STT5100 – Examen Intra

(Hiver 2022)

Les calculatrices sont autorisées. Les documents sont en revanche interdits. L'examen dure 3 heures. Toute sortie avant la fin est autorisée, mais sera définitive.

La feuille propose 7 exercices et un barème approximatif est donné à titre indicatif (oui, la somme des points dépasse 100). Les réponses doivent être reportées sur le cahier joint. Si vous utilisez 2 cahiers, merci de le mentionner, en indiquant 1/2 et 2/2 respectivement.

N'hésitez pas à faire des dessins pour vous aider, mais ne considérez pas un dessin comme une preuve. Si vous utilisez un résultat du cours dans votre preuve, nommez-le aussi précisément que possible.

Si vous pensez que des hypothèses manquent pour répondre à la question, indiquez le dans le cahier. Si vous avez besoin d'introduire des objets mathématiques non définis dans l'énoncé, définissez les clairement.

Des tables de quantiles de lois usuelles sont données en annexes, après les exercices.

Exercice 1 – R^2 ***et corrélation*** [10 points]

Considérons le modèle linéaire

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \beta_2 x_{2,i} + \varepsilon_i$$

estimé par moindres carrées à partir de données $\{y_i, x_{1,i}, x_{2,i}\}$. On note $\widehat{y}_i$ la prédiction obtenue. On suppose que $\mathcal{H}_{\mathbf{1}} - \mathcal{H}_{\mathbf{2}}$ sont vérifiées. Le coefficient d'ajustement, R^2, est la proportion de la variance de la variable y qui est expliquée par le modèle. Montrez que $R^2 = \text{corr}(\widehat{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{y})^2$.

Exercice 2 – ***Comparer deux estimateurs*** [15 points]

Considérons le modèle linéaire simple

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

estimé par moindres carrées à partir de données $\{y_i, x_i\}$, avec $i = 1, \cdots, 2n$. On suppose vérifiées les hypothèses $\mathcal{H}_{\mathbf{1}} - \mathcal{H}_{\mathbf{2}}$ du cours. On note

$$\overline{x} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} x_i,\ \overline{x}_- = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ \overline{x}_+ = \frac{1}{n}\sum_{i=n+1}^{2n} x_i$$

$$\overline{y} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} y_i,\ \overline{y}_- = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,\ \overline{y}_+ = \frac{1}{n}\sum_{i=n+1}^{2n} y_i$$

et on pose

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\sum (y_i - \overline{y})(x_i - \overline{x})}{\sum (x_i - \overline{x})^2} \text{ et } \widetilde{\beta}_1 = \frac{\overline{y}_+ - \overline{y}_-}{\overline{x}_+ - \overline{x}_-}$$

1. Montrer (par le calcul) que l'estimateur de β_1 qui minimise la somme des carrés des erreurs est $\widehat{\beta}_1$.
2. Montrer que $\widetilde{\beta}_1$ est un estimateur sans biais de β_1.
3. Comparez $\text{Var}[\widetilde{\beta}_1]$ et $\text{Var}[\widehat{\beta}_1]$.

Exercice 3 – ***Variance des*** $\hat{\beta}_j$ [15 points]

On travaille ici avec le modèle linéaire homoscédastique $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ satisfaisant les hypothèses $\mathcal{H}_{\mathbf{1}} - \mathcal{H}_{\mathbf{2}}$ du cours, et soit $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ l'estimateur des moindres carrés.

1. Si les covariables sont orthogonales, rappelez ce que vaut $\text{Var}(\hat{\beta}_j)$ pour $j = 1, \ldots, p$.
2. On ne suppose plus que les covariables sont orthogonales ici mais supposons $p = 2$. Montrez que $\text{Var}(\hat{\beta}_1) \geq \dfrac{\sigma^2}{\mathbf{x}_1^\top \mathbf{x}_1}$ (indication: calculez le 1er terme diagonal de $(\mathbf{X}^\top\mathbf{X})^{-1}$).

Exercice 4 – ***Nouvelle observation*** [15 points]

On dispose de n observations $(y_1, \mathbf{x}_1), \dots, (y_n, \mathbf{x}_n)$, et on estime un modèle linéaire, $y_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i$, par moindres carrés. Soit $\mathbf{X}$ la matrice $n \times p$ associée. On suppose que $\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2$ sont vérifiées. Une fois estimé le modèle, on obtient une nouvelle observation (y_{n+1}, bx_{n+1}).

