JORGE SAENZ

CALCULO DIFERENCIAL

CON

FUNCIONES TRASCENDENTES TEMPRANAS

PARA

CIENCIAS E INGENIERIA

SEGUNDA EDICION

HIPOTENUSA

CALCULO DIFERENCIAL

CON

FUNCIONES TRASCENDENTES TEMPRANAS

PARA

CIENCIAS E INGENIERIA

SEGUNDA EDICION

Jorge Sáenz

Universidad Centroccidental

Lisandro Alvarado

HIPOTENUSA

Barquisimeto

2 005

Cálculo Diferencial para Ciencias e Ingeniería

Depósito Legal: lf83720045102592
ISBN.: 980-6588-04-5

Editado y distribuido por:
Inversora Hipotenusa
Telf.: (0251) 2521807
e-mail: jorsaenz@latinmail.com
Barquisimeto - Estado Lara

Impresión:
Tipografía y Litografía Horizonte C.A.
Calle 41 entre Av. Vzla. Y Carr. 27 - Nº 26-72
Telefax:(0251) 4462324 - 4462317
e-mail: edt-horizonte@cantv.net
Barquisimeto - Estado Lara

impresión 2005

Impreso en Venezuela - Printed in Venezuela

PROLOGO

Esta segunda edición aparece diez años después que se publicó la primera. Es muy gratificante la acogida que ha tenido la primera edición.

En esta segunda edición, al igual que en la anterior, se ha buscado equilibrar la teoría y la práctica. La teoría es acompañada de numerosos ejemplos. Cada sección presenta una sección de problemas resueltos, donde muchos problemas típicos de relevancia son desarrollados con todo detalle. La gran mayoría de teoremas son presentados con sus respectivas demostraciones. Cuando la demostración es compleja, ésta es presentada como un problema resuelto.

La gran novedad de esta segunda edición es la incorporación en el texto de las funciones exponenciales, logarítmicas e hiperbólicas (funciones trascendentes). Este hecho nos traerá dos ventajas muy significativas. En primer lugar, nos permitirá tratar tempranamente temas importantes como la regla de L'Hôpital y la derivación logarítmicas. Estos temas correspondían a cursos posteriores. En segundo lugar, los ejemplos y aplicaciones serán más interesantes y más variados.

Para la graficación de funciones y para cálculos auxiliares hemos hecho uso extensivo de los paquetes computacionales **Derive** y **Graphmatica.** Se Recomienda el estudiante el uso de estos o cualquier otros sistemas algebraicos de computación.

He recibido valiosa ayuda y sugerencias de parte de muchos colegas. Entre estos tenemos a Maribel Perdomo, José Luis Linares, María Torralba, Wolgfang Hernández, Alexander Pérez. En forma muy especial hago testimonio de mi gratitud al Ing. Alexis Salcedo y a la estudiante de matemáticas, Br. Lucybeth Gutiérrez, quienes tuvieron la tarea de revisar todo el texto.

Jorge Sáenz Camacho

Barquisimeto, setiembre 2.005

CONTENIDO

3 DIFERENCIACION 181

4 OTRAS TECNICAS DE DERIVACION 205

5 APLICACIONES DE LA DERIVADA 279

APENDICES A1

RESPUESTAS A73

1

FUNCIONES REALES

RENE DESCARTES
(1.596 -1.650)

René Descartes
(1.596 - 1.650)

***René Descartes**, filósofo, matemático y físico francés, nació en La Haya. Es considerado como el padre de la filosofía moderna. De él es la famosa frase: "Cogito, ergo sum" (Pienso, luego existo).*

Fue un niño de singular inteligencia, pero físicamente débil. Durante los años de su educación en el colegio jesuita de la Flèche, los religiosos, para mitigar el frío de las duras mañanas de invierno, le permitían permanecer en la cama. Se dice que fueron precisamente durante esas ociosas horas de cama cuando Descartes concibió las ideas fundamentales de la Geometría Analítica.

*En 1.637 escribe el libro **Géometrie** en el que da nacimiento oficial a la **Geometría Analítica**. Su compatriota Pierre de Fermat (1.601-1.665), independientemente, también descubrió los principios fundamentales de esta ciencia.*

*En 1.628 se mudó a Holanda donde vivió 21 años. Durante esta permanencia escribió sus principales obras: **Principios de Filosofía**, **El Discurso del Método**, **Las Meditaciones**, etc.*

En 1.649, la joven y energética reina Cristina de Suecia lo invitó a Estocolmo, como su tutor de filosofía. Sus clases eran en las tempranas horas de la mañana. El eminente filósofo y distinguido matemático no soportó el duro invierno sueco, muriendo a consecuencia de una neumonía el año siguiente de su llegada a Estocolmo.

ACONTECIMIENTOS IMPORTANTES

*Durante la vida de René Descartes, en América y en el mundo hispano sucedieron los siguientes hechos notables: En 1.609 el cronista peruano Inca Gracilazo de la Vega, hijo de un conquistador y de una princesa india, publica **"Los Comentarios Reales"**, famosa obra que cuenta la historia del Imperio Incaico. El 17 de septiembre de 1.630, en la desembocadura del río Charles, unos colonos ingleses fundan la ciudad de Boston. En 1.636 en Cambridge, ciudad contigua a Boston, se funda la Universidad de Harvard. Para ese entonces, la América Española ya contaba, desde muchos años atrás, con la Universidad Mayor de San Marcos (Lima, 1.551) y la Universidad de Santo Domingo*

INTRODUCCION

Antes de iniciarnos en el desarrollo de Cálculo necesitamos ponernos de acuerdo en algunas notaciones y en revisar algunos conceptos muy generales que son propios de toda teoría matemática.

Recordemos que un **axioma** es una proposición que, por convención, admitimos que es verdadero, sin el requisito de una demostración. En cambio, un **teorema**, es una proposición, cuya veracidad requiere de una **demostración** o **prueba**.

La gran mayoría de los teoremas que encontraremos más adelante tiene la forma de una proposición **condicional:**

Si H, entonces T,

que se simboliza así: $\mathbf{H \Rightarrow T}$. Aquí, H es la hipótesis y T es la tesis

Una **demostración** o **prueba** de un teorema es una secuencia de proposiciones que termina con la tesis, donde cada paso de la secuencia es una hipótesis, un axioma o un teorema previamente demostrado.

A la proposición **bicondicional:**

P si y sólo si Q,

lo simbolizamos así: $\mathbf{P \Leftrightarrow Q}$.

Una proposición **bicondicional** $\mathbf{P \Leftrightarrow Q}$, como su nombre lo sugiere, es la conjunción de dos proposiciones condicionales: $P \Rightarrow Q$ y $Q \Rightarrow P$.

Toda definición, aunque a veces no se lo exprese explícitamente, es una proposición bicondicional.

Algunos teoremas tienen la forma bicondicional, $P \Leftrightarrow Q$. En este caso, en realidad estamos al frente de dos teoremas: $P \Rightarrow Q$ y $Q \Rightarrow P$. Esto significa que para probar $P \Leftrightarrow Q$, debemos aportar dos demostraciones, la de $P \Rightarrow Q$ y la de $Q \Rightarrow P$.

En nuestra exposición nos encontraremos con muchos teoremas, unos más importantes que otros. A los teoremas de los cuales pensamos que no son tan relevantes, los llamamos simplemente **proposiciones**.

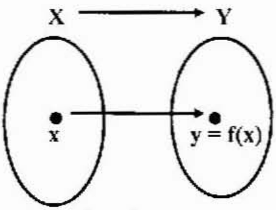
Con frecuencia, con el ánimo de simplificar la escritura, usaremos los siguientes símbolos:

1. $\forall$, que significa: **para todo**.
2. $\exists$, que significa: **existe**.
3. $\exists!$, que significa: **existe y es único**
4. $\wedge$, que significa: **y** (conjunción lógica)
5. $\vee$, que significa: **o** (disyunción lógica)

SECCION 1.1

FUNCIONES REALES Y SUS GRAFICAS

DEFINICION Una función es una tríada de objetos **(X, Y, f)**, donde **X** e **Y** son dos conjuntos y **f** es una regla que hace corresponder a **cada** elemento de X un **único** elemento de Y. Al conjunto X se le llama **dominio** de la función y al conjunto Y, **conjunto de llegada** de la función.



A una función (X, Y, f) se le denota más comúnmente por

$$f: X \longrightarrow Y \quad ó \quad X \xrightarrow{f} Y$$

y se lee: " **la función f de X en Y**".

Para indicar que a un elemento x de X, f le hace corresponder el elemento y de Y, se escribe así: **y = f(x)**, lo cual se lee "**y es igual a f de x**". También diremos que y es el valor que toma f en **x** ó que **y** es **la imagen** de x mediante **f**. El elemento **x**, en este caso, es una **preimagen** del elemento y.

A la variable que usamos para denotar los elementos del dominio se le llama **variable independiente** y a la variable que denota las imágenes, **variable dependiente**. En nuestra notación anterior, y = f(x), **la variable independiente es x y la dependiente es y**. Las letras x e y, por ser variables, pueden ser cambiadas por cualquier otro par de letras. Así, podemos escribir z = f(t), en cuyo caso, la variable independiente es t y la dependiente es z.

Dadas las funciones $f: X \longrightarrow Y$ y $g: X \longrightarrow Y$. Diremos que:

$$\mathbf{f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x), \ \forall\, x \in X}$$

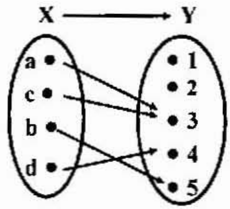
El **rango** de la función $f: X \longrightarrow Y$ es el conjunto formado por todas las imágenes. Esto es,

$$\textbf{Rango de f} = \{\, f(x) \in Y \,/\, x \in X \,\}$$

Al dominio y al rango de una función $f: X \longrightarrow Y$ los abreviaremos con Dom(f) y Rang(f), respectivamente.

OBSERVACION En la definición de función hemos utilizado dos términos que merecen atención. Uno de ellos es "**cada**", el cual indica que todo elemento del dominio debe tener una imagen. El otro término es "**único**", el cual indica que todo elemento del dominio tiene exactamente una imagen.

EJEMPLO 1. Sea la función f: X⟶Y, donde X = {a, b, c, d}, Y = {1, 2, 3, 4, 5} y cuya regla f está dada por el gráfico adjunto. Se tiene:



Dominio = Dom(f) = X = {a, b, c, d }

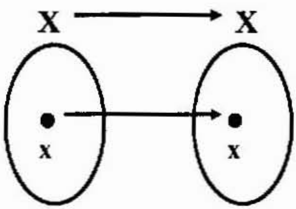
Conjunto de llegada = Y = {1, 2, 3, 4, 5}

Rango = Rang(f) = {3, 4, 5}

La **regla f** establece que: f(a) = 3, f(b) = 5, f(c) = 3, f(d) = 4

EJEMPLO 2. Sea X un conjunto cualquiera. A la siguiente función se le llama **función identidad** del conjunto X.

$$I_X : X \to X$$
$$I_X(x) = x$$



En este caso, el dominio, el conjunto de llegada y el rango, todos coinciden y son iguales a X. Esto es,

Dom (f) = Conjunto de llegada = Rang (f) = X

La regla I_X hace corresponder a cada elemento x el mismo elemento x.

FUNCIONES REALES

Las funciones que nos interesan en el curso de Cálculo son las funciones reales de variable real. Una **función real de variable real** es una función cuyo dominio y cuyo conjunto de llegada son subconjuntos de ℝ. Así, son funciones de este tipo:

a. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	**b.** $g: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$	**c.** $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x$	$g(x) = \dfrac{1}{x}$	$h(x) = 5$

CONVENCION.

Con el objeto de simplificar la notación, para presentar una función real de variable real $f: X \to \mathbb{R}$ daremos simplemente la regla f, prescindiendo del dominio X y del conjunto de llegada ℝ. Para esto, adoptamos la convención de que el dominio es el mayor subconjunto X de ℝ en el cual la regla f tiene sentido. Así, por ejemplo, diremos la función: $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$ en lugar de la función:

$$f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2}{x-1}$$

Aquí el dominio es $X = \mathbb{R} - \{1\}$. Hemos eliminado a 1 ya que no existe división entre 0. Además, 1 es el único elemento que presenta esta situación.

EJEMPLO 3. Hallar el dominio y el rango de las funciones:

1. $f(x) = x - 3$ **2.** $g(x) = \sqrt{x-3}$

Solución

1. Como $f(x) = x - 3$ está definido para todo $x \in \mathbb{R}$, tenemos que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Por otro lado, $\text{Rang}(f) = \mathbb{R}$. En efecto, dado $y \in \mathbb{R}$, tomamos $x = y + 3$. Se cumple que $x \in \mathbb{R} = \text{Dom}(f)$ y

$$f(x) = x - 3 = (y + 3) - 3 = y.$$

2. Como la expresión subradical de $g(x) = \sqrt{x-3}$ debe ser no negativa, tenemos:

$$x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, +\infty),$$

Esto es, $\text{Dom}(g) = [3, +\infty)$.

Por otro lado, $\text{Rang}(g) = [0, +\infty)$. En efecto, dado $y \in [0, +\infty)$ tomamos $x = y^2 + 3$.

Se cumple que $x \geq 3$, o sea $x \in [3, +\infty)$ y

$$g(x) = \sqrt{x-3} = \sqrt{(y^2+3)-3} = \sqrt{y^2} = |y| = y$$

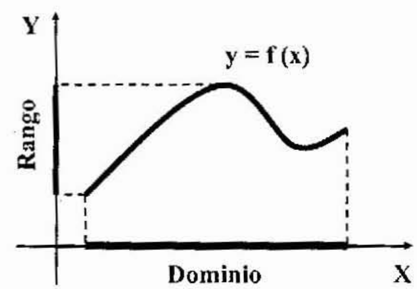
GRAFICAS DE FUNCIONES Y CRITERIO DE LA RECTA VERTICAL

Se llama **gráfico** o **gráfica de la función**

$$\mathbf{f : X \to \mathbb{R}}$$

al conjunto:

$$\mathbf{G = \{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 / x \in X \}}$$



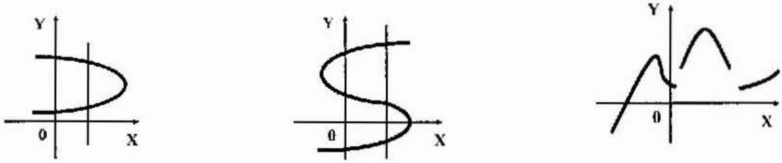
No toda curva en el plano es el gráfico de una función. Para reconocer las curvas ue corresponden a gráficos de funciones se tiene el siguiente criterio geométrico:

CRITERIO DE LA RECTA VERTICAL

Una curva en el plano es el gráfico de una función si y sólo si toda recta vertical corta a la curva a lo más una vez.

La veracidad de este criterio estriba en el hecho de que si una recta vertical x = a corta a la curva dos veces, en (a, b) y en (a, c), entonces a tiene dos imágenes, b y c; pero esto viola la definición de función.

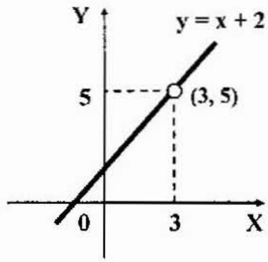
De acuerdo a este criterio, de las siguientes curvas, sólo la última representa a una función:



EJEMPLO 4. Graficar y hallar el dominio y rango de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$$

Solución



Es claro que Dom (f) = $\mathbb{R} - \{3\}$.

Por otro lado, factorizando el numerador tenemos que:

$$f(x) = \frac{(x + 2)(x - 3)}{x - 3}$$

Si $x \neq 3$, simplificamos el factor x − 3 y obtenemos:

$$f(x) = x + 2, \text{ para } x \neq 3.$$

Luego, la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$ es igual a la función lineal y = x + 2, excepto en el punto x = 3, en el cual f no está definida. En consecuencia, el rango de f es igual al rango de y = x + 2 menos el número y = 3 + 2 = 5. Esto es,

$$\text{Rang}(f) = \mathbb{R} - \{5\}$$

FUNCIONES DEFINIDAS POR TROZOS

Algunas funciones son definidas por partes, como en los dos siguientes ejemplos.

EJEMPLO 5. Graficar y hallar el dominio y rango la función **parte entera:**

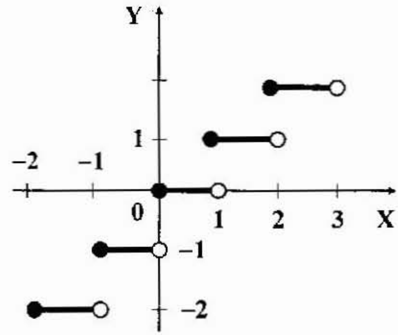
$$f(x) = [\![x]\!] = n, \text{ si } n \leq x < n + 1, \text{ donde n es un entero.}$$

A esta función también se la llama función **máximo entero** o, simplemente, **función escalera.**

Solución

En términos más explícitos, a esta función la definimos así:

$$[\![x]\!] = \begin{cases} -2, & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ -1, & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2, & \text{si } 2 \leq x < 3 \end{cases}$$



Dominio: $\mathbb{R}$
Rango: $\mathbb{Z}$.

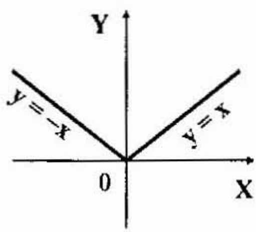
EJEMPLO 6. Graficar y hallar el dominio y rango de la función **valor absoluto**

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Solución

EL gráfico de la función valor absoluto está conformado por dos semirrectas:

La semirrecta $y = x$ para $x \geq 0$, a la derecha del eje Y; y la semirrecta $y = -x$ para $x < 0$, a la izquierda del eje Y.



Dominio: $\mathbb{R}$ Rango: $[0, \infty)$

FUNCIONES PARES E IMPARES Y SIMETRIA

1. Una función f es **par** si, para todo x en el dominio de f, se cumple que:

$$\mathbf{f(-x) = f(x)}$$

2. Una función f es **impar** si, para todo x en el dominio de f, se cumple que:

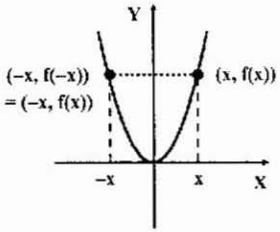
$$\mathbf{f(-x) = -f(x)}$$

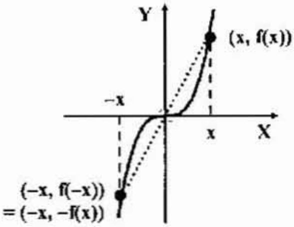
EJEMPLO 7. **a.** Probar que la $f(x) = x^2$ es par. Graficar la función.

b. Probar que la $f(x) = x^3$ es impar. Graficar la función.

Solución

a. $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ **b.** $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$





Se prueba fácilmente que:

a. Una función f es par $\Leftrightarrow$ el gráfico de f es simétrico respecto al eje Y.

b. Una función f es impar $\Leftrightarrow$ el gráfico de f es simétrico respecto al origen.

El término de función **par** o **impar** está inspirado en el siguiente resultado:
La función $f(x) = x^n$ es par si n es par, y es impar si n es impar.

FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

DEFINICION. Sea f una función definida en un intervalo I. Diremos que:

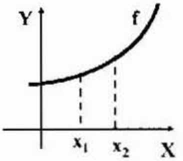
1. f es creciente en I si, para cualquier par de puntos, x_1 y x_2 en I, se cumple:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

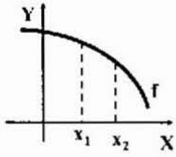
2. f es decreciente en I si, para cualquier par de puntos, x_1 y x_2 en I, se cumple:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

3. f es monótona en I si f es o bien creciente o decreciente en I.



Creciente



Decreciente

La función $f(x) = x^2$, dada en el ejemplo anterior, es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0]$ y es creciente en el intervalo $[0, +\infty)$. En cambio, la otra función $f(x) = x^3$, es creciente en todo su dominio, que es $\mathbb{R}$.

BREVE CATALOGO DE FUNCIONES

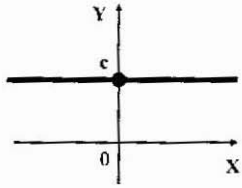
LAS FUNCIONES CONSTANTES

Sea c un número real fijo. La función

$$f(x) = c, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

es una **función constante.** Su dominio es todo $\mathbb{R}$ y su rango es el conjunto unitario $\{c\}$.

Su gráfico es la recta horizontal con ordenada en el origen c.

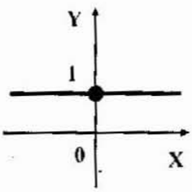


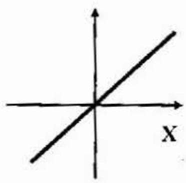
FUNCION POTENCIA

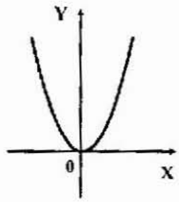
La **función potencia es** la función $\mathbf{f(x) = x^{\alpha}}$, donde α es una constante.

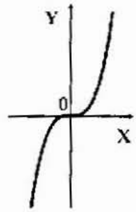
EJEMPLO 8. Si $\alpha = 0$, tenemos la función constante 1. Si $\alpha = 1$, tenemos la función identidad de $\mathbb{R}$. Si $\alpha = 2$ ó $\alpha = 3$ tenemos las funciones cuyas gráficas son una parábola o la parábola cúbica, respectivamente.

a. $f(x) = x^0 = 1$ **b.** $f(x) = x^1 = x$ **c.** $f(x) = x^2$ **d.** $f(x) = x^3$









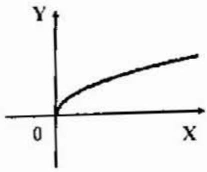
Observe la diferencia de las gráficas entre n par y n impar.

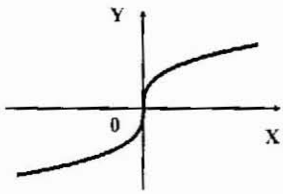
EJEMPLO 9. Si $\alpha = \dfrac{1}{n}$, donde **n** es un número natural no nulo, tenemos la

función raíz enésima: $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$

A continuación presentamos los casos n = 2 y n = 3

$f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$, $\qquad f(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$





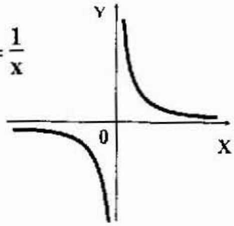
Dom(f) = Rang(f) = [0,+∞) **Dom(f) = Rang(f) = $\mathbb{R}$**

EJEMPLO 1 0. Si $\alpha = -n$, donde **n** es un número natural no nulo, tenemos la función:

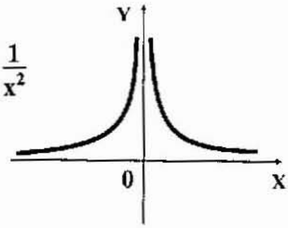
$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} . \qquad \text{Dom}(f) = \text{Rang}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

A continuación presentamos los casos n = 1 y n = 2.

$f(x) = \dfrac{1}{x}$



$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$



La gráfica de $f(x) = 1/x^n$ se parece a la de $f(x) = 1/x$ si n es impar; y a la gráfica de $f(x) = 1/x^2$ si n es par.

FUNCION POLINOMICA

Una **función polinómica o función polinomial de grado n** o, simplemente, **polinomio de grado n**, es una función de la forma:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

donde **n** es un número natural y $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales siendo $a_n \neq 0$. Estos números son los coeficientes de la función polinómica.

A las funciones polinómicas de grado 1, 2, 3:

$$p(x) = ax + b, \qquad p(x) = ax^2 + bx + c, \qquad p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

se les conoce más usualmente con los nombres de **función lineal, función cuadrática y función cúbica,** respectivamente. Una función polinómica de grado 0 es una función constante. Ya sabemos que el gráfico de una función lineal es una recta no vertical y que el gráfico de una función cuadrática es una parábola con eje paralelo al eje Y.

FUNCION RACIONAL

Una **función racional** es cociente de dos polinomios: $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$.

Así, $R(x) = \dfrac{2 - 3x + 8x^3}{4 - x^2}$ es una función racional.

El dominio de una función racional es $\mathbb{R}$ menos el conjunto de puntos donde el denominador se anula. Así el dominio de la función racional anterior es $\mathbb{R} - \{2, -2\}$

FUNCIONES ALGEBRAICAS

Una función f es **algebraica** si ésta puede construirse usando operaciones algebraicas (adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y extracción de raíces), comenzando con polinomios. Los polinomios y las funciones racionales son, automáticamente, funciones algebraicas. Otros ejemplos son los siguientes:

a. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ **b.** $g(x) = \dfrac{2}{1 + \sqrt{x}}$

FUNCIONES TRANSCENDENTES

Las funciones que no son algebraicas son llamadas **funciones transcendentes.** Entre éstas tenemos a las funciones trigonométricas y sus inversas, las funciones exponenciales y las funciones logarítmicas. A continuación hacemos un breve repaso de las funciones trigonométricas. En uno de los apéndices hacemos una presentación más detallada de éstas. De las funciones trigonométricas inversas y de funciones exponenciales y logarítmicas nos ocuparemos un poco más adelante.

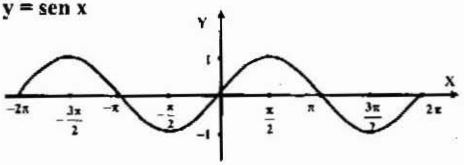
FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

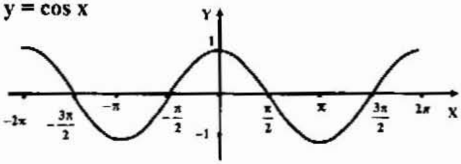
Entendemos la función $y = \text{sen } x$ como el seno del ángulo cuya medida es x radianes. La misma interpretación damos a $y = \cos x$.

El dominio de estas dos funciones es $\mathbb{R}$ y su rango es $[-1, 1]$.

y = sen x



y = cos x



Estas dos funciones son periódicas de periodo 2π. Esto es,

1. $\textbf{sen}(x + 2\pi) = \textbf{sen } x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

Además se cumple que:

2. $\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$ **(seno es impar),** $\cos(-x) = \cos x$ **(coseno es par)**
3. $\text{sen}(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \text{sen } x$
4. $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
5. $|\text{ sen } x \,| \leq 1$, $|\cos x\,| \leq 1$
6. $\text{sen } x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi, \ \forall n \in \mathbb{Z}$. $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi, \ \forall n \in \mathbb{Z}$

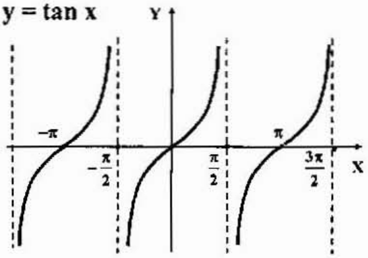
LAS OTRAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

a. $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ **b.** $\cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ **c.** $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ **d.** $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

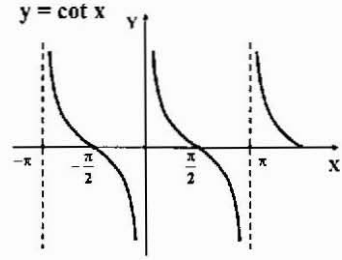
De acuerdo a las igualdades dadas en 6, tenemos que:

1. $\operatorname{Dom}(\tan) = \operatorname{Dom}(\sec) = \left\{ x \in \mathbb{R} \;/\; x \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \right\}$
2. $\operatorname{Dom}(\cot) = \operatorname{Dom}(\operatorname{cosec}) = \left\{ x \in \mathbb{R} \;/\; x \neq n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \right\}$

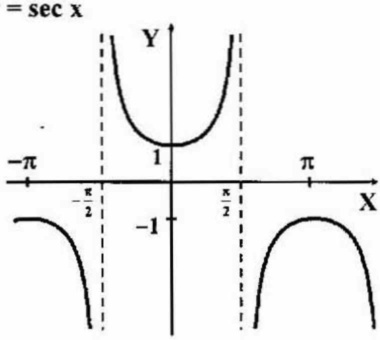
y = tan x



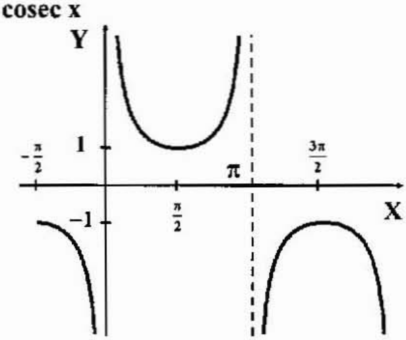
y = cot x



y = sec x



y = cosec x



FUNCIONES COMO MODELOS MATEMATICOS

Muchas relaciones que aparecen en las distintas ciencias o en la vida cotidiana se expresan (son modeladas) mediante funciones. Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 11. Una fábrica que produce cierto artículo obtiene una utilidad de 300 dólares por unidad cuando la producción no excede las 800 unidades. La utilidad decrece 2 dólares por cada unidad que sobrepasa los 800.

a. Expresar la utilidad U(x) de la fábrica como función de los x artículos producidos.

b. Hallar la utilidad si se producen 1200 unidades.

Solución

a. Si $0 \leq x \leq 800$, la utilidad es $U(x) = 300x$

Si $x > 800$, el exceso sobre 800 es $x - 800$ y la utilidad por unidad ha decrecido en:

$$2(x - 800) = 2x - 1.600$$

Por lo tanto:

Utilidad por unidad = $300 - (2x - 1.600) = 1.900 - 2x$ y

$U(x)$ = (utilidad por las primeras 800) + (utilidad por las que exceden 800)

$$= 300(800) + (1.900 - 2x)(x - 800) = -2x^2 + 3{,}500x - 1.280.000$$

En resumen, la utilidad al producir x artículos es:

$$U(x) = \begin{cases} 300x, & \text{si } 0 \leq x \leq 800 \\ -2x^2 + 3.500x - 1.280.000, & \text{si } x > 800 \end{cases}$$

b. $U(1.200) = -2(1.200)^2 + 3.500(1.200) - 1.280.000$

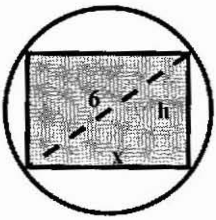
$$= -2.880.000 + 4.200.000 - 1.280.000 = 40.000$$

EJEMPLO 12. De un tronco de madera, que tiene una sección circular de 3 dm. de radio, se quiere tener un tablón de sección rectangular. Expresar el área del rectángulo en términos de su base.

Solución

Sean x, h y A la base, la altura y el área del rectángulo, respectivamente. Se tiene:

$$A = xh \qquad \textbf{(1)}$$



Ahora, expresamos la altura h en términos de x, la longitud de la base. Para esto, observamos que el diámetro punteado del círculo divide al rectángulo en dos triángulos rectángulos cuya hipotenusa mide 6 dm. Usando el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$h = \sqrt{6^2 - x^2} \qquad \textbf{(2)}$$

Luego, si A(x) es el área del rectángulo, de (1) y (2) obtenemos:

$$A(x) = x\sqrt{36 - x^2}$$

EJEMPLO 13. Un fabricante de envases construye cajas sin tapa utilizando láminas cuadradas de 72 cm. de lado. A cada lámina se recorta un pequeño cuadrado en cada esquina y luego se doblan las aletas para formar los lados de la caja. Si x es la longitud del lado del pequeño cuadrado recortado, expresar:

a. El volumen de la caja en términos de x.

b. El área de la caja (sin la tapa) en términos de x.

Solución

a. Tenemos que:

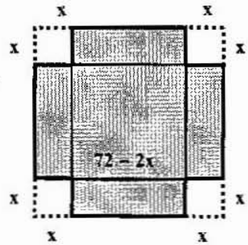
Volumen = (área de la base)(altura)

La base de la caja es un cuadrado de lado 72 – 2x.

Luego, su área es $(72-2x)^2$.

La altura de la caja es x.

En consecuencia, el volumen de la caja es:



$$V = (72-2x)^2(x) = x(72-2x)^2$$

b. El área de la caja es igual al área del cuadrado inicial menos el área de los 4 cuadrados recortados. Luego, si A(x) es el área de la caja, entonces

$$A(x) = (72)^2 - 4x^2 = 5.184 - 4x^2$$

EJEMPLO 14. Se desea construir un estanque de 16 m^3 de capacidad. La base debe ser un rectángulo cuyo largo es el doble de su ancho. Las paredes laterales deben ser perpendiculares a la base. El m^2 de la base cuesta 80 mil bolívares y el m^2 de las paredes laterales, 50 mil bolívares. Expresar el costo del tanque como función del ancho de la base.

Solución

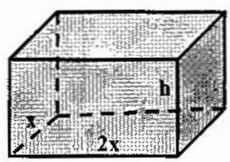
Sea x la medida del ancho de la base, h la altura del tanque y C(x) su costo, en miles de bolívares.

La base tiene una longitud de 2x y un área de $2x(x) = 2x^2$. Luego,

$$\text{Costo de la base} = 80(2x^2) = 160x^2. \quad \textbf{(1)}$$

El tanque debe tener 16 m^3. Luego,

$$16 = V = (\text{largo})(\text{ancho})(\text{altura}) = 2x(x)h = 2x^2h$$



Despejando h:

$$h = \frac{16}{2x^2} = \frac{8}{x^2}$$

El área de las 4 paredes laterales es:

$$2xh + 2(2x)h = 6xh = 6x\left(\frac{8}{x^2}\right) = \frac{48}{x}$$

Luego,

$$\text{Costo de las paredes laterales} = 50\left(\frac{48}{x}\right) = \frac{240}{x} \quad \textbf{(2)}$$

Sumando (1) y (2) obtenemos el costo del tanque:

$$C(x) = 160x^2 + \frac{240}{x} \text{ miles de bolívares}$$

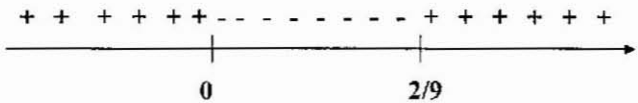
PROBLEMAS RESUELTOS 1.1

PROBLEMA 1. Hallar el dominio y rango de la función $f(x) = \sqrt{9 - 2/x}$

Solución

Dominio:

$$x \in \text{Dom}(f) \Leftrightarrow 9 - \frac{2}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{9x - 2}{x} \geq 0$$



Luego, $\text{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup [2/9, +\infty)$.

Rango:

$y \in \text{Rang}(f) \Leftrightarrow \exists\, x \in \text{Dom}(f)$ tal que $f(x) = y \Leftrightarrow \exists\, x \in \text{Dom}(f)$ tal que $\sqrt{9 - 2/x} = y$

Despejamos x en términos de y:

$$\sqrt{9 - 2/x} = y \Leftrightarrow 9 - \frac{2}{x} = y^2 \ \wedge\ y \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} = 9 - y^2 \ \wedge\ y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{9 - y^2} \ \wedge\ y \geq 0$$

Mirando la igualdad: $x = \dfrac{2}{9 - y^2}$, vemos que podemos encontrar x si el denominador, $9 - y^2$, es distinto de 0, ó sea cuando $y \neq 3$ ó $y \neq -3$.

Luego, $y \in \text{Rang}(f) \Leftrightarrow (y \neq 3$ ó $y \neq -3.) \wedge y \geq 0 \Leftrightarrow y \in [0, +\infty) - \{3\}$.

En consecuencia, $\text{Rang}(f) = [0, +\infty) - \{3\}$.

PROBLEMA 2. Hallar el dominio, el rango y graficar la **función sierra:**

$$S(x) = x - [\![x]\!]$$

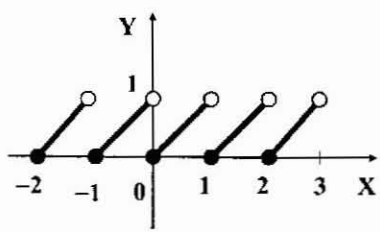
Solución

Dominio: $\mathbb{R}$

Analicemos a la función S en cada intervalo de la forma $[n, n + 1)$:

$$n \leq x < n + 1 \Rightarrow [\![x]\!] = n \Rightarrow$$

$$S(x) = x - n \quad \text{y} \quad S(n) = n - n = 0$$



Esto nos dice que en cada intervalo $[n, n+1)$ S es la recta $y = x - n$, que tiene pendiente 1 y pasa por el punto: $(n, S(n)) = (n, 0)$.

Luego, el **rango** de S es el intervalo $\mathbf{[0, 1)}$.

PROBLEMA 3. Hallar la función lineal $f(x) = ax + b$ que cumple las condiciones:

1. $f(x+y) = f(x) + f(y), \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$. **2.** $f(-2) = -6$

Solución

Usando la condición (1) obtenemos:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \Rightarrow a(x+y) + b = (ax+b) + (ay+b) \Rightarrow$$

$$ax + ay + b = ax + b + ay + b \Rightarrow b = b + b \Rightarrow b = 0$$

Luego, $f(x) = ax$.

Ahora, usamos la condición (2):

$$f(-2) = -6 \Rightarrow a(-2) = -6 \Rightarrow a = 3$$

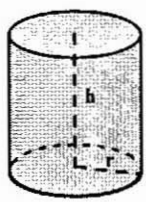
En consecuencia, la función lineal buscada es: $f(x) = 3x$

PROBLEMA 4. Una fábrica, para envasar alimentos, necesita potes de aluminio con tapa, que tengan la forma de un cilindro circular recto y un volumen de 250π cm^3. Expresar la cantidad (área) de aluminio que tiene cada pote como función del radio de la base.

Solución

Sean r el radio de la base, h la altura y A el área total de las paredes del pote. El área es la suma de las áreas de las dos bases, que es $2\pi r^2$, más el área de la superficie lateral, que es $2\pi rh$. Luego,.

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad \textbf{(1)}$$



Por otro lado, el volumen del cilindro circular recto es $V = \pi r^2 h$. En nuestro caso, como $V = 250\pi$, tenemos que

$$\pi r^2 h = 250\pi \Rightarrow r^2 h = 250 \Rightarrow h = \frac{250}{r^2}$$

Reemplazando este valor de h en (1):

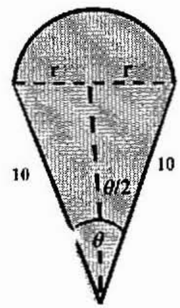
$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{250}{r^2} = 2\pi\left(r^2 + \frac{250}{r}\right)$$

PROBLEMA 5. La figura adjunta está conformada por un triángulo isósceles y un semicírculo. Los lados congruentes del triángulo miden 10 cm. y forman el ángulo θ. Hallar una función que exprese el área A de la figura en términos del ángulo θ.

Solución

Si A_1 es el área del semicírculo y A_2 la del triángulo, entonces

$$A = A_1 + A_2$$



Hallemos A_1:

El radio del semicírculo es $r = 10 \text{ sen } (\theta/2)$. Luego,

$$A_1 = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi\left[10 \text{ sen } (\theta/2)\right]^2 = 50\pi \text{ sen}^2(\theta/2)$$

Hallemos A_2:

La base b y la altura h del triángulo están dadas por:

$$b = 2r = 2(10 \text{ sen}(\theta/2)) = 20 \text{ sen}(\theta/2), \quad h = 10 \cos(\theta/2).$$

Luego,

$$A_2 = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}\left[20 \text{ sen}(\theta/2)\right]\left[10 \cos(\theta/2)\right]$$

$$= 50\left[2\text{sen }(\theta/2) \cos(\theta/2)\right] = 50 \text{ sen } \theta \qquad \text{(Ident. Trigo. 27)}$$

Ahora hallamos A:

$$A = A_1 + A_2 = 50\pi \text{ sen}^2(\theta/2) + 50 \text{ sen } \theta = 50\left[\pi \text{ sen}^2(\theta/2) + \text{sen } \theta\right]$$

Luego,

$$A = 50\left[\pi \text{ sen}^2(\theta/2) + \text{ sen } \theta\right]$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 1.1

1. Dada la función $f(x) = \frac{x}{x+1}$, encontrar:

a. $f(3)$ **b.** $f(1+\sqrt{2})$ **c.** $f(2+h) - f(2)$ **d.** $f(a+h) - f(a)$

2. Dada la función $g(x) = x + \frac{(x-2)^2}{4}$, encontrar:

a. $g(2)$, **b.** $g(a+2)$, **c.** $g(a+h) - g(a)$

En los problemas del 3 al 8 hallar el dominio y el rango de la función dada.

3. $f(x) = \sqrt{x-9}$ **4.** $g(x) = \frac{\sqrt{16-x^2}}{3}$ **5.** $h(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$

6. $u(x) = \sqrt[3]{x-2}$ **7.** $f(x) = \frac{x^2-4}{x}$ **8.** $y = \sqrt{x(x-2)}$

En los problemas del 9 al 14 hallar el dominio de la función dada.

9. $g(x) = \frac{6}{\sqrt{9-x}-2}$ **10.** $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}-2}$ **11.** $y = \sqrt{4-\frac{1}{x}}$

12. $y = \dfrac{1}{4-\sqrt{1-x}}$ **13.** $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{2-x}}$ **14.** $y = \sqrt[4]{\dfrac{x+5}{x-3}}$

En los problemas 15 y 16, hallar el dominio, el rango y graficar la función:

15. $g(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 1 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$ **16.** $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

17. Probar que:
a. Si el gráfico de f es simétrico respecto al eje Y, entonces f es par.

b. Si el gráfico de f es simétrico respecto al origen, entonces f es impar.

18. Si $f(x+1) = (x-3)^2$, hallar $f(x-1)$.

19. Hallar la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx$ tal que $f(x) - f(x-1) = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

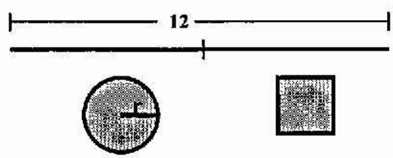
20. Un hotel tiene 40 habitaciones. El gerente sabe que cuando el precio por habitación es de Bs. 30.000 todas las habitaciones son alquiladas, pero por cada 5.000 bolívares de aumento una habitación se desocupa. Si el precio de mantenimiento de una habitación ocupada es de Bs. 4.000. Expresar la ganancia del hotel como función del número x de habitaciones alquiladas.

21. Cuando la producción diaria no sobrepasa de 1.000 unidades de cierto artículo, se tiene una utilidad de Bs. 4.000 por artículo; pero si el número de artículos producidos excede los 1.000, la utilidad, para los excedentes, disminuye en Bs. 10 por cada artículo que excede los 1.000. Expresar la utilidad diaria del productor como función del número x de artículos producidos.

22. Una finca está sembrada de mangos a razón de 80 plantas por hectárea. Cada planta produce un promedio de 960 mangos. Por cada planta adicional que se siembre, el promedio de producción por planta se reduce en 10 mangos. Expresar la producción p(x) de mangos por hectárea como función del número x de plantas de mango sembradas por hectárea.

23. Para enviar cierto tipo de cajas por correo la administración exige que éstas sean de base cuadrada y que la suma de sus dimensiones (largo + ancho + altura) no supere los 150 cm. Exprese el volumen de la caja, con máxima suma de sus lados, como función de la longitud del lado x de la base.

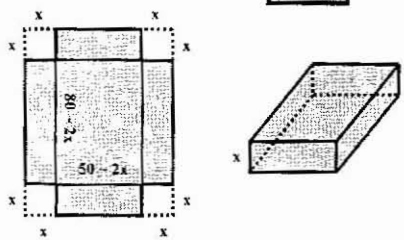
24. Un alambre de 12 m. de largo se corta en dos pedazos. Con uno de ellos se forma una circunferencia y con el otro un cuadrado. Expresar el área encerrada por estas dos figuras como función del radio r de la circunferencia.



25. Un triángulo isósceles tiene 36 cm. de perímetro. Expresar el área del triángulo como función de la longitud x de uno de los lados iguales.

26. Una ventana de 7 m. de perímetro tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Expresar el área de la ventana como función del ancho x.

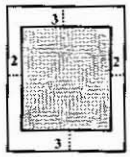
27. Un fabricante de envases construye cajas sin tapa utilizando láminas de cartón rectangulares de 80 cm. de largo por 50 cm. de ancho. Para formar la caja, de las cuatro esquinas de cada lámina se recorta un pequeño cuadrado y luego se doblan las aletas, como indica la figura.



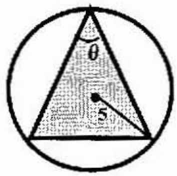
Expresar el volumen del envase como función de la longitud x del lado del cuadrado cortado.

28. Se quiere imprimir un libro, en el cual cada página tenga 3 cm. de margen superior, 3 cm. de margen inferior y 2 cm. de margen a cada lado. El texto escrito debe ocupar un área de 252 cm^2.

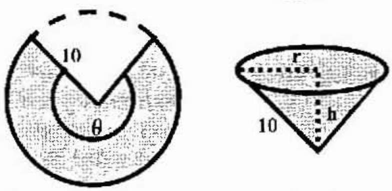
Expresar el área de cada página como función del ancho x del rectángulo impreso.



29. Un triángulo isósceles se inscribe en un círculo de radio 5 cm. Hallar una función que exprese el perímetro P del triángulo en términos del ángulo θ.



30. De una lámina circular de radio 10 cm. se corta un sector para construir una copa cónica. Hallar una función que exprese el volumen de la copa en términos del ángulo central θ. El volumen del cono es: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$



31. El ángulo de inclinación de una recta que no intersecta el segundo cuadrante es de $\frac{\pi}{4}$ rad. Hallar su ecuación sabiendo que su distancia al origen es de 4.

SECCION 1.2

NUEVAS FUNCIONES DE FUNCIONES CONOCIDAS

GRAFICAS NUEVAS DE GRAFICAS CONOCIDAS

Conociendo el gráfico de una función y = f(x) podemos obtener, mediante simples transformaciones geométricas, los gráficos de las siguientes funciones:

$y = f(x) + c,\qquad y = f(x) - c,\qquad y = f(x + c),\qquad y = f(x - c),$

$y = -f(x),\qquad y = f(-x),\qquad y = cf(x),\qquad y = f(cx),$

donde c es una constante positiva.

Las transformaciones sugeridas son de tres tipos:

1. **Traslaciones verticales y horizontales.**
2. **Reflexiones.**
3. **Estiramiento y compresión.**

TRASLACIONES VERTICALES Y HORIZONTALES

Sea **$c > 0$.** Para obtener la gráfica de:

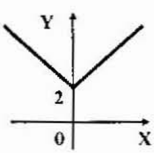
1. $y = f(x) + c$, **trasladar** la gráfica de $y = f(x)$ **c** unidades hacia **arriba.**
2. $y = f(x) - c$, **trasladar** la gráfica de $y = f(x)$ **c** unidades hacia **abajo.**
3. $y = f(x + c)$, **trasladar** la gráfica de $y = f(x)$ **c** unidades a **la izquierda.**
4. $y = f(x - c)$, **trasladar** la gráfica de $y = f(x)$ **c** unidades a **la derecha.**

EJEMPLO 1. Utilizando la gráfica de la función $y = |x|$ (ejemplo 6), graficar las funciones:

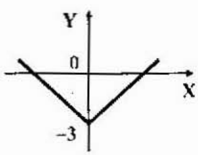
a. $y = |x| + 2$ **b.** $y = |x| - 3$ **c.** $y = |x - 1|$ **d.** $y = |x + 2|$

Solución

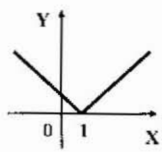
a. $y = |x| + 2$



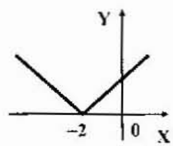
b. $y = |x| - 3$



c. $y = |x - 1|$



d. $y = |x + 2|$



REFLEXIONES

Para obtener la gráfica de:

1. $y = -f(x)$, **reflejar** la gráfica de $y = f(x)$ **en el eje X.**
2. $y = f(-x)$, **reflejar** la gráfica de $y = f(x)$ **en el eje Y**

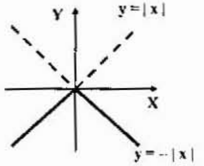
$\boxed{\textbf{EJEMPLO 2.}}$ Utilizando las gráficas de $y = |x|$ y la de la $y = \sqrt{x}$, graficar las siguientes funciones:

a. $y = -|x|$ **b.** $y = \sqrt{-x}$

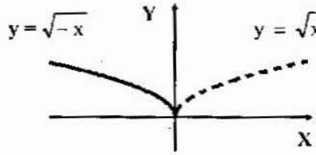
Solución

a. La gráfica de $y = -|x|$ se obtiene reflejando en el eje X la gráfica de $y = |x|$

b. La gráfica de $y = \sqrt{-x}$ se obtiene reflejando en el eje Y la gráfica de $y = \sqrt{x}$



a. $y = -|x|$



b. $y = \sqrt{-x}$

ESTIRAMIENTO Y COMPRESION

> Sea **c** una constante positiva: $c > 0$.
>
> **1.** Para obtener la gráfica de $y = cf(x)$, modificar **verticalmente** (alargar o comprimir) con factor **c** la gráfica de $y = f(x)$. Esta modificación es un **alargamiento** si $c > 1$ y es una **compresión** si $0 < c < 1$.
>
> **2.** Para obtener la gráfica de $y = f(cx)$, modificar **horizontalmente** (comprimir o alargar) c on factor $\frac{1}{c}$ la gráfica de $y = f(x)$. Esta modificación es una **compresión** si $c > 1$ y es un **alargamiento** si $0 < c < 1$.

Una argumentación sobre la validez de estos criterios la presentamos en el problema resuelto 6.

$\boxed{\textbf{EJEMPLO 3.}}$ Utilizando las gráfica de $y = \sqrt{1-x^2}$ graficar las funciones

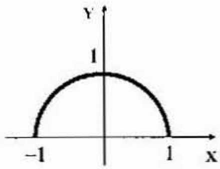
a. $g(x) = 2\sqrt{1-x^2}$ **b.** $h(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$

Solución

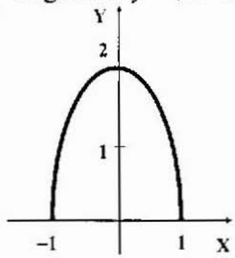
La gráfica de $y = \sqrt{1-x^2}$ es la parte superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$

a. En este caso $c = 2 > 1$. Luego, la gráfica de $g(x) = 2\sqrt{1-x^2}$ se obtiene estirando verticalmente con factor $c = 2$ la gráfica $y = \sqrt{1-x^2}$

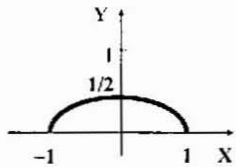
b. En este caso $c = \dfrac{1}{2} < 1$. La gráfica de $h(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$ se obtiene comprimiendo verticalmente con factor $c = \dfrac{1}{2}$ la gráfica $y = \sqrt{1-x^2}$



$y = \sqrt{1-x^2}$



a. $g(x) = 2\sqrt{1-x^2}$



b. $h(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$

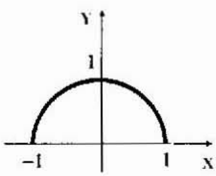
EJEMPLO 4. Utilizando las gráfica de $y = \sqrt{1-x^2}$ graficar las funciones

a. $g(x) = \sqrt{1-4x^2}$ **b.** $h(x) = \sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}$

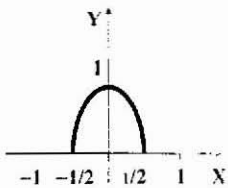
Solución

a. Tenemos que $g(x) = \sqrt{1-4x^2} = \sqrt{1-(2x)^2}$. Luego, por la regla 2, para el caso $c = 2$, concluimos que la gráfica de $g(x) = \sqrt{1-4x^2}$ se obtiene comprimiendo horizontalmente con factor $c = 1/2$ la gráfica $y = \sqrt{1-x^2}$

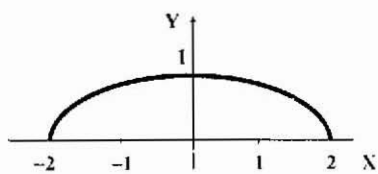
b. Tenemos que $h(x) = \sqrt{1-x^2/4} = \sqrt{1-(x/2)^2}$. Luego, por la regla 2, para el caso $c = 1/2$ la gráfica de $h(x) = \sqrt{1-x^2/4}$ se obtiene estirando horizontalmente con factor $\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{1/2} = 2$ la gráfica $y = \sqrt{1-x^2}$



$y = \sqrt{1-x^2}$



a. $g(x) = \sqrt{1-4x^2}$



b. $h(x) = \sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}$

ALGEBRA DE FUNCIONES

Dadas las funciones reales, **f** y **g**, la suma **f + g**, la diferencia **f − g**, el producto de un número r por una función **rf** y el cociente $\frac{f}{g}$ se definen así:

DEFINICION. Sean f y g funciones reales y r un número real.

a. $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $\quad \text{Dom}(f+g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$.

b. $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$, $\quad \text{Dom}(f-g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$.

c. $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\quad \text{Dom}(fg) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$.

d. $(rf)(x) = rf(x)$, $\quad \text{Dom}(rf) = \text{Dom}(f)$.

e. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $\quad \text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) - \{x \,/\, g(x) = 0\}$.

EJEMPLO 5. Si $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{9-x^2}$ y $r = 5$, hallar las funciones:

a. $f+g$ **b.** $f-g$ **c.** fg **d.** rf **e.** $\frac{f}{g}$

Solución

Hallemos los dominios de f y de g:

$x \in \text{Dom}(f) \Leftrightarrow x \geq 0$. Luego, $\text{Dom}(f) = [0, +\infty)$.

$x \in \text{Dom}(g) \Leftrightarrow 9 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$.

Luego, $\text{Dom}(g) = [-3, 3]$.

La intersección de estos dominios es:

$$\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = [0, +\infty) \cap [-3, 3] = [0, 3].$$

Ahora,

a. $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{9-x^2}$, con dominio $= [0, 3]$.

b. $(f-g)(x) = f(x)-g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{9-x^2}$, con dominio $= [0, 3]$.

c. $(fg)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x}\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9x-x^3}$, con dominio $= [0, 3]$.

d. $(rf)(x) = 5f(x) = 5\sqrt{x}$, con dominio $= \text{Dom}(f) = [0, +\infty)$

e. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{9-x^2}} = \sqrt{\frac{x}{9-x^2}}$, con dominio $= [0, 3] - \{3\} = [0, 3)$

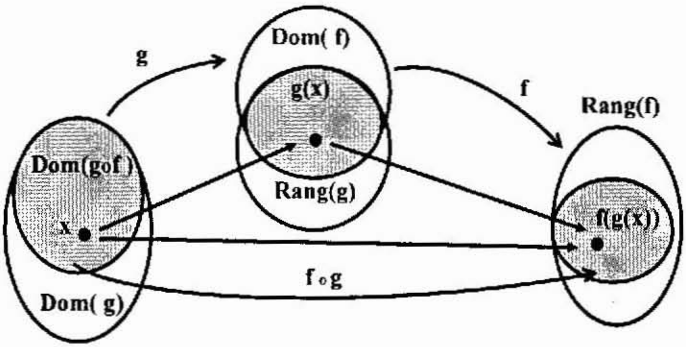
COMPOSICION DE FUNCIONES

DEFINICION. Dadas dos funciones f y g, se llama **función compuesta** de f y g a la función **f o g** definida por:

$$\boxed{(f \circ g)(x) = f(g(x))}$$

$$\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \text{Dom}(g) \ / \ g(x) \in \text{Dom}(f)\}$$

Observar que para que se pueda tener la compuesta $f \circ g$, el rango de g debe intersectar al dominio de f.



EJEMPLO 6. Si $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$ hallar:

a. $f \circ g$ **b.** $g \circ f$ **c.** $g \circ g$ **d.** $f \circ f$

Solución

a. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1/x) = \sqrt{1-(1/x)^2} = \sqrt{1-1/x^2}$

b. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

c. $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(\frac{1}{x}) = \dfrac{1}{1/x} = x$

d. $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2} = \sqrt{x^2} = |x|$

$(g \circ f)(x) = 4x^2 + 7 \neq 16x^2 - 40x + 28 = (f \circ g)(x)$

Este ejemplo demuestra que **la composición de funciones no es conmutativa**. Esto es, $(g \circ f) \neq (f \circ g)$. En efecto:

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{1-1/x^2} \neq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (f \circ g)(x)$$

EJEMPLO 7. Si $f(x) = \frac{x}{1+x}$, $g(x) = x^3$ y $h(x) = x - 2$, hallar:

a. $f \circ g \circ h$ **b.** $f \circ h \circ g$ **c.** $h \circ g \circ f$

Solución

a. $(f \circ g \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f(g(x-2)) = f((x-2)^3) = \frac{(x-2)^3}{1+(x-2)^3}$

b. $(f \circ h \circ g)(x) = (f \circ h)(g(x)) = f(h(g(x))) = f(h(x^3))$

$$= f(x^3 - 2) = \frac{x^3-2}{1+x^3-2} = \frac{x^3-2}{x^3-1}$$

c. $(h \circ g \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h\left(g\left(\frac{x}{1+x}\right)\right) = h\left(\left(\frac{x}{1+x}\right)^3\right)$

$$= \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 - 2 = \frac{x^3}{(1+x)^3} - 2$$

EJEMPLO 8. Si $F(x) = \frac{-5}{\sqrt{x^2-3}}$, hallar tres funciones f, g y h tales que

$$F = f \circ g \circ h$$

Solución

Si $f(x) = \frac{-5}{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = x^2 - 3$, se tiene:

$$(f \circ g \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f(g(x^2-3)) = f(\sqrt{x^2-3}) = \frac{-5}{\sqrt{x^2-3}}$$

Estas funciones no son únicas. Las siguientes funciones también satisfacen el requerimiento:

$$f(x) = \frac{-5}{\sqrt{x}}, \quad g(x) = x - 3 \quad y \quad h(x) = x^2$$

PROBLEMAS RESUELTOS 1.2

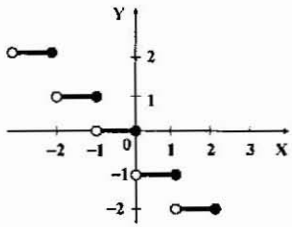
PROBLEMA 1. Usando la gráfica de $y = [\![x]\!]$, ejemplo 5 sección 1.1, y usando las técnicas de la transformación, bosquejar la gráfica de

a. $y = [\![-x]\!]$ **b.** $y = [\![x/2]\!]$

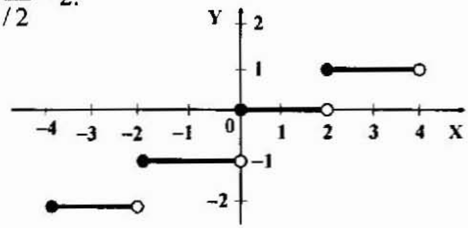
Solución

a. El gráfico de $y = [\![-x]\!]$ se obtiene reflejando en el eje Y el gráfico de $y = [\![x]\!]$.

b. La gráfica de $y = [\![x/2]\!]$ se obtiene de la gráfica de $y = [\![x]\!]$, alargándola horizontalmente con factor $\frac{1}{c} = \frac{1}{1/2} = 2.$



a. $y = [\![-x]\!]$



b. $y = [\![x/2]\!]$

| **PROBLEMA 2.** | Usando las técnicas de la transformación de gráficas, bosquejar la gráfica de $y = -\sqrt{\frac{1}{2}x} + 3$

Solución

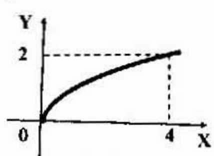
Paso 1. Tomamos la gráfica de $y = \sqrt{x}$, que es ya conocida.

Paso 2. Construimos la gráfica de $y = \sqrt{x/2}$, la cual se obtiene de la gráfica de $y = \sqrt{x}$ alargándola horizontalmente con factor $\frac{1}{c} = \frac{1}{1/2} = 2$

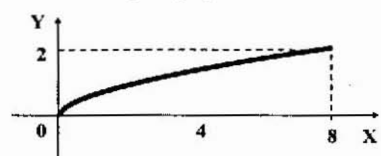
Paso 3. Construimos la gráfica de $y = -\sqrt{x/2}$, la cual se obtiene de la gráfica de $y = \sqrt{x/2}$ reflejándola en el eje X.

Paso 4. Construimos la gráfica de $y = -\sqrt{x/2} + 3$, la cual se obtiene de la gráfica de $y = -\sqrt{x/2}$, trasladándola 3 unidades hacia arriba.

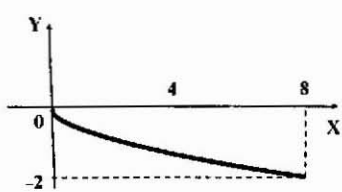
1. $y = \sqrt{x}$



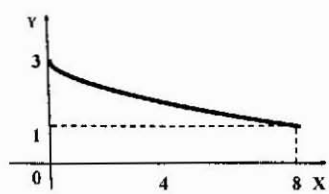
2. $y = \sqrt{x/2}$



3. $y = -\sqrt{x/2}$



4. $y = -\sqrt{x/2} + 3$



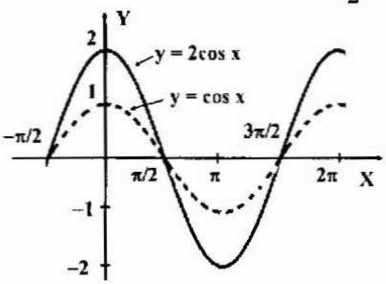
PROBLEMA 3. Teniendo en cuenta la gráfica de $y = \cos x$ y usando las técnicas de la transformación de gráficas, bosquejar la gráfica de:

a. $f(x) = 2\cos x$ **b.** $g(x) = \cos 2x$

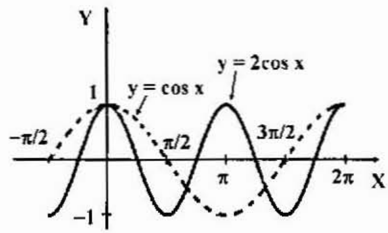
Solución

a. La gráfica de la función $f(x) = 2\cos x$ se obtiene de la gráfica de $y = \cos x$, estirándola verticalmente, con un factor de 2.

b. La gráfica de $g(x) = \cos 2x$ se obtiene de la gráfica de $y = \cos x$, comprimiéndola horizontalmente, con un factor de $\frac{1}{2}$.



f(x) = 2cos x



g(x) = cos 2x

Observar que el periodo de $g(x) = \cos 2x$ es $\boldsymbol{\pi}$, que es la mitad del periodo de $y = \cos x$. En general, el periodo de $y = \cos cx$ es $\frac{2\pi}{c}$.

PROBLEMA 4. Sea la función $h(x) = \sqrt{4 - x^2} + \dfrac{1}{4 - x^2}$

a. Hallar el dominio de h.

b. Hallar dos funciones f y g tales que $h = g \circ f$

Solución

a. Para que $\sqrt{4 - x^2}$ sea real debemos tener que $4 - x^2 \geq 0$. Además, como $4 - x^2$ aparece como un denominador, debemos exigir que $4 - x^2 \neq 0$. Uniendo las dos condiciones debemos tener que:

$$4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

Luego, el dominio de h es el intervalo $(-2, 2)$.

b. Si $f(x) = 4 - x^2$ y $g(y) = \sqrt{y} + \dfrac{1}{y}$, tenemos que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(4 - x^2) = \sqrt{4 - x^2} + \frac{1}{4 - x^2} = h(x)$$

PROBLEMA 5. Sea $g(x) = x - 1$ y $h(x) = x^2$.

a. Hallar una función p tal que $g \circ p = h$

b. Hallar una función f tal que $f \circ g = h$

Solución

a. $g \circ p = h \Rightarrow g(p(x)) = h(x) \Rightarrow p(x) - 1 = x^2 \Rightarrow p(x) = x^2 + 1$

b. $f \circ g = h \Rightarrow f(g(x)) = h(x) \Rightarrow f(x - 1) = x^2$

Luego, $f(x) = f(x + 1 - 1) = f((x + 1) - 1) = (x + 1)^2$

PROBLEMA 6. Justificar el criterio de estiramiento y compresión de una gráfica.

Solución

1. Tomemos cualquier punto $(x, f(x))$ del gráfico de $y = f(x)$. Si a la **ordenada** de este punto lo multiplicamos por c, obtenemos el punto $(x, cf(x))$, que está en la gráfica de $y = cf(x)$. Pero multiplicar sólo las ordenadas de los puntos $(x, f(x))$ por c significa alargar (si $c > 1$) o comprimir (si $c < 1$) verticalmente con factor c la gráfica de $y = f(x)$.

2. Tomemos cualquier punto $(x, f(x))$ del gráfico de $y = f(x)$. Si a la **abscisa** de este punto lo multiplicamos por $1/c$, obtenemos el punto $\left(x/c, f(x)\right)$. Si hacemos $z = x/c$, tenemos que $x = cz$ y $\left(x/c, f(x)\right) = (z, f(cz))$, que está en la gráfica de $y = f(cx)$. Pero multiplicar las abscisas de los puntos $(x, f(x))$ por $1/c$ significa comprimir (si $c > 1$) o alargar (si $c < 1$) horizontalmente con factor $1/c$ la gráfica de $y = f(x)$.

PROBLEMAS PROPUESTOS 1.2

1. Usando la gráfica de $f(x) = x^3$, bosquejar los gráficos de:

a. $y = x^3 - 3$ **b.** $y = (x - 1)^3$ **c.** $y = -x^3 + 1$ **d.** $y = -(x - 1)^3 + 1$

2. Usando la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$, bosquejar los gráficos de:

a. $y = \frac{1}{x} - 2$ **b.** $y = \frac{1}{x - 2}$ **c.** $y = -\frac{1}{x}$ **d.** $y = \frac{1}{x - 2} + 5$

3. Usando la gráfica de $y = [\![x]\!]$, bosquejar el gráfico de:

a. $y = -[\![x]\!]$ **b.** $y = [\![2x]\!]$ **c.** $y = \frac{1}{2}[\![x]\!]$

4. Utilizando la gráfica de la función $y = \text{sen } x$ y las técnicas de traslación y reflexión, graficar la función $y = 1 - \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

5. a. Considerando la gráfica $y = \cos x$ y usando las técnicas de la transformación de gráficas, bosquejar la gráfica de $y = -3\cos 4x$.

b. ¿Cuál es el periodo de $y = -3\cos 4x$?

En los problemas 6, 7 y 8 hallar $\mathbf{f + g, f - g, f\,g}$ ***y*** $\mathbf{\frac{f}{g}}$ ***con sus respectivos dominios.***

6. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $g(x) = \sqrt{2-x}$ **7.** $f(x) = \sqrt{16-x^2}$, $g(x) = \sqrt{x^2-4}$

8. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$

9. Hallar el dominio de la función $f(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x-1}$

10. Hallar el dominio de la función $f(x) = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

11. Hallar el dominio de la función $g(x) = \dfrac{\sqrt{3-x} + \sqrt{x+2}}{x^2-9}$

En los problemas del 12 al 16 hallar $\mathbf{f \circ g, g \circ f, f \circ f}$ **y** $\mathbf{g \circ g}$, ***con sus respectivos dominios.***

12. $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = \sqrt{x}$ **13.** $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x-4}$

14. $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ **15.** $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$

16. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$, $g(x) = \sqrt{1-x}$

En los problemas 17 y 18 hallar $\mathbf{f \circ g \circ h}$.

17. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$, $h(x) = x^2 - 1$ **18.** $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = \dfrac{x}{1+x}$, $h(x) = x^2 - x$

19. Si $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, hallar, con su respectivo dominio, $f \circ f \circ f$.

En los problemas del 20 al 23 hallar dos funciones f y g tales que $F = f \circ g$.

20. $F(x) = \dfrac{1}{1+x}$ **21.** $F(x) = -3 + \sqrt{x}$

22. $F(x) = \sqrt[3]{(2x-1)^2}$ **23.** $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

En los problemas 24, 25 y 26 hallar $\mathbf{f, g}$ ***y*** $\mathbf{h}$ ***tales que*** $\mathbf{F = f \circ g \circ h}$.

24. $F(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ **25.** $F(x) = \sqrt[3]{x^2 + |x| + 1}$ **26.** $F(x) = \sqrt[4]{\sqrt{x} - 1}$

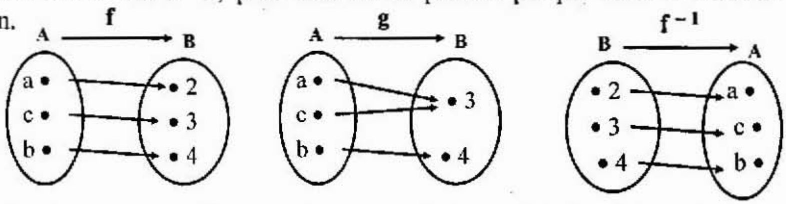
27. Si $f(x) = 2x + 3$ y $h(x) = 2x^2 - 4x + 5$, hallar una función g tal que $f \circ g = h$.

28. Si $f(x) = x - 3$ y $h(x) = \dfrac{1}{x-2}$, hallar una función g tal que $g \circ f = h$.

SECCION 1.3
FUNCION INVERSA

Sea $f: A \to B$ una función con dominio A y rango B. f asigna a cada elemento x de A un único elemento y de B. En caso de ser posible, queremos invertir a f; es decir, a cada y de B regresarlo, sin ambigüedad, al elemento x de A de donde provino. A esta nueva función, con dominio B y rango A, se la llama función inversa de f y se denota por f^{-1}.

No todas las funciones tienen inversa. Así, de las dos funciones f y g dadas a continuación, sólo f tiene inversa. La función g no la tiene debido a que el elemento 3 proviene de dos elementos de A, a y c. La función inversa de g tendría que asignar estos dos elementos a 3, pero esto no es posible porque viola la definición de función.

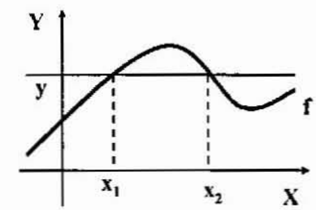


Las funciones, como f, que elementos distintos del dominio asignan valores distintos del rango, se llaman funciones inyectivas. Estas son las funciones que poseen inversa.

DEFINICION. Una función $f: A \to B$ es **inyectiva** o **función uno a uno** si:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Es decir, si a elementos distintos del dominio, son asignados elementos distintos del rango.



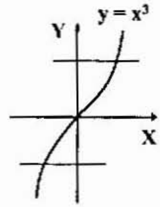
Para determinar si una función real de variable real f es inyectiva contamos con el criterio de la recta horizontal, que es similar al criterio de la recta vertical usado para determinar si el gráfico de una ecuación corresponde al gráfico de una función.

Si una recta horizontal corta al gráfico de f en dos puntos, como indica la figura, entonces existen dos puntos x_1 y x_2 del dominio de f tales que $y = f(x_1) = f(x_2)$. Esto implica que f no es inyectiva. Esta deducción nos ilustra el criterio antes mencionado:

CRITERIO DE LA RECTA HORIZONTAL.

Una función real de variable real f es inyectiva si y sólo si toda recta horizontal corta al gráfico de f a lo más en un punto.

EJEMPLO 1. Mostrar que la función $f(x) = x^3$ es inyectiva.



Solución

Toda recta horizontal corta al gráfico de $f(x) = x^3$ exactamente en un punto. Luego, el criterio de la recta horizontal nos dice que esta función es inyectiva.

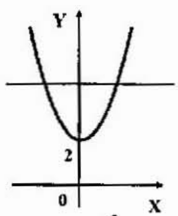
EJEMPLO 2. **a.** Mostrar que la función $g(x) = x^2 + 2$ no es inyectiva.

b. Restringir el dominio de g para obtener una nueva función f que sea inyectiva.

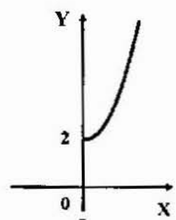
Solución

a. Aplicando el criterio de la recta horizontal vemos que existen rectas horizontales que cortan al gráfico de $g(x) = x^2$ en más de un punto.

b. Sea f la restricción de g a $[0, +\infty)$. Esto es, $f(x) = x^2 + 2$, con $x \geq 0$. es inyectiva



$g(x) = x^2 + 2$



$f(x) = x^2 + 2$, $x \geq 2$

EJEMPLO 3. Si **f es monótona** (creciente o decreciente), entonces **f es inyectiva.**

En efecto, si f es creciente o decreciente, entonces toda recta horizontal cortará al gráfico de f a lo más una vez. Luego, el criterio de la recta horizontal nos asegura que f es inyectiva.

DEFINICION. Sea f: A → B una función inyectiva de dominio A y rango B. Se llama **función inversa de f** a la función

$$f^{-1}: B \to A \text{ tal que}$$

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x) \qquad (1)$$

La expresión (1) anterior es equivalente a

$$f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in A \quad y \quad f(f^{-1}(y)) = y, \forall y \in B \qquad (2)$$

En efecto, si en $x = f^{-1}(y)$ reemplazamos $y = f(x)$, obtenemos $x = f^{-1}(f(x)$. Similarmente, si en $y = f(x)$, reemplazamos $x = f^{-1}(y)$, obtenemos $y = f(f^{-1}(y))$.

OBSERVACION. No confundir $f^{-1}(y)$, con el cociente $\dfrac{1}{f(x)}$. Para evitar ambigüedad, al cociente $\dfrac{1}{f(x)}$ lo escribiremos así: $[f(x)]^{-1}$

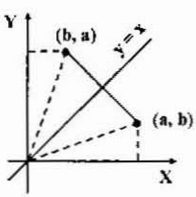
ESTRAREGIA PARA HALLAR LA INVERSA DE UNA FUNCION

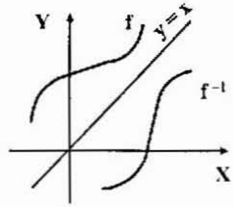
Paso 1. Resolver la ecuación $y = f(x)$ para x en términos de y: $x = f^{-1}(y)$,

Paso 2. En $x = f^{-1}(y)$, intercambiar x por y para obtener, finalmente, $y = f^{-1}(x)$

GRAFICA DE LA FUNCION INVERSA.

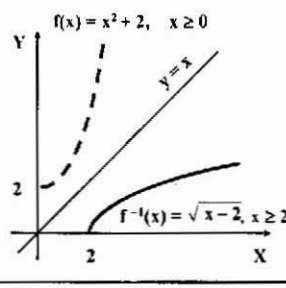
En vista del paso 2 donde se intercambia a x por y, la gráfica de la función inversa se obtiene reflejando la gráfica de $y = f(x)$ en la diagonal $y = x$.





EJEMPLO 4. Hallar la función inversa de $f(x) = x^2 + 2$, $x \geq 0$. Graficarla.

Solución



Paso 1. $y = x^2 + 2 \Rightarrow x^2 = y - 2 \Rightarrow$
$x = \pm\sqrt{y-2}$

Como $x \geq 0$, tenemos $x = \sqrt{y-2}$

Paso 2. En $x = \sqrt{y-2}$ intercambiamos x por y

obtenemos: $f^{-1}(x) = \sqrt{x-2}$, $x \geq 2$

EJEMPLO 5. Sea la función $g(x) = \dfrac{4x+7}{2x+5}$.

a. Hallar el dominio de g.

b. Hallar la función inversa g^{-1}.

Solución

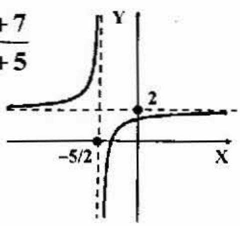
a. Debemos tener que $2x + 5 \neq 0 \Rightarrow x \neq -5/2$. Luego, $\text{Dom}(g) = \{ x / x \neq -5/2 \}$

b. Paso 1. $y = \dfrac{4x+7}{2x+5} \Rightarrow 2xy + 5y = 4x + 7 \Rightarrow 2xy - 4x = -5y + 7$

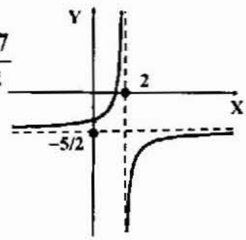
$$\Rightarrow x(2y-4) = -5y + 7 \Rightarrow x = \frac{-5y+7}{2y-4}$$

Paso 2. Intercambiamos x por y obtenemos: $g^{-1}(x) = \dfrac{-5x+7}{2x-4}$

$g(x) = \dfrac{4x+7}{2x+5}$



$g^{-1}(x) = \dfrac{-5x+7}{2x-4}$



Teniendo en cuenta que la gráfica de f^{-1} se obtiene reflejando en la diagonal principal la gráfica de f, se deduce los siguientes resultados:

a. Si f es creciente, entonces f^{-1} es creciente.

b. Si f es decreciente, entonces f^{-1} es decreciente

PROBLEMAS PROPUESTOS 1.3

Hallar la función inversa de cada una de las siguientes funciones. Graficarla.

1. $f(x) = 2x + 1$ **2.** $g(x) = x^2 - 1, x \geq 0$ **3.** $h(x) = x^3 + 2$

4. $k(x) = \dfrac{1}{x} - 1$ **5.** $f(x) = \sqrt{16 - 2x}$ **6.** $g(x) = \dfrac{5x-15}{3x+7}$

7. Probar formalmente que:

a. Si f es creciente, entonces f^{-1} es creciente.

b. Si f es decreciente, entonces f^{-1} es decreciente

SECCION 1.4

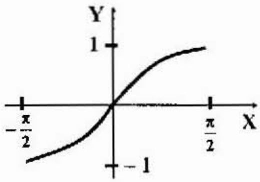
FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

Las funciones trigonométricas no son inyectivas. Restringiremos el dominio de cada una de ellas para conseguir esta propiedad y, de este modo, lograr una función inversa. Estas funciones restringidas y sus respectivas inversas las presentamos a continuación.

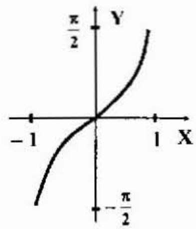
FUNCION SENO INVERSA O ARCOSEN

sen : $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$ **sen^{-1}** : $[-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$

$$y = \text{sen}^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \text{sen}\, y \quad y\ -\pi/2 \le y \le \pi/2$$



y = sen x

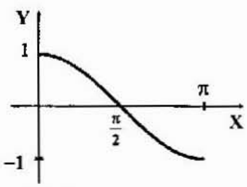


y = sen^{-1} x

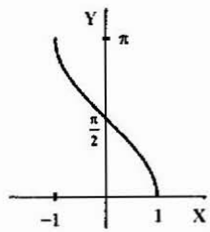
FUNCION COSENO INVERSA O ARCCOS

cos : $[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ **cos^{-1}** : $[-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$

$$y = \cos^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \cos y, \quad 0 \le y \le \pi$$



y = cos x

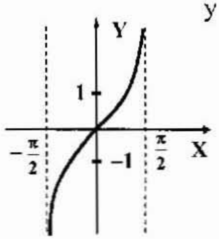


y = cos^{-1} x

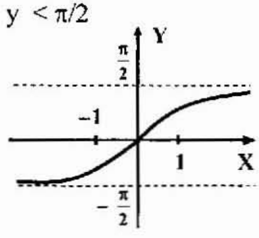
FUNCION TANGENTE INVERSA O ARCTAN

tan : $(-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$ **tan^{-1}** : $\mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$

$$y = \tan^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \tan y, \quad -\pi/2 < y < \pi/2$$



y = tan x

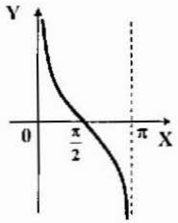


y = tan^{-1} x

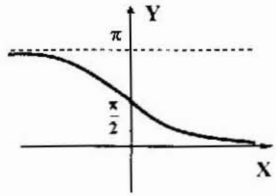
FUNCION COTANGENTE INVERSA O ARCCOT

cot: $(0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ cot $^{-1}$: $\mathbb{R} \longrightarrow (0, \pi)$

$$y = \cot^{-1}(x) \iff x = \cot y, \quad 0 < y < \pi$$



y = cot x

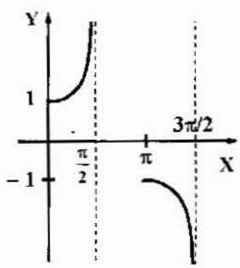


y = cot $^{-1}$ x

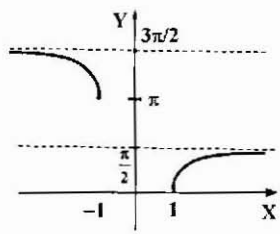
FUNCION SECANTE INVERSA O ARCSEC

sec:$[0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2) \longrightarrow \mathbb{R} - (-1, 1)$. sec $^{-1}$: $\mathbb{R} - (-1, 1) \longrightarrow [0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$

$$y = \sec^{-1}(x) \iff x = \sec y, \quad 0 \le y < \pi/2 \quad \text{ó} \quad \pi \le y < 3\pi/2$$



y = sec x

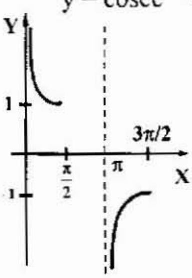


y = sec $^{-1}$ x

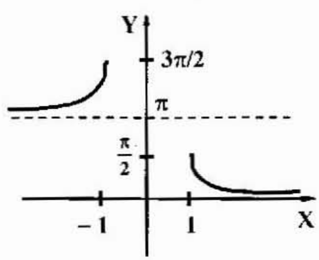
LA FUNCION COSECANTE INVERSA O ARCCOSEC

cosec: $(0, \pi/2] \cup (\pi, 3\pi/2] \longrightarrow \mathbb{R} - (-1,1)$. cosec $^{-1}$: $\mathbb{R} - (-1, 1) \longrightarrow (0, \pi/2] \cup (\pi, 3\pi/2]$

$$y = \text{cosec}^{-1}(x) \iff x = \text{cosec}\, y, \quad 0 < y \le \pi/2 \quad \text{ó} \quad \pi < y \le 3\pi/2$$



y = cosec x



y = cosec $^{-1}$x

OBSERVACION. Algunos autores restringen la secante a $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$ en lugar de $[0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$, como lo hemos hecho nosotros. La escogencia nuestra tiene la ventaja que simplifica la fórmula de la derivada de la función $y = \sec^{-1} x$, ya que evita la aparición de un valor absoluto. Sucede un caso similar para la cosecante.

EJEMPLO 1.

a. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, ya que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ y $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{2}$

b. $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, ya que $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $0 \le \frac{3\pi}{4} \le \pi$

c. $\tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, ya que $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ y $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$

d. $\cot^{-1}\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{5\pi}{6}$, ya que $\cot\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$ y $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{6} < \pi$

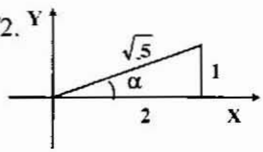
e. $\operatorname{cosec}^{-1}(2) = \frac{\pi}{6}$, ya que $\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$ y $0 < \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{2}$

PROBLEMAS RESUELTOS 1.4

PROBLEMA 1. Hallar **a.** $\operatorname{sen}\left(\tan^{-1}(1/2)\right)$ **b.** $\tan\left(\sec^{-1}(-5/3)\right)$

Solución

a. Sea $\alpha = \tan^{-1}(1/2)$. Luego, $\tan\alpha = 1/2$, y $0 < \alpha < \pi/2$.

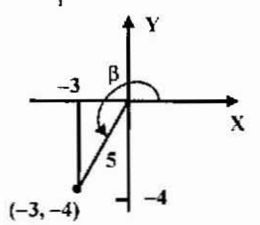


Con estos valores, tomando en cuenta la definición de $\tan\alpha$, construimos el triángulo rectángulo adjunto.

Vemos que:

$$\operatorname{sen}\left(\tan^{-1}(1/2)\right) = \operatorname{sen}\alpha = 1/\sqrt{5}$$

b. Sea $\beta = \sec^{-1}(-5/3)$.



Luego, $\sec\beta = -5/3$ y $\pi \le \beta < 3\pi/2$.

Ahora,

$$\tan\left(\sec^{-1}(-5/3)\right) = \tan\beta = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

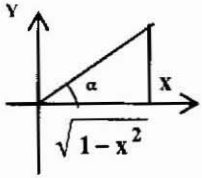
PROBLEMA 2. Si $-1 \leq x \leq 1$, expresar en términos de x:

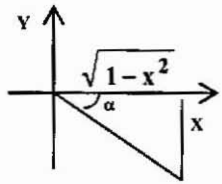
a. $\cot(\operatorname{sen}^{-1} x)$ **b.** $\sec(\operatorname{sen}^{-1} x)$

Solución

Sea $\alpha = \operatorname{sen}^{-1} x$. Luego, $\operatorname{sen} \alpha = x$, donde $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$

Observando que $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{x}{1}$, construimos el primer triángulo rectángulo si $x > 0$ ó el segundo, si $x < 0$. Allí, x corresponde al cateto opuesto y 1 a la hipotenusa. El otro cateto, aplicando el teorema de Pitágoras, es $\pm \sqrt{1 - x^2}$. De estos dos valores, tomamos el positivo: $\sqrt{1 - x^2}$, porque esta raíz corresponde a $\cos \alpha$ y $\cos \alpha > 0$ cuando $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$.





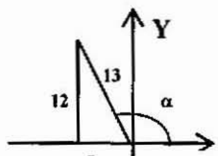
Ahora,

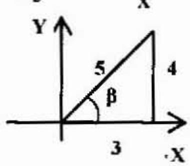
a. $\cot(\operatorname{sen}^{-1} x) = \cot \alpha = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, si $x \neq 0$ ó $\cot(\operatorname{sen}^{-1} x) = 0$, si $x = 0$

b. $\sec(\operatorname{sen}^{-1} x) = \sec \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

PROBLEMA 3. Hallar, sin calculadora, el valor de

$$\operatorname{sen}\left[\cot^{-1}(-5/12) - \cos^{-1}(3/5)\right]$$





Solución

Sea $\alpha = \cot^{-1}(-5/12)$. Luego,

$\cot \alpha = -5/12$ y $\pi/2 < \alpha < \pi$

Sea $\beta = \cos^{-1}(3/5)$. Luego,

$\cos \beta = 3/5$ y $0 < \beta < \pi/2$

Ahora,

$\operatorname{sen}\left[\cot^{-1}(-5/12) - \cos^{-1}(3/5)\right]$

$$= \operatorname{sen}[\alpha - \beta] = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{12}{13}\frac{3}{5} - \frac{-5}{13}\frac{4}{5} = \frac{56}{65}$$

PROBLEMA 4. Resolver la ecuación $\tan^{-1}(2x - 3) = 1$

Solución

$$\tan^{-1}(2x - 3) = 1 \iff 2x - 3 = \tan(1)$$

Mediante una calculadora hallamos que $\tan(1) = 1{,}5574077$. Luego,

$$2x - 3 = 1{,}5574077 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(1{,}5574077 + 3) = 2{,}787038$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 1.4

En los problemas del 1 al 9 evaluar las expresiones indicadas sin usar calculadora.

1. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\sqrt{3}/2\right)$ **2.** $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$ **3.** $\cos^{-1}(-1)$

4. $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ **5.** $\cot^{-1}(-1)$ **6.** $\operatorname{cosec}^{-1}(-2)$

7. Dado $y = \operatorname{sen}^{-1}(1/3)$ hallar el valor exacto de

a. cos y **b.** tan y **c.** cot y **d.** sec y **c.** cosec y

8. Dado $y = \sec^{-1}\left(\sqrt{5}/2\right)$, hallar el valor exacto de

a. sen y **b.** cos y **c.** tan y **d.** cot y **e.** cosec y

9. Dada $y = \tan^{-1}(-3)$ hallar el valor exacto de

a. sen y **b.** cos y **c.** cot y **d.** sec y **e.** cosec y

En los problemas del 10 al 13 hallar el valor exacto de la expresión indicada.

10. $\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}(\sqrt{3}/2)\right)$ **11.** $\operatorname{cosec}\left(\tan^{-1}(-2)\right)$

12. $\operatorname{sen}\left(\tan^{-1}(-3/4)\right)$ **13.** $\tan\left(\operatorname{sen}^{-1}(-3/4)\right)$

En los problemas 14 y 15 hallar el valor exacto de la expresión indicada

14. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\cos(-\pi/6)\right)$ **15.** $\tan^{-1}\left(\tan(4\pi/3)\right)$.

En los problemas del 16 al 19 hallar el valor exacto de la expresión indicada.

16. $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}(1/3) + \tan^{-1}(1/3)\right)$ **17.** $\operatorname{sen}\left(2\cos(1/3)\right)$

18. $\tan\left(2\operatorname{sen}^{-1}(-\sqrt{3}/2)\right)$ **19.** $\cos\left((1/2)\operatorname{sen}^{-1}(5/13)\right)$

En los problemas del 20 al 23 hallar las expresiones algebraicas correspondientes

20. $\operatorname{sen}\left(\tan^{-1}(x)\right)$ **21.** $\tan\left(\operatorname{sen}^{-1}(x)\right)$

22. $\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}(x/2)\right)$ **23.** $\cos\left((1/2)\cos^{-1}(x)\right)$

Resolver las siguientes ecuaciones:

24. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ **25.** $\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{2x} = \cos^{-1} x$

26. $\tan^2 x + 9\tan x - 12 = 0$ y $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

SECCION 1.5
FUNCIONES EXPONENCIALES

LEYES DE LOS EXPONENTES

Recordemos que el conjunto de los números reales está conformado por la unión de dos conjuntos disjuntos: El conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales. Un número real es racional si y sólo si éste tiene una expresión decimal periódica. En cambio, un número real es irracional si y sólo si éste tiene una expresión decimal infinita no periódica.

