СВОБОДНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Алексей Мячин

Основные определения курса в терминах универсальной конструкции

Векторные пространства (ВП) ниже предполагаются конечномерными, категория $\mathcal{V} = Vct = Vect_{\Bbbk}^{fin}$.

Базисы векторных пространств

Возьмём две категории $\mathcal{C} = Vct, \mathcal{D} = Set$ и функтор F – забывающий структуру векторного пространства $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ – от каждого ВП он оставляет множество векторов.

Построим универсальный морфизм из произвольного фиксированного множества $X \in \mathcal{D}$ для функтора F.

Для множества X образуем множество формальных (т.е. вектор – это просто запись, без вычислений и результата) конечных линейных комбинаций с коэффициентами в $\Bbbk$: $V_X := Span_{\Bbbk}(X)$ – это ВП с базисом ровно из векторов – элементов множества X. Т.о. в категории $\mathcal{D}$ определена стрелка $u : X \to F(V_X)$, которая множеству неких элементов ставит в соответствие то же множество, но уже рассматриваемое как множество векторов в базисе V_X.

Утверждение. Пара (u, X) имеет универсальное свойство для функтора F.

Возьмём произвольное ВП A', тогда определено множество $F(A')$.

Пусть есть стрелка $f : X \to F(A')$. Покажем как можно пропустить f через пару (u, X).

Для множества X построим V_X. Теперь в категории Vct можем построить линейное отображение $h : V_X \to A'$. Оно опеределено однозначно, т.к. его значения в A' уже заданы (отображением f) на базисе X. Далее с базиса оно только продолжается по линейности на V_X, а такое продолжение единственно (любой вектор V_X записывается в базисе единственным способом).

Перенеся h функтором F, получим

$$F(h) \circ u = f$$

В категории $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} V_X \arrow[d, "h"'] \\ A' \end{tikzcd}$$

В категории $\mathcal{D}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "f"'] & & F(V_X) \arrow[dl, "F(h)"] \\ & F(A') & \end{tikzcd}$$

Декартово произведение ВП

В категории $\mathcal{V}$, зафиксируем пару ВП V_1, V_2. С их участием построим контравариантный функтор $F : \mathcal{V}^{op} \to Set$ с действием

- на объектах: $U \mapsto Hom(U, V_1) \times Hom(U, V_2)$, т.е. ВП U переходит в множество отображений с элементами – парами стрелок $U \to V_1$ и $U \to V_2$;
- на стрелках: морфизм $l : U \to W$ переходит в морфизм в Set $Hom(W, V_1) \times Hom(W, V_2) \to Hom(U, V_1) \times Hom(U, V_2)$ (направление противоположно направлению l).

Образуем ВП $V_1 \times V_2$ – новый объект в $\mathcal{V}$ и рассмотрим соответствующий ему объект – пару отображений в Set: $(\pi_1 \times \pi_2) \in Hom(V_1 \times V_2, V_1) \times Hom(V_1 \times V_2, V_2)$, $\pi_i : V_1 \times V_2 \to V_i$.

Утверждение. Пара $(V_1 \times V_2, \pi_1 \times \pi_2)$ имеет универсальное свойство для функтора F.
Возьмём другой морфизм в Set $f : F(W) \to V_1 \times V_2$ для какого-то ВП W. Множество $F(W)$ – это пары отображений (f_1, f_2), $f_i : W \to V_i$.
Покажем что существует единственный морфизм $Fh : F(W) \to F(V_1 \times V_2)$ такой что

$$f = (\pi_1 \times \pi_2) \circ Fh \Leftrightarrow f_i = \pi_i \circ Fh$$

$$\begin{tikzcd} & F(W) \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, "Fh"] \arrow[dr, "f_2"] & \\ V_1 & V_1 \times V_2 \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

Такой морфизм построим для данных $(f_1, f_2) = f$ как декартову пару из этих отображений $Fh = f_1 \times f_2$ – линейно по каждому компоненту, поэтому $f_1 \times f_2$ является морфизмом $Hom(W, V_1) \times Hom(W, V_2) \to Hom(V_1 \times V_2, V_1) \times Hom(V_1 \times V_2, V_2)$ и, значит, определён в Set. Если теперь взять $\pi_i \circ Fh$, то есть просто оставить первый компонент пары, то получим то же самое отображение f_i из $Hom(V_1 \times V_2, V_1)$.
Построенная стрелка Fh также единственна, т.к. однозначно задаётся своими компонентами f_i.

Прямая сумма ВП

С фиксированными ВП V_1, V_2 можно построить двойственную конструкцию – копроизведение ВП в $\mathcal{V}$. Для этого обратим стрелки и возьмём ковариантный функтор $F : \mathcal{V} \to Set$ с действием $U \mapsto Hom(V_1, U) \times Hom(V_2, U)$.

