STT 1000 - STATISTIQVES

ARTHVR CHARPENTIER

Test du rapport de vraisemblance

On cherche à tester $H_0 : \theta \in \Theta_0$ contre $H_1 : \theta \notin \Theta_0$
La statistique de test est

$$\ell = -2 \log \frac{\mathcal{L}(\widehat{\theta}_0)}{\mathcal{L}(\widehat{\theta})} \sim \chi^2(p) \text{ sous } H_0$$

où $\widehat{\theta}$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance

$$\begin{cases} \widehat{\theta} = \text{argmin}\{\mathcal{L}(\theta);\ \theta \in \Theta\} = \text{argmin}\{\log \mathcal{L}(\theta);\ \theta \in \Theta\} \\ \widehat{\theta}_0 = \text{argmin}\{\mathcal{L}(\theta);\ \theta \in \Theta_0\} = \text{argmin}\{\log \mathcal{L}(\theta);\ \theta \in \Theta_0\} \end{cases}$$

et $\widehat{\theta}_0$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance contraint (sous H_0).
La règle de décision est

$$\text{rejeter } H_0 \text{ si } \ell_{obs} > q_{1-\alpha,\dim(\theta)}$$

Échantillon univarié

Soit $\boldsymbol{y} = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ i.i.d. de moyenne $\mathbb{E}[Y] = \mu$, de variance $\text{Var}[Y] = \sigma^2$ (on supprime l'hypothèse Gaussienne).

Pour la moyenne, $T = \sqrt{n}\dfrac{\overline{Y} - \mu}{S}$, où S est un estimateur de σ

$$T \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1) \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Si n grand, les intervalles de confiance et les tests sont robustes.

Pour la variance $Q = (n-1)\dfrac{S^2}{\sigma^2}$. Si les Y_i sont Gaussiennes, $Q \sim \chi^2(n-1)$, sinon... ? (on ne sait pas)
Si n grand, les intervalles de confiance et les tests ne sont pas robustes.

Échantillon bivarié

Soit $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\{(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)\}$ un échantillon bivarié apparié,
Soit θ un paramètre estimé par $\widehat{\theta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$
Soit $\sigma^2_{\widehat{\theta}}$ la variance de $\widehat{\theta}$, $\text{Var}[\widehat{\theta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]$
On estime $\sigma^2_{\widehat{\theta}}$ par $\widehat{\sigma}^2_{\widehat{\theta}}$
On peut montrer que $T=\dfrac{\widehat{\theta}-\theta}{\widehat{\sigma}_{\widehat{\theta}}}\overset{\mathcal{L}}{\rightarrow}\mathcal{N}(0,1)$
On dérive alors des intervalles de confiance (asymptotiques)

$$IC_{1-\alpha}=\left[\widehat{\theta}-z_{\alpha/2}\cdot\widehat{\sigma}_{\widehat{\theta}}\ ,\ \widehat{\theta}+z_{\alpha/2}\cdot\widehat{\sigma}_{\widehat{\theta}}\right]$$

ou des tests asymptotiques à partir de T.

Test du paramètre θ

On veut tester $H_0 : \theta = \theta_0$, alors

$$T = \frac{\widehat{\theta} - \theta}{\widehat{\sigma}_{\widehat{\theta}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1) \text{ sous } H_0$$

La règle de décision est

$$\text{rejeter } H_0 \text{ si } \begin{cases} |t_{obs}| > z_{\alpha/2} \text{ pour } H_1 : \theta \neq \theta_0 \\ t_{obs} > z_{\alpha} \text{ pour } H_1 : \theta > \theta_0 \\ t_{obs} < -z_{\alpha} \text{ pour } H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases}$$

Exemples de test du paramètre θ

Example Proportion, $\theta = p$,

$$\sigma_{\widehat{\theta}} = \frac{p(1-p)}{n}$$