Queremos definir a^x, donde **a** es un número real positivo y **x** es cualquier número real. Para x racional, la situación no es complicada. La dificultad aparece cuando x es irracional. Aquí tenemos que recurrir al concepto de límite, pero este es un concepto que todavía no se ha estudiado. Sin embargo, trataremos de presentar una presentación intuitiva. Veamos, en primer lugar, el caso de a^x, cuando x es un racional.

Sea **a** un **número real positivo** y **x** un **número irracional.**

1. Si $x = n$, donde **n** es un entero positivo, entonces

$$a^x = a^n = \underbrace{a\,a\,\ldots\,a}_{n}$$

2. Si $x = 0$, $a^0 = 1$

3. Si $x = -n$, n es un entero positivo, entonces $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

4. Si $x = m/n$, donde **m** y **n** son enteros positivos, entonces

$$a^x = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

$\boxed{\textbf{EJEMPLO 1.}}$

a. $4^3 = 4\,.\,4\,.\,4 = 64$ **b.** $4^0 = 1$

c. $4^{-3} = \dfrac{1}{4^3} = \dfrac{1}{64}$ **d.** $4^{5/2} = \left(4^{1/2}\right)^5 = \left(\sqrt{4}\right)^5 = (2)^5 = 32$

Ahora veamos el significado de $\mathbf{a}^{\mathbf{x}}$ cuando **x** es **irracional.** Lo hacemos mediante el caso particular de 2^{π}. El número π es uno de los números irracionales más conocidos, que apareció en la Geometría, en el estudio de la circunferencia.

El número π tiene un desarrollo decimal infinito no periódico. Sus 30 primeras cifras son:

$$\pi = 3{,}141596253589793238462643383279\ldots$$

Considerando esta expansión decimal de π construimos las dos siguientes sucesiones de números racionales:

1) 3,1 3,14 3.141 3,1415 . . . y **2)** 3,2, 3,15 3,142 3,1416 . . .

Los términos de la primera sucesión se aproximan a π por la izquierda (menores que π). Los términos de la a segunda sucesión se aproximan a π por la derecha (mayores que π).

Ahora, las sucesiones anteriores, permiten aproximarnos a 2^{π} por la izquierda y por la derecha, con las siguientes potencias racionales:

$$\begin{array}{lll} 3{,}1 < \pi < 3{,}2 & \Rightarrow & 2^{3,1} < 2^{\pi} < 2^{3,2} \\ 3{,}14 < \pi < 3{,}15 & \Rightarrow & 2^{3,14} < 2^{\pi} < 2^{3,15} \\ 3{,}141 < \pi < 3{,}142 & \Rightarrow & 2^{3.141} < 2^{\pi} < 2^{3,142} \\ 3{,}1415 < \pi < 3{,}1416 & \Rightarrow & 2^{3,1415} < 2^{\pi} < 2^{3,1416} \end{array}$$

Se prueba, haciendo uso de las propiedades básicas de los números reales, que existe un único número real que es mayor que todos los números:

$$2^{3,1} < 2^{3.14} < 2^{3,141} < 2^{3,1415}\ldots$$

y menor que los números:

$$2^{3,2} < 2^{3,14} < 2^{3,141} < 2^{3,1415}\ldots$$

A este único real se lo denota por 2^{π}.

Algunas calculadoras nos dicen que

$$2^{\pi} = 8{,}824977827$$

Este proceso anterior que nos permitió definir a 2^{π} podemos repetirlo para definir $\mathbf{a}^{\mathbf{x}}$, donde **a** es cualquier número real positivo y x cualquier número irracional.

El siguiente teorema resume las propiedades de los exponentes. La demostración de estas propiedades, para el caso de exponente racional, no es de gran dificultad. Sin embargo, para el caso de exponentes irracionales, la situación no es simple. Por esta razón, al teorema sólo lo enunciamos, omitiendo la demostración.

TEOREMA 1.1 **Leyes de los Exponentes**

Sean **a** y **b** números reales positivos, y sean **x** e **y** números reales cualesquiera. Se cumple que:

1. $a^0 = 1$ 2. $a^1 = a$ 3. $a^x a^y = a^{x+y}$

4. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ 5. $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$ 6. $(ab)^x = a^x b^x$

7. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$ 8. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

EJEMPLO 2.

a. $\dfrac{3^{3/2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{3^{3/2}}{3^{1/2}} = 3^{(3/2)-(1/2)} = 3^{2/2} = 3$

b. $\left(3^{2/3} \cdot 3^{1/6}\right)^6 = 3^{(2/3)6} \cdot 3^{(1/6)6} = 3^4 \cdot 3^1 = 3^{4+1} = 3^5 = 243$

LAS FUNCIONES EXPONENCIALES

DEFINICION. Sea **a** un número real tal que **a > 0** y **a ≠ 1. La función exponencial con base a** es la función

$$\mathbf{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,$$

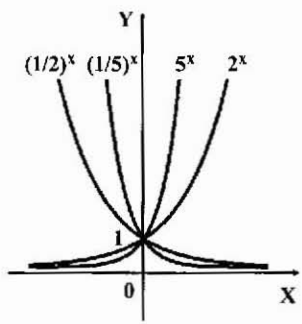
$$\mathbf{f(x) = a^x}$$

EJEMPLO 3. A continuación mostramos los gráficos de:

1. $y = 2^x$ 2. $y = 5^x$ 3. $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ 4. $y = \left(\dfrac{1}{5}\right)^x = 5^{-x}$

Todas las gráficas pasan por el punto (0, 1), debido a que $a^0 = 1$.

Si $a > 1$, a medida que la **a** aumenta, la función $f(x) = a^x$ crece más rápidamente.

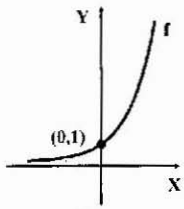


En la definición de la función exponencial, se ha eliminado la base a = 1, ya que en este caso, $f(x) = 1^x = 1$, es la recta horizontal y = 1, la cual tiene un comportamiento muy simple y muy distinto a los casos cuando a ≠ 1.

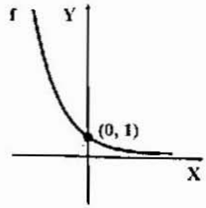
PROPIEDADES DE LA FUNCION EXPONENCIAL

La función exponencial $f(x) = a^x$ tiene las siguientes propiedades:

1. Es **creciente si $a < 1$** y es **decreciente si $0 < a < 1$**.



$f(x) = a^x$, donde $a > 1$



$f(x) = a^x$, donde $a < 1$

2. Dominio: $\mathbb{R}$, rango: $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$.

3. Es inyectiva

4. La gráfica de f corta al eje Y en (0, 1), ya que $a^0 = 1$.

EJEMPLO 4. Mediante la técnica de traslación y reflexión, y teniendo en cuenta el gráfico $f(x) = 2^x$, dada en el ejemplo 3, esbozar el gráfico de:

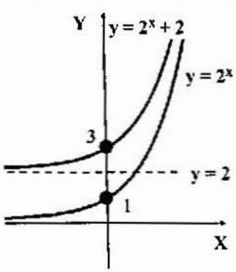
1. $g(x) = 2^x + 2$ **2.** $h(x) = 2^{x-2}$ **3.** $q(x) = -2^{-x}$

Solución

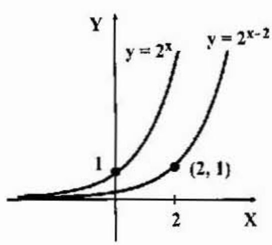
1. Vemos que $g(x) = 2^x + 2 = f(x) + 2$. Luego, el gráfico de $g(x) = 2^x + 2$ se obtiene trasladando verticalmente el gráfico de $f(x) = 2^x$ dos unidades hacia arriba.

2. Vemos que $h(x) = 2^{x-2} = f(x-2)$. Luego, el gráfico de $h(x) = 2^{x-2}$ se obtiene trasladando horizontalmente 2 unidades hacia la derecha el gráfico de $f(x) = 2^x$.

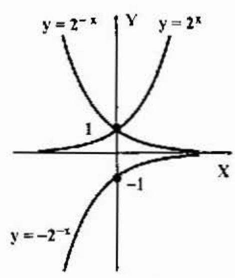
3. Vemos que $q(x) = -2^{-x} = -f(-x)$. Luego, el gráfico de $q(x)$ se obtiene en dos pasos. Se refleja la gráfica de f en el eje Y. Luego, este se refleja en el eje X.



$g(x) = 2^x + 2$



$h(x) = 2^{x-2}$



$q(x) = -2^{-x}$

EL NUMERO e

Se demuestra que los números irracionales son más abundantes que los racionales. Sin duda, este es un resultado que choca con nuestra intuición. Esto se debe a que los irracionales son poco conocidos. Existen dos números irracionales famosos: El número π y el numero e. El primero juega un papel fundamental en la Geometría y en la Trigonometría y el segundo, en el Cálculo. A esta alturas, sin contar en nuestro haber con el concepto límite, no podemos dar una formulación precisa del número e. Por ahora sólo diremos que un número irracional cuyas 21 primeras cifras de su expresión decimal, son

$$e \approx 2{,}71828182845904523536\ldots$$

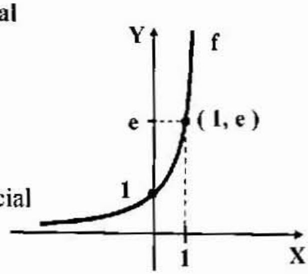
Este número, de complicada definición, simplifica muchas fórmulas del Cálculo. El nombre de **e** para este número fue dado por Leonardo Euler, probablemente por ser la primera letra de la palabra exponencial.

LA FUNCION EXPONCIAL NATURAL

DEFINICION. Se llama **función exponencial natural** a la función exponencial con base el número **e**. Esto es, a la función

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$f(x) = e^x$$

Como e >1, la función exponencial natural es creciente.



PROBLEMAS RESUELTOS 1.5

PROBLEMA 1. Simplificar las siguientes expresiones:

a. $\dfrac{e^{3/2}}{\sqrt{e}}$ b. $\left[\dfrac{1}{8}\left(8^{2/3}\right)\right]^3$ c. $\dfrac{\left(9^{4/5}\right)^{5/8}}{\left(\dfrac{8}{27}\right)^{2/3}}$

Solución

a. $\dfrac{e^{3/2}}{\sqrt{e}} = \dfrac{e^{3/2}}{e^{1/2}} = e^{3/2\,-\,1/2} = e^{2/2} = e$

b. $\left[\dfrac{1}{8}\left(8^{2/3}\right)\right]^3 = \left(\dfrac{1}{8}\right)^3\left(8^{2/3}\right)^3 = \left(\dfrac{1^3}{8^3}\right)\left(8^2\right) = \dfrac{8^2}{8^3} = \dfrac{1}{8}$

c. $\dfrac{\left(9^{4/5}\right)^{5/8}}{\left(\dfrac{8}{27}\right)^{2/3}} = \dfrac{9^{20/40}}{\left(\dfrac{2^3}{3^3}\right)^{2/3}} = \dfrac{9^{1/2}}{\dfrac{2^{(3)(2/3)}}{3^{(3)(2/3)}}} = \dfrac{3}{\dfrac{2^2}{3^2}} = \dfrac{3(3^2)}{2^2} = \dfrac{27}{4}$

PROBLEMA 2. Si $h(x) = 3^{5x}$, hallar x tal que $h(x) = 81$.

Solución

Como $81 = 3^4$, debemos hallar el x tal que $3^{5x} = 3^4$. Igualando los exponentes tenemos:

$$5x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{5}$$

PROBLEMA 3. Si $f(x) = e^{kx}$ y $f(1) = 3$, hallar $f(5)$

Solución

Si $f(1) = 3$, entonces $e^k = 3$. Luego $f(5) = e^{k(5)} = (e^k)^5 = 3^5 = 243$

PROBLEMA 4. Te ofrecen un trabajo que dura exactamente un mes (30 días). Te dan a elegir entre dos formas de pago:

a. 10.000.000 de Bs. al final del mes.

b. 1 céntimo de bolívar por el primer día, 2 céntimos por el segundo, 4 céntimos por el tercero y, en general, 2^{n-1} céntimos por el día n.

¿Cuál de las dos formas de pago te beneficia más?

Solución

Te sorprenderá saber que la segunda forma conviene más. En efecto:

El primer día recibe 1 céntimo y el último día (n = 30) se recibe $2^{30-1} = 2^{29}$ céntimos. Si S la suma total de todas los céntimos que se reciben, se tiene:

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{29} \qquad \textbf{(1)}$$

Para hallar esta suma S, multiplicamos la igualdad anterior por la razón 2:

$$2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 \ldots + 2^{30} \qquad \textbf{(2)}$$

Restando la igualdad (1) de la (2) obtenemos:

$$S = 2^{30} - 2 = 1.073.741.823 \text{ céntimos} = 10.737.418{,}22 \text{ Bs.}$$

En consecuencia, conviene más la segunda forma de pago.

PROBLEMAS PROPUESTOS 1.5

En los ejercicios del 1 al 7 calcular el valor de las expresiones dadas:

1. $(81)^{1/4}$ **2.** $8^{4/3}$ **3.** $(25)^{3/2}$ **4.** $(25)^{-3/2}$

5. $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2/3}$ **6.** $\left(\frac{27}{16}\right)^{-1/2}$ **7.** $(0,01)^{-1}$

En los ejercicios del 8 al 13 simplificar las expresiones dadas:

8. $\left(\frac{e^7}{e^3}\right)^{-1}$ **9.** $\frac{3^3\,3^5}{\left(3^4\right)^3}$ **10.** $\frac{5^{1/2}\left(5^{1/2}\right)^5}{5^4}$

11. $\frac{2^{-3}2^5}{\left(2^4\right)^{-3}}$ **12.** $\frac{\left(2^4\right)^{1/3}}{16\left(2^{7/3}\right)}$ **13.** $\frac{\left(2^{1/3}\,3^{2/3}\right)^3}{3^{5/2}\,3^{-1/2}}$

En los ejercicios del 14 al 19 resolver las ecuaciones dadas.

14. $2^{2x-1} = 8$ **15.** $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} = 27$ **16.** $8\sqrt[3]{2} = 4^x$

17. $\left(3^{2x}3^2\right)^4 = 3$ **18.** $e^{-6x+1} = e^3$ **19.** $e^{x^2-2x} = e^3$

En los ejercicios del 20 al 28 esbozar los gráficos de las funciones dadas. En todos ellos, excepto el 25 y 27, use las técnicas de traslación y reflexión.

20. $y = e^{x+2}$ **21.** $y = -2e^x + 1$ **22.** $y = e^{-x}$

23. $y = e^{-x} + 2$ **24.** $y = 2 - e^{-x}$ **25.** $y = 3^x$

26. $y = 3^{-x+2}$ **27.** $y = 4^x$ **28.** $y = -4^{-x-1}$

29. Si $g(x) = Ae^{-kx}$, $g(0) = 9$ y $g(2) = 5$, hallar $g(6)$.

30. Si $h(x) = 30 - Pe^{-kx}$, $h(0) = 10$ y $h(3) = -30$, hallar $h(12)$.

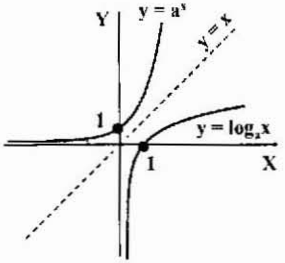
SECCION 1.6

FUNCIONES LOGARITMICAS

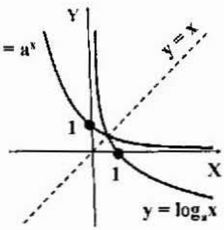
DEFINICION. Sea $a > 0$ y $a \neq 1$. Se llama **función logaritmo de base a,** y se denota por $\log_a$, a la función inversa de la función exponencial

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad f(x) = a^x,$$

Esto es, $\log_a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad \log_a = f^{-1}$



$a > 1$



$0 < a < 1$

Por ser $y = \log_a(x)$ la función inversa de $y = a^x$ se tiene que:

$$\text{(1)} \quad a^{\log_a(x)} = x \qquad \text{y} \qquad \text{(2)} \quad \log_a(a^x) = x$$

Las propiedades (1) y (2) equivalen a la siguiente proposición:

$$\text{(3)} \quad \log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Esta última equivalencia nos dice que $\log_a(x)$ es el exponente y al cual debe elevar la base a para obtener el número x.

Como $a^1 = a$ y $a^0 = 1$, se tiene que:

$$\text{(4)} \quad \log_a(a) = 1 \qquad \text{y} \qquad \text{(5)} \quad \log_a(1) = 0$$

Muchas veces, cuando no hay confusión, escribiremos $y = \log_a x$ (sin los paréntesis) en lugar de $\log_a(x)$.

EJEMPLO 1

a. $\log_4 64 = \log_4(4^3) = 3$

b. $\log_7 \sqrt{7} = \log_7(7^{1/2}) = \dfrac{1}{2}$

c. $\log_5\left(\dfrac{1}{5}\right) = \log_5\left(5^{-1}\right) = -1$

d. $\log_{10} 0{,}001 = \log_{10} \dfrac{1}{1.000} = \log_{10} 10^{-3} = -3$

EJEMPLO 2 Resolver las siguientes ecuaciones:

a. $2^{8x-1}=64$ **b.** $2\log_9(4x)=1$

Solución

a. Aplicamos $\log_2$ a ambos miembros:

$$\log_2(2^{8x-1})=\log_2 64 \;\Rightarrow\; \log_2(2^{8x-1})=\log_2(2^6) \;\Rightarrow$$

$$(8x-1)\log_2 2=6\log_2 2 \;\Rightarrow\; 8x-1=6 \;\Rightarrow\; x=\frac{7}{8}$$

b. $2\log_9(4x)=1 \Rightarrow \log_9(4x)=\dfrac{1}{2} \Rightarrow 4x=9^{1/2} \Rightarrow 4x=3 \Rightarrow x=\dfrac{3}{4}$

PROPIEDADES DE LA FUNCION LOGARITMO

La función logaritmo $y=\log_a x$ tiene las siguientes propiedades:

1. Es **creciente si $a>1$** y **decreciente si $a<1$**.
2. **Dominio $=\mathbb{R}^+$, rango $=\mathbb{R}$.**
3. **Es biyectiva.**
4. **La gráfica de $y=\log_a x$ corta al eje X en (1, 0). No corta al eje Y.**

TEOREMA 1.2 **Leyes de los Logaritmos**

Si $a>0$, $a\neq 1$, $u>0$, $v>0$ y n es un real, entonces

1. $\log_a(uv)=\log_a u+\log_a v$ **(Logaritmo de un producto)**
2. $\log_a\left(\dfrac{u}{v}\right)=\log_a u-\log_a v$ **(Logaritmo de un cociente)**
3. $\log_a u^n=n\log_a u$ **(Logaritmo de una potencia)**

Demostración

1. Si $x=\log_a u$ e $y=\log_a v$, entonces

$$u=a^x,\; v=a^y \quad \text{y} \quad uv=a^x a^y=a^{x+y}$$

Aplicando $\log_a$ a la última igualdad y usando la propiedad (2) de la definición de la función logaritmo:

$$\log_a(uv)=\log_a(a^{x+y})=x+y=\log_a u+\log_a v$$

Las pruebas de 2 y 3 son similares a la dada para 1, y se dejan como ejercicios.

EJEMPLO 3. Sean x, y, z números reales positivos. Expresar en términos de los logaritmos de x, y, z las siguientes expresiones:

i. $\log_a\left(\dfrac{x^4\sqrt{z}}{y^3}\right)$ **ii.** $\log_a \sqrt[7]{\dfrac{x^2}{y^3z^4}}$

Solución

$$\textbf{i. } \log_a\left(\frac{x^4\sqrt{z}}{y^3}\right) = \log_a\left(\frac{x^4z^{1/2}}{y^3}\right)$$

$$= \log_a\left(x^4z^{1/2}\right) - \log_a y^3 \qquad \text{(por 2)}$$

$$= \log_a x^4 + \log_a z^{1/2} - \log_a y^3 \qquad \text{(por 1)}$$

$$= 4\log_a x + \frac{1}{2}\log_a z - 3\log_a y \qquad \text{(por 3)}$$

$$\textbf{ii. } \log_a \sqrt[7]{\frac{x^2}{y^3z^4}} = \log_a\left(\frac{x^2}{y^3z^4}\right)^{1/7}$$

$$= \frac{1}{7}\log_a\left(\frac{x^2}{y^3z^4}\right) \qquad \text{(por 3)}$$

$$= \frac{1}{7}\left[\log_a x^2 - \log_a\left(y^3z^4\right)\right] \qquad \text{(por 2)}$$

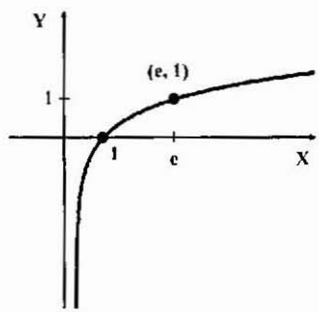
$$= \frac{1}{7}\left[\log_a x^2 - \left(\log_a y^3 + \log_a z^4\right)\right] \qquad \text{(por 1)}$$

$$= \frac{2}{7}\log_a x - \frac{3}{7}\log_a y - \frac{4}{7}\log_a z \qquad \text{(por 3)}$$

LA FUNCION LOGARITMO NATURAL

La función logaritmo natural es la función logaritmo con base **e**. A esta función se lo denota por **y = ln x**. O sea,

$$\mathbf{\ln x = \log_e x}$$



La función y = ln x es la inversa de la función exponencial $y = e^x$. Por lo tanto:

(1) $e^{\ln x} = x$ y **(2)** $\ln e^x = x$

o, equivalentemente,

(3) $y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x$

Como $e^1 = e$, tenemos que $\mathbf{\ln e = 1}$

EJEMPLO 4. Resolver la ecuación $3^{2x+1} = 5^{3x-1}$

Solución

A ambos miembros de la ecuación aplicamos ln:

$$\ln 3^{2x+1} = \ln 5^{3x-1} \Rightarrow (2x+1)\ln 3 = (3x-1)\ln 5 \Rightarrow$$

$$2x\ln 3 + \ln 3 = 3x\ln 5 - \ln 5 \Rightarrow 2x\ln 3 - 3x\ln 5 = -\ln 5 - \ln 3$$

$$\Rightarrow x(2\ln 3 - 3\ln 5) = -(\ln 5 + \ln 3)$$

$$\Rightarrow x = -\frac{\ln 5 + \ln 3}{2\ln 3 - 3\ln 5} \approx 1{,}03$$

OBSERVACION. Los logaritmos más usuales son los naturales (base e) y los decimales (base 10). Tratándose de los logaritmos decimales, es común omitir la base y escribir, simplemente, **log x** en lugar de $\log_{10} x$.

CAMBIO DE BASE LOGARITMICA Y EXPONENCIAL

La siguiente igualdad nos permite expresar una función logarítmica de cualquier base en términos de la función logaritmo natural.

TEOREMA 1.3 **Cambio de Base Logarítmica.**

Si $x > 0$ entonces

$$\boxed{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}}$$

Demostración

$$y = \log_a x \Rightarrow a^y = x \Rightarrow \ln a^y = \ln x \Rightarrow y\ln a = \ln x$$

$$\Rightarrow y = \frac{\ln x}{\ln a} \Rightarrow \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

COROLARIO. $\boxed{\log_a e = \frac{1}{\ln a}}$

Demostración

En la fórmula del teorema tomar $x = e$. Considerar que $\ln e = 1$.

EJEMPLO 5. Hallar: **a.** $\log_5 e$ **b.** $\log_4 19$

Solución

a. De acuerdo al corolario:

$$\log_5 e = \frac{1}{\ln 5} = \frac{1}{1{,}6094379} = 0{,}6213349$$

b. De acuerdo al teorema anterior:

$$\log_4 19 = \frac{\ln 19}{\ln 4} = \frac{1{,}2788}{0{,}6021} = 2{,}124$$

TEOREMA 1.4 **Cambio de base Exponencial.**

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces

$$\boxed{a^x = e^{x \ln a}}$$

Demostración

Sabemos que $a = e^{\ln a}$. Luego, $a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}$

PROBLEMAS RESUELTOS 1.6

PROBLEMA 1. Resolver las siguientes ecuaciones:

a. $\log_{27} 4x = 2/3$ b. $3^{2x-1} = 81$

Solución

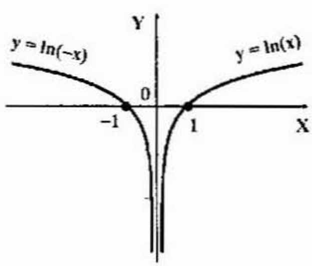
a. $\log_{27} 4x = 2/3 \Rightarrow 4x = 27^{2/3} \Rightarrow 4x = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9 \Rightarrow x = 9/4$

b. Tomando $\log_3$ a ambos lados de la ecuación:

$$\log_3 3^{2x-1} = \log_3 81 \Rightarrow 2x - 1 = \log_3(3^4) \Rightarrow 2x - 1 = 4 \Rightarrow x = 5/2$$

PROBLEMA 2. Graficar la función $y = \ln|x|$.

Solución



De la definición de $|x|$ tenemos que:

$$y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x), & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En consecuencia, el gráfico de $y = \ln|x|$ se compone de dos gráficos: El de $y = \ln x$, $x > 0$ y el de $y = \ln(-x)$, $x < 0$. Al primero lo conocemos y el segundo se obtiene del primero reflejándolo en el eje Y.

PROBLEMAS PROPUESTOS 1.6

En los ejercicios del 1 al 8 calcular el valor de la expresión, sin usar tablas ni calculadora.

1. $\log_2\left(\dfrac{1}{64}\right)$ **2.** $\log_{1/2}\left(\dfrac{1}{16}\right)$ **3.** $\log_{1/3}(81)$

4. $\log_{100}(0{,}1)$ **5.** $e^{\ln 3}$ **6.** $e^{2\ln 3}$

7. $e^{(\ln 3)/2}$ **8.** $e^{3\ln 2 - 2\ln 3}$

En los ejercicios del 9 al 19, resolver la ecuación dada.

9. $\log_x(25) = \dfrac{1}{2}$ **10.** $\log_4(x^2 - 6x) = 2$ **11.** $\log x + \log(2x - 8) = 1$

12. $-3\ln x = a$ **13.** $\dfrac{k}{20} - \ln x = 1$ **14.** $4\ln x = \dfrac{1}{2}\ln x + 7$

15. $3\ln(\ln x) = -12$ **16.** $3e^{-1{,}2x} = 14$ **17.** $3^{x-1} = e^3$

18. $3^x 2^{3x} = 64$ **19.** $\left(3^x\right)^2 = 16\sqrt{2^x}$

En los problemas del 20 al 27 usar las técnicas de graficación (traslaciones y reflexiones) para bosquejar la gráfica de las funciones indicadas.

20. $y = \ln(x - 2)$ **21.** $y = \ln(-x)$ **22.** $y = \ln(x + 3)$

23. $y = 4 - \ln x$ **24.** $y = 4 - \ln(x + 3)$ **25.** $y = 2 - \ln|x|$

26. $y = 3 + \log x$ **27.** $y = 3 + \log(x + 3)$

En los problemas del 28 al 31 escribir la expresión indicada en términos de los logaritmos de a, b y c.

28. $\log\dfrac{a^2 b}{c}$ **29.** $\log\dfrac{\sqrt{b}}{a^2 c^3}$ **30.** $\ln\left(\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{c^3}{b}}\right)$ **31.** $\ln\sqrt[5]{\dfrac{a^2}{bc^4}}$

En los problemas del 32 al 34 escribir la expresión dada como un solo logaritmo de coeficiente 1.

32. $3\ln x + \ln y - 2\ln z$ **33.** $2\log a + \log b - 3(\log z + \log x)$

34. $\dfrac{3}{4}\ln a + 3\ln b - \dfrac{3}{2}\ln c$

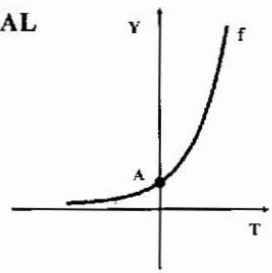
35. Expresar cada una de las siguientes funciones en la forma $y = Ae^{kt}$:

a. $y = (5)3^{0{,}5t}$ **b.** $y = 6(1{,}04)^t$

SECCION 1.7
APLICACIONES DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

Algunos fenómenos de las ciencias naturales, ciencias sociales y ciencias económicas son modelados mediante las funciones exponenciales o logarítmicas. Veamos algunos casos simples, como el crecimiento de poblaciones y decaimiento radioactivo. Más adelante, cuando tratemos el tema de ecuaciones diferenciales, se verán casos más complejos.

CRECIMIENTO ESPONENCIAL



Sea f(t) una función donde la variable independiente t representa al tiempo. Se dice que f(t) crece exponencialmente, si se cumple que:

$$\mathbf{f(t) = A\,a^{kt}},$$

donde $a > 1$ y A y k son constantes positivas.

Observar que f es creciente y que $f(0) = A$.

EJEMPLO 1. Se sabe que una población de bacterias se triplica cada minuto. Se inicia un cultivo con una población de 50 bacterias

a. Hallar la ecuación de crecimiento de la población

b. ¿Cuántas bacterias se tiene después de un cuarto de hora?

Solución

a. Se t el número de minutos transcurridos desde el inicio del cultivo.

Al inicio, cuado $t = 0$, se tiene: $f(0) = 50$

Después de un minuto, se tiene: $f(1) = f(1) = 50(3)$

Después de dos minutos, se tiene: $f(2) = 50(3)(3) = 50(3^2)$

Después de tres minutos, se tiene: $f(3) = 50(3^2)(3) = 50(3^3)$

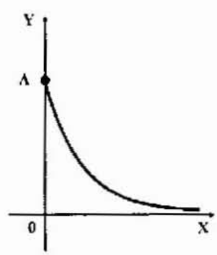
En general, después de t minutos, se tiene:

$$f(t) = 50(3^t)$$

b. Después de un cuarto hora, o sea cuando $t = 15$, se tiene:

$$f(15) = 50(3^{15}) \approx 717.445.350 \text{ bacterias.}$$

DECAIMIENTO EXPONENCIAL



Una cantidad f(t) decae exponencialmente si se cumple que:

$$\mathbf{f(t) = Aa^{-kt}}$$

donde $a > 1$ y A y k son constantes positivas.

Se tiene que $f(0) = A$ y f es **decreciente.**

Un fenómeno muy importante que cumple esta condición es la desintegración de un material radioactivo.

Los materiales radioactivos se caracterizan porque se desintegran (decaen) de manera espontánea para transformarse en otro elemento. Experimentalmente se ha comprobado que el decaimiento sigue un modelo exponencial. Si N(t) es el número de átomos de cierto isótopo radioactivo en un instante t, entonces

$$N(t) = N_0 e^{-kt}, \qquad (1)$$

donde $N_0 = N(0)$ es el número de átomos en el instante $t = 0$ y k es una constante positiva, que depende únicamente del elemento radioactivo. Si k es grande, el material decae rápidamente. Si k es pequeño (cercana a 0), el material decae lentamente.

EJEMPLO 2. La cantidad Q(t) de un material radioactivo después de t años está dada por

$$Q(t) = Ae^{-0,0004t}$$

Después de 2.000 años quedan 300 grs. ¿Cuántos gramos había inicialmente?

Solución

Tenemos que: $300 = Q(2.000) = A\,e^{-0,0004(2.000)} = Ae^{-0,8} \Rightarrow$

$$A = \frac{300}{e^{-0,8}} = 300\,e^{0,8} \approx 667,66 \text{ gramos.}$$

DECAIMIENDO RADIOACTIVO Y VIDA MEDIA

La **vida media** de material radioactivo es el tiempo que tarda cualquier muestra del material en desintegrarse la mitad de ella. Así, se sabe que la vida media del Polonio 210, (un isótopo del Polonio) es de 140 días. Esto significa que, dada cualquier cantidad de esta sustancia, después de 140 días sólo se tiene la mitad de la cantidad inicial.

Aquí tenemos la vida media de algunos elementos radioactivos:

Uranio (U^{238})	4.510.000.000 años
Plutonio (Pu^{230})	24.360 años
Carbono 14 (C^{14})	5.730 años
Radio (Ra^{226})	1.620 años
Polonio (Po^{210})	140 días.

Veamos cual es la relación entre la vida media y la constante k que aparece en la función de decaimiento de cierto material radioactivo,

Si λ la vida media del material radioactivo, transcurrido este tiempo λ debemos tener solamente la mitad de átomos iniciales, es decir, $N(\lambda)=\frac{1}{2}N_0$. En consecuencia:

$$N_0 e^{-k\lambda} = \frac{1}{2} N_0 \Rightarrow e^{-k\lambda} = 1/2 \Rightarrow -k\lambda = \ln(1/2) \Rightarrow -k\lambda = \ln 1 - \ln 2$$

$$\Rightarrow -k\lambda = -\ln 2 \Rightarrow k\lambda = \ln 2 \Rightarrow \lambda = (\ln 2)/k$$

Esto es,

$$(2) \quad \lambda = \frac{\ln 2}{k} \qquad \text{ó} \qquad (3) \quad k = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Si reemplazamos (3) en (1), tenemos la igualdad:

$$N(t) = N_0 e^{-(\ln 2/\lambda)t} \qquad (4)$$

EJEMPLO 3. Hallar la vida media del potasio ^{42}K si este se desintegra de acuerdo a la fórmula

$Q(t) = Q_0 e^{-0{,}0555t}$, donde t representa horas.

Solución

Tenemos que $k = 0{,}0555$. Luego, la vida media es

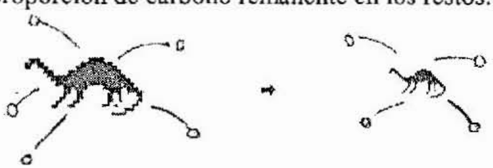
$$\lambda = \frac{\ln 2}{k} = \frac{0{,}693147}{0{,}0555} \approx 12{,}489 \text{ horas}$$

FECHADO CON CARBONO 14

El carbono 14 (^{14}C) es un isótopo radioactivo del carbono 12 (^{12}C). Este último no es radioactivo. Los arqueólogos usan ^{14}C para fechar la antigüedad de restos de materiales orgánicos, como huesos, madera, etc. La vida media del ^{14}C es de 5.730 años. De acuerdo a (4) su ecuación de desintegración es:

$$N(t) = N_0 e^{-(\ln 2/5.730)t} \qquad (5)$$

Por otro lado, el ^{14}C se encuentra en la atmósfera en un porcentaje que ha permanecido esencialmente constante desde los inicios del planeta. Los seres vivos, al respirar, ingieren ^{14}C en el mismo porcentaje que está en la atmósfera. Al morir un organismo, éste deja de ingerir este carbono y el que se encuentra ya metabolizado comienza a desintegrarse. La fecha de la muerte del organismo se determina midiendo la proporción de carbono remanente en los restos.



EJEMPLO 4. Las pinturas rupestres de la Cueva de Altamira, España, es uno de los monumentos más famosos que ha dejado el hombre prehistórico europeo. Un estudio de cierto material orgánico utilizado en estas pinturas reveló que éste posee solamente el 29 % de ^{14}C con respecto de una muestra del material actual. Calcular la edad de las pinturas.

Solución

Sea t la edad de las pinturas. Para resultados prácticos, t es también tiempo transcurrido desde que murió el organismo dueño del material orgánico. De acuerdo a la ecuación (4),

$$N(t) = N_0 e^{-(\ln 2/5.730)t}$$

Por otro lado, N_0, la cantidad de ^{14}C que tubo el material orgánico cuando murió, es la misma que tiene la muestra actual. Luego,

$$N(t) = 0{,}29\, N_0 \Rightarrow N_0 e^{-(\ln 2/5.730)t} = 0{,}29\, N_0 \Rightarrow e^{-(\ln 2/5.730)t} = 0{,}29$$

$$\Rightarrow \frac{\ln 2}{5.730} t = \ln 0{,}29 \Rightarrow t = 5.730 \frac{\ln 0{,}29}{\ln 2} \Rightarrow t \approx 10.233 \text{ años}$$

EDAD DEL UNIVERSO

De acuerdo a una teoría cosmológica, cuando el universo nació, en el momento de la "gran explosión" ("Big Bang"), existió la misma cantidad de los isótopos de uranio ^{235}U y ^{238}U. A partir de ese entonces la correlación entre estos elementos está cambiando, decayendo más rápidamente el ^{235}U, ya que la vida media del ^{235}U es más corta que la del ^{238}U.

EJEMPLO 5. Se ha determinado que en la actualidad existen 137,7 átomos de uranio ^{238}U por cada átomo de uranio ^{235}U. Se sabe que la vida media del ^{238}U es 4,51 millardos de años y la del ^{235}U es de 0,71 millardos de años. Calcular la edad del universo tomando en cuenta que al inicio de éste había igual cantidad de estos elementos.

Solución

Sea $N_8(t)$ y $N_5(t)$ el número de átomos de ^{238}U y de ^{235}U que existen t millardos de años después de la gran explosión. De acuerdo a (3), tenemos:

$$N_8(t) = N_0 e^{-kt} \quad \text{y} \quad N_5(t) = N_0 e^{-rt}, \quad (4)$$

donde N_0 es el número de átomos, tanto de ^{238}U cómo de ^{235}U, que hubo inicialmente, y

$$k = (\ln 2)/4{,}51 \quad \text{y} \quad r = (\ln 2)/0{,}71$$

Como actualmente hay 137,7 átomos de ^{238}U por cada átomo de ^{235}U, tenemos:

$$137{,}7 = \frac{N_8(t)}{N_5(t)} = \frac{N_0 e^{-kt}}{N_0 e^{-rt}} = \frac{e^{-kt}}{e^{-rt}} = e^{(r-k)t} \Rightarrow$$

$$e^{(r-k)t} = 137{,}7 \Rightarrow (k-r)t = \ln 137{,}7 \Rightarrow t = \frac{\ln 137{,}7}{k-r} \Rightarrow$$

$$t = \frac{\ln 137{,}7}{\dfrac{\ln 2}{4{,}51} - \dfrac{\ln 2}{0{,}71}} \approx 5{,}987 \text{ millardos de años.}$$

Luego, la edad del universo es, redondeando, 6 mil millones de años.

Cálculos más recientes de dan al universo una edad de 15 mil millones de años.

INTERES SIMPLE

Un capital colocado a **interés simple** permanece constante durante toda la operación. El interés ganado no genera interés. Es fácil deducir que: Un capital **P** colocado durante t años a **interés simple** y a una **tasa anual** de **100r %** produce un monto de:

$$\mathbf{M(t) = P(1 + rt)} \qquad \mathbf{(1)}$$

INTERES COMPUESTO

En un capital a **interés compuesto,** el interés ganado en cada periodo es agregado al capital, para ganar interés en el próximo periodo; o sea, el interés se capitaliza o se **compone** después de cada periodo. Este periodo puede ser de 1 año (anual), 6 meses (semestral: 2 periodos al año), 3 meses (trimestral: 4 periodos al año), 1 mes (mensual: 12 periodos al año), etc.

Además de la **tasa anual**, se tiene la **tasa periódica**, que es el tanto por ciento por periodo de capitalización. Si el año está dividido en n periodos iguales, entonces

$$\textbf{Tasa periódica} = \frac{\textbf{Tasa anual}}{\mathbf{n}}$$

Así, si la tasa anual es de 24 % y el periodo de capitalización es de 3 meses (4 periodos al año) entonces la tasa periódica es de $\frac{24}{4}\% = 6\%$.

Un capital **P** que se coloca durante **t años** a una tasa de **100r %** anual que se capitaliza (se compone) **n veces** al año produce un **monto:**

$$\mathbf{M(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}} \qquad \mathbf{(2)}$$

INTERES COMPUESTO CONTINUO

Cuando el número n de periodos de capitalización crece ilimitadamente; es decir, cuando $n \to +\infty$, se obtiene el **interés compuesto continuo.** Aquí, la capitalización es instantánea y se la denomina **capitalización continua.**

Un **capital P** colocado durante t años a un interés anual de **100r %** que se capitaliza **continuamente**, produce un **monto** de:

$$\mathbf{M(t) = Pe^{rt}} \qquad \mathbf{(3)}$$

Esta fórmula se obtiene de la anterior tomando límite. Esto lo veremos más adelante.

EJEMPLO 6. Se deposita un capital de 1.000.000 Bs. en un banco que ofrece una tasa de 25 % anual. Calcular el monto después de 2 años si:

a. El interés es simple.

b. El interés es compuesto y se capitaliza mensualmente.

c. El interés es compuesto y se capitaliza continuamente.

Solución

a. Se tiene: $P = 1.000.000$, $r = 0{,}25$ y $t = 2$. Reemplazando estos valores en la fórmula (1):

$$M(2) = 1.000.000\big(1 + 0{,}25(2)\big) = 1.500.000 \text{ Bs.}$$

b. Se tiene: $P = 1.000.000$, $r = 0{,}25$, $n = 12$, $t = 2$. Reemplazando estos valores en la fórmula (2):

$$M(2) = 1.000.000\Big(1 + \frac{0{,}25}{12}\Big)^{24} = 1.640.273{,}33 \text{ Bs.}$$

c. Se tiene: $P = 1.000.000$, $r = 0{,}25$ y $t = 2$. Reemplazando estos valores en la fórmula (3):

$$M(2) = 1.000.000\, e^{0{,}25(2)} = 1.648.721{,}27 \text{ Bs.}$$

EJEMPLO 7. Se invierte cierta cantidad de dinero a una tasa anual de 20 %. ¿En qué tiempo se duplicará este dinero si el interés se compone:

a. Trimestralmente? **b.** Continuamente?

Solución

Sea P el dinero invertido y λ el tiempo que se necesita para duplicar a P, o sea el tiempo necesario para obtener un monto de 2P.

a. La fórmula (2) del monto del interés compuesto con $n = 4$, $r = 0{,}2$ y $t = \lambda$ dice:

$$M(\lambda) = P\left(1 + \frac{0{,}2}{4}\right)^{4\lambda} = P(1{,}05)^{4\lambda}$$

Como este monto $M(\lambda)$ debe ser 2P, tenemos:

$$P(1{,}05)^{4\lambda} = 2P \Rightarrow (1{,}05)^{4\lambda} = 2 \Rightarrow 4\lambda \ln(1{,}05) = \ln 2$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{4\ln(1{,}05)} \approx 3{,}552 \text{ años} \approx 3 \text{ años, 6 meses y 19 días}$$

b. La fórmula (3) del monto del interés compuesto continuo con $r = 0{,}2$ y $t = \lambda$ dice:

$$Pe^{0{,}2\lambda} = 2P \Rightarrow e^{0{,}2\lambda} = 2 \Rightarrow 0{,}2\lambda = \ln 2 \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{0{,}2}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{0{,}2} \approx 3{,}466 \text{ años} \approx 3 \text{ años, 5 meses y 18 días.}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 1.7

1. **(Población).** La población de una ciudad, t años después del año 2.000, es

$$P(t)= 60.000\, e^{0,05t} \quad \text{habitantes}$$

   a. Calcular la población de la ciudad en el año 2.015.
   b. Hallar el porcentaje anual de crecimiento de la población.

2. **(Depreciación).** El valor de una maquinaria, t años después de comprada, es

$$V(t) = Ae^{-0,25t}$$

   La máquina fue comprada hace 9 años por \$. 150.000
   a. ¿Cuál es su valor actual?
   b. ¿Cuál es el porcentaje anual de declinación de su valor?

3. **(Población).** Se sabe que dentro de t años la población de cierto país será de

$$P(t) = 18e^{0,02t} \text{ millones de habitantes.}$$

   a. ¿Cuál es la población actual del país?
   b. ¿Cuál será su población dentro de 15 años?
   c. ¿Cuál es el porcentaje anual de crecimiento de la población?

4. **(Crecimiento de bacterias).** Un experimento de crecimiento bacteriológico se inició con 4.000 bacterias. 10 minutos más tarde, se tenían 12.000. Si se supone que el crecimiento es exponencial: $f(t) = Ae^{kt}$. ¿Cuántas bacterias se tendrá a los 30 minutos?

5. **(Utilidades).** Las utilidades de una compañía crecen exponencialmente: $f(t) = Ae^{kt}$. En 1.995 éstas fueron de 3 millones de dólares y en el 2.000 fueron de 4,5 millones. ¿Cuáles son las utilidades en 2.005?

6. **(Desintegración radioactiva).** La cantidad que queda de una sustancia radioactiva después de t años de desintegración está dada por

$$Q(t) = Ae^{-0,00015t} \text{ gramos}$$

   Si al final de 5.000 años quedan 3.000 gramos, ¿Cuántos gramos había inicialmente?

7. **(Desintegración radioactiva).** Una sustancia radioactiva se desintegra exponencialmente: $f(t) = Ae^{-kt}$. Inicialmente había 450 gramos y 60 años después había 400 gramos, ¿Cuántos gramos habrá después de 240 años?

8. **(Producto Nacional Bruto).** El producto nacional bruto (P.N.B.) de cierto país, t años después de 1.995, es de f(t) millones de dólares, donde

$$f(t) = P(10)^{kt}, \text{ P y k son constantes}$$

   Si en 1.995 el P.N.B. fue de 8.000 millones de dólares y en el 2.000 fue de 16.000 millones de dólares. ¿Cuál será el P.N.B. en el año 2.010?

9. (Presión atmosférica). Se ha determinado que, a la altura de h pies sobre el nivel del mar, la presión atmosférica es de P(h) libras por pie cuadrado, donde

$$P(h) = Me^{-0.00003h}\ , \quad M \text{ es constante}$$

Si la presión atmosférica al nivel del mar es de 2.116 libras por pie cuadrado, hallar la presión atmosférica fuera de un avión que vuela a 12.000 pies de altura.

10. (Duración de bombillos). Un fabricante de bombillos encuentra que la fracción f(t) de bombillos que no se quemen después de t meses de uso está dada por

$$f(t) = e^{-0,2t}$$

a. ¿Qué porcentaje de los bombillos dura por lo menos un mes?
b. ¿Qué porcentaje dura al menos 2 meses?
c. ¿Qué porcentaje se quema durante el segundo mes?

11. (Venta de libros). Una editorial, estudiando el mercado, ha descubierto que si se distribuyen x miles de ejemplares gratuitos de un texto, la venta de dicho texto será, aproximadamente,

$$V(x) = 30 - 18e^{-0,3x} \text{ miles de ejemplares}$$

a. ¿Cuántos textos se venderán si no se han distribuido ejemplares gratuitos?
b. ¿Cuántos se venderán si se han regalado 800 ejemplares?

12. (Depreciación). El valor de reventa de una máquina, después de t años de uso, es:

$$V(t) = 520e^{-0,15t} + 460 \text{ miles de dólares}$$

a. Bosquejar el gráfico de la función reventa.
b. ¿Cuál fue el valor de la máquina cuando era nueva?
c. ¿Cuál será el valor de la máquina cuando cumpla 20 años de uso?

13. (Desintegración radioactiva). Si Q_0 es la cantidad inicial de una sustancia radioactiva se desintegra exponencialmente: $Q(t) = Q_0 e^{-kt}$. La vida media de la sustancia es de λ unidades de tiempo (años, meses, horas, etc.). Probar que la cantidad remanente después de t unidades de tiempo es de

$$Q(t) = Q_0 e^{-(\ln 2/\lambda)t}$$

14. (Desintegración del radio). El radio se desintegra exponencialmente y su vida media es de 1.690 años. ¿Cuánto tiempo tardarán 200 gramos de este elemento para reducirse a 40 gramos?. Sugerencia: Ver el problema anterior.

15. (Nivel de alcohol en la sangre). Poco tiempo después de consumir una considerable cantidad de ron, el nivel de alcohol en la sangre de cierto conductor es de 0,4 miligramos por mililitro (mg/ml). De aquí en adelante, el nivel de alcohol decrece de acuerdo a la función

$$f(t) = (0,4)(1/2)^t,$$

donde t es el número de horas transcurridas después de haber alcanzado el nivel antes indicado. Si el límite legal para manejar un vehículo es de 0,08 mg/ml. ¿Cuánto tiempo debe esperar la persona para manejar legalmente?

16. **(Cálculo del monto).** Se deposita un capital de 12 millones de dólares en un banco que paga 14 % anual de interés compuesto continuo ¿En cuántos años se tendrá un monto de 21 millones?

17. **(Competencia de ventas).** Dos periódicos compiten en ventas. Uno de ellos tiene una circulación de 500.000 ejemplares y crece 1,5 % mensualmente. El otro tiene una circulación de 900.000 ejemplares y decrece a razón de 0,5 % mensual. ¿Cuánto tiempo tomará para que ambos periódicos tengan igual circulación?

18. **(Venta de un texto).** Un nuevo texto de cálculo saldrá al mercado. Se estima que si se obsequian x miles de ejemplares a los profesores, en el primer año se venderán $f(x) = 12 - 5e^{-0,2x}$ miles de ejemplares. ¿Cuántos textos deben obsequiarse si se quiere una venta en el primer año de 9.000 ejemplares?

19. **(Producto Nacional Bruto).** El producto nacional bruto (P.N.B.) de cierto país esta creciendo exponencialmente. En 1.995 fue 60.000 millones y en 2.000 fue de 70.000 millones.¿Cuál es el PNB en el 2.005?

20. **(Población de la Tierra).** La población de la tierra en 1.986 fue de 4.917 millones de habitantes, y crecía a razón de 1,65 % anual. Si esta razón continua, ¿en cuántos años la población alcanzará 8.000 millones?

21. **(Edad de un fósil).** Un arqueólogo calculó que la cantidad de ^{14}C en un tronco de árbol fosilizado es la cuarta parte de la cantidad de ^{14}C que contienen los árboles actuales. ¿Qué edad tiene el tronco fosilizado?

22. **(Cálculo del monto).** Se pide prestado a un banco Bs. 7.500.000 para ser pagado en dos años, ganando interés de 28% anual. Hallar la cantidad de dinero que deberá devolverse al banco si
    - **a.** El interés es simple.
    - **b.** El interés se compone anualmente.
    - **c.** El interés se compone trimestralmente.
    - **d.** El interés se compone mensualmente.
    - **e.** El interés se compone continuamente.

23. **(Cálculo del principal).** ¿Qué capital produce un monto de $. 2.500.000 al final de 5 años si la tasa es de 16 % anual que se compone:
    a. Trimestralmente? **b.** Continuamente?

24. **(Cálculo del monto).** En el año 1.626 el holandés Piter Minuit compró a los nativos la "isla" de Manhattan (Nueva York), por 24 dólares. Suponga que los nativos depositaron estos 24 dólares en un banco, ganando una tasa anual de 5 % que se compone continuamente. ¿Cuál es monto en el año 2.000?

25. **(Tiempo de duplicación de capital).** ¿Con qué rapidez se duplica un dinero si se invierte a una tasa anual de 15% que se compone:
    a. Semestralmente? **b.** Continuamente?

26. **(Tiempo de triplicación de capital).** ¿Con qué rapidez se triplicará un dinero invertido a una tasa anual de 15 % que se compone:
    a. Semestralmente? **b.** Continuamente?

BREVE HISTORIA DE LAS ECUACIONES DE TERCER Y CUARTO GRADO

Los antiguos babilonios ya conocian la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, *que nos proporciona las raíces de la ecuación segundo grado* $ax^2 + bx + c = 0$. *Esta fórmula expresa las raíces en términos de radicales.*

Alrededor de 1.535, ***Nicolo Fontana o Nicolo de Brescia (1.500–1.557)****, más conocido con el sobrenombre de* ***Tartaglia*** *(tartamudo), hizo correr la noticia que él había descubierto la fórmula para resolver la ecuación de tercer grado:* $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. *En Bologna, levantó la voz* ***Antonio del Fiore****, un discípulo del profesor de Matemáticas de la Universidad de Bologna,* ***Scipione del Ferro (1.465–1.526)****. Del Fiore acusa a Tartaglia de impostor y sostiene que fue su maestro quien ya habia descubierto la fórmula en 1,515. Para dilucidar esta situación, Fiore desafió a Tartaglia a un concurso público. Tartagia aceptó y ganó el desafío.*

La fama de Tartaglia se extendió en toda Italia. En 1.539, otro matemático de Milán, ***Giroldamo Cardano (1.501–1.526)****, le solicita conocer la fórmula. En un principio, Tartaglia rehusó, pero más tarde acepta después de hacer jurar a Cardano que éste no la revelaria.*

En 1.545, Girolamo Cardano publicó su famoso libro ***Ars Magna*** *(Arte Mayor) en el cual, aparece la fórmula, sin dar el completo crédito de autoria a Tartaglia. Este, eufórico, desafió a Cardano a un concurso público, que no fue aceptado. El desafío fue respondido por* ***Ludovico Ferrari (1.522–1.526)****, discípulo de Cardano. Este concurso fue muy escabroso y de un final no muy claro.*

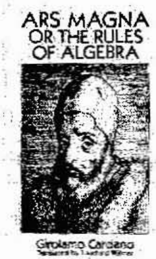
En el libro ***Ars Magna*** *también aparece la fórmula para resolver la ecuación de cuarto grado, que fue hallada por* ***Ludovico Ferrari****, siguiendo los pasos de la solución de la de tercer grado.*

Veamos la fórmula, para resolver la ecuación de tercer grado: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

En primer lugar, el cambio de variable $x = z - b/3a$, *transforma esta ecuación en una de la forma* $x^3 + qx + r = 0$, *la cual tiene por solución:*

$$x = \left[-\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}} \right]^{1/3} + \left[-\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}} \right]^{1/3}$$

Tartaglia



Ars Magna (traducción al inglés)

2

LIMITES Y CONTINUIDAD

LEONARDO EULER
(1.707 – 1.783)

Leonardo Euler

(1707 – 1783)

***Leonardo Euler** nació en Basilea, Suiza. A temprana edad recibió lecciones del distinguido matemático Johann Bernoulli, quien juntó a Leonardo con sus dos brillantes hijos, Nicolás y Daniel. Más tarde, estos dos jovencitos alcanzaron renombre en la matemática por sus propios méritos. Leonardo, a pesar de ser 12 y 7 años menor que ellos, respectivamente, logró seguirles el ritmo.*

Fue invitado a Rusia por la reina Catalina, en donde se incorporó a la Academia de Ciencias de San Petersburgo. El rey Federico el Grande lo invitó a Berlín a trabajar en la Academia de Ciencias de esa ciudad. En ambas sitios produjo abundantes trabajos de investigación.

Euler es considerado como el matemático más prolífico de la historia. Tiene contribuciones notables al cálculo de variaciones, la teoría de números, ecuaciones diferenciales. Introdujo al número e como base de los logaritmos naturales. Su producción total consiste en alrededor de 886 trabajos, que recopilados constituirían 80 libros de buen volumen. Se dice que al morir, dejó a la Academia de San Petersburgo trabajos para publicar por 20 años más, a pesar de que sus últimos 17 años los pasó casi ciego.

ACONTECIMIENTOS IMPORTANTES

Durante la vida de Euler, en América y en el mundo hispano, sucedieron los siguientes hechos notables: En 1.780 el cacique peruano José Gabriel Condorcanqui, quien adoptó el nombre del inca Tupac Amaru, se levantó en armas contra la autoridad colonial. Fue vencido y ejecutado delante de su familia. En 1.750 nace en Caracas el prócer de la independencia venezolana Francisco de Miranda y en 1.783 nace el Libertador Simón Bolívar. El 4 de julio de 1.776, las 13 colonias inglesas de norteamérica declaran su independencia. Ese mismo año, Jorge Washington, con las fuerzas patriotas, cruza el río Delaware, cae por sorpresa sobre los ingleses y los derrota en Trenton.

Sobre el concepto de límite descansan los fundamentos del Cálculo. Sin duda que éste es uno de los conceptos más importantes y más delicados de la Matemática. Hizo su aparición hace muchos años atrás, en la Grecia Antigua. Sin embargo, su formulación rigurosa recién se logró en el siglo XIX, en los trabajos de investigación del matemático francés Agustín Cauchy (1789-1857). El largo lapso entre su aparición y su formulación rigurosa nos da una idea sobre lo delicado de este concepto.

Intimamente ligado al concepto de límite está el concepto de continuidad. De estos dos conceptos nos ocuparemos en este capítulo.

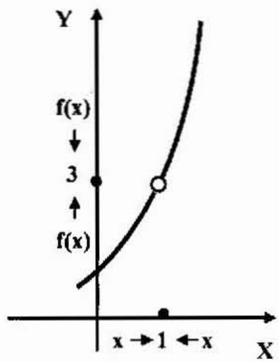
SECCION 2.1

INTRODUCCION INTUITIVA A LOS LIMITES

En esta sección presentamos un enfoque intuitivo del concepto de límite. También presentamos, sin demostración, las principales leyes que gobiernan a este concepto. Estas leyes nos permitirán introducirnos rápidamente al cálculo de los límites. La siguiente sección se ocupará de justificar rigurosamente muchos de estos aspectos.

Consideremos la siguiente función

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$



Esta función está definida para todo real x, excepto para x = 1. Factorizando el numerador tenemos que:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$

Además, para $x \neq 1$, podemos simplificar y obtener:

$$f(x) = x^2 + x + 1, \quad x \neq 1.$$

Aunque la función f no está definida en 1 nos interesamos por los valores que toma f(x) cuando x se aproxima a 1, sin llegar a ser 1. En primer lugar, nos acercamos a 1 por la izquierda tomando para x valores menores que 1. Así, por ejemplo, x = 0,8 ; 0,9; 0,99; 0,999. En segundo lugar, nos acercamos a 1 por la derecha tomando para x valores mayores que 1. Así, por ejemplo, x = 1,2; 1,1; 1,01; 1,001. Los valores correspondientes para f(x) los tenemos en la tabla siguiente.

x	0,8	0,9	0,99	0,999	→ **1** ←	1,001	1,01	1.1	1.2
$f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$	2,44	2,71	2,9701	2,997001	→ **3** ←	3,003001	3,0301	3,31	3,64

Mirando la tabla o mirando el gráfico de la función, observamos que cuando x se aproxima a 1 por la izquierda y por la derecha, pero sin llegar a ser 1, el valor f(x) de la función se aproxima a 3. Este resultado se expresa diciendo que el límite de f(x) cuando x tiende a 1 es 3, lo cual se abrevia así:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3 \quad \text{ó bien} \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

Durante toda la discusión anterior hemos puesto énfasis en que al aproximar x a 1 no dejamos que x tome el valor 1. Por tanto, el valor del límite de f(x) cuando x tiende a 1 depende únicamente de los valores que toma f(x) en los puntos x que están cercanos a 1, siendo irrelevante el hecho de que f esté o no definida en el punto 1. Así, si consideramos esta otra función $g(x) = x^2 + x + 1$, la cual está definida en todo x incluyendo x = 1, tenemos que las dos funciones,

$$\textbf{1. } f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1, \quad x \neq 1 \qquad \text{y} \qquad \textbf{2. } g(x) = x^2 + x + 1,$$

son iguales en todo x excepto en x = 1 (f no está definida en 1). La tabla que hemos construido para f(x) también sirve para g(x), ya que en ella no hemos considerado el valor x = 1. Por tanto, también concluimos que

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 3$$

Es decir, ambas funciones tienen el mismo límite cuando x tiende a 1.

Guiados por la discusión anterior presentamos una definición intuitiva de límite. Al lector amante del rigor matemático le pedimos esperar un poco.

DEFINICION. **(No rigurosa de límite)**. Sea f una función que está definida en un intervalo abierto que contiene al punto **a**, excepto posiblemente en el mismo punto a. Diremos que **el límite de f(x) cuando x tiende a a es el número L**, y escribiremos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

si cuando x está cerca de **a**, pero sin llegar a ser **a**, f(x) está cerca de L.

Este número L puede o no existir, pero si existe, éste es único; es decir, toda función tiene, en un punto dado, a lo más un límite.

EJEMPLO 1. Hallar $\lim_{x \to -1} (x + 3)$

Solución

Cuando x está cerca de −1, x + 3 está cerca de −1 + 3 = 2. Luego,

$$\lim_{x \to -1} (x + 3) = 2$$

EJEMPLO 2. Hallar $\lim_{x \to 4} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + 1, & \text{si } x \neq 4 \\ 5, & \text{si } x = 4 \end{cases}$

Solución

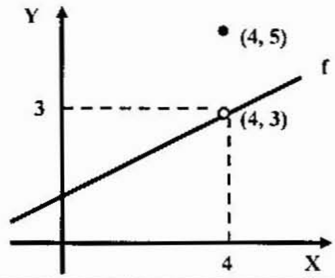
La función f coincide con la función lineal

$g(x) = \dfrac{x}{2} + 1$ en todo $\mathbb{R}$, excepto en $x = 4$.

Luego,

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} g(x) = \lim_{x \to 4}\left(\frac{x}{2} + 1\right)$$

$$= \frac{4}{2} + 1 = 2 + 1$$



EJEMPLO 3. **Límite de una función constante**

Sea la función constante $f(x) = c$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Probar que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} c = c$$

Es decir, el límite de una función constante, cuando x tiende a cualquier valor a, es la misma constante.

Solución

Como $f(x) = c$, $\forall x \in \mathbb{R}$, en particular, para los x próximos a **a** también tendremos que $f(x) = c$. Luego,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} c = c$$

EJEMPLO 4. **Límite de la función Identidad**

Sea la función identidad: $I(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Probar que

$$\lim_{x \to a} I(x) = \lim_{x \to a} x = a$$

Es decir, el límite de la función identidad $I(x) = x$, cuando x tiende a **a**, es la misma a.

Solución

Si x se aproxima a **a**, obviamente $I(x) = x$ también se aproxima a **a**. Luego,

$$\lim_{x \to a} I(x) = \lim_{x \to a} (x)$$

LIMITES UNILATERALES

Para hallar el límite de una función en un punto **a** nos aproximamos a **a** por ambos lados, por la izquierda y por la derecha. Si sólo nos aproximamos a **a** por un solo lado, bien sea por la izquierda o por la derecha, tenemos los **límites unilaterales**.

DEFINICION.

a. Sea f una función definida en un intervalo abierto de la forma **(b, a)**. Diremos que el **límite de f(x) cuando x tiende a a por la izquierda** es **L**, y escribiremos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

si cuando x está cerca de **a**, pero a la izquierda de **a**, f(x) está cerca de **L**.

b. Sea f una función definida en un intervalo abierto de la forma **(a, b)**. Diremos que el **límite de f(x) cuando x tiende a a por la derecha** es **L**, y escribiremos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

si cuando x está cerca de **a**, pero a la derecha de a, f(x) está cerca de **L**.

Observar que en ambos límites unilaterales no se asume que la función f está definida en **a**. El hecho de que f esté o no definida en a no afecta el límite.

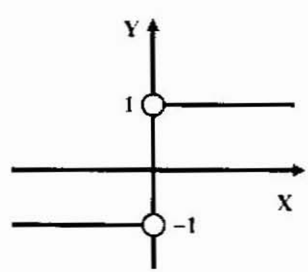
EJEMPLO 5. Si $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$, hallar

a. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x}{|x|}$ **b.** $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{|x|}$

Solución

a. Cuando x está a la izquierda de 0, es decir cuando $x < 0$, se tiene

$$|x| = -x \text{ y } f(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{-x} = -1.$$



En particular, para los x cercanos a 0 y a su izquierda, tenemos que $f(x) = -1$. Luego,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$$

b. Cuando x está a la derecha de 0, es decir cuando $x > 0$, se tiene

$$|x| = x \quad \text{y} \quad f(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{x} = 1.$$

En particular, para los x cercanos a 0 y a su derecha, tenemos que $f(x) = 1$.
Luego,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$$

Es evidente que si el límite de una función es el número L, entonces ambos límites unilaterales también serán iguales a L. Recíprocamente, si ambos límites son iguales a un mismo número L, entonces el límite de la función también es L. Este resultado es muy importante y lo resumimos en el siguiente teorema.

TEOREMA 2.1 $\displaystyle \lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = L \;\; \text{y} \;\; \lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Este teorema y los resultados del ejemplo anterior nos dicen que la función $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ no tiene límite en 0.

Nos preguntamos si existen funciones que en un punto dado no tengan alguno o los dos límites unilaterales. La respuesta es afirmativa. El siguiente ejemplo nos muestra una función que no tiene ninguno de los dos límites unilaterales en 0 y por tanto, tampoco tiene límite en 0.

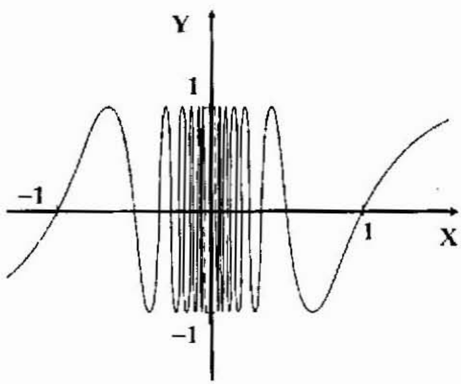
EJEMPLO 6. Probar que no existen:

a. $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ b. $\displaystyle \lim_{x \to 0^-} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ c. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$

Solución

Tenemos la gráfica de $y = \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$

Nuestra táctica es mostrar una sucesión infinita de valores de x que se aproximan a 0, tanto por la derecha como por la izquierda, pero los valores correspondientes de $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$ oscilan entre -1 y 1. Esto probaría que ninguno de los tres límites existe.



Sea $x_n = \dfrac{2}{2n+1}$, donde n es un entero. Se tiene:

$$\frac{\pi}{x_n} = \frac{\pi}{2/(2n+1)} = (2n+1)\frac{\pi}{2}\ .$$

a. Tomamos $x_n = \dfrac{2}{2n+1}$ con $n \geq 0$.

En este caso se tiene que a medida que n crece, $x_n = \dfrac{2}{2n+1}$ se aproxima cada vez más a 0 por la derecha; sin embargo los valores correspondientes de $\operatorname{sen}(2n+1)\frac{\pi}{2}$ son

$$\operatorname{sen}\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right] = \begin{cases} 1 & \text{si n es par} \\ -1 & \text{si n es impar} \end{cases}$$

Por lo tanto, no existe $\displaystyle\operatorname*{Lim}_{x \to 0^+} \operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$

b. Tomamos $x_n = \dfrac{2}{2n+1}$ con $n < 0$.

Como en el caso anterior, a medida que $|\,n\,|$ crece, $x_n = \dfrac{2}{2n+1}$ se aproxima cada vez más a 0 por la izquierda; pero aquí también se cumple que

$$\operatorname{sen}\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right] = \begin{cases} 1 & \text{si n es par} \\ -1 & \text{si n es impar} \end{cases}$$

Por lo tanto, no existe $\displaystyle\operatorname*{Lim}_{x \to 0^-} \operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$

c. Como no existen los límites unilaterales, tampoco existe $\displaystyle\operatorname*{Lim}_{x \to 0} \operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$

LEYES DE LOS LIMITES

Un resultado fundamental en la teoría de los límites nos dice que el proceso de tomar límites respeta las operaciones elementales del álgebra. Es decir, el límite de una suma, diferencia, producto, cociente o raíz de funciones es igual a la suma, diferencia, producto, cociente o raíz de los límites. Estos resultados son conocidos con los nombres de ley de la suma, ley de la diferencia, ley del producto, ley del cociente y ley de la raíz, respectivamente. Debido a su importancia, los enunciamos en forma precisa en el siguiente teorema, cuya demostración parcial la haremos más adelante.

TEOREMA 2.2 **Leyes de los límites.**

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = G$, entonces

1. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = [\lim\limits_{x\to a} f(x)] \pm [\lim\limits_{x\to a} g(x)] = L \pm G$

2. $\lim\limits_{x\to a} [f(x)g(x)] = [\lim\limits_{x\to a} f(x)][\lim\limits_{x\to a} g(x)] = LG$

3. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{G}$, si $G \neq 0$

4. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, donde $L > 0$ si n es par

Estas leyes también son válidas para los límites unilaterales.

EJEMPLO 7. **Ley del producto de una constante por una función**

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y c es una constante, probar que

$$\lim_{x\to a} [cf(x)] = c\left[\lim_{x\to a} f(x)\right] = cL$$

Solución

$$\lim_{x\to a} [c f(x)] = [\lim_{x\to a} c][\lim_{x\to a} f(x)] = cL$$

EJEMPLO 8. **Ley de la potencia.**

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y n es un número natural, probar:

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n = L^n$$

En particular,

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n$$

Solución

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^n = \lim_{x\to a} [\underbrace{f(x)f(x)\ldots f(x)}_{n}]$$

$$= [\lim_{x\to a} f(x)]\,[\lim_{x\to a} f(x)]\ldots[\lim_{x\to a} f(x)] \qquad \text{(Ley del producto)}$$

$$= \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = L^n$$

Por otro lado, por ejemplo 4 sabemos que $\lim_{x\to a} x = a$. Luego, aplicando la parte anterior,

$$\lim_{x\to a} x^n = \left[\lim_{x\to a} x\right]^n = [a]^n = a^n$$

EJEMPLO 9. Calcular $\lim_{x\to 2} \sqrt{5x^3}$

Solución

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{5x^3} = \sqrt{\lim_{x\to 2} 5x^3} \qquad \text{(Ley de la raíz)}$$

$$= \sqrt{5[\lim_{x\to 2} x^3]} \qquad \text{(Ejemplo 7)}$$

$$= \sqrt{5[2^3]} \qquad \text{(Ley de la potencia)}$$

$$= \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

El siguiente teorema nos da la manera de calcular el límite de una función racional y, en particular, el de un polinomio.

TEOREMA 2.3 Si F(x) es una función racional y a es un punto de su dominio, entonces

$$\lim_{x\to a} \mathbf{F(x)} = \mathbf{F(a)}$$

Demostración

Caso 1. F es un polinomio: $F(x) = b_nx^n + \ldots + b_1x + b_0$

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} [b_nx^n + \ldots + b_1x + b_0]$$

$$= \left[\lim_{x\to a} b_nx^n\right] + \ldots + \left[\lim_{x\to a} b_1x^n\right] + \left[\lim_{x\to a} b_0\right] \qquad \text{(Ley de la suma)}$$

$$= b_n\left[\lim_{x\to a} x^n\right] + \ldots + b_1\left[\lim_{x\to a} x\right] + b_0 \qquad \text{(Ejemplo 7)}$$

$$= b_n a^n + \ldots + b_1 a + b_0 \qquad \text{(Ley de la potencia)}$$

$$= F(a)$$

Caso 2. F es una función racional: $F(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde $q(a) \neq 0$

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} p(x)}{\lim\limits_{x\to a} q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} = F(a).$$

EJEMPLO 10. Calcular $\lim\limits_{x\to 2} [4x^3 - 7x^2 + 5x - 1]$

Solución

Aplicando el teorema anterior para el caso de un polinomio:

$$\lim_{x\to 2} [4x^3 - 7x^2 + 5x - 1] = 4(2)^3 - 7(2)^2 + 5(2) - 1 = 13$$

EJEMPLO 11. Calcular $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{8x^2 - 4x + 2}{x^3 + 5}$

Solución

Aplicando el teorema anterior para el caso de una función racional:

$$\lim_{x\to -1} \frac{8x^2 - 4x + 2}{x^3 + 5} = \frac{\lim\limits_{x\to -1}(8x^2 - 4x + 2)}{\lim\limits_{x\to -1}(x^3 + 5)} = \frac{8(-1)^2 - 4(-1) + 2}{(-1)^3 + 5} = \frac{7}{2}.$$

FORMA INDETERMINADA $\frac{0}{0}$

Supongamos $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, y buscamos $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Aquí, la ley del cociente (teorema 2.2) no es aplicable. La sustitución directa nos lleva a la expresión 0/0, la cual no da la información suficiente para encontrar tal límite. Por tal razón se dice que este límite es **indeterminado de la forma 0/0 o que el límite es de la forma indeterminada 0/0.** La indeterminación se salva recurriendo a métodos geométricos o algebraicos, como simplificación, racionalización o cambio de variable.

Veremos más adelante que la derivada, que es el concepto más importante del Cálculo Diferencial, es un límite del tipo 0/0.

EJEMPLO 12. Hallar $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x-4}$

Solución

Este es un límite indeterminado de la forma 0/0. Observemos que al numerador lo podemos factorizar, lo que nos permitirá simplificar el cociente. En efecto:

$$\frac{x^2-16}{x-4} = \frac{(x+4)(x-4)}{x-4} = x+4, \text{ para } x \neq 4$$

Luego,

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \lim_{x\to 4}(x+4) = 4+4 = 8$$

EJEMPLO 13. Hallar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

Solución

Tenemos una indeterminación de la forma 0/0, en la cual aparecen radicales. Aquí usamos la técnica de la racionalización. Multiplicamos numerador y denominador por la expresión $\sqrt{x+1}+1$, que es la conjugada del numerador:

$$\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\,\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{(x+1)-1^2}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$

Luego,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{\sqrt{0+1}+1} = \frac{1}{2}$$

PROBLEMAS RESUELTOS 3.1

PROBLEMA 1. Hallar $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x+2}$

Solución

Este es un caso 0/0. Para $x \neq -2$ tenemos:

$$\frac{x^3+8}{x+2} = \frac{x^3+2^3}{x+2} = \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2} = x^2-2x+4$$

Luego,

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x+2} = \lim_{x\to -2} (x^2-2x+4) = (-2)^2 - 2(-2) + 4 = 12$$

PROBLEMA 2. Hallar $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

Solución

Es un caso $\dfrac{0}{0}$. Para $h \neq 0$, usando la conjugada, tenemos

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\ \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

Luego,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

PROBLEMA 3. Hallar $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x+2)^{-3}-2^{-3}}{x}$

Solución

Es un caso 0/0. Para $x \neq 0$ tenemos:

$$\frac{(x+2)^{-3}-2^{-3}}{x} = \frac{\dfrac{1}{(x+2)^3}-\dfrac{1}{2^3}}{x} = \frac{2^3-(x+2)^3}{2^3x(x+2)^3}$$

$$= \frac{2^3-[x^3+6x^2+12x+2^3]}{2^3x(x+2)^3} = -\frac{x^3+6x^2+12x}{2^3x(x+2)^3}$$

$$= -\frac{x(x^2+6x+12)}{2^3x(x+2)^3} = -\frac{x^2+6x+12}{2^3(x+2)^3}$$

Luego,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+2)^{-3}-2^{-3}}{x} = -\lim_{x\to 0} \frac{x^2+6x+12}{2^3(x+2)^3} = -\frac{0^2+6(0)+12}{2^2(0+2)^3} = -\frac{3}{8}$$

PROBLEMA 4. Hallar $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$

Solución

Es un caso 0/0.

De la identidad $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, obtenemos

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$$

Si en la última igualdad hacemos $a = \sqrt[3]{x+h}$ y $b = \sqrt[3]{x}$ se tiene que:

$$\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x} = \frac{(\sqrt[3]{x+h})^3 - (\sqrt[3]{x})^3}{(\sqrt[3]{x+h})^2 + (\sqrt[3]{x+h})(\sqrt[3]{x}) + (\sqrt[3]{x})^2}$$

$$= \frac{x + h - x}{(\sqrt[3]{x+h})^2 + (\sqrt[3]{x+h})(\sqrt[3]{x}) + (\sqrt[3]{x})^2}$$

$$= \frac{h}{(\sqrt[3]{x+h})^2 + (\sqrt[3]{x+h})(\sqrt[3]{x}) + (\sqrt[3]{x})^2}$$

Luego, para $h \neq 0$,

$$\frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} = \frac{h}{h\left[(\sqrt[3]{x+h})^2 + (\sqrt[3]{x+h})(\sqrt[3]{x}) + (\sqrt[3]{x})\right]}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt[3]{x+h})^2 + (\sqrt[3]{x+h})(\sqrt[3]{x}) + (\sqrt[3]{x})^2}$$

En consecuencia,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{x+h})^2 + (\sqrt[3]{x+h})(\sqrt[3]{x}) + (\sqrt[3]{x})^2}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt[3]{x+0})^2 + (\sqrt[3]{x+0})(\sqrt[3]{x}) + (\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

PROBLEMA 5. Hallar $\lim_{x \to a^+} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, donde $a > 0$

Solución

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\dfrac{x-a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{(x-a)(x+a)}} = \frac{(x-a) + \sqrt{x-a}\,(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{(x-a)(x+a)}(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$

$$= \frac{\sqrt{x-a}\sqrt{x-a} + \sqrt{x-a}\,(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x-a}\sqrt{x+a}\,(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$

$$= \frac{\sqrt{x-a}\left[\sqrt{x-a}+\sqrt{x}+\sqrt{a}\right]}{\sqrt{x-a}\sqrt{x+a}\,(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}\,(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$

Luego,

$$\lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} = \lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{a}}{\sqrt{2a}(\sqrt{a}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

Observar que la factorización $x - a = \sqrt{x-a}\ \sqrt{x-a}$ sólo es posible si $x \geq a$. Por esta razón sólo se pide el límite por la derecha.

PROBLEMA 6. Hallar $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

Solución

Mediante un cambio de variable transformamos esta función con radicales en una función racional. La justificación teórica del proceso de cambio de variable (Teorema de cambio de variable) la presentaremos en la próxima sección. Los radicales tienen índices 2 y 3, respectivamente (tienen índices distintos). Hallamos el mínimo común múltiplo de 2 y 3, que es 6, y hacemos el cambio de variable:

$$x + 1 = y^6$$

Ahora tenemos que

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{y^6} = y^3, \qquad \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{y^6} = y^2 \qquad \text{y}$$

$$\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1} = \frac{y^3-1}{y^2-1} = \frac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y+1)} = \frac{y^2+y+1}{y+1}, \quad y \neq 1$$

Como $x \to 0 \iff y \to 1$, tenemos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1} = \lim_{y\to 1} \frac{y^2+y+1}{y+1} = \frac{1^2+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

PROBLEMA 7. Si n es un número natural, probar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}$$

Solución

Sabemos por el binomio de Newton que:

$$(x+h)^n = x^n + \frac{n}{1!}x^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n$$

Luego, para $h \neq 0$

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h}$$

$$= \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n}{h}$$

$$= \frac{h[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \ldots + nxh^{n-2} + h^{n-1}]}{h}$$

$$= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \ldots + nxh^{n-2} + h^{n-1}$$

En consecuencia,

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \ldots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]$$

$$= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(0) + \ldots + nx(0)^{n-2} + (0)^{n-1}$$

$$= nx^{n-1} + 0 + \ldots + 0 + 0 = nx^{n-1}$$

PROBLEMA 8. **a.** Hallar el número b tal que existe el siguiente límite:

$$\lim_{x\to -2}\frac{3x^2 + bx + b - 7}{x^2 - x - 6}$$

b. Hallar el límite anterior.

Demostración

a. Tenemos que $\lim_{x\to -2}(x^2 - x - 6)$ y $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$.

Para que el límite propuesto exista, el numerador debe tener un factor $(x + 2)$, de modo que obtengamos una indeterminación del tipo 0/0 y que esta pueda eliminarse simplificando el factor común $(x + 2)$. En consecuencias, $x = -2$ debe ser una raíz del numerador. Luego,

$$3(-2)^2 + b(-2) + b - 7 = 0 \Rightarrow b = 5$$

Por lo tanto, para que el límite dado exista se debe cumplir que $b = 5$ y el numerador debe ser

$$3x^2 + bx + b - 7 = 3x^2 + 5x + 5 - 7 = 3x^2 + 5x - 2 = (x + 2)(3x - 1)$$

b. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3x^2 + bx + b - 7}{x^2 + x - 2} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x+2)(3x-1)}{(x+2)(x-1)} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(3x-1)}{(x-1)}$

$$= \frac{(3(-2)-1)}{(-2-1)} = \frac{7}{3}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 2.1

En los problemas del 1 al 35, hallar el límite indicado.

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+6}{x^2-3}$ **2.** $\lim\limits_{y \to 0} \left[\dfrac{y^2-2y+2}{y-4} + 1 \right]$ **3.** $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \dfrac{x^2-2}{x^4+x+1}$

4. $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{\dfrac{2x^2+2}{8x^2+1}}$ **5.** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$ **6.** $\lim\limits_{y \to -5} \dfrac{y^2-25}{y+5}$

7. $\lim\limits_{h \to 2} \dfrac{h-2}{h^2-4}$ **8.** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$ **9.** $\lim\limits_{y \to -3} \dfrac{y^3+27}{y+3}$

10. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2+4x-32}{x-4}$ **11.** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 3}{x+1}$ **12.** $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\frac{1}{x+1} + 1}{x+2}$

13. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$ **14.** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4-16}{x-2}$ **15.** $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{16-x^{4/3}}{4-x^{2/3}}$

16. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x^2-2x}$ **17.** $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x^2-81}{\sqrt{x} - 3}$ **18.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}$

19. $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\sqrt{y+3} - \sqrt{3}}{y}$ **20.** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$ **21.** $\lim\limits_{y \to 5} \dfrac{\sqrt{y-1} - 2}{y-5}$

22. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{1+h^2} - 1}{h}$ **23.** $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ **24.** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$ **26.** $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ **27.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2}$

28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$ **29.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ **30.** $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$

31. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ **32.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ **33.** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$

34. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^3-a^3}{x^2-ax-x+a}$ **35.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{bx+a}}{\sqrt{cx+d}-\sqrt{dx+c}}$

36. Si $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$, probar que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} = -\dfrac{1}{x^2}$.

37. Si $f(x)=\sqrt{x}$, $x>0$, probar que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

En los problemas del 38 al 54, hallar el límite indicado.

38. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x-2}}{2x-1}$ **39.** $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{x-4}{\sqrt{x^2-16}}$ **40.** $\lim\limits_{x\to 2^-} [\![x]\!]$

41. $\lim\limits_{x\to 2^+} [\![x]\!]$ **42.** $\lim\limits_{x\to -2^-} [\![x]\!]$ **43.** $\lim\limits_{x\to -2^+} [\![x]\!]$

44. $\lim\limits_{x\to 5/2} [\![x]\!]$ **45.** $\lim\limits_{x\to 2^-} (x-[\![x]\!])$ **46.** $\lim\limits_{x\to 2^+} (x-[\![x]\!])$

47. $\lim\limits_{x\to 3^-} [\![x^2+x+1]\!]$ **48.** $\lim\limits_{x\to 3^+} [\![x^2+x+1]\!]$ **49.** $\lim\limits_{x\to 3^-} [\![\,[\![x]\!]+[\![4-x]\!]\,]\!]$

50. $\lim\limits_{x\to 3^+} [\![\,[\![x]\!]+[\![4-x]\!]\,]\!]$ **51.** $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{x-4}{|x-4|}$ **52.** $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{4x+1}}{\sqrt{x-1}}$

53. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{4-x^2}+2-x}{\sqrt{4-x^3/2}+\sqrt{2x-x^2}}$ **54.** $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{x\sqrt{x}-a\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}$

55. Si $h(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x\leq 2 \\ x^2+1 & \text{si } x>2 \end{cases}$ hallar **a.** $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x)$ **b.** $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x)$ **c.** $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$

56. Si $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{si } x \le 2 \\ x^2 + 4, & \text{si } x > 2 \end{cases}$ hallar **a.** $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ **b.** $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ **c.** $\lim_{x \to 2} f(x)$

57. Si $f(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{x^3}{2} & \text{si } -2 \le x < 2 \\ x - 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ hallar **a.** $\lim_{x \to -2} f(x)$ **b.** $\lim_{x \to 2} f(x)$

58. Hallar una función f tal que $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 3$ y que no exista $\lim_{x \to 0^+} f(x)$

59. Pruebe, con un contraejemplo, que las proposiciones siguientes son falsas:

a. Existe $\lim_{x \to a} \left[f(x) + g(x) \right] \Rightarrow$ Existe $\lim_{x \to a} f(x)$ y existe $\lim_{x \to a} g(x)$

b. Existe $\lim_{x \to a} \left[f(x)g(x) \right] \Rightarrow$ Existe $\lim_{x \to a} f(x)$ y existe $\lim_{x \to a} g(x)$

60. Probar que: Existe $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = 0$

De esta proposición se obtiene:

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0 \Rightarrow \text{No existe } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

SECCION 2.2

TRATAMIENTO RIGUROSO DE LOS LIMITE

Con la "definición" informal de límite que se presentó en la sección anterior hemos logrado avanzar algunos pasos, pero no puede llevarnos muy lejos. Así, por ejemplo, con esa definición no podemos demostrar las leyes de los límites enunciados en el el teorema 2.2. Otra versión un tanto mejorada, pero aún no rigurosa, es la siguiente:

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ si podemos hacer que los valores de **f(x)** estén arbitrariamente cerca de **L** (tan cerca como queramos) con sólo tomar a **x** suficientemente cerca de **a**, pero no igual a **a**.

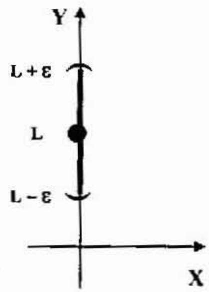
Ahora daremos una interpretación matemática a esta versión. En primer lugar, para hablar de cercanía necesitamos considerar números reales positivos pequeños.

Es tradicional usar las letras griegas ε (épsilon) y δ (delta) para representar tales números.

Con la frase: "que **f(x)** esté arbitrariamente cerca de L (tan cerca como queramos)" queremos decir que si tomamos cualquier número positivo ε, por más pequeño que éste sea, la distancia entre f(x) y L, que es $|f(x) - L|$, es menor que ε. Esto es,

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \text{ ó equivalentemente,}$$

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon.$$

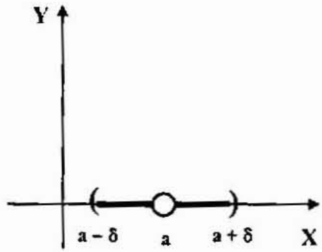


Pero la última desigualdad significa que f(x) está en el intervalo

$$(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

Por otro lado, la frase "con sólo tomar a **x** suficientemente cerca de **a**, pero no igual a a" quiere decir que se puede encontrar otro número positivo δ tal que la distancia entre x y a sea menor que δ, siendo $x \neq a$. Esto es,

$$0 < |x - a| < \delta$$



Esta desigualdad es la conjunción de las dos siguientes:

$$0 < |x - a| \qquad \text{y} \qquad |x - a| < \delta.$$

La primera dice que $x \neq a$ y la segunda, que la distancia entre x y a es menor que δ.

DEFINICION. **(Rigurosa de límite).** Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene al punto **a**, excepto posiblemente el punto **a**.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ **si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que**

$$\mathbf{0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon}$$

Para los aficionados a las expresiones más formales, la definición anterior se escribe así:

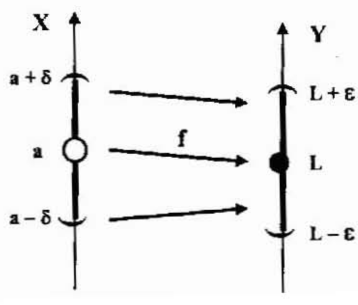
$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

Algunas veces, la implicación

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

se escribe así:

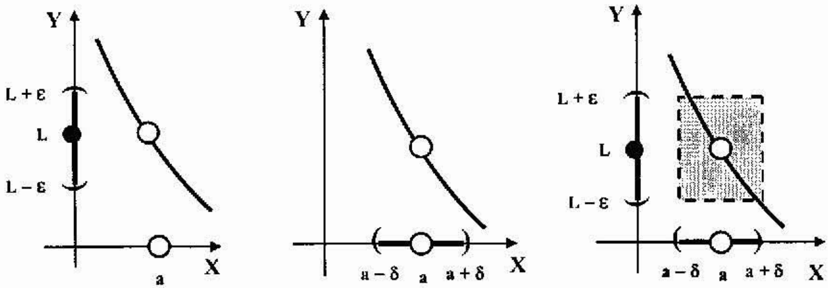
$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta.$$



Una manera gráfica de ver esta definición es la siguiente:

Para cualquier intervalo pequeño $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ alrededor de **L** podemos encontrar otro intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ alrededor de **a** tal que f lleva todos los puntos de $(a - \delta, a + \delta)$, excepto posiblemente a, en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Otra interpretación gráfica de la definición de límite es como sigue:



$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \qquad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

En la última figura vemos que los puntos $(x, f(x))$ de la gráfica de f, con $x \neq a$, que se encuentran entre las rectas verticales $x = a - \delta$ y $x = a + \delta$, también se encuentran entre las rectas horizontales $y = L - \varepsilon$ e $y = L + \varepsilon$.