Утверждение. Пара $(V_1 \oplus V_2, f_1 \oplus f_2)$ – универсальный элемент функтора F. Т.е. для любой пары морфизмов ВП как элемента $Hom(V_1, U) \times Hom(V_2, U)$

$$V_1 \xrightarrow{f_1} W \xleftarrow{f_2} V_2$$

есть единственный морфизм векторных пространств

$$h : V_1 \oplus V_2 \to W := \begin{cases} f_1, & \text{если } v \in V_1; \\ f_2, & \text{если } v \in V_2, \end{cases}$$

такой что Fh замыкает диаграмму (точнее обе её части):

$$\begin{tikzcd}
 & F(W) & \\
V_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "\iota_1"'] & V_1 \oplus V_2 \arrow[u, "Fh"] & V_2 \arrow[ul, "f_2"'] \arrow[l, "\iota_2"]
\end{tikzcd}$$

$$Fh \circ \iota_1 = f_1 \quad Fh \circ \iota_2 = f_2$$

Если существуют какие-то стрелки f_1, f_2, то они однозначно задают морфизм Fh. С точностью до изоморфизма, коммутирующего со стрелками ι_1, ι_2 диаграмма единственна, т.е. в категории $\mathcal{V}$ произведение $V_1 \times V_2 = V_1 \oplus V_2$.

Тензорное произведение

В категории Vct возьмём два объекта U, V и рассмотрим функтор $F : Vct \to Set$, такой что (на объектах) любому ВП W ставится в соответствие множество $Bilin(U, V; W)$ всех билинейных отображений $U \times V \to W$, т.е. линейных по обоим аргументам в отдельности $f(su, v) = f(u, sv) = sf(u, v)$.

Пусть $s \in \Bbbk$, $f : U \times V \to W$ – линейное отображение ВП. Тогда для (прямого) декартового произведения ВП $U \times V$ есть 3 разных вектора:

$$f(su, v) \quad f(u, sv) \quad f(su, sv)$$

Аналогично, если проверять аддитивность.

Построим тензорное произведение ВП $U \otimes V$ с помощью билинейного отображения – проекции на фактор-пространство $U \otimes V = U \times V / Ident$: векторы отображаются в класс эквивалентности $u \otimes v$, который содержит оба вектора выше и ещё два вектора для аддитивности.

Формально, выберем базис $\{(u_i, v_j) =: e_{u_i, v_j} | 1 \le i \le \dim U,\ 1 \le j \le \dim V\}$, порождающий $U \times V$. Рассмотрим линейную оболочку

$$\begin{aligned} Ident := \langle e_{su_i, v_j} - se_{u_i, v_j},\ e_{u_i, sv_j} - se_{u_i, v_j},\ e_{u_i + u', v_j} - e_{u_i, v_j} - e_{u', v_j},\ e_{u_i, v_j + v'} - e_{u_i, v_j} - e_{v', v_j}, \\ \forall s \in \Bbbk,\ u' \in U,\ v' \in V \rangle \end{aligned}$$

и профакторизуем по ней

$$U \otimes V = U \times V / Ident$$

Т.о. на отдельных векторах (тензорное произведение векторов) оно вынуждено быть билинейным:

$$\tau : (u, v) \mapsto u \otimes v$$

Утверждение. Пара $(U \otimes V, \tau)$ – универсальный элемент для функтора $F = Bilin(U, V; \cdot)$

Возьмём произвольное билинейное отображение $f : U \times V \to W$, пропустим её через объект $U \otimes V$ с помощью единственной для данного f стрелки h_f. При том h_f линейно на $U \otimes V$:

$$\begin{tikzcd}
U \times V \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "f"'] & & U \otimes V \arrow[dl, "h_f"] \\
 & W &
\end{tikzcd}$$

В композиции $h_f \circ \tau$ линейное отображение применяется к билинейному, поэтому итоговое отображение будет билинейным: $h_f(\tau(u, sv)) = h_f(s\tau(u, v)) = sh_f(\tau(u, v))$.

Любой вектор пространства $U \otimes V$ есть линейная комбинация разложимых тензоров $u \otimes v$ для каких-то $u \in U, v \in V$. Поэтому h_f определяется своими значениями на $u \otimes v$, каждый из которых содержится в образе τ.

Теперь, по данному билинейному f определяем значения линейного h_f на разложимых тензорах: $h_f(u \otimes v) = f(u, v)$. Получаем, что f и $h_f \circ \tau$ совпадают как билинейные отображения.

Тензорная алгебра

Всякая алгебра над полем $\Bbbk$ является векторным пространством над тем же полем.
Строим тензорную алгебру:

$$T^0(V) = \Bbbk,\ T^1(V) = V,\ \dots\ T^n(V) = V^{\otimes n}$$

Отображение $i_V : V = T^1(V) \to T(V)$ – каноническое вложение.

Утверждение. Для любой алгебры A и любого линейного отображения $f : V \to A$ существует единственный гомоморфизм алгебр $h : T(V) \to A$ такой, что $h \circ i_V = f$.

Пара сопряжённых функторов

Свободные структуры – группы, алгебры и модули над кольцом