STT1000 – Examen Intra 1

(Automne 2021)

Les calculatrices sont autorisées. Les documents sont en revanche interdits, sauf une page d'aide mémoire. L'examen dure 2 heures. Toute sortie avant la fin est autorisée, mais sera définitive.
La feuille propose 7 exercices et un barême approximatif est donné à titre indicatif. Les réponses doivent être reportées sur le cahier joint. Si vous utilisez 2 cahiers, merci de le mentionner, en indiquant 1/2 et 2/2 respectivement. N'hésitez pas à faire des dessins pour vous aider, mais ne considérez pas un dessin comme une preuve. Si vous utilisez un résultat du cours dans votre preuve, nommez-le aussi précisément que possible.

Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, on a les probabilités suivantes

$$\begin{cases} \mathbb{P}[X \leq -3] \approx 0.1350\% & \mathbb{P}[X \leq 1] \approx 84.1345\% \\ \mathbb{P}[X \leq -2] \approx 2.2750\% & \mathbb{P}[X \leq 2] \approx 97.7250\% \\ \mathbb{P}[X \leq -1] \approx 15.865\% & \mathbb{P}[X \leq 3] \approx 99.8650\% \\ \mathbb{P}[X \leq 0] = 50.0000\% & \mathbb{P}[X \leq 4] \approx 99.9968\% \end{cases}$$

La "correction" proposée ici est bien plus détaillée que ce que j'attendais... mais au vu du nombres d'erreurs repérées dans les copies, je vais détailler un peu, certains points élémentaires semblant non-maîtrisés.

Exercice 1 – ***(Loi normale)*** [10 points]

Soit $Y \sim \mathcal{N}(1,1)$. Que vaut $\mathbb{P}[|Y| > 1]$?

Je vais donner ici deux approches (et une troisième, numérique pour confirmer le calcul).

(i) Comme $Y \sim \mathcal{N}(1,1)$, $Y \sim 1 + X$ avec $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ (on nous donne juste au dessus des valeurs de fonction de répartition pour X). Or

$$\mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R} : |y| > 1\} = \{y \in \mathbb{R} : y > 1\} \cup \{y \in \mathbb{R} : (-y) > 1\}$$

que l'on peut écrire

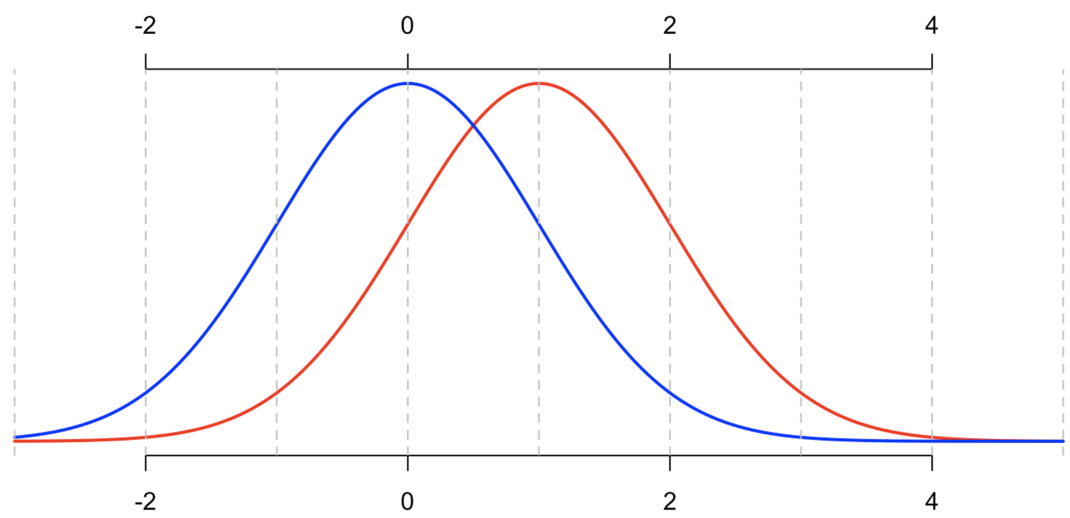
$$\{y \in \mathbb{R} : y > 1\} \cup \{y \in \mathbb{R} : y < (-1)\}.$$

