varkappa$ связана с показателем преломления среды $n$ формулой $n^2 = 1+4\pi\varkappa$. Типичное значение показателя преломления для кристалла составляет $n = 1{,}5$. Исходя их этой цифры, получаем оценку

$$\varkappa = 0{,}1. \tag{22.16}$$

Для оценки квадратичной восприимчивости $\chi^{(2)}$ воспользуемся материальным уравнением (22.3). Согласно этому уравнению, размерность $\chi^{(2)}$ определяется формулой

$$\chi^{(2)} = \varkappa/E. \tag{22.17}$$

Воспользуемся формулой (22.17) для количественной оценки. Поскольку восприимчивость есть характеристика вещества, в качестве напряженности электрического поля $E$ в (22.17) следует подставить некоторую величину, характерную для среды. Характерным масштабом поля в среде является напряженность внутриатомного электрического поля, которую можно оценить по формуле

$$E_{\text{ат}} = e/a^2, \tag{22.18}$$

Таблица 22.2

Нелинейно-оптические восприимчивости третьего порядка [31]

| Материал | $n_2$, см$^2$/Вт | $\chi_3^{\text{эфф}}(-\omega;\omega,\omega,-\omega)$, см$^3$/эрг | $T$, К | Примечания |
|---|---|---|---|---|
| $CS_2$ | $3 \times 10^{-14}$ | $10^{-12}$ | 300 | Нерезонансная |
| Кварц | $3 \times 10^{-16}$ | $10^{-14}$ | 300 | Нерезонансная |
| Si | $10^{-10}$ | $10^{-8}$ | 300 | Нерезонансная |
| ЖК | $10^{-4}$ | $10^{-3}$ | 300 | Ориентированная мезофаза НЖК, очень медленная (секунды) |
| InSb | $3 \times 10^{-3}$ | 1 | 77 | Резонансное усиление |
| AlGaAs | $2 \times 10^{-4}$ | $6 \times 10^{-2}$ | 300 | Резонансное усиление, квантово-размерные структуры |

где $e$ — заряд электрона, $a$ — размер атома. Полагая $e = 4{,}8 \times 10^{-10}$ СГСЭ, $a = 0{,}5 \times 10^{-8}$ см (боровский радиус), получим

$$E_{\text{ат}} = 2 \times 10^7 \text{ СГСЭ}. \tag{22.19}$$

Если теперь подставить (22.19) в (22.17), то получим

$$\chi^{(2)} = 5 \times 10^{-9} \text{ СГСЭ}. \tag{22.20}$$

Полученная оценка правильно указывает порядок величины квадратичной нелинейной восприимчивости кристалла. Например, для кристалла KDP, широко применяемого в нелинейной оптике, $\chi^{(2)} = 3 \times 10^{-9}$ СГСЭ. Как видно из (22.17), размерность $\chi^{(2)}$ обратна размерности напряженности электрического поля. Следовательно,

$$\left[\chi^{(2)}\right] = \text{г}^{-1/2} \cdot \text{см}^{1/2} \cdot \text{с} = \text{эрг}^{-1/2} \cdot \text{см}^{3/2}. \tag{22.21}$$

Аналогичным образом можно оценить кубичную нелинейную восприимчивость $\chi^{(3)}$. Используя материальное уравнение (22.3) и полагая $E = E_{\text{ат}}$, получим

$$\chi^{(3)} = \varkappa / E_{\text{ат}}^2. \tag{22.22}$$

Численная оценка по формулам (22.22), (22.16), (22.19) дает

$$\chi^{(3)} = 2{,}5 \times 10^{-16} \text{ СГСЭ} = 2{,}5 \times 10^{-16} \text{ см}^3/\text{эрг}. \tag{22.23}$$

Реальная величина $\chi^{(3)}$, например для кристалла кварца, равна $10^{-14}$ см$^3$/эрг. Имеются, однако, материалы, обладающие значительно более высокой кубической восприимчивостью. Данные о некоторых из них представлены в табл. 22.2.

Представляет интерес сравнить между собой величины линейной и нелинейной поляризации среды. Например, ограничиваясь нелинейностью второго порядка, можно записать

$$P = P_{\text{л}} + P_{\text{нл}}^{(2)} = \varkappa E + \chi^{(2)} E^2$$

и

$$\frac{P_{\text{нл}}^{(2)}}{P_{\text{л}}} = \frac{\chi^{(2)} E^2}{\varkappa E} = \frac{\chi^{(2)} E}{\varkappa}.$$

Если теперь использовать для оценки формулу

$$\chi^{(2)} = \varkappa / E_{\text{ат}}, \tag{22.24}$$

то получим

$$P_{\text{нл}}^{(2)} / P_{\text{л}} = E / E_{\text{ат}}. \tag{22.25}$$

Таким образом, отношение квадратичной поляризации среды к линейной равно отношению напряженности электрического поля световой волны к напряженности внутриатомного поля. Аналогичным образом получаем

$$P_{\text{нл}}^{(3)} / P_{\text{л}} = (E / E_{\text{ат}})^2 \tag{22.26}$$

и т. д. Оценим величину $E/E_{\text{ат}}$. Интенсивность света $I$ связана с напряженностью поля $E$ световой волны формулой $I = cE^2/8\pi$. Отсюда $E = \sqrt{8\pi I/c}$. Полагая $I = 10^9$ Вт/см$^2$ $= 10^{16}$ СГСЭ, $c = 3 \times 10^{10}$ см/с, получим $E = 3 \times 10^3$ СГСЭ. Отсюда, используя (22.19), получаем

$$E / E_{\text{ат}} = 10^{-4}. \tag{22.27}$$

Таким образом, для данной интенсивности света ($10^9$ Вт/см$^2$) относительная величина нелинейной поляризации оказывается весьма мала. Тем не менее, нелинейный эффект может быть сильным благодаря тому, что он может *накапливаться* в процессе распространения световой волны.

**Классическая модель нелинейной среды — ансамбль нелинейных осцилляторов.** Механизмы оптической нелинейности весьма разнообразны (см. табл 22.1). Однако наиболее универсальным из них можно, по-видимому, считать механизм, связанный с нелинейностью элементарного осциллятора среды — атома или молекулы. Вычислим нелинейную поляризацию и нелинейную восприимчивость среды, рассматривая ее как ансамбль нелинейных осцилляторов.

Нелинейный осциллятор. Используя второй закон Ньютона, уравнение движения осциллятора запишем в виде

$$m\ddot{x} = F_{\text{возвр}} + eE. \tag{22.28}$$

Здесь $m$ — масса электрона, $e$ — заряд электрона, $x$ — смещение центра электронного облака относительно атомного ядра (рис. 22.9), $E$ — напряженность электрического поля световой волны, $F_{\text{возвр}}$ — возвращающая сила, обусловленная притяжением электрона к ядру и связанная с потенциальной энергией $U(x)$ электрона в поле ядра соотношением

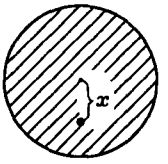



Рис. 22.9. Классическая модель атома

$$F_{\text{возвр}} = -\frac{\partial U}{\partial x}. \tag{22.29}$$

В окрестности положения равновесия электрона ($x = 0$) потенциальную энергию $U(x)$ можно представить в виде разложения по степеням $x$:

$$U(x) = \frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{3}\beta x^3 + \cdots. \tag{22.30}$$

График зависимости потенциальной энергии от электронной координаты схематически показан на рис. 22.10. Первое слагаемое в (22.30) соответствует параболическому приближению (пунктир на рис. 22.10). Остальные слагаемые описывают отличие формы реальной потенциальной ямы от параболической. Учет этих слагаемых важен, если амплитуда колебаний электрона достаточно велика. Последнее может иметь место в поле световой волны большой интенсивности. Подставив (22.30) в (22.29), получим

$$F_{\text{возвр}} = -\alpha x - \beta x^2 + \cdots. \tag{22.31}$$

Таким образом, возвращающая сила оказывается нелинейной функцией смещения. Подставляя (22.31) в (22.28) и ограничиваясь учетом первой нелинейной поправки, получим уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma x^2 = \frac{e}{m}E, \tag{22.32}$$

где $\omega_0^2 = \alpha/m$ — собственная частота колебаний осциллятора, $\gamma = \beta/m$ — параметр нелинейности. Добавим в левую часть уравнения (22.32) слагаемое $\Gamma\dot{x}$, описывающее затухание электронных колебаний. В итоге получим уравнение

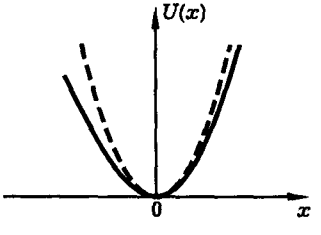



Рис. 22.10. График потенциальной энергии нелинейного осциллятора (сплошная кривая) и линейное приближение (пунктир)

$$\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \gamma x^2 = \frac{e}{m}E. \tag{22.33}$$

Итак, уравнение (22.33) описывает колебания атомного осциллятора под действием поля световой волны. Данное уравнение учитывает нелинейность осциллятора, которая становится существенной, если амплитуда колебаний достаточно велика. Ангармонизм элементарного осциллятора приводит к появлению нелинейной поляризации среды.

Поляризация среды. Поляризация среды $P$ определяется как дипольный момент единицы объема. Считая среду однородной, запишем

$$P = Np, \tag{22.34}$$

где $N$ — число атомов в единице объема,

$$p = ex, \tag{22.35}$$

$p$ — дипольный момент элементарного осциллятора (атома), $e$ — заряд электрона, $x$ — смещение электрона относительно положения равновесия, определяемое уравнением (22.33). Таким образом, для вычисления поляризации среды необходимо решить уравнение (22.33).

Точное решение этого уравнения неизвестно. Здесь мы сталкиваемся с типичной для нелинейной оптики ситуацией, когда уравнение, описывающее нелинейный эффект, не имеет точного решения или это решение настолько сложно, что практически им трудно воспользоваться. В этих условиях приходится прибегать к различным приближенным методам, причем выбор конкретного метода для каждой задачи, вообще говоря, индивидуален.

Метод возмущений. Одним из наиболее универсальных методов анализа нелинейных систем является метод возмущений. Основная идея этого метода состоит в том, чтобы сначала описать движение системы в *линейном приближении,* а затем рассмотреть нелинейный эффект как *малую поправку.*

Предположим, что амплитуда колебаний осциллятора настолько мала, что в любой момент времени нелинейный член в уравнении (22.33) много меньше линейных слагаемых, в частности,

$$|\gamma x^2| \ll |\omega_0^2 x|, \tag{22.36}$$

или

$$|\gamma x| \ll \omega_0^2. \tag{22.37}$$

Тогда решение уравнения (22.33) можно представить в виде

$$x = x_{\text{л}} + x_{\text{нл}}, \tag{22.38}$$

где $x_{\text{л}}$ — решение линейного уравнения

$$\ddot{x}_{\text{л}} + \Gamma\dot{x}_{\text{л}} + \omega_0^2 x_{\text{л}} = \frac{e}{m}E, \tag{22.39}$$

а $x_{\text{нл}}$ — нелинейная поправка, малая по сравнению с $x_{\text{л}}$:

$$|x_{\text{нл}}| \ll |x_{\text{л}}|. \tag{22.40}$$

Линейное приближение. Запишем световое поле в виде плоской монохроматической волны

$$E = \frac{1}{2}\mathcal{E}e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + \text{к. с.} \tag{22.41}$$

и подставим (22.41) в (22.39). Решение уравнения (22.39) ищем в виде

$$x_{\text{л}} = \frac{1}{2}\widetilde{x}_{\text{л}}e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + \text{к. с.} \tag{22.42}$$

Подставив (22.42) в (22.39), находим

$$\widetilde{x}_{\text{л}} = \frac{e}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma}\mathcal{E}, \tag{22.43}$$

или

$$\widetilde{x}_{\text{л}} = \alpha(\omega)\mathcal{E}, \tag{22.44}$$

где введена величина

$$\alpha(\omega) = \frac{e}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma}, \tag{22.45}$$

которая называется *линейной поляризуемостью атома.* Тем самым задача в линейном приближении решена.

Расчет нелинейной поправки. Подставив (22.38) в (22.33), получим уравнение

$$\ddot{x}_{\text{л}} + \ddot{x}_{\text{нл}} + \Gamma\dot{x}_{\text{л}} + \Gamma\dot{x}_{\text{нл}} + \omega_0^2 x_{\text{л}} + \omega_0^2 x_{\text{нл}} + \gamma(x_{\text{л}}^2 + x_{\text{нл}}^2 + 2x_{\text{л}}x_{\text{нл}}) = \frac{e}{m}E. \tag{22.46}$$

В силу уравнения (22.39) часть членов в этом уравнении сокращается и оно приобретает вид

$$\ddot{x}_{\text{нл}} + \Gamma\dot{x}_{\text{нл}} + \omega_0^2 x_{\text{нл}} + \gamma(x_{\text{л}}^2 + x_{\text{нл}}^2 + 2x_{\text{л}}x_{\text{нл}}) = 0. \tag{22.47}$$

Среди оставшихся членов выделим члены низшего порядка малости, а остальными пренебрежем. В силу (22.40)

$$x_{\text{л}}^2 + x_{\text{нл}}^2 \approx x_{\text{л}}^2. \tag{22.48}$$

В силу (22.37)

$$\omega_0^2 x_{\text{нл}} + 2\gamma x_{\text{л}}x_{\text{нл}} = (\omega_0^2 + 2\gamma x_{\text{л}})x_{\text{нл}} \approx \omega_0^2 x_{\text{нл}}. \tag{22.49}$$

В итоге получаем уравнение

$$\ddot{x}_{\text{нл}} + \Gamma\dot{x}_{\text{нл}} + \omega_0^2 x_{\text{нл}} = -\gamma x_{\text{л}}^2. \tag{22.50}$$

Таким образом мы произвели линеаризацию исходного нелинейного уравнения (22.33) по малому параметру $x_{\text{нл}}$.

Уравнение (22.50) представляет собой линейное уравнение вынужденных колебаний, в котором роль вынуждающей силы играет член $\gamma x_{\text{л}}^2$, определяемый решением уравнения движения электрона в линейном приближении. Найдем решение уравнения (22.50). Согласно (22.42)

$$x_л^2 = \frac{1}{4}\widetilde{x}_л^2 e^{i(2\omega t - 2\vec{k}\vec{r})} + \frac{1}{4}|\widetilde{x}_л|^2 + \text{к. с.} \tag{22.51}$$

Таким образом, вынуждающая сила содержит постоянную составляющую и переменную компоненту, осциллирующую на частоте второй гармоники $2\omega$. В силу линейности уравнения (22.50), такую же структуру будет иметь и величина $x_{нл}$. Поэтому ищем решение в виде

$$x_{нл}(t) = \frac{1}{2}x_2 e^{i(2\omega t - 2\vec{k}\vec{r})} + \frac{1}{2}x_0 + \text{к. с.} \tag{22.52}$$

Подставив (22.51), (22.52) в (22.50), получим уравнение

$$\frac{1}{2}(\omega_0^2 - 4\omega^2 + 2i\omega\Gamma)x_2 e^{i(2\omega t - 2\vec{k}\vec{r})} + \frac{1}{2}\omega_0^2 x_0 + \text{к. с.} =$$

$$= -\frac{1}{4}\gamma\widetilde{x}_л^2 e^{i(2\omega t - 2\vec{k}\vec{r})} - \frac{1}{4}\gamma|\widetilde{x}_л|^2 + \text{к. с.} \tag{22.53}$$

Приравнивая коэффициенты при экспонентах, а также постоянные слагаемые, находим

$$x_0 = -\frac{\gamma}{2\omega_0^2}|\widetilde{x}_л|^2, \qquad x_2 = -\frac{\gamma}{2(\omega_0^2 - 4\omega^2 + 2i\omega\Gamma)}\widetilde{x}_л^2. \tag{22.54}$$

Таким образом, нелинейная поправка вычислена.

Итак, приближенное решение уравнения (22.33) получено. Теперь нетрудно вычислить поляризацию среды. Подставив (22.38), (22.42), (22.52) в (22.34), (22.35), получим

$$P = P_л + P_{нл}, \tag{22.55}$$

где

$$P_л = \frac{1}{2}\mathcal{P}_л e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + \text{к. с.}, \tag{22.56}$$

$P_л$ — линейная поляризация,

$$P_{нл} = \frac{1}{2}\mathcal{P}_2 e^{i(2\omega t - 2\vec{k}\vec{r})} + \frac{1}{2}\mathcal{P}_0 + \text{к. с.}, \tag{22.57}$$

$P_{нл}$ — нелинейная поляризация, а величины $\mathcal{P}_л$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_0$ определяются формулами

$$\mathcal{P}_л = Ne\widetilde{x}_л, \qquad \mathcal{P}_2 = Nex_2, \qquad \mathcal{P}_0 = Nex_0 \tag{22.58}$$

или, в силу (22.44), (22.54),

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_л &= Ne\alpha(\omega)\mathcal{E}, \\ \mathcal{P}_2 &= -\frac{1}{2}\gamma Ne\frac{\alpha^2(\omega)}{\omega_0^2 - 4\omega^2 + 2i\omega\Gamma}\mathcal{E}^2, \\ \mathcal{P}_0 &= -\frac{1}{2}\gamma Ne\frac{|\alpha(\omega)|^2}{\omega_0^2}|\mathcal{E}|^2, \end{aligned} \tag{22.59}$$

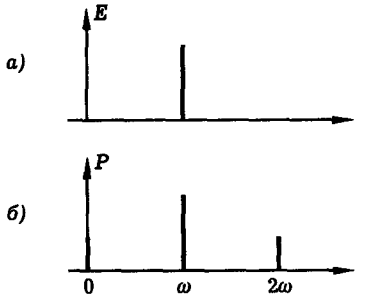



Рис. 22.11. Спектр возбуждающей световой волны (*а*) и спектр поляризации (*б*) в квадратично-нелинейной среде

где $\alpha(\omega)$ — линейная поляризуемость атома, определяемая формулой (22.45).

Формулы (22.55)–(22.59) показывают, что поляризация рассматриваемой нелинейной среды содержит три спектральные компоненты: компоненту на частоте возбуждающей световой волны (линейная поляризация), компоненту на частоте $2\omega$ и постоянную составляющую (рис. 22.11). Компонента поляризации на частоте $2\omega$ ответственна за генерацию второй оптической гармоники.

Оптические восприимчивости. Линейная оптическая восприимчивость среды $\varkappa(\omega)$ вводится как коэффициент пропорциональности между комплексными амплитудами поля и поляризации на частоте $\omega$:

$$\mathcal{P}_{\text{л}} = \varkappa(\omega)\mathcal{E}. \tag{22.60}$$

Введем квадратичную нелинейную восприимчивость среды на частоте второй гармоники $\chi^{(2)}(2\omega)$, определив ее как коэффициент пропорциональности между комплексной амплитудой поляризации среды на этой частоте $\mathcal{P}_2$ и квадратом комплексной амплитуды поля:

$$\mathcal{P}_2 = \chi^{(2)}(2\omega)\mathcal{E}^2. \tag{22.61}$$

Наконец, квадратичную нелинейную восприимчивость среды на нулевой частоте $\chi^{(2)}(0)$ определим формулой

$$\mathcal{P}_0 = \chi^{(2)}(0)|\mathcal{E}|^2. \tag{22.62}$$

Из (22.59)–(22.62) следует, что

$$\begin{aligned} \varkappa(\omega) &= Ne\alpha(\omega), \\ \chi^{(2)}(2\omega) &= -\frac{1}{2}\gamma Ne\frac{\alpha^2(\omega)}{\omega_0^2 - 4\omega^2 + 2i\omega\Gamma}, \\ \chi^{(2)}(0) &= -\frac{1}{2}\gamma Ne\frac{|\alpha(\omega)|^2}{\omega_0^2}, \end{aligned} \tag{22.63}$$

где

$$\alpha(\omega) = \frac{e}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma}, \tag{22.64}$$

$\alpha(\omega)$ — линейная оптическая поляризуемость атома.

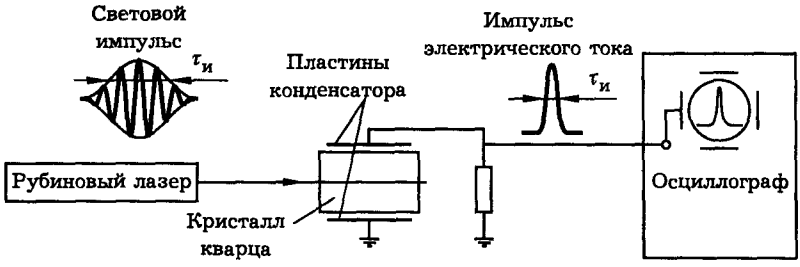



Рис. 22.12. Схема опыта по наблюдению оптического детектирования. Световой пучок рубинового лазера пронизывает кристалл кварца, помещенный в электрический конденсатор. Вследствие детектирования световой импульс лазера возбуждает импульс электрического тока в цепи конденсатора

Итак, мы вычислили линейную и нелинейные оптические восприимчивости для модельной нелинейной среды, представляющей собой ансамбль нелинейных классических осцилляторов. Полученные формулы (22.63) показывают, что нелинейная восприимчивость среды зависит, во-первых, от ангармоничности элементарного осциллятора, характеризуемой параметром $\gamma$, а во-вторых, от линейной поляризуемости атома $\alpha(\omega)$. Поэтому нелинейные среды нужно искать, прежде всего, среди сред с большими показателями преломления (жидкости, кристаллы). Кроме того, из (22.63), (22.64) следует, что нелинейная восприимчивость среды возрастает в *резонансных условиях,* когда частота возбуждающей световой волны $\omega$ либо частота второй гармоники $2\omega$ близка к собственной частоте колебаний элементарного осциллятора $\omega_0$.

**Оптическое детектирование.** Наш расчет показывает, что под действием мощной световой волны в квадратично-нелинейной среде должна возникать постоянная поляризация, величина которой пропорциональна интенсивности света. Этот эффект называется *оптическим детектированием* или *выпрямлением света.* Постоянная поляризация, в свою очередь, приводит к появлению постоянного электрического поля в среде, которое может быть зарегистрировано и измерено.

На рис. 22.12 показана схема опыта по наблюдению оптического детектирования в кристалле кварца. Световой пучок рубинового лазера пронизывает кристалл кварца, помещенный в электрический конденсатор. Вследствие эффекта детектирования световой импульс лазера возбуждает импульс электрического тока в цепи конденсатора. Заметим, что подобные опыты можно использовать для измерения квадратичной оптической нелинейности различных сред.

# Литература

1. *Ахманов С. А., Хохлов Р. В.* Проблемы нелинейной оптики. — М.: Изд-во АН СССР, 1965.
2. *Бломберген Н.* Нелинейная оптика. — М.: Мир, 1966.
3. Квантовая электроника. Маленькая энциклопедия/Под ред. М. Е. Жаботинского. — М.: Советская Энциклопедия, 1969.
4. *Шен И. Р.* Принципы нелинейной оптики. — М.: Наука, 1989.

5. Физическая энциклопедия/Под ред. А. М. Прохорова. — М.: Советская Энциклопедия, 1988.
6. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. — М.: Наука, 1979.
7. *Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В.* Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде//УФН. 1967, Т. 93. С. 19.
8. *Ахманов С. А., Выслоух В. А., Чиркин А. С.* Самовоздействие волновых пакетов в нелинейной среде и генерация фемтосекундных лазерных импульсов//УФН, 1986. Т. 149. С. 449.
9. *Цернике Ф., Мидвинтер Дж.* Прикладная нелинейная оптика. — М.: Мир, 1976.
10. Нелинейная спектроскопия/Под. ред. Н. Бломбергена. — М.: Мир, 1979.
11. *Ахманов С. А., Коротеев Н. И.* Методы нелинейной оптики в спектроскопии рассеяния света. — М.: Наука, 1981.
12. *Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981.
13. *Ахманов С. А., Выслоух В. А., Чиркин А. С.* Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. — М.: Наука, 1988.
14. Новые физические принципы оптической обработки информации/Под ред. С. А. Ахманова и М. А. Воронцова. — М.: Наука, 1990.
15. *Ярив А., Юх П.* Оптические волны в кристаллах. — М.: Мир, 1987.
16. *Райнтжес Дж.* Нелинейные оптические параметрические процессы в жидкостях и газах. — М.: Мир, 1987.
17. *Коротеев Н. И., Шумай И. Л.* Физика мощного лазерного излучения. — М.: Наука, 1991.
18. *Алешкевич В. А., Киселев Д. Ф., Корчажкин В. В.* Лазеры в лекционном эксперименте. — М.: Изд-во МГУ, 1985.
19. *Зельдович Б. Я., Пилипецкий Н. Ф., Шкунов В. В.* Обращение волнового фронта. — М.: Наука, 1985.
20. *Беспалов В. И., Пасманик Г. А.* Нелинейная оптика и адаптивные лазерные системы. — М.: Наука, 1986.
21. *Архипкин В. Г., Попов А. К.* Нелинейное преобразование света в газах. — Новосибирск: Наука, 1987.
22. *Делоне Н. Б., Крайнов В. П.* Основы нелинейной оптики атомных газов. — М.: Наука, 1986.
23. *Аллен Л., Эберли Дж.* Оптический резонанс и двухуровневые атомы. — М.: Мир, 1978.
24. *Ахманов С. А., Воронцов М. А., Иванов В. Ю.* Крупномасштабные поперечные нелинейные взаимодействия в лазерных пучках. Новые типы нелинейных волн, возникновение "оптической турбулентности"//Письма в ЖЭТФ. 1988. Т. 47. С. 611.
25. *Ахманов С. А., Емельянов В. И., Коротеев Н. И., Семиногов В. Н.* Воздействие мощного лазерного излучения на поверхность полупроводников и металлов: нелинейно-оптические эффекты и нелинейно-оптическая диагностика//УФН. 1985. Т. 147. С. 675.
26. *Клышко Д. Н.* Физические основы квантовой электроники. — М.: Наука, 1986.
27. *Клышко Д. Н.* Фотоны и нелинейная оптика. — М.: Наука, 1980.
28. *Приезжев А. В., Тучин В. В., Шубочкин Л. П.* Лазерная диагностика в биологии и медицине. — М.: Наука, 1989.
29. Сверхкороткие световые импульсы/Под ред. С. Шапиро. — М.: Мир, 1981.
30. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. — М.: Наука, 1976.
31. *Фишер Р., Мюллер Р.*//Квантовая электроника. 1989. Т. 16. С. 1723.
32. *Ярив А.* Квантовая электроника и нелинейная оптика. — М.: Сов. радио, 1973.
33. *Рэди Дж.* Действие мощного лазерного излучения. — М.: Мир, 1974.
34. *Аскарьян Г. А.*//ЖЭТФ. 1962. Т. 42. С. 1567.
35. *Пилипецкий Н. Ф., Рустамов А. Р.*//Письма в ЖЭТФ. 1965. Т. 2. С. 88.

36. *Franken P. A., Hill A.E., Peters C.W., Weinreich G.*//Phys. Rev. Lett. 1961. V. 7. P. 118.
37. *Woodbury E. J., Ng W. K.*//Proc. IRE. 1962. V. 50. P. 2347.
38. *Woodbury E. J., Eckhardt G. M.* US Patent No. 3371256 (27 February 1968).
39. *Ахманов С. А.* Нелинейная оптика в Московском университете//Известия АН СССР, серия физическая. 1986. Т. 50. С. 1050.
40. *Гурзадян Г. Г., Дмитриев В. Г., Никогосян Д. Н.* Нелинейно-оптические кристаллы. Свойства и применение в квантовой электронике. Справочник. — М.: Радио и связь, 1991.

# Лекция 23

# Теоретическая нелинейная оптика

*Генерация второй оптической гармоники. Вынужденное комбинационное рассеяние света. Самофокусировка света.*

Лекция посвящена теории нелинейно-оптических эффектов. Рассматриваются: генерация второй оптической гармоники, вынужденное комбинационное рассеяние и самофокусировка света.

Теория нелинейно-оптических явлений строится на основе уравнений Максвелла и материальных уравнений. Из уравнений Максвелла вытекает волновое уравнение (см. лекцию 22)

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{D}_{\text{л}}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{P}_{\text{нл}}}{\partial t^2}, \tag{23.1}$$

которое в случае изотропной среды принимает вид

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{D}_{\text{л}}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{P}_{\text{нл}}}{\partial t^2}. \tag{23.2}$$

Здесь $\vec{D}_{\text{л}} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}_{\text{л}}$ — линейная компонента электрической индукции, $\vec{E}$ — напряженность электрического поля световой волны, $\vec{P}_{\text{л}}$ — линейная поляризация среды, $\vec{P}_{\text{нл}}$ — нелинейная поляризация,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$\Delta$ — оператор Лапласа. Согласно уравнениям (23.1), (23.2), поляризация среды является источником светового поля. Сама поляризация, в свою очередь, наводится полем падающей световой волны и описывается материальным уравнением

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}) = \vec{P}_{\text{л}} + \vec{P}_{\text{нл}}. \tag{23.3}$$

Примеры материальных уравнений приведены в лекции 22. Применим теперь эту теорию для решения конкретных нелинейно-оптических задач.

**Генерация второй оптической гармоники.** Оценки, сделанные в лекции 22, показывают, что локальный нелинейный эффект, как правило, мал. Например, при генерации второй гармоники

$$P_{\text{нл}}/P_{\text{л}} \simeq E/E_{\text{ат}} \approx 10^{-4}. \tag{23.4}$$

Здесь $E$ — напряженность поля световой волны, соответствующая интенсивности $10^9$ Вт/см$^2$, $E_{\text{ат}}$ — напряженность внутриатомного электрического поля.

Волновой синхронизм. Оценка (23.4) показывает, что мощность, переизлучаемая атомом на частоте второй гармоники, значительно меньше мощности, переизлучаемой им на частоте основной волны. Тем не менее эффективность генерации гармоники может быть весьма велика. Это объясняется тем,

что в процессе распространения световой волны нелинейный эффект *накапливается*. Для того чтобы такое накопление имело место, необходимо выполнение условия *волнового синхронизма*. При генерации второй гармоники условие синхронизма состоит в совпадении скоростей световых волн на основной частоте и на частоте гармоники:

$$v(\omega) = v(2\omega). \tag{23.5}$$

При выполнении этого условия достигается оптимальное фазовое соотношение между волной гармоники, генерируемой данным атомом, и волной, подошедшей от предыдущего участка кристалла. В результате происходит конструктивная интерференция этих волн, амплитуда гармоники нарастает и при достаточной длине кристалла возможно полное преобразование излучения основной частоты в излучение гармоники. При выполнении условия синхронизма мощность гармоники монотонно нарастает по мере распространения волны вдоль кристалла. Если же это условие не выполняется, то волна гармоники, генерируемая данным атомом, может складываться с волной, подошедшей от соседнего атома, например, в противофазе; при этом волны, генерируемые разными атомами, будут не усиливать, а гасить друг друга. В этом случае мощность гармоники будет осциллировать вдоль кристалла, а эффективность генерации не превысит значительно величины локального эффекта.

