

## Mathematik III - Wintersemester 14/15

18. November 2014

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Algebraische Strukturen mit einer Verknüpfung</b>	<b>3</b>
1.1	Definition: Verknüpfung . . . . .	3
1.2	Beispiel . . . . .	3
1.3	Definition: Halbgruppe . . . . .	3
1.4	Bemerkung . . . . .	3
1.5	Beispiel . . . . .	4
1.6	Definition: kommutative Halbgruppe . . . . .	4
1.7	Beispiel . . . . .	4
1.8	Definition: Unterhalbgruppe . . . . .	5
1.9	Beispiel . . . . .	5
1.10	Lemma: Eins eindeutig . . . . .	5
1.11	Definition: Monoid . . . . .	5
1.12	Beispiele . . . . .	5
1.13	Definition: Untermonoid . . . . .	6
1.14	Lemma: Inverses eindeutig . . . . .	6
1.15	Definition: Gruppe, Inverse, Ordnung . . . . .	6
1.16	Bemerkung . . . . .	6
1.17	Beispiele . . . . .	6
1.18	Beispiele . . . . .	7
1.19	Satz: Gleichungen lösen in Gruppen . . . . .	8
1.20	Beispiel . . . . .	8
1.21	Definition: Untergruppe . . . . .	8
1.22	Beispiele . . . . .	9
1.23	Satz und Definition: Rechtsnebenklassen . . . . .	9
1.24	Beispiel . . . . .	10
1.25	Lemma: Mächtigkeit von Untergruppen . . . . .	10
1.26	Theorem: Satz von Lagrange . . . . .	10
1.27	Definition: Potenzen . . . . .	11
1.28	Satz: Potenzgesetze . . . . .	11
1.29	Satz und Definition: Ordnung, zyklische Gruppe . . . . .	12
1.30	Beispiel . . . . .	12
1.31	Korollar . . . . .	13
1.32	Beweis . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Algebraische Strukturen mit 2 Verknüpfungen: Ringe und Körper</b>	<b>13</b>
2.1	Definition: Ring . . . . .	13
2.2	Beispiel . . . . .	14
2.3	Satz: Rechnen mit Ringen . . . . .	14
2.4	Bemerkung . . . . .	14
2.5	Definition: Körper . . . . .	15
2.6	Beispiele . . . . .	15
2.7	Satz: Rechnen im Körper, Nullteilerfreiheit . . . . .	15
2.8	Definition: Homomorphismus, Isomorphismus . . . . .	16
2.9	Beispiel . . . . .	16
2.10	Satz: Chinesischer Restsatz . . . . .	16
2.11	Beispiel . . . . .	16

2.12	Bemerkung . . . . .	17
2.13	Korollar: Phi-Funktion berechnen . . . . .	17
2.14	Definition: Polynom . . . . .	18
2.15	Beispiel . . . . .	18
2.16	Satz und Definition: Polynomring . . . . .	18
2.17	Bemerkung . . . . .	19
2.18	Beispiel . . . . .	19
2.19	Definition: Grad eines Polynoms . . . . .	19
2.20	TBD . . . . .	20
2.21	TBD . . . . .	20
2.22	TBD . . . . .	20
2.23	TBD . . . . .	20
2.24	TBD . . . . .	20
2.25	TBD . . . . .	20
2.26	TBD . . . . .	20
2.27	TBD . . . . .	20
2.28	TBD . . . . .	20
2.29	TBD . . . . .	20
2.30	Satz . . . . .	20
2.31	Satz . . . . .	20
2.32	Beispiel . . . . .	20
2.33	Definition . . . . .	20
2.34	Beispiel . . . . .	21
2.35	Abschlussbemerkung . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Der Körper der <math>\mathbb{C}</math> der Komplexen Zahlen</b>	<b>21</b>
3.1	Definition . . . . .	21
3.2	Beispiel . . . . .	22
3.3	Bemerkung: komplexe Zahlenebene . . . . .	22
3.4	Satz: Eigenschaften . . . . .	22
3.5	Bemerkung . . . . .	23

# 1 Algebraische Strukturen mit einer Verknüpfung

## HALBGRUPPEN, MONOIDE, GRUPPEN

### 1.1 Definition

Sei  $X \neq \emptyset$  eine Menge.

Eine *Verknüpfung* oder (abstrakte) Multiplikation auf  $X$  ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \bullet : X \times X &\rightarrow X \\ (a, b) &\mapsto a \bullet b \end{aligned}$$

$a \bullet b$  heißt *Produkt* von  $a$  und  $b$ , muss aber mit der üblichen Multiplikation von Zahlen nichts zu tun haben.

Beschreibung bei endlichen Mengen oft durch Multiplikationstabellen.

### 1.2 Beispiel

$$\text{a) } X = \{a, b\} \quad \begin{array}{c|cc} \bullet & a & b \\ \hline a & b & b \\ b & a & a \end{array}$$

$$(a \bullet a) \bullet a = b \bullet a = a$$

$$a \bullet (a \bullet a) = a \bullet b = b \quad \rightarrow \text{nicht assoziativ}$$

$$\text{b) } X = \mathbb{Z}^- (= \{0, -1, -2, \dots\})$$

Die normale Multiplikation ist auf  $\mathbb{Z}^-$  keine Verknüpfung!

(zum Beispiel ist  $(-2) \cdot (-3) = 6 \notin \mathbb{Z}^-$ )

Aber auf  $X = \mathbb{N}$ ,  $X = \mathbb{Z}$  oder  $X = \{1\}$ ,  $X = \{0, 1\}$

### 1.3 Definition

Sei  $H \neq \emptyset$  eine Menge mit Verknüpfung.

$(H, \bullet)$  heißt *Halbgruppe*, falls gilt:

$$\forall a, b, c \in H : (a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c) \quad (\text{Assoziativgesetz (AG)})$$

### 1.4 Bemerkung

AG sagt aus: bei endlichen Produkten ist die Klammerung irrelevant, z.B.

$$(a \cdot b) \cdot (c \cdot d) = ((a \cdot b) \cdot c) \cdot d = (a \cdot (b \cdot c)) \cdot d \quad (\text{usw.})$$

Deshalb werden Klammern meistens weggelassen.

Die Reihenfolge der Elemente ist i.A. relevant!

## 1.5 Beispiel

- a)  $(\mathbb{N}, \bullet), (\mathbb{Z}, \bullet), (\mathbb{Q}, \bullet), (\mathbb{R}, \bullet)$  <sup>1</sup> sind Halbgruppen.