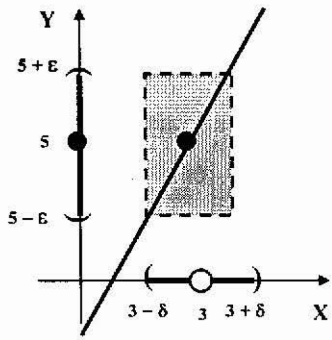
Según esta definición, para probar que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, primero se da el número $\varepsilon > 0$ y se debe elaborar para producir el número $\delta > 0$ que cumpla con:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Podemos pensar este proceso como un juego (juego de la prueba del límite) entre el profesor y el estudiante. El profesor da el ε y el estudiante, para ganar, debe producir el respectivo δ. Empecemos el juego:

EJEMPLO 1. Usando la definición ε–δ, probar que

$$\lim_{x \to 3} (2x - 1) = 5$$



Solución

Dado un $\varepsilon > 0$, debemos hallar un $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |(2x - 1) - 5| < \varepsilon$$

Cálculos previos. (Buscando un valor de δ).

Buscamos δ manipulando la última expresión:

$$|(2x-1)-5| = |2x - 6| = |2(x-3)| = 2|x-3|$$

Luego,

$$|(2x-1)-5| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x-3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{2}$$

La última expresión nos sugiere que debemos tomar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Prueba Formal. (Comprobando que el δ hallado funciona)

Si dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, entonces

$$0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow 2|x-3| < \varepsilon \Rightarrow |(2x-1)-5| < \varepsilon$$

Vemos que con $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ logramos lo que queríamos, que es,

$$0 < |x-3| < \delta \quad \Rightarrow \quad |(2x-1)-5| < \varepsilon.$$

Luego, $\lim\limits_{x \to 3} (2x - 1) = 5$

OBSERVACIONES

1. La segunda parte de la solución del ejemplo anterior, a la que llamamos prueba formal, consiste en recorrer al revés los pasos dados en la primera parte. Esto significa que el verdadero trabajo de la prueba está en los cálculos previos, siendo la segunda parte una simple comprobación. Por esta razón, más adelante, la prueba de un límite la concluiremos al encontrar el δ en la parte de cálculos previos.
2. En el ejemplo anterior hemos encontrado que tomando $\delta = \varepsilon/2$ llegamos a la conclusión que queríamos: $0 < |x-3| < \delta \quad \Rightarrow \quad |(2x-1)-5| < \varepsilon$.
   Se puede tomar también para δ cualquier número positivo menor que $\varepsilon/2$. En efecto, si tomamos $\delta_1 < \delta = \varepsilon/2$ se tiene, por transitividad, que

$$0 < |x-3| < \delta_1 \Rightarrow 0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |(2x-1)-5| < \varepsilon.$$

EJEMPLO 2. Si $a > 0$, usando la definición ε–δ, probar que

$$\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$$

Solución

Para un $\varepsilon > 0$ cualquiera, debemos hallar un $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$$

Cálculos previos. (Buscando un valor de δ). $\dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$

Tenemos que:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \left|\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}\right| = \left|\frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}\right| |x - a|$$

Pero, $\left|\dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{a}}$

De esta desigualdad y la igualdad anterior, obtenemos

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{\sqrt{a}} |x - a|$$

En consecuencia,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon \text{ si } \frac{1}{\sqrt{a}} |x - a| < \varepsilon, \text{ o sea si } |x - a| < \varepsilon\sqrt{a}$$

Por tanto, tomamos $\delta = \varepsilon\sqrt{a}$.

Prueba Formal. (Comprobando que el δ encontrado funciona).

Si dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon\sqrt{a}$, entonces

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |x - a| < \varepsilon\sqrt{a} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$$

Luego, $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

EJEMPLO 3. Usando la definición ε–δ, probar que

$$\lim_{x \to -2} (x^2 + x + 1) = 3$$

Solución

Para un $\varepsilon > 0$ cualquiera, debemos hallar un $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - (-2)| = |x + 2| < \delta \Rightarrow |(x^2 + x + 1) - 3| < \varepsilon$$

Cálculos previos. (Buscando un valor de δ).

Tenemos que:

$$|(x^2+x+1)-3| = |x^2+x-2| = |(x-1)(x+2)| = |x-1|\,|x+2| \qquad \textbf{(1)}$$

Observar que en la última expresión, el factor $|x+2|$ es el que debemos tomar menor que δ. Para hallar a δ, al factor acompañante $|x-1|$ debemos acotarlo por una constante. Es decir, debemos encontrar una constante $M > 0$ tal que

$$|x-1| \leq M.$$

En los ejemplos anteriores esta M la hemos encontrado con relativa facilidad. Así, para el ejemplo anterior, $M = 1/\sqrt{a}$. En el presente caso, no existe un M que acote a $|x-1|$ en todo $\mathbb{R}$, que es el dominio del polinomio $x^2 + x + 1$. Sin embargo, como sólo estamos interesados en los puntos cercanos a -2, conseguimos tal M si nos restringimos a un intervalo centrado en -2. Así, si sólo consideramos los x que están a una distancia de 1 de -2, esto es $|x+2| < 1$, se tiene que:

$$|x+2| < 1 \Rightarrow -1 < x+2 < 1 \Rightarrow -3 < x < -1 \Rightarrow -4 < x-1 < -2$$

$$\Rightarrow 2 < -(x-1) < 4 \Rightarrow 2 < |x-1| < 4$$

O sea que hemos conseguido $M = 4$ tal que

$$|x+2| < 1 \Rightarrow |x-1| < M = 4 \qquad \textbf{(2)}$$

De (1) y (2) obtenemos:

$$|x+2| < 1 \Rightarrow |(x^2+x+1)-3| < 4|x+2|$$

Por tanto,

$$|x+2| < 1 \text{ y } 4|x+2| < \varepsilon \Rightarrow |(x^2+x+1)-3| < \varepsilon$$

Luego,

$$|x+2| < 1 \text{ y } |x+2| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |(x^2+x+1)-3| < \varepsilon \qquad \textbf{(3)}$$

Ahora tenemos dos restricciones sobre $|x+2|$, que son:

$$|x+2| < 1 \quad \text{y} \quad |x+2| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Para asegurarnos que ambas desigualdades se cumplan, escogemos como δ al menor (mínimo) de los números 1 y $\varepsilon/4$. Esta escogencia la abreviamos así:

$$\delta = \text{Mínimo}\{1, \varepsilon/4\}.$$

Prueba Formal. (Comprobando que el δ encontrado funciona).

Si dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \text{Mínimo}\{1, \varepsilon/4\}$, entonces, por (3),

$$0 < |x+2| < \delta \Rightarrow |x+2| < 1 \text{ y } |x+2| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |(x^2+x+1)-3| < \varepsilon$$

Luego, $\lim\limits_{x \to -2} (x^2+x+1) = 3$

ESTRATEGIA PARA GANAR EL JUEGO DE LA PRUEBA DEL LIMITE

Observando los ejemplos anteriores vemos que para probar que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, se siguen 3 pasos:

Paso 1. (Sacar el factor $|x - a|$). De $|f(x) - L|$ sacar como factor a $|x - a|$. Esto es, conseguir una función g(x) tal que

$$|f(x) - L| = |g(x)|\,|x - a|$$

Paso 2. (Acotar $|g(x)|$). Encontrar un número $\beta > 0$ (en la mayoría de los casos, $\beta = 1$) y un número $M > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \beta \;\Rightarrow\; |g(x)| \leq M$$

Paso 3. (Escoger δ). Dado $\varepsilon > 0$, tomar $\delta = \text{Mínimo}\,\{\beta, \varepsilon/M\}$ ya que, por los pasos 1 y 2,

$$0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| = |g(x)|\,|x - a| \leq M\,|x - a| < M\,\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

O sea,

$$0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \varepsilon$$

EJEMPLO 4. Usando la definición ε–δ, probar que

$$\lim_{x \to 1/2} \frac{1}{x} = 2$$

Solución

Para un $\varepsilon > 0$ cualquiera, debemos hallar un $\delta > 0$ tal que

$$0 < \left| x - \frac{1}{2} \right| < \delta \;\Rightarrow\; \left| \frac{1}{x} - 2 \right| < \varepsilon$$

Cálculos previos. (Buscando un valor de δ).

Paso 1. (Sacar el factor $|x - 1/2|$).

$$\left| \frac{1}{x} - 2 \right| = \left| \frac{1 - 2x}{x} \right| = \left| \frac{1}{x} \right| |2x - 1| = \left| \frac{2}{x} \right| \left| x - \frac{1}{2} \right|$$

Esto es,

$$\left| \frac{1}{x} - 2 \right| = |g(x)| \left| x - \frac{1}{2} \right|, \text{ donde } \quad |g(x)| = \left| \frac{2}{x} \right|$$

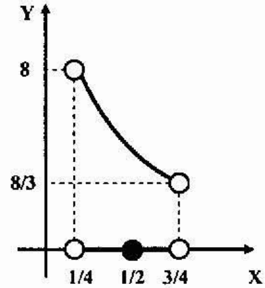
Paso 2. (Acotar $|g(x)|$).

Buscamos un $\beta > 0$ y un $M > 0$ tales que:

$$\left| x-\frac{1}{2} \right| < \beta \Rightarrow \left| \frac{2}{x} \right| \leq M$$

La expresión $|g(x)| = \left| \frac{2}{x} \right|$ crece ilimitadamente si x se acerca a 0. Por tanto, para acotarla, debemos alejar a x de 0. Esto lo logramos tomando:

$$\left| x-\frac{1}{2} \right| < \beta = \frac{1}{4}.$$



En efecto:

$$\left| x-\frac{1}{2} \right| < \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4} < x-\frac{1}{2} < \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{4}+\frac{1}{2} < x < \frac{1}{4}+\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{4}{3} < \frac{1}{x} < 4 \Rightarrow \frac{8}{3} < \frac{2}{x} < 8 \Rightarrow \frac{8}{3} < \left| \frac{2}{x} \right| < 8$$

O sea, si $\beta = \frac{1}{4}$, conseguimos $M = 8$, tales que

$$|x-2| < \beta = \frac{1}{4} \Rightarrow \left| \frac{2}{x} \right| < M = 8$$

Paso 3. (Escoger δ). Tomamos

$$\delta = \text{Mínimo}\ \{\beta, \varepsilon/M\} = \text{Mínimo}\ \left\{\frac{1}{4}, \frac{\varepsilon}{8}\right\}$$

Prueba Formal. (Comprobando que el δ encontrado funciona).

$$0 < \left| x-\frac{1}{2} \right| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - 2 \right| = \left| \frac{2}{x} \right| \left| x-\frac{1}{2} \right| < 8\left(\frac{\varepsilon}{8}\right) = \varepsilon$$

ALGUNOS TEOREMAS SOBRE LIMITES

Lo que resta de esta sección será dedicada a presentar algunos teoremas de importancia para el desarrollo posterior del curso. También pagaremos las deudas contraídas en la sección anterior, como son las leyes de los límites (Teorema 2.2). Comenzamos, parcialmente, con esto último.

EJEMPLO 5. **(Ley de la suma).** Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = G$, probar que

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right] \pm \left[\lim_{x \to a} g(x)\right] = L \pm G$$

Solución

Debemos probar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |(f(x) \pm g(x)) - (L \pm G)| < \varepsilon$$

Como $\lim_{x\to a} f(x) = L$, dado $\varepsilon/2$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

Como $\lim_{x\to a} g(x) = G$, dado $\varepsilon/2$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - G| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

Tomando $\delta = \text{Min}\{\delta_1, \delta_2\}$, usando (1) y (2) se tiene que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |(f(x) \pm g(x)) - (L \pm G)|$$

$$= |(f(x) - L) \pm (g(x) - G)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - G| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

TEOREMA 2.4 **Si $f(x) \leq g(x)$,** $\forall$ x en un intervalo abierto que contiene a **a**, excepto posiblemente en **a**, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$$

Demostración

Ver el problema resuelto 12.

TEOREMA 2.5 **(Ley del emparedado o ley de la arepa rellena)** Si

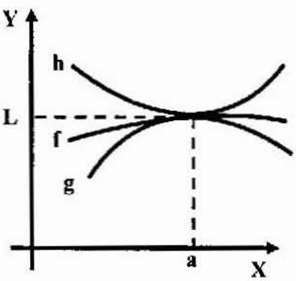
1. $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, $\forall$x en un intervalo abierto que contiene a a, excepto posiblemente en **a**.

2. $\lim_{x\to a} g(x) = L = \lim_{x\to a} h(x)$

entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Demostración



Aplicando el teorema anterior se tiene que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to a} g(x) \leq \lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} h(x) \Rightarrow$$

$$L \leq \lim_{x\to a} f(x) \leq L \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = L$$

EJEMPLO 6. Probar que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{1+x^4} = 0$

Solución

Tenemos que $0 \leq \dfrac{x^2}{1+x^4} \leq x^2$

Si $f(x) = 0$, $g(x) = \dfrac{x^2}{1+x^4}$ y $h(x) = x^2$, entonces $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Además, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$. Luego, por el teorema anterior,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1+x^4} = 0$$

TEOREMA 2.6 **Teorema del cambio de variable**

Si $\mathbf{x = g(t)}$ tal que $\lim\limits_{t \to b} \mathbf{g(t) = a}$ y $\mathbf{g(t) \neq a}$ para todo $\mathbf{t \neq b}$,

entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{t \to b} f(g(t))$$

El cambio de variable es $\mathbf{x = g(t)}$.

Demostración

Ver el problema resuelto 13.

LIMITES UNILATERALES

Terminamos la teoría de esta sección presentando las definiciones rigurosas de los límites unilaterales. Para esto, observemos que

$$0 < |x - a| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x - a < 0 \quad \text{y} \quad 0 < x - a < \delta$$

$$\Leftrightarrow 0 < a - x < \delta \quad \text{y} \quad 0 < x - a < \delta$$

Los x que cumplen con $0 < a - x < \delta$ son los x en el intervalo $(a - \delta, a)$ y, por tanto, están a la izquierda de a. En cambio, los x que cumplen con $0 < x - a < \delta$ son los x que están en el intervalo $(a, a + \delta)$, y por tanto, están a la derecha de a.

DEFINICION. **Límites unilaterales**

1. Sea f definida en un intervalo abierto de la forma (b, a).

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

2. Sea f definida en un intervalo abierto de la forma (a, b)

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\, 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\,)$$

PROBLEMAS RESUELTOS 2.2

PROBLEMA 1. Probar que $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$

Solución

En primer lugar observar que no se puede aplicar la ley de producto debido a que, como lo muestra el ejemplo 6 de la sección anterior, no existe el $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$.

Resolvemos el problema recurriendo a la definición ε–δ.

Dado $\varepsilon > 0$, debemos hallar $\delta > 0$ tal que

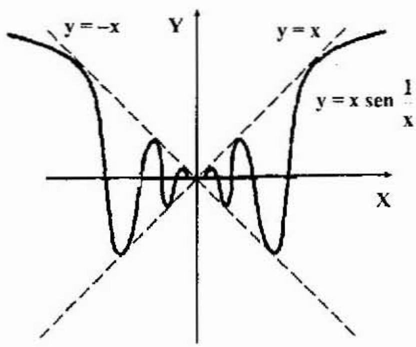
$$0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$$

o sea, $0 < |x| < \delta \Rightarrow \left| x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} \right| < \varepsilon$

Como $\left| \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} \right| \leq 1$, se tiene

$$\left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

Luego, para el ε dado, tomamos $\delta = \varepsilon$.



PROBLEMA 2. Mediante la definición ε–δ, probar que $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{5}{x-2} = 5$

Solución

Debemos probar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow \left| \frac{5}{x-2} - 5 \right| < \varepsilon$$

Cálculos previos. (Buscando un valor de δ).

Paso 1. (Sacar como factor a $|x - 3|$).

$$\left|\frac{5}{x-2}-5\right| = \left|\frac{5-5(x-2)}{x-2}\right| = \left|\frac{5-5(x-2)}{x-2}\right| = \left|\frac{-5x+15}{x-2}\right|$$

$$= \left|\frac{-5(x-3)}{x-2}\right| = \left|\frac{-5}{x-2}\right|\,|x-3| = \frac{5}{|x-2|}|x-3|$$

Esto es,

$$\left|\frac{5}{x-2}-5\right| = \frac{5}{|x-2|}|x-3|$$

Paso 2. $\left(\textbf{Acotamos } \dfrac{5}{|x-2|}\right)$. Hallamos $\beta > 0$ y $K > 0$ tales que

$$|x-3| < \beta \Rightarrow \frac{5}{|x-2|} \leq K$$

Sea $\beta = \frac{1}{2}$. Tenemos que

$$|x-3| < \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x-3 < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}+1 < x-2 < \frac{1}{2}+1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < x-2 < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < |x-2| < \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{1}{|x-2|} < 2 \Rightarrow \frac{10}{3} < \frac{5}{|x-2|} < 10$$

Esto es, $|x-3| < \frac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{5}{|x-2|} < 10$

Antes de continuar observemos que en este caso no podemos tomar $\beta = 1$, ya que de haberlo hecho tendríamos que

$$|x-3| < 1 \Rightarrow -1 < x-3 < 1 \Rightarrow 0 < x-2 < 2$$

Pero esta última desigualdad no puede invertirse debido al 0 que aparece a la izquierda.

Paso 3. (Escogemos δ). Tomamos $\delta = \text{Mínimo}\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{10}\right\}$.

Prueba Formal. (Comprobando que el δ escogido funciona).

$$0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |x-3| < \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad |x-3| < \frac{\varepsilon}{10}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{5}{x-2}-5\right| = \frac{5}{|x-2|}|x-3| < 10\,\frac{\varepsilon}{10} = \varepsilon$$

PROBLEMA 3. Sea c una constante. Probar:

$$|c| < \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0 \ \Rightarrow \ c = 0$$

Solución

Procedemos por reducción al absurdo.

Supongamos que $c \neq 0$. En este caso se tiene que $|c| > 0$. Tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}|c|$, por hipótesis, se tiene que

$$|c| < \varepsilon \Rightarrow |c| < \frac{1}{2}|c| \Rightarrow 2|c| < |c| \Rightarrow 2 < 1$$

Esta contradicción pueda la tesis.

PROBLEMA 4. **(Unicidad del límite).** Probar que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_1 \quad y \quad \lim_{x \to a} f(x) = L_2 \Rightarrow L_1 = L_2$$

Solución

De acuerdo al problema anterior, basta probar que

$$|L_1 - L_2| < \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0, \tag{1}$$

ya que tendríamos:

$$L_1 - L_2 = 0 \Rightarrow L_1 = L_2$$

Probemos (1):

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$, dado $\varepsilon/2$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, dado $\varepsilon/2$ existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

Por otro lado, sumando y restando f(x) y usando la desigualdad triangular:

$$|L_1 - L_2| = |(L_1 - f(x)) + (f(x) - L_2)| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| \tag{4}$$

Ahora, tomando $\delta = \text{Mínimo}\{\delta_1, \delta_2\}$, por (2), (3) y (4), se tiene:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow 0 < |x - a| < \delta_1 \ y \ 0 < |x - a| < \delta_2$$

$$\Rightarrow |L_1 - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

PROBLEMA 5. Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$, probar que existen $\delta > 0$ y $K > 0$ tales que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < K$$

Solución

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, dado $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < 1 \qquad \textbf{(1)}$$

Pero, por la desigualdad triangular,

$$|f(x)| = |(f(x) - L) + L| \leq |f(x) - L| + |L| \qquad \textbf{(2)}$$

Luego, haciendo $K = 1 + |L|$, se tiene de (1) y (2)

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < 1 + |L| = K$$

PROBLEMA 6. **(Ley del producto).** Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = G$, probar

$$\lim_{x \to a} [f(x)\, g(x)] = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]\left[\lim_{x \to a} g(x)\right]$$

Solución

Debemos probar que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)g(x) - LG| < \varepsilon$$

Por el problema anterior, existen $\delta' > 0$ y $K > 0$ tales que

$$0 < |x - a| < \delta' \Rightarrow |f(x)| < K \qquad \textbf{(1)}$$

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, dado $\varepsilon_1 = \varepsilon/2(|G| + 1)$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2(|G| + 1)} \qquad \textbf{(2)}$$

Como $\lim_{x \to a} g(x) = G$, dado $\varepsilon_2 = \varepsilon/2K$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - G| < \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2K}$$

Por otro lado, restando y sumando $f(x)G$ y usando la desigualdad triangular,

$$|f(x)g(x) - LG| = |[f(x)g(x) - f(x)G] + [f(x)G - LG]|$$

$$= |f(x)[g(x) - G] + [f(x) - L]G| \leq |f(x)[g(x) - G]| + |[f(x) - L]G|$$

$$= |f(x)|\,|g(x) - G| + |f(x) - L|\,|G| \qquad \textbf{(4)}$$

Ahora, tomando $\delta = \text{Min}\left\{\delta', \delta_1, \delta_2\right\}$ se tiene que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - LG| &\leq |f(x)||g(x) - G| + |f(x) - L||G| && \text{(por 4)} \\
&\leq K|g(x) - G| + |f(x) - L||G| && \text{(por 1)} \\
&< K\frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2(|G| + 1)}|G| && \text{(por 2 y 3)} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

PROBLEMA 7. Si $\lim_{x \to a} g(x) = G$ y $G \neq 0$, probar que $\exists\ \delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x)| > \frac{1}{2}|G|$$

Solución

Como $\lim_{x \to a} g(x) = G$ y $G \neq 0$, dado $\varepsilon = (1/2)|G|$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - G| < \varepsilon = \frac{1}{2}|G| \qquad \textbf{(1)}$$

Pero,

$$|G| = |G - g(x) + g(x)| \leq |G - g(x)| + |g(x)| \Rightarrow$$

$$|g(x)| \geq |G| - |G - g(x)| \qquad \textbf{(2)}$$

De (1) y (2),

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x)| > |G| - \frac{1}{2}|G| = \frac{1}{2}|G|$$

PROBLEMA 8. Si $\lim_{x \to a} g(x) = G$ y $G \neq 0$, probar que

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{1}{G}$$

Solución

Debemos probar que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{G}\right| < \varepsilon$$

Bien, tenemos que

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{G}\right| = \left|\frac{G-g(x)}{g(x)G}\right| = \left|\frac{1}{g(x)G}\right| \left| g(x) - G \right|$$

$$= \frac{1}{|g(x)|}\frac{1}{|G|}\left| g(x) - G \right| \qquad \textbf{(1)}$$

Por el problema anterior, existe un $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x)| > \frac{1}{2}|G| \Rightarrow \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|G|} \qquad \textbf{(2)}$$

De (1) y (2):

$$0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{G}\right| < \frac{2}{|G|}\frac{1}{|G|}|g(x) - G|$$

$$= \frac{2}{G^2}|g(x) - G| \qquad \textbf{(3)}$$

Por otro lado, como $\lim\limits_{x \to a} g(x) = G$, dado $\varepsilon' = \varepsilon G^2/2$ existe un $\delta_2 > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - G| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon G^2}{2} \qquad \textbf{(4)}$$

Luego, tomando $\delta = \text{Mínimo}\{\delta_1, \delta_2\}$, por (3) y (4) tenemos que

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{G}\right| < \frac{2}{G^2}|g(x) - G| < \frac{2}{G^2}\frac{\varepsilon G^2}{2} = \varepsilon$$

PROBLEMA 9. **(Ley del cociente).** Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = G \neq 0$, probar que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{G}$$

Solución

Esta prueba será corta, debido a que la parte laboriosa del trabajo ya fue hecha.

Por la ley del producto y por el problema anterior

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\left[f(x)\frac{1}{g(x)}\right] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]\left[\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}\right]$$

$$= \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]\left[\frac{1}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}\right] = L\,\frac{1}{G} = \frac{L}{G}$$

PROBLEMA 10. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ y $A<L<B$, probar que $\exists\ \delta>0$ tal que

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow A<f(x)<B$$

Solución

$$A<L<B \Rightarrow B-L>0 \text{ y } L-A>0.$$

Como $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$, dado $\varepsilon=\text{Mínimo}\{B-L,\ L-A\}$, existe un $\delta>0$ tal que

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon<f(x)-L<\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\varepsilon+L<f(x)<\varepsilon+L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(L-A)+L<f(x)<(B-L)+L \qquad (-(L-A)\leq-\varepsilon,\ \varepsilon\leq B-L)$$

$$\Rightarrow A<f(x)<B$$

PROBLEMA 11. **Probar la ley de la raíz:** Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$, entonces

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}=\sqrt[n]{L}\text{, donde } L>0 \text{ si } n \text{ es par.}$$

Solución

Caso 1. $L=0$ y n es impar.

Como $\sqrt[n]{L}=\sqrt[n]{0}=0$, debemos probar que dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow \left|\sqrt[n]{f(x)}\right|<\varepsilon$$

Bien, como $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, para $\varepsilon_1=\varepsilon^n>0$, existe un $\delta>0$ tal que

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon_1=\varepsilon^n \Rightarrow \left|\sqrt[n]{f(x)}\right|<\varepsilon$$

Caso 2. $L>0$ y n cualquiera (par o impar).

Debemos probar que dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow \left|\sqrt[n]{f(x)}-\sqrt[n]{L}\right|<\varepsilon$$

Bien, por el problema anterior, con $A=\frac{1}{2}L$ y $B=\frac{3}{2}L$, existe $\delta_1>0$ tal que

$$0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow \frac{1}{2}L<f(x)<\frac{3}{2}L$$

y, por lo tanto,

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow f(x) > 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Por otro lado, usando la identidad:

$$p - q = \frac{p^n - q^n}{p^{n-1} + p^{n-2}q + \ldots + pq^{n-2} + q^{n-1}}$$

con $p = \sqrt[n]{f(x)}$ y $q = \sqrt[n]{L}$, se tiene

$$\sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{L} = \frac{f(x) - L}{\sqrt[n]{(f(x))^{n-1}} + \sqrt[n]{(f(x))^{n-2}L} + \ldots + \sqrt[n]{f(x)L^{n-2}} + \sqrt[n]{L^{n-1}}} \qquad \textbf{(2)}$$

Cuando $0 < |x - a| < \delta_1$, por (1), $f(x) > 0$. Además $L > 0$. Luego, todas las raíces del denominador de la expresión (2) anterior son positivas. En consecuencia

$$\sqrt[n]{(f(x))^{n-1}} + \sqrt[n]{(f(x))^{n-2}L} + \ldots + \sqrt[n]{f(x)L^{n-2}} + \sqrt[n]{L^{n-1}} \geq \sqrt[n]{L^{n-1}}$$

Luego, cuando $0 < |x - a| < \delta_1$,

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(f(x))^{n-1}} + \sqrt[n]{(f(x))^{n-2}L} + \ldots + \sqrt[n]{f(x)L^{n-2}} + \sqrt[n]{L^{n-1}}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{L^{n-1}}} \qquad \textbf{(3)}$$

De (2) y (3) obtenemos

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow \left| \sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{L} \right| \leq \frac{|f(x) - L|}{\sqrt[n]{L^{n-1}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{L^{n-1}}} |f(x) - L| \qquad \textbf{(4)}$$

Ahora, como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, dado $\varepsilon_1 = \varepsilon \sqrt[n]{L^{n-1}}$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \sqrt[n]{L^{n-1}} \qquad \textbf{(5)}$$

En consecuencia, tomando $\delta = \text{Mínimo } \{\delta_1, \delta_2\}$, de (4) y (5) se tiene que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow$$

$$\left| \sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{L} \right| \leq \frac{1}{\sqrt[n]{L^{n-1}}} |f(x) - L| < \frac{1}{\sqrt[n]{L^{n-1}}} \varepsilon \sqrt[n]{L^{n-1}} = \varepsilon$$

Caso 3. $L < 0$ y n es impar.

Sea $g(x) = -f(x)$. Se tiene que:

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} (-f(x)) = -\lim_{x \to a} f(x) = -L > 0$$

Luego, por el caso 2 y considerando que n es impar, se tiene que

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{-L} \Rightarrow \lim_{x\to a} \sqrt[n]{-f(x)} = \sqrt[n]{-L} \Rightarrow -\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = -\sqrt[n]{L}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

PROBLEMA 12. Probar el teorema 2.4: Si

1. Existen $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$

2. $f(x) \leq g(x)$, $\forall x$ en un intervalo abierto que contiene a **a**, excepto posiblemente en **a**,

entonces $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$

Solución

Paso 1. Probamos que $0 \leq h(x) \Rightarrow 0 \leq \lim_{x\to a} h(x)$

Sea $\lim_{x\to a} h(x) = L$. Queremos probar que $0 \leq L$.

Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que $L < 0$. Luego, $-L > 0$.

Ahora, dado $\varepsilon = \frac{1}{2}(-L)$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon = \frac{1}{2}(-L)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}(-L) < h(x) - L < \frac{1}{2}(-L)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}(-L) + L < h(x) < \frac{1}{2}(-L) + L$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}L < h(x) < \frac{1}{2}L \Rightarrow h(x) < 0. \qquad \left(\frac{1}{2}L < 0\right)$$

Este último resultado contradice la hipótesis: $0 \leq h(x)$.

Paso 2. Probamos que $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow 0 \leq g(x) - f(x) \Rightarrow 0 \leq \lim_{x\to a} [g(x) - f(x)] \qquad \text{(paso 1)}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{x\to a} g(x) - \lim_{x\to a} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$$

PROBLEMA 13. Probar el teorema del **cambio de variable:**

Si $x = g(t)$ es tal que $\lim_{t\to b} g(t) = a$ y $g(t) \neq a$ para todo $t \neq b$,

entonces $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{t\to b} f(g(t))$

Solución

Sea $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$. Debemos probar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |t - b| < \delta \Rightarrow |f(g(t)) - L| < \varepsilon$$

Bien, como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \qquad (1)$$

Por otro lado, como $\lim\limits_{t\to b} g(t) = a$, dado $\varepsilon_1 = \delta_1 > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |t - b| < \delta \Rightarrow |g(t) - a| < \varepsilon_1 = \delta_1 \qquad (2)$$

Además, como $g(t) \neq a$ para todo $t \neq b$, a la expresión (2) la podemos escribir así:

$$0 < |t - b| < \delta \Rightarrow 0 < |g(t) - a| < \varepsilon_1 = \delta_1 \qquad (3)$$

Luego, de (3) y (1) por transitividad y considerando que $x = g(t)$, se tiene

$$0 < |t - b| < \delta \Rightarrow |f(g(t)) - L| < \varepsilon$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 2.2

En los problemas del 1 al 14 probar, mediante ε-δ, el límite indicado.

1. $\lim\limits_{x\to 2} (4x-3) = 5$ **2.** $\lim\limits_{t\to 4} (9-3t) = -3$ **3.** $\lim\limits_{x\to -2} \left(\frac{x}{5} + 1\right) = \frac{3}{5}$

4. $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$ **5.** $\lim\limits_{x\to -2} x^3 = -8$ **6.** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$

7. $\lim\limits_{x\to 1} (x^2 + 2x - 6) = -3$ **8.** $\lim\limits_{x\to -1} (2x^2 + 3x - 4) = -5$ **9.** $\lim\limits_{x\to 3} \frac{4}{x-1} = 2$

10. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{6}{4-x} = -6$ **11.** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x}{5-2x} = \frac{2}{3}$ **12.** $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x+5} = 3$

13. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{|x|+1} = 1$ **14.** $\lim\limits_{x\to 1/3} \frac{1+x}{x} = 4$

En los problemas del 15 al 19 probar, mediante ε–δ, el límite indicado.

15. $\lim\limits_{x\to a} c = c$, c es una constante. **16.** $\lim\limits_{x\to a} x = a$

17. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$.

Sugerencia: $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1})$

18. $\lim_{x\to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$. Sugerencia: seguir el esquema del ejemplo 4 tomando $\beta = |a|/2$

19. Probar: $\lim_{x\to a} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$.

Sugerencia: $\big|\,|f(x)| - |L|\,\big| \leq |f(x) - L|$

En los problemas del 20 al 23, mediante teorema del emparedado, probar que:

20. $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$

21. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|+1} = 1$

22. $\lim_{x\to 0} x\left[2 - \sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] = 0$

23. $\lim_{x\to 0} \frac{|x+1| - |x-1|}{\sqrt{3x^2+1}} = 0$

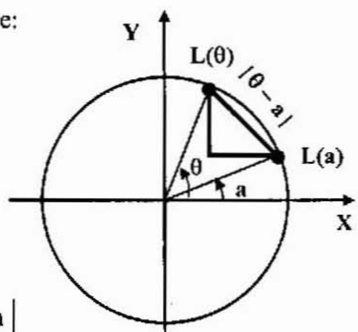
SECCION 2.3
LIMITES TRIGONOMETRICOS

TEOREMA 2.7. $\forall\, a \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\lim_{\theta\to a} \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} a \qquad \lim_{\theta\to a} \cos\theta = \cos a$$

Demostración

Debemos probar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:



(1) $0 < |\theta - a| < \delta \Rightarrow |\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} a| < \varepsilon$

y

(2) $0 < |\theta - a| < \delta \Rightarrow |\cos\theta - \cos a| < \varepsilon$

Observemos el triángulo rectángulo de la figura. Los extremos de la hipotenusa son los puntos:

$L(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ y $L(a) = (\cos a, \operatorname{sen} a)$.

La longitud del cateto vertical es $|\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} a|$

La longitud del cateto horizontal es $|\cos\theta - \cos a|$

La longitud de la hipotenusa es $d(L(\theta), L(a))$, la distancia de L (0) a $L(\theta)$.

La longitud del arco entre L(a) y L(θ) es $|\theta - a|$.

Es claro que la longitud de la hipotenusa es menor que el arco entre L(a) y L(θ).

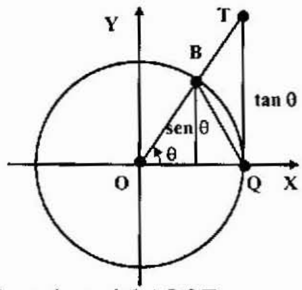
Esto es, $d(L(\theta), L(a)) < |\theta - a|$.

Como la longitud de cada cateto es menor que longitud de la hipotenusa, por transitividad se tiene que

$$|\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} a| < |\theta - a| \quad \text{y} \quad |\cos\theta - \cos a| < |\theta - a|.$$

Luego, si para el $\varepsilon > 0$ dado, tomamos $\delta = \varepsilon$, entonces (1) y (2) quedan satisfechas.

TEOREMA 2.8 $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$



Demostración

Paso 1. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$

Sea $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ y, por tanto, $\operatorname{sen}\theta > 0$

Observando la figura se ve que

Area del ΔOQB < Area del sector circular OQB < Area del ΔOQT.

Pero

$$\text{Area del } \Delta OQB = \frac{(1)\operatorname{sen}\theta}{2} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{2}$$

$$\text{Area del sector circular } OQB = \frac{1}{2}(\theta)(1)^2 = \frac{\theta}{2}$$

$$\text{Area del } \Delta OQT = \frac{1}{2}(1)\tan\theta = \frac{\tan\theta}{2}$$

Luego,

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\tan\theta}{2}, \Rightarrow \operatorname{sen}\theta < \theta < \tan\theta$$

Dividimos entre $\operatorname{sen}\theta$. (recordar que $\operatorname{sen}\theta > 0$).

$$1 < \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} < \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \cos\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} < 1 \qquad \text{(invirtiendo fracciones)}$$

Pero $\displaystyle\lim_{\theta\to 0^+} 1 = 1$ y $\displaystyle\lim_{\theta\to 0^+} \cos\theta = \cos 0 = 1$ (Teo. 2.7)

Luego, por el teorema del emparedado, $\displaystyle\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$

Sea $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$, y por tanto, $\operatorname{sen}\theta < 0$.

Si $\alpha = -\theta$, entonces $\alpha > 0$ y $\alpha \to 0^+ \Leftrightarrow \theta \to 0^-$. Luego,

$$\lim_{\theta\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0^-} \frac{-\operatorname{sen}\theta}{-\theta} = \lim_{\theta\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(-\theta)}{-\theta} = \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = 1$$

EJEMPLO 1. Probar que:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{x} = a$ 2. $\lim_{x\to 0} x\cot ax = \frac{1}{a},\ a \neq 0$

Solución

Si $\theta = ax$, entonces $x \to 0 \Leftrightarrow \theta \to 0$. Luego,

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{x} = \lim_{x\to 0} a\frac{\tan ax}{ax} = a\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{ax}\frac{1}{\cos ax} = a\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\frac{1}{\cos\theta}$$
$$= a\left[\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\right]\left[\lim_{\theta\to 0} \frac{1}{\cos\theta}\right] = a[1][1/1] = a$$

2. $$\lim_{x\to 0} x\cot ax = \lim_{x\to 0} x\frac{\cos ax}{\operatorname{sen} ax} = \frac{1}{a}\lim_{x\to 0} \frac{ax}{\operatorname{sen} ax}\cos ax$$
$$= \frac{1}{a}\lim_{\theta\to 0} \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta}\cos\theta = \frac{1}{a}\left[\lim_{\theta\to 0} \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right]\left[\lim_{\theta\to 0} \cos\theta\right]$$
$$= \frac{1}{a}[1][1] = \frac{1}{a}$$

TEOREMA 2.9 $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0.$

Demostración

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1-\cos x}{x}\,\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}$$
$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$$

Luego,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \left[\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right]\left[\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right] = [1]\,[0/2] = 0.$$

EJEMPLO 2. Hallar $\lim\limits_{x\to\pi/6} \dfrac{\operatorname{sen}(x-\pi/6)}{\cos x-\sqrt{3}/2}$

Solución

Sea $y = x - \dfrac{\pi}{6}$. Se tiene que: $x = y + \dfrac{\pi}{6}$, $x \to \dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow y \to 0$ y

$$\lim_{x\to\pi/6} \frac{\operatorname{sen}(x-\pi/6)}{\cos x-\sqrt{3}/2} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{\cos(y+\pi/6)-\sqrt{3}/2}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{\left(\sqrt{3}/2\right)\cos y - (1/2)\operatorname{sen} y - \sqrt{3}/2}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{\left(\sqrt{3}/2\right)\left[\cos y - 1\right] - (1/2)\operatorname{sen} y}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} y}{y}}{\left(\sqrt{3}/2\right)\dfrac{\cos y - 1}{y} - (1/2)\dfrac{\operatorname{sen} y}{y}}$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{3}/2\right)(0) - (1/2)(1)} = -2$$

PROBLEMAS RESUELTOS 2.3

PROBLEMA 1. Hallar $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\tan\dfrac{\pi}{2}x$

Solución

Si $t = x - 1$, entonces $x = t + 1$ y $t \to 0 \Leftrightarrow x \to 1$. Luego,

$$(1-x)\tan\frac{\pi}{2}x = -t\tan\frac{\pi}{2}(t+1) = -t\tan\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= t\cot\left(\frac{\pi}{2}t\right) \qquad \text{(Id. trig. 19)}$$

$$= 1/(\pi/2) = 2/\pi \qquad \text{(ejemplo 1, parte 2)}$$

PROBLEMA 2. Hallar $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$

Solución

Se tiene que:

$$\frac{\cos mx - \cos nx}{x^2} = \frac{(\cos mx - \cos nx)(\cos mx + \cos nx)}{x^2(\cos mx + \cos nx)}$$

$$= \frac{\cos^2 mx - \cos^2 nx}{x^2(\cos mx + \cos nx)} = \frac{[1 - \operatorname{sen}^2 mx] - [1 - \operatorname{sen}^2 nx]}{x^2(\cos mx + \cos nx)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 nx - \operatorname{sen}^2 mx}{x^2(\cos mx + \cos nx)} = \left[\frac{\operatorname{sen}^2 nx}{x^2} - \frac{\operatorname{sen}^2 mx}{x^2}\right]\frac{1}{\cos mx + \cos nx}$$

$$= \left[n^2\left(\frac{\operatorname{sen} nx}{nx}\right)^2 - m^2\left(\frac{\operatorname{sen} mx}{mx}\right)^2\right]\frac{1}{\cos mx + \cos nx}$$

Como,

$$\lim_{x \to 0}\left[n^2\left(\frac{\operatorname{sen} nx}{nx}\right)^2 - m^2\left(\frac{\operatorname{sen} mx}{mx}\right)^2\right] = [n^2(1)^2 - m^2(1)^2] = n^2 - m^2 \quad \text{y}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos mx + \cos nx} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

se tiene que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2} = \frac{n^2 - m^2}{2}$$

PROBLEMA 3. Hallar $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{a \operatorname{sen} x - x \operatorname{sen} a}{a \cos x - x \cos a}$

Solución

Si $x = y + a$, entonces $y = x - a$ y $x \to a \Leftrightarrow y \to 0$. Luego,

$$\frac{a \operatorname{sen} x - x \operatorname{sen} a}{a \cos x - x \cos a} = \frac{a \operatorname{sen}(y+a) - (y+a)\operatorname{sen} a}{a \cos(y+a) - (y+a)\cos a}$$

$$= \frac{(a \operatorname{sen} y \cos a + a \cos y \operatorname{sen} a) - (y \operatorname{sen} a + a \operatorname{sen} a)}{(a \cos y \cos a - a \operatorname{sen} y \operatorname{sen} a) - (y \cos a + a \cos a)}$$

$$= \frac{(a \operatorname{sen} y \cos a - y \operatorname{sen} a) + (a \cos y \operatorname{sen} a - a \operatorname{sen} a)}{(a \cos y \cos a - a \cos a) - (a \operatorname{sen} y \operatorname{sen} a + y \cos a)}$$

$$= \frac{(a \operatorname{sen} y \cos a - y \operatorname{sen} a) + (a \operatorname{sen} a)(\cos y - 1)}{(a \cos a)(\cos y - 1) - (a \operatorname{sen} y \operatorname{sen} a + y \cos a)}$$

$$= \frac{\dfrac{(a \operatorname{sen} y \cos a - y \operatorname{sen} a)}{y} + \dfrac{(a \operatorname{sen} a)(\cos y - 1)}{y}}{\dfrac{(a \cos a)(\cos y - 1)}{y} - \dfrac{(a \operatorname{sen} y \operatorname{sen} a + y \cos a)}{y}}$$

$$= \frac{(a \dfrac{\operatorname{sen} y}{y} \cos a - \operatorname{sen} a) + (a \operatorname{sen} a) \dfrac{(\cos y - 1)}{y}}{(a \cos a) \dfrac{(\cos y - 1)}{y} - (a \dfrac{\operatorname{sen} y}{y} \operatorname{sen} a + \cos a)}$$

En esta última expresión, tomando el límite cuando y tiende a 0, se tiene

$$\frac{(a (1) \cos a - \operatorname{sen} a) + (a \operatorname{sen} a)(0)}{(a \cos a)(0) - (a(1) \operatorname{sen} a + \cos a)} = \frac{a \cos a - \operatorname{sen} a}{-a \operatorname{sen} a - \cos a} = \frac{\operatorname{sen} a - a \cos a}{\cos a + a \operatorname{sen} a}$$

Por tanto,

$$\lim_{x \to a} \frac{a \operatorname{sen} x - x \operatorname{sen} a}{a \cos x - x \cos a} = \frac{\operatorname{sen} a - a \cos a}{\cos a + a \operatorname{sen} a}$$

PROBLEMA 4. Hallar $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\operatorname{sen}^2 - \operatorname{sen}^2 a}{x^2 - a^2}$

Solución

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 a}{x^2 - a^2} = \frac{[\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} a][\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a]}{[x - a][x + a]}$$

$$= \frac{[2 \operatorname{sen} (\frac{x+a}{2}) \cos (\frac{x-a}{2})]\,[2 \cos (\frac{x+a}{2}) \operatorname{sen} (\frac{x-a}{2})]}{[x-a][x+a]} \quad \text{(Ident. 40 y 41)}$$

Si $y = \dfrac{x-a}{2}$, entonces $x - a = 2y$, $x + a = 2(y + a)$, $\dfrac{x+a}{2} = y + a$

Luego,

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 a}{x^2 - a^2} = \frac{[2\operatorname{sen}(y + a) \cos(y)][2\cos(y + a) \operatorname{sen}(y)]}{[2y][2(y + a)]}$$

$$= \left[\frac{\operatorname{sen}(y + a) \cos y}{y + a}\right]\left[\cos(y + a) \frac{\operatorname{sen} y}{y}\right]$$

Pero, $x \to a \Leftrightarrow y \to 0$. Luego,

$$\lim_{x \to a} \frac{\operatorname{sen}^2 - \operatorname{sen}^2 a}{x^2 - a^2} = \lim_{y \to 0} \left[\frac{\operatorname{sen}(y+a)\cos y}{y+a}\right]\left[\cos(y+a)\frac{\operatorname{sen} y}{y}\right]$$

$$= \frac{\operatorname{sen} a \cos a}{a} = \frac{\operatorname{sen} 2a}{2a}$$

PROBLEMA 5. Hallar $\lim_{\theta \to \pi/3} \dfrac{2\cos^2\theta - 5\cos\theta + 2}{2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2}$.

Solución

Si $y = \cos\theta$, entonces $\theta \to \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow y \to \frac{1}{2}$. Luego,

$$\lim_{\theta \to \pi/3} \frac{2\cos^2\theta - 5\cos\theta + 2}{2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2} = \lim_{y \to 1/2} \frac{2y^2 - 5y + 2}{2y^2 + 3y - 2}$$

$$= \lim_{y \to 1/2} \frac{(2y-1)(y-2)}{(2y-1)(y+2)} = \lim_{y \to 1/2} \frac{y-2}{y+2} = \frac{1/2 - 2}{1/2 + 2} = -\frac{3}{5}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 2.3

En los problemas del 1 al 23 hallar el límite indicado.

1. $\lim_{x \to \pi} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x - \pi}$

2. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x}$

3. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{4x^2}$

4. $\lim_{x \to \pi/4} [\tan 2x - \sec 2x]$

5. $\lim_{t \to 0} \dfrac{1 - \cos t}{\operatorname{sen} t}$

6. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2(x/2)}{\operatorname{sen} x}$

7. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{sen}^2(x-1)}{x^2 - 2x + 1}$

8. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} 2x}{x - \operatorname{sen} 3x}$

9. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

10. $\lim_{x \to \pi/3} \dfrac{1 - 2\cos x}{\pi - 3x}$

11. $\lim_{x \to \pi/4} \dfrac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos 2x}$

12. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\operatorname{sen}^2 x}$

13. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\cos \frac{\pi}{2} x}{1 - \sqrt{x}}$

14. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x \sqrt{\cos x}}{x^2}$

15. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{(x - \pi/2)^2}$

16. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{(1 - \cos\theta)^2}{\tan^5\theta - \tan^3\theta}$

17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \operatorname{sen}x} - \sqrt{1 - \operatorname{sen}x}}{\tan x}$

18. $\lim\limits_{\theta \to a} \dfrac{\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen}(\theta/2) - \operatorname{sen}(a/2)}$

19. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(a+x) - \cos(a-x)}{x}$

20. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(a + x) - \operatorname{sen}(a - x)}{\tan(a + x) - \tan(a - x)}$

21. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x + 1}{2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1}$

22. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{2\tan^2 x - \tan x - 1}{2\tan^2 x - 3\tan x + 1}$

SECCION 2.4

CONTINUIDAD

Geómetricamente, la continuidad es fácil de explicar. Una función es continua si su gráfico no tiene saltos o interrupciones. En otras palabras, si su gráfico puede ser trazado sin levantar el lápiz del papel.

DEFINICION. Una función f es **continua en un punto a** si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

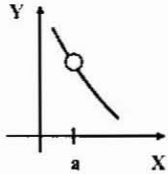
Esta definición es equivalente al cumplimiento de las 3 condiciones siguientes:

1. f está definida en a ($\exists f(a)$) **2.** $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$ **3.** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

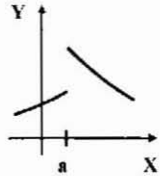
La definición de continuidad en **a**, al hablarnos de $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, implícitamente exige que f debe estar definida en un intervalo abierto que contenga a **a**.

DEFINICION. Diremos que **f es discontinua** en el punto **a** o que **a** es un **punto de discontinuidad de f** si f no es continua en **a.** Esto equivale a decir que al menos una de estas tres condiciones exigidas en la definición no se cumple. Esto es:

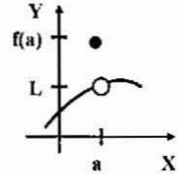
1. f no está definida en a



2. No existe límite en a



3. $\mathbf{\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)}$



Si f es discontinua en a y existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, diremos que la **discontinuidad en a es removible.** Se llama así debido a que se puede redefinir a f en a de modo que la discontinuidad es eliminada. Es claro que la redefinición debe ser del modo siguiente:

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

La **discontinuidad es esencial** si no existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. En este caso no hay modo de salvar la discontinuidad.

La continuidad se expresa también en términos de $\varepsilon-\delta$, como sigue (ver el problema resuelto 3):

$$\text{f es continua en a} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists\, \delta > 0)\big(\,|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\,\big)$$

EJEMPLO 1. **a.** El teorema 2.3 nos dice que toda función racional (en particular, todo polinomio) es continua en cualquier punto a de su dominio.

b. El teorema 2.7 nos dice que las funciones seno y coseno son continuas en cualquier punto a de $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 2. Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}, & \text{si } x \neq 4 \\ 6, & \text{si } x = 4 \end{cases}$

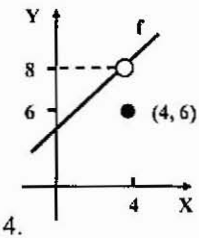
1. Probar que f tiene una discontinuidad removible en $a = 4$.
2. Redefinir f para remover la discontinuidad.
3. Probar que f es continua en cualquier punto $a \neq 4$.

Solución

1. La primera condición de continuidad sí se cumple, ya que f está definida en 4. En efecto: $f(4) = 6$.

La segunda condición también se cumple. En efecto,

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \to 4} (x+4) = 8$$



Pero, la tercera condición no se cumple, ya que

$$\lim_{x \to 4} f(x) = 8 \neq 6 = f(4)$$

En consecuencia, f tiene una discontinuidad removible en $a = 4$.

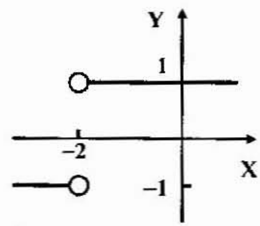
2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}, & \text{si } x \neq 4 \\ 8, & \text{si } x = 4 \end{cases}$

3. Para los $x \neq 4$, f es la función racional $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$, cuyo denominador no se anula en ningún $x \neq 4$. Luego, por el ejemplo anterior, f es continua en cualquier punto $x \neq 4$.

EJEMPLO 3. Probar que la función $g(x) = \dfrac{x+2}{|x+2|}$ tiene una discontinuidad esencial en -2.

Solución

Calculemos los límites unilaterales.



$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x + 2}{|x + 2|} = \lim_{x \to -2^+} \frac{x+2}{x+2} = \lim_{x \to -2^+} (1) = 1$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x + 2}{|x + 2|} = \lim_{x \to -2^-} \frac{x+2}{-(x+2)} = \lim_{x \to -2^-} (-1) = -1$$

Como estos límites unilaterales son distintos, concluimos que g no tiene límite en el punto -2. En consecuencia g tiene una discontinuidad esencial en este punto.

CONTINUIDAD LATERAL

DEFINICION. 1. Una función f es **continua por la derecha en el punto a** si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

2. Una función f es **continua por la izquierda en un punto a** si

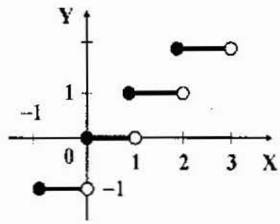
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Es evidente que:

$$\textbf{f es continua en a} \Leftrightarrow \begin{cases} \textbf{f es continua por la izquierda en a} \\ \textbf{y} \\ \textbf{f es continua por la derecha en a} \end{cases}$$

EJEMPLO 4. La función parte entera $f(x) = [\![x]\!]$ es continua por la derecha, pero discontinua por la izquierda en cualquier entero n.

En efecto, tenemos que:



$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} [\![x]\!] = n = f(n)$$

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} [\![x]\!] = n - 1 \neq f(n)$$

EJEMPLO 5. Sea la función del ejemplo 3: $g(x) = \dfrac{x+2}{|x+2|}$

1. Redefinir g para que ésta sea continua por la derecha en a = −2

2. Redefinir g para que ésta sea continua por la izquierda en a = −2

Solución

1. $g_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{|x+2|}, & \text{si } x \neq -2 \\ 1, & \text{si } x = -2 \end{cases}$ **2.** $g_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{|x+2|}, & \text{si } x \neq -2 \\ -1, & \text{si } x = -2 \end{cases}$

EJEMPLO 6. Probar que la función valor absoluto $f(x) = |x|$ es continua en cualquier punto de $\mathbb{R}$.

Solución

Sea a un punto cualquiera de $\mathbb{R}$.

Caso 1. a = 0 : $\lim_{x \to 0} |x| = 0 = |0|$, ya que:

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0 = |0| \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = -0 = 0 = |0|$$

Caso 2. **a ≠ 0:** $f(x) = |x|$ es continua en a debido a que, cerca de a, la función f coincide con el polinomios $p(x) = x$, si $a > 0$; o con $q(x) = -x$, si $a < 0$.

CONTINUIDAD EN INTERVALOS

DEFINICION. **1.** Una función f es **continua en el intervalo abierto (a, b)** si f es continua en todo punto de este intervalo.

2. Una función f es **continua en el intervalo [a, b)** si f es continua en el intervalo abierto (a, b) y f es continua por la derecha en **a**.

3. Una función f es **continua en el intervalo $(a, b]$** si f es continua en el intervalo abierto (a, b) y f es continua por la izquierda en **b**.

4. Una función f es **continua en el intervalo cerrado $[a, b]$** si f es continua en el intervalo abierto (a, b) y f es continua a la derecha en **a** y continua a la izquierda en **b**.

EJEMPLO 7. **a.** Una función polinomial y las funciones seno y coseno son continuas en el intervalo abierto $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$; o sea, son continuas en su dominio.

b. La función parte entera $f(x) = [\![x]\!]$ es continua en todos los intervalos de la forma $[n, n+1)$, donde n es un entero.

EJEMPLO 8. Probar que la función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en su dominio; o sea, es continua en el intervalo $[0, +\infty)$.

Solución

Debemos probar que f es continua en todo punto a del intervalo abierto $(0, +\infty)$ y que f es continua por la derecha en $a = 0$.

Bien, si $a > 0$, por la ley de la raíz, $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{\lim\limits_{x \to a} x} = \sqrt{a}$.

Esto es, la función $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en a.

Por otro lado, si $a = 0$, entonces $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{\lim\limits_{x \to 0^+} x} = \sqrt{0} = 0$

Esto es, la función $f(x) = \sqrt{x}$ es continua por la derecha en 0.

CONTINUIDAD Y OPERACIONES CON FUNCIONES

Las leyes de los límites, enunciadas en el teorema 2.2, nos dicen que el proceso de tomar límite respeta las operaciones algebraicas. Esta propiedad valiosa se traslada a la continuidad y se obtiene que ésta también respete las operaciones algebraicas. Gracias a este resultado podemos construir complicadas funciones continuas a partir de funciones simples.

TEOREMA 2.10 Sea **c** una constante y sean **f** y **g** dos funciones continuas en el punto **a**. Entonces las siguientes funciones también son continuas en **a**.

1. $f \pm g$ **2.** cf **3.** fg **4.** $\dfrac{f}{g}$, si $g(a) \neq 0$

Demostración

Estos resultados son consecuencias inmediatas de las leyes de los límites correspondientes. Así, (1) es consecuencia de la ley de la suma. En efecto:

Por ser f y g continuas en a se tiene: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$.

Luego,

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right] \pm \left[\lim_{x \to a} g(x)\right] = f(a) \pm g(a).$$

Esto nos dice que $f \pm g$ es continua en a.

EJEMPLO 9. Probar que las funciones trigonométricas son continuas en su dominio.

Solución

Por el ejemplo 1 ya sabemos que el seno y el coseno tienen la propiedad indicada. Veamos las otras.

Como $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ es el cociente de dos funciones continuas, entonces, por la parte 4 del teorema anterior, la función $y = \tan x$ es continua en todos los puntos x tales que $\cos x \neq 0$, que son precisamente los puntos del dominio de $y = \tan x$.

En forma análoga se procede con $y = \cot x$, $y = \sec x$ e $y = \operatorname{cosec} x$.

El siguiente resultado es consecuencia de la ley de la raíz y su demostración es similar a la dada en el ejemplo 8.

TEOREMA 2.11

1. Si n es **par**, entonces la función $f(x) = \sqrt[n]{x}$ es continua en el intervalo $[0, +\infty)$; o sea, es continua en todo su dominio.
2. Si n es **impar**, entonces la función $f(x) = \sqrt[n]{x}$ es continua en $\mathbb{R}$; o sea, es continua en todo su dominio.

CATALOGO DE FUNCIONES CONTINUAS

En el capítulo anterior, para definir a^x con x irracional, nos guió la idea de conseguir que la función exponencial $f(x) = a^x$ sea continua en todo su dominio, que es $\mathbb{R}$. Por tal razón, agregamos a nuestra lista de funciones continuas a la función exponencial.

Por otro lado, también afirmamos que **la función inversa de una función continua es continua.** Esta afirmación la podemos justificar intuitivamente, del modo siguiente. La gráfica de una función continua f no tiene saltos ni interrupciones. La gráfica de la inversa f^{-1} se obtiene reflejando la gráfica de f en la recta diagonal y = x. En consecuencia, la gráfica de f^{-1} tampoco tiene saltos o interrupciones. Esto nos dice que f^{-1} es continua. Este resultado es importante, por lo que lo hacemos resaltar presentándolo en el siguiente teorema, cuya demostración formal la omitimos.

TEOREMA 2.12 Sea f una función definida en un intervalo I, donde f es inyectiva. Si f es continua en I, entonces la función inversa f^{-1} es continua en f(I).

El resultado anterior nos permite concluir que la función logaritmo $y = \log_a x$ es continua, por ser inversa de la función exponencial, $y = a^x$. En forma análoga, concluimos que las funciones trigonométricas inversas son continuas.

A continuación presentamos un pequeño, pero importante, catálogo de funciones continuas.

Las siguientes funciones son continuas en su dominio:

1. Polinomios **2. Funciones racionales**

3. Funciones radicales **4. Funciones trigonométricas**

5. Funciones trigonométricas inversas **5. Funciones exponenciales**

6. Funciones logarítmicas **7. Función valor absoluto**

El siguiente teorema es un caso particular del teorema de cambio de variable o teorema del límite de una composición de funciones. La demostración la presentamos en el problema resuelto 4.

TEOREMA 2.13 **(Teorema de sustitución).** Si $\lim\limits_{t \to b} g(t) = L$ y f es continua en L, entonces

$$\boxed{\lim_{t \to b} f(g(t)) = f(L) = f\left(\lim_{t \to b} g(t)\right)}$$

EJEMPLO 10. **a.** Si $\lim\limits_{t \to b} g(t) = L$, probar que $\lim\limits_{t \to b} e^{g(t)} = e^L$

b. Hallar $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}$ **c.** Hallar $\lim\limits_{x \to 0} \ln\left(\dfrac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}\right)$

Solución

a. Sigue inmediatamente del teorema anterior, tomando en cuenta que la función exponencial $f(x) = e^x$ es continua.

b. Este límite es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{e^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x-1} = \lim_{x\to 0} (e^x+1)$$

$$= \lim_{x\to 0} e^x + 1 = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2$$

c. Tomando en cuenta que la función logarítmica $f(x) = \ln x$ es continua, se tiene:

$$\lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x-1}\right) = \ln\left(\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{e^x-1}\right) = \ln(2) = \ln 2$$

Una consecuencia del teorema anterior, que es inmediata pero de importancia capital, es el siguiente resultado, que dice que la continuidad también respeta la operación de composición de funciones.

TEOREMA 2.14 Si **g** es continua en **b** y f es continua en **g(b)**, entonces la función compuesta **f o g** es continua en **b**.

Demostración

Por ser g continua en b se tiene que $\lim_{t\to b} g(t) = g(b)$

Reemplazando este límite en el teorema anterior obtenemos

$$\lim_{t\to b} f(g(t)) = f(g(b)) = (f \circ g)(b).$$

Esto nos dice que $f \circ g$ es continua en b.

EJEMPLO 11. Probar que la función $h(x) = |\ln x|$ es continua en $(0, +\infty)$.

Solución

Si $g(x) = \ln x$ y $f(x) = |x|$, tenemos que $h = f \circ g$. En efecto,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\ln x) = |\ln x| = h(x).$$

La función $g(x) = \ln x$ es una función continua en $(0, +\infty)$ y que la función valor absoluto $f(x) = |x|$ es continua en $\mathbb{R}$. Por tanto, por el teorema anterior, $h = f \circ g$ también es continua en $(0, +\infty)$.

Terminamos esta sección enunciando un teorema que proporciona una propiedad importante de las funciones continuas. Omitimos la demostración por estar fuera de alcance del presente texto.

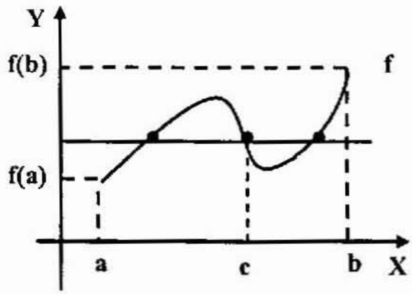
TEOREMA 2.15 **(Teorema del valor intermedio).** Si f es una función continua en un intervalo cerrado [a, b] y si K es un número que está estrictamente entre f(a) y f(b), o sea

$$f(a) < K < f(b) \quad \text{ó} \quad f(b) < K < f(a),$$

entonces **existe un número c en (a, b)** tal que **f(c) = K.**

Gráficamente, este teorema nos dice que cualquier recta horizontal $y = K$ que está comprendida entre las rectas horizontales $y = f(a)$ e $y = f(b)$ debe cortar al gráfico de f en, por lo menos, un punto (c, f(c)), donde $a < c < b$.

En el siguiente ejemplo usamos este teorema para localizar las raíces de una ecuación.



EJEMPLO 12. Dada la ecuación $x^3 + 3x - 5 = 0$

a. Probar que esta ecuación tiene una raíz entre 1 y 2.

b. Hallar una aproximación de esta raíz con un error menor que 0,1.

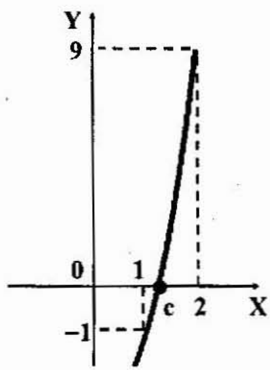
Solución

a. La función $f(x) = x^3 + 3x - 5$, por ser un polinomio, es continua en todo $\mathbb{R}$ y, en particular, es continua en el intervalo cerrado [1, 2].

Por otro lado, f(1) es negativo y f(2) positivo. En efecto:

$$f(1) = 1^3 + 3(1) - 5 = -1 \quad \text{y}$$

$$f(2) = 2^3 + 3(2) - 5 = 9$$



Luego, $f(1) < 0 < f(2)$ y, por el teorema del valor intermedio con K = 0, existe un c entre 1 y 2 tal que f(c) = 0, esto es,

$$1 < c < 2 \quad \text{y} \quad c^3 + 3c - 5 = 0.$$

Es decir c es una raíz de la ecuación dada.

b. Como una primera aproximación a la raíz podemos escoger a 1 ó a 2. Elegimos a 1 por estar $f(1) = -1$ más cerca de 0 que $f(2) = 9$. Esta escogencia de 1 tiene un error menor que 1. Es decir, $|1 - c| < 1$.

Para conseguir una mejor aproximación, volvemos a apoyarnos en el teorema del valor intermedio. Para esto, subdividimos el intervalo [1, 2] en los 10 intervalos:

$$[1,\ 1{,}1],\quad [1{,}1,\ 1{,}2],\quad [1{,}2,\ 1{,}3]\ ,\ldots,\ [1{,}9,\ 2].$$

Evaluamos f en los extremos de estos intervalos. De éstos tomamos uno tal que la evaluación de f en sus extremos tenga signos contrarios. En nuestro caso, este intervalo es [1,1, 1,2], ya que $f(1.1) = -0{,}369$ y $f(1{,}2) = 0{,}328$. Esto significa que $1{,}1 < c < 1{,}2$. Como una segunda aproximación a c podemos escoger a 1,1 ó a 1,2. Elegimos a 1,1. Esta aproximación tiene un error menor que 0.1.

Si se quiere mejorar la aproximación se repite el proceso.

PROBLEMAS RESUELTOS 2.4

PROBLEMA 1. Hallar k sabiendo que la siguiente función es continua es -2.

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{si } x \le -2 \\ kx^2 - 2x, & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

Solución

La función f debe ser continua por la derecha y por la izquierda en -2. Pero,

f es continua por la izquierda en $-2 \Leftrightarrow f(-2)) = \lim\limits_{x \to -2^-} x^3 = (-2)^3 = -8$

f es continua por la derecha en $-2 \Leftrightarrow f(-2) = \lim\limits_{x \to -2^+} (kx^2 - 2x) = k(-2)^2 - 2(-2)$

En consecuencia,

$$k(-2)^2 - 2(-2) = -8 \Rightarrow 4k + 4 = -8 \Rightarrow 4k = -12 \Rightarrow k = -3$$

PROBLEMA 2. Probar que:

f es continua en a $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)(\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\ )$

Solución

Por definición, f es continua en a $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)(\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\ ) \qquad (1)$$

($\Rightarrow$) Por ser f continua en a, se cumple (1) y , además, f está definida en a. En esta situación podemos eliminar el requerimiento $0 < | x - a |$ de (2), ya que para $x = a$ se cumple que $| f(a) - f(a) | = 0 < \varepsilon$. Pero, eliminado este requerimiento, (1) se convierte en:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)(\,| x - a | < \delta \Rightarrow | f(x) - f(a) | < \varepsilon\,) \qquad (2)$$

($\Leftarrow$) Es obvio, ya que (2) $\Rightarrow$ (1).

PROBLEMA 3. Probar que si f es continua en a y $f(a) > 0$, entonces existe un intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta)$ tal que

$$f(x) > 0, \ \forall x \in (a - \delta, a + \delta).$$

Solución

Por ser f continua en a, para $\varepsilon = \frac{1}{2} f(a)$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$| x - a | < \delta \Rightarrow | f(x) - f(a) | < \varepsilon = \frac{1}{2} f(a)$$

O sea

$$-\delta < x - a < \delta \Rightarrow -\frac{1}{2} f(a) < f(x) - f(a) < \frac{1}{2} f(a)$$

De donde,

$$a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow \frac{1}{2} f(a) < f(x) < \frac{3}{2} f(a)$$

Por tanto, por ser $\frac{1}{2} f(a) > 0$,

$$a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow f(x) > 0$$

PROBLEMA 4. Probar el teorema 2.13. Si $\lim\limits_{t \to b} g(t) = L$ y si f es continua en L, entonces

$$\lim_{t \to b} f(g(t)) = f(L) = f\left(\lim_{t \to b} g(t)\right)$$

Solución

Debemos probar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < | t - b | < \delta \Rightarrow | f(g(t)) - f(L) | < \varepsilon$$

Bien, como f es continua en L, por el problema resuelto 3, para el $\varepsilon > 0$ dado existe un $\delta_1 > 0$ tal que

$$|x - L| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(L)| < \varepsilon \qquad (1)$$

Por otra parte, como $\lim\limits_{t \to b} g(t) = L$, para $\varepsilon_1 = \delta_1$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |t - b| < \delta \Rightarrow |g(t) - L| < \varepsilon_1 = \delta_1 \qquad (2)$$

De (1) y (2), tomando $x = g(t)$, se tiene que

$$0 < |t - b| < \delta \Rightarrow |f(g(t)) - f(L)| < \varepsilon$$

PROBLEMA 5. Sea f una función con dominio $\mathbb{R}$, tal que

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Si f es continua en 0, probar que f es continua en todo punto $a \in \mathbb{R}$.

Solución

Debemos probar que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

En primer lugar tenemos que $f(0) = 0$. En efecto,

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

Por otro lado, por ser f continua en 0, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$.

Ahora bien, haciendo el cambio de variable $x = a + h$ se tiene que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h) = \lim_{h \to 0} [f(a) + f(h)]$$

$$= \lim_{h \to 0} f(a) + \lim_{h \to 0} f(h) = f(a) + \lim_{h \to 0} f(h) = f(a) + 0 = f(a).$$

PROBLEMA 6. **(Teorema del punto fijo).** Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[0, 1]$. Probar que:

$$0 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in [0, 1] \Rightarrow \text{f tiene un punto fijo.}$$

Es decir, existe un c en $[0, 1]$ tal que $\mathbf{f(c) = c}$

Solución

Caso 1. $f(0) = 0$ ó $f(1) = 1$.

En este caso tomamos $c = 0$ ó $c = 1$ y la proposición se cumple.

Caso 2. $f(0) \neq 0$ y $f(1) \neq 1$.

Tomemos la función $g(x) = x - f(x)$. Por ser f continua en $[0, 1]$, g también lo es. Además,

$$g(0) = 0 - f(0) = -f(0) < 0 \quad \text{y} \quad g(1) = 1 - f(1) > 0$$

Luego, por el teorema del valor intermedio, existe un c en (0, 1) tal que

$$g(c) = 0 \Rightarrow c - f(c) = 0 \Rightarrow f(c) = c.$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 2.4

1. Probar que la función f es continua en el punto 2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{si } x \neq 2 \\ 4, & \text{si } x = 2 \end{cases}$

2. Definir $g(0)$ para que la función g sea continua en 0. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

3. Probar que la siguiente función es discontinua en el punto 3 y que 3 es el único punto de discontinuidad.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2, & \text{si } x < 3 \\ 4, & \text{si } x = 3 \\ -x + 8, & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

En los problemas del 4 al 11, hallar los puntos de discontinuidad de las funciones dadas, indicando el tipo de discontinuidad.

4. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **5.** $g(x) = \dfrac{1}{x+2}$ **6.** $h(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$

7. $f(x) = \dfrac{x-1}{x-5}$ **8.** $g(x) = \dfrac{x+2}{(x-3)(x+8)}$ **9.** $h(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x-2}}$

10. $f(x) = \dfrac{x^2-9}{|x-3|}$ **11.** $g(x) = \dfrac{|x-1|}{(x-1)^3}$

En los problemas del 12 al 15, graficar la función dada y localizar, mirando el gráfico, los puntos de discontinuidad.

12. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ 4 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$

13. $g(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{si } x < -2 \\ 2x-1 & \text{si } -2 \leq x < 4 \\ -\frac{x}{2}+2 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

14. $h(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2}+1 & \text{si } x < 2 \\ 2x-3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

15. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{1}{x+1} & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

En los problemas del 16 al 19, hallar a y b para que las funciones dadas sean continuas en sus dominios.

16. $g(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ ax+b & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

17. $h(x) = \begin{cases} -\text{sen}^2 x & \text{si } x < \pi/4 \\ ax+b & \text{si } \pi/4 \leq x \leq \pi/3 \\ \cos^2 x & \text{si } x > \pi/3 \end{cases}$

18. $f(x) = \begin{cases} -2\,\text{sen}\, x & \text{si } x \leq -\pi/2 \\ a\,\text{sen}\, x + b & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \cos x & \text{si } x \geq \pi/2 \end{cases}$

19. $g(x) = \begin{cases} a - x^2 \text{sen}\,\frac{\pi}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ b, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

En los problemas del 20 al 25, hallar el conjunto de puntos donde la función dada es discontinua.

20. $f(x) = [\![x + 1/2]\!]$

21. $g(x) = [\![x/4]\!]$

22. $h(x) = 1/[\![x]\!]$

23 $g(x) = [\![\sqrt{1-x^2}]\!]$

24. $g(x) = 1 - x + [\![x]\!] - [\![1-x]\!]$. Sugerencia: $g(x) = \begin{cases} 1-x+2n, & \text{si } n < x < n+1 \\ n, & \text{si } x = n \end{cases}$

25. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$

Sugerencia: En todo intervalo abierto siempre existe un racional y un irracional.

En los problemas del 26 al 28, probar que la ecuación dada tiene una raíz en el intervalo indicado. Aproximar la raíz con un error menor que 0,1.

26. $x^3 + 1 = 3x$, en $[1, 2]$

27. $2x^3 - 3x^2 - 12x + 2 = 0$, en $[-2, -1]$

28. $\cos x = x$, en $[0, 1]$

29. Sea f una función con dominio $\mathbb{R}$ tal que

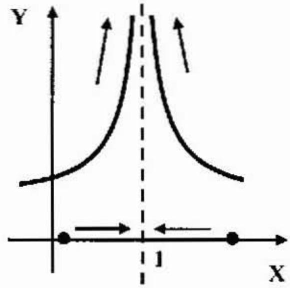
$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R}.$$

Si f es continua en 0, probar que f es continua en todo punto a.

SECCION 2.5

LIMITES INFINITOS Y ASINTOTAS VERTICALES

Consideremos la función $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$,



cuyo gráfico es el adjunto.

Queremos analizar el comportamiento de esta función cuando x se aproxima a 1, por la izquierda y por la derecha.

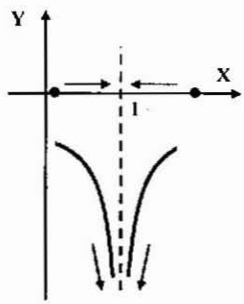
La siguiente tabla nos da los valores de f(x) para algunos valores de x cercanos a 1, tanto por la izquierda como por la derecha.

x	0,8	0,9	0,99	0,999	$\to$ 1 $\leftarrow$	1,001	1,01	1,1	1,2
$f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$	25	100	10.000	1.000.000	$\to +\infty \leftarrow$	1.000.000	10.000	100	25

Observamos que a medida que x se aproxima a 1 por ambos lados, el valor de f(x) crece ilimitadamente. Este hecho lo expresamos diciendo que el límite de $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ cuando x tiende a 1 es $+\infty$, y se escribe

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Ahora, consideremos esta otra función, $f(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$



La tabla correspondiente aparece a continuación. Ahora observemos que a medida que x se aproxima a 1 por ambos lados, el valor de f(x) decrece ilimitadamente. Este hecho lo expresamos diciendo que el límite de $f(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$ cuando x tiende a 1 es $-\infty$, y se escribe $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = -\infty$

x	0,8	0,9	0,99	$\to$ 1 $\leftarrow$	1,001	1,01	1,1	1,2
$f(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$	−25	−100	−10.000	$\to -\infty \leftarrow$	−1.000.000	−10.000	−100	−25

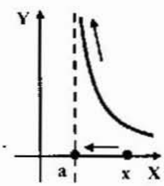
En resumen, tenemos las siguientes definiciones informales. Se supone que la función f está definida en un intervalo abierto que contiene al punto a, excepto posiblemente en el mismo **a**.

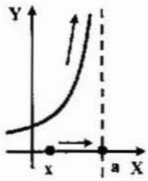
1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ **Los valores de f(x) pueden hacerse arbitrariamente grandes, tomando a x suficientemente cerca de a.**

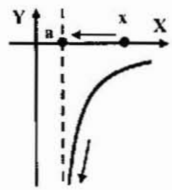
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$ **Los valores de f(x) pueden hacerse arbitrariamente grandes negativamente (| f(x) | es grande y f(x) < 0), tomando a x suficientemente cerca de a.**

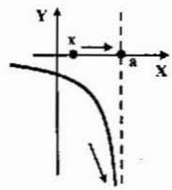
Similarmente se definen los límites siguientes límites unilaterales:

3. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ 4. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ 5. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ 6. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$









Es evidente que

7. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$

EJEMPLO 1. Hallar los límites unilaterales de la siguiente función en los puntos de discontinuidad. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$

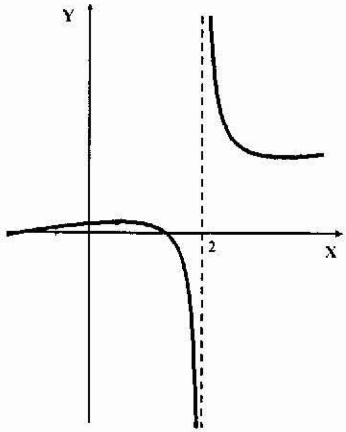
Solución

Esta función racional tiene un único punto de discontinuidad, que es 2. Luego, nos piden hallar

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 2^-} f(x)$$

Analicemos los signos del numerador y del denominador para puntos x cercanos a 2. En cuanto al numerador tenemos que

$$\lim_{x \to 2} (x^2 + 2x - 3) = 2^2 + 2(2) - 3 = 5$$



Como este límite es 5, para los puntos x cercanos a 2, ya sea por la derecha o por la izquierda, el valor del numerador se mantiene cerca de 5 y por lo tanto, éste tiene signo positivo.

Ahora, si x tiende a 2 por la derecha, x − 2 es positivo y, como el numerador es positivo, el signo del cociente $\dfrac{x^2+2x-3}{x-2}$ es positivo. Además, como x − 2 tiende a 0 cuando x tiende a 2 por la derecha, concluimos que

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2+2x-3}{x-2} = +\infty$$

Por otro lado, si x tiende a 2 por la izquierda, x − 2 es negativo y, como el numerador es positivo, el cociente $\dfrac{x^2+2x-3}{x-2}$ es negativo. Además, como x − 2 tiende a 0 cuando x tiende a 2 por la izquierda, concluimos que

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2+2x-3}{x-2} = -\infty$$

ASINTOTAS VERTICALES

En el ejemplo anterior, la recta vertical x = 2, comparada con el gráfico de la función, tiene una característica muy especial: La distancia de un punto P = (x, f(x)) del gráfico a la recta tiende a 0, a medida que x tiende a 0. Por esta razón se dice que la recta x = 2 es una asíntota (vertical) de la gráfica de la función f. En general, tenemos la siguiente definición.

DEFINICION. Diremos que **la recta x = a** es una **asíntota vertical** del gráfico de la función f, si se cumple al menos una de los cuatro límites siguientes:

1. $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$, **2.** $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$, **3.** $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$, **4.** $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

EJEMPLO 2. La recta x = 2 es una asíntota vertical del gráfico de la función

$$f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-2}$$

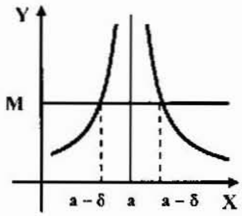
En efecto, ya vimos que $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{x^2+2x-3}{x-2} = +\infty$ y $\lim_{x \to 2^-} \dfrac{x^2+2x-3}{x-2} = -\infty$

DEFINICION. **(Rigurosa de límite infinito).** Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene al punto a, excepto posiblemente en a.

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow$

Para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

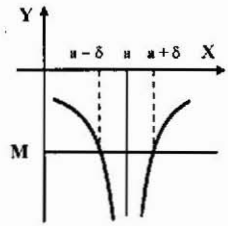
$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$



2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow$

Para todo $M < 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < M$$



Las definiciones rigurosas de los límites unilaterales infinitos son presentadas en el problema resuelto 4.

El siguiente teorema nos proporciona resultados rápidos en el cálculo de límites infinitos. Las expresiones colocadas entre los paréntesis son, reglas nemotécnicas.

TEOREMA 2.16 Supongamos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

1. $L > 0$ y $g(x) \to 0$ positivamente $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, $\quad \left(\dfrac{+}{0^+} = +\infty \right)$

2. $L > 0$ y $g(x) \to 0$ negativamente $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$, $\quad \left(\dfrac{+}{0^-} = -\infty \right)$

3. $L < 0$ y $g(x) \to 0$ positivamente $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$, $\quad \left(\dfrac{-}{0^+} = -\infty \right)$

4. $L < 0$ y $g(x) \to 0$ negativamente $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, $\quad \left(\dfrac{-}{0^-} = +\infty \right)$

El teorema también es válido si se cambia $x \to a$ por $x \to a^+$ ó $x \to a^-$.

Demostración

Haremos una "demostración" informal, siguiendo el esquema del ejemplo 1. Sólo probaremos 1, ya que la prueba de los otros casos es análoga y se deja como ejercicio al lector. La prueba rigurosa puede verse en el problema resuelto 3.

1. Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $L > 0$, para los x próximos a **a** tenemos que $f(x) > 0$.

   Por otro lado, como $g(x) \to 0$ positivamente, para los x próximos a **a** tenemos que $g(x) > 0$ y $g(x)$ es cercano a 0. Luego, cuando x tiende a **a**, el cociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es positivo y crece ilimitadamente. Esto es, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

Como un caso particular notable del teorema anterior se tiene:

TEOREMA 2.17 Si n es entero positivo, entonces

1. $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{1}{(x-a)^n} = +\infty$ 2. $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{1}{(x-a)^n} = \begin{cases} +\infty, & \text{si } n \text{ es par} \\ -\infty, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

Los resultados establecidos en el siguiente teorema son intuitivamente evidentes. Una demostración parcial la hacemos en el problema resuelto 5. El resto lo dejamos a cargo del lector.

TEOREMA 2.18 Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$, entonces

1. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \pm\infty$, $\quad (\pm\infty + L = \pm\infty)$ ó $(\pm\infty - L = \pm\infty)$

2. $L > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} [f(x)g(x)] = \pm\infty \quad ((\pm\infty)(+) = \pm\infty)$

   $L < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} [f(x)g(x)] = \mp\infty \quad ((\pm\infty)(-) = \mp\infty)$

3. $L > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \pm\infty \quad \left(\dfrac{\pm\infty}{+} = \pm\infty\right)$

   $L < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \mp\infty \quad \left(\dfrac{\pm\infty}{-} = \mp\infty\right)$

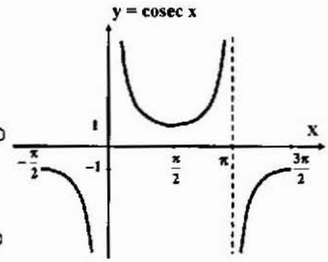
4. $L \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \left[\dfrac{g(x)}{f(x)}\right] = 0 \quad \left(\dfrac{L}{\pm\infty} = 0\right)$

EJEMPLO 3. Probar que:

a. $\lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{cosec} x = +\infty$ **b.** $\lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{cosec} x = -\infty$

c. $\lim\limits_{x \to 0^+} \cot x = +\infty$ **d.** $\lim\limits_{x \to 0^-} \cot x = -\infty$

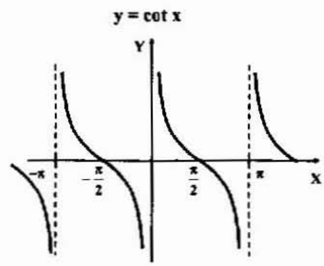
Luego, la recta x = 0 es una asíntota vertical de
y = cot x y de y = cosec x



Solución

a. $\lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{cosec} x = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = \left(\dfrac{1}{0^+}\right) = +\infty$

b. $\lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{cosec} x = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = \left(\dfrac{1}{0^-}\right) = -\infty$



a. $\lim\limits_{x \to 0^+} \cot x = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \left(\dfrac{1}{0^+}\right) = +\infty$

b. $\lim\limits_{x \to 0^-} \cot x = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \left(\dfrac{1}{0^-}\right) = -\infty$

Argumentos similares a los prueban que las rectas $x = n\pi$, donde n es cualquier entero, son asíntotas verticales de y = cot x y de y = cosec x.

OTRAS FORMAS INDETERMINADAS

Presentamos dos formas indeterminadas más: $\dfrac{\infty}{\infty}$ y $\infty - \infty$. En esta parte sólo veremos casos simples de estas formas. Más adelante estudiaremos una nueva técnica, conocida con el nombre de **Regla de L'Hôspital**, la cual nos permitirá resolver casos más complejos de estas y otras formas más.

a. Forma Indeterminada $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Un límite de un cociente tiene la forma indeterminada $\dfrac{\infty}{\infty}$, si el límite (o límite lateral) del numerador y del denominador es $\pm\infty$.

EJEMPLO 4. Hallar $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cot x}{\operatorname{cosec} x}$

Solución

De acuerdo al ejemplo anterior, tenemos que: $\dfrac{\lim\limits_{x\to 0^+} \cot x}{\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{cosec} x} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$ (?)

Bien, resolvemos la indeterminación:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cot x}{\operatorname{cosec} x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to 0^+} \cos x = 1$$

---

b. Indeterminada de la forma $\infty - \infty$

Este forma indeterminada se presenta cuando el límite de una suma o diferencia, al aplicar la ley de la suma, se obtiene la expresión $\infty - \infty$ o la expresión $-\infty + \infty$. En este caso, la indeterminación se salva transformando la suma o diferencia en un cociente.

EJEMPLO 5. Hallar $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x^2} \right)$

Solución

Tenemos que: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^3} - \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = \infty - \infty$ (?)

Bien, resolvemos la indeterminación:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1-x}{x^3} \right) = \left(\frac{1}{0^+} \right) = +\infty$$

PROBLEMAS RESUELTOS 2.5

PROBLEMA 1. Hallar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$

Solución

Este límite es de la forma 0/0. Se tiene:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}} \right)\left(\frac{1}{\cos x} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{0^+} \right)\left(\frac{1}{1} \right) = (+\infty)(1) = +\infty$$

PROBLEMA 2. Hallar $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x-3}$

Solución

Este límite es una forma indeterminada de la forma $\dfrac{0}{0}$.

Resolvemos la indeterminación:

Se tiene que: $x \to 3^- \Rightarrow x-3<0 \Rightarrow 3-x>0$. Ahora,

$$\frac{\sqrt{9-x^2}}{x-3} = \frac{\sqrt{(3-x)(3+x)}}{-(3-x)} = \frac{\sqrt{3-x}\sqrt{3+x}}{-\sqrt{3-x}\sqrt{3-x}} = \frac{\sqrt{3+x}}{-\sqrt{3-x}}$$

Si $f(x) = \sqrt{3+x}$ y $g(x) = -\sqrt{3-x}$ se tiene que:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \sqrt{3+x} = \sqrt{6} > 0,$$

$$\lim_{x \to 3^-} g(x) = \lim_{x \to 3^-} (-\sqrt{3+x}) = 0 \quad \text{y}$$

$$g(x) = -\sqrt{3-x} < 0$$

Luego, $g(x) \to 0$ negativamente.

Aplicando la parte 2 del teorema 2.16 se tiene que:

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{\sqrt{9-x^2}}{x-3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{\sqrt{3+x}}{-\sqrt{3-x}} = -\infty \qquad \left(\frac{+}{0^-} = -\infty \right)$$

El resultado anterior nos dice que la recta $x = 3$ es una asíntota vertical. Además ésta es la única, ya que 3 es el único punto donde el denominador se hace 0.

PROBLEMA 3. Probar que el **Teorema 2.16**

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ entonces

1. $L > 0$ y $g(x) \to 0$ positivamente $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

2. $L > 0$ y $g(x) \to 0$ negativamente $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

3. $L < 0$ y $g(x) \to 0$ positivamente $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

4. $L < 0$ y $g(x) \to 0$ negativamente $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

Solución

Sólo probaremos 1 y 4. Para los casos 2 y 3 se procede en forma análoga y los dejamos como ejercicios para el lector.

1. Debemos probar que dado $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > M$$

Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L > 0$ y $L/2 < L < 3L/2$, por el problema resuelto 10 de la sección 3.2 con $A = L/2$ y $B = 3L/2$, existe un $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow 3L/2 > f(x) > L/2 \qquad \textbf{(1)}$$

Como $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, dado $\varepsilon = L/(2M)$ existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)| < \varepsilon = L/(2M)$$

Como $g(x) \to 0$ positivamente, a la expresión anterior la escribimos así:

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow g(x) < L/(2M) \qquad \textbf{(2)}$$

Ahora, si $\delta = \text{Mínimo}\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces de (1) y (2) obtenemos

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{L/2}{L/2M} = M$$

4. Debemos probar que dado $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < | x - a | < \delta \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > M$$

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L < 0$ y $3L/2 < L < L/2$, por el problema resuelto 10 de la sección 3.2 con $A = 3L/2$ y $B = L/2$, existe un $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < | x - a | < \delta_1 \Rightarrow 3L/2 < f(x) < L/2 \Rightarrow -f(x) > -L/2 \qquad \textbf{(3)}$$

Como $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, dado $\varepsilon = -L/(2M)$ existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$0 < | x - a | < \delta_2 \Rightarrow | g(x) | < \varepsilon = -L/(2M)$$

Como $g(x) \to 0$ negativamente, $| g(x) | = -g(x)$ y a la expresión anterior la escribimos:

$$0 < | x - a | < \delta_2 \Rightarrow -g(x) < -L/(2M) \qquad \textbf{(4)}$$

Ahora, si $\delta = \text{Mínimo}\{ \delta_1, \delta_2 \}$, entonces de (3) y (4) obtenemos

$$0 < | x - a | < \delta \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-f(x)}{-g(x)} > \frac{-L/2}{-L/2M} = M$$

PROBLEMA 4. Definir rigurosamente:

1. $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$
2. $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$
3. $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$
4. $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

Solución

1. $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \Rightarrow (\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) > M)$

2. $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \Rightarrow (\forall M < 0)(\exists \delta > 0)(0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) < M)$

3. $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \Rightarrow (\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(0 < a - x < \delta \Rightarrow f(x) > M)$

4. $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \Rightarrow (\forall M < 0)(\exists \delta > 0)(0 < a - x < \delta \Rightarrow f(x) < M)$

PROBLEMA 5. **(Teorema 2.18).** Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = L$, entonces

a. $\lim_{x \to a} \left[f(x) + g(x) \right] = +\infty$ **b.** $L < 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} \left[f(x) g(x) \right] = -\infty$

Solución

Como $\lim_{x \to a} g(x) = L$, por el problema resuelto 10 de la sección 3.2, para

$A = L - (1/2)|L|$ y $B = L + (1/2)|L|$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |a - x| < \delta_1 \Rightarrow L - (1/2)|L| < g(x) < L + (1/2)|L| \quad \textbf{(1)}$$

a. Debemos probar que dado $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |a - x| < \delta \Rightarrow f(x) + g(x) > M$$

En vista de que sólo interesan los valores grandes de M, suponemos que $M > L$.