1. Montrez que l'erreur de prédiction $e_{n+1} = Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}$ vérifie

$$e_{n+1} = \varepsilon_{n+1} - \mathbf{x}_{n+1}^\top (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \text{Var}(e_{n+1}) = \sigma^2 \left(1 + \mathbf{x}_{n+1}^\top (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_{n+1}\right).$$

2. Montrez également que dans le cas de la régression simple, autrement dit $\mathbf{x} = (1, x)$,

$$\text{Var}(e_{n+1}) = \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \overline{x})^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2} \right).$$

Exercice 5 – ***Pratique de la régression*** [25 points]

On considère le modèle de régression suivant, expliquant le poids des enfants à la naissance pour 1388 ménages aux Etats-Unis, `weight` (en onces), en fonction d'un certain nombre de variables explicatives,

```
Call:
lm(formula = weight ~ male+parity+packs+white, data = naissance)

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   110.22      1.676  65.763   <1e-12 ***
male           3.090      1.068   2.893   0.0038  **
parity         1.740      0.600   2.900   0.0038  **
packs        -10.460      1.791  -5.840 6.48e-09 ***
white          6.520      1.301   5.011 6.09e-07 ***
---
Signif. codes:
0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 19.87215 on 1383 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.489
```

(...)

On considère aussi un second modèle de régression, expliquant le logarithme du poids des enfants à la naissance, `log_weight`, en fonction des mêmes variables

```
Call:
lm(formula = log_weight ~ male+parity+packs+white, data = naissance)

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   4.680     0.016   292.5   <1e-12 ***
male          0.026     0.010    2.60   0.0094  **
parity        0.016     0.006    2.67   0.0077  **
packs        -0.091     0.017   -5.35 1.01e-07 ***
white         0.062     0.012    5.17 2.73e-07 ***
---
Signif. codes:
0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.18654 on 1383 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.45
```

Pour les variables explicatives, `male` est une variable indicatrice qui vaut 1 si l'enfant est un garçon, et 0 sinon; `parity` est une variable indiquant le rang de l'enfant dans la fratrie (1 pour l'aîné, 2 pour le second, etc); `packs` indique le nombre moyen de paquets de cigarettes fumés, par jour, par la mère, pendant la grossesse; `white` est une variable indicatrice qui vaut 1 si l'enfant est de peau blanche, et 0 sinon.

1. Quel serait le poids d'un garçon blanc à la naissance prédit par le premier modèle, sachant qu'il est l'ainé de la famille et que la mère fumait un paquet par jour pendant la grossesse ?
2. Quel serait le logarithme du poids d'un garçon blanc à la naissance prédit par le second modèle, sachant qu'il est l'ainé de la famille et que la mère fumait un paquet par jour pendant la grossesse ?
3. A l'aide de ce second modèle quel serait la prévision, sans biais, du poids d'un garçon blanc à la naissance prédit par le second modèle, sachant qu'il est l'ainé de la famille et que la mère fumait un paquet par jour pendant la grossesse ?

On a aussi la sortie suivante, sur un des deux modèles

```
> vcov(regression)
            (Intercept)   male  parity   packs   white
(Intercept)      2.810  -0.635  -0.633  -0.241  -1.448
male            -0.635   1.141   0.010   0.000   0.032
parity          -0.633   0.010   0.360  -0.072   0.060
packs           -0.241   0.000  -0.072   3.208   0.031
white           -1.448   0.032   0.060   0.031   1.695
```

4. A quoi correspond cette sortie informatique ?
5. On veut faire un test (de Fisher, au seuil de 5%), que le poids d'un enfant à la naissance soit le même, quel que soit le sexe et la couleur de l'enfant, toutes choses restant égales par ailleurs. Que peut-on conclure ici ?

