STT1000 - Exercices # 4

Automne 2021

Exercice 1 – ***(Loi Beta)***
On considère un échantillon iid de taille n dont la loi est de densité

$$f_\theta(x) = \theta(1+\theta)x^{\theta-1}(1-x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x).$$

1. Calculer l'estimateur de la méthode des moments de θ, noté $\widehat{\theta}$.
2. En admettant que
$$\mathrm{Var}[\widehat{\theta}] \approx \frac{\theta(\theta+2)^2}{2n(\theta+3)}$$
montrer que cet estimateur n'est pas efficace.

Exercice 2 – ***(Mélange de lois uniformes)***
Soient $\theta \in (0,1)$, $a, b \in \mathbb{R}_+$, avec $0 < a < b$. On considère n variables indépendantes $X_1, \cdots, X_n$, de même loi, telles que pour tout i,

$$X_i \sim \begin{cases} U_i \sim \mathcal{U}([0,a]) \text{ avec probabilité } \theta \\ V_i \sim \mathcal{U}([0,b]) \text{ avec probabilité } 1-\theta \end{cases}$$

Soit N le nombre d'observations X_i comprises entre 0 et a.

1. Quelle est la loi de N ?
2. Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ ?

Exercice 3 – ***(EMV de la médiane)***
On considère un échantillon iid de taille n dont la loi est de densité

$$f_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2}\mathbf{1}_{[0,\theta]}(x).$$

1. Trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance de la médiane de l'échantillon.

Exercice 4 – ***(Estimation d'une surface)***
Le diamètre est mesuré avec une erreur qui suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On dispose de n mesures indépendantes $\{d_1, \cdots, d_n\}$.

1. Proposer un estimateur sans biais de la surface du cercle.

Exercice 5 – ***(Biais et variance)***
On considère un échantillon i.id. de taille n, tiré suivant une loi de densité

$$f_\theta(x) = \frac{1+\theta x}{2} \text{ pour } x \in [-1,+1] \quad \text{et 0 sinon.}$$

1. Calculer l'estimateur de la méthode des moments de θ.

2. Donner son biais et sa variance.

Exercice 6 – ***(EMV et EMM)***
On considère un échantillon i.id. de taille n, tiré suivant une loi de densité

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2}\exp\left(-|\theta - x|\right)$$

1. Calculer l'estimateur de la méthode des moments de θ.
2. Donner son biais et sa variance.
3. Déterminer ensuite l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Exercice 7 – ***(Loi lognormale)***
On considère un échantillon i.id. de taille n, tiré suivant une loi lognormale, $LN(\mu, \sigma^2)$. .

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de μ. Calculer $\mathbb{E}[\widehat{\mu}]$

Exercice 8 – ***(Loi bivariée)***
Considérons un échantillon $\{(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)\}$ sur $[0,1]^2$ avec

$$\mathbb{P}[X > x, Y > y] = (1-x)\cdot(1-y)\cdot(1-\max\{x,y\})^\theta$$

1. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ.

   indice: on pourra poser $z_i = \max\{x_i, y_i\}$

Exercice 9 – ***(Information de Fisher)***
On considère un échantillon i.id. de taille n, tiré suivant une loi de fonction de répartition

$$F_\theta(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{-\theta} \quad \text{pour } x > 0.$$

1. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ.
2. Calculer l'information de Fisher de cet estimateur.

Exercice 10 – ***(Loi normale censurée)***
Considérons un échantillon $\{x_1, \cdots, x_n\}$ tiré suivant une loi $\mathcal{N}(\theta, 1)$. Malheureusement, seules des indicatrices, indiquant que les observations étaient positives, ont été gardées, i.e. $\{y_1, \cdots, y_n\}$, avec $y_i = \mathbf{1}(x_i > 0)$.

1. Quelle est l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ?

Exercice 11 – ***(Loi Uniforme*** $[-\theta; +\theta]$***)***
On suppose que les observations $U_1, \cdots, U_n$ sont indṕendantes et uniformément distribuées sur $[-\theta, \theta]$, avec $\theta \in \mathbb{R}_+$.

1. Calculez $\mathbb{E}(U_{n:n}) = \mathbb{E}(\max\{U_i\})$ et $\mathbb{E}(U_{1:n}) = \mathbb{E}(\min\{U_i\})$
2. Quelle est la densité de $|U_i|$?
3. Calculez $\mathbb{E}(|U|_{n:n}) = \mathbb{E}(\max\{|U_i|\})$
4. Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ ?
5. Cet estimateur est-il est un estimateur sans biais de θ ?
6. Suggérez un estimateur pour la méthode des moments de θ ?
