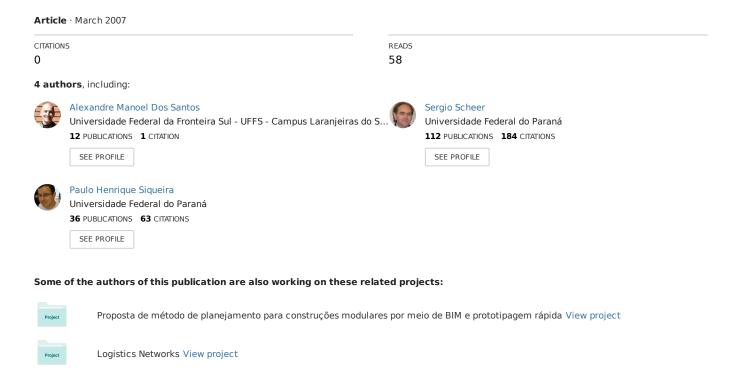
# O PROBLEMA DA ALOCAÇÃO DE PROFESSORES NA UNIVERSIDADE DO CONTESTADO - UNC - CAMPUS CANOINHAS: UM ESTUDO DE CASO SOB A PERSPECTIVA DA DESIGNAÇÃO E SUA SOLUÇÃO POR MEIO DA PROGRAMAÇÃ...



O PROBLEMA DA ALOCAÇÃO DE PROFESSORES NA UNIVERSIDADE DO CONTESTADO – UNC – CAMPUS CANOINHAS: UM ESTUDO DE CASO SOB A PERSPECTIVA DA DESIGNAÇÃO E SUA SOLUÇÃO POR MEIO DA PROGRAMAÇÃO INTEIRA COM VARIÁVEIS BINÁRIAS

Alexandre Manoel dos Santos, M.Sc. - alexandre.manoel.dos.santos@gmail.com Fundação Centro Universitário da Cidade de União da Vitória – UNIUV LEXCIA – Laboratório Experimental de Computação e Informática, União da Vitória/PR Universidade do Contestado – UnC – Campus Canoinhas NAPI – Núcleo de Apoio à Prática de Informática, Canoinhas/SC, salex@cni.unc.br

**Sérgio Scheer, Dr. Eng.** – scheer@ufpr.pr Universidade Federal do Paraná – UFPR – Setor de Tecnologia Centro Politécnico – Departamento de Desenho – Jardim das Américas, Curitiba/PR

**Abstract.** This approach describes a methodology to solve the professor's allocation problem at Contestado's University (UnC) - Campus Canoinhas/SC/Brazil. With more than 12.000 binary variables and more than 7.000 constraints, the model described in this approach provided a optimal solution to allocate 260 teachers to 648 courses in 122 sections of 31 departments, geographically distributed at UnC context on 4 distinct sites. The obtained solution corresponds to an allocation that was adopted in 100% in the second semester of 2006. To solve this problem a computational system was developed, specially built for this purpose, in three layers architecture. The first one is represented by a motor that generates, automatically, a suitable set of equations and constraints, in accordance with good practices on building models related to Operational Research theory, following the symbolism of Integer Programming with binary variables. The second layer is represented by another motor, obtained from Dash Associates, which license token is #25132, under academic status, that solves the model. In the last one, a computational subsystem was built to accomplish the visualization process over the generated results. The solution deployment, that was a success, is an important element of this approach and, in fact, had changed the day-to-day of involved persons with professor's allocation tasks at UnC.

Keywords: Operational research, Allocation problem, Integer programming, Binary variable

# 1. INTRODUÇÃO

O período letivo de uma universidade é sempre precedido de um conjunto de atividades técnicas e administrativas que fornecem a base para o seu planejamento. Das atividades técnicas necessárias, destaca-se aqui aquela que é responsável pelo processo de definição da oferta de disciplinas em horários adequadamente escolhidos, visando conciliar os interesses, dos alunos, dos professores, dos coordenadores de curso e da diretoria acadêmica. É um problema comum na maioria das instituições de ensino, cuja solução, do ponto de vista da Pesquisa Operacional (PO), é trivial e tem sido descrita, modelada, implementada e implantada por diversos autores, em diversas situações. Entretanto, algumas instituições possuem características tão peculiares que justificam um novo relato. É o caso da Universidade do Contestado - UnC - Campus Canoinhas, em Santa Catarina. Com mais de 12.000 (doze mil) variáveis binárias e mais e 7.000 (sete mil) restrições, o modelo descrito nessa abordagem forneceu uma solução adequada para que 260 (duzentos e sessenta) professores ministrem 648 (seiscentos e quarenta e oito) disciplinas, ofertadas em 4 (quatro) locais diferentes e distribuídas em 122 (cento e vinte e duas) turmas de 31 (trinta e um) cursos superiores distintos, envolvendo 1.025 (um mil e vinte e cinco) alocações de 2 (duas) horas/aula. A solução numérica obtida correspondeu a 100% do horário que foi adotado pela UnC para o segundo semestre do ano de 2006.

A peculiaridade deste caso reside, principalmente, no fato de que a instituição utiliza uma sistemática específica para que professores escolham as disciplinas que vão lecionar num dado semestre. Essa sistemática operacionaliza um conjunto de procedimentos, especificados previamente em seus ordenamentos jurídicos, e em outros instrumentos legais pertinentes, que, em síntese, regem o processo de credenciamento e de pontuação dos professores envolvidos, estabelecendo uma "fila" para escolha de disciplinas. A UnC possui outra característica intrínseca relevante: um grande número de professores "horistas", a maioria deles com fortes restrições sobre suas disponibilidades de tempo. Esses aspectos, *sui generis*, induziram um esforço adicional no processo de modelagem do problema e agregaram valor à abordagem de busca e implantação da sua solução.

### 2. OBJETIVOS

Este trabalho possui dois objetivos. O primeiro deles é simples e conceitual: mostrar que as ferramentas da PO utilizadas nesta abordagem produziram uma solução que, além de comprovadamente exeqüível do ponto de vista de seu simbolismo e significação matemática, ao ser implantada, modificou significativamente a realidade vivida pelas pessoas na instituição, como consequência lógica da decodificação da solução do modelo proposto para o mundo real. Esse objetivo está alinhado com a aplicação de uma função importante da PO. Segundo Ackoff (1979, p. 466), implantar uma solução de um modelo simbólico exige muita responsabilidade e experiência no processo de modelagem do problema, e compromisso com a aceitabilidade e com a aceitação da solução adotada: "[...]. Na Pesquisa Operacional, entretanto, como o objetivo consiste em melhorar o desempenho do sistema, a pesquisa não estará completa até que o melhoramento seja obtido, e, ainda, mantido e controlado".

Na UnC, o compromisso com esse objetivo, exigido pela diretoria acadêmica, implicou em assumir o desafio da implantação da solução numérica obtida como um processo consciente de definição e de modificação do seu "cotidiano real". Esse processo influenciou efetivamente o seu modo de "funcionar" no semestre seguinte, na sua relação com as pessoas que vivem o seu espaço e tempo. Após a implantação da solução, algumas evidências da melhora da qualidade no ambiente foram percebidas de imediato. O fim do *stress* gerado nas pessoas pelos sucessivos "choques" de horários durante a construção da solução de forma

manual (antes da abordagem) é um exemplo. Com a solução gerada "automaticamente" foi possível dedicar mais tempo para discussão dos aspectos qualitativos associados ao horário e também dos impactos gerados pela solução, facilitando a tarefa de realização dos "ajustes finos" necessários antes da sua implantação.

