

Mathematik III - Wintersemester 14/15

9. November 2014

Inhaltsverzeichnis

1	Algebraische Strukturen mit einer Verknüpfung	3
1.1	Definition: Verknüpfung	3
1.2	Beispiel	3
1.3	Definition: Halbgruppe	3
1.4	Bemerkung	3
1.5	Beispiel	4
1.6	Definition: kommutative Halbgruppe	4
1.7	Beispiel	4
1.8	Definition: Unterhalbgruppe	5
1.9	Beispiel	5
1.10	Lemma: Eins eindeutig	5
1.11	Definition: Monoid	5
1.12	Beispiele	5
1.13	Definition: Untermonoid	6
1.14	Lemma: Inverses eindeutig	6
1.15	Definition: Gruppe, Inverse, Ordnung	6
1.16	Bemerkung	6
1.17	Beispiele	6
1.18	Beispiele	7
1.19	Satz: Gleichungen lösen in Gruppen	8
1.20	Beispiel	8
1.21	Definition: Untergruppe	8
1.22	Beispiele	9
1.23	Satz und Definition: Rechtsnebenklassen	9
1.24	Beispiel	10
1.25	Lemma: Mächtigkeit von Untergruppen	10
1.26	Theorem: Satz von Lagrange	10
1.27	Definition: Potenzen	11
1.28	Satz: Potenzgesetze	11
1.29	Satz und Definition: Ordnung, zyklische Gruppe	12
1.30	Beispiel	12
1.31	Korollar	13
1.32	Beweis	13
2	Algebraische Strukturen mit 2 Verknüpfungen: Ringe und Körper	13
2.1	Definition: Ring	13
2.2	Beispiel	14
2.3	Satz: Rechnen mit Ringen	14
2.4	Bemerkung	14
2.5	Definition: Körper	15
2.6	Beispiele	15
2.7	Satz: Rechnen im Körper, Nullteilerfreiheit	15
2.8	Definition: Homomorphismus, Isomorphismus	16
2.9	Beispiel	16
2.10	Satz: Chinesischer Restsatz	16
2.11	Beispiel	16

2.12	Bemerkung	17
2.13	Korollar: Phi-Funktion berechnen	17
2.14	Definition: Polynom	18
2.15	Beispiel	18
2.16	Satz und Definition: Polynomring	18
2.17	Bemerkung	19
2.18	Beispiel	19
2.19	Definition: Grad eines Polynoms	19

1 Algebraische Strukturen mit einer Verknüpfung

HALBGRUPPEN, MONOIDE, GRUPPEN

1.1 Definition

Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge.

Eine *Verknüpfung* oder (abstrakte) Multiplikation auf X ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \bullet : X \times X &\rightarrow X \\ (a, b) &\mapsto a \bullet b \end{aligned}$$

$a \bullet b$ heißt *Produkt* von a und b , muss aber mit der üblichen Multiplikation von Zahlen _(ab) nichts zu tun haben.

Beschreibung bei endlichen Mengen oft durch Multiplikationstabellen.

1.2 Beispiel

$$\begin{array}{c|cc} \bullet & a & b \\ \hline a & b & b \\ b & a & a \end{array}$$

$$(a \bullet a) \bullet a = b \bullet a = a$$

$$a \bullet (a \bullet a) = a \bullet b = b \quad \rightarrow \text{nicht assoziativ}$$

$$\text{b) } X = \mathbb{Z}^- (= \{0, -1, -2, \dots\})$$

Die normale Multiplikation ist auf \mathbb{Z}^- keine Verknüpfung!

(zum Beispiel ist $(-2) \cdot (-3) = 6 \notin \mathbb{Z}^-$)

Aber auf $X = \mathbb{N}$, $X = \mathbb{Z}$ oder $X = \{1\}$, $X = \{0, 1\}$

1.3 Definition

Sei $H \neq \emptyset$ eine Menge mit Verknüpfung.

(H, \bullet) heißt *Halbgruppe*, falls gilt:

$$\forall a, b, c \in H : (a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c) \quad (\text{Assoziativgesetz (AG)})$$

1.4 Bemerkung

AG sagt aus: bei endlichen Produkten ist die Klammerung irrelevant, z.B.

$$(a \cdot b) \cdot (c \cdot d) = ((a \cdot b) \cdot c) \cdot d = (a \cdot (b \cdot c)) \cdot d \quad (\text{usw.})$$

Deshalb werden Klammern meistens weggelassen.

Die Reihenfolge der Elemente ist i.A. relevant!

1.5 Beispiel

- a) $(\mathbb{N}, \bullet), (\mathbb{Z}, \bullet), (\mathbb{Q}, \bullet), (\mathbb{R}, \bullet)$ ¹ sind Halbgruppen.

