

## Mathematik III - Wintersemester 14/15

18. Februar 2015

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Algebraische Strukturen mit einer Verknüpfung</b>	<b>5</b>
1.1	Definition: Verknüpfung . . . . .	5
1.2	Beispiel . . . . .	5
1.3	Definition: Halbgruppe . . . . .	5
1.4	Bemerkung . . . . .	5
1.5	Beispiel . . . . .	6
1.6	Definition: kommutative Halbgruppe . . . . .	6
1.7	Beispiel . . . . .	6
1.8	Definition: Unterhalbgruppe . . . . .	7
1.9	Beispiel . . . . .	7
1.10	Lemma: Eins eindeutig . . . . .	7
1.11	Definition: Monoid . . . . .	7
1.12	Beispiele . . . . .	7
1.13	Definition: Untermonoid . . . . .	8
1.14	Lemma: Inverses eindeutig . . . . .	8
1.15	Definition: Gruppe, Inverse, Ordnung . . . . .	8
1.16	Bemerkung . . . . .	8
1.17	Beispiele . . . . .	8
1.18	Beispiele . . . . .	9
1.19	Satz: Gleichungen lösen in Gruppen . . . . .	10
1.20	Beispiel . . . . .	10
1.21	Definition: Untergruppe . . . . .	10
1.22	Beispiele . . . . .	11
1.23	Satz und Definition: Rechtsnebenklassen . . . . .	11
1.24	Beispiel . . . . .	12
1.25	Lemma: Mächtigkeit von Untergruppen . . . . .	12
1.26	Theorem: Satz von Lagrange . . . . .	12
1.27	Definition: Potenzen . . . . .	13
1.28	Satz: Potenzgesetze . . . . .	13
1.29	Satz und Definition: Ordnung, zyklische Gruppe . . . . .	14
1.30	Beispiel . . . . .	14
1.31	Korollar . . . . .	15
1.32	Beweis . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Algebraische Strukturen mit 2 Verknüpfungen: Ringe und Körper</b>	<b>15</b>
2.1	Definition: Ring . . . . .	15
2.2	Beispiel . . . . .	16
2.3	Satz: Rechnen mit Ringen . . . . .	16
2.4	Bemerkung . . . . .	16
2.5	Definition: Körper . . . . .	17
2.6	Beispiele . . . . .	17
2.7	Satz: Rechnen im Körper, Nullteilerfreiheit . . . . .	17
2.8	Definition: Homomorphismus, Isomorphismus . . . . .	17
2.9	Beispiel . . . . .	18
2.10	Satz: Chinesischer Restsatz . . . . .	18
2.11	Beispiel . . . . .	18

2.12	Bemerkung	19
2.13	Korollar: Phi-Funktion berechnen	19
2.14	Definition: Polynom	19
2.15	Beispiel	20
2.16	Satz und Definition: Polynomring	20
2.17	Bemerkung	21
2.18	Beispiel	21
2.19	Definition: Grad eines Polynoms	21
2.20	Satz	21
2.21	Korollar	22
2.22	Definition	22
2.23	Definition	22
2.24	Definition (Division mit Rest)	22
2.25	Beispiel	23
2.26	Korollar	23
2.27	Definition	24
2.28	Bemerkung	24
2.29	Satz (von Bezout)	24
2.30	Satz	25
2.31	Satz	25
2.32	Beispiel	25
2.33	Definition	25
2.34	Beispiel	25
2.35	Abschlussbemerkung	25
<b>3</b>	<b>Der Körper der <math>\mathbb{C}</math> der Komplexen Zahlen</b>	<b>26</b>
3.1	Definition	26
3.2	Beispiel	26
3.3	Bemerkung: komplexe Zahlenebene	27
3.4	Satz (Eigenschaften)	27
3.5	Bemerkung	27
3.6	Polarkoordinaten	28
3.7	Beispiel	28
3.8	Definition/Schreibweise	28
3.9	Bemerkung	28
3.10	Beispiele	29
3.11	Bemerkung	29
<b>4</b>	<b>Wiederholung und Erweiterung der linearen Algebra aus Mathe II</b>	<b>29</b>
4.1	Beispiel	29
4.2	Definition	30
<b>5</b>	<b>Lineare Abbildungen</b>	<b>30</b>
5.1	Definition	30
5.2	Bemerkung	31
5.3	Beispiel	31
5.4	Satz	31
5.5	Satz	32

5.6	Definition . . . . .	33
5.7	Definition/Satz . . . . .	33
5.8	Beispiel . . . . .	33
5.9	Satz . . . . .	34
5.10	Beispiel . . . . .	35
5.11	Satz (Dimensionsformel) . . . . .	35
5.12	Korollar . . . . .	36
5.13	Zusammenhang lin. Abb. und hom. LGS, Matrizen, Rang . . . . .	36
<b>6</b>	<b>Matrizen und lineare Abbildungen</b>	<b>37</b>
6.1	Definition . . . . .	37
6.2	Beispiel . . . . .	38
6.3	Satz . . . . .	39
6.4	Beispiel . . . . .	39
6.5	Bemerkung / Korollar zu 6.3 . . . . .	41
6.6	Satz (Eigenschaften der Darstellungsmatrix) . . . . .	41
6.7	Satz: . . . . .	41
6.8	Satz: . . . . .	42
6.9	Berechnung von Inversen . . . . .	42
6.10	Definition/Satz: . . . . .	42
6.11	Satz: Koordinaten umrechnen . . . . .	43
6.12	Beispiel . . . . .	43
6.13	Satz: Darstellungsmatrizen umrechnen . . . . .	44
6.14	Korollar . . . . .	44
6.15	Beispiel . . . . .	44
<b>7</b>	<b>Determinanten</b>	<b>44</b>
7.1	Definition . . . . .	44
7.2	Definition: Determinante, rekursive Def. . . . .	45
7.3	Beispiel . . . . .	45
7.4	Entwicklungssatz von Laplace . . . . .	46
7.5	Beispiel . . . . .	46
7.6	Bemerkung . . . . .	46
7.7	Satz (Eigenschaften der Determinanten) . . . . .	47
7.8	Bemerkung / Beispiel . . . . .	47
7.9	Satz (Charakterisierung invertierbarer Matrizen über $\det$ ) . . . . .	47
7.10	Bemerkung . . . . .	48
<b>8</b>	<b>Eigenwerte und Eigenvektoren</b>	<b>48</b>
8.1	Definition (Eigenwert) . . . . .	48
8.2	Satz . . . . .	48
8.3	Definition . . . . .	49
8.4	Beispiel . . . . .	49
8.5	Anwendungen . . . . .	50
8.6	Bemerkung . . . . .	51
8.7	Definition: diagonalisierbar . . . . .	51
8.8	Satz: Spektralsatz . . . . .	51
8.9	Bemerkung zu 8.8 (ii) . . . . .	52

<b>9</b>	<b>Norm- und Skalarprodukt</b>	<b>52</b>
9.1	Definition: Norm . . . . .	52
9.2	Eigenschaften . . . . .	52
9.3	Definition: Skalarprodukt . . . . .	52
9.4	Eigenschaften des Skalarprodukts . . . . .	52
9.5	Definition: Standardskalarprodukt, euklidischer Vektorraum, euklidische Norm & Abstand . . . . .	53
9.6	Beispiel . . . . .	54
<b>10</b>	<b>Orthogonalsysteme</b>	<b>54</b>
10.1	Definition: orthogonal, Orthogonalsystem, Orthonormalsystem, Orthonormalbasis . . . . .	54
10.2	Bemerkung . . . . .	54
10.3	Satz: Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt . . . . .	55
10.4	Beispiel . . . . .	55
10.5	Definition: orthogonale Matrix . . . . .	56
10.6	Beispiel . . . . .	56
10.7	Satz: Eigenschaften von orthogonalen Matrizen . . . . .	56
<b>11</b>	<b>Mehrdimensionale Analysis</b>	<b>57</b>
11.13	Beispiel . . . . .	57
11.22	Definition: (total)differenzierbar, affin-linear . . . . .	58
11.23	Definition: Richtungsableitung . . . . .	58
11.24	Bemerkung . . . . .	58
11.25	Satz . . . . .	58
11.26	Beispiel . . . . .	59
11.27	Bemerkung . . . . .	59
<b>12</b>	<b>Taylorpolynome und Taylorreihe</b>	<b>59</b>
12.1	Definition . . . . .	59
12.2	Beispiel . . . . .	60
12.3	Motivation . . . . .	60
12.4	Definition: Taylorpolynom . . . . .	61
12.5	Satz: Formel von Taylor mit Lagrange-Restglied . . . . .	61
12.6	Bemerkung . . . . .	61
12.7	Beispiel . . . . .	62

# 1 Algebraische Strukturen mit einer Verknüpfung

## HALBGRUPPEN, MONOIDE, GRUPPEN

### 1.1 Definition

Sei  $X \neq \emptyset$  eine Menge.

Eine *Verknüpfung* oder (abstrakte) Multiplikation auf  $X$  ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \bullet : X \times X &\rightarrow X \\ (a, b) &\mapsto a \bullet b \end{aligned}$$

$a \bullet b$  heißt *Produkt* von  $a$  und  $b$ , muss aber mit der üblichen Multiplikation von Zahlen <sub>(ab)</sub> nichts zu tun haben.

Beschreibung bei endlichen Mengen oft durch Multiplikationstabellen.

### 1.2 Beispiel

$$\begin{array}{c|cc} \bullet & a & b \\ \hline a & b & b \\ b & a & a \end{array}$$

$$(a \bullet a) \bullet a = b \bullet a = a$$

$$a \bullet (a \bullet a) = a \bullet b = b \quad \rightarrow \text{nicht assoziativ}$$

$$\text{b) } X = \mathbb{Z}^- (= \{0, -1, -2, \dots\})$$

Die normale Multiplikation ist auf  $\mathbb{Z}^-$  keine Verknüpfung!

(zum Beispiel ist  $(-2) \cdot (-3) = 6 \notin \mathbb{Z}^-$ )

Aber auf  $X = \mathbb{N}$ ,  $X = \mathbb{Z}$  oder  $X = \{1\}$ ,  $X = \{0, 1\}$

### 1.3 Definition

Sei  $H \neq \emptyset$  eine Menge mit Verknüpfung.

$(H, \bullet)$  heißt *Halbgruppe*, falls gilt:

$$\forall a, b, c \in H : (a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c) \quad (\text{Assoziativgesetz (AG)})$$

### 1.4 Bemerkung

AG sagt aus: bei endlichen Produkten ist die Klammerung irrelevant, z.B.

$$(a \cdot b) \cdot (c \cdot d) = ((a \cdot b) \cdot c) \cdot d = (a \cdot (b \cdot c)) \cdot d \quad (\text{usw.})$$

Deshalb werden Klammern meistens weggelassen.

Die Reihenfolge der Elemente ist i.A. relevant!

## 1.5 Beispiel

- a)  $(\mathbb{N}, \bullet), (\mathbb{Z}, \bullet), (\mathbb{Q}, \bullet), (\mathbb{R}, \bullet)$  <sup>1</sup> sind Halbgruppen.

Ebenso  $(\mathbb{N}, +), (\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +)$  <sup>2</sup>

- b)  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, :)$  <sup>3</sup> ist *keine* Halbgruppe, denn z.B.  $(12 : 6) : 2 = 1$   
 $12 : (6 : 2) = 4$

- c) vgl. Vorlesung Theoretische Informatik

$A \neq \emptyset$  endliche Menge ("Alphabet")

$A^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$  = Menge aller endlichen Wörter über  $A$

(z.B.  $A = \{a, b\}$ , dann ist z.B.  $\underbrace{(a, a, b)}_{aab} \in A^3$ )

Verknüpfung: Konkatenation (Hintereinanderschreiben)

z.B.  $aab \bullet abab = aababab$

$A^* = A^+ \cup \{\lambda\}$   $\lambda$  (oder  $\epsilon$ ) ist das leere Wort

Es gilt:  $\lambda \cdot w = w \cdot \lambda = w \quad \forall w \in A^*$

$(A^+, \bullet), (A^*, \bullet)$  *Worthalbgruppe* über  $A$

- d)  $M \neq \emptyset$  Menge,  $\text{Abb}(M, M)$ : Menge aller Abbildungen  $M \rightarrow M$  mit  $\circ$  (Komposition) ist Halbgruppe.

- e) (WICHTIG)

$n \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$

Verknüpfung:  $\oplus : a \oplus b := (a + b) \bmod n$   
 $\odot : a \odot b := (a \cdot b) \bmod n$

$(\mathbb{Z}_n, \oplus), (\mathbb{Z}_n, \odot)$  sind Halbgruppen.

## 1.6 Definition

Eine Halbgruppe  $(H, \bullet)$  heißt *kommutativ*, falls gilt:

$$\forall a, b \in H : a \cdot b = b \cdot a \quad (\text{Kommutativgesetz, KG})$$

## 1.7 Beispiel

Beispiele 1.5 a), e) sind kommutative Halbgruppen.

(hallo  $\neq$  ollah, ab  $\neq$  ba, Worthalbgruppe nicht kommutativ)

---

<sup>1</sup>  $\bullet$  normale Multiplikation

<sup>2</sup> + normale Addition

<sup>3</sup>: normale Division

## 1.8 Definition

Sei  $(H, \bullet)$  Halbgruppe,  $\emptyset \neq U \subseteq H$

$U$  heißt *Unterhalbgruppe* von  $H$ , falls  $u \cdot v \in U \ \forall u, v \in U$  gilt.

$(U, \odot)$  ist dann selbst Halbgruppe.

## 1.9 Beispiel

$(\mathbb{Z}, +)$  Halbgruppe

$G =$  Menge aller gerade ganzen Zahlen  $\subseteq \mathbb{Z}$

$(G, +)$  ist Unterhalbgruppe von  $(\mathbb{Z}, +)$

$U =$  Menge aller ungerade Zahlen  $\subseteq \mathbb{Z}$

$(U, +)$  ist keine Unterhalbgruppe!

## 1.10 Lemma

*Eindeutigkeit des neutralen Elements:*

Sei  $(H, \bullet)$  Halbgruppe,  $e_1, e_2 \in H$  mit  $(*) e_1 \cdot x = x \cdot e_1 = x$  und  $(**) e_2 \cdot x = x \cdot e_2 = x \ \forall x \in H$

Dann ist  $e_1 = e_2$

*Beweis.*  $e_1 \stackrel{(**)}{=} e_1 \cdot e_2 \stackrel{(*)}{=} e_2$

□

## 1.11 Definition

Eine Halbgruppe  $(H, \bullet)$  heißt *Monoid*, falls  $e \in H$  existiert mit  $e \cdot x = x \cdot e = x \ \forall x \in H$

$e$  heißt *neutrales Element* / Einselement / Eins in  $H$ .

Schreibweise:  $(H, \bullet, e)$

Für additive Verknüpfung oft 0 für  $e$  (Nullelement)  
multiplikative 1

Nach 1.10 ist das neutrale Element eindeutig!

## 1.12 Beispiele

- a)  $(\mathbb{N}, \bullet)$  Monoid mit  $e = 1$   
 $(\mathbb{N}, +)$  kein Monoid  
 $(\mathbb{N}_0, +)$  Monoid mit  $e = 0$   
 $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +)$  Monoide mit  $e = 0$   
 $(\mathbb{Z}, \bullet), (\mathbb{N}_0, \bullet), (\mathbb{Q}, \bullet), (\mathbb{R}, \bullet)$  Monoide mit  $e = 1$
- b)  $(\text{Abb}(M, M), \circ)$  Monoid,  $e = \text{id}$
- c)  $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$  Monoid,  $e = 0$   
 $(\mathbb{Z}_n, \odot)$  Monoid,  $e = 1$
- d)  $(A^*, \bullet)$  Monoid,  $e = \lambda$  (hallo $\lambda = \lambda$ hallo = hallo)



### 1.13 Definition

Sei  $(M, \bullet, e)$  Monoid. Eine Teilmenge  $\emptyset \neq U \subseteq M$  heißt *Untermonoid* von  $M$ , falls  $U$  mit

- selbst ein Monoid mit neutralem Element  $e$  ist (also  $e \in U$ )

### 1.14 Lemma

*Eindeutigkeit des inversen Elements:*

Sei  $(H, \bullet, e)$  Monoid und es gebe zu jedem Element  $h \in H$  Elemente  $x, y \in H$  mit  $h \cdot x \stackrel{(*)}{=} e \stackrel{(**)}{=} y \cdot h$ .

Dann ist  $x = y$

*Beweis.*  $y = y \cdot e \stackrel{(*)}{=} y \cdot (h \cdot x) \stackrel{(AG)}{=} (y \cdot h) \cdot x \stackrel{(**)}{=} e \cdot x = x$

□

### 1.15 Definition

(i)  $(H, \bullet, e)$  Monoid,  $h \in H$

Falls ein  $x \in H$  existiert mit  $hx = xh = e$ , so nennt man  $h$  *invertierbar* und  $x$  das *Inverse* zu  $h$ , bez.  $h^{-1}$  (bei additiven Verknüpfungen oft auch  $-h$ )

Nach 1.14 ist  $h^{-1}$  eindeutig bestimmt!

