STT5100 - Automne 2022 - Examen Intra (OLS)

Arthur Charpentier

Les calculatrices sont autorisées. Les documents sont en revanche interdits, sauf une page d'aide mémoire. L'examen dure 3 heures, mais toute sortie avant midi est autorisée, et sera définitive.

Dans les feuilles qui suivent, il y a 30 questions relatives au cours sur les modèles linéaires. Pour chaque question (sauf deux), cinq réponses sont proposées. Une seule est valide, et vous ne devez en retenir qu'une,

- vous gagnez 1 point par bonne réponse
- vous ne perdez pas de points pour une mauvaise réponse
- vous ne gagnez pas de point pour plusieurs réponses

Aucune justification n'est demandée. Il est toutefois recommandé de lire attentivement les questions avant de tenter d'y répondre. Deux questions reposent sur un graphique qu'il faudra tracer sur la feuille de réponses (au dos). Votre note finale est le total des points (sur 30). Il y a une 31ème question, bonus. Une prédiction parfaite (sur 30) donnera un point bonus qui s'ajoutera à votre note.

La page de réponses est au dos de celle que vous lisez présentement : merci de décrocher ladite feuille et de ne rendre que cette dernière, après avoir indiqué votre code permanent en haut à gauche.

Merci de cocher le carré en bleu ou en noir. En cas d'erreur, vous pouvez cocher une autre case en rouge. Seule cette dernière sera alors retenue.

Le présent document contient 20 pages, inclutant 4 pages de tables de lois usuelles (Gaussienne, Student, chi-deux et Fisher) à la fin.

Le surveillant ne répondra à aucune question durant l'épreuve : en cas de soucis sur une question (interprétation possiblement fausse, typo, etc), vous pouvez mettre un court commentaire sur la feuille de réponses.

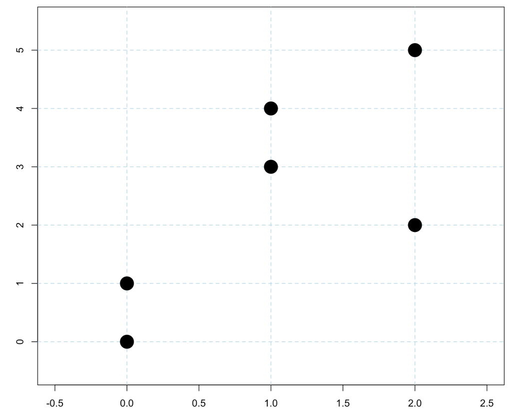
Code permanent : ________________________________

énoncé A

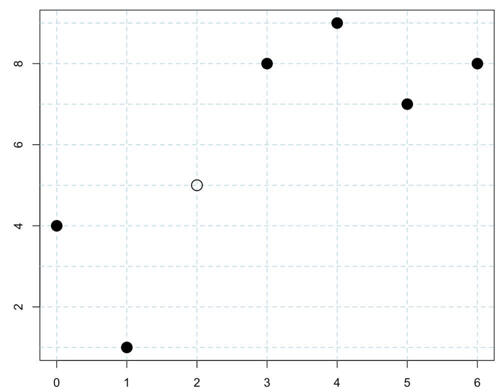
question 1	☐ A	☐ B	☐ C	☐ D	☐ E
question 2	☐ A	☐ B	☐ C	☐ D	☐ E
question 3	☐ A	☐ B	☐ C	☐ D	☐ E
question 4	☐ A	☐ B	☐ C	☐ D	☐ E
question 5	Figure à droite (à compléter)				
question 6	☐ A	☐ B	☐ C	☐ D	☐ E
question 7	Figure à droite (à compléter)				
question 8	☐ A	☐ B	☐ C	☐ D	☐ E
question 9	☐ A	☐ B	☐ C	☐ D	☐ E
question 10	☐ A	☐ B	☐ C	☐ D	☐ E
question 11	☐ A	☐ B	☐ C	☐ D	☐ E
question 12	☐ A	☐ B	☐ C	☐ D	☐ E
question 13	☐ A	☐ B	☐ C	☐ D	☐ E
question 14	☐ A	☐ B	☐ C	☐ D	☐ E
question 15	☐ A	☐ B	☐ C	☐ D	☐ E
question 16	☐ A	☐ B	☐ C	☐ D	☐ E
question 17	☐ A	☐ B	☐ C	☐ D	☐ E
question 18	☐ A	☐ B	☐ C	☐ D	☐ E
question 19	☐ A	☐ B	☐ C	☐ D	☐ E
question 20	☐ A	☐ B	☐ C	☐ D	☐ E
question 21	☐ A	☐ B	☐ C	☐ D	☐ E
question 22	☐ A	☐ B	☐ C	☐ D	☐ E
question 23	☐ A	☐ B	☐ C	☐ D	☐ E
question 24	☐ A	☐ B	☐ C	☐ D	☐ E
question 25	☐ A	☐ B	☐ C	☐ D	☐ E
question 26	☐ A	☐ B	☐ C	☐ D	☐ E
question 27	☐ A	☐ B	☐ C	☐ D	☐ E
question 28	☐ A	☐ B	☐ C	☐ D	☐ E
question 29	☐ A	☐ B	☐ C	☐ D	☐ E
question 30	☐ A	☐ B	☐ C	☐ D	☐ E
question 31	*Combien de bonnes réponses pensez vous avoir ?*				

____

question 5 :



question 7 :



1 On a estimé un modèle de régression simple, $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$, par moindres carrés et on a obtenu $\widehat{\beta}_1 = 0$. Alors

A) $R^2 = \overline{y}$

B) $R^2 = 1$

C) $R^2 = 0$

D) $R^2 = \text{Var}[y]$

E) aucune des affirmations ci-dessus

2 Pour obtenir l'estimateur de la pente, dans une régression simple, en utilisant le principe des moindres carrés, vous divisez

A) la variance d'échantillon de x par la variance d'échantillon de y

B) la covariance d'échantillon de x et y par la variance d'échantillon de y

C) la covariance d'échantillon de x et y par la variance d'échantillon de x.