Выполнению условия синхронизма препятствует нормальная дисперсия кристалла, при которой показатель преломления возрастает с ростом частоты света. В 1962 г. Джордмейн и Терхьюн предложили использовать для выполнения условия (23.5) явление *двойного лучепреломления* в анизотропном кристалле. В отрицательном одноосном анизотропном кристалле скорости волн основной частоты ("накачки") и второй гармоники могут быть одинаковы, если эти волны имеют *разные поляризации*: накачка является обыкновенной волной, а гармоника — необыкновенной. Поверхности показателей преломления для этого случая показаны на рис. 23.1. На рис. 23.1, *а* показаны поверхности показателей преломления на частотах $\omega$ и $2\omega$ кристалла KDP при накачке излучением рубинового лазера. Видно, что для некоторого направления в кристалле эллипсоид показателя преломления необыкновенной волны гармоники пересекается со сферой показателя преломления обыкновенной волны накачки. Это направление называется *направлением синхронизма*. Картина пересечения поверхностей показателей преломления показана отдельно на рис. 23.1, *б*. На рис. 23.2 представлена аналогичная картина для кристалла кварца. Видно, что в этом кристалле условие синхронизма не может быть выполнено ни для какого направления. Именно по этой причине в первом опыте по генерации второй оптической гармоники (опыт Франкена, 1961 г., см. рис. 22.1), в котором использовался кристалл кварца, излучение гармоники было чрезвычайно слабым. Данные, представленные на рис. 23.3, показывают, что угловая ширина синхронизма весьма мала: в кристалле KDP она составляет примерно 0,1°.

Теория генерации второй оптической гармоники в кристалле KDP. Рассмотрим подробнее генерацию второй оптической гармоники в нелинейном анизотропном кристалле. Для определенности будем иметь в виду ГВГ излучения неодимового лазера с длиной волны $\lambda_1 = 1{,}06$ мкм в кристалле KDP.

Нелинейная поляризация. Принимая во внимание только линейную и квадратичную нелинейную восприимчивости, а также учитывая дисперсию и анизотропию кристалла, материальное уравнение запишем в виде

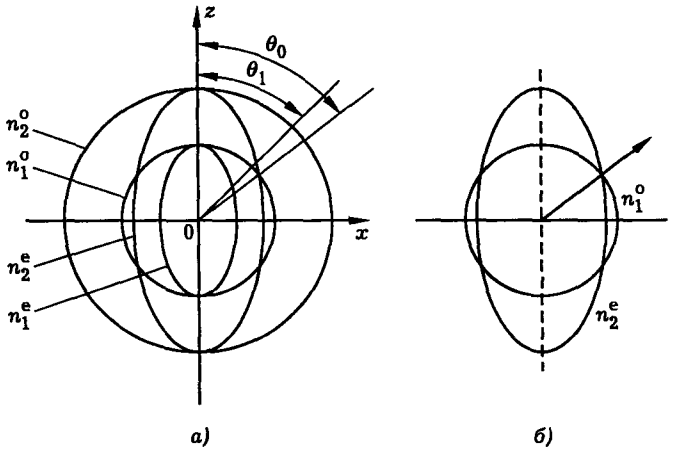



Рис. 23.1. Волновой синхронизм в кристалле KDP. Слева изображены сечения поверхностей показателей преломления: сферы для обыкновенной волны ($n^o$) и эллипсоида для необыкновенной волны ($n^e$) в кристалле KDP для частоты рубинового лазера (индекс "1") и его второй гармоники (индекс "2"). Под углом $\theta_0$ к оптической оси кристалла окружность $n_1^o$ пересекается с эллипсом $n_2^e$. Это направление является направлением синхронизма. Для сравнения показано направление, определяемое углом $\theta_1$, которое не является направлением синхронизма (*а*). Справа показано направление волнового синхронизма для процесса генерации второй оптической гармоники в отрицательном одноосном анизотропном кристалле ($n_1^o = n_2^e$) (*б*)

$$P_i(t) = \int\limits_0^\infty \varkappa_{ij}(\tau)E_j(t-\tau)\,d\tau + \\ + \iint\limits_0^\infty \chi_{ijk}(\tau_1,\tau_2)E_j(t-\tau_1)E_k(t-\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2. \qquad (23.6)$$

Здесь индексы $i, j, k$ пробегают значения $x, y, z$, обозначающие главные оси кристалла. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Кристалл KDP. Кристалл калий-дигидрофосфат ($KH_2PO_4$, сокращенно KDP) — отрицательный одноосный анизотропный кристалл. Обозначим оптическую ось кристалла буквой $z$. Кристалл KDP имеет шесть отличных от нуля компонент тензора квадратичной нелинейной восприимчивости [2]:

$$\chi_{xyz} = \chi_{xzy} = \chi_{yzx} = \chi_{yxz} \neq 0, \qquad \chi_{zxy} = \chi_{zyx} \neq 0. \qquad (23.7)$$

Представление поля. Обозначения. Представим световое поле в кристалле в виде двух плоских монохроматических волн: волны основной частоты ("накачки") и второй гармоники. Отмечая величины, относящиеся к этим волнам, соответственно индексами "1" и "2", напишем:

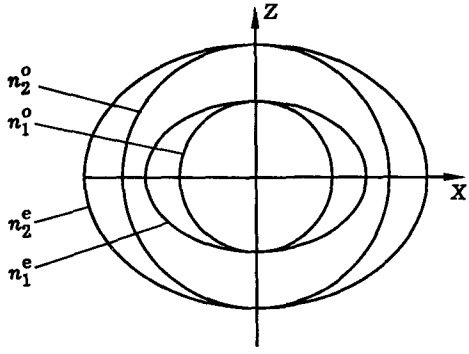



Рис. 23.2. Сечения поверхностей показателей преломления для кристалла кварца. Здесь двулучепреломление недостаточно для существования синхронизма

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 A_1(\vec{r}) \exp\left[i(\omega_1 t - \vec{k}_1\vec{r})\right] + \\ + \frac{1}{2}\vec{e}_2 A_2(\vec{r}) \exp\left[i(\omega_2 t - \vec{k}_2\vec{r})\right] + \text{к.с.} \qquad (23.8)$$

Здесь символы $\vec{e}$, $A$, $\omega$, $\vec{k}$ обозначают соответственно единичный вектор поляризации, комплексную амплитуду, частоту и волновой вектор соответствующей волны. Частоты волн связаны между собой соотношением

$$2\omega_1 = \omega_2. \qquad (23.9)$$

Условие синхронизма. Как отмечалось выше, для выполнения условия синхронизма в кристалле KDP волна накачки должна быть обыкновенной волной, а вторая гармоника — необыкновенной волной. Напомним, что обыкно-

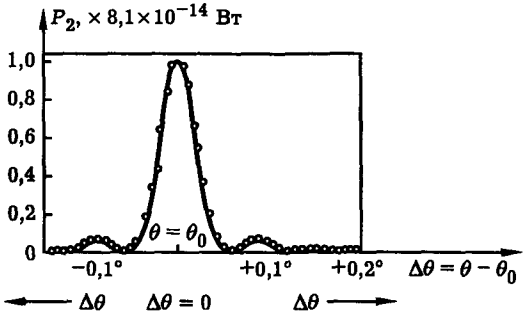



Рис. 23.3. Генерация второй гармоники излучения гелий-неонового лазера (длина волны 1,15 мкм) в кристалле KDP. Показана мощность гармоники $P_2$ как функция угла $\Delta\theta$ между лазерным пучком и направлением синхронизма. Длина кристалла $l = 1{,}23$ см

венная волна поляризована перпендикулярно оптической оси кристалла $z$ (см. лекцию 21), поэтому

$$E_{1z} = 0. \tag{23.10}$$

Согласно (23.6), (23.7), при этом остается отличной от нуля только одна декартова компонента нелинейной поляризации на частоте второй гармоники, а именно, компонента, параллельная оптической оси кристалла $z$ :

$$P_{\text{нл},z} = 2\iint\limits_0^\infty \chi_{zxy}(\tau_1,\tau_2)E_{1x}(t-\tau_1)E_{1y}(t-\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2. \tag{23.11}$$

Схема генерации второй гармоники в кристалле KDP. Подставляя (23.8) в (23.11), получим для нелинейной поляризации на частоте второй гармоники следующее выражение:

$$P_{\text{нл},z} = \frac{1}{2}\mathcal{P}_{\text{нл},z}\exp\left[i(2\omega_1 t - 2\vec{k}_1\vec{r})\right] + \text{к. с.}, \tag{23.12}$$

где

$$\mathcal{P}_{\text{нл},z} = e_{1x}e_{1y}\chi_{zxy}(\omega_1,\omega_1)A_1^2, \tag{23.13}$$

$\mathcal{P}_{\text{нл},z}$ — амплитуда нелинейной поляризации,

$$\chi_{zxy}(\omega_1,\omega_2) = \iint\limits_0^\infty \chi_{zxy}(\tau_1,\tau_2)\exp\left[-i(\omega_1\tau_1+\omega_2\tau_2)\right]d\tau_1\,\tau_2, \tag{23.14}$$

$\chi_{zxy}(\omega_1,\omega_2)$ — частотная нелинейная восприимчивость кристалла.

Так как волна накачки является обыкновенной волной, вектор поляризации этой волны $\vec{e}_1$ лежит в плоскости $xy$. Обозначим угол между осью $x$ и вектором $\vec{e}_1$ через $\varphi$. Тогда

$$e_{1x} = \cos\varphi, \qquad e_{1y} = \sin\varphi \tag{23.15}$$

и

$$\mathcal{P}_{\text{нл},z} = \frac{1}{2}\chi^{(2)}A_1^2\sin 2\varphi, \tag{23.16}$$

где для краткости обозначено

$$\chi^{(2)} = \chi_{zxy}(\omega_1,\omega_1). \tag{23.17}$$

Схема генерации второй гармоники в кристалле KDP показана на рис. 23.4.

Волновое уравнение. Выведем уравнение для амплитуды второй гармоники $A_2(\vec{r})$. Для этого используем волновое уравнение

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2\vec{P}_л}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2\vec{P}_{\text{нл}}}{\partial t^2}, \tag{23.18}$$

или

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{D}_л}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2\vec{P}_{\text{нл}}}{\partial t^2}, \tag{23.19}$$

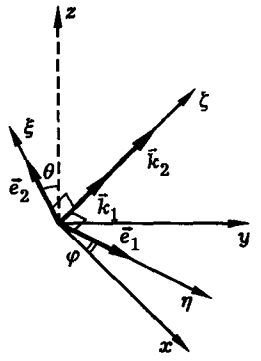



Рис. 23.4. Схема генерации второй оптической гармоники в кристалле KDP: $x, y, z$ — главные оси кристалла, $z$ — оптическая ось кристалла, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ — векторы поляризации накачки и второй гармоники, $\vec{k}_1, \vec{k}_2$ — волновые векторы накачки и второй гармоники, $\xi, \eta, \zeta$ — вспомогательная система координат. Ось $\zeta$ направлена вдоль светового пучка, ось $\xi$ лежит в плоскости $z\zeta$ (главная плоскость), ось $\eta$ лежит в плоскости $x, y$

где

$$\vec{D}_л = \vec{E} + 4\pi\vec{P}_л, \tag{23.20}$$

$\vec{D}_л$ — линейная компонента электрической индукции, $\vec{P}_л$ — линейная компонента поляризации среды.

Уравнение для амплитуды второй гармоники. Подставляя выражение (23.8) в (23.19) и используя известные формулы векторного анализа (см., например, [12])

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{\Phi} = \left[\vec{\nabla}, \vec{\Phi}\right], \\ \left[\vec{\nabla}, \Phi_1\vec{\Phi}_2\right] = \Phi_1\left[\vec{\nabla}, \vec{\Phi}_2\right] + \left[\vec{\nabla}\Phi_1, \vec{\Phi}_2\right], \\ \left[\vec{\nabla}, \vec{e}\Phi_1\Phi_2\right] = \Phi_1\left[\vec{\nabla}, \vec{e}\Phi_2\right] + \Phi_2\left[\vec{\nabla}, \vec{e}\Phi_1\right] \end{cases} \tag{23.21}$$

(эти формулы легко доказываются, исходя из определения оператора "набла": $\vec{\nabla} = \vec{x}_0\partial/\partial x + \vec{y}_0\partial/\partial y + \vec{z}_0\partial/\partial z$), получим для амплитуды волны второй гармоники $A_2$ уравнение

$$\frac{1}{2}\exp\left[i(\omega_2 t - \vec{k}_2\vec{r})\right]\left\{\left[-i\vec{k}_2, \left[-i\vec{k}_2, \vec{e}_2 A_2\right]\right] - \frac{\omega_2^2}{c^2}\vec{D}_{л2} + \right.$$
$$+ \left[\vec{\nabla}, \left[-i\vec{k}_2, \vec{e}_2\right] A_2\right] + \left[-i\vec{k}_2, \left[\vec{\nabla}, \vec{e}_2 A_2\right]\right] +$$
$$\left. + \left[\vec{\nabla}, \left[\vec{\nabla}, \vec{e}_2 A_2\right]\right]\right\} + \text{к. с.} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2\vec{P}_{нл}}{\partial t^2}, \tag{23.22}$$

где $\vec{\mathcal{D}}_{л2}$ — амплитуда линейной компоненты электрической индукции на частоте $\omega_2$, определяемая формулой

$$\vec{D}_{л2} = \frac{1}{2}\vec{\mathcal{D}}_{л2} \exp\left[i(\omega_2 t - \vec{k}_2\vec{r})\right] + \text{к. с.} \tag{23.23}$$

Положим

$$\left[-i\vec{k}_2, \left[-i\vec{k}_2, \vec{e}_2 A_2\right]\right] - \frac{\omega_2^2}{c^2}\vec{\mathcal{D}}_{л2} = 0 \tag{23.24}$$

и будем рассматривать (23.24) как уравнение, определяющее волновой вектор $\vec{k}_2$. Если обозначить $\vec{e}_2 A_2 = \vec{\mathcal{E}}_2$, то данное уравнение совпадает с уравнением, связывающим векторы $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{D}}$ световой волны в линейной анизотропной среде (см. (18.23)).

С учетом (23.24) уравнение (23.22) приобретает вид

$$\frac{1}{2}\exp\left[i(\omega_2 t - \vec{k}_2\vec{r})\right]\left\{\left[\vec{\nabla}, \left[-i\vec{k}_2, \vec{e}_2\right] A_2\right] + \left[-i\vec{k}_2, \left[\vec{\nabla}, \vec{e}_2 A_2\right]\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\vec{\nabla}, \left[\vec{\nabla}, \vec{e}_2 A_2\right]\right]\right\} + \text{к. с.} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{P}_{нл}}{\partial t^2}. \tag{23.25}$$

Перейдем к скалярному уравнению для $A_2$. Для этого спроектируем векторное уравнение (23.25) на ось $\xi$, показанную на рис. 23.5. Учитывая, что вектор $\vec{P}_{нл}$ направлен вдоль оси $z$ (оптической оси кристалла), а его величина определяется формулами (23.12), (23.16), получим:

$$\left\{\left[\vec{\nabla}, \left[-i\vec{k}_2, \vec{e}_2\right] A_2\right] + \left[-i\vec{k}_2, \left[\vec{\nabla}, \vec{e}_2 A_2\right]\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\vec{\nabla}, \left[\vec{\nabla}, \vec{e}_2 A_2\right]\right]\right\}_\xi = \frac{4\pi\omega_2^2}{c^2}\mathcal{P}_{нл,\xi} e^{i\Delta\vec{k}\vec{r}}, \tag{23.26}$$

где

$$\mathcal{P}_{нл,\xi} = \mathcal{P}_{нл,z}\sin\theta, \tag{23.27}$$

$\theta$ — угол между направлением распространения световых волн и оптической осью кристалла $z$ (см. рис. 23.5),

$$\Delta\vec{k} = \vec{k}_2 - 2\vec{k}_1; \tag{23.28}$$

здесь $\Delta\vec{k}$ — разность волновых векторов волны нелинейной поляризации на частоте второй гармоники и световой волны на той же частоте ("волновая расстройка").

Предположим, что волна накачки и вторая гармоника распространяются в кристалле в одном и том же направлении $\zeta$, показанном на рис. 23.4. Тогда можно написать

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \dfrac{1}{2}\vec{e}_1 A_1(\zeta)\exp\left[i(\omega_1 t - k_1\zeta)\right] + \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{2}\vec{e}_2 A_2(\zeta)\exp\left[i(\omega_2 t - k_2\zeta)\right] + \text{к. с.}, \\ \vec{k}_1 = \vec{\zeta}_0 k_1, \qquad \vec{k}_2 = \vec{\zeta}_0 k_2, \qquad k_1 = \dfrac{\omega_1}{c}n_1, \qquad k_2 = \dfrac{\omega_2}{c}n_2, \\ \Delta\vec{k}\vec{r} = \Delta k\zeta, \quad \Delta k = k_2 - 2k_1 = \dfrac{2\omega_1}{c}(n_2 - n_1), \quad \vec{\nabla} = \vec{\zeta}_0\dfrac{\partial}{\partial\zeta}, \end{cases} \tag{23.29}$$

где $\vec{\zeta}_0$ — единичный вектор, направленный вдоль оси $\zeta$, $n_1$ и $n_2$ — показатели преломления кристалла для волны накачки и второй гармоники. С учетом (23.29) уравнение (23.26) приобретает вид

$$\left[\vec{\zeta}_0, \left[\vec{\zeta}_0, \vec{e}_2\right]\right]_\xi \times \left(-2ik_2\frac{\partial A_2}{\partial\zeta} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial\zeta^2}\right) = \frac{4\pi\omega_2^2}{c^2}\mathcal{P}_{\text{нл},\xi}\exp\left(i\Delta k\zeta\right). \tag{23.30}$$

В экспериментах по генерации второй гармоники обычно хорошо выполняется условие

$$\left|-2ik_2\frac{\partial A_2}{\partial\zeta}\right| \gg \left|\frac{\partial^2 A_2}{\partial\zeta^2}\right|, \tag{23.31}$$

означающее, что на участке кристалла длиной порядка длины световой волны усиление второй гармоники незначительно. Поэтому, пренебрегая слагаемым $\partial^2 A_2/\partial\zeta^2$, перепишем (23.30) в виде

$$\left[\vec{\zeta}_0, \left[\vec{\zeta}_0, \vec{e}_2\right]\right]_\xi \frac{\partial A_2}{\partial\zeta} = i\frac{2\pi\omega_2}{cn_2}\mathcal{P}_{\text{нл},\xi}\exp\left(i\Delta k\zeta\right). \tag{23.32}$$

На рис. 23.5 показана плоскость главного сечения кристалла. Как видно из этого рисунка,

$$\left[\vec{\zeta}_0, \left[\vec{\zeta}_0, \vec{e}_2\right]\right]_\xi = -\cos\beta, \tag{23.33}$$

где $\beta$ — угол между векторами $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{D}}$ волны второй гармоники ("угол анизотропии"). В данном случае $\beta \ll 1$, поэтому положим

$$\cos\beta = 1 \tag{23.34}$$

и перепишем уравнение (23.32) в виде

$$\frac{\partial A_2}{\partial\zeta} = -i\frac{2\pi\omega_2}{cn_2}\mathcal{P}_{\text{нл},\xi}\exp\left(i\Delta k\zeta\right). \tag{23.35}$$

Это и есть искомое уравнение для амплитуды второй гармоники. С учетом формул (23.27), (23.16) оно может быть представлено в виде

$$\frac{\partial A_2}{\partial\zeta} = -i\frac{2\pi\omega_2}{cn_2}\chi^{(2)}_{\text{эфф}}A_1^2\exp\left(i\Delta k\zeta\right), \tag{23.36}$$

где

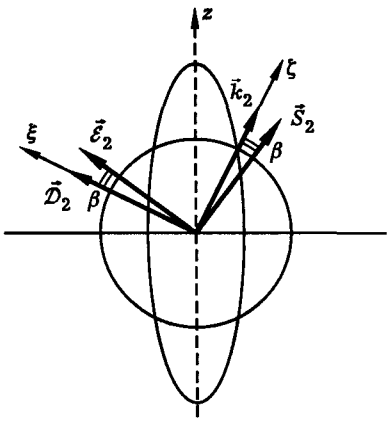



Рис. 23.5. Генерация второй гармоники в кристалле KDP. Показана плоскость главного сечения; $\beta$ — угол анизотропии (для рассматриваемого случая $\beta \ll 1$)

$$\chi^{(2)}_{\text{эфф}} = \left(\frac{1}{2}\sin 2\varphi \sin\theta\right)\chi^{(2)}, \tag{23.37}$$

углы $\theta$, $\varphi$ показаны на рис. 23.4, величина $\chi^{(2)}$ определяется формулой (23.17), величина $\Delta k$ определяется формулой (23.29).

Эффективность генерации второй гармоники. Выполняя интегрирование уравнения (23.36) с учетом граничного условия

$$A_2(\zeta = 0) = 0, \tag{23.38}$$

получим

$$A_2(\zeta) = -iKA_1^2\zeta \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta k\zeta}{2}\right)\exp\left(i\frac{\Delta k\zeta}{2}\right), \tag{23.39}$$

где

$$K = \frac{2\pi\omega_2}{cn_2}\chi^{(2)}_{\text{эфф}}, \qquad \operatorname{sinc} x \equiv \frac{\sin x}{x}. \tag{23.40}$$

Далее нетрудно найти интенсивность второй гармоники:

$$I_2 = \frac{cn_2}{8\pi}|A_2|^2 = \frac{8\pi n_2}{cn_1^2}|K|^2 I_1^2\zeta^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\Delta k\zeta}{2}\right), \tag{23.41}$$

где

$$I_1 = \frac{cn_1}{8\pi}|A_1|^2, \tag{23.42}$$

$I_1$ — интенсивность накачки. Определим эффективность генерации второй гармоники как отношение интенсивности гармоники к интенсивности накачки:

$$\eta = I_2/I_1. \tag{23.43}$$

Из (23.41), (23.43) находим

$$\eta = \frac{8\pi n_2}{cn_1^2}|K|^2 I_1 \zeta^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\Delta k \zeta}{2}\right) \tag{23.44}$$

или, с учетом (23.40),

$$\eta = \varkappa I_1 \zeta^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\Delta k \zeta}{2}\right), \tag{23.45}$$

где

$$\varkappa = \frac{32\pi^3\omega_2^2}{c^3 n_1^2 n_2}\left|\chi^{(2)}_{\text{эфф}}\right|^2. \tag{23.46}$$

Поскольку при вычислении эффективности генерации второй гармоники мы пренебрегаем истощением накачки, формула (23.45) справедлива при

$$\eta \ll 1. \tag{23.47}$$

Для оценок при $\eta \approx 1$ необходимо вывести уравнение для амплитуды накачки и решать систему связанных уравнений для амплитуд накачки и второй гармоники.

Численная оценка. В соответствии с условиями экспериментов по генерации второй гармоники в кристалле KDP (см., например, [1]), положим

$$\lambda_1 = 1{,}06\,\text{мкм}, \qquad \theta = 40{,}5^\circ \text{ (угол синхронизма)}. \tag{23.48}$$

При этом $\Delta k = 0$,

$$\begin{gathered} \omega_2 = 3{,}56 \times 10^{15}\ \text{с}^{-1}, \\ \left|\chi^{(2)} \sin\theta\right| = 1{,}5 \times 10^{-9}\ \text{эрг}^{-1/2} \cdot \text{см}^{3/2}, \\ \eta = \varkappa I_1 \zeta^2. \end{gathered} \tag{23.49}$$

Положим далее

$$\varphi = 45^\circ, \qquad n_1 = n_2 = 1{,}5. \tag{23.50}$$

Тогда, с учетом (23.37), (23.49), (23.46) получим

$$\begin{gathered} \left|\chi^{(2)}_{\text{эфф}}\right| = 0{,}75 \times 10^{-9}\ \text{эрг}^{-1/2} \cdot \text{см}^{3/2}, \\ \varkappa = 0{,}77 \times 10^{-16}\ \text{с} \cdot \text{эрг}^{-1} = 0{,}77 \times 10^{-9}\ \text{Вт}^{-1}. \end{gathered} \tag{23.51}$$

Наконец, положим

$$\zeta = 1\ \text{см}, \qquad I_1 = 10^8\ \text{Вт/см}^2. \tag{23.52}$$

Получим

$$\eta = 0{,}077. \tag{23.53}$$

Условие (23.47) выполняется. Таким образом, наша оценка показывает, что для достижения эффективности генерации второй гармоники порядка 10% в кристалле KDP необходима интенсивность накачки порядка $10^8$ Вт/см$^2$. Такая

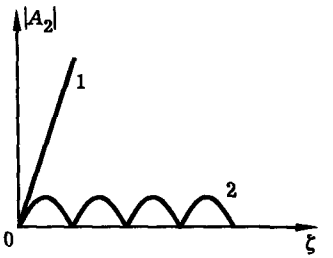



Рис. 23.6. Изменение амплитуды волны второй гармоники вдоль кристалла: 1 — условие синхронизма выполняется, 2 — условие синхронизма не выполняется

интенсивность может быть получена при фокусировке лазерного импульса в кристалл.

Данная оценка получена в предположении, что выполнено условие волнового синхронизма, т. е. волновая расстройка $\Delta k = 0$. Как видно из (23.39), в этом случае амплитуда гармоники линейно нарастает вдоль длины кристалла $\zeta$ (см. рис. 23.6). Если же $\Delta k \neq 0$, то амплитуда гармоники осциллирует вдоль координаты $\zeta$, а эффективность генерации резко уменьшается (см. формулу (23.39) и кривую 2 на рис. 23.6).

**Вынужденное комбинационное рассеяние света.** Обычно вынужденное комбинационное рассеяние (ВКР) света наблюдают в изотропной среде — газе или жидкости. В этом случае процесс описывает волновым уравнением

$$\Delta E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 D_л}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 P_{нл}}{\partial t^2}, \tag{23.54}$$

где $D_л = E + 4\pi P_л$ — линейная компонента электрической индукции, $P_л$ — линейная компонента поляризации среды. Вычислим нелинейную поляризацию комбинационно-активной среды $P_{нл}$.

Классическая модель. Поскольку при ВКР частота возбуждающего излучения ("накачки") $\omega_н$ и частота рассеянного излучения ("стоксовой компоненты") $\omega_с$ связаны между собой соотношением

$$\omega_с = \omega_н - \omega_0, \tag{23.55}$$

где $\omega_0$ — частота молекулярных колебаний среды, механизм процесса можно интерпретировать как *модуляцию* падающего света молекулярными колебаниями среды. Данный механизм можно описать математически, если ввести представление об электронной поляризуемости молекулы $\alpha$, зависящей от ядерной координаты $q$:

$$\alpha = \alpha(q) = \alpha_0 + \alpha' q. \tag{23.56}$$

Здесь $\alpha_0$ — электронная поляризуемость молекулы в положении равновесия ядер (т. е. при $q = 0$), $\alpha' = (\partial\alpha/\partial q)_0$ — производная электронной поляризуемости молекулы по ядерной координате, взятая в положении равновесия ядер.

Записав поляризацию среды в виде

$$P = Np, \qquad p = \alpha E, \tag{23.57}$$

где $N$ — число молекул в единице объема, $p$ — дипольный момент молекулы, $E$ — напряженность электрического поля световой волны, получим

$$P = P_{\text{л}} + P_{\text{нл}}, \tag{23.58}$$

где

$$P_{\text{л}} = N\alpha_0 E, \qquad P_{\text{нл}} = N\alpha' q E. \tag{23.59}$$

Итак, поляризация среды вычислена.

Сдвиг частоты света при комбинационном рассеянии. Формулы (23.54), (23.59) объясняют сдвиг частоты света при комбинационном рассеянии. В самом деле, если поле $E = E_{\text{н}}$ колеблется на частоте $\omega_{\text{н}}$, т. е.

$$E = A_{\text{н}} \cos \omega_{\text{н}} t,$$

а молекулярная колебательная координата $q$ совершает колебания на частоте $\omega_0$, т. е.

$$q = Q \cos \omega_0 t,$$

то произведение

$$qE = \frac{1}{2} A_{\text{н}} Q \left[\cos(\omega_{\text{н}} - \omega_0)t + \cos(\omega_{\text{н}} + \omega_0)t\right]$$

будет совершать колебания на *комбинационных частотах* $\omega_{\text{н}} - \omega_0$ и $\omega_{\text{н}} + \omega_0$. При этом в силу (23.54), (23.59) те же самые частоты будут иметь нелинейная поляризация $P_{\text{нл}}$ и генерируемое световое поле (отсюда термин "комбинационное рассеяние света").

Раскачка и фазировка молекулярных колебаний световыми волнами. Высокая интенсивность и направленность вынужденного рассеяния объясняются тем, что рассеяние света происходит не на тепловых колебаниях, как при спонтанном рассеянии, а на колебаниях молекул, возбужденных и сфазированных световыми волнами в большом объеме среды. Это обратное воздействие света на молекулярные колебания, чрезвычайно существенное для процесса вынужденного рассеяния, также описывается моделью (23.56), (23.57).

Сила, действующая со стороны световых волн на молекулу и вызывающая раскачку молекулярных колебаний, описывается формулой

$$F = -\partial W/\partial q, \tag{23.60}$$

где $W$ — энергия молекулы (диполя) в световом поле, $q$ — молекулярная колебательная координата (например, расстояние между ядрами в молекуле водорода или азота). Энергия $W$ связана с дипольным моментом молекулы $p$ соотношением

$$p = -\partial W/\partial E. \tag{23.61}$$

Подставив в эту формулу $p = \alpha E$, найдем

$$W = -\frac{1}{2}\alpha E^2. \tag{23.62}$$

Если подставить теперь (23.62) в (23.60) и учесть (23.56), то получим формулу

$$F = \frac{1}{2}\alpha' E^2. \tag{23.63}$$

Последняя формула показывает, что пара световых волн частотами $\omega_н$ и $\omega_с = \omega_н - \omega_0$, т. е. световое поле вида

$$E = E_н + E_с = \frac{1}{2}A_н \exp\left[i(\omega_н t - k_н z)\right] + \frac{1}{2}A_с \exp\left[i(\omega_с t - k_с z)\right] + \text{к. с.} \tag{23.64}$$

способно вызвать резонансную раскачку молекулярных колебаний, поскольку величина $E^2$ содержит компоненту, осциллирующую на частоте $\omega_0$:

$$E^2 = \frac{1}{2}A_н A_с^* \exp\left[i(\omega_0 t - k_0 z)\right] + \text{к. с.} + \ldots, \tag{23.65}$$

где $\omega_0 = \omega_н - \omega_с$, $k_0 = k_н - k_с$.