Notons

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R} : |x+1| > 1\}\{x \in \mathbb{R} : x+1 > 1\} \cup \{y \in \mathbb{R} : x+1 < (-1)\}$$

soit
$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R} : |x+1| > 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \cup \{y \in \mathbb{R} : x < (-2)\}.$$
Comme $Y \sim 1 + X$,
$$\mathbb{P}[Y \in \mathcal{Y}] = \mathbb{P}[1 + X \in \mathcal{Y}] = \mathbb{P}[X \in \mathcal{X}].$$
Et donc
$$\mathbb{P}[X \in \mathcal{X}] = \mathbb{P}[X \in \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \cup \{y \in \mathbb{R} : x < (-2)\}] = \mathbb{P}[X \in \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}] + \mathbb{P}[X \in \{x \in \mathbb{R} : x < (-2)\}]$$
soit
$$\mathbb{P}[X \in \mathcal{X}] = \mathbb{P}[X > 0] + \mathbb{P}[X < (-2)]$$
or, par symmétrie de la loi $\mathbb{N}(0,1)$, $\mathbb{P}[X > 0] = \mathbb{P}[X \leq 0]$ et la loi $\mathbb{N}(0,1)$ étant absolument continue, $\mathbb{P}[X < (-2)0] = \mathbb{P}[X \leq (-2)]$. Aussi
$$\mathbb{P}[|Y| > 1] = \mathbb{P}[X \leq 0] + \mathbb{P}[X \leq -2]$$
où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Numériquement,
$$\mathbb{P}[|Y| > 1] \approx 50\% + 2.2750\% = 52.2750\%$$

(ii) Comme $Y \sim \mathcal{N}(1,1)$, $Y \sim 1 + X$ avec $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et on peut réécrire les 8 probabilitées données dans l'énoncé en décallant de 1 :
$$\begin{cases} \mathbb{P}[Y \leq -2] \approx 0.1350\% & \mathbb{P}[Y \leq 2] \approx 84.1345\% \\ \mathbb{P}[Y \leq -1] \approx 2.2750\% & \mathbb{P}[Y \leq 3] \approx 97.7250\% \\ \mathbb{P}[Y \leq 0] \approx 15.865\% & \mathbb{P}[Y \leq 4] \approx 99.8650\% \\ \mathbb{P}[Y \leq 1] = 50.0000\% & \mathbb{P}[Y \leq 5] \approx 99.9968\% \end{cases}$$
Le dessin ci-dessous permettra peut-être de s'en convaincre (la courbe rouge est la densité de Y, la courbe bleue, la densité de X)



A partir de ces valeurs, on note que
$$\mathbb{P}[|Y| > 1] = \mathbb{P}[Y > 1] + \mathbb{P}[Y < -1] = \Big(1 - \mathbb{P}[Y \leq 1]\Big) + \mathbb{P}[Y < -1]$$

soit
$$\mathbb{P}[|Y|>1] \approx \Big(1-50\%\Big) + 2.2750\% = 50\% + 2.2750\% = 52.2750\%.$$

(iii) Pour information, deux méthodes numériques pour confirmer (calcul intégral, et simulations) :

```
> f = function(y) ifelse(abs(y)>1,dnorm(y,1,1),0)

> integrate(f,-Inf,Inf)

0.5227501 with absolute error < 1.6e-05

> g = function(y) dnorm(y,1,1)*(abs(y)>1)

> integrate(g,-Inf,Inf)

0.5227501 with absolute error < 1.6e-05

> mean(abs(rnorm(1e8,1,1))>1)

[1] 0.5227345
```

Bref, on retrouve 52.27%

(iv) Comme je l'ai vu dans des copies, je rappelle que $|a+b| \neq |a|+|b|$ (il suffit de prendre $b=-a$ pour s'en convaincre). Autre précision : si $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, en déduire que
$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$
n'est pas une conséquence du théorème central limite ! (1) le théorème central limite est un résultat de convergence (2) c'est une propriété de la loi normale (on reste dans la même famille par transformation affine : si $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ alors $aX+b$ suivra aussi un loi normale).

Exercice 2 – ***(Erreurs dans des notes de cours)*** [15 points]

Un document contient 4 erreurs, et à chaque relecture, une erreur est détectée avec probabilité 1/3. Les corrections des différentes fautes sont indépendantes entre elles, ainsi que les relectures. Combien faut-il de relectures pour que la probabilité qu'il ne reste plus aucune erreur soit supérieure à 0.9 ?

