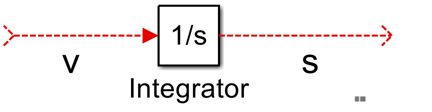
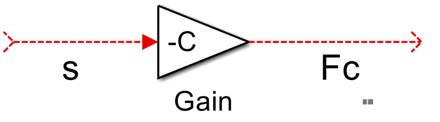
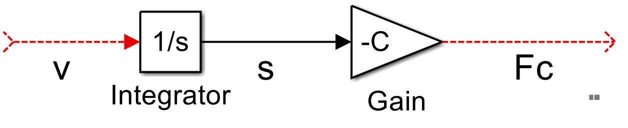
Auch möglich: Simscape Style

$$s = \int v \, dt \quad \Longrightarrow$$



$$Fc = -C \cdot s \quad \Longrightarrow$$





Es ist möglich, in Sumulink einfache Bausteine zu verbinden, die einfache (Teil-) Gesetze darstellen

$$s = \int v \, dt$$

oder

$$Fc = -C \cdot s$$

Auf diese Art haben wir ein komplettes Simulink Modell erhalten.

Jetzt: **Ordinary Differential Equation (ode)**
Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)

$$\boxed{m \cdot \ddot{s} + D \cdot \dot{s} + C \cdot s = F}$$

Manchmal ist es einfacher, eine fertige DGL am Stück in Simulink einzugeben. Entweder jemand hat Ihnen die DGL schon auf einem Stück Papier gegeben, oder Sie haben selbst die einzelnen Gesetzte zu einer umfassenden DGL auf einem Stück Papier zusammen gefasst.

Gegeben sei eine DGL der Form

$$a_2 \cdot \ddot{v} + a1 \cdot \dot{v} + a0 \cdot v = b0 \cdot u + b1 \cdot \dot{u} + b2 \cdot \ddot{u}$$

Mit u als Erregung und v als Antwort.

$\dot{u}(t)$	numerisch linksseitig abgeleitet aus	$u(t)$ und $u(t-dt)$
$\ddot{u}(t)$	numerisch linksseitig abgeleitet aus	$\dot{u}(t)$ und $\dot{u}(t-dt)$
$\dot{v}(t)$	numerisch linksseitig integriert aus	$\dot{v}(t-T_s)$ und $\ddot{v}(t-dt)$
v(t)	numerisch linksseitig integriert aus	v$(t-T_s)$ und $\dot{v}(t-dt)$
$\ddot{v}(t)$	mittels der DGL	aus allen anderen Größen zum Zeitpunkt t

numerisch Linkseitigabgeleitet wird so: (Beispiel u)

$\dot{u}\ (t) = \frac{u(t)-u(t-dt)}{dt}$

numerisch linksseitig integriert wird so: (Beispiel $\dot{v}$)

$\dot{v}(t) = \dot{v}(t-dt) + \ddot{v}(t-dt) \cdot dt$

Kurze Wiederholung: Euler

$$a_2 \cdot \ddot{v} + a1 \cdot \dot{v} + a0 \cdot v = b0 \cdot u + b1 \cdot \dot{u} + b2 \cdot \ddot{u}$$

```
%% Definition System
a0=1;
a1=1;
b0=1;
b1=10;
b2=0;
```

```
%% Definition Zeitschritte
t=linspace(0,10,1000);
dt=t(2)-t(1);
%%Definition Erregung
u=t*0;
u(10:end)=1; %Sprungerregung
```

```
%% Deklarationen und Anfangswerte
v=u*0;
vp=u*0;
vpp=u*0;
v(1)=0;
vp(1)=0;
vpp(1)=0;
%% Ableitungen u
up=gradient(u)./gradient(t);
upp=gradient(up)./gradient(t);
```

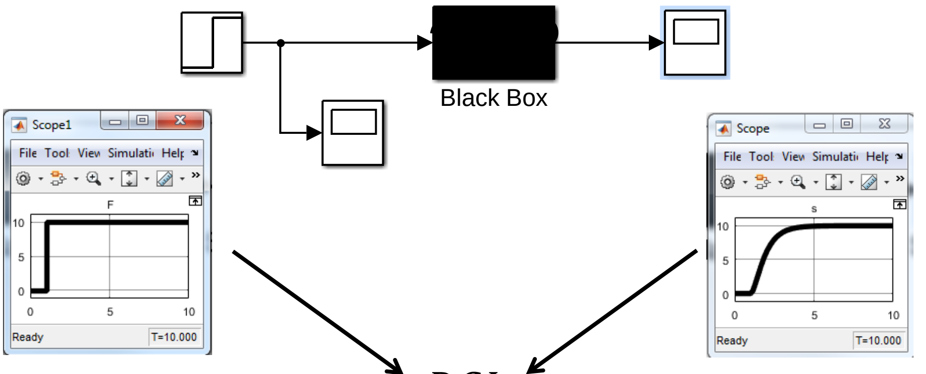

Kurze Wiederholung: Euler

$$1 \cdot \ddot{v} + a1 \cdot \dot{v} + a0 \cdot v = b0 \cdot u + b1 \cdot \dot{u} + b2 \cdot \ddot{u}$$

```
%% Iterationen
for i=2:length(t)
   v(i)=v(i-1)+vp(i-1)*dt;
   vp(i)=vp(i-1)+vpp(i-1)*dt;
   vpp(i)=b0*u(i)+b1*up(i)+b2*upp(i)-a0*v(i)-a1*vp(i);
end
```

```
%% Darstellung
hold off
plot(t,v,'r')
hold on
plot(t,u,'b')
hold off
```


Kurze Wiederholung: Euler



DGL

$$0.2 \cdot \ddot{s} + \dot{s} + s = 10$$

Manchmal kennt man die Einzelgesetze auch nicht, bzw. sie sind zu kompliziert, als dass man sie in einer DGL zusammenfassen könnte. Dann kann man über BlackBox-Modellierung ein DGL-Modell des Systems erhalten, ohne die Einzelgleichungen zu kennen. Ein solches BlackBox-Modell beschreibt das Verhalten eines Systems, es ist aber nicht bekannt, welche Zahlenwerte in dem Modell zu welchem physikalischen Parameter gehören.

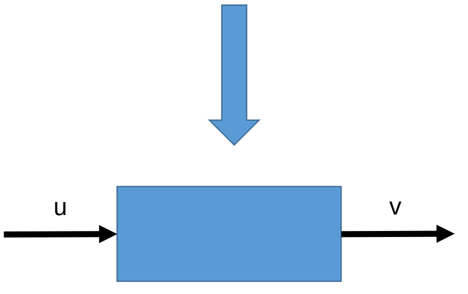
Zum Beispiel könnte man für unser mfd-System (<u>M</u>asse <u>F</u>eder <u>D</u>ämpfer) aus einer BlackBox-Modellierung die DGL:

$$0.2 \cdot \ddot{s} + \dot{s} + s = 10$$

erhalten, ohne zu wissen, was es mit dem Fakter 0.2 auf sich hat.

DGL beinhaltet keine Ableitungen der Eingangsgröße

$$a3 \cdot \dddot{v} + a2 \cdot \ddot{v} + a1 \cdot \dot{v} + a0 \cdot v = b0 \cdot u$$



Man kann ganz einfach ein Simulink Modell zu einer DGL konstruieren, wenn keine Ableitungen des Eingangssignals in der DGL stehen. Es sei u der Eingang und v der Ausgang unseres Systems. (Im Unterschied zum Simulink-Modell sieht man einer DGL nicht unbedingt an, was ihre Eingangs- und was ihre Ausgangsgröße ist. Für gewöhnlich schreibt man jedoch die Summanden, die die Ausgangsgröße und deren Ableitungen beinhalten auf die linke Seite der DGL und die Terme mit der Eingangsgröße und deren Ableitungen auf die rechte Seite der DGL.

Um das Simulink-Modell einer Gleichung wie

$$a3 \cdot \dddot{v} + a2 \cdot \ddot{v} + a1 \cdot \dot{v} + a0 \cdot v = b0 \cdot u$$

aufzustellen folgt man diesen Schritten:

Schritt 1
Löse die DGL nach dem Term mit der höchsten Ableitung der Ausgangsgröße auf.

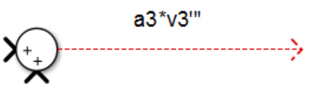
$$a3 \cdot \dddot{v} + a2 \cdot \ddot{v} + a1 \cdot \dot{v} + a0 \cdot v = b0 \cdot u$$

$$\Downarrow$$

$$a3 \cdot \dddot{v} = b0 \cdot u - a2 \cdot \ddot{v} - a1 \cdot \dot{v} - a0 \cdot v$$

Schritt 2
Starte das Simulink-Model mit einem Summierblock. Dessen Ausgang entspricht dem Term mit der höchsten Ableitung der Ausgangsgröße.

$$a3 \cdot \dddot{v} = b0 \cdot u - a2 \cdot \ddot{v} - a1 \cdot \dot{v} - a0 \cdot v$$



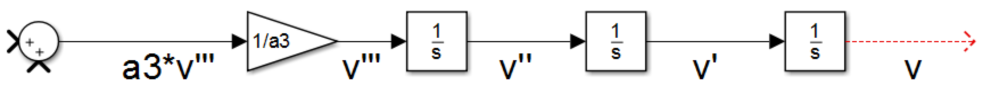
Bemerkung: Innerhalb von Simulink wird das Hochkomma ' zur Kennzeichnung von Ableitungen benutzt.

Schritt 3

Letzten Endes wollen wir den Ausgang v berechnen. Hier erhalten wir diesen, indem wir durch a3 dividieren und dann drei mal integrieren.