Уравнение молекулярных колебаний. Уравнение вынужденных колебаний молекулы в световом поле имеет вид

$$\ddot{q} + \Gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = F/M, \tag{23.66}$$

где $q$ — координата, $F$ — сила, $M$ — приведенная масса осциллятора, $\omega_0$ — частота собственных колебаний молекулы, $\Gamma$ — коэффициент затухания колебаний; точка над буквой обозначает дифференцирование по времени. Подставив (23.63) в (23.66), получим уравнение

$$\ddot{q} + \Gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\alpha'}{2M}E^2. \tag{23.67}$$

Итак, в классической модели процесс вынужденного комбинационного рассеяния света описывается уравнениями:

$$\Delta E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 D_л}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 P_{нл}}{\partial t^2}, \qquad D_л = E + 4\pi P_л, \tag{23.68}$$

$$P_{нл} = N\alpha' q E, \tag{23.69}$$

$$\ddot{q} + \Gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\alpha'}{2M}E^2. \tag{23.70}$$

Здесь $E$ — напряженность электрического поля световой волны, $P_л$ — линейная поляризация среды, $P_{нл}$ — нелинейная поляризация среды, $D_л$ — линейная компонента электрической индукции, $q$ — молекулярная колебательная координата, $\omega_0$ — собственная частота колебаний молекулы, $\Gamma$ — коэффициент затухания колебаний, $M$ — приведенная масса молекулярного осциллятора, $\alpha'$ — производная электронной поляризуемости молекулы по координате $q$, взятая в положении равновесия ($q = 0$), $N$ — число молекул в единице объема среды, $t$ — время, $\Delta$ — оператора Лапласа, $c$ — скорость света; точка над буквой обозначает дифференцирование по времени.

Квантовая модель. Пользуясь уравнениями (Д10.53), (Д10.54), описывающими динамику квантовой системы во внешнем поле (см. ч. II, дополнение 10), уравнения ВКР можно представить в виде

$$\Delta E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 D_{\text{л}}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 P_{\text{нл}}}{\partial t^2}, \tag{23.71}$$

$$P_{\text{нл}} = N\alpha'\langle q\rangle E, \tag{23.72}$$

$$\langle q\rangle = \mathrm{Tr}(\rho q) = \sum_m \sum_n \rho_{mn} q_{nm}, \tag{23.73}$$

$$\frac{d\rho}{dt} \equiv \dot{\rho} = \frac{i}{\hbar}[\rho, H] + R. \tag{23.74}$$

Здесь $\rho$ — матрица плотности, $H$ — гамильтониан, $R$ — релаксационная матрица, $\hbar$ — постоянная Планка. Остальные обозначения те же, что в (23.68)–(23.70).

Двухуровневое приближение. Моделируя ядерную колебательную подсистему молекулы двухуровневой квантовой системой (см. рис. Д10.1) и пренебрегая пока релаксационными процессами, получим из (23.74) следующие уравнения для элементов матрицы плотности:

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{11} &= \frac{i}{\hbar}(\rho_{12}H_{21} - H_{12}\rho_{21}),\\
\dot{\rho}_{22} &= \frac{i}{\hbar}(\rho_{21}H_{12} - H_{21}\rho_{12}),\\
\dot{\rho}_{12} &= \frac{i}{\hbar}(H_{22} - H_{11})\rho_{12} + \frac{i}{\hbar}H_{12}n,\\
\dot{\rho}_{21} &= -\frac{i}{\hbar}(H_{22} - H_{11})\rho_{21} - \frac{i}{\hbar}H_{21}n,
\end{aligned} \tag{23.75}$$

где

$$n = \rho_{11} - \rho_{22}. \tag{23.76}$$

Гамильтониан молекулы в световом поле представим в виде

$$H = H^{(0)} + V, \tag{23.77}$$

где $H^{(0)}$ — гамильтониан свободной молекулы,

$$V = -\frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha' q)E^2, \tag{23.78}$$

$V$ — энергия взаимодействия молекулы со световым полем. Формула (23.78) вытекает из (23.56), (23.62). Матричные элементы гамильтониана

$$H_{mn} = H^{(0)}_{mn} + V_{mn} \tag{23.79}$$

вычисляем по системе собственных функций оператора $H^{(0)}$. В этом случае

$$H^{(0)}_{11} = E_1, \quad H^{(0)}_{22} = E_2, \quad H^{(0)}_{12} = H^{(0)}_{21} = 0, \tag{23.80}$$

где $E_1$ и $E_2$ — энергии стационарных состояний молекулы, связанные с частотой $\omega_0$ колебательного перехода соотношением

$$\hbar\omega_0 = E_2 - E_1. \tag{23.81}$$

Матричные элементы оператора возмущения (23.78) есть

$$V_{mn} = -\frac{1}{2}\alpha_0 E^2 \delta_{mn} - \frac{1}{2}\alpha' E^2 q_{mn}, \tag{23.82}$$

где $\delta_{mn}$ — символ Кронекера,

$$q_{mn} = \int \varphi_m^* q \varphi_n dq, \tag{23.83}$$

$q_{mn}$ — матричные элементы колебательной координаты.

Предположим, что волновые функции стационарных состояний молекулы $\varphi_n$ удовлетворяют условиям

$$\varphi_n = \varphi_n^*, \tag{23.84}$$

$$\varphi_n(q) = \pm\varphi_n(-q) \tag{23.85}$$

(эти условия выполняются, в частности, для волновых функций гармонического осциллятора — см. дополнение 10). Тогда

$$q_{11} = q_{22} = 0, \qquad q_{12} = q_{21}. \tag{23.86}$$

Таким образом,

$$V_{11} = V_{22} = -\frac{1}{2}\alpha_0 E^2, \qquad V_{12} = V_{21} = -\frac{1}{2}\alpha' E^2 q_{12}. \tag{23.87}$$

Пренебрегая энергией $-(1/2)\alpha_0 E^2$ по сравнению с $E_1$ и $E_2$, получим

$$H_{11} = E_1, \quad H_{22} = E_2, \quad H_{12} = H_{21} = -\frac{1}{2}\alpha' E^2 q_{12}. \tag{23.88}$$

Из (23.73) и (23.86) следует, что

$$\langle q \rangle = (\rho_{12} + \rho_{21}) q_{12}. \tag{23.89}$$

Подставив (23.88) в (23.75) и принимая во внимание (23.81), (23.76), получим уравнения

$$\dot{n} = \frac{2i}{\hbar}(\rho_{12} - \rho_{21}) H_{12}, \tag{23.90}$$

$$\dot{\rho}_{12} = i\omega_0 \rho_{12} + \frac{i}{\hbar} H_{12} n, \tag{23.91}$$

$$\dot{\rho}_{21} = -i\omega_0 \rho_{21} - \frac{i}{\hbar} H_{12} n. \tag{23.92}$$

Сложим уравнения (23.91) и (23.92), а затем вычтем (23.92) из (23.91). Получим уравнения

$$(\dot{\rho}_{12} + \dot{\rho}_{21}) = i\omega_0(\rho_{12} - \rho_{21}), \tag{23.93}$$

$$(\dot{\rho}_{12} - \dot{\rho}_{21}) = i\omega_0(\rho_{12} + \rho_{21}) + \frac{2i}{\hbar}H_{12}n. \tag{23.94}$$

Из (23.93), (23.94) следует, что

$$(\ddot{\rho}_{12} + \ddot{\rho}_{21}) + \omega_0^2(\rho_{12} + \rho_{21}) = -\frac{2\omega_0}{\hbar}H_{12}n. \tag{23.95}$$

Из (23.90) и (23.93) получаем уравнение

$$\dot{n} = \frac{2}{\hbar\omega_0}(\dot{\rho}_{12} + \dot{\rho}_{21})H_{12}. \tag{23.96}$$

Принимая во внимание (23.89), перепишем (23.95), (23.96) в виде

$$\langle\ddot{q}\rangle + \omega_0^2\langle q\rangle = -\frac{2\omega_0}{\hbar}H_{12}q_{12}n, \tag{23.97}$$

$$\dot{n} = \frac{2}{\hbar\omega_0}\frac{H_{12}}{q_{12}}\langle\dot{q}\rangle. \tag{23.98}$$

Подставив (23.88) в (23.97), (23.98), получим уравнения

$$\langle\ddot{q}\rangle + \omega_0^2\langle q\rangle = \frac{\omega_0\alpha'}{\hbar}q_{12}^2E^2n, \tag{23.99}$$

$$\dot{n} = -\frac{\alpha'}{\hbar\omega_0}E^2\langle\dot{q}\rangle. \tag{23.100}$$

Будем считать состояния "1" и "2" ядерной колебательной подсистемы свободной молекулы основным и первым возбужденным состояниями гармонического осциллятора. Тогда для матричного элемента колебательной координаты $q_{12}$ можно воспользоваться формулой (Д10.26). Согласно этой формуле

$$q_{12}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_0}, \tag{23.101}$$

где $m$ — масса осциллятора, $\omega_0$ — собственная частота колебаний, $\hbar$ — постоянная Планка. Подставив (23.101) в (23.99), получим

$$\langle\ddot{q}\rangle + \omega_0^2\langle q\rangle = \frac{\alpha'}{2m}E^2n. \tag{23.102}$$

Наконец, добавляя в (23.100), (23.102) слагаемые, описывающие релаксацию, получим уравнения

$$\langle\ddot{q}\rangle + \frac{2}{T_2}\langle\dot{q}\rangle + \omega_0^2\langle q\rangle = \frac{\alpha'}{2m}E^2n, \tag{23.103}$$

$$\dot{n} + \frac{n - n_0}{T_1} = -\frac{\alpha'}{\hbar\omega_0}E^2\langle\dot{q}\rangle. \tag{23.104}$$

Здесь $n_0$ — равновесная разность населенностей в отсутствие поля, $T_1$ — время релаксации населенностей колебательных энергетических уровней молекулы,

$T_2$ — время релаксации поляризации (время дефазировки молекулярных колебаний). Полная система уравнений, описывающая взаимодействие света с комбинационно-активной средой, имеет вид

$$\begin{gathered}\Delta E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 D_{\text{л}}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 P_{\text{нл}}}{\partial t^2},\\ P_{\text{нл}} = N\alpha'\langle q\rangle E,\\ \langle\ddot{q}\rangle + \frac{2}{T_2}\langle\dot{q}\rangle + \omega_0^2\langle q\rangle = \frac{\alpha'}{2m}E^2 n,\\ \dot{n} + \frac{n-n_0}{T_1} = -\frac{\alpha'}{\hbar\omega_0}E^2\langle\dot{q}\rangle.\end{gathered} \tag{23.105}$$

Здесь $n$ — разность населенностей на комбинационно-активном переходе (колебательный переход молекулы), $n_0$ — равновесное значение $n$, $T_1$ — время релаксации населенностей колебательных уровней, $T_2$ — время дефазировки молекулярных колебаний, $\hbar$ — постоянная Планка, остальные обозначения те же, что в (23.68)–(23.70).

Заметим, что при

$$n = n_0 = \text{const} \tag{23.106}$$

система (23.105) переходит в уравнения классической модели (23.68)–(23.70). Условие (23.106) означает, что населенности квантовых уровней вещества (в данном случае колебательных уровней энергии молекулы) мало меняются под действием светового поля. Последнее имеет место для не слишком сильных световых полей.

Укороченные уравнения ВКР. Обычно при ВКР основную роль играют две световые волны: накачка и стоксова компонента. В приближении плоских волн световое поле представим в виде

$$E = \frac{1}{2}A_{\text{н}}\exp\left[i(\omega_{\text{н}}t - k_{\text{н}}z)\right] + \frac{1}{2}A_{\text{с}}\exp\left[i(\omega_{\text{с}}t - k_{\text{с}}z)\right] + \text{к. с.}, \tag{23.107}$$

где

$$\omega_{\text{с}} = \omega_{\text{н}} - \omega_0. \tag{23.108}$$

Под воздействием светового поля в среде возникает волна когерентных молекулярных колебаний

$$\langle q\rangle = \frac{1}{2}Q\exp\left[i(\omega_0 t - k_0 z)\right] + \text{к. с.}, \tag{23.109}$$

где

$$k_0 = k_{\text{н}} - k_{\text{с}}. \tag{23.110}$$

Подставив (23.107)–(23.110) в (23.105), в приближении медленно меняющихся амплитуд $A_{\text{н}}$, $A_{\text{с}}$, $Q$ получим уравнения

$$\begin{gathered}\frac{\partial A_{\text{н}}}{\partial z}+\frac{1}{v_{\text{н}}}\frac{\partial A_{\text{н}}}{\partial t}=\gamma_{\text{н}}A_{\text{с}}Q,\\ \frac{\partial A_{\text{с}}}{\partial z}+\frac{1}{v_{\text{с}}}\frac{\partial A_{\text{с}}}{\partial t}=\gamma_{\text{с}}A_{\text{н}}Q^*,\\ \frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{Q}{T_2}=\gamma_q An,\quad A=A_{\text{н}}A_{\text{с}}^*,\\ \frac{\partial n}{\partial t}+\frac{n-n_0}{T_1}=\gamma_n(AQ^*-A^*Q),\end{gathered}\tag{23.111}$$

где $v_{\text{н}}$ и $v_{\text{с}}$ — скорости волн накачки и стоксовой компоненты. Постоянные коэффициенты в (23.111) определяются формулами

$$\begin{gathered}\gamma_{\text{н}}=\frac{\pi N\alpha'\omega_{\text{н}}}{in_{\text{н}}c},\qquad \gamma_{\text{с}}=\frac{\pi N\alpha'\omega_{\text{с}}}{in_{\text{с}}c},\\ \gamma_q=\frac{\alpha'}{4iM\omega_0},\qquad \gamma_n=\frac{i\alpha'}{4\hbar},\end{gathered}\tag{23.112}$$

где $n_{\text{н}}$ и $n_{\text{с}}$ — показатели преломления комбинационно-активной среды на частотах $\omega_{\text{н}}$ и $\omega_{\text{с}}$.

Удельный коэффициент усиления ВКР. Найти общее решение уравнений (23.111) не представляется возможным. Можно, однако, существенно упростить эту систему, сделав предположения, которые часто оправдываются в эксперименте. В приближении стационарного взаимодействия, заданного поля накачки и отсутствия движения населенностей система (23.111) сводится к одному уравнению

$$\frac{\partial A_{\text{с}}}{\partial z}=\frac{1}{2}gI_{\text{н}}A_{\text{с}},\tag{23.113}$$

где $I_{\text{н}}$ — интенсивность волны накачки,

$$g=\frac{4\pi^2N(\alpha')^2T_2\omega_{\text{с}}}{M\omega_0c^2n_{\text{н}}n_{\text{с}}},\tag{23.114}$$

$g$ — удельный коэффициент усиления ВКР, имеющий размерность см/Вт. Из (23.113) следует, что интенсивность стоксовой волны нарастает вдоль комбинационно-активной среды по экспоненциальному закону

$$I_{\text{с}}=I_{\text{с}0}\exp(gI_{\text{н}}z).\tag{23.115}$$

Формулу (23.115) можно использовать для экспериментального измерения параметра $g$. Для большинства комбинационно-активных сред (сжатый водород, жидкий азот и др.) величина $g$ лежит в диапазоне $10^{-9}$–$10^{-8}$ см/Вт.

**Самофокусировка света.** Как отмечалось выше (см. лекцию 22), в кубично-нелинейной среде возникает добавка к показателю преломления, пропорциональная интенсивности света. В теории самофокусировки принято записывать показатель преломления нелинейной среды в виде

$$n=n_0+n_2|A|^2,\tag{23.116}$$

где $A$ — амплитуда световой волны.

Так как показатель преломления определяет скорость света в среде, формулу (23.116) можно интерпретировать как зависимость скорости света от его интенсивности. В зависимости от знака $n_2$, в нелинейной среде происходит ускорение или замедление мощной световой волны, что может влиять на эффективность волновых взаимодействий. Особый интерес эффекты, связанные с нелинейной добавкой к показателю преломления, приобретают для ограниченных световых пучков. Здесь возникает новый физический эффект, который можно назвать *нелинейной рефракцией* световых лучей. Действительно, в поле ограниченного светового пучка первоначально однородная среда в силу (23.116) становится оптически неоднородной; показатель преломления среды определяется распределением интенсивности распространяющейся волны. Характер нелинейной рефракции определяется знаком $n_2$. В среде с $n_2 > 0$ (такой знак реализуется обычно при высокочастотном эффекте Керра, электрострикции в поле интенсивной световой волны, а иногда и за счет нагрева среды в световом поле) области максимальной интенсивности света оказываются оптически более плотными. В этом случае нелинейная рефракция должна приводить, очевидно, к концентрации энергии — периферийные лучи отклоняются в область, где поле максимально. Этот эффект получил название *самофокусировки* светового пучка. Важным обстоятельством, выделяющим эффект самофокусировки среди других нелинейно-оптических процессов, является его "лавинный" характер. Действительно, даже слабое увеличение интенсивности в некотором участке светового пучка в среде с $n_2 > 0$ приводит к концентрации лучей в этой области, а следовательно, и к дополнительному возрастанию интенсивности; последнее усиливает эффект нелинейной рефракции и т. д.

Рассмотрим самофокусировку гауссова светового пучка. Сначала, пренебрегая дифракцией, запишем поле волны в виде

$$E = \frac{1}{2}Ae^{i(\omega t - kz)} + \text{к. с.}, \tag{23.117}$$

где

$$A = A_0 \exp(-r^2/2\rho_0^2), \tag{23.118}$$

$r$ — расстояние данной точки поперечного сечения от оси пучка, $\rho_0$ — радиус пучка. Волновое число представим в виде

$$k = \omega n/c, \tag{23.119}$$

где показатель преломления $n$ определяется формулой (23.116).

Используя формулы (23.116)–(23.119) и полагая $r \ll \rho_0$ и $n_2|A_0|^2 \ll n_0$, нетрудно получить формулу

$$kz = k_0 z - k_0 r^2/2R_{\text{нл}}, \tag{23.120}$$

где $k_0 = \omega n_0/c$, $k_2 = \omega n_2/c$,

$$R_{\text{нл}} = \frac{k_0\rho_0^2}{2k_2|A_0|^2 z}, \tag{23.121}$$

$R_{\text{нл}}$ — радиус кривизны волнового фронта, обусловленной нелинейной рефракцией. Знак "минус" в формуле (23.120) показывает, что при $n_2 > 0$ нелинейность среды приводит к фокусировке (сходимости) пучка (рис. 23.7).

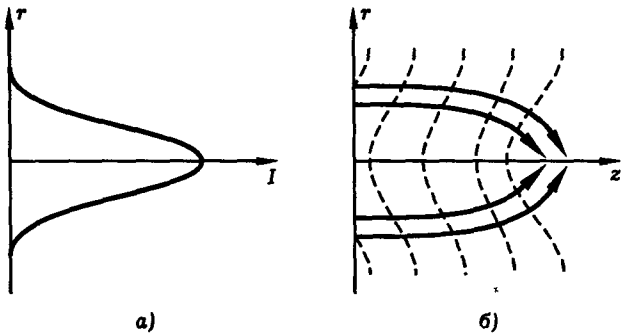



Рис. 23.7. Самофокусировка света. Профиль интенсивности гауссова светового пучка (*а*), искривление волнового фронта гауссова пучка (штриховые кривые) за счет нелинейности среды при $n_2 > 0$ (*б*)

Учтем теперь дифракционную расходимость пучка. В ближней дифракционной зоне, где $z \ll z_д$, кривизна волнового фронта гауссова пучка, обусловленная дифракцией, характеризуется радиусом (см. ч. III, дополнение 13)

$$R_д = z_д^2/z, \tag{23.122}$$

где

$$z_д = k_0\rho_0^2, \tag{23.123}$$

$z_д$ — дифракционная длина пучка. При условии

$$R_д = R_{нл} \tag{23.124}$$

нелинейная рефракция компенсирует дифракционную расходимость. В этом режиме, который можно назвать режимом *самоканалирования,* световой пучок распространяется в среде, сохраняя плоский волновой фронт и постоянное поперечное сечение. Мощность гауссова светового пучка определяется формулами (см. ч. III, дополнение 13)

$$P = \pi\rho_0^2 I_0, \qquad I_0 = \frac{cn_0}{8\pi}|A_0|^2. \tag{23.125}$$

Из формул (23.121)–(23.125) следует, что режим самоканалирования должен иметь место при мощности пучка $P = P_{кр}$, где

$$P_{кр} = \frac{c\lambda^2}{64\pi^2 n_2}, \tag{23.126}$$

$P_{кр}$ — *критическая мощность самофокусировки,* $\lambda$ — длина световой волны. При $P < P_{кр}$ световой пучок расплывается, однако темп этого расплывания меньше, нежели в линейной среде. При $P > P_{кр}$ лучи отклоняются к оси пучка — происходит самофокусировка.

Оценим критическую мощность самофокусировки для сероуглерода. В этом случае $n_2 = 1{,}45 \times 10^{-11}$ см$^3$/эрг [14]. Для излучения с длиной волны $\lambda = 532$ нм получаем $P_{кр} = 0{,}9$ кВт. Более подробно теория самофокусировки света изложена в [1; 7].

# Литература


1. *Шен И. Р.* Принципы нелинейной оптики. — М.: Наука, 1989.
2. *Ярив А., Юх П.* Оптические волны в кристаллах. — М.: Мир, 1987.
3. Квантовая электроника. Маленькая энциклопедия/Под ред. М. Е. Жаботинского. — М.: СЭ, 1969.
4. *Ахманов С. А., Коротеев Н. И.* Методы нелинейной оптики в спектроскопии рассеяния света. — М.: Наука, 1981.
5. Нелинейная спектроскопия/Под ред. Н. Бломбергена. — М.: Мир, 1979.
6. Сверхкороткие световые импульсы/Под ред. С. Шапиро. — М.: Мир, 1981.
7. *Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В.* Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде//УФН. 1967. Т. 93. С. 19.
8. *Ахманов С. А., Выслоух В. А., Чиркин А. С.* Самовоздействие волновых пакетов в нелинейной среде и генерация фемтосекундных лазерных импульсов//УФН. 1986. Т. 149. С. 449.
9. *Ахманов С. А., Выслоух В. А., Чиркин А. С.* Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. — М.: Наука, 1988.
10. Новые физические принципы оптической обработки информации/Под ред. С. А. Ахманова, М. А. Воронцова. — М.: Наука, 1990.
11. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. — М.: Наука, 1979.
12. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. — М.: Наука, 1976.
13. *Ярив А.* Введение в теорию и приложения квантовой механики. — М.: Мир, 1984.
14. *Коротеев Н. И., Шумай И. Л.* Физика мощного лазерного излучения. — М.: Наука, 1991.

# Дополнение 15

# Параметрический генератор света

Использование нелинейных оптических явлений в кристаллах позволяет не только преобразовать излучение лазера в излучение другой фиксированной частоты (например, путем генерации второй оптической гармоники — см. выше, лекции 22, 23), но и в излучение с плавно перестраиваемой частотой. Таким образом, нелинейная оптика помогает лазерам полностью освоить оптический диапазон, давая метод генерации когерентного излучения практически на любой заданной длине волны.

Принцип такого преобразования заключается в следующем. Пусть на квадратично-нелинейную среду, поляризация которой $P$ зависит от квадрата поля $E^2$ в соответствии с формулой

$$P = \varkappa E + \chi E^2, \tag{Д15.1}$$

падает мощная световая волна частоты $\omega_н$ (волна накачки)

$$E_н = A_н \cos(\omega_н t - k_н z) \tag{Д15.2}$$

и одновременно две слабые волны:

$$E_1 = A_1 \cos(\omega_1 t - k_1 z) \quad \text{и} \quad E_2 = A_2 \cos(\omega_2 t - k_2 z) \tag{Д15.3}$$

с частотами $\omega_1$ и $\omega_2$, удовлетворяющими соотношению

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_н. \tag{Д15.4}$$

Тогда, в силу формулы (Д15.1), волны на частотах $\omega_1$ и $\omega_2$ становятся связанными. Нелинейная поляризация на частоте $\omega_1$ равна

$$P_{нл}(\omega_1) = \chi A_н A_2 \cos\left[\omega_1 t - (k_н - k_2) z\right], \tag{Д15.5}$$

а нелинейная поляризация на частоте $\omega_2$

$$P_{нл}(\omega_2) = \chi A_н A_1 \cos\left[\omega_2 t - (k_н - k_1) z\right]. \tag{Д15.6}$$

Таким образом, за счет взаимодействия волн на частотах $\omega_н$ и $\omega_2$ возникает поляризация среды и, следовательно, переизлучение света на частоте $\omega_1$, а за счет взаимодействия волн на частотах $\omega_н$ и $\omega_1$ — переизлучение на частоте $\omega_2$.

Взаимодействие волны нелинейной поляризации $P_{нл}(\omega_1)$ со световой волной частоты $\omega_1$ будет максимально, если сдвиг фаз между ними будет сохраняться на достаточно больших расстояниях. Согласно (Д15.3) и (Д15.5), сдвиг фаз одинаков для любых $z$, если

$$k_н - k_2 = k_1. \tag{Д15.7}$$

Аналогичные рассуждения для волны на частоте $\omega_2$ приводят к условию

$$k_н - k_1 = k_2. \tag{Д15.8}$$

Нетрудно видеть, что условия (Д15.7) и (Д15.8) совпадают. Обычно их записывают в виде

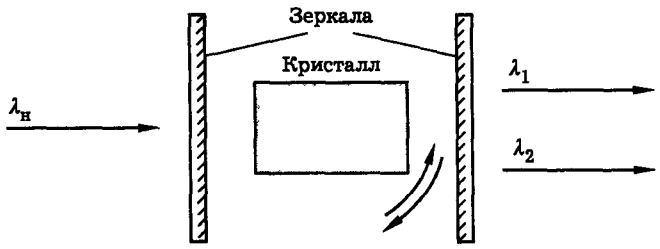



Рис. Д15.1. Схема параметрического генератора света. Резонатор с кристаллом KDP возбуждается мощной световой волной накачки с длиной волны $\lambda_н$. При достаточно большой мощности накачки в кристалле возбуждаются колебания с длинами волн $\lambda_1$ и $\lambda_2$, зависящими от ориентации кристалла

$$k_1 + k_2 = k_н. \qquad (Д15.9)$$

Условие (Д15.9) так же как и условие (23.5), полученное для процесса генерации второй гармоники, называется условием синхронизма. Условие (23.5) можно рассматривать как частный случай более общего условия (Д15.9). Действительно, полагая в (Д15.9) $k_1 = k_2 = \omega/v(\omega)$ и $k_н = 2\omega/v(2\omega)$, из (Д15.9) имеем $v(\omega) = v(2\omega)$.

Если условие синхронизма выполнено, то энергия волны накачки передается волнам с частотами $\omega_1$ и $\omega_2$, а последние усиливаются в нелинейной среде. Поэтому, если нелинейный кристалл, пронизываемый волной накачки, поместить в оптический резонатор, т. е. между зеркалами, отражающими световые волны на частотах $\omega_1$ и $\omega_2$, то при достаточно больших коэффициентах отражения зеркал и большой мощности волны накачки в таком резонаторе возникает генерация на частотах $\omega_1$ и $\omega_2$. Начальные сигналы обусловлены собственными флуктуациями, неизбежно имеющими место в кристалле.

Частоты, для которых выполняется условие синхронизма в нелинейном кристалле, как и в случае генерации оптических гармоник, определяются выбором направления распространения взаимодействующих волн. Поэтому, вращая нелинейный кристалл в резонаторе, можно при постоянной частоте накачки $\omega_н$ (эту волну получают обычно либо от лазера, либо от его гармоник) получать плавно перестраиваемые частоты $\omega_1$ и $\omega_2$.

Таким образом, оптика получает в свое распоряжение источник когерентного света, длина волны которого подбирается по желанию экспериментатора. Такие генераторы работают в видимом и инфракрасном диапазонах спектра. Их называют *параметрическими генераторами света*. Использование этого термина, хорошо известного радиофизикам, в данном случае имеет глубокое основание, так как принцип действия такого генератора аналогичен принципу параметрического возбуждения колебаний, широко применяемому в радиотехнике.

На рис. Д15.1 приведена схема параметрического генератора света, в котором при накачке с длиной волны $\lambda_н = 0{,}53$ мкм (зеленая линия видимого диапазона, получаемая как вторая гармоника лазера на неодимовом стекле) в кристалле KDP возбуждаются колебания, перестраиваемые по частоте в инфракрасном диапазоне. Уже созданы параметрические генераторы света, перекрывающие диапазон от видимого до далекого инфракрасного. Коэффициент

полезного действия этих генераторов, определяемый как отношение мощностей параметрически возбужденных колебаний к мощности накачки, достигает нескольких процентов. При этом выходная мощность излучения составляет десятки и сотни киловатт.

## Литература

1. Квантовая электроника. Маленькая энциклопедия/Под ред. М. Е. Жаботинского. — М.: СЭ, 1969.
2. *Ахманов С. А., Хохлов Р. В.* Проблемы нелинейной оптики. — М.: Изд-во АН СССР, 1965.
3. *Ярив А., Юх П.* Оптические волны в кристаллах. — М.: Мир, 1967.
4. *Цернике Ф., Мидвинтер Дж.* Прикладная нелинейная оптика. — М.: Мир, 1976.
5. *Ахманов С. А., Хохлов Р. В.*//ЖЭТФ. 1962. Т. 43. С. 351.
6. *Шен И. Р.* Принципы нелинейной оптики. — М.: Наука, 1989.