La probabilité que la $i^{\text{ème}}$ faute soit corrigée avant la $n^{\text{ème}}$ relecture correspond à 1 moins la probabilité qu'elle ne soit pas détectée en n relectures, soit $1-(2/3)^n$.
$$\mathbb{P}[\text{faute } i \text{ pas détectée en } n \text{ lectures}] = \left(1-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2^n}{3^n}$$
Fort logiquement, cette probabilité décroit avec n : plus on relie, plus on devrait détecter. La probabilité que les 4 erreurs soient corrigées avant la $n^{\text{ème}}$ relecture est alors $[1-(2/3)^n]^4$.
$$\mathbb{P}[\text{faute } i \text{ détectée en } n \text{ lectures}] = 1-\frac{2^n}{3^n}$$

$$\mathbb{P}[\text{fautes } i \text{ et } j \text{ détectées en } n \text{ lectures}] = \left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right)\left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right)$$

par indépendance (si $i \neq j$), donc

$$\mathbb{P}[4 \text{ fautes détectées en } n \text{ lectures}] = \left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right)^4$$

On cherche alors n minimal tel que $[1 - (2/3)^n]^4 \geq 0.9$, soit

$$1 - (2/3)^n \geq 0.9^{1/4} \text{ ou encore } n \geq \frac{\ln\left(1 - 0.9^{1/4}\right)}{\ln(2/3)} = 9.001$$

En 9 relectures, la probabilité d'avoir aucune erreur est de 0.8999 ($< 90\%$) et en 10 relectures, la probabilité d'avoir aucune erreur est 0.9324, qui dépasse 90%. Il fallait donc 10 relectures (mais pour la correction, 9 convenait).

C'était un simple calcul de proba... essayer de se raccrocher à une loi classique (binomiale, binonmiale négative, géométrique... etc (j'ai tout vu, y compris une loi exponentielle pour un comptage)) n'apportait rien.

Exercice 3 – ***(Min et max)*** [20 points]

X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, et F_1 et F_2 leurs fonctions de répartitions. Donnez l'expression des fonctions de répartitions de $Y = \max(X_1, X_2)$ et de $Z = \min(X_1, X_2)$.
bonus : les deux variables Y et Z sont-elles indépendantes ?

---

(1) Commençons par la loi de Y.

On peut écrire, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}[Y \leq y] = \mathbb{P}[\max(X_1, X_2) \leq y]$$

or

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max(x_1, x_2) \leq y\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq y\} \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq y\}$$

ou, avec des mots, si le maximum est plus petit que y, c'est que les deux valeurs sont plus petites que y

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max(x_1, x_2) \leq y\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \{x_1 \leq y\} \cap \{x_2 \leq y\}\}$$

donc

$$\mathbb{P}[Y \leq y] = \mathbb{P}[X_1 \leq y, X_2 \leq y] = \mathbb{P}[X_1 \leq y] \cdot \mathbb{P}[X_2 \leq y]$$

car les variables X_1 et X_2 sont indépendantes. On a alors

$$\mathbb{P}[Y \leq y] = F_1(y) \cdot F_2(y).$$

La fonction de répartition de Y est $y \mapsto F_1(y) \cdot F_2(y)$

(2) Continuons avec la loi de Z.

On peut écrire, pour tout $z \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}[Z \leq z] = \mathbb{P}[\min(X_1, X_2) \leq y]$$

Ici, il y a une petite astuce qui pourra nous sauver des calculs inutile :

$$\mathbb{P}[Z \leq z] = 1 - \mathbb{P}[Z > z] = 1 - \mathbb{P}[\min(X_1, X_2) > y]$$

or

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \min(x_1, x_2) > z\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > z\} \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > z\}$$

car, avec des mots, si le minimum est plus grand que z, c'est que les deux valeurs sont plus grandes que z

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \min(x_1, x_2) > z\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \{x_1 > z\} \cap \{x_2 > z\}\}$$

donc

$$\mathbb{P}[Z > z] = \mathbb{P}[X_1 > y, X_2 > y] = \mathbb{P}[X_1 > y] \cdot \mathbb{P}[X_2 > y]$$

car les variables X_1 et X_2 sont indépendantes, soit

$$\mathbb{P}[Z > z] = \mathbb{P}[X_1 > y, X_2 > y] = \Big(1 - \mathbb{P}[X_1 \leq y]\Big) \cdot \Big(1 - \mathbb{P}[X_2 \leq y]\Big).$$

On a alors

$$\mathbb{P}[Z \leq z] = 1 - (1 - F_1(z)) \cdot (1 - F_2(z)) = F_1(y) + F_2(y) - F_1(y) \cdot F_2(y).$$

La fonction de répartition de Z est $z \mapsto F_1(y) + F_2(y) - F_1(y) \cdot F_2(y)$.