On rajoute deux variables dans l'espoir d'améliorer la prévision, `education` correspondant au nombre d'années d'études de la mère et `income` qui est le revenu familial annuel, en milliers de dollars. Dans la sortie, les informations `t value` et `Pr(>|t|)` sont manquantes

```
Call:
lm(formula = weight ~ male+parity+packs+white+income+education, data = naissance)

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   107.92      3.520
male           3.170      1.069
parity         1.800      0.602
packs         -9.730      1.837
white          5.680      1.365
income         0.059      0.033
education      0.079      0.256
---
Signif. codes:
0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 19.8520 on 1381 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.491
```

6. Sur la base de ce dernier modèle, quel serait le poids d'un garçon blanc à la naissance prédit par le premier modèle, sachant qu'il est l'aîné de la famille, que la mère fumait un paquet par jour pendant la grossesse, que le revenu familial annuel est de 105500 $ et dont la mère a fait 12 années d'études ?

7. Quelles sont ici, les variables qui sont "non-significatives" (au sens du test de Student) pour un seuil de significativité de 5% ?

8. Effectuer le test, au seuil de 5%, que le poids d'un enfant à la naissance est le même quelque soit le nombre d'années d'études de la mère et le revenu familial annuel, toutes choses restant égales par ailleurs.

Exercice 6 – *Régression sur deux variables corrélées* [25 points]

Soit $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ un modèle de régression linéaire homoscédastique Gaussien. On suppose que la matrice de design $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ est de taille $(n, 2)$, et que les variables $\mathbf{y}$, $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$ sont centrées. Le vecteur des paramètres $\boldsymbol{\beta}$ est ici de dimension 2. On notera σ^2 le paramètre de variance du bruit. Enfin, on supposera que

$$\mathbf{X}^\top\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

où ρ est un paramètre réel.

1. Quelle est la condition ρ pour que la matrice de design $\mathbf{X}$ soit de rang plein et que $\mathbf{X}^\top\mathbf{X}$ soit définie positive? Cette condition sera supposée vérifiée par la suite.
2. Soit $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$ l'estimateur obtenu par moindres carrés ordinaires de ce modèle. Montrez que pour $j = 1, 2$
$$\hat{\beta}_j = \frac{1}{1-\rho^2}\mathbf{z}_j^\top\mathbf{y}, \qquad \text{avec } \mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_1 - \rho\mathbf{x}_2 \text{ et } \mathbf{z}_2 = \mathbf{x}_2 - \rho\mathbf{x}_1.$$
3. Calculez $\text{Var}(\hat{\beta}_j)$ en fonction de σ^2 et ρ, pour $j = 1, 2$.
4. On définit le critère du facteur d'augmentation de la variance (VIF) du $j$ème régresseur VIF_j par $\text{VIF}_j = \left((\mathbf{X}^\top\mathbf{X})^{-1}\right)_{jj}$. Pour quelle condition sur ρ, VIF_j est-il supérieur à 4? supérieur à 10?
5. Soit $\hat{\sigma}^2$ l'estimateur de la variance du bruit. Définir les statistiques des tests de significativité des paramètres β_1 et β_2 en fonction de ρ. Que se passe-t-il lorsque $|\rho| \to 1$? Commentez.

Exercice 7 – *Centrer & centrer et réduire* [5 points]

On considère un premier modèle,

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1,i} + \alpha_2 x_{2,i} + \alpha_3 x_{3,i} + \varepsilon_i$$

qui, estimée à partir de n observations $\{(y_i, x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i})\}$ par moindres carrés, donne un R^2 noté R_1^2.

On centre les quatre variables: on note $\{(\widetilde{y}_i, \widetilde{x}_{1,i}, \widetilde{x}_{2,i}, \widetilde{x}_{3,i})\}$ les variables centrées,

$$\widetilde{y}_i = \beta_0 + \beta_1\widetilde{x}_{1,i} + \beta_2\widetilde{x}_{2,i} + \beta_3\widetilde{x}_{3,i} + \eta_i$$

est aussi estimé par moindres carrés, et on note R_2^2 le R^2 de la régression.

On centre et on réduit les quatre variables: on note $\{(\breve{y}_i, \breve{x}_{1,i}, \breve{x}_{2,i}, \breve{x}_{3,i})\}$ les variables centrées et réduites,

$$\breve{y}_i = \gamma_0 + \gamma_1\breve{x}_{1,i} + \gamma_2\breve{x}_{2,i} + \gamma_3\breve{x}_{3,i} + u_i$$

est aussi estimé par moindres carrés, et on note R_3^2 le R^2 de la régression.