# Дополнение 16

# Оптика фемтосекундных лазерных импульсов

*Предельно короткие импульсы света и сверхсильные световые поля. Генерация фемтосекундных световых импульсов. Новое поколение твердотельных фемтосекундных лазеров. Фемтосекундные технологии. Фемтосекундные лазерные импульсы в спектроскопии. Управление амплитудой и фазой молекулярных колебаний с помощью фемтосекундных лазерных импульсов. Новые направления исследований.*

**Предельно короткие импульсы света и сверхсильные световые поля.** Генерация все более коротких импульсов света, предельная концентрация световой энергии во времени, а также применение сверхкоротких лазерных импульсов для воздействия на вещество, исследования быстропротекающих процессов, в системах передачи информации — одно из магистральных направлений развития лазерной физики и техники.

К 1998 г. долгий путь сокращения временны́х масштабов световых импульсов был пройден практически до конца: получены импульсы длительностью $\tau_и = 4{,}5$ фс в видимом диапазоне (всего два периода световых колебаний) и $\tau_и = 40$ фс на длине волны $CO_2$ лазера (10 мкм) — световой импульс в один период колебаний! Освоение фемтосекундного масштаба времени (1 фс $= 10^{-15}$ с) означает фактически полную реализацию возможностей оптики в изучении быстропротекающих процессов в веществе. Один период оптического колебания — это предельная длительность светового импульса, но одновременно и предельная "скорость" оптического отклика материальной среды.

С помощью интенсивных фемтосекундных импульсов можно создавать сильно неравновесные состояния для быстро релаксирующих возбуждений (время релаксации $10^{-13} - 10^{-14}$ с), в частности электронных возбуждений в многоатомных молекулах, полупроводниках и металлах, наблюдать новые типы оптически индуцируемых фазовых переходов в веществе. Фемтосекундная оптическая техника позволяет разработать прямые экспериментальные методы изучения молекулярной динамики сложных (в том числе биологически активных) молекул и конденсированных сред.

С прикладной точки зрения главный итог разработки эффективных источников коротких световых импульсов связан с возможностями реализации предельных скоростей оптической обработки и передачи информации. В последние годы выполнены эксперименты, ярко их демонстрирующие: созданы оптические бистабильные устройства, переключаемые за времена $10^{-12}$ с, элементы волоконно-оптических линий связи, информация в которых переносится с помощью оптических солитонов с длительностью, достигающей $10^{-13}$ с.

С другой стороны, переход к фемтосекундным импульсам — это и очередной скачок по шкале интенсивности света. При длительности импульса $\tau_и = 100$ фс сравнительно небольшой энергии $W = 0{,}1$ Дж соответствует мощность $P = 10^{12}$ Вт. Таким образом, в сравнительно скромных по масштабам системах удается перейти к уровням мощности, которые еще совсем недавно удавалось получать только в мультикилоджоульных установках, предназначенных для управляемого термоядерного синтеза.

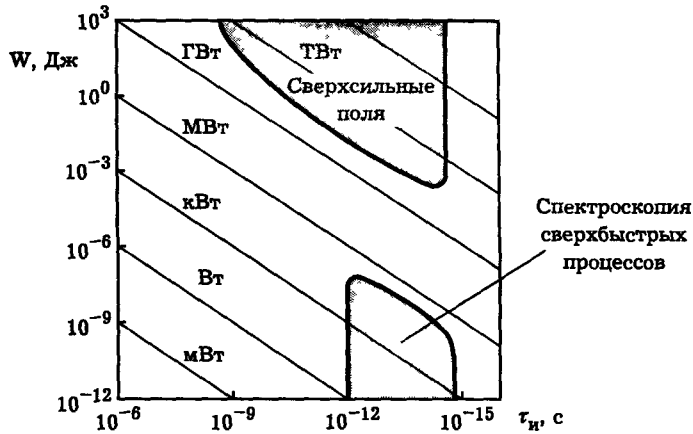



Рис. Д16.1. Диаграмма энергия–время. По оси абсцисс отложена длительность импульсов $\tau_и$, по оси ординат — энергия импульса $W$, здесь же нанесены уровни равной мощности. Выделенные области параметров сверхкоротких световых импульсов соответствуют новым направлениям в исследовании сверхбыстрых процессов и в нелинейной оптике сверхсильных световых полей

Благодаря этому совершенно новые экспериментальные средства получила в свое распоряжение нелинейная оптика. В поле сфокусированных фемтосекундных импульсов получены интенсивности света $10^{21}$ Вт/см$^2$ и, следовательно, напряженности светового поля достигают $5 \times 10^{11}$ В/см. Речь идет, таким образом, о полях, превышающих внутриатомные ($E_a = 5 \times 10^9$ В/см для атома водорода). В столь сильных световых полях на первый план выходят новые проблемы нелинейной электронной физики, становятся реальностью прямые эксперименты, в которых можно наблюдать эффекты, предсказываемые нелинейной квантовой электродинамикой (нелинейное рассеяние света на релятивистских электронах, рассеяние света на свете в вакууме и т. п.). Перечисленные новые направления физических и прикладных исследований формируют две области — две новые "страны" на лазерной карте энергия–время (рис. Д16.1) — спектроскопию сверхбыстрых процессов и нелинейную оптику сверхсильных световых полей.

**Генерация фемтосекундных световых импульсов.** Для получения предельно коротких световых импульсов используют принцип фазировки спектральных компонент света. Как мы видели на примере лазера с синхронизацией мод (см. ч. II), фазировка спектральных компонент позволяет одновременно укоротить световой импульс и резко увеличить его пиковую мощность. При этом предел длительности импульса устанавливается спектральной шириной света

$$\Delta t_{\min} = 2\pi/\Delta\omega.$$

Как видно из этой формулы, для получения предельно коротких световых импульсов, под огибающей которых укладывается всего лишь несколько периодов световых колебаний, необходимо иметь излучение, ширина спектра которого приближается к несущей частоте.

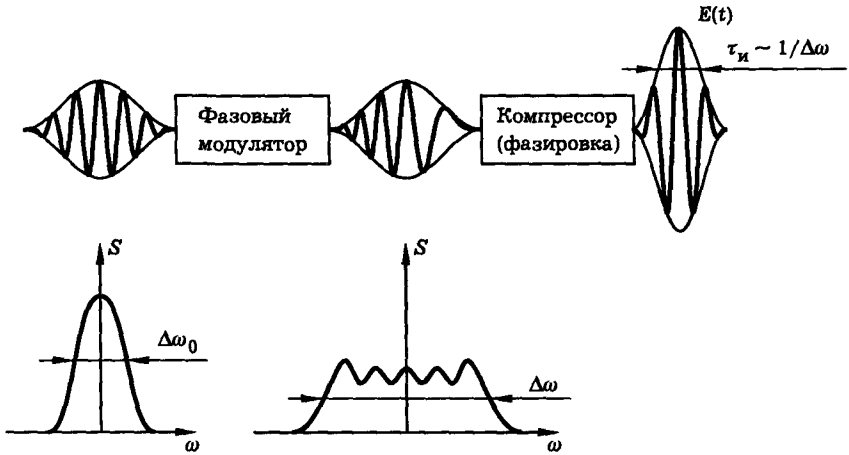



Рис. Д16.2. Принцип генерации предельно коротких световых импульсов: быстрая фазовая модуляция и компрессия

Хотя в принципе можно предложить способы фазировки компонент в спектре нелазерного источника света, такой подход оказывается весьма сложным и энергетически невыгодным. Поэтому исходное широкополосное излучение, фазировка компонент которого приводит к генерации коротких импульсов, получают при самовоздействиях или взаимодействиях лазерных импульсов в нелинейной среде. В этом случае речь идет о регулярном широкополосном световом пакете, фазовые соотношения в котором надо изменить.

Рис. Д16.2 иллюстрирует один из наиболее эффективных вариантов этой техники — компрессию фазово-модулированного импульса. Быстрая фазовая модуляция, расширяющая спектр, получается здесь за счет самовоздействия исходного импульса в среде с кубичной нелинейностью. Фазировка спектральных компонент, а следовательно и сжатие импульса, осуществляется в диспергирующей линии задержки (пара дифракционных решеток). Возможны и другие варианты метода, в которых для получения широких спектров используются трех- и четырехволновые нелинейные взаимодействия.

Принцип действия схемы, показанной на рис. Д16.2, можно пояснить как на основе спектральных представлений (фазировка спектральных компонент, синхронизация мод), так и непосредственно прослеживая трансформацию огибающей импульса, т. е. на временно́м языке. Тогда осуществляемую в этой схеме компрессию следует трактовать как результат "нагона" в диспергирующей линии задержки низкочастотных спектральных компонент, располагающихся на фронте импульса, высокочастотными компонентами, первоначально сгруппированными на его хвосте.

Следует отметить, что обсуждаемые принципы имеют глубокие аналогии в классической оптике волновых пучков. Так, задача о генерации цуга коротких импульсов за счет суперпозиции синхронизованных дискретных мод аналогична классической задаче о дифракции плоской волны на амплитудной решетке. Сжатие фазово-модулированного сигнала дисперсионным элементом (оптическим компрессором) — это временно́й аналог пространственной фокусировки пучка с помощью линзы.

Во всех этих ситуациях главный вопрос — управление фазой световой волны. Технику управления фазой в пространстве оптика освоила, по существу, еще в прошлом веке. Необходимое для генерации предельно коротких импульсов быстрое управление фазой во времени — достижение последних лет. Для ее реализации надо располагать, очевидно, системами с быстро изменяющимися во времени параметрами. Поскольку в пределе речь идет об изменениях со временем порядка периода световых колебаний, наиболее перспективный путь решения задачи — это управление самой световой волной, основанное на использовании быстрой оптической нелинейности.

Рассмотрим элементарную теорию оптического компрессора. Действие компрессора основано на использовании нелинейности показателя преломления оптического волокна. Световой импульс вида

$$E = A\cos(\omega t - kz), \qquad k = \omega n/c,$$

распространяющийся в среде с нелинейным показателем преломления

$$n = n_0 + n_2 I,$$

испытывает фазовую *самомодуляцию*. Действительно, полный фазовый набег, приобретаемый импульсом на дистанции $z$,

$$\varphi = kz = \frac{\omega}{c} n_0 z + \frac{\omega}{c} n_2 I z.$$

Поскольку интенсивность света зависит от времени, т. е. $I = I(t)$, возникает зависящая от времени нелинейная добавка к фазе

$$\Phi(t) = \frac{\omega}{c} n_2 I(t) z,$$

а следовательно, и зависящая от времени добавка к частоте

$$\Delta\omega(t) = \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\omega}{c} n_2 z \frac{\partial I}{\partial t}.$$

Уширение частотного спектра импульса, возникающее вследствие самомодуляции, можно оценить как

$$\Delta\omega = \frac{\omega}{c} n_2 z \frac{I_0}{\tau_0},$$

где $\tau_0$ — длительность импульса, $I_0$ — пиковая интенсивность. Итак, частотный спектр импульса сильно расширяется. Посылая испытавший фазовую самомодуляцию импульс в соответствующим образом подобранную диспергирующую среду, можно сжать импульс до длительности

$$\Delta t_{\min} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \tau_0 \frac{\lambda}{n_2 I_0 z},$$

где $\lambda$ — длина световой волны.

Для получения импульсов с длительностью, сравнимой с периодом оптических колебаний, диапазон сканирования частоты $\Delta\omega$ должен быть сравним с несущей частотой $\omega$. Реальным способом создания необходимой частотой модуляции является фазовая самомодуляция света в среде с практически безынерционной нелинейностью (электронный эффект Керра).

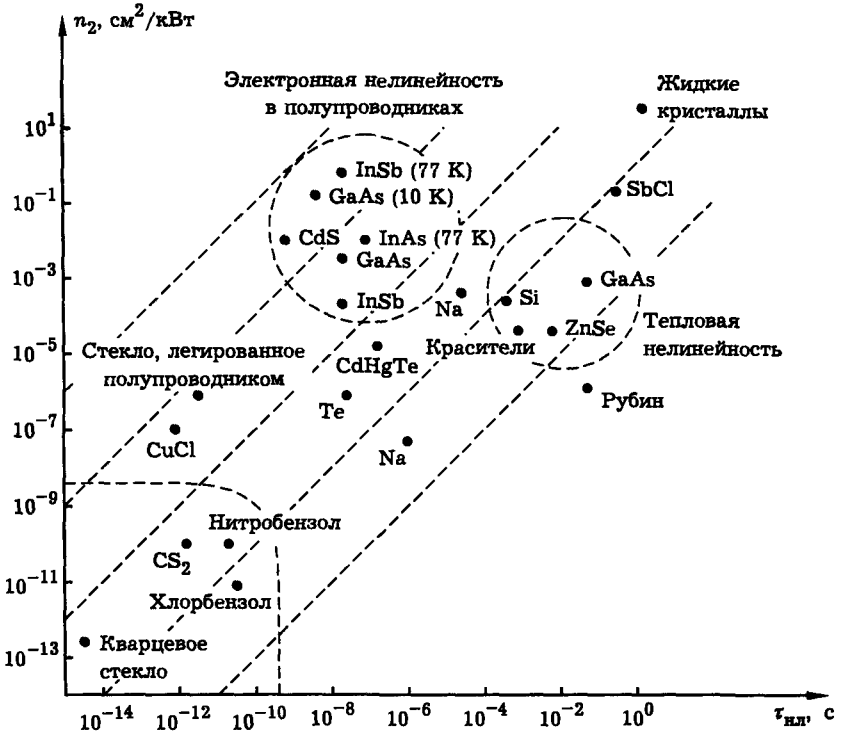



Рис. Д16.3. Значения коэффициента $n_2$, характеризующего добавку к действительной части показателя преломления ($n = n_0 + n_2 I$) на плоскости ($n_2, \tau_{нл}$), где $\tau_{нл}$ — время установления нелинейного отклика

Безынерционность нелинейного отклика, как правило, связана с малостью нелинейной добавки к показателю преломления $n_2$ (см. рис. Д16.3), поэтому необходимы большие длины взаимодействия $z$. Подходящими средами для создания фазовой самомодуляции оказались волоконные световоды.

Практическая схема компрессии световых импульсов, в которой используется фазовая самомодуляция света в волоконном световоде, показана на рис. Д16.4. В волоконно-оптическом компрессоре полезную роль играют дисперсионные свойства оптического волокна. Дисперсия групповой скорости света в оптическом волокне приводит к тому, что различные спектральные компоненты света оказываются разнесенными во времени, а именно, частота несущей возрастает от начала к концу импульса (дисперсия волокна предполагается нормальной). Иными словами, импульс приобретает линейную частотную модуляцию (рис. Д16.5). Если теперь пропустить его через устройство, которое высокочастотные компоненты поля проходят быстрее, чем низкочастотные (аналог среды с аномальной дисперсией), то можно совместить все спектральные компоненты во времени и получить очень короткий импульс света.

Необходимый элемент, обладающий аномальной дисперсией, строится на основе дисперсионных призм или дифракционных решеток. Из уравнения дифракционной решетки $d \sin\theta = m\lambda$ видно, что длинные световые волны откло-

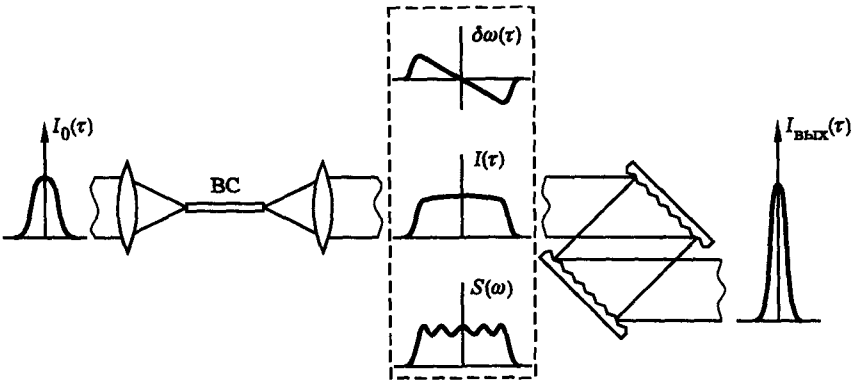



Рис. Д16.4. Схема компрессора световых импульсов на основе волоконного световода

няются решеткой на бóльшие углы, нежели короткие. Это дает возможность при помощи двух решеток построить схему, в которой длинные световые волны проходят более длинные пути, чем короткие и, следовательно, приобретают требуемую задержку во времени.

Заметим, что в изображенной на рис. Д16.4 решеточной паре возникает нежелательный эффект — пространственный (поперечный) сдвиг высокочастотных и низкочастотных компонент поля. Указанный недостаток можно устранить путем использования зеркала, возвращающего излучение обратно в решеточную пару (см. рис. Д16.6). После двойного прохода пространственное смещение частотных компонент компенсируется. Фазовая пластина (транспарант) служит для дополнительной корректировки задержек спектральных компонент.

Отметим, что сильно диспергирующие системы, представляющие собой комбинации дифракционных решеток или призм, позволяют развернуть частотный спектр света в пространстве и управлять амплитудами и фазами компонент частотного спектра — совершенно аналогично тому, как это делал Аббе с фурье-компонентами углового спектра (см. ч. III).

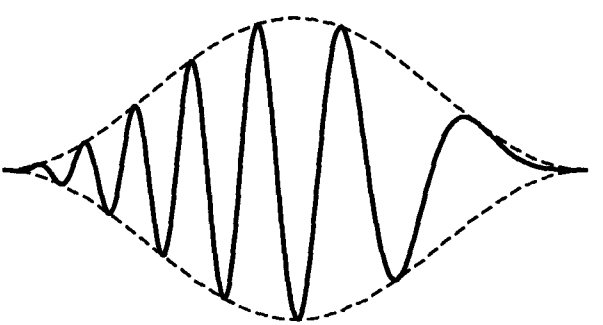


Рис. Д16.5. Частотно модулированный импульс

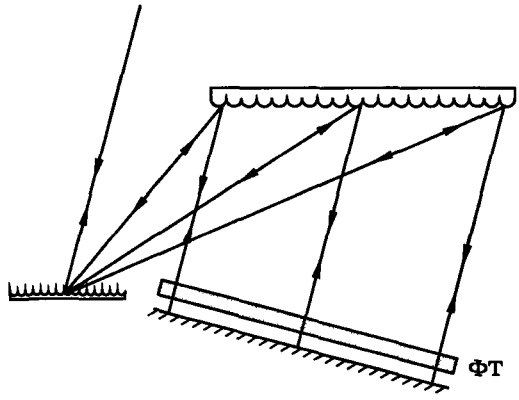



Рис. Д16.6. Схема двухпроходного оптического компрессора на дифракционных решетках: ФТ — фазовый транспарант

**Новое поколение твердотельных фемтосекундных лазеров.** В середине 90-х годов произошел прорыв в технике генерации сверхкоротких импульсов света. Были созданы новые кристаллы, способные генерировать лазерное излучение и обладающие сверхширокой полосой усиления: титан-сапфир (ширина полосы усиления 3500 см$^{-1}$), хром-форстерит и другие. Было открыто явление самосинхронизации мод. В лазере на титан-сапфире удалось реализовать внутрирезонаторную компрессию, при которой фазовая самомодуляция импульса осуществляется непосредственно в активном элементе лазера (за счет керровской нелинейности), а сжатие — с помощью пары стеклянных призм или многослойного диэлектрического зеркала, обладающего отрицательной дисперсией групповой задержки (глубина проникновения света в такое зеркало зависит от длины волны). Лазеры подобного типа накачиваются непрерывным излучением аргонового лазера или второй гармоникой лазера на гранате с неодимом. Титан-сапфировый лазер очень компактен (длина кристалла порядка миллиметра), легко переводится в режим самосинхронизации мод и генерирует импульсы длительностью 10 фс с энергией порядка нДж на длине волны 800 нм. Разработаны методы усиления и преобразования частоты таких импульсов. Рассмотрим теперь некоторые применения фемтосекундных световых импульсов.

**Фемтосекундные технологии.** На основе фемтосекундных лазеров успешно разрабатываются технологии высокоточной резки и обработки материалов, а также системы трехмерной оптической памяти. При этом используется то обстоятельство, что воздействие фемтосекундного светового импульса на вещество может быть сильным, но одновременно локальным, т.е. сосредоточенным в очень маленьком объеме среды. Указанная возможность обусловлена, с одной стороны, малостью энергии импульса, а с другой стороны высокой интенсивностью света. Это непосредственно видно из формулы

$$I = W/S\tau_и,$$

связывающей между собой энергию $W$ и длительность $\tau_и$ импульса, площадь поперечного сечения пучка $S$ и интенсивность света $I$. Например, для

$W = 10$ мкДж, $\tau_и = 10$ фс, $S = 10^{-7}$ см$^2$ получаем $I = 10^{16}$ Вт/см$^2$. В световом поле такой интенсивности эффективно идут нелинейно-оптические процессы, такие как двухфотонное поглощение света, оптический пробой и т.п. Однако область пространства, в которой эти процессы проявляются заметным образом, оказывается весьма малой. Оценим, например, размер области конденсированной среды, в которой фемтосекундный световой импульс способен вызвать ионизацию атомов. Энергия ионизации атома составляет около 10 эВ, или $1{,}6 \times 10^{-18}$ Дж. Световой импульс с энергией 10 мкДж способен ионизовать, следовательно, около $5 \times 10^{12}$ атомов. Считая, что на один атом приходится объем $3 \times 10^{-23}$ см$^3$ (такой объем занимает молекула воды в жидкой фазе), получим объем области ионизации $V = 150$ мкм$^3$, что соответствует объему кубика с длиной ребра 5 мкм. Итак, размер области, в которой сфокусированный фемтосекундный световой импульс сильно воздействует на вещество, изменяя его свойства, действительно может быть чрезвычайно малым.

Экспериментальные исследования подтверждают этот вывод. Изучение оптического пробоя прозрачных диэлектриков в поле сфокусированных фемтосекундных лазерных импульсов показывает, что линейный размер области пробоя может составлять всего лишь несколько микрон. С таким же пространственным разрешением удается воздействовать на молекулы в полимерной матрице, вызывая двухфотонное поглощение света и изменение структуры молекул. Последний эффект положен в основу разрабатываемых сейчас систем *трехмерной оптической памяти*. Плотность записи информации в таких системах может достигать $10^{12}$ бит/см$^3$. Весьма перспективны также технологические применения фемтосекундных лазеров, связанные с резкой материалов и обработкой поверхностей.

**Фемтосекундные лазерные импульсы в спектроскопии.** После создания пикосекундных лазеров с перестраиваемой частотой излучения начал развиваться новый метод оптической спектроскопии — нестационарная спектроскопия когерентного антистоксова рассеяния света (КАРС). В нестационарной спектроскопии осуществляется ударное возбуждение среды коротким лазерным импульсом и зондирование ее состояния с помощью пробного импульса, посылаемого с некоторой задержкой $\tau$. Измеряется энергия антистоксова рассеяния пробного импульса $W_a$ как функция задержки $\tau$. Эта зависимость несет в себе информацию о процессах дефазировки молекулярных колебаний.

Импульсная спектроскопия является альтернативной обычной частотной спектроскопии. Если в частотной спектроскопии при сканировании частоты лазера измеряется частотная характеристика среды — восприимчивость $\chi(\omega)$, то в импульсной спектроскопии при изменении задержки пробного импульса измеряется импульсный отклик (функция Грина) среды $h(\tau)$. Эти две характеристики вещества связаны между собой преобразованием Фурье:

$$\chi(\omega) = \int_0^\infty h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \qquad h(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Поэтому оба метода в принципе дают эквивалентную спектроскопическую информацию.

Вместе с тем, импульсная спектроскопия имеет ряд важных особенностей. Так, она дает возможность проводить прямые наблюдения сверхбыстрых динамических и кинетических процессов в различных средах. При исследовании узких спектральных линий нестационарная спектроскопия обеспечивает высо-

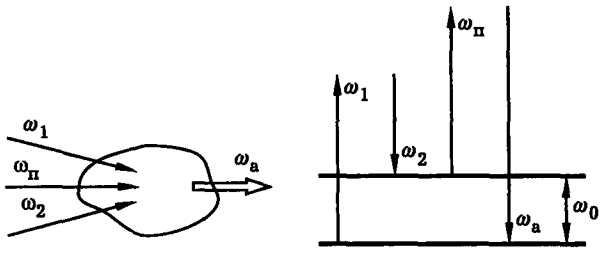



Рис. Д16.7. Спектроскопия когерентного антистоксова рассеяния света

кую эффективную разрешающую способность, ограниченную в принципе только длиной линии задержки. Когерентный характер процесса КАРС обеспечивает высокий уровень сигнала и большой динамический диапазон измерений. Отсутствие когерентного нерезонансного фона способствует повышению чувствительности. Имеется возможность управлять формой импульсного отклика путем выбора подходящей длительности лазерных импульсов. Практически отсутствует тепловое воздействие на среду, что важно, в частности, при исследовании биообъектов.

Рассмотрим новые возможности, которые возникают в нестационарной КАРС-спектроскопии молекул в связи с применением фемтосекундных лазеров. Наиболее важная из них заключается в том, что фемтосекундные импульсы позволяют контролировать не только амплитуду, но и фазу молекулярных колебаний. Становится возможным прямое осциллографирование молекулярных колебаний, а также управление их амплитудой и фазой с помощью фемтосекундных световых импульсов.

Пикосекундная и фемтосекундная КАРС-спектроскопия. Схема КАРС-спектроскопии показана на рис. Д16.7. Избранная комбинационно-активная мода исследуемого объекта (например, молекулярные колебания жидкости или газа) возбуждается парой лазерных пучков, частоты которых удовлетворяют условию комбинационного резонанса: $\omega_1 - \omega_2 \approx \omega_0$, где $\omega_0$ — частота молекулярных колебаний. Зондирование среды осуществляется пробным лазерным пучком (частота $\omega_п$), а регистрируемым сигналом является энергия импульса антистоксова рассеяния $W_a$ на частоте $\omega_a = \omega_п + \omega_1 - \omega_2 \approx \omega_п + \omega_0$.

В нестационарном варианте КАРС-спектроскопии возбуждение и зондирование среды осуществляют короткими лазерными импульсами, и измеряют энергию $W_a$ как функцию времени задержки $\tau$ между импульсами возбуждения и зондирования (рис. Д16.8). Зависимость $W_a(\tau)$, называемая импульсным откликом среды, несет в себе информацию о механизмах и скоростях процессов дефазировки молекулярных колебаний.

Важнейшим параметром, определяющим "аппаратную функцию" и разрешающую способность метода нестационарной КАРС-спектроскопии, является длительность используемых лазерных импульсов $\tau_и$. Чем меньше эта величина, тем более быстрые динамические процессы в молекулах доступны для исследования и тем более полная информация о процессах дефазировки, заключенная в форме импульсного отклика, может быть получена.

Приблизительно до середины 80-х гг. в нестационарной КАРС-спектроскопии применялись лазерные импульсы длительностью в единицы–десятки пи-

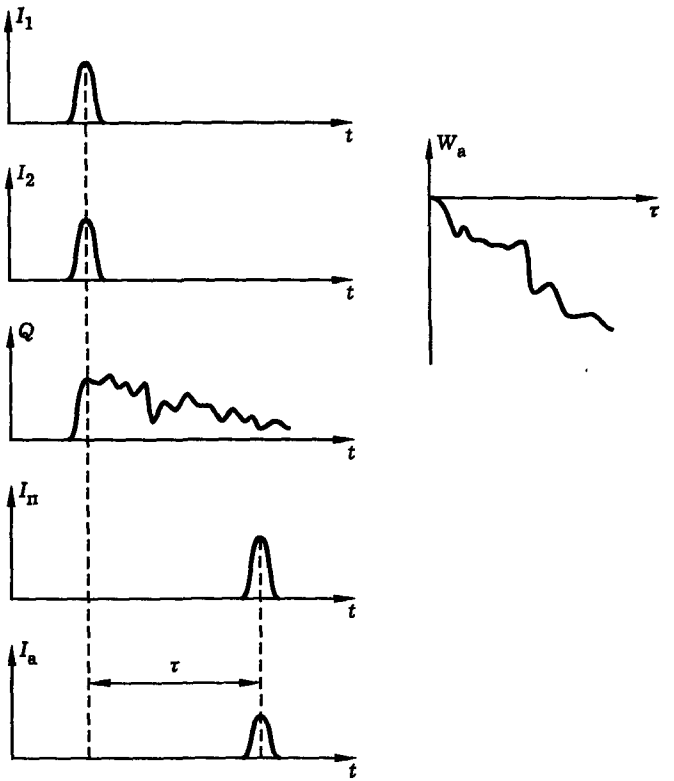



Рис. Д16.8. Нестационарная (импульсная) КАРС-спектроскопия

косекунд (1 пс = $10^{-12}$ с). Последующее пятилетие ознаменовалось бурным прогрессом в технике получения сверхкоротких световых импульсов, в результате чего появились генераторы фемтосекундных импульсов (1 фс = $10^{-15}$ с). В спектроскопических экспериментах начали использовать импульсы длительностью 60–80 фс, а в отдельных случаях — до 6 фс, что уже близко к фундаментальному физическому пределу. Столь резкое изменение уровня технических средств ведет к важным физическим следствиям: меняются цели и методы исследований, становится иным весь облик нестационарной спектроскопии. Обсудим теперь более подробно новые проблемы и возможности, связанные с применением в нестационарной КАРС-спектроскопии молекул предельно коротких световых импульсов.

Восстановление спектра по импульсному отклику. Если когерентный световой импульс длительностью $\tau_и = 30$ пс имеет частотный спектр шириной $\Delta\nu = 1/c\tau_и = 1$ см$^{-1}$, то импульс длительностью 60 фс имеет уже $\Delta\nu = 500$ см$^{-1}$, а импульс длительностью 6 фс имеет $\Delta\nu = 5000$ см$^{-1}$. Эти оценки показывают, что пикосекундные импульсы позволяют селективно возбуждать те или иные колебания в молекуле (например, колебания определенного атома или группы атомов). В то же время для фемтосекундных импульсов, имеющих очень широкий частотный спектр, характерно неселективное воз-

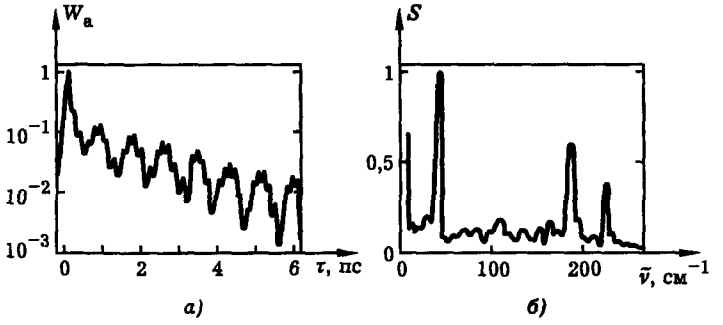



Рис. Д16.9. Нестационарная КАРС-спектроскопия с фемтосекундным временным разрешением [8]. Картина биений молекулярных колебаний в смеси пиридина и циклогексана. Возбуждены три молекулярные моды с частотами $\nu_5$(сус) = 802 см$^{-1}$, $\nu_1$(ру) = 991 см$^{-1}$, $\nu_6$(ру) = 1030 см$^{-1}$ (*а*). Разностный спектр молекулярных колебаний пиридина и циклогексана, полученный путем численного фурье-преобразования импульсного отклика. Видны резкие максимумы на частотах 39 см$^{-1}$, 189 см$^{-1}$ и 228 см$^{-1}$, которые соответствуют разностям частот трех возбужденных мод (*б*)

буждение молекулярных колебаний в широком спектральном диапазоне. При этом импульсный отклик имеет характер биений нескольких мод, т. е. отражает динамические свойства не отдельной колебательной подсистемы молекулы, а всей сложной молекулярной системы как целого.

