STT 1000 - STATISTIQVES

ARTHVR CHARPENTIER

Loi de Weibull

```
> sample_y = c()
> n
[1] 76
```

Loi de Weibull

La densité est

$$f(x;\lambda,k)=\frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1}e^{-(x/\lambda)^k}\text{ pour }x\geq 0$$

où $k>0$ (shape parameter) et $\lambda>0$ (scale parameter).
La fonction de répartition est

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-(x/\lambda)^k} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

dont la fonction quantile (inverse) est

$$Q(u)=Q(p;k,\lambda)=\lambda(-\log(1-u))^{1/k}$$

Note $k=1$ correspond à la loi exponentielle.

Loi de Weibull

Note si $X \sim \mathcal{W}(k, \lambda)$, $Y = \left(\dfrac{X}{\lambda}\right)^k$ suit une loi $\mathcal{E}(1)$

Un peu de calcul permet d'écrire

$$\mathrm{E}(X) = \lambda \Gamma \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$\mathrm{var}(X) = \lambda^2 \left[\Gamma \left(1 + \frac{2}{k}\right) - \left(\Gamma \left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)^2\right].$$

Loi de Weibull

- k connu

L'estimateur du maximum de vraisemblance de λ est solution de

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i^k \log x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^k} - \frac{1}{k} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log x_i = 0$$

soit

$$\widehat{\lambda} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^k\right)^{\frac{1}{k}}$$

Loi de Weibull: Weibull Plot

$$F(x) = 1 - e^{-(x/\lambda)^k}$$

$$-\ln(1 - F(x)) = (x/\lambda)^k$$

$$\underbrace{\ln(-\ln(1 - F(x)))}_{\text{'y'}} = \underbrace{k \ln x}_{\text{'mx'}} - \underbrace{k \ln \lambda}_{\text{'c'}}$$

Loi de Weibull: Durée de Vie Résiduelle

$$\mu(t) = \mathbb{E}[X - t | X > t] = \frac{1}{\overline{F}(t)} \int_t^\infty \overline{F}(x) dx$$

VERIFIER LES NOTATIONS

$$\mu(t) = \frac{\Gamma(1 + 1/\tau)}{\beta^{1/\tau}} \left\{ 1 - \Gamma\left(1 + \frac{1}{\tau}, \beta x^\tau\right) \right\} \exp\left(\beta x^\tau\right) - x$$

(en définissant une fonction Gamma incomplète)

$$\mu(t) \sim \frac{x^{1-\tau}}{\beta\tau}$$