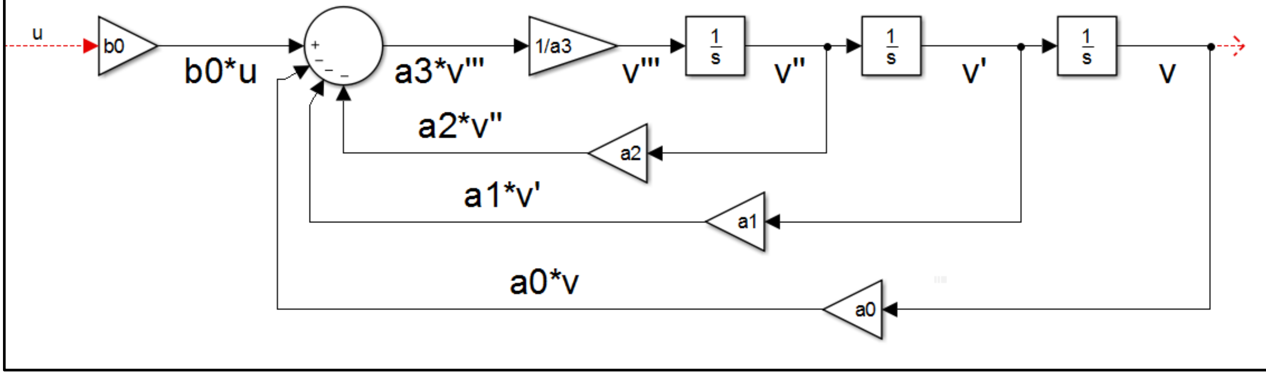
Oder allgemeiner: Teile durch den Faktor vor der höchsten Ableitung der Ausgangsgröße. Integriere bis der Ausgang v erhalten ist.

$$a3 \cdot \dddot{v} = b0 \cdot u - a2 \cdot \ddot{v} - a1 \cdot \dot{v} - a0 \cdot v$$

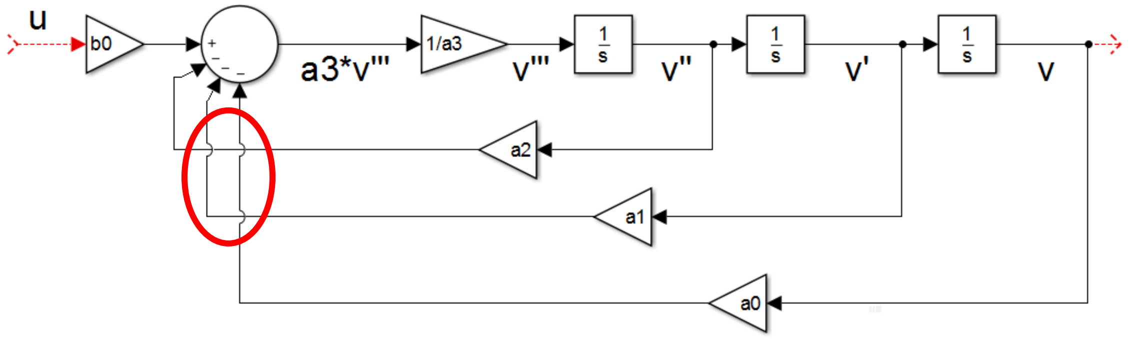


Schritt 4
Ergänze die Terme der rechten Seite vorzeichenrichtig im Summierer.

$$a3 \cdot \dddot{v} = b0 \cdot u - a2 \cdot \ddot{v} - a1 \cdot \dot{v} - a0 \cdot v$$



Versuche unnötige Kreuzungspunkte zu vermeiden.



… DGL -> Simulink, DGL enthält Ableitungen der Eingangsgröße

$$a3 \cdot \dddot{v} + a2 \cdot \ddot{v} + a1 \cdot \dot{v} + a0 \cdot v = b0 \cdot u + b1 \cdot \dot{u}$$

Die Lage wird komplizierter, wenn die DGL Ableitungen der Eingangsgröße aufweist.

Ein einfaches Beispiel wäre:

Gegeben sei eine DGL der Form

$$a_2 \cdot \ddot{v} + a1 \cdot \dot{v} + a0 \cdot v = b0 \cdot u + b1 \cdot \dot{u} + b2 \cdot \ddot{u}$$

Mit u als Erregung und v als Antwort.

$$a_2 \cdot v + a1 \cdot \int v + a0 \cdot \int \int v = b0 \cdot u + b1 \cdot \int u + b2 \cdot \int \int \mathrm{u}$$

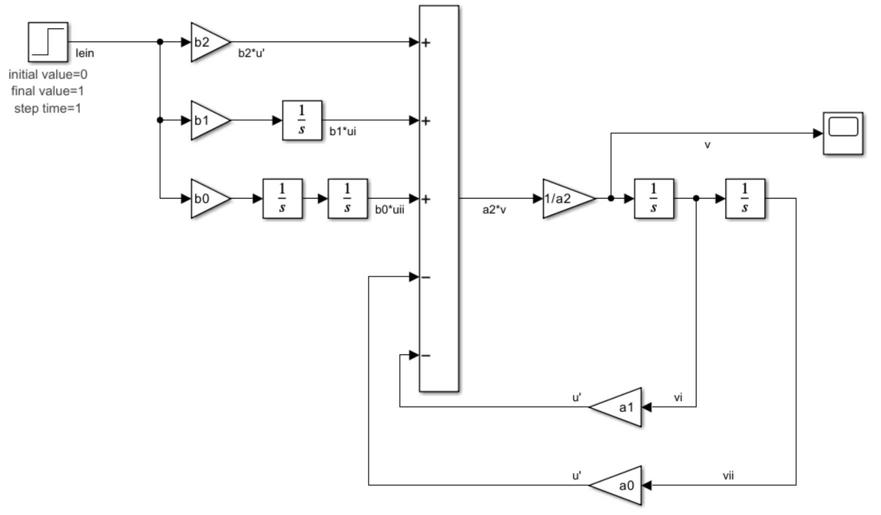
$$a_2 \cdot v = b0 \cdot u + b1 \cdot \int u + b2 \cdot \int \int \mathrm{u} - a1 \cdot \int v - a0 \cdot \int \int v$$

Eine einfache Möglichkeit zu einem System mit Ableitungen auf der Erregerseite einen Wirkungsplan ohne Diff-Blöcke zu erstellen besteht darin, die Gleichung auf zu integrieren. Dem Auflösen nach dem Term mit der höchsten Ableitung der Ausgangsgröße entspricht nun dem Auflösen nach dem Term mit der nicht-integrierten Ausgangsgröße.

DGL -> Simulink -> DGL

DGL auf Papier -> aufintegrieren

$$a_2 \cdot v = b0 \cdot u + b1 \cdot \int u + b2 \cdot \int \int \mathrm{u} - a1 \cdot \int v - a0 \cdot \int \int v$$



Prof. Dr.-Ing. Patrick Metzler

Hochschule RheinMain

15

Dies entspricht einer eins-zu-eins Umsetzung der Gleichung und ist somit mathematisch einfach nachvollziehbar. Es gibt allerdings zwei kleine Nachteile:

Es werden im Beispiel 5 Integrierblöcke benötigt, wo „bessere“ Wirkungspläne nur zwei benötigen.
Ableitungen der Ausgangsgröße (z. B.. Anfangsgeschwindigkeit v0 bei Ausgangsposition s0) können nicht eingetragen werden.

In der Vorlesung Regelungstechik im Kapitel „Normalformen der Zustandsraumdarstellung“ wird gezeigt, wie das erste Problem umgangen werden kann.

Allerdings führt dies oft zu „unphysikalischen“ Zwischengrößen (so genannten Zustandsgrößen), die dann keine Angabe von Anfangswerten zu lassen.

Dann ist eine stärker an die Physik angelehnte Block für Block Simulation sinnvoller.

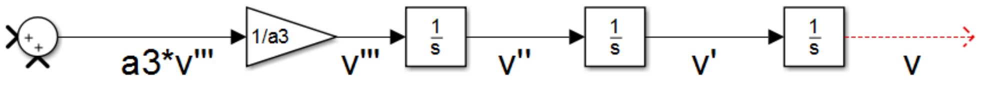
Der Weg zu einer Normalform wird im Folgenden kurz angedeutet, ohne komplett hergeleitet zu werden. Hierzu wird ein Wirkungsplan zunächst mit einem Diff-Block erstellt und dieser dann „verschoben“.

$$a3 \cdot \dddot{v} + a2 \cdot \ddot{v} + a1 \cdot \dot{v} + a0 \cdot v = b0 \cdot u + b1 \cdot \dot{u}$$

$$a3 \cdot \dddot{v} = b0 \cdot u + b1 \cdot \dot{u} - a2 \cdot \ddot{v} - a1 \cdot \dot{v} - a0 \cdot v$$

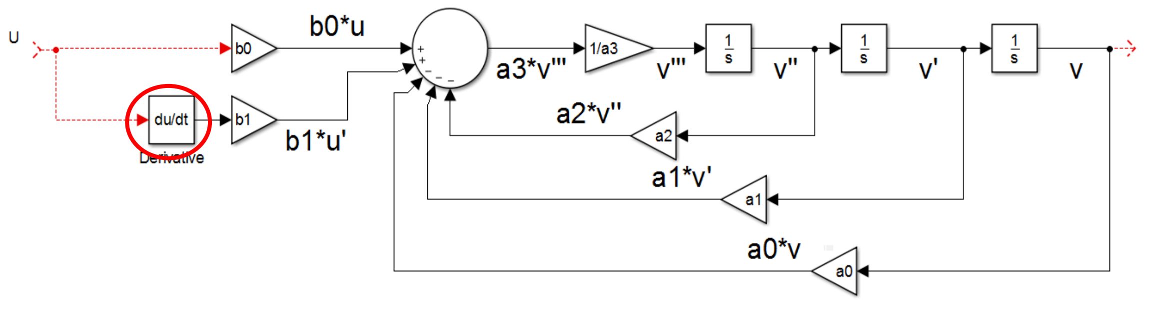
Bei Schritt 1 gibt es keine Probleme…

$$a3 \cdot \dddot{v} = b0 \cdot u + b1 \cdot \dot{u} - a2 \cdot \ddot{v} - a1 \cdot \dot{v} - a0 \cdot v$$