Оказывается, что путем компьютерной обработки такого отклика можно с высокой точностью найти частоты биений, т. е. восстановить "разностный спектр" молекулярных колебаний. Пример подобного рода приведен на рис. Д16.9, где показан импульсный отклик, измеренный в смеси пиридина и циклогексана, а также вычисленный по этому отклику разностный спектр. Отметим, что в этих экспериментах использовались лазерные импульсы длительностью 80 фс; молекулярные колебания возбуждались в спектральной полосе шириной более 300 см$^{-1}$.

Импульсное вынужденное рассеяние. Если длительность светового импульса становится меньше периода молекулярных колебаний

$$\tau_и < T_0 = 2\pi/\omega_0, \qquad (Д16.1)$$

то для возбуждения колебаний по схеме КАРС (рис. Д16.7) нет необходимости использовать бигармоническую накачку. В этом случае спектр импульса настолько широк, что в одном и том же импульсе содержатся частотные компоненты $\omega_1$ и $\omega_2$, резонансно возбуждающие молекулярные колебания ($\omega_1 - \omega_2 \approx \omega_0$). Таким образом, при использовании предельно коротких световых импульсов схема нестационарной КАРС-спектроскопии существенно упрощается.

Вместе с тем, появляется проблема выделения сигнала, так как в условиях (Д16.1) спектры пробного и антистоксова излучений почти не отличаются (рис. Д16.10, *а*), а потому частотная селекция антистоксова излучения, обычно применяемая в опытах с пикосекундными импульсами, становится неэффективной. Для надежного выделения сигнала можно построить эксперимент так, чтобы пробное и антистоксово излучения были разделены пространственно.

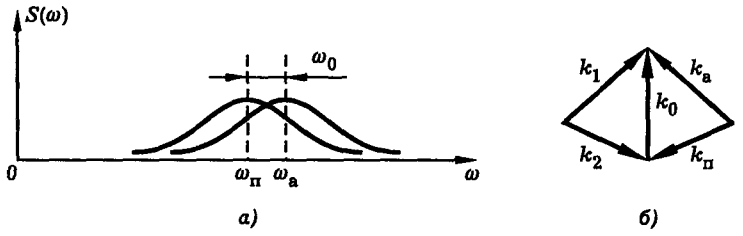



Рис. Д16.10. Спектры пробного и антистоксова фемтосекундных импульсов (*а*). Схема КАРС с пространственным выделением сигнала (*б*)

Один из возможных вариантов показан на рис. Д16.10, *б*; в этой схеме используется то обстоятельство, что направление распространения антистоксова излучения (независимо от длительности импульсов) определяется условием волнового синхронизма: $\vec{k}_а = \vec{k}_п + \vec{k}_1 - \vec{k}_2$.

Итак, в условиях (Д16.1) возникает новый вариант импульсной спектроскопии, существенно отличающийся от исходной схемы КАРС. Этот вариант получил название "импульсное вынужденное рассеяние" (ИВР). Заметим, что в ИВР вся спектроскопическая информация о веществе заключена только в форме импульсного отклика.

Экспериментальная схема ИВР показана на рис. Д16.11. С помощью этой методики излучались низкочастотные молекулярные колебания в некоторых жидкостях. На рис. Д16.12 показан импульсный отклик молекулы $CH_2Br_2$, измеренный с помощью импульсов длительностью 65 фс. Фактически отклик представляет собой осциллограмму молекулярных колебаний с периодом 190 фс и частотой 173 см$^{-1}$. Важно отметить, что в условиях (Д16.1) импульсная спектроскопия позволяет регистрировать динамику не только амплитуды, но и фазы молекулярных колебаний. Фемтосекундный лазерный импульс позволяет осуществлять мгновенное возбуждение и зондирование молекулярных колебаний в масштабе периода колебания. Это принципиально новая ситуация, которая не могла быть реализована с помощью пикосекундных импульсов.

Другой пример представлен на рис. Д16.13. Здесь показан импульсный отклик жидкого сероуглерода, обусловленный поворотом анизотропных молекул под действием поляризованного фемтосекундного светового импульса. Отметим нарастание отклика в течение некоторого времени после окончания светового импульса. Этот эффект отражает инерционный характер ориентационного движения молекул в жидкости; поворот молекулы под действием фемтосекундного светового импульса аналогичен отклонению тяжелого маятника при попадании в него пули (рис. Д16.14): и в том и в другом случае момент максимального отклонения системы от положения равновесия задержан относительно момента возбуждения.

**Управление амплитудой и фазой молекулярных колебаний с помощью фемтосекундных лазерных импульсов.** Рассмотренные выше примеры показывают, что фемтосекундные лазерные импульсы можно использовать для диагностики сверхбыстрых динамических и кинетических процессов в молекулах. Другой аспект, на который мы хотели бы обратить внимание — возможность управления молекулярными колебаниями с помощью фемтосекундных лазерных импульсов. В этом пункте мы рассмотрим с позиций теории

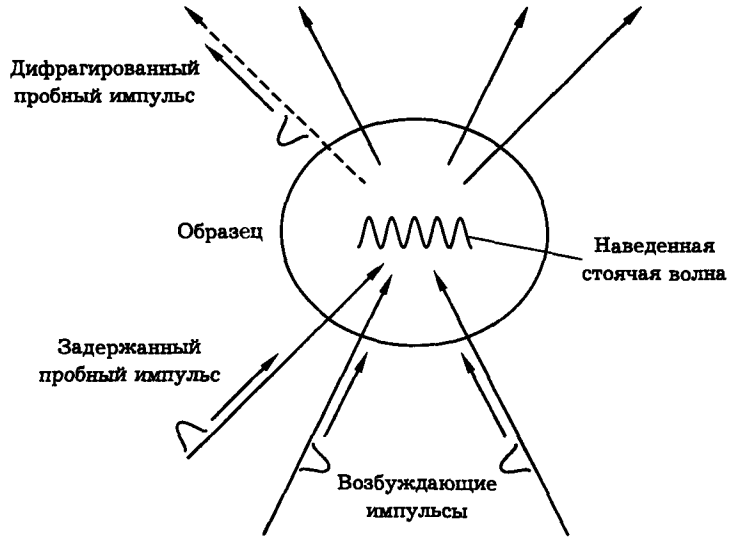



Рис. Д16.11. Схема эксперимента по импульсному вынужденному рассеянию. Два сверхкоротких пересекающихся импульса ударно возбуждают стоячую волну молекулярных колебаний, которая затем зондируется путем когерентного рассеяния (дифракции) пробного импульса, посылаемого с переменной задержкой

несколько примеров подобного рода: возбуждение молекулярных колебаний цугом фемтосекундных импульсов, эффекты "гашения колебаний", "выпрямления колебаний" и т. п.

Если пренебречь изменением заселенностей колебательных уровней, то колебание молекулы (точнее, одно из нормальных колебаний) можно описать с помощью классического уравнения осциллятора:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 2\gamma\frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = F(t). \qquad (Д16.2)$$

Здесь $Q$ — колебательная координата, $t$ — время, $\omega_0$ — собственная частота колебаний, $\gamma$ — коэффициент затухания свободных колебаний, $F(t)$ — внешняя сила, которая для комбинационно-активных колебаний пропорциональна квадрату напряженности электрического поля световой волны: $F(t) = \text{const} \cdot E^2$.

Решение уравнения (Д16.2) удобно записать в виде интеграла Дюамеля

$$Q(t) = \int_0^\infty F(t-\theta)h(\theta)\,d\theta, \qquad (Д16.3)$$

где $h(\theta)$ — функция Грина (функция импульсного отклика). Согласно (Д16.3), колебательная координата $Q(t)$ есть линейный запаздывающий функционал относительно внешней силы $F(t)$. Таким образом, формула (Д16.3) описывает вынужденные колебания молекулы под действием светового поля с учетом инерционности колебаний.

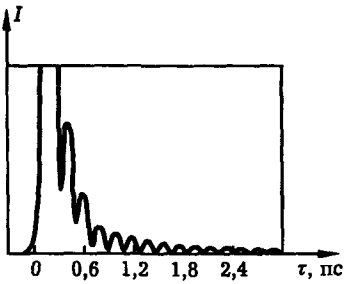



Рис. Д16.12. Данные импульсного вынужденного комбинационного рассеяния для жидкого дибромометана ($CH_2Br_2$) при комнатной температуре [9]. Осцилляции импульсного отклика соответствуют когерентным молекулярным колебаниям с частотой 173 $см^{-1}$ изгибной моды галогена в молекуле $CH_2Br_2$. Осцилляции сигнала затухают вследствие ориентационного молекулярного движения и колебательной дефазировки. Импульсный отклик содержит также вклад когерентного рэлеевского рассеяния, возникающего из-за межмолекулярного и ориентационного движений

Подстановка (Д16.3) в (Д16.2) приводит к следующим уравнению и начальным условиям для функции Грина:

$$\ddot{h} + 2\gamma\dot{h} + \omega_0^2 h = 0, \qquad h(0) = 0, \qquad \dot{h}(0) = 1. \tag{Д16.4}$$

Здесь точка над буквой обозначает дифференцирование по времени. Таким образом, функция Грина удовлетворяет однородному уравнению колебаний и определенным начальным условиям.

Нетрудно найти явное решение задачи (Д16.4):

$$h(\theta) = \frac{1}{\Omega} e^{-\gamma\theta} \sin \Omega\theta, \qquad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \tag{Д16.5}$$

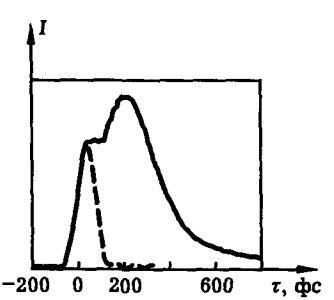



Рис. Д16.13. Данные ИВР-спектроскопии жидкого сероуглерода [9]. После момента времени $t = 0$ (момент возбуждения фемтосекундным световым импульсом) сигнал продолжает расти, указывая на инерционный характер движения молекул жидкости на малых временах. После достижения максимума сигнал уменьшается сначала быстро, а потом более медленно. Пунктирная кривая соответствует данным ИВР-спектроскопии $H_2O$, записанным сразу после опытов с $CS_2$ при тех же экспериментальных условиях

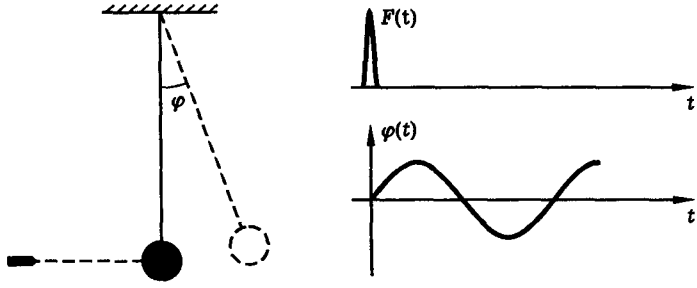



Рис. Д16.14. Механическая модель поворота анизотропной молекулы поляризованным фемтосекундным световым импульсом: отклонение маятника при попадании в него пули

Если же пренебречь затуханием колебаний ($\gamma = 0$), то

$$h(\theta) = \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 \theta. \qquad (Д16.6)$$

Формулы (Д16.5), (Д16.6) позволяют исследовать действие на молекулярный осциллятор возбуждающего излучения любого вида: бигармонической накачки, фемтосекундного импульса, цуга импульсов, шумовых импульсов и т. д. Рассмотрим несколько частных случаев.

Бигармоническая накачка. Полагая $\omega_1 - \omega_2 = \omega$,

$$F(t) = F_0 e^{i\omega t}, \qquad (Д16.7)$$

получим по формуле (Д16.3)

$$Q(t) = Q_0 e^{i\omega t}, \qquad Q_0 = F_0 \chi(\omega), \qquad (Д16.8)$$

где

$$\chi(\omega) = \int_0^\infty h(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta, \qquad (Д16.9)$$

$\chi(\omega)$ — частотный коэффициент передачи данной линейной системы, или в терминах оптики, линейная оптическая восприимчивость молекулы. Функцию $\chi(\omega)$ можно вычислить непосредственно из уравнения (Д16.2), либо по формуле (Д16.9), используя уже известное выражение (Д16.5) для функции Грина. Получим

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}. \qquad (Д16.10)$$

В частности, при точном резонансе ($\omega = \omega_0$)

$$Q_0 = \frac{F_0}{2i\gamma\omega_0}. \qquad (Д16.11)$$

Как видно из этой формулы, амплитуда установившихся молекулярных колебаний определяется интенсивностью света (параметр $F_0$) и величиной потерь (параметр $\gamma$).

Одиночный фемтосекундный импульс. Если длительность возбуждающего светового импульса значительно меньше, чем период молекулярных колебаний, то в уравнении (Д16.2) можно положить

$$F(t) = C\delta(t), \tag{Д16.12}$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция, $C$ — постоянная, пропорциональная энергии светового импульса. Подставляя (Д16.12) в (Д16.3), получим

$$Q(t) = Ch(t), \qquad t > 0. \tag{Д16.13}$$

Таким образом, при возбуждении молекулярных колебаний фемтосекундным световым импульсом ("ударное возбуждение") амплитуда колебаний определяется энергией импульса. Затухание свободных молекулярных колебаний описывается функцией Грина $h(t)$. Так как отклик системы не может опережать воздействие на нее (принцип причинности), из формул (Д16.12), (Д16.13) можно заключить, что

$$h(t \leq 0) = 0. \tag{Д16.14}$$

С учетом этого соотношения связь (Д16.9) между $\chi(\omega)$ и $h(\theta)$ можно записать в виде полного преобразования Фурье

$$\chi(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\mathrm{e}^{-\imath\omega\theta}d\theta. \tag{Д16.15}$$

Обратное преобразование дает

$$h(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega)\mathrm{e}^{\imath\omega\theta}d\omega. \tag{Д16.16}$$

Конкретные расчеты $h(\theta)$ по формуле (Д16.16) не должны противоречить (Д16.14). В частности, нетрудно проверить, что при подстановке (Д16.10) в (Д16.16) условие (Д16.14) выполняется.

Пара фемтосекундных импульсов. Пусть на молекулу воздействуют два одинаковых фемтосекундных световых импульса, разделенные интервалом времени $\tau$. Тогда

$$F(t) = C\delta(t) + C\delta(t-\tau). \tag{Д16.17}$$

Подставляя (Д16.17) в (Д16.3), получим

$$Q(t) = C\begin{cases} h(t), & t < \tau, \\ h(t) + h(t-\tau), & t \geq \tau. \end{cases} \tag{Д16.18}$$

Воспользуемся для $h(t)$ формулой (Д16.6). Тогда

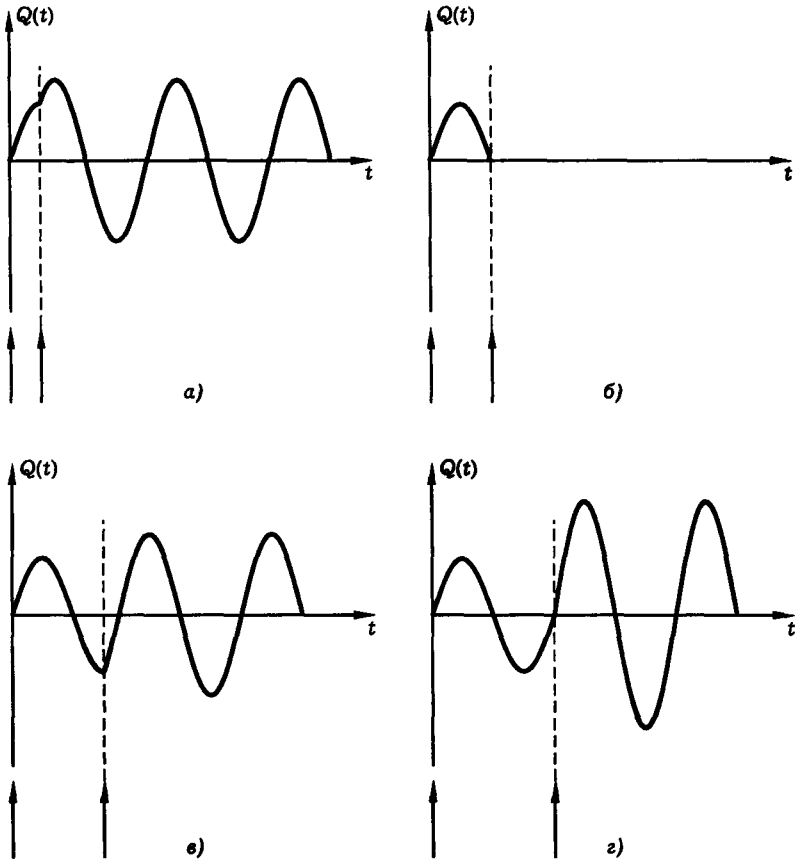



Рис. Д16.15. Молекулярные колебания под действием пары фемтосекундных световых импульсов. Показаны зависимости колебательной координаты от времени, построенные по формулам (Д16.19) при разных задержках $\tau$ между импульсами: $\tau = T_0/4$ (*а*), $\tau = T_0/2$ (*б*), $\tau = 3T_0/4$ (*в*), $\tau = T_0$ (*г*), где $T_0$ — период молекулярных колебаний. Вертикальные стрелки указывают положение фемтосекундных импульсов на шкале времени

$$Q(t) = Q_0 \begin{cases} \sin\omega_0 t, & t < \tau, \\ \sin\omega_0 t + \sin\omega_0(t-\tau), & t \geq \tau, \end{cases} \qquad (Д16.19)$$

где $Q_0 = C/\omega_0$. Графики $Q(t)$ для некоторых частных значений $\tau$ показаны на рис. Д16.15. В зависимости от величины задержки второй импульс может усиливать или ослаблять молекулярные колебания, а также изменять их фазу. В частности, если задержка равна половине периода молекулярных колебаний, то второй импульс осуществляет их полное гашение.

Цуг фемтосекундных импульсов. Несколько примеров возбуждения молекулярных колебаний цугом фемтосекундных импульсов показаны на рис. Д16.16. Как видно из этого рисунка, в зависимости от соотношения перио-

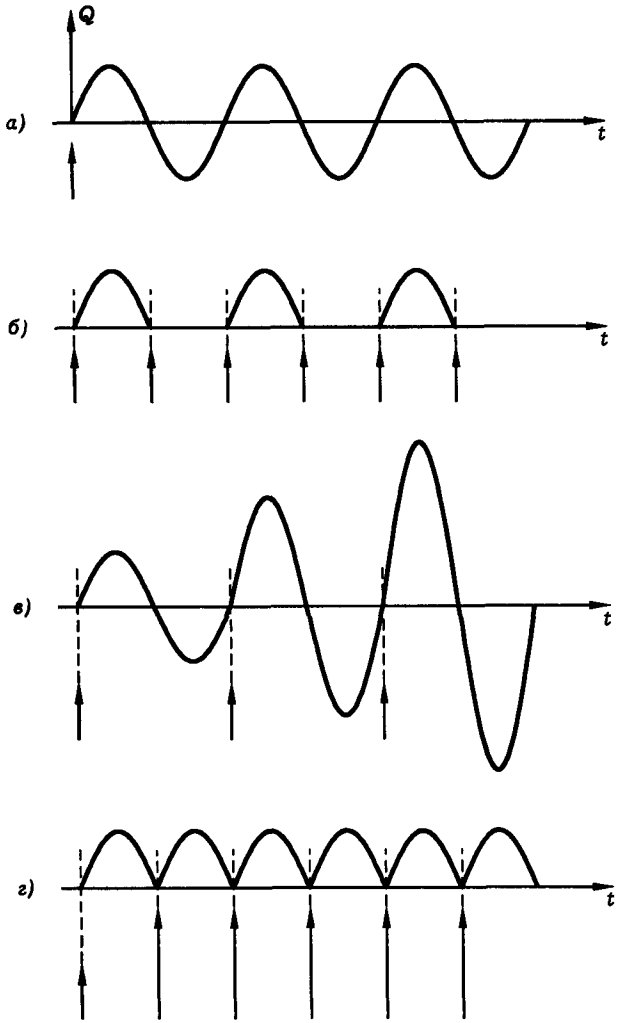



Рис. Д16.16. Возбуждение молекулярных колебаний цугом фемтосекундных лазерных импульсов. Показаны зависимости колебательной координаты от времени. Вертикальные стрелки указывают положение фемтосекундных импульсов на шкале времени. Длина стрелки пропорциональна энергии импульса

да колебаний $T_0$ и периода следования импульсов $T$ возможны разные режимы возбуждения: резонансная раскачка колебаний (рис. Д16.16, *в*), "выпрямление" колебаний (рис. Д16.16, *б*, *г*).

Вычислим амплитуду молекулярных колебаний, возбужденных цугом фемтосекундных импульсов. Полагая

$$F(t) = C \sum_{n=0}^{N} \delta(t - nT), \qquad \text{(Д16.20)}$$

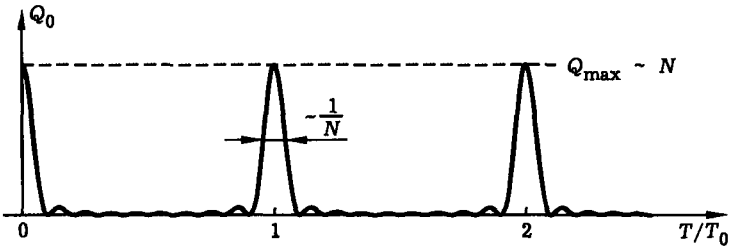



Рис. Д16.17. Зависимость амплитуды молекулярных колебаний, возбуждаемых цугом фемтосекундных световых импульсов, от периода следования импульсов. График построен по формуле (Д16.23)

где $T$ — период следования импульсов, $N$ — полное число импульсов в цуге, получим по формуле (Д16.3)

$$Q(t) = C\sum_{n=0}^{N} h(t - nT), \qquad t > NT. \tag{Д16.21}$$

Подставляя (Д16.6) в (Д16.21) и выполняя суммирование, получим

$$Q(t) = Q_0(T)\sin[\omega_0(t - t_0)], \qquad t_0 = \frac{N-1}{2}T, \tag{Д16.22}$$

где

$$Q_0(T) = \frac{CT_0}{2\pi}\frac{\sin(N\pi T/T_0)}{\sin(\pi T/T_0)}, \qquad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \tag{Д16.23}$$

График зависимости амплитуды молекулярных колебаний от периода следования фемтосекундных импульсов показан на рис. Д16.17. Отметим резонансный характер зависимости $Q(T)$, а также то обстоятельство, что при резонансе ($T = T_0$ или $T = nT_0$, где $n$ — целое число) амплитуда молекулярных колебаний пропорциональна числу импульсов, а энергия колебаний пропорциональна квадрату числа импульсов:

$$Q_{max} \sim N, \qquad W \sim N^2.$$

Интересно также сравнить между собой два способа возбуждения молекулярных колебаний: цугом фемтосекундных импульсов и бигармонической накачкой. Простой расчет показывает, что при выполнении условий резонанса ($T = nT_0$ для цуга импульсов и $\omega_1 - \omega_2 = \omega_0$ для бигармонической накачки), в отсутствие потерь ($\gamma = 0$) и при одинаковой энергии возбуждения

$$W_в = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\,dt$$

оба способа дают одинаковый результат. И в том и в другом случае амплитуда молекулярных колебаний оказывается равной $Q_0 = W_в/\omega_0$.

Возможность резонансного возбуждения колебаний среды с помощью цуга фемтосекундных импульсов была экспериментально продемонстрирована

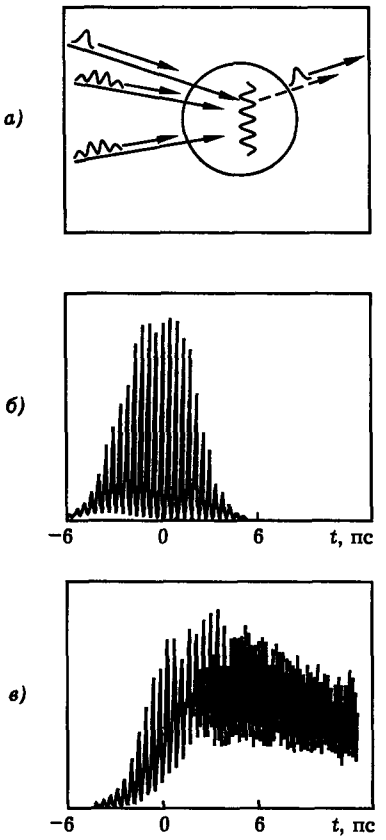



Рис. Д16.18. Спектроскопия импульсного вынужденного рассеяния с использованием цуга фемтосекундных лазерных импульсов [11; 12]: схема эксперимента (*а*), цуг фемтосекундных импульсов, частота следования импульсов в цуге 2,39 × $10^{12}$ Гц (79,6 $см^{-1}$) (*б*); данные спектроскопии ИВР либрационной моды (частота 80 $см^{-1}$) кристалла $\alpha$-перилена при температуре $T < 10$ К (*в*)

в [12]. В этой работе исследовался кристалл перилена, имеющий колебательные моды на частотах 33, 56, 80, 104 $см^{-1}$. Частота лазерных импульсов в цуге составляла 2,39 × $10^{12}$ Гц (79,6 $см^{-1}$), что близко к частоте одной из колебательных мод. Результаты эксперимента представлены на рис. Д16.18. Опыт показал, что применение цуга фемтосекундных импульсов позволяет селективно возбуждать избранную колебательную моду вещества; при этом амплитуда колебаний оказывается значительно больше, чем при возбуждении одним импульсом.

Таким образом, фемтосекундные световые импульсы дают возможность наблюдения элементарных микроскопических движений, таких как колебания кристаллической решетки, молекулярное колебание и вращение, а также управления этими движениями, создания и изучения неравновесных состояний, возбуждения химических и структурных изменений, недостижимых при обычных условиях.

**Новые направления исследований.** Методы, подходы, экспериментальная техника фемтосекундной лазерной оптики стремительно вторгаются в смежные разделы физики, химию, биологию и технику. Представление об этой бурно развивающейся области можно составить, обратившись к трудам конференций по нелинейной оптике, спектроскопии сверхбыстрых процессов и специализированным выпускам журналов. Здесь мы хотели бы выделить направления исследований, сформировавшихся в последнее время и представляющихся особенно многообещающими.

Сверхкороткие рентгеновские и электронные импульсы. Современная техника генерации таких импульсов во многом опирается на достижения пико- и фемтосекундной оптики. В этих важных как с физической, так и с прикладной точек зрения исследованиях сделаны только первые шаги; пока речь идет, конечно, о линейных нестационарных явлениях. Среди возникающих здесь физических задач следует указать на нестационарное динамическое рассеяние рентгеновских лучей и электронов в совершенных кристаллах. Чрезвычайно информативными обещают быть спектроскопические и структурные исследования, использующие для зондирования вещества короткие рентгеновские импульсы и электронные сгустки.

Отметим несколько важных работ. В [18] сообщается о получении коротких импульсов излучения в диапазоне длин волн 10–70 нм при фокусировке лазерных импульсов с длительностью 100 фс и интенсивностью $10^{14}$ Вт/см$^2$ на танталовую мишень; сходные результаты, полученные в поле фемтосекундных импульсов эксимерной лазерной системы при интенсивностях $10^{17}$ Вт/см$^2$, изложены в [19]. Авторами работ [20; 21] описаны генераторы электронных сгустков длительностью 20–150 пс, получаемых за счет фотоэмиссии с катода, освещаемого пикосекундным лазерным импульсом.

Некоторые применения оптически индуцированных рентгеновских импульсов приведены в [22], они использовались для спектроскопии сильно возбужденных ионов с временем разрешения 400 пс. В цитированной уже работе [20] сообщается о первом успешном эксперименте по пикосекундной электрохронографии. Электронограмма тонкой поликристаллической пленки алюминия была получена с временны́м разрешением 20 пс; таким образом удалось наблюдать быстрый фазовый переход, индуцированный мощным лазерным импульсом. Первые демонстрации выглядят обнадеживающими, и сейчас многие лаборатории занимаются совершенствованием пикосекундных рентгеновских и электронных источников, использующих лазерное возбуждение. Имеются все основания ожидать здесь быстрого прогресса, однако для создания эффективных спектроскопических и диагностических систем нужна адекватная регистрирующая аппаратура. Заметим вместе с тем, что прогрессируют и методы получения коротких рентгеновских импульсов, основанные на иных идеях. В частности, в [23] обсуждаются источники синхротронного излучения с длительностью импульса порядка 10 пс.

Сильные нелинейности, управление светом с помощью света. В большинстве рассмотренных в этой книге задач локальный нелинейный отклик среды считается слабым: в средах с квадратичной нелинейностью $\chi^{(2)}E \ll 1$, в средах с кубичной нелинейностью $\chi^{(3)}E^2 \ll 1$. Сильный энергообмен между волнами с различающимися частотами, формирование стационарных нелинейных волн — солитонов, все это результаты проявляющихся на значительных расстояниях накапливающихся взаимодействий и самовоздействий. Вместе с тем в нелинейной оптике уже длительное время обсуждаются проблемы распространения волн в среде с сильным и быстрым локальным не-

линейным откликом (см., например, [24; 25]). В этой ситуации кардинально меняется картина нелинейного распространения и в особенности самовоздействия коротких импульсов.