Como $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, dado $M' = M - (L - (1/2)|L|)$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$0 < |a - x| < \delta_2 \Rightarrow f(x) > M' = M - (L - (1/2)|L|) \quad \textbf{(2)}$$

Ahora, tomando $\delta = \text{Mínimo}\{\delta_1, \delta_2\}$, de (1) y (2) se tiene:

$$0 < |a - x| < \delta \Rightarrow f(x) + g(x) > M' + L - (1/2)|L|$$

$$= M - (L - (1/2)|L|) + L - (1/2)|L| = M$$

b. Debemos probar que dado $M < 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |a - x| < \delta \Rightarrow f(x)\, g(x) < M$$

Como $L < 0$, entonces $|L| = -L$ y (1) se escribe así:

$$0 < |a - x| < \delta_1 \Rightarrow (3/2)L < g(x) < (1/2)L \quad \textbf{(3)}$$

Como $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, dado $M' = (2M)/L$, existe $\delta_3 > 0$ tal que

$$0 < |a - x| < \delta_3 \Rightarrow f(x) > (2M)/L \quad \textbf{(4)}$$

Tomando $\delta = \text{Mínimo}\{\delta_1, \delta_3\}$, de (3), (4) y considerando que

$f(x) > 0$ y $(1/2)L < 0$, se tiene

$$0 < |a - x| < \delta \Rightarrow f(x)\, g(x) < f(x)(1/2)L < [(2M)/L](1/2)L = M$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 2.5

En los problemas del 1 al 9 calcular el límite por la derecha y el límite por la izquierda en cada punto de discontinuidad de las funciones indicadas.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ **2.** $g(x) = \dfrac{1}{|x-2|}$ **3.** $h(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

4. $f(x) = \dfrac{x}{x-4}$ **5.** $g(x) = \dfrac{x+1}{x-5}$ **6.** $h(x) = \dfrac{1}{x(x+2)}$

7. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-2x+3}$ **8.** $g(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2-4}$ **9.** $h(x) = x - \dfrac{1}{x}$

En los problemas del 10 al 28 calcular el límite indicado.

10. $\lim\limits_{x \to 0^+} [\![x]\!]/x$ **11.** $\lim\limits_{x \to 0^-} [\![x]\!]/x$ **12.** $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} \sec x$

13. $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^+} \sec x$ **14.** $\lim\limits_{x \to (-3\pi/2)^+} \sec x$ **15.** $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{x-1}{1-\sqrt{2x-x^2}} \right)$

16. $\lim\limits_{x \to 2^+} \left(\dfrac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}-2} \right)$ **17.** $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ **18.** $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} \right]$

19. $\lim\limits_{x \to 2^+} \left[\dfrac{1}{x^2-4} - \dfrac{1}{x-2} \right]$ **20.** $\lim\limits_{x \to 1^-} \left([\![x^2]\!] - 1 \right)/(x^2-1)$

21. $\lim\limits_{y \to 1} \left[\dfrac{1}{y-1} - \dfrac{3}{y^3-1} \right]$ **22.** $\lim\limits_{y \to 0} \left[\dfrac{1}{y\sqrt{y+1}} - \dfrac{1}{y} \right]$

23. $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|} \right)$ **24.** $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{|x|} \right)$

25. $\lim\limits_{x \to 0^+} x \operatorname{cosec}(x/2)$ **26.** $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{\cos^2 x}{x} \right)$

27. $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^+} \left(\dfrac{\tan x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}} \right)$ **28.** $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1 - \cos x}{\tan^3 x - \operatorname{sen}^3 x} \right)$

En los problemas del 29 al 32, hallar las asíntotas verticales a la gráfica de la función dada.

29. $y = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ **30.** $y = \dfrac{x}{4x^2-1}$ **31.** $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ **32.** $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

33. Demostrar que las rectas $x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, donde n es un entero, son asíntotas verticales de la gráfica de $y = \tan x$.

SECCION 2.6

LIMITES EN EL INFINITO Y ASINTOTAS HORIZONTALES

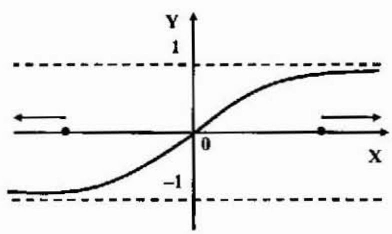
Veamos el comportamiento de las funciones cuando la variable x se aleja del origen (de 0) ilimitadamente hacia la derecha o hacia la izquierda. En el primer caso diremos que x tiende a $+\infty$, y en el segundo, que x tiende a $-\infty$.

Consideremos la función $f(x) = \dfrac{x}{|x|+1} = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{x}{-x+1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Confeccionemos dos tablas, una para valores crecientes de x y otra para decrecientes (negativas).

$x \geq 0$	100	1.000	10.000 $\to +\infty$
$f(x) = \dfrac{1}{x+1}$	0,9901	0,9990	0,9999 $\to$ 1

$x < 0$	-100	-1.000	-10.000 $\to -\infty$
$f(x) = \dfrac{1}{-x+1}$	$-0,9901$	$-0,9990$	$-0,9999 \to -1$



En la primera tabla observamos que f(x) se aproxima a 1 cuando x crece ilimitadamente. En este caso diremos que el límite de $f(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$ cuando x tiende a $+\infty$ es 1, y escribiremos así: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{|x|+1} = 1$

En la segunda tabla observamos que f(x) se aproxima a -1 cuando x decrece ilimitadamente. En este caso diremos que el límite de $f(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$ cuando x tiende a $-\infty$ es -1, y escribiremos así: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{|x|+1} = -1$

En general, tenemos las siguientes definiciones informales:

1. Sea f una función definida en un intervalo de la forma $(a, +\infty)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$ **Los valores de f(x) pueden acercarse arbitrariamente a L, tomando a x suficientemente grande.**

2. Sea f una función definida en un intervalo de la forma $(-\infty, a)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$ **Los valores de f(x) pueden acercarse arbitrariamente a L, tomando a x suficientemente grande negativamente.**

Las definiciones rigurosas de estos límites se dan a continuación.

DEFINICION. Rigurosa de límites en el infinito.

1. Sea f una función definida en un intervalo de la forma $(a, +\infty)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ N > 0)(x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

2. Sea f una función definida en un intervalo de la forma $(-\infty, a)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ N < 0)(x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

Se prueba que las leyes de los límites del teorema 2.2, así como las propiedades de los límites enunciados en los teoremas 2.16 y 2.18 también se cumplen para los límites en el infinito (cuando $x \to \pm\infty$). El siguiente teorema nos dice como pasar de un límite en el infinito a un límite en 0.

TEOREMA 2. 19 **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{t\to0^+} f(1/t)$ **2.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{t\to0^-} f(1/t)$

Demostración

Ver el problema resuelto 4.

Observar que el teorema anterior puede verse como el cambio de variable $x = 1/t$, para el cual se cumple que: $x \to +\infty \Leftrightarrow t \to 0^+$ y $x \to -\infty \Leftrightarrow t \to 0^-$
Pero, para la validez de este cambio, no podemos invocar directamente el teorema de cambio de variable visto, ya que éste sólo fue probado para el caso $x \to a$ (a finito).

EJEMPLO 1. Hallar: 1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ 2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{3/2} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

Solución

En ambos casos aplicando el teorema anterior, haciendo $x = \frac{1}{t}$.

1. $$\lim_{x \to +\infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{t} \operatorname{sen} t = \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$

2. $$\lim_{x \to +\infty} x^{3/2} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t^{3/2}} \operatorname{sen} t = \lim_{t \to 0^+} \left[\frac{1}{t^{1/2}}\right]\left[\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right]$$

$$= \left[\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{t}}\right]\left[\lim_{t \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\right] = (+\infty)(1) = +\infty$$

La prueba del siguiente teorema lo presentamos en el problema resuelto 6.

TEOREMA 2.20 Si n es un número entero positivo, entonces

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ 2. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{si } n \text{ es par} \\ -\infty, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ 4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

De este teorema deducimos fácilmente los límites en $\pm\infty$ de un polinomio.

COROLARIO. Sea **n > 0.** Se tiene:

a. $$\lim_{x \to +\infty} \left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } a_n > 0 \\ -\infty, & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

b. Si n es par, entonces

$$\lim_{x \to -\infty} \left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right) = \begin{cases} +\infty, & a_n > 0 \\ -\infty, & a_n < 0 \end{cases}$$

c. Si n es impar, entonces

$$\lim_{x \to -\infty} \left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right) = \begin{cases} -\infty, & a_n > 0 \\ +\infty, & a_n < 0 \end{cases}$$

Demostración.

Sólo probamos la parte a, ya que para los otros casos se procede similarmente.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x^n\right)\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)$$

$$= (+\infty)(a_n + 0 + \ldots + 0 + 0)$$

$$= (+\infty)(a_n) = \begin{cases} +\infty, \text{ si } a_n > 0 \\ -\infty, \text{ si } a_n < 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 2. Dado el polinomio $p(x) = -4x^3 + 8x^2 - 12x - 4$, hallar

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x)$ **b.** $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x)$

Solución

El término de mayor potencia es $-4x^3$, cuyo coeficiente es -4 y $-4 < 0$. Luego,

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-4x^3 + 8x^2 - 12x - 4) = -\infty$ **b.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x^3 + 8x^2 - 12x - 4) = +\infty$

EJEMPLO 3. Calcular **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{x^2+1}$ **b.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2}{x^2+1}$

Solución

Ambos límites son indeterminados de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$. Resolvemos la indeterminación dividiendo el numerador y el denominador por la mayor potencia de x que, en este caso, es x^2.

a. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2/x^2}{(x^2+1)/x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{1+1/x^2}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 3}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+1/x^2\right)} = \frac{3}{1+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1/x^2\right)} = \frac{3}{1+0} = 3$$

b. $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2/x^2}{(x^2+1)/x^2} = \frac{3}{1+\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1/x^2\right)} = \frac{3}{1+0} = 3$$

EJEMPLO 4. Calcular: **a.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **b.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Solución

Ambos límites son indeterminados de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$. Resolvemos la indeterminación dividiendo el numerador y el denominador entre x.

a. Si $x > 0$, entonces $x = \sqrt{x^2}$. Luego,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+3}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^2+3}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{1+3/x^2}} = \sqrt{\frac{1}{1+\lim\limits_{x \to +\infty}\left(3/x^2\right)}} = \sqrt{\frac{1}{1+0}} = 1$$

b. Si $x < 0$, entonces $x = -\sqrt{x^2}$. Luego,

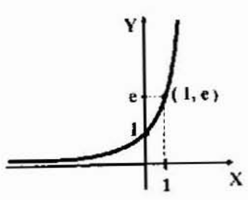
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+3}} = -\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^2+3}}$$

$$= -\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{1}{1+3/x^2}} = -\sqrt{\frac{1}{1+0}} = -1$$

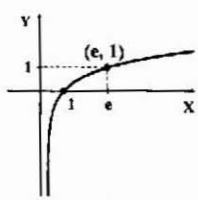
TEOREMA 2.21 **1.** $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ **2.** $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

3. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ **4.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

Demostración



$y = e^x$



$y = \ln x$

Observando el gráfico de la función exponencial $y = e^x$ se puede intuir los resultados 1 y 2. La demostración formal la omitimos.

Las pruebas de 3 y 4 están en el problema resuelto 7.

Observar que el límite 3 nos dice que el eje Y es una asíntota vertical de la función logaritmo natural.

EJEMPLO 5. Calcular los siguientes límites:

a. $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ **b.** $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ **c.** $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - 2\ln x}{1 + 3\ln x}$

Solución

a. $$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{e^{-x}(e^{2x} + 1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{2x}) - 1}{\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{2x}) + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

b. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x/e^x - e^{-x}/e^x}{e^x/e^x + e^{-x}/e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - 1/e^{2x}}{1 + 1/e^{2x}}$$

$$= \frac{1 - \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1/e^{2x}\right)}{1 + \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1/e^{2x}\right)} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

c. $$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - 2\ln x}{1 + 3\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/\ln x - 2}{1/\ln x + 3} = \frac{\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1/\ln x\right) - 2}{\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1/\ln x\right) + 3} = \frac{0 - 2}{0 + 3} = -\frac{2}{3}$$

ASINTOTAS HORIZONTALES

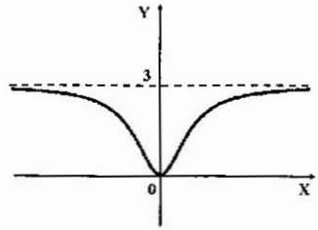
También tenemos asíntotas horizontales (y también hay oblicuas).

DEFINICION. Diremos que **la recta y = b** es una **asíntota horizontal** del gráfico de la función f si se cumple al menos una de las dos condiciones siguientes:

1. $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ **2.** $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$

EJEMPLO 6. La recta y = 3 es una asíntota horizontal del gráfico la función:

$$y = \frac{3x^2}{x^2+1}$$



En efecto, en el ejemplo 2 vimos que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{x^2+1} = 3 = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2}{x^2+1}$$

EJEMPLO 7. Se llama **tangente hiperbólica** a la siguiente función:

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Hallar las asíntotas horizontales.

Solución

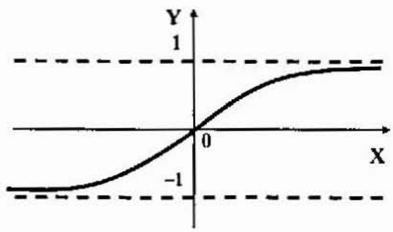
La tangente hiperbólica tiene dos asíntotas horizontales:

$$y = -1, \qquad y = 1.$$

En efecto, de acuerdo al ejemplo 5, tenemos:

$$\lim_{x \to -\infty} \tanh(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \tanh(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$$



y = tanh x

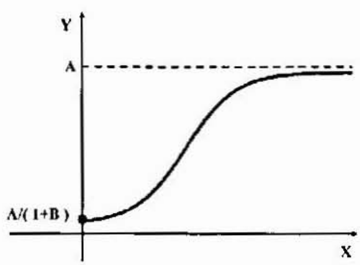
EJEMPLO 8. Probar que la recta y = A es una asíntota horizontal de la **curva logística**: $f(x) = \dfrac{A}{1+Be^{-kx}}$, **A**, **B** y **k** son constantes positivas.

Solución

Tenemos que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{A}{1+Be^{-kx}} = \frac{A}{1 + B \displaystyle\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{e^{kx}}\right)}$$

$$= \frac{A}{1+B(0)} = \frac{A}{1+0} = A$$



EJEMPLO 9. Hallar las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de la ecuación

$$xy^2 - y^2 - 4x - 8 = 0.$$

Solución

Despejando y obtenemos $y = \pm\sqrt{\dfrac{4x+8}{x-1}}$.

La gráfica de la ecuación es la unión de las gráficas de las funciones:

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x+8}{x-1}} \text{ y } \qquad g(x) = -\sqrt{\frac{4x+8}{x-1}}$$

Por conveniencia hallamos el dominio de estas funciones. Ambas tienen el mismo dominio.

$$x \in \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) \Leftrightarrow \frac{4x+8}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4(x+2)}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x-1} \geq 0$$

Resolviendo esta desigualdad hallamos que $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) = (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$.

1. Asíntotas Verticales:

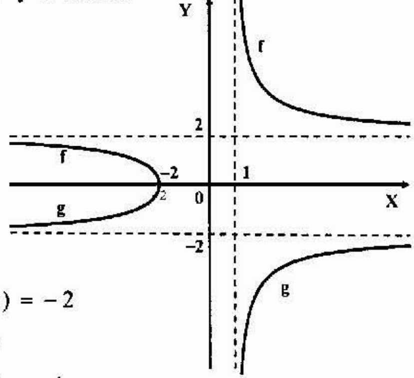
El único punto que es candidato a proporcionar asíntotas verticales es 1. Como las funciones no están definidas en los puntos próximos y a la izquierda de 1, sólo debemos calcular los límites a la derecha de 1 de ambas funciones.

Ya que, $\lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{4x+8} = \sqrt{12} > 0$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x-1} = 0$ positivamente, se tiene:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{\frac{4x+8}{x-1}} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{4x+8}}{\sqrt{x-1}} = +\infty$$

Por otro lado, $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (-f(x)) = -\infty$

Por tanto, $x = 1$ es una asíntota vertical y es única.



2. Asíntotas Horizontales:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{\frac{4x+8}{x-1}}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{\frac{4+8/x}{1-1/x}} = 2$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim_{x \to \pm\infty} (-f(x)) = -\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -2$$

Luego, $y = -2$ e $y = 2$ son asíntotas horizontales.

PROBLEMAS RESUELTOS 2.6

PROBLEMA 1. Hallar $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3+1} \right]$

Solución

Usando la identidad:

$a - b = \dfrac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$ con $a = \sqrt[3]{x^3+x^2}$ y $b = \sqrt[3]{x^3+1}$ se tiene

$$\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3+1} = \frac{(x^3+x^2)-(x^3+1)}{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2} + \sqrt[3]{x^3+x^2}\ \sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$$

$$= \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2} + \sqrt[3]{x^3+x^2}\ \sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$$

$$= \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2} + \sqrt[3]{x^3+x^2}\ \sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$$

$$= \frac{\dfrac{x^2-1}{x^2}}{\dfrac{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}}{x^2} + \dfrac{\sqrt[3]{x^3+x^2}}{x}\ \dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x} + \dfrac{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}{x^2}}$$

$$= \frac{1 - 1/x^2}{\sqrt[3]{\dfrac{(x^3+x^2)^2}{x^6}} + \sqrt[3]{\dfrac{x^3+x^2}{x^3}}\ \sqrt[3]{\dfrac{x^3+1}{x^3}} + \sqrt[3]{\dfrac{(x^3+1)^2}{x^6}}}$$

$$= \frac{1 - 1/x^2}{\sqrt[3]{(1+1/x)^2} + \sqrt[3]{1+1/x}\ \sqrt[3]{1+1/x} + \sqrt[3]{(1+1/x^3)^2}}$$

Luego,

$$\lim_{x \to -\infty} \left[\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3+1} \right] = \frac{1-0}{\sqrt[3]{(1+0)^2} + \sqrt[3]{1+0}\ \sqrt[3]{1+0} + \sqrt[3]{(1+0)^2}} = \frac{1}{3}$$

PROBLEMA 2. Hallar $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right]$

Solución

Multiplicando y dividiendo por la conjugada:

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x} = \frac{\left[\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right]\left[\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}\right]}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}\Big/\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}\right)\Big/\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1/x}}}{\sqrt{1+\sqrt{1/x+\sqrt{1/x^3}}}+1}$$

Luego,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right] = \frac{\sqrt{1+\sqrt{0}}}{\sqrt{1+\sqrt{0+\sqrt{0}}}+1} = \frac{1}{2}.$$

PROBLEMA 3. Probar que

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^{1/3}(1-x)^{2/3}-x\right] = -\frac{2}{3} = \lim_{x\to-\infty}\left[x^{1/3}(1-x)^{2/3}-x\right]$$

Solución

Tenemos que:

$$x^{1/3}(1-x)^{2/3}-x = x^{1/3}\left[(1-x)^{2/3}-x^{2/3}\right] = x^{1/3}\left[\left((1-x)^{1/3}\right)^2-\left(x^{1/3}\right)^2\right]$$

$$= x^{1/3}\left[(1-x)^{1/3}-x^{1/3}\right]\left[(1-x)^{1/3}+x^{1/3}\right]$$

Ahora, haciendo uso de las siguientes identidades

$$a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2} \qquad \text{y} \qquad a+b=\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$$

con $a=(1-x)^{1/3}$ y $b=x^{1/3}$, se tiene que $x^{1/3}(1-x)^{2/3}-x$

$$= x^{1/3}\left[\frac{(1-x)-x}{(1-x)^{2/3}+(1-x)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}}\right]\left[\frac{(1-x)+x}{(1-x)^{2/3}-(1-x)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}}\right]$$

$$= x^{1/3}\left[\frac{1-2x}{(1-x)^{2/3}+(1-x)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}}\right]\left[\frac{1}{(1-x)^{2/3}-(1-x)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}}\right]$$

$$= \frac{x^{1/3}(1-2x)}{\left[(1-x)^{2/3}+(1-x)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}\right]\left[(1-x)^{2/3}-(1-x)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}\right]}$$

$$= \frac{x^{2/3}x^{2/3}\left(\frac{1}{x}-2\right)}{\left[(1-x)^{2/3}+(1-x)^{2/3}x^{1/3}+x^{2/3}\right]\left[(1-x)^{2/3}-(1-x)^{2/3}x^{1/3}+x^{2/3}\right]}$$

$$= \frac{1/x-2}{\left[\frac{(1-x)^{2/3}+(1-x)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}}{x^{2/3}}\right]\left[\frac{(1-x)^{2/3}-(1-x)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}}{x^{2/3}}\right]}$$

$$= \frac{1/x-2}{\left[(1/x-1)^{2/3}+(1/x-1)^{1/3}+1\right]\left[(1/x-1)^{2/3}-(1/x-1)^{1/3}+1\right]}$$

Luego,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^{1/3}(1-x)^{2/3}-x\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1/x-2}{\left[(1/x-1)^{2/3}+(1/x-1)^{1/3}+1\right]\left[(1/x-1)^{2/3}-(1/x-1)^{1/3}+1\right]}$$

$$= \frac{0-2}{\left[(0-1)^{2/3}+(0-1)^{1/3}+1\right]\left[(0-1)^{2/3}-(0-1)^{1/3}+1\right]}$$

$$= \frac{-2}{[1-1+1]\,[1+1+1]} = -\frac{2}{3}$$

Dando los mismos pasos dados atrás, se consigue que:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x^{1/3}(1-x)^{2/3}-x\right] = -\frac{2}{3}$$

PROBLEMA 4. Probar el teorema 2.19

1. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{t \to 0^+} f(1/t)$ **2.** $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{t \to 0^-} f(1/t)$

Solución

Probaremos sólo la parte 1, ya para la parte 2 se procede en forma similar.

1. Probaremos que: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \iff \lim_{t \to 0^+} f(1/t) = L$

($\Rightarrow$) Debemos probar que:

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < t < \delta \Rightarrow |f(1/t) - L| < \varepsilon$.

Como $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, para el ε dado existe $N > 0$ tal que

$$x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Ahora, si $\delta = \dfrac{1}{N} > 0$, entonces

$$0 < t < \delta = \frac{1}{N} \Rightarrow \frac{1}{t} > N \Rightarrow |f(1/t) - L| < \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Debemos probar que:

Dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que $x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Como, $\lim_{x \to +\infty} f(1/t) = L$, para el ε dado existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < t < \delta \Rightarrow |f(1/t) - L| < \varepsilon.$$

Ahora, si $N = \dfrac{1}{\delta} > 0$, entonces

$$x > N = 1/\delta \Rightarrow 0 < 1/x < \delta \Rightarrow |f(1/(1/x)) - L| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

PROBLEMA 5. Hallar: **1.** $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ **2.** $\lim_{x \to -\infty} \left[\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - \operatorname{sen} x \right]$

Solución

1. Por el problema resuelto 4, haciendo $x = 1/t$ se tiene

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{t \to 0^-} \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} 0 = 0$$

2. Usando la identidad trigonométrica 41 tenemos

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{1}{x}\right)-\operatorname{sen} x = 2\cos\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}+x\right)\right]\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}-x\right)\right]$$

$$= 2\cos\left[x+\frac{1}{2x}\right]\operatorname{sen}\frac{1}{2x}$$

Considerando que $\left|\cos\left[x+\dfrac{1}{2x}\right]\right| \leq 1$ se tiene:

$$0 \leq \left|\operatorname{sen}\left(x+\frac{1}{x}\right)-\operatorname{sen} x\right| = \left|2\cos\left[x+\frac{1}{2x}\right]\operatorname{sen}\frac{1}{2x}\right|$$

$$= 2\left|\cos\left[x+\frac{1}{2x}\right]\right|\left|\operatorname{sen}\frac{1}{2x}\right| \leq 2\left|\operatorname{sen}\frac{1}{2x}\right|$$

Luego,

$$0 \leq \lim_{x\to-\infty}\left|\operatorname{sen}\left(x+\frac{1}{x}\right)-\operatorname{sen} x\right| \leq 2\lim_{x\to-\infty}\left|\operatorname{sen}\frac{1}{2x}\right| \qquad \textbf{(3)}$$

Pero, por la continuidad de la función valor absoluto y la parte (1), se tiene

$$\lim_{x\to-\infty}\left|\operatorname{sen}\frac{1}{2x}\right| = \left|\lim_{x\to-\infty}\operatorname{sen}\frac{1}{2x}\right| = |\,0\,| = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

De (3) y (4) obtenemos que

$$\lim_{x\to-\infty}\left|\operatorname{sen}\left(x+\frac{1}{x}\right)-\operatorname{sen} x\right| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left[\operatorname{sen}\left(x+\frac{1}{x}\right)-\operatorname{sen} x\right] = 0$$

PROBLEMA 6. **(Teorema 2.20).** Si n es un número entero positivo, probar que

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ **2.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{si } n \text{ es par} \\ -\infty, & \text{si } n \text{ es impar}\end{cases}$

3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n} = 0$ **4.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n} = 0$

Solución

Hacemos el cambio de variable $x = 1/t$ y, de acuerdo al teorema 2.19, tenemos:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{1}{t^n} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

2. Si n es par:

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \lim_{t \to 0^-} \frac{1}{t^n} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Si n es impar:

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \lim_{t \to 0^-} \frac{1}{t^n} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

3.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{(1/t)^n} = \lim_{x \to 0^+} t^n = 0$$

4.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{(1/t)^n} = \lim_{x \to 0^-} t^n = 0$$

PROBLEMA 7. **(Teorema 2.21)** Probar:

3. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ **4.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

Solución

3. Por definición, debemos probar que:

Dado $M < 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $0 < x < \delta \Rightarrow \ln x < M$

Bien,

$\ln x < M \Rightarrow x < e^M$. Luego, tomamos $\delta = e^M$

Por otro lado, por estar x en el dominio de $y = \ln x$, debemos tener que $x > 0$. Ahora tenemos:

$$0 < x < \delta \Rightarrow 0 < x < e^M \Rightarrow \ln x < \ln e^M = M$$

4. Por definición, debemos probar que:

Dado $M > 0$, $\exists\, N > 0$ tal que $x > N \Rightarrow \ln x > M$

Bien,

$\ln x > M \Rightarrow x > e^M$. Luego, tomamos $N = e^M$

Ahora tenemos:

$$x > N \Rightarrow x > e^M \Rightarrow \ln x > \ln e^M = M$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 2.6

En los problemas del 1 al 9 calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **2.** $f(x) = \dfrac{-1}{x^3}$ **3.** $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$

4. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$ **5.** $f(x) = \dfrac{x^3-8}{2x^3-3x^2+1}$ **6.** $f(x) = x^5 - 4x^4$

7. $f(x) = -2x^6 + 5x^5$ **8.** $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ **9.** $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$

En los problemas del 10 al 31 calcular el límite indicado.

10. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x + \sqrt{x}\,\right]$ **11.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x - \sqrt{x}\,\right]$ **12.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+1}}$

13. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+1}$ **14.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$ **15.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{-8x^3+x+1}}{x-1}$

16. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\,\right]$ **17.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\sqrt{x^2+2x} - x\right]$

18. $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left[\sqrt{x^2+5} - x\right]$ **19.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x + \sqrt[3]{1-x^3}\,\right]$

20. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ **21.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

22. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{4x + \ + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$ **23.** $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-1/2} \operatorname{sen} x$

24. $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{\pi}{6}\right)$ **25.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\operatorname{sen}\sqrt{x+2} - \operatorname{sen}\sqrt{x}\,\right]$

26. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$ **27.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^{3x} + e^{-3x}}$

28. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{10^x}{10^x+1}$

29. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2^{-0,6x} + \dfrac{1}{x}\right)$

30. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1 + e^{-x^2}\right)$

31. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\ln(2+x) - \ln(1+x)\right]$

32. Sea la función racional $f(x) = \dfrac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0}$, $a_n \neq 0$ y $b_m \neq 0$. Probar que:

a. $n = m \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \dfrac{a_n}{b_m}$

b. $n < m \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$

c. $n > m \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } \dfrac{a_n}{b_m} > 0 \\ -\infty, & \text{si } \dfrac{a_n}{b_m} < 0 \end{cases}$

33. Dar una definición rigurosa de:

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

d. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

34. Probar que todo polinomio de grado impar tiene una raíz (real). Sugerencia: Hallar los límites en $+\infty$ y en $-\infty$.

En los problemas del 35 al 41 hallar las asíntotas horizontales del gráfico de la función dada.

35. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

36. $g(x) = \dfrac{1}{x(x+2)}$

37. $g(x) = \dfrac{x}{4x^2-1}$

38. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

39. $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

40. $h(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

41. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

En los problemas del 42 al 44 hallar las asíntotas verticales y horizontales del gráfico de la ecuación dada.

42. $2x^2 + yx^2 = 16y$

43. $(y^2-4)(x-1) = 8$

44. $x^2y^2 = 2y^2 + x^2 + 1$

SECCION 2.7

LOS LIMITES Y EL NUMERO e

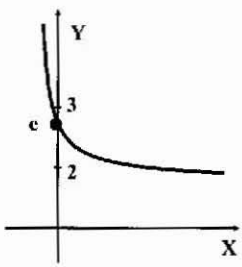
Ya estamos en condiciones de definir al número e.

DEFINICION. El **número e** se define como el siguiente límite:

$$e = \lim_{x \to 0} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}} \qquad (1)$$

Esta definición del número e debe justificarse, probando que tal límite existe. Esto se hace en los cursos avanzados de Cálculo. Además, se prueba que este límite es un número irracional. A modo de ilustración, tenemos la siguiente tabla y el gráfico de

$$y = (1+x)^{1/x}$$



x	$(1+x)^{1/x}$
0,000001	2,718281693
0,0000001	2,718281693
↓ 0 ↑	↓ e ↑
−0,0000001	2,718281964
−0,000001	2,718283188

Esta tabla nos da una aproximación de e con 6 cifras decimales:

$$e \approx 2{,}718281$$

Si en límite (1) hacemos el cambio de variable $z = \frac{1}{x}$ tenemos que:

$$x \to 0 \Leftrightarrow x \to 0^+ \text{ y } x \to 0^- \Leftrightarrow z \to +\infty \quad \text{y} \quad z \to -\infty$$

En consecuencia, el límite (1) es equivalente a decir que los dos límites siguientes se cumplen simultáneamente:

$$(2) \quad e = \lim_{z \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z \quad \text{y} \quad (3) \quad e = \lim_{z \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z$$

Ahora mostramos otros límites importantes:

TEOREMA 2.22 1. $\displaystyle \operatorname*{Lim}_{x \to 0} \left(1 + ax\right)^{\frac{1}{x}} = e^a$ 2. $\displaystyle \operatorname*{Lím}_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

3. $\displaystyle \operatorname*{Lím}_{x \to 0} \frac{e^{bx} - 1}{x} = b$ 4. $\displaystyle \operatorname*{Lím}_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

Demostración

1. Si a = 0, el resultado es obvio. Veamos el caso $a \neq 0$.

Sea $y = ax$. Se tiene que: $x = \dfrac{y}{a}$, $\dfrac{1}{x} = \dfrac{a}{y}$. Además: $x \to 0 \Leftrightarrow y \to 0$

Luego,

$$\operatorname*{Lim}_{x \to 0} \left(1 + ax\right)^{\frac{1}{x}} = \operatorname*{Lim}_{y \to 0} \left(1 + y\right)^{\frac{a}{y}} = \left(\operatorname*{Lim}_{y \to 0}\left(1 + y\right)^{\frac{1}{y}}\right)^a = e^a$$

2. $$\operatorname*{Lím}_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \operatorname*{Lím}_{x \to 0} \ln\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = \ln\left(\operatorname*{Lím}_{x \to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln e = 1$$

3. Sea $y = e^{bx} - 1$. Se tiene que:

$e^{bx} = 1 + y$, $x = \dfrac{1}{b}\ln(1+y)$ y $x \to 0 \Leftrightarrow y \to 0$. Luego,

$$\operatorname*{Lím}_{x \to 0} \frac{e^{bx} - 1}{x} = \operatorname*{Lím}_{y \to 0} \frac{1 + y - 1}{\frac{1}{b}\ln(1+y)} = b \operatorname*{Lím}_{y \to 0} \frac{y}{\ln(1+y)}$$

$$= b \frac{1}{\operatorname*{Lin}\limits_{y \to 0} \dfrac{\ln(1+y)}{y}} = b\left(\frac{1}{1}\right) = b$$

4. Teniendo en cuenta que $a^x = e^{x \ln a}$ y la parte 3 anterior con **b** = ln a, tenemos:

$$\operatorname*{Lím}_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \operatorname*{Lím}_{x \to 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x} = \ln a$$

PROBLEMAS RESUELTOS 2.7

PROBLEMA 1. Hallar $\displaystyle \operatorname*{Lím}_{x \to 0} \frac{1 - e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$

Solución

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{-x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \dfrac{1}{e^x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{e^x} \, \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{e^x} \, \frac{\dfrac{e^x - 1}{x}}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}$$

$$= \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{e^x} \right) \left(\frac{\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}}{\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}} \right) = \left(\frac{1}{e^0} \right) \left(\frac{1}{1} \right) = 1$$

PROBLEMAS PEOPUESTOS 2. 7

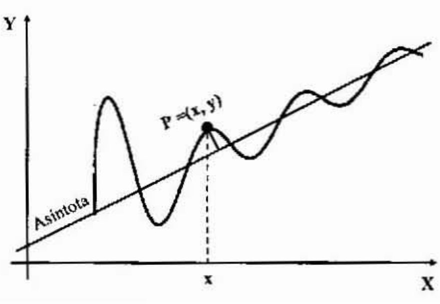
Hallar los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + ax)}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(a + x) - \ln a}{x}$
3. $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{\ln x - 1}{x - e}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e}{x - 1}$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} x \left(e^{1/x} - 1 \right)$

SECCION 2.8
ASINTOTAS OBLICUAS

Además de asíntotas verticales y horizontales, tenemos también asíntotas oblicuas.

En general, se dice que una recta L es una asíntota de una curva C si la distancia d(P, L), de un punto P cualquiera de la curva C a la recta L, tiende a 0 a medida que P se aleja del origen de coordenadas.



Cuando la curva es la gráfica de una función, esta idea es captada en la siguiente definición:

DEFINICION. La recta L: y = **mx + b** es una asíntota oblicua de la gráfica de la función y = **f(x)** si se cumple que:

$$\text{(1)} \quad \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (mx + b) \right] = 0 \quad \text{ó} \quad \text{(2)} \quad \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - (mx + b) \right] = 0$$

Pera ser más precisos: Se dice que la recta **y = mx + b** es una **asíntota oblicua a la derecha** si sucede (1) o que es una **asíntota oblicua a la izquierda** si sucede (2).

La condición (1) o (2) nos dice que cuando $x \to +\infty$ o cuando $x \to -\infty$, la distancia entre del punto (x, f(x)) del gráfico y el punto (x, mx + b) de la recta, tiende a cero.

Observar que las asíntotas horizontales son un caso particular de las asíntotas oblicuas. En efecto, una asíntota oblicua con m = 0 es una asíntota horizontal. Para nosotros, como ya hemos tratado las asíntotas horizontales aparte, cuando hablemos de asíntotas oblicuas entenderemos que no es horizontal, o sea $m \neq 0$,

En vista de la unicidad del límite cuado $x \to +\infty$, toda gráfica tiene, a lo más, una asíntota oblicua a la derecha. De modo análogo, toda gráfica tiene, a lo más, una asíntota oblicua a la izquierda. Una misma recta puede ser, a la vez, asíntota oblicua a la derecha y asíntota oblicua a la izquierda.

Entre las funciones cuyas gráficas tienen asíntotas oblicuas están las funciones racionales $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ cuyo grado del numerador p(x) es una unidad mayor que el grado del denominador q(x). En efecto, si dividimos p(x) entre q(x), se tiene que f(x) tiene la forma:

$$f(x) = mx + b + \frac{h(x)}{q(x)},$$

donde el grado del polinomio h(x) del numerador es menor que el grado del denominador q(x). En consecuencia,

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{h(x)}{q(x)} = 0$$

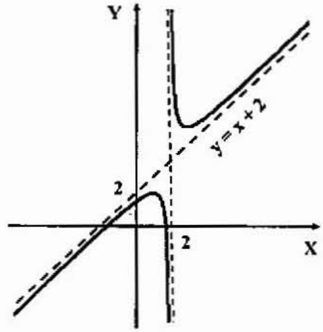
Este resultado nos dice que la recta y = mx + b es una asíntota oblicua, tanto a la derecha como a la izquierda, de la gráfica de y = f(x). En efecto:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - (mx + b) \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\left(mx + b + \frac{h(x)}{q(x)} \right) - \left(mx + b \right) \right]$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{h(x)}{q(x)} = 0$$

EJEMPLO 1. Hallar las asíntotas oblicuas de

$$f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$$



Solución

a. Tenemos que

$$f(x) = \frac{x^2-3}{x-2} = x+2 + \frac{1}{x-2}$$

Luego, $y = x + 2$ es una asíntota oblicua.
Observar que $x = 2$ es una asíntota vertical.

¿Cómo encontrar las asíntotas oblicuas si $y = f(x)$ no es función racional? O sea, si $y = mx + b$ es una asíntota, como hallar las constantes m y b? El siguiente teorema nos da la respuesta.

TEOREMA 2.23 **a.** $y = mx + b$ es una asíntota oblicua a la **derecha** de $y = f(x)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad y \quad \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - mx \right] = b$$

b. $y = mx + b$ es una asíntota oblicua a la **izquierda** de $y = f(x)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad y \quad \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - mx \right] = b$$

Demostración

Ver el problema resuelto 4.

EJEMPLO 2. Hallar las asíntotas oblicuas al gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

Solución

Asíntota oblicua a la derecha.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x/x}{\sqrt{x^2-1}\,/\,x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1-1/x^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - x \right]$$

Pero,

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - x = \frac{x^2 - x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\left(x^2 - x\sqrt{x^2-1}\right)\left(x^2 + x\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2-1}\left(x^2 + x\sqrt{x^2-1}\right)}$$

$$= \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}\left(x^2 + x\sqrt{x^2-1}\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2-1}/x\right)\left[\left(x^2 + x\sqrt{x^2-1}\right)/x\right]}$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{1-1/x^2}\right)\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)}$$

Por lo tanto,

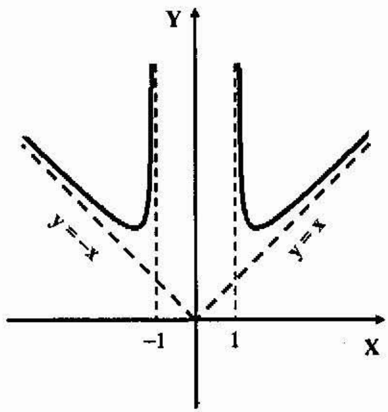
$$b = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{1-1/x^2}\right)\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1-0}(+\infty)} = 0$$

Luego, $y = x$ es asíntota oblicua a la derecha.

Asíntota oblicua a la izquierda.

Podríamos proceder como en el caso anterior, calculando los límites respectivos cuando $x \to -\infty$. Sin embargo, observamos que la función es par, $f(-x) = f(x)$, y, por lo tanto, su gráfico es simétrico respecto al eje Y. Teniendo en cuenta este hecho, rápidamente concluimos que la asíntota oblicua a la izquierda es $y = -x$.

Observar que las rectas $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales.



PROBLEMAS RESUELTOS 2.8

PROBLEMA 1. Hallar las asíntotas oblicuas de

$$f(x) = \tan^{-1}(x) - x$$

Solución

Considerando que $\lim\limits_{x \to +\infty} \tan^{-1}(x) = \dfrac{\pi}{2}$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \tan^{-1}(x) = -\dfrac{\pi}{2}$ se tiene:

Asíntota oblicua a la derecha.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\tan^{-1}(x) - x}{x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\tan^{-1}(x)}{x} - 1 \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\tan^{-1}(x)}{x} \right) - 1 = \frac{\pi/2}{+\infty} - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(\tan^{-1}(x) - x \right) - (-x) \right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$$

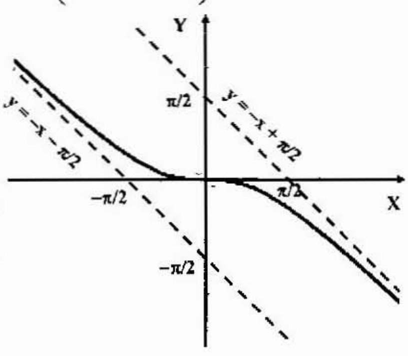
Luego, $y = -x + \dfrac{\pi}{2}$ es una asíntota a la derecha de $f(x) = \tan^{-1}(x) - x$

Asíntota oblicua a la izquierda.

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\tan^{-1}(x) - x}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\tan^{-1}(x)}{x} - 1 \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\tan^{-1}(x)}{x} \right) - 1$$

$$= \frac{-\pi/2}{-\infty} - 1 = 0 - 1 = -1$$



$$b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left[\left(\tan^{-1}(x) - x \right) - (-x) \right]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \tan^{-1}(x) = -\frac{\pi}{2}$$

Luego, $y = -x - \dfrac{\pi}{2}$ es una asíntota a la izquierda de

$$f(x) = \tan^{-1}(x) - x$$

PROBLEMA 2. Hallar las asíntotas oblicuas de

$$f(x) = x^{1/3}(1-x)^{2/3}$$

Solución

Asíntota oblicua a la derecha.

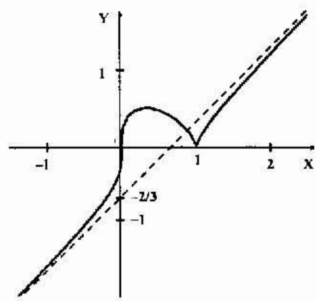
$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{1/3}(1-x)^{2/3}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(1-x)^{2/3}}{x^{2/3}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} - 1\right)^{2/3} = (0-1)^{2/3} = 1$$

Por otro lado, de acuerdo al problema resuelto 3 de la sección 2.6 tenemos:

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to +\infty} \left[x^{1/3}(1-x)^{2/3} - x\right] = -\frac{2}{3}$$

Luego, $y = x - \dfrac{2}{3}$ es asíntota oblicua a la derecha de $f(x) = x^{1/3}(1-x)^{2/3}$



Asíntota oblicua a la izquierda.

En forma enteramente análoga a la parte anterior, obtenemos que la misma recta, $y = x - \dfrac{2}{3}$ es asíntota oblicua a la izquierda de $f(x) = x^{1/3}(1-x)^{2/3}$

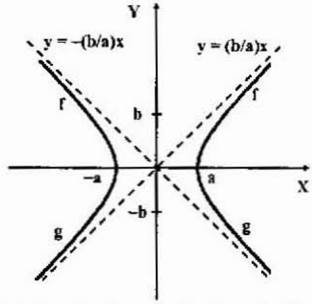
PROBLEMA 3. Demostrar que las rectas $y = \dfrac{b}{a}x$ e $y = -\dfrac{b}{a}x$ son asíntotas oblicuas de la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Solución

La hipérbola puede considerada como el gráfico de las funciones f y g que construimos a continuación.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(x^2-a^2\right)$$

$$\Leftrightarrow y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$



Sean

$$f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \quad \text{y} \quad g(x)=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

La gráfica de f es la parte de la hipérbola sobre el eje X, y la de g es la de abajo.

Mostraremos que las rectas $y=\frac{b}{a}x$ e $y=-\frac{b}{a}x$ son asíntotas oblicuas de ambas funciones, f y g. Verificaremos este resultado sólo para f, ya que para el caso de g, el proceso es exactamente igual.

$$\mathbf{m}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{b}{a}\frac{1}{x}\sqrt{x^2-a^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{b}{a}\frac{1}{|x|}\sqrt{x^2-a^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{b}{a}\sqrt{1-a^2/x^2}\right)=\frac{b}{a}\sqrt{1-0}=\frac{b}{a}$$

$$\mathbf{b}=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{b}{a}x\right]$$

$$=\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-a^2}-x\right]=\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}=\frac{b}{a}(0)=0$$

Luego, $y=\frac{b}{a}x$ es una asíntota oblicua por la derecha.

Similarmente:

$$\mathbf{m}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\frac{b}{a}, \qquad \mathbf{b}=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=0$$

Luego, $y=-\frac{b}{a}x$ es una asíntota oblicua por la izquierda.

PROBLEMA 4. Demostrar el teorema 2.23:

a. $y = mx + b$ es una asíntota oblicua a la derecha de $y = f(x)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=b$$

b. $y = mx + b$ es una asíntota oblicua a la izquierda de $y = f(x)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=m \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=b$$

Solución

a. ($\Rightarrow$) Si $y = mx + b$ es una asíntota oblicua a la derecha de $y = f(x)$, entonces

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (mx + b) \right] = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Sacando factor común x tenemos:

$$\lim_{x \to +\infty} x \left[\frac{f(x)}{x} - m - \frac{b}{x} \right] = 0$$

Puesto que $\lim_{x \to +\infty} (x) = +\infty$, para que se cumpla la igualdad anterior, debemos tener que:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m - \frac{b}{x} \right] = 0$$

Aún más, puesto que $\lim_{x \to +\infty} \frac{b}{x} = 0$, tenemos que

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m \right] = 0$$

De donde,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

Por otro lado, teniendo en cuenta (1), obtiene:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - mx \right] = b$$

($\Leftarrow$) $\quad \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - mx \right] = b \;\Rightarrow\; \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - mx - b \right] = 0$

Luego, $y = mx + b$ es una asíntota a la derecha de $y = f(x)$.

b. Se procede como en a.

PROBLEMAS PROPUESTOS 2.8

Hallar las asíntotas oblicuas al gráfico de las siguientes funciones

1. $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ **2.** $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ **3.** $y = \dfrac{x^3}{2(x^2+1)^2}$

4. $y = \dfrac{2x^4 + x^2 + x}{x^3 - x^2 + 2}$ **5.** $y = \sqrt{x^2 - 1}$ **6.** $y = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$

7. $f(x) = x - 2 + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}$ **8.** $f(x) = x^{2/3}(6 - x)^{1/3}$

BREVE HISTORIA DE π

Se ha sostenido, con justa razón, que la historia de π es un "pequeño espejo de la historia del hombre".

π, la constante más famosa de todos los tiempos, es la razón entre la longitud de cualquier circunferencia y la longitud de su diámetro.

La historia de π comienza con el inicio de la civilización, cuando el hombre precisa de mediciones precisas con motivos agrícolas o arquitectónicos.

Al inicio, alrededor de 2.000 años antes de Cristo, el valor de π fue aproximado empíricamente. Así, para los antiguos hebreos, $\pi = \mathbf{3}$*; para los babilonios,* $\pi = 3 + 1/8 = \mathbf{3{,}125}$*; para los antiguos egipcios,* $\pi = 4\times(8/9)^2 = \mathbf{3{,}16045}$

El empirismos en el cálculo de π fue superado por el gran ***Arquímedes,*** *quien consideró a la longitud de la circunferencia como el límite de los perímetros de polígonos regulares inscritos y circunscritos a la circunferencia. Mediante este método logró probar que:*

$\mathbf{3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7}$ *o bien, en decimales,* $\mathbf{3{,}1408 < \pi < 3{,}142858}$

Con la llegada de los romanos, tanto la historia de π como del mundo, pasa por tiempos obscuros, hasta llegada del Renacimiento. En siglo XVI aparece el matemático francés François Vièta (1.540–1.603), considerado como el padre del Álgebra. Vièta Aplicó el Álgebra y la Trigonometría al método de Arquímedes, mejorando los resultados. Logra expresar a π como una serie infinita. En 1,593, haciendo uso de esta serie, calcula 10 cifras decimales, que son la siguientes:

$$\pi \approx \mathbf{3{,}1415926535}$$

En 1.615, el matemático alemán Ludolf von Ceulen, mediante otra serie infinita calcula 35 decimales de π.

En 1.761, el físico-matemático alemán Johann Heinrich Lambert probó que π es número irracional. En consecuencia, su expresión decimal es infinita y no periódica.

En 1.844, ***Johann Martin Zacharias Dase*** *(1.824–1.861), usando series y alrededor de dos meses de trabajo duro, calculó 200 dígitos. En 1.989,* ***los hermanos Chudnovsky****, dos matemáticos de la* ***Universidad de Columbia*** *(Nueva York), usando una computadora Cray 2 y una IBM 3090-VF, calcularon 1.011.196.691 dígitos. El record, hasta 1.995, lo tiene* ***Yasumasa Kanada****, profesor de la U. de Tokio, quien ha calculado 6.442.450.000 dígitos.*

Para usos prácticos no se requiere mucha exactitud de π. Así, sólo se requieren 39 decimales para computar la longitud de la circunferencia del universo conocido, con un error no mayor que el radio de un átomo de hidrógeno.

Arquímedes
(287–212 A C)

François Vièta
(1.540–1.603)

3

LA DERIVADA

ISAAC NEWTON
(1.642 – 1.727)

Isaac Newton
(1.642 – 1.727)

***Isaac Newton** nació en Woolsthorpe, Inglaterrra, el día de navidad de 1.642. Su obra cambió el pensamiento científico de su época y aún en la ciencia actual sus ideas están presentes.*

*En 1.661, a la edad de 18 años, ingresó al Trinity College de Cambrige, donde conoció a otro ilustre matemático, Isaac Barrow (1.630–1.677). Se graduó en 1.665. En el otoño de ese año, una epidemia azotó el área de Londres y la universidad tuvo que cerrar sus puertas por año y medio. Newton regresó a la granja de su familia en su pueblo natal. Esta etapa fue muy fructífera en la vida del insigne científico. Se dice que fue allí donde ocurrió el incidente de la manzana: Newton, al ver caer una manzana de un árbol, relacionó la caída de ésta con la atracción gravitacional que ejerce la tierra sobre la luna, naciendo así la famosa ley de la gravitación universal. También fue en esta época cuando desarrolló, lo que él llamó, el método de las fluxiones, que fueron el fundamento del **Cálculo Diferencial**. Estas ideas también fueron desarrolladas simultáneamente e independientemente por el matemático y filósofo alemán G. Leibniz (1.646-1.716). A ambos científicos se les concede la paternidad del **Cálculo**.*

En 1.667 regresa a Cambrige y en 1.669 Borrow renuncia a su cargo de profesor de matemáticas en el Trinity College a favor de Newton.

Sus investigaciones en óptica las aplicó para construir el primer telescopio de reflexión. Gracias a este invento ingresó a la Sociedad Real, la institución científica inglesa de gran renombre y de la cual llegó a ser su presidente.

*En 1.687 se publicó su obra capital: **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica** (Principios Matemáticos de la Filosofía Natural), en la que presenta las leyes de la mecánica clásica y su famosa teoría de la **gravitación universal**. Con esta obra ganó gran renombre y fue razón principal para que en 1.705 lo nombraran caballero del Imperio.*

ACONTECIMIENTOS IMPORTANTES

Durante la vida de Isaac Newton, en América y en el mundo hispano sucedieron los siguientes hechos notables: En 1.706 nace en Boston Benjamín Franklin, científico y estadista norteamericano. El 22 de diciembre de 1.721 Felipe V convierte el Colegio de Santa Rosa de Caracas en la universidad de Caracas (U. Central), que es inaugurada en 1.725.

SECCION 3.1

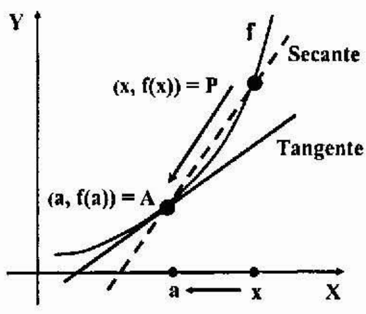
LA DERIVADA

La noción de derivada tuvo su origen en la búsqueda de soluciones a dos problemas, uno de la Geometría y otro de la Física, que son: Encontrar rectas tangentes a una curva y hallar la velocidad instantánea de un objeto en movimiento. El plantemiento del problema de las tangentes se remonta hasta la Grecia Antigua; sin embargo, para encontrar su solución debieron pasar muchos siglos. En el año 1.629, Pierre Fermat encontró un interesante método para construir las tangentes a una parábola. Su idea fue la de considerar a la recta tangente como la posición límite de rectas secantes. Este método, como veremos a continuación, contiene implícitamente el concepto de derivada. A partir de aquí, no pasó mucho tiempo para que Newton (1.624–1.727) y Leibniz (1.646–1.716), dos gigantes de la matemática, iniciaran el estudio sistemático de la derivada, con lo que dieron origen al Cálculo Diferencial.

RECTA TANGENTE

Sea $y = f(x)$ una función real de variable real y sea $A = (a, f(a))$ un punto fijo de su gráfico. Buscamos la recta tangente al gráfico de la función en el punto A. Para no tener dificultades vamos a asumir que nuestra función es continua y su gráfico se desarrolla suavemente (sin vértices). Tomemos otro punto $P = (x, f(x))$ del gráfico, cercano al punto de tangencia $A = (a, f(a))$, y tracemos la recta secante que pasa por A y P.

Si movemos a P sobre el gráfico en tal forma que P se aproxime a A, la recta secante se aproximará a la recta tangente. En el límite, la secante coincidirá con la tangente. Esto es, la recta tangente es la posición límite de la recta secante cuando P tiende a A.



Veamos el punto anterior en forma analítica. Como la recta tangente pasa por el punto $A = (a, f(a))$, para obtener su ecuación bastará encontrar su pendiente.

La pendiente de la recta secante que pasa por $P = (x, f(x))$ y $A = (a, f(a))$ es

$$m_{PA} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Ahora, cuando el punto $P = (x, f(x))$ se aproxima a $A = (a, f(a))$, la secante se aproxima a la tangente y la pendiente de la secante se aproximará a la pendiente de la tangente. Pero, decir que $P = (x, f(x))$ se aproxima a $A = (a, f(a))$ es equivalente a decir que x se aproxima a a. Es pues razonable establecer que la pendiente m de la recta tangente al gráfico de la función $y = f(x)$ en el punto $A = (a, f(a))$ es

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \qquad \text{(i)}$$

VELOCIDAD INSTANTANEA

Supongamos que un automóvil cruza por dos ciudades distantes entre sí 180 Kms. y que estos 180 Kms. los recorre en 3 horas. El automóvil, en este recorrido, viajó a una velocidad promedio de $\frac{180}{3} = 60$ Kms/h.

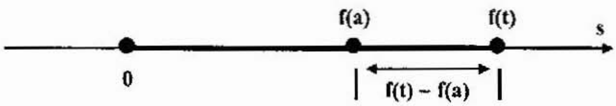
En general tenemos que:

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

Regresemos al caso del automóvil. La aguja del velocímetro no se ha mantenido estática marcando 60 Kms/h, que es la velocidad promedio, sino que ésta ha estado variando, algunas veces marcando 0 (en los semáforos) y otras marcando números mayores que 60. Esto se debe a que la aguja marca la **velocidad instantánea** y no la velocidad promedio. ¿Cómo se relacionan estas dos velocidades? A continuación contestamos esta inquietud tratando el problema en forma más general.

Supongamos que un objeto se mueve a lo largo de una recta de acuerdo a la ecuación **s = f(t)**. Aquí la variable **t** mide el tiempo y la variable **s** mide el desplazamiento del objeto contabilizado a partir del origen de coordenadas . A esta función s = f(t) la llamaremos **función de posición**.

Buscamos una expresión para la velocidad instantánea en un instante fijo **a**. A esta velocidad la denotaremos por **v(a)**. Sea t un instante cualquiera cercano al instante **a**. En el intervalo de tiempo entre **a** y **t** el cambio de posición del objeto es f(t) − f(a).



s = f(t)

La velocidad promedio en este intervalo de tiempo de **a** a **t** es:

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

Esta velocidad promedio es una aproximación a la **velocidad instantánea v(a).** Esta aproximación será mejor a medida que **t** se acerque más al instante **a**. Por tanto, es natural establecer que:

$$v(a) = \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \qquad \text{(ii)}$$

Tanto en el problema de la recta tangente como en él de la velocidad instantánea, hemos llegado a un mismo límite ((i) y (ii)). En este límite radica la esencia del Cálculo Diferencial. Su importancia rebasa a los problemas geométricos y físicos que le dieron origen, y merece ser tratado independientemente. Este límite es la derivada.

DEFINICION. **La derivada de f en a,** denotada por $f'(a)$, es el siguiente límite:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad (1)$$

La derivada $f'(a)$, por ser un límite, puede o no existir. En el caso de que exista diremos que la función **f es diferenciable en el punto a**.

En esta definición está implícito que f debe estar definida en un intervalo abierto que contiene a **a**.

Al límite anterior lo podemos expresar en otra forma ligeramente diferente.

Si $h = x - a$, entonces $x = a + h$ y $x \to a \Leftrightarrow h \to 0$.

Luego, (1) es equivalente a:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad (2)$$

Es tradicional llamar Δx (delta x) a la diferencia $x - a$. Esto es,

$$\Delta x = x - a$$

En este caso, $x = a + \Delta x$ y $x \to a \Leftrightarrow \Delta x \to 0$.

Con esta notación, al límite (1) ó al (2) los podemos escribir de la manera siguiente, obteniendo la expresión tradicional para la derivada:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \qquad (3)$$

A $\Delta x = x - a$ se le llama **incremento de x,** y expresa el cambio que experimenta la variable independiente al pasar del valor a al valor $x = a + \Delta x$.

La diferencia $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$ es el **incremento de la función,** y expresa el cambio de los valores de la función al pasar de $f(a)$ a $f(a + \Delta x)$.

El cociente $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ es la **razón incremental,** y de acuerdo a la igualdad (3) tenemos que:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Es decir, la derivada es el límite de la razón incremental cuando Δx tiende a 0.

Para hallar la derivada $f'(a)$ se utilizan cualquiera de los 3 límites: (1), (2) ó (3).

EJEMPLO 1. Dada la función $f(x) = x^2$, hallar $f'(3)$.

Solución

Usaremos la fórmula (1):

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3^2}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \to 3} (x+3) = 3 + 3 = 6$$

EJEMPLO 2. Dada la función $g(x) = \dfrac{1}{x}$, hallar $g'(-2)$.

Solución

Usaremos la fórmula (2) de la derivada:

$$g'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{g(-2+h) - g(-2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{-2+h} - \dfrac{1}{-2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2 - (-2+h)}{(-2)h(-2+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{(-2)h(-2+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{2(-2+h)} = \frac{1}{2(-2+0)} = -\frac{1}{4}$$

EJEMPLO 3. Probar que la siguiente función es diferenciable en 0 y que $f'(0) = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Solución

Debemos probar que existe $f'(0)$. Recordando el problema resuelto 1, sección 2.2:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h \operatorname{sen} \frac{1}{h} = 0.$$

EJEMPLO 4. Probar que $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no es diferenciable en 0. Esto es, no existe $f'(0)$.

Solución

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$$

Como $+\infty$ no es un número real, concluimos que no existe $f'(0)$.

DERIVADAS POR LA DERECHA Y POR LA IZQUIERDA

DEFINICION. **La derivada por la derecha y la derivada por la izquierda de f en a** son los siguientes límites, respectivamente:

$$(1) \quad f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad (2) \quad f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Es fácil ver que:

$$\exists\, f'(a) \Leftrightarrow \exists\, f'_+(a),\ \exists\, f'_-(a) \text{ y } f'_+(a) = f'_-(a)$$

EJEMPLO 5. Dada la función valor absoluto $f(x) = |x|$.

a. Hallar $f'_+(0)$ **b.** Hallar $f'_-(0)$ **c.** Probar que f no es diferenciable en 0.

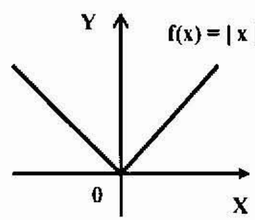
Solución

a. $$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

b. $$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

c. Como las derivadas laterales no son iguales, concluímos que no existe $f'(0)$ y, por tanto, $f(x) = |x|$ no es diferenciale en el punto 0.

Este resultado puede explicarse geométricamente: El gráfico de $f(x) = |x|$ tiene un vértice en el punto (0, 0). Este vértice no permite asignarle una recta tangente al gráfico en este punto, ya que al pasar de los puntos a la izquierda de (0, 0) a los de la derecha hay un cambio brusco de pendientes de -1 a 1.



LA FUNCION DERIVADA

DEFINICION. **La derivada de la función** f es la función f', tal que su valor en un número x del dominio de f es la derivada de f en x:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

El dominio de f' está formado por los puntos x del dominio de f en los cuales existe $f'(x)$. Es claro que el dominio de f' es un subconjunto del dominio de f.

Otro símbolo para f' es Df; esto es $\mathbf{Df = f'}$ y en el caso de que se quiera especificar la variable independiente, se escribe $\mathbf{D_x f}$, que se lee "la derivada de f respecto a x". Se tiene, entonces

$$\mathbf{D_x f(x) = f'(x)}$$

EJEMPLO 6. **a.** Probar que la derivada de $f(x) = x^2$ es la función $f'(x) = 2x$.

b. Usando la parte (a) hallar $f'(3)$ y observar que el resultado del ejemplo 1 es un caso particular del resultado (a).

Solución

a. Sea x un punto cualquiera del dominio de f.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

Esto es, $f'(x) = 2x$ y el dominio de f' es el mismo que el de f, que es todo $\mathbb{R}$.

b. En $f'(x) = 2x$, tomando $x = 3$, se tiene que $f'(3) = 2(3) = 6$. Este resultado coincide con el obtenido en el ejemplo 1.

EJEMPLO 7. **a.** Probar que la derivada de $g(x) = \frac{1}{x}$ es la función

$$D_x g(x) = -\frac{1}{x^2}$$

b. Usando la parte (a) hallar $D_x g(-2)$ y observar que el resultado del ejemplo 2 es un caso particular del resultado (a).

Solución

a. Sea x un punto cualquiera del dominio de g. Esto es $x \neq 0$.

$$D_x g(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x - (x+h)}{h\,x(x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x\,(x+0)} = -\frac{1}{x^2}$$

Esto es, $D_x g(x) = g'(x) = -\frac{1}{x^2}$

El dominio de $D_x g(x) = -\frac{1}{x^2}$ es el mismo que el de $g(x) = \frac{1}{x}$, que es $\mathbb{R} - \{0\}$.

b. En $D_x g(x) = -\frac{1}{x^2}$, tomando $x = -2$, se tiene $D_x\, g(-2) = -\frac{1}{(-2)^2} = -\frac{1}{4}$.

Este resultado coincide con el obtenido en ejemplo 2: $g'(-2) = -\frac{1}{4}$.

LA NOTACION DE LEIBNIZ

Además de la notación que hemos introducido para designar a la función derivada existen otras. Entre éstas tenemos la notación clásica, que fue introducida por Leibniz durante la época del nacimiento del Cálculo. Esta notación para designar la derivada de una función $y = f(x)$ usa cualquiera de las cuatro expresiones siguientes:

1. $\frac{dy}{dx}$ **2.** $\frac{df}{dx}$ **3.** $\frac{df(x)}{dx}$ **4.** $\frac{d}{dx}(f(x))$

En el ejemplo 6 encontramos que la derivada de la función $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$. Con la notación de Leibniz este resultado se escribe así:

$$\frac{df(x)}{dx} = 2x \quad \text{o bien,} \quad \frac{d(x^2)}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x.$$

y si en lugar de $f(x) = x^2$ escribimos $y = x^2$, entonces su derivada se expresaría así:

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2x$$

Regresando a la notación incremental, si una función es denotada por $y = f(x)$, entonces el incremento de la función podemos expresarlo así: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ y a la derivada, con la notación de Leibniz, así:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

En esta expresión nos inspiraremos en un capítulo posterior para asignar significados propios a dx y a dy. Aquí $\frac{dy}{dx}$ no debe interpretarse como una fracción, sino simplemente como otra notación para la derivada $f'(x)$.

Si $y = f(x)$, con la notación de Leibniz, la derivada $f'(a)$ se escribe así:

$$y'(a), \quad \frac{dy}{dx}(a), \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \quad \text{ó} \quad \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}$$

EJEMPLO 8. Probar que $\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, donde $x > 0$.

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Observar que el dominio de $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ es $(0, +\infty)$.

NOTACION. Si una función se expresa mediante otras variables, que no sean x ó y, la notación de la derivada cambiará de acuerdo a las nuevas variables. Así, la derivada de la función $u = t^2$ se expresa en la forma siguiente:

1. $u' = 2t$ **2.** $\frac{du}{dt} = 2t$ **3.** $\frac{d(t^2)}{dt} = 2t$ **4.** $D_t\left(t^2\right) = 2t$.

DIFERENCIABILIDAD Y CONTINUIDAD

El siguiente es un resultado importante que relaciona la diferenciabilidad con la continuidad.

TEOREMA 3.1 Si f es diferenciable en el punto a, entonces f es continua en a.

Demostración

Consideremos la siguiente identidad

$$f(x) - f(a) = (x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Tomemos límites a ambos lados:

$$\lim_{x \to a}\left[f(x)-f(a)\right] = \lim_{x \to a}\left[(x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]$$

$$= \left[\lim_{x \to a}(x-a)\right]\left[\lim_{x \to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right] = 0 \cdot f'(a) = 0$$

Esto es, $\lim_{x \to a}\left[f(x)-f(a)\right] = 0$. De donde, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Esta última igualdad nos dice que f es continua en a.

OBSERVACION.

El recíproco del teorema anterior no se cumple. Una función puede ser continua en un punto y no ser diferenciable en ese punto. La función valor absoluto nos ilustra el caso. Esta función es continua en el punto 0. Sin embargo, como se mostró en el ejemplo 5, esta función no es diferenciable en 0.

Igual situación ocurre con la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$, del ejemplo 4, la cual también es continua en 0, pero no es diferenciable en ese punto.

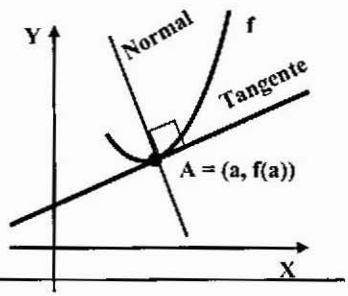
RECTAS TANGENTES

Damos respaldo oficial al problema geométrico de la recta tangente, que nos sirvió de motivación para introducir la derivada.

DEFINICION. Sea f una función diferenciable en el punto a.

a. La **recta tangente** al gráfico de la función f en el punto A = (a, f(a)) es la recta que pasa por A y tiene por pendiente $m = f'(a)$. O sea, es la recta

$$\mathbf{y - f(a) = f'(a)(x - a).}$$



b. La recta normal al gráfico de la función f en el punto A = (a, f(a)) es la recta que pasa por A y es perpendicular a la recta tangente en A. O sea, es la recta

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a), \text{ donde } f'(a) \neq 0.$$

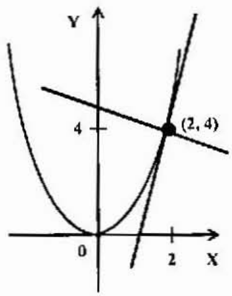
EJEMPLO 9. Sea la función $f(x) = x^2$. Hallar:

a. La recta tangente al gráfico de f en el punto (2, 4).
b. La recta normal al gráfico de f en el punto (2, 4).

Solución

a. En el ejemplo 6 probamos que la derivada de $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$. Cuando $x = 2$ tenemos $f'(2) = 2(2) = 4$. Luego, la recta tangente al gráfico de f en el punto (2,4) es

$$y - f(2) = f'(x)(x - 2) \Rightarrow y - 4x + 4 = 0$$



b. La recta normal al gráfico de f en el punto (2.4) es

$$y - f(2) = -\frac{1}{f'(2)}(x - 2) \Rightarrow y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2)$$

$$\Rightarrow 4y + x - 18$$

EJEMPLO 10. Sea la función $g(x) = \frac{1}{x}$. Hallar:

a. La recta tangente al gráfico de g en el punto donde $x = -\frac{1}{2}$

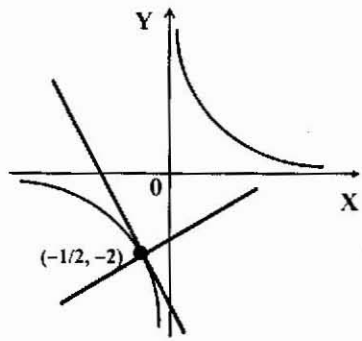
b. La recta normal al gráfico de g en el punto donde $x = -\frac{1}{2}$

Solución

a. Hallemos $g'(-1/2)$. Por el ejemplo 7.a. sabemos que

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{y, por tanto,}$$

$$g'(-1/2) = -\frac{1}{(-1/2)^2} = -4.$$



Por otro lado, $g(-1/2) = \frac{1}{-1/2} = -2.$

Luego, la recta tangente buscada es:

$$y - g(-1/2) = g'(-1/2)(x - (-1/2)) \Rightarrow$$

$$y - (-2) = -4(x + 1/2) \Rightarrow y + 4x + 4 = 0$$

b. La recta normal buscada es

$$y - g(-1/2) = -\frac{1}{g'(-1/2)}(x - (-1/2)) \Rightarrow y - (-2) = -\frac{1}{-4}(x + 1/2))$$

$$\Rightarrow 8y - 2x + 15 = 0.$$

PROBLEMAS RESUELTOS 3.1

PROBLEMA 1. Hallar a y b para que la siguiente función sea diferenciable en 1.

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Solución

Por el teorema 3.1, si f es diferenciable en 1, f debe ser continua en 1. Luego:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

Pero,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (ax + x) = a + b$$

Luego, $a + b = 1$ **(1)**

Por otro lado, por ser f diferenciable en 1, la derivada por la derecha en este punto debe ser igual a su derivada por la izquierda. Esto es,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

Pero,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(\sqrt{1+h} - 1)(\sqrt{1+h} + 1)}{h(\sqrt{1+h} + 1)}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+h} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{a(1+h) + b - 1}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{ah + (a+b) - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{ah + 1 - 1}{h} \lim_{h \to 0^-} \frac{ah}{h} = a$$

Luego, $a = \frac{1}{2}$ **(2)**

Finalmemte, de (1) y (2), obtenemos $a = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{2}$.

PROBLEMA 2. Hallar la derivada de la función $f(x) = x^3$.

Solución

Sea x un punto cualquiera del dominio de f.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3] - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h[3x^2 + 3xh + h^2]}{h} = \lim_{h \to 0} [3x^2 + 3xh + h^2] = 3x^2$$

Luego, $f'(x) = 3x^2$ ó bien $\frac{d(x^3)}{dx} = 3x^2$, con dominio todo $\mathbb{R}$.

PROBLEMA 3. Hallar la derivada de la función $f(x) = |x|$.

Solución

Sabemos, por el ejemplo 5, que no existe $f'(0)$. Veamos qué sucede cuando $x \neq 0$.

Si $x > 0$, entonces $|x| = x$. Tomamos h suficientemente pequeño para que $x + h > 0$ y, por lo tanto, $|x + h| = x + h$. En este caso tenemos que:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$. Tomamos h suficientemente pequeño para que $x + h < 0$ y, por tanto, $|x + h| = -(x + h)$. En este caso tenemos que:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-(x+h) - (-x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = -1$$

En conclusión, la derivada de la función $f(x) = |x|$ es

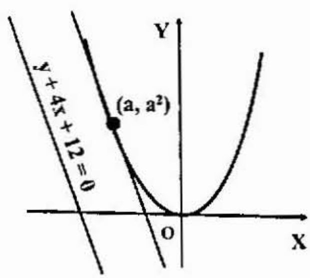
$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{con dominio } \mathbb{R} - \{0\}.$$

PROBLEMA 4. La tangente a la parábola $y = x^2$ en cierto punto P es paralela a la recta

$$L: y + 4x + 12 = 0.$$

Hallar el punto P y la recta tangente.

Solución



Sea $P = (a, a^2)$. Por el ejemplo 6 sabemos que $y' = 2x$, luego la pendiente de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $P = (a, a^2)$ es $m = 2a$.

Pero, la pendiente de la recta

$L: 4x + y + 12 = 0$ es -4.

Como la tangente y la recta L son paralelas, ambos deben tener igual pendiente. Luego,

$$2a = -4 \Rightarrow a = -2.$$

Por lo tanto, el punto P buscado es $P = (-2, (-2)^2) = (-2, 4)$

La recta tangente a la parábola en $P = (-2, 4)$ es

$$y - 4 = -4(x - (-2)), \quad \text{o sea} \quad 4x + y + 4 = 0$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 3.1

En los problemas del 1 al 9, hallar la derivada de la función en el punto a indicado.

1. $f(x) = 2$ en $a = 1$ **2.** $g(x) = x$ en $a = 3$ **3.** $h(x) = 3x$ en $a = 2$

4. $f(x) = 4x - 1$ en $a = 2$ **5.** $g(x) = 2x^2 - 5$ en $a = -1$ **6.** $h(x) = \frac{3}{x}$ en $a = -2$

7. $f(x) = 3x^2 - 5$ en $a = -1$ **8.** $g(x) = x + \frac{1}{x}$ en $a = 2$ **9.** $h(x) = x^3 + 2$ en $a = -1$

10. Probar que la siguiente función es diferenciable en 0: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

11. Probar que la siguiente función no es diferenciable en 0:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

12. Hallar los valores de a y b para que f sea diferenciable en 1:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 1 \\ \sqrt[3]{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

En los problemas del 13 al 21, hallar la derivada de la función indicada.

13. $f(x) = 2$ **14.** $g(x) = x$ **15.** $h(x) = 3x$ **16.** $f(x) = 4x - 1$ **17.** $g(x) = 2x^2 - 5$

18. $h(x) = \frac{3}{x}$ **19.** $f(x) = 3x^2 - 5$ **20.** $g(x) = x + \frac{1}{x}$ **21.** $h(x) = x^3 + 2$

22. Dada la función $f(x) = x^3 + x^2$

a. Hallar la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en el punto donde $x = 1$.
b. Hallar la recta tangente al gráfico de f en el punto donde $x = 1$.
c. Hallar la recta normal al gráfico de f en el punto donde $x = 1$.

23. Dada la función $g(x) = \sqrt{x - 3}$

a. Hallar la pendiente de la recta tangente al gráfico de g en el punto donde $x = 12$.
b. Hallar la recta tangente al gráfico de g en el punto donde $x = 12$.
c. Hallar la recta normal al gráfico de g en el punto donde $x = 12$.

24. Dada la función $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 7$

a. Hallar su función derivada.
b. ¿En qué punto del gráfico de h la tangente es paralela a la recta $y = 3x + 6$?
c. Hallar la recta tangente al gráfico de h en el punto encontrado en la parte b.

25. Dada la función $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

a. Hallar la función derivada de f.
b. Una tangente al gráfico de f tiene por pendiente 1/2. Hallar una ecuación de esta tangente.

SECCION 3.2

TECNICAS BASICAS DE DERIVACION

Llamaremos **derivación o diferenciación** al proceso de hallar la derivada de una función. En la sección anterior, este proceso fue llevado a cabo aplicando directamente la definición, lo cual dependía del laborioso y tedioso trabajo de calcular ciertos límites. En esta sección presentaremos algunos teoremas que nos permitirán encontrar la derivada de un gran número de funciones en forma rápida y mecánica, sin tener que recurrir a los límites. Algunos resultados los presentaremos usando las diferentes notaciones de la derivada.

TEOREMA 3.2 **Regla de la constante.**

Si f es la función constante $\mathbf{f(x) = c}$, entonces

$$f'(x) = 0. \text{ O bien, } D_x c = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{dc}{dx} = 0$$

Demostración

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

EJEMPLO 1. **a.** $D_x(2) = 0$ **b.** $\dfrac{d(-8)}{dx} = 0$ **c.** $\dfrac{d(\sqrt{3})}{dx} = 0$ **d.** $D_x(\pi) = 0$

TEOREMA 3.3 **Regla de la potencia.**

Si $\mathbf{f(x) = x^n}$ y n es un número real, entonces

$$f'(x) = nx^{n-1}. \text{ O bien}$$

$$D_x(x^n) = nx^{n-1} \quad \text{ó} \quad \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Demostración

Aquí sólo probaremos este teorema para el caso en el que n es un número natural.

Tomando en cuenta el problema resuelto 7 de la sección 2.1 tenemos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}$$

COROLARIO. La derivada de la identidad, $\mathbf{f(x) = x}$, es la función constante

$$f'(x) = 1. \text{ O bien } \frac{dx}{dx} = 1 \quad \text{ó} \quad D_x x = 1$$

Demostración

$$D_x(x) = D_x(x^1) = 1x^0 = 1$$

EJEMPLO 2. **a.** $D_x(x^2) = 2x$ **b.** $\dfrac{d}{dx}\left(x^3\right) = 3x^2$ **c.** $D_x(x^4) = 4x^3$

EJEMPLO 3.

a. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{-2}\right) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}$

b. $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{1/2}\right) = \dfrac{1}{2}x^{1/2-1} = \dfrac{1}{2}x^{-1/2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^{1/2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

c. $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{2/3}\right) = \dfrac{2}{3}x^{2/3-1} = \dfrac{2}{3}x^{-1/3} = \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{x^{1/3}} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

DERIVADA DE LA FUNCION EXPONENCIAL NATURAL

TEOREMA 3.4 $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$ **ó bien** $D_x(e^x) = e^x$

Demostración

De acuerdo al teorema 2.22 parte 3 de la sección 2.7, tenemos que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Ahora, si $f(x) = e^x$, tenemos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^x\left(e^h - 1\right)}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x(1) = e^x$$

DERIVADA DE UNA SUMA O DIFERENCIA

TEOREMA 3.5 **Regla de la suma y de la diferencia.**

Si f y g son funciones diferenciables en x, entonces $f \pm g$ es diferenciable en x y se cumple que:

$$(\mathbf{f} \pm \mathbf{g})'(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}) \pm \mathbf{g}'(\mathbf{x})$$

o, simplemente,

$$(\mathbf{f} \pm \mathbf{g})' = \mathbf{f}' \pm \mathbf{g}'$$

La regla de la suma o diferencia, con las otras notaciones se expresa así:

$$D_x\left[f(x) \pm g(x)\right] = D_x f(x) \pm D_x g(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\, f(x) \pm g(x)\,\right] = \frac{d}{dx}\big(f(x)\big) \pm \frac{d}{dx}(g(x))$$

Demostración

$$(\, f(x) \pm g(x)\,)' = \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) \pm g(x+h)] - [f(x) \pm g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) \pm g'(x).$$

Este resultado se puede extender fácilmente al caso de varios sumandos.

EJEMPLO 4.

a. $D_x\left[e^x + x^3\right] = D_x\left[\, e^x\,\right] + D_x\left[\, x^3\,\right] = e^x + 3x^2$

b. $D_x\left[x^4 - x^2 + 5\right] = D_x\left(x^4\right) - D_x\left(\, x^2\,\right) + D_x(\,5\,) = 4x^3 - 2x + 0 = 4$

DERIVADA DE UN PRODUCTO

TEOREMA 3.6 **Regla del producto.**

Si f y g son funciones diferenciables en x, entonces fg es diferenciable en x y se cumple que

$$(\, f\, g\,)'(x) = f(x)\; g'(x) + g(x)\; f'(x)$$

o, simplemente,

$$(\, f\, g\,)' = f\, g' + g\, f'$$

La regla del producto, con las otras notaciones se expresa así:

$$D_x\left[\, f(x)\, g(x)\,\right] = f(x)\, D_x g(x) + g(x)\, D_x f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\, f(x)\, g(x)\,\right] = f(x)\frac{d}{dx}(\,g(x)) + g(x)\,\frac{d}{dx}(\,f(x))$$

Demostración

Ver el problema resuelto 10.

EJEMPLO 5. $D_x[(x^3 + 1)(x^2 - 8\,)] = (x^3 + 1)\, D_x\left[x^2 - 8\right] + (x^2 - 8)\, D_x\left[x^3 + 1\right]$

$$= (x^3 + 1)(2x - 0) + (x^2 - 8)(3x^2 + 0)$$

$$= 5x^4 - 24x^2 + 2x$$

En el teorema anterior, si una de las dos funciones es una constante, se tiene:

COROLARIO. Si c es una constante y f es una función diferenciable en x, entonces cf es diferenciable en x y se cumple que:

$$(cf)'(x) = cf'(x),$$

o bien

$$D_x[\,cf(x)\,] = c\,D_x f(x) \quad \text{ó} \quad \frac{d}{dx}[\,cf(x)\,] = c\frac{d}{dx}(f(x))$$

Demostración

Aplicando la regla del producto y la regla de la constante tenemos que:

$$D_x[cf(x)] = c\,D_x f(x) + f(x)\,D_x c = c\,D_x f(x) + 0 = c\,D_x f(x).$$

EJEMPLO 6. $D_x[\,5x^3] = 5D_x[\,x^3] = 5(\,3x^2\,) = 15x^2$

DERIVADA DE UN COCIENTE

TEOREMA 3.7 **Regla del cociente.**

Si f y g son diferenciables en x y $g(x) \neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ es diferenciable en x y se cumple que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)\,f'(x) - f(x)\,g'(x)}{[\,g(x)\,]^2} \quad \text{o simplemente,} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g\,f' - f\,g'}{g^2}$$

Con las otras notaciones:

$$D_x\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\,D_x f(x) - f(x)\,D_x g(x)}{[\,g(x)\,]^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}(f(x)) - f(x)\frac{d}{dx}(g(x))}{[\,g(x)\,]^2}$$

Demostración

Ver el problema resuelto 12.

EJEMPLO 7.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{2x^3 - 1}{x^2 + 3}\right] = \frac{(x^2+3)\frac{d}{dx}(2x^3-1) - (2x^3-1)\frac{d}{dx}(x^2+3)}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{(x^2+3)(6x^2) - (2x^3-1)(2x)}{(x^2+3)^2} = \frac{2x^4+18x^2+2x}{(x^2+3)^2}$$

EJEMPLO 8. Hallar las rectas tangentes horizontales a la curva $y = e^2 \dfrac{1-x}{e^x}$

Solución

Teniendo en cuenta que e^2 es una constante y aplicando la regla de cociente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[e^2\frac{1-x}{e^x}\right] = e^2\frac{d}{dx}\left[\frac{1-x}{e^x}\right] = e^2\frac{e^x\frac{d}{dx}(1-x) - (1-x)\frac{d}{dx}(e^x)}{(e^x)^2}$$

$$= e^2\frac{e^x(-1)-(1-x)e^x}{e^{2x}} = e^2\frac{e^x(x-2)}{e^{2x}} = e^2\frac{x-2}{e^x}$$

Las tangentes horizontales deben tener pendiente 0:

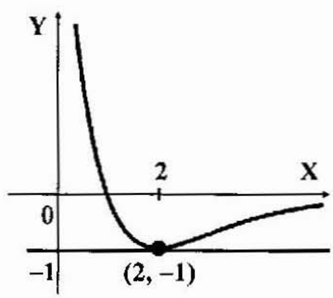
$$\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow e^2\frac{x-2}{e^x} = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Luego, la curva dada tiene sólo una tangente horizontal en el punto donde $x = 2$.

Reemplazando $x = 2$ en la ecuación de la curva:

$$y = \frac{e^2(1-2)}{e^2} = -1.$$

Luego, el punto de tangencia es $(2, -1)$ y la ecuación de la tangente es $y = -1$



PROBLEMAS RESUELTOS 3.2

PROBLEMA 1. Hallar la derivada de la función $y = x\sqrt{x}$.

Solución

Podemos proceder de dos formas:

a. Mediante la regla del producto.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x\sqrt{x}\right) = x\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) + \sqrt{x}\frac{d}{dx}(x) = x\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{2} + \sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

b. Mediante la regla de la potencia.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x\sqrt{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(x\left(x^{1/2}\right)\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{3/2}\right) = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

PROBLEMA 2. Hallar la derivada de la función $u = \frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{3}{\sqrt[3]{v^2}}$.

Solución

$$\frac{du}{dv} = \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{3}{\sqrt[3]{v^2}}\right) = \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{\sqrt{v}}\right) - \frac{d}{dv}\left(\frac{3}{\sqrt[3]{v^2}}\right)$$

$$= \frac{d}{dv}\left(v^{-1/2}\right) - \frac{d}{dv}\left(3v^{-2/3}\right) = -\frac{1}{2}v^{-1/2-1} - 3\left(-\frac{2}{3}v^{-2/3-1}\right)$$

$$= -\frac{1}{2v^{3/2}} + \frac{2}{v^{5/3}} = -\frac{1}{2\sqrt{v^3}} + \frac{2}{\sqrt[3]{v^5}}.$$

PROBLEMA 3. Hallar la derivada de la función $y = \left(1+\sqrt{x}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$.

Solución

$$\frac{dy}{dx} = (1+\sqrt{x})\frac{d}{dx}(x-\sqrt{2}) + (x-\sqrt{2})\frac{d}{dx}(1+\sqrt{x})$$

$$= \left(1+\sqrt{x}\right)\left(\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}\left(\sqrt{2}\right)\right) + \left(x-\sqrt{2}\right)\left(\frac{d}{dx}(1) + \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)\right)$$

$$= \left(1+\sqrt{x}\right)(1-0) + \left(x-\sqrt{2}\right)\left(0+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= 1+\sqrt{x}+\frac{x-\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}+2x+x-\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}+3x-\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}$$

PROBLEMA 4. Si f, g y h son funciones diferenciables, probar que

$$(fgh)' = fgh' + fhg' + ghf'.$$

Solución

Escribimos $fgh = [fg]h$ y aplicamos la regla del producto:

$$(fgh)' = ([fg]h)' = [fg]h' + h[fg]'$$

$$= fgh' + h(fg' + gf')$$

$$= fgh' + fhg' + ghf'$$

PROBLEMA 5. Si a, b y c son constantes, hallar la derivada de la función

$$y = (x-a)(x-b)(x-c).$$

Solución

Aplicando el problema anterior obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[(x-a)(x-b)(x-c)\right]$$

$$= (x-a)(x-b)\frac{d}{dx}(x-c) + (x-a)(x-c)\frac{d}{dx}(x-b) + (x-b)(x-c)\frac{d}{dx}(x-a)$$

$$= (x-a)(x-b) + (x-a)(x-c) + (x-b)(x-c)$$

$$= x^2 - (a+b)x + ab + x^2 - (a+c)x + ac + x^2 - (b+c)x + bc$$

$$= 3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + ac + bc$$

PROBLEMA 6. Hallar la derivada de la función $y = \dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$.

Solución

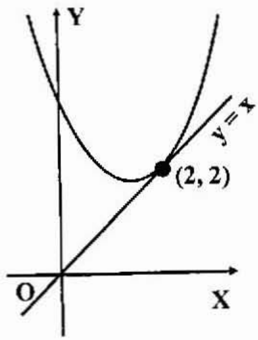
Aplicamos la regla del cociente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(a^2-x^2)\frac{d}{dx}(a^2+x^2) - (a^2+x^2)\frac{d}{dx}(a^2-x^2)}{(a^2-x^2)^2}$$

$$= \frac{(a^2-x^2)(2x) - (a^2+x^2)(-2x)}{(a^2-x^2)^2} = \frac{2a^2x - 2x^3 + 2a^2x + 2x^3}{(a^2-x^2)^2} = \frac{4a^2x}{(a^2-x^2)^2}$$

PROBLEMA 7. Hallar la parábola $y = x^2 + bx + c$ que tiene por tangente a la recta $y = x$ en el punto $(2, 2)$.

Solución



Sea $f(x) = x^2 + bx + c$.

La pendiente de la recta $y = x$ es $m = 1$.

Por otro lado, la pendiente de la tangente a la parábola en el punto $(2, 2)$ es $f'(2)$. En consecuencia, debemos tener que $f'(2) = 1$.

Pero,

$$f'(x) = 2x + b \Rightarrow f'(2) = 2(2) + b = 4 + b.$$

Luego,

$$4 + b = 1 \Rightarrow b = -3.$$

Reemplazando el valor $b = -3$ en la parábola: $y = x^2 - 3x + c$

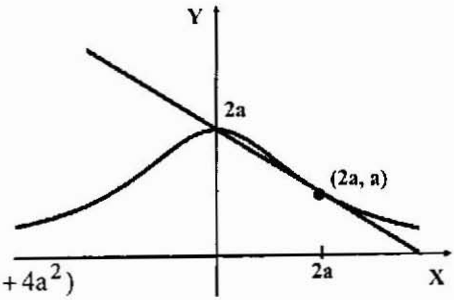
Ahora hallamos el valor de c. Para esto, usamos el hecho de que el punto (2, 2) está en la parábola y, por tanto, debe satisfacer su ecuación. Esto es,

$$2 = (2)^2 - 3(2) + c \quad \Rightarrow \quad c = 4$$

En consecuencia, la parábola buscada es $y = x^2 - 3x + 4$.

