STT1000 - Exercices # 1

Automne 2021

Tout comme en cours, on utilise les conventions : $Y_1, \cdots, Y_n$ sont des variables aléatoires, $y_1, \cdots, y_n$ sont les observations (données).

Les échantillons aléatoire et observé associés seront notés $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \cdots, Y_n)$ et $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)$. La notation Z sera (principalement) réservée pour une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Cette série s'appuie assez fortement sur la table de la loi de Z.

Exercice 1 – ***(Lancers de 2 dés)***
Un ami vous propose de jouer au jeu de hasard suivant. Vous lancez 2 dés (non pipés) à 6 faces. Si vous obtenez un double 6, vous gagnez 10$. Si la somme des 2 dés vaut 7, alors vous gagnez 1$. Pour tout autre résultat, vous perdez 1$. Soit X la variable aléatoire correspondant au gain obtenu à l'issue de ce jeu.

1. Déterminer la distribution de probabilité de X et tracer son graphe.
2. Déterminer l'espérance de X.
3. Supposons maintenant que, lorsque vous obtenez une somme éegale à 7, vous avez 2 options : arrêter et gagner 1$, ou rejouer (une seule fois) et gagner (ou perdre) deux fois le montant associé au résultat de votre deuxième lancer. On note p la probabilité que vous décidiez de rejouer. Déterminer la distribution de probabilité de votre gain Y dans ce cas.
4. Déterminer l'espérance de Y et la variance de Y.
5. Pour quelle(s) valeur(s) de p le jeu décrit en (3) est-il en moyenne plus avantageux que le premier décrit ?

Exercice 2 – Trois urnes A, B et C contient:
A: Une boule blanche et trois noires
B: 2 Blanches et 2 Noires
C: 3 Blanches et 1 Noire
On tire au hasard une boule de chaque urne et X etant le nombre total de boules blanches obtenues.

1. Deteminer la loi de X
2. Detrminer la f.d.r. de X et sa courbe.

Exercice 3 – ***(Poker)***
On tire 5 cartes (une main de poker) au hasard à partir d'un jeu ordinaire de 52 cartes.

1. Calculez la probabilité d'obtenir un brelan, c'est-à-dire une main de poker contenant trois cartes de la même valeur. (Les deux autres cartes doivent être de valeurs différentes entre elles et différentes de la valeur commune aux trois premières cartes). Exemple d'un brelan : 5 de coeur, 5 de trèfle, 5 de pique, 3 de carreau et roi de coeur.
2. Calculez la probabilité d'obtenir une main pleine (full house), c'est-à-dire une main de poker contenant trois cartes de la même valeur et deux autres cartes d'une autre valeur. Exemple d'une main pleine : 5 de coeur, 5 de trèfle, 5 de pique, 3 de carreau et 3 de coeur.

Exercice 4 – ***(Assurance qualité)***
Afin de contrôler la qualité des pièces produites par une machine, on prélève de temps en temps un échantillon de 10 pièces. On arrête la production pour inspecter la machine si dans l'échantillon on trouve plus de deux pièces défectueuses ; autrement, on laisse la machine fonctionner. Supposons qu'en fait 20% de la production est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'après un échantillonnage de 10, on la laisse fonctionner ?

Exercice 5 – ***(Magicien)***
Un célèbre magicien qui prétendait avoir des pouvoirs de perception extrasensorielle a accepté de se livrer à une expérience dans laquelle il se proposait de deviner le résultat du lancer d'un dé. En 12 essais, il a réussi à deviner le résultat 10 fois. Vérifier que la probabilité d'un nombre de succès aussi grand que 10 (c'est-à-dire supérieur ou égal à 10) est excessivement petite pour quelqu'un qui répond au hasard ; et expliquer à quelle conclusion ce fait a tendance à mener.

Exercice 6 – ***(Analyste financier)***
Un analyste financier a constaté qu'un type d'actions croît ou decroît chaque jour d'un point, et que 25% du temps les actions ont augmente, 75% du temps elles ont descendu.

1. Soit F la variable qui decrit la uctuation journaliere (on suppose que les uctuations sont independantes d'un jour a un autre.) Notons que la variable F prend les valeurs 1 mais on peut la rendre binomiale $\mathcal{B}(1,p)$ par une transformation (c'est-a-dire qu'il existe X une variable aleatoire $\mathcal{B}(1,p)$ associee). Donner les transformations $F \to X$, $X \to F$ et identi

   er la loi de X (c'est-a-dire la valeur de p).
2. Quelle est la probabilite que dans 4 jours la valeur de ces actions reste la même ? (il faut exprimer la question en termes de X.)
3. Quelle est la probabilite que dans 100 jours la valeur de ces actions reste la même ? (Utiliser l'approximation normale.)

Exercice 7 – ***(Batteries)***
On insere n batteries (piles) dans n robots. La duree de vie de chacun des robots est une variable aleatoire Y de densite $f_Y(y) = (1/\theta)e^{-y\theta}$ si $y > 0$, et 0 sinon.

1. Exprimer en fonction de θ le fait qu'un robot fonctionne encore apres 5 heures.
2. Exprimer en fonction de θ et r la probabilite qu'exactement r(r n) robots fonctionnent apres 5 heures.
3. Calculer eectivement la probabilite donnee en 2) si $\theta = 1$, $\theta = 2$ et $r = 2$, $n = 4$, $r = 2$, $n = 50$.

Exercice 8 – ***(Compagnie d'Assurance)***
Une compagnie d'assurances a emis des polices a 120 femmes entre 40 et 44 ans. Supposons que chaque femme a une probabilite de 1/150 de deceder durant la prochaine annee, et chaque deces demande une prestation de \$50 000. Approximer (loi de Poisson) la probabilite que la compagnie aura a payer au moins \$150 000 en prestations.