Ebenso $(\mathbb{N}, +), (\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +)$ ²

- b) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, :)$ ³ ist *keine* Halbgruppe, denn z.B. $(12 : 6) : 2 = 1$
 $12 : (6 : 2) = 4$

- c) vgl. Vorlesung Theoretische Informatik

$A \neq \emptyset$ endliche Menge ("Alphabet")

$A^+ = \cup_{n \in \mathbb{N}} A^n =$ Menge aller endlichen Wörter über A

(z.B. $A = \{a, b\}$, dann ist z.B. $\underbrace{(a, a, b)}_{aab} \in A^3$)

Verknüpfung: Konkatenation (Hintereinanderschreiben)

z.B. $aab \bullet abab = aababab$

$A^* = A^+ \cup \{\lambda\}$ λ (oder ϵ) ist das leere Wort

Es gilt: $\lambda \cdot w = w \cdot \lambda = w \quad \forall w \in A^*$

$(A^+, \bullet), (A^*, \bullet)$ *Worthalbgruppe* über A

- d) $M \neq \emptyset$ Menge, $\text{Abb}(M, M)$: Menge aller Abbildungen $M \rightarrow M$ mit \circ (Komposition) ist Halbgruppe.

- e) (WICHTIG)

$n \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$

Verknüpfung: $\oplus : a \oplus b := (a + b) \bmod n$
 $\odot : a \odot b := (a \cdot b) \bmod n$

$(\mathbb{Z}_n, \oplus), (\mathbb{Z}_n, \odot)$ sind Halbgruppen.

1.6 Definition

Eine Halbgruppe (H, \bullet) heißt *kommutativ*, falls gilt:

$$\forall a, b \in H : a \cdot b = b \cdot a \quad (\text{Kommutativgesetz, KG})$$

1.7 Beispiel

Beispiele 1.5 a), e) sind kommutative Halbgruppe.

(hallo \neq ollah, ab \neq ba, Worthalbgruppe nicht kommutativ)

¹ \bullet normale Multiplikation

² + normale Addition

³ : normale Division

1.8 Definition

Sei (H, \bullet) Halbgruppe, $\emptyset \neq U \subseteq H$

U heißt *Unterhalbgruppe* von H , falls $u \cdot v \in U \forall u, v \in U$ gilt.

(U, \odot) ist dann selbst Halbgruppe.

1.9 Beispiel

$(\mathbb{Z}, +)$ Halbgruppe

G = Menge aller gerade ganzen Zahlen $\subseteq \mathbb{Z}$

$(G, +)$ ist Unterhalbgruppe von $(\mathbb{Z}, +)$

U = Menge aller ungerade Zahlen $\subseteq \mathbb{Z}$

$(U, +)$ ist keine Unterhalbgruppe!

1.10 Lemma

Sei (H, \bullet) Halbgruppe, $e_1, e_2 \in H$ mit $(*) e_1 \cdot x = x \cdot e_1 = x$ und $(**) e_2 \cdot x = x \cdot e_2 = x \forall x \in H$

Dann ist $e_1 = e_2$

Beweis. $e_1 \stackrel{(**)}{=} e_1 \cdot e_2 \stackrel{(*)}{=} e_2$

□

1.11 Definition

Eine Halbgruppe (H, \bullet) heißt *Monoid*, falls $e \in H$ existiert mit $e \cdot x = x \cdot e = x \forall x \in H$

e heißt *neutrales Element* / Einselement / Eins in H .

Schreibweise: (H, \bullet, e)

Für additive Verknüpfung oft 0 für e (Nullelement)
multiplikative 1

Nach 1.10 ist das neutrale Element eindeutig!

1.12 Beispiele

- a) (\mathbb{N}, \bullet) Monoid mit $e = 1$
 $(\mathbb{N}, +)$ kein Monoid
 $(\mathbb{N}_0, +)$ Monoid mit $e = 0$
 $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +)$ Monoide mit $e = 0$
 $(\mathbb{Z}, \bullet), (\mathbb{N}_0, \bullet), (\mathbb{Q}, \bullet), (\mathbb{R}, \bullet)$ Monoide mit $e = 1$
- b) $(\text{Abb}(M, M), \circ)$ Monoid, $e = \text{id}$
- c) (\mathbb{Z}_n, \oplus) Monoid, $e = 0$
 (\mathbb{Z}_n, \odot) Monoid, $e = 1$
- d) (A^*, \bullet) Monoid, $e = \lambda$ (hallo $\lambda = \lambda$ hallo = hallo)

1.13 Definition

Sei (M, \bullet, e) Monoid. Eine Teilmenge $\emptyset \neq U \subseteq M$ heißt *Untermonoid* von M , falls U mit \bullet selbst ein Monoid mit neutralem Element e ist (also $e \in U$)

1.14 Lemma

Sei (H, \bullet, e) Monoid und es gebe zu jedem Element $h \in H$ Elemente $x, y \in H$ mit $h \cdot x \stackrel{(*)}{=} e \stackrel{(**)}{=} y \cdot h$.

Dann ist $x = y$

Beweis. $y = y \cdot e \stackrel{(*)}{=} y \cdot (h \cdot x) \stackrel{(AG)}{=} (y \cdot h) \cdot x \stackrel{(**)}{=} e \cdot x = x$

□

1.15 Definition

(i) (H, \bullet, e) Monoid, $h \in H$

Falls ein $x \in H$ existiert mit $hx = xh = e$, so nennt man h *invertierbar* und x das *Inverse* zu h , bez. h^{-1} (bei additiven Verknüpfungen oft auch $-h$)

Nach 1.14 ist h^{-1} eindeutig bestimmt!

Es gilt: e ist immer invertierbar, $e^{-1} = e$

(ii) Ein Monoid (G, \bullet, e) heißt *Gruppe*, falls jedes Element in G invertierbar ist.