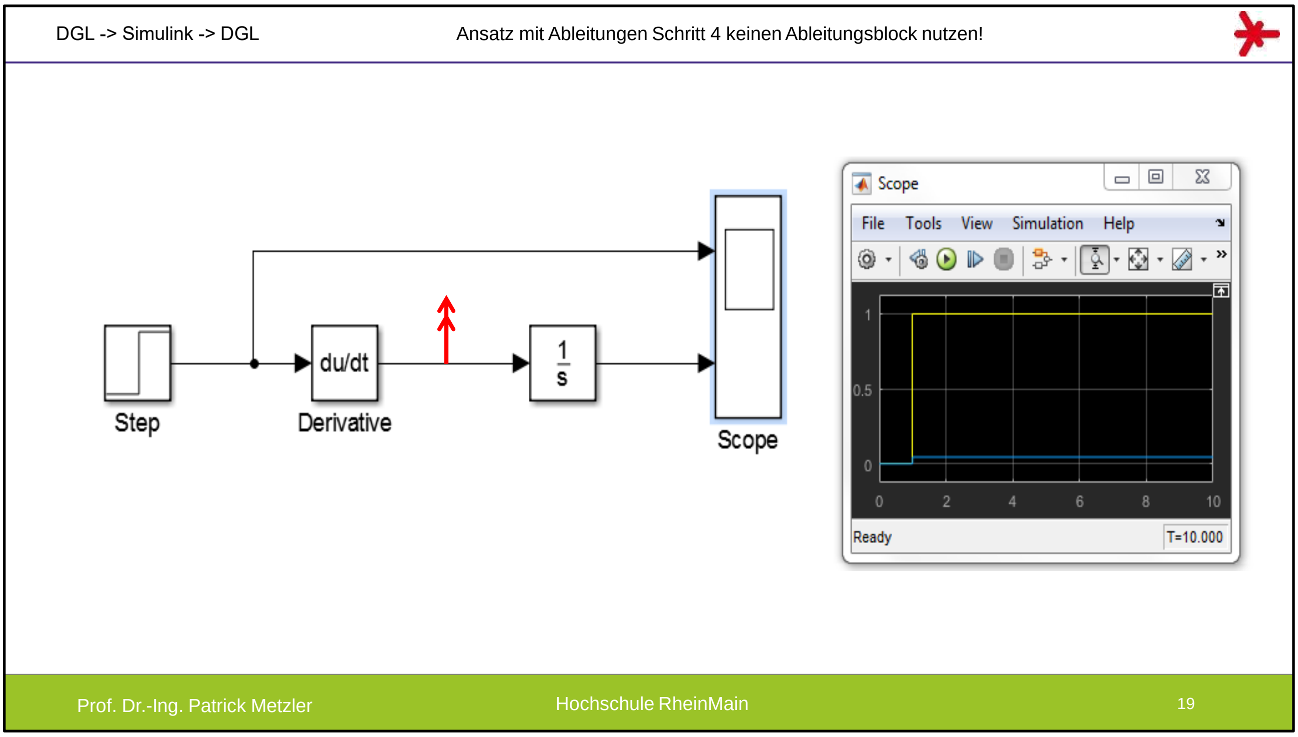
Wie weiter vorher, auflösen nach Term mit höchster Ableitung der Ausgangsgröße, auf integrieren zur Ausgangsgröße. (Schritt 1,2,3 des einfachen Kochrezepts)

$$a3 \cdot \dddot{v} = b0 \cdot u + b1 \cdot \dot{u} - a2 \cdot \ddot{v} - a1 \cdot \dot{v} - a0 \cdot v$$



Selbst Schritt 4 ist sehr einfach, wenn man einen Ableitungsblock benutzt.

Aber eine wichtige Faustregel für Simulink heißt: Benutze keinen Ableitungsblock. Natürlich gibt es Ausnahmen zu dieser Regel, aber schauen wir uns zunächst einmal an, warum diese Regel wichtig ist.

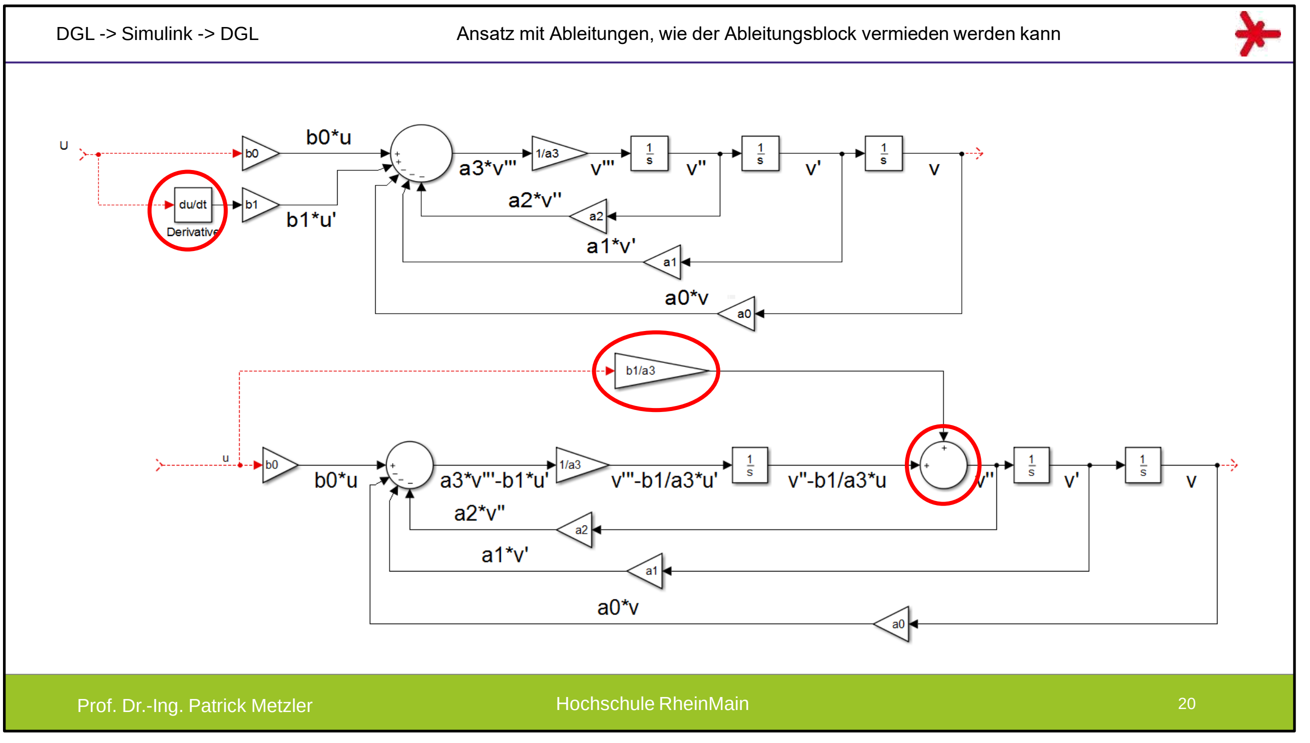


Abhängig von den Solver-Einstellungen im Simulink können Ableitungsblöcke zu falschen numerischen Ergebnissen führen. Im Beispiel sollten das blaue Signal und das gelbe Signal identisch sein. (Immerhin ist der gute alte Euler Algorithmus davon nicht betroffen).

Weiterhin erhalten wir unzulässig hohe Zwischensignale, wenn der Eingang mit einem Sprung angeregt wird.

Eine Realisation eines Ableitungsblocks in Hardware wäre deshalb auch nicht möglich.

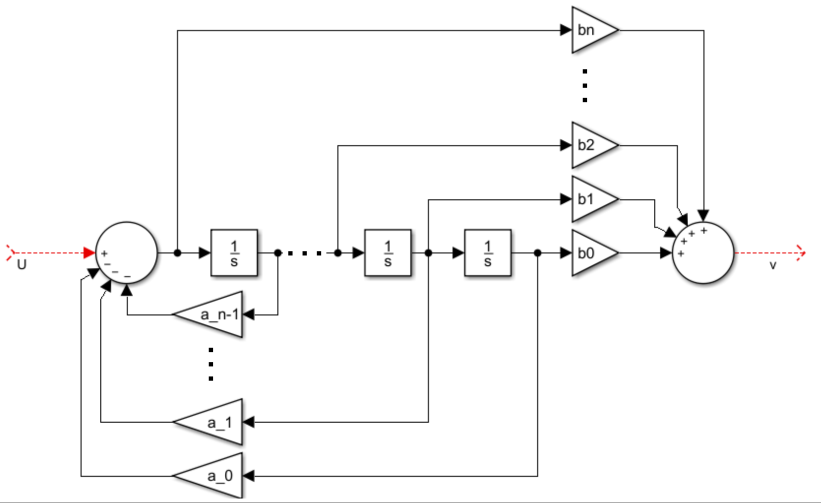
Deshalb sollen die Ableitungsblöcke vermieden werden.



Ein Ansatz besteht nun darin, dass sich ein Ableitungsblock und ein Integrierer gegenseitig kompensieren sollen. Ein zu differenzierendes Signal wird erst weiter rechts im Signalpfad eingekoppelt, an einem Punkt, an dem es im Original-Wirkungsplan schon einen Integrierer passiert hat. Im Beispiel ist dies der Integrierer zwischen v''' und v''. Der Differenzierblock kann dadurch entfallen. Es entstehen aber kompliziertere Zwischengrößen. Während man bei einfachen Systemen diese Umformung noch von Hand durchführen kann, wird die Lage bei größeren Systemen schnell unübersichtlich.

Ohne Beweis soll deshalb eine Kochrezept zur Umformung einer DGL mit vielen Ableitungen der Eingangsgröße in ein Simulink-Modell angegeben werden. Es können aber prinzipiell nur dann Ableitungsblöcke vermieden werden, wenn das System insgesamt kein differenzierendes Verhalten zeigt, das heißt die Ausgangsgröße öfter abgeleitet wird als die Eingangsgröße.

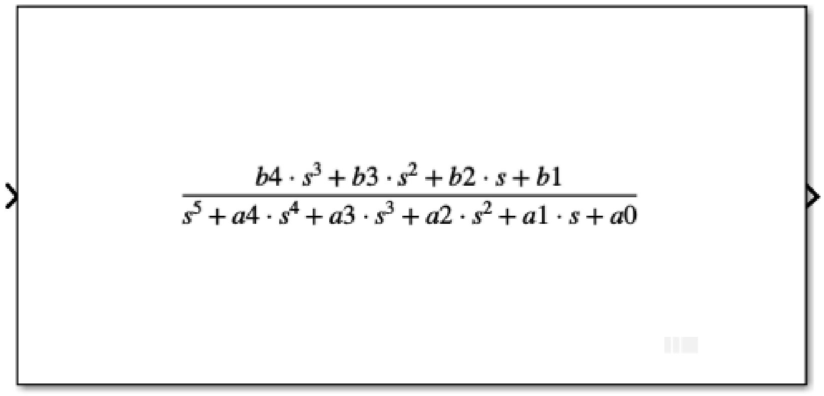
$$1 \cdot v^{(n)} + a_{n-1} \cdot v^{(n-1)} \ldots + a_1 \cdot v^{(1)} + a_0 \cdot v^{(0)} =$$
$$b_n \cdot u^{(n)} + b_{n-1} \cdot u^{(n-1)} \ldots + b_1 \cdot u^{(1)} + b_0 \cdot u^{(0)}$$



Wir erhalten also als erstes Hauptergebnis:

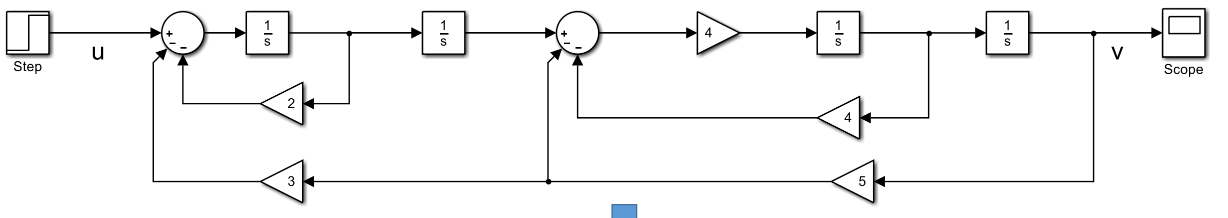
Ein System der Bauart …, wobei die Zahlen in Hochkomma die Ordnung der Ableitungen kennzeichnen, kann in Simulink folgender Weise modelliert werden:

$$1 \cdot v^{(n)}(t) + \ldots + a_1 \cdot v^{(1)}(t) + a_0 \cdot v(t) = b_0 \cdot u(t) + b_1 \cdot u^{(1)}(t) + \ldots b_n \cdot u^{(n)}(t)$$



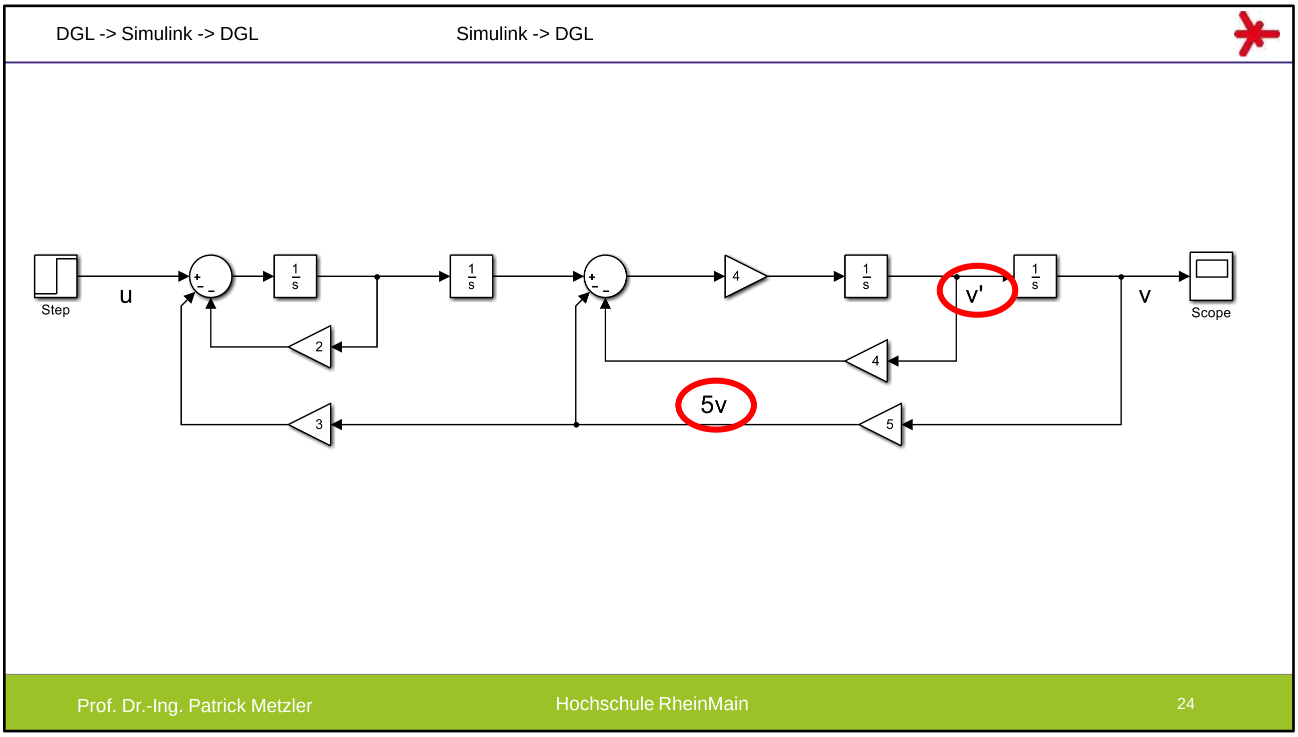
Es gibt in Simulink zu diesem Zweck auch einen vorbereiteten Block. Dieser kann aber nur verwendet werden, wenn alle Anfangswerte Null sind.

Simulink ->DGL



$$1 \cdot v^{(n)} + a_{n-1} \cdot v^{(n-1)} \ldots + a_1 \cdot v^{(1)} + a_0 \cdot v^{(0)} =$$
$$b_n \cdot u^{(n)} + b_{n-1} \cdot u^{(n-1)} \ldots + b_1 \cdot u^{(1)} + b_0 \cdot u^{(0)}$$

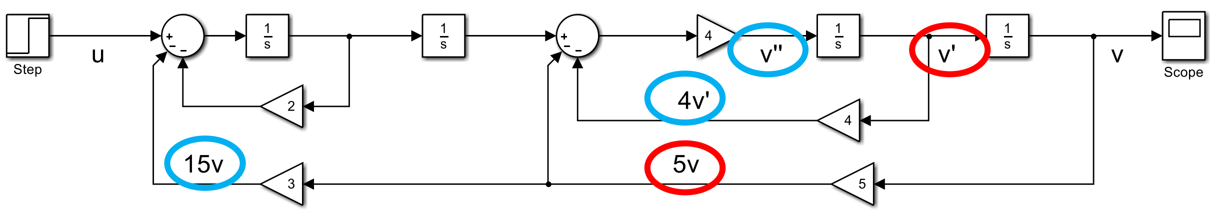
Hier nun ein Beispiel für die andere Richtung: Wie kommt man vom Modell zur DGL?



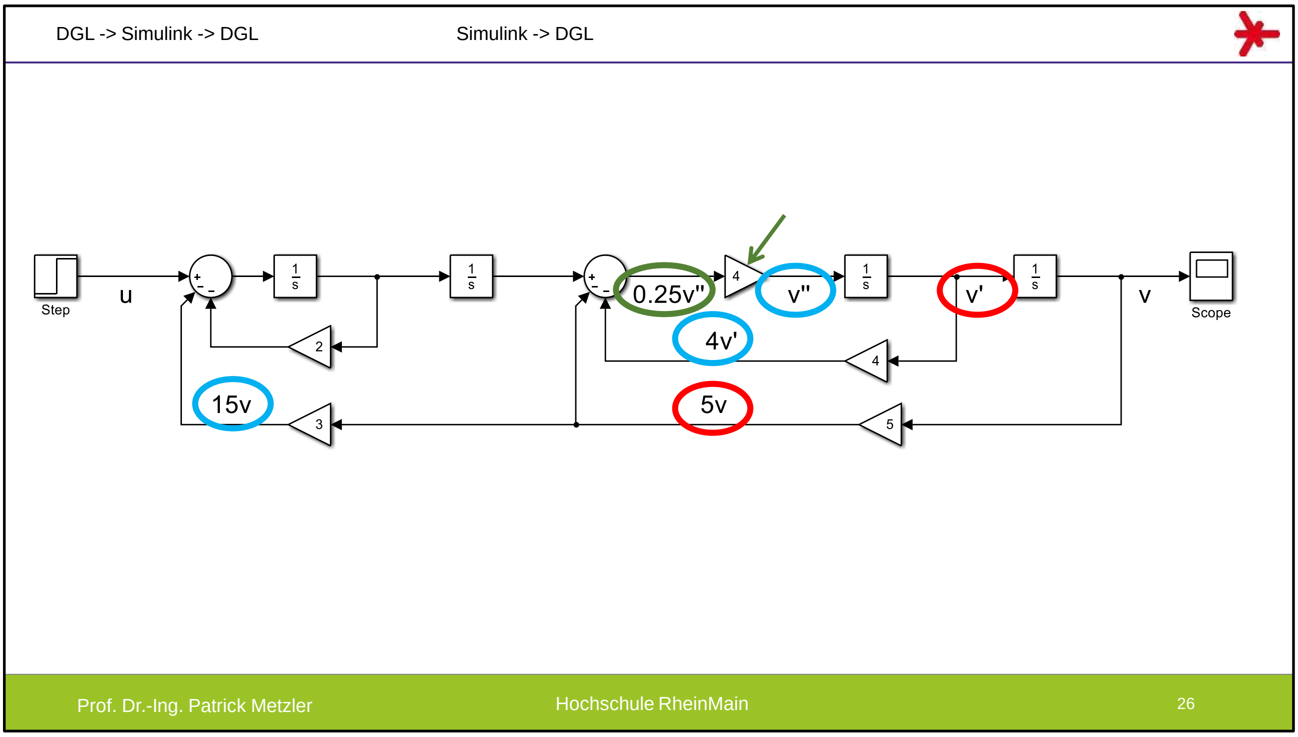
Wir gehen von ganz außen (Eingangs- und Ausgangsblöcke) einen Schritt nach innen.

Der Gainblock unten links (k=5) hat als Eingang v, sein Ausgang ist 5v, die entsprechende Wirkungslinie wird mit 5 v beschriftet.

Der Integrator mit Ausgang v muss an seinem Eingang v‘ sehen, sonst könnte v ja nicht herauskommen. Wir laufen also sozusagen „rückwärts“ durch den Integrator und kennzeichnen die entsprechende Wirkungslinie.