PROBLEMA 8. Hallar la recta tangente al gráfico de la función siguiente **(Bruja de Agnesi)** en el punto donde $x = 2a$.

$$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$$



Solución

Encontremos la pendiente de la tangente en el punto $x = 2a$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}\right)$$

$$= \frac{(x^2 + 4a^2)\frac{d}{dx}(8a^3) - 8a^3\frac{d}{dx}(x^2 + 4a^2)}{(x^2 + 4a^2)^2}$$

$$= \frac{(x^2 + 4a^2)(0) - 8a^3(2x)}{(x^2 + 4a^2)^2} = \frac{-16a^3x}{(x^2 + 4a^2)^2}$$

Ahora, la pendiente de la recta tangente en el punto donde $x = 2a$ es:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2a} = \frac{-16a^3(2a)}{((2a)^2 + 4a^2)^2} = \frac{-32a^4}{64a^4} = -\frac{1}{2}$$

Encontremos el punto de tangencia. Reemplazando $x = 2a$ en la ecuación que define la función tenemos:

$$y = \frac{8a^3}{(2a)^2 + 4a^2} = \frac{8a^3}{8a^2} = a.$$

Luego, el punto de tangencia es $(2a, a)$.

Ahora, ya podemos hallar la tangente buscada:

$$y - a = -\frac{1}{2}(x - 2a), \text{ o sea } x + 2y - 4a = 0.$$

PROBLEMA 9. Hallar los puntos del gráfico de la siguiente función en los cuales la recta tangente pasa por el origen de coordenadas.

$$f(x) = 2x^3 + 13x^2 + 5x + 9$$

Solución

Sea (a, f(a)) un punto del gráfico tal que la recta tangente en (a, f(a)) pasa por el origen. En general, la ecuación de la recta tangente es:

$L: \ y - f(a) = f'(a)(x-a) \ \Rightarrow$

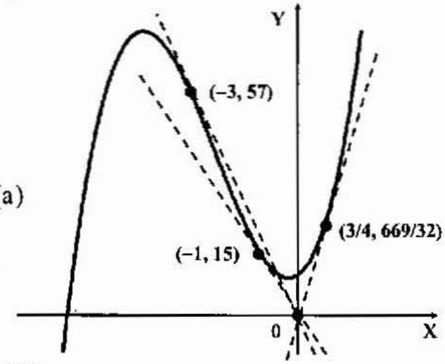
$L: \ y = f'(a)x + [f(a) - af'(a)]$

L pasa por el origen $\Leftrightarrow$

$[f(a) - a\,f'(a)] = 0 \Leftrightarrow f(a) = af'(a)$

Pero, $f'(a) = 6a^2 + 26a + 5$. Luego,

$f(a) = af'(a) \ \Leftrightarrow$



$2a^3 + 13a^2 + 5a + 9 = a(6a^2 + 26a + 5)$

$\Leftrightarrow \ 4a^3 + 13a^2 - 9 = 0$

Las raices de esta ecuación son −3, −1, y 3/4. Luego, los puntos buscados son:

$P_1 = (-3, f(-3)) = (-3, 57)$, $\quad P_2 = (-1, f(-1)) = (-1, 15)$ y

$P_3 = (3/4, f(3/4)) = (3/4, 669/32)$

PROBLEMA 10. **Regla del producto.** Si f y g son diferenciables en x, probar:

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

Solución

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Restando y sumando $f(x+h)g(x)$ al numerador tenemos:

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\left[f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)\right] + \left[f(x+h)g(x) - f(x)g(x)\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)}{h}\right] + \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] + \lim_{h\to 0}\left[g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$= \left[\lim_{h\to 0} f(x+h)\right]\left[\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] + \left[\lim_{h\to 0} g(x)\right]\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$= f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

PROBLEMA 11. Si g es una función diferenciable en x y $g(x) \neq 0$, probar que

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Solución

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{g(x+h)} - \dfrac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)h} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{g(x+h)g(x)} \frac{g(x)-g(x+h)}{h}\right]$$

$$= \left[-\lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)}\right]\left[\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$= -\frac{1}{g(x)g(x)} g'(x) = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

PROBLEMA 12. **Regla del cociente.** Si f y g son funciones diferenciables y $g(x) \neq 0$, probar que

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Solución

Tenemos que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x)\dfrac{1}{g(x)}$.

Ahora, aplicamos la regla del producto y el problema anterior:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)' = f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' + \frac{1}{g(x)} f'(x)$$

$$= f(x)\left(-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}\right) + \frac{1}{g(x)} f'(x) = \frac{-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} + \frac{f'(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 3.2

En los problemas del 1 al 38, hallar la derivada de la función indicada. Las letras a, b, c y d son constantes.

1. $y = 4x^2 - 6x + 1$

2. $y = 1 - \dfrac{x}{3} + \dfrac{x^6}{6}$

3. $y = 0{,}5x^4 - 0{,}3x^2 + 2{,}5x$

4. $u = v^{10} - \dfrac{3v^8}{4} + 0{,}4v^3 + 0{,}1$

5. $s = 2t^{-5} + \dfrac{t^3}{3} - 0{,}3t^{-2}$

6. $z = \dfrac{1}{3y} - \dfrac{3}{y^2} + 2$

7. $f(x) = 3x^{5/6} - 4x^{-2/3} - 10$

8. $g(x) = ax^5 - bx^{-4} + cx^{3/2} + d$

9. $y = -\dfrac{2x^6}{3a}$

10. $z = \dfrac{x^3}{a+b} + \dfrac{x^5}{a-b} - x$

11. $z = \dfrac{t^3 - bt^2 - 3}{6}$

12. $y = 4\sqrt{x} - \dfrac{3}{2x^2} + \sqrt{3}$

13. $z = \sqrt[3]{t} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{t}}$

14. $u = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} - \dfrac{5}{3\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{3}$

15. $y = \left(5x^4 - 4x^5\right)\left(3x^2 + 2x^3\right)$

16. $y = x^3e^x$

17. $y = \sqrt{x}\, e^x$

18. $y = x^e + e^x$

19. $y = (x-1)(x-2)(x-3)$

20. $y = \dfrac{1}{3}(2x^3 - 1)(3x^2 - 2)(6x - 5)$

21. $z = \sqrt{t}\,(t^4 - 1)(t^6 - 2)$

22. $y = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$

23. $u = 2\sqrt{x}\left(x^2 - \sqrt{x} + \sqrt{5}\right)$

24. $y = (\sqrt{x} - 3)\left(\dfrac{2}{x} - 1\right)$

25. $y = \dfrac{3}{x-9}$

26. $y = \dfrac{x}{x-8}$

27. $y = \dfrac{x+3}{x-3}$

28. $z = \dfrac{t}{t^2+1}$

29. $u = \dfrac{2t^3+1}{t-1}$

30. $y = \dfrac{x^3 - 2x}{x^2 + x + 1}$

31. $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x}$

32. $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{\sqrt{x}}$

33. $y = \dfrac{ax^2 + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

34. $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1} - (x-1)(x^2-1)$

35. $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$

36. $y = \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + 2\sqrt{x}}$

37. $y = \dfrac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 + 3\sqrt[3]{x}}$

38. $y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

En los problemas del 39 al 42, hallar la recta tangente al gráfico de la función en el punto especificado.

39. $y = x^4 - 3x^2 + x - 2, \quad (1, -3)$

40. $y = x^2(x - 5), \quad (2, -12)$

41. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 - 3}, (-1, \frac{1}{2})$

42. $g(x) = \dfrac{x^3}{2a - x}, \quad (a, a^2)$

43. Hallar el punto en la parábola $y = 3x^2 - 2x - 1$ en el cual la recta tangente es horizontal (paralela al eje X).

44. Hallar la recta tangente horizontal a la curva $y = \dfrac{e^x}{x}$

45. Hallar la recta tangente horizontal a la curva $y = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$

46. Hallar los puntos del gráfico de la función $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 6x - \dfrac{7}{2}$ en los cuales la recta tangente es horizontal (paralela al eje X).

47. Hallar la tangente al gráfico de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5$ que es paralela a la recta $3x + y - 1 = 0$.

48. Hallar la tangente al gráfico de $g(x) = \sqrt{x} + 2$ que es perpendicular a la recta $2x + y + 8 = 0$.

49. Hallar la parábola $y = ax^2 + bx$ que tenga a $(2, -12)$ como punto más bajo.

50. Hallar la parábola $y = ax^2 + bx$ que tenga a $(4, 16)$ como punto más alto.

51. Hallar la parábola $y = x^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $2x + y + 7 = 0$ en el punto $(-2, -3)$

SECCION 3.3

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

TEOREMA 3.8

1. $D_x(\operatorname{sen} x) = \cos x$
2. $D_x(\cos x) = -\operatorname{sen} x$
3. $D_x(\tan x) = \sec^2 x$
4. $D_x(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$
5. $D_x(\sec x) = \sec x \tan x$
6. $D_x(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$

Demostración

1. $D_x(\text{sen } x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h}$

Pero, usando la identidad del seno de una suma tenemos que

$$\text{sen}(x+h) - \text{sen } x = \text{sen } x \cos h + \cos x \text{ sen } h - \text{sen } x$$

$$= \text{sen } x(\cos h - 1) + \cos x \text{ sen } h$$

Luego,

$$D_x(\text{sen } x) = \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } x \ (\cos h - 1)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \text{ sen } h}{h}$$

$$= \left(\lim_{h \to 0} \text{sen } x\right)\left(\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}\right) + \left(\lim_{h \to 0} \cos x\right)\left(\lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } h}{h}\right)$$

$$= (\text{sen } x)(0) + (\cos x)(1) = \cos x$$

2. Se procede como en (1). Ver el problema propuesto 12.

3. $D_x(\tan x) = D_x\left(\dfrac{\text{sen } x}{\cos x}\right)$

$$= \frac{\cos x \ D_x(\text{sen } x) - \text{sen } x \ D_x(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\text{sen } x)(-\text{sen } x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 = \sec^2 x.$$

4. Se prueba como (3). Ver el problema propuesto 13.

5. $D_x(\sec x) = D_x\left[\dfrac{1}{\cos x}\right] = \dfrac{(\cos x)D_x(1) - (1)D_x(\cos x)}{\cos^2 x} = \dfrac{0 - (-\text{sen } x)}{\cos^2 x}$

$$= \frac{\text{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\text{sen } x}{\cos x} \frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x.$$

6. Se prueba como (5). Ver el problema propuesto 14.

EJEMPLO 1. Hallar la derivada de

a. $f(x) = x^3 \text{sen } x$ **b.** $h(\theta) = \tan \theta - \theta$

Solución

a. $f'(x) = (x^3)'(\text{sen } x) + (x^3)(\text{sen } x)' = 3x^2 \text{sen } x + x^3 \cos x$

b. $h'(\theta) = \sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$ (Identidad Trig. 6)

EJEMPLO 2. Calcular la derivada de

$$\textbf{a.}\quad y = \frac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta} \qquad\qquad \textbf{b.}\quad y = \frac{1 - \cot x}{\operatorname{cosec} x}$$

Solución

a. $$D_\theta(y) = \frac{(1+\tan\theta)\,D_\theta(1-\tan\theta) - (1-\tan\theta)\,D_\theta(1+\tan\theta)}{(1+\tan\theta)^2}$$

$$= \frac{(1+\tan\theta)(-\sec^2\theta) - (1-\tan\theta)(\sec^2\theta)}{(1+\tan\theta)^2} = -\frac{2\sec^2\theta}{(1+\tan\theta)^2}$$

b. Método 1.

$$y' = \frac{(\operatorname{cosec} x)D_x(1-\cot x) - (1-\cot x)D_x(\operatorname{cosec} x)}{\operatorname{cosec}^2 x}$$

$$= \frac{(\operatorname{cosec} x)\big(0-(-\operatorname{cosec}^2 x)\big) - (1-\cot x)(-\operatorname{cosec} x\ \cot x)}{\operatorname{cosec}^2 x}$$

$$= \frac{\operatorname{cosec}^3 x + \operatorname{cosec} x\ \cot x - \operatorname{cosec} x\ \cot^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x}$$

$$= \frac{\operatorname{cosec} x\,(\operatorname{cosec}^2 x + \cot x - \cot^2 x)}{\operatorname{cosec}^2 x}$$

$$= \frac{\operatorname{cosec}^2 x + \cot x - \cot^2 x}{\operatorname{cosec} x} = \frac{1 + \cot^2 x + \cot x - \cot^2 x}{\operatorname{cosec} x}$$

$$= \frac{1 + \cot x}{\operatorname{cosec} x} = \frac{1 + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x}}{\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}} = \operatorname{sen} x + \cos x$$

Método 2

$$y = \frac{1 - \cot x}{\operatorname{cosec} x} = \frac{1 - \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x}}{\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}} = \operatorname{sen} x - \cos x$$

Luego,

$$y' = D_x(\operatorname{sen} x - \cos x) = D_x(\operatorname{sen} x) - D_x(\cos x) = \cos x + \operatorname{sen} x$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 3.3

En los problemas del 1 al 9 hallar la derivada de la función dada.

1. $f(x) = 5\operatorname{sen} x + 2\cos x$ **2.** $g(\theta) = \theta\cot\theta$ **3.** $y = \tan\alpha \operatorname{sen}\alpha$

4. $y = \tan x - \cot x$ **5.** $h(t) = \dfrac{\operatorname{sen} t}{1+\cos t}$ **6.** $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$

7. $g(x) = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ **8.** $y = \dfrac{\operatorname{sen} t + \cos t}{\operatorname{sen} t - \cos t}$ **9.** $y = \dfrac{\tan x - 1}{\sec x}$

10. Si $f(x) = \sec x - 2\cos x$, hallar:

a. La recta tangente al gráfico de f en el punto $(\pi/3, 1)$

b. La recta normal al gráfico de f en el punto $(\pi/3, 1)$.

11. Si la recta tangente al gráfico de función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el punto $(a, \operatorname{sen} a)$ pasa por el origen, probar que se cumple que $\tan a = a$.

12. Probar que $D_x \cos x = -\operatorname{sen} x$ **13.** Probar que $D_x \cot x = -\operatorname{cosec}^2 x$

14. Probar que $D_x \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \cot x$

SECCION 3.4

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

TEOREMA 3.8 **Derivada de las funciones exponenciales y logaritmicas**

1. $D_x(a^x) = a^x \ln a$

2. $D_x(\ln x) = \dfrac{1}{x}$ **3.** $D_x(\log_a x) = \dfrac{1}{x\ln a}$

Demostración

1. $$D_x\left(a^x\right) = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h - 1)}{h}$$

$$= a^x \lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a \qquad \text{(Teorema 2.2, parte 4)}$$

2. Basta probar 3, ya que 2 sigue de 3, tomando $a = e$.

3. De acuedo al teorema 2.22 parte 1, tenemos que $\lim\limits_{h \to 0}\left(1 + ah\right)^{\frac{1}{h}} = e^a$.

Además, por el corolario al teorema 1.3, sabemos que $\log_a e = \dfrac{1}{\ln a}$

Ahora,

$$D_x(\log_a x) = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{1}{x}h\right) = \lim_{h \to 0} \log_a\left(1+\frac{1}{x}h\right)^{\frac{1}{h}} = \log_a\left(\lim_{h \to 0}\left(1+\frac{1}{x}h\right)^{\frac{1}{h}}\right)$$

$$= \log_a\left(e^{1/x}\right) = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x}\,\frac{1}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

EJEMPLO 1. Hallar la derivada de $y = x^3 e^x + e\,5^x$

Solución

$$D_x y = D_x(x^3 e^x + e\,5^x) = D_x(x^3 e^x) + D_x(e\,5^x)$$

$$= x^3 D_x(e^x) + e^x D_x(x^3) + e\,D_x(5^x)$$

$$= x^3 e^x + e^x(3x^2) + e\,5^x \ln 5 = x^3 e^x + 3x^2 e^x + (e \ln 5)\,5^x$$

EJEMPLO 2. Hallar la derivada de

1. $y = \dfrac{\ln x}{x}$ **2.** $y = \log_2(x^3)$

Solución

1. $$D_x y = \frac{x\,D_x(\ln x) - \ln x\,D_x(x)}{x^2} = \frac{x\,\frac{1}{x} - (\ln x)(1)}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

2. $$D_x y = D_x\left(\log_2(x^3)\right) = D_x\left(3\log_2 x\right) = 3\,\frac{1}{x \ln 2} = \frac{3}{x \ln 2}$$

PROBLEMA 3. Hallar la recta normal al gráfico de

$f(x) = = x \ln x,$

en el punto donde $x = e$

Solución

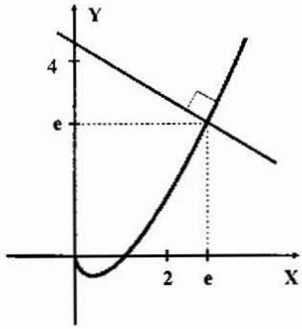
Tenemos que: $f(e) = e \ln e = e(1) = e$

Por otro lado,

$$f'(x) = x(\ln x)' + (\ln x)(x)'$$

$$= x\frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x \Rightarrow$$

$$f'(e) = 1 + \ln e = 1 + 1 = 2$$



La pendiente de la recta normal en el punto (e, e) es:

$$m = -\frac{1}{f'(e)} = -\frac{1}{2}$$

Luego, la recta normal en el punto (e, e) es:

$$y - e = -\frac{1}{2}(x - e) \Rightarrow 2y + x - 3e = 0$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 3.4

En los problemas del 1 al 9, hallar la derivada de la función dada.

1. $y = \sqrt{x}\, e^x$ **2.** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **3.** $y = x^2\, 2^x$

4. $y = x^2 e^{-x}$ **5.** $y = e^x \ln x$ **6.** $y = 2^x \log_2 x$

7. $y = \frac{\ln x}{e^x}$ **8.** $y = \frac{\log_2 x}{2^x}$ **9.** $y = \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$

10. Hallar la recta tangente horizontal a la curva $y = \frac{e^x}{1+x^2}$

11. Hallar la recta tangente al gráfico de $f(x) = x\, e^{-x}$ en el punto donde $x = -1$

12. Hallar la recta tangente al gráfico de $g(x) = \frac{4-x}{\ln x}$ en el punto donde $x = 4$.

SECCION 3.5
LA REGLA DE LA CADENA

Esta sección la dedicaremos a estudiar la diferenciación de funciones compuestas. El resultado que expresa la derivada de una función compuesta en términos de sus funciones componentes se conoce con el nombre de **regla de la cadena**.

Muchas de las funciones que encontramos con frecuencia se expresan como $y = f(g(x))$. A **f** la llamaremos función **externa** y a **g**, función **interna.**

TEOREMA 3.9 **Regla de la cadena.**

Si $y = f(u)$ es diferenciable en u y $u = g(x)$ es diferenciable en x, entonces la función compuesta $f \circ g$ es diferenciable en x y se cumple que

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$$

En palabras, la derivada de una función compuesta es igual al producto de la derivada de la función externa (derivada externa) por la derivada de la función interna (derivada interna).

La regla de la cadena, con las otras notaciónes se expresa así:

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)\,g', \quad D_x y = D_u y\ D_x u \quad \text{ó} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Demostración

Ver el problema resuelto 11.

EJEMPLO 1. Si $y = \sqrt{x^2 + 3x}$, hallar $\dfrac{dy}{dx}$.

Solución

Si hacemos $u = x^2 + 3x$, entonces $y = \sqrt{x^2 + 3x} = \sqrt{u}$.

Además, $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ y $\dfrac{du}{dx} = 2x + 3$.

Luego, por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x+3) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}.$$

EJEMPLO 2. Si $F(x) = \sqrt{g(x)}$, $g(1) = 9$ y $g'(1) = 18$, hallar $F'(1)$.

Solución

Sea $f(u) = \sqrt{u}$. Se tiene que $F(x) = \sqrt{g(x)} = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$

Aplicando la regla de la cadena:

$$F'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x) \qquad \textbf{(1)}$$

Pero,

$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \quad \text{y, por tanto,} \quad f'(g(x)) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \qquad \textbf{(2)}$$

Reemplazando (2) en (1)

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}}\, g'(x)$$

En particular, para $x = 1$ tenemos que

$$F'(1) = \frac{1}{2\sqrt{g(1)}}\, g'(1) = \frac{1}{2\sqrt{9}}\,(18) = \frac{1}{2(3)}\,(18) = 3$$

TABLA DE DERIVADAS

La regla de la cadena combinada con las derivadas ya encontradas nos da una lista de derivadas más generales. Si $u = g(x)$ es una función diferenciable de x, entonces

1. $\dfrac{d}{dx}\left(u^n \right) = nu^{n-1}\,\dfrac{du}{dx}$ **ó bien** $\dfrac{d}{dx}\left((gx))^n \right) = n(g(x))^{n-1}\,\dfrac{d}{dx}\left(g(x)\right)$

2. $\dfrac{d}{dx}\left(e^u \right) = e^u\,\dfrac{du}{dx}$

3. $\dfrac{d}{dx}\left(a^u \right) = a^u \ln a\,\dfrac{du}{dx}$

4. $\dfrac{d}{dx}\left(\ln u \right) = \dfrac{1}{u}\,\dfrac{du}{dx}$

5. $\dfrac{d}{dx}\left(\log_a u \right) = \dfrac{1}{u \ln a}\,\dfrac{du}{dx}$

6. $\dfrac{d}{dx}\left(\operatorname{sen} u \right) = \cos u\,\dfrac{du}{dx}$

7. $\dfrac{d}{dx}\left(\cos u \right) = -\operatorname{sen} u\,\dfrac{du}{dx}$

8. $\dfrac{d}{dx}\left(\tan u \right) = \sec^2 u\,\dfrac{du}{dx}$

9. $\dfrac{d}{dx}\left(\cot u \right) = -\operatorname{cosec}^2 u\,\dfrac{du}{dx}$

10. $\dfrac{d}{dx}\left(\sec u \right) = \sec u \tan u\,\dfrac{du}{dx}$

11. $\dfrac{d}{dx}\left(\operatorname{cosec} u \right) = -\operatorname{cosec} u \cot u\,\dfrac{du}{dx}$

La demostración de estas nuevas formulas es inmediata. Como muestra probaremos la primera.

Consideremos la función $f(u) = u^n$, cuya derivada es $\dfrac{d}{du}(f(u)) = f'(u) = nu^{n-1}$

Se tiene: $(g(x))^n = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$.

Ahora, aplicando la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}\left((g(x))^n\right) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x) = n(g(x))^{n-1}\,\frac{d}{dx}\left(g(x)\right).$$

EJEMPLO 3. Hallar la derivada de la función $y = (x^2 + 5x - 6)^3$.

Solución

$$\frac{dy}{dx} = 3(x^2 + 5x - 6)^2 \frac{d}{dx}(x^2 + 5x - 6) = 3(x^2 + 5x - 6)^2(2x + 5).$$

EJEMPLO 4. Hallar la derivada de:

a. $y = e^{\tan x}$ **b.** $y = e^{\sqrt{x}}$

Solución

a. $\frac{d}{dx}\left(e^{\tan x}\right) = e^{\tan x}\frac{d}{dx}(\tan x) = e^{\tan x}(\sec^2 x) = \sec^2 x \; e^{\tan x}$

b. $\frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{x}}\right) = e^{\sqrt{x}}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = e^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

EJEMPLO 5. Hallar la derivada de **a.** $g(x) = \cos(x^2 + 1)$

b. $u = \sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha$ **c.** $y = \cot(\operatorname{sen} 3x)$.

Solución

a. $g'(x) = -\operatorname{sen}(x^2 + 1)D_x(x^2 + 1) = -2x\operatorname{sen}(x^2 + 1)$

b. $D_\alpha u = 2(\sec\alpha)\,D_\alpha(\sec\alpha) + 2(\operatorname{cosec}\alpha)\,D_\alpha(\operatorname{cosec}\alpha)$

$= 2(\sec\alpha)(\sec\alpha\tan\alpha) + 2(\operatorname{cosec}\alpha)(-\operatorname{cosec}\alpha\cot\alpha)$

$= 2\sec^2\alpha\tan\alpha - 2\operatorname{cosec}^2\alpha\cot\alpha.$

c. $y' = -\operatorname{cosec}^2(\operatorname{sen} 3x)\,D_x(\operatorname{sen} 3x) = \left(-\operatorname{cosec}^2(\operatorname{sen}3x)\right)(\cos 3x)(3)$

$= -3\cos 3x\,\operatorname{cosec}^2(\operatorname{sen} 3x).$

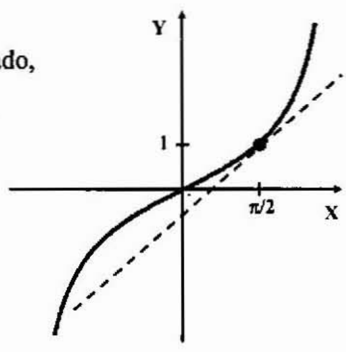
EJEMPLO 6. Hallar la recta tangente al gráfico de $f(x) = \tan(x/2)$ en el punto donde $x = \pi/2$.

Solución

Tenemos que $f(\pi/2) = \tan(\pi/4) = 1$. Por otro lado,

$$f'(x) = \sec^2\left(\frac{x}{2}\right)D_x\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow$$

$$f'(\pi/2) = \frac{1}{2}\sec^2(\pi/4) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2 = 1.$$



Luego, la ecuación de la recta tangente es

$$y - f(\pi/2) = f'(\pi/2)(-\pi/2) \Rightarrow$$

$$y - 1 = 1(x - \pi/2) \Rightarrow y - x + \pi/2 - 1 = 0.$$

EJEMPLO 7. Hallar la derivada de $y = 5^{3x^2-1}$

Solución

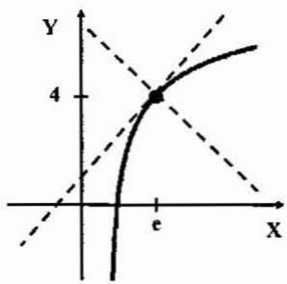
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(5^{3x^2-1}\right) = \left(5^{3x^2-1}\ln 5\right)\frac{d}{dx}(3x^2-1) = \left(5^{3x^2-1}\ln 5\right)(6x)$$

$$= 6(\ln 5)x\,5^{3x^2-1}$$

EJEMPLO 8. **a.** Hallar la derivada de $f(x) = e\ln\ln x + 4$

b. Hallar la recta tangente y la recta normal al gráfico de la función dada en el punto donde $x = e$

Solución



a. $f'(x) = D_x(e\ln\ln x + 4) = eD_x(\ln\ln x)$

$$= e\frac{1}{\ln x}D_x(\ln x) = e\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x} = \frac{e}{x\ln x}$$

b. Tenemos que:

$f(e) = e\ln\ln e + 4 = e\ln 1 + 4 = e(0) + 4 = 4$ y

$f'(e) = \dfrac{e}{e\ln e} = \dfrac{e}{e(1)} = 1$. Luego,

Recta tangente: $y - f(e) = f'(e)(x-e) \Rightarrow y - 4 = 1(x-e) \Rightarrow y - x = 4 - e$

Recta normal: $y - f(e) = (-1/f'(e))(x-e) \Rightarrow y - 4 = -1(x-e) \Rightarrow y + x = 4 + e$

PROBLEMAS RESUELTOS 3.5

PROBLEMA 1. Hallar la derivada de $y = \sqrt[3]{x^6 - 3x}$.

Solución

Se tiene que: $y = \sqrt[3]{x^6-3x} = (x^6-3x)^{1/3}$. Luego,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^6-3x)^{1/3} = \frac{1}{3}(x^6-3x)^{1/3-1}\frac{d}{dx}(x^6-3x)$$

$$= \frac{1}{3}(x^6-3x)^{-2/3}(6x^5-3) = \frac{6x^5-3}{3(x^6-3x)^{2/3}} = \frac{2x^5-1}{(x^6-3x)^{2/3}}$$

PROBLEMA 2. Hallar la derivada de la función $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{x}{(a^2 - x^2)^{1/2}}\right] = \frac{(a^2 - x^2)^{1/2}\dfrac{d}{dx}(x) - x\dfrac{d}{dx}(a^2 - x^2)^{1/2}}{\left[(a^2 - x^2)^{1/2}\right]^2}$$

$$= \frac{(a^2 - x^2)^{1/2}(1) - x\left[\dfrac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-1/2}\dfrac{d}{dx}(a^2 - x^2)\right]}{a^2 - x^2}$$

$$= \frac{(a^2 - x^2)^{1/2}(1) - x\left[\dfrac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-1/2}(-2x)\right]}{a^2 - x^2}$$

$$= \frac{(a^2 - x^2)^{1/2} + x^2(a^2 - x^2)^{-1/2}}{a^2 - x^2} = \frac{(a^2 - x^2)^{1/2} + \dfrac{x^2}{(a^2 - x^2)^{1/2}}}{a^2 - x^2}$$

$$= \frac{(a^2 - x^2) + x^2}{(a^2 - x^2)^{1/2}(a^2 - x^2)} = \frac{a^2}{(a^2 - x^2)^{3/2}}.$$

PROBLEMA 3. Derivar la función $u = \sqrt{t + \sqrt{t+1}}$.

Solución

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{t + \sqrt{t+1}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{t + \sqrt{t+1}}}\frac{d}{dt}(t + \sqrt{t+1})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{t + \sqrt{t+1}}}\left[1 + \frac{d}{dt}\sqrt{t+1}\right] = \frac{1}{2\sqrt{t + \sqrt{t+1}}}\left[1 + \frac{1}{2\sqrt{t+1}}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{t + \sqrt{t+1}}} + \frac{1}{4\sqrt{t+1}\sqrt{t + \sqrt{t+1}}}.$$

PROBLEMA 4. Hallar la derivada de

a. $y = \sqrt{1 + 2\tan x}$ **b.** $y = x - \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x$

Solución

a. $y' = D_x\left[(1 + 2\tan x)^{1/2}\right] = \frac{1}{2}(1 + 2\tan x)^{1/2 - 1} D_x(1 + 2\tan x)$

$$= \frac{1}{2}(1 + 2\tan x)^{-1/2}(2\sec^2 x) = \frac{\sec^2 x}{(1 + 2\tan x)^{1/2}} = \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1 + 2\tan x}}.$$

b. $y' = D_x(x) - D_x(\tan x) + D_x\left(\frac{1}{3}\tan^3 x\right)$

$$= 1 - \sec^2 x + 3\left(\frac{1}{3}\tan^2 x\right)D_x(\tan x) = 1 - \sec^2 x + (\tan^2 x)(\sec^2 x)$$

$$= -\tan^2 x + (\tan^2 x)(1 + \tan^2 x) = -\tan^2 x + \tan^2 x + \tan^4 x = \tan^4 x.$$

PROBLEMA 5. Hallar $\frac{dy}{dx}$ si $y = \text{sen}^2(\cos 3x)$.

Solución

$$\frac{dy}{dx} = D_x\left[\text{sen}^2(\cos 3x)\right] = 2\text{sen}(\cos 3x)\, D_x\left[\text{sen}(\cos 3x)\right]$$

$$= \Big(2\text{sen}(\cos 3x)\Big)\Big(\cos(\cos 3x)\Big)D_x[\cos 3x]$$

$$= \Big(2\text{sen}(\cos 3x)\Big)\Big(\cos(\cos 3x)\Big)\Big(-\text{sen}\, 3x\Big)D_x[3x]$$

$$= \Big(2\text{sen}(\cos 3x)\Big)\Big(\cos(\cos 3x)\Big)\Big(-\text{sen}\, 3x\Big)(3)$$

$$= \Big(-3\text{sen}\, 3x\Big)\Big[2\text{sen}(\cos 3x)\cos(\cos 3x)\Big]$$

$$= -3\text{sen}\, 3x\left[\text{sen}(2\cos 3x)\right] \qquad \text{(Ident. Trig. 27)}$$

PROBLEMA 6. Hallar la derivada de $y = 2^{3^{x^2}}$

Solución

$$y' = D_x\left(2^{3^{x^2}}\right) = 2^{3^{x^2}}(\ln 2)\, D_x\left(3^{x^2}\right) = 2^{3^{x^2}}(\ln 2)\, 3^{x^2}(\ln 3)\, D_x\left(x^2\right)$$

$$= 2^{3^{x^2}}(\ln 2)3^{x^2}(\ln 3)(2x) = 2(\ln 2)(\ln 3)x\, 3^{x^2}\, 2^{3^{x^2}}$$

PROBLEMA 7. Hallar la derivada de $y = \ln \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

Solución

Se tiene que:

$$y = \ln \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} = \ln(1) - \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = -\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

Luego,

$$D_x y = D_x\left(-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right) = -\frac{D_x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

$$= -\frac{1+D_x\left(\sqrt{x^2-1}\right)}{x+\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1+\dfrac{D_x(x^2)}{2\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = -\frac{\dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

$$= -\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

PROBLEMA 8. **a.** Si $G(x) = g(a+bx) + g(a-bx)$ y g es diferenciable en a, hallar $G'(0)$.

b. Si $F(x) = f(f(f(x)))$, $f(0) = 0$ y $f'(0) = -2$, hallar $F'(0)$.

Solución

a. Sea $f(x) = a + bx$ y $h(x) = a - bx$. Se tiene que

$$f'(x) = b, \quad h'(x) = -b \quad \text{y} \quad G(x) = g(f(x)) + g(h(x)).$$

Luego, aplicando la regla de la cadena,

$$G'(x) = [g(f(x)) + g(h(x))]' = [\,g(f(x))\,]' + [\,g(h(x))\,]'$$

$$= g'(f(x))f'(x) + g'(h(x))h'(x)$$

En particular, para $x = 0$

$$G'(0) = g'(f(0))f'(0) + g'(h(0))h'(0) = g'(a)(b) + g'(a)(-b) = 0$$

b. Sea $g(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x))$. Se tiene que $F(x) = f(f(f(x))) = f(g(x))$

Aplicando la regla de la cadena a g y a F

$$g'(x) = f'(f(x))f'(x) \quad \text{y}$$

$$F'(x) = [\,f(f(f(x)))\,]' = [\,f(g(x))\,]' = f'(g(x))\,g'(x) = f'(f(f(x)))\,f'(f(x))\,f'(x).$$

En particular, para x = 0

$$F'(0) = f'(f(f(0)))f'(f(0))\,f'(0) = f'(f(0))f'(0)f'(0) = f'(0)f'(0)f'(0)$$

$$= (-2)(-2)(-2) = -8.$$

PROBLEMA 9. Hallar la recta tangente al gráfico de la siguiente función en el punto que tiene por abscisa $x = -3$.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(4+x)^2}}$$

Solución

Tenemos que $f(-3) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(4-3)^2}} = 1$ y

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt[3]{(4+x)^2}}\right] = \frac{d}{dx}\left[(4+x)^{-2/3}\right] = \frac{-2}{3}(4+x)^{-5/3}\frac{d}{dx}(4+x)$$

$$= -\frac{2}{3}(4+x)^{-5/3}(1) = \frac{-2}{3(4+x)^{5/3}}$$

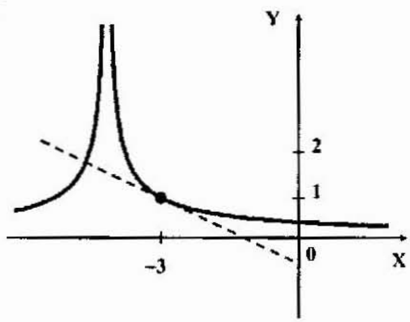
En particular,

$$f'(-3) = \frac{-2}{3(4-3)^{5/3}} = -\frac{2}{3(1)} = -\frac{2}{3}.$$

Luego, la recta tangente buscada es

$$y - f(-3) = f'(-3)(x-(-3)) \Rightarrow$$

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x+3) \quad \Rightarrow \quad 3y + 2x + 3 = 0.$$



PROBLEMA 10. **a.** Hallar la derivada de la función $f(x) = 4x^2e^{-x^2/4}$

b. Hallar los puntos de la gráfica donde la recta tangente es horizontal

Solución

a. $f'(x) = D_x\left(4x^2e^{-x^2/4}\right) = \left(4x^2\right)D_x\left(e^{-x^2/4}\right) + \left(e^{-x^2/4}\right)D_x\left(4x^2\right)$

$$= \left(4x^2\right)\left(e^{-x^2/4}\right)D_x\left(-\frac{x^2}{4}\right) + \left(e^{-x^2/4}\right)(8x)$$

$$= \left(4x^2\right)\left(e^{-x^2/4}\right)\left(-\frac{2x}{4}\right) + \left(e^{-x^2/4}\right)(8x) = -2x^3e^{-x^2/4} + 8xe^{-x^2/4}$$

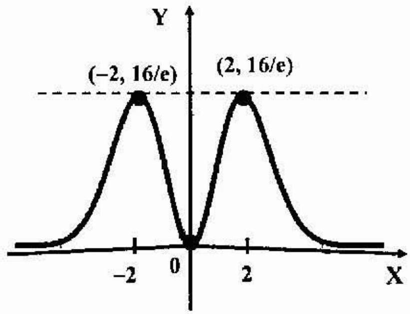
$$= 2xe^{-x^2/4}\left(x^2-4\right)$$

b. La recta tangente es horizontal si su pendiente es 0. Luego,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2xe^{-x^2/4}\left(x^2-4\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0,\ x = -2 \text{ ó } x = 2$$



Pero,

$$f(0) = 4(0^2)e^{-0^2/4} = 0,$$

$$f(-2) = 4(-2)^2 e^{-(-2)^2/4} = \frac{16}{e} \quad \text{y}$$

$$f(2) = 4(2)^2 e^{-(2)^2/4} = \frac{16}{e}$$

Luego, los puntos buscados son: (0, 0), (−2, 16/e) y (2, 16/e)

PROBLEMA 11. **Regla de la cadena.**

Si f es diferenciable en u y $u = g(x)$ es diferenciable en x, probar que $f \circ g$ es diferenciable en x y se cumple que

$$\left(f \circ g\right)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Solución

$$\left(f \circ g\right)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ g)(x+h) - (f \circ g)(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

Multiplicando el numerador y denominador por $\Delta g = g(x+h) - g(x)$

$$(f \circ g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[f(g(x+h)) - f(g(x))][g(x+h) - g(x)]}{h[g(x+h) - g(x)]}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x) + \Delta g) - f(g(x))}{\Delta g} \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

El segundo límite de la expresión anterior es $g'(x)$. En el primer límite: Cuando h tiende a 0, por ser g contínua (teorema 3.1), la expresión $\Delta g = g(x + h) - g(x)$ también tiende a 0 y, por lo tanto, este primer límite es $f'(g(x))$. En consecuencia,

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x).$$

En la demostración anterior, al dividir entre $\Delta g = g(x + h) - g(x)$, hemos supuesto implícitamente que $\Delta g \neq 0$. Para el caso en el que $\Delta g = 0$ se debe dar una demostración aparte, que nosotros no haremos.

PROBLEMAS PROPUESTOS 3.5

En los problemas del 1 al 61 derivar la función indicada. Las letras a, b y c denotan constantes.

1. $y = (x^2 - 3x + 5)^3$ **2.** $f(x) = (15 - 8x)^4$ **3.** $g(t) = (2t^3 - 1)^{-3}$

4. $z = \dfrac{1}{(5x^5 - x^4)^8}$ **5.** $y = (3x^2 - 8)^3(-4x^2 + 1)^4$

6. $f(u) = \dfrac{2u^3 + 1}{u^2 - 1}$ **7.** $y = \left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^2$ **8.** $g(t) = \left(\dfrac{3t^2 + 2}{2t^3 - 1}\right)^2$

9. $y = \sqrt{1 - 2x}$ **10.** $u = \sqrt{1 + t - 2t^2 - 8t^3}$ **11.** $h(x) = x^2\sqrt{x^4 - 1}$

12. $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ **13.** $y = \sqrt{3x^2 - 1}\,\sqrt[3]{2x + 1}$

14. $z = (1 - 3x^2)^2(\sqrt{x} + 1)^{-2}$ **15.** $h(t) = \dfrac{1 + t}{\sqrt{1 - t}}$ **16.** $z = \sqrt[3]{\dfrac{1}{1 + t^2}}$

17. $z = \sqrt[3]{b + ax^3}$ **18.** $f(x) = \dfrac{x}{b^2\sqrt{b^2 + x^2}}$ **19.** $y = \dfrac{1 - \sqrt{1 + x}}{1 + \sqrt{1 + x}}$

20. $f(x) = \sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}$ **21.** $y = \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$

22. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ **23.** $y = \tan 4x$ **24.** $y = 2\cot \dfrac{x}{2}$

25. $u = \cos(x^3)$ **26.** $v = \cos^3 x$ **27.** $y = \tan(x^4) + \tan^4 x$

27. $y = \tan(x^4) + \tan^4 x$ **28.** $z = \cos\sqrt{x}$ **29.** $u = \sqrt{\cos x}$

30. $y = \sqrt{\cos\sqrt{x}}$ **31.** $y = \sqrt[3]{\tan 3x}$ **32.** $y = \cot\sqrt[3]{1+x^2}$

33. $y = \dfrac{4}{\sqrt{\sec x}}$ **34.** $y = \operatorname{cosec}\dfrac{1}{x^2}$ **35.** $y = \operatorname{sen}^3\left[\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right]$

36. $y = \dfrac{\tan x}{\sqrt{\sec^2 x + 1}}$ **37.** $y = \sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}}$ **38.** $y = \sqrt{1 + \cot(x + 1/x)}$

39. $y = \dfrac{\cot(x/2)}{\sqrt{1-\cot^2(x/2)}}$ **40.** $y = \sqrt{a\operatorname{sen}^2 x + b\cos^2 x}$ **41.** $y = \cos(\cos x)$

42. $y = \operatorname{sen}(\cos x^2)$ **43.** $y = \operatorname{sen}^2(\cos 4x)$ **44.** $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$

45. $y = \cos^2(\cos x) + \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x)$ **46.** $y = \operatorname{sen}\left(\tan\sqrt{\operatorname{sen} x}\right)$

47. $y = \tan(\operatorname{sen}^2 x)$ **48.** $y = e^{-3x^2+1}$ **49.** $y = 2^{\sqrt{x}}$

50. $y = x^n a^{-x^2}$ **51.** $y = 3^{\cot(1/t)}$ **52.** $y = 2^{3^{\operatorname{sen}^2 x}}$

53. $y = \sqrt{\log_5 x}$ **54.** $y = \ln\left(\dfrac{x}{e^x}\right)$ **55.** $y = \dfrac{\ln t}{e^{2t}}$

56. $y = \ln\dfrac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}$ **57.** $y = e^{x\ln x}$ **58.** $y = \ln\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}\right)$

59. $y = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{3/5}$ **60.** $y = \ln(x^3 \operatorname{sen} x)$ **61.** $y = \ln\cos\dfrac{x-1}{x}$

62. Si $G(x) = (g(x))^{2/3}$, $g(2) = 125$ y $g'(2) = 150$, hallar $G'((2)$.

63. Si $F(t) = [f(\operatorname{sen} t)]^2$, $f(0) = -3$ y $f'(0) = 5$, hallar $F'(0)$.

64. Dadas $f(u) = \dfrac{1}{4}u^3 - 3u + 5$ y $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, hallar la derivada de $f \circ g$ de dos maneras:

a. Encontrando $(f \circ g)(x)$ y derivando este resultado.

b. Aplicando la regla de la cadena.

En los ejercicios del 65 al 69, hallar $h'(x)$ ***si*** $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$.

65. $f(u) = u^3 - 2u^2 - 5$, $g(x) = 2x - 1$ **66.** $f(v) = \sqrt{v}$, $g(x) = 2x^3 - 4$

67. $f(t) = t^5,\ g(x) = 1 - 2\sqrt{x}$

68. $f(u) = \dfrac{b-u}{b+u}\ ,\ g(x) = cx$

69. $f(v) = \dfrac{1}{v}\ ,\ g(x) = a\sqrt{a^2 - x^2}$

En los ejercicios del 70 al 73 hallar $\dfrac{dy}{dx}$.

70. $y = 3u^3 - 4u^4 - 1,\ u = x^2 - 1$

71. $y = v^5,\ v = 3a + 2bx$

72. $y = t^4,\ \ t = \dfrac{ax+b}{c}$

73. $y = \dfrac{1}{\sqrt{v}},\ \ v = 3x^2 - 1$

***En los ejercicios del 74 al 81, hallar la recta tangente y la recta normal al gráfico de la función dada en el punto* (a, f(a)), *para el valor especificado de* a.**

74. $f(x) = (2x^2 - 1)^3,\ a = -1$

75. $f(x) = \dfrac{3}{\left(2-x^2\right)^2},\ a = 0$

76. $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{3x+6}},\ a = 1$

77. $f(x) = \sqrt[3]{x-1},\ a = -7$

78. $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{(3x-2)^2},\ a = \dfrac{1}{2}$

79. $f(x) = \cot^2 x,\ a = \dfrac{\pi}{4}$

80. $f(x) = |\,1 - x^3\,|,\ \ a = 2$

81. $f(x) = |\,\text{sen}\ 5x\,|,\ \ a = \dfrac{\pi}{3}$

82. Hallar las rectas tangentes al gráfico de $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ en los puntos donde el gráfico corta al eje X.

83. Hallar los puntos en la gráfica de $g(x) = x^2(x - 4)^2$ en los cuales la recta tangente es paralela al eje X.

84. Hallar las rectas tangentes al gráfico de $f(x) = \dfrac{x-4}{x-2}$ en los puntos donde este gráfico corta a los ejes. ¿Qué particularidad tienen estas rectas?

85. Hallar las rectas tangentes al gráfico de $g(x) = \dfrac{x+4}{x+3}$ que pasan por el origen.

86. Hallar las rectas tangentes al gráfico de $f(x) = 3x^2 - \ln x$ en el punto (1, 3).

87. Hallar las rectas tangentes al gráfico de $y = \ln\left(1+e^x\right)$ en el punto (0, ln 2).

88. Sean f y g dos funciones diferenciables tales que $f'(u) = \dfrac{1}{u}$ y $f(g(x)) = x$.

Probar que $g'(x) = g(x)$.

4

OTRAS TECNICAS DE DERIVACION

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ
(1.646 – 1.716)

Gottfried Wilhelm Leibniz (1.646 a 1.716)

Gottfried Wilhelm Leibniz *nació en Leipzig, Alemania. Se graduó y fue profesor en la universidad de Altdort. Fue un genio polifacético. Se desenvolvió con excelencia en varios campos: Matemáticas, Filosofía, Lógica, Mecánica, Geología, Jurisprudencia, Diplomacia, etc.*

En 1.684 se publicaron sus investigaciones sobre lo que sería el ***Cálculo Diferencial e Integral****. El, junto con Newton, son considerados como creadores del Cálculo. Sus ideas sobre este tema fueron más claras que las de Newton. La notación que usó para designar la derivada todavía se usa hasta ahora (notación de Leibniz).*

Inventó una máquina de multiplicar. A temprana edad se graduó con la tesis De Arte Combinatoria, que trata sobre un método de razonamiento. En este trabajo están, en germen, las ideas iniciales de la ***Lógica Simbólica****.*

Durante algún tiempo del reinado de Luis XIV fue embajador de su patria en París. Aquí conoció a científicos, como Huygens, quienes reforzaron su interés por la matemática.

En 1.712 surgió una larga e infortunada querella entre Newton y sus seguidores, por un lado, y Leibniz y sus seguidores, en otro lado, sobre quien de los dos matemáticos realmente inventó el Cálculo. Se lanzaron acusaciones mutuas de plagio y deshonestidad. Los historiadores zanjaron la disputa dando mérito a cada uno. Dicen que cada cual, Newton y Leinibz, lograron sus resultados independientemente.

ACONTECIMIENTOS IMPORTANTES

Durante la vida de Leibniz, en América y en el mundo hispano sucedieron los siguientes hechos notables: La poetisa mejicana Sor Inés de la Cruz (1.651-1.695) publica sus obras poéticas, obras que fueron fuertemente influenciadas por el Gongorismo. En 1.664, los ingleses, bajo el mando del duque de York, toman Nueva Amsterdam y le cambian el nombre a Nueva York. En 1.671 el pirata inglés Henry Morgan saquea e incendia la ciudad de Panamá. En 1.682 el cuáquero Willian Penn funda Pensilvania. Ese mismo año, el francés Robert Cavalier de la Salle llega a la desembocadura del río Misisipi, toma posesión de la región y la nombra, en honor a su rey, Luisiana.

SECCION 4.1

DERIVACION IMPLICITA Y TEOREMA DE LA FUNCION INVERSA

Consideremos la ecuación $xy - 1 = 0$. En esta ecuación, fácilmente podemos despejar la variable y: $y = \dfrac{1}{x}$. Esta nueva ecuación define a y como función de x. Casos como el ejemplo anterior suceden con frecuencia. Es decir, una ecuación de la forma $g(x, y) = 0$ puede dar lugar a una función $y = f(x)$. Si esta situación ocurre diremos que la ecuación $g(x, y) = 0$ define **implícitamente** a y como función de x. En cambio, diremos que una ecuación de la forma $y = f(x)$ define **explícitamente** a y como función de x.

No toda ecuación $g(x, y) = 0$ determina implícitamente una función (real de variable real). Tal es el caso de la ecuación $x^2 + y^2 + 1 = 0$, que no tiene soluciones reales. Puede suceder también que una misma ecuación dé lugar a más de una función. Así, la circunferencia $x^2 + y^2 - 1 = 0$ determina dos funciones

1. $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ **2.** $f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$

Sucede con frecuencia que en funciones definidas implícitamente es difícil despejar la variable dependiente. Por este motivo, sería conveniente contar con una técnica que nos permita encontrar la derivada de una función definida implícitamente, sin la necesidad de contar con la expresión explícita de la función. Esta técnica se llama **diferenciación implícita** y se resume en la siguiente regla.

Para derivar implícitamente, derivar la ecuación término a término, considerando a la variable dependiente como función de la independiente. Luego, despejar la derivada.

EJEMPLO 1. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ si $x^3y - y^7x = 5$.

Solución

Derivamos término a término.

$$\frac{d}{dx}(x^3y) - \frac{d}{dx}(y^7x) = \frac{d}{dx}(5) \Rightarrow \left[x^3\frac{dy}{dx} + y\frac{d}{dx}(x^3)\right] - \left[y^7\frac{dx}{dx} + x\frac{d}{dx}(y^7)\right] = 0$$

$$\Rightarrow x^3\frac{dy}{dx} + 3yx^2 - y^7 - 7xy^6\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x^3\frac{dy}{dx} - 7xy^6\frac{dy}{dx} = y^7 - 3yx^2$$

$$\Rightarrow \left(x^3 - 7xy^6\right)\frac{dy}{dx} = y^7 - 3yx^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^7 - 3yx^2}{x^3 - 7xy^6}$$

EJEMPLO 2. Si $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$, hallar $D_x y$.

Solución

$$D_x\left(\sqrt[3]{x^2}\right) + D_x\left(\sqrt[3]{y^2}\right) = D_x\left(\sqrt[3]{a^2}\right) \Rightarrow D_x x^{2/3} + D_x y^{2/3} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}D_x y = 0 \Rightarrow x^{-1/3} + y^{-1/3}D_x y = 0 \Rightarrow$$

$$D_x y = \frac{-x^{-1/3}}{y^{-1/3}} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

EJEMPLO 3. Si $\tan xy = \dfrac{x}{y}$, hallar $D_x y$

Solución

$$D_x(\tan xy) = D_x\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow \sec^2 xy\, D_x(xy) = \frac{y D_x x - x D_x y}{y^2} \Rightarrow$$

$$\sec^2 xy\,(xD_x y + y) = \frac{y - xD_x y}{y^2} \Rightarrow x\sec^2 xy\, D_x y + y\sec^2 xy = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}D_x y$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{y^2} + x\sec^2 xy\right)D_x y = \frac{1}{y} - y\sec^2 xy$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y^2}\left(1 + y^2\sec^2 xy\right)D_x y = \frac{1}{y}(1 - y^2\sec^2 xy)$$

$$\Rightarrow x(1 + y^2\sec^2 xy)D_x y = y\,(1 - y^2\sec^2 xy)$$

$$\Rightarrow D_x y = \frac{y(1 - y^2\sec^2 xy)}{x(1 + y^2\sec^2 xy)}$$

EJEMPLO 4. Si $\ln y + \dfrac{x}{y} = c$, hallar $D_x y$

Solución

$$D_x\left(\ln y + \frac{x}{y}\right) = D_x(c) \Rightarrow D_x(\ln y) + D_x\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{y}D_x y + \frac{y D_x(x) - x D_x y}{y^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{y}D_x y + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}D_x y = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)D_x y = -\frac{1}{y} \Rightarrow \left(\frac{y-x}{y^2}\right)D_x y = -\frac{1}{y} \Rightarrow D_x y = -\frac{1}{y}\ \frac{y^2}{y-x} = \frac{y}{x-y}$$

EJEMPLO 5. Hallar las rectas tangentes a la siguiente circunferencia en los puntos que tienen abscisa $x = 4$.

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$$

Solución

Hallemos los puntos en la curva que tienen abscisa $x = 4$. Para esto, sustituimos el valor $x = 4$ en la ecuación de la curva.

$$(4-1)^2 + (y+1)^2 = 25 \Leftrightarrow (y+1)^2 = 16 \Leftrightarrow y = 3 \text{ ó } y = -5.$$

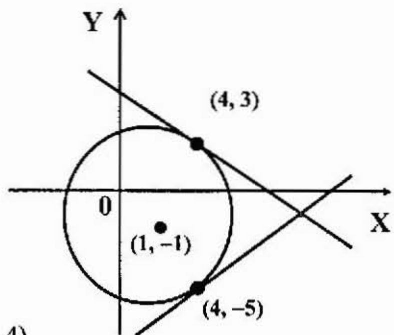
Hay dos puntos en la curva con abscisa $x = 4$: $P_1 = (4, 3)$ y $P_2 = (4, -5)$.

Hallemos la derivada $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{d}{dx}(x-1)^2 + \frac{d}{dx}(y+1)^2 = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\Rightarrow 2(x-1) + 2(y+1)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x-1}{y+1}$$



Si m_1 es la pendiente de L_1, la recta tangente en el punto $P_1 = (4, 3)$, entonces

$$m_1 = -\frac{4-1}{3+1} = -\frac{3}{4} \quad \text{y} \quad L_1\text{: } y - 3 = -\frac{3}{4}(x-4)$$

$$\Rightarrow L_1\text{: } 3x + 4y - 24 = 0$$

Si m_2 es la pendiente de L_2, la recta tangente en el punto $P_2 = (4, -5)$, entonces

$$m_2 = -\frac{4-1}{-5+1} = \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad L_2\text{: } y + 5 = \frac{3}{4}(x-4) \Rightarrow L_2\text{: } 3x - 4y - 32 = 0.$$

EJEMPLO 6. Hallar la recta tangente a la siguiente curva

$$y e^{xy} = 2 + x^2$$

en el punto donde $x = 0$.

Solución

Hallamos la derivada y'

Derivando ambos miembros de la ecuación se tiene que:

$$\left(ye^{xy}\right)' = \left(2+x^2\right)' \Rightarrow \quad y'\,e^{xy} + y\left(e^{xy}\right)' = 2x \Rightarrow$$

$$y'e^{xy} + y\left(e^{xy}(\,y + xy'\,)\right) = 2x \Rightarrow y'e^{xy} + y^2e^{xy} + xyy'e^{xy} = 2x$$

$$\Rightarrow \quad y'\left(e^{xy} + xye^{xy}\right) = 2x - y^2e^{xy} \Rightarrow \quad y' = \frac{2x - y^2e^{xy}}{e^{xy}(1+xy)}$$

Hallamos la recta tangente:

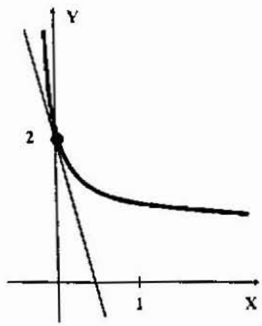
Reemplazando $x = 0$ en la ecuación de la curva

$$ye^{(0)y} = 2 + 0^2 \Rightarrow \quad y = 2$$

Luego, el punto de tangencia es $(0, 2)$.

La pendiente m de la tangente en $(0, 2)$ es la derivada y' en $(0, 2)$. Esto es,

$$m = \frac{2(0) - 2^2e^{(0)2}}{e^{(0)2}(1+0(2))} = \frac{-4}{1} = -4$$



En consecuencia, la recta tangente a la curva en el punto donde $x = 0$ es:

$y - 2 = -4(x - 0)$, ó bien, $y + 4x = 2$

TEOREMA DE LA FUNCION INVERSA

En este parte trataremos rápidamente las condiciones que garantizan la existencia y la diferenciabilidad de la función inversa. La demostración que presentamos es parcial. El lector interesado puede hallar la prueba total en el problema resuelto 7.

TEOREMA 4.1 **Teorema de la función Inversa.**

Si f es diferenciable en un intervalo abierto I en el cual f' es continua y no se anula, entonces

a. f, en todo I, tiene inversa f^{-1}.

b. f^{-1} es diferenciable y para cada x en f(I), se cumple que:

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}}$$

Este teorema, con la notación de Leibniz, nos dice que:

$$\frac{dx}{dy} = 1\Big/\frac{dy}{dx} \text{ ó bien, } \quad \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dy} = 1$$

Demostración

La demostración que aquí presentamos presupone que la inversa f^{-1} es diferenciable. Derivando implícitamente, deducimos la fórmula enunciada.

Bien, por definición de función inversa tenemos:

$$y = f^{-1}(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x$$

Derivando la segunda igualdad respecto a x se obtiene:

$$f'(y)y' = 1 \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{f'(y)} \Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

EJEMPLO 7. Sea la función $f(x) = x^3 + 3x - 2$

a. Probar que f tiene inversa en todo su dominio que es $\mathbb{R}$.

b. Hallar $(f^{-1})'(2)$

c. Hallar la recta tangente al gráfico de f en el punto (1, 2)

d. Hallar la recta tangente al gráfico de f^{-1} en el punto (2, 1)

Solución

a. Tenemos que $f'(x) = 3x^2 + 3$ y $f'(x) \neq 0$, para todo x en $\mathbb{R}$. Luego f tiene inversa en todo $\mathbb{R}$.

b. Se tiene que: $f'(1) = 3(1)^2 + 3(1) = 6$. Además,

$f(1) = (1)^3 + 3(1) - 2 = 2$ y, por lo tanto, $(f^{-1})(2) = 1$

Luego,

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(2)\right)} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6}$$

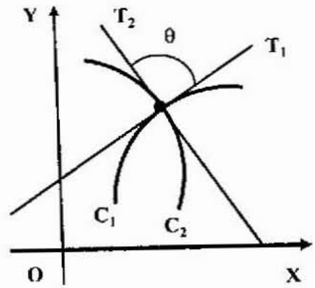
c. $y - 2 = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 2 = 6(x - 1) \Rightarrow y - 6x = 4$

d. $y - 1 = (f^{-1})'(2)(x - 2) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{6}(x - 2) \Rightarrow 6y - x = 4$

ANGULO ENTRE CURVAS

Sean C_1 y C_2 dos curvas que se intersectan en un punto P y sean T_1 y T_2 las rectas tangentes a estas curvas en el punto P. Llamaremos ángulos entre C_1 y C_2 a los ángulos suplementarios que forman T_1 y T_2. Si m_1 y m_2 son las pendientes de T_1 y T_2 respectivamente, entonces, de acuerdo a nuestro apéndice de Trigonometría, uno de estos dos ángulos es el ángulo θ que cumple:

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$



Si $\tan\theta \geq 0$, el ángulo es agudo; en cambio, si $\tan\theta < 0$, el ángulo es obtuso.

Se dice que dos **curvas se cortan ortogonalmente** si las rectas tangentes en el punto de intersección son perpendiculares. O sea, si las curvas se cortan formando un ángulo recto.

EJEMPLO 8. Hallar los ángulos que forman las siguientes circunferencias en el los puntos de intersección.

$$C_1: x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0, \quad C_2: x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$$

Solución

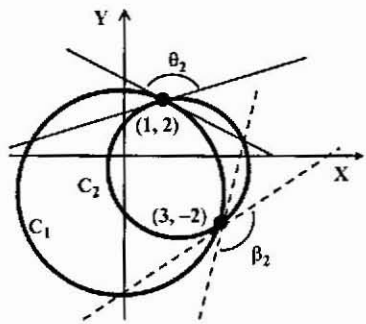
Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las circunferencias, hallamos que ellas se intersectan en los puntos $A = (1, 2)$ y $B = (3, -2)$

a. En A = (1, 2)

Hallamos la derivada y' para ambas ecuaciones:

$$x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$2x + 2yy' + 2y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y+1}$$



En $A = (1, 2)$,

$$y' = -\frac{x}{y+1} = -\frac{1}{2+1} = -\frac{1}{3} \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{3}$$

Por otro lado,

$$x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$2x + 2yy' - 4 = 0 \Rightarrow y' = \frac{2-x}{y}$$

En $A = (1, 2)$,

$$y' = \frac{2-x}{y} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_2 = \frac{1}{2}$$

Ahora, si θ_1 es uno de los ángulos en $A = (1, 2)$, entonces

$$\tan\theta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{1/2 - (-1/3)}{1 + (-1/3)(1/2)} = 1$$

Luego, el ángulo agudo es $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ y el obtuso, $\theta_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

B. En B = (3, –2)

$$y' = -\frac{x}{y+1} = -\frac{3}{-2+1} = 3 \Rightarrow m_1 = 3, \qquad y' = \frac{2-3}{-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_2 = \frac{1}{2}$$

Ahora, si β_1 es uno de los ángulos en B = (3, –2), entonces

$$\tan\beta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{1/2 - 3}{1 + (3)(1/2)} = 1$$

Luego, el ángulo agudo es $\beta_1 = \frac{\pi}{4}$ y el obtuso, $\beta_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

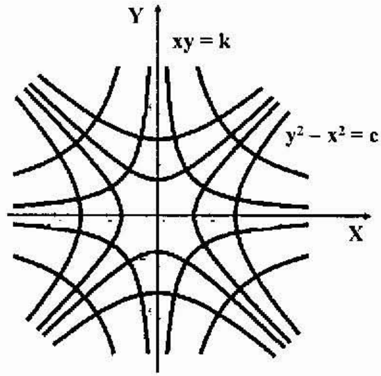
EJEMPLO 9. Probar que cada miembro de la familia (hipérbolas)

$$xy = k, \quad k \neq 0$$

corta ortogonalmente a cada miembro de la familia (hipérbolas).

$$y^2 - x^2 = c, \quad c \neq 0$$

Solución



Tenemos que:

$$xy = k \Rightarrow xy' + y = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y}{x}$$

Por otro lado,

$$y^2 - x^2 = c \Rightarrow 2y\,y' - 2x = 0 \Rightarrow y' = \frac{x}{y}$$

Si P = (x, y) es un punto donde se intresecta un miembro de la primera familia con un miembro de la segunda familia, entonces las pendientes en ese punto son:

$$m_1 = -\frac{y}{x} \quad y \quad m_2 = \frac{x}{y} \Rightarrow m_1 m_2 = \left(-\frac{y}{x}\right)\left(\frac{x}{y}\right) = -1$$

Luego, las curvas se cortan ortogonalmente.

PROBLEMAS RESUELTOS 4.1

PROBLEMA 1. Hallar la recta tangente en el punto (3a/2, 3a/2) a la hoja de Descartes:

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

Solución

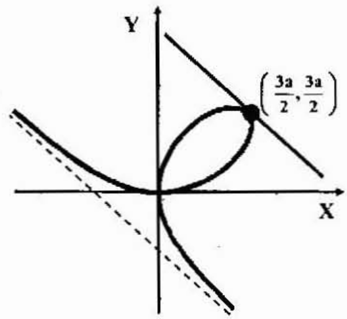
Hallemos $\frac{dy}{dx}$ derivando implícitamente:

$$x^3 + y^3 = 3axy \Rightarrow 3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 3ay + 3ax\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow 3\left(y^2 - ax\right)\frac{dy}{dx} = 3(ay - x^2) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

Ahora, la pendiente en el punto $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ es:

$$m = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax} = \frac{a\left(\frac{3a}{2}\right) - \left(\frac{3a}{2}\right)^2}{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 - a\left(\frac{3a}{2}\right)} = \frac{-3a^2}{3a^2} = -1$$



Luego, la recta tangente en el punto dada es:

$$y - \frac{3a}{2} = (-1)\left(x - \frac{3a}{2}\right) \Rightarrow y + x - 3a = 0$$

PROBLEMA 2. Probar que la recta tangente en el punto (x_o, y_o) a la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ es la recta } \frac{x_o x}{a^2} + \frac{y_o y}{b^2} = 1$$

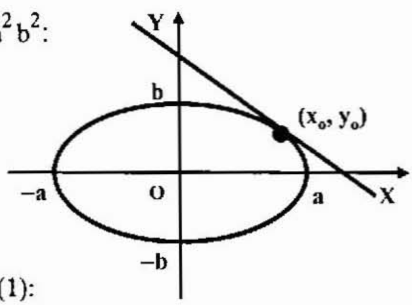
Solución

Multiplicando la ecuación de la elipse por a^2b^2:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \qquad (1)$$

Por ser (x_o, y_o) un punto de la elipse:

$$b^2(x_o)^2 + a^2(y_o)^2 = a^2b^2 \qquad (2)$$



Hallemos la pendiente de la tangente. Para esto, derivamos implícitamente la igualdad (1):

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow 2b^2x + 2a^2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

Luego, la pendiente en el punto (x_o, y_o) es $m = -\frac{b^2x_o}{a^2y_o}$

En consecuencia, la recta tangente en el punto (x_o, y_o) es

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0) \Rightarrow a^2 y_0 y + b^2 x_0 x = a^2 (y_0)^2 + b^2 (x_0)^2$$

$$\Rightarrow a^2 y_0 y + b^2 x_0 x = a^2 b^2 \qquad \text{(por (2))}$$

Finalmente, dividiendo entre $a^2 b^2$:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

PROBLEMA 3. El gráfico de la siguiente ecuación es una elipse rotada.

$$x^2 - xy + y^2 = 4$$

Hallar las rectas tangentes a esta curva en los puntos donde ésta corta al eje X. Mostrar que estas rectas son paralelas.

Solución

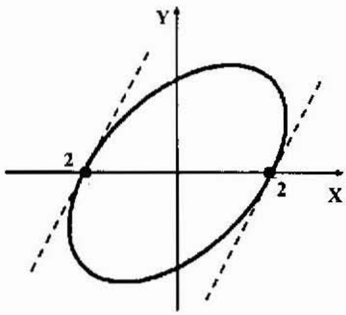
$$y = 0 \Rightarrow x^2 - x(0) + (0)^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Luego, la curva corta al eje X en los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$

Derivando implícitamente la ecuación, tenemos:

$$2x - xy' - y + 2yy' = 0 \Rightarrow$$

$$(2y - x)y' = y - 2x \Rightarrow y' = \frac{y - 2x}{2y - x}$$



La pendiente de la tangente en $(-2, 0)$

$$m_1 = \frac{0 - 2(-2)}{2(0) - (-2)} = 2, \text{ y su ecuación es}$$

$$y - 0 = 2(x - (-2)) \Rightarrow y = 2x + 4$$

La pendiente de la tangente en $(2, 0)$

$$m_2 = \frac{0 - 2(2)}{2(0) - 2} = 2, \text{ y su ecuación es}$$

$$y - 0 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 4$$

Observar que las dos tangentes tienen la misma pendiente y, por tanto, son paralelas.

PROBLEMA 4. Probar que el segmento de cualquier recta tangente a la **Astroide**

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},$$

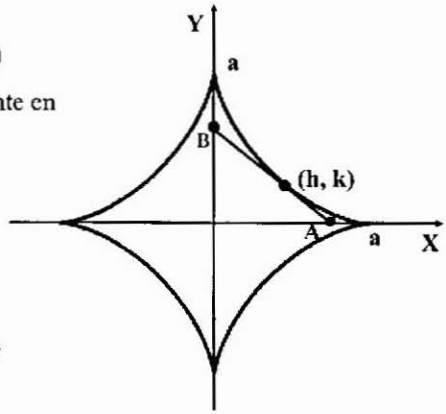
comprendido entre los dos ejes coordenadas tiene longitud a.

Solución

Sea P = (h, k) un punto cualquiera de la Astroide.

Se tiene, entonces:

$$h^{2/3} + k^{2/3} = a^{2/3} \qquad \textbf{(1)}$$



Paso 1. Hallamos la ecuación de la tangente en el punto P = (h, k).

Hallemos la pendiente.

Derivando implícitamente:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = -x^{-1/3}y^{1/3} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$

En particular, la derivada en el punto P = (h, k), nos da la pendiente:

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=h} = -\frac{k^{1/3}}{h^{1/3}}$$

Luego, la ecuación de la recta tangente, teniendo en cuenta (1), es

$$y - k = -\frac{k^{1/3}}{h^{1/3}}(x-h) \Rightarrow \quad y + \frac{k^{1/3}}{h^{1/3}}x = h^{2/3}k^{1/3} + k \Rightarrow$$

$$y + \frac{k^{1/3}}{h^{1/3}}x = k^{1/3}\left(h^{2/3} + k^{2/3}\right) \Rightarrow \quad y + \frac{k^{1/3}}{h^{1/3}}x = k^{1/3}a^{2/3} \qquad \textbf{(2)}$$

Paso 2. Hallamos la intersección de la recta tangente con los ejes coordenados.

Haciendo x = 0 en (2) se tiene: $\quad y = k^{1/3}a^{2/3}$

Luego, la recta tangente corta al eje Y en el punto $A = \left(0, k^{1/3}a^{2/3}\right)$

Haciendo y = 0 en (2) se tiene:

$$\frac{k^{1/3}}{h^{1/3}}x = k^{1/3}a^{2/3} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{h^{1/3}}{k^{1/3}}\left(k^{1/3}a^{2/3}\right) = h^{1/3}a^{2/3}$$

Luego, la recta tangente corta al eje X en el punto $B = \left(h^{1/3}a^{2/3}, 0\right)$

Paso 3. Hallamos la longitud del segmento de extremos A y B.

La longitud de este segmento es la distancia d(A, B), de A a B.

$$\left[d(A,B)\right]^2 = \left(0 - k^{1/3}a^{2/3}\right)^2 + \left(h^{1/3}a^{2/3} - 0\right)^2$$

$$= k^{2/3}\,a^{4/3} + h^{2/3}a^{4/3} = a^{4/3}\left(k^{2/3} + h^{2/3}\right) = a^{4/3}\,a^{2/3} = a^2$$

Luego, a longitud de este segmento de extremos A y B es d(A, B) = a.

PROBLEMA 5. Dada la función $f(x) = 2x + \cos x$, cuyo dominio es $\mathbb{R}$.

a. Probar que tiene inversa

b. Hallar $(f^{-1})'(1)$

c. Hallar la recta tangente al gráfico de f^{-1} en el punto $\left(1,\ f^{-1}(1)\right)$.

Solución

a. Tenemos que

$$f'(x) = 2 - \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) \geq 2 - 1 = 1 \Rightarrow f'(x) > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Luego, por la parte a del teorema de la función inversa, f tiene inversa en todo $\mathbb{R}$.

b. Se tiene que

$$f(0) = 2(0) + \cos(0) = 0 + 1 = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 0$$

Luego, por la parte b. del teorema de la función inversa,

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2 - \operatorname{sen}(0)} = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2}$$

c. La recta tangente a la gráfica de f^{-1} en el punto $\left(1,\ f^{-1}(1)\right) = (1, 0)$ es

$$y - 0 = (f^{-1})'(1)(x - 1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow 2y - x + 1 = 0$$

PROBLEMA 6. Probar que la familia de parábolas

$$y = ax^2 \qquad \textbf{(1)}$$

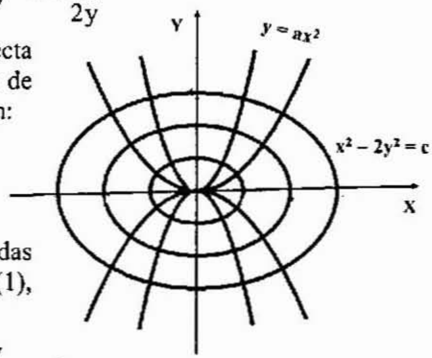
se cortan ortogonalmente con la familia de las elipses

$$x^2 + 2y^2 = c \qquad \textbf{(2)}$$

Solución

$$y = ax^2 \Rightarrow y' = 2ax$$

$$x^2 + 2y^2 = c \Rightarrow 2x + 4y\,y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{2y}$$



Sea P = (x, y) un punto donde se intersecta un miembro de la primera familia con uno de la segunda. Las pendientes en este punto son:

$$m_1 = 2ax \quad \text{y} \quad m_2 = -\frac{x}{2y}$$

Ahora, considerando que las coordenadas del punto P = (x, y) satisface la ecuación (1), tenemos,

$$m_1\, m_2 = (2ax)\left(-\frac{x}{2y}\right) = -\frac{ax^2}{y} = -\frac{y}{y} = -1$$

Luego, las familias se cortan ortogonalmente.

PROBLEMA 7. Probar el teorema de la función inversa: Si f es diferenciable en un intervalo abierto I en el cual f' es continua y no se anula, entonces

a. f, en todo I, tiene inversa f^{-1}.

b. f^{-1} es diferenciable y para cada x en f(I), se cumple que:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

Solución

a. Si f' es continua y no se anula en I, entonces

$$f'(z) > 0, \forall z \in I \quad \text{ó} \quad f'(z) < 0, \forall z \in I,$$

ya que f', de tomar valores positivos y negativos, por el teorema del valor intermedio, existiría un c en I tal que $f'(c) = 0$. Pero esto contradice la hipótesis.

Por un resultado simple, que veremos más adelante (teorema 5.7), en el primer caso, f es creciente en I. En segundo caso, f es decreciente en I. Sabemos que, en cualquiera de los casos, f es inyectiva y, por lo tanto, f tiene inversa en I.

b. Sea $y = f^{-1}(x)$, x_o un elemento cualquiera de f(I) y sea $y_o = f^{-1}(x_o)$.

Se tiene que: $x = f(y)$, $x_o = f(y_o)$

Ahora,

$$(f^{-1})'(x_o) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} \qquad (1)$$

Como f es diferenciable en I, f es continua en I. Por lo tanto, f^{-1} es continua. Por otro lado, por ser , f^{-1} continua, se tiene que:

$$x \to x_o \Leftrightarrow y \to y_o$$

Regresando a (1), tenemos:

$$(f^{-1})'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_o)}{x - x_o} = \lim_{y \to y_o} \frac{y - y_o}{f(y) - f(y_o)}$$

$$= \lim_{y \to y_o} \frac{1}{\dfrac{f(y) - f(y_o)}{y - y_o}} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{y \to y_o} \frac{f(y) - f(y_o)}{y - y_o}}$$

$$= \frac{1}{f'(y_o)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_o))}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 4.1

En los problemas del 1 al 23, derivando implícitamente, hallar $\frac{dy}{dx}$. Las letras a, b, c y r denotan constantes.

1. $3x^2 - 4y = 1$

2. $xy - x^2 = 5$

3. $y^2 = 4px$

4. $3xy^2 - x^2y^2 = x + 1$

5. $\frac{1}{x} + y^2 = 2x$

6. $x^3 + \frac{1}{y} = xy$

7. $(y^2 - 2xy)^2 = 4y - 3$

8. $\frac{y}{x-y} - x^3 - 1 = 0$

9. $x^2 + y^2 = r^2$

10. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

11. $x + 2\sqrt{xy} + y = b$

12. $x^2 - 2axy + y^2 = 0$

13. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = b$

14. $\sqrt{y} + \sqrt[3]{y} = x$

15. $a\cos^2(x + y) = b$

16. $\tan y = xy$

17. $\cot(xy) = xy$

18. $\cos(x - y) = y \operatorname{sen} x.$

19. $y = 1 + xe^y$

20. $ye^y = e^{x+1}$

21. $2^x + 2^y = 2^{x+y}$

22. $2y \ln y = x$

23. $\ln x + e^{-y/x} = c$

24. Sea $f(x) = 5 - x - x^3$.

a. Probar que f tiene inversa en $\mathbb{R}$

b. Hallar $(f^{-1})'(3)$

c. Hallar la recta tangente al gráfico de f en el punto (1, 3)

d. Hallar la recta tangente al gráfico de f^{-1} en el punto (3, 1)

25. Sea $g(x) = x^4 + 3x^2 - 2$.

a. Probar que g tiene inversa en $(0, +\infty)$ **b.** Hallar $(g^{-1})'(2)$

c. Hallar la recta tangente al gráfico de g en el punto (1, 2)

d. Hallar la recta tangente al gráfico de g^{-1} en el punto (2, 1)

26. Sea $h(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

a. Probar que g tiene inversa en $\mathbb{R}$ **b.** Hallar $(h^{-1})'(0)$

c. Hallar la recta tangente al gráfico de h en el punto (0, 0)

d. Hallar la recta tangente al gráfico de h^{-1} en el punto (0, 0)

En los problemas del 27 al 32, hallar la recta tangente a la curva en el punto indicado.

27. $y^2 - 4x - 16 = 0$; $(-3, 2)$ **28.** $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$; $(-5, -8/3)$

29. $x^2 - x\sqrt{xy} - 2y^2 = 0$; $(-1, -1)$ **30.** $y^4 + 6xy = 4x^4$; $(-1, 2)$

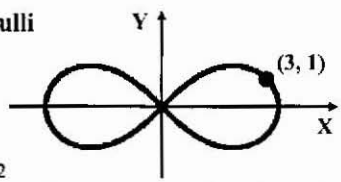
31. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{3} = 1$; en los puntos donde $x = 3$.

32. $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2n} + \left(\dfrac{y}{b}\right)^{2n} = 2$; en los puntos donde $x = a$.

33. Hallar la recta tangente a la **Lemniscata de Bernoulli**

$$2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2),$$

en el punto (3, 1).



34. Probar que la tangente a la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ en un punto $P = (x_o, y_o)$

tiene la siguiente ecuación $\dfrac{x\,x_o}{a^2} - \dfrac{y\,y_o}{b^2} = 1$

35. Probar que el segmento de la tangente a la hipérbola $xy = a^2$, limitado por los ejes coordenados, tiene por punto medio el punto de tangencia.

36. Probar que la suma de las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados de una tangente cualquiera a la curva $x^{1/2} + y^{1/2} = b^{1/2}$ es igual a b.

En los problemas 37 y 38 hallar el ángulo de intersección de las curvas dadas.

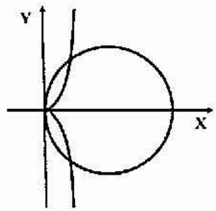
37. $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$, $x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0$ **38.** $y = x^2$, $y = x^3$

39. Probar que la elipse $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$ y la hipérbola $x^2 - y^2 = 5$ se cortan ortogonalmente.

40. Probar que la **Cisoide de Diocles**, $(2a - x)y^2 = x^3$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 8ax$ se cortan:

a. En el origen, ortogonalmente.

b. En los otros puntos, con un ángulo de 45°.



SECCION 4.2
DERIVACION LOGARITMICA

Cuando una función tiene un aspecto complicado y está conformada por productos, cocientes, potencias o radicales, el cálculo de su derivada se simplifica si se utiliza el procedimiento llamado **derivación logarítmica**. Para esto, se siguen los siguientes pasos:

1. Tomar logaritmos naturales en ambos miembros y usando las propiedades logarítmicas transformar los productos, cocientes y exponentes en sumas, restas y multiplicaciones, respectivamente.
2. Derivar implícitamente.
3. Despejar la derivada y simplificar.

EJEMPLO 1. Mediante derivación logarítmica hallar la derivada de

$$y = \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2-2}}$$

Solución

Pasos 1: Aplicamos logaritmos y simplificamos:

$$\ln y = \ln \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2-2}} = 2\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln\left(x^2-2\right)$$

Paso 2. Derivamos implícitamente

$$D_x \ln y = 2D_x \ln(x+1) - \frac{1}{2}D_x \ln\left(x^2-2\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{y}D_x y = 2\frac{1}{x+1}D_x(x+1) - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2-2}D_x(x^2-2) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{y}D_x y = 2\frac{1}{x+1}(1) - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2-2}(2x) = \frac{2}{x+1} - \frac{x}{x^2-2}$$

Pao 3. Despejamos la derivada y simplificamos:

$$D_x y = y\left[\frac{2}{x+1} - \frac{x}{x^2-2}\right] = y\left[\frac{x^2-x-4}{(x+1)(x^2-2)}\right] \Rightarrow$$

$$D_x y = \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2-2}}\left[\frac{x^2-x-4}{(x+1)(x^2-2)}\right] = \frac{(x+1)(x^2-x-4)}{(x^2-2)^{3/2}}$$

En la práctica, los 3 pasos dados se dan implícitamente, sin necesidad de especificarlos.

EJEMPLO 2. Hallar la derivada de $y = \left(\frac{t}{1+t}\right)^t$

Solución

$$\ln y = \ln\left(\frac{t}{1+t}\right)^t = t\ln\left(\frac{t}{1+t}\right) = t\ln t - t\ln(1+t)$$

Esto es,

$$\ln y = t\ln t - t\ln(1+t)$$

Derivando respecto a t:

$$\frac{y'}{y} = t\frac{1}{t} + \ln t - \left[t\frac{1}{1+t} + \ln(1+t)\right] = 1 + \ln t - \frac{t}{1+t} - \ln(1+t) \Rightarrow$$

$$y' = y\left(1 - \frac{1}{1+t} + \ln\frac{t}{1+t}\right) = \left(\frac{t}{1+t}\right)^t\left(\frac{t}{1+t} + \ln\frac{t}{1+t}\right)$$

PROBLEMAS RESUELTOS 4.2

PROBLEMA 1. Utilizando derivación logarítmica, hallar la derivada de

$$y = \frac{(x^2-1)(x^3+2)}{\sqrt[3]{x+1}}$$

Solución

$$\ln y = \ln \frac{(x^2-1)(x^3+2)}{\sqrt[3]{x+1}} = \ln\left[(x^2-1)(x^3+2)\right] - \ln\sqrt[3]{x+1}$$

$$= \ln(x^2-1) + \ln(x^3+2) - \frac{1}{3}\ln(x+1)$$

Ahora,

$$D_x \ln y = D_x \ln(x^2-1) + D_x \ln(x^3+2) - D_x \frac{1}{3}\ln(x+1)$$

$$= \frac{1}{x^2-1} D_x(x^2-1) + \frac{1}{x^3+2} D_x(x^3+2) - \frac{1}{3}\frac{1}{x+1} D_x(x+1) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{y} D_x y = \frac{2x}{x^2-1} + \frac{3x^2}{x^3+2} - \frac{1}{3(x+1)}$$

$$D_x y = y\left(\frac{2x}{x^2-1} + \frac{3x^2}{x^3+2} - \frac{1}{3(x+1)}\right) \Rightarrow$$

$$D_x y = \frac{(x^2-1)(x^3+2)}{\sqrt[3]{x+1}}\left(\frac{2x}{x^2-1} + \frac{3x^2}{x^3+2} - \frac{1}{3(x+1)}\right)$$

PROBLEMA 2. Mediante derivación logarítmica hallar la derivada de

a. $z = x^x,\ x > 0$ **b.** $y = (x)^{x^x} = x^{x^x},\ x > 0$

Solución

a. $z = x^x \Rightarrow \ln z = \ln x^x = x\ln x \Rightarrow \ln z = x\ln x$

Derivamos respecto a x:

$$\frac{z'}{z} = x(\ln x)' + (x)'\ln x = x\frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x \Rightarrow$$

$$z' = z(1+\ln x) \Rightarrow \quad z' = x^x(1+\ln x)$$

b. $y = x^{x^x} \Rightarrow \ln y = \ln x^{x^x} = x^x \ln x. \Rightarrow \ln y = x^x \ln x.$

Derivamos respecto a x:

$$\frac{y'}{y} = \left(x^x\right)' \ln x + x^x(\ln x)'$$

$$= \left[x^x(1+\ln x)\right]\ln x + x^x\frac{1}{x} \qquad \text{(por la parte a.)}$$

$$= x^x\left[(1+\ln x)\ln x + \frac{1}{x}\right] = x^x\left[\ln x + \ln^2 x + \frac{1}{x}\right] \Rightarrow$$

$$y' = y\left(x^x\left[\ln x + \ln^2 x + \frac{1}{x}\right]\right) = x^{x^x}\left(x^x\left[\ln x + \ln^2 x + \frac{1}{x}\right]\right) \Rightarrow$$

$$y' = x^x\, x^{x^x}\left[\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x\right]$$

PROBLEMA 3. Si $x^y = y^x$, hallar $D_x y$

Solución

Aplicamos logaritmos y luego derivamos implícitamente:

$$x^y = y^x \Rightarrow \ln x^y = \ln y^x \Rightarrow y\ln x = x\ln y \Rightarrow$$

$$y D_x(\ln x) + \ln x\; D_x y = x\; D_x(\ln y) + \ln y\; D_x x \Rightarrow$$

$$y\frac{1}{x} + \ln x\, D_x y = x\,\frac{1}{y}\, D_x y + \ln y \Rightarrow \left(\ln x - \frac{x}{y}\right)D_x y = \ln y - \frac{y}{x} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{y\ln x - x}{y}\right)D_x y = \frac{x\ln y - y}{x} \Rightarrow D_x y = \frac{y(x\ln y - y)}{x(y\ln x - x)}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 4.2

Utilizando la técnica de la derivación logarítmica hallar la derivada de las siguientes funciones:

1. $y = x^{x^3}$ **2.** $y = x^{\sqrt{x}},\ x > 0$ **3.** $y = x^{\ln x},\ x > 0$

4. $y = (\ln x)^{\ln x}$ **5.** $y = 2^{3^x}$ **6.** $y = a^x x^a$

7. $y = \sqrt[x]{x}$ **8.** $y = (x^2+1)^{\operatorname{sen} x}$ **9.** $y = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$

10. $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ **11.** $y = \dfrac{x(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}}$ **12.** $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x^2-1)}{(x+1)^2}}$

SECCION 4.3

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

TEOREMA 4.2 Si $u = u(x)$ es una función diferenciable de x, entonces

1. $D_x \operatorname{sen}^{-1} u = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$ 2. $D_x \cos^{-1} u = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$

3. $D_x \tan^{-1} u = \dfrac{1}{1+u^2} D_x u$ 4. $D_x \cot^{-1} u = -\dfrac{1}{1+u^2} D_x u$

5. $D_x \sec^{-1} u = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}} D_x u$ 6. $D_x \operatorname{cosec}^{-1} u = -\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}} D_x u$

Demostración

Es suficiente probar las fórmulas del teorema para el caso $u = x$. El caso general se obtiene usando la regla de la cadena.

Sólo probaremos (1), (4) y (5). Las otras fórmulas se obtienen en forma análoga (problema propuesto 18).

En vista de que cada función trigonométrica es diferenciable y su derivada es continua, su correspondiente función inversa es diferenciable.

1. Sea $y = \operatorname{sen}^{-1}x$. Luego, $\operatorname{sen} y = x$ y $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

Derivando $\operatorname{sen} y = x$ respecto a x :

$$D_x \operatorname{sen} y = D_x x \Rightarrow \cos y\, D_x y = 1 \Rightarrow D_x y = \frac{1}{\cos y} \qquad (\text{i})$$

Pero, $\cos y = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}$ y $\cos y > 0$ en el intervalo $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Luego, $\cos y = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}$.