Es gilt:  $e$  ist immer invertierbar,  $e^{-1} = e$

(ii) Ein Monoid  $(G, \bullet, e)$  heißt *Gruppe*, falls jedes Element in  $G$  invertierbar ist.

(iii) Für eine endliche Gruppe  $G$  heißt die Anzahl der Elemente in  $G$  die *Ordnung* von  $G$ ,  $|G|$

### 1.16 Bemerkung

$(H, \bullet, e)$  Monoid.

Sei  $G$  die Menge aller invertierbaren Elemente von  $H$ , dann ist  $(G, \bullet, e)$  eine Gruppe.

Es gilt:  $e$  invertierbar ( $e^{-1} = e$ )

und falls  $g$  invertierbar, dann ist auch  $g^{-1}$  invertierbar:  $(g^{-1})^{-1} = g$

falls  $g, h$  invertierbar, dann auch  $g \cdot h$ :  $(g \cdot h)^{-1} = h^{-1} \cdot g^{-1}$

### 1.17 Beispiele

a)  $(\mathbb{N}_0, +, 0)$  ist keine Gruppe aber  $(\mathbb{Z}, +, 0), (\mathbb{Q}, +, 0), (\mathbb{R}, +, 0)$  sind Gruppen.

b)  $(\mathbb{Z}, \bullet, 1)$  ist keine Gruppe.

Die Menge der invertierbaren Elemente ist  $\{1, -1\}$ , diese bilden eine Gruppe.

c)  $(\mathbb{Q}, \bullet, 1)$  ist keine Gruppe, aber  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \bullet, 1), (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \bullet, 1)$  sind Gruppen.

d)  $A^*$  ist keine Gruppe, nur  $\lambda$  ist invertierbar.

## 1.18 Beispiele

a)  $(\mathbb{Z}_n, \oplus, 0)$  ist Gruppe (was ist das Inverse zu  $x \in \mathbb{Z}_n$ ? Siehe PÜ1, A9)

b) Sei  $n \geq 2$ .  $(\mathbb{Z}_n, \odot, 1)$  ist Monoid aber keine Gruppe.

Wann ist ein Element aus  $\mathbb{Z}_n$  invertierbar bezüglich  $\odot$ ?

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{Z}_n \text{ invertierbar} &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Z}_n : z \odot x = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Z} : (z \cdot x) \bmod n = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists x, q \in \mathbb{Z} : z \cdot x = q \cdot n + 1 \\ &\Leftrightarrow \exists x, q \in \mathbb{Z} : z \cdot x + (-q \cdot n) = 1 \\ &\stackrel{\text{Mathe I}}{\Leftrightarrow} \text{ggT}(z, n) = 1 \end{aligned}$$

also sind nur zu  $n$  teilerfremde Elemente invertierbar!

(vgl.  $(\mathbb{Z}_6, 0, 1)$ : 0, 2, 3, 4 nicht invertierbar, 1, 5 invertierbar)

Bezeichnung:

$$\mathbb{Z}_n^* = \{z \in \mathbb{Z}_n \mid \text{ggT}(z, n) = 1\}$$

ist Gruppe bezüglich  $\odot$  (vgl. Bemerkung ??) mit Ordnung  $|\mathbb{Z}_n^*| = \varphi(n)$  ("phi von  $n$ ", Eulersche  $\varphi$ -Funktion) = Anzahl aller  $z \in \mathbb{N}$ , die teilerfremd zu  $n$  sind und  $1 \leq z \leq n$ .

$$\varphi(3) = 2, \varphi(4) = 2, \varphi(7) = 6$$

Wie berechnet man das Inverse von  $z \in \mathbb{Z}_n^*$ ?

Mathe I, Erweiterter Euklidischer Algorithmus (WHK, S. 80/81) liefert zu  $z$  und  $n$  ( $\text{ggT}(z, n) = 1$ ) Zahlen  $s, t \in \mathbb{Z}$  mit

$$\begin{aligned} z \cdot s + n \cdot t &= 1 \\ \Rightarrow (z \cdot s) \bmod n &= 1 \\ \Rightarrow (z^{-1}) &= s \bmod n \end{aligned}$$

Beispiel:

$n = 8$ :  $(\mathbb{Z}_8, \odot)$ ,  $z = 5$  ist invertierbar,  $\text{ggT}(8, 5) = 1$

$$\text{EEA: } 5 \cdot (-3) + 8 \cdot 2 = 1 \Rightarrow z^{-1} = -3 \bmod 8 \Rightarrow z^{-1} = 5$$

c)  $\text{Abb}(M, M)$ : invertierbare Elemente sind genau die *bijektiven* Abbildungen auf  $M$ ,  $\text{Bij}(M)$  (Mathe I)

Speziell:  $M = \{1, 2, \dots, n\}$ , dann heißt  $\text{Bij}(M)$  die symmetrische Gruppe von Grad  $n$ ,  $S_n$

$|S_n| = n!$ , Elemente heißen Permutationen.

Bsp:  $n = 2$

$$S_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{id}}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$n = 3$

$$S_3 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{id}}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \varrho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$$

$$\pi \circ \varrho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \varrho \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ (nicht kommutativ!)}$$

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \pi, \varrho^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

### 1.19 Satz (Gleichungen lösen in Gruppen)

Sei  $G$  Gruppe,  $a, b \in G$

- (i) Es gibt genau ein  $x \in G$  mit  $ax = b$  (nämlich  $x = a^{-1}b$ )
- (ii) Es gibt genau ein  $y \in G$  mit  $ya = b$  (nämlich  $y = ba^{-1}$ )
- (iii) Ist  $ax = bx$  für ein  $x \in G$ , dann gilt  $a = b$  (Kürzungsregel)

*Beweis.* (i) •  $x = a^{-1}$  ist Lösung (prüfe  $ax = b$ ):

$$a \cdot \underbrace{a^{-1}b}_x \stackrel{\text{AG}}{=} (a \cdot a^{-1}) \cdot b = e \cdot b = b$$

- Es gibt genau eine Lösung:

$$\text{Es gelte } ax = b$$

$$\Rightarrow x = ex = (a^{-1}a)x \stackrel{\text{AG}}{=} a^{-1}(ax) = a^{-1}b$$

(ii) analog

(iii) Multipliziere von rechts mit  $x^{-1}$   
links  $y^{-1}$

□

### 1.20 Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \text{Was ist } x?$$

$$a \cdot x = b \Leftrightarrow x = a^{-1} \cdot b$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

### 1.21 Definition

$(G, \cdot)$  Gruppe,  $\emptyset \neq U \subseteq G$  Teilmenge.

$U$  heißt *Untergruppe* von  $G$  ( $U \leq G$ ), falls  $U$  bzgl.  $\cdot$  selbst eine Gruppe ist.

Insbesondere gilt dann:  $\forall u, v \in U$  ist  $u \cdot v \in U$ .

$e$  von  $G$  ist auch neutrales Element in  $U$ . (\*)

Inversen in  $U$  sind die gleichen wie in  $G$ .

(\*) Angenommen  $e$  ist neutrales Element in  $G$ , aber  $f$  neutrales Element in  $U$ ,  $f^{-1}$  Inverses von  $f$  in  $G$ .

Dann ist  $f^{-1} \cdot f = f \cdot f^{-1} = e$  und  $f \cdot f = f$ .

$$\Rightarrow f = e \cdot f = (f^{-1} \cdot f) \cdot f = f^{-1} \cdot (f \cdot f) = f^{-1} \cdot f = e$$

## 1.22 Beispiele

a)  $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +)$

b)  $(\{-1, 1\}, \cdot) \leq (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) \leq (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

c)  $(e, \cdot)$  ist Untergruppe jeder beliebigen Gruppe mit Verknüpfung  $\cdot$  und neutralem Element  $e$ .

d)  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_3$ ,  $\pi^{-1} = \pi$ ,  $\pi^{-1} \circ \pi = \text{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$   
 $\Rightarrow (\pi, \text{id}) \leq S_3$

## 1.23 Satz und Definition

$G$  Gruppe,  $U \leq G$

- (i) Durch  $x \sim y \Leftrightarrow x \cdot y^{-1} \in U$   
 $x + (-y) \in U$  (bei additiver Verknüpfung)  
 wird auf  $G$  eine Äquivalenzrelation definiert

### Beweis

$\sim$  ist reflexiv:  $x \sim x$  gilt  $\forall x \in G$ , denn  $x \cdot x^{-1} = e \in U$  ✓

$\sim$  ist symmetrisch:  $x \sim y \Rightarrow y \sim x$

Sei  $x \sim y$ , also  $x \cdot y^{-1} \in U$  (zzg.:  $y \sim x$ , also  $y \cdot x^{-1} \in U$ )

dann ist  $y \cdot x^{-1} = (x \cdot y^{-1})^{-1} \in U$ , da auch  $x \cdot y^{-1} \in U$ .

$\sim$  ist transitiv:  $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Sei  $x \sim y$ , also  $x \cdot y^{-1} \in U$  und  $y \sim z$ , also  $y \cdot z^{-1} \in U$  (zzg.:  $x \sim z$ , d.h.  $x \cdot z^{-1} \in U$ )

$$x \cdot z^{-1} = x e z^{-1} = x (y^{-1} y) z^{-1} = \underbrace{(x \cdot y^{-1})}_{\in U} \cdot \underbrace{(y \cdot z^{-1})}_{\in U} \in U, \text{ also } x \sim z. \quad \square$$

- (ii) Für  $x \in G$  ist  $Ux = \{u \cdot x \mid u \in U\}$  die Äquivalenzklasse von  $x$  bzgl.  $\sim$  und heißt *Rechtsnebenklasse* von  $U$  in  $G$ .

Also (Eigenschaften von Äquivalenzklassen siehe Mathe I):

(a)  $Ux = Uy \Leftrightarrow x \sim y$ , also  $x \cdot y^{-1} \in U$

(b)  $x, y \in G$ , dann ist entweder  $Ux = Uy$  oder  $Ux \cap Uy = \emptyset$

**Beweis**

$$(a) \text{ Sei } x \sim y \Rightarrow y \sim x \Rightarrow y \cdot x^{-1} \in U \Rightarrow y = y(x^{-1} \cdot x) = \underbrace{(y \cdot x^{-1})}_{\in U} x \in Ux$$

$$(b) \text{ Sei } y \in Ux, \text{ dann zeige: } x \sim y$$

$$y \in Ux \Rightarrow y = u \cdot x \text{ für ein } u \in U$$

$$\Rightarrow x \cdot y^{-1} = x \cdot (ux)^{-1} = x \cdot x^{-1} \cdot u^{-1} = u^{-1} \in U$$

Es wurde gezeigt, dass  $x \sim y$  gilt.

□

**1.24 Beispiel**

$$G = (\mathbb{Z}, +), 3\mathbb{Z} = \{\dots, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

$$U = (3\mathbb{Z}, +) \leq G \text{ (ÜA, Blatt 2)}$$

Inverses zu  $y$  in  $(\mathbb{Z}, +)$  ist  $-y$ .

$$x \sim y \Leftrightarrow x \cdot y^{-1} \in U$$

bzw.:  $x - y \in U$

$$x = 0 : U + 0 = \{u + 0 \mid u \in U\} = \{\dots, -3, 0, 3, 6, \dots\} = U = 3\mathbb{Z}$$

$$x = 1 : U + 1 = \{u + 1 \mid u \in U\} = \{\dots, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\} = 3\mathbb{Z} + 1$$

$$x = 2 : U + 2 = \{u + 2 \mid u \in U\} = \{\dots, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\} = 3\mathbb{Z} + 2$$

$$x = 3 : U + 3 = U + 0 = 0$$

...

**1.25 Lemma**

$G$  Gruppe,  $U$  endliche Untergruppe von  $G$ ,  $x \in G$

Dann ist  $|U| = |Ux|$

**Beweis**

$$\text{Abb } \varphi : U \rightarrow Ux$$

$$u \mapsto ux$$

ist surjektiv und injektiv (falls  $u_1x = u_2x$ , dann ist  $u_1 = u_2$  (Satz 1.19 (iii), Kürzungsregel))

Also ist  $\varphi$  bijektiv, also  $U, Ux$  gleich mächtig.

**1.26 Theorem (Satz von Lagrange)**

$G$  endliche Gruppe,  $U \leq G$

Dann gilt  $|U|$  ist Teiler von  $|G|$  und  $q = \frac{|G|}{|U|}$  ist die Anzahl der Rechtsnebenklassen von  $U$  in  $G$

**Beweis**

Seien  $Ux_1, \dots, Ux_q$  die  $q$  verschiedenen Rechtsnebenklassen von  $U$  in  $G$

$$\begin{aligned} \text{Mathe I \& 1.23} \Rightarrow G &= \bigcup_{i=1}^q Ux_i \text{ (disjunkte Vereinigung der Äquivalenzklassen)} \\ \Rightarrow |G| &= \sum_{i=1}^q \underbrace{|Ux_i|}_{|U|} \stackrel{1.25}{=} q \cdot |U| \end{aligned}$$

**1.27 Definition**

$(G, \bullet, e)$  Gruppe,  $a \in G$

$$\begin{aligned} \text{Definiere } a^0 &:= e \\ a^1 &:= a \\ a^m &:= a^{m-1} \cdot a \quad \text{für } m \in \mathbb{N} \\ a^m &:= (a^{-m})^{-1} \quad \text{für } m \in \mathbb{Z}^- \end{aligned}$$

(Potenzen von  $a$ )

$$\begin{aligned} \text{Bei additiver Schreibweise: } 0 \cdot a &= e \\ 1 \cdot a &= a \\ m \cdot a &= \begin{cases} (m-1) \cdot a + a & \text{für } m \in \mathbb{N} \\ (-m) \cdot (-a) & \text{für } m \in \mathbb{Z}^- \end{cases} \end{aligned}$$

**1.28 Satz**

$G, a$  wie oben

- (i)  $(a^{-1})^m = (a^m)^{-1} = a^{-m} \quad \forall m \in \mathbb{Z}$
- (ii)  $a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$
- (iii)  $(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$

**Beweis**

$$(i) \quad m \in \mathbb{N} : (a^{-1})^m \cdot a^m = \underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot \dots \cdot a^{-1}}_{m \text{ mal}} \cdot \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ mal}} = e$$

$$\Rightarrow (a^{-1})^m = (a^m)^{-1} \text{ (Inverses von } a^m)$$

$$\text{nach Definition ist } a^{-m} = (a^{-1})^m$$

$$\Rightarrow (i) \text{ gilt } \forall m \in \mathbb{N}$$

$$m = 0 : e = e = e \checkmark$$

$$m \in \mathbb{Z}^- : \text{dann ist } -m \in \mathbb{N}$$

Wende den bewiesenen Teil an auf  $a^{-1}$  statt  $a$  und  $-m$  statt  $m$ , Behauptung folgt.

(ii), (iii) per Induktion und mit (i)

□

### 1.29 Satz und Definition

$G$  endliche Gruppe,  $g \in G$

- (i) Es existiert eine kleinste natürliche Zahl  $n$  mit  $g^n = e$ , diese heißt die *Ordnung*  $o(g)$  von  $G$
- (ii) Die Menge  $\{g^0 = e, g^1 = g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$  ist eine Untergruppe von  $G$ , die von  $g$  erzeugte zyklische Gruppe  $\langle g \rangle$   
Es gilt  $o(g) = |\langle g \rangle| = n$  teilt  $|G|$
- (iii)  $g^{|G|} = e$

Bemerkung: Eine endliche Gruppe heißt *zyklisch*, falls sie von einem Element erzeugt werden kann.