Ebenso  $(\mathbb{N}, +), (\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +)$  <sup>2</sup>

- b)  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, :)$  <sup>3</sup> ist *keine* Halbgruppe, denn z.B.  $(12 : 6) : 2 = 1$   
 $12 : (6 : 2) = 4$

- c) vgl. Vorlesung Theoretische Informatik

$A \neq \emptyset$  endliche Menge ("Alphabet")

$A^+ = \cup_{n \in \mathbb{N}} A^n =$  Menge aller endlichen Wörter über  $A$

(z.B.  $A = \{a, b\}$ , dann ist z.B.  $\underbrace{(a, a, b)}_{aab} \in A^3$ )

Verknüpfung: Konkatenation (Hintereinanderschreiben)

z.B.  $aab \bullet abab = aababab$

$A^* = A^+ \cup \{\lambda\}$   $\lambda$  (oder  $\epsilon$ ) ist das leere Wort

Es gilt:  $\lambda \cdot w = w \cdot \lambda = w \quad \forall w \in A^*$

$(A^+, \bullet), (A^*, \bullet)$  *Worthalbgruppe* über  $A$

- d)  $M \neq \emptyset$  Menge,  $\text{Abb}(M, M)$ : Menge aller Abbildungen  $M \rightarrow M$  mit  $\circ$  (Komposition) ist Halbgruppe.

- e) (WICHTIG)

$n \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$

Verknüpfung:  $\oplus : a \oplus b := (a + b) \bmod n$   
 $\odot : a \odot b := (a \cdot b) \bmod n$

$(\mathbb{Z}_n, \oplus), (\mathbb{Z}_n, \odot)$  sind Halbgruppen.

## 1.6 Definition

Eine Halbgruppe  $(H, \bullet)$  heißt *kommutativ*, falls gilt:

$$\forall a, b \in H : a \cdot b = b \cdot a \quad (\text{Kommutativgesetz, KG})$$

## 1.7 Beispiel

Beispiele 1.5 a), e) sind kommutative Halbgruppe.

(hallo  $\neq$  ollah, ab  $\neq$  ba, Worthalbgruppe nicht kommutativ)

---

<sup>1</sup>  $\bullet$  normale Multiplikation

<sup>2</sup> + normale Addition

<sup>3</sup>: normale Division

## 1.8 Definition

Sei  $(H, \bullet)$  Halbgruppe,  $\emptyset \neq U \subseteq H$

$U$  heißt *Unterhalbgruppe* von  $H$ , falls  $u \cdot v \in U \ \forall u, v \in U$  gilt.

$(U, \odot)$  ist dann selbst Halbgruppe.

## 1.9 Beispiel

$(\mathbb{Z}, +)$  Halbgruppe

$G$  = Menge aller gerade ganzen Zahlen  $\subseteq \mathbb{Z}$

$(G, +)$  ist Unterhalbgruppe von  $(\mathbb{Z}, +)$

$U$  = Menge aller ungerade Zahlen  $\subseteq \mathbb{Z}$

$(U, +)$  ist keine Unterhalbgruppe!

## 1.10 Lemma

Sei  $(H, \bullet)$  Halbgruppe,  $e_1, e_2 \in H$  mit  $(*) e_1 \cdot x = x \cdot e_1 = x$  und  $(**) e_2 \cdot x = x \cdot e_2 = x \ \forall x \in H$

Dann ist  $e_1 = e_2$

*Beweis.*  $e_1 \stackrel{(**)}{=} e_1 \cdot e_2 \stackrel{(*)}{=} e_2$

□

## 1.11 Definition

Eine Halbgruppe  $(H, \bullet)$  heißt *Monoid*, falls  $e \in H$  existiert mit  $e \cdot x = x \cdot e = x \ \forall x \in H$

$e$  heißt *neutrales Element* / Einselement / Eins in  $H$ .

Schreibweise:  $(H, \bullet, e)$

Für additive Verknüpfung oft 0 für  $e$  (Nullelement)  
multiplikative 1

Nach 1.10 ist das neutrale Element eindeutig!

## 1.12 Beispiele

- a)  $(\mathbb{N}, \bullet)$  Monoid mit  $e = 1$   
 $(\mathbb{N}, +)$  kein Monoid  
 $(\mathbb{N}_0, +)$  Monoid mit  $e = 0$   
 $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +)$  Monoide mit  $e = 0$   
 $(\mathbb{Z}, \bullet), (\mathbb{N}_0, \bullet), (\mathbb{Q}, \bullet), (\mathbb{R}, \bullet)$  Monoide mit  $e = 1$
- b)  $(\text{Abb}(M, M), \circ)$  Monoid,  $e = \text{id}$
- c)  $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$  Monoid,  $e = 0$   
 $(\mathbb{Z}_n, \odot)$  Monoid,  $e = 1$
- d)  $(A^*, \bullet)$  Monoid,  $e = \lambda$  (hallo $\lambda = \lambda$ hallo = hallo)

### 1.13 Definition

Sei  $(M, \bullet, e)$  Monoid. Eine Teilmenge  $\emptyset \neq U \subseteq M$  heißt *Untermonoid* von  $M$ , falls  $U$  mit  $\bullet$  selbst ein Monoid mit neutralem Element  $e$  ist (also  $e \in U$ )

### 1.14 Lemma

Sei  $(H, \bullet, e)$  Monoid und es gebe zu jedem Element  $h \in H$  Elemente  $x, y \in H$  mit  $h \cdot x \stackrel{(*)}{=} e \stackrel{(**)}{=} y \cdot h$ .

Dann ist  $x = y$

*Beweis.*  $y = y \cdot e \stackrel{(*)}{=} y \cdot (h \cdot x) \stackrel{(AG)}{=} (y \cdot h) \cdot x \stackrel{(**)}{=} e \cdot x = x$

□

### 1.15 Definition

(i)  $(H, \bullet, e)$  Monoid,  $h \in H$

Falls ein  $x \in H$  existiert mit  $hx = xh = e$ , so nennt man  $h$  *invertierbar* und  $x$  das *Inverse* zu  $h$ , bez.  $h^{-1}$  (bei additiven Verknüpfungen oft auch  $-h$ )

Nach 1.14 ist  $h^{-1}$  eindeutig bestimmt!

Es gilt:  $e$  ist immer invertierbar,  $e^{-1} = e$

(ii) Ein Monoid  $(G, \bullet, e)$  heißt *Gruppe*, falls jedes Element in  $G$  invertierbar ist.

(iii) Für eine endliche Gruppe  $G$  heißt die Anzahl der Elemente in  $G$  die *Ordnung* von  $G$ ,  $|G|$

### 1.16 Bemerkung

$(H, \bullet, e)$  Monoid.

Sei  $G$  die Menge aller invertierbaren Elemente von  $H$ , dann ist  $(G, \bullet, e)$  eine Gruppe.

Es gilt:  $e$  invertierbar ( $e^{-1} = e$ )

und falls  $g$  invertierbar, dann ist auch  $g^{-1}$  invertierbar:  $(g^{-1})^{-1} = g$

falls  $g, h$  invertierbar, dann auch  $g \cdot h$ :  $(g \cdot h)^{-1} = h^{-1} \cdot g^{-1}$

### 1.17 Beispiele

a)  $(\mathbb{N}_0, +, 0)$  ist keine Gruppe aber  $(\mathbb{Z}, +, 0), (\mathbb{Q}, +, 0), (\mathbb{R}, +, 0)$  sind Gruppen.

b)  $(\mathbb{Z}, \bullet, 1)$  ist keine Gruppe.