Reemplazando este valor en (i):

$$D_x y = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow D_x \operatorname{sen}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} .$$

4. Sea $y = \cot^{-1}x$. Luego, $\cot y = x$ y $0 < y < \pi$.

Derivando $\cot y = x$ respecto a x:

$$D_x \cot y = D_x x \Rightarrow -\operatorname{cosec}^2 y\, D_x y = 1 \Rightarrow$$

$$D_x y = -\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 y} = -\frac{1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

5. Sea $\sec^{-1} x = y$. Luego, $\sec y = x$, donde $0 \le y < \frac{\pi}{2}$ ó $\pi \le y < \frac{3\pi}{2}$

Derivando $\sec y = x$ respecto a x :

$$D_x \sec y = D_x x \Rightarrow \sec y \tan y \; D_x y = 1 \Rightarrow$$

$$D_x y = \frac{1}{\sec y \tan y} = \frac{1}{x \tan y} \qquad \textbf{(ii)}$$

Pero, $\tan y = \pm\sqrt{\sec^2 y - 1} = \pm\sqrt{x^2 - 1}$. Además,

$\tan y > 0$ en $0 < y < \frac{\pi}{2}$ ó en $\pi < y < \frac{3\pi}{2}$. Luego, $\tan y = \sqrt{x^2 - 1}$

Reemplazando este valor en **(ii)**:

$$D_x y = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow D_x \sec^{-1} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

EJEMPLO 1. Hallar la derivada de

a. $y = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$ **b.** $y = \tan^{-1}\sqrt{x}$ **c.** $y = \operatorname{cosec}^{-1}(e^{3x})$

Solución

a. $y' = D_x\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1-(x/2)^2}} D_x\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

b. $y' = D_x\left(\tan^{-1}\sqrt{x}\right) = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} D_x\sqrt{x} = \frac{1}{1+x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

c. $y' = D_x \operatorname{cosec}^{-1}(e^{3x}) = -\frac{1}{e^{3x}\sqrt{(e^{3x})^2 - 1}} D_x(e^{3x})$

$$= -\frac{1}{e^{3x}\sqrt{e^{6x}-1}}(3e^{3x}) = -\frac{3}{\sqrt{e^{6x}-1}}$$

EJEMPLO 2. Probar que la siguiente función es constante.

$$f(x) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) - 2\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right), \quad 0 \le x \le 4.$$

Solución

Recordemos el teorema de la constante: Si f es continua en un intervalo I, entonces

$$f'(x) = 0,\ \forall x \text{ en } I \Leftrightarrow f(x) = C,\ \forall x \text{ en } I$$

De acuerdo a este teorema, para probar que f es constante es suficiente probar que

$$f'(x) = 0,\ \forall x, \text{ tal que } 0 \le x \le 4.$$

Bien, tenemos que:

$$f'(x) = D_x \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) - 2\, D_x \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left((x-2)/2\right)^2}} D_x\left(\frac{x-2}{2}\right) - 2\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}/2\right)^2}} D_x\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4-(x-2)^2}}\left(\frac{1}{2}\right) - 2\,\frac{2}{\sqrt{4-x}}\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{4-x}} = \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} = 0$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 4.3

En los problemas del 1 al 13 hallar la derivada de las funciones especificadas.

1. $y = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{9}\right)$ **2.** $y = \sec^{-1}(x/3)$

3. $y = \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{x}$ **4.** $y = \tan^{-1}(x^2+1)$

5. $y = \cot^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ **6.** $y = x\sqrt{4-x^2} + 4\operatorname{sen}^{-1}(x/2)$

7. $y = \sqrt{1-x^2} + x\operatorname{cosec}^{-1}(1/x)$ **8.** $y = \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{\operatorname{sen} x}$

9. $y = \tan^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)\right]$ **10.** $y = \cos^{-1}(\ln x)$

11. $y = \tan^{-1}x + \cot^{-1}x$ **12.** $y = \tan(\cos^{-1}x)$

13. $y = 2\cos^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}x\right) + \sqrt{4x - x^2}$

En los problemas 14 y 15 hallar la derivada y'.

14. $\tan^{-1}(x+y)=x$ **15.** $xy=\tan^{-1}(x/y)$

16. Hallar la recta tangente a la curva $f(x)=\tan^{-1}(3/x)$ en el punto donde $x=3$.

17. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva

$$y=\cos^{-1}\left[\sqrt{2}\,(x-1/2)\right],\ \text{en el punto donde } x=0.$$

18. Probar las fórmulas (2), (3) y (6) del teorema 4.2.

19. Probar que la siguiente función es constante

$$y=\left(\cos^{-1}x+\operatorname{sen}^{-1}x\right)^n$$

20. Probar que la siguiente función es constante

$$f(x)=2\tan^{-1}\sqrt{x}-\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right),\ \text{donde } x\geq 0$$

SECCION 4.4

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR, VELOCIDAD Y ACELERACION

Al derivar una función f obtenemos la función derivada f', cuyo dominio está contenido en el dominio de f. A la derivada f' podemos volver a derivarla obteniendo otra nueva función $(f')'$, cuyo dominio es el conjunto de todos los puntos x del dominio de f' para los cuales f' es derivable en x; o sea todos los puntos x del dominio de f' para los cuales existe el siguiente límite:

$$(f')'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$

La función $(f')'$ se llama **segunda derivada de f** y se denota por f''. Si $f''(a)$ existe, diremos que f es dos veces diferenciable en a y que $f''(a)$ es la segunda derivada de f en a.

Con las otras notaciones, la segunda derivada de $y=f(x)$ se escribe así:

$$D_x^2(f(x)),\quad D_x^2(y),\quad \frac{d^2y}{dx^2},\quad \frac{d^2f(x)}{dx^2}$$

En vista de que f'' es la segunda derivada de f, a f' la llamaremos **primera derivada de f**.

EJEMPLO 1. Hallar la primera y la segunda derivadas de cada una de las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^2$ **b.** $y = x^3 - 7x^2 - 2x + 1.$ **c.** $u = \dfrac{1}{t}$.

Solución

a. $f'(x) = 2x, \quad f''(x) = 2.$ **b.** $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 14x - 2, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = 6x - 14$

c. $\dfrac{du}{dt} = -\dfrac{1}{t^2}, \quad \dfrac{d^2u}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\left(-t^{-2}\right) = -(-2)t^{-3} = \dfrac{2}{t^3}$

El proceso de derivación de una función f podemos continuarlo más allá de la segunda derivada. Así, si derivamos f'' obtenemos la **tercera derivada de f,** que se denota por f'''. Esto es,

$$f''' = (f'')'$$

Nuevamente, si a f''' la volvemos a derivar, obtenemos **la cuarta derivada de f,** y así sucesivamente. A las derivadas de una función, a partir de la derivada segunda, se les llama **derivadas de orden superior.**

La notación anterior, cuando el orden de derivación va más allá de 4, es incómoda. Para mayor facilidad, el orden de la derivada se abrevia mediante un superíndice encerrado entre paréntesis, del modo siguiente:

$$f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'', \quad f^{(3)} = f''', \quad f^{(4)} = f'''', \quad \text{etc.}$$

Estas derivadas, con las otras notaciones, se escriben así:

$$f' = D_x(f) = \frac{df}{dx}, \qquad f'' = f^{(2)} = D_x^2(f) = \frac{d^2f}{dx^2},$$

$$f''' = f^{(3)} = D_x^3(f) = \frac{d^3f}{dx^3}, \qquad f'''' = f^{(4)} = D_x^4(f) = \frac{d^4f}{dx^4}$$

EJEMPLO 2. Hallar todas las derivadas de la función $f(x) = x^3$

Solución

$f'(x) = 3x^2, \quad f^{(2)}(x) = 6x, \quad f^{(3)}(x) = 6, \quad f^{(4)}(x) = 0$ y $f^{(n)}(x) = 0$, para $n \geq 4$.

EJEMPLO 3. Hallar las derivadas hasta de orden 4 de $y = \dfrac{1}{x}$.

Solución

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = -1x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(-x^{-2}\right) = -(-2)x^{-3} = \dfrac{2}{x^3}$

3. $\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2}{x^3}\right) = \dfrac{d}{dx}(2x^{-3}) = 2(-3)x^{-4} = -\dfrac{6}{x^4}$

4. $\dfrac{d^4y}{dx^4} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{-6}{x^4}\right) = \dfrac{d}{dx}(-6x^{-4}) = -6(-4)x^{-5} = \dfrac{24}{x^5}$

VELOCIDAD

Vimos que para precisar el concepto de velocidad instantánea tuvimos que recurrir a un límite de la velocidad promedio, el cual nos condujo a la derivada. Formalicemos esta idea en la siguiente definición.

DEFINICION. Sea $s = f(t)$ la función posición de un objeto que se mueve a lo largo de una recta. La velocidad (instantánea) del objeto en el instante t está dada por

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

La velocidad es **positiva** o **negativa** según el objeto se desplaza en el sentido positivo o negativo de la recta numérica. Si la velocidad es 0, el objeto está en reposo.

EJEMPLO 4. Un objeto se mueve sobre una recta de acuerdo a la ecuación

$$s = 3t^3 - 8t + 7,$$

donde s se mide en centímetros y t en segundos.

a. Hallar la velocidad del objeto cuando $t = 1$ y cuando $t = 5$.

b. Hallar la velocidad promedio en el intervalo de tiempo $[1, 5]$.

Solución

a. Tenemos que $v(t) = \dfrac{ds}{dt} = 6t - 8$. Luego,

$$v(1) = 6(1) - 8 = -2 \text{ cm/seg} \qquad \text{y} \qquad v(5) = 6(5) - 8 = 22 \text{ cm/seg}$$

b. La velocidad promedio en el intervalo $[1, 5]$ es $\dfrac{s(5) - s(1)}{5 - 1} = \dfrac{42 - 2}{4} = 10$ cm/seg

---

ACELERACION

Derivando la función posición de un objeto en movimiento rectilíneo obtuvimos la velocidad. Ahora, tomando la función velocidad podemos calcular la aceleración promedio y la aceleración instantánea.

DEFINICION. Sea $s = f(t)$ la función posición de un objeto que se mueve a lo largo de una recta. La aceleración (instantánea) en el instante t es

$$\mathbf{a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = f''(t)}$$

EJEMPLO 5. Un objeto se mueve sobre una recta según la función posición

$$s = t^3 - 3t + 1,$$

donde s se mide en metros y t en segundos.

a. ¿En qué instante la velocidad es 0?
b. ¿En qué instante la aceleración es 0?
c. Hallar la aceleración en el instante en que la velocidad es 0.
d. ¿Cuándo el objeto se mueve hacia delante (a la derecha)?
e. ¿Cuándo el objeto se mueve hacia atrás (a la izquierda)?

Solución

Tenemos que:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 3 \qquad \text{y} \qquad a(t) = \frac{dv}{dt} = 6t$$

Luego,

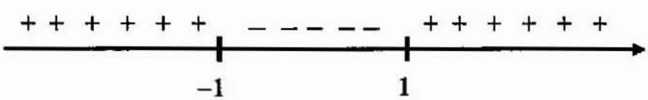
a. $v(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3(t + 1)(t - 1) = 0 \Leftrightarrow t = -1$ ó $t = 1$.

a. $a(t) = 0 \Leftrightarrow 6t = 0 \Leftrightarrow t = 0$. Esto es, la aceleración es 0 sólo en el instante $t = 0$

c. $a(-1) = 6(-1) = -6$ m/seg^2. $a(1) = 6(1) = 6$ m/seg^2.

d. El movimiento es hacia adelante $\Leftrightarrow v(t) > 0$

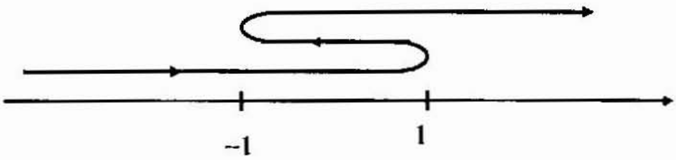
$$\Leftrightarrow 3t^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow 3(t + 1)(t - 1) > 0 \Leftrightarrow t \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$



e. El movimiento es hacia atrás $\Leftrightarrow v(t) < 0$

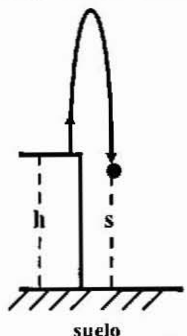
$$\Leftrightarrow 3t^2 - 3 < 0 \Leftrightarrow 3(t + 1)(t - 1) < 0 \Leftrightarrow t \in (-1, 1)$$

El siguiente dibujo muestra, esquemáticamente, el movimiento del objeto. Advertimos que el objeto se mueve sobre la recta y no sobre la curva superior.



MOVIMIENTO DE CAIDA LIBRE

Un movimiento de caída libre es un movimiento de aceleración constante, donde la aceleración es la aceleración de la gravedad. El valor de esta aceleración a la orilla del mar es $g = 9{,}8$ m/seg^2 en el sistema métrico o $g = 32$ pies/seg^2 en el sistema inglés.



Supongamos que un cuerpo es lanzado verticalmente desde una altura h metros sobre el nivel del suelo con una velocidad inicial de v_o m/seg^2. Si el sentido positivo es hacia arriba y si despreciamos la fricción del aire, entonces después de t segundos el objeto se encuentra a una altura de s metros sobre el suelo, donde

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h = -4{,}9t^2 + v_0t + h$$

En el caso de que s y la altura h se den en pies y la velocidad v_o en pies/ seg^2, la fórmula correspondiente es

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h = -\frac{1}{2}(32)t^2 + v_0t + h = -16t^2 + v_0t + h$$

Observar que la aceleración es $\dfrac{d^2s}{dt^2} = -g$

EJEMPLO 6. Una pelota es lanzada hacia arriba desde la azotea de un edificio de 58,8 m de altura y con una velocidad inicial de 19,6 m/seg.

a. ¿Cuándo la pelota alcanza su máxima altura?
b. ¿Cuál esta altura máxima (respecto al suelo)?
c. ¿Cuándo la pelota llega al suelo?
d. ¿Con que velocidad llega al suelo?

Solución

Tenemos que $h = 58{,}8$ m. y $v_o = 19{,}6$ m/seg. Luego,

$$s = -4{,}9t^2 + 19{,}6t + 58{,}8 \quad \text{y} \quad v(t) = -9{,}8t + 19{,}6$$

a. La pelota alcanza su máxima altura cuando:

$$v(t) = 0 \Leftrightarrow -9{,}8t + 19{,}6 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{19{,}6}{9{,}8} = 2.$$ Esto es, después de 2 segundos.

b. La altura máxima es el valor de s cuando t = 2. Esto es,

$$s = -4{,}9(2)^2 + 19{,}6(2) + 58{,}8 = 78{,}4 \text{ metros}$$

c. La pelota llega al suelo cuando s = 0. Luego,

$$-4{,}9t^2 + 19{,}6t + 58{,}8 = 0 \Rightarrow t^2 - 4t - 12 = 0 \qquad \text{(dividiendo entre } -4{,}9)$$

$$\Rightarrow (t-6)(t+2) \Rightarrow t = 6 \quad \text{ó} \quad t = -2$$

La pelota llega al suelo después de 6 segundos. Desechamos –2 por negativo

d. La velocidad con que llega al suelo es la velocidad en el instante 6 seg. Esto es,

$$v(6) = -9{,}8(6) + 19{,}6 = -39{,}2 \text{ m/seg.}$$

PROBLEMAS RESUELTOS 4.4

PROBLEMA 1. Hallar las tres primeras derivadas de la función

$$y = \frac{1}{ax+b}$$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{ax+b}\right) = \frac{d}{dx}\left(ax+b\right)^{-1} = -(ax+b)^{-2}\frac{d}{dx}\left(ax+b\right)$$

$$= -(ax+b)^{-2}(a) = -\frac{a}{(ax+b)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{a}{(ax+b)^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(-a(ax+b)^{-2}\right)$$

$$= (-2)(-a)(ax+b)^{-3}\frac{d}{dx}(ax+b) = 2a(ax+b)^{-3}(a) = \frac{2a^2}{(ax+b)^3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2a^2}{(ax+b)^3}\right) = \frac{d}{dx}\left(2a^2(ax+b)^{-3}\right)$$

$$= -3(2a^2)(ax+b)^{-4}\frac{d}{dx}(ax+b) = -3(2a^2)(ax+b)^{-4}(a) = -\frac{6a^3}{(ax+b)^4}$$

PROBLEMA 2. Probar que la función $y = (x^2-1)^2$ satisface la ecuación

$$(x^2-1)y^{(4)} + 2xy^{(3)} - 6y^{(2)} = 0$$

Solución

En primer lugar calculamos $y^{(2)}$, $y^{(3)}$, $y^{(4)}$

$$y^{(1)} = \frac{d}{dx}(x^2-1)^2 = 2(x^2-1)(2x) = 4x^3 - 4x$$

$$y^{(2)} = \frac{d}{dx}(4x^3 - 4x) = 12x^2 - 4 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\textbf{(2)}\quad y^{(3)} = \frac{d}{dx}(12x^2-4) = 24x \qquad \text{y} \qquad \textbf{(3)}\quad y^{(4)} = 24$$

Reemplazando (1), (2) y (3) en la ecuación dada:

$$(x^2-1)y^{(4)} + 2xy^{(3)} - 6y^{(2)} = (x^2-1)(24) + 2x(24x) - 6(12x^2-4)$$

$$= 24x^2 - 24 + 48x^2 - 72x^2 + 24 = 0$$

PROBLEMA 3. Si $x^2 + y^2 = r^2$, Hallar: **a.** y' **b.** y'' **c.** y'''

Solución

a. Derivando implícitamente $x^2 + y^2 = r^2$:

$$2x + 2y\,y' = 0 \;\Rightarrow\; y' = -\frac{x}{y}$$

b. Derivando implícitamente a $2x + 2y\,y' = 0$:

$$2 + 2(y')^2 + 2y\,y'' = 0 \;\Rightarrow$$

$$y'' = -\frac{1+(y')^2}{y} = -\frac{1+(-x/y)^2}{y} = -\frac{x^2+y^2}{y^3} = -\frac{r^2}{y^3}$$

c. Derivando implícitamente a $2 + 2(y')^2 + 2y\,y'' = 0$:

$$4\,y'y'' + 2\,y'y'' + 2y\,y''' = 0 \;\Rightarrow\; 3\,y'y'' + y\,y''' = 0$$

$$y''' = -\frac{3\,y'\,y''}{y} = -\frac{3\left(-\dfrac{x}{y}\right)\left(-\dfrac{r^2}{y^3}\right)}{y} = -\frac{3x\,r^2}{y^5}$$

PROBLEMA 4. Hallar la derivada de orden n de la función

$$y = \text{sen}\; ax$$

Solución

Usaremos la identidad trigonométrica: $\text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$

$$y^{(1)} = (\text{sen}\; ax)' = (\cos ax)(ax)' = a\,\text{sen}\left(ax + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y^{(2)} = \left[a\,\text{sen}\left(ax + \frac{\pi}{2}\right)\right]' = \left[a\cos\left(ax + \frac{\pi}{2}\right)\right]\left[ax + \frac{\pi}{2}\right]'$$

$$= \left[a\cos\left(ax + \frac{\pi}{2}\right)\right][a] = a^2\cos\left(ax + \frac{\pi}{2}\right) = a^2\,\text{sen}\left(\left(ax + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= a^2\,\text{sen}\left(ax + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y^{(3)} = \left[a^2\text{sen}\left(ax + 2\frac{\pi}{2}\right)\right]' = \left[a^2\cos\left(ax + 2\frac{\pi}{2}\right)\right]\left[ax + 2\frac{\pi}{2}\right]'$$

$$= a^2\cos\left(ax + 2\frac{\pi}{2}\right)[a] = a^3\cos\left(ax + 2\frac{\pi}{2}\right) = a^3\text{sen}\left(ax + 3\frac{\pi}{2}\right).$$

Observando las tres primeras derivadas conjeturamos que se cumple la igualdad

$$y^{(n)} = a^n\text{sen}\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right). \qquad (1)$$

Probemos la validez de esta fórmula por inducción. Sólo falta verificar que se cumple para n + 1:

$$y^{(n+1)} = \left[y^{(n)}\right]' = \left[a^n\text{sen}\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right)\right]' = \left[a^n\cos\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right)\right]\left[ax + n\frac{\pi}{2}\right]'$$

$$= a^n\cos\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right)[a] = a^{n+1}\cos\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= a^{n+1}\text{sen}\left[\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = a^{n+1}\text{sen}\left(ax + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Luego, (1) se cumple para todo n natural.

PROBLEMA 5. Hallar la derivada de orden n de la función

$$y = \frac{1+x}{1-x}$$

Solución

$$D_x\left[\frac{1+x}{1-x}\right] = \frac{(1-x)(1+x)' - (1+x)(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)(1)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} = 2\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$D_x^2\left[\frac{1+x}{1-x}\right] = D_x\left[2\frac{1}{(1-x)^2}\right] = 2\,D_x\left[(1-x)^{-2}\right] = 2\,(-2)(1-x)^{-3}(-1)$$

$$= 2\frac{2}{(1-x)^3} = 2\frac{2!}{(1-x)^3}$$

$$D_x^3\left[\frac{1+x}{1-x}\right] = D_x\left[2\frac{2}{(1-x)^3}\right] = 2\,D_x\left[2(1-x)^{-3}\right] = 2(2)(-3)(1-x)^{-4}(-1)$$

$$= 2\,\frac{2(3)}{(1-x)^4} = 2\frac{3!}{(1-x)^4}$$

$$D_x^4\left[\frac{1+x}{1-x}\right] = D_x\left[2\frac{2(3)}{(1-x)^4}\right] = 2\,D_x\left[2(3)(1-x)^{-4}\right] = 2(2)(3)(-4)(1-x)^{-5}(-1)$$

$$= 2\frac{2(3)(4)}{(1-x)^5} = 2\frac{4!}{(1-x)^5}$$

Observando las cuatro primeras derivadas conjeturamos que se cumple la igualdad

$$D_x^n\left[\frac{1+x}{1-x}\right] = 2\frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \qquad (1)$$

Probemos esta fórmula por inducción. Sólo falta verificar que esta fórmula se cumple para n + 1:

$$D_x^{n+1}\left[\frac{1+x}{1-x}\right] = D_x\left[D_x^n\left[\frac{1+x}{1-x}\right]\right] = D_x\left[2\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\right]$$

$$= 2D_x\left[n!\,(1-x)^{-(n+1)}\right] = 2n![-(n+1)](1-x)^{-(n+1)-1}(-1)$$

$$= 2(n+1)!(1-x)^{-(n+2)} = 2\frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

Luego, (1) se cumple para todo n natural.

PROBLEMA 6. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ tienen derivadas de segundo orden, probar que:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}$$

Solución

A la igualdad de la regla de la cadena le volvemos aplicar la misma regla:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\right)$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{dy}{du}\left(\frac{d}{dx}\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{d^2y}{du^2}\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}$$

$$= \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}$$

PROBLEMA 7. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ tienen derivadas de tercer orden, probar que:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{du^3}\left(\frac{du}{dx}\right)^3 + 3\frac{d^2y}{du^2}\frac{d^2u}{dx^2}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{du}\frac{d^3u}{dx^3}$$

Solución

A la igualdad del problema anterior volvemos aplicar la regla de la cadena:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}\right)$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{du^2}\right)\right)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{d^2y}{du^2}\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right) + \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{du}\right)\right)\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \frac{dy}{du}\frac{d^3u}{dx^3}$$

$$= \left(\frac{d^3y}{du^3}\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{d^2y}{du^2}\left(2\frac{du}{dx}\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2y}{du^2}\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \frac{dy}{du}\frac{d^3u}{dx^3}$$

$$= \frac{d^3y}{du^3}\left(\frac{du}{dx}\right)^3 + 3\frac{d^2y}{du^2}\frac{d^2u}{dx^2}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{du}\frac{d^3u}{dx^3}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 4.4

En los problemas del 1 al 6 hallar y''.

1. $y = \sqrt{b^2 - x^2}$ **2.** $y = \ln \sqrt[3]{1 + x^2}$ **3.** $y = (1 + x^2)\tan^{-1} x$

4. $y = \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{sen}^{-1} x$ **5.** $y = e^{\sqrt{x}}$ **6.** $y = \left(\mathrm{sen}^{-1} x\right)^2$

En los problemas del 7 al 14 hallar las derivadas de segundo y tercer orden.

7. $y = x^5 - 4x^3 - 2x + 2$ **8.** $z = \frac{1}{4}x^8 - \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{2}x^2$ **9.** $f(x) = (x - 1)^4$

10. $g(x) = (x^2 + 1)^3$ **11.** $y = \sqrt{x}$ **12.** $h(x) = \frac{x}{2 + x}$

13. $y = x\,\mathrm{sen}\,x$ **14.** $y = x^3 e^{2x}$

En los problemas del 15 al 20 hallar y''.

15. $xy = 1$ **16.** $y^2 = 4ax$ **17.** $x^3 + y^3 = 1$

18. $x^2 = y^3$ **19.** $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ **20.** $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, a y b constantes

21. Probar que la función $y = x^4 + x^3$ satisface la ecuación $2xy' - x^2y'' = -4x^4$

22. Probar que la función $y = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 2)$ satisface la ecuación $2yy'' - 2y' = x^2$

23. Probar que la función $y = \frac{x^4}{4} - \frac{a}{x} + b$, donde a y b son constantes, satisface la ecuación

$$\frac{1}{6}x^4y''' - x^3y'' + 2x^2y' = 5a$$

En los problemas del 24 al 38 hallar la derivada de orden n de la función dada.

24. $y = x^n$ **25.** $y = x^{n-1}$ **26.** $y = x^{n+1}$

27. $y = ax^n$ **28.** $y = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ **29.** $y = (ax + b)^n$

30. $y = \frac{1}{x}$ **31.** $y = \frac{1}{1 - x}$ **32.** $y = \frac{1}{x - a}$

33. $y = \cos ax$ **34.** $y = \mathrm{sen}^2 x$ **35.** $y = e^{ax}$

36. $y = xe^x$ **37.** $y = x \ln x$ **38.** $y = \ln(1 + x)$

En los problemas del 39 al 42 hallar y'' ***para los valores indicados.***

39. $y = (2 - x^2)^4$; $x = 1$ **40.** $y = x\sqrt{x^2 + 3}$; $x = -1$

41. $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $x = 1$

42. $x^2 + 2y^2 = 6$; $x = 2$, $y = 1$

En los problemas 43 y 44 se da la función de posición, con las unidades en metros y segundos. Contestar las siguientes preguntas:

a. ¿En qué instantes la velocidad es 0? **b.** ¿En qué instantes la aceleración es 0?
c. ¿Cuándo el objeto se mueve a la derecha?
d. ¿Cuándo el objeto se mueve a la izquierda?

43. $s = t^3 - 3t^2 - 24t + 8$

44. $s = t^2 + \dfrac{54}{t}$

En los problemas 45 y 46 se da la función de posición, con las unidades en metros y segundos. Hallar la aceleración en los puntos donde la velocidad es nula.

45. $s = \dfrac{5 + t^2}{2 + t}$

46. $s = \sqrt{2t} + \dfrac{1}{\sqrt{2t}}$

47. Un objeto se mueve en línea recta de acuerdo a la función $s = t^3 - 3t^2 - 24t + 8$. Hallar su velocidad en los instantes donde la aceleración es nula.

48. Una roca es lanzada hacia arriba desde la parte superior de una torre. La posición de la roca después de t segundos es $s = -16t^2 + 48t + 160$ pies.

a. ¿Cuál es la altura de la torre? **b.** ¿Cuál es la velocidad inicial de la roca?
c. ¿Cuándo alcanza la altura máxima? **d.** ¿Cuándo alcanza el suelo?
e. ¿A qué velocidad alcanza el suelo?

49. Si un proyectil es disparado desde el suelo verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0, la altura del proyectil, después de t segundos, está dada por

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t.$$

a. Probar que el proyectil alcanza su máxima altura cuando $t = \dfrac{v_0}{g}$.

b. Probar que la altura máxima es $s = \dfrac{v_0^2}{2g}$.

50. ¿Con qué velocidad inicial v_0 debe dispararse un proyectil desde el suelo verticalmente hacia arriba para que alcance una altura máxima de 705,6 metros. Sugerencia: Ver el problema 49.

51. Desde lo alto de un acantilado es lanzada una piedra verticalmente hacia abajo, en dirección al mar, con una velocidad inicial v_0. Si el sentido positivo es hacia abajo, la posición de la roca después de t segundos es $s = 4{,}9t^2 + v_0 t$ metros. La roca llega al agua después de 4 segundos y con una velocidad de 58,8 m/seg. Hallar la altura del acantilado.

52. Desde lo alto de un acantilado se dejan caer dos rocas (velocidad inicial nula), una tras otra con 3 segundos de diferencia. Probar que las rocas se separan con una velocidad de 3g metros por segundo.

SECCION 4.5

FUNCIONES HIPERBOLICAS Y SUS INVERSAS

Las funciones hiperbólicas se definen en términos de las funciones $y = e^x$, $y = e^{-x}$.

Las funciones trigonométricas están relacionadas con el círculo trigonométrico:

$$x^2 + y^2 = 1,$$

razón por la cual a estas funciones se las conoce con el nombre de **funciones circulares**.

Las **funciones hiperbólicas** están relacionadas con la hipérbola:

$$x^2 - y^2 = 1,$$

de donde derivan su nombre.

Las funciones hiperbólicas, al igual que las trigonométricas, son seis: seno hiperbólico (senh), coseno hiperbólico (cosh), tangente hiperbólica (tanh), cotangente hiperbólica (coth), secante hiperbólica (sech) y cosecante hiperbólica (cosech).

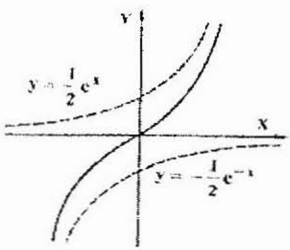
DEFINICION.

1. $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
2. $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
3. $\tanh x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$
4. $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$
5. $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$
6. $\operatorname{cosech} x = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x}$

Los dominios, rangos y gráficos de estas funciones son como sigue:

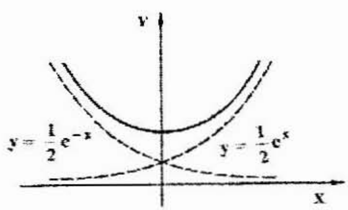
$y = \operatorname{senh} x$

Dom. = $\mathbb{R}$, Rang. = $\mathbb{R}$



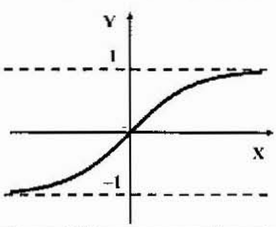
$y = \cosh x$

Dom. = $\mathbb{R}$, Rang.= $[1, +\infty)$



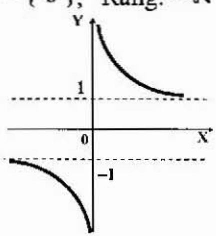
$y = \tanh x$

Dom. = $\mathbb{R}$, Rang. = $(-1, 1)$



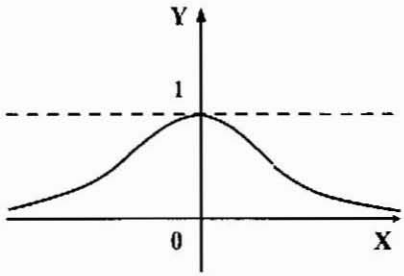
$y = \coth x$

Dom. = $\mathbb{R} - \{ 0 \}$, Rang. = $\mathbb{R} - [-1, 1]$



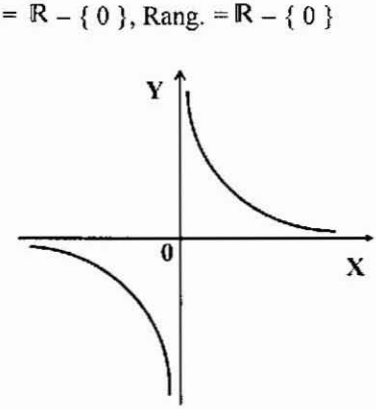
$y = \text{sech } x$

Dom. = $\mathbb{R}$, Rang. = $(0, 1]$



$y = \text{cosech } x$

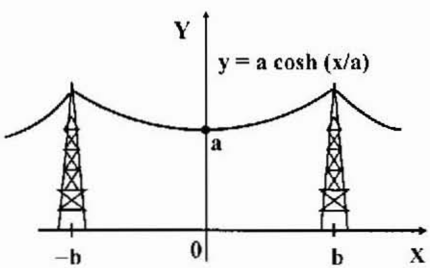
Dom. = $\mathbb{R} - \{ 0 \}$, Rang. = $\mathbb{R} - \{ 0 \}$



Una de las aplicaciones más conocidas de las funciones hiperbólicas es la descripción de la **catenaria** (de catena, palabra latína que significa cadena). La catenaria es la curva que forma un cable flexible suspendido de dos puntos a la misma altura. La ecuación de esta curva es **$y = a \cosh(x/a)$.**

El arco Gateway de San Luis, Missouri es una de las estructuras más notables y elegantes de los Estados Unidos. Da la falsa impresión que es un arco de parábola y que es más alto que ancho. En realidad es una catenaria al revés, hecha de acero inoxidable hueco, que tiene 630 pies de alto y 630 pies de ancho. Fue terminado en 1.965. El arco es 75 pies más alto que el monumento a Washington y 175 pies más alto que la Estatua de la Libertad. La ecuación de este arco es

$$y = 693{,}86 - (68{,}767) \cosh(3x/299)$$



La catenaria

Arco Gateway
San Luis, Missouri
Una catenaria invertida

Las funciones hiperbólicas se comportan de una manera muy similar a las funciones trigonométricas. Las siguientes identidades nos muestran parte de esta similitud.

IDENTIDADES HIPERBOLICAS

TEOREMA 4.3 Se cumple:

1. $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$
2. $\cosh(-x) = \cosh x$
3. $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$
4. $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$
5. $1 - \coth^2 x = -\operatorname{cosech}^2 x$
6. $\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$
7. $\operatorname{senh}(2x) = 2\operatorname{senh} x \cosh x$
8. $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$
9. $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$
10. $\operatorname{senh}^2 x = \dfrac{\cosh 2x - 1}{2}$
11. $\cosh^2 x = \dfrac{\cosh 2x + 1}{2}$

Demostración

Estas igualdades siguen inmediatamente de la definición de las funciones hiperbólicas. Aquí sólo probaremos 3, 4 y 10. La igualdad 6 la probamos en el problema resuelto 3. Las otras, las dejamos como ejercicios al lector.

3. $$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$
$$= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4}$$
$$= \frac{4e^x e^{-x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

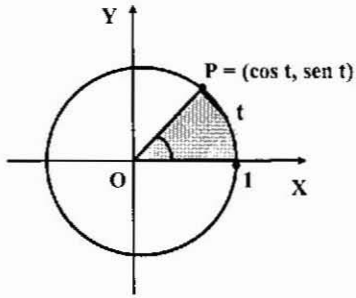
4. Si en 3 dividimos entre $\cosh^2 x$, obtenemos:

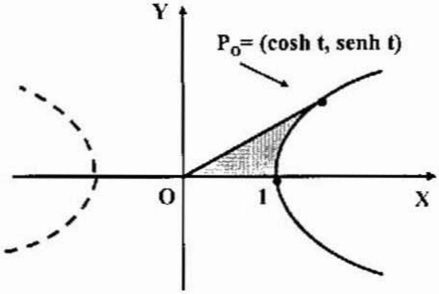
$$\frac{\cosh^2 x}{\cosh^2 x} - \frac{\operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} \Rightarrow 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

10. De la identidad 3 obtenemos: $\cosh^2 x = 1 + \operatorname{senh}^2 x$. Reemplazando este valor de $\cosh^2 x$ en 9 :

$$\cosh(2x) = 1 + 2\operatorname{senh}^2 x \Rightarrow \operatorname{senh}^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$$

La identidad 3 nos permite comparar las funciones trigonométricas con las hiperbólicas. Tomamos la circunferencia (círculo trigonométrico) $x^2 + y^2 = 1$, la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ y un número real $t > 0$.





El punto **P = (cos t, sen t)** se encuentra sobre el círculo trigonométrico, ya que $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$. En este caso, t puede interpretarse como la medida, en radianes, del ángulo POX.

Por otro lado, el punto $\mathbf{P_0}$ **= (cosh t, senh t)** está sobre la hipérbola, ya que de acuerdo a la identidad 3, $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$. En este caso, t no representa ningún ángulo. Sin embargo, existe una propiedad común para t en ambos casos: Se prueba que el área del sector circular determinado por t en el círculo trigonométrico es igual al área de la región sombreada en la figura de la hipérbola. Esta área común es $A = \frac{t}{2}$. Este resultado lo probaremos en el próximo curso.

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS

TEOREMA 4.4 Si **u = u(x)** es una función diferenciable de x, entonces

1. $\mathbf{D_x \operatorname{senh} u = \cosh u \; D_x u}$ **2.** $\mathbf{D_x \cosh u = \operatorname{senh} u \; D_x u}$

3. $\mathbf{D_x \tanh u = \operatorname{sech}^2 u \; D_x u}$ **4.** $\mathbf{D_x \coth u = -\operatorname{cosech}^2 u \; D_x u}$

5. $\mathbf{D_x \operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u \; D_x u}$ **6.** $\mathbf{D_x \operatorname{cosech} u = -\operatorname{cosech} u \coth u \; D_x u}$

Demostración

Probamos sólo 1 y 3. Las otras se prueban en forma análoga.

1. $$D_x \operatorname{senh} x = D_x\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{D_x e^x - D_x e^{-x}}{2} = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2}$$
$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x .$$

3. $$D_x \tanh x = D_x \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{\cosh x \, D_x \operatorname{senh} x - \operatorname{senh} x \, D_x \cosh x}{\cosh^2 x}$$
$$= \frac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$$

EJEMPLO 1. Si $y = \ln \tanh 2x$, probar que $D_x\, y = 4\ \text{cosech}\ 4x$.

Solución

$$D_x\, y = D_x(\ln \tanh 2x) = \frac{D_x \tanh 2x}{\tanh 2x} = \frac{\text{sech}^2 2x\, D_x 2x}{\tanh 2x} = \frac{2\,\text{sech}^2 2x}{\tanh 2x}$$

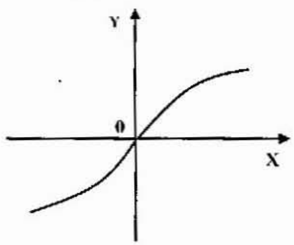
$$= 2\,\text{sech}^2 2x\ \frac{1}{\tanh 2x} = 2\frac{1}{\cosh^2 2x}\ \frac{\cosh 2x}{\text{senh}\ 2x} = 2\frac{1}{\text{senh}\, 2x\ \cosh\ 2x}$$

$$= \frac{2}{\frac{1}{2}\text{senh}\ 4x} = \frac{4}{\text{senh}\ 4x} = 4\ \text{cosech}\ 4x$$

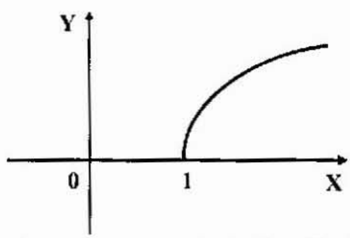
FUNCIONES HIPERBOLICAS INVERSAS

Mirando las gráficas de las funciones hiperbólicas vemos que cuatro son inyectivas. Las no inyectivas son $y = \cosh x$ e $y = \text{sech}\ x$. De estas dos funciones, restringimos sus dominio a $[0, +\infty)$ para lograr inyectividad. De este modo, conseguimos las funciones inversas de las seis funciones hiperbólicas. Aquí están las gráficas de estas inversas.

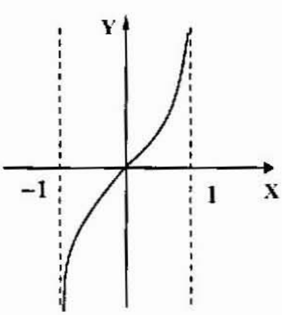
senh^{-1}: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$



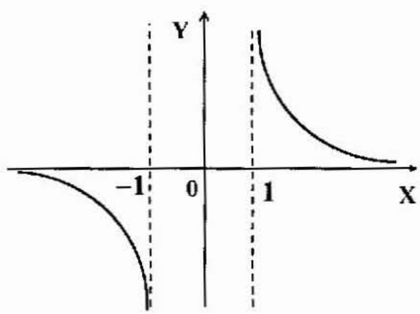
$\cosh^{-1}$: $[1, +\infty) \to [0, +\infty)$



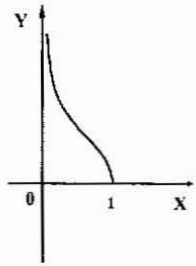
$\tanh^{-1}$: $(-1, 1) \to \mathbb{R}$



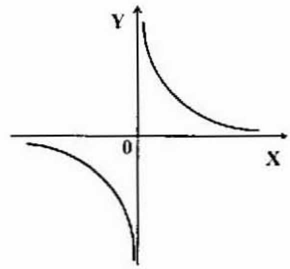
$\coth^{-1}$: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \to \mathbb{R}$



$\text{sech}^{-1} : (0, 1] \to [0, +\infty)$



$\text{cosech}^{-1} : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$



El siguiente teorema nos presenta a las funciones hiperbólicas inversas en términos de la función logaritmo natural.

TEOREMA 4. 5

1. $\text{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ 2. $\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad x \geq 1$

3. $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \ |x| < 1$ 4. $\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \ |x| > 1$

5. $\text{sech}^{-1} x = \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad 0 < x \leq 1$

6. $\text{cosech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right), x \neq 0$

Demostración

Ver el problema resuelto 5.

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS INVERSAS

TEOREMA 4. 6 Si $u = u(x)$ es una función diferenciable de x, entonces

1. $D_x \text{senh}^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} D_x u$ 2. $D_x \cosh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} D_x u$

3. $D_x \tanh^{-1} u = \frac{1}{1-u^2} D_x u$ 4. $D_x \coth^{-1} u = \frac{1}{1-u^2} D_x u$

5. $D_x \text{sech}^{-1} u = -\frac{1}{u\sqrt{1-u^2}} D_x u$ 6. $D_x \text{cosech}^{-1} u = -\frac{1}{|u|\sqrt{1+u^2}} D_x u$

Demostración

Probaremos sólo 1, las otras se dejan como ejercicio para el lector.

1. Lo haremos de 2 formas.

Método 1

Si $y = \operatorname{senh}^{-1}x$, entonces $x = \operatorname{senh} y$.
Derivamos implícitamente respecto a x esta última igualdad:

$$D_x x = D_x \operatorname{senh} y \Rightarrow 1 = \cosh y \, D_x y \Rightarrow D_x y = \frac{1}{\cosh y} \Rightarrow$$

$$D_x \operatorname{senh}^{-1}x = \frac{1}{\cosh y} \quad \text{(a)}$$

Por otro lado, de la identidad $\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1$ y de $\cosh y \geq 0$ obtenemos que:

$$\cosh y = \sqrt{1+\operatorname{senh}^2 y} = \sqrt{1+x^2}$$

Reemplazando este valor en (a) obtenemos lo deseado:

$$D_x \operatorname{senh}^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Método 2

De acuerdo a la igualdad 1 del teorema 4.5:

$$D_x \operatorname{senh}^{-1}x = D_x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} D_x (x + \sqrt{x^2+1})$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \left(\frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

EJEMPLO 2. Si $y = \operatorname{sech}^{-1}(\cos x)$, hallar $D_x y$.

Solución

$$D_x y = D_x \operatorname{sech}^{-1}(\cos x) = -\frac{1}{\cos x \sqrt{1-\cos^2 x}} D_x \cos x$$

$$= -\frac{1}{\cos x \sqrt{\operatorname{sen}^2 x}} (-\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

PROBLEMAS RESUELTOS 4.5

PROBLEMA 1. Hallar la derivada de:

a. $y = \tanh^{-1}(\tan x)$ **b.** $y = \frac{1}{2}\left(x^2 - 1\right)\coth^{-1}x + \frac{x}{2}$

Solución

$$\textbf{a.}\ D_x y = \frac{1}{1-\tan^2 x}\sec^2 x = \frac{1}{1-\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}\ \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\cos 2x} = \sec 2x$$

$$\textbf{b.}\ D_x y = \frac{1}{2}\left(x^2 - 1\right)\frac{1}{1-x^2} + x\coth^{-1}x + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} + x\coth^{-1}x + \frac{1}{2} = x\coth^{-1}x$$

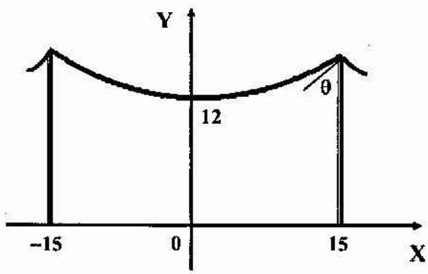
PROBLEMA 2. Una línea eléctrica se sostiene sobre dos postes que están a 30 m. de distancia uno del otro. El cable toma la forma de la catenaria

$$f(x) = 25\cosh(x/25) - 13$$

a. Hallar pendiente de la curva en el punto donde se encuentra con el poste derecho.

b. Hallar el ángulo θ que forma la línea eléctrica con el poste.

Solución



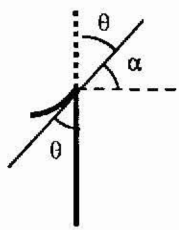
a. Se tiene que:

$$f'(x) = 25\operatorname{senh}(x/25)\frac{1}{25} = \operatorname{senh}(x/25)$$

La pendiente en el punto indicado es:

$$m = f'(15) = \operatorname{senh}(15/25)$$

$$= \operatorname{senh}(0{,}6) = \frac{e^{0,6} - e^{-0,6}}{2} = 0{,}6367$$



b. Si α es el ángulo de inclinación de la recta tangente en el punto indicado, entonces

$$\alpha = \tan^{-1}(0{,}6367) = 0{,}567 \text{ rad.} = \frac{180}{\pi}(0{,}567) = 32{,}48^\circ$$

Luego, el ángulo que forma la curva con el poste es:

$$\theta = 90^\circ - 32{,}48^\circ = 57{,}52^\circ$$

PROBLEMA 3. Probar las siguientes identidades:

a. $\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x$ **b.** $\cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x}$

c. $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$

Solución

a. $\cosh x + \operatorname{senh} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{2e^x}{2} = e^x$

b. $\cosh x - \operatorname{senh} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} - \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{2e^{-x}}{2} = e^{-x}$

c. $\operatorname{senh}(x+y) = \dfrac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \dfrac{1}{2}\left[e^x e^y - e^{-x} e^{-y}\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[(\cosh x + \operatorname{senh} x)(\cosh y + \operatorname{senh} y) - (\cosh x - \operatorname{senh} x)(\cosh y - \operatorname{senh} y)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\operatorname{senh} x \cosh y + 2\cosh x \operatorname{senh} y\right]$$

$$= \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$$

PROBLEMA 4. Probar las igualdades dadas en el teorema 4.5:

1. $\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ **2.** $\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad x \geq 1$

3. $\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}, \ |x| < 1$ **4.** $\coth^{-1} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x+1}{x-1}, \ |x| > 1$

5. $\operatorname{sech}^{-1} x = \ln \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}, \ 0 < x < 1$

6. $\operatorname{cosech}^{-1} x = \ln\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right), \ x \neq 0$

Solución

Probamos 1, 3 y 6. Las otras tres se resuelven de manera análoga.

1. Sea $y = \operatorname{senh} x$. Luego, $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Despejamos x en términos de y:

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow e^x - e^{-x} = 2y \Rightarrow e^{2x} - 1 = 2ye^x \Rightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

Resolvemos esta ecuación de segundo grado:

$$e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2} = \frac{2y \pm 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y \pm \sqrt{y^2+1}$$

Como, $\sqrt{y^2+1} > \sqrt{y^2} = y$, tenemos $y + \sqrt{y^2+1} > 0$, $y - \sqrt{y^2+1} < 0$.

Como $e^x > 0$, escogemos la raíz positiva. Esto es, $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$.

Tomando logaritmo: $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$

Cambiando de variables: $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

3. Sea $y = \tanh x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \dfrac{(e^x - e^{-x})/2}{(e^x + e^{-x})/2} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

Despejamos x en términos de y:

$$y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \Rightarrow e^{2x} - 1 = y(e^{2x}+1) \Rightarrow e^{2x} - 1 = ye^{2x} + y \Rightarrow$$

$$e^{2x} - ye^{2x} = 1 + y \Rightarrow e^{2x}(1-y) = 1 + y \Rightarrow e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$$

Tomando logaritmo y luego, cambiando de variables:

$$2x = \ln\frac{1+y}{1-y} \Rightarrow x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

6. Sea $y = \operatorname{cosech} x$. Luego,

$$y = \frac{1}{\operatorname{senh} x} = \frac{1}{(e^x - e^{-x})/2} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^{2x}-1}$$

Despejamos x en términos de y:

$$y = \frac{2e^x}{e^{2x}-1} \Rightarrow y(e^{2x}-1) = 2e^x \Rightarrow ye^{2x} - 2e^x - y = 0 \Rightarrow$$

$$e^x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4y^2}}{2y} \Rightarrow e^x = \frac{1 \pm \sqrt{1+y^2}}{y}$$

Como $e^x > 0$, debemos escoger el valor positivo de $\dfrac{1 \pm \sqrt{1+y^2}}{y}$. Para esto, analizamos dos casos: $y < 0$, $y > 0$

Si $y < 0$, el cociente $\dfrac{1 \pm \sqrt{1+y^2}}{y}$ es positivo si el numerador es negativo, y esto sucede cuando tomamos como numerador a $1 - \sqrt{1+y^2}$. Luego,

$$e^x = \frac{1 - \sqrt{1+y^2}}{y} = \frac{1}{y} - \frac{\sqrt{1+y^2}}{y} = \frac{1}{y} + \frac{\sqrt{1+y^2}}{-y} = \frac{1}{y} + \frac{\sqrt{1+y^2}}{|y|}$$

Si $y > 0$, el cociente $\dfrac{1 \pm \sqrt{1+y^2}}{y}$ es positivo si el numerador es positivo, y esto sucede cuando tomamos como numerador a $1 + \sqrt{1+y^2}$. Luego,

$$e^x = \frac{1 + \sqrt{1+y^2}}{y} = \frac{1}{y} + \frac{\sqrt{1+y^2}}{y} = \frac{1}{y} + \frac{\sqrt{1+y^2}}{|y|}$$

En cualquiera de los dos casos hemos conseguido que:

$$e^x = \frac{1}{y} + \frac{\sqrt{1+y^2}}{|y|}$$

Tomando logaritmo y cambiando de variables, obtenemos que

$$y = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} \right)$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 4.5

En los problemas del 1 al 10, hallar la derivada $y' = D_x y$ ***de la función dada.***

1. $y = \tan^{-1}(\cosh x)$

2. $y = e^{\operatorname{senh} 2x}$

3. $y = x^{\tanh x}$, $x > 0$

4. $y = \frac{1}{2}\tanh\frac{x}{2} + \frac{1}{6}\tanh^3\frac{x}{2}$

5. $y = e^{ax}\cosh bx$

6. $y = \sqrt[4]{\dfrac{1+\tanh x}{1-\tanh x}}$

7. $y = (\operatorname{cosech}^{-1}x)^2$

8. $y = \operatorname{senh}^{-1}\dfrac{x^2}{a^2}$

9. $y = \tanh^{-1}(\sec x)$

10. $y = \tan^{-1}x + \tanh^{-1}x$

11. Probar las siguientes identidades dadas en el teorema 4.3:

a. $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$ **b.** $\cosh(-x) = \cosh x$ **c.** $1 - \coth^2 x = -\operatorname{cosech}^2 x$

d. $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

12. Probar las identidades:

a. senh (x − y) = senh x cosh y − cosh x senh y

b. cosh (x − y) = cosh x cosh y − senh x senh y

c. $\cosh x + \cosh y = 2\cosh \dfrac{x+y}{2} \cosh \dfrac{x-y}{2}$

d. $\operatorname{senh} x + \operatorname{senh} y = 2\operatorname{senh} \dfrac{x+y}{2} \cosh \dfrac{x-y}{2}$

e. $\cosh x - \cosh y = 2\operatorname{senh} \dfrac{x+y}{2} \operatorname{senh} \dfrac{x-y}{2}$

f. $\operatorname{senh} 3x = 3 \operatorname{senh} x + 4 \operatorname{senh}^3 x$

13. Probar las igualdades 2, 3, 4, 5 y 6 del teorema 4.5.

SECCION 4.6

RAZON DE CAMBIO

Razón de cambio es otro nombre que se le da a la derivada cuando ésta es vista como el límite de un cociente (razón) incremental. Por definición, si x_o es un punto del dominio de la función y = f(x), entonces

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ donde } \Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) \quad \text{y} \quad \Delta x = x - x_o$$

El incremento $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$ mide el cambio experimentado por y = f(x) cuando cambia de x_o a $x_o + \Delta x$. El cociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

es la razón de cambio promedio de y respecto a x, cuando x cambia de x_o a $x_o + \Delta x$. El límite de este cambio promedio cuando $\Delta x \to 0$ es la razón de cambio instantáneo de y respecto a x en x_o. Pero éste no es otra cosa que la derivada $f'(x_0)$. En resumen:

Si y = f(x), la razón de cambio (instantánea) de y respecto a x en x_0 es $f'(x_0)$.

Esta nueva interpretación de la derivada como una razón de cambio amplía el panorama de sus aplicaciones. El mundo en que vivimos es un mundo dinámico y cambiante. La población aumenta, los recursos naturales disminuyen, la inflación baja o sube, la producción baja o sube, etc. De estos fenómenos, que pueden ser cuantificados mediante una función, es importante conocer su correspondiente razón de cambio. Así, a un ingeniero le interesa saber la razón con que sale el agua de una represa; a un demógrafo o biólogo le interesa saber la tasa de crecimiento de una población (humana o de insectos); etc. Conocemos ya dos razones de cambio: la velocidad y la aceleración. La velocidad es la razón de cambio de la distancia respecto al tiempo y la aceleración es la razón de cambio de la velocidad respecto al tiempo.

EJEMPLO 1. Sea V el volumen de un cubo de x cm. de arista. Esto es $V = x^3$.

a. Hallar la razón de cambio promedio de V cuando x cambia de 5 a 5,1

b. Hallar la razón de cambio de V cuando x = 5.

Solución

a. Tenemos que $x_o = 5$, $\Delta x = 5,1 - 5 = 0,1$. Luego,

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)}{\Delta x} = \frac{V(5 + 0,1) - V(5)}{0,1} = \frac{(5,1)^3 - 5^3}{0,1} = 76,51 \text{ cm}^3$$

b. Nos piden $V'(5)$. Bien,

$$V'(5) = 3x^2 \Rightarrow V'(5) = 3(5)^2 = 75 \text{ cm}^3$$

En Economía se usa el término **marginal** para referirse a la razón de cambio. Así, el costo marginal es la razón de cambio (derivada) de la función costo.

EJEMPLO 2. Una empresa estima que el costo de producir x artículos es

$$C(x) = 0,5x^2 + 6x + 2.000$$

a. Hallar la función costo marginal.

b. Hallar el costo marginal al nivel de producción de 100 artículos.

Solución

a. $C'(x) = x + 6$ **b.** $C'(100) = 100 + 6 = 106$

RAZONES DE CAMBIO RELACIONADAS

Supongamos que tenemos dos variables, digamos x e y, que ambas son funciones del tiempo: $x = f(t)$ e $y = g(t)$ y que estas variables estén relacionadas mediante una ecuación $F(x, y) = 0$. Derivando implícitamente esta ecuación respecto al tiempo, se obtiene otra ecuación que relaciona las razones de cambio $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$. Por este motivo diremos que $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ son **razones de cambio relacionadas.** En esta situación, si se conoce una de ellas, es posible encontrar la otra.

ESTRATEGIA PARA RESOLVER PROBLEMAS DE RAZONES DE CAMBIO RELACIONADAS

Se sugiere los siguientes pasos en la solución de un problema de razones de cambio relacionadas. Estos pasos pueden tener variaciones ocasionales.

Paso 1. Construir una figura que ilustre el problema, indicando las constantes y las variables.

Paso 2. Identificar la información que se pide. Además, escribir los datos que se proporcionan.

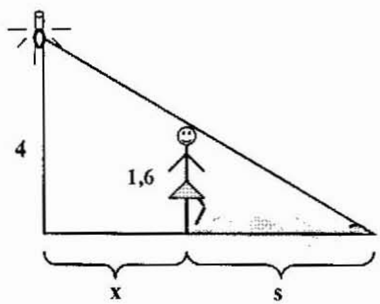
Paso 3. Escribir las ecuaciones que relacionan a las variables y las constantes.

Paso 4. Derive (implícitamente) la ecuación hallada en el paso 3.

Paso 5. Sustitúyase, en la ecuación que resulta al derivar, todos los datos pertinentes al momento particular para el que se pide la respuesta.

EJEMPLO 3. Una bailarina de ballet de 1,60 m. de estatura se encuentra ensayando en una habitación que está alumbrada por un foco colocado en el centro a 4 m. de altura. Si en determinado instante la bailarina se aleja del centro a razón de 45 m/min. ¿A razón de cuántos metros por minuto crece su sombra en ese instante?

Solución



Paso 1. Construcción de una figura.

Paso 2. Identificar la información que se pide. Sea t_0 el instante en el que la bailarina se aleja a 45 m/min. o sea cuando

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} = 45 \text{ m/min.}$$

Se pide hallar $\left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=t_0}$, donde s es la longitud de la sombra.

Paso 3. Por semejanza de triángulos se tiene que

$$\frac{s}{s+x} = \frac{1,6}{4} \Rightarrow s = \frac{2}{3}x \qquad (1)$$

Paso 4. Derivamos la ecuación (1): $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{2}{3}\dfrac{dx}{dt}$

Paso 5. En la ecuación anterior, tomando $t = t_0$ se tiene:

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=t_0} = \frac{2}{3}\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} \Rightarrow \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=t_0} = \frac{2}{3}(45 \text{ m/min.}) = 30 \text{ m/min.}$$

Esto es, en el instante t_0 la sombra crece a razón de 30 m/min.

En la práctica, los 5 pasos enunciados anteriormente, no se especifican, quedando sobreentendidos.

EJEMPLO 4. Los extremos de una escalera de 5 m de longitud están apoyados sobre una pared vertical y sobre un piso horizontal. Si al empujarla por la base se logra que ésta se aleje de la pared a razón de 20 m/seg. ¿Con que rapidez baja el extremo superior de la escalera cuando la base está a 3 m de la pared?

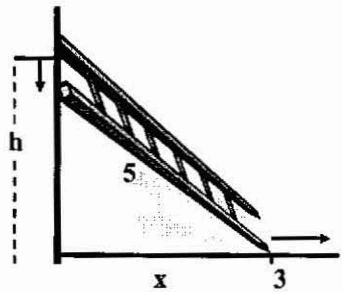
Solución

Sea x la distancia de la pared al extremo inferior de la escalera.

Sea h la altura desde el suelo al extremo superior de la escalera.

Nos piden hallar la rapidez con que baja el extremo superior de la escalera cuando la base está a 3 m de la pared. En otros términos, nos piden la razón de cambio de h respecto al tiempo cuando x = 3. Es decir, nos piden:

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{x=3}$$



Como dato nos dan la razón con que la base de la escalera se aleja de la pared. Es decir nos dan

$$\frac{dx}{dt} = 20/\text{seg}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos:

$$h^2 + x^2 = 5^2 \qquad (1)$$

Derivamos implícitamente esta ecuación respecto a t. En la ecuación resultante, sustituimos los datos que son válidos para el momento en que x = 3.

$$2h\frac{dh}{dt} + 2x\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{x}{h}\frac{dx}{dt} \qquad (2)$$

Pero, $\frac{dx}{dt} = 20$ m/seg. Además, cuando x = 3, de (1) se tiene que

$$h = \sqrt{5^2 - x^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$$

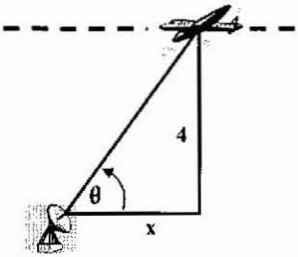
Reemplazando estos valores en (2):

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{x=3} = -\frac{3}{4}(20 \text{ m/seg}) = -15 \text{ m/seg.}$$

EJEMPLO 5. Un avión vuela horizontalmente a una altura constante de 4 Km. y a una velocidad constante de 300 Km/hora. La trayectoria pasa por una estación de radar desde donde el operador observa al avión. Hallar la velocidad con que cambia el ángulo de inclinación θ de la línea de observación en el instante en que la distancia horizontal del avión a la estación de radar es de 3 Km.

Solución

Sea x la distancia horizontal del avión al radar.



Se tiene que:

$\cot\theta = \dfrac{x}{4}$, o bien $\theta = \cot^{-1}(x/4)$

Derivando respecto a t:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{1+(x/4)^2}\left(\frac{1}{4}\right)\frac{dx}{dt} = \frac{-4}{16+x^2}\,\frac{dx}{dt}$$

Nos dicen que $\dfrac{dx}{dt}$ = –300 Km/h, donde el signo negativo significa que la distancia x es decreciente.

Ahora, cuando x = 3:

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=3} = \frac{-4}{16+3^2}\left(-300\right) = 48 \text{ rad/h}$$

PROBLEMAS RESUELTOS 4.6

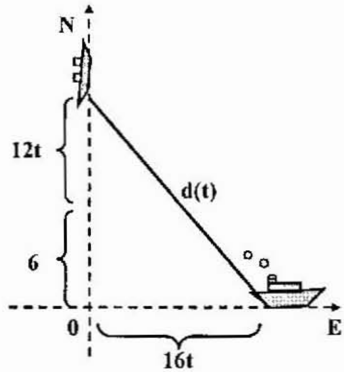
PROBLEMA 1. Un barco navega con dirección norte a razón de 12 Km./h. Otro barco navega con dirección Este a 16 Km./h. El primero pasa por la intersección de las trayectorias a las 3.30 P. M. y el segundo a las 4 P. M. ¿Cómo está cambiando la distancia entre los barcos,

a. A las 3:30 P. M.? **b.** A las 5 P. M.?

Solución

Comenzamos a computar el tiempo desde el instante en que el segundo barco pasa por la intersección de las trayectorias. Esto es, t = 0 a las 4 PM. En este instante el primer barco se encuentra a $12(1/2) = 6$ Km. al norte de la intersección. Después de transcurrir t horas el primer barco se encuentra a 6 + 12t Km. de la intersección, y el segundo a 16t Km.

Sea d(t) la distancia entre los barcos t horas después de las 4 P. M. Se tiene que a las 3:30 P. M, $t = -\frac{1}{2}$ y a las 5 P. M, t = 1.



Se pide hallar:

a. $d'(-1/2)$ y **b.** $d'(1)$

Por Pitágoras se tiene que:

$$d^2(t) = (6 + 12t)^2 + (16t)^2 \Rightarrow$$

$$d^2(t) = 400t^2 + 144t + 36$$

Derivando la última ecuación con respecto al tiempo t:

$$2d(t)\, d'(t) = 800t + 144 \quad \Rightarrow \quad d'(t) = \frac{400t + 72}{\sqrt{400t^2 + 144t + 36}}$$

a. Ahora, a las 3:30 PM. $t = -\frac{1}{2}$. Luego

$$d'(-1/2) = \frac{400(-1/2) + 72}{\sqrt{400(-1/2)^2 + 144(-1/2) + 36}} = -16 \text{ Km./h.}$$

Esto es, a las 3:30 PM. la distancia entre los barcos está cambiando a razón de −16 Km./h. (el signo negativo significa que en el instante dado la distancia está decreciendo).

b. A las 5 P. M. t = 1. Luego,

$$d'(1) = \frac{400(1) + 72}{\sqrt{400(1)^2 + 144(1) + 36}} = 19{,}60 \text{ Km./h.}$$

A las 5 P. M. la distancia entre los barcos está cambiando a razón de 19,16 Km./h.

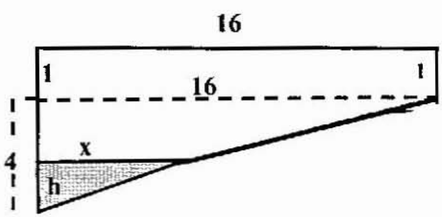
PROBLEMA 2. Una piscina tiene 16 m. de largo, 12 m. de ancho y una profundidad de 1 m. en un extremo y 5 m. en el otro, teniendo como fondo un plano inclinado. Se vierte agua en la piscina a razón de 4 m^3/min. ¿Con qué velocidad se eleva el nivel del agua cuando éste es de 1 m. en el extremo más profundo?

Solución

Sea h el nivel del agua y sea x el largo de la superficie del agua cuando está a nivel h.

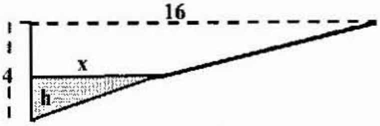
Se pide encontrar

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=1}$$



Además, si V es el volumen del agua en la piscina, nos dicen que éste está creciendo a razón de $4\ m^3/min$. Esto es, nos dicen que

$$\frac{dV}{dt} = 4\ m^3/min.$$



Bien, por semejanza de triángulos:

$$\frac{x}{16} = \frac{h}{4} \quad \Rightarrow \quad x = 4h \qquad \textbf{(1)}$$

Por otro lado, el volumen del agua de la piscina es:

$$V = \frac{xh}{2}(12) = 6xh$$

Reemplazando (1) en esta igualdad: $V = 24h^2$

Derivando esta ecuación respecto a t: $\dfrac{dV}{dt} = 48h\dfrac{dh}{dt}$

Recordando que $\dfrac{dV}{dt} = 4\ m^3/min.$ y particularizándola para $h = 1$, se tiene:

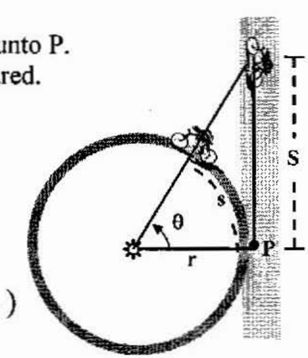
$$4 = 48(1)\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=1} \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=1} = \frac{1}{12}$$

El nivel del agua, cuando éste está a 1 m. de altura, crece a razón de 1/12 m/min.

PROBLEMA 3. Un ciclista está corriendo en una pista circular a razón de 360 m/min. En el centro de la pista alumbra un foco el cual proyecta la sombra del ciclista sobre una pared que es tangente a la pista en un punto P. ¿Con qué velocidad se mueve la sombra en el instante en que el ciclista ha recorrido 1/12 de la pista desde P?

Solución

Sean:
r = el radio de la pista
s = la longitud del recorrido del ciclista a partir del punto P.
S = la longitud del recorrido de la sombra sobre la pared.



Nos piden $\dfrac{dS}{dt}$ cuando $s = \dfrac{1}{12}$ de la pista desde P,

y nos dicen que $\dfrac{ds}{dt} = 360$ m/min.

Se tiene que:

$$\theta = \frac{s}{r} \text{ radianes}, \quad S = r\tan\theta \quad \Rightarrow \quad S = r\tan\left(\frac{s}{r}\right)$$

Derivando la última ecuación respecto a t:

$$\frac{dS}{dt} = r\sec^2\left(\frac{s}{r}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{s}{r}\right) = r\left(\frac{1}{r}\right)\sec^2\left(\frac{s}{r}\right)\frac{ds}{dt}$$

$$= \sec^2\left(\frac{s}{r}\right)\frac{ds}{dt} \qquad \textbf{(1)}$$

Pero, cuando $s = \frac{1}{12}$ de la pista desde P se tiene que:

$$s = \frac{1}{12}(2\pi r) = \frac{1}{6}\pi r \Rightarrow \frac{s}{r} = \frac{\pi}{6}$$

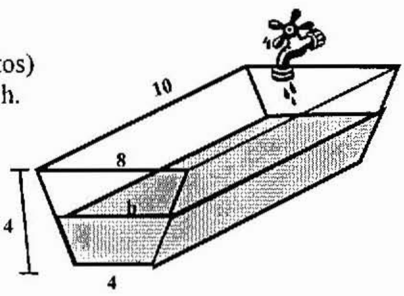
Luego, cuando $s = \frac{1}{12}$ de la pista, de **(1)**, se tiene:

$$\frac{dS}{dt} = \sec^2\left(\frac{\pi}{6}\right)(360) = \left(2/\sqrt{3}\right)^2(360 \text{ m/min}) = 480 \text{ m/min.}$$

PROBLEMA 4. Un abrevadero tiene 10 pies de largo y tiene por extremos dos trapecios de 4 pies de altura y bases de 4 pies y 8 pies. Se vierte agua al abrevadero a razón de 24 pies^3/min. ¿Con qué rapidez crece el nivel del agua cuando el agua tiene 2 pies de profundidad?

Solución

Sean:
h = altura del agua en el instante t (t en minutos)
b = el ancho de la superficie del agua al nivel h.
V = el volumen del agua cuando ésta tiene nivel h.



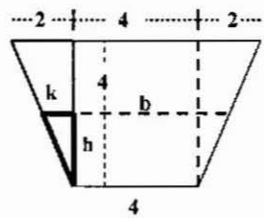
Nos piden $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=2}$

Nos dicen que $\frac{dV}{dt} = 24$ pies^3/min.

Hallemos V. Sabemos que V = 10A, donde A es el área de una cara lateral. Como esta cara es un trapecio, se tiene

$$A = \frac{1}{2}(b+4)h \qquad \textbf{(1)}$$

Sacamos aparte el trapecio que conforma la cara del frente, al cual lo hemos agrandado para obtener una mejor visualización. Los dos triángulos remarcados son semejantes. Luego,



$$\frac{k}{2} = \frac{h}{4} \Rightarrow k = \frac{h}{2}$$

Pero, es fácil ver que $k = \dfrac{b-4}{2}$. Luego,

$$\frac{b-4}{2} = \frac{h}{2} \Rightarrow \quad b = h + 4$$

Reemplazando este valor b en (1) tenemos: $A = \dfrac{1}{2}(h+4+4)h = \dfrac{1}{2}(h+8)h$

En consecuencia, el volumen del agua es

$$V = 10\left(\frac{1}{2}(h+8)h\right) = 5h^2 + 40h$$

Derivando respecto a t

$$\frac{dV}{dt} = (10h+40)\frac{dh}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = \frac{1}{10h+40}\frac{dV}{dt}$$

En particular, cuando h = 2

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=2} = \frac{1}{10(2)+40}\left.\frac{dV}{dt}\right|_{h=2} = \frac{1}{60}(24 \text{ pies}^3/\text{min}) = 0{,}4 \text{ pies}^3/\text{min}.$$

PROBLEMA 5. Un tanque tiene la forma de un cono invertido de 8 m de radio y 24 m. de altura. Se vierte agua al tanque a razón de 40 m^3/hora. y a la vez se saca agua para regar. El nivel del agua está subiendo a razón de 4 m/hora cuando éste tiene 3 m. de altura. ¿Con qué rapidez sale el agua en ese instante?

Solución

Sean:

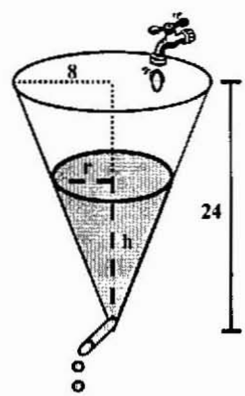
t = el tiempo medido en horas.

r = el radio en metros de la superficie del agua en el instante t.

h = la altura del nivel del agua.

V = el volumen del agua en el instante t.

S = la cantidad de agua que ha salido hasta el instante t.



Nos piden hallar $\left.\dfrac{dS}{dt}\right|_{h=3}$

Nos dicen que $\left.\dfrac{dh}{dt}\right|_{h=3} = 4$ m/hora.

Es claro que:

Razón de cambio de V = Razón de entrada del agua – Razón de salida

Esto es,

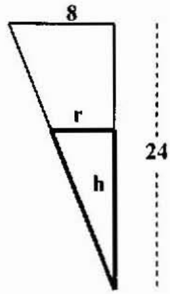
$$\frac{dV}{dt} = 40 - \frac{dS}{dt} \Rightarrow \frac{dS}{dt} = 40 - \frac{dV}{dt} \Rightarrow \left.\frac{dS}{dt}\right|_{h=3} = 40 - \left.\frac{dV}{dt}\right|_{h=3} \qquad (1)$$

Pero, el volumen del agua es

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad \textbf{(2)}$$

Por semejanza de triángulos se tiene

$$\frac{r}{h} = \frac{8}{24} \Rightarrow r = \frac{1}{3} h \qquad (3)$$



Reemplazando (3) en (2): $V = \frac{1}{27}\pi h^3$

Derivando respecto a t

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{9}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

En particular, cuando h = 3, se tiene

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{h=3} = \frac{1}{9}\pi h^2 \left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=3} = \frac{1}{9}\pi(3)^2(4 \text{ m/hora}) = 4\pi \text{ m}^3/\text{hora}$$

Reemplazando este resultado en (1):

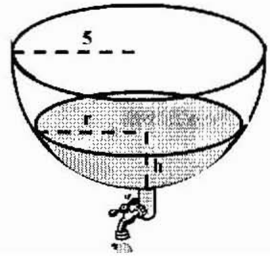
$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{h=3} = 40 - \left.\frac{dV}{dt}\right|_{h=3} = 40 - 4\pi \approx 27{,}43 \text{ m}^3/\text{h}.$$

PROBLEMA 6. Se tiene un tanque semiesférico de 5 m. de radio, el cual está lleno de agua. Se comienza a vaciar el tanque abriendo una pluma situada en el fondo. Por la pluma salen 3.500 litros/hora. ¿Con qué velocidad baja el nivel del agua cuando éste tiene 1,25 m. de altura? Se sabe que el volumen de un casquete esférico de altura h en una esfera de radio r es $V = \pi r h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$.

Solución

Nos piden hallar $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=1,25}$

Sabemos que 3.500 litros/h = 3,5 m^3/h



Nos dicen que $\frac{dV}{dt}$ es constante y que

$$\frac{dV}{dt} = 3.500 \text{ litros/h} = -3{,}5 \text{ m}^3/\text{h}.$$

El volumen de agua, tomando en cuenta que r = 5 m, es

$$V = 5\pi h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$$

Derivamos esta función respecto al tiempo t (t en horas)

$$\frac{dV}{dt} = 10\pi h\frac{dh}{dt} - \pi h^2\frac{dh}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi h(10-h)}\frac{dV}{dt}.$$

En esta última igualdad, particularizando para h = 1,25, tenemos:

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=1,25} = \frac{1}{\pi(1,25)(10-1,25)}(-3,5) \approx -0,1019 \text{ m/h}.$$

PROBLEMA 7. Un bombillo alumbra desde el extremo superior de un poste de 48 pies de altura. Desde un punto situado a 64 pies de altura se suelta una pelota de acero, cuya trayectoria está a 15 pies de distancia del bombillo. Hallar la velocidad con que se mueve la sombra de la pelota en el instante en que ésta golpea el piso. La posición de la pelota, después de t segundos, es $s = 16t^2$.

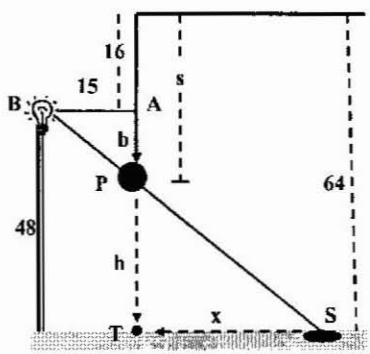
Solución

Sea T el punto donde la pelota golpea el piso. Sea x la distancia desde el punto T a la sombra S.

La pelota golpea el suelo cuando

$$s = 64 \Rightarrow 16t^2 = 64 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t = 2$$

O sea, la pelota golpea el suelo 2 seg. después de soltarla.



Nos piden hallar: $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=2}$

Los triángulos STP y BAP son semejantes. Luego,

$$\frac{x}{15} = \frac{h}{b} \quad \Rightarrow \quad x = 15\frac{h}{b}$$

Pero, h = 64 − s y b = s − 16.

En consecuencia,

$$x = 15\,\frac{64-s}{s-16}$$

Derivando esta ecuación respecto al tiempo,

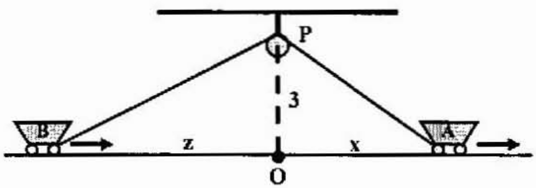
$$\frac{dx}{dt} = 15\,\frac{(s-16)\left(-\dfrac{ds}{dt}\right) - (64-s)\left(\dfrac{ds}{dt}\right)}{(s-16)^2} = -15\,\frac{48}{(s-16)^2}\,\frac{ds}{dt}$$

$$= -15\,\frac{48}{\left(16t^2-16\right)^2}(32t) = -15\,\frac{48}{(16)^2\left(t^2-1\right)^2}(32t) = -\frac{90t}{(t^2-1)^2}$$

Ahora, para t = 2 se tiene

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=2} = -\frac{90(2)}{(2^2-1)^2} = -20 \text{ pies/seg.}$$

PROBLEMA 8. Un cable de 14 metros de longitud que pasa por una polea P y enlaza dos carritos. El punto O está en el suelo, directamente debajo de la polea y a 3 metros de ésta. El carrito A es halado alejándolo del punto O a una velocidad de 40 m/min. ¿Con que velocidad se acerca el carrito B al punto O en el instante en que el carrito A está a 4 metros de O.



Solución

Sean x y z las distancias de los carritos A y B al punto O, respectivamente.

Nos dicen que $\dfrac{dx}{dt} = 40$ m/min y nos piden $\left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{x=4}$

Los carritos A y B, el punto O y la polea P forman dos triángulos rectángulos cuyas hipotenusas están cubiertas por el cable.

Las longitudes de las hipotenusas son $\sqrt{z^2+3^2}$ y $\sqrt{x^2+3^2}$. Luego,

$$\sqrt{z^2+9} + \sqrt{x^2+9} = 14 \qquad \textbf{(1)}$$

Derivando respecto a t:

$$\frac{2z}{2\sqrt{z^2+9}}\frac{dz}{dt} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = -\frac{x\sqrt{z^2+9}}{z\sqrt{x^2+9}}\frac{dx}{dt} \qquad \textbf{(2)}$$

Si x = 4, de (1) obtenemos:

$$\sqrt{z^2+9}+\sqrt{4^2+9}=14 \Rightarrow \sqrt{z^2+9}+5=14 \Rightarrow \sqrt{z^2+9}=9 \Rightarrow z=6\sqrt{2}$$

Luego, reemplazando $x=4$ e $z=5\sqrt{2}$ en (2)

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{x=4}=-\frac{4(9)}{6\sqrt{2}(5)}(40 \text{ m/min})=-\frac{48}{\sqrt{2}}=-24\sqrt{2}\approx-33,94 \text{ m/min}$$

El signo negativo de la velocidad anterior significa que distancia del carrito B al punto O es decreciente.

PROBLEMAS PROPUESTOS 4.6

1. El consumo anual de gasolina de cierto país es $C(t) = 32{,}8 + 0{,}3t + 0{,}15t^2$ donde $C(t)$ es dado en millones de litros y t es dado en años computados al iniciarse el año 2.004. Hallar la tasa de consumo anual al iniciarse el año 2.010.

2. Se ha determinado que dentro de t años la población de una comunidad será de $P(t) = 12 - \dfrac{20}{t+3}$ miles de habitantes. Hallar:

a La tasa de crecimiento después de 7 años.

b. La tasa porcentual después de 7 años (tasa porcentual $= 100\dfrac{P'(t)}{P(t)}$).

3. Se arroja una piedra a un estanque y produce olas circulares cuyos radios crecen a razón de 0,5 m/seg. Hallar la razón con que aumenta el área del círculo encerrado por una ola cuando el radio de ésta es de 3 m.

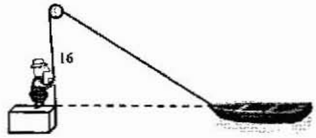
4. Un tanque de agua tiene la forma de un cono invertido de 15 m. de altura y 5m. de radio. Si se le está llenando de agua a razón de 6π m^3 por minuto. ¿Con qué rapidez crece el nivel del agua cuando éste tenga 6 m. de profundidad ?.

5. Los extremos de una escalera de 20m. están apoyados sobre una pared vertical y un piso horizontal. Si el extremo inferior de la escalera se aleja de la pared a una velocidad de 6 m/min. ¿A qué velocidad se mueve el extremo superior cuando la parte inferior está a 12 m. de la pared?

6. Un barco navega con dirección Norte a razón de 6 Km./h. Otro barco navega con dirección Este a 8 Km./h. A las 11 A. M. el segundo barco cruzó la ruta del primero en un punto en el cual éste pasó 2 horas antes. ¿Cómo está cambiando la distancia de los barcos a las 10 A. M.?

7. Desde la parte superior de un poste de 7,2 m. alumbra un bombillo. Un policía de 1.80 m. de altura se aleja caminando desde el poste, a una velocidad de 48 m/min. ¿Con qué velocidad crece su sombra?

8. Se estaciona un bote en el muelle halándolo con una polea que está a 16 pies encima de la cubierta del bote. Si la polea enrolla la cuerda a razón de 48 pies/min, hallar la velocidad del bote cuando quedan 20 pies de cuerda.



9. Una partícula se mueve sobre la parábola $y = x^2 + 6x$. Hallar la posición de la partícula cuando la razón de cambio de la coordenada y es 4 veces la razón de cambio de la coordenada x.

10. Cada lado de un triángulo equilátero mide x cm. y aumenta a razón de 10 cm./min. ¿Con que rapidez aumenta el área del triángulo cuando x = 20 cm.?

11. Las dimensiones de un cilindro circular recto están variando. En un cierto instante, el radio y la altura son 8 cm. y 20 cm., respectivamente. Si el volumen permanece constante y el radio aumenta a razón de 3 cm./seg., hallar la variación de la altura en ese instante.

12. El gas de un globo esférico se escapa a razón de 360 pies^3/min. Hallar:

a. La rapidez con que disminuye el radio en el instante en que éste es de 3 pies.

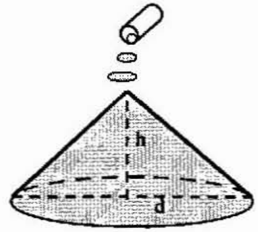
b. La rapidez con que disminuye el área de la superficie en el instante en que el radio es de 3 pies. Se sabe que el área de la superficie esférica es $S = 4\pi r^2$.

13. Sean V, S y r el volumen, el área de la superficie y el radio de una esfera respectivamente. Probar que: $\frac{dV}{dt} = \frac{r}{2}\frac{dS}{dt}$. Se sabe que: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ y $S = 4\pi r^2$.

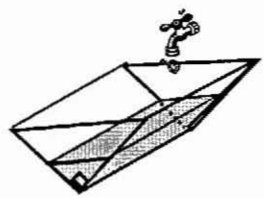
14. En cada uno de los extremos de un cilindro circular recto de radio r y altura h se coloca una semiesfera de radio r. El radio aumenta a razón de 0,5 m/min. Si el volumen permanece constante, hallar la razón de variación de la altura en el instante en que r = 4 m. y h = 6 m.

15. Un avión vuela horizontalmente a una altura constante de 900 m. de altura y con velocidad constante. La trayectoria pasa sobre una estación de radar desde donde el operador observa el avión. Cuando el ángulo de inclinación de la línea de observación es de $\pi/3$, este ángulo está cambiando a razón de $\frac{1}{45}$ rad/seg. Hallar la velocidad del avión.

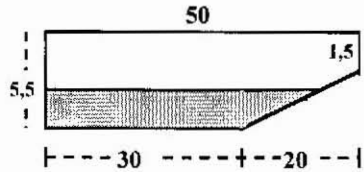
16. En una planta de materiales de construcción una cinta transportadora deposita arena en el piso a razón de 3 m^3/min. La arena forma un cono cuyo diámetro de la base es 3 veces la altura. Hallar con que rapidez cambia la altura del cono cuando ésta es de 2 m.



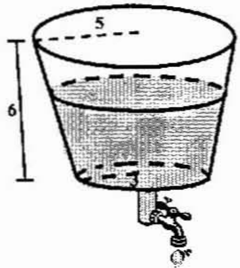
17. Un tanque tiene 5 m. de largo. Su sección transversal es un triángulo rectángulo isósceles. Se vierte agua al tanque a razón de 15 m^3/hora. ¿Con qué rapidez sube el nivel del agua cuando éste tiene 0,5 m. de profundidad? Sugerencia: En un triángulo rectángulo isósceles, la altura correspondiente al ángulo recto es igual a la mitad de la hipotenusa.



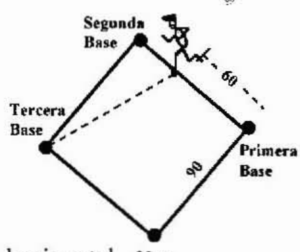
18. Una piscina tiene 50 m. de largo, 25 m. de ancho y su profundidad aumenta uniformemente de 1,5 m. a 5,5 m. en una distancia horizontal de 20 m., continuando horizontalmente los 30 m. restantes. La piscina se está llenando a razón de 120 m^3/hora. ¿Con qué rapidez sube el nivel del agua en el instante en que éste está a 3 m. de la parte más profunda?



19. Un tanque tiene la forma de un cono circular recto truncado de 6 m. de altura, de 5 m. de radio mayor y 3 m. de radio menor. El tanque se está desaguando a razón de 16,9π m^3/hora. Hallar la rapidez con que baja el nivel del agua cuando éste tiene 4 m. El volumen V de un cono circular recto truncado de altura h radios r y R en los extremos es $V = \frac{\pi}{3}\, h(r^2 + R^2 + rR)$

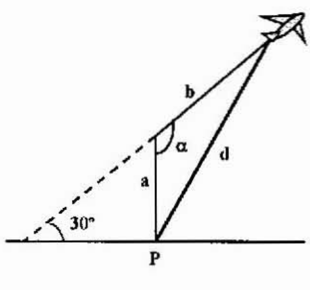


20. Un campo de béisbol es un cuadrado de 90 pies de lado. Un jugador está corriendo de la primera base a la segunda con una velocidad de 17 pies/seg. Hallar la velocidad con que se acerca el jugador a la tercera base en el instante en que éste se encuentra a 60 pies de la primera base.

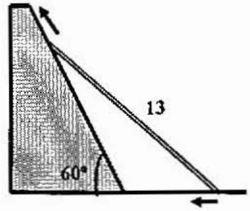


21. Un edificio de 60 m. proyecta su sombra sobre el piso horizontal. El ángulo que forman los rayos solares con el piso disminuye a razón de 15° por hora. En determinado instante del día la sombra del edificio es de 80 m. Hallar la razón en que cambia la sombra en ese instante.

22. Un avión se eleva con un ángulo de inclinación de 30° y a una velocidad constante de 600 Km./hora. El avión pasa a 2 Km. por encima de un punto P en el suelo. Hallar la razón de cambio de la distancia de P al avión 1 minuto más tarde. Sugerencia: ley de los cosenos, $d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$.



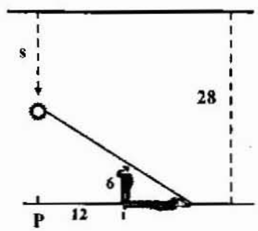
23. Una escalera de 13 m. de longitud está apoyada sobre un talud inclinado a 60° respecto de la horizontal. La base es empujada hacia el talud a razón de 2,9 m/seg. Hallar la rapidez con que se desplaza el extremo superior de la escalera cuando la base está a 5 m. del talud. Sugerencia: Ver la ley de los cosenos en el problema anterior.



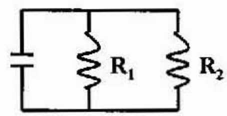
24. Un faro está situado a 2 Km. de una playa recta y su luz gira a razón de 2 revoluciones por minuto. Hallar la rapidez con que se mueve el rayo de luz a lo largo de la playa en el momento en que éste pasa por un punto situado a 1 Km. del punto frente al faro.

25. Un bombillo alumbra desde el extremo superior de un poste de 60 pies de altura. Desde un punto situado a la misma altura se suelta una pelota de acero, cuya trayectoria está a 20 pies de distancia del bombillo. Hallar la velocidad con que se mueve la sombra 0,5 segundo después de soltarla. Recordar que la posición de la pelota, después de t segundos, es $s = 16t^2$.

26. Un policía de 6 pies de altura está haciendo guardia a 12 pies del punto P que está directamente debajo de una lámpara que cuelga a 28 pies sobre el suelo. La lámpara comienza a caerse por lo cual la sombra del policía comienza a crecer. Se sabe que la longitud de la trayectoria de la linterna es $s = 16t^2$ pies en t segundos. ¿Con qué velocidad crece la sombra cuando t = 1?



27. Dos resistencias, R_1 y R_2, están conectadas en paralelo, como indica la figura. Se sabe que la resistencia total R es tal que:



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

R_1 cambia a razón de 0,5 ohms/seg y R_2 cambia a razón de 0,3 ohms/seg, ¿Cómo cambia R cuando R_1 = 60 ohms y R_2 = 80 ohms?

28. Sabiendo que un trozo de hielo esférico se derrite a una razón proporcional al área de su superficie,

a. Probar que la razón con que se contrae su radio es constante.

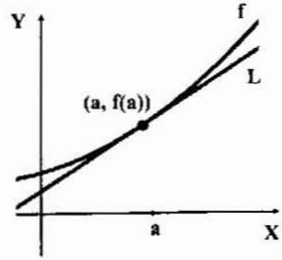
b. Si, además se sabe que después de una hora el hielo que queda es un 1/8 de la cantidad inicial, hallar el tiempo que tardará en derretirse completamente. Sugerencia: Si r_0 es el radio inicial y $\frac{dr}{dt} = k$, entonces $r = kt + r_0$.