### Beweis

- (i)  $G$  endlich  $\Rightarrow \exists i, j \in \mathbb{N}, i > j$  mit  $g^i = g^j$  (Schubfachschluss -Editor)  
Dann ist  $g^{i-j} \stackrel{1.28ii)}{=} g^i \cdot g^{-j} \stackrel{1.28}{=} \underbrace{g^i}_{=g^j} \cdot (g^j)^{-1} = e$
- (ii) Das Produkt zweier Elemente aus  $\langle g \rangle$  liegt wieder in  $\langle g \rangle$   
Neutrales Element ist  $g^0 = e$   
Inverses Element zu  $g^i$  ist  $(g^i)^{-1} = g^{n-i}$   
 $\Rightarrow \langle g \rangle \leq G$
- (iii) Satz von Lagrange (1.26):  $n = o(g) = |\langle g \rangle| \mid |G|$   
Also ist  $|G| = n \cdot k$  für ein  $k \in \mathbb{N}$   
 $g^{|G|} = g^{n \cdot k} = (g^n)^k = e^k = e$

□

### 1.30 Beispiel

$(\mathbb{Z}_3 \setminus \{0\}, \odot, 1)$

$g = 1$ :  $\langle 1 \rangle = \{g^0 = 1^0 = 1\}$ ,  $o(1) = 1$

$g = 2$ :  $\langle 2 \rangle = \{g^0 = 1, g^1 = 2\}$ ,  $o(2) = 2$

$(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \odot, 1)$

$g = 2$ :  $\langle 2 \rangle = \{2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 3\}$ ,  $o(2) = 4$

### 1.31 Korollar

(i) Satz von Euler

Sei  $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}, \text{ggT}(a, n) = 1$

Dann ist

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

(ii) Kleiner Satz von Fermat

Ist  $p$  eine Primzahl,  $a \in \mathbb{Z}, p \nmid a$ , dann gilt

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

### 1.32 Beweis

- a) Wir können annehmen, dass  $1 \leq a < n$  (denn  $a^{\varphi(n)} \pmod{n} = (a \pmod{n})^{\varphi(n)}$ )  
wegen  $\text{ggT}(a, n) = 1$  ist  $a \in \mathbb{Z}_n^*$ , das ist eine endliche Gruppe.

$$\begin{aligned} & \stackrel{1.29(iii)}{\Rightarrow} a^{|\mathbb{Z}_n^*|} = 1 (= e) & a \odot a \odot \dots \\ & \Rightarrow a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n} & a \cdot a \cdot \dots \end{aligned}$$

- b) Folgt aus (i) ( $n = p, \varphi(p) = -1$ )

## 2 Algebraische Strukturen mit 2 Verknüpfungen: Ringe und Körper

### 2.1 Definition

Sei  $R \neq \emptyset$  eine Menge mit zwei Verknüpfungen  $+$  und  $\cdot$ .

- (i) Wir nennen  $(R, +, \cdot)$  einen *Ring*, falls gilt:

- (a)  $(R, +)$  ist eine abelsche Gruppe (Eselsbrücke: KAIN)

Das neutrale Element bezeichnen wir hier mit 0, das zu  $a \in R$  Inverse mit  $-a$   
(schreibe auch  $a - b$  für  $a + (-b)$ ).

- (b)  $(R, \cdot)$  ist eine Halbgruppe.

- (c) Es gelten die Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c) = ab + ac \\ (a + b) \cdot c &= (a \cdot c) + (b \cdot c) = ac + bc \quad \forall a, b, c \in R \end{aligned}$$

- (ii) Ein Ring  $(R, +, \cdot)$  heißt *kommutativ* falls  $\cdot$  ebenfalls kommutativ ist, also falls  $\forall a, b \in R : a \cdot b = b \cdot a$
- (iii) Ein Ring  $(R, +, \cdot)$  heißt *Ring mit Eins*, falls  $(R, \cdot)$  ein Monoid ist mit neutralen Element  $1 \neq 0$  ( $\forall a \in R : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ ).
- (iv) Ist  $(R, +, \cdot)$  Ring mit Eins, dann heißen die bezüglich  $\cdot$  invertierbaren Elemente *Einheiten*. Das zu  $a$  bezügliche  $\cdot$  invertierbare Element bezeichnen wir mit  $a^{-1}$ .  
 $R^* :=$  Menge der Einheiten in  $R$ .



## 2.2 Beispiel

- a)  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  ist kommutativer Ring mit Eins (1)  
 $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$ ,  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  ebenso  
 $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ,  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
- b)  $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$  ist ein kommutativer Ring ohne Eins
- c) trivialer Ring  $(\{0\}, +, \cdot)$  ohne Eins
- d)  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ,  $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$  kommutativer Ring mit Eins
- e)  $(\mathbb{R}^n, \underbrace{+, \cdot}_{\text{Komponentenweise}})$ ; allgemein:  $R_1, \dots, R_n$  Ringe, dann  $R_1 \times \dots \times R_n$  Ring.
- f)  $M_n(\mathbb{R})$  - Menge aller  $n \times n$ -Matrizen über  $\mathbb{R}$ , mit Matrixaddition und -multiplikation ist Ring mit Eins ( $=E_n$ ), nicht kommutativ für  $n \geq 2$ .

## 2.3 Satz (Rechnen mit Ringen)

Sei  $(R, +, \cdot)$  ein Ring,  $a, b, c \in R$ . Dann gilt:

- (i)  $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
- (ii)  $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$
- (iii)  $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

### Beweis

- (i)  $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) \stackrel{2.1(3)}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0$   
 addiere  $-(a \cdot 0)$  (Inverses von  $a \cdot 0$ ) auf beiden Seiten, erhalte  $0 = a \cdot 0$   
 Analog  $0 \cdot a = 0$
- (ii)  $(-a) \cdot b + a \cdot b \stackrel{2.1(3)}{=} (-a + a) \cdot b = 0 \cdot b \stackrel{(i)}{=} 0$   
 also ist  $(-a \cdot b)$  Inverses zu  $a \cdot b$ , also  $= -(a \cdot b)$ .  
 Analog  $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$
- (iii)  $(-a) \cdot (-b) \stackrel{(ii)}{=} -(a \cdot (-b)) \stackrel{(ii)}{=} -(-(a \cdot b)) = a \cdot b$

□

## 2.4 Bemerkung

- a) In jedem Ring mit Eins sind 1 und  $-1$  Einheiten (denn  $(-1) \cdot (-1) = 1$ , siehe 2.3(iii))  
 Es kann mehr geben (z.B. in  $\mathbb{Z}_5$  usw.). Es kann auch  $-1 = 1$  gelten (z.B. in  $(\mathbb{Z}_2, \oplus, \odot)$ )
- b) 0 kann nach 2.3(i) nie Einheit sein (da  $1 \neq 0$ )

c) In einem kommutativen Ring  $R$  gilt der *Binomialsatz*,

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \quad (n \in \mathbb{N}, a, b \in R)$$

## 2.5 Definition

Ein kommutativer Ring  $(K, +, \cdot)$  heißt *Körper*, wenn jedes Element  $0 \neq x \in K$  eine Einheit ist, also wenn

$$K^* = K \setminus \{0\}$$

## 2.6 Beispiele

a)  $(\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot)$  sind Körper.  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  ist kein Körper.

b) vgl. Beispiel 1.18 b)

$$\mathbb{Z}_n^* = \{z \in \mathbb{Z}_n \mid \text{ggT}(z, n) = 1\}$$

ist Gruppe bezüglich  $\odot$

$\Rightarrow (\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$  ist genau dann ein Körper, wenn  $n$  eine Primzahl ist.

## 2.7 Satz (Rechnen im Körper, Nullteilerfreiheit)

Sei  $(K, +, \cdot)$  ein Körper,  $a, b \in K$

Dann gilt

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ oder } b = 0$$

Gegenbeispiel:  $(\mathbb{Z}_6, \oplus, \odot)$  ist kein Körper. Hier gilt  $2 \odot 3 = 0$ , aber weder  $2 = 0$ , noch  $3 = 0$

## Beweis

” $\Leftarrow$ ”: klar:  $0 \cdot b = 0$  oder  $a \cdot 0 = 0$  (Satz 2.3 (i), Rechenregeln für Ringe)

” $\Rightarrow$ ”: Sei  $a \cdot b = 0$ . Angenommen  $a \neq 0$  (d.h.  $a$  hat Inverses)

$$\begin{aligned} \text{Dann ist } b &= 1 \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot b \\ &= a^{-1} \cdot (a \cdot b) \\ &= a^{-1} \cdot 0 \\ &\stackrel{2.3(i)}{=} 0 \end{aligned}$$

□

## 2.8 Definition

Seien  $(R, +, \cdot)$  und  $(\tilde{R}, \boxplus, \boxdot)$  Ringe.

(i)  $\varphi : R \rightarrow \tilde{R}$  heißt (Ring-)Homomorphismus, falls gilt:

$$\underbrace{\varphi(x+y)}_{\in \tilde{R}} = \underbrace{\varphi(x)}_{\in \tilde{R}} \boxplus \underbrace{\varphi(y)}_{\in \tilde{R}} \quad \text{und} \quad \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \boxdot \varphi(y) \quad \forall x, y \in R$$

## 2.9 Beispiel

$\varphi(\mathbb{Z}, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$   
 $x \mapsto x \bmod n$  ist Ringhomomorphismus (kein Isomorphismus), da  $\varphi$  nicht injektiv ist, z.B.  $n = 5 : \varphi(1) = \varphi(6) = \varphi(11) \dots$

## 2.10 Satz (Chinesischer Restsatz)

Seien  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$  paarweise teilerfremd,  $M := m_1 \cdot \dots \cdot m_n$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$

Dann existiert ein  $x$ ,  $0 \leq x < M$  mit

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{m_2} \\ &\dots \\ x &\equiv a_n \pmod{m_n} \end{aligned}$$

### Beweis

Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  sind die Zahlen  $m_i$  und  $M_i := \frac{M}{m_i}$  teilerfremd.

$\Rightarrow$  EEA liefert  $s_i$  und  $t_i \in \mathbb{Z}$  mit  $t_i \cdot m_i + s_i \cdot M_i = 1$

Setze  $e_i := s_i \cdot M_i$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} e_i &\equiv 1 \pmod{m_i} \\ e_i &\equiv 0 \pmod{m_j} \quad (j \neq i) \end{aligned}$$

Die Zahl  $x := \sum_{i=1}^n a_i e_i \pmod{M}$  ist dann die Lösung der simultanen Kongruenz. □

## 2.11 Beispiel

$$\text{a) Finde } 0 \leq x < 60 \text{ mit } x \equiv \begin{cases} 2 \pmod{3} \\ 3 \pmod{4} \\ 2 \pmod{5} \end{cases}$$

$$M = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$$

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{60}{3} = 20 & 7 \cdot 3 + (-1) \cdot 20 &= 1 & \Rightarrow e_1 &= -20 \\ M_2 &= \frac{60}{4} = 15 & 4 \cdot 4 + (-1) \cdot 15 &= 1 & \Rightarrow e_2 &= -15 \\ M_3 &= \frac{60}{5} = 12 & 5 \cdot 5 + (-2) \cdot 12 &= 1 & \Rightarrow e_3 &= -24 \end{aligned}$$

$$x = (2 \cdot (-20) + 3 \cdot (-15) + 2 \cdot (-24)) \bmod 60 = 47$$

$$\text{b) Was ist } 2^{1000} \bmod \underbrace{1155}_{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}$$

(a) Berechne  $2^{1000} \bmod 3, 5, 7, 11$

$$\begin{aligned} 2^{1000} \bmod 3 &= & (-1)^{1000} \bmod 3 &= 1 \\ 2^{1000} \bmod 5 &= & 4^{500} \bmod 5 = (-1)^{500} \bmod 5 &= 1 \\ 2^{1000} \bmod 7 &= 2^{3 \cdot 333 + 1} \bmod 7 = (8^{333} \cdot 2) \bmod 7 = (1 \cdot 2) \bmod 7 &= 2 \\ 2^{1000} \bmod 11 &= 2^{5 \cdot 200} \bmod 11 = 32^{200} \bmod 11 = (-1)^{200} \bmod 11 &= 1 \end{aligned}$$

$$(b) \text{ Suche } 0 \leq x < 1155 \text{ mit } x \equiv \begin{cases} 1 & (\text{mod } 3) \\ 1 & (\text{mod } 5) \\ 2 & (\text{mod } 7) \\ 1 & (\text{mod } 11) \end{cases}$$

Der chinesische Restsatz liefert  $x = 331$

## 2.12 Bemerkung

Man kann auch zeigen, dass die Lösung  $x$  aus Satz 2.10 eindeutig ist:

$$\text{Durch } \psi : \mathbb{Z}_M \rightarrow \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_n} \\ x \mapsto (x \bmod m_1, \dots, x \bmod m_n)$$

wird ein Ringisomorphismus definiert:

$\psi$  ist surjektiv (zu jedem  $n$ -Tupel aus  $\mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_n}$  gibt es eine Lösung  $x$ , siehe Restsatz) und es gilt:

$$\underbrace{|\mathbb{Z}_M|}_M = \underbrace{|\mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_n}|}_{m_1 \cdots m_n = M}$$

also ist  $\psi$  bijektiv, also auch injektiv, also ist Lösung  $x$  eindeutig.

## 2.13 Korollar

$M = m_1 \cdots m_n$ ,  $m_i$  paarweise teilerfremd.

Dann ist  $\varphi(M) = \varphi(m_1) \cdots \varphi(m_n)$ , insbesondere:

$$n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k} \quad (p_i \text{ Primzahlen, } a_1 > 0, p_i \neq p_j \text{ für } i \neq j)$$

### Beweis

Nach 2.12 ist  $\mathbb{Z}_M \cong \mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_n}$  mittels  $\psi$

$$\Rightarrow x \text{ Einheit} \Leftrightarrow \psi(x) = (x \bmod m_1, \dots, x \bmod m_n) \text{ Einheit}$$

$$\Leftrightarrow x \bmod m_i \text{ Einheit } \forall i = 1 \dots n$$

$$\Rightarrow \varphi(M) = \varphi(m_1) \cdots \varphi(m_n)$$

$$\varphi(p^a) \underbrace{=}_{\text{Überlegen}} p^a - p^{a-1} = p^{a-1}(p-1)$$

Überlegen

## 2.14 Definition

Sei  $K$  Körper mit Nullelement 0 und Einselement 1:

- (i) Ein *Polynom über  $K$*  ist Ausdruck  $f = a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0, a_i \in K$ .  
 $a_i$  heißen *Koeffizienten* des Polynoms.

(a) Ist  $a_i = 0$ , so kann man  $0 \cdot x^i$  bei der Beschreibung weglassen.

(b) Statt  $a_0x^0$  schreibt auch  $a_0$

(c) Sind alle  $a_i = 0$ , so schreibt man  $f = 0$ , das Nullpolynom.

- (d) Ist  $a_i = 1$ , so schreibt man  $x^i$  statt  $1 \cdot x^i$
- (e) Die Reihenfolge der  $a_i x^i$  kann verändert werden, ohne dass das Polynom sich verändert ( $x^4 + 2x^3 + 3 = 2x^3 + 3 + x^4$ )
- (ii) Zwei Polynome  $f$  und  $g$  sind *gleich*, wenn ( $f = 0$  und  $g = 0$ ) oder ( $f = a_0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n$ ,  $g = b_0 + b_1 x^1 + \dots + b_m x^m$ ,  $a_n \neq 0, b_m \neq 0$  und  $n = m$ ,  $a_i = b_i$  für  $i = 0, \dots, n$ ) gilt.
- (iii) Die Menge aller Polynome über  $K$  bezeichnet man als  $K[x]$

## 2.15 Beispiel

- a)  $\underbrace{f}_{f(x)} = 3x^2 + \frac{1}{2}x - 1 \in \mathbb{Q}[x] \wedge f \in \mathbb{R}[x]$
- b)  $g = x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$

Wir wollen in  $K[x]$  wie in einem Ring rechnen können. Wir brauchen dazu  $+$  und  $\cdot$  für Polynome.

## 2.16 Satz und Definition

$K$  Körper, dann wird  $K[x]$  zu einem kommutativen Ring mit Eins durch folgende Verknüpfungen:

$$f = \underbrace{\sum_{i=0}^n a_i x^i}_{\text{z.B. } x+2}, \quad g = \underbrace{\sum_{j=0}^m b_j x^j}_{x^3+2x+1}$$

dann

$$f + g = \underbrace{\sum_{i=0}^{\max(m,n)} (a_i + b_i) x^i}_{x^3+3x+3}$$

$$f \cdot g = \sum_{i=0}^{n+m} c_i x^i$$

$$\text{mit } c_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \dots + a_i b_0 = \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} \quad (\text{Faltungsprodukt})$$

(setze  $a_i$  mit  $i > n$  bzw.  $b_j$  mit  $j > m$  gleich 0)

- Einselement:  $f = 1$  ( $a_0 = 1, a_j = 0$  für  $j \geq 1$ )
- Nullelement:  $f = 0$

$K[x]$  heißt der *Polynomring* in einer Variablen über  $K$ .  
Beweis: Ringeigenschaften nachrechnen.

