STT 1000 - STATISTIQVES

ARTHVR CHARPENTIER

Notations

alpha	α	significativité			
beta	β	erreur			
gamma	γ, Γ		sigma	σ, Σ	variance σ^2
delta	δ, Δ		tau	τ	
epsilon	ϵ, ε		upsilon	υ	
zeta	ζ		phi	ϕ, φ, Φ	loi $\mathcal{N}(0,1)$
eta	η		chi	χ	loi (χ^2)
theta	θ, Θ	paramètre	psi	ψ, Ψ	
iota	ι		omega	ω, Ω	évènement
kappa	κ		*exempli gratia*	e.g.	par exemple
lambda	λ, Λ	$\mathcal{P}(\lambda)$	*id est*	i.e.	c'est-à-dire
mu	μ	moyenne			
nu	ν	degrés de liberté			
xi	ξ, Ξ				
pi	π, Π	3.1415...			
rho	ρ	corrélation			

Notations

$\mathbf{1}$	indicatrice $\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$ (parfois noté $\mathbf{1}(x \in A)$)
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels, $\{0, 1, 2 \cdots, \}$
$\mathbb{R}$	ensemble des réels
$\cap$	intersection, e.g. $\{A, B\} \cap \{B, C\} = \{B\}$
$\cup$	union, e.g. $\{A, B\} \cup \{B, C\} = \{A, B, C\}$
$\forall$	quel que soit
$\exists$	il existe
$\sum_{i=1}^{n}$	somme, $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$
$\prod_{i=1}^{n}$	produit, $\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$
!	factorielles, $n! = \prod_{k=1}^{n} k = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$
log	logarithme népérien $\log(e) = 1$

Notations

$\lfloor x \rfloor$	partie entière de x, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
$\lceil x \rceil$	partie entière supérieure de x, $\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$
$\cdot^{-1}$	inverse, i.e. $\boldsymbol{M}^{-1}$, matrice telle que $\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{-1} = \boldsymbol{I}$
	inverse, i.e. f^{-1}, fonction telle que $f[f^{-1}(x)] = x$, $\forall x$
$\dfrac{d}{dx}$ ou $\dfrac{\partial}{\partial x}$	dérivation (cf plus loin)
$\min\limits_{x \in \mathcal{X}}\{f(x)\}$	minimum, i.e. valeur $f^\star = f(x^\star)$
$\underset{x \in \mathcal{X}}{\text{argmin}}\{f(x)\}$	argument du minimum, i.e. valeur $x^\star$
$\mathbb{P}$	probabilité
$\mathbb{E}$	espérance mathématique
Var	variance

Définitions, propriétés, formules, etc

Dans le cours, nous allons définir des objets (avec des définitions)

Variance (définition)

La variance d'une variable aléatoire X est

$$\text{Var}[X] \overset{def}{=} \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])^2\big]$$

Erreur quadratique moyenne (définition)

L'erreur quadratique moyenne (ou MSE, *mean squared error*) d'un estimateur $\widehat{\theta}$ d'un paramètre θ est

$$\text{EQM}[\widehat{\theta}] \overset{def}{=} \mathbb{E}\big[(\widehat{\theta} - \theta)^2\big]$$

... une définition ne s'invente pas !

Définitions, propriétés, formules, calculs

Mais nous allons aussi avoir des propriétés, théorèmes

Variance (propriété)

La variance d'une variable aléatoire X vérifie

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}\big[X^2\big] - \mathbb{E}\big[X\big]^2$$

Erreur quadratique moyenne (propriété)

L'erreur quadratique moyenne d'un estimateur $\widehat{\theta}$ d'un paramètre θ vérifie

$$\text{EQM}[\widehat{\theta}] = \text{Biais}(\widehat{\theta})^2 + \text{Var}(\widehat{\theta})$$

... une propriété se démontre (et peut se retrouver)

Définitions, propriétés, formules, calculs

par exemple, pour la propriété de la variance

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$$

Dans le cours, je donnerai des exemples de calculs,
par exemple, si X suit une loi exponentielle, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

$$\text{E}[X] = \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \int_0^\infty \lambda x^2 e^{-\lambda x}\, dx = \left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2x e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= 0 + \frac{2}{\lambda}\mathbb{E}[X] = \frac{2}{\lambda^2}.$$

de telle sorte que

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Définitions, propriétés, formules, calculs

Certaines preuves ne seront pas faites, mais pour la plupart des résultats, j'essayerais de donner une explication heuristique

Note: tous les concepts et résultats de ce cours se trouvent dans n'importe quel livre de statistique (cf slides # 1)