D) la variance d'échantillon de x par la covariance d'échantillon de x et y.

E) la moyenne d'échantillon de y par la moyenne d'échantillon de x

3 On a estimé un modèle $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$, sur un premier échantillon. On a obtenu

$$\sum_{i=1}^n \widehat{\varepsilon}_i^2 = 50, \sum_{i=1}^n x_i = 10, \sum_{i=1}^n x_i^2 = 100, \widehat{\beta}_0 = 2 \text{ et } \widehat{\beta}_1 = 1$$

Sur un autre échantillon de même taille, on a obtenu

$$\sum_{i=1}^n \tilde{\varepsilon}_i^2 = 80, \sum_{i=1}^n x_i = 10, \sum_{i=1}^n x_i^2 = 100, \tilde{\beta}_0 = 2 \text{ et } \tilde{\beta}_1 = 1$$

Que peut-on dire sur les statistiques de test t pour nos différents estimateurs (estimés par moindres carrés)

A) $t_{\widehat{\beta}_0} \leqslant t_{\tilde{\beta}_0}$ et $t_{\widehat{\beta}_1} \leqslant t_{\tilde{\beta}_1}$

B) $t_{\widehat{\beta}_0} \leqslant t_{\tilde{\beta}_0}$ et $t_{\widehat{\beta}_1} \geqslant t_{\tilde{\beta}_1}$

C) $t_{\widehat{\beta}_0} \geqslant t_{\tilde{\beta}_0}$ et $t_{\widehat{\beta}_1} \leqslant t_{\tilde{\beta}_1}$

D) $t_{\widehat{\beta}_0} \geqslant t_{\tilde{\beta}_0}$ et $t_{\widehat{\beta}_1} \geqslant t_{\tilde{\beta}_1}$

E)$t_{\widehat{\beta}_0} = t_{\tilde{\beta}_0}$ et $t_{\widehat{\beta}_1} = t_{\tilde{\beta}_1}$

4 On ajuste un modèle $y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$ sur $n = 100$ observations, où x est une variable prenant les valeurs 0 ou 1. Dans 40% des cas, x_i a pris la valeur 1. On nous dit que

$$\widehat{\beta}_1 = 1.4 \text{ et } \sum_{i=1}^{n}(y_i - \widehat{y}_i)^2 = 920.$$

Que vaut la statistique du test de Student associé au test de significativité $H_0 : \beta_1 = 0$?

A) 1.15

B) 1.78

C) 2.26

D) 2.46

E) 3.51

5 Sur la Figure de la page 2, tracez très exactement la droite de régression (estimée par moindres carrés), sachant qu'elle passe par (au moins) un des points.

$\boldsymbol{x}$	0	0	1	1	2	2
$\boldsymbol{y}$	0	1	3	4	2	5

6 On dispose d'un jeu de données $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$. On considère deux modèles

$$y_i = bx_i + u_i \text{ et } x_i = ay_i + v_i$$

avec les conditions usuelles pour les deux modèles (en particulier $\mathcal{H}_2$). On consière les estimateurs par moindres carrés de a et b. Quelle condition vérifient-ils ?

A) $\widehat{a} \cdot \widehat{b} = 1$

B) $\widehat{b} \sum_{i=1}^{n} x_i = \widehat{a} \sum_{i=1}^{n} x_i$

C) $\widehat{b} \sum_{i=1}^{n} x_i = \widehat{a} \sum_{i=1}^{n} y_i$

D) $\widehat{b} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \widehat{a} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

E) $\widehat{b} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \widehat{a} \sum_{i=1}^{n} y_i^2$

7 On dispose de la base de données suivantes

$\boldsymbol{x}$	0	1	2	3	4	5	6
$\boldsymbol{y}$	4	1	5	8	9	7	8

La régression correspond à la sortie suivante

```
> summary(lm(y~x))

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   3.0000     1.6437   1.825   0.1420
x             1.0000     0.4317   2.317   0.0814 .
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 2.236 on 4 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.573,Adjusted R-squared:  0.4662
```

On nous demande d'enlever la troisième observation, $(x_i, y_i) = (2, 5)$, et de refaire la régression. Tracez sur la figure la nouvelle droite de régression (obtenue sur la base sans la 3ème observation).

