STT 1000 - STATISTIQUES

ARTHUR CHARPENTIER

Loi Exponentielle

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x} \text{ ou } F(x)=1-e^{-\lambda x},\ \text{pour } x\geq 0$$

$$\mathbb{E}[X]=\frac{1}{\lambda} \text{ et } \mathrm{Var}[X]=\frac{1}{\lambda^2}$$

Propriété d'absence de mémoire,

$$\mathbb{P}(T>s+t \mid T>s)=\frac{\mathbb{P}(T>s+t\cap T>s)}{\mathbb{P}(T>s)}=\frac{\mathbb{P}(T>s+t)}{\mathbb{P}(T>s)}$$

$$=\frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda t}=\mathbb{P}(T>t).$$

Maximum de Vraisemblance (numérique)

```
>
```

$Y = X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi Gamma, $\mathbb{E}[Y] = n\mu$ et

Méthode du minimum

$$\mathbb{P}\left(\min\{X_1,\ldots,X_n\} > x\right) = \mathbb{P}\left(X_1 > x,\ldots,X_n > x\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \Pr\left(X_i > x\right) = \prod_{i=1}^{n} \exp\left(-x\lambda_i\right) = \exp\left(-xn\lambda\right).$$

autrement dit, $\min\{X_1,\ldots,X_n\} \sim \mathcal{E}(n\lambda)$.

La loi géométrique sur $0, 1, 2, \cdots$

La fonction de vraisemblance est

$$\mathcal{L}(p) = \prod_{i=1}^{n} p(1-p)^{x_i} = p^n(1-p)^{x_1+\cdots+x_n} = p^n(1-p)^{n\overline{x}}$$

$$\log \mathcal{L}(p) = n\log(p) + n\overline{x}\log(1-p)$$

pour $p \in (0,1)$, et 0 sinon.

$$\frac{\partial \log \mathcal{L}(p)}{\partial p} = \frac{n}{p} - \frac{n\overline{x}}{1-p}$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance est

$$\widehat{p} = \frac{1}{1+\overline{x}}$$

(il s'agit effectivement d'un maximum car $\mathcal{L}(0) = \mathcal{L}(1) = 0$ et $\mathcal{L}(p) > 0$ entre 0 et 1)

La loi géométrique sur $0, 1, 2, \cdots$

L'espérance de loi géométrique est $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1-p}{p}$

de telle sorte que $\overline{X} \overset{a.s.}{\to} \dfrac{1-p}{p}$

$$\widehat{p} = \frac{1}{1+\overline{X}} \overset{a.s.}{\to} \frac{1}{1+(1-p)/p} = p$$

Posons $mu = \dfrac{1-p}{p}$, $\text{Var}[X] = \dfrac{1-p}{p^2} = \mu^2(\mu+1)$, d'après le théorème central limite

$$\sqrt{n}(\overline{X}-\mu) \overset{\mathcal{L}}{\to} \mathcal{N}(0, \mu(\mu+1))$$

Utilisons alors la Δ-method avec $g(x) = (1+x)^{-1}$,

$$\sqrt{n}(\widehat{p}-p) \overset{\mathcal{L}}{\to} \mathcal{N}\left(0, \frac{\mu}{(1+\mu)^3}\right) = \mathcal{N}\left(0, p^2(1-p)\right)$$