1. Comparer R_1^2, R_2^2 et R_3^2.

QUANTILES, LOI NORMALE

60.0%	66.7%	75.0%	80.0%	87.5%	90.0%	95.0%	97.5%	99.0%	99.5%	99.9%
0.253	0.431	0.674	0.842	1.150	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

QUANTILES, LOI DE STUDENT A ν DEGRES DE LIBERTE

ν	60.0%	66.7%	75.0%	80.0%	87.5%	90.0%	95.0%	97.5%	99.0%	99.5%	99.9%
1	0.325	0.577	1.000	1.376	2.414	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31
2	0.289	0.500	0.816	1.061	1.604	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	0.277	0.476	0.765	0.978	1.423	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215
4	0.271	0.464	0.741	0.941	1.344	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.267	0.457	0.727	0.920	1.301	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.265	0.453	0.718	0.906	1.273	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.263	0.449	0.711	0.896	1.254	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.262	0.447	0.706	0.889	1.240	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.261	0.445	0.703	0.883	1.230	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.260	0.444	0.700	0.879	1.221	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.260	0.443	0.697	0.876	1.214	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.259	0.442	0.695	0.873	1.209	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.259	0.441	0.694	0.870	1.204	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.258	0.440	0.692	0.868	1.200	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.258	0.439	0.691	0.866	1.197	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.258	0.439	0.690	0.865	1.194	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.257	0.438	0.689	0.863	1.191	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.257	0.438	0.688	0.862	1.189	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	0.257	0.438	0.688	0.861	1.187	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.257	0.437	0.687	0.860	1.185	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	0.257	0.437	0.686	0.859	1.183	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	0.256	0.437	0.686	0.858	1.182	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	0.256	0.436	0.685	0.858	1.180	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	0.256	0.436	0.685	0.857	1.179	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	0.256	0.436	0.684	0.856	1.178	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	0.256	0.436	0.684	0.856	1.177	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	0.256	0.435	0.684	0.855	1.176	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	0.256	0.435	0.683	0.855	1.175	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	0.256	0.435	0.683	0.854	1.174	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0.256	0.435	0.683	0.854	1.173	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
35	0.255	0.434	0.682	0.852	1.170	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340
40	0.255	0.434	0.681	0.851	1.167	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
45	0.255	0.434	0.680	0.850	1.165	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.281
50	0.255	0.433	0.679	0.849	1.164	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261
55	0.255	0.433	0.679	0.848	1.163	1.297	1.673	2.004	2.396	2.668	3.245
60	0.254	0.433	0.679	0.848	1.162	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
∞	0.253	0.431	0.674	0.842	1.150	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

