STT1000 – Examen Intra 1

(Automne 2021)

Les calculatrices sont autorisées. Les documents sont en revanche interdits, sauf une page d'aide mémoire. L'examen dure 2 heures. Toute sortie avant la fin est autorisée, mais sera définitive.
La feuille propose 7 exercices et un barême approximatif est donné à titre indicatif. Les réponses doivent être reportées sur le cahier joint. Si vous utilisez 2 cahiers, merci de le mentionner, en indiquant 1/2 et 2/2 respectivement.
N'hésitez pas à faire des dessins pour vous aider, mais ne considérez pas un dessin comme une preuve. Si vous utilisez un résultat du cours dans votre preuve, nommez-le aussi précisément que possible.

Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, on a les probabilités suivantes

$$\begin{cases} \mathbb{P}[X \leq -3] \approx 0.1350\% & \mathbb{P}[X \leq 1] \approx 84.1345\% \\ \mathbb{P}[X \leq -2] \approx 2.2750\% & \mathbb{P}[X \leq 2] \approx 97.7250\% \\ \mathbb{P}[X \leq -1] \approx 15.865\% & \mathbb{P}[X \leq 3] \approx 99.8650\% \\ \mathbb{P}[X \leq 0] = 50.0000\% & \mathbb{P}[X \leq 4] \approx 99.9968\% \end{cases}$$

Exercice 1 – ***(Loi normale)*** [10 points]

Soit $Y \sim \mathcal{N}(1,1)$. Que vaut $\mathbb{P}[|Y| > 1]$?

Exercice 2 – ***(Erreurs dans des notes de cours)*** [15 points]

Un document contient 4 erreurs, et à chaque relecture, une erreur est détectée avec probabilité 1/3. Les corrections des différentes fautes sont indépendantes entre elles, ainsi que les relectures. Combien faut-il de relectures pour que la probabilité qu'il ne reste plus aucune erreur soit supérieure à 0.9 ?

Exercice 3 – ***(Min et max)*** [20 points]

X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, et F_1 et F_2 leurs fonctions de répartitions. Donnez l'expression des fonctions de répartitions de $Y = \max(X_1, X_2)$ et de $Z = \min(X_1, X_2)$.
bonus : les deux variables Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 4 – ***(Variance)*** [15 points]

Les variables X_1, X_2, X_3 ont pour matrice de variance-covariance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Quelle est la variance de $Y = 5X_1 - 2X_2 + 3X_3$?

Exercice 5 – ***(Lancers de 2 dés)*** [30 points]

Un ami vous propose de jouer au jeu de hasard suivant, noté (A) : Vous lancez 2 dés (non pipés) à 6 faces. Si vous obtenez un double 6, vous gagnez 10$. Si la somme des 2 dés vaut 7, alors vous gagnez 1$. Pour tout autre résultat, vous perdez 1$. Soit X la variable aléatoire correspondant au gain obtenu à l'issue de ce jeu.

1. Déterminer la distribution de probabilité de X et tracer son graphe, ainsi que la fonction de répartition.
2. Déterminer l'espérance de X.
3. Supposons maintenant que, lorsque vous obtenez une somme égale à 7, vous avez 2 options au choix :
   - arrêter et gagner 1$
   - rejouer (une seule fois) : dans ce cas, on relance deux dés, et le jeu (A) recommence avec des montants doublés (on peut gagner 20$, 2$, ou perdre 2$).

   On note p la probabilité que vous décidiez de rejouer (et $1 - p$ d'arrêter). Déterminer la distribution de probabilité de votre gain Y, pour ce nouveau jeu.
4. Déterminer l'espérance de Y et la variance de Y.
5. Pour quelle(s) valeur(s) de p le jeu décrit en (3) est-il en moyenne plus avantageux que le premier, (A) ?

Exercice 6 – ***(Loi exponentielle)*** [15 points]

Soit X une variable aléatoire, distribuée suivant une loi exponentielle de moyenne 1. Trouver la valeur minimale de h sur $\mathbb{R}_+$ où $h(y) = \mathbb{P}[y < X < 2y]$ où $y \geq 0$.

Exercice 7 – ***(Loi de Poisson)*** [15 points]

On suppose que N suit une loi de Poisson de moyenne λ. Sachant que $\mathbb{P}[N = 0 | N \leq 2] = 20\%$, que vaut λ ?