8 On estime un modèle linéaire (A) en utilisant deux variables catégorielles, chacune prenant 2 modalités

$$x_1 = \begin{cases} 1 & \text{si l'assuré a plusieurs contrats} \\ 0 & \text{si l'assuré a un seul contrat} \end{cases}$$

$$x_2 = \begin{cases} 1 & \text{si l'assuré a plusieurs voitures} \\ 0 & \text{si l'assuré à une seule voiture} \end{cases}$$

On a alors le modèle de régression (avec un effet croisé)

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \beta_2 x_{2,i} + \beta_3 x_{1,i} x_{2,i} + \varepsilon_i.$$

L'estimation par moindres carrés donne

$$\widehat{\beta}_0 = -0.10,\ \widehat{\beta}_1 = -0.25,\ \widehat{\beta}_2 = 0.58 \text{ et } \widehat{\beta}_3 = -0.20.$$

Un second modèle (B) est estimé, en utilisant deux variables catégorielles, chacune prenant 2 modalités

$$z_1 = \begin{cases} 0 & \text{si l'assuré a plusieurs contrats} \\ 1 & \text{si l'assuré a un seul contrat} \end{cases}$$

$$z_2 = \begin{cases} 0 & \text{si l'assuré a plusieurs voitures} \\ 1 & \text{si l'assuré à une seule voiture} \end{cases}$$

On a alors le modèle de régression

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 z_{1,i} + \alpha_2 z_{2,i} + \alpha_3 z_{1,i} z_{2,i} + \varepsilon_i.$$

On obtient alors les estimateurs $\widehat{\alpha}_j$ par moindres carrés. Considérons les 4 paires $(\widehat{\beta}_j, \widehat{\alpha}_j)$. On se demande combien sont identiques

A) 0 paires sont strictement identiques, et 1 paire est identique au signe près

B) 1 paire est strictement identique, et 2 paires sont identiques au signe près

C) 0 paires sont strictement identiques, et 2 paires sont identiques au signe près

D) 1 paire est strictement identique, et 3 paires sont identiques au signe près

E) ni A, ni B, ni C, ni D

9 En utilisant 143 observations, on a estimé une fonction de régression simple. L'estimation de la pente vaut 0.04, avec un écart-type de 0.01. Laquelle des décisions possibles suivantes est la seule correcte ?

A) le coefficient est petit et qu'il est donc très probablement nul dans la population

B) la pente est statistiquement significative puisqu'elle est éloignée de zéro par quatre fois l'écart-type.

C) comme la pente est très faible, le R^2 de régression doit l'être aussi

D) si la constante est proche de 0, comme la pente est très faible, le R^2 de régression doit l'être aussi

E) comme la pente est positive, la constante sera aussi positive

10 On considère un modèle avec deux variables explicatives,

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \beta_2 x_{2,i} + \varepsilon_i$$

On dispose de

$$(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1} = \begin{pmatrix} 6.1333 & -0.0733 & -0.1933 \\ -0.0733 & 0.0087 & -0.0020 \\ -0.1933 & -0.0020 & 0.0087 \end{pmatrix} \text{ et } \widehat{\sigma}^2 = 280.1167$$

Quel est l'écart-type de $\widehat{\beta}_1 - \widehat{\beta}_2$ (on retiendra la valeur la plus proche) ?

A) 1.92

B) 2.23

C) 2.45

D) 2.87

E) 3.11

11 De manière générale, on considère le modèle $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$, où on suppose ε_i centré, de variance constante, et indépendants les uns des autres. On propose plusieurs estimateurs pour β_1,

$$\widehat{\beta}_1^{(1)} = \frac{\overline{y}}{\overline{x}}, \widehat{\beta}_1^{(2)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ et } \widehat{\beta}_1^{(3)} = \frac{\max\{y_i\} - \min\{y_i\}}{\max\{x_i\} - \min\{x_i\}}.$$

A) $\widehat{\beta}_1^{(1)}$ est un estimateur sans biais de β_1

B) $\widehat{\beta}_1^{(2)}$ est un estimateur sans biais de β_1

C) $\widehat{\beta}_1^{(3)}$ est un estimateur sans biais de β_1

D) les trois sont des estimateurs sans biais de β_1

E) aucun n'est un estimateur sans biais de β_1

12 On fait un test de Student sur une des variables explicatives dans une régression multiple, $H_0 : \beta_j = 0$. Une très large p-value (de l'ordre de 95%) signifie

A) qu'on rejette H_0

B) que la valeur absolue de la statistique de test est grande

C) que $|\widehat{\beta}_j|$ est grand

D) que $|\widehat{\beta}_j|$ est plus petit que 10% de $\sqrt{\text{Var}(\widehat{\beta}_j)}$

E) que si on supprime la j-ième variable de la régression, le R^2 augmentera

13 On considère le modèle suivant,

$$y_i = \exp\big[-(\beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i)\big]$$

Donnez les estimateurs par moindres carrés de β_1 et β_0

A) $\widehat{\beta}_1 = \dfrac{\sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum(x_i - \overline{x})^2}$ et $\widehat{\beta}_0 = \dfrac{1}{n}\sum y_i - \widehat{\beta}_1 \dfrac{1}{n}\sum x_i$

B) $\widehat{\beta}_1 = \dfrac{\sum(x_i - \overline{x})\log(y_i - \overline{y})}{\sum(x_i - \overline{x})^2}$ et $\widehat{\beta}_0 = \dfrac{1}{n}\sum y_i - \widehat{\beta}_1 \dfrac{1}{n}\sum x_i$

C) $\widehat{\beta}_1 = \dfrac{-\sum(x_i - \overline{x})\log(y_i)}{\sum(x_i - \overline{x})^2}$ et $\widehat{\beta}_0 = -\dfrac{1}{n}\sum \log(y_i) - \widehat{\beta}_1 \dfrac{1}{n}\sum x_i$