(3) Dans les copies j'ai eu des choses comme $F_Y(y) = F_1(y) + F_2(y),]$. Pour information, cette fonction *n'est pas* une fonction de répartition ! certes, elle est croissante... mais elle va dépasser 1. Petit complément d'ailleurs : on pouvait écrire

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \min(x_1, x_2) \leq z\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \{x_1 \leq z\} \cup \{x_2 \leq z\}\}$$

mais

$$\mathbb{P}[\min(X_1, X_2) \leq z] \neq \mathbb{P}[X_1 \leq z] + \mathbb{P}[X_2 \leq z]$$

car $\{x_1 \leq z\} \cap \{x_2 \leq z\} \neq \emptyset$. En fait, en utilisant

$$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$$

on peut directement écrire

$$\mathbb{P}[Z \leq z] = F_1(y) + F_2(y) - F_1(y) \cdot F_2(y)$$

(4) Non, les variables Y et Z ne sont pas indépendantes. Heuristiquement, il suffit de se souvenir que l'indépendance signifie que la loi de Y sachant $Z = z$ sera indépendante de z. Or, comme on a un minimum et un maximum, on a *forcément* $Y \geq Z$, simplement car $\max\{X_1, X_2\} \geq \min\{X_1, X_2\}$. Le support de la loi de Y sachant $Z = z$ est $[z, \infty)$, qui dépend de z

Pour prouver l'affirmation, il suffit de trouver un contre-exemple. Prenons deux lois de Bernoulli de même paramètre $p \in (0, 1)$. Le minimum et le maximum prenant les valeurs $\{0, 1\}$, ce sont aussi des lois de Bernoulli ! On a le tableau suivant, avec à gauche les probabilités du couple (X_1, X_2) et à droite, les valeurs respectives de Y et Z,

		$X_2 = 0$	$X_2 = 1$
X_1	0	$(1-p)^2$	$p(1-p)$
	1	$p(1-p)$	p^2

$Y = \max\{X_1, X_2\}$

		$X_2 = 0$	$X_2 = 1$
X_1	0	0	1
	1	1	1

$Z = \min\{X_1, X_2\}$

		$X_2 = 0$	$X_2 = 1$
X_1	0	0	0
	1	0	1

$$\begin{cases} \mathbb{P}(Y=0,Z=0) & = (1-p)^2 \\ \mathbb{P}(Y=1,Z=0) & = 2p(1-p) \\ \mathbb{P}(Y=0,Z=1) & = 0 \text{ car forcément } Y \geq Z \\ \mathbb{P}(Y=1,Z=1) & = p^2 \end{cases}$$

Or si les variables étaient indépendants, on devrait avoir, pour tout y et z

$$\mathbb{P}(Y=y_1, Z=z) = \mathbb{P}(Y=y) \cdot \mathbb{P}(Z=z).$$

Regardons simplement le cas $y=z=1$:

$$\begin{cases} \mathbb{P}(Y=1,Z=1) & = p^2 \\ \mathbb{P}(Y=1) & = p^2 + 2p(1-p) = 1 - \mathbb{P}(Y=0) \\ \mathbb{P}(Z=1) & = p^2 \end{cases}$$

donc

$$\mathbb{P}(Y=1) \cdot \mathbb{P}(Z=1) = p^2 \underbrace{\left(p^2 + 2p(1-p)\right)}_{1-\mathbb{P}(Y=0)<1} < p^2 = \mathbb{P}(Y=1, Z=1)$$

donc les variables Y et Z ne sont pas indépendantes.

(5) J'ai lu dans une copie "*non, Y et Z ne sont pas indépendantes car elles dépendent des mêmes variables X_1 et X_2* ". Cette affirmation pourrait sembler plein de bon sens, mais si c'était vrai, ca serait un résultat mentionné dans le cours. Car oui, ce résultat est faux. Par exemple, prenons X_1 et X_2 deux variables Gaussiennes indépendantes, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Dans ce cas $Y = X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(2\mu, 2\sigma^2)$ et $Z = X_1 - X_2 \sim \mathcal{N}(0, 2\sigma^2)$... ce qui ne dit rien sur la dépendance, mais en fait, Y et Z sont indépendantes ! En effet,

$$\begin{pmatrix} X_1 + X_2 \\ X_1 - X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

qui sera un vecteur Gaussien (car $(X_1\ X_2$ st un vecteur Gaussien), et les composantes d'un vecteur Gaussien sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle. Or

$$\text{Cov}(X_1 + X_2, X_1 - X_2) = \text{Var}(X_1) - \text{Var}(X_2) = 0$$

Donc Y et Z, bien qu'elles dépendent des mêmes variables X_1 et X_2, sont indépendantes (pour une jolie preuve on peut travailler sur la fonction généatrice).

Exercice 4 – ***(Variance)*** [15 points]

Les variables X_1, X_2, X_3 ont pour matrice de variance-covariance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Quelle est la variance de $Y = 5X_1 - 2X_2 + 3X_3$?