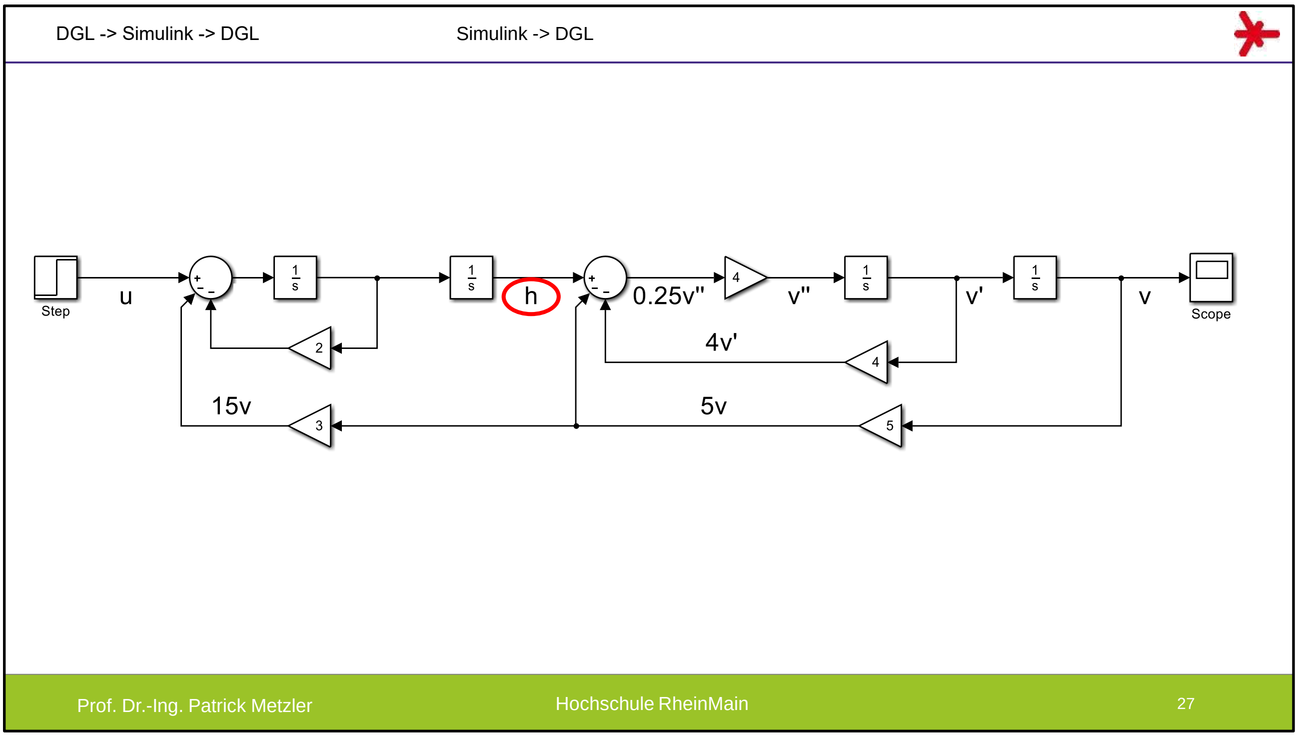
Von den roten Zwischenergebnissen aus erfolgt jeweils ein weiterer Schritt vorwärts (in Richtung der Wirkungslinien) oder rückwärts (entgegen der Richtung der Wirkungslinien.



And dann noch einmal ein Schritt vorwärts oder rückwärts…

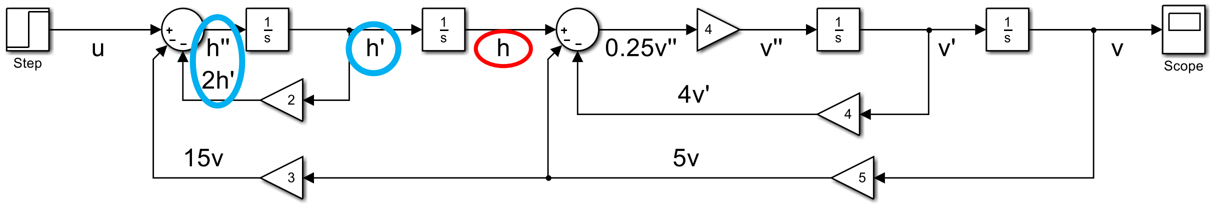
Beachten Sie auch den Schritt rückwärts durch den Block mit der Verstärkung 4. Was mal vier gibt v‘‘. Das Ergebnis ist ¼ v‘‘.

Es geht nun weder vorwärts noch rückwärts weiter, ohne auf einen Summierblock zu stoßen. In einfachen Fällen kann auch der Weg durch den Summierblock im Kopf erledigt werden. Meistens ist es aber einfacher eine Zwischenvariable einzuführen.



Bei n Summierblöcken können wir bis zu n-1 Hilfsvariablen einführen. In unserem Beispiel ist n=2, wir brauchen also nur eine Hilfsvariable.

Man wähle ein unbekanntes Eingangssignal als Hilfsvariable und laufe von da ab wieder vorwärts und rückwärts.



Linker Summierblock:

$$u - 15 \cdot v - 2 \cdot \dot{h} = \ddot{h}$$

Rechter Summierblock:

$$h - 5 \cdot v - 4 \cdot \dot{v} = 0.25 \cdot \ddot{v}$$

Danach werden die Gleichungen der Summierblöcke aufgeschrieben

Rechter Summierer:

$$h - 5 \cdot v - 4 \cdot \dot{v} = 0.25 \cdot \ddot{v}$$

Linker Summierer:

$$u - 15 \cdot v - 2 \cdot \dot{h} = \ddot{h}$$

$$h = 0.25 \cdot \ddot{v} + 5 \cdot v + 4 \cdot \dot{v}$$

$$\dot{h} = 0.25 \cdot \dddot{v} + 5 \cdot \dot{v} + 4 \cdot \ddot{v}$$

$$\ddot{h} = 0.25 \cdot v^{(4)} + 5 \cdot \ddot{v} + 4 \cdot \dddot{v}$$

$$u - 15 \cdot v - 2 \cdot (0.25 \cdot \dddot{v} + 5 \cdot \dot{v} + 4 \cdot \ddot{v}) = 0.25 \cdot v^{(4)} + 5 \cdot \ddot{v} + 4 \cdot \dddot{v}$$

$$v^{(4)} + 18 \cdot \dddot{v} + 52 \cdot \ddot{v} + 40 \cdot \dot{v} + 60 \cdot v = 4 \cdot u$$

Nun wird nach dem unbekannten Signal h aufgelöst,

Die Ableitungen von h werden berechnet und z. b. in die Gleichung des linken Summierers eingesetzt.

Somit ergibt sich eine erste DGL ,

die dann noch zusammengefasst werden kann.

Rechter Summierer:

$$h - 5 \cdot v - 4 \cdot \dot{v} = 0.25 \cdot \ddot{v}$$

Linker Summierer:

$$u - 15 \cdot v - 2 \cdot \dot{h} = \ddot{h}$$

$$h = 0.25 \cdot \ddot{v} + 5 \cdot v + 4 \cdot \dot{v}$$

$$\dot{h} = 0.25 \cdot \dddot{v} + 5 \cdot \dot{v} + 4 \cdot \ddot{v}$$

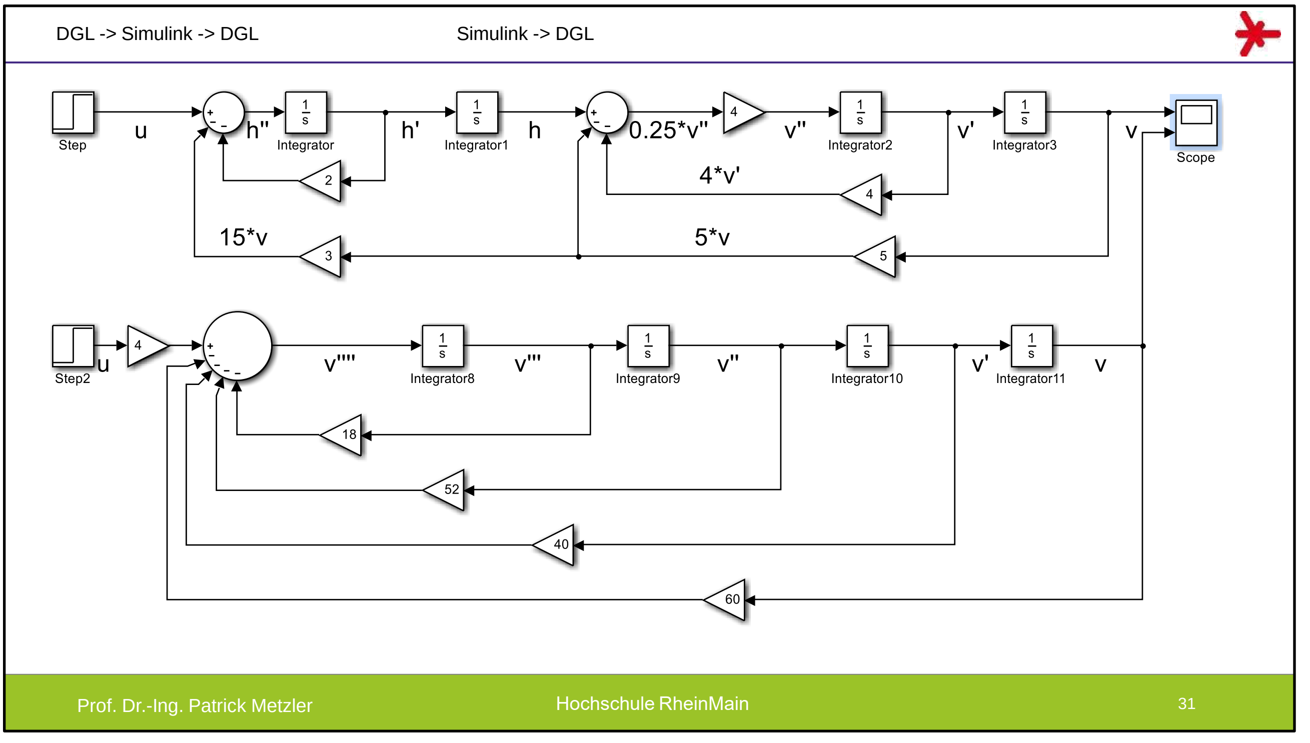
$$\ddot{h} = 0.25 \cdot v^{(4)} + 5 \cdot \ddot{v} + 4 \cdot \dddot{v}$$

Versuche dies in Simulink

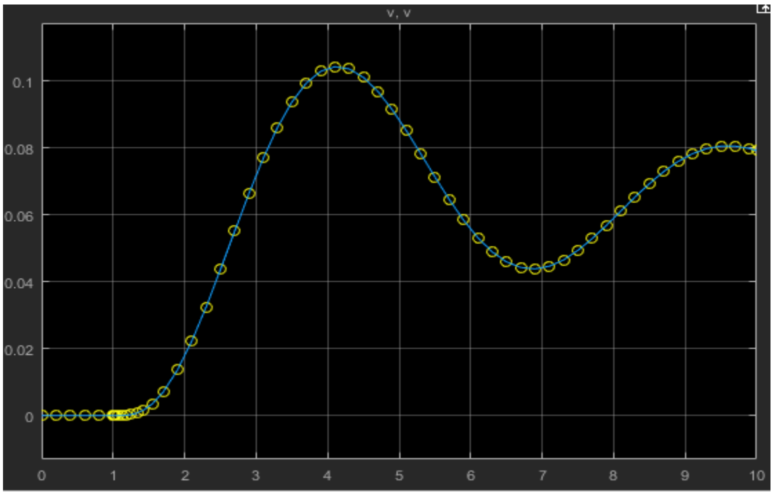
$$\downarrow$$

$$v^{(4)} + 18 \cdot \dddot{v} + 52 \cdot \ddot{v} + 40 \cdot \dot{v} + 60 \cdot v = 4 \cdot u$$

Zur Kontrolle dieser DGL, wird die gerade gefundene DGL wieder in einen Wirkungsplan umgeformt und in Simulink das Ergebnis mit dem ursprünglichen Wirkungsplan verglichen.