SECCION 4.7
APROXIMACIONES LINEALES Y DIFERENCIALES

APROXIMACION LINEAL

Sea $y = f(x)$ una función diferenciable en a. La recta tangente a la gráfica de f en el punto (a, f(a)) tiene por ecuación:

$$L: \; y = f(a) + f'(a)(x - a)$$



Comparando la gráfica de f y la recta tangente observamos que, para los x cercanos a a, los puntos (x, f(x)) de la gráfica de f están próximos a los puntos (x, f(a) + f'(a)(x − a)) de la recta tangente. Por consiguiente, para los puntos x próximos a a, se cumple que:

$$\boxed{f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \qquad (1)}$$

A esta aproximación se le llama **aproximación lineal** o **aproximación tangencial de f en a** y la función lineal

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \qquad (2)$$

es la **linearización de f en a.**

EJEMPLO 1. **a.** Hallar la linearización de la función $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 4$

b. Usar la linearización encontrada para aproximar:

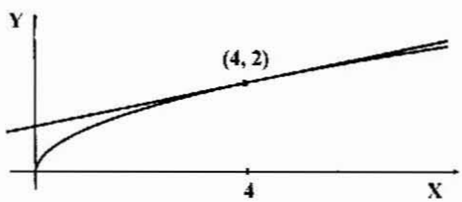
$$\sqrt{3{,}95} \quad \text{y} \quad \sqrt{4{,}02}$$

Solución

a. Buscamos: $L(x) = f(4) + f'(4)(x - 4)$. Se tiene:

$$f(4) = \sqrt{4} = 2 \quad \text{y} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

Luego, la linearización buscada es: $L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x - 4) = \frac{x}{4} + 1$



b. La aproximación lineal es $\sqrt{x} \approx \frac{x}{4} + 1$. Luego,

$$\sqrt{3,94} \approx \frac{3,94}{4} + 1 = 0,985 + 1 = 1,985$$

$$\sqrt{4,02} \approx \frac{4,02}{4} + 1 = 1,005 + 1 = 2,005$$

Mi calculadora dice que $\sqrt{3,94} = 1,984943324$ y que $\sqrt{4,02} = 2,004993766$

DIFERENCIALES

Sea $y = f(x)$ una función diferenciable. Según la notación de Leibniz, el símbolo $\frac{dy}{dx}$ representa a la derivada de y respecto a x. Ahora introducimos el concepto de diferencial que dará significado propio tanto a **dx** como a **dy** en tal forma que $\frac{dy}{dx}$ pueda ser vista como un cociente de dy sobre dx.

Si Δx es cualquier incremento de x, entonces

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad (3)$$

es el correspondiente incremento de y. Sabemos que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Luego, si Δx es pequeño, la razón incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es una aproximación a la derivada $f'(x)$. Este hecho lo expresamos así $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$. De aquí obtenemos:

$$\Delta y \approx f'(x)\,\Delta x \qquad (4)$$

Esta expresión nos dice que cuando Δx es pequeño, la expresión $f'(x)\Delta x$ está próximo al incremento de Δy. Por este motivo es conveniente fijar la atención en esta expresión. A continuación le damos un nombre y nos ocupamos de ella.

DEFINICION . Sea $y = f(x)$ una función diferenciable y Δx un incremento de x.

Llamaremos:

a. Diferencial de x, denotada por **dx**, es el incremento Δx. Esto es,

$$dx = \Delta x$$

b. Diferencial de y, denotada por **dy** o **df**, a

$$dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$$

Notar que dy es función de dos variables, x y Δx.

EJEMPLO 2. Si $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$, hallar

a. dy **b.** Evaluar dy cuando $x = 2$ y $dx = 0{,}03$

Solución

a. $dy = \dfrac{d}{dx}(x^3 - 2x^2 + x + 3)\,dx = (3x^2 - 4x + 1)dx$

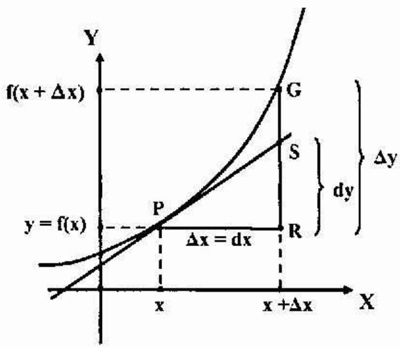
b. Cuando $x = 2$ y $dx = 0{,}03$, se tiene

$$dy = [\,3(2)^2 - 4(2) + 1\,]\,0{,}03 = 0{,}15$$

OBSERVACION. Si en $dy = f'(x)\,dx$ exigimos que $dx \neq 0$, podemos dividir ambos lados por dx para obtener $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$. Esto nos dice que el símbolo $\dfrac{dy}{dx}$, que es la derivada de y respecto a x, puede ser pensado como el cociente de la diferencial dy entre la diferencial dx.

REPRESENTACION GEOMETRICA DE LA DIFERENCIAL

La. figura nos muestra una representación geométrica de la diferencial.



La recta $\overline{PS}$ es la recta tangente al gráfico de $y = f(x)$ en el punto $P = (x, y)$. La pendiente de esta tangente es $f'(x)$. Por lo tanto,

$$\overline{RS} = f'(x)dx = dy.$$

Por otro lado, G es el punto $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ y el segmento $\overline{RG}$ es igual a Δy. Se ve que para $dx = \Delta x$ pequeño se tiene nuevamente la expresión (4):

$$\Delta y \approx dy = f'(x)\,dx \qquad (4)$$

EJEMPLO 3. Sea $y = f(x) = x^2 + 4x - 3$. Hallar, Δy, dy y $\Delta y - dy$

a. Para cualquier x y cualquier Δx

b. Para $x = 2$ y $dx = 0{,}01$

Solución

a. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 + 4(x + \Delta x) - 3 - (x^2 + 4x - 3)$

$= 2x\Delta x + 4\Delta x + (\Delta x)^2 = 2(x + 2)\Delta x + (\Delta x)^2$

$dy = f'(x)dx = (2x + 4)dx = 2(x + 2)dx$

$\Delta y - dy = (\Delta x)^2$

b. Si $x = 2$, $\Delta x = dx = 0{,}01$, reemplazando en (a), tenemos

$\Delta y = 2(2 + 2)(0{,}01) + (0{,}01)^2 = 0{,}08 + 0{,}0001 = 0{,}0801$

$dy = 2(2 + 2)(0{,}01) = 0{,}08$

$\Delta y - dy = (0{,}01)^2 = 0{,}0001.$

APROXIMACION LINEAL EN TERMINOS DE LA DIFERENCIAL

Tenemos la aproximación lineal:

$$\mathbf{f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \qquad (1)}$$

Ahora queremos expresar esta fórmula en términos de la diferencial. Para esto, hacemos $x = a + \Delta x$, de modo que $\Delta x = x - a$. Luego, reemplazando en (1) obtenemos:

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x, \text{ o bien } \quad f(a + \Delta x) \approx f(a) + dy$$

Por ultimo, cambiando a por x, se tiene:

$$\boxed{\mathbf{f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy \qquad (5)}}$$

Esta fórmula también se puede obtener fácilmente de las fórmulas (3) y (4). Sin embargo, preferimos la deducción que hemos hecho, porque ella nos indica que ambas fórmulas, la (1) y la (5), expresan la misma aproximación y, por lo tanto, las dos nos conducen al mismo resultado.

EJEMPLO 4. Usando diferenciales hallar un valor aproximado de $\sqrt[3]{65}$.

Solución

Consideremos la función $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$. Su diferencial es:

$$dy = f'(x)dx = \frac{1}{3x^{2/3}}dx$$

Reemplazando estos valores en la expresión (5) tenemos:

$$\sqrt[3]{x + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3x^{2/3}}dx$$

El número entero más próximo a 65 que tiene raíz cúbica exacta es 64. Luego, haciendo $x = 64$ y $\Delta x = dx = 1$ en la expresión anterior tenemos:

$$\sqrt[3]{65} = \sqrt[3]{64+1} \approx \sqrt[3]{64} + \frac{1}{3(64)^{2/3}}(1) = 4 + \frac{1}{48} \approx 4{,}0208333$$

Se sabe que $\sqrt[3]{65}$, con 7 cifras decimales, es 4,0207258. La aproximación que hemos encontrado es exacta hasta la tercera cifra decimal.

ESTIMACION DE ERRORES

La diferencial tiene aplicación en la estimación de los efectos causados por los errores cometidos al medir ciertas magnitudes. Sea x la variable cuyo valor es estimado con cierto error posible. Sea $y = f(x)$ otra variable que es función de x. Al calcular $y = f(x)$ a partir de x también se cometerá un error. Si el valor correcto es $x + dx$, entonces el **error de medición es dx**. Por otro lado, el valor correcto de la variable y es $f(x + dx)$, y el valor calculado con error es $f(x)$. Luego, el error cometido en la variable y, llamado el **error de propagación**, es

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x).$$

En consecuencia, si el error dx es pequeño, que es lo esperado, el error Δy puede ser aproximado por la diferencial $dy = f'(x)dx$. Esto es

$$\boxed{\textbf{Error de y} = \Delta y \approx dy = f'(x)\, dx}$$

No es igual cometer un error de 1 cm. al medir un metro que cometer el mismo error al medir 10 metros. Para distinguir estas situaciones se define el error relativo y el error porcentual.

DEFINICION. Si Δy es el error de y, entonces

1. El **error relativo de y** es el cociente $\dfrac{\Delta y}{y} \approx \dfrac{dy}{y}$

2. El **error porcentual** de y es $100\dfrac{\Delta y}{y} \approx 100\dfrac{dy}{y}$

En general, el valor exacto del error cometido no es conocido, ya que de serlo, sería muy fácil corregirlo. Lo común es que se conozca un margen del error; es decir, un número $\varepsilon > 0$ tal que

$$|\,dx\,| \leq \varepsilon$$

EJEMPLO 5. Se ha encontrado un tumor en forma esférica en el cuerpo de cierta persona. Se calculó que el radio del tumor es de 2 cm. con un margen de error de 0,05 cm.

a. Estimar el margen de error al calcular el volumen del tumor.

b. Estimar el margen de error relativo.

c. Estimar el margen de error porcentual.

Solución

a. El volumen de una esfera de radio r está dado por

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \text{y, por tanto,} \qquad dV = 4\pi r^2 dr$$

El margen de error al medir el radio es 0,05 cm. Luego,

$$|\,dr\,| \leq 0{,}05 \quad \text{y} \quad |\,\Delta V\,| \approx |\,dV\,| = \left|\,4\pi r^2 dr\,\right| \leq 4\pi\,(2)^2(0{,}05) \approx 2{,}51 \text{ cm}^3$$

Esto es, una estimación del margen de error al calcular el volumen con los datos dados es $2{,}51 \text{ cm}^3$.

b. $$\left|\frac{\Delta V}{V}\right| \approx \left|\frac{dV}{V}\right| = \left|\frac{4\pi r^2 dr}{(4/3)\pi r^3}\right| = \frac{3\,|\,dr\,|}{r} \leq 3\,\frac{0{,}05}{2} = 0{,}075$$

c. $$\left|\,100\frac{\Delta V}{V}\,\right| \approx \left|\,100\frac{dV}{V}\,\right| \leq 100(0{,}075) = 7{,}5\%$$

TEOREMA 4.7 Si u y v son funciones diferenciables de x y c es una constante, entonces

1. $dc = 0$ **2.** $d(\,cu\,) = c\,du$

3. $d(u \pm v) = du \pm dv$ **4.** $d(\,uv\,) = u\,dv + v\,du$

5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$ **6.** $du^n = nu^{n-1}du$

Demostración

Cada una de estas igualdades viene de las correspondientes fórmulas de derivación. Aquí probaremos (4) y (5), dejando las otras como ejercicio para el lector.

4. Sabemos por definición que:

$$du = \frac{du}{dx}dx \qquad \text{y} \qquad dv = \frac{dv}{dx}dx$$

Por otro lado, por la regla de la derivada de un producto, sabemos que:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Luego,

$$d(uv) = \left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right)dx = u\frac{dv}{dx}dx + v\frac{du}{dx}dx = u\,dv + v\,du$$

5. Por regla de la derivada de un cociente sabemos que:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

Luego,

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}dx = \frac{v\dfrac{du}{dx}dx - u\dfrac{dv}{dx}dx}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

EJEMPLO 6. Hallar dy si $y = \dfrac{e^{2x}}{x^2+1}$

Solución

$$dy = \frac{(x^2+1)d(e^{2x}) - e^{2x}d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} \qquad (\text{por } 5)$$

$$= \frac{(x^2+1)(2e^{2x}dx) - e^{2x}(2xdx)}{(x^2+1)^2} = \frac{2e^{2x}(x^2-x+1)}{(x^2+1)^2}dx$$

PROBLEMAS RESUELTOS 4.7

PROBLEMA 1. Hallar dy si $y^3 + 3xy + x^3 = 4$

Solución

Aplicando las propiedades de la diferencial enunciadas en el teorema 4.7 tenemos:

$$d(y^3) + d(3xy) + d(x^2) = d(4) \Rightarrow 3y^2dy + 3x\,dy + 3y\,dx + 3x^2dx = 0 \Rightarrow$$

$$3(y^2 + x)dy = -3(x^2 + y)dx \Rightarrow dy = -\frac{x^2+y}{y^2+x}dx$$

PROBLEMA 2. Sea A el área de un cuadrado cuyo lado mide x. Esto es, $A = x^2$

a. Hallar ΔA, dA y $\Delta A - dA$

b. Mostrar gráficamente a A, ΔA, dA y $\Delta A - dA$

Solución

a. $\Delta A = (x + dx)^2 - x^2 = 2x\,dx + (dx)^2$

$dA = 2x\,dx$, $\Delta A - dA = (dx)^2$

b. Dibujemos los cuadrados de lados x y $(x + dx)$.
Las áreas de los rectángulos formados son:

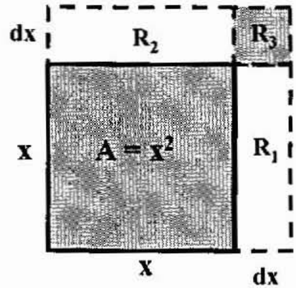
$R_1 = x\,dx$, $R_2 = x\,dx$ y $R_3 = (dx)^2$

Luego,

$\Delta A = 2x\,dx + (dx)^2 = R_1 + R_2 + R_3$

$dA = 2x\,dx = x\,dx + x\,dx = R_1 + R_2$

$\Delta A - dA = R_3$



PROBLEMA 3. Aproximar el valor de $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} + 0{,}08\right)$ mediante:

a. Aproximación lineal **b.** Aproximación con la diferencial.

Solución

Sea $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$. Se tiene que:

$f(\pi/4) = \operatorname{sen}^2(\pi/4) = (\sqrt{2}/2)^2 = 1/2$

$f'(x) = 2\operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x \Rightarrow f'(\pi/4) = \operatorname{sen}(2\pi/4) = \operatorname{sen}(\pi/2) = 1$

a. Sabemos que: $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$. Tomando $a = \frac{\pi}{4}$ se tiene:

$$f(x) \approx f(\pi/4) + f'(\pi/4)(x - \pi/4) = \frac{1}{2} + 1(x - \pi/4)$$

Luego, la aproximación lineal de $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ en $a = \frac{\pi}{4}$ es:

$$\operatorname{sen}^2 x \approx x + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

Ahora, para $x = \frac{\pi}{4} + 0.08$, se tiene:

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} + 0{,}08\right) \approx \left(\frac{\pi}{4} + 0{,}08\right) + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + 0{,}08 = 0{,}508$$

b. Sabemos que: $f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)dx$.

Luego, para $x = \dfrac{\pi}{4}$ y $dx = \Delta x = 0{,}08$ se tiene:

$$f(\pi/4 + \Delta x) \approx f(\pi/4) + f'(\pi/4)\,dx = \frac{1}{2} + 1(0{,}08) \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} + 0{,}08\right) \approx \frac{1}{2} + 1(0{,}08) = 0{,}508$$

PROBLEMA 4. Se quiere calcular el volumen de un cubo a partir de su arista en tal forma que el margen de error sea de 6 %. Estimar el margen de error porcentual con que debe medirse la arista.

Solución

Si V es volumen del cubo y x es la arista, entonces

$$V = x^3, \qquad dV = 3x^2\,dx \qquad \text{y} \qquad \frac{dV}{V} = \frac{3x^2dx}{x^3} = 3\frac{dx}{x}$$

Luego,

$$\left|100\frac{dV}{V}\right| \leq 6 \Rightarrow \left|100\left(3\frac{dx}{x}\right)\right| \leq 6 \Rightarrow \left|100\frac{dx}{x}\right| \leq 2$$

Por tanto, el margen de error porcentual de la arista debe ser de 2 %

PROBLEMA 5. El periodo de un péndulo es el tiempo que demora para dar una oscilación completa y este viene dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

donde L es la longitud del péndulo, g es la aceleración de la gravedad y T se mide en segundos. El péndulo de un reloj, debido al calor, se ha dilatado y su longitud ha aumentado 0, 4 %.

a. Calcular el porcentaje aproximado del cambio del periodo.

b. Calcular el error aproximado del reloj en un día.

Solución

a. Nos dicen que: $100\dfrac{dL}{L} = 0{,}4$. Además:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{L} \Rightarrow dT = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\left(\frac{dL}{2\sqrt{L}}\right) = \frac{\pi dL}{\sqrt{g}\sqrt{L}}$$

Luego,

$$100\frac{dT}{T} = 100\frac{\pi dL/\sqrt{g}\sqrt{L}}{2\pi\sqrt{L}/\sqrt{g}} = 100\frac{dL}{2L} = \frac{1}{2}\left(100\ \frac{dL}{L}\right) = \frac{1}{2}(0{,}4) = 0{,}2\ \%$$

b. En cada segundo, el reloj tiene un error aproximado del 0,2 %, o sea, de 0,002 segundos. Luego, en un día, el error aproximado es de:

$$24(60(60)(0{,}002) = 172{,}8 \text{ segundos} = 2{,}88 \text{ minutos}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 4.7

En los problemas del 1 al 3 hallar: **a.** Δy, **b.** dy **c.** $\Delta y - dy$

1. $y = x^2 - 1$ **2.** $y = e^x$ **3.** $y = \ln x$

En los problemas del 4 y 5 calcular: **a.** Δy **b.** dy **c.** $\Delta y - dy$, ***para los valores*** de x ***y*** dx ***dados.***

4. $y = x^2 - 4x,\quad x = -1,\quad dx = 0{,}03$ **5.** $y = 10^x,\quad x = 1,\quad dx = -0{,}01$

En los problemas del 6 al 9 se proporcionan aproximaciones lineales de la funciones dadas en $a = 0$. Verificar que estas aproximaciones son correctas.

6. $\sqrt{x+3} \approx \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}x$ **7.** $\operatorname{sen} x \approx x$

8. $\tan x \approx x$ **9.** $e^x \approx 1 + x$

En los problemas del 10 al 15 hallar dy

10. $y = e^{-3x^2}$ **11.** $y = \sqrt{1-x^2}$ **12.** $y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$

13. $x^2 + y^2 = 25$ **14.** $x^2 + 2\sqrt{xy} - y^2 = 1$ **15.** $y = \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{a}{x}}$

16. Probar que para valores pequeños de $|\Delta x|$ se cumple que

$$\sqrt[n]{x+\Delta x} \approx \sqrt[n]{x} + \frac{\Delta x}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

En los problemas del 16 al 21 hallar un valor aproximado de la expresión indicada.

17. $\sqrt{80}$ **18.** $\sqrt[4]{82}$ **19.** $\sqrt[3]{218}$

20. $\sqrt{2 + \sqrt[3]{8{,}2}}$ **21.** $\tan^{-1}(e^{0{,}08})$ **22.** $\ln 1{,}07$

23. Aproximar el valor de $\cos^4(\pi/4 + 0{,}01)$

24. Aproximar el valor de sen (60° 1′). Sugerencia: $60^\circ\, 1' = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{1}{60}\left(\dfrac{\pi}{180}\right)$

25. Un cubo de metal tiene 12 cm. de arista. La arista aumenta en 0,2 cm.
   a. Aproximar con la diferencial el incremento del volumen.
   b. Hallar el valor exacto del incremento.
   c. Aproximar con la diferencial el incremento del área total.
   d. Hallar el incremento exacto del área total.

26. Se tiene un tubo de hierro de 8 m. de largo, 6 cm. de radio y 0,4 cm. de espesor. Usando la diferencial aproximar el volumen de hierro del tubo. El volumen de un cilindro circular recto es $V = \pi r^2 h$, donde r es el radio y h la altura.

27. Se quiere calcular el área A de una esfera a partir del radio r mediante la fórmula $A = 4\pi r^2$ y en tal forma que el margen de error sea de 5 %. Estimar el margen de error porcentual con que debe medirse el radio.

28. Al medir el radio de una esfera se obtiene 4m. Esta medida es segura hasta 0,01 m.
   a. Estimar el margen de error al calcular el volumen de la esfera.
   b. Estimar el margen de error porcentual.

29. Al medir una circunferencia mayor de una esfera se obtiene 72 cm. con un margen de error de 0,5 cm.
   a. Estimar el margen de error al calcular el área de la esfera. $A = 4\pi r^2$
   b. Estimar el margen de error relativo al calcular el área.
   c. Estimar el margen de error al calcular el volumen de la esfera. $V = (4/3)\pi r^3$
   d. Estimar el margen de error relativo al calcular el volumen.
   Sugerencia: $C = 2\pi r$ y $dC = 2\pi dr$

30. Un cateto de un triángulo rectángulo mide exactamente 30 cm. Al medir el ángulo opuesto a este cateto se obtiene 60°, con un margen de error de 0,5 °.
   a. Estimar el margen de error al calcular la hipotenusa.
   b. Estimar el margen de error porcentual al calcular la hipotenusa.

31. Se estima que el próximo mes, se venderán 8.000 unidades de cierto producto. Esta estimación tiene un margen de error de 3%. La función ganancia es

$$G(x) = 5x - 0{,}0002\,x^2 \text{ dólares,}$$

donde x es el número de unidades vendidas por mes.

   a. Calcular la ganancia que dejarán los 8.000 artículos
   b. Estimar el margen de error de la ganancia con el cálculo anterior.
   c. Estimar el margen de error relativo.
   d. Estimar el margen de error porcentual.

BREVE HISTORIA DE LA FAMILIA BERNOULLI

La familia Bernoulli es caso extraordinario y único en la Historia de la Matemática. Ella aportó a la ciencia alrededor de una docena de brillantes matemáticos de primera línea, a lo largo de tres generaciones. La disnatía se levantó sobre dos columnas, configuradas por los hermanos ***Jacob*** *y* ***Johann****, quienes fueron los más distinguidos seguidores de Ligsniz en la línea de Cálculo. Son hijos de Nicolaus Bernoulli, un comerciante de Basilea, Suiza.*

Jacob *tuvo la cátedra de Matemáticas y Física en la Universidad de Basilea, desde 1.687 hasta su muerte.* ***Johann*** *aprendió Matemáticas guiado por Jacob, quien era 12 años mayor. En 1.695, a Johann le ofrecieron y aceptó la cátedra de Matemáticas en la universidad de Groningen (Holanda), donde estuvo hasta el año 1.705. Regresó a Basilea y ocupó la cátedra que quedó vacante a la muerte de Jacob. Su hijos* ***Nicolás*** *y* ***Daniel*** *fueron amigos de Leonardo* ***Euler****, con quien, cuando jóvenes, recibían clases de matemáticas de Johann.*

El apellido Bernoulli aparece, con frecuencia, ligado a muchos resultados claves de las Matemáticas. Así, en el estudio de las curvas encontramos la ***Lemniscata de Bernoulli;*** *en las ecuaciones diferenciales, la* ***ecuación de Bernoulli;*** *en la teoría de series,* ***Los números de Bernoulli,*** *etc. Estos y otros resultados no son contribuciones de un solo hombre, sino de varios miembros de la familia Bernoulli.*

ARBOL GENEALOGICO (Matemático) DE LA FAMILIA BERNOULLI

Nicolaus Sinior
(1.623–1.708)

Jacob I (1.654–1.705) — **Nicolaus I** (1.623–1.708) — **Johann I** (1.654–1.705)

Nicolaus II (1.687–1.759) — **Nicolaus III** (1.695–1.726) — **Daniel I** (1.700–1.782) — **Johann II** (1.710–1.790)

Johann III (1.746–1.807) — **Daniel II** (1.751–1.834) — **Jacob II** (1.759–1.789)

Jacob I
(1.654–1.705)

Johann I
(1.667–1.748)

Daniel I
(1.700-1.782)

Johann III
(1.746-1.807)

5

APLICACIONES DE LA DERIVADA

GUILLAUME F. A. M. DE L'HÔPITAL
(1.661–1.704)

5.1 MAXIMOS Y MINIMOS

5.2 TEOREMA DEL VALOR MEDIO

5.3 MONOTONIA, CONCAVIDAD Y CRITERIOS PARA EXTREMOS LOCALES

5.4 FORMAS INDETERMINADAS. REGLA DE L'HÔPITAL

5.5 TRAZADO CUIDADOSO DEL GRAFICO DE UNA FUNCION

5.6 PROBLEMAS DE OPTIMIZACION

5.7 METODO DE NEWTON–RAPHSON

G. F. A.

MARQUES DE L'HÔPITAL

(1.661 – 1.7O4)

Guillaume François Aantoiene Marqués de L'Hôpital *nació en París el año 1.661, dentro de una familia noble y acomodada. Cuando joven pretendió hacer una carrera militar. Debido a su corta visión tuvo que abandonar su pretensión, para dedicarse a la Matemática. Fue discípulo y amigo de un famoso matemático de aquella época, el suizo Johann Bernoulli (1.667–1.748). En 1.692 publicó el primer libro de cálculo de la historia:* ***"Analyse des Infiniment petit"*** *(Análisis de los infinitamente pequeños). En este texto aparece un método para calcular el límite de un cociente donde ambos límites, numerador y denominador, son nulos. Este método lo ha hecho famoso gracias a que le dieron el nombre de "Regla de L'Hôpital". J. Bernoulli sostuvo que él fue el creador de esta famosa regla. La veracidad de esta afirmación recién fue comprobada en 1.922, cuando en la biblioteca de Berna se encontró el texto del curso de Cálculo que dictaba Bernoulli, en el cual aparece la regla.*

ACONTECIMIENTOS IMPORTANTES

Durante la vida de L'Hôpital, en América y en el mundo hispano sucedieron los siguientes hechos notables: La poetisa mejicana Sor Inés de la Cruz (1.651-1.695) publica sus obras poéticas, obras que fueron fuertemente influenciadas por el Gongorismo. En 1.664, los ingleses, bajo el mando del duque de York, toman Nueva Amsterdam y le cambian el nombre a Nueva York. En 1.671 el pirata inglés Henry Morgan saquea e incendia la ciudad de Panamá. En 1.682 el cuáquero Willian Penn funda Pensilvania. Ese mismo año, el francés Robert Cavalier de la Salle llega a la desembocadura del río Misisipi, tomó posesión de la región y la nombró Luisiana, en honor a su rey, Luis XIV.

SECCION 5.1

MAXIMOS Y MINIMOS

Las distintas actividades a que se dedica el hombre le plantean continuamente problemas de optimización. El comerciante busca maximizar sus ganancias; el industrial busca minimizar sus costos de producción, un conductor cualquiera, casi siempre, busca la distancia o el tiempo mínimo de recorrido, etc. Algunos de estos problemas se reducen a encontrar el valor máximo o el valor mínimo de una función. Tales problemas son llamados **problemas de optimización.**

EXTREMOS ABSOLUTOS

DEFINICION. Sea **c** un punto del dominio de la función f. Diremos que:

a. **f(c)** es el **valor máximo de f,** el máximo absoluto de f o, simplemente, el máximo de f, si

$$\mathbf{f(c) \geq f(x), \quad \forall x \in Dom(f).}$$

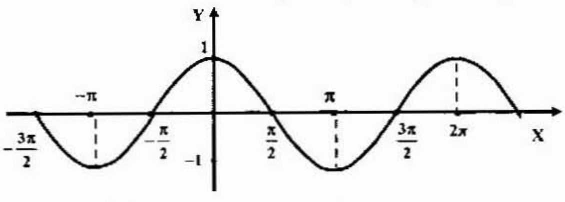
b. **f(c)** es el **valor mínimo de f,** el mínimo absoluto de f o, simplemente, el mínimo de f, si

$$\mathbf{f(c) \leq f(x), \quad \forall x \in Dom(f).}$$

c. **f(c)** es un **valor extremo de f** si f(c) es un máximo o un mínimo.

EJEMPLO 1.

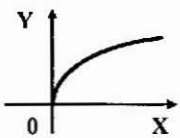
a. El máximo $f(x) = \cos x$ es 1 y el mínimo es -1. Estos valores son alcanzados infinitas veces. En efecto: $\cos 2n\pi = 1$ y $\cos (2n + 1)\pi = -1$ para todo entero n.



b. El mínimo de $g(x) = \sqrt{x}$ que es $g(0) = \sqrt{0} = 0$; pero g no tiene máximo.

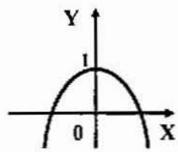
c. El máximo de $h(x) = 1 - x^2$ es $h(0) = 1$; pero h no tiene mínimo.

d. La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ no tiene máximo ni mínimo.



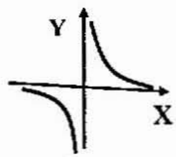
$g(x) = \sqrt{x}$

Max = no tiene, Min = 0



$h(x) = 1 - x^2$

Max = 1, Min = no tiene



$f(x) = \frac{1}{x}$

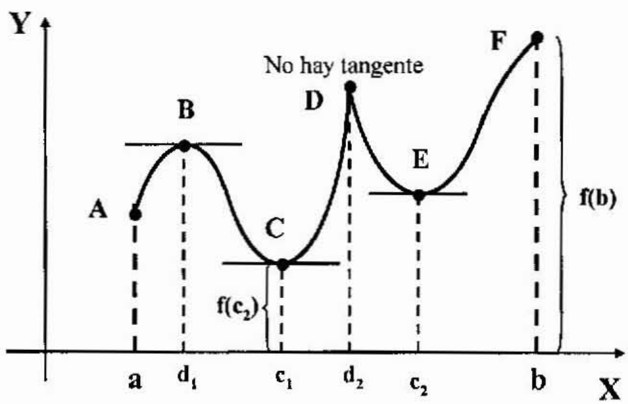
Max = no tiene, Min = no tiene

Los ejemplos anteriores nos muestran que algunas funciones tienen los dos valores extremos, otras sólo uno y otras, ninguno. Necesitamos algunos criterios que nos aseguren la existencia de extremos. Aquí tenemos uno de los más simples, conocido con el nombre de teorema del valor extremo. La demostración de éste no está al alcance de nuestro texto, por lo cual la omitimos.

TEOREMA 5.1 **Teorema del valor extremo.**

Si f es una función **continua** en un intervalo **cerrado [a, b]**, entonces f tiene máximo y mínimo en [a, b]; es decir existen dos puntos c y d en el intervalo [a, b] tales que f(c) es el valor máximo y f(d) es el valor mínimo de f.

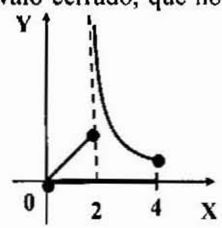
EJEMPLO 2. El siguiente gráfico es el de una función continua f en el intervalo cerrado [a, b]. Determinar su máximo y su mínimo.



Solución

El punto más alto del gráfico es el punto F y el más bajo es el punto C. Luego, el máximo de f es f(b) y el mínimo es $f(c_1)$.

EJEMPLO 3 . Hallar una función, con dominio un intervalo cerrado, que no tenga máximo.



Solución

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{1}{x-2}, & \text{si } 2 < x \le 4 \end{cases}$$

Dom(f) = [0, 4] f no tiene máximo. Observar que f no cumple la hipótesis del teorema del valor extremo, ya f es discontinua en 2.

EXTREMOS RELATIVOS

En gráfico del ejemplo 2, los puntos B y D son tales que, aunque no son los más altos del gráfico, son los más altos comparados con los puntos vecinos. Análogamente, los puntos C y E son los más bajos de su vecindario. Esta observación nos lleva al concepto de extremos locales o extremos relativos.

DEFINICION. Sea **c** un punto del dominio de la función f. Diremos que:

a. **f(c)** es un **máximo local** o un **máximo relativo de f,** si existe un intervalo abierto I que contiene a c y se cumple que

$$f(c) \geq f(x), \quad \forall x \in I.$$

b. **f(c)** es un **mínimo local** o un **mínimo relativo de f,** si existe un intervalo abierto I que contiene a c y se cumple que:

$$f(c) \leq f(x), \quad \forall x \in I.$$

c. **f(c)** es un **extremo local** o un **extremo relativo de f** si f(c) es un máximo local o un mínimo local.

Observar que, de acuerdo a esta definición, c es un punto interior del intervalo [a, b], o sea, si $a < c < b$. Observar también que si f(c) es un extremo absoluto en un intervalo [a, b] y si $a < c < b$. entonces f(c) también es un extremo local. Esto no sucede si f(a) o f(b) es un extremo absoluto.

Observando los puntos B, C, D, y E la gráfica del ejemplo 2, que corresponden a extremos locales, se puede conjeturar que las rectas tangentes en estos puntos son horizontales (pendiente nula) o que no tienen rectas tangentes (la derivada no existe). A continuación formalizamos y demostramos esta conjetura.

DEFINICION. Un **número crítico de una función f** es un número **c** en el dominio de f tal que $\mathbf{f'(c) = 0}$ o $\mathbf{f'(c)}$ no existe.
En este caso, el punto **(c, f(c)) es un punto crítico.**

TEOREMA 5. 2 **Teorema de Fermat**
Si f tiene un extremo local en c, entonces c es un número crítico.

Demostración

Si $f'(c)$ no existe, el teorema se cumple. Supongamos que $f'(c)$ existe. Debemos probar que $f'(c) = 0$

Caso 1. f(c) es máximo local

Como existe $f'(c)$, debemos tener que:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \qquad (1)$$

Por ser f(c) un máximo local, existe un intervalo abierto I que contiene a c tal que para los c + h que están en el intervalo I, se cumple:

$$f(c+h) \leq f(c) \ \text{ y , por tanto,} \quad f(c+h) - f(c) \leq 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Luego, para h > 0 se tiene:

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0 \ \Rightarrow \ \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$$

Ahora, para h < 0, tomando en cuenta (2), se tiene

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0 \ \Rightarrow \ \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$$

De (1), (3) y (4) obtenemos que $f'(c) = 0$.

Caso 2. f(c) es mínimo local.

Sea $g(x) = -f(x)$. Como f(c) es un valor mínimo de f, entonces $g(c) = -f(c)$ es máximo de g. Por el caso 1, $g'(c) = 0$. Por tanto, $f'(c) = -g'(c) = -0 = 0$.

OBSERVACION. La proposición recíproca al teorema de Teorema de Fermat no es cierta. En efecto, los siguientes dos ejemplos son contraejemplos.

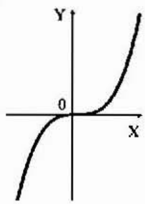
EJEMPLO 4. Sea la función: $f(x) = x^3$ .Demostrar que 0 es número crítico. Observar que $f(0) = 0$ no es un extremo local.

Solución

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$$

Luego 0 es número crítico de f.

Mirando el gráfico se ve que f no tiene un extremo local en 0.

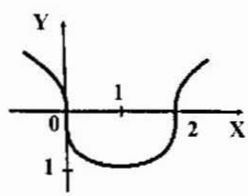


EJEMPLO 5. Hallar los números críticos de la función

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x} \ .$$

Solución

Hallemos la derivada de f:



$$f(x) = 3\sqrt[3]{x^2-2x} \Rightarrow f(x) = 3(x^2-2x)^{1/3} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2-2x)^{-2/3}(2x-2) = \frac{2}{3}\,\frac{x-1}{(x(x-2))^{2/3}}$$

Ahora,

$$f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x - 1 = 0 \ \Rightarrow \ x = 1$$

Además, vemos que $f'(x)$ no está definida en $x = 0$ ni en $x = 2$. Luego, los números críticos de f son 1, 0 y 2.

Observar en el gráfico que $f(1) = 1$ es un mínimo local (y absoluto). Sin embargo, ni $f(0) = 0$ ni $f(2) = 0$ son extremos locales.

ESTRATEGIA PARA HALLAR LOS VALORES EXTREMOS EN INTERVALOS CERRADOS FINITOS

De los dos teoremas anteriores obtenemos la siguiente estrategia para hallar los valores extremos de una función continua f en un **intervalo cerrado [a, b].**

Paso 1. Hallar los puntos críticos de f en el intervalo [a, b].

Paso 2. Evaluar f en a, en b y en los puntos críticos.

El mayor de los valores del paso 2 es el máximo; y el menor, es el mínimo.

EJEMPLO 6. Hallar los extremos absolutos de la siguiente función en el intervalo [1, 9]

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x + 3$$

Solución

Paso 1. Hallar los puntos críticos de f en el intervalo [1, 9]:

$$f'(x) = x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x-6)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ó } x = 6$$

Por tanto, los puntos críticos de f son 2 y 6 y ambos están en [1, 9]

Paso 2. Evaluamos f en la frontera de [1, 9] y en los puntos críticos.

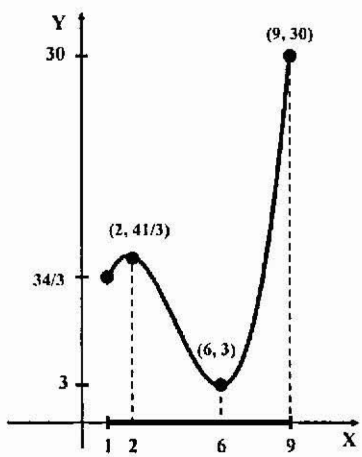
$$f(1) = \frac{1^3}{3} - 4(1)^2 + 12(1) + 3 = \frac{34}{3},$$

$$f(9) = \frac{9^3}{3} - 4(9)^2 + 12(9) + 3 = 30$$

$$f(2) = \frac{2^3}{3} - 4(2)^2 + 12(2) + 3 = \frac{41}{3},$$

$$f(6) = \frac{6^3}{3} - 4(6)^2 + 12(6) + 3 = 3$$

Luego, el máximo es $f(9) = 30$ y el mínimo, $f(6) = 3$.



EJEMPLO 7. Hallar los extremos de la siguiente función en el intervalo $[0, 4]$

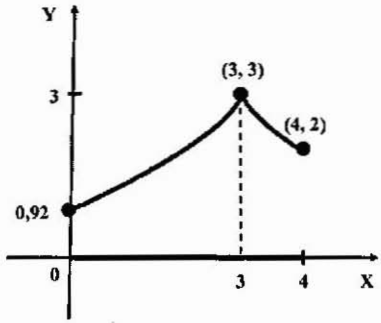
$$g(x) = 3 - \sqrt[3]{(x-3)^2}$$

Solución

Paso 1. Hallemos los puntos críticos de g en el intervalo $[0, 4]$:

$$g(x) = 3 - (x-3)^{2/3} \Rightarrow g'(x) = -\frac{2}{3}(x-3)^{-1/3} \Rightarrow$$

$$g'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x-3}}$$



g' no está definida en $x = 3$ y no se anula en ningún punto. Luego, g tiene un único punto crítico que es 3 y éste está en el intervalo $[0, 4]$.

Paso 2. Evaluamos g en la frontera de $[0, 4]$ y en los puntos críticos:

$$g(0) = 3 - \sqrt[3]{(0-3)^2} = 3 - \sqrt[3]{9} \approx 0{,}9199$$

$$g(4) = 3 - \sqrt[3]{(4-3)^2} = 3 - 1 = 2$$

$$g(3) = 3 - \sqrt[3]{(3-3)^2} = 3$$

Luego, el máximo es $g(3) = 3$ y el mínimo, $g(0) = 3 - \sqrt[3]{9} \approx 0{,}9199$.

PROBLEMAS PROPUESTOS 5.1

En los problemas del 1 al 8 graficar la función y, solamente observando el gráfico, determinar el máximo y mínimo absolutos. Para graficar, usar las técnicas de traslación y reflexión, explicadas en la sección 1.1.

1. $f(x) = 4 - x^2$ **2.** $g(x) = |2 - x| - 1$ **3.** $h(x) = |4 - x^2|$

4. $f(x) = -x^3 - 2$ **5.** $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$, en $(1, 3)$ **6.** $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$, en $[4/3, 3]$

7. $h(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{si } x < 1 \\ \ln x, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, en $[-4, 4]$ **8.** $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } x < 1 \\ 4 - x^2, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, en $[-1, 2]$

En los problemas del 9 al 14 hallar los números críticos de la función dada

9. $f(x) = x^2(3x - 8)^{2/3}$ 10. $g(x) = x + \text{sen}\, x$ 11. $h(x) = |x^3 - 8|$

12. $f(x) = [\![x]\!]$ 13. $h(x) = xe^{-x}$ 14. $g(x) = \text{sen}^2 x + \cos x$, en $[-1, 2\pi)$

En los problemas del 15 al 22 determinar el máximo y el mínimo absolutos de la función en el intervalo cerrado indicado.

15. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}$ en $[1, 3]$ 16. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$ en $[-2, 3]$

17. $f(x) = \tan x - x$ en $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 18. $f(x) = 1 - (x - 3)^{2/3}$ en $[-5, 4]$

19. $f(x) = \text{sen}\, x + \cos x$ en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 20. $f(x) = \cos^2 x + \text{sen}\, x$ en $[0, \pi]$

21. $g(x) = e^{-x}\text{sen}\, x$ en $[0, 2\pi]$ 22. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$ en $[1, e]$

23. Probar que la función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0,$$

tiene exactamente un número crítico en $\mathbb{R}$.

24. Probar que la función cúbica

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0,$$

puede tener dos, uno o ningún número crítico en $\mathbb{R}$. Sugerencia: ¿Cuántas raíces puede tener una ecuación de segundo grado?

25. Probar que un polinomio de grado n puede tener a lo más n – 1 números críticos en $\mathbb{R}$.

SECCION 5.2
TEORMA DEL VALOR MEDIO

DEFINICION. Sea f una función. Diremos que:

a. f es diferenciable en un **intervalo abierto (a, b)** si **f** es diferenciable en todo punto de (a, b). Esto es,

$$\exists\, f'(x),\ \forall\, x \in (a, b)$$

b. f es diferenciable en un intervalo cerrado [a, b] si f es diferenciable en el intervalo abierto **(a, b)** y tiene derivada por la derecha en **a** y por la izquierda en **b.**

Por supuesto, también se tiene diferenciabilidad en un intervalo semiabierto, la cual se define de manera obvia.

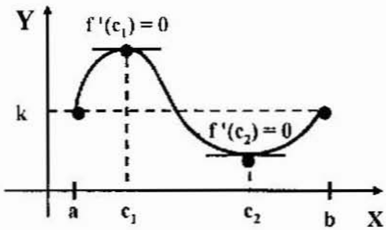
Es fácil ver, que si f es diferenciable en un intervalo I, f es continua en I.

TEOREMA 5.3 **Teorema de Rolle**.

Si f es una función que cumple:

1. f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
2. f es diferenciable en el intervalo abierto (a, b).
3. $f(a) = f(b)$

Entonces $\exists$ $\mathbf{c \in (a, b)}$ tal que $\mathbf{f'(c) = 0}$.



Demostración

Sea $f(a) = f(b) = k$

Caso 1. f es la función constante $f(x) = f(a) = f(b) = k$, $\forall x \in [a, b]$.

En este caso, tenemos que $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$. Por tanto, cualquier número $c \in (a, b)$ cumple con $f'(c) = 0$.

Caso 2. f no es constante. Luego, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) \neq k$.

Como f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, por el teorema del valor extremo, f tiene máximo y mínimo en $[a, b]$.

Si $f(x_o) > k$ y $f(c_1)$ es el máximo de f en $[a, b]$, entonces $f'(c_1) = 0$ y $f(c) \geq f(x_o) > 0$. Luego, $c_1 \neq a$ y $c_1 \neq b$ y, por tanto, $c_1 \in (a, b)$.

Si $f(x_o) < 0$ y $f(c_2)$ es el mínimo de f en $[a, b]$, entonces $f'(c_2) = 0$ y $f(c_2) \leq f(x_o) < 0$. Luego, $c_2 \neq a$ y $c_2 \neq b$ y, por tanto, $c_2 \in (a, b)$.

Michel Rolle (1.652–1.719). *Matemático francés. Inicialmente, trabajó en París en un modesto empleo de escribano de notarías. En 1.699 fue electo como miembro de la Real Academia de Ciencias. Hizo contribuciones al Álgebra y a la Geometría. Pero es más conocido por el teorema que ahora lleva su nombre, el cual apareció en su libro* ***Traité d'algèbra*** *publicado en 1.690.*

TEOREMA 5.4 **Teorema del Valor Medio (de Lagrange)**

Sea f una función tal que:

1. f es continua en el intervalo cerrado [a, b].

2. f es diferenciable en el intervalo abierto (a, b)

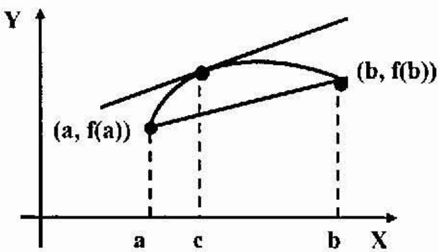
Entonces $\exists$ **c** $\in$ **(a, b)** tal que:

$$\mathbf{f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)} \quad \text{o bien} \quad \mathbf{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

Geométricamente, este teorema nos dice lo siguiente:

La recta secante que pasa por los puntos $P_1 = (a, f(a))$ y $P_2 = (b, f(b))$ tiene por pendiente $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ y la pendiente de la recta tangente en el punto $(c, f(c))$ es $f'(c)$.

Luego, el teorema dice que, si el gráfico de una función continua tiene una tangente en cada punto entre a y b, entonces existe por lo menos un c entre a y b, tal que la recta tangente en el punto (c, f(c)) es paralela a la recta secante.



Demostración

La recta que pasa por $P_1 = (a, f(a))$ y $P_2 = (b, f(b))$ tiene por ecuación

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Introducimos la nueva función

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

que es la diferencia entre la función f y la recta anterior.

Veamos que g satisface las hipótesis del teorema de Rolle:

1. La función g es continua en [a, b], ya que g es la suma de dos funciones continuas en [a, b], que son f y el polinomio

$$p(x) = -f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

2. La función g es diferenciable en (a, b), ya que f y el polinomio p(x) también lo son. Además,

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \textbf{(1)}$$

3. $g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$

$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0$$

Las hipótesis del teorema de Rolle se han cumplido, luego, $\exists\ c \in (a, b)$ tal que

$$g'(c) = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

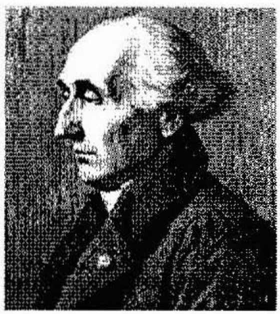
Si en (1) tomamos $x = c$, obtenemos

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(b)}{b - a} \qquad \textbf{(3)}$$

De (2) y (3) se tiene

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Joseph Louis Lagrange *(1.736–1.813) Nació en Turín (Italia), pero de ascendencia francesa. Es uno de los dos matemáticos más notables del siglo XVIII. El otro es Leonardo Euler. A los 19 años creo el* ***Cálculo de Variaciones.****. Sucedió a Euler en la dirección de la Academia de Ciencias de Berlín. En París fue nombrado profesor de las recién fundadas instituciones:* ***Escuela Normal*** *y de la* ***Escuela Politécnica****. Fue miembro de la comisión que creó el* ***Sistema Métrico Decimal****. En 1.778 publicó una de las más importantes de sus obras:* ***Mecánica Analítica****.*



EJEMPLO 1. Hallar todos los números c que satisfacen la conclusión del teorema del valor medio para la función $f(x) = 1 + x + x^2 - 2x^3$ en el intervalo $[-1, 1]$.

Solución

En primer lugar vemos que la función f, por ser un polinomio, es continua y diferenciable en todo **R** y, en particular, en el intervalo $[-1, 1]$.

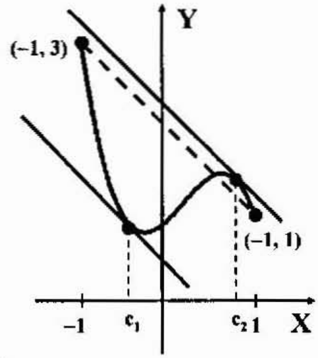
Nos piden encontrar los $c \in (-1, 1)$ tales que:

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} \qquad \textbf{(1)}$$

Pero,

$$f(-1) = 3, \quad f(1) = 1 \ \text{ y } \ f'(x) = 1 + 2x - 6x^2$$

Luego, reemplazando estos valores en (1):



$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} \Rightarrow 1 + 2c - 6c^2 = \frac{1-3}{2}$$

$$\Rightarrow 2 + 2c - 6c^2 = 0 \Rightarrow 3c^2 - c - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$c_1 = \frac{1 - \sqrt{13}}{6} \approx -0{,}434 \qquad c_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \approx 0{,}768$$

Vemos que ambas raíces están en el intervalo (−1, 1).

En términos de velocidades, el teorema del valor medio dice que la velocidad promedio, en algún instante, coincide con la velocidad instantánea. El siguiente ejemplo ilustra esta situación.

EJEMPLO 2. Dos casetas policiales A y B distan entre sí 147 Km. Un automóvil pasa por la caseta A a las 2 P. M. y por la caseta B a las 3:30 P. M. Un oficial de tránsito de la caseta B, que sabía Cálculo, le dijo al conductor: "Ciudadano, Ud. sabe que en esta carretera la máxima velocidad permitida es 90 Km/h y Ud. se excedió. Tengo que levantarle una infracción" Demuestre que el oficial tenía razón.

Solución

Sea s = f(t) la función de desplazamiento del conductor, donde el tiempo lo medimos en horas a partir de las 12 M. Suponemos que esta f es diferenciable. Sabemos que la derivada $f'(t)$ es la velocidad instantánea en el instante t.

La velocidad promedio del automóvil en el recorrido comprendido entre las dos casetas es:

$$\frac{f(3.5) - f(2)}{3.5 - 2} = \frac{147}{1.5} = 98 \text{ Km/h}$$

Pero, por el teorema del valor medio, existe un instante t_0, entre las 2 P. M. y las 3:30 P. M. tal que:

$$\frac{f(3.5) - f(2)}{3.5 - 2} = f'(t_0) \Rightarrow f'(t_0) = 98 \text{ Km/h}$$

Luego, en el instante t_0 el conductor excedió la velocidad máxima permitida.

Una aplicación importante, del teorema del valor medio es el siguiente resultado, en el cual hablamos de un intervalo I. Este intervalo puede ser de cualquier tipo: abierto, cerrado, semiabierto, infinito, etc.

TEOREMA 5.5 **Teorema de la Constante.**

Sea f una función continua en un intervalo I.

$$f'(x) = 0,\ \forall\, x \in I \ \Leftrightarrow\ f(x) = C,\ \forall\, x \in I,$$

donde C es una constante.

Demostración

Una parte del teorema ya no es novedad. En efecto, ya sabemos que si f es una función constante, entonces su derivada f' es la función constante 0. Por tanto, aboquémonos a probar la parte recíproca.

Sean x_1 y x_2 dos puntos cualesquiera del intervalo I tales que $x_1 < x_2$.

Por hipótesis $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$. En particular, $f'(x) = 0$ para todo x en $[x_1, x_2]$. Luego, f es diferenciable en $[x_1, x_2]$ y por el teorema 5.1, f también es continua en $[x_1, x_2]$. Se han satisfecho las hipótesis del teorema del valor medio, luego existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_1 - x_2)$$

Pero, $f'(c) = 0$. Luego, $f(x_2) - f(x_1) = 0 \ \Rightarrow\ f(x_2) = f(x_1)$

Como x_1 y x_2 son dos puntos cualesquiera de I, entonces f es constante en I.

EJEMPLO 4. Demuestre que $\operatorname{sen}^{-1}x + \cos^{-1}x = \dfrac{\pi}{2}$

Solución

Sea $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}x + \cos^{-1}x$. Se tiene:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Luego, por el teorema anterior, existe una constante C tal que $f(x) = C$.

Hallamos esta constante: Tomando $x = 0$ se tiene:

$$C = f(0) = \operatorname{sen}^{-1}0 + \cos^{-1}0 = \pi/2 + 0 = \pi/2$$

Luego, $\operatorname{sen}^{-1}x + \cos^{-1}x = \pi/2$

TEOREMA 5.6 **Teorema de la diferencia constante.**

Sean f y g dos funciones diferenciables en un intervalo I.

$$\mathbf{f'(x) = g'(x),\ \forall\, x \in I,\ \Rightarrow\ f(x) = g(x) + C,\ \forall\, x \in I,}$$

donde C es una constante.

Demostración

Sea $h(x) = f(x) - g(x)$.

La función h es diferenciable en I, ya que f y g lo son. Además,

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0,\ \forall\, x \in I.$$

Luego, por el teorema anterior, existe una constante C tal que

$$h(x) = C,\ \forall\, x \in I \Rightarrow f(x) - g(x) = C,\ \forall\, x \in I \Rightarrow f(x) = g(x) + C,\ \forall\, x \in I.$$

En la línea del teorema de Rolle y del teorema del valor medio contamos con el siguiente teorema, que generaliza los dos anteriores.

TEOREMA 5.7 **Teorema del valor medio de Cauchy.**

Sea f y g dos funciones tal que:

1. f y g son continuas en el intervalo cerrado [a, b].
2. f y g son diferenciables en el intervalo abierto (a, b)

Entonces $\exists\, \mathbf{c} \in \mathbf{(a, b)}$ tal que:

$$\mathbf{(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c)}$$

Si $g(a) \neq g(b)$, entonces la igualdad anterior puede escribirse así:

$$\mathbf{\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}}$$

Demostración

Ver el problema resuelto 9.

El teorema del valor medio es un caso particular del teorema de Cauchy. En efecto, si en este último teorema tomamos $g(x) = x$, tenemos que

$$g(b) - g(a) = b - a \qquad \text{y} \qquad g'(c) = 1$$

Estas igualdades reemplazadas en la igualdad anterior nos da la igualdad del teorema del valor medio.

EJEMPLO 3. Hallar un $c \in (0, 1)$ que satisface el teorema de Cauchy para las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ en el intervalo [0, 1].

Solución

Es evidente que f y g son continuas en [0, 1] y diferenciables en (0, 1). Ahora,

$$(f(2)-f(1))g'(c) = (g(2)-g(1))f'(c) \Rightarrow (2^2-1^2)(3c^2) = (2^3-1^3)(2c)$$

$$\Rightarrow 9c^2 = 14c \Rightarrow c(9c-14) = 0 \Rightarrow c = 0 \text{ ó } c = 14/9 \Rightarrow$$

$$c = 14/9 \qquad (0 \notin (0, 1))$$

PROBLEMAS RESUELTOS 5.2

PROBLEMA 1. Probar que la ecuación $x^3 + 3x - 2 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

Solución

Sea $f(x) = x^3 + 3x - 2$. Esta función, por ser un polinomio, es diferenciable (y, por tanto, continua) en todo $\mathbb{R}$. Además,

$$f(0) = -2 \quad \text{y} \quad f(1) = 2$$

Por el teorema del valor intermedio, existe un a en el intervalo [0, 1] tal que

$$f(a) = 0 \Rightarrow a^3 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow \text{a es una raíz de la ecuación } x^3 + 3x - 2 = 0$$

Ahora probamos que a es la única raíz. Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que b es otra raíz de la ecuación. Debemos tener que $f(b) = 0$.

Supongamos que $a < b$. La función f satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [a, b]. Luego, existe un c en (a, b) tal que:

$$f'(c) = 0 \Rightarrow 3c^2 + 3 = 0 \Rightarrow 3c^2 = -3 \Rightarrow c^2 = -1$$

Pero la última igualdad es imposible, ya que $c^2 > 0$. Esto demuestra que no existe tal b.

PROBLEMA 2. Usando el teorema de Rolle probar que un polinomio de grado 2

$$P(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

tiene a lo más dos raíces reales.

Solución

Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que P(x) tiene tres raíces distintas. Sean éstas x_1, x_2 y x_3. Es decir, $P(x_1) = 0$, $P(x_2) = 0$ y $P(x_3) = 0$.

El polinomio satisface las hipótesis del teorema de Rolle en cada uno de los intervalos $[x_1, x_2]$ y $[x_2, x_3]$. Por tanto,

$\exists\ c_1 \in (x_1, x_2)$ y $\exists\ c_2 \in (x_2, x_3)$ tales que $P'(c_1) = 0$ y $P'(c_2) = 0$.

Esto significa que el polinomio $P'(x) = 2ax + b$ tiene dos raíces. Pero esto es imposible, ya que $P'(x)$ es un polinomio de primer grado y tiene una única raíz, que es $x = \dfrac{-b}{2a}$.

PROBLEMA 3. Si $a > 0$, probar que el siguiente polinomio tiene, a lo más, una raíz real.

$$P(x) = x^{2n+1} + ax + b$$

Solución

Supongamos que $P(x)$ tiene 2 dos raíces reales. Sean estas, x_1 y x_2 y que $x_1 < x_2$.

Se tiene que $P(x_1) = 0$ y $P(x_1) = 0$. Por el teorema de Rolle, existe $c \in (x_1, x_2)$ tal $P'(c) = 0$. Pero,

$$P'(x) = (2n+1)x^{2n} + a \ \text{ y } \ P'(x) = 0, \Rightarrow \ x^{2n} = -\frac{a}{2(n+1)}$$. Esta ecuación,

por ser $a > 0$, no tiene raíces reales y por tanto, $P'(c) = 0$ es imposible. En consecuencia, $P(x) = x^{2n+1} + ax + b$ no puede tener dos raíces reales.

PROBLEMA 4. Si f es diferenciable, $f(2) = -3$ y $1 < f'(x) < 8$ si $2 < x < 7$,

probar que $2 < f(7) < 37$

Solución

Aplicando el teorema del valor medio a f en el intervalo [2, 7]: Existe $c \in (2, 7)$ tal que:

$$\frac{f(7) - f(2)}{7 - 2} = f'(c) \ \Rightarrow \ \frac{f(7) - (-3)}{5} = f'(c) \ \Rightarrow \ f(5) = -3 + 5f'(c) \qquad \textbf{(1)}$$

Pero, $1 < f'(c) < 8 \Rightarrow 5 < 5f'(c) < 40$ (multiplicando por 5)

$\Rightarrow 2 < -3 + 5f'(c) < 37$ (sumando -3)

$\Rightarrow 2 < f(7) < 37$ (de (1))

PROBLEMA 5. Usando el teorema del valor medio probar que

$$\textbf{sen}\ x \le x, \ \forall\ x \ge 0$$

Solución

Caso 1. $x = 0$

Para este caso, la desigualdad se cumple trivialmente: $0 = \text{sen}\ 0 \le 0$.

Caso 2. $x > 0$.

La función $f(x) = \text{sen } x - x$ es diferenciable en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto, es diferenciable en el intervalo $[0, x]$. Por el teorema del valor medio, existe un c en el intervalo $(0, x)$ tal que:

$$f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0) \qquad \textbf{(1)}$$

Pero,

$$f(x) = \text{sen } x - x, \quad f(0) = \text{sen } 0 - 0 = 0 \quad \text{y} \quad f'(c) = \cos c - 1$$

Además,

$$\cos c - 1 \leq 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Reemplazando los valores de $f(x)$, $f(0)$ y $f'(c)$ en (1) y considerando (2):

$$\text{sen } x - x - 0 = (\cos c - 1)x \leq 0x \Rightarrow \text{sen } x - x \leq 0 \Rightarrow \text{sen } x \leq x$$

PROBLEMA 6. Probar que:

a. $|\tan y - \tan x| \geq |y - x|$, $\forall x, \forall y$ en $(-\pi/2, \pi/2)$

b. $|\tan y + \tan x| \geq |y + x|$, $\forall x, \forall y$ en $(-\pi/2, \pi/2)$

Solución

a. Si $x = y$, la desigualdad se cumple trivialmente.

Supongamos que $x < y$. (Se procede en forma similar si $y < x$)

La función $f(\theta) = \tan \theta$ es diferenciable en $(-\pi/2, \pi/2)$. Luego, para x e y en este intervalo, por el teorema del valor medio, existe $c \in (x, y)$ tal que:

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \Rightarrow \tan y - \tan x = \sec^2 c\,(y - x) \Rightarrow$$

$$|\tan y - \tan x| = \left|\sec^2 c\right| |y - x| \geq |y - x|, \qquad (\sec \theta \geq 1)$$

b. Si x está en $(-\pi/2, \pi/2)$, $-x$ también lo está. Luego, por la parte a. reemplazando x por $-x$ y tomando en cuenta que función tangente es impar, se tiene:

$$|\tan y - \tan(-x)| \geq |y - (-x)| \Rightarrow |\tan y + \tan x| \geq |y + x|$$

PROBLEMA 7. Sean a y b números reales tales que $0 < a < b$. Probar que:

$$\frac{b-a}{b} \leq \ln \frac{b}{a} \leq \frac{b-a}{a}$$

Solución

Aplicando el teorema del valor medio a $f(x) = \ln x$ en $[a, b]$, tenemos:

$$\frac{\ln b - \ln a}{b-a} = \frac{1}{c}, \text{ donde } a < c < b \qquad \textbf{(1)}$$

Pero,

$$0 < a < c < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{a} \qquad \text{(de (1))}$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{b} < \ln b - \ln a < \frac{b-a}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

PROBLEMA 8. Probar que:

$$3\cos^{-1}x - \cos^{-1}(3x - 4x^3) = \pi, \text{ si } |x| \leq \frac{1}{2}$$

Solución

Derivamos la función: $f(x) = 3\cos^{-1}x - \cos^{-1}(3x - 4x^2)$:

$$f'(x) = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3-12x^2}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}} = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3(1-4x^2)}{\sqrt{1-9x^2+24x^4-16x^6}} \qquad \textbf{(1)}$$

Se verifica fácilmente que 1 y -1 son raíces de $1 - 9x^2 + 24x^4 - 16x^6$. Usando este resultado logramos la factorización:

$$1 - 9x^2 + 24x^4 - 16x^6 = -(x-1)(x+1)(1 - 8x^2 + 16x^4) = (1-x^2)(1-4x^2)^2$$

Luego, regresando a (1):

$$f'(x) = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3(1-4x^2)}{\sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)^2}} = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3(1-4x^2)}{\left|1-4x^2\right|\sqrt{1-x^2}} \qquad \textbf{(2)}$$

Pero, $|x| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow -4x^2 \geq -1 \Rightarrow 1 - 4x^2 \geq 0$

$$\Rightarrow \left|1-4x^2\right| = 1 - 4x^2$$

Ahora, regresando a (2):

$$f'(x) = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3(1-4x^2)}{(1-4x^2)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

En consecuencia, existe una constante C tal que $f(x) = C$. Pero

$$C = f(0) = 3\cos^{-1}0 - \cos^{-1}0 = 3\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$$

Luego,

$$3\cos^{-1}x - \cos^{-1}(3x - 4x^2) = \pi$$

PROBLEMA 9. **Teorema del valor medio de Cauchy**

Sean f y g dos funciones tal que:

1. f y g son continuas en el intervalo cerrado [a, b].

2. f y g son diferenciables en el intervalo abierto (a, b)

Entonces $\exists$ **c** $\in$ **(a, b)** tal que:

$$\mathbf{(f(b) - f(a))\,g'(c) = (g(b) - g(a))\,f'(c)}$$

Solución

Construimos una función que satisfaga las hipótesis del teorema del valor medio. Esta función es:

$$h(x) = (f(b) - f(a))\,g(x) - (g(b) - g(a))f(x) \qquad \mathbf{(1)}$$

Como f y g son continuas en [a, b] y diferenciables en (a, b), la función h también cumple estas propiedades. Luego, por el teorema del valor medio, existe un $c \in (a, b)$ tal que:

$$h(b) - h(a) = h'(c)(b - a) \qquad \mathbf{(2)}$$

Pero,

$$h(b) = (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) = -f(a)g(b) + g(a)f(b)$$

$$h(a) = (f(b) - f(a))g(a) - (g(b) - g(a))f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$$

$$h'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x) \qquad \mathbf{(3)}$$

Vemos que $h(b) = h(a)$ y, por tanto, de (1) y (3) obtenemos:

$$h'(c)(b - a) = 0 \Rightarrow h'(c) = 0$$

$$\Rightarrow (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0$$

$$\Rightarrow (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 5.2

En los problemas del 1 al 4, verificar que la función dada satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo indicado. Hallar todos los puntos c que satisfacen la conclusión del teorema.

1. $f(x) = x^3 - 4x$, $[0, 2]$

2. $g(x) = \operatorname{sen} x + \cos x - 1$, $[0, 2\pi]$

3. $h(x) = 8x^{2/3} - x^{5/3}$, $[0, 8]$

4. $f(x) = \dfrac{1}{2}x - \sqrt{x}$, $[0, 4]$

En los problemas del 5 al 10, verificar que la función dada satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo indicado. Hallar todos los puntos c que satisfacen la conclusión del teorema.

5. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $[-1, 0]$

6. $g(x) = \dfrac{1}{x} + x$, $[1, 2]$

7. $h(x) = 2 + \sqrt[3]{x-1}$, $[1, 9]$

8. $f(x) = \mathrm{lx}(1+x^2)$, $[0, 1]$

9. $h(x) = \ln \cos x$, $[0, \pi/3]$

10. $g(x) = \tan^{-1}x$, $[-1, 1]$

11. Probar que la ecuación $x^5 + 10x + 4 = 0$ tiene exactamente una raíz real

12. Si $a > 0$, probar que la ecuación $x^3 + ax - 1 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

13. Probar que $x^4 + 4x + b = 0$ tiene, a lo más, dos raíces reales.
Sugerencia: Si $f(x) = x^4 + 4x + b$. ¿Cuántas raíces tiene $f'(x) = 0$?

14. Si a y b son constantes y n un natural, probar que la ecuación

$$x^{2n+1} + ax + b = 0$$

tiene, a lo más, tres raíces reales.

Sugerencia: Sea $f(x) = x^{2n+1} + ax + b$. ¿Cuántas raíces reales tiene $f'(x) = 0$?

15. Si a y b son constantes y n un natural, probar que la ecuación

$$x^{2n} + ax + b = 0$$

tiene, a lo más, dos raíces reales.

Sugerencia: Sea $f(x) = x^{2n} + ax + b$. ¿Cuántas raices reales tiene $f'(x) = 0$?

16. Probar que la ecuación $3\tan x + x^2 = 2$ tiene exactamente una raíz en $[0, \pi/4]$.

17. Si $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, probar que la ecuación $P'(x) = 0$ tiene tres raíces reales.

18. Probar que un polinomio de grado 3 tiene a lo más 3 raíces reales. Sugerencia: Suponga que tiene 4 raíces y razone como en el problema resuelto 2.

19. Probar que un polinomio de grado n tiene a lo más n raíces reales. Sugerencia: Suponga que tiene n + 1 raíces y razone como en el problema resuelto 3. No olvides usar inducción.

20. Si $g(1) = 8$ y $g'(x) \geq 3$ para todo x, ¿cuál es el menor valor posible que puede tener $g(5)$?

21. Sean a y b reales y n un natural tales que $0 < a < b$ y $n > 1$. Probar que:

$$na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$$

Sugerencia: Aplicar el teorema del valor medio a $f(x) = x^n$ en $[a, b]$

22. Probar que $e^x > 1 + x, \forall x > 0$

23. **a.** Probar que para cualquier $x > 1$ existe $c \in (1, x)$ tal que

$$\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$$

b. Usar la parte a. para probar que:

$$\sqrt{x} < \frac{1}{2} + \frac{x}{4}, \text{ para todo } x > 1$$

Sugerencia: Aplicar el teorema del valor medio a $f(x) = \sqrt{x}$ en $[1, x]$.

24. Sea g es impar y diferenciable en $\mathbb{R}$. Demostrar que para todo real $a > 0$, existe $c \in (-a, a)$ tal que $g'(c) = \dfrac{g(a)}{a}$

25. Usando el teorema del valor medio, probar que $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|$.

26. Usando el teorema del valor medio, probar que $|\tan^{-1}x - \tan^{-1}y| \leq |x - y|$.

27. Probar que: $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \dfrac{\pi}{2}$

28. Probar que: $2\operatorname{sen}^{-1}x = \cos^{-1}(1 - 2x^2)$, para $x \geq 0$.

Sugerencia: Sea $f(x) = 2\operatorname{sen}^{-1}x - \cos^{-1}(1 - 2x^2)$ y probar que f es constante:

$f(x) = C$. Luego, mostrar que $C = 0$

29. Probar que: $2\tan^{-1}x + \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) = \begin{cases} -\pi, & \text{si } x \leq -1 \\ \pi, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

En los problemas del 30 al 32, verificar que la función dada satisface las hipótesis del teorema del valor medio de Cauchy en el intervalo indicado. Hallar los puntos c que satisfacen la conclusión del teorema.

30. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, en $[0, \pi/2]$.

31. $f(x) = \ln x$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$, en $[1, e]$

32. $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$, en $[0, 1]$

SECCION 5.3

MONOTONIA, CONCAVIDAD Y CRITERIOS PARA EXTREMOS LOCALES

Sea f una función y I un intervalo. Recordemos que:

1. **f es creciente** en el intervalo I si para cualquier par de puntos x_1, x_2 de I se cumple que

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

2. **f es decreciente** en el intervalo I si para cualquier par de puntos x_1, x_2 de I se cumple que

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

3. **f es monótona** en el intervalo I si f es creciente o decreciente en I.

Contamos con un criterio que nos permitirá saber si una función es creciente o decreciente, conociendo el signo de la derivada.

TEOREMA 5.7 **Criterio de Monotonía.**

Sea f una función continua en un intervalo I y diferenciable en todo punto interior de I.

1. Si $f'(x) > 0$ en todo punto interior de I, entonces f es **creciente** en I.

2. Si $f'(x) < 0$ en todo punto interior de I, entonces f es **decreciente** en I.

Demostración

1. Sean x_1 y x_2 dos puntos cualesquiera de I. Supongamos que $x_1 < x_2$. Como $[x_1, x_2]$ está contenido en el intervalo I, f es continua en $[x_1, x_2]$ y es diferenciable en (x_1, x_2). Por el teorema del valor medio, existe c en (x_1, x_2) tal que:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\ (x_2 - x_1).$$

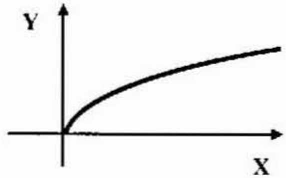
Pero $f'(c) > 0$ y $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Como x_1 y x_2 son dos puntos cualesquiera de I, se concluye que f es creciente en I

2. Se procede como en 1.

EJEMPLO 1. Probar que la función $f(x) = \sqrt{x}$ es creciente en todo su dominio.

Solución



El dominio de f es el intervalo $[0, +\infty)$, en el cual f es continua. Además f es diferenciable en el intervalo $(0, +\infty)$ y se cumple que

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0, \ \forall x \in (0, +\infty).$$

Luego, por la parte 1 del teorema anterior, concluimos que $f(x) = \sqrt{x}$ es creciente en todo su dominio, $[0, +\infty)$.

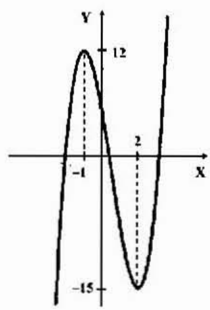
La mayor parte de las funciones con las que trabajamos son crecientes en algunos intervalos y decrecientes en otros. A estos intervalos los llamaremos **intervalos de crecimiento y decrecimiento**, respectivamente. De acuerdo al teorema anterior, estos intervalos están comprendidos entre los puntos donde la derivada se anula o no está definida, o sea, los puntos críticos de f.

EJEMPLO 2. Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$$

Solución

Hallemos los puntos críticos de f:



$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x+1)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ó } x = 2$$

Ahora analizamos el signo de la derivada en cada uno de los intervalos:

$$(-\infty, -1), \ (-1, 2) \ \text{ y } \ (2, +\infty):$$

$$x \in (-\infty, -1) \Leftrightarrow x < -1 \Rightarrow x + 1 < 0 \text{ y } x - 2 < 0 \Rightarrow$$

$f'(x) = 6(x+1)(x-2) > 0 \Rightarrow$ f es creciente en el intervalo $(-\infty, -1]$.

Este resultado, así como los correspondientes a los otros intervalos, los sintetizamos en la siguiente tabla.

Aquí, la flecha ↗ indica que f es creciente y la flecha ↘ indica que f es decreciente.

$-\infty$ -1	2	$+\infty$
$f'(x) = 6(-)(-) = +$ ↗	$f'(x) = 6(+)(-) = -$ ↘	$f'(x) = 6(+)(+) = +$ ↗

La tabla dice f es: Creciente en $(-\infty, -1]$ y en $[2, +\infty)$. Decreciente en $[-1, 2]$

CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA PARA EXTREMOS LOCALES

El teorema anterior nos permite determinar, fácilmente, cuando un número crítico da lugar a un mínimo local, un máximo local o a ninguno de los dos casos. En el ejemplo anterior, examinemos el número crítico -1. El gráfico muestra que antes de -1, en el intervalo $(-\infty, -1)$, f es creciente y después de 1, en el intervalo $(-1, 2)$, f es decreciente. En consecuencia, $f(-1) = 12$ es un máximo local. Los términos creciente y decreciente, de acuerdo al teorema anterior, podemos sustituirlos por $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -1)$ y por $f'(x) < 0$ en $(-1, 2)$.

En términos precisos, tenemos el siguiente teorema.

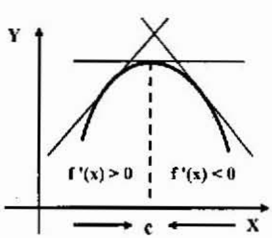
TEOREMA 5.8 **Criterio de la Primera Derivada para Extremos Locales.**

Sea f una función continua en un intervalo (a, b) y sea $c \in (a, b)$ un punto crítico de f.

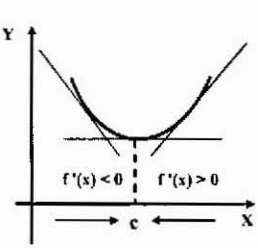
1. Si $f'(x) > 0$ para $x \in (a, c)$ y $f'(x) < 0$ para $x \in (c, b)$, entonces **f(c) es un máximo local.**

2. Si $f'(x) < 0$ para $x \in (a, c)$ y $f'(x) > 0$ para $x \in (c, b)$, entonces **f(c) es mínimo local.**

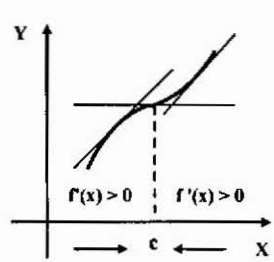
3. Si **f'(x) tiene el mismo signo** en (a, c) y en (c, b), entonces **f(c) no es un extremo local.**



Máximo Local



Mínimo Local



No hay Extremo Local

Demostración

Las conclusiones de este teorema siguen inmediatamente del criterio de monotonía (Teorema 5.7).

EJEMPLO 3. Hallar los extremos locales de la función $f(x) = x(5-x)^{2/3}$

Solución

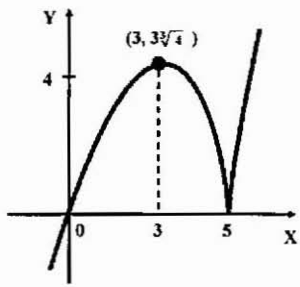
Paso 1. Hallamos los puntos críticos:

$$f'(x) = x\left(\frac{2}{3}\right)(5-x)^{-1/3}(-1) + (5-x)^{2/3} = \frac{5(3-x)}{3\sqrt[3]{5-x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 5(3-x) \Rightarrow x = 3.$$

Además, $f'(x)$ no existe en $x = 5$.

Luego, los puntos críticos de f son 3 y 5.



Paso 2. Aplicamos el criterio de la primera derivada. Para esto, analizamos el signo de la derivada en los intervalos

$$(-\infty, 3), \quad (3, 5) \quad y \quad (5, +\infty).$$

Los resultados los sintetizamos en la siguiente tabla:

$-\infty$ 3 5 $+\infty$

$f'(x) = \frac{(+)}{(+)} = +$ ↗	$f'(x) = \frac{(-)}{(+)} = -$ ↘	$f'(x) = \frac{(-)}{(-)} = +$ ↗

El criterio de la primera derivada nos dice que $f(3) = 3\sqrt[3]{4}$ es un máximo local y $f(5) = 0$ es un mínimo local.

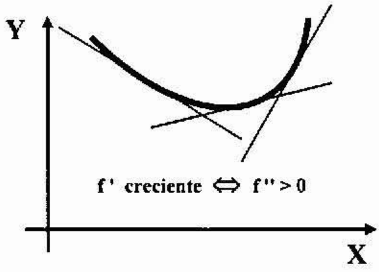
CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXION

Las figuras siguientes, a pesar de ser los gráficos de funciones crecientes en el intervalo [a, b], tienen una diferencia resaltante: Ellas se "doblan" en direcciones opuestas. La primera es **cóncava hacia arriba** y la segunda es **cóncava hacia abajo**. Para definir estos términos con precisión observemos sus correspondientes rectas tangentes. La gráfica que es cóncava hacia arriba siempre se mantiene encima de cualquiera de sus rectas tangentes. En cambio, la gráfica cóncava hacia abajo siempre se mantiene por debajo de cualquiera de sus tangentes. Ahora, si en lugar de las tangentes nos concentramos en sus pendientes, vemos que en las gráficas cóncavas hacia arriba, las pendientes van creciendo, mientras que en las cóncavas hacia abajo las pendientes van decreciendo. Como la pendiente está dada por la derivada, entonces concavidad hacia arriba significa derivada creciente y concavidad hacia abajo significa derivada decreciente. Este último resultado será nuestra definición de concavidad.

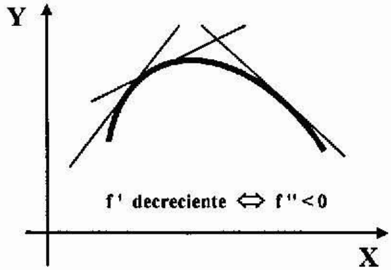
DEFINICION. Sea f una función diferenciable en un intervalo abierto I.

1. El gráfico de f es **cóncavo hacia arriba** en I si **f ' es creciente** en I.

2. El gráfico de f es **cóncavo hacia abajo** en I si **f ' es decreciente** en I.



Cóncava hacia arriba



Cóncava hacia abajo

El criterio de monotonía aplicado a la función derivada nos proporciona un criterio de concavidad. La frase: "f es dos veces diferenciable en un intervalo I" significa que existe $f''(x)$, en todo punto x de I.

TEOREMA 5.9 **Criterio de concavidad.**

Sea f una función dos veces diferenciable en un intervalo abierto I.

1. Si $\mathbf{f''(x) > 0}$ para todo punto x interior de I, entonces el gráfico de f es **cóncavo hacia arriba** en I.

2. Si $\mathbf{f''(x) < 0}$ para todo punto x interior de I, entonces el gráfico de f es **cóncavo hacia abajo** en I.

Demostración

Simplemente se aplica el criterio de monotonía a la función derivada f' .

EJEMPLO 4. Hallar los intervalos de concavidad de la siguiente función f, es decir, hallar los intervalos donde f es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

Solución

Según el criterio de concavidad, debemos hallar los intervalos donde $f''(x) > 0$ y donde $f''(x) < 0$.

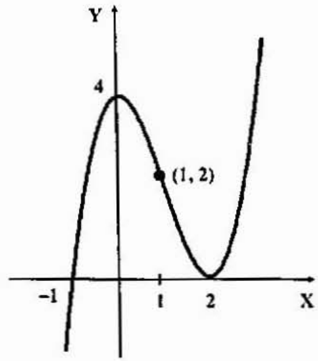
Tenemos que:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \quad \text{y} \quad f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

Luego,

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ y } f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$



Para resumir tenemos la siguiente tabla.

$-\infty$	1 $+\infty$
$f''(x) = 6(-) = -$	$f''(x) = 6(+) = +$
$\cap$	$\cup$

Los símbolos $\cup$ y $\cap$ significan cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo, respectivamente.

Luego, el gráfico de f es cóncavo hacia abajo en el intervalo $(-\infty, 1)$, y es cóncavo hacia arriba en el intervalo $(1, +\infty)$.

PUNTOS DE INFLEXION Y NUMEROS CRITICOS DE SEGUNDO ORDEN

En el gráfico del ejemplo anterior el punto (1, 2) es un punto muy especial para la concavidad. Precisamente, en este punto el gráfico cambia de cóncavo hacia abajo a cóncavo hacia arriba. Por esta razón a este punto se le llama punto de inflexión. Observar que para el punto de inflexión (1, 2) se cumple que $f''(1) = 0$.

DEFINICION. Sea f una función continua en c. Diremos que el punto (c, f(c)) es un **punto de inflexión** del gráfico de f si éste es cóncavo hacia arriba a un lado de c y cóncavo hacia abajo en el otro lado.

Si (c, f(c)) es un punto de inflexión de la función $y = f(x)$, para los x cercanos a c debe cumplirse que los signos de $f''(x)$ antes de c y después de c deben ser distintos. En el mismo punto c la derivada $f''(c)$ puede o no existir, pero si existe, debe cumplirse que $f''(c) = 0$. Luego, los candidatos a ser puntos de inflexión son los puntos donde $f''(c) = 0$ o $f''(c)$ no existe, o sea los **números críticos de la función derivada f'**, a los que llamaremos **números críticos de de segundo orden de f.**

EJEMPLO 5. Hallar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión del gráfico de la función

$$f(x) = -x^4 + 6x^2 - 1$$

Solución

Paso 1. Números críticos de f':

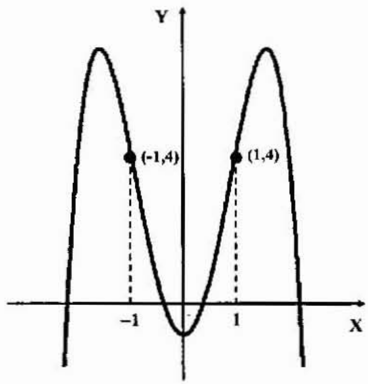
$$f'(x) = -4x^3 + 12x \Rightarrow$$

$$f''(x) = -12x^2 + 12 = -12(x+1)(x-1)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -12(x+1)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ó } x = 1$$

Los puntos críticos de f' son -1 y 1.



Paso 2. Signo de f'' en $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, +\infty)$.

Tenemos la siguiente tabla:

$-\infty$ a -1	-1 a 1	1 a $+\infty$
$f''(x) = -(-)(-) = -$	$f''(x) = -(+)(-) = +$	$f''(x) = -(+)(+) = -$
$\cap$	$\cup$	$\cap$

Luego, el gráfico de f es cóncavo hacia abajo en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$, y es cóncavo hacia arriba en $(-1, 1)$.

La tabla, además, nos indica que hay cambios de concavidad al pasar por -1 y por 1. En consecuencia, tenemos dos puntos de inflexión:

$$(-1, f(-1)) = (-1, 4) \quad \text{y} \quad (1, f(1)) = (1, 4).$$

EJEMPLO 6. Dada la función $g(x) = \sqrt[3]{x-2} + 1$. Hallar:

a. Los números críticos de g', o sea los números críticos de segundo orden de g.

b. Los intervalos de concavidad.

c. Los puntos de inflexión.

Solución

a. Puntos críticos de g':

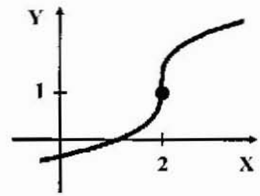
$$g(x) = (x-2)^{1/3} + 1 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{3}(x-2)^{-2/3} \Rightarrow g''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x-2)^5}}$$

$g''(x)$ no se anula en ningún punto; sin embargo $g''(x)$ no existe en 2.

Luego, g' tiene un solo número crítico, que es 2.

b. Signos de g'' en los intervalos $(-\infty, 2)$ y $(2, +\infty)$

$-\infty$ 2	2 $+\infty$
$g''(x) = -\frac{2}{(-)} = +$	$g''(x) = -\frac{2}{(+)} = -$
$\cup$	$\cap$



El gráfico es cóncavo hacia arriba en $(-\infty, 2)$ y hacia abajo en $(2, +\infty)$.

c. De acuerdo al resultado anterior, $(2, f(2)) = (2, 1)$ es un punto de inflexión.

El siguiente ejemplo nos presenta los conceptos de concavidad y de punto de inflexión presentes en la vida real.

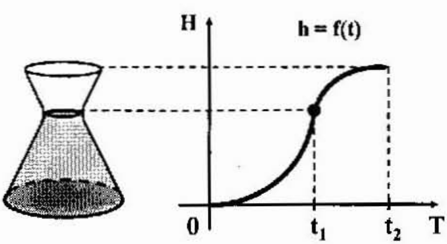
EJEMPLO 7. Se vierte agua a razón constante (un volumen fijo por unidad de tiempo) en el frasco mostrado en la figura. Construir un gráfico de la altura del agua en el frasco como función del tiempo: $h = f(t)$.

Solución

Sin duda que la función $h = f(t)$ es creciente. Aún más la velocidad con que crece la altura h del agua es variable. Al inicio, debido a la forma del frasco, la velocidad $v(t)$ con que sube el agua crece hasta llegar al cuello del frasco (cuando $h = f(t_1)$). A partir de este punto, la velocidad es decreciente. En resumen:

1. $v(t)$ es creciente en $[0, t_1]$ y, por tanto, $v'(t) > 0$ en $(0, t_1)$

2. $v(t)$ es decreciente en $[t_1, t_2]$ y, por tanto, $v'(t) < 0$ en (t_1, t_2)



Pero, $v(t) = f'(t)$ y, por tanto, $v'(t) = f''(t)$. Luego, de (1) y (2):

(3) $f''(t) > 0$ en $(0,\ t_1)$ y (4) $f''(t) < 0$ en $(t_1,\ t_2)$,

de donde concluimos que el gráfico de $h = f(t)$ es cóncavo hacia arriba en $(0,\ t_1)$, es cóncavo hacia abajo en $(t_1,\ t_2)$ y que $(t_1,\ f(t_1))$ es un punto de inflexión.

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA EXTREMOS LOCALES

La segunda derivada nos proporciona otro método simple para determinar la naturaleza de un número crítico.

TEOREMA 5.10 **Criterio de la segunda derivada para extremos locales.**
Supongamos que $f'(c) = 0$ y que f'' es continua en un intervalo abierto que contiene a c.

1. $f''(c) > 0 \Rightarrow f(c)$ **es un mínimo local.**

2. $f''(c) < 0 \Rightarrow f(c)$ **es un máximo local.**

Demostración

Como $f'(c) = 0$, c es número crítico.

1. Como $f''(c) > 0$ y f'' es continua en c, existe un intervalo abierto I tal que

$$f''(x) > 0,\ \forall\, x \in I.$$

Esto significa, por el criterio de concavidad, que el gráfico de f es cóncavo hacia arriba en el intervalo I. En consecuencia, f(c) es un mínimo local.

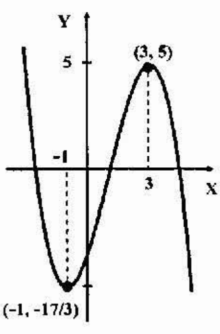
2. Como $f''(c) < 0$ y f'' es continua en c, existe un intervalo abierto I tal que

$$f''(x) < 0,\ \forall\, x \in I.$$

Esto significa, por el criterio de concavidad, que el gráfico de f es cóncavo hacia abajo en el intervalo I. En consecuencia, f(c) es un máximo local.

EJEMPLO 8. Determinar, aplicando el criterio de la segunda derivada, los extremos locales de

$$f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x - 4\ .$$



Solución

Hallamos los puntos críticos:

$$f'(x) = -x^2 + 2x + 3 = -(x + 1)(x - 3)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -(x + 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ó } x = 3$$

Los puntos críticos de f son -1 y 3.

Aplicamos el criterio de la segunda derivada.

$$f''(x) = -2x + 2 = -2(x-1)$$

Como $f''(-1) = -2(-1-1) = 4 > 0$, entonces $f(-1) = -\frac{17}{3}$ es un mínimo local.

Como $f''(3) = -2(3-1) = -4 < 0$, entonces $f(3) = 5$ es un máximo local.

EXTREMO LOCAL UNICO EN UN INTERVALO ARBITRARIO

El teorema del valor extremo (teorema 5.1) garantiza la existencia de valores extremos de una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Desafortunadamente, no tenemos un teorema de ese calibre para intervalos que no son cerrados. Sin embargo, algo podemos conseguir si sabemos que una función continua tiene un único extremo local en un intervalo cualquiera I. El intervalo I no tiene ninguna restricción. Este puede ser abierto, cerrado, semicerrado, finito o infinito.

TEOREMA 5.11 **Un extremo local único es un extremo absoluto.**

Sea f una función continua en un intervalo I. Si f(c) es un **extremo local único en I**, entones f(c) es un **extremo absoluto.** En términos más precisos:

a. Si f(c) es un máximo local en I, entonces f(c) es un máximo absoluto de f en I.

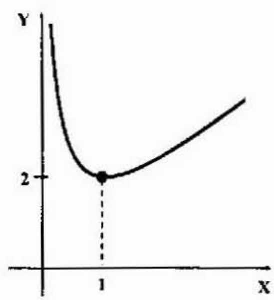
b. Si f(c) es un mínimo local en I, entonces f(c) es un mínimo absoluto de f en I.