Проявлениями сильной локальной нелинейности, нечетной по полю, могут стать безрезонаторная оптическая бистабильность [25] (возможны, в частности, так называемые бистабильные солитоны [26]) и мультистабильность, стохастическая автомодуляция импульсов — столь разнообразными и сложными становятся самовоздействия в этом случае. Пока все эти явления наблюдаются в нелинейных системах с оптической или гибридной обратной связью [27]. Поразительно многообразной оказывается динамика таких систем. Полное использование трехмерного характера светового поля в системах с двумерной обратной связью позволяет наблюдать широкий класс новых явлений — пространственную оптическую бистабильность и мультистабильность, генерацию динамических периодических пространственных структур и оптическую турбулентность [28]. Тесно примыкают к этим явлениям и интенсивно исследуемые в последнее время поляризационные неустойчивости, мультистабильности и хаос [29].

Хотя в большинстве случаев эти новые явления наблюдаются в поле непрерывных и квазинепрерывных источников на сравнительно медленных, а потому и сильных, кубичных нелинейностях, несомненный принципиальный и прикладной интерес представляет переход к сверхкоротким импульсам. Переключение бистабильных устройств, использующих нелинейно-оптические микрорезонаторы с одномерной обратной связью, осуществляется за времена порядка 1 пс [27]. Быстрое переключение пространственных структур, двумерное и трехмерное переключение света светом, позволили бы создать сверхбыстродействующие аналоговые оптические компьютеры, оперирующие с нелинейными образами. Все это делает очень актуальными теоретические и экспериментальные исследования пикосекундной динамики нелинейных систем с обратной связью.

Сверхсильные световые поля: от нелинейной оптики атомов и молекул к нелинейной электронной физике. Генерация сверхсильных световых полей, ставшая возможной благодаря эффективному усилению фемтосекундных импульсов в широкополосных оптических усилителях с высокими мощностями насыщения, открыла совершенно новые возможности перед нелинейной оптикой. В настоящее время уже несколько исследовательских групп приступили к систематическим экспериментам при интенсивностях порядка $10^{20} - 10^{21}$ Вт/см$^2$ в импульсах, длительности которых изменяются от 10 до 1000 фс. Чтобы понять важность этих достижений для нелинейной оптики, уместно вспомнить значения некоторых параметров, характеризующих фундаментальные процессы взаимодействия лазерного излучения с веществом. Для удобства сравнения с экспериментальными достижениями выразим их в терминах интенсивностей. Особое значение имеют:

*Характерная "атомная" единица интенсивности*:

$$I_{\text{a}} = \frac{ce^2}{4\pi a_0^4} \approx 10^{17}\ \text{Вт/см}^2,$$

$I_{\text{a}}$ — интенсивность, при которой напряженность светового поля равна кулоновскому полю протона $E_{\text{a}}$ на расстоянии порядка боровского радиуса $a_0$,

$$E_{\text{a}} \approx 5 \times 10^9\ \text{В/см}.$$

При $E > E_a$ дискретная структура атомных уровней не проявляется, линейный и нелинейный оптические отклики вещества определяются электронными переходами в сплошном спектре — на смену нелинейной оптике атомов и молекул приходит нелинейная электронная физика.

*Интенсивность, приводящая к туннельной ионизации атомов.* При этой интенсивности атом за счет туннелирования электрона ионизуется за время порядка светового периода. Для $\omega/\omega_a \ll 1$ имеем [30; 31]:

$$I_т = (\omega/\omega_a)^2 I_a,$$

где $\omega_a = W_a/\hbar$ и $W_a$ — энергия связи внешнего электрона в атоме. При $W_a \approx 10$ эВ и $\hbar\omega \approx 1$ эВ (видимый диапазон оптического спектра) получаем $I_т \approx 10^{15}$ Вт/см$^2$.

*Порог лавинного оптического пробоя.* Конденсированная среда, не слишком разреженный газ ионизуются, вообще говоря, при интенсивностях света $I_{пр}$ гораздо более низких не только, чем $I_a$, но и чем $I_т$. Главной причиной ионизации в этом случае становятся процессы лавинного размножения (в процессе столкновений) свободных электронов, набирающих энергию в поле световой волны. В газе пороговая интенсивность лавинного пробоя [32; 33]

$$I_{пр} = \frac{mcW_a(1+\omega^2\tau_{ст}^2)}{2\pi e^2\tau_{ст}}\frac{1}{\tau_и}\ln\frac{N_{кр}}{N_0}.$$

Здесь $\tau_{ст}$ — характерное "столкновительное" время, $N_{кр}$ и $N_0$ — критическая (приводящая к пробою) и начальная плотности электронов, $\tau_и$ — длительность лазерного импульса. Зависимость $I_{пр}$ от длительности импульса

$$I_{пр}(\tau_и) \sim 1/\tau_и$$

имеет особое значение для обсуждаемых ниже вопросов. В поле импульса длительности $\tau_{min}$, для которого $I_{пр}(\tau_{min}) = I_т$, реализуется "предельная" прочность прозрачной среды, определяемая туннельной ионизацией. В этих условиях можно говорить о реализации предельных возможностей нерезонансной нелинейной оптики конденсированных сред и сравнительно плотных газов.

*Характерная "релятивистская" интенсивность.* В световом поле, напряженность которого

$$E = E_{рел} = m\omega c/e,$$

энергия осцилляций электрона становится сравнимой с его энергией покоя. Соответственно "релятивистская" интенсивность

$$I_{рел} = m^2\omega^2c^3/4\pi e^2$$

характеризует границу релятивистской нелинейной оптики свободных электронов. Для частот, соответствующих видимому диапазону оптического спектра, $I_{рел} \approx 10^{19}$ Вт/см$^2$.

Отметим, что в уже функционирующих мощных фемтосекундных лазерных системах перечисленные характерные интенсивности света превзойдены. Сводка современных достижений и перспектив развития техники генерации сверхсильных полей с помощью фемтосекундных лазерных систем УФ, видимого и ИК диапазонов, приведена в табл. Д16.1. Эксимерные системы на XeCl и KrF позволяют генерировать импульсное УФ излучение длительностью порядка 100 фс и энергией до 0,1 Дж. Вместе с тем относительная простота мас-

Таблица Д16.1

Фемтосекундные лазерные системы для генерации сверхсильных световых полей

| Системы | Предельные параметры | | Экспериментальные достижения | | | Перспективы | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\tau_и$, фс | $W_{нас}$, Дж/см$^2$ | $\tau_и$, фс | $W$, Дж | $I$, Вт/см$^2$ | $\tau_и$, фс | $W$, Дж | $I$, Вт/см$^2$ |
| Эксимерные системы на XeCl, $\lambda = 308$ нм | 160 | $2 \times 10^{-3}$ | 160 | $2 \times 10^{-2}$ | $10^{17}$ | 160 | 1 | $10^{20}$ |
| Эксимерные системы на KrF, $\lambda = 240$ нм | 70 | $2 \times 10^{-3}$ | 80 | $10^{-2}$ | $10^{18}$ | 80 | 1 | $10^{20}$ |
| $CO_2$-системы, $\lambda = 10{,}6$ мкм | 60 | $4 \times 10^{-1}$ | 1000 | 50 | $5 \times 10^{17}$ | 100 | 10 | |
| Твердотельные системы, видимый и ближний ИК-диапазоны | 5 | 1 | 430 | 620 | $10^{21}$ | 10 | $10^3$ | $10^{23}$ |
| Лазеры на красителях, видимый диапазон | 10 | $10^{-3}$ | 20 | $5 \times 10^{-4}$ | $10^{14}$ | 10 | $10^{-2}$ | |

штабирования эксимерных усилителей позволяет рассчитывать на дальнейшее продвижение вверх по шкале энергий. Успехи последних лет в разработке твердотельных лазеров с широкими линиями усиления позволяют по-новому взглянуть на перспективы мощных твердотельных фемтосекундных систем. Новые лазерные материалы, такие, например, как сапфир с ионами титана (ширина линии усиления составляет около 3500 см$^{-1}$), позволяют рассчитывать на усиление импульсов длительностью $\tau_и \approx 10$ фс до энергий, достигающих десятков джоулей [34]. Быстро прогрессируют и мощные усилители на красителях; в [35] сообщалось о получении энергии $W \sim 10^{-4}$ Дж при $\tau_и \approx 20$ фс. Все это открывает интереснейшие перспективы перед нелинейно-оптическим экспериментом. По крайней мере три направления исследований представляются особенно важными [36].

Реализация предельных возможностей нерезонансной нелинейной оптики прозрачной среды. В качестве ключевого параметра здесь выступает оптическая прочность среды. Для наносекундных лазерных импульсов при $\omega/\omega_а \ll 1$ (многофотонное поглощение несущественно) лавинный пробой прозрачных кристаллов и стекол происходит обычно при $I_{пр} \sim 10^{10} - 10^{11}$ Вт/см$^2$; имеются указания о возможности повышения этой цифры на один-два порядка в специальных условиях.

В соответствии с приведенной выше формулой для $I_{пр}$ есть все основания ожидать существенного повышения порога оптического пробоя среды в поле фемтосекундных импульсов. Грубая теоретическая оценка для $\omega/\omega_а \ll 1$, $\omega\tau_{ст} = 0{,}1$ и $\tau_{min} = 10$ фс дает $I_{пр} \approx 10^{14}$ Вт/см$^2$; разумеется, для получения надежных данных необходим детальный эксперимент. Заметим вместе с тем,

что повышение порога пробоя до $10^{13} - 10^{14}$ Вт/см$^2$ (данные о том, что эти цифры не слишком далеки от экспериментально наблюдаемых, см. в [35–38]) может кардинально изменить картину нелинейных взаимодействий и самовоздействия.

Действительно, уже при вполне реальной быстрой нелинейной поправке к показателю преломления $n_2 = 10^{-11}$ см$^2$/кВт (рис. Д16.3) и при $I = 10^{14}$ Вт/см$^2$ имеем $n_2 I \approx n_0$ и такие явления как самофокусировка будут радикально отличаться от хорошо изученных в средах со слабой нелинейностью. Указания на новые эффекты подобного рода можно найти в [37; 38]. При интенсивности света $I \approx 10^{14}$ Вт/см$^2$ в среде с квадратичной нелинейностью ($\chi^{(2)}E \approx 1$ при $\chi^{(2)} \approx 10^{-7}$ СГСЭ) возникает ситуация, когда высшие члены в разложении (22.3) поляризации по полю, сравнимые и даже превосходящие по величине низшие, начинают доминировать. Если длина нелинейного взаимодействия $L_{\text{нл}} = (k\chi^{(2)}E)^{-1}$ становится меньше когерентной длины $L_{\text{ког}} \approx (\Delta k)^{-1}$, условия фазового синхронизма уже практически не влияют на эффективность нелинейного взаимодействия.

Неравновесные состояния в полупроводниках и металлах, сверхбыстрый нагрев твердотельной плазмы. Длительность фемтосекундных лазерных импульсов зачастую оказывается меньше времени электрон-фононной релаксации и приближается сейчас, пожалуй, к наиболее короткому времени релаксации в твердом теле — времени электрон-электронной релаксации. В ряде лабораторий экспериментируют с генераторами импульсов с энергиями порядка 1 мДж и длительностями около 50 фс; последнее позволяет создавать сильно неравновесные состояния в полупроводниках и металлах — состояния, возбуждение и эволюция которых связаны с рядом новых физических явлений [39; 40]. Следует подчеркнуть, что успех на пути изучения этих новых эффектов определяется не только уровнем разработки генераторов мощных "возбуждающих" фемтосекундных импульсов. В неменьшей мере необходима и фемтосекундная диагностика неравновесных процессов. Сейчас, когда речь идет о таких коротких временах, единственная возможность — использование оптических методов.

Надо сказать, что методы фемтосекундной линейной и особенно нелинейной лазерной диагностики оказались удивительно эффективными даже при исследовании неравновесных процессов в таких традиционно трудных для оптики объектах, как полупроводники в полосе фундаментального поглощения и металлы [39–41]. Среди недавних достижений в обсуждаемой области укажем на работу [40], где впервые наблюдались эффекты, которые можно отнести к "холодному" плавлению решетки полупроводника (для возбуждения и диагностики использовались фемтосекундные импульсы), на эксперименты по генерации сильнонеравновесных электронных ансамблей в металлах [41].

Переход к мощным фемтосекундным импульсам привел к возникновению нового направления в лазерно-плазменных исследованиях, к изучению быстрых нестационарных процессов нагрева и распада плотной плазмы. В поле фемтосекундных импульсов можно заведомо пренебречь разлетом; нагрев электронной плазмы в металле происходит при плотности частиц порядка $10^{21} - 10^{22}$ см$^{-3}$. В этих условиях удается нагреть плазму до температур 1–10 кэВ импульсами длительностью $\tau_{\text{и}} \sim 100$ фс со сравнительно небольшой энергией $W \approx 10^{-2}$ Дж.

Нелинейная электронная физика, нелинейная квантовая электродинамика. При $I > I_{\text{а}}$ ($E > E_{\text{а}}$) мы всегда имеем дело с сильно ионизованной средой. Нелинейный отклик здесь — это нелинейный отклик

фемтосекундной лазерной плазмы Одним из интереснейших новых эффектов стал проявляющийся в сверхсильных полях эффект "надпороговой" ионизации атомов [42] Неожиданно сильным оказывается нелинейный отклик электрона, рассеивающегося на ионе в поле сверхсильной световой волны, последнее может привести к генерации многих хорошо сфазированных интенсивных гармоник, а следовательно, и к генерации сгустков электрического поля длительностью порядка $10^{-16} - 10^{-18}$ с [43]

Заметим, наконец, что прорыв в область сверхсильных полей снова привлек интерес к возможностям экспериментального наблюдения эффектов нелинейной квантовой электродинамики Хотя даже в самых смелых прогнозах речь не идет о генерации световых полей напряженностью $E \approx 10^{16}$ В/см ($I \sim 10^{30}$ Вт/см$^2$), при которых возможна генерация электронно-позитронных пар в вакууме ("оптический пробой вакуума"), столкновение уже доступных интенсивных лазерных пучков с релятивистскими электронами может привести к наблюдению ряда эффектов, представляющих принципиальный интерес

При $I > 10^{19}$ Вт/см$^2$ возможна реализация нелинейного томсоновского и нелинейного комптоновского рассеяний При $I > 10^{23} - 10^{24}$ Вт/см$^2$ речь идет уже о наблюдении черенковского излучения в вакууме [44] Несомненно, создание исследовательских комплексов, объединяющих мощные фемтосекундные лазерные системы и электронные ускорители [45], открывает интереснейшие возможности исследований в фундаментальной физике!

# Литература


1 *Ахманов С А , Выслоух В А , Чиркин А С* Оптика фемтосекундных лазерных импульсов — М Наука, 1988

2 *Fork R L , Green B I , Shank C V* //Appl Phys Lett 1981 V 38 P 197

3 *Migus Arnold, Shank Charles V , Ippen Erich P , Fork Richard L* Amplification of subpicosecond optical pulses theory and experiment//IEEE Journal of Quant Electron 1982 V QE-18, No 1

4 *Fork R L , Brito Cruz C H , Becker P C , Shank C V* //Opt Lett 1987 V 12 P 483

5 *Baltuska Andrius, Wei Zhiyi, Pshenichnikov Maxim S , Wiersma Douwe A , Szipocs Robert* 5-fs, 1-MHz repetition rate laser for ultrafast spectroscopy/In Conference on Lasers and Electro-Optics, Technical Digest, Baltimore, USA 1997 P 10

6 *Spielmann Ch , Sartania S , Krausz F , Szipocs R , Ferencz K , Nisoli M , De Silvestri S , Svelto O* Generation of multigigawatt sub 5-fs light pulses/In Conference On Lasers and Electro-Optics, Technical Digest, Baltimore, USA 1997 P 191

7 *Babzien M , Pogorelsky I V , Ben-Zvi I , Skaritka J , Meskovsky I K* Terawatt picosecond $CO_2$ lasers and applications/In Conference on Lasers and Electro-Optics, Technical Digest, Baltimore, USA 1997 P 388

8 *Leonhardt R , Holzapfel W , Zinth W , Kaiser W* Terahertz beats of vibrational modes studied by femtosecond coherent Raman spectroscopy//Rev Phys Appl 1987 V 22 P 1735

9 *Ruhman S , Joly A G , Kohler B , Williams L R , Nelson K A* Intramolecular and intermolecular dynamics in molecular liquids through femtosecond time-resolved impulsive stimulated scattering//Rev Phys Appl 1987 V 22 P 1717

10 *Kolomoitsev D V , Nikitin S Yu* New problems in femtosecond time-domain coherent anti-Stokes Raman spectroscopy of large molecules//Proc SPIE 1991 V 1402 P 31

11 *Weiner A M , Leaird D E , Wiederrecht G P , Nelson K A* Femtosecond pulse

sequences used for optical manipulation of molecular motions//Science 1990 V 247 P 1327

12 *Weiner A M, Leaird D E, Wiederrecht G P, Nelson K A* Femtosecond multiple-pulse impulsive stimulated Raman scattering spectroscpy//JOSA B 1991 V 8 P 1264

13 *Pennington D M, Perry M D, Britten J A et al* The petawatt laser and targeting performance/In Conference On Lasers and Electro-Optics, Postdeadline Papers, Baltimore, USA 1997

14 Femtosecond optical interactions//JOSA B 1985 V 2, No 4

15 Ultrafast Phenomena IV/Eds D Auston, K B Eisenthal — Berlin Springer-Verlag, 1984

16 Ultrafast Phenomena V/Eds G R Fleming, A E Siegman — Berlin Springer-Verlag, 1986

17 Ultrashort laser pulses and applications/Ed W Kaiser — Berlin Springer-Verlag, 1988

18 *Wood O R, Silfast W T, Tom H W et al* Soft X-rays produced by picosecond target irradiance//Proc Int Quant Electron Conf — Baltimore, Maryland 1987 P 187

19 *Kuhlke D, Herpers V, von der Linde D* Soft X-ray emission from subpicosecond laser produced plasma//Тез докл V Междунар симп "Сверхбыстрые процессы в спектроскопии" Вильнюс 1987 С 25

20 *Williamson S, Mourou G, Li J C M* Time-resolved laser induced phase transformation in aluminium Ultrafast Phenomena IV/Eds D Auston, M Eisenthal — Berlin Springer–Verlag 1984 P 147

21 *Ахманов С А, Баграташвили В Н, Голубков В В и др* Получение в электронографе ЭМР-100 пикосекундных импульсов быстрых электронов с помощью фотоэмиссии в лазерном поле// Письма в ЖТФ 1985 Т 11 С 157

22 *Kapteyn H C, Murhane M H, Falcone R W* Time-resolved measurements of short wavelength fluorescence from X-ray excited ions//Optics Lett 1987 V 12 P 663

23 *Sah R C, Attwood D, Sabersky A P* Picosecond pulses from future synchrotron radiation sources Ultrafast Phenomena IV/Eds D Auston, M Eisenthal — Berlin Springer–Verlag 1984 P 49

24 *Ахманов С А* Оптические нелинейности высших порядков Нелинейная спектроскопия/Под ред Н Вломбергена — М Мир, 1979 С 323

25 *Flytzanis C* Bistability, Instability and Chaos in Passive Nonlinear Optical Systems Nonlinear Phenomena in Solids/Ed M Borisov — Singapoure, World Scientific Publ 1984

26 *Kaplan A* Bistable Solitons//Phys Rev Lett 1985 V 55 P 1291

27 *Гиббс Х* Оптическая бистабильность Управление светом с помощью света — М Мир, 1988

28 *Ахманов С А, Воронцов М А, Иванов В Ю* Крупномасштабные поперечные взаимодействия световых волн в системах с двумерной обратной связью, генерация структур, оптическая турбулентность//Письма в ЖЭТФ 1988 Т 12 С 898

29 *Желудев Н И* Поляризационная неустойчивость, мультистабильность и хаос в оптике//УФН 1989 Т 157 С 881

30 *Келдыш Л В* Ионизация в поле сильной электромагнитной волны//ЖЭТФ 1964 Т 47 С 11

31 *Бункин Ф В, Казаков А Е, Федоров М В* Взаимодействие интенсивного оптического излучения со свободными электронами//УФН 1972 Т 107 С 559

32 *Райзер Ю П* Лазерная искра и распространение разрядов — М Наука, 1974

33 *Шен И Р* Принципы нелинейной оптики — М Наука, 1989

34 *Eberly J H, Maine P, Mourou G, Strickland D* High intensity laser pulses extend the realm of optical physics//Laser Focus 1987 V 23, No 10 P 84

35 *Rolland C, Corkum P* Compression of high power optical pulses//J Opt Soc Am 1988 V B–5 P 641

36 *Ахманов С А* Генерация сверхсильных световых полей от нелинейной оптики атомов и молекул к нелинейной электронной физике/Тез докл VII Всесоюз конф по взаимодействию лазерного излучения с веществом Ленинград 1988 С 102
37 *Corkum P B , Rolland C , Srinivasan Rao T* Supercontinuum generation in gases//Phys Rev Lett 1986 V 57 P 2268
38 *Ахманов С А , Гордиенко В М , Джиджоев М С и др* Фемтосекундные лазерные системы на эксимерных лазерах факторы, ограничивающие предельные поля/Тез докл V Междунар симп "Сверхбыстрые процессы в спектроскопии" Вильнюс 1987 С 57
39 *Ахманов С А , Емельянов В И , Коротеев Н И , Семиногов В Н* Воздействие мощного лазерного излучения на поверхность полупроводников и металлов//УФН 1985 Т 147 С 675
40 *Tom A , Aumiller G , Brito-Cruz C* Time Resolved SHG Study of Laser Induced Disorder of Solid Surfaces//J Opt Soc Am 1987 V B-4 P 48
41 Laser Optics of Condensed Matter/Proc of USSR-US Bi-National Symposium — N Y Plenum Press, 1988
42 *Freeman R , Bucsbaum P H et al* Above threshold ionization with subpicosecond laser pulses//Phys Rev Lett 1987 V 59 P 1092 , J Opt Soc Am 1987 V B-4, No 5 Special Issue "Multielectron Excitation in Atoms"
43 *Ахманов С А , Гладков С М , Желтиков А М , Коротеев Н И* Генерация гармоник оптического излучения при рассеянии электронов на ионах//Препринт физического факультета МГУ № 5 — М 1988
44 *Fernow R C , Kirk H G , Bigio I et al* Proposals for experimental studies of nonlinear quantum electrodynamics — Brookhaven Natiuonal Lab, Preprint July 30, 1986
45 *Schwarzschild B* //Physics Today 1998 V 51, No 2 P 17
46 *Szipocs R , Ferencz K , Spielmann C , Krausz F* Chirped multilayer coatings for broadband dispersion control in femtosecond lasers//Opt Lett 1994 V 19 P 201
47 *Stingl A , Spielmann C , Krausz F , Szipocs R* Generation of 11-fs pulses from a Ti sapphire laser without the use of prisms//Opt Lett 1994 V 19 P 204
48 *Zhou J , Taft G , Huang C , Murnane M M , Kapteyn H C , Christov I P* Pulse evolution in a broad-bandwidth Ti sapphire laser//Opt Lett 1994 V 19 P 1149
49 *Stingl A , Lenzner M , Spielmann C , Krausz F , Szipocs R* Sub-10-fs mirror-dispersion-controlled Ti sapphire laser//Opt Lett 1995 V 20 P 602

# Дополнение 17

# Нелинейная пространственная динамика световых полей

*Самоорганизация светового поля в нелинейных системах с обратной связью. Оптическая синергетика. Оптическое моделирование нейронных сетей.*

В течение длительного времени в нелинейной оптике исследовались проблемы временнóй динамики светового поля. При этом по существу учитывались лишь продольные (по направлению распространения волны) взаимодействия. "Изгнать" поперечные пространственные эффекты оказалось на удивление просто (в теории по крайней мере). Достаточно было предположить, что волны являются плоскими, а среда распространения и начальные условия пространственно однородными. Интересно, что даже в этой идеализированной ситуации, когда основные возможности проявления нелинейных эффектов как бы заблокированы, динамика нелинейных оптических систем оказывается чрезвычайно разнообразной. Здесь можно наблюдать практически все динамические режимы от простейших осцилляций до различных сценариев перехода к хаосу [1–3].

Тем не менее всегда чувствовалась некоторая ущербность таких моделей. Что такое, например, чисто временнóй хаос пространственно распределенного светового поля? Приготовив систему со сложной временнóй динамикой, нам едва ли удастся сохранить "чистоту и покой" в другом, пространственном измерении. Как выключить диффузию и дифракцию, которые всегда готовы нарушить идеализированную картину чисто временны́х взаимодействий?

**Самоорганизация светового поля в нелинейных системах с обратной связью.** И вот только недавно пришло время ввести в игру неиспользованные резервы нелинейной волновой динамики — поперечные пространственные взаимодействия светового поля. Этот шаг является принципиально важным, так как, завязав в едином клубке нелинейных взаимодействий пространство и время, мы лишаем себя возможности факторизовать пространственные и временны́е переменные. Первый шаг в этом направлении, по-видимому, был сделан В. Фирфом, который "приписал" к классическому уравнению для модуляции фазы в нелинейном резонаторе Фабри–Перо поперечный лапласиан, учитывающий пространственные взаимодействия диффузионного типа [4]. Система откликнулась на это формированием волн переключения фазы, распространяющихся в поперечном сечении пучка: возник простейший тип пространственной неустойчивости светового поля.

Диффузия — не единственный механизм реализации поперечных взаимодействий. Более сложный пример нелинейной динамики — случай, когда поперечные эффекты связаны с дифракцией светового пучка. Оптическая схема системы изображена на рис. Д17.1. В столь простой системе развивается удивительно красивый тип пространственной неустойчивости [5–7]. Можно наблюдать динамику процесса потери устойчивости пространственно однородных решений, формирование гексагональных структур, переход к оптической турбулентности. На рис. Д17.2 изображены некоторые из наблюдаемых картин. Казалось бы, незначительное изменение характера пространственных взаимодействий (переход от диффузии к дифракции), — и вот уже вместо волн пере-

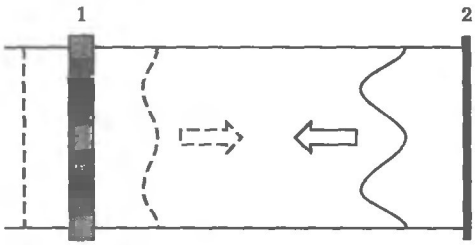



Рис. Д17.1. Схема нелинейной оптической системы, в которой возникает пространственно-временна́я неустойчивость светового поля. Флуктуации плотности среды с керровской нелинейностью 1 приводят к модуляции фазы поля (пунктир). Дифракция светового пучка с пространственно неоднородной фазой на трассе с отражением от зеркала 2 приводит к возникновению модуляции интенсивности (сплошная линия)

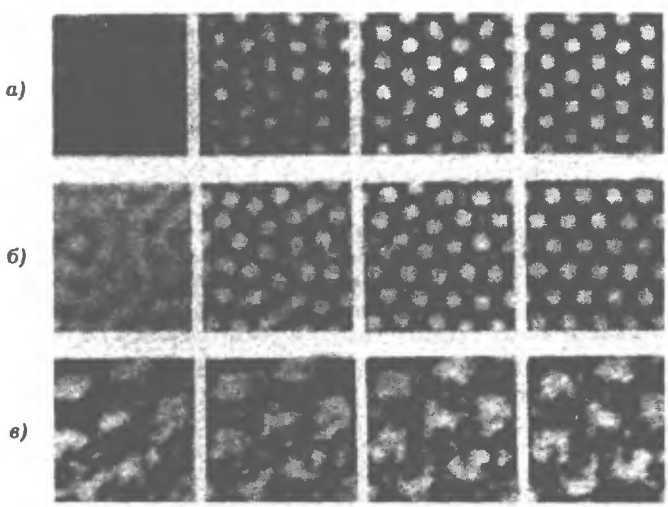



Рис. Д17.2. Эволюция поперечной структуры светового поля в нелинейной среде. Формирование гексагональных структур (дефокусирующая среда) (*а*), то же (фокусирующая среда) (*б*), оптическая турбулентность (фокусирующая среда) (*в*)

ключения формируются регулярные пространственные структуры. Интересно, что оба эффекта (диффузия и дифракция) действуют как бы в одном направлении — приводят к "размазыванию" пространственных возмущений, однако сколь разительно отличается динамика системы! Все это свидетельствует о важной роли характера пространственных взаимодействий.

Какие еще существуют возможности для изменения топологии пространственных взаимодействий? Одна из них заключается в использовании различного типа нелинейных резонаторов. Дифракционное "перемешивание" поперечных возмущений в резонаторе происходит гораздо более эффективно, чем в пассивных системах. Простейший пример такой системы — кольцевой резо-

натор со сферическими зеркалами и тонким слоем двухуровневой активной среды — проанализирован Л. Луджиато с соавторами [8–10]. Рассматривалось взаимодействие поперечных мод с фиксированным продольным индексом $q = 2p + l$ и различными значениями поперечных индексов $p$ и $l$. Предполагалось, что лазер работает в одночастотном режиме. Численное моделирование и эксперименты, поставленные в Германии Дж. Таммом [11] (лазер на парах $Na_2$) и в США Дж. Тредиссом с соавторами [12] ($CO_2$-лазер) позволили наблюдать пространственно-временну́ю динамику светового поля в таком резонаторе. Наиболее впечатляют вращающиеся в поперечном направлении оптические структуры поля. Существует также интересный динамический режим пространственной неустойчивости, названный авторами "оптическим прожектором" (сканирующая в поперечном направлении область, в пределах которой сосредоточена основная часть энергии пучка).

Ф. Т. Арекки исследовал пространственную динамику светового поля в кольцевом резонаторе с фоторефрактивным кристаллом [13; 14]. Ему удалось наблюдать разнообразные процессы самоорганизации светового поля в резонаторе: спонтанные межмодовые переходы, вращающиеся вихревые структуры, дислокации фазы и т. д. Для визуализации сингулярностей фазы использовалась интерференция с опорной волной. Пространственная картина напоминает интерференционные изображения спекл-поля с многочисленными дислокациями, которые рождаются, медленно перемещаются, умирают. Фантастические картины внутрирезонаторной оптической турбулентности можно сравнить разве что с некоторыми полотнами художников модернистов.