## 2.17 Bemerkung

Die  $+$ -Zeichen in der Beschreibung der Polynome entsprechen der Ring-Addition der *Monome*  $a_0, ax, a_2x^2, \dots, a_nx^n$

## 2.18 Beispiel

a) in  $\mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x]$  Addition, Multiplikation klar

b) in  $\mathbb{Z}_3[x]$ :  $f = 2x^3 + 2x + 1, g = 2x^3 + x$

$$\begin{aligned} f + g &= x^3 + 1 \\ f \cdot g &= (2x^3 + 2x + 1)(2x^3 + x) \\ &= x^6 + 2x^4 + x^4 + 2x^2 + 2x^3 + x \\ &= x^6 + 2x^3 + 2x^2 + x \end{aligned}$$

c) in  $\mathbb{Z}_2[x]$ :  $f = x^2 + 1, g = x + 1$

$$\begin{aligned} f + g &= x^2 + x \\ f + f &= 0 \\ g \cdot g &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

## 2.19 Definition

Sei  $0 \neq f \in K[x]$

$f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  mit  $a_n \neq 0$

Dann heißt  $n$  der *Grad* von  $f$   $\text{Grad}(f)$

$\text{Grad}(0) := -\infty$

$\text{Grad}(f) = 0$  für konstante Polynome  $\neq 0$

## 2.20 Satz

$K$  Körper,  $f, g \in K[x]$

Dann ist  $\text{Grad}(f \cdot g) = \text{Grad}(f) + \text{Grad}(g)$

(Konvention:  $-\infty + (-\infty) = -\infty + n = -\infty$ )

## Beweis

Stimmt für  $f = 0$  oder  $g = 0$

$$\begin{aligned} f &= a_0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n && \text{mit } a_n \neq 0 \\ g &= b_0 + b_1x^1 + \dots + b_mx^m && \text{mit } b_m \neq 0 \\ f \cdot g &= (\dots) \cdot (\dots) = \dots + \underbrace{(a_nb_n)}_{\neq 0} \cdot x^{n+m} \\ &&& \text{(siehe Satz 2.7 Nullteilerfreiheit in Körpern)} \end{aligned}$$

Höhere Potenzen mit Koeffizienten  $\neq 0$  gibt es nicht

$$\Rightarrow \text{Grad}(f \cdot g) = n + m$$

## 2.21 Korollar

$K$  Körper, dann  $K[x]^* = \{f \in K[x] \mid \text{Grad}(f) = 0\}$ ,

d.h. nur die konstanten Polynome  $\neq 0$  sind in  $K[x]$  bezüglich  $\cdot$  invertierbar.

$$\underbrace{f}_{\text{Grad } n} \cdot \underbrace{f^{-1}}_{\text{müsste Grad } -n \text{ haben}} = \underbrace{1}_{\text{Grad } 0} \leftarrow \text{geht nicht}$$

## 2.22 Definition

Sei  $b \in K$

$$\varphi_b : K[x] \rightarrow K, f := \sum_{i=0}^n a_i x^i \mapsto f(b) := \sum_{i=0}^n a_i b^i$$

ist ein surjektiver Ringhomomorphismus, der sogenannte *Auswertungshomomorphismus* an der Stelle  $b$ .

(setze  $b$  für  $x$  ein)

## 2.23 Definition

$K$  Körper,  $f, g \in K[x]$

$f$  teilt  $g$ ,  $f|g$ , falls ein  $q \in K[x]$  existiert mit  $g = q \cdot f$

(Nach 2.20 ist dann  $\text{Grad}(f) \leq \text{Grad}(g)$ , falls  $g \neq 0$ )

## 2.24 Definition (Division mit Rest)

$K$  Körper,  $0 \neq f \in K[x]$ ,  $g \in K[x]$

Dann existieren eindeutig bestimmte Polynome  $q, r \in K[x]$  mit  $g = q \cdot f + r$  und  $\text{Grad}(r) < \text{Grad}(f)$ .

Bezeichnung:

$$r =: g \bmod f$$

$$q =: g \text{ div } f$$

## Beweis

Vgl. Mathe I für  $\mathbb{Z}$ , siehe z.B. WHK Satz 4.69

## 2.25 Beispiel

a)

$$g = x^4 + 2x^3 - x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$$

$$f = 3x^2 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$$

Rechne:

$$\begin{array}{r} (x^4 + 2x^3 - x + 2) : (3x^2 - 1) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{19}{9}}{3x^2 - 1} \\ \underline{-x^4} \phantom{+ 2x^3} + \frac{1}{3}x^2 \\ 2x^3 + \frac{1}{3}x^2 - x \\ \underline{-2x^3} \phantom{+ \frac{1}{3}x^2} + \frac{2}{3}x \\ \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 2 \\ \underline{-\frac{1}{3}x^2} \phantom{- \frac{1}{3}x} + \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3}x + \frac{19}{9} \end{array}$$

b)

$$g = x^4 + x^2 + 1 \quad f = x^2 + x \in \mathbb{Z}_2[x]$$

Rechne:

$$(x^4 + x^2 + 1) : x^2 + x = \underbrace{x^2 + x}_q$$

## 2.26 Korollar

$K$  Körper,  $a \in K$

$f \in K[x]$  ist genau dann durch  $(x - a)$  teilbar, wenn  $f(a) = 0$  ist (d.h.  $a$  ist Nullstelle von  $f$ ).

**Beweis**

" $\Rightarrow$ " sei  $f$  durch  $(x - a)$  teilbar, d.h.

$$f = q \cdot (x - a) \Rightarrow f(a) = q(a) \cdot \underbrace{(a - a)}_0 = 0 \quad q \in K$$

" $\Leftarrow$ " Division mit Rest:  $f = q(x - a) + r$ , wobei  $\text{Grad}(r) < \underbrace{\text{Grad}(x - a)}_1$

$\Rightarrow r$  ist konstantes Polynom (Grad 0) oder Nullpolynom (Grad  $(-\infty)$ ) also  $r \in K$

$$0 = f(a) = q(a) \cdot 0 + r \Rightarrow r = 0$$

□



## 2.27 Definition

$K$  Körper

- (i) Ein Polynom dessen höchster von 0 verschiedener Koeffizient gleich 1 ist, heißt normiert.
- (ii)  $g, h \in K[x]$ , nicht beide 0  
 $f \in K[x]$  heißt *größter gemeinsamer Teiler* von  $g$  und  $h$  ( $f = \text{ggT}(g, h)$ ), falls  $f$  normiertes Polynom von maximalem Grad ist, das  $g$  und  $h$  teilt.
- (iii)  $g, h \in K[x] \setminus \{0\}$  beide nicht 0  
 $f \in K[x]$  heißt *kleinstes gemeinsames Vielfaches* von  $g$  und  $h$  ( $f = \text{kgV}(g, h)$ ), falls  $f$  normiertes Polynom von kleinstem Grad ist, das von  $g$  und  $h$  geteilt wird.

## 2.28 Bemerkung

- a)  $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i, a_n \neq 0$ , dann ist  $a_n^{-1} f = x^n + \dots$  normiertes Polynom.

(z.B.:  $f = 3x^2 + x + 7 \in \mathbb{R}[x]$ )

dann  $\frac{1}{3}f = x^2 + \frac{x}{3} + \frac{7}{3}$  normiert.

In  $\mathbb{Z}_{11}[x] : \underbrace{4}_4 f = x^2 + 4x_6$  normiert.

Inverses von 3, denn  $3 \cdot 4 = 12 \equiv 1 \pmod{11}$

- b)  $\text{kgV}(g, h)$  existiert und ist eindeutig:

$$\text{sei } f_1 = \text{kgV}(g, h), f_2 = \text{kgV}(g, h)$$

$$\Rightarrow g, h | f_1, \quad g, h | f_2$$

$$\Rightarrow g, h | (f_1 - f_2)$$

- c)  $\text{ggT}(g, h)$  existiert. Beweis Eindeutigkeit wie in  $\mathbb{Z}$  (Mathe I), folgt aus.

## 2.29 Satz (von Bezout)

$K$  Körper,  $g, h \in K[x]$ , nicht beide 0.

Dann existieren  $s, t \in K[x]$ , sodass

$$f = s \cdot g + t \cdot h$$

ein  $\text{ggT}$  von  $g$  und  $h$  ist.

(Beweis: EEA in  $K[x]$ , später)

### 2.30 Satz

Euklidischer Algorithmus in  $K[x] \rightarrow$  siehe „Blatt“

### 2.31 Satz

EEA in  $K[x] \rightarrow$  siehe „Blatt“

### 2.32 Beispiel

$g = x^4 + x^3 + 2x^2 + 1, h = x^3 + 2x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$   
 ... TBD ...

### 2.33 Definition

$k$  Körper. Ein Polynom  $p \in K[x]$ ,  $\text{Grad}(p) \geq 1$  (d.h.  $p \neq 0$ ,  $p$  nicht konst., also keine Einheit) heißt *irreduzibel*, falls gilt:

Ist  $p = f \cdot g$  ( $f, g \in K[x]$ ), so ist  $\text{Grad}(f) = 0$  oder  $\text{Grad}(g) = 0$  (d.h.  $f$  oder  $g$  ist konst. Polynom).

Bemerkung:  $p = a \cdot a^{-1} \cdot p$  für  $a \in K \setminus \{0\}$  geht immer.

### 2.34 Beispiel

- a)  $ax + b$  ( $a \neq 0$ ) ist irreduzibel in  $K[x]$  für jeden Körper  $K$
- b)  $x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$  ist irreduzibel:  
 angenommen nicht, dann  $(x^2 - 2) = (ax + b)(cx + d)$  mit  $a, b, c \in \mathbb{Q} \wedge a, c \neq 0$   
 $(ax + b)$  hat Nullstelle  $-\frac{b}{a}$ , also müsste auch  $(x^2 - 2)$  Nullstelle  $-\frac{b}{a}$  ( $\in \mathbb{Q}$ ) haben.  
 Nullstellen von  $(x^2 - 2)$  sind aber nur  $\sqrt{2}$  und  $-\sqrt{2}$ , beide nicht in  $\mathbb{Q}$  !
- c)  $x^2 - 2 \in \mathbb{R}[x]$  ist nicht irreduzibel.  

$$x^2 - 2 = \underbrace{(x + \sqrt{2})}_{\in \mathbb{R}[x]} \cdot \underbrace{(x - \sqrt{2})}_{\in \mathbb{R}[x]}$$
- d)  $x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$  ist irreduzibel
- e)  $x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$  ist nicht irreduzibel:  
 $(x^2 + 1) = (x + 2) \cdot (x + 3) = (x^2 + 3x + 2x + 1) = (x^2 + 1)$   
 $2 \Rightarrow (x^2 + 1)$  ist teilbar durch  $(x - 2) \hat{=} (x + 3)$

### 2.35 Abschlussbemerkung

- a) Irreduzibel Polynome in  $K[x]$  entsprechen den Primzahlen in  $\mathbb{Z}$ . Man kann zeigen:  
 $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in K[x]$ ,  $a_n \neq 0, n \geq 1$ .  
 Dann existieren eindeutig bestimmte irreduzibel Polynome  $p_1, \dots, p_e$  und natürlichen Zahlen  $m_1, \dots, m_e \in \mathbb{N}$  mit  $f = a_n \cdot p_1^{m_1} \cdot \dots \cdot p_e^{m_e}$

- b) Gegeben: Primzahl  $p$ , dann gibt es Körper mit  $p$  Elementen:

$$(\mathbb{Z}_p, \oplus, \odot)$$

Man kann zeigen: zu jeder Primzahlpotenz  $p^a$  gibt es Körper mit  $p^a$  Elementen, diesen konstruiert man über irreduzible Polynome in  $\mathbb{Z}_p[x]$ .

### 3 Der Körper der $\mathbb{C}$ der Komplexen Zahlen

#### 3.1 Definition

Eine komplexe Zahl  $\mathbb{C}$  ist von der Form  $z = x + i \cdot y$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  und einer „Zahl“  $i$  mit  $i^2 = -1$  („imaginäre Einheit“).  $x$  heißt Realteil von  $z$ ,  $x = \operatorname{Re} z$   
 $y$  heißt Imaginärteil,  $y = \operatorname{Im} z$ .

Die Menge aller komplexen Zahlen bezeichnen wie mit  $\mathbb{C}$  und definieren auf  $\mathbb{C}$  Addition und Multiplikation wie folgt:

Für  $z = x + iy$  und  $w = a + ib$  ist

$$z + w := (x + a) + i(y + b),$$

$$z - w := (x - a) + i(y - b) \text{ und}$$

$$z \cdot w := (xa - yb) + i(xb + ya).$$

Erläuterung zur Multiplikation:  $((x + iy)(a + ib) = xa + xib + iya + i^2yb = (xa - yb) + i(xb + ya)$ .

Mit diesen Verknüpfungen ist  $\mathbb{C}$  ein Körper:

- a) AG, kG, DG: nachrechnen

b)  $0 = 0 + i \cdot 0$

c) additiv Inverses:  $-z = -x - iy$

d)  $1 = 1 + i \cdot 0$

e) multiplikativ Inverses:  $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{\in \mathbb{R}} + i \cdot \underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{\in \mathbb{R}}$

Man nennt für  $z = x + iy$  die Zahl  $\bar{z} = x - iy$  die zu  $z$  *konjugiert komplexe Zahl* und  $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$  den *Betrag* von  $z$ .

#### 3.2 Beispiel

- a)  $z = 2 + 3i$  mit  $\operatorname{Re}(z) = 2$  und  $\operatorname{Im}(z) = 3$ .

$$\bar{z} = 2 - 3i, |z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$z \cdot \bar{z} = (2 + 3i) \cdot (2 - 3i)$$

$$= 4 - 6i + 6i - 9i^2 = 4 + 9 = 13$$

- b)  $w = 1 + i = 1 + 1 \cdot i$ :  $\operatorname{Re}(w) = 1$ ,  $\operatorname{Im}(w) = 1$ ,  $\bar{w} = 1 - i$ ,  $|w| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

- c) Selbst nachrechnen:  $u = 7 = 7 + 0 \cdot i$ ,  $v = 5i = 0 + 5i$

$$\begin{aligned} \text{d) } u + w + z &= 7 + (1 + i) + (2 + 3i) = 10 + 4i \\ u \cdot w &= 7 \cdot (1 + i) = 7 + 7i \\ \frac{w}{z} &= \frac{1+i}{2+3i} = \frac{(1+i) \cdot (2-3i)}{4+9} = \frac{2-3i+2i-3i^2}{13} = \frac{5-i}{13} = \frac{5}{13} - \frac{1}{13}i \end{aligned}$$

### 3.3 Bemerkung: komplexe Zahlenebene

Man kann  $\mathbb{C}$  veranschaulichen in der „Gaußschen Zahlenebene“:

Betrachte  $z = x + iy$  als Punkt  $(x|y)$  in  $\mathbb{R}^2$ :

### 3.4 Satz (Eigenschaften)

$$\text{a) } \left. \begin{aligned} \overline{w+z} &= \overline{w} + \overline{z} \\ \overline{w \cdot z} &= \overline{w} \cdot \overline{z} \\ \overline{\frac{w}{z}} &= \frac{\overline{w}}{\overline{z}} \quad (z \neq 0) \\ \overline{\overline{z}} &= z \end{aligned} \right\} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z} \text{ ist Körperisomorphismus}$$

$$\text{b) } \operatorname{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}, \operatorname{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

$$\text{c) } |z| \geq 0, |z| = 0 \text{ nur für } z = 0$$

$$\text{d) } |z| = |\overline{z}| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$

$$\text{e) } |w \cdot z| = |w| \cdot |z|$$

$$\text{f) } |w + z| \leq |w| + |z| \text{ (Dreiecksungleichung)}$$

$$|w + z| \geq \left| |w| - |z| \right|$$

### Beweis

z.B.: d) sei  $z = x + iy \quad x, y \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \overline{z} = x - iy, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|\overline{z}| = \dots$$

### 3.5 Bemerkung

a) In  $\mathbb{C}$  existiert  $\sqrt{-1} : \pm i$ , d.h.  $x^2 + 1 = 0$  ist lösbar in  $\mathbb{C}$ , das Polynom  $x^2 + 1$  ist nicht irreduzibel in  $\mathbb{C}[x]$ :  $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$

b) Man kann jede quadratische Gleichung  $ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) in  $\mathbb{C}$  lösen:

$$x_{1|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Jedes  $b^2 - 4ac < 0$  ist, schreibe:

$$\frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2} \cdot i}{2a}$$

c) Es gilt sogar: Fundamentalsatz der Algebra:

Jedes Polynom  $f \in \mathbb{C}[x]$  vom Grad  $n \geq 1$  hat genau  $n$  Nullstellen in  $\mathbb{C}$ .

### 3.6 Polarkoordinaten

Eine andere Möglichkeit, komplexe Zahlen zu beschreiben:

Angabe von Winkel ( $\varphi$ ) und Abstand  $r$  zum Nullpunkt.

Zu jedem  $z \in \mathbb{C}$  gibt es ein eindeutig bestimmtes  $r \geq 0$  und ein  $\varphi \in \mathbb{R}$  mit

$z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$  (Polarkoordinatendarstellung von  $z$ ) und zwar ist  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$   
für  $z = x + iy$ ,  $\frac{x}{r} = \cos \varphi$ ,  $\frac{y}{r} = \sin \varphi$ :

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= r \cdot \cos \varphi + i \cdot r \cdot \sin \varphi \\ &= r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) \end{aligned}$$

Aus den Additionstheoremen für  $\sin$ ,  $\cos$  folgt (PÜ6):

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \\ z^2 &= |z|^2 \cdot (\cos(2\varphi) + i \cdot \sin(2\varphi)) \\ \pm \sqrt{z} &= \sqrt{|z|} \cdot (\cos(\frac{\varphi}{2}) + i \cdot \sin(\frac{\varphi}{2})) \end{aligned}$$

### 3.7 Beispiel

- a)  $z_1 = 1, r_1 = 1, \varphi_1 = 0 \Rightarrow z_1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \cdot \sin 0)$
- b)  $z_2 = i, r_2 = 1, \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z_2 = 1 \cdot (\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2})$
- c)  $z_3 = 1 + i, r_2 = \sqrt{2}, \varphi_2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow z_3 = \sqrt{2} \cdot (\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4})$

### 3.8 Definition/Schreibweise

$$e^{i\varphi} := \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$$

$$z = \underbrace{r}_{\text{Betrag}} \cdot e^{i\varphi}$$

### 3.9 Bemerkung

Statt Definition 3.8:

Man kann auch die Definition von Folgen, Konvergenz, Grenzwert von  $\mathbb{R}$  auf  $\mathbb{C}$  übertragen, alles aus Mathe II (Analysis!), u.a. auch Potenzreihen, insbesondere die Exponentialfunktion definieren.