(iii) Für eine endliche Gruppe G heißt die Anzahl der Elemente in G die *Ordnung* von G , $|G|$

1.16 Bemerkung

(H, \bullet, e) Monoid.

Sei G die Menge aller invertierbaren Elemente von H , dann ist (G, \bullet, e) eine Gruppe.

Es gilt: e invertierbar ($e^{-1} = e$)

und falls g invertierbar, dann ist auch g^{-1} invertierbar: $(g^{-1})^{-1} = g$

falls g, h invertierbar, dann auch $g \cdot h$: $(g \cdot h)^{-1} = h^{-1} \cdot g^{-1}$

1.17 Beispiele

a) $(\mathbb{N}_0, +, 0)$ ist keine Gruppe aber $(\mathbb{Z}, +, 0), (\mathbb{Q}, +, 0), (\mathbb{R}, +, 0)$ sind Gruppen.

b) $(\mathbb{Z}, \bullet, 1)$ ist keine Gruppe.

Die Menge der invertierbaren Elemente ist $\{1, -1\}$, diese bilden eine Gruppe.

c) $(\mathbb{Q}, \bullet, 1)$ ist keine Gruppe, aber $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \bullet, 1), (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \bullet, 1)$ sind Gruppen.

d) A^* ist keine Gruppe, nur λ ist invertierbar.

1.18 Beispiele

a) $(\mathbb{Z}_n, \oplus, 0)$ ist Gruppe (was ist das Inverse zu $x \in \mathbb{Z}_n$? Siehe PÜ1, A9)

b) Sei $n \geq 2$. $(\mathbb{Z}_n, \odot, 1)$ ist Monoid aber keine Gruppe.

Wann ist ein Element aus \mathbb{Z}_n invertierbar bezüglich \odot ?

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{Z}_n \text{ invertierbar} &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Z}_n : z \odot x = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Z} : (z \cdot x) \bmod n = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists x, q \in \mathbb{Z} : z \cdot x = q \cdot n + 1 \\ &\Leftrightarrow z \cdot x + (-q \cdot n) = 1 \\ &\stackrel{\text{Mathe I}}{\Leftrightarrow} \text{ggT}(z, n) = 1 \end{aligned}$$

also sind nur zu n teilerfremde Elemente invertierbar!

(vgl. $(\mathbb{Z}_6, 0, 1)$: 0, 2, 3, 4 nicht invertierbar, 1, 5 invertierbar)

Bezeichnung:

$$\mathbb{Z}_n^* = \{z \in \mathbb{Z}_n \mid \text{ggT}(z, n) = 1\}$$

ist Gruppe bezüglich \odot (vgl. Bemerkung ??) mit Ordnung $|\mathbb{Z}_n^*| = \varphi(n)$ ("phi von n ", Eulersche φ -Funktion) = Anzahl aller $z \in \mathbb{N}$, die teilerfremd zu n sind und $1 \leq z \leq n$.

$$\varphi(3) = 2, \varphi(4) = 2, \varphi(7) = 6$$

Wie berechnet man das Inverse von $z \in \mathbb{Z}_n^*$?

Mathe I, Erweiterter Euklidischer Algorithmus (WHK, S. 80/81) liefert zu z und n ($\text{ggT}(z, n) = 1$) Zahlen $s, t \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{aligned} z \cdot s + n \cdot t &= 1 \\ \Rightarrow (z \cdot s) \bmod n &= 1 \\ \Rightarrow (z^{-1}) &= s \bmod n \end{aligned}$$

Beispiel:

$n = 8$: (\mathbb{Z}_8, \odot) , $z = 5$ ist invertierbar, $\text{ggT}(8, 5) = 1$

$$\text{EEA: } 5 \cdot (-3) + 8 \cdot 2 = 1 \Rightarrow z^{-1} = -3 \bmod 8 \Rightarrow z^{-1} = 5$$

c) $\text{Abb}(M, M)$: invertierbare Elemente sind genau die *bijektiven* Abbildungen auf M , $\text{Bij}(M)$ (Mathe I)

Speziell: $M = \{1, 2, \dots, n\}$, dann heißt $\text{Bij}(M)$ die symmetrische Gruppe von Grad n , S_n

$|S_n| = n!$, Elemente heißen Permutationen.

Bsp: $n = 2$

$$S_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{id}}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$n = 3$

$$S_3 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{id}}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \varrho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$$

$$\pi \circ \varrho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \varrho \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ (nicht kommutativ!)}$$

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \pi, \varrho^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1.19 Satz (Gleichungen lösen in Gruppen)

Sei G Gruppe, $a, b \in G$

- (i) Es gibt genau ein $x \in G$ mit $ax = b$ (nämlich $x = a^{-1}b$)
- (ii) Es gibt genau ein $y \in G$ mit $ya = b$ (nämlich $y = ba^{-1}$)
- (iii) Ist $ax = bx$ für ein $x \in G$, dann gilt $a = b$ (Kürzungsregel)

Beweis. (i) • $x = a^{-1}$ ist Lösung (prüfe $ax = b$):

$$a \cdot \underbrace{a^{-1}b}_x \stackrel{\text{AG}}{=} (a \cdot a^{-1}) \cdot b = e \cdot b = b$$

- Es gibt genau eine Lösung:

$$\text{Es gelte } ax = b$$

$$\Rightarrow x = ex = (a^{-1}a)x \stackrel{\text{AG}}{=} a^{-1}(ax) = a^{-1}b = b$$

(ii) analog

(iii) Multipliziere von rechts mit x^{-1}
links y^{-1}

□

1.20 Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \text{Was ist } x?$$

$$a \cdot x = b \Leftrightarrow x = a^{-1} \cdot b$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1.21 Definition

(G, \cdot) Gruppe, $\emptyset \neq U \subseteq G$ Teilmenge.

