STT 1000 – STATISTIQUES

ARTHUR CHARPENTIER

Inférence Ponctuelle & Intervalle de Confiance

Inférence Ponctuelle & Intervalle de Confiance

Étant donné un échantillon gaussien de moyenne μ et de variance connue, soit $IC_{1-\alpha}$ l'intervalle de confiance de μ au niveau $1-\alpha$. On a l'équivalence suivante :

$$\text{On accepte } H_1 : \mu \neq \mu_o \text{ au niveau } \alpha, \mu_0 \notin IC_{1-\alpha}$$

ou de façon équivalente

$$\text{On n'accepte pas } H_1 : \mu \neq \mu_o \text{ au niveau } \alpha, \mu_0 \in IC_{1-\alpha}$$

Variance Connue

Soit $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \cdots, Y_n)$ un échantillon Gaussien $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, si σ est connu,

$$\sqrt{n}\frac{\widehat{\mu}(\boldsymbol{Y}) - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Que faire si σ est inconnu ? estimons la par $\widehat{\sigma}(\boldsymbol{Y})$,

$$\widehat{\sigma}^2(\boldsymbol{Y}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2$$

D'après le théorème central limite

$$\sqrt{n}\frac{\widehat{\mu}(\boldsymbol{Y}) - \mu}{S} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

Peut-on faire mieux ?

Loi du Chi Deux

Soit X une variable aléatoire continue, $X \sim \chi^2(\nu)$ si sa densité s'écrit

$$f_\nu(x) = \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} x^{\nu/2-1} e^{-x/2}, \text{ pour } x > 0$$

(on parle de loi du khi-deux à ν degrés de liberté)

$$X \sim \chi^2(\nu),\ \mathbb{E}[X] = \nu \text{ et } \mathrm{Var}[X] = 2\nu.$$

Soient $Z_1, \cdots, Z_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$, alors

$$X = \sum_{i=1}^n Z_i^2 \sim \chi^2(n)$$

Si $X_1 \sim \chi^2(n_1)$ et $X_2 \sim \chi^2(n_2)$ indépendantes, alors $X_1 + X_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$

Loi du Chi Deux

Soit $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \cdots, Y_n)$ i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$,

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n),$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2 \sim \chi^2(n-1),$$

aussi $(n-1)\dfrac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.

$$X \sim \mathcal{S}td(\nu),\ \mathbb{E}[X] = 0 \text{ et } \text{Var}[X] = \frac{\nu}{\nu - 2}.$$

Si $T_n \sim \mathcal{S}td(n)$, $T_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$ quand $n \to \infty$.

Loi de Student

X suit une loi de Student à ν degrés de liberté, $X \sim \mathcal{S}td(\nu)$ si sa densité s'écrit

$$f_\nu(x) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma(\nu/2)}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}, \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

Soient $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $U \sim \chi^2(\nu)$ indépendantes,

$$\sqrt{\nu}\frac{Z}{\sqrt{U}} \sim \mathcal{S}td(\nu).$$

Soit $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \cdots, Y_n)$ un échantillon i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors

$$T = \sqrt{n}\frac{\overline{Y}-\mu}{S} \sim \mathcal{S}td(n-1),\ S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2$$

Résultat intermédiaire, $\overline{Y}$ et S^2 sont indépendantes.

Intervalle de Confiance pour μ

Soit $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \cdots, Y_n)$ un échantillon i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors l'intervalle de confiance bilatéral pour μ, de niveau $1-\alpha$ est

$$IC_\alpha = \left[\overline{Y} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{Y} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

où $t_{\alpha/2,n-1}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$ d'une loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

Test pour μ

Test pour μ et puissance

Supposons que $\{y_1, \cdots, y_n\}$ soit un échantillon tiré suivant une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, où σ^2 est connue.
On cherche à tester $H_0 : \mu = \mu_0$, la statistique de test est

$$Z = \sqrt{n}\frac{\overline{Y} - \mu_0}{\sigma}$$

Si H_1 est de la forme $H_1 : \mu > \mu_0$, et

$$\gamma(\mu_1) = \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\frac{\overline{Y} - \mu_0}{\sigma} > u_\alpha \middle| \mu = \mu_1\right)$$

$$\gamma(\mu_1) = \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\frac{\overline{Y} - \mu_1}{\sigma} > u_\alpha + \sqrt{n}\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma} \middle| \mu = \mu_1\right)$$

$$\gamma(\mu_1) = 1 - \Phi\left(\sqrt{n}\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma}\right)$$