Für alle  $z \in \mathbb{C}$  konvergiert  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} := \exp(z)$ ,  $e^z$

Mit den Methoden aus Mathe III - „2. Teil“ kann man dann zeigen, dass

$$e^{it} = \cos t + i \cdot \sin t \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (\text{Eulersche Formel})$$

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2) \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = \underline{(r_1 \cdot r_2) \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}}$$

**3.10 Beispiele**

- a)  $1 \cdot e^{i \cdot 0} = 1$
- b)  $e^{i\pi} = -1$  (und:  $e^{i\pi} + 1 = 0 \odot$ )
- c)  $2 \cdot e^{2\pi} = 2$
- d)  $\dots$

**3.11 Bemerkung**

$\mathbb{C}$  hat alle algebraischen und analytischen Eigenschaften wie  $\mathbb{R}$  (oder besser), außer:

Es gibt auf  $\mathbb{C}$  keine vollständige Ordnung  $\leq$ , die mit  $+$  und  $\cdot$  verträglich ist, d.h. für die gelten würde:

$$a \leq b, c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$$

$$a \leq b, r \geq 0 \Rightarrow ra \leq rb$$

**4 Wiederholung und Erweiterung der linearen Algebra aus Mathe II****4.1 Beispiel**

- a)  $K = \mathbb{Z}, V_1 = \mathbb{Z}_2^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_2 \right\}$   
 $V_1$  hat 4 Elemente:  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$   
 $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , d.h.  $-\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$   
 $\forall v \in V : 0 \cdot v = \mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $1 \cdot v = v$
- b)  $K = \mathbb{Z}_5, V_2 = \mathbb{Z}_5^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\}$   
 $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^3$   
 $-v = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, -w = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v + w = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$   
 $1 \cdot w = w, 2 \cdot w = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, 3 \cdot w = \dots$   
 $|V| = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$
- c)  $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V_1 : x_1 \oplus x_2 = 0 \right\}$  ist UR von  $V_1$

- $U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \neq \emptyset$
- Sei  $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in U$ , d.h.  $u_1 \oplus u_2 = 0$

$$\Rightarrow \text{für } \lambda \cdot u = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{pmatrix} \text{ gilt } \lambda u_1 \oplus \lambda u_2 = \lambda \cdot \underbrace{(u_1 \oplus u_2)}_0 = 0$$

d)  $\mathbb{Z}_3^3$ :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ l.a.; } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ l.u.; } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sind l.a.}$$

e) Kanonische Basis von  $V_2$  (Bsp. b)):

$$B_1 = \underbrace{\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}_{\text{geordnete Basis}}, \dim V_2 = 3$$

z.B.:  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \cdot e_1 + \beta \cdot e_2 + \gamma \cdot e_3$  mit  $\alpha = 2, \beta = 3, \gamma = 1$  und  $\alpha, \beta, \gamma$  sind die kartesischen Koordinaten.

Eine andere (geordnete) Basis, z.B.:

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Zeige Vektoren sind linear unabhängig:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \dots \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Koordinaten von  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  in  $B_2$ ?

Stelle LGS auf und löse es ...

## 4.2 Definition

$A \in M_{n,n}(K)$  heißt *invertierbar*, falls  $\exists A^{-1} \in M_{n,n}(K)$  mit  $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E_n$

# 5 Lineare Abbildungen

## 5.1 Definition

Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume.

a)  $\varphi : V \rightarrow W$  heißt *lineare Abbildung* ( $VR$ -Homomorphismus), falls:

- $\forall v_1, v_2 \in V : \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$  (Additivität)
- $\forall v \in V, \forall \lambda \in K : \varphi(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot \varphi(v)$  (Homogenität)

b) Ist die lineare Abbildung  $\varphi : V \rightarrow W$  bijektiv, so heißt  $\varphi$  *Isomorphismus*,  $V$  und  $W$  heißen dann *isomorph*,  $V \cong W$ .

## 5.2 Bemerkung

$\varphi : V \rightarrow W$  ist eine lineare Abbildung:

- $\varphi(O) = O$
- $\varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(v_i)$

## 5.3 Beispiel

- Nullabbildung:  
 $\varphi : V \rightarrow W, v \mapsto O$
- $\varphi : V \rightarrow V, v \mapsto \lambda v$  für jedes festes  $\lambda \in K$  ist lineare Abbildung ( $\lambda = 1 : \varphi = \text{id}_V$ )
- $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  ist eine lineare Abbildung (Spiegelung an  $x_1, x_2$ -Ebene)
- $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (x_1)^2 \\ x_2 \end{pmatrix}$  ist nicht linear  
 $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \lambda = 3 :$   
 $\varphi(3v) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 3 \cdot \varphi(v)$

## 5.4 Satz

$$A \in M_{m,n}(K)$$

Dann ist  $\varphi : K^n \rightarrow K^m, x \mapsto Ax$

eine lineare Abbildung

### Beweis

folgt aus Rechenregeln für Matrizen:



$$\begin{aligned}\varphi(x + y) &= A(x + y) = Ax + Ay \\ &= \varphi(x) + \varphi(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda \cdot x) &= A(\lambda x) = \lambda Ax \\ &= \lambda \varphi(x)\end{aligned}$$

□

Alle bisherigen Beispiele waren von dieser Form!

### 5.3

a)  $A = 0 = \text{Nullmatrix}$

b)  $A = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot E_n$

c)  $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

Es gilt ( $\rightarrow$  später):

alle lineare Abbildungen  $K^n \rightarrow K^m$  sind von der Form in 5.4

### 5.5 Satz

$\varphi : V \rightarrow W$  lineare Abbildung

- (i)  $U \subseteq V$  UR von  $V$   
 $\Rightarrow \varphi(U) \subseteq W$  UR von  $W$  und  $\varphi(V)$  (Bild von  $V$ ) ist UR von  $W$
- (ii) falls  $\dim(U)$  endlich :  $\dim(\varphi(U)) \leq \dim(U)$

#### Beweis

- (i)  $U \subseteq V$  Unterraum, d.h. für  $u, v \in U$  ist  $\lambda u + \mu v \in U$   
 $\varphi(U) = \{\varphi(u) | u \in U\}$  ist auch UR:  
für  $\varphi(u), \varphi(v) \underset{\text{lin. Abb.}}{=} \varphi(\lambda u + \mu v) \in \varphi(U)$   
außerdem ist  $\varphi(U) \neq \emptyset$ , da  $\varphi(O) = O$
- (ii)  $v_1, \dots, v_k$  Basis von  $U$   
 $\Rightarrow \varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k)$  ist Erzeugendensystem von  $\varphi(U)$   
 $\Rightarrow$  enthält Basis (Mathe II)  
 $\Rightarrow$  Behauptung

□

## 5.6 Definition

$\varphi : V \rightarrow W$  lineare Abbildung,  $V$  endlich dimensional

Dann heißt die  $\dim(\varphi(V))$  der Rang von  $\varphi$ ,  $\text{rg}(\varphi)$ .

## 5.7 Definition/Satz

$\varphi : V \rightarrow W$  lineare Abbildung

- (i)  $\ker(\varphi) := \{v \in V \mid \varphi(v) = O\}$   
 (alle Vektoren die von  $\varphi$  auf  $O$  abgebildet werden)  
 heißt der Kern von  $\varphi$  und ist ein UR von  $V$ .
- (ii)  $\varphi : \text{injektiv} \Leftrightarrow \ker(\varphi) = \{O\}$

### Beweis

- (i)  $\ker(\varphi)$  ist UR:

- $\ker(\varphi) \neq \emptyset$ , da  $\varphi(O) = O$
- seien  $u, v \in \ker(\varphi)$ , d.h.  $\varphi(u) = O, \varphi(v) = O$ , seien  $\lambda, \mu \in K$   
 $\Rightarrow \lambda u + \mu v \in \ker(\varphi)$ , dann:  

$$\varphi(\lambda u + \mu v) \underset{\text{lin. Abb.}}{=} \lambda \cdot \underbrace{\varphi(u)}_O + \mu \cdot \underbrace{\varphi(v)}_O = O$$

- (ii) " $\Rightarrow$ "

$\varphi(O) = O$ , wegen Injektivität kann kein weiteres Element auf  $O$  abgebildet werden.

" $\Leftarrow$ "

Angenommen es gibt  $v_1, v_2 \in V$  mit  $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$ , dann ist  $O = \varphi(v_1) - \varphi(v_2)$

$= \varphi(v_1 - v_2)$  (lineare Abbildung!)

$\Rightarrow v_1 - v_2 = O$  (nur  $O$  wird auf  $O$  abgebildet)

$\Rightarrow v_1 = v_2$

$\Rightarrow \varphi$  injektiv

□

## 5.8 Beispiel

$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$  ist lineare Abbildung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$U = \langle e_2, e_3 \rangle, \quad \dim(U) = 2$$

$$\varphi(U), \dim(\varphi(U)), \ker(\varphi)?$$

$$\varphi(U) = \langle \varphi(e_2), \varphi(e_3) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = x_3\text{-Achse}$$

$$\varphi(e_2) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \varphi(e_3) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\dim(\varphi(U)) = 1$$

## 5.9 Satz

$V, W$   $K$ -VR,  $\dim(V) = n$

$\{v_1, \dots, v_n\}$  Basis von  $V$

$w_1, \dots, w_n$  Vektoren aus  $W$  (nicht notwendig verschieden)

Dann  $\exists!$  lineare Abbildung

$$\varphi : V \rightarrow W \text{ mit } \varphi(v_i) = w_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

und zwar:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi : V \rightarrow W \\ v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i \end{array} \right\} *$$

D.h.: wenn man weiß, wie die Basisvektoren abgebildet werden, dann kennt man die lineare Abbildung vollständig.

## Beweis

Für  $\varphi$  aus  $*$  gilt:

- $\varphi$  ist linear
- $\varphi(v_i) = w_i$   
 $\varphi(v_1) = \varphi(1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n) = 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + \dots + 0 \cdot w_n = 1 \cdot w_1 = w_1$  usw.
- $\varphi$  ist eindeutig.

Angenommen  $\exists \psi : V \rightarrow W$  lin. Abb. mit  $\psi(v_i) = w_i \quad \forall i = 1 \dots n$

$$\text{Dann ist } \psi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\psi(v_i)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) \quad \square$$

### 5.10 Beispiel

$V = \mathbb{R}^2$ ,  $\varphi$  Drehung um Winkel  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha < 2\pi$ ) um Nullpunkt gegen den Uhrzeigersinn.

$\varphi$  ist lin. Abb.:

$$\varphi(\alpha_1 + \alpha_2) = \varphi(\alpha_1) + \varphi(\alpha_2)$$

$$\varphi(\lambda\alpha) = \lambda\varphi(\alpha)$$

$$\varphi : e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{allg. Vektor } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \varphi : x &\mapsto x_1 \cdot \varphi(e_1) + x_2 \cdot \varphi(e_2) \\ &= x_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \cdot \cos \alpha - x_2 \cdot \sin \alpha \\ x_1 \cdot \sin \alpha + x_2 \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= A \cdot x \end{aligned}$$

$$\text{mit } A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

### 5.11 Satz (Dimensionsformel)

$V$  endl. dim.  $K$ -VR,  $\varphi : V \rightarrow W$  lin. Abb.

Dann gilt:

$$\dim(V) = \dim(\ker(\varphi)) + \underbrace{\text{rg}(\varphi)}_{\dim(\varphi(V))}$$

#### Beweis

Sei  $u_1, \dots, u_k$  Basis von  $\ker(\varphi)$

Ergänze zu Basis  $u_1, \dots, u_n$  von  $V$  (Mathe 2, Basisergänzungssatz)

Setze  $U := \langle u_{k+1}, \dots, u_n \rangle$

Dann ist  $\ker(\varphi) \cap U = \{O\}$ ,

d.h. kein Element außer  $O$  liegt in  $U$ ,

also hat die Abb.  $\varphi|_U$  den

$$\ker(\varphi|_U) = \{O\},$$

ist damit nach Satz 5.7 (ii) injektiv.

Deshalb ist  $\dim(U) = \dim(\varphi(U))$ .

Außerdem ist  $\varphi(U) = \varphi(V)$

$$\Rightarrow \dim(V) = \dim(\ker(\varphi)) + \underbrace{\dim(U)}_{\dim(\varphi(U)) = \dim(\varphi(V)) = \text{rg}(\varphi)}$$

□

### 5.12 Korollar

$V, W$  endlich. dim.  $K$ -VR mit  $\dim V = \dim W$ ,  
 $\varphi : V \rightarrow W$  lin. Abb.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $\varphi$  ist surjektiv
- (ii)  $\varphi$  ist injektiv
- (iii)  $\varphi$  ist bijektiv

#### Beweis

$$\dim V = \dim W = n$$

Nach 5.11 gilt:

$$n = \dim(\ker(\varphi)) + \operatorname{rg}(\varphi)$$

$$\text{Also: } \underbrace{\operatorname{rg}(\varphi) = n}_{\varphi \text{ surjektiv}} \Leftrightarrow \underbrace{\dim(\ker(\varphi)) = 0}_{\varphi \text{ injektiv (Satz 5.7)}}$$

$\Rightarrow$  Beh.

□

### 5.13 Zusammenhang lin. Abb. und hom. LGS, Matrizen, Rang

- homogenes LGS:  $A \in M_{m,n}(K)$  gesucht:  
 Menge aller  $x \in K^n$  mit  $Ax = 0$
- lin. Abb. dazu:  
 $\varphi : K^n \rightarrow K^m, x \mapsto Ax$   
 Dann ist der Lösungsraum des homogenen LGS  $= \ker(\varphi)$

Dimensionsformel:

$$\underbrace{\dim(\ker(\varphi))}_{\dim(\text{Lösungsraum LGS})} = \underbrace{\dim(K^n)}_n - \underbrace{\operatorname{rg}(\varphi)}_{\dim(\varphi(K^n))}$$

$$\begin{aligned} \varphi(K^n) &= \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle_K \\ &= \langle Ae_1, \dots, Ae_n \rangle \end{aligned}$$

( $Ae_i$  ist gerade die  $i$ -te Spalte  $S_i$  von  $A$ )

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Also:

$\operatorname{rg}(\varphi) = \dim(\langle s_1, \dots, s_n \rangle_K) = \text{Maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten von } A.$

Also:  $\dim(\text{Lösungsraum}) = n - \text{Spaltenrang von } A$

Mathe II:  $\dim(\text{Lösungsraum}) = n - \text{Zeilenrang von } A$

$\Rightarrow$  für beliebige  $A \in M_{m,n}(K)$  gilt:

$$\begin{aligned}\text{Zeilenrang von } A &= \text{Spaltenrang von } A \\ &= \text{Zeilenrang von } A\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  für beliebigen  $A \in M_{m,n}(K)$  gilt:

$$\begin{aligned}&= \text{Rang von } A \\ &= \text{rg}(\varphi) \text{ mit } \varphi \text{ wie oben}\end{aligned}$$

## 6 Matrizen und lineare Abbildungen

### 6.1 Definition

Seien  $V, W$  endlich dimensionale VR mit geordneter Basis

$$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n) \text{ von } V$$

und

$$\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m) \text{ von } W$$

Sei

$$\varphi : V \rightarrow W \text{ lineare Abbildung}$$

Stelle die Bilder  $\underbrace{\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)}_{\in W}$  bzgl. Basis  $\mathcal{C}$  dar:

$$\varphi(v_1) = a_{11} \cdot w_1 + \dots + a_{m1} w_m$$

$$\vdots$$

$$\varphi(v_n) = a_{1n} \cdot w_1 + \dots + a_{mn} w_m$$

Dann heißt die  $m \times n$  Matrix

$$A_{\varphi}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (\text{Spalte } i \text{ enthält Koordinaten von } \varphi(v_i) \text{ bzgl. } \mathcal{C})$$

die *Darstellungsmatrix* von  $\varphi$  bzgl. der Basen  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$   
(Schreibweise für den Fall  $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ , dann auch  $A_{\varphi}^{\mathcal{B}}$ )

Bemerkung:  $\varphi$  durch  $A_{\varphi}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$  eindeutig bestimmt, vgl. 5.7