U heißt *Untergruppe* von G ($U \leq G$), falls U bzgl. \cdot selbst eine Gruppe ist.

Insbesondere gilt dann: $\forall u, v \in U$ ist $u \cdot v \in U$.

e von G ist auch neutrales Element in U . (*)

Inversen in U sind die gleichen wie in G .

(*) Angenommen e ist neutrales Element in G , aber f neutrales Element in U , f^{-1} Inverses von f in G .

Dann ist $f^{-1} \cdot f = f \cdot f^{-1} = e$ und $f \cdot f = f$.

$$\Rightarrow f = e \cdot f = (f^{-1} \cdot f) \cdot f = f^{-1} \cdot (f \cdot f) = f^{-1} \cdot f = e$$

1.22 Beispiele

a) $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +)$

b) $(\{-1, 1\}, \cdot) \leq (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) \leq (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

c) (e, \cdot) ist Untergruppe jeder beliebigen Gruppe mit Verknüpfung \cdot und neutralem Element e .

d) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_3$, $\pi^{-1} = \pi$, $\pi^{-1} \circ \pi = \text{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow (\pi, \text{id}) \leq S_3$

1.23 Satz und Definition

G Gruppe, $U \leq G$

- (i) Durch $x \sim y \Leftrightarrow x \cdot y^{-1} \in U$
 $x + (-y) \in U$ (bei additiver Verknüpfung)
 wird auf G eine Äquivalenzrelation definiert

Beweis

\sim ist reflexiv: $x \sim x$ gilt $\forall x \in G$, denn $x \cdot x^{-1} = e \in U$ ✓

\sim ist symmetrisch: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$

Sei $x \sim y$, also $x \cdot y^{-1} \in U$ (zzg.: $y \sim x$, also $y \cdot x^{-1} \in U$)

dann ist $y \cdot x^{-1} = (x \cdot y^{-1})^{-1} \in U$, da auch $x \cdot y^{-1} \in U$.

\sim ist transitiv: $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Sei $x \sim y$, also $x \cdot y^{-1} \in U$ und $y \sim z$, also $y \cdot z^{-1} \in U$ (zzg.: $x \sim z$, d.h. $x \cdot z^{-1} \in U$)

$$x \cdot z^{-1} = x e z^{-1} = x (y^{-1} y) z^{-1} = \underbrace{(x \cdot y^{-1})}_{\in U} \cdot \underbrace{(y \cdot z^{-1})}_{\in U} \in U, \text{ also } x \sim z. \quad \square$$

- (ii) Für $x \in G$ ist $Ux = \{u \cdot x \mid u \in U\}$ die Äquivalenzklasse von x bzgl. \sim und heißt *Rechtsnebenklasse* von U in G .

Also (Eigenschaften von Äquivalenzklassen siehe Mathe I):

(a) $Ux = Uy \Leftrightarrow x \sim y$, also $x \cdot y^{-1} \in U$

(b) $x, y \in G$, dann ist entweder $Ux = Uy$ oder $Ux \cap Uy = \emptyset$

Beweis

$$(a) \text{ Seit } x \sim y \Rightarrow y \sim x \Rightarrow y \cdot x^{-1} \in U \Rightarrow y = y(x^{-1} \cdot x) = \underbrace{(y \cdot x^{-1})}_{\in U} x \in Ux$$

$$(b) \text{ Sei } y \in Ux, \text{ dann zeige: } x \sim y$$

$$y \in Ux \Rightarrow y = u \cdot x \text{ für ein } u \in U$$

$$\Rightarrow x \cdot y^{-1} = x \cdot (ux)^{-1} = x \cdot x^{-1} \cdot u^{-1} = u^{-1} \in U$$

Es wurde gezeigt, dass $x \sim y$ gilt.

□

1.24 Beispiel

$$G = (\mathbb{Z}, +), 3\mathbb{Z} = \{\dots, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

$$U = (3\mathbb{Z}, +) \leq G \text{ (ÜA, Blatt 2)}$$

Inverses zu y in $(\mathbb{Z}, +)$ ist $-y$.

$$x \sim y \Leftrightarrow x \cdot y^{-1} \in U$$

bzw.: $x - y \in U$

$$x = 0 : U + 0 = \{u + 0 \mid u \in U\} = \{\dots, -3, 0, 3, 6, \dots\} = U = 3\mathbb{Z}$$

$$x = 1 : U + 1 = \{u + 1 \mid u \in U\} = \{\dots, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\} = 3\mathbb{Z} + 1$$

$$x = 2 : U + 2 = \{u + 2 \mid u \in U\} = \{\dots, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\} = 3\mathbb{Z} + 2$$

$$x = 3 : U + 3 = U + 0 = 0$$

...