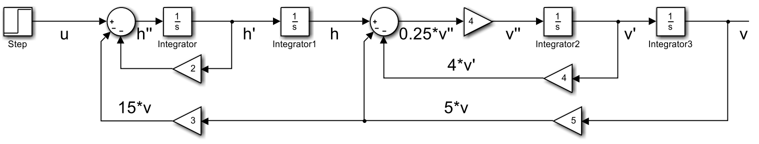
Wenn wir alles richtig gemacht haben, müssen beide Wirkungspläne zum gleichen Ergebnis führen.



Zum besseren Vergleich ist ein Wirkungsplan mit einer blauen Linie dargestellt und der andere mit gelben Kreisen. Beide Wirkungspläne führen zum gleichen Kurvenverlauf.

DGL -> Simulink -> DGL Zusammenfassung

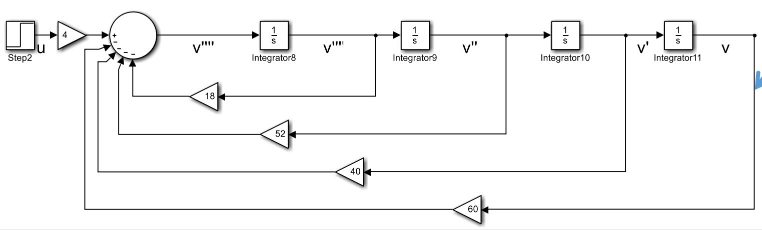
Zusammenfassung



Simulink -> DGL

$$v^{(4)} + 18 \cdot \dddot{v} + 52 \cdot \ddot{v} + 40 \cdot \dot{v} + 60 \cdot v = 4 \cdot u$$

DGL -> Simulinkink



Prof. Dr.-Ing. Patrick Metzler Hochschule RheinMain 33

Wir haben also gerade eine kleine Rundreise unternommen. Die erste Etappe führte uns von einem Wirkungsplan zu einer DGL, die zweite Etappe von der DGL wieder zurück zu einem Wirkungsplan.

Es gibt immer mehrere Varianten von Wirkungsplänen, die das gleiche Ein-Ausgabeverhalten zeigen.

$$m \cdot \ddot{s} + D \cdot \dot{s} + C \cdot s = Fg$$

$$\frac{m}{kg} \cdot \frac{\ddot{s}}{m/s^2} + \frac{D}{\frac{N}{m/s}} \cdot \frac{\dot{s}}{m/s} + \frac{C}{N/m} \cdot \frac{s}{m} = \frac{Fg}{N}$$

$$\frac{m}{\color{blue}{kg}} \cdot \frac{\ddot{s}}{\color{blue}{m/s^2}} + \frac{D}{\color{blue}{\frac{N}{m/s}}} \cdot \frac{\dot{s}}{\color{blue}{m/s}} + \frac{C}{\color{blue}{N/m}} \cdot \frac{s}{\color{blue}{m}} = \frac{Fg}{\color{blue}{N}}$$

Simulink selber kann nur mit Zahlen arbeiten. Wir brauchen also ein Verfahren die physikalischen Größen, bestehend aus Zahlenwert und Einheit, auf die Zahlen zu reduzieren. Die einfachste Variante sieht so aus:

Starte mit der Größengleichung und teile jede Größe durch die sie beschreibende kohärente si-Einheit. Eine kohärente si-Einheit kann als Produkt von si-Basiseinheiten ohne zusätzliche Zahlenfaktoren geschrieben werden.

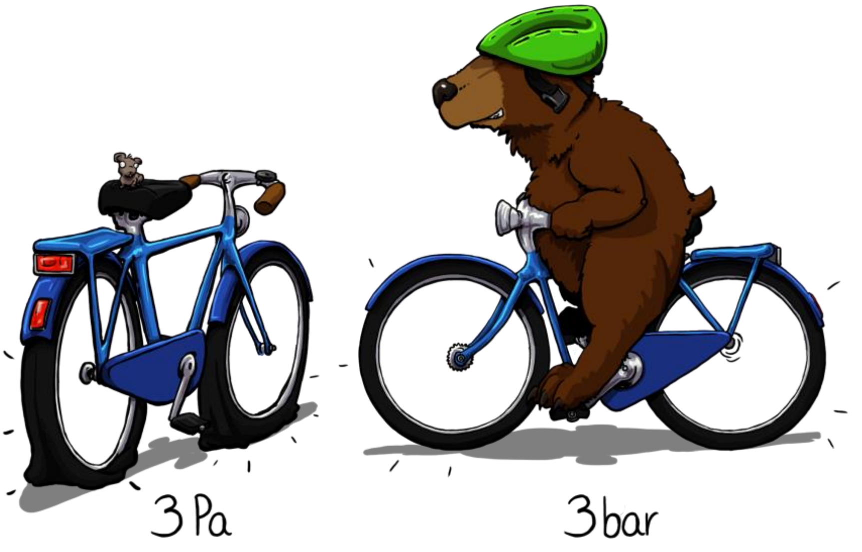
Die Krafteinheit 1N kann als kg/m/s/s geschrieben werden und ist daher eine kohärente si-Einheit. Ein bar entspricht 10^5 N/m/m, ist also wegen dem Faktor 10^5 keine kohärente si-Einheit.

Da alle Summanden der Originalgleichung die gleiche Einheit haben, werden alle Summanden nun auch durch die gleiche Einheit geteilt, wir haben also eine Äquivalenzumformung durchgeführt. Etwas kompliziert ist der Umstand, dass man nun zwei Sätze von Formelzeichen hat, einen für die physikalischen Größen und einen für die Einheiten. Der Buchstabe „m“ kann so zum Beispiel die physikalische Größe Masse oder die Einheit Meter bezeichnen. Der Buchstabe „s“ kann für die physikalische Größe Strecke und für die Einheit Sekunden stehen. Um dies unterscheiden zu können, werden bis auf Weiteres die physikalischen Größen schwarz und die Einheiten blau geschrieben.

Statt der Größe Masse m wird nun die einheitenfreie Zahl m/kg, statt der Beschleunigung a die Zahl a/m/s/2 benutzt usw.

Ganz korrekt sollte man dann eigentlich einen Variablennamen wie zum Beispiel m_in_kg für den Term m/kg benutzten. Aus Bequemlichkeit nutzt man meistens aber wieder den gleichen Buchstaben m für die dimensionslose Masse. Genau so haben wir es bisher in dieser Veranstaltung gehalten, wenn wir geschrieben haben m=0.2 oder D=1.

Viele Ingenieure gehen glücklich und zufrieden in Rente, ohne jemals anders mit Einheiten umgegangen zu sein als oben beschrieben. Andererseits sind die kohärenten Einheiten nicht immer wirklich passend, wie das folgende Beispiel zeigt:

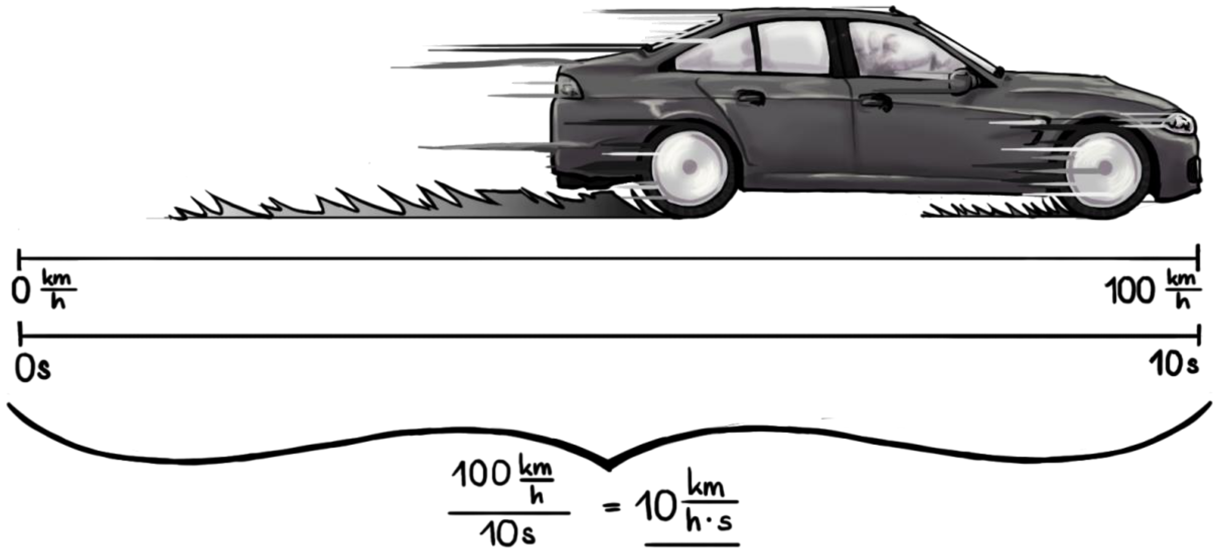


Ein Hydraulik Ingenieur würde nie einen Druck in N/m^2 angeben.

Technische Drücke werden eher in bar oder psi angegeben.

