STT 1000 - STATISTIQUES

ARTHUR CHARPENTIER

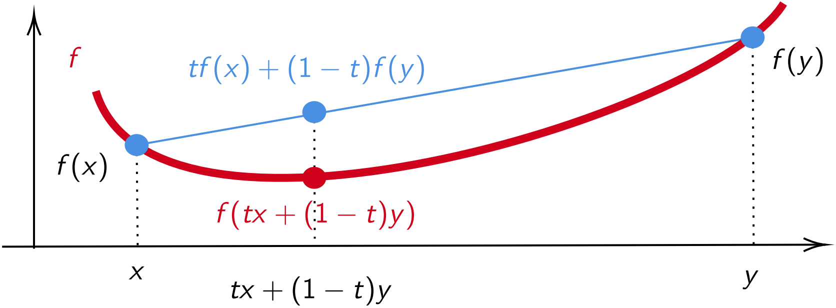
Convexité

Fonction convexe

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est convexe si pour tout $t\in[0,1]$,

$$f\left(tx+(1-t)y\right)\leq t\,f(x)+(1-t)\,f(y)$$

Example: $f(x)=\exp(x)$
Si f est deux fois dérivable, f est convexe si $f''(x)\geq 0$ pour tout x



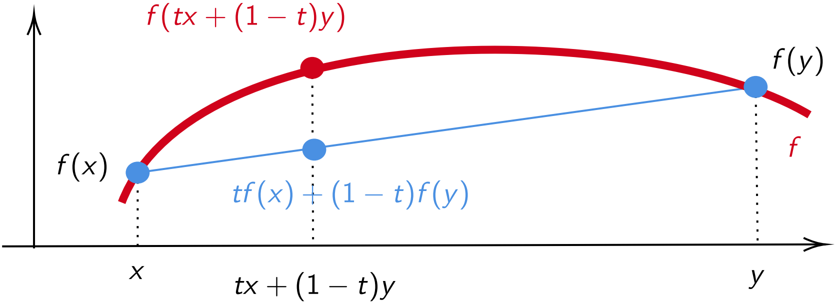
Convexité (et concavité)

Fonction concave

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est concave si pour tout $t \in [0, 1]$,

$$f\,(tx + (1-t)y) \geq t\,f(x) + (1-t)\,f(y)$$

Example: $f(x) = \log(x)$
Si f est deux fois dérivable, f est concave si $f''(x) \leq 0$ pour tout x



Approximation et développement limité

Formule de Taylor (ordre 1)

Si f est continuement dérivable au voisinage de a

$$f(x) \approx f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \cdot h$$

Idée de la preuve (1): définition de la dérivée (en a)

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Idée de la preuve (2): théorème fondamental de l'analyse

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(y)dy \approx f(a) + \int_a^x f'(a)dy$$

$$f(x) \approx f(a) + f'(a) \int_a^x dy = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

Approximation et développement limité

$\displaystyle\int_a^x f'(y)dy \approx f'(a)(x-a)$ mais on peut être plus précis (intégration par partie)

$$\int_a^x f'(y)dy = \Big[-(x-y)f'(y)\Big]_a^x + \int_a^x (x-y)f''(y)dy$$

$$\int_a^x f'(y)dy = f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-y)f''(y)dx$$

On peut alors recommencer...

$$\int_a^x (x-y)f''(y)dy = \Big[-\frac{(x-y)^2}{2}f''(y)\Big]_a^x + \int_a^x \frac{(x-y)^2}{2}f^{(3)}(y)dy$$

$$\int_a^x (x-y)f''(y)dy \approx \frac{(x-a)^2}{2}f''(a)$$

Approximation et développement limité

Formule de Taylor (ordre 2)

Si f est deux fois continuement dérivable au voisinage de a

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2$$

Plus généralement, l'intégration par partie s'écrit

$$\int_a^x \frac{(x-y)^{i-1}}{(i-1)!}f^{(i)}(y)dy = \left[-\frac{(x-y)^i}{(i)!}f^{(i)}(y)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-y)^i}{(i)!}f^{(i+1)}(y)dy$$

$$\int_a^x \frac{(x-y)^{i-1}}{(i-1)!}f^{(i)}(y)dy \approx \frac{(x-a)^i}{(i)!}f^{(i)}(a)$$

Approximation et développement limité

Formule de Taylor (ordre 3)

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3$$

$$f(a+h) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}h^3$$

Formule de Taylor (ordre k)

$$f(x) \approx f(a) + \sum_{i=1}^{k} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

$$f(a+h) \approx f(a) + \sum_{i=1}^{k} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}h^i$$

Exemple d'application ?