1.25 Lemma

G Gruppe, U endliche Untergruppe von G , $x \in G$

Dann ist $|U| = |Ux|$

Beweis

$$\text{Abb } \varphi : U \rightarrow Ux$$

$$u \mapsto ux$$

ist surjektiv und injektiv (falls $u_1x = u_2x$, dann ist $u_1 = u_2$ (Satz 1.19 (iii), Kürzungsregel))

Also ist φ bijektiv, also U, Ux gleich mächtig.

1.26 Theorem (Satz von Lagrange)

G endliche Gruppe, $U \leq G$

Dann gilt $|U|$ ist Teiler von $|G|$ und $q = \frac{|G|}{|U|}$ ist die Anzahl der Rechtsnebenklassen von U in G

Beweis

Seien Ux_1, \dots, Ux_q die q verschiedenen Rechtsnebenklassen von U in G

$$\text{Mathe I \& ??} \Rightarrow G = \bigcup_{i=1}^q Ux_i \text{ (disjunkte Vereinigung der Äquivalenzklassen)}$$

$$\Rightarrow |G| = \sum_{i=1}^q \underbrace{|Ux_i|}_{|U|} \stackrel{1.25}{=} q \cdot |U|$$

1.27 Definition

(G, \bullet, e) Gruppe, $a \in G$

$$\begin{aligned} \text{Definiere } a^0 &:= e \\ a^1 &:= a \\ a^m &:= a^{m-1} \cdot a \quad \text{für } m \in \mathbb{N} \\ a^m &:= (a^{-1})^{-1} \quad \text{für } m \in \mathbb{Z}^- \end{aligned}$$

(Potenzen von a)

$$\begin{aligned} \text{Bei additiver Schreibweise: } 0 \cdot a &= e \\ 1 \cdot a &= a \\ m \cdot a &= \begin{cases} (m-1) \cdot a + a & \text{für } m \in \mathbb{N} \\ (-m) \cdot (-a) & \text{für } m \in \mathbb{Z}^- \end{cases} \end{aligned}$$

1.28 Satz

G, a wie oben

- (i) $(a^{-1})^m = (a^m)^{-1} = a^{-m} \quad \forall m \in \mathbb{Z}$
- (ii) $a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$
- (iii) $(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$

Beweis

$$(i) \ m \in \mathbb{N} : (a^{-1})^m \cdot a^m = \underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot \dots \cdot a^{-1}}_{m \text{ mal}} \cdot \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ mal}} = e$$

$$\Rightarrow (a^{-1})^m = (a^m)^{-1} \text{ (Inverses von } a^m \text{)}$$

$$\text{nach Definition ist } a^{-m} = (a^{-1})^m$$

$$\Rightarrow (i) \text{ gilt } \forall m \in \mathbb{N}$$

$$m = 0 : e = e = e \checkmark$$

$$m \in \mathbb{Z}^- : \text{dann ist } -m \in \mathbb{N}$$

Wende den bewiesenen Teil an auf a^{-1} statt a und $-m$ statt m , Behauptung folgt.

(ii), (iii) per Induktion und mit (i)

□

1.29 Satz und Definition

G endliche Gruppe, $g \in G$

- (i) Es existiert eine kleinste natürliche Zahl n mit $g^n = e$, diese heißt die *Ordnung* $o(g)$ von g
- (ii) Die Menge $\{g^0 = e, g^1 = g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$ ist eine Untergruppe von G , die von g erzeugte zyklische Gruppe $\langle g \rangle$
Es gilt $o(g) = |\langle g \rangle| = n$ teilt $|G|$
- (iii) $g^{|G|} = e$

Bemerkung: Eine endliche Gruppe heißt *zyklisch*, falls sie von einem Element erzeugt werden kann.

Beweis

- (i) G endlich $\Rightarrow \exists i, j \in \mathbb{N}, i > j$ mit $g^i = g^j$
Dann ist $g^{i-j} \stackrel{1.28ii)}{=} g^i \cdot g^{-j} \stackrel{1.28}{=} \underbrace{g^i}_{=g^j} \cdot (g^j)^{-1} = e$
- (ii) Das Produkt zweier Elemente aus $\langle g \rangle$ liegt wieder in $\langle g \rangle$
Neutrales Element ist $g^0 = e$
Inverses Element zu g^i ist $(g^i)^{-1} = g^{n-i}$
 $\Rightarrow \langle g \rangle \leq G$
- (iii) Satz von Lagrange (1.26): $n = o(g) = |\langle g \rangle| \mid |G|$
Also ist $|G| = n \cdot k$ für ein $k \in \mathbb{N}$
 $g^{|G|} = g^{n \cdot k} = (g^n)^k = e^k = e$

□

1.30 Beispiel

$(\mathbb{Z}_3 \setminus \{0\}, \odot, 1)$

$$g = 1: \langle 1 \rangle = \{g^0 = 1^0 = 1\}, o(1) = 1$$

$$g = 2: \langle 2 \rangle = \{g^0 = 1, g^1 = 2\}, o(2) = 2$$

$(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \odot, 1)$

$$g = 2: \langle 2 \rangle = \{2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 3\}, o(2) = 4$$

1.31 Korollar

(i) Satz von Euler

Sei $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}, \text{ggT}(a, n) = 1$