Die Menge der invertierbaren Elemente ist  $\{1, -1\}$ , diese bilden eine Gruppe.

c)  $(\mathbb{Q}, \bullet, 1)$  ist keine Gruppe, aber  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \bullet, 1), (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \bullet, 1)$  sind Gruppen.

d)  $A^*$  ist keine Gruppe, nur  $\lambda$  ist invertierbar.

## 1.18 Beispiele

a)  $(\mathbb{Z}_n, \oplus, 0)$  ist Gruppe (was ist das Inverse zu  $x \in \mathbb{Z}_n$ ? Siehe PÜ1, A9)

b) Sei  $n \geq 2$ .  $(\mathbb{Z}_n, \odot, 1)$  ist Monoid aber keine Gruppe.

Wann ist ein Element aus  $\mathbb{Z}_n$  invertierbar bezüglich  $\odot$ ?

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{Z}_n \text{ invertierbar} &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Z}_n : z \odot x = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Z} : (z \cdot x) \bmod n = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists x, q \in \mathbb{Z} : z \cdot x = q \cdot n + 1 \\ &\Leftrightarrow z \cdot x + (-q \cdot n) = 1 \\ &\stackrel{\text{Mathe I}}{\Leftrightarrow} \text{ggT}(z, n) = 1 \end{aligned}$$

also sind nur zu  $n$  teilerfremde Elemente invertierbar!

(vgl.  $(\mathbb{Z}_6, \odot, 1)$ : 0, 2, 3, 4 nicht invertierbar, 1, 5 invertierbar)

Bezeichnung:

$$\mathbb{Z}_n^* = \{z \in \mathbb{Z}_n \mid \text{ggT}(z, n) = 1\}$$

ist Gruppe bezüglich  $\odot$  (vgl. Bemerkung ??) mit Ordnung  $|\mathbb{Z}_n^*| = \varphi(n)$  ("phi von  $n$ ", Eulersche  $\varphi$ -Funktion) = Anzahl aller  $z \in \mathbb{N}$ , die teilerfremd zu  $n$  sind und  $1 \leq z \leq n$ .

$$\varphi(3) = 2, \varphi(4) = 2, \varphi(7) = 6$$

Wie berechnet man das Inverse von  $z \in \mathbb{Z}_n^*$ ?

Mathe I, Erweiterter Euklidischer Algorithmus (WHK, S. 80/81) liefert zu  $z$  und  $n$  ( $\text{ggT}(z, n) = 1$ ) Zahlen  $s, t \in \mathbb{Z}$  mit

$$\begin{aligned} z \cdot s + n \cdot t &= 1 \\ \Rightarrow (z \cdot s) \bmod n &= 1 \\ \Rightarrow (z^{-1}) &= s \bmod n \end{aligned}$$

Beispiel:

$n = 8$ :  $(\mathbb{Z}_8, \odot)$ ,  $z = 5$  ist invertierbar,  $\text{ggT}(8, 5) = 1$

$$\text{EEA: } 5 \cdot (-3) + 8 \cdot 2 = 1 \Rightarrow z^{-1} = -3 \bmod 8 \Rightarrow z^{-1} = 5$$

c)  $\text{Abb}(M, M)$ : invertierbare Elemente sind genau die *bijektiven* Abbildungen auf  $M$ ,  $\text{Bij}(M)$  (Mathe I)

Speziell:  $M = \{1, 2, \dots, n\}$ , dann heißt  $\text{Bij}(M)$  die symmetrische Gruppe von Grad  $n$ ,  $S_n$

$|S_n| = n!$ , Elemente heißen Permutationen.

Bsp:  $n = 2$

$$S_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{id}}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$n = 3$

$$S_3 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{id}}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$



$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \varrho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$$

$$\pi \circ \varrho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \varrho \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ (nicht kommutativ!)}$$

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \pi, \varrho^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

### 1.19 Satz (Gleichungen lösen in Gruppen)

Sei  $G$  Gruppe,  $a, b \in G$

- (i) Es gibt genau ein  $x \in G$  mit  $ax = b$  (nämlich  $x = a^{-1}b$ )
- (ii) Es gibt genau ein  $y \in G$  mit  $ya = b$  (nämlich  $y = ba^{-1}$ )
- (iii) Ist  $ax = bx$  für ein  $x \in G$ , dann gilt  $a = b$  (Kürzungsregel)

*Beweis.* (i) •  $x = a^{-1}$  ist Lösung (prüfe  $ax = b$ ):

$$a \cdot \underbrace{a^{-1}b}_x \stackrel{\text{AG}}{=} (a \cdot a^{-1}) \cdot b = e \cdot b = b$$

- Es gibt genau eine Lösung:

$$\text{Es gelte } ax = b$$

$$\Rightarrow x = ex = (a^{-1}a)x \stackrel{\text{AG}}{=} a^{-1}(ax) = a^{-1}b = b$$

(ii) analog

(iii) Multipliziere von rechts mit  $x^{-1}$   
links  $y^{-1}$

□

### 1.20 Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \text{Was ist } x?$$

$$a \cdot x = b \Leftrightarrow x = a^{-1} \cdot b$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

### 1.21 Definition

$(G, \cdot)$  Gruppe,  $\emptyset \neq U \subseteq G$  Teilmenge.

$U$  heißt *Untergruppe* von  $G$  ( $U \leq G$ ), falls  $U$  bzgl.  $\cdot$  selbst eine Gruppe ist.

Insbesondere gilt dann:  $\forall u, v \in U$  ist  $u \cdot v \in U$ .

$e$  von  $G$  ist auch neutrales Element in  $U$ . (\*)

Inversen in  $U$  sind die gleichen wie in  $G$ .

(\*) Angenommen  $e$  ist neutrales Element in  $G$ , aber  $f$  neutrales Element in  $U$ ,  $f^{-1}$  Inverses von  $f$  in  $G$ .

Dann ist  $f^{-1} \cdot f = f \cdot f^{-1} = e$  und  $f \cdot f = f$ .

$$\Rightarrow f = e \cdot f = (f^{-1} \cdot f) \cdot f = f^{-1} \cdot (f \cdot f) = f^{-1} \cdot f = e$$

## 1.22 Beispiele

a)  $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +)$

b)  $(\{-1, 1\}, \cdot) \leq (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) \leq (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

c)  $(e, \cdot)$  ist Untergruppe jeder beliebigen Gruppe mit Verknüpfung  $\cdot$  und neutralem Element  $e$ .

d)  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_3$ ,  $\pi^{-1} = \pi$ ,  $\pi^{-1} \circ \pi = \text{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$   
 $\Rightarrow (\pi, \text{id}) \leq S_3$

## 1.23 Satz und Definition

$G$  Gruppe,  $U \leq G$

- (i) Durch  $x \sim y \Leftrightarrow x \cdot y^{-1} \in U$   
 $x + (-y) \in U$  (bei additiver Verknüpfung)  
 wird auf  $G$  eine Äquivalenzrelation definiert

### Beweis

$\sim$  ist reflexiv:  $x \sim x$  gilt  $\forall x \in G$ , denn  $x \cdot x^{-1} = e \in U$  ✓

$\sim$  ist symmetrisch:  $x \sim y \Rightarrow y \sim x$

Sei  $x \sim y$ , also  $x \cdot y^{-1} \in U$  (zzg.:  $y \sim x$ , also  $y \cdot x^{-1} \in U$ )

dann ist  $y \cdot x^{-1} = (x \cdot y^{-1})^{-1} \in U$ , da auch  $x \cdot y^{-1} \in U$ .