O segundo objetivo deste trabalho é mais pragmático: descrever completamente a abordagem utilizada para resolver o problema no âmbito da Universidade do Contestado. Por meio dela, a implantação da solução numérica foi exitosa. Procedeu-se o desenvolvimento de um sistema computacional com a finalidade única de realizar a integração de três elementos importantes, que são: (i) o modelo simbólico do problema; (ii) a geração de sua solução numérica e, por último, (iii) a visualização dos resultados obtidos, na forma de horários de aula já decodificados para a linguagem natural dos professores e alunos.

#### 3. ABORDAGEM UTILIZADA

Essa abordagem descreve o referido sistema computacional numa arquitetura de tripla camada, conforme mostra a Figura 1. A primeira camada é representada por um motor gerador do sistema de equações do modelo da PO, construído para descrever o problema de alocação de professores, segundo o simbolismo da programação inteira com variáveis binárias. Nessa camada, as equações do modelo são geradas automaticamente pelo motor, em conformidade com as regras de nomeação das variáveis e dos operadores estabelecidas pelo interpretador do resolvedor numérico, presente na segunda camada. Nela, usa-se um outro motor, denominado "XPress – MP", fornecido pela empresa americana Dash Associates, sob licença exclusiva nº 25132 com status "acadêmico", para a UnC. Na terceira camada, desenvolveu-se um sistema "visualizador" dos resultados, a partir da importação automática dos dados fornecidos pelo motor da camada anterior. Além de descrever os horários otimizados, um conjunto de interfaces adequadas permite a realização de ajustes finos, solicitados pelos coordenadores de curso, para adaptar os horários gerados às mudanças necessárias, de última hora, antes da implantação.

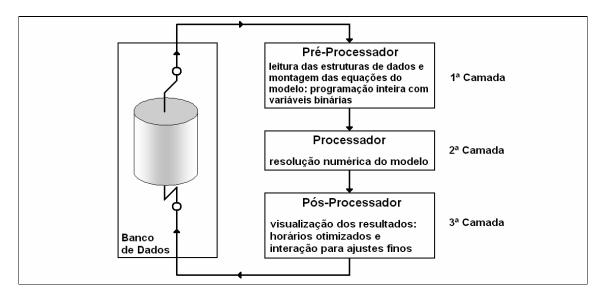


Figura 1: Arquitetura da solução computacional utilizada: tripla camada

Além das três camadas, a topologia dos subsistemas presentes nessa abordagem apresenta o sistema computacional dotado de propriedades particulares de um pequeno sistema de banco de dados. As suas estruturas de dados representam as coleções de Turmas, de Locais, de Professores, de Disciplinas e de seus respectivos Créditos, e de Alocações, que existem de

fato na instituição. É a partir delas que o motor gerador da primeira camada gera automaticamente o sistema de equações, em conformidade com o modelo simbólico modelado e utilizado para resolução do problema. Toda vez que os valores das estruturas de dados são alterados, um novo sistema de equações do modelo pode ser gerado automaticamente.

Ao final de um ciclo completo de processamento, o sistema computacional apresenta o horário otimizado, "sem choques", com o valor da função objetivo especificado e, entre relatórios e formulários sintéticos disponíveis, descreve ainda uma medida de eficiência do processo de aproveitamento dos professores no horário gerado. O conjunto daqueles professores que não puderam ser alocados, por restrições nas suas próprias disponibilidades de tempo, também é descrito por meio de um relatório específico.

#### 4. AS ESTRUTRAS DE DADOS DO SISTEMA COMPUTACIONAL

Para que o sistema de equações do modelo da PO seja gerado automaticamente pelo motor da primeira camada, é necessário descrever completamente, em um contexto computacional, os dados pertinentes à problemática da geração dos horários. Para isso, utilizou-se um sistema gerenciador de banco de dados relacional e uma modelagem de dados, constituída por nove categorias de dados distintas, denominadas entidades do modelo. Cada entidade é controlada e mantida pelo sistema gerenciador de banco de dados na forma de uma tabela. Essas nove tabelas estão descritas no diagrama da Figura 2 e representam, respectivamente, uma coleção fidedigna de locais, turmas, disciplinas, alocações, ensaios, professores, além de resultados e colunas, pertencentes à realidade vivenciada na UnC. Em outras palavras, essas tabelas descrevem a configuração inicial dos dados da instituição para a geração automatizada do sistema de equações do modelo da PO.

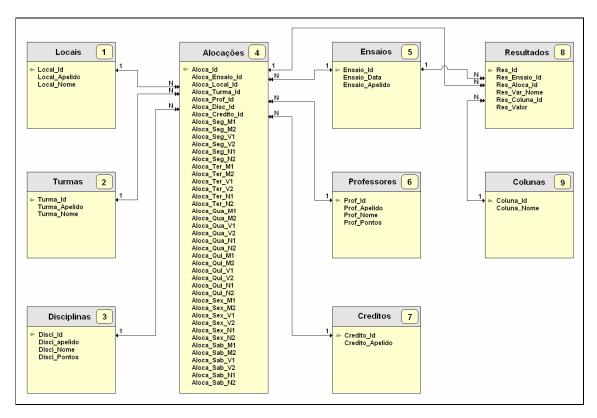


Figura 2: O Modelo DER do sistema computacional utilizado nessa abordagem

O diagrama da Figura 2 representa um modelo de dados denominado "Diagrama Entidade-Relacionamento – DER". Esse tipo de diagrama é muito utilizado na etapa denominada "Requerimentos e Análise" do projeto de qualquer sistema de banco de dados, pois ele esconde os detalhes referentes ao armazenamento físico dos dados, apresentando uma visão lógica das entidades envolvidas, dos seus atributos e dos seus relacionamentos. Para um maior entendimento a respeito do papel que esse diagrama realiza no processo de projeto de sistemas de banco de dados, da especificação de seus respectivos requerimentos, os seguintes trabalhos são sugeridos: Elmasri(1998), Kroencke(1999) e Korth(1995).

A descrição do significado de cada entidade participante do modelo de dados "DER", utilizado nessa abordagem é apresentada a seguir.