QUANTILES, FISHER ν_1, ν_2 DEGRES DE LIBERTE

$\nu_2 \backslash \nu_l$	q	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
1	0.500	1.50	1.71	1.82	1.89	1.94	1.98	2.00	2.04	2.07	2.09	2.12	2.15	2.17	2.20
	0.600	2.63	2.93	3.09	3.20	3.27	3.32	3.36	3.41	3.45	3.48	3.52	3.56	3.59	3.64
	0.667	4.00	4.42	4.64	4.78	4.88	4.95	5.00	5.08	5.13	5.18	5.24	5.29	5.33	5.39
	0.750	7.50	8.20	8.58	8.82	8.98	9.10	9.19	9.32	9.41	9.50	9.58	9.67	9.74	9.85
	0.800	12.0	13.1	13.6	14.0	14.3	14.4	14.6	14.8	14.9	15.0	15.2	15.3	15.4	15.6
	0.900	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	59.1	59.7	60.5	61.0	61.5	62.0	62.6	63.0	63.3
	0.950	199.	216.	225.	230.	234.	237.	239.	242.	244.	246.	248.	250.	252.	254.
	0.975	800.	864.	900.	922.	937.	948.	957.	969.	977.	985.	993.			
2	0.500	1.00	1.13	1.21	1.25	1.28	1.30	1.32	1.35	1.36	1.38	1.39	1.41	1.42	1.44
	0.600	1.50	1.64	1.72	1.76	1.80	1.82	1.84	1.86	1.88	1.89	1.91	1.92	1.94	1.96
	0.667	2.00	2.15	2.22	2.27	2.30	2.33	2.34	2.37	2.38	2.40	2.42	2.43	2.45	2.47
	0.750	3.00	3.15	3.23	3.28	3.31	3.34	3.35	3.38	3.39	3.41	3.43	3.44	3.46	3.48
	0.800	4.00	4.16	4.24	4.28	4.32	4.34	4.36	4.38	4.40	4.42	4.43	4.45	4.47	4.48
	0.900	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.39	9.41	9.43	9.44	9.46	9.47	9.49
	0.950	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5
	0.975	39.0	39.2	39.2	39.3	39.3	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.5	39.5	39.5
	0.990	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	100.	100.	100.	100.	100.	100.	100.	99.5
3	0.500	0.88	1.00	1.06	1.10	1.13	1.15	1.16	1.18	1.20	1.21	1.23	1.24	1.25	1.27
	0.600	1.26	1.37	1.43	1.47	1.49	1.51	1.52	1.54	1.55	1.56	1.57	1.58	1.59	1.60
	0.667	1.62	1.72	1.77	1.80	1.82	1.83	1.84	1.86	1.87	1.88	1.89	1.90	1.90	1.91
	0.750	2.28	2.36	2.39	2.41	2.42	2.43	2.44	2.44	2.45	2.46	2.46	2.47	2.47	2.47
	0.800	2.89	2.94	2.96	2.97	2.97	2.97	2.98	2.98	2.98	2.98	2.98	2.98	2.98	2.98
	0.900	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.23	5.22	5.20	5.18	5.17	5.15	5.13
	0.950	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.79	8.74	8.70	8.66	8.62	8.58	8.53
	0.975	16.0	15.4	15.1	14.9	14.7	14.6	14.5	14.4	14.3	14.3	14.2	14.1	14.0	13.9
	0.990	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.2	27.1	26.9	26.7	26.5	26.4	26.1
	0.999	149.	141.	137.	135.	133.	132.	131.	129.	128.	127.	126.	125.	125.	123.
4	0.500	0.83	0.94	1.00	1.04	1.06	1.08	1.09	1.11	1.13	1.14	1.15	1.16	1.18	1.19
	0.600	1.16	1.26	1.31	1.34	1.36	1.37	1.38	1.40	1.41	1.42	1.43	1.43	1.44	1.45
	0.667	1.46	1.55	1.58	1.61	1.62	1.63	1.64	1.65	1.65	1.66	1.67	1.67	1.68	1.68
	0.750	2.00	2.05	2.06	2.07	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08
	0.800	2.47	2.48	2.48	2.48	2.47	2.47	2.47	2.46	2.46	2.45	2.44	2.44	2.43	2.43
	0.900	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.92	3.90	3.87	3.84	3.82	3.79	3.76
	0.950	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	5.96	5.91	5.86	5.80	5.75	5.70	5.63
	0.975	10.6	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.84	8.75	8.66	8.56	8.46	8.38	8.26
	0.990	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.5	14.4	14.2	14.0	13.8	13.7	13.5
	0.999	61.2	56.2	53.4	51.7	50.5	49.7	49.0	48.0	47.4	46.8	46.1	45.4	44.9	44.1