D) $\widehat{\beta}_1 = \dfrac{\sum \log(x_i - \overline{x})\log(y_i - \overline{y})}{\sum(x_i - \overline{x})^2}$ et $\widehat{\beta}_0 = -\dfrac{1}{n}\sum \log(y_i) - \widehat{\beta}_1 \dfrac{1}{n}\sum x_i$

E) $\widehat{\beta}_1 = \dfrac{-\sum(x_i - \overline{x})\log(y_i)}{\sum(x_i - \overline{x})^2}$ et $\widehat{\beta}_0 = \dfrac{1}{n}\sum y_i - \widehat{\beta}_1 \dfrac{1}{n}\sum x_i$

14 On considère un modèle estimé par moindres carrés $\widehat{y}_i = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 x_i$. On veut faire une prévision pour un nouveau point $x^\star$, et on pose

$$\widehat{y}^\star = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1\ x^\star.$$

Pour quel valeur de $x^\star$ la variance de $\widehat{Y}^\star$ sera-t-elle minimale ?

A) quand $x^\star = 0$

B) quand $x^\star = \overline{x}$

C) quand $x^\star = \min\{x_1, \cdots, x_n\}$

D) quand $x^\star$ est l'abscisse du point $(x^\star, y^\star)$ où $y^\star = \min\{y_1, \cdots, y_n\}$

E) aucune des réponses proposées

Le problème suivant sert de base aux questions 15 et 16

On cherche à examiner le lien entre le salaire y et le nombre d'années d'expérience x_1, en fonction du genre x_2 (1 pour les hommes, 0 pour les femmes). On cherche à estimer le modèle

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \beta_2 x_{2,i} + \beta_3 x_{1,i} x_{2,i} + \varepsilon_i \qquad (0)$$

à l'aide de 30 observations. On obtient un R^2 de 87%. On considère alors 6 modèles alternatifs plus simples,

	modèle	somme des carrés des résidus
(1)	$y_i = \beta_0 + \varepsilon_i$	423.58
(2)	$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \varepsilon_i$	75.69
(3)	$y_i = \beta_0 + \beta_2 x_{2,i} + \varepsilon_i$	381.23
(4)	$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \beta_3 x_{1,i} x_{2,i} + \varepsilon_i$	68.74
(5)	$y_i = \beta_0 + \beta_2 x_{2,i} + \beta_3 x_{1,i} x_{2,i} + \varepsilon_i$	260.42
(6)	$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \beta_2 x_{2,i} + \varepsilon_i$	71.96

15 Que vaut le R^2 pour le modèle (6) ?

A) moins de 60%

B) entre 60% et 70%

C) entre 70% et 80%

D) entre 80% et 90%

E) plus de 90%

16 Calculez la statistique de test F pour tester si l'impact de l'expérience sur le salaire est identique pour les hommes et les femmes. (on retiendra la valeur la plus proche)

A) 2

B) 4

C) 5

D) 6

E) 8

17 On construit deux modèles, que l'on va estimer à l'aide de $n = 30$ observations

$$\text{modèle (A):} \qquad y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \varepsilon$$

et

$$\text{modèle (B):} \qquad y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \eta$$

On nous donne

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2 = 160 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} (x_{1,i} - \overline{x}_1)^2 = 10.$$

De plus, pour le modèle (A), $\widehat{\beta}_1 = -2$ alors que pour le modèle (B), $R^2 = 0.7$. Quelle est la valeur de la statistique de test F du test $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0$?

A) moins de 22

B) entre 22 et 25

C) entre 25 et 27

D) entre 27 et 30

E) plus de 30

18 Toujours pour ce modèle linéaire simple, on suppose que β_0 est connue, vaut 2, et on estime le modèle suivant

$$y_i = 2 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \tag{1}$$

par moindres carrés. On note $\widetilde{\beta}_1$ l'estimateur de β_1. Que vaut $\widetilde{\beta}_1$?

A) $\widetilde{\beta}_1 = \dfrac{\sum (x_i - \overline{x}) y_i}{\sum (x_i - \overline{x})^2}$

B) $\widetilde{\beta}_1 = \dfrac{\sum (y_i - 2)}{\sum (x_i - \overline{x})}$

C) $\widetilde{\beta}_1 = \dfrac{\sum x_i (y_i - 2)}{\sum (x_i - \overline{x})^2}$

D) $\widetilde{\beta}_1 = \dfrac{\sum x_i (y_i - 2)}{\sum x_i^2}$

E) aucune des réponses proposées

19 On considère le modèle suivant,

$$y_i = \beta + \beta x_i + \varepsilon_i$$

Donnez l'estimateur par moindres carrés de β

A) $\widehat{\beta} = \dfrac{\sum y_i}{\sum x_i}$

B) $\widehat{\beta} = \dfrac{\sum y_i}{\sum (1 + x_i)}$

C) $\widehat{\beta} = \dfrac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$

D) $\widehat{\beta} = \dfrac{\sum (1 + x_i) y_i}{\sum (1 + x_i)^2}$

E) $\widehat{\beta} = \dfrac{\sum (x_i - \overline{x}) y_i}{\sum (x_i - \overline{x})^2}$

20 Toujours sur le modèle $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$, où on suppose ε_i centré, de variance constante, et indépendants les uns des autres, on estime les coefficients par moindres carrés. Quelles affirmations parmi les suivantes sont justes ?