- Tabela 1 **<LOCAIS>** : representa o "conhecimento" que o sistema computacional "tem" sobre os locais existentes no âmbito da UnC. Os atributos denominados "Local\_Id", "Local\_Apelido" e "Local\_Nome", descrevem os fatos que cada local tem um código de identificação único, um apelido que serve como uma referência de tamanho curto para ser usado em relatórios e um nome completo do local. Um aspecto importante que motivou a inserção desta entidade no modelo "DER" é que, no processo de geração do horário, um professor não pode se deslocar de um local para outro, no intervalo de um mesmo turno de um dia. Não há tempo disponível para esse deslocamento. Trata-se de uma restrição factual relevante que deve ser decodificada para um padrão analítico (equação) no modelo da PO;
- Tabela 2 **<TURMAS>**: representa a coleção de turmas ofertadas pelos cursos da UnC, no semestre considerado. Cada turma tem um conjunto de disciplinas que serão ministradas por um conjunto de professores, em um dado semestre letivo, num horário específico;
- Tabela 3 **<DISCIPLINAS>**: representa o conjunto de disciplinas a serem ofertadas pela UnC. Cada disciplina possui uma pontuação que descreve a sua posição em relação ao número de fases do curso considerado. Por exemplo, uma disciplina pertencente à oitava fase de um curso de 10 fases tem pontuação igual a 0,80. Outra disciplina da oitava fase, de um curso outro de 8 fases, tem pontuação igual a 1,00. Então, os pontos das disciplinas descrevem um certo grau de importância, em termos de suas posições relativas na grade do curso. Essa ponderação é utilizada de forma composta, com a pontuação do professor, na função objetivo do modelo, que visa maximizar a alocação dos professores nas disciplinas ofertadas. Tem-se, assim, um critério de relevância: os professores mais pontuados, ministrando as disciplinas mais pontuadas, terão maior "influência" no processo de alocação de professores;
- Tabela 4 <**ALOCAÇÕES**> : representa o conjunto de disponibilidades de tempo, de todos os professores para ministrar as respectivas disciplinas nos locais da UnC. É a partir desta classe informacional que o motor gerador de equações "monta" cada uma das equações do modelo da PO. As modificações e os ajustes feitos nos valores dessa estrutura de dados são refletidos automaticamente no sistema de equações gerado;
- Tabela 5 < ENSAIOS> : representa o conjunto de ensaios que são realizados para a geração das equações e para a solução numérica do modelo. É possível utilizar vários ensaios sobre um dado conjunto de alocações, distinguindo diversas simulações entre si.
- Tabela 6 <PROFESSORES> : representa o conjunto de todos os professores que participam do processo de alocação para construção dos horários. Cada professor, além de um código único de identificação, apelido e nome, possui uma pontuação própria. Essa pontuação descreve uma certa "prioridade na fila" na sistemática de escolha de disciplinas no semestre considerado. Essa pontuação é utilizada pelo sistema computacional para compor, juntamente com a pontuação das disciplinas, os coeficientes que participam da equação que representa a função objetivo do modelo;

- Tabela 7 **CRÉDITOS**> : representa o conjunto de créditos existentes. Cada disciplina possui um determinado número de créditos semanais. Estes créditos são alocados nos horários gerados pela solução numérica do modelo da PO. Então, uma disciplina de quatro créditos deverá ser alocada no horário em quatro horas-aula distintas;
- Tabela 8 **<RESULTADOS>**: representa o conjunto de variáveis binárias valoradas. Os dados dessa tabela são importados do arquivo gerado pelo motor "resolvedor" na segunda camada e apresentados, na forma de horários já decodificados, por meio de um conjunto de interfaces adequadas;
- Tabela 9 **COLUNAS**> : representa um sistema de nomeação das variáveis do modelo da PO, a partir das saídas geradas pelo "resolvedor" numérico. É um importante elemento para os relatórios do sistema.

# 5. MODELAGEM DO PROBLEMA DE ALOCAÇÃO DE PROFESSORES NA UNC

Segundo Meerschaert(1999), "[...]. Modelagem matemática é a ligação entre a matemática e o mundo real. [...]". A modelagem é utilizada nos processos de resolução de problemas. Geralmente, esses processos são constituídos por cinco passos: (i) o levantamento da questão, ou apresentação de uma problemática a ser resolvida; (ii) a escolha de uma abordagem para resolução; (iii) a formulação do modelo, ou a própria modelagem representada pela paráfrase do problema, descrito em termos matemáticos precisos e não ambíguos; (iv) a resolução do modelo e, por último, (v) a decodificação da solução matemática para um padrão de resposta adequada ao problema real, possível de ser implantada. O objetivo desta seção é apresentar o processo de modelagem para a resolução do problema de alocação de professores na Universidade do Contestado – UnC – Campus Canoinhas, numa abordagem da PO. A Figura 3 descreve essa problemática por meio de uma pergunta, cuja resposta deseja-se conhecer.

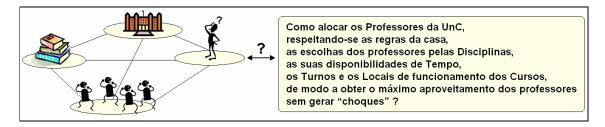


Figura 3: Descrição do problema a ser resolvido

## 5.1 Contextualização do Problema

Para uma melhor compreensão da problemática associada à alocação dos professores no processo de geração de horários de aulas é necessário apresentar as características relevantes da UnC que devem ser levados para o modelo simbólico de solução do problema. Essas características são percebidas e especificadas durante a execução de seis processos distintos, descritos em conformidade com a Figura 4, que ocorrem sempre antes de um novo semestre letivo. A abordagem deste trabalho representa o processo "P5", utilizando dados provenientes dos processos numerados "P1" à "P4", organizando-os em estruturas de dados adequadas e fornecendo uma base para as ações associadas ao processo "P6".

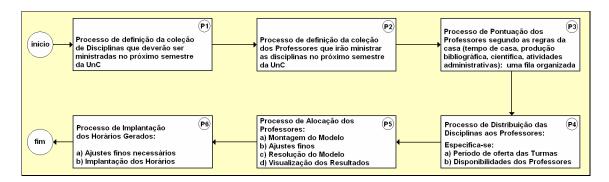


Figura 4: Os processos definem o contexto do problema

O processo "P1" é responsável pela definição da coleção de Disciplinas a serem ofertadas. Em cada semestre letivo o conjunto de novas disciplinas deve ser especificado. É formado tanto pelas disciplinas de novos cursos que são "lançados", quanto por aquelas onde há mudanças de fase dos cursos existentes, ou ainda, daquelas que são ofertadas especialmente para atender os interesses dos alunos reprovados em fases anteriores. No segundo semestre de 2006, esse conjunto era formado por 648 disciplinas. Por conta deste processo, o sistema computacional utilizado nessa abordagem "conhece", detalhadamente, as disciplinas, seus créditos e pontuações, as suas turmas, os locais e os turnos de funcionamento dos cursos e das disciplinas a serem ofertadas. As referidas pontuações são usadas na composição dos coeficientes da equação de maximização e são calculadas pela relação entre o número da fase em que a disciplina se encontra e o número total de fases do curso do qual ela pertence. Todos esses elementos são fundamentais para a geração correta de horários.

O processo "P2" é responsável pela definição da coleção de Professores que farão parte do corpo docente da instituição, no semestre letivo considerado. Esse conjunto não se modifica com muita freqüência, pois a rotatividade não é acentuada. Entretanto, como existe um significativo número de professores "horistas", a possibilidade de mudanças deve ser considerada e, então, as alterações no conjunto devem ser "percebidas" pelo sistema computacional.

O processo "P3" é responsável pela definição da pontuação de cada professor presente na coleção de professores. Trata-se de um processo que utiliza múltiplos critérios, todos baseados nos ordenamentos jurídicos da instituição. Como exemplo, cita-se o tempo de casa, a formação, as publicações, as pesquisas produzidas. Essa pontuação também é utilizada pelo sistema computacional, juntamente com a pontuação de cada disciplina, na construção dos coeficientes presentes na equação da função objetivo do modelo. Ao final deste processamento, uma "fila" de professores é estabelecida para ser utilizada no processo seguinte.