(i) Si $\Sigma = [\Sigma_{i,j}]$, alors $\Sigma_{i,j} = \text{Cov}[X_i, X_j]$, pour tout $i, j \in \{1, 2, 3\}$, avec la propriété $\text{Cov}[X_i, X_i] = \text{Var}[X_i]$. Mathématiquement, on dira que la covariance est une forme bilinéaire symétrique positive, et que la forme quadratique associée est la variance (cf cours de probabilité). En particulier, la covariance est définie sur $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ (où $\mathcal{X}$ est l'espace des variables aléatoires X_i). Je le précise, car certains élèves ont écrit $\text{Cov}[X_1, X_2, X_3]$. Pour rappel (?), une forme bilinéaire symétrique vérifie $\forall X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{X}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \text{Cov}[X_1, X_2] = \text{Cov}[X_2, X_1] \\ \text{Cov}[X_1, X_2 + X_3] = \text{Cov}[X_1, X_2] + \text{Cov}[X_1, X_3] \\ \text{Cov}[\lambda X_1, X_2] = \lambda \text{Cov}[X_1, X_2] \end{cases}$$

Ici, on nous demande de calculer

$$\text{Var}[Y] = \text{Var}[5X_1 - 2X_2 + 3X_3]$$

Or on a vu dans le cours que $\text{Var}[aZ_1 + bZ_2] = a^2\text{Var}[Z_1] + 2ab\text{Cov}[Z_1, Z_2] + b^2\text{Var}[Z_2]$. Faisons le en deux-temps pour ce qui ne seraient pas convaincu que la formule pour 2 variables aléatoires se généralise à 3 :

$$\text{Var}[-2X_2 + 3X_3] = (-2)^2\text{Var}[X_2] + 2(-2)3\text{Cov}[X_2, X_3] + 3^2\text{Var}[X_3] = 4 \cdot 2 - 12 \cdot 1 + 9 \cdot 2 = 14$$

(on vérifie au passage que la variance est positive). Ensuite, on utilise le fait que $\text{Cov}[aZ_1, bZ_2 + cZ_3] = ab\text{Cov}[Z_1, Z_2] + ac\text{Cov}[Z_1, Z_3]$.

$$\text{Var}[Y] = \text{Var}[5X_1 + (-2X_2 + 3X_3)] = 5^2\text{Var}[X_1] + 2 \cdot 5\text{Cov}[X_1, (-2X_2 + 3X_3)] + \text{Var}[(-2X_2 + 3X_3)].$$

Le premier et le dernier termes sont connus (on vient de faire le calcul du dernier), et on a

$$\text{Cov}[X_1, (-2X_2 + 3X_3)] = -2\text{Cov}[X_1, X_2] + 3\text{Cov}[X_1, X_3] = -2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$$

(ce qui simplifiera les calculs). Donc

$$\text{Var}[Y] = 25 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 14 = 89.$$

(ii) On peut aussi faire un peu d'algèbre linéaire, car on a la relation

$$\text{Var}[Y] = \text{Var}[\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{X}] = \boldsymbol{a}^\top \text{Var}[\boldsymbol{X}]\boldsymbol{a} = \sum_{i,j} a_i \Sigma_{i,j} a_j = \sum_i a_i^2 \Sigma_{i,i} + 2\sum_{i<j} a_i a_j \Sigma_{i,j}.$$

Aussi, ici

$$\text{Var}[Y] = 5^2 \cdot 3 + (-2)^2 \cdot 2 + 3^2 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot 1 = 89.$$

```
> a = c(5,-2,3)

> S = matrix(c(3,0,0,0,2,1,0,1,2),3,3)

> as.numeric(t(a)%*%S%*%a)

[1] 89
```

Exercice 5 – ***(Lancers de 2 dés)*** [30 points]

Un ami vous propose de jouer au jeu de hasard suivant, noté (A) : Vous lancez 2 dés (non pipés) à 6 faces. Si vous obtenez un double 6, vous gagnez 10\$. Si la somme des 2 dés vaut 7, alors vous gagnez 1\$. Pour tout autre résultat, vous perdez 1\$. Soit X la variable aléatoire correspondant au gain obtenu à l'issue de ce jeu.