## 6.2 Beispiel

a)

$$V = W = \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{B} = \mathcal{C} = (e_1, e_2) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\varphi : V \rightarrow V, \quad v \mapsto 2v$$

$$A_{\varphi}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = A_{\varphi}^{\mathcal{B}} = ?$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \varphi \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} A_{\varphi}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

andere Basis  $\mathcal{D} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \quad A_{\varphi}^{\mathcal{B}, \mathcal{D}}$

$$\left. \begin{aligned} \varphi \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \varphi \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} A_{\varphi}^{\mathcal{B}, \mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b)  $V = W$  mit  $\dim V = n$ ,  $\mathcal{B}$  bel. Basis,  $\varphi = id_V$ , dann ist:

$$A_{\varphi}^{\mathcal{B}} = E_n$$

c)  $V = W = \mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{C} = (e_1, e_2)$  $\varphi$  Drehung um Nullpunkt um  $\alpha$  gegen Uhrzeigersinn

$$\Rightarrow A_{\varphi}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Vgl. Beispiel 5.10

d)  $V = W = \mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ 

$$\varphi : \text{Spiegelung an der } \underbrace{\langle e_1 \rangle}_{x_1\text{-Achse}}, \text{ d.h. } \varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \quad A_{\varphi}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

andere Basis  $\mathcal{B}' = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

$$A_{\varphi}^{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = ?$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \varphi \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = a_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

$\Rightarrow$  LGS, ausrechnen, erhalte:

$$A_{\varphi}^{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e) andersherum:

$$V = W = \mathbb{R}, \quad \mathcal{B} = (e_1, e_2)$$

$$A_{\varphi}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Was ist } \varphi \left( \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix} \right)$$

$$\varphi \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\varphi \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \varphi \left( 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 7\varphi \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) - 5\varphi \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-5) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gegeben:

Koordinaten eines Punktes bzgl. Basis  $\mathcal{B}$  (z.B. Roboterkoordinaten), Abbildung  $\varphi$

Gegeben:

Koordinaten dieses Punktes bzgl. Basis  $\mathcal{C}$  (Weltkoordinatensystem)  $\rightarrow$  später

Koordinaten des mit  $\varphi$  abgebildeten Punktes bzgl.  $\mathcal{C} \rightarrow$  jetzt

### 6.3 Satz

$V, W, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \varphi$  wie in 6.1

Sei  $v \in V, K_{\mathcal{B}}(v)$  sei Koordinatenvektor von  $v$  bzgl.  $\mathcal{B}$  (enthält Koordinaten von  $v$  bzgl.  $\mathcal{B}$ )

Dann lässt sich der Koordinatenvektor von  $\varphi(v)$  bzgl.  $\mathcal{C}$  berechnen als

$$K_{\mathcal{C}}(\varphi(v)) = A_{\varphi}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \cdot K_{\mathcal{B}}(v)$$

*Beweis:* nacher

### 6.4 Beispiel

$$\dim(V) = 3 \quad \mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3) \quad \varphi : V \rightarrow W$$

$$\dim(W) = 2 \quad \mathcal{C} = (w_1, w_2)$$

mit

$$A_{\varphi}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$v = \underline{5} \cdot v_1 - \underline{2} \cdot v_2 + \underline{4} \cdot v_3$ , d.h. Koordinaten von  $v$  bzgl.  $\mathcal{B}$  sind  $5, -2, 4$



$$K_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Was sind Koordinaten von  $\varphi(v)$  in Basis  $C$ ?

$$K_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 22 \end{pmatrix}$$

d.h.  $\varphi(v) = -5 \cdot w_1 + 22 \cdot w_2$

**Beweis**

$$A_{\varphi}^{\mathcal{B},C} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \quad K_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$A_{\varphi}^{\mathcal{B},C} \cdot K_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} \lambda_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi} \lambda_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= \varphi\left(\sum \cdots\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{\varphi(v_i)}_{\sum_{k=1}^m a_{ki} w_k} \\ &= \sum_{k=1}^m \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_{ki}\right)}_{\text{Koordinaten von } \varphi(v) \text{ bzgl. } C} \cdot w_k \end{aligned}$$

$$K_C(\varphi(v)) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \lambda_i a_{1i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_{mi} \end{pmatrix}$$

□

### 6.5 Bemerkung / Korollar zu 6.3

Der Koordinatenvektor kann als Bild der "Koordinatenabbildung"

$$K_B : V \rightarrow K^n$$

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda v_i \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

aufgefasst werden, dann erhalte folgende Übersicht

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ (\dim V=n, \text{Basis } B) \downarrow K_B & \rightarrow & \downarrow K_C \quad (\dim W=m, \text{Basis } C) \\ K^n & \xrightarrow{\text{Multiplikation mit } A_{\varphi}^{B,C}} & K_m(*) \end{array}$$

$$(*) : \underbrace{K_C \varphi(v)}_{(*)} = A_{\varphi}^{B,C} K_B(v) \text{ Damit folgt:}$$

jede lin. Abb  $K^n \rightarrow K^m$  (K Körper) ist von der Form  $\varphi(x) = Ax$  für ein  $A \in M_{m,n}(K)$

#### Beweis:

Benutze kanonische Basis von  $K^n$  bzw.  $K^m$ . Dann stimmen Elemente von  $K^n$  bzw.  $K^m$  mit ihren Koordinatenvektoren bzgl. Basis überein, Beh. folgt aus 6.3

### 6.6 Satz (Eigenschaften der Darstellungsmatrix)

U, V, W VR mit Basen B, C, D

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi : U \rightarrow V, \Psi : V \rightarrow W$$

$$a) A_{\varphi_1+\varphi_2}^{B,C} = A_{\varphi_1}^{B,C} + A_{\varphi_2}^{B,C}$$

$$b) A_{\lambda\varphi}^{B,C} = \lambda \cdot A_{\varphi}^{B,C} \quad (\lambda \in K)$$

$$c) A_{\Psi \circ \varphi}^{B,D} = A_{\Psi}^{C,D} \cdot A_{\varphi}^{B,C}$$

(D.h.: Der Hintereinanderausführung von lin. Abb. entspricht das Matrixprodukt der Darstellungsmatrizen)

#### Beweis:

Übungsaufgabe

□

#### Folgerung:

### 6.7 Satz:

V ein K-VR,  $\dim(V)=n$ , Basis B

$$\varphi : V \rightarrow V \text{ lin. Abb. mit } A_{\varphi}^B$$

Dann gilt:

$$\varphi \text{ invertierbar (bij.)} \Leftrightarrow A_{\varphi}^B \text{ invertierbar und } A_{\varphi^{-1}}^B \text{ ist dann } = (A_{\varphi}^B)^{-1}$$

**Beweis:**

" $\Rightarrow$ " Sei  $\varphi$  invertierbar, d.h.  $\exists \varphi^{-1}$

$$\text{Dann ist } A_{\varphi}^B \cdot A_{\varphi^{-1}}^B \underbrace{=}_{(6.6)} A_{\varphi \circ \varphi^{-1}}^B = A_{id}^B = E_n$$

$$\text{analog } A_{\varphi^{-1}}^B = A_{\varphi}^B$$

" $\Leftarrow$ " Sei  $A_{\varphi}^B$  invertierbar, d.h.  $\exists Y$  mit  $A_{\varphi}^B \cdot Y = Y \cdot A_{\varphi}^B = E_n$

Dann ist  $Y$  Abbildungsmatrix für eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung  $\Psi : V \rightarrow V$ ,  $Y = A_{\Psi}^B$

$$(6.6) \Rightarrow A_{\varphi \circ \Psi}^B = A_{\varphi}^B \cdot A_{\Psi}^B = E_n$$

$$\Rightarrow A_{\varphi \circ \Psi}^B = A_{\varphi}^B \cdot A_{\Psi}^B = E_n$$

d.h.  $\varphi \circ \Psi = \Psi \circ \varphi = id_V \Rightarrow \varphi$  ist bij. (invertierbar.)

□

**Fragen:** Wann ist eine Matrix (lineare Abbildung) invertierbar?  
Wie berechnet man inverse?

**6.8 Satz:**

$$A \in M_{n,n}(K)$$

Dann gilt:  $A$  ist invertierbar  $\Leftrightarrow \underbrace{\text{rg}(A) = n}_{\text{d.h. alle Zeilen/Spalten sind l.u.}}$

**Beweis:**

Betrachte  $\varphi : K^n \rightarrow K^n$  mit  $\varphi(x) = Ax$

Dann ist  $A = A_{\varphi}^B$  ( $B$  Basis von  $K^n$ )

$A$  invertierbar  $\stackrel{(6.7)}{\Leftrightarrow} \varphi$  invertierbar (bij.)

$A$  invertierbar  $\stackrel{(5.12)}{\Leftrightarrow} \varphi$  surjektiv

$A$  invertierbar  $\Leftrightarrow \text{rg}(\varphi) = n$

$A$  invertierbar  $\stackrel{(5.13)}{\Leftrightarrow} \text{rg}(A) = n$

□

**6.9 Berechnung von Inversen**

$\rightarrow$  Blatt (Gauß) + Bsp.

**Gesehen:** Darstellungsmatrix hängt von der Wahl der Basen ab. Wie ändert sie sich, wenn man Basen ändert? Dieser Vorgang wird als Basistransformation bezeichnet.

**Dazu:**

**6.10 Definition/Satz:**

Sei  $V$  ein VR,  $B = (v_1, \dots, v_n)$  und  $B' = (v'_1, \dots, v'_n)$  Basis von  $V$

Schreiben  $v'_i$  als LK der Basisvektoren von  $B$  ( $i = 1 \dots n$ ), also

$$v'_1 = s_{11}v_1 + \dots + s_{n1}v_n$$

$$v'_n = s_{1n}v_1 + \dots + s_{nn}v_n$$

$$\text{Dann hei\ss t } S_{B,B'} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} \text{ Basiswechselmatrix}$$

Ihre Spalten sind die Koordinatenvektoren der Basisvektoren von  $B'$  bzgl.  $B$

Analog:

Stelle  $v_k$  als LK der Basisvektoren von  $B'$  das ( $v_k = \sum_{l=1}^n t_{lk} v'_l$ )

erhalte so  $S_{B',B} = (t_{lk})_{l,k=1\dots n}$

Es gilt  $(S_{B,B'})^{-1} = (S_{B',B})$

(nachrechnen:  $S_{B,B'} \cdot S_{B',B} = E_n$ )

### 6.11 Satz: Koordinaten umrechnen

$V$  mit  $B, B'$  wie in 6.10,  $v \in V$

Dann ist  $K_{B'}(v) = S_{B',B} \cdot K_B(v)$

**Beweis:**

$$v = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \underbrace{v_k}_{\sum_{l=1}^n t_{lk} v'_l}, \text{ also } K_B(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\text{also } v = \sum_{l=1}^n \underbrace{\left( \sum_{k=1}^n \lambda_k t_{lk} \right)}_{\text{neue Koordinaten (bzgl. } B')} \cdot \underbrace{v'_l}_{\in B'}$$

### 6.12 Beispiel

$$V = \mathbb{R}^2, B = (e_1, e_2), B' = \left( v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

$$S_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, v_1 = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2, v_2 = 1 \cdot e_1 - 2 \cdot e_2$$

$$S_{B',B} = (S_{B,B'})^{-1} = (\dots \text{ Gau\ss } \dots) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$i = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} K_B(u) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} (u = 3 \cdot e_1 + 6 \cdot e_2)$$

Koordinaten von  $u$  in Basis  $B'$ ?

$$K_{B'}(u) = S_{B',B} \cdot K_B(u) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(also ist  $u = 4 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2$ )

Mit der Basiswechselmatrix kann man auch Darstellungsmatrizen umrechnen:

### 6.13 Satz: Darstellungsmatrizen umrechnen

$\varphi : V \rightarrow W$  lin. Abb.

$B, B'$  Basen von  $V$ ,  $C, C'$  Basen von  $W$

$$\Rightarrow A_{\varphi}^{B', C'} = S_{C', C} A_{\varphi}^{B, C} S_{B, B'}$$

#### Beweis:

Sei  $v \in V$

nach 6.3:

$$A_{\varphi}^{B', C'} \cdot K_{B'}(v) = K_{C'}(\varphi(v))$$

$$\text{Koordinatenwechsel nach } C \text{ (6.11): } = S_{C', C} \cdot K_{\varphi}(v)$$

$$6.3: = S_{C', C} \cdot A_{\varphi}^{B, C} \cdot K_B(v)$$

$$\text{Koordinatenwechsel nach } B' \text{ (6.11): } S_{C', C} \cdot A_{\varphi}^{B, C} \cdot S_{B, B'} \cdot K_{B'}(v)$$

□

### 6.14 Korollar

$\varphi : V \rightarrow V$  lin. Abb.

$B, B'$  Basen von  $V$ .  $S := S_{B, B'}$

$$\Rightarrow A_{\varphi}^{B'} = S^{-1} A_{\varphi}^B S$$

### 6.15 Beispiel

$V, B, B'$  wie in 6.12

$\varphi$  : Spiegelung an der  $x_1$ -Achse

$$\Rightarrow A_{\varphi}^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_{\varphi}^{B'} \stackrel{6.14}{=} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

## 7 Determinanten

### 7.1 Definition

$A \in M_n(K)$   $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$A_{ij} \in M_{n-1}(K)$  sei die Matrix, die man aus  $A$  durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und der  $j$ -ten Spalte erhält.

$$\text{z.B. } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad A_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \quad A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

## 7.2 Definition: Determinante, rekursive Def.

$$A \in M_n(K)$$

$$n = 1 \quad A = (a), \text{ dann } \det(A) := a$$

$$n > 1$$

$$\begin{aligned} \det(A) &:= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \cdot \det(A_{1j}) \\ &= a_{11} \cdot \det(A_{11}) - a_{12} \cdot \det(A_{12}) \\ &\quad + a_{13} \cdot \det(A_{13}) - a_{14} \cdot \det(A_{14}) \\ &\quad + \dots - \dots \\ &\quad \dots + / - a_{1n} \cdot \det(A_{1n}) \end{aligned}$$

$\det(A)$  heißt **Determinante** von A

(Formel heißt auch "Entwicklung nach der 1. Zeile" → später)

## 7.3 Beispiel

$$\text{a) } \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) - a_{12} \cdot (a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) + a_{13} \cdot \\ &\quad (a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}) = \dots \end{aligned}$$

Regel von Sarrus:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \text{ Diagonalen von links oben nach rechts unten addieren,}$$

Diagonalen von rechts oben nach links unten subtrahieren

c) für  $n \times n$ -Matrix erhalte  $n!$  Summanden (nicht schön!  $n = 5 : 120, n = 10 : 3.6\text{Mio}$ )

d) Ist A eine obere oder untere Dreiecksmatrix ist, so lässt sich  $\det(A)$  einfach berechnen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

klar für  $n = 1: A = (a)$

$n > 1: \det(A) = a_{11} \cdot \det(B) - \underbrace{a_{12} \det(\dots)}_0 + \underbrace{\dots}_0$ , B: A ohne erste Spalte und erste

Zeile

Beweis durch Induktion

e) damit klar:  $\det(E_n) = 1$

## 7.4 Entwicklungssatz von Laplace

$$A \in M_n(K)$$

- a) Entwicklung nach der i-ten Zeile:  
für  $i \in \{1, \dots, n\}$  gilt:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

- b) Entwicklung nach der j-ten Spalte:  
für  $j \in \{1, \dots, n\}$  gilt:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

$$(-1)^{i+j} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} + & - & + & - & + & \dots \\ - & + & - & + & \dots & \\ + & - & + & \dots & & \\ \dots & & & & & \end{pmatrix}$$

## 7.5 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Mit Definition 7.2 (Entwicklung nach der 1. Zeile):

$$\det(A) = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 - 1 \cdot (-10) + 1 \cdot 0 = 10$$

oder: Entwicklung nach der 3. Zeile:

$$\det(A) = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det(\dots) + 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 - 0 + 4 \cdot 1 = 10$$

oder (besser): Entwicklung nach der 2. Spalte:

$$\det(A) = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det(\dots) - 0 \cdot \det(\dots) = -1 \cdot (-10) = 10$$

Also: Es ist geschickt, nach einer Spalte oder Zeile zu entwickeln, in der viele Nullen stehen.

Falls es wenig Nullen gibt: Zuerst Gauß anwenden (Achtung:  $\det$  ändert sich dabei eventuell!)