QUANTILES, FISHER ν_1, ν_2 DEGRES DE LIBERTE

$\nu_2 \backslash \nu_l$	q	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
5	0.500	0.80	0.91	0.96	1.00	1.02	1.04	1.05	1.07	1.09	1.10	1.11	1.12	1.13	1.15
	0.600	1.11	1.20	1.24	1.27	1.29	1.30	1.31	1.32	1.33	1.34	1.34	1.35	1.36	1.37
	0.667	1.38	1.45	1.48	1.50	1.51	1.52	1.53	1.53	1.54	1.54	1.54	1.55	1.55	1.55
	0.750	1.85	1.88	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.88	1.88	1.88	1.87
	0.800	2.26	2.25	2.24	2.23	2.22	2.21	2.20	2.19	2.18	2.18	2.17	2.16	2.15	2.13
	0.900	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.30	3.27	3.24	3.21	3.17	3.15	3.10
	0.950	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.74	4.68	4.62	4.56	4.50	4.44	4.36
	0.975	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.62	6.52	6.43	6.33	6.23	6.14	6.02
	0.990	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.1	9.89	9.72	9.55	9.38	9.24	9.02
	0.999	37.1	33.2	31.1	29.8	28.8	28.2	27.6	26.9	26.4	25.9	25.4	24.9	24.4	23.8
6	0.500	0.78	0.89	0.94	0.98	1.00	1.02	1.03	1.05	1.06	1.07	1.08	1.10	1.11	1.12
	0.600	1.07	1.16	1.20	1.22	1.24	1.25	1.26	1.27	1.28	1.29	1.29	1.30	1.31	1.31
	0.667	1.33	1.39	1.42	1.44	1.44	1.45	1.45	1.46	1.46	1.47	1.47	1.47	1.47	1.47
	0.750	1.76	1.78	1.79	1.79	1.78	1.78	1.78	1.77	1.77	1.76	1.76	1.75	1.75	1.74
	0.800	2.13	2.11	2.09	2.08	2.06	2.05	2.04	2.03	2.02	2.01	2.00	1.98	1.97	1.95
	0.900	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.94	2.90	2.87	2.84	2.80	2.77	2.72
	0.950	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.06	4.00	3.94	3.87	3.81	3.75	3.67
	0.975	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.46	5.37	5.27	5.17	5.07	4.98	4.85
	0.990	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.87	7.72	7.56	7.40	7.23	7.09	6.88
	0.999	27.0	23.7	21.9	20.8	20.0	19.5	19.0	18.4	18.0	17.6	17.1	16.7	16.3	15.7
7	0.500	0.77	0.87	0.93	0.96	0.98	1.00	1.01	1.03	1.04	1.05	1.07	1.08	1.09	1.10
	0.600	1.05	1.13	1.17	1.19	1.21	1.22	1.23	1.24	1.24	1.25	1.26	1.26	1.27	1.27
	0.667	1.29	1.35	1.38	1.39	1.40	1.40	1.41	1.41	1.41	1.41	1.41	1.42	1.42	1.42
	0.750	1.70	1.72	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.69	1.68	1.68	1.67	1.66	1.66	1.65
	0.800	2.04	2.02	1.99	1.97	1.96	1.94	1.93	1.92	1.91	1.89	1.88	1.86	1.85	1.83
	0.900	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.70	2.67	2.63	2.59	2.56	2.52	2.47
	0.950	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.64	3.57	3.51	3.44	3.38	3.32	3.23
	0.975	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.76	4.67	4.57	4.47	4.36	4.28	4.14
	0.990	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.62	6.47	6.31	6.16	5.99	5.86	5.65
	0.999	21.7	18.8	17.2	16.2	15.5	15.0	14.6	14.1	13.7	13.3	12.9	12.5	12.2	11.7
8	0.500	0.76	0.86	0.91	0.95	0.97	0.99	1.00	1.02	1.03	1.04	1.05	1.07	1.07	1.09
	0.600	1.03	1.11	1.15	1.17	1.19	1.20	1.20	1.21	1.22	1.22	1.23	1.24	1.24	1.25
	0.667	1.26	1.32	1.35	1.36	1.36	1.37	1.37	1.37	1.37	1.38	1.38	1.38	1.37	1.37
	0.750	1.66	1.67	1.66	1.66	1.65	1.64	1.64	1.63	1.62	1.62	1.61	1.60	1.59	1.58
	0.800	1.98	1.95	1.92	1.90	1.88	1.87	1.86	1.84	1.83	1.81	1.80	1.78	1.76	1.74
	0.900	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.54	2.50	2.46	2.42	2.38	2.35	2.29
	0.950	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.35	3.28	3.22	3.15	3.08	3.02	2.93
	0.975	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.29	4.20	4.10	4.00	3.89	3.81	3.67
	0.990	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.81	5.67	5.52	5.36	5.20	5.07	4.86
	0.999	18.5	15.8	14.4	13.5	12.9	12.4	12.0	11.5	11.2	10.8	10.5	10.1	9.80	9.33