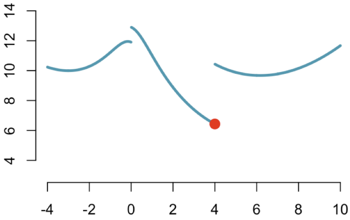
L'accent sera aussi mis sur les outils numériques / informatiques

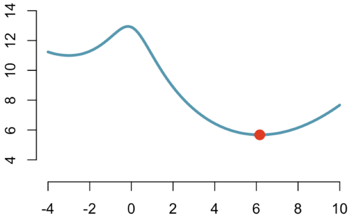
```
> mean(Davis$height)
[1] 170.565
> var(Davis$height)
[1] 79.7847
> mean(Davis$height^2)-mean(Davis$height)^2
[1] 79.3857
```

"*Dans toute statistique, l'inexactitude du nombre est compensée par la précision des décimales*" (Alfred Sauvy)

Hypothèses, conditions nécessaires & conditions suffisantes

En statistique on va chercher le *meilleur* modèle ou le *meilleur* estimateur. Le terme "*meilleur*" signifie qu'on cherche à maximiser un critère (quantitatif).





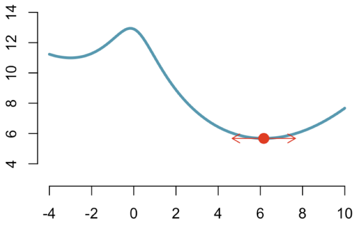
On cherche soit $x^\star = \underset{x\in\mathcal{X}}{\text{argmin}}\{f(x)\}$, soit $f^\star = \underset{x\in\mathcal{X}}{\min}\{f(x)\}$

Si le problème est trop général, difficile de trouver des conditions que doit/devrait/pourrait satisfaire $x^\star$

On va alors faire des hypothèses, c'est à dire imposer des conditions (réalistes) que doit/devrait/pourrait satisfaire f.

Hypothèses, conditions nécessaires & conditions suffisantes

Example: Supposons que f soit dérivable (de dérivée continue)



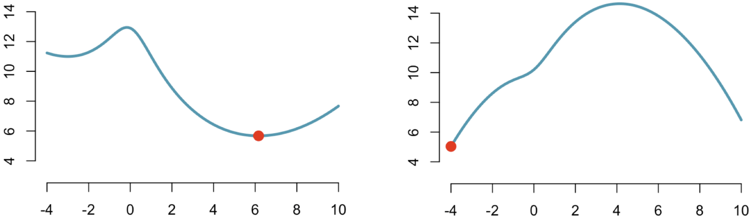
Condition possible : $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=x^\star} = 0$, ou $f'(x^\star) = 0$.

$$x^\star = \underset{x\in\mathcal{X}}{\text{argmin}}\{f(x)\} \overset{?}{\Leftrightarrow} f'(x^\star) = 0$$

Problème (1) $x^\star = \underset{x\in\mathcal{X}}{\text{argmin}}\{f(x)\} \not\Rightarrow f'(x^\star) = 0$

Problème (2) $f'(x^\star) = 0 \not\Rightarrow x^\star = \underset{x\in\mathcal{X}}{\text{argmin}}\{f(x)\}$

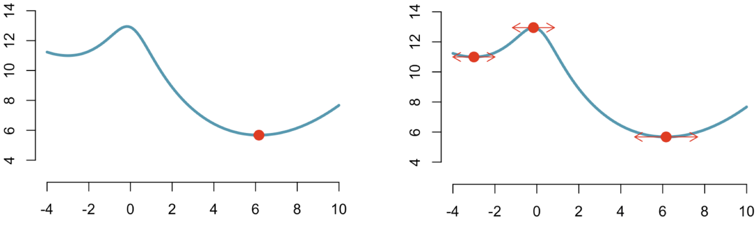
Hypothèses, conditions nécessaires & conditions suffisantes



On peut avoir $f'(x^\star) \neq 0$ quand $x^\star$ est au bord du support $\mathcal{X}$
Condition possible (1) : on exclut les solutions de bords

Si $\mathcal{X}$ ouvert, $x^\star = \underset{x\in\mathcal{X}}{\text{argmin}}\{f(x)\}$ et $x^\star \in \mathcal{X} \;\Rightarrow\; f'(x^\star) = 0$
(condition d'Euler, ou de Fermat, 1629)

Hypothèses, conditions nécessaires & conditions suffisantes



On peut avoir $f'(x^\star) = 0$ et $x^\star \neq \underset{x\in\mathcal{X}}{\text{argmin}}\{f(x)\}$

Cas (1) : $x^\star$ peut être un maximum, on va imposer $f'(x) > 0$

Cas (2) : $x^\star$ peut être un minimum local

mais ne suffit pas...