В работах Д. Андерсона [15; 16] речь идет об использовании конкуренции нелинейных мод, формирующихся в связанных петлевых резонаторах с фоторефрактивными кристаллами, для решения задач распознавания бинарных образов. Система имеет набор стационарных пространственных конфигураций поля (нелинейных мод). В зависимости от начальных условий (предъявленного изображения) в жесткой конкурентной борьбе побеждает та или иная мода. Таким образом, в нелинейной оптической системе реализуется принцип "победитель получает все" (Winner Takes All, WTA-динамика).

С. А. Ахманов, М. А. Воронцов, А. В. Ларичев и А. Н. Рахманов исследовали нелинейную динамику светового поля в системах с двумерной обратной связью [17–19]. Нелинейными элементами являлись различного типа оптически управляемые жидкокристаллические модуляторы света. Главная особенность экспериментов заключается в реализации нелокальных пространственных взаимодействий.

Как уже отмечалось, диффузия и дифракция представляют собой пример локальных пространственных взаимодействий, когда возбуждение в поперечном сечении светового пучка передается по принципу "близкодействия" от точки к точке, постепенно охватывая все бо́льшую пространственную область. В нелинейных оптических системах с двумерной обратной связью можно реализовать альтернативный принцип передачи взаимодействий, своеобразное "дальнодействие". Возбуждение, локализованное вблизи некоторой точки нелинейной среды, после обхода поля через контур обратной связи проявляет себя совсем в другом месте. Через нелинейное взаимодействие непосредственно оказываются связанными области, удаленные друг от друга на расстояние, сравнимое с поперечным размером светового пучка.

На рис. Д17.3 показана схема нелинейного интерферометра с двумерной обратной связью, в котором несложно реализовать простейшие типы нелокальных связей (линейный сдвиг, поворот поля на некоторый угол и изменение

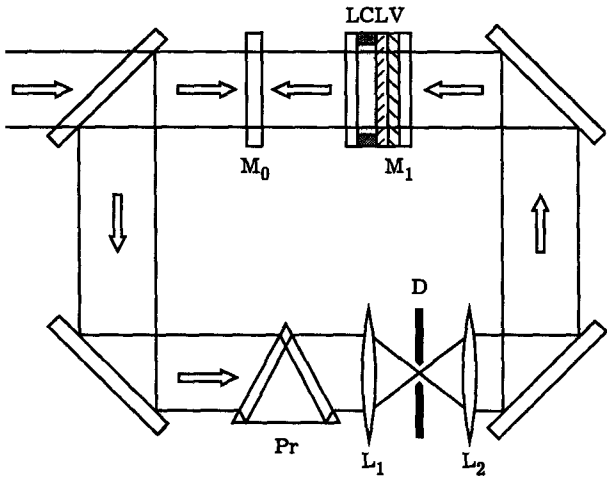



Рис. Д17.3. Схема нелинейного интерферометра с двумерной обратной связью: $M_0$ — опорное зеркало, $M_1$ — объектное зеркало, LCLV — жидкокристаллический пространственный модулятор света. Нелокальные взаимодействия реализуются с помощью призмы Дове (поворот поля) и линз $L_1$ и $L_2$ (изменение масштаба). Изменение размера диафрагмы D позволяло влиять на силу проявления дифракции

масштаба изображения). Прототип этой системы и использовался в экспериментах. Наблюдались следующие типы пространственной неустойчивости светового поля:

- пространственная бистабильность,
- волны переключения,
- одномерные ротационные волны (рис. Д17.4, *б*),
- двумерные оптические ревербераторы (рис. Д17.4, *а*),
- оптические спирали (рис. Д17.4, *в*),
- концентрические волны (рис. Д17.4, *д*),
- оптическая турбулентность (рис. Д17.4, *е*),
- сложные типы пространственной самоорганизации светового поля,
- примеры конкуренции и сосуществования различных пространственных структур (рис. Д17.4, *г*).

Оказалось, что введение нелокальных взаимодействий существенным образом изменяет динамику системы: обогащается палитра нелинейных пространственных динамических мод, возникает их зависимость от начальных условий и сильная межмодовая конкуренция, развиваются сложные типы самоорганизации. Интересно, что все это происходит, говоря на языке синергетики, в однокомпонентной активной системе (динамические процессы описываются одним

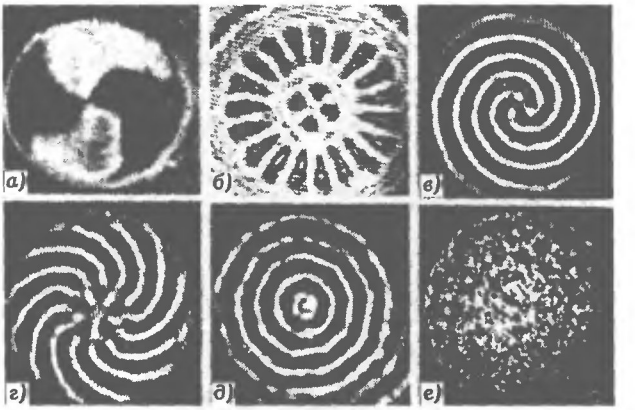



Рис. Д17.4. Пространственные динамические структуры в нелинейных оптических системах с двумерной обратной связью. Показаны фотографии поперечного сечения пучка гелий-неонового лазера (апертура пучка 18 мм, мощность 40 мВт) в системе с нелокальными пространственными взаимодействиями. Двухлепестковый оптический ревербератор (вращающаяся по часовой стрелке структура) (*а*). Одномерные ротационные волны. В контуре обратной связи расположена маска, пропускающая свет лишь в пределах двух кольцевых зон, в которых и развивается ротационная неустойчивость (*б*). Оптическая спираль с топологическим зарядом, равным трем. Спираль вращается (*в*). Пример сосуществования и конкуренции различных реверберaторов (*г*). Концентрические, разбегающиеся из центра или сходящиеся к центру волны (*д*). Оптическая турбулентность. Картина изменяется во времени (*е*)

нелинейным уравнением в частных производных диффузионного типа). Нелокальность взаимодействий учитывается введением в это уравнение топологического преобразования координат и в этом все дело [19].

Стоит исключить нелокальные пространственные связи, и вместо многообразия конкурирующих, взаимодействующих, сосуществующих структур получим тривиальную динамику — волны переключения и ничего более [20]. Ничего более, если это однокомпонентная система. Добавим еще один нелинейный элемент и мы попадаем в святая святых классической синергетики: в мир двухкомпонентных активных сред, наполненный бегущими импульсами, реверберaторами, спиральными волнами, диссипативными структурами [21]. Все эти прекрасные примеры самоорганизации собирались по крупицам. Что-то найдено в химии, что-то в физике плазмы, в аритмии сердечной ткани, в движениях протоплазмы [22]. Так создавался образ междисциплинарной науки — синергетики.

**Оптическая синергетика.** И вот сейчас в оптике появилась возможность создать своеобразный конструктор нелинейной динамики (синергетический конструктор). Комбинируя однокомпонентные оптические синергетические блоки, можно собирать разнообразные многокомпонентные активные системы с фантастически богатой динамикой. А если еще и нелокальные связи ввести? Добавьте к этому уникальные возможности вмешиваться в динамику системы (это вам не сердечная ткань), управлять практически всеми параметрами, наблюдать процессы визуально и регистрировать их без всяких ухищре-

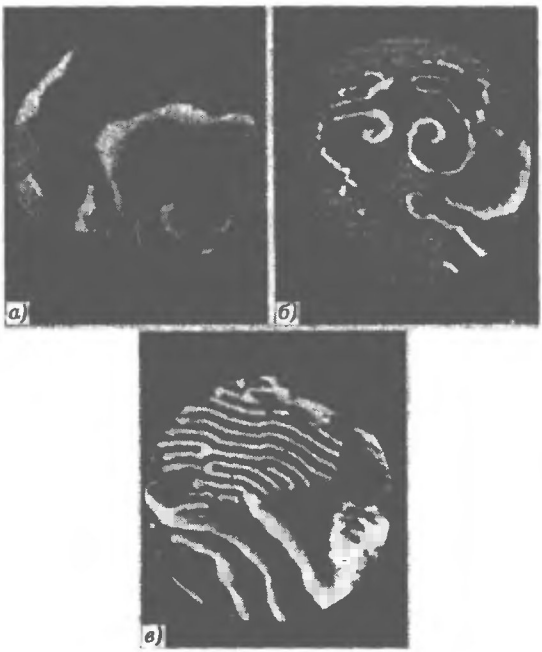



Рис. Д17.5. Динамические процессы, развивающиеся в поперечном сечении пучка в двухкомпонентной активной оптической системе: бегущие импульсы (*а*); спиральные волны (*б*); вытеснение бегущей волной диссипативной структуры (*в*)

ний обычной фото- или кинокамерой, и станет совершенно ясно, что наступает эра новой — оптической — синергетики.

В оптических системах удается наблюдать типичные для синергетики динамические режимы: бегущие импульсы, спиральные волны, диссипативные структуры (рис. Д17.5). Все эти примеры пространственно-временнóй динамики получены в оптической модели двухкомпонентной активной системы, схема которой показана на рис. Д17.6. В контур оптической обратной связи системы помещался дополнительный просветный жидкокристаллический пространственный модулятор света с большой постоянной времени отклика [23; 24].

**Оптическое моделирование нейронных сетей.** Интерес к нейронаукам и нейрокомпьютерам не обошел стороной и нелинейную оптику. Оказалось, что проблемы, возникающие в теории искусственных нейросетей и в области нелинейной пространственной динамики световых полей, имеют много общего [25]. Рассмотрим эту проблему более подробно и прежде всего обсудим вопрос, что такое развитая нейросеть с точки зрения физика, занимающегося нелинейной оптикой?

Пожалуй, главная черта этого весьма необычного физического объекта заключается в пространственной нелокальности взаимодействий. Каждый из нейронов имеет многочисленные "длинные" связи с другими нейронами, позволяющие за сравнительно короткое время передавать возбуждение на расстояния, сравнимые с размерами самой системы. В развитых нейросетях работают и традиционные механизмы распространения возбуждения диффузионного ти-

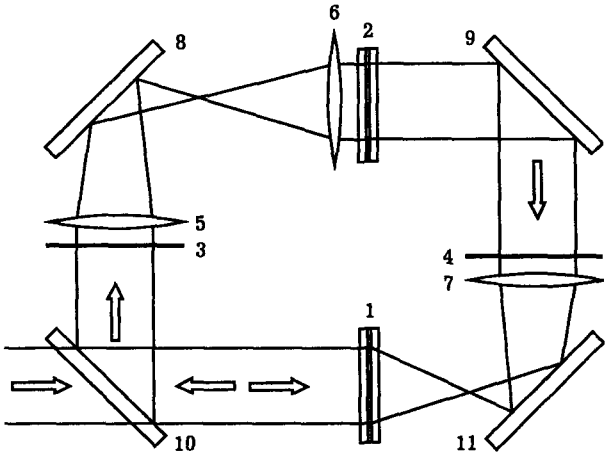



Рис. Д17.6. Оптическая схема двухкомпонентной активной системы. В схеме использовались нелинейные ячейки (жидкокристаллические пространственно-временные модуляторы света) с существенно различными постоянными времени. Одна из ячеек модулирует фазу отраженного света, другая — проходящего. Изображение зеркального слоя нелинейной ячейки 1 с помощью линз 5, 6 и зеркал 10, 8 проецируется на фотослой ячейки 2 и далее с помощью линзы 7 и зеркал 9, 11 на фотослой первой ячейки; 1 — ЖК пространственный модулятор с внутренним зеркалом, 2 — ЖК модулятор с большой постоянной времени (~100 мс), 3, 4 — поляроиды. Направление директора ЖК составляет угол 45° с направлениями ориентации скрещенных поляроидов и с направлением поляризации лазера

па. Помимо этого, каждый элемент системы (нейрон) является сильно нелинейным, а число элементов может быть фантастически велико ($\sim 10^{10}$ нейронов). Нейросеть является многокомпонентной системой, содержащей различные по своим динамическим свойствам типы нейронов.

Как подойти к анализу столь сложного образования? Одна из возможностей — построение относительно простых базовых моделей физических систем, обладающих на функциональном уровне основными чертами, присущими развитым нейросетям: нелинейность каждого элемента, большое число элементов, нелокальность взаимодействий, наличие различных по своим динамическим свойствам компонент. С этой точки зрения нелинейные оптические системы, динамика которых обсуждалась выше, могут рассматриваться как простейшие модели нейроподобных систем. О некоторой аналогии между динамикой искусственных нейросетей и пространственно распределенных систем с нелокальными взаимодействиями свидетельствуют и общие черты поведения этих объектов: многообразие возможных динамических решений (нелинейных мод), сильная конкуренция, благодаря которой осуществляется отбор решений, определяющее влияние на динамику системы начальных условий [25; 26].

Нелинейная пространственная динамика световых полей представляет собой чрезвычайно интересное направление исследований. Словно в калейдоскопе одна оптическая структура спешит сменить другую, появляются новые идеи и интересные приложения.

# Литература


1 *Воронцов М А* //Известия Российской Академии Наук, серия физическая 1992 Т 56, № 4 С 7
2 *Гиббс Х* Оптическая бистабильность Управление светом с помощью света — М Мир, 1988
3 *Otsuka K , Ikeda K* //Phys Rev A 1989 V 39 P 5209
4 *Firth W J , Galbraith I* //IEEE J Quant Electron 1985 V 21 P 1399
5 *Firth W J* //Proc ECOOSA-90 Quantum Optics, Inst Phys Conf 1991, No 115, section 4 P 173
6 *D'Alessandro G , Firth W J* //Phys Rev Lett 1991 V 66 P 2597
7 *Le Berre M , Resseyre E , Tallet A* //Proc ECOOSA-90 Quant Optics, Inst Phys Conf 1991, No 115
8 *Lugiato L A , Prati F , Narducci L M , Oppo G L* //Opt Commun 1989 V 69, No 5,6 P 387
9 *Brambilla M , Battipede F , Lugiato L A et al* //Phys Rev A 1991 V 43 P 5090
10 *Brambilla M , Lugiato L A , Penna V et al* //Phys Rev A 1991 V 43 P 5114
11 *Tamm C* //J Opt Soc Amer B 1992 V 9
12 *Tredicee J R , Quel E J , Ghozzawi A M et al* //Phys Rev Lett 1989 V 62 P 1274
13 *Arecchi F T , Gadomski W , Lapucci A et al* //J Opt Soc Amer B 1988 V 5 P 1153
14 *Arecchi F T* //Proc ECOOSA-90 Quant Optics, Inst Phys Conf 1991, No 115
15 *Anderson D Z* Introduction to neural and electronic networks/Eds Zornetzer S F , Davis J L , Lau C — San Diego Academic Press, 1990
16 *Anderson D Z* Neural Computers/Eds Eckmiller R , Malsburg V D — Berlin, Heidelberg Springer–Verlag, 1988 P 417
17 *Ахманов С А , Воронцов М А , Иванов В Ю* //Письма в ЖЭТФ 1988 Т 47 С 611
18 *Ivanov V Yu , Larichev A V , Vorontsov M A* //Proc SPIE 1991 V 1402 P 145
19 *Vorontsov M A , Zheleznykh N I , Larichev A V* //Proc SPIE 1991 V 1402 P 154
20 *Ахманов С А , Воронцов М А , Иванов В Ю* /В кн Новые физические принципы оптической обработки информации — М Наука, 1989 С 263
21 *Ivanov V Yu , Zheleznykh N I , Vorontsov M A* //Opt Quant Electr 1990 V 22 P 505
22 *Хакен Г* Синергетика — М Мир, 1980
23 *Воронцов М А , Рахманов А Н , Шмальгаузен В И* //Квантовая электроника 1991 Т 18 С 21
24 *Воронцов М А , Попова А П , Рахманов А Н , Шмальгаузен В И* //Квантовая электроника 1992 Т 19 С 643
25 *Vorontsov M A* //Proc SPIE 1991 V 1402 P 116
26 *Grossberg S* //Neural Networks 1988 V 1 P 17

# Дополнение 18
# Из истории физической оптики

*Цитаты из оригинальных работ Франкена, Бломбергена, Ахманова, Хохлова.*

**Питер Франкен. Генерация второй оптической гармоники.** Развитие импульсных рубиновых оптических мазеров[1,2] сделало возможным получение монохроматических (6943 Å) световых пучков, которые при фокусировке создают электрическое поле порядка $10^5$ В/см. Весьма привлекательна возможность использования этой огромной интенсивности для получения оптических гармоник с помощью подходящих нелинейных материалов. В этом Письме мы даем краткий теоретический анализ и описание экспериментов, в которых мы наблюдали вторую гармонику (на $\sim$ 3472 Å), возникающую при пропускании интенсивного светового пучка на 6943 Å через кристаллический кварц.

Подходящий материал для генерации оптических гармоник должен иметь нелинейный диэлектрический коэффициент и быть прозрачным как для основной оптической частоты, так и для частот генерируемых обертонов. Поскольку в достаточно сильных полях все диэлектрики обладают нелинейностью, можно предложить использовать такие материалы как кварц и стекло. Зависимость поляризации диэлектрика от электрического поля $E$ может быть схематически представлена в виде

$$P = \chi E\left(1 + \frac{E}{E_1} + \frac{E^2}{E_2^2} + \cdots\right), \qquad (Д18.1)$$

где $E_1$, $E_2$, имеют порядок величины атомных электрических полей ($\sim 10^8$ esu). Если $E$ меняется во времени синусоидально, присутствие в выражении (Д18.1) членов квадратичной и более высоких степеней будет приводить к тому, что $P$ будет содержать гармоники основной частоты. При этом четные гармоники должны сопровождаться поляризацией постоянного направления.

Пусть $\vec{p}$ есть часть $\vec{P}$, квадратичная по $\vec{E}$, т. е. $\vec{p}$ есть линейная функция компонент симметричного тензора $\vec{E}\vec{E}$. На восемнадцать коэффициентов, присутствующих в этой функции, накладываются ограничения, обусловленные точечной симметрией среды. Фактически эти ограничения идентичны соотношениям, определяющим пьезоэлектрические коэффициенты. В частности, $\vec{p}$ обращается в ноль для материалов таких как стекло, которые изотропны или имеют центр инверсии. Для кристаллического кварца, однако, имеются два независимых коэффициента $\alpha$ и $\beta$, таких, что

$$\begin{aligned} p_x &= \alpha(E_x^2 - E_y^2) + \beta E_y E_z, \\ p_y &= -\beta E_x E_z - 2\alpha E_x E_y, \\ p_z &= 0 \end{aligned} \qquad (Д18.2)$$

($z$ ось третьего порядка или оптическая; $x$ ось второго порядка). Если световой пучок распространяется в кварце в одном из этих трех главных направлений,

[1] *Maiman T. H.*//Nature. 1960. V. 187. P. 493.
[2] *Collins R. J. et al.*//Phys. Rev. Lett. 1960. V. 5. P. 303.

Таблица Д18 1

Квадрат полного $p$, перпендикулярного направлению распространения света через кристалл кварца

| Направление падающего пучка | Квадрат полного $p$, перпендикулярного направлению распространения |
|---|---|
| $x(E_x = 0)$ | $p_y^2 + p_z^2 = 0$ |
| $y(E_y = 0)$ | $p_z^2 + p_x^2 = \alpha^2 E_x^4$ |
| $z(E_z = 0)$ | $p_x^2 + p_y^2 = \alpha^2 (E_x^2 + E_y^2)^2$ |

уравнения (Д18.2) дают результаты, представленные в таблице Д18.1. Излучение второй гармоники должно отсутствовать в первом случае, должно зависеть от поляризации падающего света во втором случае и не зависеть от этой поляризации в третьем случае.

Если интенсивный пучок монохроматического света фокусируется в область объемом $V$, должна генерироваться вторая гармоника с интенсивностью $I$, равной (в гауссовых единицах)

$$I \sim (\omega^4/c^3)(pv)^2(V/v), \qquad (Д18.3)$$

где $\omega$ — угловая частота второй гармоники, $c$ — скорость света, $v$ — эффективный "объем когерентности", т. е. размер области внутри образца, в которой существует фазовая когерентность возбуждаемой нелинейной поляризации. (На практике этот объем может быть много меньше $V$). Оценку $v$ можно сделать на основе разных соображений. Можно ожидать, что в продольном направлении размер этой области не превышает величины $\sim [n_2(n_2 - n_1)^{-1}]\lambda_2$, где $n_1$ и $n_2$ — показатели преломления для основной частоты и частоты второй гармоники соответственно, $\lambda_2$ — длина волны второй гармоники. Поперечный размер этой области определяется, главным образом, характеристиками когерентности оптического мазера. Ситуация для лазера на газовом разряде[3] в этом отношении, очевидно, значительно лучше, чем для прибора на рубине[4,5]. Для объема когерентности $10^{-11}$ см$^3$, который, мы полагаем, реалистичен в нашем случае, уравнение (Д18.1) показывает, что интенсивность второй гармоники может достигать долей процента от интенсивности излучения на основной частоте.

В экспериментах мы использовали промышленный образец рубинового оптического мазера[6], который дает свет с энергией примерно в 3 Джоуля на длине волны 6943 Å в одномиллисекундном импульсе. Этот свет пропускался через красный светофильтр для подавления фона ксеноновой лампы-вспышки, а затем фокусировался внутрь образца из кристаллического кварца Выходящий пучок анализировался кварцевым призменным спектрометром, снабженным фотографической пластинкой типа Истмен-103, нечувствительной к красно му свету. Репродукция первой пластинки, на которой отчетливо виден сигнал второй гармоники (3472 Å), показана на рис. Д18.1. Эта пластинка экспонировалась только для одной вспышки оптического мазера. Мы полагаем, что следующие два факта, помимо прочих, устраняют возможность артефакта:

[3] *Javan A , Bennet W R , Herriott D.R.*// Phys Rev Lett 1961 V 6 P 106

[4] *Maiman T H* //Nature 1960 V 187 P 493

[5] *Collins R J et al* //Phys Rev Lett 1960 V 5 P 303

[6] Trion Instruments, Inc , Model No TO-3000

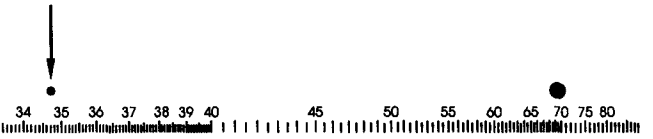



Рис. Д18.1. Изображение пластинки, на которой присутствовал сигнал второй гармоники. Шкала длин волн дана в единицах 100 Å. Стрелка на 3472 Å указывает на маленькую, но яркую точку изображения, создаваемого второй гармоникой. Изображение первичного пучка на 6943 Å очень велико вследствие образования ореола

1. Свет на 3472 Å исчезает, когда кристалл кварца убран или заменен стеклом.

2. Свет на 3472 Å демонстрирует ожидаемую зависимость от поляризации и ориентации, которая представлена в табл. Д18.1.

Рассмотрение плотности фотографического изображения и эффективности оптической системы привели нас к заключению, что порядка $10^{11}$ фотонов второй гармоники генерировались внутри кварцевого образца за один импульс.

Генерация второй гармоники должна наблюдаться в изотропных материалах, таких как стекло, если к образцу приложено сильное поперечное поле. Это поперечное поле может быть переменным, в этом случае оно будет создавать боковые спектральные компоненты для основной частоты и гармоник.

**Николас Бломберген. Нелинейная оптика.** Нелинейные свойства материальной среды описываются с помощью разложения поляризации в ряд по степеням напряженности поля. Например, в чисто дипольном случае имеем

$$\vec{P} = \chi^{(1)}\vec{E} + \chi^{(2)}\vec{E}\vec{E} + \chi^{(3)}\vec{E}\vec{E}\vec{E} + \cdots .$$

Первый член определяет обычную линейную восприимчивость, второй — нелинейную восприимчивость низшего порядка и т. д. Такое разложение поляризации по полю применимо вследствие малости оптических нелинейностей. Именно из-за малой величины эффекта оптические нелинейности были экспериментально обнаружены только недавно, после появления мощных лазеров. С помощью лазеров с модуляцией добротности теперь удается получать электрические поля с максимальными амплитудами порядка $10^6$ В/см, что соответствует потоку мощности порядка $10^9$ Вт/см$^2$. Вместе с тем при благоприятных условиях можно обнаружить нелинейные оптические эффекты и с потоком мощности порядка 0,1–10 МВт/см$^2$.

Теория распространения волн в нелинейной среде может быть развита чисто классически; при этом нелинейные оптические свойства среды могут анализироваться таким же образом, как анализировались линейные оптические свойства материальных сред в начале прошлого столетия. Для развития теории нелинейных свойств сред во времена Максвелла, Лоренца и Друде не хватало движущей силы экспериментальных открытий. Экспериментальная реализация вынужденного излучения света внезапно изменила обстановку; началось энергичное исследование поведения световых лучей высокой интенсивности. Уже сделано много обобщений классических законов оптики на случаи, когда существенны нелинейности. В то же время сами нелинейности представляют значительный интерес с точки зрения изучения строения вещества. Подобная же ситуация имеет место, разумеется, и в линейном случае. Линейный пока-

затель преломления определяет пути световых лучей, и, наоборот, изучая их поведение, мы получаем данные о природе вещества.

**Сергей Ахманов и Рем Хохлов. Об одной возможности усиления световых волн.** Предметом настоящей заметки является обсуждение некоторых возможностей усиления и генерации световых волн в оптически прозрачных кристаллах, поляризация которых нелинейно зависит от напряженности электрического поля распространяющейся волны. Нелинейность указанного типа (ее, очевидно, можно рассматривать как зависимость диэлектрической проницаемости от поля) была успешно использована в ряде описанных недавно экспериментов[7,8,9] по генерации оптических гармоник. Естественно, что этим не исчерпываются возможные нелинейные эффекты в таких кристаллах. Ниже будет показано, что при определенных условиях в оптически прозрачной среде, поляризация которой квадратично зависит от напряженности электрического поля, может быть получено параметрическое усиление бегущих световых волн, осуществляемое за счет энергии интенсивной световой волны (так называемой накачки) и что условия параметрического усиления могут быть реализованы в одноосных кристаллах.

Как известно[10,11,12], в области основного параметрического резонанса энергия интенсивных колебаний накачки частоты $\omega_н$, производящих модуляцию реактивных параметров колебательной системы или передающей линии, может передаваться колебаниям на частотах $\omega_1$ и $\omega_2$, удовлетворяющих условию

$$\omega_н = \omega_1 + \omega_2 \tag{Д18.4}$$

(в частном случае $\omega_1 = \omega_2 = \omega_н/2$ — так называемое "вырожденное" параметрическое взаимодействие). Для выяснения особенностей такого взаимодействия в пространстве следует рассмотреть полуограниченную среду, диэлектрическая проницаемость которой изменяется по закону[13]

$$\varepsilon(t,x,\omega) = \varepsilon_0(\omega)\left\{1 + m\left\{\exp\left[i(\omega_н t - k_н x)\right] + \text{к. с.}\right\}\right\}, \tag{Д18.5}$$

(ось $x$ перпендикулярна границе раздела).

Пусть волны на частотах $\omega_1$ и $\omega_2$ имеют компоненты $E_y = E; H_x; H_z$, а их волновые векторы образуют с осью $x$ углы $\theta_1$ и $\theta_2$. Тогда электрическое поле в среде будет описываться уравнениями

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}, \qquad D = \varepsilon E, \tag{Д18.6}$$

а суммарное поле можно записать в виде

$$\begin{gathered} E = E_1(x)\exp\left[i(\omega_1 t - \vec{k}_1\vec{r})\right] + E_2^*(x)\exp\left[-i(\omega_2 t - \vec{k}_2\vec{r})\right] + \text{к. с.}, \\ k_i = \omega_i c^{-1}\sqrt{\varepsilon_0(\omega_i)}. \end{gathered} \tag{Д18.7}$$

[7] *Bass M., Franken P. Hill A., Peters C., Weinreich G.*//Phys. Rev. Lett. 1962. V. 8. P. 18.
[8] *Giordmaine J.*//Phys. Rev. Lett. 1962. V. 8. P. 19.
[9] *Maker P. D., Terhune R., Nisenoff M., Savage C.*//Phys. Rev. Lett. 1962. V. 8. P. 21.
[10] *Heffner H., Wade G.*//J. Appl. Phys. 1958. V. 29. P. 1321.
[11] *Tien P.*//J. Appl. Phys. 1958. V. 29. P. 1347.
[12] *Карасев М. Д.*//УФН. 1959. Т. 19. С. 217.
[13] Коэффициент модуляции $m$ при использовании современных когерентных генераторов света может быть $\sim 10^{-4} - 10^{-5}$ (см. *Franken P., Hill A., Peters C., Weinreich G.*//Phys. Rev. Lett. 1961. V. 7. P. 118.)

Подставляя (Д18.7) в (Д18.6), учитывая (Д18.5) и (Д18.4) и собирая составляющие с частотами $\omega_1$ и $\omega_2$, можно получить дифференциальные уравнения, характеризующие изменения в пространстве амплитуд $E_1$ и $E_2$. При этом оказывается, что наличие члена $\varepsilon E$ в уравнении (Д18.6) существенно влияет на поведение амплитуд $E_1$, $E_2$ и может привести к усилению лишь при выполнении следующего соотношения (закона сохранения импульса):

$$\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_{\text{н}}. \qquad \text{(Д18.8)}$$

Для малых $m$ естественно предположить, что

$$\frac{d^2E_i}{dx^2} \ll k_i \frac{dE_i}{dx} \qquad (i = 1, 2).$$

Тогда уравнения для $E_1$, $E_2$ имеют вид

$$\frac{dE_1}{dx} = -\frac{im_1k_1}{2\cos\theta_1}E_2^*, \qquad \frac{dE_2^*}{dx} = \frac{im_2k_2}{2\cos\theta_2}E_1$$

и, следовательно,

$$\frac{d^2E_1}{dx^2} = \frac{m_1m_2k_1k_2}{4\cos\theta_1\cos\theta_2}E_1 \qquad (m_i = m(\omega_i)). \qquad \text{(Д18.9)}$$

Из (Д18.9) видно, что в рассматриваемой среде возможны экспоненциально нарастающие волны, фактор нарастания которых

$$\alpha = \frac{1}{2}[m_1m_2k_1k_2/\cos\theta_1\cos\theta_2]^{1/2}.$$

Полагая при $x = 0$, что $E_1 = E_0$ и $E_2 = 0$ (колебания "разностной" частоты $\omega_2$, необходимые для усиления, возникают в нелинейной среде, угол $\theta_1$ определяется условиями падения и свойствами среды, а угол $\theta_2$ автоматически устанавливается, согласно условию (Д18.8)[14]) и используя граничные условия, получаем

$$E_1 = E_0\operatorname{ch}\alpha x, \quad E_2 = iE_0\sqrt{m_2k_2\cos\theta_1/m_1k_1\cos\theta_2}\operatorname{sh}\alpha x. \qquad \text{(Д18.10)}$$

Для конкретизации требований к дисперсионным свойствам нелинейной среды (Д18.8) рассмотрим для простоты случай $\omega_1 \approx \omega_2 = \omega$. Тогда из (Д18.8) следует, что для получения усиления фазовая скорость накачки (частота $\sim 2\omega$) должна превышать фазовую скорость волны на частоте $\omega$, или для показателей преломления

$$n(\omega) > n(2\omega). \qquad \text{(Д18.11)}$$

Условие (Д18.11) может быть выполнено, например, в одноосном отрицательном кристалле, если частота $\omega$ (сигнал) возбуждает обыкновенную волну, а частота $2\omega$ (накачка) — необыкновенную[15]. Сказанное означает, что в таком кристалле могут быть реализованы условия исследованной выше задачи.