i) la somme des résidus estimés est toujours nulle

ii) la somme des résidus estimés est nulle à condition que $\overline{y} = 0$

iii) si $R^2 = 0$, $\widehat{\beta}_1 = 0$ (et la droite de régression est horizontale)

iv) la droite de régression $y = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 x$ passe par le point $(\overline{x}, \overline{y})$ à condition que ce point soit un point de l'échantillon

A) (i) seulement

B) (ii) seulement

C) (i) et (iii)

D) (ii) et (iii)

E) (i) et (iv)

Les questions 21 à 30 portent sur les sorties de régressions suivantes. En 1886, Galton avait obtenu des tailles (en pouces) de 934 enfants, dans 205 familles, à l'âge adulte, avec la taille de l'enfant (`childHeight`, y) en pouces, la taille de la mère (`mother`, x_1) en pouces, la taille du père (`father`, x_2) en pouces, la taille moyenne des parents (`midparentHeight`, x_3) en pouces, les versions en centimètres, `childHeightcm`, `mothercm` `fathercm`, `midparentHeightcm` (pour rappel, un pouce correspond à 2.54 cm). On a aussi le sexe de l'enfant (`gender`, x_4), variable binaire prenant les modalités `male` et `female`. On sait aussi s'il est enfant unique (`unique = TRUE`, x_5)

• modèle (A)

```
> summary(lm(childHeight ~ midparentHeight, data=GaltonFamilies))

Coefficients:
                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)     22.63624    4.26511   5.307 1.39e-07 ***
midparentHeight  0.63736    0.06161  10.345  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 3.392 on 932 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.103,Adjusted R-squared:  0.102
```

• modèle (B)

```
> summary(lm(childHeight ~ father, data=GaltonFamilies, subset = (gender == "male")))

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 38.36258    3.30837  11.596   <2e-16 ***
father       0.44652    0.04783   9.337   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 2.416 on 479 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.154,Adjusted R-squared:  0.1522
```

• modèle (C)

```
> summary(lm(childHeight ~ father+mother, data=GaltonFamilies, subset = (gender == "male")))

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 19.31281    4.09503   4.716 3.16e-06 ***
father       0.41756    0.04561   9.154  < 2e-16 ***
mother       0.32877    0.04530   7.258 1.61e-12 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 2.295 on 478 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.2379,Adjusted R-squared:  0.2347
```

• modèle (D)

```
> summary(lm(childHeight ~ 0 + gender + midparentHeight, data=GaltonFamilies))

Coefficients:
                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
genderfemale    16.51410    2.73392   6.040 2.22e-09 ***
gendermale      21.72921    2.72893   7.963 4.89e-15 ***
midparentHeight  0.68702    0.03944  17.419  < 2e-16 ***

Residual standard error: 2.17 on 931 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9989,Adjusted R-squared:  0.9989
```

• modèle (E)

```
> summary(lm(childHeight ~  gender + midparentHeight, data=GaltonFamilies))

Coefficients:
                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)     16.51410    2.73392    6.04 2.22e-09 ***
gendermale       XXXXXXX    0.14216   XXXXX  XXXXXXX
midparentHeight  0.68702    0.03944   17.42  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 2.17 on 931 degrees of freedom
Multiple R-squared:  XXXXXX,Adjusted R-squared:  XXXXXX
```

• modèle (F)

```
> summary(lm(childHeight ~  gender + father+mother, data=GaltonFamilies))

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 16.52124    2.72720   6.058    2e-09 ***
gendermale   5.21499    0.14181  36.775   <2e-16 ***
father       0.39284    0.02868  13.699   <2e-16 ***
mother       0.31761    0.03100  10.245   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 2.165 on 930 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.6354,Adjusted R-squared:  0.6342
```

• modèle (G)

```
> summary(lm(childHeight ~  gender + midparentHeight + unique , data=GaltonFamilies))

Coefficients:
                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)     16.49150    2.73647   6.027 2.41e-09 ***
gendermale       5.21514    0.14223  36.667  < 2e-16 ***
midparentHeight  0.68729    0.03947  17.412  < 2e-16 ***
uniqueTRUE       0.10737    0.38492  XXXXXX   XXXXXX
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 2.171 on 930 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.6332,Adjusted R-squared:  0.6321
```

• modèle (H)

```
> summary(lm(childHeightcm ~  gender + midparentHeightcm , data=GaltonFamilies))

Coefficients:
                  Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)       41.94582    XXXXXXX   XXXXX  XXXXXXXX
gendermale         XXXXXXX    XXXXXXX   XXXXX  XXXXXXXX
midparentHeightcm  XXXXXXX    XXXXXXX   XXXXX  XXXXXXXX

Residual standard error: XXXXXX on 931 degrees of freedom
Multiple R-squared:  XXXXX,Adjusted R-squared:  XXXXXX
```

• modèle (I)

```
> summary(lm(childHeight ~  gender + midparentHeight +I(father-mother), data=GaltonFamilies))

Coefficients:
                   Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)         XXXXXXX    XXXXXXX   XXXXX    XXXXX
gendermale          XXXXXXX    XXXXXXX   XXXXX    XXXXX
midparentHeight     0.68313    0.03938  17.348   <2e-16 ***
I(father - mother)  0.05128    0.02169   2.364   XXXXXX

Residual standard error: XXXXX on 930 degrees of freedom
Multiple R-squared:  XXXXX,Adjusted R-squared:  XXXXXX
```

21 Un homme de 64 pouces a un père mesurant 62 pouces, une mère mesurant 66 pouces. Pour le modèle (F), quelle serait l'erreur associée à cette nouvelle observation, $\boldsymbol{x}_{n+1}$, avec $\widehat{\varepsilon}_{n+1} = \widehat{y}_{n+1} - y_{n+1}$?