$f'(x^\star) = 0 \;\not\Rightarrow\; x^\star = \underset{x\in\mathcal{X}}{\text{argmin}}\{f(x)\}$

$f'(x^\star) = 0$: condition nécessaire (moyennant quelques hypothèses de régularité) mais pas suffisante...

Logarithme & Exponentielle

Logarithme & Exponentielle

L'exponentielle est l'unique fonction f dérivable telle que $f(0)=1$ et $f(x)=f'(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\exp[x]=e^x$.
Le logarithme est la fonction inverse de l'exponentielle,

$$\log(x)=\int_1^x \frac{dt}{t}\text{ pour } x\in\mathbb{R}_+ \text{ et } \log[e^x]=x,\text{ pour } x\in\mathbb{R}$$

$$\frac{d\log(x)}{dx}=\frac{1}{x},\text{ et si } u \text{ est différentiable, } \frac{d\log(u(x))}{dx}=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$\frac{d\exp(x)}{dx}=\exp(x),\text{ et } \frac{d\exp(u(x))}{dx}=u'(x)\cdot\exp[u(x)]$$

$$\begin{cases}\log(ab)=\log(a)+\log(b),\ \forall a,b\in\mathbb{R}_+\\ \exp[a+b]=\exp[a]\cdot\exp[b],\ \forall a,b\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Logarithme & Exponentielle

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x \to 0^+} x^n \log(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x)}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n \exp(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$$

Suite géométrique, $u_n - u_{n-1} = k \cdot u_{n-1}$,

$$u_n = (1+k) \cdot u_{n-1} = (1+k)^n \cdot u_0$$

Version continue (taux d'accroissement)

$$\frac{u(x+h) - u(x)}{h} = k \cdot u(x) \text{ ou } u'(x) = k \cdot u(x)$$

alors $u(x) = \exp[kx] \cdot u(0) = \exp[k]^x \cdot u(0)$.

Notations

Fonction Gamma

$$\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ pour } z \in \mathbb{R}_+$$

On peut montrer que $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} x^z e^{-x}\,dx \\ &= \Big[-x^z e^{-x}\Big]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} z x^{z-1} e^{-x}\,dx \\ &= \lim_{x\to\infty}\left(-x^z e^{-x}\right) - \left(-0^z e^{-0}\right) + z\int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x}\,dx.\end{aligned}$$

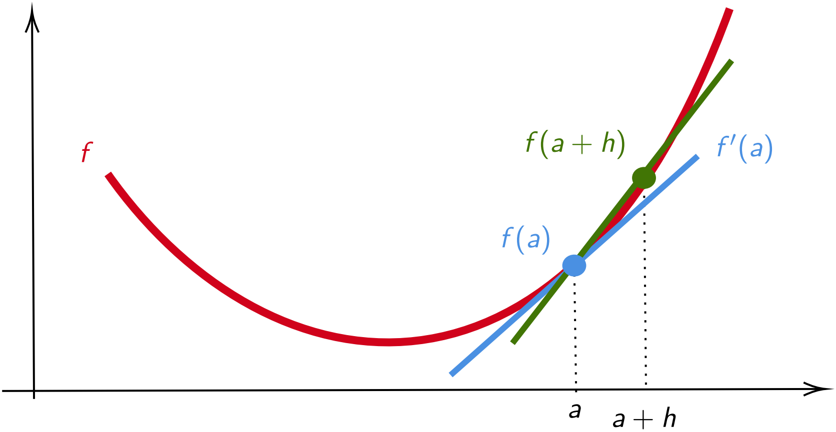
comme $-x^z e^{-x} \to 0$ lorsque $x \to \infty$

$$\Gamma(z+1) = z\int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x}\,dx = z\Gamma(z)$$

Pour $z \in \mathbb{N}$, $\Gamma(z+1) = z!$, $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Dérivées

$$f'(a) = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



Dérivées

Dérivée

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in \mathbb{R}$,

$$f'(a) = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Dérivée seconde

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable en $a \in \mathbb{R}$,

$$f''(a) = \left.\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x=a} = \left.\frac{df'(x)}{dx}\right|_{x=a} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}$$

Dérivées

Gradient

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est dérivable en $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}$,

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right)\Bigg|_{(x_1,x_2)=(a_1,a_2)}$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}\Bigg|_{(x_1,x_2)=(a_1,a_2)} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h}$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}\Bigg|_{(x_1,x_2)=(a_1,a_2)} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(a_1, a_2 + h) - f(a_1, a_2)}{h}$$