## 7.6 Bemerkung

Aus 7.4 folgt  $\det(A) = \det(A^T)$

### 7.7 Satz (Eigenschaften der Determinanten)

$A, B \in M_n(K)$ ,  $s_1, \dots, s_n$  Spalten von  $A$ ,  $s'_i \in K^n$ ,  $\lambda \in K$

$$(D1) \det(s_1, \dots, \underbrace{s_i + s'_i}_i, \dots, s_n) = \det(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n) + \det(s_1, \dots, s'_i, \dots, s_n)$$

(D2) Beim Vertauschen zweier Spalten von  $A$  ändert sich das Vorzeichen von  $\det(A)$

$$(D3) \det(s_1, \dots, \underbrace{\lambda \cdot s_i}_i, \dots, s_n) = \lambda \cdot \det(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n)$$

(Beweis D1-D3 folgt aus 7.2 & 7.4)

$$(D4) \det(\lambda \cdot A) = \det(\lambda s_1, \dots, \lambda s_n) \stackrel{(D3)}{=} \lambda^n \cdot \det(A)$$

(D5) Ist eine Spalte von  $A$  gleich  $\mathcal{O}$ , so ist  $\det(A) = 0$

(D6) Besitzt  $A$  zwei identische Spalten, so ist  $\det(A) = 0$   
(Vertausche identische Spalten, erhalte Matrix  $A' = A$ . Nach (D2):  $\det(A) = -\det(A') = -\det(A)$ . Dies ist nur möglich, falls  $\det(A) = 0$  (oder in Körper mit  $1 + 1 = 0$ . Hier anders beweisen!))

$$(D7) \det(s_1, \dots, \underbrace{s_i + \lambda s_j}_i, \dots, s_n) = \det(A) \quad (i \neq j)$$

mit D1, D3, D6

$$(D8) \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Analog mit Zeilen statt Spalten!

Vorsicht: Im Allgemeinen ist  $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

### 7.8 Bemerkung / Beispiel

Also: Erzeuge mit Gaußelimination viele Nulleinträge (! D2, D3:  $\det$  ändert sich)

D7:  $\det$  bleibt, entwickle nach guter Zeile / Spalte, oder bringe Matrix auf obere/untere  $\Delta$ -Form

z.B.

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \stackrel{z_1 \leftrightarrow z_2}{=} -\det \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \stackrel{III=2 \cdot II + III}{=} -\det \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = -(-2) \cdot 1 \cdot 7 = 14$$

### 7.9 Satz (Charakterisierung invertierbarer Matrizen über $\det$ )

$A \in M_n(K)$  ist invertierbar  $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

In diesem Fall gilt:

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$$



**Beweis**

" $\Rightarrow$ ": Sei  $A$  invertierbar, d.h.  $\exists A^{-1}$  mit  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$

$$\Rightarrow \underbrace{\det(A \cdot A^{-1})}_{(D8): \det(A) \cdot \det(A^{-1})} = \det(E_n) = 1$$

$$\Rightarrow \det(A) \neq 0 \text{ und } \det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$$

" $\Leftarrow$ ": Sei  $A$  nicht invertierbar.

$$\Rightarrow \operatorname{rg}(A) < n$$

<sup>6.8</sup>  
 $\Rightarrow$  Spalten von  $A$  sind l.a.

d.h.  $\exists i$  mit  $s_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n \lambda_k s_k$  ( $s_i$  als LK der anderen Spalten)

$$\begin{aligned} \det(A) &\stackrel{(D7)}{=} \det(s_1, \dots, s_i - \sum \lambda_k s_k, \dots, s_n) \\ &= \det(s_1, \dots, O, \dots, s_n) \stackrel{(D5)}{=} 0 \end{aligned}$$

**7.10 Bemerkung**

Berechnung von  $A^{-1}$  mittels 6.9 (Gauß mit  $(A \mid E_n)$ ) oder auch mittels  $\det$ , vgl. Übungsblatt 10, A1

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

**8 Eigenwerte und Eigenvektoren****8.1 Definition**

Sei  $A \in M_n(K)$ .

Ein Skalar  $\lambda \in K$  heißt *Eigenwert* von  $A$ , wenn es einen Vektor  $O \neq x \in K^n$  gibt („nicht-trivial“, d.h.  $\neq 0$ ) mit

$$A \cdot x = \lambda x$$

Jedes solche  $x$  heißt dann ein zu  $\lambda$  gehöriger *Eigenvektor* von  $A$  und  $\operatorname{Eig}(\lambda) = \operatorname{Eig}_A(\lambda) = \{x \in K^n \mid Ax = \lambda x\}$  (alle zu  $\lambda$  gehör. EV & der Nullvektor  $O$ ) der  $\lambda$  zugeordnete *Eigenraum*.

**8.2 Satz**

$\lambda \in K$  ist Eigenwert von  $A \in M_n(K) \Leftrightarrow \det(A - \lambda \cdot E_n) = 0$ ,

und die zu  $\lambda$  gehörigen Eigenvektoren sind genau die nichttrivialen Lösungen des LGS.

$[A - \lambda \cdot E_n]x = O$ , also  $\operatorname{Eig}_A(\lambda) = \ker(A - \lambda \cdot E_n)$ .

**Beweis**

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow Ax = \lambda \cdot E_n \cdot x \Leftrightarrow (A - \lambda E_n)x = O$$

Also:  $\lambda$  Eigenwert von  $A \Leftrightarrow (A - \lambda \cdot E_n)x = O$  hat noch andere Lösungen als

$$x = O$$

$$\Leftrightarrow \text{rg}(A - \lambda \cdot E_n) < n$$

$$\stackrel{\text{Mathe III}}{\Leftrightarrow} (A - \lambda \cdot E_n) \text{ nicht invertierbar}$$

$$\stackrel{6.8}{\Leftrightarrow} \det(A - \lambda \cdot E_n) = 0$$

$$\stackrel{7.9}{\Leftrightarrow} \det(A - \lambda \cdot E_n) = 0$$

$$x \text{ Eigenvektor} \Leftrightarrow x \neq O \text{ und } (A - \lambda \cdot E_n)x = O$$

**8.3 Definition**

Für  $A \in M_n(K)$  heißt  $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda \cdot E_n)$  das *charakteristische Polynom* von  $A$ .

**8.4 Beispiel**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Eigenwerte, Eigenvektoren,  $\text{Eig}(A)$ ,  $p_A(\lambda)$ ?

$$A - \lambda \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\bullet p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - (1 \cdot (-2)) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$$

- Eigenwerte von A:

$$\lambda \in W \text{ von } A \stackrel{8.2}{\Leftrightarrow} p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ oder } \lambda = 3$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3 \text{ Eigenwerte von } A$$

- Eigenvektoren von A:

$$x \text{ ist EV von } A \text{ zum EW } \lambda_1 \Leftrightarrow x \neq O \text{ und } (A - \lambda_1 E_2)x = O$$

$$\text{also } \begin{pmatrix} 1-2 & 1 \\ -2 & 4-2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & | & 0 \\ -2 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$-x_1 + x_2 = 0 \text{ (} x_2 \text{ ist freie Variable)}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2$$

$$\text{Lösung } \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2 \right\} \text{ alternativ } = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\text{(oder wähle z.B. } x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1, \text{ also ist } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Lösung, restliche Lösungen sind}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}})$$

$$\text{Eig}_A(\lambda_1) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$x \text{ ist EV von } A \text{ zum EW } \lambda_2 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ und } \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Eig}_A(\lambda_2) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$$

zu Lösung von homogenen LGS: siehe Blatt im Moodle

## 8.5 Anwendungen

### a) Matrixpotenzen

Berechne  $A^{2015} = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{2015 \text{ mal}}$  für  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$  aus Bsp. 8.4

Definiere  $S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  EV zu  $\lambda_1$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  EV zu  $\lambda_2$

$$S^{-1} \stackrel{7.10}{=} \frac{1}{\det S} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

dann ist  $A = S \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_D \cdot S^{-1}$ ,  $D$ =Diagonalmatrix (stimmt, nachrechnen!)

$$\Rightarrow A^{2015} = (SDS^{-1})^{2015} = \underbrace{(SDS^{-1}) \cdot (SDS^{-1}) \cdot (SDS^{-1}) \cdot \dots \cdot (SDS^{-1})}_{E_2}$$

$$= S \cdot D^{2015} \cdot S^{-1}$$

$$= S \cdot \begin{pmatrix} 2^{2015} & 0 \\ 0 & 3^{2015} \end{pmatrix} S^{-1}$$

Mit lin. Abb./Darstellungsmatr. ausgedrückt:

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ mit } A = A_{\varphi}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \mathcal{B} \text{ kanon. Basis}$$

Bezügl. Basis  $\mathcal{B}' = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$  hat Darstellungsmatrix Diagonalgestalt  $A_{\varphi}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Bem.: nicht jede Darstellungsmatrix lässt sich auf Diagonalgestalt bringen, z.B.  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ , Drehung um  $90^\circ$

$\det(A - \lambda E_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$ , keine nullstellen in  $\mathbb{R}$ , also keine reellen Eigenwerte!

- b)
- Physik: Schwingungen, Eigenfrequenz, Tacoma Narrows Bridge
  - Googles PageRank-Algorithmus
  - Eigenfaces / Zähne ...
  - ⋮

## 8.6 Bemerkung

Für  $A \in M_n(K)$  ist  $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$

ein Polynom vom Grad  $n$  (folgt aus Def. der Det.)

Nullstellen von  $p_A(\lambda)$  sind  $\in W$  von  $A$

$\Rightarrow K = \mathbb{R} : \leq n$  Eigenwerte

$K \in \mathbb{C} : \text{genau } n \text{ Eigenwerte (nicht notwendig verschieden)}$

## 8.7 Definition: diagonalisierbar

a) Eine Matrix  $A \in M_n(K)$  heißt **diagonalisierbar**, wenn eine invertierbare Matrix

$S \in M_n(K)$  existiert, so dass  $A = SDS^{-1}$  gilt, wobei  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$  Diagonal-

matrix ist. (die  $\lambda_i$  sind dann gerade die Eigenwerte von  $A$ , siehe 8.8)

(Bem.: Dann gilt auch  $D = S^{-1}AS$ )

b) für lin. Abb:

Eine lin. Abb.  $\varphi : V \rightarrow V$  heißt **diagonalisierbar**, falls  $V$  eine Basis  $\mathcal{B}$  aus Eigenvektoren (zur zugehörigen Darstellungsmatrix) besitzt, d.h.  $A_\varphi^{\mathcal{B}}$  ist Diagonalmatrix.

Ist jede Matrix diagonalisierbar?

## 8.8 Satz: Spektralsatz

a)  $A \in M_n(K)$  ist diagonalisierbar  $\Leftrightarrow$  Es gibt  $n$  l.u. Eigenvektoren von  $A$

b) Besitzt  $A$   $n$  verschiedene Eigenwerte, so ist  $A$  diagonalisierbar.

**Beweis:**

a)  $A$  diagonalisierbar, d.h.,  $\exists S$  invertierbar mit

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow AS = S \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Sei  $S = (s_1, \dots, s_n)$  ( $s$ =Spalten) Für die  $i$ -te Spalte  $s_i$  von  $S$  gilt dann  $As_i = \lambda_i \cdot s_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )

Also ist  $s_i$  Eigenvektor zum EW  $\lambda_i$  von  $A$

$S$  ist invertierbar  $\Leftrightarrow$  Spalten  $s_1, \dots, s_n$  l.u. (Satz 6.8)

b) zeige per Induktion, dass die zugehörigen Eigenvektoren linear unabhängig sind, Behauptung folgt dann aus (i)

□

### 8.9 Bemerkung zu 8.8 (ii)

Es gib auch diagonalisierbare Matrizen, die nicht  $n$  verschiedene Eigenwerte haben!

z.B.  $E_n$  ist bereits in Diagonalform

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_S \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_D \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{S^{-1}}$$

aber alle  $n$  EW sind 1 (mit lin. Abb. ausgedrückt:  $\text{id}_V$  ist diagonalisierbar,  $A_{\text{id}_V}^B$  hat  $n$  gleiche EW)

## 9 Norm- und Skalarprodukt

In diesem Kapitel betrachten wir nur  $\mathbb{R}$ -VR

### 9.1 Definition: Norm

Für  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  heißt  $\|v\| := (\sum_{i=1}^n v_i^2)^{\frac{1}{2}}$  die **Norm** oder **Länge**

### 9.2 Eigenschaften

- a)  $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$   
 $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \mathcal{O}$
- b)  $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}^n$
- c)  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$

### 9.3 Definition: Skalarprodukt

Sind  $v, w \in \mathbb{R}^3$  Vektoren, die einen Winkel  $\alpha$  einschließen, so heißt

$$(v|w) := \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos \alpha$$

das **Skalarprodukt** von  $v$  mit  $w$ .

anschaulich:  $(v|w)$  = Flächeninhalt des von  $v$  und  $w$  erzeugten Projektionsrechtecks.

### 9.4 Eigenschaften des Skalarprodukts

seien  $u, v, w \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}$

- a)  $(v|w) \in \mathbb{R}$  (d.h. ist Skalar, daher der Name)
- b)  $(v|w) = (w|v)$  (denn:  $(v|w) = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos \alpha = \|w\| \cdot \|v\| \cdot \cos \alpha = (w|v)$ )

- c)  $(\lambda \cdot v|w) = (v|\lambda \cdot w) = \lambda \cdot (v|w)$   
 (denn  $\lambda = 0 \checkmark$ )  
 $\lambda > 0$  :  $(\lambda v|w) = \|\lambda \cdot v\| \cdot \|w\| \cdot \cos \alpha = \lambda \cdot \|v\| \cdot \|w\| \cos \alpha = \lambda(v|w)$   
 $\lambda < 0$  : Winkel zw.  $\lambda v$  und  $w$  ist  $\pi - \alpha \Rightarrow (\lambda v|w) = \|\lambda \cdot v\| \cdot \|w\| \cdot \cos(\pi - \alpha) = -\lambda \cdot \|v\| \cdot \|w\| \cdot (-\cos \alpha) = \lambda \cdot (v|w)$
- d)  $(u + v|w) = (u|w) + (v|w)$  (z.B. grafisch klarmachen)  
 wegen (ii) gilt (iii)&(iv) auch im 2. Argument
- e)  $(v|v) = \|v\|^2$  (denn:  $\alpha = 0$  :  $\|v\| \cdot \|v\| \cdot 1$ )

zur Berechnung:

$e_1, e_2, e_3$  kanon. Basisvektoren in  $\mathbb{R}^3$

$(e_i|e_i) = 1, (e_i|e_j) = 0 \forall i \neq j$  (denn  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , Vektoren stehen senkrecht zueinander)

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow (v|w) = (v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 | w_1 e_1 + w_2 e_2 + w_3 e_3) \stackrel{(ii),(iii)}{=} v_1 w_1 (e_1|e_1) + v_1 w_2 (e_1|e_2) + v_1 w_3 (e_1|e_3) + \dots = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

allgemein:

## 9.5 Definition: Standardskalarprodukt, euklidischer Vektorraum, euklidische Norm & Abstand

a) für  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

heißt

$$(v|w) := \sum_{j=1}^n v_j w_j = v^T w$$

das **Standardskalarprodukt von v mit w**

b) für beliebigen  $\mathbb{R}$ -VR  $V$ :

Eine Abb  $(\cdot|\cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad (v, w) \mapsto (v, w)$  heißt **Skalarprodukt** auf  $V$ , falls  $(\cdot|\cdot)$  Eigenschaften aus 9.4 erfüllt.

$V$  heißt dann **euklidischer Vektorraum**.

c) für  $v, w \in V$ ,  $V$  eukl. VR, so heißt

$$\|v\| := +\sqrt{(v|v)}$$

die (**euklidische**) **Norm** von  $v$ ,

$$d(v, w) = \|v - w\|$$

der (**euklid**) **Abstand** von  $v$  und  $w$

## 9.6 Beispiel

$$\begin{aligned}
 \text{a) } v &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \\
 (v|w) &= v^T w = -1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 6 \\
 \|v\| &= +\sqrt{(v|v)} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = +\sqrt{6} \\
 d(v, w) &= \|v - w\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 - 2 \\ 2 - 2 \\ 1 - 4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} \\
 \text{Winkel zwischen } v \text{ und } w: \\
 (v|w) &= \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow \cos \frac{(v|w)}{\|v\| \cdot \|w\|} = \frac{6}{\sqrt{6} \sqrt{24}} = \frac{1}{2} \\
 \Rightarrow \alpha &= \frac{\pi}{3}
 \end{aligned}$$

## 10 Orthogonalsysteme

### 10.1 Definition: orthogonal, Orthogonalsystem, Orthonormalsystem, Orthonormalbasis

V euklid. VR

- a)  $v, w \in V$  heißen **orthogonal** (senkrecht),  $v \perp w$ , falls  $(v|w) = 0$  gilt.  
(d.h.  $v = O$  oder  $w = O$  oder Winkel zw.  $v$  und  $w$  ist  $\frac{\pi}{2}$ ) ( $O$  ist  $\perp$  zu allen Vektoren)
- b)  $M \subseteq V$  heißt **Orthogonalsystem** (OGS), falls  $(v|w) = 0 \ \forall v, w \in M, v \neq w$ , gilt.  
(gilt zusätzlich  $\|v\| = 1 \ \forall v \in M$ , so heißt  $M$  **Orthonormalsystem** (ONS))
- c) Ist  $V$  endlich dimensional, so heißt  $M$  **Orthogonalbasis** (ONB von  $V$ , falls  $M$  ONS und Basis von  $V$  ist.