O processo "P4" é responsável pela definição das associações entre os professores e suas disciplinas escolhidas. Neste processo são especificadas as disciplinas e as disponibilidades de tempo que cada professor tem para ministrá-las. Ao final deste processo, o sistema computacional "mantém" o controle de todas as informações necessárias para a geração e resolução do modelo, que ocorre no processo seguinte.

Os primeiros quatro processos representam o *modus operandi* da casa para a tarefa de definição do conjunto de professores que ministrarão um conjunto de disciplinas, num dado semestre. É uma sistemática aplicável à totalidade do corpo docente, sem exceção. Esses processos são, portanto, a base para a captura das informações de descrevem o modo de ser da UnC e, por meio de estruturas de dados adequadamente construídas no processo "P5", é possível perceber o seu "modelo comportamental" estrito à demanda por um horário otimizado.

O processo "P5" é responsável pela obtenção da resposta otimizada para a pergunta apresentada no início desta seção, que representa a própria problemática desta abordagem. Tendo especificado por completo a configuração do semestre letivo, no processo anterior, o problema é resolvido pelo sistema computacional de forma interativa. As suas três camadas possuem "motores" que trabalham de forma independente. Permitem re-especificações e ajustes finos adaptando as configurações iniciais às mudanças de última hora, fornecendo certa "flexibilidade" à abordagem utilizada.

Por exemplo, caso um professor comunique uma mudança nas suas disponibilidades de tempo, é possível ainda, com um pequeno esforço, modificar os valores das estruturas de dados do sistema e gerar novamente a solução para o problema. Praticamente, todos os valores das estruturas de dados existentes podem ser alterados, permitindo situações do tipo "e-se", típicas de simulações.

Então, o sistema computacional pode ser utilizado como um simulador para diferentes configurações. De certa forma, esta última característica confere ao sistema computacional uma propriedade associada ao aumento da sensibilidade do analista, que interage com o sistema, às pequenas variações nas configurações iniciais do problema e aos seus impactos causados na solução numérica do modelo.

O processo "P6" é responsável pela implantação dos horários gerados no cotidiano da UnC. Essa tarefa depende de uma série de fatores humanos, todos associados à aceitabilidade e à aceitação da solução numérica decodificada. Geralmente, um conjunto de ajustes "finos" são necessários para "contingenciar" as mudanças de última hora solicitadas pelos professores e coordenadores de curso. Por exemplo, uma nova restrição nas disponibilidades de tempo é imposta por um programa de Pós-Graduação que se inicia. Ou, um desejo particular de um professor de viajar somente em um dia específico da semana de um local para outro, motivado por conveniências familiares. O sucesso da implantação da solução depende fortemente da capacidade do sistema computacional de fornecer essa flexibilidade por meio de interfaces adequadas que permitem interações para as modificações necessárias.

### 5.2 O problema de Designação: Programação inteira com variáveis binárias

Para a resolução do problema utilizou-se uma abordagem de Programação Linear (PL) que considera o problema da geração de horários nessa instituição como sendo um problema simples de **Designação**, isto é, uma particularização do problema típico de Transportes. Sob a perspectiva do problema de Transportes, os professores e as suas respectivas disciplinas, assumem o papel dos recursos disponíveis a serem alocados em um conjunto de destinos específicos, representado pela coleção de horários a serem ocupados. Tais recursos estão localizados em um conjunto de origens características, representado pelas coleções de Turmas, em seus respectivos Locais de funcionamento de cada Curso. Assim, como cada dupla "professor-disciplina" deve ser alocada por completo em um único horário, tem-se um problema de Designação, cuja modelagem por meio da **Programação Inteira** é realizada utilizando-se **variáveis binárias**.

## 5.3 A Função Objetivo: Maximizar o aproveitamento dos Professores

Em Programação Linear todo modelo é formado por uma função objetivo e um conjunto de restrições, sobre as variáveis de decisão que participam dessa função. A formulação matemática deste problema pode ser encontrada em Bregalda (1981), Silva et al. (1996) e Caixeta-Filho (2001).

O problema que se pretende modelar e resolver é também denominado "**problema de otimização discreta** e **multivariada**", considerado "discreto" pelo fato de que as variáveis devem assumir valores inteiros, e considerado "multivariado" pelo fato que existem milhares de variáveis envolvidas na alocação de professores, na dimensão do problema na **UnC**. Se existem várias variáveis, presume-se também que existem várias soluções para o sistema de equações do modelo. O problema também é considerado de "otimização" porque se espera obter uma solução que, entre todas as soluções possíveis, otimize uma medida de *performance* do problema. Essa medida performance é denominada '**função objetivo**' do modelo e encontra-se descrita pela expressão (1).

A expressão (1) "incorpora" as regras da casa que definem a pontuação específica de cada professor e de cada disciplina, no processo "P4" de escolha das disciplinas. A incorporação é feita por meio dos coeficientes " $\mathbf{a_p}$ " e " $\mathbf{b_d}$ " que representam, respectivamente, a pontuação do professor e a pontuação da disciplina. Esses coeficientes estão associados pelo operador de multiplicação. O resultado da multiplicação é um novo coeficiente que, associado aos valores das variáveis de decisão, permitirá que a 'função objetivo' seja otimizada. Em outras palavras, os professores mais pontuados ministrando as disciplinas mais pontuadas terão prioridade em relação aos menos pontuados na concorrência por um mesmo horário. No caso de um mesmo professor ministrando diversas disciplinas, a mais pontuada terá prioridade pelo horário do professor.

$$Max \qquad \sum_{t=1}^{T} \sum_{l=1}^{L} \sum_{p=1}^{P} \sum_{d=1}^{D} \sum_{c=1}^{C} \sum_{h=1}^{H} (a_p * b_d) * X_{tlpdch}$$
 (1)

A expressão (1), em seu simbolismo matemático preciso (cujos elementos possuem seus limites superiores definidos conforme a Tabela 1), descreve semanticamente que o problema de alocação dos professores na UnC a ser resolvido deve:

"Maximizar a alocação de 262 (duzentos e sessenta e dois) professores que devem ministrar 648 (seiscentos e quarenta e oito) disciplinas, pertencentes a 122 (cento e vinte e duas) turmas distintas, provenientes de 31 (trinta e um) cursos em 4 (quatro) locais diferentes".

A seguir são apresentadas algumas observações sobre os seus elementos:

- X<sub>tlpdch</sub> Variável de decisão que representa a alocação de um professor "p", ministrando um crédito "c" de uma determinada disciplina "d", pertencente a um curso cuja turma "t" tem seu funcionamento em um local "l", num determinado horário "h";
- h Índice que descreve um horário possível para a alocação do professor. Representa o conjunto resultante da intersecção entre o conjunto de horários de funcionamento da turma que contém a disciplina "d" e o conjunto de horários disponíveis do professor "p" para essa disciplina;
- c Índice que descreve o fato de que cada disciplina possui um conjunto créditos a serem alocados. Cada alocação consome dois créditos por disciplina. Por exemplo, uma disciplina necessita de dois horários durante o período de funcionamento da Turma na qual pertence se ela tiver quatro créditos semanais. Assim, cada horário "h" representa um período de tempo suficiente para alocar no máximo dois créditos "c" de uma dada disciplina "d". Existe um conjunto importante de restrições que atuam sobre os créditos de uma dada

- disciplina: Todos os créditos de uma disciplina devem ser alocados ou nenhum deles serão alocados;
- d Índice que descreve o fato de que uma dada disciplina "d" deve ser ministrada por um professor "p" em um local "l" de uma turma "t", em um horário "h";
- p Índice que descreve o fato de que um dado professor "p" deve ministrar uma disciplina "d", com seu respectivo crédito "c", pertencente a uma turma "t", em local "l" num dado horário "h";
- *l* Índice que descreve o local "l" onde uma disciplina "d", de uma turma "t", será ministrada por um professor "p", em um local "l". Existe um conjunto de restrições que especificam a impossibilidade de um professor se deslocar de um local para outro dentro do período de tempo estabelecido por um turno de trabalho (manhã, tarde ou noite);
- t Índice que descreve o fato que cada turma "t" possui um conjunto de disciplinas associadas. Existe um conjunto de restrições que evitam o choque horário entre disciplinas de uma mesma turma "t", ministradas por professores iguais ou diferentes;
- limites A Tabela 1 apresenta os limites superiores de cada índice da função objetivo.