Рассмотренный механизм усиления может быть использован для построения перестраиваемых по частоте когерентных оптических генераторов. Одна из возможных схем такого генератора показана на рисунке Д18.2. Ограниченный

[14] Разумеется, если (Д18.8) может быть вообще выполнено.

[15] *Giordmaine J.*//Phys. Rev. Lett. 1962. V. 8. P. 19.

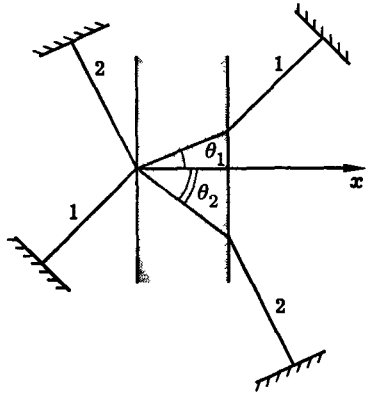



Рис. Д18.2. Схема параметрического генератора света

с двух сторон кристалл помещен между двумя парами параллельных зеркал. В этом случае диэлектрическая проницаемость имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left[1 + m_{\text{пр}} \cos(\omega_{\text{н}} t - k_{\text{н}} x) + m_{\text{обр}} \cos(\omega_{\text{н}} t + k_{\text{н}} x)\right].$$

Пусть условия усиления для частот $\omega_1$ и $\omega_2$ выполнены в направлениях соответственно $\theta_1$ и $\theta_2$. Тогда, устанавливая плоскости зеркал нормально к лучам 1 и 2, можно возбудить параметрические колебания на частотах, близких к $\omega_1$ и $\omega_2$. Условие самовозбуждения генератора имеет вид $m \geq 1/\sqrt{Q_1 Q_2}$, где $Q_1$, $Q_2$ — добротности оптических резонаторов, образованных параллельными зеркалами.[16]

Причиной, ограничивающей амплитуду самовозбуждающихся колебаний, является обратная их реакция на поле накачки; это означает, что КПД рассматриваемого генератора должен быть достаточно высок. Таким образом, возбуждая кристалл с нелинейной поляризуемостью интенсивной световой волной, можно реализовать перестраиваемые по частоте усилители и генераторы света со значительным КПД. Изменяя параметры анизотропии кристалла внешними полями, можно влиять на условия энергообмена между волнами и, следовательно, производить модуляцию усиливаемых или генерируемых колебаний.

# Литература

1 *Franken P. A., Hill A. E., Peters C. W., Weinreich G.*//Phys. Rev. Lett. 1961. V. 7, No. 4. P. 118.
2. *Бломберген Н.* "Нелинейная оптика" — М.: Мир, 1966. С. 34.
3. *Ахманов С. А., Хохлов Р. В.*//ЖЭТФ. 1962. Т. 43. С. 351.

[16]Отметим, что поскольку $Q_1$, $Q_2$ в оптическом диапазоне весьма велики, самовозбуждение колебаний представляется возможным и в том случае, когда зеркала установлены лишь по одному из направлений.

# Предметный указатель


"p" поляризация 518
"s" поляризация 517
"Атомная" единица интенсивности 626
"Директор" 531
"Накачка" 591
"Релятивистская" интенсивность 627
"Ультрафиолетовая катастрофа" 208

D-линия натрия 491

KDP 560, 571

Аксиома сложения вероятностей 257
Аксиома умножения вероятностей 258
Аксиомы теории вероятностей 258
Активный элемент 224
Амплитудная решетка 405
Амплитудный рельеф 439
Анализ поляризованного света 549
Анализ светового поля 426
Ангармонизм осциллятора 574
Ангстрем 286
Анизотропная нелинейная диспергирующая среда 568
Анизотропная среда 480
Анизотропное отражение 549
Анизотропное поглощение 528, 550
Анизотропное преломление 550
Анизотропные материалы 527
Аномальная дисперсия 490, 494
Ансамбль нелинейных осцилляторов 572
Ансамбль осцилляторов 139
Ансамбль реализаций 257, 271
Атом в переменном внешнем поле 292

Биномиальное распределение 260
Бистабильный оптический элемент 183
Ближняя зона дифракции 366
Боровский радиус 286, 571
Брюстеровский угол 520

Вектор Пойнтинга 49
Векторная диаграмма 356
Векторный потенциал 237
Вероятность 257
Вероятность случайного события 257
Взаимодействие света с веществом 476
Вибратор Герца 128
Видность интерференционной картины 317, 332
Внутриатомное электрическое поле 570
Внутрирезонаторная лазерная спектроскопия 500
Водород 495
Волна когерентных колебаний 173
Волновая зона 243
Волновая природа света 308
Волновая расстройка 587
Волновая функция 287
Волновое уравнение 16, 478, 566, 568, 581, 585
Волновой вектор 36
Волновой параметр 465
Волновой синхронизм 581
Волны переключения 636
Волоконно-оптический компрессор 609
Восстановление светового поля 444
Временная дисперсия 479
Временная когерентность света 332
Временная спектроскопия 169
Время затухания поляризации 168
Время когерентности 332
Время корреляции 272
Время радиационного затухания 136
Время релаксации энергии 168
Вторая гармоника 560
Вынужденное излучение 220
Вынужденное комбинационное рассеяние 188
Вынужденное комбинационное рассеяние света 561, 591
Вынужденное поглощение 219
Вынужденное рассеяние 190
Выпрямление света 578
Вырожденное параметрическое взаимодействие 644
Высокочастотный эффект Керра 559, 562, 570, 599
Высшие оптические нелинейности 182

Гамильтониан 289
Гармонический осциллятор 177, 203, 245, 252, 290, 596
Гауссов пучок 464
Гауссова случайная величина 265
Гауссово распределение вероятности 264
Гелий-неоновый лазер 53, 227
Генерация второй гармоники 560, 581
Генерация второй оптической гармоники 178, 641
Генерация сверхкоротких световых импульсов 230
Генерация света 224
Генерация световых волн 644
Генерация седьмой гармоники 182
Генерация третьей оптической гармоники 182
Генерация фемтосекундных световых импульсов 606
Геометрия отражения и преломления 513
Гипотеза Планка 209
Гистерезис 182
Главная плоскость 541
Главные диэлектрические проницаемости кристалла 535

Главные оси кристалла 535
Главные показатели преломления 536
Глаз человека 343
Голограмма 444
Голографическая решетка 410
Голография 444
Граничные условия 512
Граничные условия Кирхгофа 373
Групповая скорость света 504

Дальняя дисперсионная зона 508
Дальняя зона 243, 391, 507
Дальняя зона дифракции 366, 393
Двойное лучепреломление 527, 545, 582
Двумерная плотность вероятности 265, 270
Двумерная решетка 418
Двуосные кристаллы 536
Двухуровневая квантовая система 299
Двухуровневая квантовая система 594
Двухуровневая система 287
Двухуровневая система в резонансном внешнем поле 296
Двухуровневое приближение 296
Действительное изображение 446
Дельтаобразный импульс 115
Дельта-функция 114
Дефазировка 168
Диагностическая интерферометрия 315
Диполь 133
Дипольное излучение 252
Дипольный момент 129, 133, 251, 485, 531
Дискретные случайные величины 258
Дискретный спектр 104
Диспергирующая среда 501, 504
Дисперсионная длина 508
Дисперсионная формула Коши 495
Дисперсионное расплывание импульса 508
Дисперсионное уравнение 204, 482
Дисперсия восприимчивости 169
Дисперсия групповых скоростей 506
Дисперсия света 488
Дисперсия случайного процесса 270
Дисперсия случайной величины 262
Дифракционная длина пучка 393, 465
Дифракционная длина светового пучка 366
Дифракционная расходимость излучения 430
Дифракционная расходимость пучка в дальней зоне 368
Дифракционная решетка 405, 446
Дифракционный интеграл 378, 430
Дифракционный интеграл Кирхгофа—Гельмгольца 373
Дифракционный интеграл Френеля 350
Дифракция 305
Дифракция в дальней зоне 378, 391
Дифракция гауссова пучка 389, 403, 462
Дифракция на двумерных периодических структурах 418
Дифракция на диске 359
Дифракция на квадратном отверстии 385
Дифракция на краю экрана 360, 380
Дифракция на круглом отверстии 358, 386, 400
Дифракция на периодических структурах 405
Дифракция на прямоугольном отверстии 399
Дифракция на щели 382, 395
Дифракция плоской волны 355
Дифракция света 347
Дифракция света на решетке 405
Дифракция света на скрещенных решетках 420
Дифракция слаборасходящихся пучков 378
Дифракция Фраунгофера 391
Дифракция Фраунгофера на двумерных структурах 397
Дифракция Фраунгофера на одномерных структурах 395
Дифракция Френеля на двумерных структурах 385
Дифракция Френеля на одномерных структурах 380
Длина волны D-линии натрия 409
Длина когерентности 332
Добротность излучения 231
Добротность лазерного резонатора 329
Долгоживущее фотонное эхо 194
Доплеровская дефазировка 173
Доплеровское уширение 148

Естественная поляризация 38
Естественное уширение 146

Жидкий азот 561

Задача дифракции 427
Закон Бугера 159
Закон Вина 208
Закон Кирхгофа 198
Закон отражения света 514
Закон поглощения света 160
Закон преломления света 514
Закон сложения интенсивностей 307
Закон смещения Вина 212
Закон Снеллиуса 513
Закон Стефана—Больцмана 211
Законы теплового излучения 211
Запись светового поля 444
Затухание оптической поляризации 173
Звездный интерферометр Майкельсона 345
Зона Фраунгофера 393
Зонная пластинка Френеля 456
Зоны Френеля 353

**И**злучательная способность абсолютно черного тела 198
Излучательная способность тела 55, 198
Излучение диполя 133
Излучение диполя в дальней зоне 243
Излучение квадруполя 248
Излучение ротатора 246
Излучение света 197
Излучение точечного заряда 239
Измерение когерентности 340
Изотропная среда 479, 566
Изотропные кристаллы 535
Импульс световой волны 59
Импульсная переходная функция 169
Импульсное вынужденное рассеяние 615
Импульсный отклик среды 169
Инварианты распространения 509
Инварианты распространения светового пучка 429
Инверсия населенностей 224
Индуцированное поглощение 157
Инкремент параметрического усиления 187
Интеграл Гюйгенса—Френеля 352, 378
Интеграл Дюамеля 172, 483, 484, 504
Интеграл Фурье 106, 427
Интегралы Френеля 380
Интегральная теорема Кирхгофа—Гельмгольца 372
Интенсивность света 50
Интенсивность световой волны 482
Интерференционная картина 306
Интерференция 305
Интерференция монохроматических волн 309
Интерференция немонохроматического света 315
Интерференция поляризованных лучей 556
Интерференция света 306
Интерференция случайной световой волны 317
Интерферометр Майкельсона 309
Интерферометр Фабри—Перо 326, 446
Интерферометр Юнга 337
Исландский шпат 527
Источник накачки 224

**К**альцит 527
Картина Эри 402
Квадратичная нелинейная восприимчивость 571, 577
Квадратично-нелинейная среда 578
Квадратурные компоненты 142
Квадруполь 248, 252
Квадрупольное излучение 248, 252
Квадрупольный момент 251
Квазигармоническая волна 24
Квазигармонический процесс 170
Квазиплоская волна 20, 462
Квант 209
Квант света 218
Квантовая двухуровневая система 287
Квантовая система в переменном внешнем поле 296
Квантовые свойства атомов 216
Кварц 570, 571, 578, 641
Классификация кристаллов 535
Классификация сред 479
Классическая модель атома 129
Классическая модель нелинейной среды 572
Классическая осцилляторная модель среды 485
Классический осциллятор 299
Классический осциллятор 287
Когерентное антистоксово рассеяние света 562
Когерентность 305
Когерентность света 308, 332
Когерентный свет 308
Колебания диполя 134
Кольца Ньютона 314
Кольца равного наклона 313
Комбинационное рассеяние света 187, 592
Комбинационные частоты 190, 592
Компенсатор 551
Компенсатор Бабине 552
Компенсационная пластина 323
Комплексная диэлектрическая проницаемость 481
Комплексная запись 109
Комплексный коэффициент отражения 517
Комплексный коэффициент преломления 517
Комплексный коэффициент пропускания 414
Комплексный показатель преломления 481
Компрессия лазерных импульсов 562
Компрессия световых импульсов 609
Конфокальный параметр 469
Концентрические волны 636
Коррекция волнового фронта 191
Коррелятор 273
Корреляционная функция случайного процесса 270
Косинус-преобразование Фурье 111
Коэффициент корреляции 273
Коэффициент наклона 352
Коэффициент передачи линзы 431
Коэффициент поглощения света 160
Коэффициент Эйнштейна 220
Кристалл KDP 582
Кристалл рубина 225
Кристаллооптика 527
Критическая мощность самофокусировки 600
Круговая поляризация 34

Кубичная нелинейная восприимчивость 571
Кубично-нелинейный осциллятор 182

Лазер 216
Лазер Меймана 225
Лазер на гранате с неодимом 53
Лазер на неодимовом стекле 235
Лазер на углекислом газе 53, 228
Лазерная доплеровская анемометрия 454
Лазерная спектроскопия 498
Лазерное сверхсжатие вещества 86
Лазерный отжиг полупроводников 83
Лазерный термоядерный синтез 86
Лауэграмма 423
Линейная анизотропная среда 534
Линейная изотропная среда 488
Линейная однородная изотропная среда 480
Линейная оптическая восприимчивость 169, 481, 568, 569
Линейная оптическая поляризуемость 171
Линейная поляризация 33, 576
Линейная поляризуемость атома 575
Линейная система 169
Линейная среда 479
Линейный оператор 288
Линейный осциллятор 156
Линза 430
Лоренцева калибровка потенциала 238
Лоренцева форма 147, 151, 154, 497
Люминесценция 226

Магнитный момент 251
Магнитодипольное излучение 252
Материальное уравнение 567, 581, 582
Материальное уравнение анизотропной среды 531
Материальное уравнение нелинейной среды 566
Материальные уравнения 476
Матрица когерентности 39
Матрица плотности 293
Матричный элемент оператора 294
Маятники Чеботаева 193
Медленно меняющаяся амплитуда 171
Метод бигармонической накачки 562
Метод возмущений 177, 574
Метод скрещенных призм 498
Метод темного поля 438
Метод фазового контраста 439
Механизм отражения и преломления 511
Механизм самофокусировки 562
Механизмы оптической нелинейности 560
Микроскоп 344
Мнимое изображение 446
Многолучевая интерференция 323
Многомерная плотность вероятности 273
Многомерные корреляционные функции 273
Многомодовый лазер 230
Модели диспергирующих сред 504
Модели строения атома 282
Модель Бора 283
Модель Лоренца 485, 532
Модель сплошной среды 476
Модель Томсона 282
Молекулярные колебания 190
Момент импульса света 65
Монохроматическая световая волна 501
Монохроматическое излучение 230
Мощность излучения диполя 135
Мощность светового пучка 52

Наведенная анизотропия 557
Наклонное падение лучей на решетку 411
Намагниченность среды 477
Направление синхронизма 582
Нарушение принципа суперпозиции 565
Насыщающийся поглотитель 235
Независимые случайные события 257
Неизохронность колебаний 179
Некогерентный свет 308
Нелазерный источник света 139
Нелинейная анизотропная среда 568
Нелинейная восприимчивость 478, 568, 569
Нелинейная динамика световых полей 633
Нелинейная изотропная среда 568
Нелинейная оптика 176, 560, 581, 643
Нелинейная поляризация 568, 576, 582
Нелинейная рефракция 599
Нелинейная система с обратной связью 633
Нелинейная среда 479, 567
Нелинейно-оптические эффекты 567
Нелинейно связанные осцилляторы 187, 188
Нелинейность 176
Нелинейность керровского типа 570
Нелинейные восприимчивости среды 569
Нелинейный осциллятор 176, 572
Нелинейный резонанс 182
Необыкновенная волна 541
Неоднородная ширина спектра 167
Неоднородно уширенная линия 168
Неоднородно уширенная полоса 170
Неоднородный ансамбль осцилляторов 166
Непрерывные случайные величины 262
Нестационарная спектроскопия 169
Нестационарный процесс 271
Ниобат лития 560
Нормальная дисперсия 490, 493
Нормальное распределение вероятности 264
Нормировка интеграла Гюйгенса—Френеля 364

Область дисперсии 446
Обратная связь 224
Обыкновенная волна 541
Огибающая 142

Ограниченная синусоидальная решетка 414
Одномодовый лазер 230
Одноосные кристаллы 536, 540
Однородная ширина спектра 167
Однородно уширенная линия 168
Оператор 288
Оператор Гамильтона 289
Оператор Лапласа 427
Операторная система обозначений 534
Оптика анизотропных сред 527
Оптико-акустическая спектроскопия 500
Оптическая анизотропия 527
Оптическая бистабильность 182
Оптическая левитация 89
Оптическая ловушка 90
Оптическая накачка 224
Оптическая ось кристалла 540
Оптическая поляризация среды 531
Оптическая сила линзы 460
Оптическая синергетика 637
Оптическая спектроскопия 161, 498
Оптическая субгармоника 184
Оптическая турбулентность 636
Оптические восприимчивости 568, 577
Оптические ревербераторы 636
Оптические спирали 636
Оптический компрессор 608
Оптический резонатор 202, 224
Оптический эффект Керра 559
Оптическое детектирование 578
Оптическое запоминающее устройство 194
Оптическое моделирование нейронных сетей 638
Оптическое охлаждение 68
Опыт Герца 128
Опыт Гримальди 348
Опыт Ньютона 25
Опыт Франкена 560
Опыт Юнга 307
Опыты Аббе—Портера 436
Опыты Герца 13
Опыты Лебедева 62
Опыты Майкельсона 77
Опыты Физо 75
Опыты Эшкина 90
Освещенность поверхности 54
Осциллятор поля 202
Осциллятор с квадратичной нелинейностью 178
Осциллятор с кубичной нелинейностью 178
Осцилляторная модель атома 282
Относительное отверстие линзы 371
Отражательная решетка 405, 412
Отражение света 511
Отражение света от поверхности металла 524
Отражение света при наклонном падении 523
Отражение света при нормальном падении 521
Отрицательные кристаллы 536
Отрицательные частоты 109

Параболическое уравнение 462
Парадокс Рэлея—Джинса 208
Параксиальный световой пучок 378
Параметрическая генерация света 184
Параметрическая неустойчивость 186
Параметрический генератор света 602
Параметрический осциллятор 185
Параметрический резонанс 184, 185, 644
Параметры Стокса 34
Пассивная синхронизация мод 235
Первичное эхо 193
Периодические функции 104
Пикосекунда 235
Плоская волна 17
Плоская гармоническая волна 17
Плоская линза 459
Плоскость падения 514
Плотность вероятности 263, 270
Поглощательная способность тела 196
Поглощение света 156, 488
Подзорная труба 343
Показатели преломления 536
Показатель преломления 162, 569
Показатель преломления среды 431
Полное внутреннее отражение 514
Положительные кристаллы 536
Полосы равного наклона 312
Полосы равной толщины 313
Полуволновая пластинка 554
Полуволновые зоны 353
Полуклассическая модель 287
Получение поляризованного света 549
Поляризатор света 529
Поляризация света 29
Поляризация среды 171, 296, 477, 485, 567, 574
Поляроид 529
Порог ВКР 561
Порог оптического пробоя 627
Порядок дифракции 407
Постоянная Планка 208
Построение дифракционных картин 356
Постулаты Бора 216
Потенциалы Лиенара—Вихерта 241
Потенциалы электромагнитного поля 237
Поток излучения 54
Предельная длительность импульса 235
Предельно короткие импульсы света 605
Преломление света 511
Преобразование распределений вероятности 266
Преобразование светового поля 426
Преобразование Фурье—Бесселя 402

Преобразование Ханкеля 402
Преобразование частоты лазерного излучения 561
Преобразование шума линейной системой 281
Преобразователи лазерного излучения 562
Приближение квазиоптики 462
Приближение Фраунгофера 378
Приближение Френеля 378, 429
Призма Глана 550
Принцип Гюйгенса 349
Принцип Гюйгенса—Френеля 349
Принцип постоянства скорости света 309
Принцип причинности 169, 484, 534
Принцип суперпозиции 27, 480, 565
Пропускательная решетка 405
Просветление оптики 522
Пространственная бистабильность 636
Пространственная дисперсия 479
Пространственная когерентность света 335
Пространственная спектральная амплитуда 394, 398
Пространственная спектральная плотность 394, 399
Пространственная частота 393
Пространственное преобразование Фурье 393, 430
Пространственный спектр поля 431
Пространство волновых чисел 205
Прямоугольная амплитудная решетка 415
Пятно Пуассона 359

Равенство Парсеваля 117
Равновесное тепловое излучение 198
Равнораспределение энергии по степеням свободы 202
Радиационное затухание 136
Радиус когерентности 335
Радиус когерентности света 344
Размеры зон Френеля 354
Размеры фокальной области линзы 468
Разность населенностей 297
Разрешающая сила оптических приборов 342
Разрешающая способность 446
Разрешающая способность микроскопа 441
Разрешающая способность телескопа 441
Распределение Бернулли 260
Распределение Больцмана 209
Распределение Гаусса 264
Распределение Пуассона 146, 262
Распределение Рэлея 144
Распространение светового импульса 501
Растровая фокусирующая оптика 458
Резкость интерферометра 328
Резонатор 224
Релаксационная матрица 296
Релаксационный оператор 296
Релаксационный процесс 296
Релаксация 296
Релаксация энергии 168
Рентгеновский структурный анализ 423
Реплика 410
Референтная плоскость 312
Рефракция 493
Решение параболического уравнения 463
Ротатор 246
Ротационные волны 636
Рубиновый лазер 225
Ряд Фурье 104

Самовоздействие света 181, 564
Самодефокусировка света 181, 563
Самоканалирование светового пучка 600
Самомодуляция 181
Самомодуляция импульсов 181
Самомодуляция светового импульса 564
Самоорганизация светового поля 633
Самофокусировка света 181, 562, 598
Самофокусировка световых пучков 181
Сверхкороткие рентгеновские импульсы 625
Сверхкороткие электронные импульсы 625
Сверхсильные световые поля 605
Сверхскоростной оптический затвор 559
Световое давление 59, 89
Световое эхо 191
Световые кванты 216
Светореактивное давление 86
Сдвиг спектральной линии 151
Серия Бальмера 283
Серия испытаний 257
Сероуглерод 563, 600
Сечение поглощения света 65, 158
Сила осциллятора 491
Сила света 54
Силы светового давления 97
Синтез светового поля 426
Синусоидальная решетка 414
Синхронизация мод 232
Скалярный потенциал 238
Сканирующий интерферометр Фабри—Перо 451
Скорость света 12, 71
След матрицы 294
Случайная величина 258
Случайная импульсная последовательность 146
Случайная световая волна 317
Случайная фазовая модуляция 150
Случайная функция 268
Случайное колебание 317
Случайное световое поле 308, 335
Случайное событие 257
Случайные световые колебания 317
Случайный процесс 268
Собственное значение 288

Собственные значения оператора 288
Собственные моды резонатора 230 330
Собственные состояния поляризации 539
Собственные состояния поляризации волны 536
Собственные функции оператора 288
Солнечный свет 52
Состояние квантовой системы 287
Спеклы 339
Спектр излучения 144
Спектр поглощения 161
Спектр случайного процесса 276
Спектральная амплитуда 108
Спектральная плотность 116 277
Спектральная плотность излучения черного тела 201
Спектральная плотность равновесного теплового излучения 201
Спектральная фаза 108
Спектральное разложение 25 104
Спектральное разложение поля 426
Спектральные приборы 446
Спектральный анализ изображений 434
Спектральный метод 171
Спектрон 507
Спектроскопия оптического смешения 452
Спектроскопия поглощения 161
Спираль Корню 380
Спираль Френеля 357
Сплошная среда 476
Сплошной спектр 106
Спонтанное излучение 219
Спонтанное комбинационное рассеяние 188
Среда с дисперсией второго порядка 506
Среда с дисперсией первого порядка 504
Среднее значение случайного процесса 270
Среднее значение случайной величины 261
Статистика ансамбля 139
Статистика излучения 142
Статистическая закономерность 257
Статистическое среднее 261
Статистическое усреднение 274
Стационарная спектроскопия 169
Стационарное уравнение Шредингера 289
Стационарные случайные процессы 270
Стационарный случайный процесс 317
Стимулированное эхо 193
Стоксова компонента 190 591
Столкновительное уширение 150
Стоячая волна 202
Сфера Пуанкаре 34
Сферическая волна 18
Схема генерации второй гармоники 585

Телескоп 343 443
Температура поверхности Солнца 213
Тензор диэлектрической проницаемости 534
Тензор оптической восприимчивости 533
Тензорная связь векторов 533
Тензорная система обозначений 533
Тензорная функция Грина 534 569
Теорема Винера—Хинчина 144 278 334
Теория Аббе 434
Теория вероятностей 257
Теория дисперсии Лоренца 493
Теория дифракции Кирхгофа 371
Теория оптической левитации 91
Теория случайных процессов 268
Тепловая линза 563
Тепловое действие света 80
Тепловое излучение 195
Тепловое самовоздействие 563
Термодинамика равновесного теплового излучения 202
Титан-сапфировый лазер 236
Толуол 563
Тонкая сферическая линза 459
Точечный источник света 340
Точное решение задачи дифракции 429
Третья оптическая гармоника 182
Трехмерная оптическая память 612
Трехуровневая схема 225
Турмалин 528

Уравнения для поляризации населенностей и поля 298
Угловая расходимость пучка 430
Угловой спектр излучения 394 399
Угловой спектр пучка 429
Угол анизотропии 530
Угол Брюстера 519
Угол отражения 513
Угол падения 513
Угол полного отражения 515
Угол полной поляризации 520
Угол преломления 513
Угол синхронизма 590
Удельная рефракция вещества 493
Удельный коэффициент усиления ВКР 598
Узкополосное излучение 231
Узкополосный процесс 170
Узкополосный световой сигнал 501
Узкополосный случайный процесс 318
Укороченное уравнение 170
Укороченные уравнения ВКР 597
Управление поляризацией света 553
Управление светом с помощью света 625
Уравнение Гельмгольца 372 427
Уравнение дифракционной решетки 406
Уравнение для матрицы плотности 294
Уравнение Неймана 296
Уравнение нормалей Френеля 544
Уравнение осциллятора 532
Уравнение Френеля 544
Уравнение Шредингера 289

Уравнения Лауэ 423
Уравнения Максвелла 14, 133, 476, 566
Уровни энергии 216
Усиление света 190, 223
Усиление световых волн 644
Условие нормировки 260, 264
Условие синхронизма 603
Условия излучения 130
Условия самовозбуждения лазера 224
Условная вероятность 257
Усреднение по времени 274
Уширение спектральной линии 146

**Ф**аза 142
Фазировка колебаний осцилляторов 190
Фазировка осциллятора внешним полем 180
Фазировка осцилляторов 193
Фазовая решетка 405
Фазовая самомодуляция 608
Фазовая скорость света 162, 504
Фазовый рельеф 439
Фактор резкости 326
Фемтосекунда 235
Фемтосекундные лазерные импульсы 605
Фемтосекундные технологии 611
Фемтосекундный лазер 611
Физика излучения 128
Фильтрация оптических полей 436
Фокусировка гауссова пучка 462
Фокусировка света 370
Фокусное расстояние линзы 459
Форма спектральной линии 497
Формирование изображения по Аббе 435
Формирование оптического изображения 434
Формула Вина 208
Формула линзы 460
Формула Лоренц—Лоренца 493
Формула Планка 208, 216
Формула Рэлея—Джинса 207
Формулы Френеля 515
Фотон 67, 218
Фотонный двигатель 68
Фотоэффект 217
Френелевская теория дифракции 430
Функция Грина 169, 428, 464, 483, 504
Функция Грина ансамбля осцилляторов 173
Функция Грина осциллятора 172
Функция импульсного отклика 484
Фурье-анализ волнового поля 434
Фурье-оптика 426, 436
Фурье-синтез изображения 434
Фурье-спектроскопия 323, 452

**Х**арактеристики лазерного излучения 229

**Ц**вета кристаллических пластинок 557
Центр симметрии 177
Центральная предельная теорема теории вероятностей 265

**Ч**астица в потенциальной яме 290
Частота в обратных сантиметрах 316
Частотная дисперсия 479
Частотная спектроскопия 169
Частотный коэффициент передачи 169, 171, 428, 483, 504
Частотный фильтр 326
Черное тело 213
Четвертьволновая пластинка 553
Число степеней свободы поля 203
Число Френеля 355, 465

**Ш**ирина углового спектра 430
Шкала электромагнитных волн 14

**Э**ксперимент Ландсберга и Мандельштама 188
Электродинамика излучения 237
Электродинамическая постоянная 12
Электронный микроскоп 442
Электрооптический модулятор 558
Элементарный источник света 128
Эллипсоид показателей преломления 542
Энергетика отражения и преломления 515
Энергетическая светимость 54
Энергетическая светимость тела 215
Энергетические уровни 209
Энергия импульса 52
Энергия света 47
Энергия теплового излучения 55
Эрмитов оператор 295
Эрмитова матрица 295
Эталоны времени и длины 78
Эфир 71
Эффектр Брюстера 519
Эффект Дики 151
Эффект Керра 529, 558, 562, 570
Эффект Комптона 218
Эффекты нелинейной оптики 560
Эшелетт 409, 413

**Я**ркость источника света 55
Ячейка Керра 558