STT 1000 - STATISTIQVES

ARTHVR CHARPENTIER

Loi de Fisher (Snedecor)

X suit un loi de Fisher, $X \sim \mathcal{F}(\nu_1, \nu_2)$, si

$$f(x) = \frac{1}{xB(\nu_1/2, \nu_2/2)} \left(\frac{v_1 x}{v_1 x + v_2}\right)^{v_1/2} \left(1 - \frac{v_1 x}{v_1 x + v_2}\right)^{v_2/2}, \; x \geq 0$$

pour $\nu_1, \nu_2 > 0$, où

$$\mathrm{B}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Si $\nu_2 > 4$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2} \text{ et } \mathrm{Var}[X] = \frac{2\nu_2^2\,(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1\,(\nu_2 - 2)^2\,(\nu_2 - 4)}$$

Si $U_1 \sim \chi^2(\nu_1)$ et $U_2 \sim \chi^2(\nu_2)$ sont indépendantes

$$\frac{U_1/\nu_1}{U_2/\nu_2} \sim \mathcal{F}(\nu_1, \nu_2)$$

Si $X \sim \mathcal{F}(\nu_1, \nu_2)$, $1/X \sim \mathcal{F}(\nu_2, \nu_1)$
Soit f_{α,ν_1,ν_2} le quantile de niveau α de la loi $X \sim \mathcal{F}(\nu_1, \nu_2)$,

$f_{\alpha,\nu_1,\nu_2} = \frac{1}{f}$

Loi de Fisher (Snedecor)

En effet, si $X \sim \mathcal{F}(\nu_1, \nu_2)$, $X = \dfrac{U_1/\nu_1}{U_2/\nu_2}$, et

$$\frac{1}{X} = \frac{U_2/\nu_2}{U_1/\nu_1} \sim \mathcal{F}(\nu_2, \nu_1)$$

De plus

$$\mathbb{P}[X \leq f_{\alpha,\nu_1,\nu_2}] = \alpha \text{ et } \mathbb{P}\left[\frac{1}{X} \leq \frac{1}{f_{\alpha,\nu_1,\nu_2}}\right] = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left[\frac{1}{X} \geq \frac{1}{f_{\alpha,\nu_1,\nu_2}}\right] = 1 - \alpha, \text{avec } \frac{1}{X} = \frac{U_2/\nu_2}{U_1/\nu_1} \sim \mathcal{F}(\nu_2, \nu_1)$$

Loi de Fisher (Snedecor)

Si $X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta_1)$ et $X_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta_2)$ sont indépendants

$$\frac{\alpha_2 \beta_1 X_1}{\alpha_1 \beta_2 X_2} \sim \mathrm{F}(2\alpha_1, 2\alpha_2)$$

Si $X \sim F(d_1, d_2)$, si $d_2 \to \infty$, $X \sim \chi^2(d_1)$

$$\begin{cases} \text{si } X \sim \mathcal{N}(0,1) \text{ alors } X^2 \sim \chi^2(1) \\ \text{si } X \sim \mathcal{S}td(\nu) \text{ alors } X^2 \sim \mathcal{F}(1,\nu) \end{cases}$$