A Figura 5 descreve um diagrama que representa as distribuições dos horários ao longo de uma semana letiva completa. São 36 (trinta e seis) horários distintos para cada uma das 122 (cento e vinte e duas) turmas pertencentes aos 31 (trinta e um) cursos regulares da UnC.

| Turnos     | Períodos         | Dias da semana |           |           |           |           |           |
|------------|------------------|----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|            |                  | Segunda        | Terça     | Quarta    | Quinta    | Sexta     | Sábado    |
| Matutino   | Aula 1<br>Aula 2 | 1 Seg_M1       | 7 Ter_M1  | 13 Qua_M1 | 19 Qui_M1 | 25 Sex_M1 | 31 Sab_M1 |
|            | Aula 3<br>Aula 4 | 2 Seg_M2       | 8 Ter_M2  | 14 Qua_M2 | 20 Qui_M2 | 26 Sex_M2 | 32 Sab_M2 |
| Vespertino | Aula 1<br>Aula 2 | 3 Seg_V1       | 9 Ter_V1  | 15 Qua_V1 | 21 Qui_V1 | 27 Sex_V1 | 33 Sab_V1 |
|            | Aula 3<br>Aula 4 | 4 Seg_V2       | 10 Ter_V2 | 16 Qua_V2 | 22 Qui_V2 | 28 Sex_V2 | 34 Sab_V2 |
| Noturno    | Aula 1<br>Aula 2 | 5 Seg_N1       | 11 Ter_N1 | 17 Qua_N1 | 23 Qui_N1 | 29 Sex_N1 | 35 Sab_N1 |
|            | Aula 3<br>Aula 4 | 6 Seg_N2       | 12 Ter_N2 | 18 Qua_N2 | 24 Qui_N2 | 30 Sex_N2 | 36 Sab_N2 |

Figura 5: Os horários semanais (36) para cada Turma de cursos regulares da UnC

Cada horário "deve" receber uma alocação de uma disciplina com dois créditos semanais. Assim, se uma disciplina tiver quatro créditos, então deve ser designada para dois horários distintos.

A Tabela 1 apresenta a cardinalidade dos conjuntos de elementos que participam da função objetivo e os seus respectivos limites superiores.

Tabela 1: Cardinalidade de cada conjunto de elementos presentes na função objetivo

| conjuntos   | limite superior | cardinalidade |  |
|-------------|-----------------|---------------|--|
| Turmas      | Т               | 122           |  |
| Locais      | L               | 4             |  |
| Professores | Р               | 262           |  |
| Disciplinas | D               | 648           |  |
| Créditos    | С               | 4             |  |
| Horários    | Н               | 36            |  |
| Alocações   | TLPDC           | 1025          |  |

É importante ressaltar que o conjunto denominado "Alocações" representa uma coleção de elementos associados da seguinte forma:

"Cada alocação representa dois créditos de uma disciplina pertencente a uma dada turma, a ser lecionada por um professor em um determinado local de funcionamento do curso, em um dos 36 horários de destino".

Assim, as restrições do modelo se aplicam sobre um subconjunto das "Alocações" de modo que seja possível mapear as combinações de Turmas, Locais, Professores, Disciplinas, Créditos e Horários que estão sujeitas a elas. Por exemplo, a restrição que estabelece que um professor não pode estar em mais de um lugar ao mesmo tempo (ver item 5.4.4) incide sobre todas as alocações que associam esse professor aos demais elementos da Tabela 1.

## 5.4 As Restrições do modelo

Em PO, todo modelo de Programação Linear é composto por uma função objetivo que se sujeita a um conjunto de restrições específicas. (ACKOFF, 1979). Este caso não é diferente. É necessário especificar cada uma das restrições do modelo para que seja considerado exeqüível, além de completo e correto.

#### 5.4.1 Cada disciplina deve ser alocada uma única vez ou não deve ser alocada

A expressão (2) descreve uma restrição específica do modelo que estabelece que uma determinada alocação mapeia um professor "p" que vai ministrar um conjunto de dois créditos "c" de uma disciplina "d", de uma turma "t", em um local "l", em apenas um, ou nenhum, dos horários de funcionamento da turma, definidos pelo subconjunto do conjunto "h", escolhido pelo professor.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{h=1}^{H} X_{tlpdch} \end{array} \right\} + Xvirt_{tlpdc} = 1$$

$$\begin{array}{l} \text{onde} \\ H = \text{horários especificados em cada alocação} = 1,2,3,...,1025 \end{array} \right. \tag{2}$$

Caso uma das variáveis de decisão assuma o valor igual a um (1), as demais variáveis de decisão deverão assumir o valor igual a zero (0). Caso contrário, elas assumem o valor igual a zero (0), sem exceção, e a variável virtual, com prefixo "Xvirt", assumirá o valor igual a um (1). Quando uma variável virtual de uma dada alocação assume o valor diferente de zero na

solução, tem-se o caso típico de uma alocação que de fato não se realizou, pois ela representa um destino fictício no problema de Transportes.

## 5.4.2 Todos os créditos de uma disciplina são alocados ou nenhum deles é alocado

Nessa abordagem, uma disciplina pode ter vários conjuntos de dois créditos associados. Por exemplo, uma disciplina seis (6) créditos necessita de três (3) alocações de dois créditos cada para ser considerada como "completamente alocada", em um horário de turma. A expressão (3) descreve uma restrição importante sobre o fato que todas as alocações de uma disciplina são realizadas, ou nenhuma delas é alocada.

$$Xvirt_{llpd(c=1)} = Xvirt_{llpd(c=2)} = Xvirt_{llpd(c=3)} = Xvirt_{llpd(c=4)}$$

$$\begin{cases} tlpd = alocações \ de \ mesma \ disciplina = 1,2,3,...,648 \\ c = conjunto \ de \ créditos \ de \ cada \ disciplina = 1,2,3,4 \end{cases}$$
(3)

Neste caso, as variáveis virtuais associadas às alocações de mesma disciplina possuem o mesmo valor. Se uma delas assumir o valor igual zero (0) na solução numérica, todas as demais também assumem, significando que essa disciplina foi alocada completamente no horário da respectiva turma. Caso contrário, todas essas variáveis assumem o valor um (1).