$\sim$  ist transitiv:  $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Sei  $x \sim y$ , also  $x \cdot y^{-1} \in U$  und  $y \sim z$ , also  $y \cdot z^{-1} \in U$  (zzg.:  $x \sim z$ , d.h.  $x \cdot z^{-1} \in U$ )

$$x \cdot z^{-1} = x e z^{-1} = x (y^{-1} y) z^{-1} = \underbrace{(x \cdot y^{-1})}_{\in U} \cdot \underbrace{(y \cdot z^{-1})}_{\in U} \in U, \text{ also } x \sim z. \quad \square$$

- (ii) Für  $x \in G$  ist  $Ux = \{u \cdot x \mid u \in U\}$  die Äquivalenzklasse von  $x$  bzgl.  $\sim$  und heißt *Rechtsnebenklasse* von  $U$  in  $G$ .

Also (Eigenschaften von Äquivalenzklassen siehe Mathe I):

(a)  $Ux = Uy \Leftrightarrow x \sim y$ , also  $x \cdot y^{-1} \in U$

(b)  $x, y \in G$ , dann ist entweder  $Ux = Uy$  oder  $Ux \cap Uy = \emptyset$

**Beweis**

(a) Sei  $x \sim y \Rightarrow y \sim x \Rightarrow y \cdot x^{-1} \in U \Rightarrow y = y(x^{-1} \cdot x) = \underbrace{(y \cdot x^{-1})}_{\in U} x \in Ux$

(b) Sei  $y \in Ux$ , dann zeige:  $x \sim y$   
 $y \in Ux \Rightarrow y = u \cdot x$  für ein  $u \in U$   
 $\Rightarrow x \cdot y^{-1} = x \cdot (ux)^{-1} = x \cdot x^{-1} \cdot u^{-1} = u^{-1} \in U$   
 Es wurde gezeigt, dass  $x \sim y$  gilt.

□

**1.24 Beispiel**

$$G = (\mathbb{Z}, +), 3\mathbb{Z} = \{\dots, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

$$U = (3\mathbb{Z}, +) \leq G \text{ (ÜA, Blatt 2)}$$

Inverses zu  $y$  in  $(\mathbb{Z}, +)$  ist  $-y$ .

$$x \sim y \Leftrightarrow x \cdot y^{-1} \in U$$

bzw.:  $x - y \in U$

$$x = 0 : U + 0 = \{u + 0 \mid u \in U\} = \{\dots, -3, 0, 3, 6, \dots\} = U = 3\mathbb{Z}$$

$$x = 1 : U + 1 = \{u + 1 \mid u \in U\} = \{\dots, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\} = 3\mathbb{Z} + 1$$

$$x = 2 : U + 2 = \{u + 2 \mid u \in U\} = \{\dots, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\} = 3\mathbb{Z} + 2$$

$$x = 3 : U + 3 = U + 0 = 0$$

...

**1.25 Lemma**

$G$  Gruppe,  $U$  endliche Untergruppe von  $G$ ,  $x \in G$

Dann ist  $|U| = |Ux|$

**Beweis**

$$\begin{aligned} \text{Abb } \varphi : U &\rightarrow Ux \\ u &\mapsto ux \end{aligned}$$

ist surjektiv und injektiv (falls  $u_1x = u_2x$ , dann ist  $u_1 = u_2$  (Satz 1.19 (iii), Kürzungsregel))

Also ist  $\varphi$  bijektiv, also  $U, Ux$  gleich mächtig.

**1.26 Theorem (Satz von Lagrange)**

$G$  endliche Gruppe,  $U \leq G$

Dann gilt  $|U|$  ist Teiler von  $|G|$  und  $q = \frac{|G|}{|U|}$  ist die Anzahl der Rechtsnebenklassen von  $U$  in  $G$

**Beweis**

Seien  $Ux_1, \dots, Ux_q$  die  $q$  verschiedenen Rechtsnebenklassen von  $U$  in  $G$

$$\text{Mathe I \& ??} \Rightarrow G = \bigcup_{i=1}^q Ux_i \text{ (disjunkte Vereinigung der Äquivalenzklassen)}$$

$$\Rightarrow |G| = \sum_{i=1}^q \underbrace{|Ux_i|}_{|U|} \stackrel{1.25}{=} q \cdot |U|$$

**1.27 Definition**

$(G, \bullet, e)$  Gruppe,  $a \in G$

$$\begin{aligned} \text{Definiere } a^0 &:= e \\ a^1 &:= a \\ a^m &:= a^{m-1} \cdot a \quad \text{für } m \in \mathbb{N} \\ a^m &:= (a^{-1})^{-1} \quad \text{für } m \in \mathbb{Z}^- \end{aligned}$$

(Potenzen von  $a$ )

$$\begin{aligned} \text{Bei additiver Schreibweise: } 0 \cdot a &= e \\ 1 \cdot a &= a \\ m \cdot a &= \begin{cases} (m-1) \cdot a + a & \text{für } m \in \mathbb{N} \\ (-m) \cdot (-a) & \text{für } m \in \mathbb{Z}^- \end{cases} \end{aligned}$$

**1.28 Satz**

$G, a$  wie oben

- (i)  $(a^{-1})^m = (a^m)^{-1} = a^{-m} \quad \forall m \in \mathbb{Z}$
- (ii)  $a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$
- (iii)  $(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$

**Beweis**

$$(i) \ m \in \mathbb{N} : (a^{-1})^m \cdot a^m = \underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot \dots \cdot a^{-1}}_{m \text{ mal}} \cdot \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ mal}} = e$$

$$\Rightarrow (a^{-1})^m = (a^m)^{-1} \text{ (Inverses von } a^m \text{)}$$

$$\text{nach Definition ist } a^{-m} = (a^{-1})^m$$

$$\Rightarrow (i) \text{ gilt } \forall m \in \mathbb{N}$$

$$m = 0 : e = e = e \checkmark$$

$$m \in \mathbb{Z}^- : \text{dann ist } -m \in \mathbb{N}$$

Wende den bewiesenen Teil an auf  $a^{-1}$  statt  $a$  und  $-m$  statt  $m$ , Behauptung folgt.