Dann ist

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

(ii) Kleiner Satz von Fermat

Ist p eine Primzahl, $a \in \mathbb{Z}, p \nmid a$, dann gilt

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

1.32 Beweis

- a) Wir können annehmen, dass $1 \leq a < n$ (denn $a^{\varphi(n)} \pmod{n} = (a \pmod{n})^{\varphi(n)}$)
wegen $\text{ggT}(a, n) = 1$ ist $a \in \mathbb{Z}_n^*$, das ist eine endliche Gruppe.

$$\begin{aligned} \stackrel{?(iii)}{\Rightarrow} a^{|\mathbb{Z}_n^*|} &= 1 (= e) & a \odot a \odot \dots \\ \Rightarrow a^{\varphi(n)} &\equiv 1 \pmod{n} & a \cdot a \cdot \dots \end{aligned}$$

- b) Folgt aus (i) ($n = p, \varphi(p) = -1$)

2 Algebraische Strukturen mit 2 Verknüpfungen: Ringe und Körper

2.1 Definition

Sei $R \neq \emptyset$ eine Menge mit zwei Verknüpfungen $+$ und \bullet .

- (i) Wir nennen $(R, +, \cdot)$ einen *Ring*, falls gilt:

- (a) $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe (Eselsbrücke: KAIN)

Das neutrale Element bezeichnen wir hier mit 0, das zu $a \in R$ Inverse mit $-a$
(schreibe auch $a - b$ für $a + (-b)$).

- (b) (R, \cdot) ist eine Halbgruppe.

- (c) Es gelten die Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c) = ab + ac \\ (a + b) \cdot c &= (a \cdot c) + (b \cdot c) = ac + bc \quad \forall a, b, c \in R \end{aligned}$$

- (ii) Ein Ring $(R, +, \cdot)$ heißt *kommutativ* falls \cdot ebenfalls kommutativ ist, also falls $\forall a, b \in R : a \cdot b = b \cdot a$

- (iii) Ein Ring $(R, +, \cdot)$ heißt *Ring mit Eins*, falls (R, \cdot) ein Monoid ist mit neutralen Element $1 \neq 0$ ($\forall a \in R : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$).

- (iv) Ist $(R, +, \cdot)$ Ring mit Eins, dann heißen die bezüglich \cdot invertierbaren Elemente *Einheiten*. Das zu a bezügliche \cdot invertierbare Element bezeichnen wir mit a^{-1} .
 $R^* :=$ Menge der Einheiten in R .

2.2 Beispiel

- a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kommutativer Ring mit Eins (1)
 $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ebenso
 $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- b) $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring ohne Eins
- c) trivialer Ring $(\{0\}, +, \cdot)$ ohne Eins
- d) $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, (\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$ kommutativer Ring mit Eins
- e) $(\mathbb{R}^n, \underbrace{+, \cdot}_{\text{Komponentenweise}})$; allgemein: R_1, \dots, R_n Ringe, dann $R_1 \times \dots \times R_n$ Ring.
- f) $M_n(\mathbb{R})$ - Menge aller $n \times n$ -Matrizen über \mathbb{R} , mit Matrixaddition und -multiplikation ist Ring mit Eins ($=E_n$), nicht kommutativ für $n \geq 2$.

2.3 Satz (Rechnen mit Ringen)

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring, $a, b, c \in R$. Dann gilt:

- (i) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
- (ii) $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$
- (iii) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

Beweis

- (i) $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) \stackrel{2.1(3)}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0$
 addiere $-(a \cdot 0)$ (Inverses von $a \cdot 0$) auf beiden Seiten, erhalte $0 = a \cdot 0$
 Analog $0 \cdot a = 0$
- (ii) $(-a) \cdot b + a \cdot b \stackrel{2.1(3)}{=} (-a + a) \cdot b = 0 \cdot b \stackrel{(i)}{=} 0$
 also ist $(-a \cdot b)$ Inverses zu $a \cdot b$, also $= -(a \cdot b)$.
 Analog $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$
- (iii) $(-a) \cdot (-b) \stackrel{(ii)}{=} -(a \cdot (-b)) \stackrel{(ii)}{=} -(-(a \cdot b)) = a \cdot b$

□

2.4 Bemerkung

- a) In jedem Ring mit Eins sind 1 und -1 Einheiten (denn $(-1) \cdot (-1) = 1$, siehe 2.3(iii))
 Es kann mehr geben (z.B. in \mathbb{Z}_5 usw.). Es kann auch $-1 = 1$ gelten (z.B. in $(\mathbb{Z}_2, \oplus, \odot)$)
- b) 0 kann nach 2.3(i) nie Einheit sein (da $1 \neq 0$)

c) In einem kommutativen Ring R gilt der *Binomialsatz*,

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \quad (n \in \mathbb{N}, a, b \in R)$$

...

2.5 Definition

Ein kommutativer Ring $(K, +, \cdot)$ heißt *Körper*, wenn jedes Element $0 \neq x \in K$ eine Einheit ist, also wenn

$$K^* = K \setminus \{0\}$$

2.6 Beispiele

a) $(\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot)$ sind Körper. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper.

b) vgl. Beispiel 1.18 b)

$$\mathbb{Z}_n^* = \{z \in \mathbb{Z}_n \mid \text{ggT}(z, n) = 1\}$$

ist Gruppe bezüglich \odot

$\Rightarrow (\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$ ist genau dann ein Körper, wenn n eine Primzahl ist.