Einheiten

SI-Einheiten manchmal unpraktisch 2



Prof. Dr.-Ing. Patrick Metzler

Hochschule RheinMain

36

Die häufigste Einheit für eine Beschleunigung lautet nicht m/s^2 sondern km/h*s. So steht es in den Datenblättern und sogar schon in den Autoquartettspielen, wenn die Rede von einer Beschleunigung von 0 auf 100 km/h in 10 s ist. Die Beschleunigung ist dann also 100km/h/10s=10km/h*s.

$$\frac{m}{kg}\cdot\frac{\ddot{s}}{m/s^2}+\frac{D}{\frac{N}{m/s}}\cdot\frac{\dot{s}}{m/s}+\frac{C}{N/m}\cdot\frac{s}{m}=\frac{Fg}{N}$$

$$\frac{m}{kg}\cdot\frac{t}{t}\cdot\frac{\ddot{s}}{m/s^2}\cdot\frac{m/h^2}{m/h^2}+\frac{D}{\frac{N}{m/s}}\cdot\frac{\frac{kN}{mm}\cdot ms}{\frac{kN}{mm}\cdot ms}\cdot\frac{\dot{s}}{m/s}\cdot\frac{mm/s}{mm/s}+\frac{C}{N/m}\cdot\frac{N/m}{N/m}\cdot\frac{s}{m}\cdot\frac{mm}{mm}=\frac{Fg}{N}\cdot\frac{kN}{kN}$$

$$\frac{m}{kg}\cdot\frac{t}{t}\cdot\frac{\ddot{s}}{m/s^2}\cdot\frac{m/h^2}{m/h^2}+\frac{D}{\frac{N}{m/s}}\cdot\frac{\frac{kN}{mm}\cdot ms}{\frac{kN}{mm}\cdot ms}\cdot\frac{\dot{s}}{m/s}\cdot\frac{mm/s}{mm/s}+\frac{C}{N/m}\cdot\frac{N/m}{N/m}\cdot\frac{s}{m}\cdot\frac{mm}{mm}=\frac{Fg}{N}\cdot\frac{kN}{kN}$$

Zurück zu unserem Masse Feder Dämpfer Beispiel. In einem gegebenen Anwendungsumfeld sei es üblich die Masse in Tonnen, die Dämpferkonstante in kN/(mm/ms), die Federkonstante in N/m und die Gravitationskraft in KN anzugeben. Für die Beschleunigung wird m/h^2, für die Geschwindigkeit mm/s and für die Position mm gewählt. Wir werden noch sehen, dass die Zusammenstellung nicht sonderlich glücklich ist. Ich habe aber bewusst willkürlich Einheiten zusammengewürfelt um ganz allgemein zu zeigen, wie man damit umgehen kann.

In der auf kohärente Einheiten bezogenen Ausgangsgleichung wird nun jede Einzelgröße mit einer aufgeblähten 1 multipliziert, bei der die gewünschte Einheit sowohl im Zähler, wie auch im Nenner steht.

Beliebig bezogene dimensionslose Größen 2

$$\frac{m}{kg}\cdot\frac{t}{t}\cdot\frac{\ddot{s}}{m/s^2}\cdot\frac{m/h^2}{m/h^2}+\frac{D}{\frac{N}{m/s}}\cdot\frac{\frac{kN}{mm}\cdot ms}{\frac{kN}{mm}\cdot ms}\cdot\frac{\dot{s}}{m/s}\cdot\frac{mm/s}{mm/s}+\frac{C}{N/m}\cdot\frac{N/m}{N/m}\cdot\frac{s}{m}\cdot\frac{mm}{mm}=\frac{Fg}{N}\cdot\frac{kN}{kN}$$

$$\frac{m}{t}\cdot\frac{t}{kg}\cdot\frac{\ddot{s}}{m/h^2}\cdot\frac{m/h^2}{m/s^2}+\frac{D}{\frac{kN}{mm}\cdot ms}\cdot\frac{\frac{kN}{mm}\cdot ms}{\frac{N}{m/s}}\cdot\frac{\dot{s}}{mm/s}\cdot\frac{mm/s}{m/s}+\frac{C}{N/m}\cdot\frac{N/m}{N/m}\cdot\frac{s}{mm}\cdot\frac{mm}{m}=\frac{Fg}{kN}\cdot\frac{kN}{N}$$

Dann werden die Zähler gegeneinander getauscht.

Es gibt nun Brüche, die noch physikalische Größen im Zähler haben. Diese sind rot umrandet. Sie werden durch den Nenner auf die gewünschte Einheit bezogen. Insgesamt sind sie dimensionslos.

Ferner gibt es Brüche, die nur einen Quotient aus unterschiedlichen Einheiten darstellen. Die eigentlichen Größen der Aufgabenstellung m, D, C, F tauchen in ihnen nicht mehr auf (grüne Brüche). Die grünen Brüche lassen sich jeweils auf einen Zahlenwert reduzieren.

Beliebig bezogene dimensionslose Größen 3

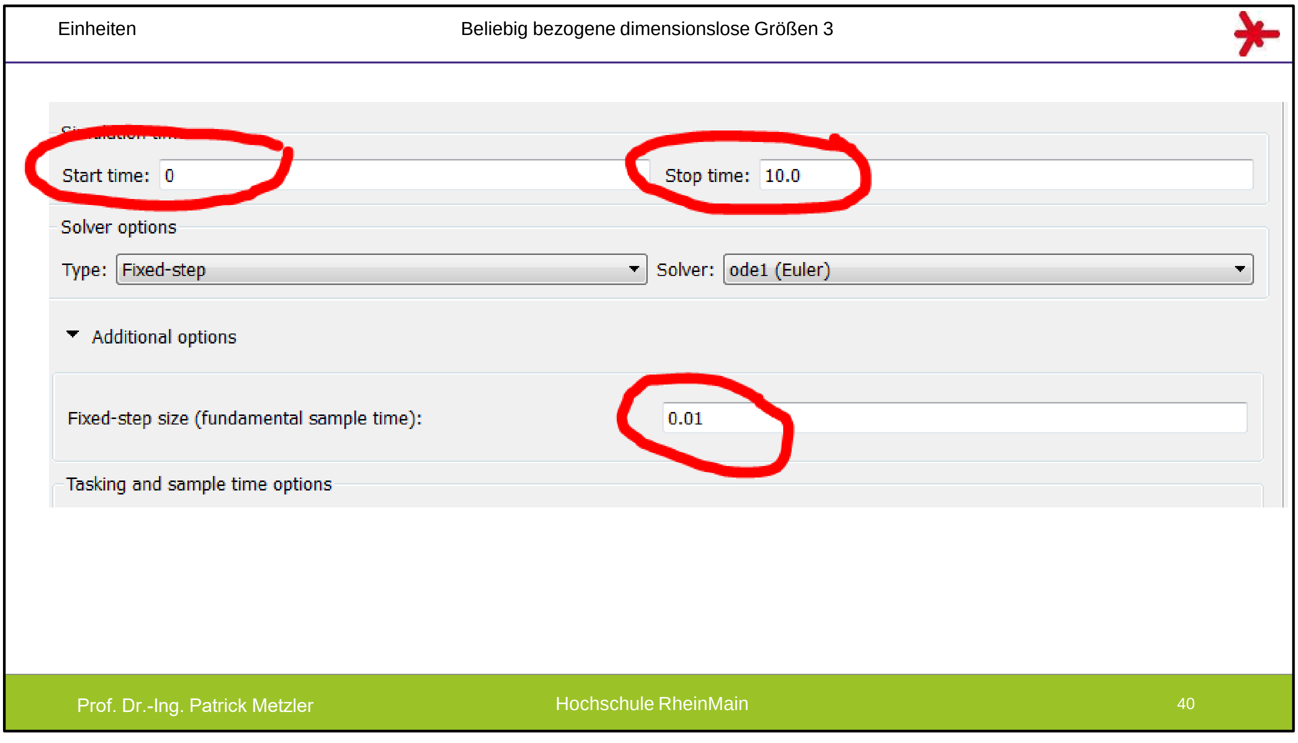
$$\frac{m}{t}\cdot\frac{1000kg}{kg}\cdot\frac{\ddot{s}}{m/h^2}\cdot\frac{m/(60\cdot 60s)^2}{m/s^2}+\frac{D}{\frac{kN}{mm}\cdot ms}\cdot\frac{\frac{1000N}{0.001m}\cdot 0.001s}{\frac{N}{m/s}}\cdot\frac{\dot{s}}{mm/s}\cdot\frac{0.001m/s}{m/s}+\frac{C}{N/m}\cdot\frac{N/m}{N/m}\cdot\frac{s}{mm}\cdot\frac{0.001m}{m}=\frac{Fg}{kN}\cdot\frac{1000N}{N}$$

$$\frac{m}{t}\cdot\frac{1000}{1}\cdot\frac{\ddot{s}}{m/h^2}\cdot\frac{1/(60\cdot 60)^2}{1}+\frac{D}{\frac{kN}{mm}\cdot ms}\cdot\frac{1000}{1}\cdot\frac{\dot{s}}{mm/s}\cdot\frac{0.001}{1}+\frac{C}{N/m}\cdot\frac{s}{mm}\cdot\frac{0.001}{1}=\frac{Fg}{kN}\cdot\frac{1000}{1}$$

$$\frac{m}{t}\cdot 1000\cdot\frac{\ddot{s}}{\frac{m}{h^2}}\cdot\frac{1}{3600\cdot 3600}+\frac{D}{\frac{kN}{mm}\cdot ms}\cdot 1000\cdot\frac{\dot{s}}{\frac{mm}{s}}\cdot 0.001+\frac{C}{\frac{N}{m}}\cdot\frac{s}{mm}\cdot 0.001=\frac{Fg}{kN}\cdot 1000$$

$$\frac{m}{t}\cdot\frac{\ddot{s}}{\frac{m}{h^2}}\cdot\frac{1}{36\cdot 360}+\frac{D}{\frac{kN}{mm}\cdot ms}\cdot\frac{\dot{s}}{\frac{mm}{s}}+\frac{C}{\frac{N}{m}}\cdot\frac{s}{mm}\cdot 0.001=\frac{Fg}{kN}\cdot 1000$$

Nach etwas Fleißarbeit, die in einem kleineren Zeichensatz dargestellt ist, erhält man nun das gewünschte Ergebnis einer dimensionslosen bezogenen Differentialgleichung.

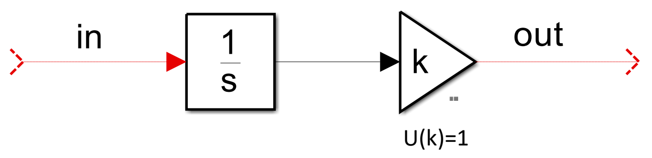


Bei der Arbeit mit Simulink gibt es noch drei zusätzliche Größen:

Die Startzeit, die Stoppzeit und die grundsätzliche Abtastzeit. In einem reinen Simulationsmodus können die Einheiten dieser Zeiten beliebig gewählt werden. Die einzige Einschränkung ist, dass für alle drei Zeiten die gleiche Einheit gewählt wird.

Bei der Arbeit mit an Simulink gekoppelter Hardware und support packages (z. B. Arduino) wird die Zeiteinheit automatisch auf 1 s gesetzt.

Einheiten beim Integrierer 1



Erster Integrationsschritt:

$$in \cdot dt = out$$

$$N(in) \cdot U(in) \cdot N(dt) \cdot U(dt) = N(out) \cdot U(out)$$

$$\frac{N(in) \cdot U(in) \cdot N(dt) \cdot U(dt)}{U(out)} = N(out)$$

Wenn man eine normierte dimensionslose DGL in Simulink eingibt, ist Vorsicht bei den Integrierblöcken geboten.