(ii), (iii) per Induktion und mit (i)

□

### 1.29 Satz und Definition

$G$  endliche Gruppe,  $g \in G$

- (i) Es existiert eine kleinste natürliche Zahl  $n$  mit  $g^n = e$ , diese heißt die *Ordnung*  $o(g)$  von  $g$
- (ii) Die Menge  $\{g^0 = e, g^1 = g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$  ist eine Untergruppe von  $G$ , die von  $g$  erzeugte zyklische Gruppe  $\langle g \rangle$   
Es gilt  $o(g) = |\langle g \rangle| = n$  teilt  $|G|$
- (iii)  $g^{|G|} = e$

Bemerkung: Eine endliche Gruppe heißt *zyklisch*, falls sie von einem Element erzeugt werden kann.

### Beweis

- (i)  $G$  endlich  $\Rightarrow \exists i, j \in \mathbb{N}, i > j$  mit  $g^i = g^j$   
Dann ist  $g^{i-j} \stackrel{1.28ii)}{=} g^i \cdot g^{-j} \stackrel{1.28}{=} \underbrace{g^i}_{=g^j} \cdot (g^j)^{-1} = e$
- (ii) Das Produkt zweier Elemente aus  $\langle g \rangle$  liegt wieder in  $\langle g \rangle$   
Neutrales Element ist  $g^0 = e$   
Inverses Element zu  $g^i$  ist  $(g^i)^{-1} = g^{n-i}$   
 $\Rightarrow \langle g \rangle \leq G$
- (iii) Satz von Lagrange (1.26):  $n = o(g) = |\langle g \rangle| \mid |G|$   
Also ist  $|G| = n \cdot k$  für ein  $k \in \mathbb{N}$   
 $g^{|G|} = g^{n \cdot k} = (g^n)^k = e^k = e$

□

### 1.30 Beispiel

$(\mathbb{Z}_3 \setminus \{0\}, \odot, 1)$

$$g = 1: \langle 1 \rangle = \{g^0 = 1^0 = 1\}, o(1) = 1$$

$$g = 2: \langle 2 \rangle = \{g^0 = 1, g^1 = 2\}, o(2) = 2$$

$(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \odot, 1)$

$$g = 2: \langle 2 \rangle = \{2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 3\}, o(2) = 4$$

**1.31 Korollar**(i) Satz von Euler

Sei  $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}, \text{ggT}(a, n) = 1$

Dann ist

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

(ii) Kleiner Satz von Fermat

Ist  $p$  eine Primzahl,  $a \in \mathbb{Z}, p \nmid a$ , dann gilt

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

**1.32 Beweis**

- a) Wir können annehmen, dass  $1 \leq a < n$  (denn  $a^{\varphi(n)} \pmod{n} = (a \pmod{n})^{\varphi(n)}$ )  
wegen  $\text{ggT}(a, n) = 1$  ist  $a \in \mathbb{Z}_n^*$ , das ist eine endliche Gruppe.

$$\begin{aligned} \stackrel{?(iii)}{\Rightarrow} a^{|\mathbb{Z}_n^*|} &= 1 (= e) & a \odot a \odot \dots \\ \Rightarrow a^{\varphi(n)} &\equiv 1 \pmod{n} & a \cdot a \cdot \dots \end{aligned}$$

- b) Folgt aus (i) ( $n = p, \varphi(p) = -1$ )

**2 Algebraische Strukturen mit 2 Verknüpfungen: Ringe und Körper****2.1 Definition**

Sei  $R \neq \emptyset$  eine Menge mit zwei Verknüpfungen  $+$  und  $\bullet$ .

- (i) Wir nennen  $(R, +, \cdot)$  einen *Ring*, falls gilt:

- (a)  $(R, +)$  ist eine abelsche Gruppe (Eselsbrücke: KAIN)

Das neutrale Element bezeichnen wir hier mit 0, das zu  $a \in R$  Inverse mit  $-a$   
(schreibe auch  $a - b$  für  $a + (-b)$ ).

- (b)  $(R, \cdot)$  ist eine Halbgruppe.

- (c) Es gelten die Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c) = ab + ac \\ (a + b) \cdot c &= (a \cdot c) + (b \cdot c) = ac + bc \quad \forall a, b, c \in R \end{aligned}$$

- (ii) Ein Ring  $(R, +, \cdot)$  heißt *kommutativ* falls  $\cdot$  ebenfalls kommutativ ist, also falls  $\forall a, b \in R : a \cdot b = b \cdot a$
- (iii) Ein Ring  $(R, +, \cdot)$  heißt *Ring mit Eins*, falls  $(R, \cdot)$  ein Monoid ist mit neutralen Element  $1 \neq 0$  ( $\forall a \in R : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ ).
- (iv) Ist  $(R, +, \cdot)$  Ring mit Eins, dann heißen die bezüglich  $\cdot$  invertierbaren Elemente *Einheiten*. Das zu  $a$  bezügliche  $\cdot$  invertierbare Element bezeichnen wir mit  $a^{-1}$ .  
 $R^* :=$  Menge der Einheiten in  $R$ .

## 2.2 Beispiel

- a)  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  ist kommutativer Ring mit Eins (1)  
 $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$ ,  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  ebenso  
 $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ,  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
- b)  $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$  ist ein kommutativer Ring ohne Eins
- c) trivialer Ring  $(\{0\}, +, \cdot)$  ohne Eins
- d)  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ,  $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$  kommutativer Ring mit Eins
- e)  $(\mathbb{R}^n, \underbrace{+, \cdot}_{\text{Komponentenweise}})$ ; allgemein:  $R_1, \dots, R_n$  Ringe, dann  $R_1 \times \dots \times R_n$  Ring.
- f)  $M_n(\mathbb{R})$  - Menge aller  $n \times n$ -Matrizen über  $\mathbb{R}$ , mit Matrixaddition und -multiplikation ist Ring mit Eins ( $=E_n$ ), nicht kommutativ für  $n \geq 2$ .

## 2.3 Satz (Rechnen mit Ringen)

Sei  $(R, +, \cdot)$  ein Ring,  $a, b, c \in R$ . Dann gilt:

- (i)  $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
- (ii)  $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$
- (iii)  $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

### Beweis

- (i)  $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) \stackrel{2.1(3)}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0$   
 addiere  $-(a \cdot 0)$  (Inverses von  $a \cdot 0$ ) auf beiden Seiten, erhalte  $0 = a \cdot 0$   
 Analog  $0 \cdot a = 0$
- (ii)  $(-a) \cdot b + a \cdot b \stackrel{2.1(3)}{=} (-a + a) \cdot b = 0 \cdot b \stackrel{(i)}{=} 0$   
 also ist  $(-a \cdot b)$  Inverses zu  $a \cdot b$ , also  $= -(a \cdot b)$ .  
 Analog  $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$
- (iii)  $(-a) \cdot (-b) \stackrel{(ii)}{=} -(a \cdot (-b)) \stackrel{(ii)}{=} -(-(a \cdot b)) = a \cdot b$

□

## 2.4 Bemerkung

- a) In jedem Ring mit Eins sind 1 und  $-1$  Einheiten (denn  $(-1) \cdot (-1) = 1$ , siehe 2.3(iii))  
 Es kann mehr geben (z.B. in  $\mathbb{Z}_5$  usw.). Es kann auch  $-1 = 1$  gelten (z.B. in  $(\mathbb{Z}_2, \oplus, \odot)$ )
- b) 0 kann nach 2.3(i) nie Einheit sein (da  $1 \neq 0$ )

c) In einem kommutativen Ring  $R$  gilt der *Binomialsatz*,

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \quad (n \in \mathbb{N}, a, b \in R)$$

...