## 5.4.3 Numa mesma Turma, alocações distintas não podem ocupar o mesmo horário

Não é possível que, numa mesma turma, alocações distintas ocupem um mesmo horário no processo de geração de horários. Como uma alocação mapeia, de forma unívoca, disciplinas diferentes ou disciplinas iguais com conjuntos de crédito diferentes, a sua alocação deve ser realizada em um dos horários possíveis (intersecção entre os conjuntos de horários de funcionamento da turma e de disponibilidades dos professores). A expressão (4) descreve uma restrição sobre todas as turmas.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{d=1}^{D}\sum\limits_{c=1}^{C}X_{tlpdch} \end{array} \right\} + Xvirt\_turma_{tlpdch} = 1$$

$$onde \begin{cases} tlpdc = alocações \ de \ mesma \ turma = 1,2,3,...,122 \\ h = horários \ possíveis \ em \ cada \ turma = 1,2,3,...,36 \end{cases} \tag{4}$$

A variável virtual, com prefixo "Xvirt\_turma", assumirá o valor um (1) se nenhuma alocação da turma "t" no horário "h" ocorrer. Caso contrário, seu valor será zero (0) e uma das disciplinas "d", da turma "t", terá um de seus créditos "c" alocados no horário "h". Dessa forma, é possível saber quais são os horários que não alocados, para cada turma, numa dada solução numérica (ensaio). Relatórios especiais são construídos para ler os resultados influenciados pela restrição acima.

#### 5.4.4 Um professor somente pode estar uma única vez em um mesmo horário

Essa é uma restrição que atua sobre cada elemento do conjunto de professores. Um professor pode ministrar várias disciplinas, em várias turmas e locais distintos. Então, o conjunto de alocações que mapeia cada professor deve estar sujeito a esta restrição, descrita pela expressão (5).

$$\left\{ \sum_{t=1}^{T} X_{tlpdch} \right\} + Xvirt\_professor_{tlpdch} = 1$$

$$\begin{cases} tlpdc = alocações \ para \ cada \ professor = 1,2,3,...,n \\ h = horários \ possíveis \ em \ todas \ as \ turmas = 1,2,3,...,36 \\ p = professores = 1,2,3,...,262 \end{cases}$$
(5)

A variável virtual, com prefixo "Xvirt\_professor", assumirá o valor um (1) se nenhuma alocação do crédito "c" da disciplina "d", com o professor "p", ocorrer no horário "h". Todas as alocações associadas ao professor "p" são investigadas e testadas para cada horário "h". Caso contrário, seu valor será zero (0) e uma das disciplinas "d", da turma "t", terá um de seus créditos "c" alocados no horário "h". Dessa forma, é possível saber quais professores ficaram "de fora" numa dada solução numérica considerada (ensaio) e medir a *performance* do processo de aproveitamento dos professores.

#### 5.4.5 Um professor não pode se deslocar entre locais diferentes num mesmo turno

Na UnC existem quatro (4) locais diferentes para funcionamento das turmas. Num período compreendido entre quatro horas-aula consecutivas é praticamente impossível o deslocamento de um local para outro. Então, uma restrição, representada pela expressão (6), deve fornecer o "conhecimento" deste fato ao modelo da PO. Trata-se de uma das restrições mais "complexas" de se implementar, nesse modelo, de forma automática.

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{tlpdch} + \sum_{l=1}^{L} X_{tlpdc(h+1)} \end{array} \right\} + Xvirt\_local_{tlpdch} = 1$$

$$\begin{cases} tlpdc(h+1) = alocações \ nos \ segundos \ horários = 1,2,3,...,n \\ tlpdch = alocações \ nos \ primeiros \ horários = 1,2,3,...,m \\ h = primeiros \ horários \ em \ cada \ turno = 1,3,5,7,...,35 \\ p = cada \ um \ dos \ professores = 1,2,3,...,262 \end{cases} \tag{6}$$

Para um melhor entendimento desta restrição é importante perceber que em uma dada alocação "tpdch" existe um local "l" associado. Então, as alocações com diferentes locais <u>não</u> podem ser alocadas num mesmo período (matutino ou vespertino ou noturno) para um mesmo professor. Para impor esta restrição, deve-se sempre observar o primeiro horário de cada turno para as alocações de um dado professor: os locais de todas as alocações desse professor, que

solicitam o segundo horário de cada turno <u>devem ser o mesmo</u> que o local escolhido para o primeiro horário desse mesmo turno. Deve-se: (i) separar todas as alocações associadas a cada professor, cujo horário solicitado representa a primeira hora-aula de cada turno de um determinado local "l". Cada professor, cada turno, cada local "l", cada disciplina; (ii) separar todas as alocações de mesmo professor cujos horários representam as segundas horas-aula de cada turno e os locais sejam diferentes do local "l" escolhido anteriormente; (iii) a cada elemento do primeiro conjunto associam-se os elementos de mesmo professor e turno do segundo conjunto. As variáveis de decisão envolvidas nesse terceiro conjunto são somadas, juntamente com uma variável virtual. O resultado deve ser igual a um (1).

#### 5.4.6 Todas as variáveis do modelo assumem valores binários

As expressões em (7) descrevem o fato de que <u>todas</u> as variáveis envolvidas no modelo da PO para a sua resolução são do tipo binárias, isto é, assumem valores zero ou um.

# 6. A MONTAGEM AUTOMATIZADA DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Quando o modelo construído é grande, o conjunto formado pela função objetivo e pelas suas restrições pode envolver milhares, ou até mesmo milhões, de variáveis. No caso da UnC, tem-se que as 1025 (um mil e vinte e cinco) alocações podem ser alocadas, no máximo, em 36 horários disponíveis para cada turma. Sem levar em consideração a existência das variáveis virtuais, necessárias para equilibrar o problema da Designação e para impor as restrições associadas, esse modelo poderia chegar facilmente a 36.000 (trinta e seis mil) variáveis. Para especificá-las pode-se realizar uma tarefa de "escrita" manual ou automatizada. A primeira opção é por demais enfadonha, pelas seguintes razões:

- Escrever manualmente todas as variáveis envolvidas e ainda especificar as relações entre elas por meio de operadores (soma, igualdade e multiplicação) pode levar a uma situação de falta de controle. Como são milhares de restrições a serem consideradas na modelagem do problema, algumas podem ficar de "fora" no momento em que são especificadas;
- Toda vez que uma alteração ocorre nas escolhas de um professor por uma disciplina, nas suas disponibilidades de tempo, ou em algum dado da configuração inicial de uma das alocações consideradas, ou ainda sobre algum dos coeficientes da função objetivo, o conjunto de equações do modelo deve ser reespecificado;
- Um sistema de nomeação de variáveis e de equações deve ser mantido de forma consistente e coerente com uma dada configuração inicial do problema. Algumas vezes, a observação sobre uma dada variável deve ser realizada muito de perto, durante várias simulações, e é conveniente que se mantenha uma nomeação sistemática para esse acompanhamento;

- Deve ser possível alterar uma configuração inicial para fazer algum tipo de simulação.
   Então, as simulações exigem alterações que tornam proibitivas as operações manuais de construção das equações do modelo;
- Por último, talvez a mais importante de todas as justificativas, é que de fato o conjunto
  de equações será resolvido por um motor específico, cujo interpretador implementa
  uma regra de produção específica sobre os termos envolvidos, de tal forma que um
  padrão de nomenclatura deve ser obedecido para que a tarefa de compilação das
  equações do modelo seja realizada sem erros de sintaxe.