Die Einheit, auf die der Eingang des Integrierers bezogen wird und die Einheit, auf die der Ausgang des Integrierers bezogen wird und die Einheit des Zeitschritts kommen beim Integrierer alle zusammen.

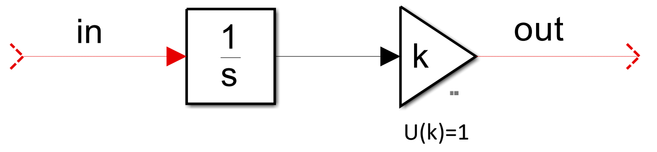
Zur einfacheren Erläuterung soll der Anfangswert des Integrierers auf Null gesetzt sein und nur der erste Integrierschritt betrachtet werden. Das gesagte gilt dann aber allgemein.

Die Funktion U(s) (engl. Unit) liefert die Einheit eines Signals s. The Funktion N(s) liefert den zugehörigen Zahlenwert.

Wir werden gleich sehen, dass bei beliebigen Einheiten für Ein- und Ausgang und Schrittweite der Integrator alleine nicht reicht, sondern ein Zusätzlicher Verstärker k mit Verstärkung k benötigt wird.

Einheiten

Einheiten beim Integrierer 2



Verlangt:

$$\frac{N(in)\cdot U(in)\cdot N(dt)\cdot U(dt)}{U(out)} = N(out)$$

Simulink:

$$N(out) = N(in)\cdot N(dt)\cdot k$$

$$\frac{U(in)\cdot U(dt)}{U(out)} = k$$

Prof. Dr.-Ing. Patrick Metzler

Hochschule RheinMain

42

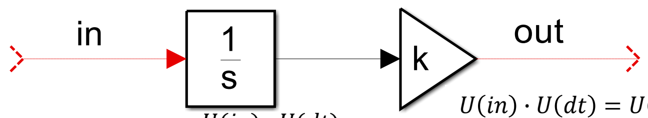
Wir wissen schon wie Simulink rechnet: $N(s_{out}) =_{Simulink} N(s_{in})\cdot N(dt)\cdot k$

Daraus ergibt sich der notwendige Wert von k:

$$\frac{U(s_{in})\cdot U(dt)}{U(s_{out})} = k$$

Einheiten

Einheiten beim Integrierer 2



$$\frac{U(in)\cdot U(dt)}{U(out)} = k \qquad U(in)\cdot U(dt) = U(out) \;\Rightarrow\; k = 1$$

Gute Wahl:

$$\frac{a}{m/h^2} \quad \frac{v}{m/h} \quad \frac{s}{m} \quad dt = 1h \qquad or \qquad \frac{a}{m/s^2} \quad \frac{v}{m/s} \quad \frac{s}{m} \quad dt = 1s$$

Schlechte Wahl:

$$\frac{a}{m/h^2} \quad \frac{v}{m/s} \quad \frac{s}{m} \quad dt = 1h \qquad or \qquad \frac{a}{m/s^2} \quad \frac{v}{m/h} \quad \frac{s}{m} \quad dt = 1s$$

Prof. Dr.-Ing. Patrick Metzler Hochschule RheinMain 43

Auf den Verstärker kann verzichtet werden (k kann 1 gewählt werden), wenn:

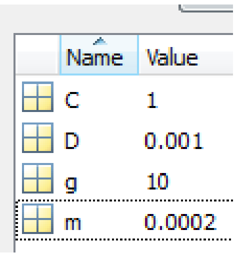
U(in) $\cdot\, U(dt) = U(out)$

Dies ist dann eine gute Wahl für die Einheiten. Man wählt eine Einheit der Schrittweite, die zum gegebenen Problem passt wie ein Jahr, ein Monat, eine Woche, ein Tag, eine Stunde, eine Minute, eine Sekunde, eine Millisekunde, eine Mikrosekunden,...

Aber dann sollte man versuchen die Einheiten für den Integrier-ein- und -Ausgang so zu wählen, dass k den Wert 1 erhält, der Verstärker also entfallen kann.

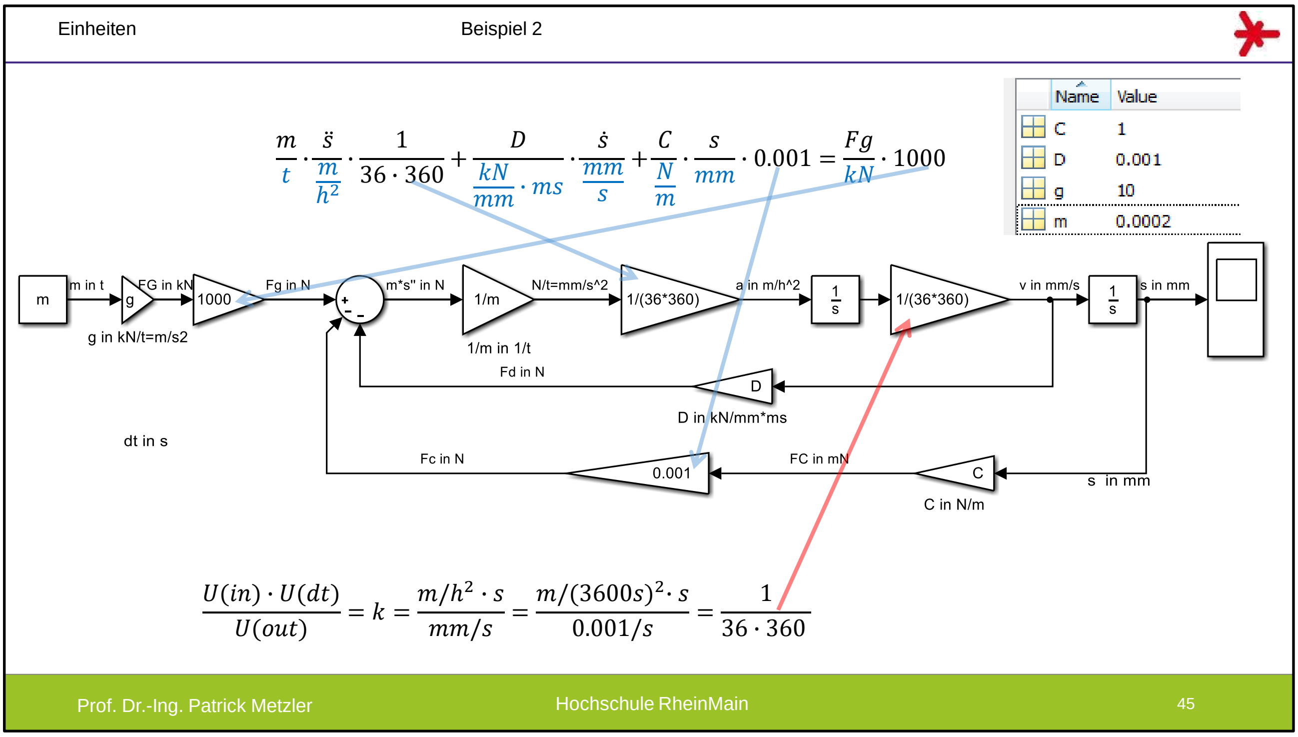
$$\frac{m}{t}\cdot\frac{\ddot{s}}{\frac{m}{h^2}}\cdot\frac{1}{36\cdot 360}+\frac{D}{\frac{kN}{mm}\cdot ms}\cdot\frac{\dot{s}}{\frac{mm}{s}}+\frac{C}{\frac{N}{m}}\cdot\frac{s}{mm}\cdot 0.001=\frac{Fg}{kN}\cdot 1000$$

Values in original units	Values in new Units
m=0.2 kg	m=0.0002 t
D=1 N/m/s	D=0.001 KN/mm/ms
C=1 N/m	C=1 N/m
g=10 m/s^2	g=10 m/s^2



Zurück zu unserem Masse Feder Dämpfer System.

Unsere Einheitenwahl ist ungünstig, da U(in) * U(dt) nicht bei allen Integratoren U(out) ergibt. Aber auf diese Weise ist unser Beispiel allgemein. Wir wollen es nun also in Simulink eingeben. Als erstes müssen wird die Zahlenwerte unserer Parameter passend zu den gewählten Einheiten bestimmen. Links in der Tabelle sieht man die Werte bei kohärenten si-Einheiten. Rechts sieht man die Größen in den gewählten Einheiten. Die entsprechenden Zahlenwerte werden im Modelexplorer eingegeben.



Hier ist das endgültige Modell in Simulink.

Drei Verstärkungsfaktoren werden durch die Faktoren in der bezogenen dimensionslosen Gleichung vorgegeben.

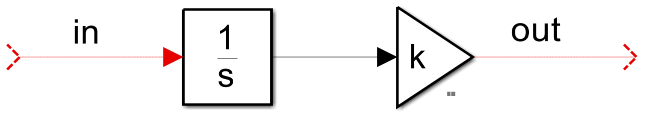
Ein Verstärkungsfaktor folgt als Faktor k beim Integrieren.

Der rechte Integrierer braucht keinen Faktor k, da dieser 1 wäre.

Zusammenfassung

$$\frac{m}{kg}\cdot\frac{\ddot{s}}{m/s^2}+\frac{D}{\frac{N}{m/s}}\cdot\frac{\dot{s}}{m/s}+\frac{C}{N/m}\cdot\frac{s}{m}=\frac{Fg}{N}$$

$$\frac{m}{t}\cdot\frac{\ddot{s}}{\frac{m}{h^2}}\cdot\frac{1}{36\cdot 360}+\frac{D}{\frac{kN}{mm}\cdot ms}\cdot\frac{\dot{s}}{\frac{mm}{s}}+\frac{C}{\frac{N}{m}}\cdot\frac{s}{mm}\cdot 0.001=\frac{Fg}{kN}\cdot 1000$$



$$\frac{U(in)\cdot U(dt)}{U(out)}=k \qquad U(in)\cdot U(dt)=U(out) \quad\Rightarrow\quad k=1$$

Zusammenfassung:

Das Leben ist einfach, wenn man kohärente SI-Einheiten benutzt.

Da diese oft nicht gut zur Beschreibung eines gegebenen Problems passen, muss man oft mit bezogenen dimensionslosen DGLs arbeiten.

Beachten Sie, dass der Integrator einen Korrekturfaktor k benötigt, wenn nicht $U(in)\cdot U(dt)=U(out)$ gewählt wurde.