## 2.5 Definition

Ein kommutativer Ring  $(K, +, \cdot)$  heißt *Körper*, wenn jedes Element  $0 \neq x \in K$  eine Einheit ist, also wenn

$$K^* = K \setminus \{0\}$$

## 2.6 Beispiele

a)  $(\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot)$  sind Körper.  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  ist kein Körper.

b) vgl. Beispiel 1.18 b)

$$\mathbb{Z}_n^* = \{z \in \mathbb{Z}_n \mid \text{ggT}(z, n) = 1\}$$

ist Gruppe bezüglich  $\odot$

$\Rightarrow (\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$  ist genau dann ein Körper, wenn  $n$  eine Primzahl ist.

## 2.7 Satz (Rechnen im Körper, Nullteilerfreiheit)

Sei  $(K, +, \cdot)$  ein Körper,  $a, b \in K$

Dann gilt

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ oder } b = 0$$

Gegenbeispiel:  $(\mathbb{Z}_6, \oplus, \odot)$  ist kein Körper. Hier gilt  $2 \odot 3 = 0$ , aber weder  $2 = 0$ , noch  $3 = 0$

### Beweis

" $\Leftarrow$ ": klar:  $0 \cdot b = 0$  oder  $a \cdot 0 = 0$  (Satz 2.3 (i), Rechenregeln für Ringe)

" $\Rightarrow$ ": Sei  $a \cdot b = 0$ . Angenommen  $a \neq 0$  (d.h.  $a$  hat Inverses)

$$\begin{aligned} \text{Dann ist } b &= 1 \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot b \\ &= a^{-1} \cdot (a \cdot b) \\ &= a^{-1} \cdot 0 \\ &\stackrel{2.3(i)}{=} 0 \end{aligned}$$

□



## 2.8 Definition

Seien  $(R, +, \cdot)$  und  $(\tilde{R}, \boxplus, \boxdot)$  Ringe.

(i)  $\varphi : R \rightarrow \tilde{R}$  heißt (Ring-)Homomorphismus, falls gilt:

$$\underbrace{\varphi(x+y)}_{\in R} = \underbrace{\varphi(x)}_{\in \tilde{R}} \boxplus \underbrace{\varphi(y)}_{\in \tilde{R}} \quad \text{und} \quad \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \boxdot \varphi(y) \quad \forall x, y \in R$$

## 2.9 Beispiel

$$\varphi(\mathbb{Z}, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$$

$x \mapsto x \bmod n$  ist Ringhomomorphismus (kein Isomorphismus), da  $\varphi$  nicht injektiv ist, z.B.  $n = 5 : \varphi(1) = \varphi(6) = \varphi(11) \dots$

## 2.10 Satz (Chinesischer Restsatz)

Seien  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$  paarweise teilerfremd,  $M := m_1 \cdot \dots \cdot m_n$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$

Dann existiert ein  $x$ ,  $0 \leq x < M$  mit

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{m_2} \\ &\dots \\ x &\equiv a_n \pmod{m_n} \end{aligned}$$

### Beweis

Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  sind die Zahlen  $m_i$  und  $M_i := \frac{M}{m_i}$  teilerfremd.

$\Rightarrow$  EEA liefert  $s_i$  und  $t_i \in \mathbb{Z}$  mit  $t_i \cdot m_i + s_i \cdot M_i = 1$

Setze  $e_i := s_i \cdot M_i$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} e_i &\equiv 1 \pmod{m_i} \\ e_i &\equiv 0 \pmod{m_j} \quad (j \neq i) \end{aligned}$$

Die Zahl  $x := \sum_{i=1}^n a_i e_i \pmod{M}$  ist dann die Lösung der simultanen Kongruenz.  $\square$

## 2.11 Beispiel

$$\text{a) Finde } 0 \leq x < 60 \text{ mit } x \equiv \begin{cases} 2 \pmod{3} \\ 3 \pmod{4} \\ 2 \pmod{5} \end{cases}$$

$$M = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$$

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{60}{3} = 20 & 7 \cdot 3 + (-1) \cdot 20 &= 1 & \Rightarrow e_1 &= -20 \\ M_2 &= \frac{60}{4} = 15 & 4 \cdot 4 + (-1) \cdot 15 &= 1 & \Rightarrow e_2 &= -15 \\ M_3 &= \frac{60}{5} = 12 & 5 \cdot 5 + (-2) \cdot 12 &= 1 & \Rightarrow e_3 &= -24 \end{aligned}$$

$$x = (2 \cdot (-20) + 3 \cdot (-15) + 2 \cdot (-24)) \bmod 60 = 47$$

b) Was ist  $2^{1000} \bmod \underbrace{1155}_{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}$

(a) Berechne  $2^{1000} \bmod 3, 5, 7, 11$

$$\begin{aligned} 2^{1000} \bmod 3 &= (-1)^{1000} \bmod 3 = 1 \\ 2^{1000} \bmod 5 &= 4^{500} \bmod 5 = (-1)^{500} \bmod 5 = 1 \\ 2^{1000} \bmod 7 &= 2^{3 \cdot 333 + 1} \bmod 7 = (8^{333} \cdot 2) \bmod 7 = (1 \cdot 2) \bmod 7 = 2 \\ 2^{1000} \bmod 11 &= 2^{5 \cdot 200} \bmod 11 = 32^{200} \bmod 11 = (-1)^{200} \bmod 11 = 1 \end{aligned}$$

$$(b) \text{ Suche } 0 \leq x < 1155 \text{ mit } x \equiv \begin{cases} 1 & (\bmod 3) \\ 1 & (\bmod 5) \\ 2 & (\bmod 7) \\ 1 & (\bmod 11) \end{cases}$$

Der chinesische Restsatz liefert  $x = 331$

## 2.12 Bemerkung

Man kann auch zeigen, dass die Lösung  $x$  aus Satz 2.10 eindeutig ist:

$$\begin{aligned} \text{Durch } \psi : \mathbb{Z}_M &\rightarrow \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_n} \\ x &\mapsto (x \bmod m_1, \dots, x \bmod m_n) \end{aligned}$$

wird ein Ringisomorphismus definiert:

$\psi$  ist surjektiv (zu jedem  $n$ -Tupel aus  $\mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_n}$  gibt es eine Lösung  $x$ , siehe Restsatz) und es gilt:

$$\underbrace{|\mathbb{Z}_M|}_M = \underbrace{|\mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_n}|}_{m_1 \cdots m_n = M}$$

also ist  $\psi$  bijektiv, also auch injektiv, also ist Lösung  $x$  eindeutig.