### 10.2 Bemerkung

Jedes ONS ist l.u.:

$v_1, \dots, v_k$  ONS,  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = O$  dann ist

$$\begin{aligned}
 0 &= (v_1 | \underbrace{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k}_0) \\
 &= \lambda_1 \underbrace{(v_1 | v_1)}_0 + \lambda_2 \underbrace{(v_1 | v_2)}_0 + \dots + \lambda_k (v_1 | v_k) \\
 &= \lambda_1 \\
 \Rightarrow \lambda_1 &= 0 \\
 \text{analog f\"ur } \lambda_2, \dots, \lambda_k, \text{ alle } &= 0 \\
 \Rightarrow v_1, \dots, v_k \text{ l.u.}
 \end{aligned}$$

Man kann zu jedem Unterraum eines euklidischen VR eine ONB berechnen.

Geg.:  $v_1 \dots v_k \in V$

Ges.:  $w_1, \dots, w_k \in V$  (ONS) mit  $\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle w_1, \dots, w_k \rangle$

**Idee:** starte mit 1. Vektor,  $w_1 = v_1$

Baue  $w_2$  aus  $w_1$  und  $v_2$ :

$w_2 = v_2 + \lambda w_1$  mit  $\lambda$  so, dass  $w_2 \perp w_1$ .

$w_1, w_2$  bilden dann OGS,  $\frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}$  bilden dann ONS.

$w_1 \perp w_2 \Leftrightarrow (w_1 | v_2 + \lambda w_1) = 0$

$\Leftrightarrow (w_1 | v_2) + \lambda \underbrace{(w_1 | w_1)}_{\|w_1\|^2} = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{-(w_1 | v_2)}{\|w_1\|^2}$

### 10.3 Satz: Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt

geg.:  $v_1, \dots, v_k \in V$

def.:  $w_1, \dots, w_k \in V$  wie folgt:

$w_1 = v_1$

$w_{r+1} := v_{r+1} + \sum_{i=1}^r \lambda_i^{(r+1)} w_i$

mit  $\lambda_i^{(r+1)} := \frac{-(w_i | v_{r+1})}{\|w_i\|^2}$  falls  $w_i \neq 0$

und  $y_1, y_2 \in V$  als  $y_r := \frac{w_r}{\|w_r\|}$  (falls  $w_r \neq 0$ )

**Dann gilt:**

- Bricht die Iteration nach  $k$  Schritten nicht ab (d.h.  $w_i \neq 0$  für  $i = 1 \dots k$ ), so bilden  $w_1, \dots, w_k$  ein OGS und  $y_1, \dots, y_k$  ein ONS mit  $\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle w_1, \dots, w_k \rangle = \langle y_1, \dots, y_k \rangle$
- Bricht die Iteration nach  $r$  Schritten ab (d.h.  $w_r = 0$ ), so gilt:  $v_1, \dots, v_{r-1}$  sind l.u.,  $v_1, \dots, v_r$  l.a.

### 10.4 Beispiel

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

gesucht:

- ONB für die Ebene  $\langle v_1, v_2 \rangle$
- Vektor  $v_3$ , der diese ONB zu einer ONB von  $\mathbb{R}^3$  ergänzt.

**Lösung:**

$$\begin{aligned} \text{a) } w_1 &= v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ r &= 1, w_{r+1} = w_2 \\ w_2 &= v_2 + \sum_{i=1}^1 \lambda_i^{(2)} w_i = v_2 + \lambda_1^{(2)} w_1 \\ \text{mit } \lambda_1^{(2)} &= \frac{-(w_1 | v_2)}{\|w_1\|^2} \end{aligned}$$



$$(w_1|v_2) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 = 4$$

$$||w_1||^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$\Rightarrow w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{4}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{OGB} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{ONB} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Vektor, der  $\{w_1, w_2\}$  zu Basis ergänzt, ist z.B.

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\text{denn z.B. so zeigen: } \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 \neq 0 \Rightarrow w_1, w_2, w_3 \text{ l.u.})$$

$$w_2 = v_3 - \frac{(w_1|v_3)}{||w_1||^2} \cdot w_1 - \frac{(w_2|v_3)}{||w_2||^2} \cdot w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$||w_3|| = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$y_3 = \sqrt{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

## 10.5 Definition: orthogonale Matrix

Eine Matrix  $A \in M_n(\mathbb{R})$  heißt orthogonal, falls ihre Spektralvektoren eine ONB des  $\mathbb{R}^n$  bilden.

## 10.6 Beispiel

$\mathbb{R}^2$ :

$$A = \begin{pmatrix} \underbrace{\cos \alpha}_{s_1} & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \underbrace{\cos \alpha}_{s_2} \end{pmatrix} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \text{ ist orthogonal}$$

$$(s_1|s_2) = \cos \alpha \cdot (-\sin \alpha) + \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0$$

$$||s_1|| = ||s_2|| = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 1$$

## 10.7 Satz: Eigenschaften von orthogonalen Matrizen

Sei  $A \in M_n(\mathbb{R})$  orthogonal

- a)  $A^T A = E_n$
- b)  $A$  invertierbar,  $A^{-1} = A^T$
- c)  $\|Av\| = \|v\|$  (zugehörige Abb. ist "Längentreu")
- d)  $|\det A| = 1$

**Beweis:**

- a)  $s_1, \dots, s_n$  Spalten von  $A$   
 bilden ONB  $\Rightarrow (s_i | s_j) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$   
 $\Rightarrow A^T A = E_n$
- b) folgt aus (i)
- c)  $\|Av\|^2 = (Av | Av) = (Av)^T \cdot Av = v^T A^T A v \stackrel{(i)}{=} v^T E_n v = v^T v = (v | v) = \|v\|^2$
- d)  $1 = \det E_n \stackrel{(i)}{=} \det(A^T A) = \det(A^T) \cdot \det(A) = \det(A) \cdot \det(A) = (\det(A))^2$

## 11 Mehrdimensionale Analysis

*Siehe Blatt im Moodle (11.1 bis 11.12)*

### 11.13 Beispiel

- a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $f(x, y) = e^x + y^2$   
 $\underbrace{f'(x, y)}_{\text{Jacobimatrix}} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (e^x \quad 2y)$   
 $f'(0, 0) = (1 \quad 0)$   
 $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \\ 2y \end{pmatrix}$

- b)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y \\ x \cdot y \cdot z \end{pmatrix}$   
 $f'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$   
 $f'(2, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

*Siehe Blatt im Moodle (11.14 bis 11.21)*

### 11.22 Definition: (total)differenzierbar, affin-linear

$D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $a \in D$

$f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt **(total)differenzierbar in a** wenn  $f$  in  $a$  partiell differenzierbar ist und geschrieben werden kann als  $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \epsilon(x)$  mit  $\epsilon : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|\epsilon(x)\|}{\|x - a\|} = 0$  (d.h.  $\epsilon$  wird klein nahe  $a$ )

( $n = m = 1$ , erhalte Definition der Differenzierbarkeit aus Mathe II)

Anschaulich:

$f$  kann in der Nähe von  $a$  durch die **affin-lineare** Abbildung  $x \mapsto \underbrace{f(a)}_{\text{konst.}} + \underbrace{f'(a)(x - a)}_{\substack{\text{Matrix} \\ \text{linear}}}$

beschrieben werden

### 11.23 Definition: Richtungsableitung

$D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in D$

$v \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|v\| = 1$

$f$  heißt **in a differenzierbar in Richtung v** wenn  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+hv) - f(a)}{h}$  ex.

Der Grenzwert heißt dann **Richtungsableitung** von  $f$  in Richtung  $v$  im Punkt  $a$ .

Bez.:  $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$

### 11.24 Bemerkung

$\frac{\partial f}{\partial x_j}$  ist die Richtungsableitung von  $f$  in Richtung  $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  (1 an Stelle j)

### 11.25 Satz

sei  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (total)differenzierbar in  $a \in D$

Dann ex. in  $a$  alle Richtungsableitungen und für alle  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|v\| = 1$  gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = f'(a) \cdot v$$

Die Richtungsableitung stellt den Anstieg von  $f$  an der Stelle  $a$  in Richtung  $v$  dar.

**Beweis:**

$f$  differenzierbar, d.h.  $f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \epsilon(x)$

$$\stackrel{x=a+h \cdot v}{\Rightarrow} f(a + h \cdot v) = f(a) + f'(a) \cdot (a + h \cdot v - a) + \epsilon(a + h \cdot v)$$

$$\stackrel{h \neq 0}{\Rightarrow} \frac{f(a+h \cdot v) - f(a)}{h} = \frac{f'(a) \cdot (h \cdot v)}{h} + \frac{\epsilon(a+h \cdot v)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h \cdot v) - f(a)}{h} = f'(a) \cdot v$$

□

### 11.26 Beispiel

- a) Anstieg von  $f(x, y) = x^2 + y^2$  im Punkt  $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  in Richtung  $v = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$  ( $\|v\| = 1$ )

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 1) = f'(1, 1) \cdot \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} = 2 \cdot \sin \alpha + 2 \cdot \cos \alpha$$

- b)  $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ ,  $a = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$  Punkt auf "Gebirge"

**gesucht:** Richtung  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ , in der die Tangente an den Graph von  $f$  die Steigung  $\frac{3}{\sqrt{2}}$  hat.

$$\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 2v_1 + v_2 \stackrel{!}{=} \frac{3}{\sqrt{2}} \text{ und } \|v\| = 1, \text{ d.h. } v_1^2 + v_2^2 = 1$$

Gleichungssystem lösen...

$$\text{ergibt } v = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ und } v = \begin{pmatrix} \frac{7}{5\sqrt{2}} \\ \frac{1}{5\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

### 11.27 Bemerkung

Es gilt:  $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = f'(a) \cdot v = (\nabla f)^T \cdot v = \|\nabla f(a)\| \cdot \|v\| \cdot \cos \alpha$ ,  $\alpha$ : Winkel zw.  $\nabla f$  und  $v$   
 $\Rightarrow$  Richtungsableitung:  $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$  ist am größten, wenn  $\cos \alpha = 1$ , also  $\alpha = 0$  ist, d.h. wenn der Richtungsvektor  $v$  in Richtung des Gradienten zeigt.  
 Der Gradient zeigt also immer in die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion.

*Jetzt wieder 1-dimensionale Analysis:*

## 12 Taylorpolynome und Taylorreihe

### 12.1 Definition

$I \subseteq \mathbb{R}$  Intervall,  $x_0 \in I$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

- a)  $f^{(0)} := f$   
 $f^{(1)} = f'$ , falls  $f$  diffbar auf  $I$   
 $\vdots$   
 $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ , falls  $f^{(n-1)}$  diffbar auf  $I$   
**(f n-mal differenzierbar,  $f^{(n)}$  n-te Ableitung)**

- b)  $f$  heißt **unendlich oft differenzierbar**, falls  $f$  n-mal diffbar  $\forall n \in \mathbb{N}$ .  
 (Bez. auch  $f^{(1)} = f'$ ,  $f^{(2)} = f''$ , ...)

## 12.2 Beispiel

- a)  $f(x) = x^2$   $\infty$  oft diffbar  
 $f'(x) = 2x$ ,  $f''(x) = 2$ ,  $f^{(n)} = 0 \forall n \geq 3$
- b)  $f(x) = e^x$   
 $f^{(n)}(x) = e^x \forall n \in \mathbb{N}_0$
- c)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}x^2 & x < 0 \end{cases}$   
 $f'(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} = |x|$ , nicht diffbar in  $x = 0$
- d)  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $f(x) = x^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ )  
 $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$   
 $f^{(n)} = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1) \cdot x^{\alpha-n} = n! \underbrace{\binom{\alpha}{n}}_{\text{binom.}} \cdot x^{\alpha-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

## 12.3 Motivation

Polynome sind besonders einfach zu handhaben.

Wir wollen komplizierte Funktionen möglichst gut mittels Polynome beschreiben / annähern.

Damit zwei Funktionen „ähnlich“ sind, sollten nicht nur ihre Funktionswerte in einigen Punkten übereinstimmen, sondern möglichst auch ihre Ableitung in diesen Punkten.

**gegeben:** Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$

**gesucht:** Polynom  $T_n(x)$  vom Grad  $n$ , das  $f$  gut annähert, insbesondere an der Stelle  $x_0$ .

Wie muss  $T_n$  aussehen?

für  $n = 0$ : (Grad 0, d.h.  $T_0(x)$  ist Gerade)

$$T_0(x) = f(x_0) \text{ (dann wenigstens Übereinstimmung in } x_0 \text{):}$$

$$T_0(x_0) = f(x_0)$$

für  $n = 1$ :  $T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$  Polynome vom Grad 1 ✓

$$T_1(x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x_0 - x_0) \text{ (Übereinstimmung in } x_0 \text{) ✓}$$

$$T_1'(x) = f'(x_0)$$

$$\Rightarrow T_1'(x_0) = f'(x_0) \text{ (Übereinstimmung der 1. Ableitung in } x_0 \text{)}$$

für  $n = 2$ :  $T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} \cdot f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2$  Polynom vom Grad 2 ✓

$$T_2(x_0) = f(x_0) + 0 + 0 \text{ (Übereinstimmung in } x_0 \text{) ✓}$$

$$T_2'(x) = f'(x_0) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot f''(x_0) \cdot (x - x_0)^1 = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0)$$

$$T_2''(x) = f''(x_0)$$

$$T_2'(x_0) = f'(x_0)$$

$$T_2''(x_0) = f''(x_0) \text{ } T_2 \text{ und } f \text{ stimmen in 1. und 2. Ableitung an der Stelle } x_0 \text{ überein.}$$

## 12.4 Definition: Taylorpolynom

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -mal differenzierbar auf  $I$ ,  $x_0 \in I$

Dann heißt

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

das  **$n$ -te Taylorpolynom von  $f$** , entwickelt um den Punkt  $x_0 \in I$ .

oben für  $n = 0, 1, 2$  gesehen:

Für  $T_n(x)$  gilt:  $T_n(x_n) = f(x_n)$  und  $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$  für  $k = 1 \dots n$

$T_n(x)$  nähert also  $f$  an. Wie gut?

## 12.5 Satz: Formel von Taylor mit Lagrange-Restglied

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$   $(n+1)$ -mal differenzierbar auf  $I$ ,  $x_0 \in I$

Sei  $R_n(x) := f(x) - T_n(x)$

der Fehler zwischen  $f$  und dem  $n$ -ten Taylorpolynom von  $f$  entwickelt um den Punkt  $x_0$ .  
("Restglied")

Dann gibt es zu jedem  $x \in I$  eine Stelle  $\xi$  zwischen  $x_0$  und  $x$ , so dass

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

(Merkregel:  $(n+1)$ -ter Term von  $T_{n+1}(x)$  mit  $\xi$  statt  $x_0$ )

also ist  $f$  darstellbar durch das  $n$ -te Taylorpolynom mittels

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}_{\text{Polynom vom Grad } n} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}$$

(Taylorentwicklung von  $f$  an der Stelle  $x_0$ )

**Beweis:**

Sei  $g(x) = (x - x_0)^{n+1}$

Es gilt  $R_n^{(k)}(x_0) = 0$  und  $g^{(k)}(x_0) = 0 \forall k = 0 \dots n$

$\frac{R(x)}{g(x)} = \frac{R(x) - R(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \stackrel{*}{=} \frac{R'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}$  für ein  $\xi_1$  zwischen  $x$  und  $x_0$  (\*: 2. Mittelwertsatz aus Mathe II)

$= \frac{R'(\xi_1) - R'(x_0)}{g'(\xi_1) - g'(x_0)} \stackrel{*}{=} \frac{R''(\xi_2)}{g''(\xi_2)}$  für ein  $\xi_2$  zw.  $\xi_1$  und  $x_0$

$= \dots = \frac{R^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{g^{(n+1)}(\xi_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}$  für ein  $\xi_{n+1}$  zwischen  $\xi_n$  und  $x_0$

setze  $\xi = \xi_{n+1}$ , Behauptung folgt

## 12.6 Bemerkung

a) Der Satz besagt:

$f(x)$  kann bis auf  $R_n(x)$  als Polynom  $n$ -ten Grades dargestellt werden.

Je größer  $n$ , desto besser sollte diese Annäherung sein. Insbesondere ist interessant:  
gilt  $R_n(x) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ ?

b) Es gibt auch andere Darstellungen des Restglieds, z.B. mit Integral.

**12.7 Beispiel**

$$\begin{aligned}
 \text{a) } f(x) &= e, \quad x_0 = 0 \\
 f^{(k)} &= e^x \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \\
 f^{(k)}(x_0) &= e^0 = 1 \\
 \Rightarrow T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k \\
 \Rightarrow \underbrace{e^x}_{T_n(x)} f(x) &= \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}}_{T_n(x)} + \underbrace{\frac{e^\xi}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}}_{R_n(x)} \quad (\xi \text{ zwischen } 0 \text{ und } x)
 \end{aligned}$$

$e^\xi$  ist beschränkt durch  $e^0$  oder  $e^x$ ,  $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$

Also:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$