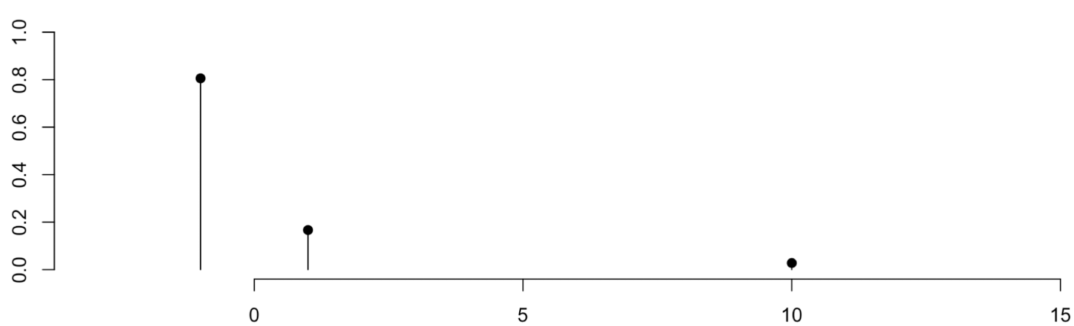
1. Déterminer la distribution de probabilité de X et tracer son graphe, ainsi que la fonction de répartition.
2. Déterminer l'espérance de X.
3. Supposons maintenant que, lorsque vous obtenez une somme égale à 7, vous avez 2 options au choix :
   - arrêter et gagner 1\$
   - rejouer (une seule fois) : dans ce cas, on relance deux dés, et le jeu (A) recommence avec des montants doublés (on peut gagner 20\$, 2\$, ou perdre 2\$).

   On note p la probabilité que vous décidiez de rejouer (et $1-p$ d'arrêter). Déterminer la distribution de probabilité de votre gain Y, pour ce nouveau jeu.
4. Déterminer l'espérance de Y et la variance de Y.
5. Pour quelle(s) valeur(s) de p le jeu décrit en (3) est-il en moyenne plus avantageux que le premier, (A) ?

(1) Notons (classiquement) f la fonction de probabilité, $f(x) = \mathbb{P}[X = x]$, où $x \in \mathbb{Z}$. Plus précisément, X est à valeurs dans $\{-1, +1, +10\}$. Notons que

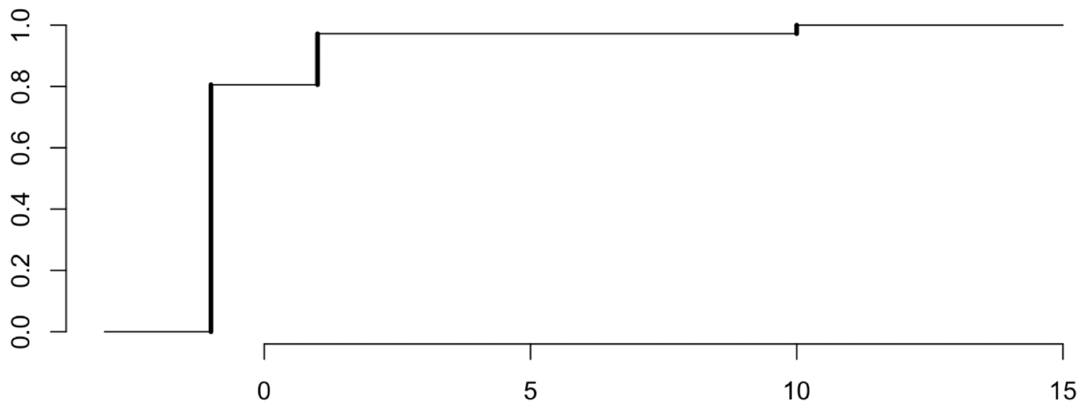
$$\begin{cases} f(10) & = \mathbb{P}[X = 10] = \mathbb{P}[\text{obtenir } \{6, 6\}] = \dfrac{1}{36} \\ f(1) & = \mathbb{P}[X = 1] = \mathbb{P}[\text{somme égale à } 7] = \dfrac{6}{36} \\ f(-1) & = \mathbb{P}[X = -1] = 1 - \mathbb{P}[X \neq -1] = 1 - f(1) - f(10) = \dfrac{29}{36} \end{cases}$$

Le tracé de la fonction de probabilité donne le graphique ci-dessous



La fonction de répartition est un fonction en escalier, qui saute en -1, $+1$ et $+10$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in (-\infty, -1) \\ \dfrac{29}{36} & \text{pour } x \in [-1, +1) \\ \dfrac{29}{36} + \dfrac{6}{36} = \dfrac{35}{36} & \text{pour } x \in [+1, +10) \\ \dfrac{29}{36} + \dfrac{6}{36} + \dfrac{2}{36} = 1 & \text{pour } x \in [+10, +\infty) \end{cases}$$



Pour rappel, une fonction de répartition est *toujours* croissante (j'ai eu des fonctions décroissantes dans les copies).