Dérivées

Hessienne

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est dérivable en $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{a}) = \left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2}, & \dfrac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1}, & \dfrac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}\right|_{(x_1, x_2) = (a_1, a_2)}$$

Dérivées

Exemple: $f(x)=\frac{1}{2}x^4-x\sqrt{3}+3\sqrt{x}$,

$$f'(x)=\frac{4x^3\sqrt{x}-2\sqrt{3x}+3}{2\sqrt{x}}$$

Exemple: $f(x)=\left(x^2+3\right)x^5$, $f'(x)=x^4\left(7x^2+15\right)$

Exemple: $f(x)=x^2\sqrt{x}$, $f'(x)=\frac{5}{2}x\sqrt{x}$

Exemple: $f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)x$, $f'(x)=2x$

Exemple: $f(x)=\frac{3}{x+1}$, $f'(x)=\frac{-3}{(x+1)^2}$

Exemple: $f(x)=\frac{x^2+\frac{3}{x}}{x^2+\frac{x}{3}}$, $f'(x)=3\frac{x^3-27x-6}{x\left(3x^2+x\right)^2}$

Exemple: $f(x)=\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $f'(x)=\frac{1}{x^2}$

Primitives & Intégrales

Intégrale

Soit f définie sur $[a, b]$, et F telle que $F' = f$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

ou, pour une intégrale impropre

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \to b} F(x) - \lim_{x \to a} F(x)$$

Linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

(si les deux intégrales existent)

Primitives & Intégrales

Exemple: $I_1 = \int_{-1}^{3} (5-2x)dx$, $I_1 = 12$

Exemple: $I_2 = \int_{0}^{1} x^2 \left(x^3-1\right)^5 dx$, $I_2 = \frac{-1}{18}$

Exemple: $I_3 = \int_{0}^{1} \frac{x}{(x^2-4)^2} dx$, $I_3 = \frac{1}{24}$

Exemple: $I_4 = \int_{0}^{1} e^{-2x} dx$, $I_4 = \frac{1}{2}\left(1-e^{-2}\right)$

Exemple: $I_5 = \int_{-1}^{1} 2x(8x+2)^2 dx$, $I_5 = \frac{128}{3}$

Exemple: $I_6 = \int_{0}^{1} x^2 e^x dx$, $I_6 = e-2$

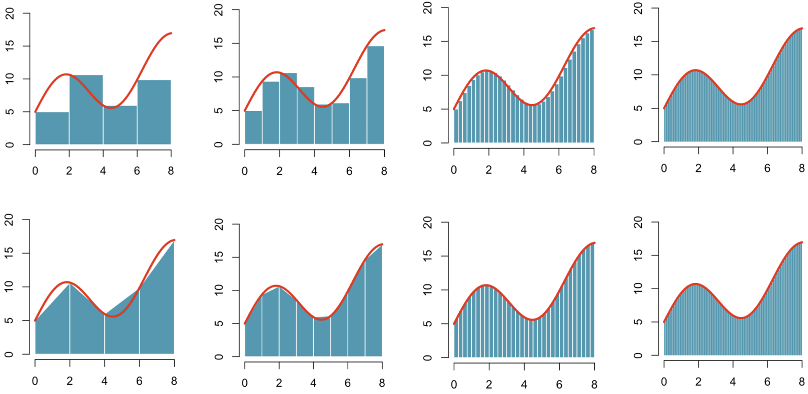
Exemple: $F(y) = \int_{*}^{y} \frac{1}{x^2} + 3x dx$, $F(Y) = -\frac{1}{y} + \frac{3}{2}y^2 + \text{cst}$

Exemple: $F(y) = \int_{*}^{y} \frac{5}{(-2x+1)^2} + 3dx = \frac{5}{2}\frac{1}{-2y+1} + 3y + \text{cst}$

Primitives & Intégrales

On sera a priori intéressé par un calcul numérique d'une intégrale,

```
> f = function(x) 5-2*x
> integrate(f, -1, 3)
12 with absolute error < 1.4e-13
```



Règle de L'Hôpital

Règle de l'Hôpital

Si f et g sont deux fonctions définies sur $[a,b($ dérivables en a, et telles que $f(a)=g(a)=0$ et $g'(a)\neq 0$, alors

$$\lim_{x\rightarrow a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Example

$$\lim_{x\rightarrow 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\rightarrow 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\rightarrow 0}\frac{[e^x-1]'}{[2x]'}=\lim_{x\rightarrow 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$$

Approche alternative: $e^x\approx 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$

$$\lim_{x\rightarrow 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\rightarrow 0}\frac{1}{2x}\big(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\big)=\lim_{x\rightarrow 0}\big(\frac{1}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x^2}{12}\big)=\frac{1}{2}$$