A) moins de -2

B) entre -2 et -1

C) entre -1 et +1

D) entre +1 et +2

E) plus que +2

22 Dans la régression (E), $y = \beta_0 + \beta_{\text{male}}\mathbf{1}(x_4 = \text{“male”}) + \beta_3 x_3 + \varepsilon$, que vaut l'estimateur par la méthode des moindres carrés de β_{male}

A) moins de 5

B) entre 5 et 10

C) entre 10 et 15

D) entre 15 et 20

E) plus de 20

23 Dans la régression (E), que vaut le R^2 ?

A) moins de 55%

B) entre 55% et 60%

C) entre 60% et 65%

D) entre 65% et 70%

E) plus de 70%

24 Pour la régression (G), où la taille de l'enfant est expliquée par le sexe (x_4), la taille moyenne des parents (x_3) et le fait que l'enfant soit unique ou pas (x_5), donnez un ordre de grandeur pour la p-value du test de Student de $H_0 : \beta_5 = 0$ (paramètre associé à x_5, `uniqueTRUE`)

A) moins de 10%

B) entre 10% et 25%

C) entre 25% et 50%

D) entre 50% et 75%

E) plus que 75%

25 On considère un jeune homme, dont la mère mesure 67.0 pouces (x_1), et le père 78.5 pouces (x_2). On considère (1) le modèle de régression sur x_1 et x_2 estimé uniquement sur les jeunes homme (2) le modèle de régression sur x_1, x_2 et en rajoutant le sexe, x_4. On note $\widehat{y}^{(1)}$ la prédiction avec le modèle (1) et $\widehat{y}^{(2)}$ la prédiction avec le modèle (2). Que vaut $\widehat{y}^{(1)} - \widehat{y}^{(2)}$?

A) moins de -1 pouce

B) entre -1 pouce et 0

C) exactement 0 pouce

D) entre 0 et 1 pouce

E) plus de +1 pouce

26 Pour la régression (H), $y^{cm} = \beta_0^{cm} + \beta_4^{cm}\mathbf{1}(x_4 = \text{“male”}) + \beta_3^{cm}x_3^{cm} + \varepsilon^{cm}$, que vaut l'estimateur par moindres carrés de β_3^{cm}

A) moins de 3

B) entre 3 et 5

C) entre 5 et 8

D) entre 8 et 12

E) plus que 12

27 Pour la régression (H), $y^{cm} = \beta_0^{cm} + \beta_4^{cm}\mathbf{1}(x_4 = \text{“male”}) + \beta_3^{cm}x_3^{cm} + \varepsilon^{cm}$, que vaut l'estimateur par moindres carrés de β_4^{cm}

A) moins de 0.3

B) entre 0.3 et 0.5

C) entre 0.5 et 0.8

D) entre 0.8 et 1.5

E) plus que 1.5

28 Pour la régression (H), $y^{cm} = \beta_0^{cm} + \beta_4^{cm}\mathbf{1}(x_4 = \text{“male”}) + \beta_3^{cm}x_3^{cm} + \varepsilon^{cm}$, que vaut l'estimateur de l'écart-type de $\widehat{\beta}_0^{cm}$, estimé par moindres carrés ?

A) moins de 1

B) entre 1 et 3.5

C) entre 3.5 et 6

D) entre 6 et 7.5

E) plus que 7.5

29 Pour la régression (H), $y^{cm} = \beta_0^{cm} + \beta_4^{cm}\mathbf{1}(x_4 = \text{“male”}) + \beta_3^{cm} x_3^{cm} + \varepsilon^{cm}$, que vaut l'estimateur de la variance des $\widehat{\varepsilon}_i^{cm}$ (résidus de la régression estimée par moindres carrés).

A) moins de 10

B) entre 10 et 15

C) entre 15 et 20

D) entre 20 et 25

E) plus que 25

30 Dans le modèle (I), on tente d'expliquer la taille de l'enfant par la taille moyenne des parents x_3 et l'écart de taille entre le père et la mère, $x_6 = x_2 - x_1$. Que vaut l'estimateur par moindres carrés du paramètre associé à la constante, β_0 ? (on retiendra la valeur la plus proche)

A) 8.26

B) 16.52

C) 19.31

D) 22.63

E) 38.36

Table de la fonction de répartition de la loi normale $\Phi(u)$

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5348	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table de quantile de Student $F_\nu^{-1}(p)$

ν \ P	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95	0.975	0.990	0.995	0.999	0.9995
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.3	636.6
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.33	31.60
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.22	12.94
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.859
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.405
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.611	3.922
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
32	0.256	0.530	0.853	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365	3.622
34	0.255	0.529	0.852	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348	3.601
36	0.255	0.529	0.852	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333	3.582
38	0.255	0.529	0.851	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319	3.566
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
50	0.255	0.528	0.849	1.298	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261	3.496
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
70	0.254	0.527	0.847	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211	3.435
80	0.254	0.527	0.846	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.415
90	0.254	0.526	0.846	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	3.183	3.402
100	0.254	0.526	0.845	1.290	1.660	1.984	2.365	2.626	3.174	3.389
200	0.254	0.525	0.843	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601	3.131	3.339
500	0.253	0.525	0.842	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586	3.106	3.310
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