(2) Pour le calcul de l'espérance,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i f(x_i) = (-1) \cdot \frac{29}{36} + (+1) \cdot \frac{6}{36} + (+10) \cdot \frac{1}{36} = -\frac{13}{36}.$$

(3) Cette fois, Y peut prendre comme valeurs $\{-1, +1, +10\}$ ou, si on "rejoue", $\{-2, +2, +20\}$. Si g est fonction de probabilité de Y,

$$\begin{cases} g(20) & = \mathbb{P}[Y = 20] = \mathbb{P}[\text{obtenir une paire, rejouer, puis obtenir } \{6, 6\}] = \dfrac{1}{6} \cdot p \cdot \dfrac{1}{36} = \dfrac{p}{216} \\ g(10) & = \mathbb{P}[Y = 10] = \mathbb{P}[X = 10] = \dfrac{1}{36} \\ g(2) & = \mathbb{P}[Y = 2] = \dfrac{1}{6} \cdot p \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{p}{36} \\ g(1) & = \mathbb{P}[Y = 1] = \dfrac{1}{6} \cdot (1 - p) == \dfrac{1 - p}{6} \\ g(-1) & = \mathbb{P}[Y = -1] = \mathbb{P}[X = -1] = \dfrac{29}{36} \\ g(-2) & = \mathbb{P}[Y = -2] = \dfrac{1}{6} \cdot p \cdot \dfrac{29}{36} = \dfrac{29p}{216} \end{cases}$$

(4-1) Pour le calcul de l'espérance,

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_i y_i g(x_i) = \cdots = -\frac{31p + 39}{108}.$$

(4-2) Pour le calcul de la variance, on utilise $\mathrm{Var}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2$,

$$\mathbb{E}[Y^2] = \sum_i y_i^2 g(x_i) = \cdots = \frac{28p+45}{12}.$$

de telle sorte que

$$\mathrm{Var}[Y] = \sum_i y_i^2 g(x_i) = \cdots = \frac{28p+45}{12} - \left(-\frac{31p+39}{108}\right)^2 = \frac{-961p^2+24798p+42219}{11664}$$

(5) On nous demande quand est-ce que $\mathbb{E}[Y] > \mathbb{E}[X]$, soit

$$-\frac{31p+39}{108} > -\frac{13}{36} = -\frac{39}{108}$$

ce qui se traduit par $-p > 0$, ou $p < 0$. Or p est une probabilité, donc cela n'arrivera jamais. Le second jeu n'est jamais plus avantageux que le premier.

Exercice 6 – ***(Loi exponentielle)*** [15 points]

Soit X une variable aléatoire, distribuée suivant une loi exponentielle de moyenne 1. Trouver la valeur minimale de h sur $\mathbb{R}_+$ où $h(y) = \mathbb{P}[y < X < 2y]$ où $y \geq 0$.

Préambule : il y avait une coquille dans l'énoncé... l'exercice intéressant consiste à chercher le *maximum* de h. Rechercher le minimum est à la fois plus compliqué (on aura une solution de bord) et plus simple car $h(y) \to 0$ quand $y \to 0$ et h est à valeur dans $[0,1]$ donc 0 sera le minimum...

(i) Commençons par calculer $h(y)$ pour $y \geq 0$.

$$h(y) = \mathbb{P}[y < X < 2y] = \int_y^{2y} f(t)dt \text{ où } f(t) = \exp(-t)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t),$$

i.e. f est la densité de la loi exponentielle de moyenne 1. Donc

$$h(y) = \int_y^{2y} \exp[-t]dt = \Big[-\exp(-t)\Big]_y^{2y} = \exp(-y) - \exp[-2y] = \exp(-y)\Big(1 - \exp(-y)\Big)$$

(car, pour rappel, $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$, et en particulier $e^{2a} = e^a \cdot e^a$, et généralement $e^{2a} \neq e^2 \cdot e^a$ – je précise car j'ai vu l'erreur dans des copies). On note au passage que pour $y \leq 0$, $h(y) \geq 0$, et on peut aussi montrer que $h(y) \leq 1$ (car $u \mapsto u(1-u) \leq 1$ pour $u \in (0,1)$).