A produção de um conjunto de equações de forma manual, diante do exposto, é uma tarefa improdutiva e pode prejudicar a completude do modelo e induzir o surgimento de problemas de corretude e de acurácia da solução numérica obtida por meio dele.

Para evitar tais inconveniências, foi desenvolvido nessa abordagem um sistema computacional para a geração automatizada de <u>todas</u> as equações do modelo, incluindo a função objetivo. Este sistema representa a primeira das três camadas de solução desta abordagem. O resultado de seu processamento é um arquivo de texto, com elementos apresentados com formatação específica, adequado ao processo de importação do motor que vai gerar a solução numérica na camada seguinte.

#### 6.1 Nomenclatura das variáveis envolvidas

A Figura 6 apresenta a sistemática de nomeação utilizada nesta abordagem para descrever cada uma das variáveis envolvidas no modelo do problema. Um exemplo de uma das restrições do modelo é fornecido.

De acordo com a sistemática adotada, uma variável de decisão tem sempre o mesmo prefixo "X\_", seguida de dois identificadores. O primeiro identificador é utilizado para fazer uma referência ao código da alocação na qual esta variável está associada. Por meio desse identificador é possível identificar o professor "p" que ministra um crédito "c" de uma dada disciplina "d", de uma determinada turma "t", em um local "l". O segundo identificador é utilizado para fazer uma referência ao código do horário para a alocação. Por meio dele é possível saber qual é o horário específico que o professor escolheu, entre outros possíveis, para ministrar a disciplina.

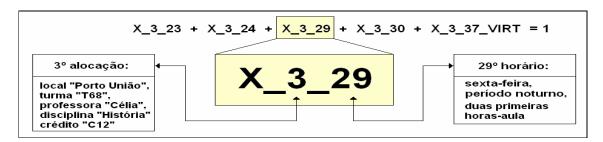


Figura 6: Exemplo de uma restrição conforme o sistema de nomeação utilizado

Esta sistemática também padroniza a nomeação para as variáveis virtuais utilizadas no modelo. Cada uma delas possui o termo "virt", como sufixo, associado ao código da alocação e ao código de um horário fictício, uma vez que as variáveis virtuais possuem o objetivo de equilibrar o problema da Designação. Acima, tem-se esse código como de valor "37" para referenciar que é o trigésimo sétimo horário (fictício) de um conjunto de trinta e seis horários reais (exeqüíveis). A Figura 7, abaixo, apresenta a interface básica do sistema montador das equações do modelo.

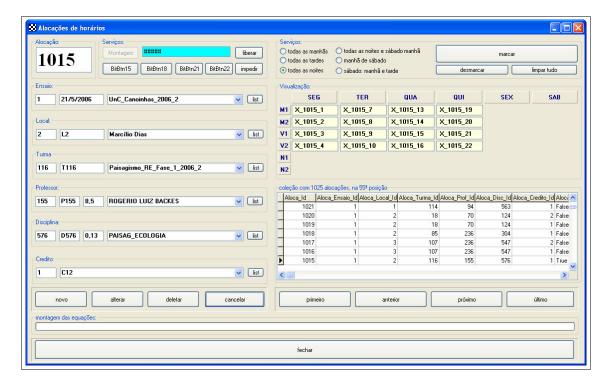


Figura 7: Interface do sistema "montador" das equações do modelo

# 7. RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES: MOTOR "XPRESS-MP"

A resolução do sistema de equações do modelo representa a segunda camada desta abordagem. Ela é resultante do processamento de segundo motor, denominado "XPress-MP", fornecido gratuitamente para a UnC, sob licença "#25132", pela empresa *Dash Associates*. Sua principal função é resolver numericamente o modelo montado na camada anterior e fornecer um arquivo texto, como saída, contendo os valores das variáveis de decisão que otimizam o problema.

De acordo com Dash(2005a,b,c), "XPress-MP" é o nome de uma tecnologia que unifica um conjunto de softwares que realiza três funcionalidades básicas distintas: (i) oferece um ambiente com um linguagem própria de modelagem; (ii) oferece uma interface para especificação, importação e exportação de modelos; (iii) oferece uma interface para otimização e resolução de modelos. Para resolver o problema, essa tecnologia utiliza técnicas de Programação Linear acopladas com uma enumeração, conhecida como "Branch-and-Bound" (Algoritmo de Bifurcação-Limite) de valores exequíveis para as variáveis discretas do modelo. Essas técnicas podem ser visto em detalhes em PRESS(2002, p. 448).

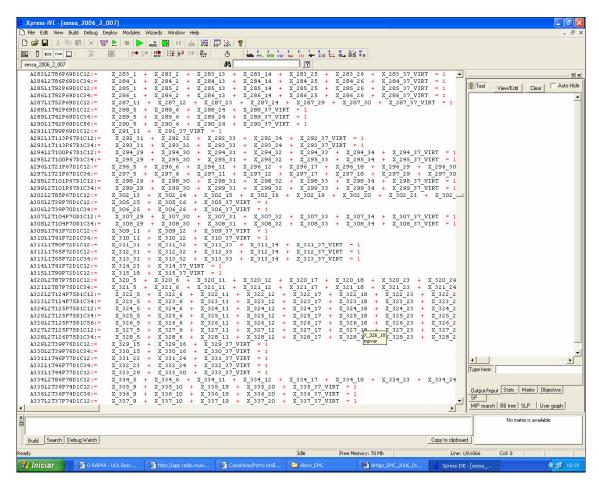


Figura 8: Interface do sistema "XPress-IVE" que contém o motor "XPress-MP"

Basicamente, a resolução do modelo da UnC é realizada nessa segunda camada num processo constituído de quatro passos. No primeiro, o arquivo contendo o conjunto formado pelas restrições do modelo e por sua função objetivo (montado na camada anterior) é importado pelo sistema, por meio de uma interface adequada. Esta interface está descrita na Figura 8. No segundo passo, por meio de uma interação com o analista humano, um serviço de compilação é solicitado. Não havendo erros de sintaxe, parte-se para a resolução numérica do modelo, ação que representa o terceiro passo. O quarto passo representa a montagem do arquivo contendo a especificação dos nomes e valores de cada uma das variáveis de decisão envolvidas na solução ótima do problema. O valor da função objetivo também é especificado. Esse arquivo é salvo em um diretório acessível ao motor da camada seguinte, para que os resultados sejam visualizados na forma de horários típicos de cada turma da UnC.

# 8. VISUALIZAÇÃO DOS RESULTADOS

A visualização dos resultados associados à solução ótima do problema representa a terceira camada desta abordagem. A Figura 9 descreve uma interface para apresentação de um horário para uma turma representativa da segunda fase do Curso Superior de Administração da UnC. Como o horário de funcionamento desta turma é noturno, de segunda a sexta-feira, todos os demais horários para essa turma encontram-se livres.