Table de quantile du chi-deux $F_\nu^{-1}(p)$

ν \ p	0.001	0.005	0.010	0.025	0.05	0.10	0.50	0.90	0.95	0.975	0.990	0.995	0.999
1	–	–	–	0.001	0.004	0.016	0.455	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8
2	0.002	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	1.39	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8
3	0.024	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	2.37	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8	16.3
4	0.091	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	3.36	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5
5	0.210	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	4.35	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5
6	0.381	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	5.35	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5
7	0.598	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	6.35	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3
8	0.857	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	7.34	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1
9	1.15	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	8.34	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9
10	1.48	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	9.34	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6
11	1.83	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	10.3	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3
12	2.21	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	11.3	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9
13	2.62	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	12.3	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5
14	3.04	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	13.3	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1
15	3.48	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	14.3	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7
16	3.94	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	15.3	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3
17	4.42	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	16.3	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8
18	4.90	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	17.3	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3
19	5.41	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	18.3	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8
20	5.92	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	19.3	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3
21	6.45	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	20.3	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8
22	6.98	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	21.3	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3
23	7.53	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	22.3	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7
24	8.08	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	23.3	33.2	26.4	29.4	43.0	45.6	51.2
25	8.65	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	24.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6
26	9.22	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	25.3	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	54.1
27	9.80	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	26.3	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5
28	10.4	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	27.3	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	56.9
29	11.0	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	28.3	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	58.3
30	11.6	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	29.3	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7
32	12.8	15.1	16.4	18.3	20.1	22.3	31.3	42.6	46.2	49.5	53.5	56.3	62.5
34	14.1	16.5	17.8	19.8	21.7	24.0	33.3	44.9	48.6	52.0	56.1	59.0	65.2
36	15.3	17.9	19.2	21.3	23.3	25.6	35.3	47.2	51.0	54.4	58.6	61.6	68.0
38	16.6	19.3	20.7	22.9	24.9	27.3	37.3	49.5	53.4	56.9	61.2	64.2	70.7
40	17.9	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	39.3	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	73.4
50	24.7	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	49.3	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	86.7
60	31.7	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	59.3	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0	99.6
70	39.0	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	69.3	85.5	90.5	95.0	100.4	104.2	112.3
80	46.5	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	79.3	96.6	101.9	106.6	112.3	116.3	124.8
90	54.2	59.2	61.8	65.6	69.1	73.3	89.3	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3	137.2
100	61.9	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	99.3	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2	149.4

Table de quantile de la loi de Fisher (quantile à 97.5%, $F^{-1}_{\nu_n,\nu_d}(97.5\%)$)

num	den 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161.4476	18.5128	10.1280	7.7086	6.6079	5.9874	5.5914	5.3177	5.1174	4.9646
2	199.5000	19.0000	9.5521	6.9443	5.7861	5.1433	4.7374	4.4590	4.2565	4.1028
3	215.7073	19.1643	9.2766	6.5914	5.4095	4.7571	4.3468	4.0662	3.8625	3.7083
4	224.5832	19.2468	9.1172	6.3882	5.1922	4.5337	4.1203	3.8379	3.6331	3.4780
5	230.1619	19.2964	9.0135	6.2561	5.0503	4.3874	3.9715	3.6875	3.4817	3.3258
6	233.9860	19.3295	8.9406	6.1631	4.9503	4.2839	3.8660	3.5806	3.3738	3.2172
7	236.7684	19.3532	8.8867	6.0942	4.8759	4.2067	3.7870	3.5005	3.2927	3.1355
8	238.8827	19.3710	8.8452	6.0410	4.8183	4.1468	3.7257	3.4381	3.2296	3.0717
9	240.5433	19.3848	8.8123	5.9988	4.7725	4.0990	3.6767	3.3881	3.1789	3.0204
10	241.8817	19.3959	8.7855	5.9644	4.7351	4.0600	3.6365	3.3472	3.1373	2.9782
11	242.9835	19.4050	8.7633	5.9358	4.7040	4.0274	3.6030	3.3130	3.1025	2.9430
12	243.9060	19.4125	8.7446	5.9117	4.6777	3.9999	3.5747	3.2839	3.0729	2.9130
13	244.6898	19.4189	8.7287	5.8911	4.6552	3.9764	3.5503	3.2590	3.0475	2.8872
14	245.3640	19.4244	8.7149	5.8733	4.6358	3.9559	3.5292	3.2374	3.0255	2.8647
15	245.9499	19.4291	8.7029	5.8578	4.6188	3.9381	3.5107	3.2184	3.0061	2.8450
16	246.4639	19.4333	8.6923	5.8441	4.6038	3.9223	3.4944	3.2016	2.9890	2.8276
17	246.9184	19.4370	8.6829	5.8320	4.5904	3.9083	3.4799	3.1867	2.9737	2.8120
18	247.3232	19.4402	8.6745	5.8211	4.5785	3.8957	3.4669	3.1733	2.9600	2.7980
19	247.6861	19.4431	8.6670	5.8114	4.5678	3.8844	3.4551	3.1613	2.9477	2.7854
20	248.0131	19.4458	8.6602	5.8025	4.5581	3.8742	3.4445	3.1503	2.9365	2.7740
21	248.3094	19.4481	8.6540	5.7945	4.5493	3.8649	3.4349	3.1404	2.9263	2.7636
22	248.5791	19.4503	8.6484	5.7872	4.5413	3.8564	3.4260	3.1313	2.9169	2.7541
23	248.8256	19.4523	8.6432	5.7805	4.5339	3.8486	3.4179	3.1229	2.9084	2.7453
24	249.0518	19.4541	8.6385	5.7744	4.5272	3.8415	3.4105	3.1152	2.9005	2.7372
25	249.2601	19.4558	8.6341	5.7687	4.5209	3.8348	3.4036	3.1081	2.8932	2.7298
26	249.4525	19.4573	8.6301	5.7635	4.5151	3.8287	3.3972	3.1015	2.8864	2.7229
27	249.6309	19.4587	8.6263	5.7586	4.5097	3.8230	3.3913	3.0954	2.8801	2.7164
28	249.7966	19.4600	8.6229	5.7541	4.5047	3.8177	3.3858	3.0897	2.8743	2.7104
29	249.9510	19.4613	8.6196	5.7498	4.5001	3.8128	3.3806	3.0844	2.8688	2.7048
30	250.0951	19.4624	8.6166	5.7459	4.4957	3.8082	3.3758	3.0794	2.8637	2.6996