2.7 Satz (Rechnen im Körper, Nullteilerfreiheit)

Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $a, b \in K$

Dann gilt

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ oder } b = 0$$

Gegenbeispiel: $(\mathbb{Z}_6, \oplus, \odot)$ ist kein Körper. Hier gilt $2 \odot 3 = 0$, aber weder $2 = 0$, noch $3 = 0$

Beweis

” \Leftarrow ”: klar: $0 \cdot b = 0$ oder $a \cdot 0 = 0$ (Satz 2.3 (i), Rechenregeln für Ringe)

” \Rightarrow ”: Sei $a \cdot b = 0$. Angenommen $a \neq 0$ (d.h. a hat Inverses)

$$\begin{aligned} \text{Dann ist } b &= 1 \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot b \\ &= a^{-1} \cdot (a \cdot b) \\ &= a^{-1} \cdot 0 \\ &\stackrel{2.3(i)}{=} 0 \end{aligned}$$

□

2.8 Definition

Seien $(R, +, \cdot)$ und $(\tilde{R}, \boxplus, \boxdot)$ Ringe.

(i) $\varphi : R \rightarrow \tilde{R}$ heißt (Ring-)Homomorphismus, falls gilt:

$$\underbrace{\varphi(x+y)}_{\in R} = \underbrace{\varphi(x)}_{\in \tilde{R}} \boxplus \underbrace{\varphi(y)}_{\in \tilde{R}} \quad \text{und} \quad \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \boxdot \varphi(y) \quad \forall x, y \in R$$

2.9 Beispiel

$$\varphi(\mathbb{Z}, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$$

$x \mapsto x \bmod n$ ist Ringhomomorphismus (kein Isomorphismus), da φ nicht injektiv ist, z.B. $n = 5 : \varphi(1) = \varphi(6) = \varphi(11) \dots$

2.10 Satz (Chinesischer Restsatz)

Seien $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ paarweise teilerfremd, $M := m_1 \cdot \dots \cdot m_n$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$

Dann existiert ein x , $0 \leq x < M$ mit

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{m_2} \\ &\dots \\ x &\equiv a_n \pmod{m_n} \end{aligned}$$

Beweis

Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ sind die Zahlen m_i und $M_i := \frac{M}{m_i}$ teilerfremd.

\Rightarrow EEA liefert s_i und $t_i \in \mathbb{Z}$ mit $t_i \cdot m_i + s_i \cdot M_i = 1$

Setze $e_i := s_i \cdot M_i$, dann gilt:

$$\begin{aligned} e_i &\equiv 1 \pmod{m_i} \\ e_i &\equiv 0 \pmod{m_j} \quad (j \neq i) \end{aligned}$$

Die Zahl $x := \sum_{i=1}^n a_i e_i \pmod{M}$ ist dann die Lösung der simultanen Kongruenz. \square

2.11 Beispiel

$$\text{a) Finde } 0 \leq x < 60 \text{ mit } x \equiv \begin{cases} 2 \pmod{3} \\ 3 \pmod{4} \\ 2 \pmod{5} \end{cases}$$

$$M = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$$

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{60}{3} = 20 & 7 \cdot 3 + (-1) \cdot 20 &= 1 & \Rightarrow e_1 &= -20 \\ M_2 &= \frac{60}{4} = 15 & 4 \cdot 4 + (-1) \cdot 15 &= 1 & \Rightarrow e_2 &= -15 \\ M_3 &= \frac{60}{5} = 12 & 5 \cdot 5 + (-2) \cdot 12 &= 1 & \Rightarrow e_3 &= -24 \end{aligned}$$

$$x = (2 \cdot (-20) + 3 \cdot (-15) + 2 \cdot (-24)) \bmod 60 = 47$$

b) Was ist $2^{1000} \bmod \underbrace{1155}_{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}$

(a) Berechne $2^{1000} \bmod 3, 5, 7, 11$

$$\begin{aligned} 2^{1000} \bmod 3 &= (-1)^{1000} \bmod 3 = 1 \\ 2^{1000} \bmod 5 &= 4^{500} \bmod 5 = (-1)^{500} \bmod 5 = 1 \\ 2^{1000} \bmod 7 &= 2^{3 \cdot 333 + 1} \bmod 7 = (8^{333} \cdot 2) \bmod 7 = (1 \cdot 2) \bmod 7 = 2 \\ 2^{1000} \bmod 11 &= 2^{5 \cdot 200} \bmod 11 = 32^{200} \bmod 11 = (-1)^{200} \bmod 11 = 1 \end{aligned}$$

$$(b) \text{ Suche } 0 \leq x < 1155 \text{ mit } x \equiv \begin{cases} 1 & (\bmod 3) \\ 1 & (\bmod 5) \\ 2 & (\bmod 7) \\ 1 & (\bmod 11) \end{cases}$$

Der chinesische Restsatz liefert $x = 331$

2.12 Bemerkung

Man kann auch zeigen, dass die Lösung x aus Satz 2.10 eindeutig ist:

$$\begin{aligned} \text{Durch } \psi : \mathbb{Z}_M &\rightarrow \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_n} \\ x &\mapsto (x \bmod m_1, \dots, x \bmod m_n) \end{aligned}$$

wird ein Ringisomorphismus definiert:

ψ ist surjektiv (zu jedem n -Tupel aus $\mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_n}$ gibt es eine Lösung x , siehe Restsatz) und es gilt:

$$\underbrace{|\mathbb{Z}_M|}_M = \underbrace{|\mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_n}|}_{m_1 \cdots m_n = M}$$

also ist ψ bijektiv, also auch injektiv, also ist Lösung x eindeutig.