## 2.13 Korollar

$M = m_1 \cdot \dots \cdot m_n$ ,  $m_i$  paarweise teilerfremd.

Dann ist  $\varphi(M) = \varphi(m_1) \cdot \dots \cdot \varphi(m_n)$ , insbesondere:

$$n = p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k} \quad (p_i \text{ Primzahlen, } a_1 > 0, p_i \neq p_j \text{ für } i \neq j)$$

### Beweis

Nach 2.12 ist  $\mathbb{Z}_M \cong \mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_n}$  mittels  $\psi$

$$\Rightarrow x \text{ Einheit} \Leftrightarrow \psi(x) = (x \bmod m_1, \dots, x \bmod m_n) \text{ Einheit}$$

$$\Leftrightarrow x \bmod m_i \text{ Einheit } \forall i = 1 \dots n$$

$$\Rightarrow \varphi(M) = \varphi(m_1) \cdot \dots \cdot \varphi(m_n)$$

$$\varphi(p^a) \underbrace{=}_{\text{Überlegen}} p^a - p^{a-1} = p^{a-1}(p-1)$$

Überlegen

## 2.14 Definition

Sei  $K$  Körper mit Nullelement 0 und Einselement 1:

- (i) Ein *Polynom über  $K$*  ist Ausdruck  $f = a_0x^0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0, a_i \in K$ .  
 $a_i$  heißen *Koeffizienten* des Polynoms.
  - (a) Ist  $a_i = 0$ , so kann man  $0 \cdot x^i$  bei der Beschreibung weglassen.
  - (b) Statt  $a_0x^0$  schreibt auch  $a_0$
  - (c) Sind alle  $a_i = 0$ , so schreibt man  $f = 0$ , das Nullpolynom.
  - (d) Ist  $a_i = 1$ , so schreibt man  $x^i$  statt  $1 \cdot x^i$
  - (e) Die Reihenfolge der  $a_ix^i$  kann verändert werden, ohne dass das Polynom sich verändert ( $x^4 + 2x^3 + 3 = 2x^3 + 3 + x^4$ )
- (ii) Zwei Polynome  $f$  und  $g$  sind *gleich*, wenn ( $f = 0$  und  $g = 0$ ) oder ( $f = a_0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n$ ,  
 $g = b_0 + b_1x^1 + \dots + b_mx^m, a_n \neq 0, b_m \neq 0$  und  $n = m, a_i = b_i$  für  $i = 0, \dots, n$ ) gilt.
- (iii) Die Menge aller Polynome über  $K$  bezeichnet man als  $K[x]$

## 2.15 Beispiel

- a)  $\underbrace{f}_{f(x)} = 3x^2 + \frac{1}{2}x - 1 \in \mathbb{Q}[x] \wedge f \in \mathbb{R}[x]$
- b)  $g = x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$

Wir wollen in  $K[x]$  wie in einem Ring rechnen können. Wir brauchen dazu  $+$  und  $\cdot$  für Polynome.

## 2.16 Satz und Definition

$K$  Körper, dann wird  $K[x]$  zu einem kommutativen Ring mit Eins durch folgende Verknüpfungen:

$$f = \underbrace{\sum_{i=0}^n a_i x^i}_{\text{z.B. } x+2}, \quad g = \underbrace{\sum_{j=0}^m b_j x^j}_{x^3+2x+1}$$

dann

$$f + g = \underbrace{\sum_{i=0}^{\max(m,n)} (a_i + b_i) x^i}_{x^3+3x+3}$$

$$f \cdot g = \sum_{i=0}^{n+m} c_i x^i$$

$$\text{mit } c_i = a_0b_i + a_1b_{i-1} + \dots + a_ib_0 = \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} \quad (\text{Faltungsprodukt})$$

(setze  $a_i$  mit  $i > n$  bzw.  $b_j$  mit  $j > m$  gleich 0)

- Einselement:  $f = 1$  ( $a_0 = 1, a_j = 0$  für  $j \geq 1$ )
- Nullelement:  $f = 0$

$K[x]$  heißt der *Polynomring* in einer Variablen über  $K$ .

Beweis: Ringeigenschaften nachrechnen.

## 2.17 Bemerkung

Die  $+$ -Zeichen in der Beschreibung der Polynome entsprechen der Ring-Addition der *Monome*  $a_0, ax, a_2x^2, \dots, a_nx^n$

## 2.18 Beispiel

a) in  $\mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x]$  Addition, Multiplikation klar

b) in  $\mathbb{Z}_3[x]$ :  $f = 2x^3 + 2x + 1, g = 2x^3 + x$

$$\begin{aligned} f + g &= x^3 + 1 \\ f \cdot g &= (2x^3 + 2x + 1)(2x^3 + x) \\ &= x^6 + 2x^4 + x^4 + 2x^2 + 2x^3 + x \\ &= x^6 + 2x^3 + 2x^2 + x \end{aligned}$$

c) in  $\mathbb{Z}_2[x]$ :  $f = x^2 + 1, g = x + 1$

$$\begin{aligned} f + g &= x^2 + x \\ f + f &= 0 \\ g \cdot g &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

## 2.19 Definition

Sei  $0 \neq f \in K[x]$

$f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  mit  $a_n \neq 0$

Dann heißt  $n$  der *Grad* von  $f$   $\text{Grad}(f)$

$\text{Grad}(0) := -\infty$

$\text{Grad}(f) = 0$     *konstante Polynome*  $\neq 0$

**2.20   TBD**

**2.21   TBD**

**2.22   TBD**

**2.23   TBD**

**2.24   TBD**

**2.25   TBD**

**2.26   TBD**

**2.27   TBD**

**2.28   TBD**

**2.29   TBD**

**2.30   Satz**

Euklidischer Algorithmus in  $K[x]$  → siehe „Blatt“

**2.31   Satz**

EEA in  $K[x]$  → siehe „Blatt“

**2.32   Beispiel**

$g = x^4 + x^3 + 2x^2 + 1, h = x^3 + 2x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$   
... TBD ...

**2.33   Definition**

$k$  Körper. Ein Polynom  $p \in K[x]$ ,  $\text{Grad}(p) \geq 1$  (d.h.  $p \neq 0$ ,  $p$  nicht konst., also keine Einheit) heißt *irreduzibel*, falls gilt:

Ist  $p = f \cdot g$  ( $f, g \in K[x]$ ), so ist  $\text{Grad}(f) = 0$  oder  $\text{Grad}(g) = 0$  (d.h.  $f$  oder  $g$  ist konst. Polynom).

Bemerkung:  $p = a \cdot a^{-1} \cdot p$  für  $a \in K \setminus \{0\}$  geht immer.

