STT 1000 - STATISTIQVES

ARTHVR CHARPENTIER

Maximum de vraisemblance

La densité de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ s'écrit

$$f(y|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

soit

$$f(y|\mu,\sigma^2) = \exp\left[\frac{y\mu - \mu^2/2 - y^2/2}{\sigma^2} - \log(\sqrt{2\pi\sigma^2})\right]$$

et quand on cherche le maximum de vraisemblance on écrit

$$\frac{\partial \log f(y|\mu,\sigma^2)}{\partial\mu} = \frac{y-\mu}{\sigma^2}$$

On va chercher des lois qui vérifient des écritures aussi simples et pratiques...

Famille Exponentielle

On suppose que Y admet pour ‘densité’

$$f(y\qquad) = \exp\left(\qquad\qquad\qquad\right),$$

exponentielle car on prend ensuite la log-vraisemblance

Famille Exponentielle

On suppose que Y admet pour 'densité'

$$f(y|\theta\quad) = \exp\left(\frac{y\theta}{\qquad\qquad}\qquad\qquad\right),$$

en prenant $y\theta$, quand on dérive par rapport à θ, on récupère simplement y, ou dans le cas de la vraisemblance $\sum_{i=1}^{n} y_i$

Famille Exponentielle

On suppose que Y admet pour 'densité'

$$f(y|\theta \quad) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{} \qquad\qquad\right),$$

on rajoute une fonction dont la dérivée sera inversible, fonction de θ, de telle sorte que (si on s'arrête là), la condition du premier ordre s'écrive $\theta = b'^{-1}\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)$

Famille Exponentielle

On suppose que Y admet pour 'densité'

$$f(y|\theta,\varphi)=\exp\left(\frac{y\theta-b(\theta)}{\varphi}\qquad\qquad\right),$$

on s'autorise un paramètre de dispersion, éventuellement (cf σ^2)

Famille Exponentielle

On suppose que Y admet pour 'densité'

$$f(y|\theta,\varphi) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{\varphi} + c(y,\varphi)\right),$$

on rajoute des termes qui ne doivent pas dépendre de θ, et qui garantissent que f est une densité.

Famille Exponentielle

On suppose que Y admet pour 'densité'

$$f(y|\theta,\varphi) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\varphi)} + c(y,\varphi)\right),$$

où $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ et $c(\cdot)$ sont des fonctions, et où θ est appelé paramètre naturel et φ est appelé paramètre de nuisance.

$$f(y|\theta,\varphi)=\exp\left(\frac{y\theta-b(\theta)}{a(\varphi)}+c(y,\varphi)\right),$$

Exemple La loi Gaussienne $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

$$f(y|\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

$$f(y|\mu,\sigma^2)=\exp\left(\frac{-y^2+2y\mu-\mu^2}{2\sigma^2}+\log\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$$

soit $\theta=\mu$, $\varphi=\sigma^2$, $a(\varphi)=\varphi$, $b(\theta)=\theta^2/2$

Famille Exponentielle

$$f(y|\theta,\varphi) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\varphi)} + c(y,\varphi)\right),$$

Exemple La loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

$$f(y|\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^y}{y!} = \exp\left(-\lambda + y\log\lambda - log(y!)\right)$$

$$f(y|\lambda) = \exp\left(\frac{y\log\lambda - \lambda}{1} - \log(y!)\right)$$

soit $\theta = \log\lambda$, $\varphi = 1$, $a(\varphi) = 1$, $b(\theta) = \lambda = e^{\theta}$

Famille Exponentielle

$$f(y|\theta,\varphi) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\varphi)} + c(y,\varphi)\right),$$

Exemple La loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

$$f(y|\lambda) = p^y(1-p)^{1-y} = \exp\left(y\log p + (1-y)\log(1-p)\right)$$

$$f(y|\lambda) = \exp\left(\frac{y[\log p - \log(1-p)] + \log(1-p)}{1}\right)$$

soit $\theta = \log\dfrac{p}{1-p}$, $\varphi = 1$, $a(\varphi) = 1$, $b(\theta) = \log\left(1 + e^{\theta}\right)$

Ici $p = \dfrac{e^{\theta}}{1 + e^{\theta}}$.

La fonction génératrice de Y est

$$\mathbb{E}[e^{sY}] =$$

La fonction génératrice de $\psi(Y)$ est

$$\mathbb{E}[e^{s\psi(Y)}] = \int e^{s\psi(Y)} f(y|\theta,\varphi)dy$$

$$\mathbb{E}[e^{s\psi(Y)}] = \int \exp[s\psi(y)] \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\varphi)} + c(y,\varphi)\right) dy$$

Famille Exponentielle

Pour une variable aléatoire Y de la famille exponentielle, alors

$$\mathbb{E}(Y) = b'(\theta) \text{ et } \text{Var}(Y) = b''(\theta)\varphi,$$

cf propriétés du score :

$$\mathbb{E}\left(\frac{\partial \log f(Y,\theta)}{\partial\theta}\right) = 0$$

$$\text{Var}\left(\frac{\partial \log f(Y,\theta)}{\partial\theta}\right) = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \log f(Y,\theta)}{\partial\theta^2}\right)$$

avec ici $\log f(y,\theta) = \dfrac{y\theta - b(\theta)}{\varphi} + c(y,\varphi)$ et

$$\frac{\partial \log f(y,\theta)}{\partial\theta} = \frac{y - b'(\theta)}{\varphi} \text{ et } \frac{\partial^2 \log f(y,\theta)}{\partial\theta^2} = \frac{-b''(\theta)}{\varphi}$$