num	den 11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	4.8443	4.7472	4.6672	4.6001	4.5431	4.4940	4.4513	4.4139	4.3807	4.3512
2	3.9823	3.8853	3.8056	3.7389	3.6823	3.6337	3.5915	3.5546	3.5219	3.4928
3	3.5874	3.4903	3.4105	3.3439	3.2874	3.2389	3.1968	3.1599	3.1274	3.0984
4	3.3567	3.2592	3.1791	3.1122	3.0556	3.0069	2.9647	2.9277	2.8951	2.8661
5	3.2039	3.1059	3.0254	2.9582	2.9013	2.8524	2.8100	2.7729	2.7401	2.7109
6	3.0946	2.9961	2.9153	2.8477	2.7905	2.7413	2.6987	2.6613	2.6283	2.5990
7	3.0123	2.9134	2.8321	2.7642	2.7066	2.6572	2.6143	2.5767	2.5435	2.5140
8	2.9480	2.8486	2.7669	2.6987	2.6408	2.5911	2.5480	2.5102	2.4768	2.4471
9	2.8962	2.7964	2.7144	2.6458	2.5876	2.5377	2.4943	2.4563	2.4227	2.3928
10	2.8536	2.7534	2.6710	2.6022	2.5437	2.4935	2.4499	2.4117	2.3779	2.3479
11	2.8179	2.7173	2.6347	2.5655	2.5068	2.4564	2.4126	2.3742	2.3402	2.3100
12	2.7876	2.6866	2.6037	2.5342	2.4753	2.4247	2.3807	2.3421	2.3080	2.2776
13	2.7614	2.6602	2.5769	2.5073	2.4481	2.3973	2.3531	2.3143	2.2800	2.2495
14	2.7386	2.6371	2.5536	2.4837	2.4244	2.3733	2.3290	2.2900	2.2556	2.2250
15	2.7186	2.6169	2.5331	2.4630	2.4034	2.3522	2.3077	2.2686	2.2341	2.2033
16	2.7009	2.5989	2.5149	2.4446	2.3849	2.3335	2.2888	2.2496	2.2149	2.1840
17	2.6851	2.5828	2.4987	2.4282	2.3683	2.3167	2.2719	2.2325	2.1977	2.1667
18	2.6709	2.5684	2.4841	2.4134	2.3533	2.3016	2.2567	2.2172	2.1823	2.1511
19	2.6581	2.5554	2.4709	2.4000	2.3398	2.2880	2.2429	2.2033	2.1683	2.1370
20	2.6464	2.5436	2.4589	2.3879	2.3275	2.2756	2.2304	2.1906	2.1555	2.1242
21	2.6358	2.5328	2.4479	2.3768	2.3163	2.2642	2.2189	2.1791	2.1438	2.1124
22	2.6261	2.5229	2.4379	2.3667	2.3060	2.2538	2.2084	2.1685	2.1331	2.1016
23	2.6172	2.5139	2.4287	2.3573	2.2966	2.2443	2.1987	2.1587	2.1233	2.0917
24	2.6090	2.5055	2.4202	2.3487	2.2878	2.2354	2.1898	2.1497	2.1141	2.0825
25	2.6014	2.4977	2.4123	2.3407	2.2797	2.2272	2.1815	2.1413	2.1057	2.0739
26	2.5943	2.4905	2.4050	2.3333	2.2722	2.2196	2.1738	2.1335	2.0978	2.0660
27	2.5877	2.4838	2.3982	2.3264	2.2652	2.2125	2.1666	2.1262	2.0905	2.0586
28	2.5816	2.4776	2.3918	2.3199	2.2587	2.2059	2.1599	2.1195	2.0836	2.0517
29	2.5759	2.4718	2.3859	2.3139	2.2525	2.1997	2.1536	2.1131	2.0772	2.0452
30	2.5705	2.4663	2.3803	2.3082	2.2468	2.1938	2.1477	2.1071	2.0712	2.0391