2.13 Korollar

$M = m_1 \cdot \dots \cdot m_n$, m_i paarweise teilerfremd.

Dann ist $\varphi(M) = \varphi(m_1) \cdot \dots \cdot \varphi(m_n)$, insbesondere:

$$n = p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k} \quad (p_i \text{ Primzahlen, } a_1 > 0, p_i \neq p_j \text{ für } i \neq j)$$

Beweis

Nach 2.12 ist $\mathbb{Z}_M \cong \mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_n}$ mittels ψ

$$\Rightarrow x \text{ Einheit} \Leftrightarrow \psi(x) = (x \bmod m_1, \dots, x \bmod m_n) \text{ Einheit}$$

$$\Leftrightarrow x \bmod m_i \text{ Einheit } \forall i = 1 \dots n$$

$$\Rightarrow \varphi(M) = \varphi(m_1) \cdot \dots \cdot \varphi(m_n)$$

$$\varphi(p^a) \underbrace{=}_{\text{Überlegen}} p^a - p^{a-1} = p^{a-1}(p-1)$$

Überlegen

2.14 Definition

Sei K Körper mit Nullelement 0 und Einselement 1:

- (i) Ein *Polynom über K* ist Ausdruck $f = a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n$, $n \in \mathbb{N}_0, a_i \in K$.
 a_i heißen *Koeffizienten* des Polynoms.
 - (a) Ist $a_i = 0$, so kann man $0 \cdot x^i$ bei der Beschreibung weglassen.
 - (b) Statt a_0x^0 schreibt auch a_0
 - (c) Sind alle $a_i = 0$, so schreibt man $f = 0$, das Nullpolynom.
 - (d) Ist $a_i = 1$, so schreibt man x^i statt $1 \cdot x^i$
 - (e) Die Reihenfolge der a_ix^i kann verändert werden, ohne dass das Polynom sich verändert ($x^4 + 2x^3 + 3 = 2x^3 + 3 + x^4$)
- (ii) Zwei Polynome f und g sind *gleich*, wenn ($f = 0$ und $g = 0$) oder ($f = a_0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n$,
 $g = b_0 + b_1x^1 + \cdots + b_mx^m, a_n \neq 0, b_m \neq 0$ und $n = m, a_i = b_i$ für $i = 0, \dots, n$) gilt.
- (iii) Die Menge aller Polynome über K bezeichnet man als $K[x]$

2.15 Beispiel

- a) $\underbrace{f}_{f(x)} = 3x^2 + \frac{1}{2}x - 1 \in \mathbb{Q}[x] \wedge f \in \mathbb{R}[x]$
- b) $g = x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$

Wir wollen in $K[x]$ wie in einem Ring rechnen können. Wir brauchen dazu $+$ und \cdot für Polynome.

2.16 Satz und Definition

K Körper, dann wird $K[x]$ zu einem kommutativen Ring mit Eins durch folgende Verknüpfungen:

$$f = \underbrace{\sum_{i=0}^n a_i x^i}_{\text{z.B. } x+2}, \quad g = \underbrace{\sum_{j=0}^m b_j x^j}_{x^3+2x+1}$$

dann

$$f + g = \underbrace{\sum_{i=0}^{\max(m,n)} (a_i + b_i) x^i}_{x^3+3x+3}$$

$$f \cdot g = \sum_{i=0}^{n+m} c_i x^i$$

$$\text{mit } c_i = a_0b_i + a_1b_{i-1} + \cdots + a_ib_0 = \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} \quad (\text{Faltungsprodukt})$$

(setze a_i mit $i > n$ bzw. b_j mit $j > m$ gleich 0)

- Einselement: $f = 1$ ($a_0 = 1, a_j = 0$ für $j \geq 1$)
- Nullelement: $f = 0$

$K[x]$ heißt der *Polynomring* in einer Variablen über K .

Beweis: Ringeigenschaften nachrechnen.

2.17 Bemerkung

Die $+$ -Zeichen in der Beschreibung der Polynome entsprechen der Ring-Addition der *Monome* $a_0, ax, a_2x^2, \dots, a_nx^n$

2.18 Beispiel

a) in $\mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x]$ Addition, Multiplikation klar

b) in $\mathbb{Z}_3[x]$: $f = 2x^3 + 2x + 1, g = 2x^3 + x$

$$\begin{aligned} f + g &= x^3 + 1 \\ f \cdot g &= (2x^3 + 2x + 1)(2x^3 + x) \\ &= x^6 + 2x^4 + x^4 + 2x^2 + 2x^3 + x \\ &= x^6 + 2x^3 + 2x^2 + x \end{aligned}$$

c) in $\mathbb{Z}_2[x]$: $f = x^2 + 1, g = x + 1$

$$\begin{aligned} f + g &= x^2 + x \\ f + f &= 0 \\ g \cdot g &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

2.19 Definition

Sei $0 \neq f \in K[x]$

$f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ mit $a_n \neq 0$

Dann heißt n der *Grad* von f $\text{Grad}(f)$

$\text{Grad}(0) := -\infty$

$\text{Grad}(f) = 0$ *konstante Polynome* $\neq 0$