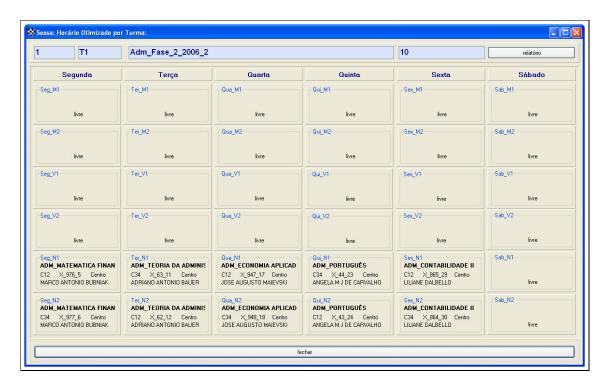


Figura 9: Interface para visualização de resultados - o horário de cada turma da UnC

O horário acima foi gerado a partir de um arquivo texto exportado pelo motor da segunda camada. Como, nesse arquivo, as variáveis assumem valores binários, um processo de decodificação dos valores para a linguagem natural dos professores e alunos teve que ser "disparado", utilizando um conjunto específico de passos. No primeiro passo, o arquivo contendo os valores binários das variáveis de decisão deve ser importado para a estrutura de dados da abordagem denominado "Resultados", conforme o "DER" da Figura 2. A partir desse momento, cada variável fica associada ao seu respectivo conjunto de alocações. No segundo passo, classificam-se todas as alocações por turma e horário. Tem-se, como resultado, o horário de cada turma.

Por conta dos relacionamentos entre as entidades pertencentes ao banco de dados é possível também "saber" quais professores ficaram de fora das alocações solicitadas e, então, especificar o índice de aproveitamento dos professores (EAP) na solução adotada. O cálculo da eficiência do processo de aproveitamento dos professores é dado pela expressão (8).

$$EAP \% = \left\lceil \frac{(ntp - pna)}{ntp} \right\rceil * 100$$
 (8)

onde:

• *ntp*: número total de professores envolvidos no processo de alocação;

• pna: número de professores não alocados;

• *EAP*: eficiência do processo de aproveitamento dos professores

A quantificação da variável "*pna*" é feita pela contagem simples de todas as alocações cujas variáveis de decisão associadas assumem valor igual a zero. Esse número representa a quantidade de professores que não foram alocados. Geralmente isso ocorre quando as disponibilidades de tempo dos professores é muito restritiva e há uma concorrência entre os professores pelos mesmos horários. Os problemas causados pelas "não-alocações" podem ser

contornados durante uma fase de "ajuste fino", onde os coordenadores conversam pessoalmente com os professores envolvidos. O sistema computacional fornece condições para que, de forma interativa, por meio de interfaces adequadas, novos ajustes ocorram e assim, cada "não-alocação" seja resolvida individualmente. Esse processo é rápido e controlado.

# 9. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A abordagem utilizada mostrou-se válida para a resolução do problema de alocações de professores na UnC. Uma prova cabal de sua validade é representada pelo fato de que a solução gerada por ela, para o segundo semestre do corrente ano, foi totalmente adotada pela instituição. Trata-se também de uma comprovação da aceitação da solução, pois ela foi implantada com sucesso.

A dimensão real do problema também é algo digno de consideração. Com tantas variáveis envolvidas e tantas possibilidades de resolução, o horário gerado forneceu uma solução "**zero choque**" com o máximo aproveitamento de professores: 96,3% de eficiência. Foram utilizadas mais de 12.000 (doze mil) variáveis binárias e mais e 7.000 (sete mil) restrições para modelar o problema. Gerou-se uma solução adequada para que 260 (duzentos e sessenta) professores ministrem 648 (seiscentos e quarenta e oito) disciplinas, ofertadas em 4 (quatro) locais diferentes e distribuídas em 122 (cento e vinte e duas) turmas de 31 (trinta e um) cursos superiores distintos, envolvendo 1.025 (um mil e vinte e cinco) alocações de 2 (duas) horas/aula.

Os professores não alocados foram aproveitados posteriormente, durante a fase de ajustes finos. Para tanto, um conjunto de interfaces do sistema computacional, e relatórios específicos, forneceu a interatividade necessária.

Outra característica importante da abordagem utilizada é que, como um todo, a solução em três camadas permite utilizá-la como um simulador real de problemas de alocação de professores. É possível fazer mudanças nas configurações iniciais e verificar o nível de eficiência das soluções obtidas e compará-las entre si.

Além de flexibilidade na sua aplicação ao caso específico da UnC, seu escopo de aplicação pode ser ampliado para outros casos, de outras instituições de ensino. Em outras palavras, o sistema poderia utilizado para resolver problemas similares de outras instituições. Porém, esse processo de generalização deve ser acompanhado em estudos futuros.

## Acknowledgements

Special acknowledgements is due to DASH Associates InC. By the license #2532, on "Academic Partner Program-APP" mode, the use of its motors and IDE was successful. We enthusiastically recommend the use of DASH's technologies for optimizations tasks: "XPress-MP", "XPress Mosel" and "XPress-Optimizer", for one simple fact: we would take 5 years, or more, on development process of "Branch-and-Bound" and "degenerecency controls" (between others) routines for LP algorithms to solve our problems. We also whish to acknowledge two individuals of DASH's team: Dawn Mazzanti and Stacey Baldygo, for the license accomplishment and support.

### REFERÊNCIAS

Ackoff, Russel L. & Sasieni, Maurice W. <u>Pesquisa Operacional</u>. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1979.

- Bregalda, Paulo F; Oliveira, Antônio A; Bornstein, Cláudio T. <u>Introdução à Programação Linear</u>. Rio de Janeiro, Campus, 1981.
- Caixeta-Filho, José Vicente. <u>Pesquisa Operacional: técnicas de otimização aplicadas a sistemas agroindustriais</u>. São Paulo, Atlas, 2001.
- Dash Associates, Inc. <u>XPress Mosel: user guide</u>. Englewood Cliff, 2005**a**. For the latest news software and documentation, see: <a href="http://www.dashoptimization.com">http://www.dashoptimization.com</a>>.
- Dash Associates, Inc. XPress-MP: getting started. Englewood Cliff, 2005b. For the latest news software and documentation, see: <a href="http:///www.dashoptimization.com">http:///www.dashoptimization.com</a>>.
- Dash Associates, Inc. <u>XPress-Optimizer: reference manual</u>. Englewood Cliff, 2005c. For the latest news software and documentation, see: <a href="http://www.dashoptimization.com">http://www.dashoptimization.com</a>>.
- Elmasri, Ramez & Navathe, Shamkant B. <u>Fundamentals of Database Systems</u>. New York, Addison-Wesley Publishing Company second Edition, 1998.
- Gershenfeld, Neil. <u>The Nature of Mathematical Modeling</u>. Cambridge, Cambridge University Press, 1999.
- Korth, Henry F. & Silberschatz, Abraham. <u>Sistema de Banco de Dados</u>. São Paulo, Makron Books Editora 2ª Edição, 1995.
- Kroencke, David M. <u>Banco de Dados</u>. Rio de Janeiro. LTC Livros Técnicos e Científicos, 1999.
- Meerschaert, Mark M. <u>Mathematical Modeling</u>. London, Academic Press second Edition, 1999.
- Press, William H et al. <u>Numerical Recipes in C++: the art of scientific computing</u>. Second edition. New York, Cambride University, 2002.
- Silva, Ermes Medeiros et al. <u>Pesquisa Operacional: para os cursos de Economia,</u> Administração e Ciências Contábeis. São Paulo, Atlas 2ª Edição, 1996.
- Svobodny, Thomas. <u>Mathematical Modeling for Industry and Engineering</u>. London, Prentice-Hall International, 1998.