(ii) On va regarder la condition du premier ordre, qui revient à chercher un optimum sur $(0, \infty)$ (en exluant les possibles solutions de bord)

$$\frac{dh(x)}{dx} = -\exp(-y) + 2\exp[-2y]$$

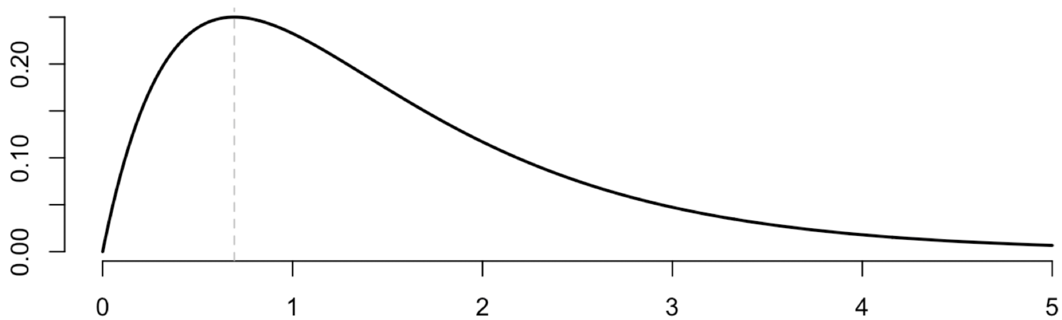
et cette fonction s'annule si

$$\exp(-y^\star) = 2\exp(-2y^\star) \text{ ou } \exp(-y^\star) = 2\exp(-y^\star)\exp(-y^\star)$$

Si $\exp(-y^\star) \neq 0$ (c'est a priori le cas car on est sur $(0,\infty)$), on obtient

$$1 = 2\exp(-y^\star) \text{ ou } \frac{1}{2}\exp(-y^\star) \text{ ou } -\log\frac{1}{2} = y^\star = \log 2$$

Or une analyse rapide de la fonction h montre que h est *croissante* sur $[0,\log 2]$, puis *décroissante* sur $[\log 2,+\infty)$. $\log 2$ est (malheuresement) un *maximum*. Le minimum de h est atteint en 0 (ou en $+\infty$), et $h(0) = 0$.



Le minimum de h est 0, et le maximum est $h(\log 2) = 1/4$.

Comme je l'ai vu dans une copie, je me permets de commenter : l'affirmation "*le mimumun d'un fonction est la dérivée de la fonction évaluée en 0* " n'est pas correcte (je renvoie au cours pour une formulation de la condition du premier ordre).

Exercice 7 – ***(Loi de Poisson)*** [15 points]

On suppose que N suit une loi de Poisson de moyenne λ. Sachant que $\mathbb{P}[N = 0|N \leq 2] = 20\%$, que vaut λ ?

La formule de Bayes permet d'écrire

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

ce qui donne ici

$$\mathbb{P}[N = 0|N \leq 2] = \frac{\mathbb{P}[\{N = 0\} \cap \{N \leq 2\}]}{\mathbb{P}[N \leq 2]} = \frac{\mathbb{P}[N = 0]}{\mathbb{P}[N \leq 2]} = \frac{\mathbb{P}[N = 0]}{\mathbb{P}[N = 0] + \mathbb{P}[N = 1] + \mathbb{P}[N = 2]}$$

car on a une variable discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}$. Si $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$,

$$\begin{cases} \mathbb{P}[N = 0] = e^{-\lambda} \\ \mathbb{P}[N = 1] = e^{-\lambda}\lambda \\ \mathbb{P}[N = 1] = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2} \end{cases}$$

Aussi
$$\mathbb{P}[N=0|N\leq 2]=\frac{e^{-\lambda}}{e^{-\lambda}\big(1+\lambda+\lambda^2/2\big)}=\frac{1}{1+\lambda+\lambda^2/2}=\frac{1}{5}$$
(en simplifiant par $e^{-\lambda}$ au numérateur et au dénominateur, car $e^{-\lambda}\neq 0$). Autrement dit, on cherche $\lambda\geq 0$ (car c'est le paramètre d'une loi de Poisson, qui est une variable positive) tel que
$$1+\lambda+\lambda^2/2=5$$
ce qui correspond à une équation du second degré, qu'on peut écrire
$$\lambda^2+2\lambda-8=0 \text{ soit } (\lambda+4)(\lambda-2)=0.$$
Notons juste que le discriminant s'écrit
$$\Delta=2^2-4\cdot(-8)=4+4\cdot 8=4\cdot(1+8)=4\cdot 9=2^2\cdot 3^2=6^2$$
et donc les racines sont
$$\frac{-2\pm 6}{2} \text{ soit } +2 \text{ ou } -4.$$
La seule racine positive est ici $\lambda=2$, c'est donc la valeur demandée. Aussi, si $\mathbb{P}[N=0|N\leq 2]=20\%$, c'est que $\lambda=2$.

On peut vérifier numériquement

```
> lambda = 2

> dpois(0,lambda)/ppois(2,lambda)

[1] 0.2
```

(ou faire des simulations)

```
> N = rpois(1e8,lambda)

> mean(N[N<=2]==0)

[1] 0.199992
```