Exercice 9 – ***(Ligne aérienne)***
Une ligne aerienne egare environ 1 valise sur 200 qui sont enregistrees. Si une dame qui voyage souvent va enregistrer 120 valises l'annee prochaine, trouver la probabilite qu'elle aura plus de deux valises egarees.

Exercice 10 – ***(Particules)***
On mesure une substance radioactive pendant deux heures, et on compte que 482 particules alpha ont ete emises durant ces deux heures. Quelle est la probabilite de compter exactement 3 particules durant les deux prochaines minutes ? [Note : on calcule le taux par deux minutes].

Exercice 11 – ***(Changements de programmes)***
Comparer les effectifs obtenus par un modele de Poisson (estimer comme dans l'exemple de la cavalerie) avec les effectifs empiriques (observes) de la variable X (nombre de changements de programme, dans un echantillon de 356 etudiants de l'UQAM). Ces effectifs empiriques sont :

Nb Changements	Effectif
0	327
1	90
2	22
3	7

Pensez-vous que le modele de Poisson est satisfaisant ?

Exercice 12 – ***(Serveur)***
Un serveur brise en moyenne trois verres et une assiette par mois (independamment du nombre de verres cassees). Notons X le nombre de verres casses et Y le nombre d'assiettes casses par ce serveur.

1. Modelisez les lois de probabilite des variables aleatoires X et Y.
2. Quelle est la loi de $X + Y$?
3. Calculer la probabilite d'un mois sans assiette ni verre casse ?
4. Ce serveur maladroit casse aussi des bols. La v.a Z egale au nombre de bols casses involontairement par an suit une loi de poisson de parametre 5. Si le soir du 31 decembre, notre serveur n'a pas casse au moins 5 verres dans l'annee, il fête cela en brisant des bols pour avoir au moins le minimum de 5 bols casses sur l'annee. Donner la loi de probabilite et l'esperance de W, ou W represente le nombre de bols casses par an.

Exercice 13 – ***(Loi normale)***
On considere une variable aleatoire X de loi normale de moyenne 12 unites et de variance 16 unites carrees, calculer les probabilites suivantes, en vous aidant des annexes de cette serie :

1. $\mathbb{P}[X \leq 15]$
2. $\mathbb{P}[X > 12]$
3. $\mathbb{P}[12.5 \leq X \leq 16.5]$
4. $\mathbb{P}[|X - 12| \leq 7.84]$

Exercice 14 – ***(Quantile loi normale)***
Soit X une variable aleatoire de loi N(2; 9) ; dans chaque cas, trouver la valeur de c telle que l'enonce est vrai :

1. $\mathbb{P}[X \leq c] = 0.90$
2. $\mathbb{P}[X > c] = 0.975$
3. $\mathbb{P}[|X - 2| \leq c] = 0.95$

Exercice 15 – ***(Scierie)***
Dans une scierie, les accidents de toutes sortes se produisent aleatoirement au taux de 10 par semaine. Quelle est approximativement la probabilite qu'a une semaine donnee, il y ait au plus 12 accidents ? Comparer la valeur obtenue par approximation a la valeur exacte. On donne

$$\sum_{x=0}^{12} e^{-10} \frac{10^x}{x!} = 0.7915565$$

Exercice 16 – ***(Approximation de Poisson)***
Soient X1,...,X40 des variables aleatoires independantes et identiquement distribuees telles que Xi E(0:2). Considerons la variable aleatoire Y, representant la somme de tous les X, c'est a dire que $Y = X_1 + \cdots + X_{40}$,

1. Quelle est la loi exacte de la variable Y ?
2. En utilisant la loi exacte de Y, il est possible de calculer P(Y 150) = 0:046. Calculez une approximation de cette probabilite en utilisant le theoreme limite central. Que concluez-vous ?

3. Considerons maintenant que la variable Y est la somme de 100 variables aleatoires independantes de m$^e meloiqueXi.LaprobabiliteexacteP(Y$
$vousparrapportauresultatobtenualaquestion2.?$

Exercice 17 – Montrer que la fonction de F est un f.d.r. definie par

$$F(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2}, & \text{if } x \leq 0 \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}$$

La fonction f(x)=F$'(x) estelleunedensitedeprobabilite?$

Exercice 18 – La duree de vie d'une lampe est une v.a. de densite

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}e^{\frac{-x}{5}}, & \text{if } x > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

1. Calculer l'esperance et la variance de X
2. Determiner la fonction de survie S def par $S(x) = P[X > x], \forall x \in \mathbb{R}$ et calculer la probabilite de survie au dela de la vie moyenne
3. Sachant que $[X > x_0]$ est realise ($x_0 > 0$) determiner la fonction de survie conditionelle $S(x|x_0) = P[(X - x_0) > 0|X > x_0]$.Conclure.

Exercice 19 – X_1 et X_2 2 v.a. indep. et F_1 et F_2 leur f.d.r. Determiner les fdr de $Y = max(X_1, X_2)$ et de $Z = min(x_1, X_2)$

Exercice 20 – X_1 et X_2 2 v.a. indep.de densite:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 4x_1(1 - x_2), & \text{if } 0 \leq x_1 \leq 1 \text{and } 0 \leq x_2 \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

1. Calculer $P[0 \leq x_1 \leq \frac{1}{3}, 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{3}]$
2. Determiner f_{X_1}, f_{X_2}, F_{X_1} and F_{X_2}, et montrer que X_1 and X_2 sont indepndant.

Exercice 21 – X et Y 2 v.a. indep. et suive la loi unifom (0,1) et S=X+Y

1. Determiner la fdr et la densite de S
2. Calculer ES et Var(S)