QUANTILES, FISHER ν_1, ν_2 DEGRES DE LIBERTE

$\nu_2 \backslash \nu_l$	q	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
9	0.500	0.75	0.85	0.91	0.94	0.96	0.98	0.99	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.08
	0.600	1.02	1.10	1.13	1.15	1.17	1.18	1.18	1.19	1.20	1.21	1.21	1.22	1.22	1.22
	0.667	1.24	1.30	1.32	1.33	1.34	1.34	1.34	1.34	1.35	1.35	1.35	1.34	1.34	1.34
	0.750	1.62	1.63	1.63	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53
	0.800	1.93	1.90	1.87	1.85	1.83	1.81	1.80	1.78	1.76	1.75	1.73	1.71	1.70	1.67
	0.900	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.22	2.16
	0.950	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.14	3.07	3.01	2.94	2.86	2.80	2.71
	0.975	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	3.96	3.87	3.77	3.67	3.56	3.47	3.33
	0.990	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.26	5.11	4.96	4.81	4.65	4.52	4.31
	0.999	16.4	13.9	12.6	11.7	11.1	10.7	10.4	9.89	9.57	9.24	8.90	8.55	8.26	7.81
10	0.500	0.74	0.85	0.90	0.93	0.95	0.97	0.98	1.00	1.01	1.02	1.03	1.05	1.06	1.07
	0.600	1.01	1.08	1.12	1.14	1.15	1.16	1.17	1.18	1.18	1.19	1.19	1.20	1.20	1.21
	0.667	1.23	1.28	1.30	1.31	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.31
	0.750	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.50	1.48
	0.800	1.90	1.86	1.83	1.80	1.78	1.77	1.75	1.73	1.72	1.70	1.68	1.66	1.65	1.62
	0.900	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.32	2.28	2.24	2.20	2.16	2.12	2.06
	0.950	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	2.98	2.91	2.84	2.77	2.70	2.64	2.54
	0.975	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.72	3.62	3.52	3.42	3.31	3.22	3.08
	0.990	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.85	4.71	4.56	4.41	4.25	4.11	3.91
	0.999	14.9	12.6	11.3	10.5	9.93	9.52	9.20	8.75	8.45	8.13	7.80	7.47	7.19	6.76
100	0.500	0.70	0.79	0.84	0.88	0.90	0.91	0.92	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	1.01
	0.600	0.92	0.99	1.02	1.04	1.05	1.05	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.04
	0.667	1.11	1.15	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16	1.15	1.15	1.14	1.13	1.12	1.10	1.07
	0.750	1.41	1.39	1.37	1.35	1.33	1.32	1.30	1.28	1.27	1.25	1.23	1.20	1.17	1.11
	0.800	1.64	1.58	1.53	1.49	1.46	1.43	1.41	1.38	1.36	1.33	1.30	1.26	1.22	1.14
	0.900	2.36	2.14	2.00	1.91	1.83	1.78	1.73	1.66	1.61	1.56	1.49	1.42	1.35	1.21
	0.950	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.93	1.85	1.77	1.68	1.57	1.48	1.28
	0.975	3.83	3.25	2.92	2.70	2.54	2.42	2.32	2.18	2.08	1.97	1.85	1.71	1.59	1.35
	0.990	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.50	2.37	2.22	2.07	1.89	1.74	1.43
	0.999	7.41	5.86	5.02	4.48	4.11	3.83	3.61	3.30	3.07	2.84	2.59	2.32	2.08	1.62
∞	0.500	0.69	0.79	0.84	0.87	0.89	0.91	0.92	0.93	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00
	0.600	0.92	0.98	1.01	1.03	1.04	1.04	1.04	1.05	1.05	1.05	1.05	1.04	1.04	1.00
	0.667	1.10	1.13	1.14	1.15	1.14	1.14	1.14	1.13	1.13	1.12	1.11	1.09	1.07	1.00
	0.750	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.29	1.28	1.25	1.24	1.22	1.19	1.16	1.13	1.00
	0.800	1.61	1.55	1.50	1.46	1.43	1.40	1.38	1.34	1.32	1.29	1.25	1.21	1.16	1.00
	0.900	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.60	1.55	1.49	1.42	1.34	1.26	1.00
	0.950	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.83	1.75	1.67	1.57	1.46	1.35	1.00
	0.975	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.05	1.94	1.83	1.71	1.57	1.43	1.00
	0.990	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.32	2.18	2.04	1.88	1.70	1.52	1.00
	0.999	6.91	5.42	4.62	4.10	3.74	3.47	3.27	2.96	2.74	2.51	2.27	1.99	1.73	1.00