Si f est deux fois continuement dérivable au voisinage de a

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

Soit X une variable aléatoire, d'espérance $\mathbb{E}[X] = a$, alors

$$f(X) \approx f(\mathbb{E}[X]) + f'(\mathbb{E}[X])\big(X - \mathbb{E}[X]\big) + \frac{f''(\mathbb{E}[X])}{2}\big(X - \mathbb{E}[X]\big)^2$$

donc

$$\mathbb{E}\big[f(X)\big] \approx f(\mathbb{E}[X]) + \frac{f''(\mathbb{E}[X])}{2}\text{Var}[X]$$

Inégalité de Jensen

Soit f une fonction convexe, et X une variable aléatoire, alors $\mathbb{E}\big[f(X)\big] \geq f(\mathbb{E}[X])$ (si l'espérance existe).

Approximation et développement limité

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}h^3 + \cdots$$

$$\exp[x] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sim 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots \text{ (pour } a = 0)$$

$$\log[x] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \approx x - \frac{x^2}{2} \text{ (pour } a = 1)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sim 1 + x + x^2 + \cdots \text{ (pour } a = 0)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \approx 1 + \alpha x \text{ (pour } a = 0)$$

Approximation et développement limité

Formule de Taylor (ordre 2)

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est deux fois continuement dérivable

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2$$

Formule de Taylor (ordre 2)

Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est deux fois continuement dérivable

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) \approx f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a})^\top \boldsymbol{h} + \frac{1}{2}\boldsymbol{h}^\top \mathbb{H}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}$$

où ∇f est le gradient de f et $\mathbb{H}(\boldsymbol{a})$ est sa matrice hessienne évaluée en $\boldsymbol{a}$.

Approximation et développement limité

Formule de Taylor (ordre 2)

Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est deux fois continuement dérivable

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) \approx f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a})^\top \boldsymbol{h} + \frac{1}{2}\boldsymbol{h}^\top \mathbb{H}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}$$

où ∇f est le gradient de f et $\mathbb{H}(\boldsymbol{a})$ est sa matrice hessienne évaluée en $\boldsymbol{a}$.

Example: $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x}$, alors

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})^\top(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{a}^\top\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}^\top\boldsymbol{h} + \boldsymbol{h}^\top\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}^\top\boldsymbol{h}$$

or $\boldsymbol{a}^\top\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}^\top\boldsymbol{a}$ donc

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = \underbrace{\boldsymbol{a}^\top\boldsymbol{a}}_{=f(\boldsymbol{a})} + \underbrace{2\boldsymbol{a}^\top}_{=\nabla f(\boldsymbol{a})^\top}\boldsymbol{h} + \frac{1}{2}\boldsymbol{h}^\top \underbrace{2\mathbb{I}}_{=\mathbb{H}(\boldsymbol{a})}\boldsymbol{h}$$

Approximation et développement limité

Exercice $x \mapsto (x^3+1)\sqrt{1-x}$ en 0

$$\sqrt{1-x} \sim 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} \text{ et } 1+x^3 = 1+x^3$$

$$(x^3+1)\sqrt{1-x} \sim 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{15x^3}{16}$$

Exercice $x \mapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$ en 0

$$\frac{1}{1+u} \sim 1 - u + u^2 - u^3 + u^4$$

avec $u = x + x^2$, $u^2 = x^2 + 2x^3 + x^4$, $u^3 \sim x^3 + 3x^4$, et $u^4 \sim x^4$

$$x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2} \sim 1 - x + x^3 - x^4$$

Exercice $x \mapsto \log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \log(1+x) - \log(1-x) \sim 2x$ en 0