### 2.34 Beispiel

- a)  $ax + b$  ( $a \neq 0$ ) ist irreduzibel in  $K[x]$  für jeden Körper  $K$
- b)  $x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$  ist irreduzibel:  
angenommen nicht, dann  $(x^2 - 2) = (ax + b)(cx + d)$  mit  $a, b, c \in \mathbb{Q} \wedge a, c \neq 0$   
 $(ax + b)$  hat Nullstelle  $-\frac{b}{a}$ , also müsste auch  $(x^2 - 2)$  Nullstelle  $\underbrace{-\frac{b}{a}}_{\in \mathbb{Q}}$  haben. Nullstellen von  $(x^2 - 2)$  sind aber nur  $\sqrt{2}$  und  $-\sqrt{2}$ , beide nicht in  $\mathbb{Q}$  !
- c)  $x^2 - 2 \in \mathbb{R}[x]$  ist nicht irreduzibel.  
$$x^2 - 2 = \underbrace{(x + \sqrt{2})}_{\in \mathbb{R}[x]} \cdot \underbrace{(x - \sqrt{2})}_{\in \mathbb{R}[x]}$$
- d)  $x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$  ist irreduzibel
- e)  $x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$  ist nicht irreduzibel:  
 $(x^2 + 1) = (x + 2) \cdot (x + 3) = (x^2 + 3x + 2x + 1) = (x^2 + 1)$   
 $2 \Rightarrow (x^2 + 1)$  ist teilbar durch  $(x - 2) \hat{=} (x + 3)$

### 2.35 Abschlussbemerkung

- a) Irreduzibel Polynome in  $K[x]$  entsprechen den Primzahlen in  $\mathbb{Z}$ . Man kann zeigen:  
 $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in K[x], a_n \neq 0, n \geq 1$ .  
Dann existieren eindeutig bestimmte irreduzibel Polynome  $p_1, \dots, p_e$  und natürlichen Zahlen  $m_1, \dots, m_e \in \mathbb{N}$  mit  $f = a_n \cdot p_1^{m_1} \cdot \dots \cdot p_e^{m_e}$
- b) geg: Primzahl  $p$ , dann gibt es Körper mit  $p$  Elementen:  
 $(\mathbb{Z}_p, \oplus, \odot)$   
Man kann zeigen: zu jeder Primzahlpotenz  $p^a$  gibt es Körper mit  $p^a$  Elementen, diesen konstruiert man über irreduzible Polynome in  $\mathbb{Z}_p[x]$ .

## 3 Der Körper der $\mathbb{C}$ der Komplexen Zahlen

### 3.1 Definition

Eine komplexe Zahl  $z$  ist von der Form  $z = x + i \cdot y$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  und einer „Zahl“  $i$  mit  $i^2 = -1$  („imaginäre Einheit“).  $x$  heißt Realteil von  $z$ ,  $x = \operatorname{Re} z$   
 $y$  heißt Imaginärteil,  $y = \operatorname{Im} z$ .

Die Menge aller komplexen Zahlen bezeichnen wir mit  $\mathbb{C}$  und definieren auf  $\mathbb{C}$  Addition und Multiplikation wie folgt:

Für  $z = x + iy$  und  $w = a + ib$  ist  
 $z + w := (x + a) + i(y + b)$ ,  
 $z - w := (x - a) + i(y - b)$  und  
 $z \cdot w := (xa - yb) + i(xb + ya)$ .

Erläuterung zur Multiplikation:  $((x + iy)(a + ib) = xa + xib + iya + i^2yb = (xa - yb) + i(xb + ya)$ .

Mit diesen Verknüpfungen ist  $\mathbb{C}$  ein Körper:

a) AG, kG, DG: nachrechnen

b)  $0 = 0 + i \cdot 0$

c) additiv Inverses:  $-z = -x - iy$

d)  $1 = 1 + i \cdot 0$

e) multiplikativ Inverses:  $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{\in \mathbb{R}} + i \cdot \underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{\in \mathbb{R}}$

Man nennt für  $z = x + iy$  die Zahl  $\bar{z} = x - iy$  die zu  $z$  *konjugiert komplexe Zahl* und  $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$  den *Betrag* von  $z$

### 3.2 Beispiel

a)  $z = 2 + 3i$  mit  $\operatorname{Re}(z) = 2$  und  $\operatorname{Im}(z) = 3$ .

$$\bar{z} = 2 - 3i, |z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$z \cdot \bar{z} = (2 + 3i) \cdot (2 - 3i)$$

$$= 4 - 6i + 6i - 9i^2 = 4 + 9 = 13$$

b)  $w = 1 + i = 1 + 1i$  mit  $\operatorname{Re}(w) = 1$ ,  $\operatorname{Im}(w) = 1$ ,  $\overline{w} = 1 - i$ ,  $|w| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

c) Selbst nachrechnen:  $u = 7 = 7 + 0 \cdot i$ ,  $v = 5i = 0 + 5i$

d)  $u + w + z = 7 + (1 + i) + (2 + 3i) = 10 + 4i$

$$u \cdot w = 7 \cdot (1 + i) = 7 + 7i$$

$$\frac{w}{z} = \frac{1+i}{2+3i} = \frac{(1+i) \cdot (2-3i)}{4+9} = \frac{2-3i+2i-3i^2}{13} = \frac{5-i}{13} = \frac{5}{13} - \frac{1}{13}i$$

### 3.3 Bemerkung: komplexe Zahlenebene

Man kann  $\mathbb{C}$  veranschaulichen in der „Gaußschen Zahlenebene“:

Betrachte  $z = x + iy$  als Punkt  $(x|y)$  in  $\mathbb{R}^2$ :

### 3.4 Satz: Eigenschaften

$w, z \in \mathbb{C}$

a)  $\overline{w \pm z} = \overline{w} \pm \overline{z}$

$$\overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \overline{z}$$

$$\overline{\frac{w}{z}} = \frac{\overline{w}}{\overline{z}} \quad (z \neq 0)$$

$$\overline{\overline{z}} = z$$

Anmerkung:  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \bar{z}$  ist Körperisomorphismus.

- b)  $|z| \geq 0, |z| = 0$  nur für  $z = 0$
- c)  $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{z\bar{z}}$
- d)  $|w \cdot z| = |w| \cdot |z|$
- e)  $|w + z| \leq |w| + |z|$  (Dreiecksungleichung)  
 $|w + z| \geq ||w| - |z||$

Beweis: nachrechnen

(z.B. d)): sei  $z = x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{z} = x - iy, |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, |\bar{z}| = \dots$

### 3.5 Bemerkung

- a) In  $\mathbb{C}$  existiert  $\sqrt{-1} : \pm i$ , d.h.  $x^2 + 1 = 0$  ist lösbar in  $\mathbb{C}$ , das Polynom  $x^2 + 1$  ist nicht irreduzibel in  $\mathbb{C}[x]$ :  $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$
- b) Mann kann jede quadratische Gleichung  $ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) in  $\mathbb{C}$  lösen:  

$$x_{1|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
 Jedes  $b^2 - 4ac < 0$  ist, schreibe:  

$$\frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2} \cdot i}{2a}$$
- c) Es gilt sogar: Fundamentalsatz der Algebra:  
 Jedes Polynom  $f \in \mathbb{C}[x]$  vom Grad  $n \geq 1$  hat genau  $n$  Nullstellen in  $\mathbb{C}$ .