Test pour μ et puissance

Si σ^2 est inconnue, la statistique de test est

$$Z = \sqrt{n}\frac{\overline{Y} - \mu_0}{S}, \text{ où } S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2$$

et

$$\gamma(\mu_1) = \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\frac{\overline{Y} - \mu_0}{S} > t_{\alpha,n-1}\middle|\mu = \mu_1\right)$$

$$\gamma(\mu_1) = \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\frac{\overline{Y} - \mu_1}{S} > t_{\alpha,n-1} + \sqrt{n}\frac{\mu_0 - \mu_1}{S}\middle|\mu = \mu_1\right)$$

Problème : $\sqrt{n}\frac{\mu_0 - \mu_1}{S}$ est une variable aléatoire...

On ne s'intéresse plus à μ_1 mais à $d_1 = \dfrac{\mu - \mu_0}{\sigma}$

Test pour μ et puissance

$$\gamma(d_1) = \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\frac{\overline{Y} - \mu_0}{S} > t_{\alpha,n-1} \middle| \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} = d_1 \right)$$

$$\gamma(\mu_1) = \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\frac{(\overline{Y} - \mu)/\sigma + d_1}{\sqrt{(n-1)S^2/\sigma^2}/\sqrt{n-1}} > t_{\alpha,n-1} \middle| \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} = d_1 \right)$$

$$\gamma(\mu_1) = \mathbb{P}\left(\frac{Z + \sqrt{n}d_1}{\sqrt{Q/(n-1)}} > t_{\alpha,n-1} \right)$$

où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Q \sim \chi^2(n-1)$ sont indépendantes.
Si $d_1 \neq 0$, on parle de loi de Student décentrée

Intervalle de confiance sur σ^2

Étant donné un échantillon $\{y_1, \cdots, y_n\}$, un intervalle de confiance bilatéral de σ^2, de niveau $1-\alpha$, est

$$IC_{1-\alpha} = \left[\frac{(n-1)S^2}{q_{1-\alpha/2,n-1}}, \frac{(n-1)S^2}{q_{\alpha/2,n-1}}\right]$$

où $q_{\alpha,n-1}$ est le quantile d'ordre α d'une loi $\chi^2(n-1)$.
On peut construire des intervalles de confiance unilatéraux

$$IC_{1-\alpha} = \left[\frac{(n-1)S^2}{q_{1-\alpha,n-1}}, \infty\right] \text{ ou } IC_{1-\alpha} = \left[0, \frac{(n-1)S^2}{q_{\alpha,n-1}}\right]$$

RAJOUTER LES DESSINS

Test sur σ^2

On veut tester $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ contre H_1
La statistique de test est

$$Q = (n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1) \text{ sous } H_0$$

La règle de décision est de rejeter H_0 si

- $Q < q_{\alpha,n-1}$ si $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$
- $Q > q_{1-\alpha,n-1}$ si $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$
- $Q < q_{\alpha/2,n-1}$ ou $Q > q_{1-\alpha/2,n-1}$ si $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

Test sur σ^2

Soit $\{y_1, \cdots, y_n\}$ un échantillon i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$,

$$\text{on accepte } H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \text{ au niveau } \alpha \text{ \underline{ssi} } \sigma_0^2 \notin IC_{1-\alpha}$$

ou

$$\text{on accepte } H_1 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ au niveau } \alpha \text{ \underline{ssi} } \sigma_0^2 \in IC_{1-\alpha}$$

Test sur σ^2

La puissance est

$$\gamma(\sigma_1^2) = 1 - \mathbb{P}\left(q_{\alpha/2,n-1}\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \leq Q \leq q_{1-\alpha/2,n-1}\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\right)$$

où $Q \sim \chi^2(n-1)$.