Demostración

Ver el problema resuelto 3.

EJEMPLO 9. Hallar los extremos absolutos de $f(x) = x + \frac{1}{x}$, en el intervalo abierto $(0, +\infty)$.

Solución



Números críticos:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ o } x = -1$$

Desechamos a -1 por no estar en $(0, +\infty)$.

Apliquemos el crítico de la segunda derivada a 1:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(1) = \frac{2}{1^3} = 2 > 0$$

Luego, $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$ es un mínimo local.

Como $f(1) = 2$ es el único número extremo local en $(0, +\infty)$, entonces $f(1) = 2$ es mínimo absoluto de f en el intervalo $(0, +\infty)$.

Si el intervalo I del teorema anterior es semiabierto: $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, +\infty)$ o $(-\infty, b]$, es posible que f tenga los dos extremos absolutos. Es claro que, de ser así, el segundo extremo debe el valor de la función en el extremo cerrado. El siguiente ejemplo nos ilustra esta situación.

EJEMPLO 10. Si es posible, hallar los extremos absolutos de la función

$$f(x) = 9xe^{-x},$$

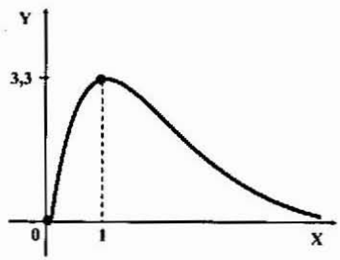
en el intervalo $[0, +\infty)$

Solución

Hallemos los números críticos:

$$f'(x) = -9xe^{-x} + 9e^{-x} = -9e^{-x}(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -9e^{-x}(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$$



f tiene un único número crítico, que es $x = 1$, en el intervalo $[0, +\infty)$.

Apliquemos el criterio de la segunda derivada:

$$f''(x) = 9e^{-x}(x-1) - 9e^{-x} = 9e^{-x}(x-2)$$

$$f''(1) = 9e^{-1}(1-2) = -\frac{9}{e} < 0$$

Luego, $f(1) = 9(1)e^{-1} = \frac{9}{e} \approx 3,3$ es un máximo local, el cual, por ser el único extremo local, $f(1) = \frac{9}{e} \approx 3,3$ es el máximo absoluto en el intervalo $[0, +\infty)$,

Por otro lado, como $0 < f(x)$ para $x > 0$ y $f(0) = 0$, concluimos que $f(0) = 0$ es el mínimo absoluto de f en $[0, +\infty)$.

PRP0BLEMAS RESUELTOS 5.3

PROBLEMA 1 . El gráfico adjunto es el gráfico de la derivada f' de una función continua f. Determinar:

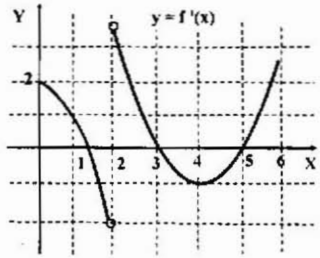
a. Los intervalos de monotonía de f.

b. Los números críticos de f y decidir la clase de extremo local a que dan lugar.

c. Los intervalos de concavidad de f.

d. Los números críticos de segundo orden de f y los puntos de inflexión.

e. Esbozar el gráfico de sabiendo que f(0) = 3



Solución.

a. Vemos que $f'(x) > 0$ en los intervalos (0, 1), (2, 3), (5, +∞) y que $f'(x) < 0$ en los intervalos (1, 2) y (3, 5). Luego, f es creciente en [0, 1], [2, 3], [5, +∞) y es decreciente en [1, 2] y [3, 5].

b. Son números críticos: 1, 2, 3, y 5. En efecto:

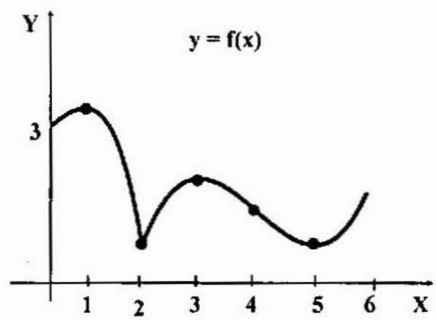
$$f'(1) = f'(3) = f'(5) = 0 \quad \text{y no existe } f'(2).$$

La parte a y el criterio de la primera derivada nos dicen que f(1) y f(3) son máximos locales y que f(2) y f(5) son un mínimos locales.

c. $f'(x)$ es decreciente en (0, 2) y en (2, 4). $f'(x)$ es creciente en (4 +∞). Luego, f es cóncava hacia abajo en (0, 2) y en (2, 4), y es cóncava hacia arriba en (4, +∞).

d. La gráfica nos muestra que f' tiene un mínimo local en x = 4 y, por tanto, $f''(2) = 0$. Por otro lado, como f' es discontinua en x = 2, no existe $f''(2)$. Luego, tenemos dos números críticos de segundo orden, 2 y 4. Sin embargo, la parte c anterior nos dice que sólo (4, f(4)) es un punto de inflexión.

e. La gráfica que esbozamos sólo nos muestra la forma de ella, sin mucha precisión en cuanto a las ordenadas de los puntos notables, ya que estas ordenadas son desconocidas.



PROBLEMA 2 . Dada la función $f(x) = x^4e^{-x}$, hallar:

a. Los números críticos. **b.** los intervalos de monotonía.

c. Los extremos locales.

d. Los números críticos de segundo orden,

e. Los intervalos de concavidad. **f.** Los puntos de inflexión.

Solución

a. Números Críticos e Intervalos de monotonía.

$$f'(x) = 4x^3e^{-x} - x^4e^{-x} = x^3(4-x)e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3(4-x)e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ó } x = 4$$

Los puntos críticos son 0 y 4.

b. Intervalos de monotonía:

$-\infty$ 0 4 $+\infty$

$f'(x) = (-)(+)(+) = -$ $\searrow$	$f'(x) = (+)(+)(+) = +$ $\nearrow$	$f'(x) = (+)(-)(+) = -$ $\searrow$

La función f es decreciente en $(-\infty, 0]$ y en $[4, +\infty)$ y es creciente en $[0, 4]$.

c. Extremos relativos.

El cuadro anterior y el criterio de la primera derivada nos dicen que:

$f(0) = 0$ es un mínimo local y $f(4) = 4^4e^{-4} = \dfrac{256}{e^4} \approx 4{,}7$ es un máximo local.

d. Intervalos de concavidad y puntos de inflexión

$$f''(x) = 12x^2e^{-x} - 4x^3e^{-x} - (4x^3e^{-x} - x^4e^{-x}) = x^2(x^2 - 8x + 12)e^{-x} \Rightarrow$$

$$f''(x) = x^2(x-2)(x-6)e^{-x}. \quad f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 2 \text{ ó } x = 6$$

Los números críticos de segundo orden son: 0, 2 y 6.

e. Intervalos de concavidad:

$-\infty$ 0 2 6 $+\infty$

$f''(x) =$ $(+)(-)(-)(+) = +$ $\cup$	$f''(x) =$ $(+)(-)(-)(+) = +$ $\cup$	$f''(x) =$ $(+)(+)(-)(+) = -$ $\cap$	$f''(x) =$ $(+)(+)(+)(+) = +$ $\cup$

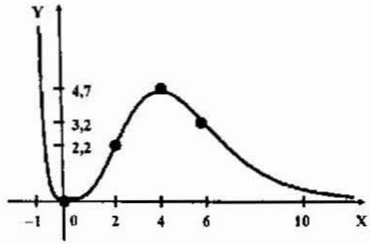
La tabla nos dice que la gráfica de f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ y en $(6, +\infty)$; y es cóncava hacia abajo $(2, 6)$.

Los puntos de inflexión son:

$$(2, f(2)) = (2, 16e^{-2}) \approx (2, 2{,}2)$$

y

$$(6, f(6)) = (6, 1296e^{-6}) \approx (6, 3{,}2)$$



PROBLEMA 3. **Probar el teorema 5.11.**

Sea f una función continua en un intervalo I. Si f tiene un **extremo local único en I**, entonces ese extremo local es un **extremo absoluto.** Aún más,

a. Si **f(c) es un máximo local** en I, entonces **f(c) es un máximo absoluto de** f en I.

b. Si **f(c) es un mínimo local** en I, entonces **f(c) es un mínimo absoluto de** f en I.

Solución

Probamos sólo la parte a. Para b se procede en forma similar.

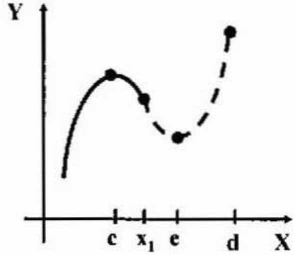
a. Sea f(c) un máximo local y es el único extremo local que f tiene en el intervalo I. Por definición, c es un punto interior de I.

Procedemos por reducción al absurdo. Si f(c) no es máximo absoluto, existe un d en I tal que $f(c) < f(d)$. Supongamos que $c < d$. Por ser f(c) un máximo local, existen números x_1, entre c y d, tal que

$$f(x_1) < f(c) < f(d) \qquad \textbf{(1)}$$

Pero, por el teorema el valor intermedio, existe un número e en el intervalo cerrado [c, d] tal que f(e) es el mínimo de f en [c, d].

Se debe tener que $f(e) \leq f(x_1)$ y, por (1), $f(e) < f(c) < f(d)$. Luego, $c < e < d$ y f(e) es un mínimo local distinto de f(c). Esto contradice la unicidad de f(c).



PROBLEMAS PROPUESTOS 5.3

1. Bosquejar el gráfico de una función f que cumple:

$f(2) = -2, \qquad f'(2) = 0, \qquad f''(x) > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

2. Bosquejar el gráfico de una función f que cumple:

$f(2) = 2, \qquad$ No existe $f'(2)$, $\qquad f''(x) > 0$ si $x < 2$. $f''(x) < 0$ si $x > 2$

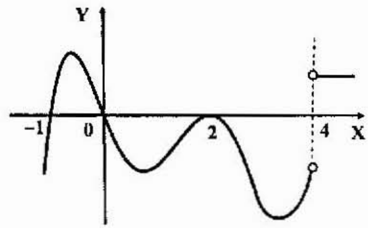
3. El dibujo adjunto es el gráfico de una la derivada f' de una función continua f.

Determinar:

a. Los números críticos de f

b. Los intervalos de monotonía.

c. Los números críticos que correspondan a máximos o mínimos locales



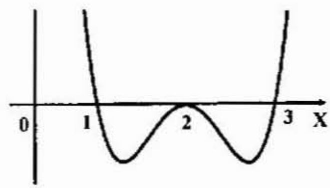
4. El dibujo adjunto es el gráfico de la segunda derivada f'' de una función f.

Determinar:

a. Los números críticos de segundo orden.

b. Los intervalos de concavidad.

c. Los números críticos de segundo orden que correspondan a puntos de inflexión



En los problemas del 5 al 18, hallar:

a. Los números críticos. ***b. Intervalos de monotonía.***

c. Los extremos locales ***d. Los números críticos de segundo orden***

e. Intervalos de concavidad ***f. Puntos de inflexión.***

5. $f(x) = -2x^2 - 8x + 3$

6. $f(x) = x^3 - 3x + 1$

7. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 12$

8. $g(x) = x^4 - 2x^2 + 4$

9. $h(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$

10. $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$

11. $f(x) = (x-6)\sqrt{x}$

12. $f(x) = 2x^{1/3} + x^{2/3}$

13. $g(x) = x\,|\,x\,|$

14. $h(x) = x - \ln x$

15. $f(x) = x\,e^{x^2}$

16. $f(x) = x - 2\operatorname{sen} x$, en $[0, 2\pi]$

17. $g(x) = \cos^2 x - 2\operatorname{sen} x$, en $[0, 2\pi]$

18. $h(x) = 2x - \operatorname{sen}^{-1} x$, en $[-1, 1]$

En los problemas 19 y 20, bosquejar el gráfico de la función continua f que satisface las condiciones dadas.

19. $f'(x) > 0$ si $x < 0$ ó $0 < x < 3$, $f'(x) < 0$ si $x > 3$

$f'(0) = 0$, $f(0) = 1$, $f'(3) = 0$, $f(3) = 4$

$f''(x) < 0$ si $x < 0$ ó $2 < x < 5$, $f''(x) > 0$ si $0 < x < 2$ ó $x > 5$

20. $f'(x) > 0$ si $x < 2$, $f'(x) < 0$ si $2 < x < 5$, $f'(x) = 1$ si $x > 5$.

$f((0) = f(4) = 0$, $f(2) = 2$. No existen $f'(2)$ y $f'(5)$.

$f''(x) < 0$ si $x < 0$ ó $4 < x < 5$, $f''(x) > 0$ si $0 < x < 2$ ó $2 < x < 4$

En los problemas 21 y 22, se dan las gráficas de la derivada* f' *de una función continua f. Determinar:

a. Los números críticos de f.

b. Los intervalos de monotonía de f.

c. Los números críticos que dan lugar a extremos locales.

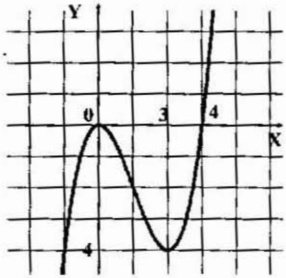
d. Los números críticos de segundo orden de f.

e. Los intervalos de concavidad de f.

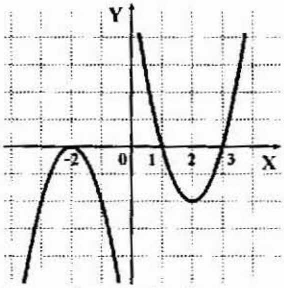
f. Los números críticos de segundo orden que dan lugar a puntos de inflexión.

g. Esbozar el gráfico.

21.

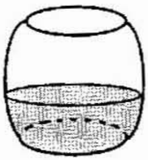


22.

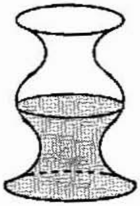


En los problemas 23 y 24 se tiene jarrones en los cuales se vierte agua a una razón constante. En cada caso, esbozar la gráfica de la función altura del agua como función del tiempo,* h = f(t). *Mostrar la concavidad y los puntos de inflexión.

23.



24.



En los problemas del 21 al 26, hallar los extremos absolutos de la función dada en el intervalo indicado.

25. $h(x) = 4x^3 - 3x^4$, $(-\infty, +\infty)$

24. $g(x) = 4 - 2(x-1)^{2/3}$ en $[0, +\infty)$

27. $g(x) = x \ln x$, $(0, e)$ **28.** $h(x) = (x + 1)e^{-x}$ $(-\infty, +\infty)$

29. Probar que una función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene uno y sólo un punto de inflexión.

30. Si la función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene por raíces a r_1, r_2 y r_3, probar que la abscisa del punto de inflexión es $x = \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3)$

Sugerencia: $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$.

31. Si f y g son cóncavas hacia arriba en el intervalo I, probar que $f + g$ es cóncava hacia arriba en I.

32. Si f es positiva y cóncava hacia arriba en un intervalo I, probar que la función $g(x) = [f(x)]^2$ es cóncava hacia arriba.

33. Sean f y g positivas y cóncavas hacia arriba en el intervalo I, probar:

a. Si f y g son crecientes, entonces fg es cóncava hacia arriba en I.

b. Si f y g son decrecientes, entonces fg es cóncava hacia arriba en I.

SECCION 5.4

FORMAS INDETERMINADAS. REGLA DE L'HÔPITAL

Un límite de una función F(x) toma una **forma indeterminada** en $x = a$ si al evaluar $\lim_{x \to a} F(x)$ mediante las leyes de los límites, (ley de la suma, del cociente, etc.), se obtiene una de las siguientes expresiones:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty,\quad 0^0,\quad \infty^0,\quad 1^\infty$$

Estas expresiones se llaman **formas indeterminadas.**
Así,

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ en $x = 0$.

2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$ tiene la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$ en $x = +\infty$.

3. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$ tiene la forma indeterminada $\infty - \infty$ en $x = 0$.

4. $\lim_{x \to 0^+} (1 + x)^{\cot x}$ tiene la forma indeterminada 1^∞ en $x = 0$.

A continuación estudiaremos cada una de estas formas indeterminadas. Las fundamentales son dos = $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$.

A la indeterminada 0/0 ya la hemos encontrado en el capítulo 3, y la hemos resuelto recurriendo a procedimientos algebraicos. En esta parte presentamos otra técnica, conocida como la **regla de L'Hôpital**, la cual nos ayuda a resolver todas las antes mencionadas.

TEOREMA 5.6 **Regla de L'Hôpital. Indeterminadas $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$**

Si

1. **f** y **g** son funciones diferenciables y $g'(x) \neq 0$ cerca de **a**, excepto posiblemente en **a**.

2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

   ó

   $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$

3. **Existe** $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ **(finito o infinito)**

Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

El teorema también es válido para límites laterales o infinitos. Es decir, se puede reemplazar $x \to a$ por $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$

La forma $\frac{\infty}{\infty}$ es una manera abreviada para resumir cuatro casos:

$$\frac{+\infty}{+\infty}, \quad \frac{+\infty}{-\infty}, \quad \frac{-\infty}{+\infty} \quad \text{y} \quad \frac{-\infty}{-\infty}.$$

Demostración

Ver el problema resuelto 11 para el caso 0/0. Omitimos el caso ∞/∞.

EJEMPLO 1. Hallar $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{\ln x + x - 1}$

Solución

Verifiquemos que se cumplen las hipótesis de la regla de L'Hôpital.

1. Las funciones $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$ y $g(x) = \ln x + x - 1$ son diferenciables en una vecindad de 1 (cerca de 1) y

$$g'(x) = \frac{1}{x} + 1 \quad \text{y, por tanto, } g'(x) \neq 0 \text{ cerca de } 1.$$

2. $\lim\limits_{x \to 1} (x^3 - x^2 + 2x - 2) = 1 - 1 + 2 - 2 = 0$. $\lim\limits_{x \to 1} (\ln x + x - 1) = \ln 1 + 1 - 1 = 0$

Luego, el límite dado es una indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$

3. $$\lim_{x \to 1} \frac{D_x(x^3 - x^2 + 2x - 2)}{D_x(\ln x + x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 2x + 2}{1/x + 1} = \frac{3(1)^2 - 2(1) + 2}{1/1 + 1}$$

$$= \frac{3 - 2 + 2}{1 + 1} = \frac{3}{2}$$

La regla de regla de L'Hôpital nos dice que:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{\ln x + x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{D_x(x^3 - x^2 + 2x - 2)}{D_x(\ln x + x - 1)} = \frac{3}{2}$$

NOTA. En el ejemplo anterior hemos sido minuciosos: Hemos verificado todas las hipótesis de la regla de L'Hôpital. En los ejemplos y problemas que siguen, con el ánimo de simplificar la exposición, sólo nos ocuparemos de la hipótesis 2, para reconocer el tipo de indeterminada. La verificación de las otras hipótesis queda a cargo del lector.

EJEMPLO 2. Hallar $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} \frac{\tan x}{\cot 2x}$

Solución

Tenemos que:

$\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} \tan x = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} \cot 2x = -\infty$. Este límite es un caso $\frac{+\infty}{-\infty}$

Aplicando la regla de regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{\tan x}{\cot 2x} = \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{D_x \tan x}{D_x \cot 2x} = \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{\sec^2 x}{-2 \operatorname{cosec}^2 2x}$$

$$= \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{1/\cos^2 x}{-2/\operatorname{sen}^2 2x} = \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{-2\cos^2 x} = \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{4 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}{-2\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x \to (\pi/2)^-} (-2 \operatorname{sen}^2 x) = -2\,(\operatorname{sen}(\pi/2))^2 = -2\,(1)^2 = -2$$

EJEMPLO 3. Probar que: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^p} = 0$, donde $p > 0$

Este resultado muestra que cualquier potencia positiva x^p de x, domina a la función logarítmica $y = \ln x$. En otras palabras, la función $y = \ln x$ tiende a $+\infty$ más lentamente que cualquier potencia positiva x^p de x.

Solución

Tenemos que:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^p = +\infty$. Este límite es un caso $\dfrac{+\infty}{+\infty}$

Aplicando la regla de regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^p} = \lim_{x \to +\infty} \frac{D_x \ln x}{D_x(x^p)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{px^{p-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x(px^{p-1})}$$

$$= \frac{1}{p} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^p} = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{+\infty}\right) = \frac{1}{p}(0) = 0$$

En algunos casos es necesario aplicar la regla de L'Hôpital más de una vez. En el siguiente ejemplo la aplicamos 2 veces:

EJEMPLO 3. Hallar $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{2x}$

Solución

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+e^x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$. Este límite es un caso $\dfrac{+\infty}{+\infty}$

Aplicando la regla de regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{D_x \ln(1+e^x)}{D_x(2x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x/1+e^x}{2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2(1+e^x)}$$

El último límite también es del tipo ∞/∞. Volviendo a aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2(1+e^x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2e^x} = \frac{1}{2}$$

EJEMPLO 4. Probar que: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$, **donde n es un entero positivo.**

Este resultado los muestra que la función exponencial $y = e^x$ domina a cualquier potencia positiva x^n de x. En otras palabras, la función exponencial tiende a $+\infty$ más rápidamente que cualquier potencia x^n de x.

Solución

Tenemos que:

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$. Este límite es un caso $\dfrac{+\infty}{+\infty}$.

Aplicando la regla de regla de L'Hôspital n veces:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{D_x(e^x)}{D_x(x^n)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{D_x(e^x)}{D_x(nx^{n-1})}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \ldots = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\ldots 1x^0}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{n!} = \frac{1}{n!} \lim_{x \to +\infty} e^x = \frac{1}{n!}(+\infty) = +\infty$$

PRECAUCION. Antes de aplicar la regla de L'Hôpital se debe tener la precaución de verificar que las hipótesis de ésta se cumplen. Los dos siguiente ejemplos nos muestran como se llega a resultados errados cuando no se tiene tal precaución.

EJEMPLO 5. Hallar $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 2x}{x + x^2}$

Solución

Es un caso $\dfrac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hôspital dos veces se tiene:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 2x}{x + x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\cos 2x}{1 + 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{-4\,\text{sen } 2x}{2} = 0$$

Este resultado es incorrecto. Esto se debe a que el segundo límite no es una forma indeterminada. En efecto, $\lim\limits_{x \to 0} 2\cos 2x = 2 \neq 0$.

El resultado correcto es como sigue:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{1+2x}=\frac{\lim_{x\to 0} 2\cos 2x}{\lim_{x\to 0}(1+2x)}=\frac{2}{1}=2$$

EJEMPLO 6. Hallar $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\operatorname{sen} x}{x-\cos x}$

Solución

Es un caso $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hôpital se tiene:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\operatorname{sen} x}{x-\cos x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$$

El último límite no existe. En efecto, para $x = 2n\pi$ y para $x = (2n+1)\pi$, con n cualquier entero, se tiene:

$$\frac{1+\cos 2n\pi}{1+\operatorname{sen} 2n\pi}=\frac{1+1}{1+0}=2 \quad \text{y} \quad \frac{1+\cos(2n+1)\pi}{1+\operatorname{sen}(2n+1)\pi}=\frac{1-1}{1+0}=0.$$

Esta oscilación nos prueba que tal límite no existe y, por tanto, no se cumple la hipótesis 2 del teorema, la cual pide la existencia de $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Pero, tengamos cuidado. Esto no implica que tampoco exista el límite inicial. Lo único que nos dice es que si el límite inicial existe, esto no puede hallarse usando la regla de L'Hopital y, por tanto, se debe buscar otro método. Así procedemos a continuación:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\operatorname{sen} x}{x-\cos x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{x\left(1-\frac{\cos x}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{\operatorname{sen} x}{x}}{1-\frac{\cos x}{x}}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

PRODUCTO INDETERMINADO. Indeterminada $0\cdot\infty$

Se busca $\lim_{x\to a} f(x)\,g(x)$, si se cumple que $\lim_{x\to a} f(x)=0$ y $\lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty$

La indeterminación $0\cdot\infty$ se transforma en $0/0$ ó ∞/∞ cambiando el producto en cociente:

$$f(x)\,g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{ó} \quad f(x)\,g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

EJEMPLO 7. Hallar $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$

Solución

$\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$. Luego, es el caso $0 \cdot \infty$. Bien,

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \qquad (\infty/\infty)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

DIFERENCIA INDETERMINADA. Indeterminada $\infty - \infty$

Se busca $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)]$. Se cumple: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$

La indeterminación $\infty - \infty$ se convierte en otra de la forma **0/0** ó **∞/∞**, transformando la diferencia $f(x) - g(x)$ en un cociente de funciones.

EJEMPLO 8. Hallar $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right]$

Solución

$$\lim_{x \to 0^+} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right] = \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x} \qquad (0/0)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - 1}{x \cos x + \operatorname{sen} x} \qquad (0/0)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-\operatorname{sen} x}{-x \operatorname{sen} x + 2\cos x} = \frac{0}{2} = 0$$

POTENCIAS INDETERMINADAS. Indeterminadas 0^0, ∞^0, 1^∞

Se busca

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} . \qquad (1)$$

Son posibles las siguientes formas indeterminadas:

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, indeterminada 0^0

2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, indeterminada ∞^0

3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$, indeterminada 1^∞

Si hacemos $y = [\,f(x)\,]^{g(x)}$ y tomamos logaritmo tenemos:

$$\ln y = g(x)\ \ln f(x) \qquad \textbf{(2)}$$

De este modo hemos transformado a cualquiera de las tres indeterminadas anteriores en la ya conocida indeterminada $0\cdot\infty$, la cual, como ya sabemos, es transformada en 0/0 ó ∞/∞.

Si $\lim\limits_{x\to a} \ln y = \lim\limits_{x\to a} g(x)\ \ln f(x) = L, \qquad \textbf{(3)}$

entonces, la continuidad de la función logaritmo nos permite meter el límite dentro de ln y. En consecuencia, de (3):

$$L = \lim_{x\to a} \ln y = \ln\left(\lim_{x\to a} y\right) = \ln\left(\lim_{x\to a}[\,f(x)\,]^{g(x)}\right) \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to a}[\,f(x)]^{g(x)} = e^{L}$$

y el problema queda resuelto.

En resumen, se procede en tres pasos:

1. Se toma logaritmo y se simplifica: $y = [\,f(x)]^{g(x)} \Rightarrow \ln y = g(x)\ln f(x)$

2. Se halla $\lim\limits_{x\to a} g(x)\ \ln f(x) = L$

3. $\lim\limits_{x\to a}[\,f(x)]^{g(x)} = e^{L}$

EJEMPLO 9. Hallar $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{1+\ln x}}$

Solución

Tenemos que $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2}{1+\ln x} = 0$. Este es un caso 0^0.

Ahora,

$$y = x^{\frac{2}{1+\ln x}} \Rightarrow \ln y = \frac{2}{1+\ln x}\ln x \Rightarrow \ln y = 2\frac{\ln x}{1+\ln x} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = 2\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1+\ln x} \qquad (\infty/\infty)$$

$$= 2\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{1/x} = 2\lim_{x\to 0^+}(1) = 2(1) = 2$$

Luego, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{1+\ln x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} y = e^2$

EJEMPLO 10. Usando la regla de L'Hopital probar que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{nx} = e^{na}$$

Solución

Este límite es una indeterminada de la forma 1^{∞}. Bien,

$$y = \left(1+\frac{a}{x}\right)^{nx} \Rightarrow \ln y = nx\,\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) = n\,\frac{\ln(1+a/x)}{1/x} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y = n\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+a/x)}{1/x} \qquad (0/0)$$

$$= n\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\dfrac{-a/x^2}{1+a/x}\right]}{-1/x^2} = n\lim_{x\to+\infty}\frac{a}{1+a/x} = na$$

Luego,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{nx} = e^{na}$$

EJEMPLO 11. Hallar el valor de a tal que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x} = 9$

Solución

En primer lugar, hallamos $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}$.

Tenemos que: $\dfrac{x+a}{x-a} = 1+\dfrac{2a}{x-a}$.

Además, si $z = x-a$ entonces $x = z+a$ y $x\to+\infty \Leftrightarrow z\to+\infty$. Luego,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{x} = \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{2a}{z}\right)^{z+a}$$

$$= \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{2a}{z}\right)^{a}\left(1+\frac{2a}{z}\right)^{z} = \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{2a}{z}\right)^{a}\lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{2a}{z}\right)^{z}$$

$$= (1+0)^{a}\lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{2a}{z}\right)^{z} = \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{2a}{z}\right)^{z} = e^{2a} \quad \text{(problema 10)}$$

Por último,

$$e^{2a} = 9 \Rightarrow 2a = \ln 9 = \ln 3^2 = 2\ln 3 \Rightarrow a = \ln 3$$

EJEMPLO 12. Hallar $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\text{sen } x}$

Solución

Este límite es una indeterminada de la forma ∞^0. Bien,

$$y=\left(\frac{1}{x}\right)^{\text{sen } x} \Rightarrow \ln y=\text{sen } x \ \ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\text{sen } x \ \ln x=-\frac{\ln x}{\text{cosec } x} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^+} y=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\text{cosec } x} \qquad (\infty/\infty)$$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-\text{cosec } x \ \cot x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{sen}^2 x}{x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\text{sen } x}{x}\right)(\tan x)=(1)(0)=0$$

Luego, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\text{sen } x}=e^0=1.$

PROBLEMAS RESUELTOS 5.4

PROBLEMA 1. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\text{sen } x}$

Solución

Este límite es una indeterminada de la forma $\dfrac{0}{0}$. Bien,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\text{sen } x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x} \qquad (0/0)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\text{sen } x} \qquad (0/0)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2$$

PROBLEMA 2. Hallar $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x \tan x} \right]$

Solución

Este límite es una indeterminada de la forma $\infty - \infty$. Bien,

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right] = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \tan x} \qquad (0/0)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{x^2 \sec^2 x + 2x \tan x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{\dfrac{x^2}{\cos^2 x} + \dfrac{2x \operatorname{sen} x}{\cos x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 + 2x \operatorname{sen} x \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 + x \operatorname{sen} 2x} \qquad (0/0)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{2x + 2x \cos 2x + \operatorname{sen} 2x} \qquad (0/0)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x}{2 - 4x \operatorname{sen} 2x + 2\cos 2x + 2\cos 2x} = \frac{2}{2 - 0 + 2 + 2} = \frac{1}{3}$$

PROBLEMA 3. Hallar $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$, donde $n \geq 1$

Solución

Este límite es una indeterminada de la forma $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty$. Bien,

$$\lim_{x \to +\infty} x^n \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}}{x^{-n}} \qquad (0/0)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(-\dfrac{\pi}{x^2} \right) \cos \dfrac{\pi}{x}}{-n x^{-n-1}} = \frac{\pi}{n} \lim_{x \to +\infty} \frac{\cos \dfrac{\pi}{x}}{\dfrac{1}{x^{n-1}}} = \begin{cases} \pi, & \text{si } n = 1 \\ +\infty, & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

PROBLEMA 4. Hallar $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} \dfrac{\tan x}{\tan 5x}$

Solución

Este límite es una indeterminada de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$. Bien,

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{\tan x}{\tan 5x} = \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{\sec^2 x}{5\sec^2 5x} = \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{\cos^2 5x}{5\cos^2 x} \qquad (0/0)$$

$$= \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{-10\cos 5x \text{ sen } 5x}{-10\cos x \text{ sen } x} = \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{\text{sen } 10x}{\text{sen } 2x} \qquad (0/0)$$

$$= \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{10\cos 10x}{2\cos 2x} = \frac{10(-1)}{2(-1)} = 5.$$

PROBLEMA 5. Probar que $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x = 1$

Solución

Tenemos que $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$. Luego, este es un caso 0^0.

Ahora,

$$y = x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x = \frac{\ln x}{1/x} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \qquad (\infty/\infty)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

Luego,

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} y = e^0 = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} x^x = 1$$

PROBLEMA 6. Hallar $\lim\limits_{x \to 1^-} (2-x)^{\tan(\pi x/2)}$

Solución

Este límite es una indeterminada de la forma 1^∞. Bien,

$$y = (2-x)^{\tan(\pi x/2)} \Rightarrow \ln y = \tan\frac{\pi x}{2} \ln(2-x) = \frac{\ln(2-x)}{\cot\frac{\pi x}{2}} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to 1^-} \ln y = \lim_{x \to 1^-} \frac{\ln(2-x)}{\cot \frac{\pi x}{2}} \qquad (0/0)$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{-1/(2-x)}{-\frac{\pi}{2}\operatorname{cosec}^2 \frac{\pi x}{2}} = \frac{-1/(2-x)}{-\frac{\pi}{2}(1)^2} = \frac{2}{\pi}$$

Luego, $\lim_{x \to 1^-} (2-x)^{\tan(\pi x/2)} = e^{2/\pi}$

PROBLEMA 7. Hallar $\lim_{x \to +\infty} \left(a^{1/x} + b^{1/x} \right)^x$

Solución

Este límite es una indeterminada de la forma 1^∞.

$$y = \left(a^{1/x} + b^{1/x} \right)^x \Rightarrow \ln y = x \ln\left(a^{1/x} + b^{1/x} \right) = \frac{\ln(a^{1/x} + b^{1/x})}{1/x}$$

Luego,

$$\lim_{x \to +\infty} \ln y = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{a^{1/x}\ln a + b^{1/x}\ln b}{a^{1/x} + b^{1/x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-1/x^2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{a^{1/x}\ln a + b^{1/x}\ln b}{a^{1/x} + b^{1/x}} = \frac{a^0 \ln a + b^0 \ln 5}{a^0 + b^0}$$

$$= \frac{\ln a + \ln b}{1+1} = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \frac{1}{2}\ln ab = \ln\sqrt{ab}$$

En consecuencia,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(a^{1/x} + b^{1/x} \right)^x = e^{\ln\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$$

PROBLEMA 8. El marqués de L'Hôpital en su libro ***Analyse de Infiniment petits*** (el primer libro de Cálculo, publicado en 1.696), para ilustrar la regla que ahora lleva su nombre, usó el siguiente límite, el cual pedimos calcular.

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}, \text{ donde } a > 0.$$

Solución

Este límite es una indeterminada de la forma $\frac{0}{0}$. Bien,

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}} = \lim_{x \to a} \frac{\left(2a^3x - x^4\right)^{\frac{1}{2}} - a\left(a^2x\right)^{\frac{1}{3}}}{a - \left(ax^3\right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{2}\left(2a^3x - x^4\right)^{-1/2}\left(2a^3 - 4x^3\right) - \frac{1}{3}a\left(a^2x\right)^{-2/3}\left(a^2\right)}{-\frac{1}{4}\left(ax^3\right)^{-3/4}\left(3ax^2\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(2a^4 - a^4\right)^{-1/2}\left(2a^3 - 4a^3\right) - \frac{1}{3}a\left(a^3\right)^{-2/3}\left(a^2\right)}{-\frac{1}{4}\left(a^4\right)^{-3/4}\left(3a^3\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(a^4\right)^{-1/2}\left(-2a^3\right) - \frac{1}{3}a\left(a^3\right)^{-2/3}\left(a^2\right)}{-\frac{3}{4}\left(a^4\right)^{-3/4}\left(a^3\right)} = \frac{-a - \frac{1}{3}a}{-\frac{3}{4}} = \frac{16a}{9}$$

PROBLEMA 9. Hallar $\lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{sen}^{-1}x \operatorname{cosec} x$

Solución

Este límite es una indeterminada de la forma $0 \cdot \infty$. Bien,

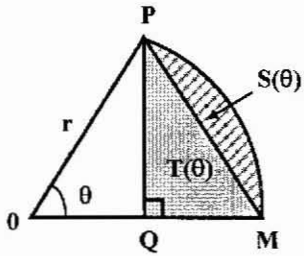
$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen}^{-1}x \operatorname{cosec} x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^{-1}x}{\operatorname{sen} x} \qquad (0/0).$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}{\cos x} = \frac{\frac{1}{1}}{1} = 1.$$

PROBLEMA 10. Se tiene un sector circular correspondiente a un ángulo central θ en un círculo de radio r. Sea $S(\theta)$ el área del segmento circular formado por la cuerda PM y el arco PM. Sea $T(\theta)$ el área del triángulo rectángulo PQM. Hallar

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{S(\theta)}{T(\theta)}$$

Solución



$$S(\theta) = \text{Area sector OPM} - \text{Area triángulo OPM}$$

$$= \frac{1}{2}r^2\,\theta - \frac{1}{2}(\,\overline{OM}\,)(\,\overline{0P}\,)$$

$$= \frac{1}{2}r^2\,\theta - \frac{1}{2}(\,r\,)(\,r\,\text{sen}\,\theta\,)$$

$$= \frac{1}{2}r^2\,\theta - \frac{1}{2}r^2\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}r^2\left(\theta - \text{sen}\,\theta\right)$$

$$T(\theta) = \frac{1}{2}(\,\overline{QM}\,)(\overline{QP}\,) = \frac{1}{2}(\,\overline{OM} - \overline{OQ}\,)(\,\overline{QP}\,) = \frac{1}{2}(\,r - r\cos\theta\,)(\,r\,\text{sen}\,\theta\,)$$

$$= \frac{1}{2}r^2(\,1 - \cos\theta\,)(\,\text{sen}\,\theta\,) = \frac{1}{2}r^2(\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,\theta\cos\theta\,)$$

$$= \frac{1}{2}r^2\left(\,\text{sen}\,\theta - \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2\theta\,\right) = \frac{1}{4}r^2(\,2\text{sen}\,\theta - \,\text{sen}\,2\theta\,)$$

Ahora,

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{S(\theta)}{T(\theta)} = \lim_{0\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}r^2\left(\theta - \text{sen}\theta\right)}{\frac{1}{4}r^2\left(2\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,2\theta\right)} = 2\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\theta - \text{sen}\,\theta}{2\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,2\theta} \qquad (0/0)$$

$$= 2\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1 - \cos\theta}{2\cos\theta - 2\cos 2\theta} \qquad (0/0)$$

$$= 2\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\text{sen}\,\theta}{-2\text{sen}\,\theta + 4\text{sen}\,2\theta} \qquad (0/0)$$

$$= 2\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\cos\theta}{-2\cos\theta + 8\cos 2\theta} = 2\,\frac{1}{-2+8} = \frac{1}{3}$$

PROBLEMA 11. Probar la regla de L'Hôpital para el caso 0/0. Si

1. f y g son diferenciables y $g'(x) \neq 0$ cerca de a, excepto posiblemente en a.
2. $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$
3. Existe $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (finito o infinito).

Entonces

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demostración

La demostración está basada en el Teorema del Valor Medio de Cauchy.

Consideramos que el límite es finito.

Procedemos para el caso $x \to a^+$. El caso $x \to a^-$ es similar y si los dos se cumplen, entonces se cumple para $x \to a$.

La existencia de $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ implica la existencia de $f'(x)$ y de $g'(x)$ en un intervalo $(a, b]$ en el cual $g'(x) \neq 0$.

Se tiene que $g(b) \neq 0$, ya que si $g(b) = 0$, por el teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$g(b) - g(a) = g'(c)(b - a) \Rightarrow 0 - 0 = g'(c)(b - a) \quad g'(c) = 0,$$

lo cual contradice el hecho el que $g'(x) \neq 0$ en $(a, b]$

Como $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0$, redefinimos f y g, si es necesario, haciendo $f(a) = 0$ y $g(a) = 0$. De este modo, f y g son continuas en $[a, b]$ y son diferenciables en (a, b). Luego, por el teorema del valor medio de Cauchy, existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{f(b) - 0}{g(b) - 0} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Ahora, si hacemos $b \to a^+$, y como $a < c < b$, esto obliga a que $c \to a^+$. Se tiene, entonces

$$\lim_{b \to a^+} \frac{f(b)}{g(b)} = \lim_{c \to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

lo que es equivalente a la igualdad de límites de la tesis.

PROBLEMAS PROPUESTOS 5.4

En los problemas del 1 al 43 hallar el límite indicado.

1. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3}{x^2 - a^2}$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + 1 - e^x}{x^2}$

3. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x - \pi}$

4. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1 + \cos x}{\tan^2 x}$

5. $\lim_{x \to \pi/4} \dfrac{\sec^2 x - 2\tan x}{1+\cos 4x}$

6. $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{\cot x}{\cot 2x}$

7. $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{\pi/x}{\cot(\pi x/2)}$

8. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x \tan^{-1} x}{1-\cos x}$

9. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

10. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln \operatorname{sen} nx}{\ln \operatorname{sen} x}$

11. $\lim_{x \to 0} \dfrac{10^x - 5^x}{x^2}$

12. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln \ln x}{\sqrt{x}}$

13. $\lim_{x \to \pi} \dfrac{(x-\pi)^2}{\operatorname{sen}^2 x}$

14. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$

15. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\operatorname{sen}^2 x - x^2}$

16. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 2\cos x - 2}{x^4}$

17. $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sec^2 x - 2\tan x}{1+\cos 4x}$

18. $\lim_{x \to 1} \left[\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{\ln x} \right]$

19. $\lim_{x \to 1} \left[\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x} \right]$

20. $\lim_{x \to 0} \left[\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \dfrac{1}{x^2} \right]$

21. $\lim_{x \to 0} \left[\dfrac{1}{x \operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x^2} \right]$

22. $\lim_{x \to 0^+} (1-\cos x)\cot x$

23. $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (1-\tan x)\sec 2x$

24. $\lim_{x \to 1} (1-x)\tan \dfrac{\pi x}{2}$

25. $\lim_{x \to a} \left(x^2 - a^2\right) \tan \dfrac{\pi x}{2a}$

26. $\lim_{x \to +\infty} x^{1/x}$

27. $\lim_{x \to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$

28. $\lim_{x \to 1} x^{1/(1-x)}$

29. $\lim_{x \to 0^+} (1-2x)^{1/x}$

30. $\lim_{x \to 0^+} \left(1+x^2\right)^{1/x}$

31. $\lim_{x \to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$

32. $\lim_{x \to 0} (\operatorname{sen} x)^{x^2}$

33. $\lim_{x \to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\tan x}$

34. $\lim_{x \to 0^+} (\cot x)^{1/\ln x}$

35. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cosh x - 1}{1-\cos x}$

36. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan^{-1} 2x}{\tan^{-1} 3x}$

37. $\lim_{x \to +\infty} \left(x - \ln(x^2+1)\right)$. Sugerencia: $\ln e^x = x$

38. $\lim_{x \to 0} (1+\operatorname{senh} x)^{2/x}$

39. $\displaystyle \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$

40. $\displaystyle \lim_{x\to +\infty}\left(e^x - x\right)^{1/x}$

41. $\displaystyle \lim_{x\to +\infty}\frac{(\ln x)^n}{x}$. Sugerencia: $z = \ln x$

42. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}3x - 3\tan^{-1}x}{x^3}$

43. $\displaystyle \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}}$ Sugerencia: $z = \sqrt[n]{x}$

44. Si f' es continua, probar:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = f'(x)$$

Sugerencia: Usar regla de L'Hôpital derivando respecto a h.

45. Si f'' es continua, probar:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} = f''(x)$$

Sugerencia: Usar regla de L'Hôpital derivando 2 veces respecto a h.

SECCION 5.5

TRAZADO CUIDADOSO DEL GRAFICO DE UNA FUNCION

A estas alturas de nuestro curso ya estamos en condiciones de esbozar con mucha precisión el gráfico de una función $y = f(x)$. La técnica puede resumirse en los siguientes pasos:

A. Dominio. Se determina el dominio de la función

B. Simetría y periodicidad

Determinar si se tiene simetría respecto al eje Y o respecto al origen. En caso afirmativo, el trabajo se reduce a la mitad: Sólo es necesario graficar los puntos con abscisa $x \geq 0$.

Si la función viene expresada en términos de las funciones trigonométricas, determinar la periodicidad. Si esta es p, entonces sólo construye el gráfico en un intervalo de longitud p, que puede ser $[0, p]$ o $[-p/2, p/2]$. Luego esta parte del gráfico se traslada a los otros intervalos.

Recordar que:

a. Una función es **periódica** si existe una constante positiva p tal que

$$f(x+p) = f(x)\ ,\ \forall\ x \in \text{Dom}(f)$$

Se llama periodo al menor p que satisface la condición anterior.

b. La gráfica de f es simétrica respecto al eje Y $\Leftrightarrow$

f es par: $f(-x) = f(x)$, $\forall$ x $\in$ Dom(f).

c. La gráfica de f es simétrica respecto al origen $\Leftrightarrow$

f es impar: $f(-x) = -f(x)$, $\forall$ x $\in$ Dom(f).

C. Intersecciones con los Ejes.

La intersección con el eje Y se encuentra haciendo x = 0. La intersección con el eje X se encuentra resolviendo la ecuación f(x) = 0. Si la ecuación es difícil de resolver, se recomienda no insistir.

D. Continuidad y asíntotas.

Determinar las discontinuidades y los intervalos de continuidad. Calcular los límites unilaterales en los extremos de estos intervalos de continuidad. Estos límites nos proporcionan las asíntotas verticales y horizontales.

E. Estudio de f '. Intervalos de monotonía. Máximos y mínimos.

Hallar los puntos críticos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos locales.

F. Estudio de f ''. Concavidad y puntos de inflexión.

Hallar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

G. Esbozar el gráfico.

Esbozar el gráfico de f con la información encontrada en los pasos anteriores. Si es necesario, calcular algunos puntos extras.

EJEMPLO 1. Graficar la función racional $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$.

Solución

A. Dominio. Dom(f) = Dom(f) = $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

B. Simetría y periodicidad. No es periódica.

Esta función es par. En efecto: $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^2 - 4} = \dfrac{x^2}{x^2 - 4} = f(x)$.

Luego, el gráfico de f es simétrica respecto al eje Y. En consecuencia, es suficiente construir la parte del gráfico que está a la derecha del eje Y; es decir la parte que corresponde al intervalo $[0, +\infty)$. La otra parte se obtiene reflejando en el eje Y la parte construida.

C. Intersecciones con los Ejes.

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$. Luego, la gráfica de f intersecta al eje Y en el punto (0, 0).

Por otro lado, $f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. Luego, la gráfica de f intersecta al eje X en el punto (0, 0).

D. Continuidad y asíntotas.

La función f es discontinua en -2 y 2. Los intervalos de continuidad son: $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, +\infty)$.

Asíntotas Verticales

a. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2}{x^2-4} = +\infty$ **b.** $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2}{x^2-4} = -\infty$

Luego, la recta $x = 2$ es un asíntota vertical. Por simetría, la recta $x = -2$ también es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2-4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - 4/x^2} = 1$$

Luego, la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.

E. Estudio de $f'(x)$. Intervalos de Monotonía. Máximos y mínimos.

$$f'(x) = \frac{-8x}{(x^2-4)^2}$$

Puntos Críticos.

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Además, f' no está definida en $x = -2$ y $x = 2$, pero estos puntos tampoco están en el dominio. Luego, f tiene un único punto crítico que es 0.

Intervalos de monotonía.

$-\infty$ a -2	-2 a 0	0 a 2	2 a $+\infty$
$f'(x) = \dfrac{-(-)}{(+)} = +$	$f'(x) = \dfrac{-(-)}{(+)} = +$	$f'(x) = \dfrac{-(+)}{(+)} = -$	$f'(x) = \dfrac{-(+)}{(+)} = -$
$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

Mirando la tabla deducimos que $f(0) = 0$ es un máximo local.

F. Estudio de $f''(x)$. Concavidad y Puntos de inflexión.

$$f''(x) = \frac{8(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$$

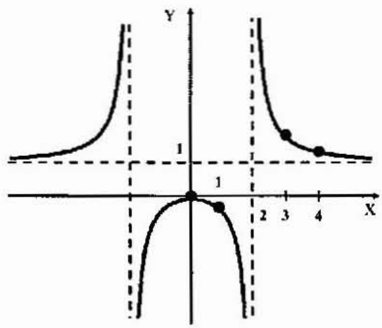
$f''(x)$ no se anula en ningún punto y no está definida en -2 y 2. Pero estos puntos no están en el dominio de f. En consecuencia, la gráfica no tiene puntos de inflexión.

Intervalos de Concavidad.

$-\infty$ a -2	-2 a 2	2 a $+\infty$
$f''(x) = \frac{(+)}{(+)} = +$	$f''(x) = \frac{(+)}{(-)} = -$	$f''(x) = \frac{(+)}{(+)} = +$
$\cup$	$\cap$	$\cup$

G. Esbozo del gráfico.

x	f(x)
0	0
1	$-\frac{1}{3}$
3	$\frac{9}{5}$
4	$\frac{4}{3}$



EJEMPLO 2. Graficar la función $f(x) = 2\text{sen } x - \text{sen } 2x$

Solución

A. Dominio. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

B. Simetría y periodicidad.

i. f es periódica con periodo 2π. Esto es, $f(x + 2\pi) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

En consecuencia, solamente precisamos graficar la función en un intervalo de longitud 2π. Escogemos el intervalo $[0, 2\pi]$. Para obtener el gráfico completo, trasladamos esta porción al resto de intervalos.

ii. La función f es impar y, por tanto, su gráfica es simétrica respecto al origen.

$$f(-x) = 2\text{sen }(-x) - \text{sen } 2(-x) = -2\text{sen } x - (-\text{sen } 2x)$$

$$= -(2 \text{ sen } x - \text{sen } 2x) = -f(x)$$

En consecuencia, solamente precisamos graficar la función a la derecha del origen, o sea, en el intervalo $[0, \pi]$. Sin embargo, por razones didácticas, persistimos en tomar el intervalo$[0, 2\pi]$. .

C. Intersecciones con los ejes..

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 2 \text{ sen } 0 - \text{sen } 2(0) = 2(0) - 0 = 0.$

Luego, la gráfica de f intersecta al eje Y en (0, 0).

Por otro lado,

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\text{sen}\, x - \text{sen}\, 2x = 0 \Leftrightarrow 2\text{sen}\, x - 2\text{sen}\, x \cos x = 0$

$\Leftrightarrow 2\text{sen}\, x\,(1 - \cos x) = 0 \Rightarrow \text{sen}\, x = 0$ ó $\cos x = 1$

$\Rightarrow x = 0, x = 2\pi$ y $x = \pi$

Luego, la gráfica de f intersecta al eje X en (0, 0), $(\pi, 0)$ y $(2\pi, 0)$

D. Continuidad y asíntotas.

f es continua en $[0, 2\pi]$ y no tiene asíntotas.

E. Estudio de f '(x). Intervalos de monotonía. Máximos y Mínimos

Puntos Críticos:

$f'(x) = 2\cos x - 2\cos 2x = 2\cos x - 2(2\cos^2 x - 1) \Rightarrow$

$f'(x) = -2(2\cos^2 x - \cos x - 1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4(2)(-1)}}{4} = \dfrac{1 \pm 3}{4}$

$\Rightarrow \cos x = 1$ ó $\cos x = -1/2$

$\Rightarrow (x = 0$ ó $x = 2\pi)$ ó $(2\pi/3$ ó $4\pi/3)$

Los puntos críticos son: $(0$ ó $2\pi)$ ó $(2\pi/3$ ó $4\pi/3)$

Intervalos de monotonía:

0 — **2π/3**	**2π/3** — **4π/3**	**4π/3** — **2π**
$f'(x) = -2(-) = +$ ↗	$f'(x) = -2(+) = -$ ↘	$f'(x) = -2(-) = +$ ↗

La tabla nos dice que f tiene un máximo relativo en $x = 2\pi/3$ y tiene un mínimo relativo en $x = 4\pi/3$, cuyos valores son:

$f(2\pi/3) = 2\text{sen}\,(2\pi/3) - \text{sen}\, 2(2\pi/3) = 2(\sqrt{3}/2) - (-\sqrt{3}/2) = 3\sqrt{3}/2 \approx 2{,}6$

$f(2\pi/3) = 2\text{sen}\,(4\pi/3) - \text{sen}\, 2(4\pi/3) = 2(-\sqrt{3}/2) - (\sqrt{3}/2) = -3\sqrt{3}/2 \approx -2{,}6$

Sin embargo, para $x = 0$ y $x = 2\pi$, la tabla nos da información incompleta, ya que no nos dice como es f a la izquierda de 0 a la derecha de 2π. Pero, debido a la periodicidad, concluimos que tanto a la izquierda de 0 como a la derecha de 2π, la función es creciente. Luego, $x = 0$ y $x = 2\pi$ no dan lugar a extremos relativos.

F. Estudio de f ''(x). Concavidad y puntos de inflexión

$$f'(x) = -2(2\cos^2 x - \cos x - 1) \Rightarrow$$

$$f''(x) = -2(-4\cos x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x) = -2\operatorname{sen} x\,(1 - 4\cos x)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2\operatorname{sen} x\,(1 - 4\cos x) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = 0, \text{ ó } \cos x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (x = 0 \text{ ó } \pi) \text{ ó } (x = \theta_1 \approx 1{,}32 \text{ o } x = \theta_2 \approx 4{,}97)$$

Intervalos de concavidad:

0 $\quad$ **$\theta_1 \approx 1{,}32$** $\quad$ **π** $\quad$ **$\theta_2 \approx 4{,}97$** $\quad$ **2π**

$f''(x) = -(+)(-) = +$ $\cup$	$f''(x) = -(+)(+) = -$ $\cap$	$f''(x) = -(-)(+) = +$ $\cup$	$f''(x) = -(-)(-) = -$ $\cap$

La tabla nos dice que son puntos de inflexión:

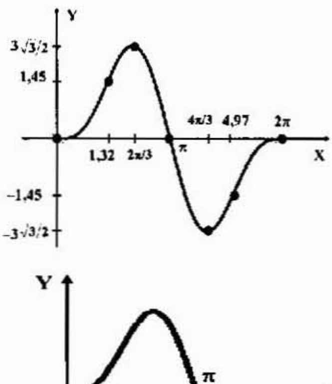
$(\theta_1, f(\theta_1)) = (1{,}32, f(1{,}32)) \approx (1{,}32, 1{,}45)$, $\quad (\pi, f(\pi)) = (\pi, 0)$ $\quad$ y

$(\theta_2, f(\theta_2)) = (4{,}97, f(4{,}97)) \approx (4{,}97, 1{,}45)$

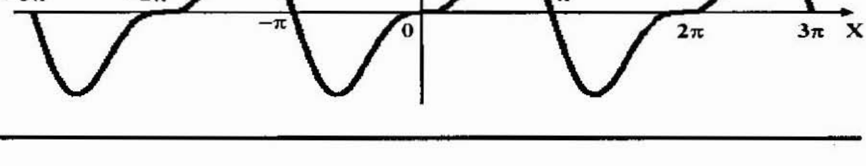
De la periodicidad de f obtenemos que $(0, f(0)) = (0, 0)$ y $(2\pi, f(2\pi)) = (2\pi, 0)$ también son puntos de inflexión.

G. Esbozo de la gráfica.

f en $[0, 2\pi]$



f en ℝ



EJEMPLO 3. Graficar la siguiente función $f(x) = e^{-x^2/2}$

Solución

A. Dominio. Dom(f) = $\mathbb{R}$.

B. Simetrías y periodicidad. No es periódica.

f es par. En efecto: $f(-x) = e^{-(-x)^2/2} = e^{-x^2/2} = f(x)$.
En consecuencia, el gráfico de f es simétrica respecto al eje Y.

C. Intersección con los ejes.

Con el eje Y: $f(0) = e^{-0} = 1$
Luego, el gráfico corta al eje Y en el punto (0, 1).

Con el eje X: $e^{-x^2/2} = 0$ no tiene solución. Luego, el gráfico no corta al eje X.

D. Continuidad y asíntotas.

La función $f(x) = e^{-x^2/2}$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto, no hay asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales.

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2/2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x^2/2}} = 0 \quad \text{y}$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x^2/2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{x^2/2}} = 0$$

Luego, y = 0, el eje X, es una asíntota horizontal.

E. Estudio de f '. Intervalos de monotonía. Máximos y mínimos

$$f'(x) = e^{-x^2/2} D_x\left(-x^2/2\right) = -x e^{-x^2/2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x e^{-x^2/2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Luego, f tiene un solo punto crítico, que es x = 0.

Intervalos de monotonía:

$-\infty$ 0	0 $+\infty$
$f'(x) = -(-)(+) = +$ ↗	$f'(x) = -(+)(+) = -$ ↘

f es creciente en el intervalo $(-\infty, 0]$ y es decreciente en $[0, +\infty)$. Además f tiene un máximo en x = 0, que vale f(0) = 1.

F. Estudio de f ''. Concavidad. Puntos de inflexión

$$f'(x) = -x\,e^{-x^2/2} \Rightarrow f''(x) = -x\,e^{-x^2/2}\,D_x\left(-x^2/2\right) - e^{-x^2/2} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \left(x^2 - 1\right)e^{-x^2/2}$$

Ahora,

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 1\right)e^{-x^2/2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Intervalos de concavidad:

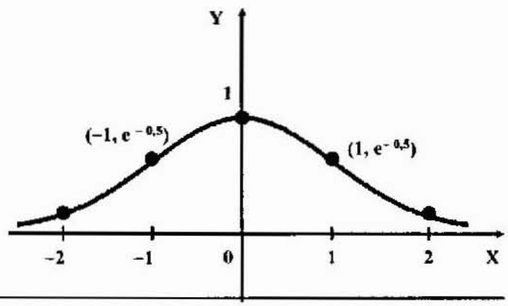
$-\infty$ a -1	-1 a 1	1 a $+\infty$
$f''(x) = (+)(+) = +$	$f''(x) = (-)(+) = -$	$f''(x) = (+)(+) = +$
$\cup$	$\cap$	$\cup$

La tabla nos dice que el gráfico de f es cóncavo hacia arriba en los intervalos $(-\infty, -1]$ y $[1, +\infty)$, y que es cóncava hacia abajo en el intervalo $[-1,1]$.

Luego, $(-1, f(-1)) = (-1, e^{-0,5})$ y $(1, f(1)) = (1, e^{-0,5})$ son puntos de inflexión,

G. Esbozo del gráfico

x	f(x)
0	1
1	$e^{-0,5} \approx 0,606$
2	$e^{-2} \approx 0,135$



OBSERVACION. En la Estadística y en la Teoría de las Probabilidades aparecen con frecuencia la siguiente función, llamada **función de densidad normal**:

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)},$$

donde μ y σ con constantes, llamadas **media** y **desviación estándar**, respectivamente.

La gráfica de esta función se obtiene fácilmente de la gráfica del ejemplo anterior, mediante las técnicas de traslación y estiramiento.

GRAFICAS CON ASINTOTAS OBLICUAS

EJEMPLO 4. Graficar la función $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

Solución

A. Dominio.

$x \in Dom(f) \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1$ ó $x > 1 \Leftrightarrow$

$$Dom(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

B. Simetrías. No es periódica.

La función f es par. En efecto:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{\sqrt{(-x)^2-1}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = f(x)$$

Luego, la gráfica de f es simétrica respecto al eje Y y sólo debemos concentrarnos de graficar f en el intervalo $(1, +\infty)$.

C. Intersecciones con los ejes.

El gráfico de f no corta al eje Y, ya que $x = 0$ no está en el dominio de f.

$f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = 0 \Rightarrow x = 0$. Pero 0 no está en el dominio de f. Luego, el gráfico de f no corta al eje X.

D. Continuidad y asíntotas.

f es continua en todo su dominio $= (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Asíntotas Verticales:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$$

Luego, $x = 1$ es una asíntota vertical.

Asíntotas Horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{1-1/x^2}} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

Luego, no hay asíntotas horizontales.

Asíntotas Oblicuas:

De acuerdo al ejemplo 2 se la sección 2.8, las recta $y = x$, $y = -x$ son asíntotas oblicuas.

E. Estudio de f '(x). Intervalos de Monotonía. Máximos y Mínimos.

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}\,(2x) - x^2\left(2x/2\sqrt{x^2-1}\right)}{x^2-1} = \frac{x^3-2x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{x^3-2x}{(x^2-1)^{3/2}} = \frac{x(x^2-2)}{(x^2-1)^{3/2}} = \frac{x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x^2-1)^{3/2}}$$

$$f'(x) = \frac{x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x^2-1)^{3/2}} = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \sqrt{2}\ ,\ x = -\sqrt{2}$$

Sólo $x = \sqrt{2}$ es punto crítico en el intervalo $(1, +\infty)$.

Intervalos de monotonía en el intervalo $(1, +\infty)$.

1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x) = \frac{(+)(-)(+)}{(+)} = -$ ↘	$f'(x) = \frac{(+)(+)(+)}{(+)} = +$ ↗	

f tiene un mínimo relativo en $x = \sqrt{2}$ y su valor es $f(\sqrt{2}) = 2$

F. Estudio de f "(x). Intervalos de Concavidad. Puntos de Inflexión.

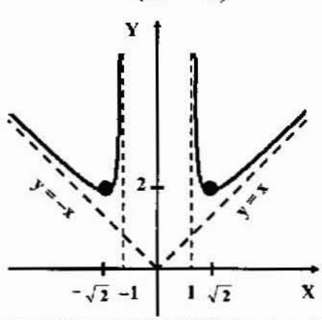
$$f'(x) = \frac{x^3-2x}{(x^2-1)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{(x^2-1)^{3/2}(3x^2-2) - (x^3-2x)(3/2)(x^2-1)^{1/2}(2x)}{(x^2-1)^3}$$

$$= \frac{(x^2-1)^{1/2}\left[(x^2-1)(3x^2-2) - 3x(x^3-2x)\right]}{(x^2-1)^3} = \frac{x^2+2}{(x^2-1)^{5/2}}$$

Como $x^2 + 2 = 0$ no tiene soluciones reales y $f''(x) > 0\ \ \forall\ x$ en $(1, +\infty)$ concluimos que la gráfica no tiene puntos de inflexión en $(1, +\infty)$ y que en este intervalo, la gráfica es cóncava hacia arriba.

F. Esbozo de la gráfica.



EJEMPLO 5. Graficar la función $f(x) = xe^{1/x}$

Solución

A. Dominio. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{ 0 \} = (-\infty , 0) \cup (0, +\infty)$

B. Simetrías y periodicidad. Ninguna simetría y no es periódica.

C. Intersección con los ejes

Como $x = 0$ no está en dominio de f, el gráfico de f no corta al eje Y.
Por otro lado,

$f(x) = 0 \Leftrightarrow xe^{1/x} = 0 \Rightarrow x = 0$. Pero $x = 0$ no está en el dominio de f.
Luego, el gráfica de f no corta al eje X.

D. Continuidad y asíntotas.

f es continua en todo su dominio $= (-\infty , 0) \cup (0, +\infty)$

Asíntotas verticales:

Los límites siguientes son indeterminaciones del tipo $0 \cdot \infty$, por lo que aplicamos la regla de L'Hospital.

$$\lim_{x\to 0^+} x e^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}\left(-1/x^2\right)}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} x e^{1/x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}\left(-1/x^2\right)}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = e^{-\infty} = 0$$

Luego, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical (sólo hacia arriba).

Asíntotas Horizontales:

$$\lim_{x\to +\infty} x e^{1/x} = (+\infty)e^0 = (+\infty)(1) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} x e^{1/x} = (-\infty)e^0 = (-\infty)(1) = -\infty$$

Luego, la gráfica de f no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas Oblicuas:

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{xe^{1/x}}{x} = \lim_{x\to +\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$$

$$b = \lim_{x\to +\infty} (x e^{1/x} - x) = \lim_{x\to +\infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1/x}(-1/x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$$

En forma enteramente análoga, obtenemos que:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^{1/x}}{x} = 1 \quad \text{y} \quad b = \lim_{x\to-\infty} (x e^{1/x} - x) = 1$$

Luego, la recta $y = x + 1$ es asíntota oblicua, a la derecha y a la izquierda.

E. Estudio de f '(x). Intervalos de Monotonía. Máximos y Mínimos.

$$f'(x) = x e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + e^{1/x} = e^{1/x} - \frac{1}{x}e^{1/x} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{1/x}$$

Puntos Críticos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{1/x} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1$$

Se tiene un solo punto crítico: $x = 1$. Observar que no existe $f'(0)$, pero $x = 0$ no es punto crítico porque $x = 0$ no está en el dominio de f.

Intervalos de Monotonía:

$-\infty$ a 0	0 a 1	1 a $+\infty$
$f'(x) = (+)(+) = +$ ↗	$f'(x) = (-)(+) = -$ ↘	$f'(x) = (+)(+) = +$ ↗

f tiene un mínimo relativo en $x = 1$ y su valor es $f(1) = e \approx 2,72$

F. Estudio de f '' (x). Intervalos de Concavidad. Puntos de Inflexión

$$f'(x) = e^{1/x} - \frac{1}{x}e^{1/x} \Rightarrow$$

$$f''(x) = e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x}e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) - \left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{1/x} = \frac{1}{x^3}e^{1/x}$$

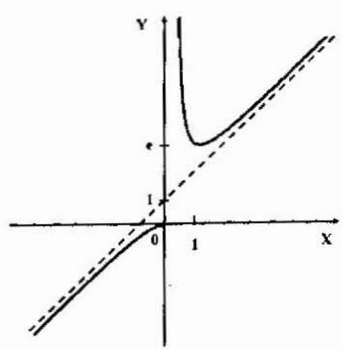
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3}e^{1/x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} = 0.$$

No hay solución.

Intervalos de concavidad:

hasta 0	desde 0
$f''(x) = (-)(+) = -$ $\cap$	$f''(x) = (+)(+) = +$ $\cup$

No hay puntos de inflexión.



F. Esbozo de la gráfica.

PROBLEMAS PROPUESTOS 5.5

Graficar las funciones siguientes:

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ **2.** $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ **3.** $f(x) = 2x + 5x^{2/5}$

4. $f(x) = \dfrac{8x}{x^2+1}$ **5.** $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^{1/3}}$ **6.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

7. $f(x) = \text{sen}\, x + \sqrt{3}\cos x$ en el intervalo $[-\pi,\pi]$ (f es periódica con periodo 2π).

Graficar las funciones siguientes. Ellas tienen asíntotas oblicuas.

8. $f(x) = \dfrac{x^2-3x+6}{x-2}$ **9.** $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{x^2}$

10. $f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$ **11.** $f(x) = x\, e^{1/x^2}$

SECCION 5.6

PROBLEMAS DE OPTIMIZACION

El resto de esta sección lo dedicaremos a resolver problemas de optimización en la Economía, en la Física, en el comercio y, en general, en la vida real. Estos problemas están planteados en términos del lenguaje diario. Nuestra primera labor, la que requiere ingenio, consiste en traducir el problema al lenguaje matemático, quedando expresado mediante una función. La segunda labor es rutinaria, sólo se tiene que calcular el máximo o el mínimo de la función encontrada. Dividimos estos problemas en dos grupos, según el intervalo donde se optimiza la función sea cerrado o no.

PROBLEMAS DE OPTIMIZACION EN INTERVALOS CERRADOS Y FINITOS

En este grupo de problemas el resultado clave que usaremos nos da el teorema 5.1, que afirma que toda función continua en un intervalo cerrado [a, b] tiene máximo y mínimo, y estos son alcanzados en los números críticos o en los extremos a o b.

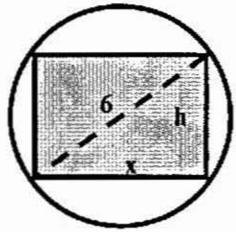
PROBLEMA 1. De un tronco de madera, que tiene una sección circular de 3 dm. de radio, se quiere obtener un tablón de sección rectangular. ¿Qué dimensiones debe tener el rectángulo si se desea que éste tenga área máxima?

Solución

Sean x, h y A la base, la altura y el área del rectángulo, respectivamente. Tenemos que:

$$A = xh \qquad (1)$$

Expresemos la altura en términos de la base. Para esto, observamos que el diámetro, la base y la altura, forman un triángulo rectángulo de hipotenusa 6 dm. Luego, usando el teorema de Pitágoras, tenemos que



$$h = \sqrt{6^2 - x^2} \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$A = x\sqrt{36 - x^2}$$

Esta función, que expresa el área del rectángulo en términos de la base, es la que debemos maximizar. ¿En qué intervalo? Como la longitud de la base no puede ser negativa ni exceder la longitud del diámetro, debemos tener: $0 \leq x \leq 6$.

En resumen, buscamos el máximo de la función

$$A(x) = x\sqrt{36 - x^2} \text{ en el intervalo } [0, 6].$$

Hallemos los puntos críticos:

$$A'(x) = x\frac{-2x}{2\sqrt{36 - x^2}} + \sqrt{36 - x^2} = \frac{36 - 2x^2}{\sqrt{36 - x^2}} = \frac{2(18 - x^2)}{\sqrt{36 - x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(18 - x^2)}{\sqrt{36 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow 18 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3\sqrt{2}$$

Además, $A'(x) = \dfrac{2(18 - x^2)}{\sqrt{36 - x^2}}$ no está definida en 6.

Luego, los puntos críticos de A(x) son $-3\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$ y 6. Como $-3\sqrt{2}$ no está en el intervalo [0, 6] lo desechamos y nos quedamos con $3\sqrt{2}$ y 6

Comparemos los valores A(0), A(6) y $A(3\sqrt{2})$:

$$A(0) = (0)\sqrt{36 - 0^2} = 0, \qquad A(6) = 6\sqrt{36 - 6^2} = 0,$$

$$A(3\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}\sqrt{36 - (3\sqrt{2})^2} = 18$$

Luego, el máximo de A(x) es $A(3\sqrt{2}) = 18$ y es alcanzado en $x = 3\sqrt{2}$.
Las dimensiones del rectángulo de área máxima son:

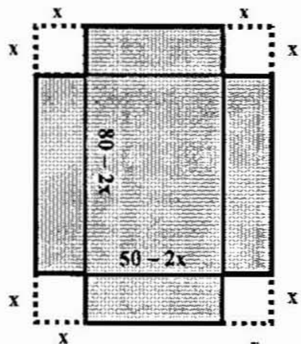
$$\text{Base} = x = 3\sqrt{2} \quad \text{y altura} = h = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$$

Notar que el rectángulo es un cuadrado.

PROBLEMA 2. Un fabricante de envases construye cajas sin tapa, utilizando láminas de cartón rectangulares de 80 cm. de largo por 50 cm. de ancho. Para formar la caja, de las cuatro esquinas de cada lámina se recorta un pequeño cuadrado y luego se doblan las aletas, como indica la figura. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de los cuadrados cortados si se quiere que la caja tenga el mayor volumen posible?

Solución

Sea x la longitud del lado de los cuadrados cortados.



Sabemos que:

Volumen de la caja = (área de la base)(altura)

La altura de la caja es x y su base es un rectángulo de $80 - 2x$ de largo por $50 - 2x$ de ancho. Luego, si V denota el volumen de la caja tenemos que,

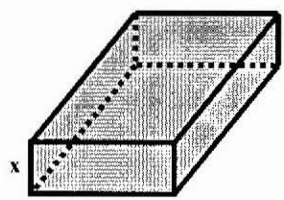
$$V = (80 - 2x)(50 - 2x)(x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$$

La longitud x no puede ser negativa ni puede exceder la mitad del ancho de la lámina inicial. Luego, $0 \leq x \leq 25$.

Debemos hallar el máximo de la función volumen

$$V(x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x,$$

en el intervalo [0, 25].



Hallemos sus puntos críticos:

$$V'(x) = 12x^2 - 520x + 4000$$
$$= 4(x - 10)(3x - 100)$$

Los puntos críticos de V(x) son 10 y $\frac{100}{3}$.

Desechamos $\frac{100}{3}$, por estar fuera del intervalo [0, 25]. Nos quedamos con 10.

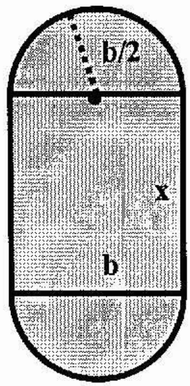
Ahora, comparemos los valores V(0), V(25) y V(10):

$$V(0) = (80 - 2(0))(50 - 2(0))(0) = 0$$
$$V(25) = (80 - 2(25))(50 - 2(25))(25) = 0$$
$$V(10) = (80 - 2(10))(50 - 2(10))(10) = 18.000$$

Luego, el máximo de V(x) es V(10) = 18.000 cm^3 y es alcanzado en x = 10. En consecuencia, la longitud del lado de los cuadrados cortados debe ser de 10 cm.

PROBLEMA 3. Se desea construir una pista de carrera de 400 m. de perímetro. La pista debe estar formada por un rectángulo con dos semicírculos localizados en dos lados opuestos del rectángulo. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del rectángulo si se quiere que el área de éste sea máxima?

Solución



Sean b y x las longitudes de los lados del rectángulo. Su área es:

$$A = bx \qquad \textbf{(1)}$$

El radio de los semicírculos es $\frac{b}{2}$ y, por tanto, la longitud de las dos semicircunferencias es:

$$2(\pi \frac{b}{2}) = \pi b.$$

Como el perímetro de la pista es de 400 m, tenemos:

$$2x + \pi b = 400,$$

Despejamos b:

$$b = \frac{400 - 2x}{\pi} \qquad \textbf{(2)}$$

Reemplazando (2) en (1):

$$A = \frac{400 - 2x}{\pi} x = \frac{2}{\pi}\left(200x - x^2\right)$$

La longitud x es no negativa y no puede exceder la mitad del perímetro. Esto es, $0 \leq x \leq 200$.

Debemos hallar el máximo de la función:

$$A(x) = \frac{2}{\pi}\left(200x - x^2\right) \text{ en el intervalo } [0, 200].$$

Hallemos sus puntos críticos:

$$A'(x) = \frac{2}{\pi}(200 - 2x) = \frac{4}{\pi}(100 - x)$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 100 - x = 0 \Leftrightarrow x = 100$$

Sólo existe un punto crítico, que es 100.

Comparemos los valores $A(0)$, $A(200)$ y $A(100)$:

$$A(0) = \frac{2}{\pi}(200(0) - 0^2) = 0,$$

$$A(200) = \frac{2}{\pi}(200(200) - 200^2) = 0$$

$$A(100) = \frac{2}{\pi}(200(100) - (100)^2) = \frac{20.000}{\pi}$$

Luego, el máximo es $A(100) = \dfrac{20.000}{\pi}$ y lo alcanza en $x = 100$.

En consecuencia, las dimensiones del rectángulo de área máxima son:

$$x = 100, \qquad b = \frac{400 - 2(100)}{\pi} = \frac{200}{\pi}.$$

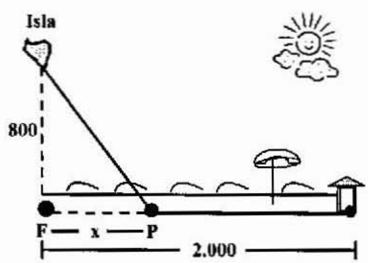
PROBLEMA 4. Una isla se encuentra a 800 m. de una playa recta. En la playa, a 2.000 m. de distancia del punto F que está frente a la isla, funciona una planta eléctrica. Para dotar de luz a la isla se tiende un cable desde la planta hasta un punto P de la playa y de allí hasta la isla. El costo del tendido de un metro de cable en tierra es $\frac{3}{5}$ del costo de un metro del tendido en agua. ¿Dónde debe estar localizado el punto P para que el costo del tendido sea mínimo?

Solución

Sea k el costo de tender un metro de cable en el agua.

Sea x la distancia del punto P al punto F.

La distancia de P a la planta es $2.000 - x$.



El costo del tendido del cable en tierra es

$$\frac{3}{5}k(2.000 - x)$$

La distancia de P a la isla, por el teorema de Pitágoras, es

$$\sqrt{x^2 + (800)^2} = \sqrt{x^2 + 640.000}$$

y el costo del tendido de cable en el agua es

$$k\sqrt{x^2 + 640.000}$$

Luego, el costo total del tendido es:

$$C(x) = \frac{3}{5}k\,(2.000 - x) + k\sqrt{x^2 + 640.000}$$

Además, x no debe ser negativa ni exceder 2.000, esto es

$$0 \leq x \leq 2.000$$

En resumen, debemos hallar el mínimo de la función

$$C(x) = \frac{3}{5}k(2.000 - x) + k\sqrt{x^2 + 640.000} \text{ en el intervalo } [0, 2.000].$$

Hallemos los puntos críticos:

$$C'(x) = -\frac{3}{5}k + \frac{kx}{\sqrt{x^2 + 640.000}}$$

$$C'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{5}k + \frac{kx}{\sqrt{x^2 + 640.000}} = 0 \Leftrightarrow 3k\sqrt{x^2 + 640.000} = 5kx$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{x^2 + 640.000} = 5x \Rightarrow 9(x^2 + 640.000) = 25x^2 \Rightarrow x = \pm 600$$

Sólo nos quedamos con 600, ya que -600 no está en el intervalo [0, 2.000].

Ahora, comparamos los valores $C(0)$, $C(600)$ y $C(2.000)$:

$$C(0) = \frac{3}{5}k(2.000) + k\sqrt{640.000} = 2.000k$$

$$C(600) = \frac{3}{5}k(1.400) + k\sqrt{360.000 + 640.000} = 1840k$$

$$C(2.000) = \frac{3}{5}k(0) + k\sqrt{4.000.000 + 640.000} = 400\sqrt{29}\,k \approx 2.154\,k$$

El costo mínimo es 1.840k y es alcanzado en el punto $x = 600$. Luego, el punto P debe localizarse entre la planta y el punto F a 600 m. de éste.

PROBLEMA 5. Un hotel tiene 71 habitaciones. El gerente ha observado que cuando la tarifa por habitación es \$. 50, todas las habitaciones son alquiladas y, por cada \$.2 de aumento en la tarifa, se desocupa una habitación. Si el mantenimiento (limpieza, lavado, etc.) de cada habitación ocupada es de \$.4.

a. ¿Qué tarifa debe cobrar el gerente para obtener máxima ganancia?

b. ¿Cuántas habitaciones se ocupan con esta tarifa que da máxima ganancia?

Solución

Sea G la ganancia del hotel. Se tiene que:

G = (habitaciones ocupadas)(tarifa por habitación.) – 4(habitaciones ocupadas)

Sea x el número de habitaciones desocupadas. Se debe cumplir que $0 \leq x \leq 71$. Además:

El número de habitaciones ocupadas es $71 - x$.
El incremento en la tarifa por habitación es $2x$.
La tarifa por habitación es $50 + 2x$

Reemplazando estos valores en la igualdad inicial, tenemos:

$$G(x) = (71 - x)(50 + 2x) - 4(71 - x) \Rightarrow G(x) = 3.266 + 96x - 2x^2$$

Debemos hallar el máximo de

$$G(x) = 3.266 + 96x - 2x^2 \text{ en el intervalo } [0, 71].$$

Hallemos los puntos críticos:

$$G'(x) = 96 - 4x \text{ y } G'(x) = 0 \Rightarrow 96 - 4x = 0 \Rightarrow x = 24$$

$G(x)$ tiene como único punto crítico a 24, que está en el intervalo $[0, 71]$.

Ahora, comparamos los valores $G(0)$, $G(24)$ y $G(71)$:

$$G(0) = 3.266 + 96(0) - 2(0)^2 = 3.266$$

$$G(24) = 3.266 + 96(24) - 2(24)^2 = 4.418$$

$$G(71) = 3.266 + 96(71) - 2(71)^2 = 0$$

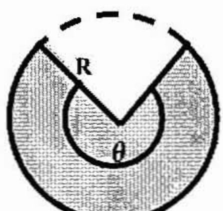
La ganancia máxima es $G(24) = 4.418$, la cual es alcanzada cuando $x = 24$. En consecuencia,

a. La tarifa que da máxima ganancia es $50 + 2(24) = 98$ dólares.

b. Con esta tarifa de 98 dólares se alquilan $71 - 24 = 47$ habitaciones.

PROBLEMA 6. De una lámina metálica circular se quiere cortar un sector circular para construir una copa cónica. Hallar la medida del ángulo central θ que proporcione la copa de capacidad máxima.

Solución

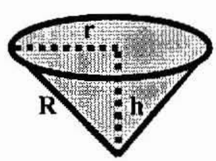


Sea R el radio del círculo metálico, h la altura de la copa y r el radio de su base.

El volumen de la copa, por ser un cono, es

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad (1)$$

La longitud de la circunferencia de la base de la copa debe ser igual a la longitud del arco determinado por el ángulo θ. Esto es,



$$2\pi r = R\theta$$

De donde

$$r = \frac{R}{2\pi}\theta \qquad (2)$$

Por otro lado, se tiene que

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - (R\theta/2\pi)^2} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \theta^2} \qquad (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1)

$$V = V(\theta) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{2\pi}\theta\right)^2\left(\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-\theta^2}\right) \Rightarrow$$

$$V(\theta) = \frac{R^3}{24\pi^2}\theta^2\sqrt{4\pi^2-\theta^2} \qquad \textbf{(4)}$$

Para nuestro problema los valores de θ que tienen significado están entre 0 y 2π radianes, es decir $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Hallamos el máximo de $V(\theta) = \dfrac{R^3}{24\pi^2}\theta^2\sqrt{4\pi^2-\theta^2}$, en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Hallemos los puntos críticos:

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{R^3}{24\pi^2}\left[\theta^2\frac{-\theta}{\sqrt{4\pi^2-\theta^2}} + 2\theta\sqrt{4\pi^2-\theta^2}\right] = \frac{R^3}{24\pi^2}\left[-\frac{\theta\left(3\theta^2-8\pi^2\right)}{\sqrt{4\pi^2-\theta^2}}\right]$$

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow \theta(3\theta^2-8\pi^2) = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \text{ ó } 3\theta^2-8\pi^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta = 0 \text{ ó } \theta = 2\pi\sqrt{2/3}$$

Ahora, comparemos los valores $V(0)$, $V(2\pi)$ y $V(2\pi\sqrt{2/3})$:

$$V(0) = \frac{R^3}{24\pi^2}(0)^2\sqrt{4\pi^2-0^2} = 0$$

$$V(2\pi) = \frac{R^3}{24\pi^2}(2\pi)^2\sqrt{4\pi^2-(2\pi)^2} = 0$$

$$V(2\pi\sqrt{2/3}) = \frac{R^3}{24\pi^2}(2\pi\sqrt{2/3})^2\sqrt{4\pi^2-(2\pi\sqrt{2/3})^2} = \frac{2\sqrt{3}\,\pi}{27}R^3$$

El máximo de $V(\theta)$ es $V(2\pi\sqrt{2/3}) = \dfrac{2\sqrt{3}\,\pi}{27}R^3$ y es alcanzado en $\theta = 2\pi\sqrt{2/3}$

Luego, el ángulo central buscado es $\theta = 2\pi\sqrt{2/3} \approx 2.565$ rad. $\approx 146{,}7^\circ$

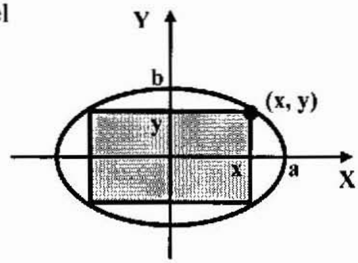
PROBLEMA 7. Hallar las dimensiones del rectángulo con lados paralelos a los ejes y de área máxima que puede inscribirse en la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Solución

Consideremos un rectángulo cualquiera, inscrito en la elipse y con lados paralelos a los ejes.

Sea (x, y) el vértice del rectángulo en el primer cuadrante. El área de este rectángulo es:



$$A = 4xy$$

Si despejamos y en la ecuación de la elipse se tiene:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Reemplazando este valor en la ecuación anterior se tiene el área del rectángulo:

$$A(x) = 4\,\frac{b}{a}\,x\sqrt{a^2 - x^2}$$

Es claro que $0 \leq x \leq a$.

Debemos hallar el máximo de $A(x) = 4\,\frac{b}{a}\,x\sqrt{a^2 - x^2}$ en el intervalo $[0, a]$.

Hallemos los puntos críticos:

$$A'(x) = 4\frac{b}{a}x\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + 4\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = 4\frac{b}{a}\,\frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}\,a}{2} = \pm\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Desechamos a $-\frac{a\sqrt{2}}{2}$ por no estar en el intervalo $[0, a]$.

Comparemos los valores $A(0)$, $A(a)$ y $A(a\sqrt{2}/2)$

$$A(0) = 4\,\frac{b}{a}(0)\sqrt{a^2 - 0^2} = 0, \quad A(a) = 4\,\frac{b}{a}(a)\sqrt{a^2 - a^2} = 0 \qquad \text{y}$$

$$A(a\sqrt{2}/2) = 4\,\frac{b}{a}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2ab$$

Luego, el máximo de $A(x)$ es $A(a\sqrt{2}/2) = 2ab$ y es alcanzado en $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. El valor de y correspondiente a este valor de x es:

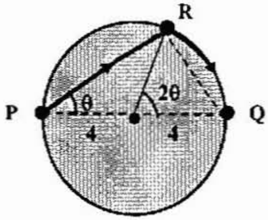
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - (a\sqrt{2}/2)^2} = \frac{b\sqrt{2}}{2}.$$

En consecuencia, las dimensiones del rectángulo buscado son

$$2x = a\sqrt{2} \quad \text{y} \quad 2y = b\sqrt{2}.$$

PROBLEMA 8. En un lago circular de 4 Km. de radio se tienen dos puntos P y Q, localizados en la orilla y diametralmente opuestos. Un pescador se encuentra en el punto P y quiere llegar, en el menor tiempo, al punto Q. El pescador puede remar a razón de 4 Km. por hora y puede caminar a razón de 8 Km. por hora. ¿Con qué ángulo θ debe remar para alcanzar el punto R para luego caminar hacia Q?

Solución



Sea t_1 el tiempo utilizado remando, t_2 el tiempo utilizado caminando y T el tiempo total. Se tiene que:

$$T = t_1 + t_2 \qquad (1)$$

El tiempo t_1 es igual a la distancia de P a R dividida entre la velocidad del pescador remando. Esto es,

$$t_1 = \frac{d(P, R)}{4}$$

Considerando que el ángulo PRQ es recto (todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto), se tiene que:

$$d(P, R) = 8\cos\theta \quad \text{y, por tanto,} \quad t_1 = 2\cos\theta \qquad (2)$$

Por otro lado, el tiempo t_2 es igual a la longitud del arco RQ dividida entre la velocidad del pescador caminando. Esto es,

$$t_2 = \frac{\text{longitud del arco RQ}}{8}$$

Pero,

Longitud del arco RQ = 4(ángulo central) = $4(2\theta) = 8\theta$ y, por tanto,

$$t_2 = \theta \qquad (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1) conseguimos: $T = 2\cos\theta + \theta$

Es claro que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Luego,

Debemos hallar el mínimo de $T(\theta) = 2\cos\theta + \theta$ en el intervalo $[0, \pi/2]$.
Hallemos los puntos críticos:

$$T'(\theta) = -2\operatorname{sen}\theta + 1 \quad \text{y}$$

$$T'(\theta) = 0 \Leftrightarrow -2\operatorname{sen}\theta + 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

Comparemos $T(0)$, $T(\pi/2)$ y $T(\pi/6)$:

$$T(0) = 2\cos 0 = 2 \text{ horas}$$

$$T(\pi/2) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = 2(0) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57 \text{ horas.}$$

$$T(\pi/6) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} == \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} \approx 2{,}25 \text{ horas}$$

Luego, el mínimo es $T(\pi/2) \approx 1{,}57$ horas y es alcanzado en $\frac{\pi}{2}$. En consecuencia, el pescador debe salir con un ángulo de $\frac{\pi}{2}$. Esto significa que le conviene más olvidarse de la lancha y bordear el lago caminando.

PROBLEMA 9. El alcance de una pelota arrojada por un beisbolista está gobernado por la función:

$$A(\theta) = \frac{v_0^2}{g} \text{ sen } 20\,,$$

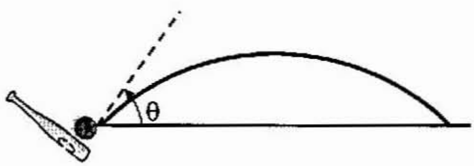
donde, θ es el ángulo de inclinación al lanzar la pelota, g es la aceleración de la gravedad y v_0 es la velocidad inicial con que la pelota es lanzada.

Hallar el ángulo que proporcione el máximo alcance.

Solución

Debemos hallar el máximo de

$A(\theta) = \frac{v_0^2}{g}$ sen 2θ en $[0, \pi/2]$.



Hallemos los puntos críticos:

$$A'(\theta) = 2\frac{v_0^2}{g} \cos 2\theta$$

$$A'(0) = 0 \Leftrightarrow 2\frac{v_0^2}{g} \cos 2\theta = 0 \Leftrightarrow \cos 20 = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Comparemos los valores $A(0)$, $A(\pi/2)$ y $A(\pi/4)$:

$$A(0) = \frac{v_0^2}{g} \text{ sen } 2(0) = 0$$

$$A(\pi/2) = \frac{v_0^2}{g} \text{ sen } 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{v_0^2}{g} \text{ sen } \pi = 0$$

$$A(\pi/4) = \frac{v_0^2}{g} \text{ sen } 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{v_0^2}{g} \text{ sen } \frac{\pi}{2} = \frac{v_0^2}{g}\,.$$

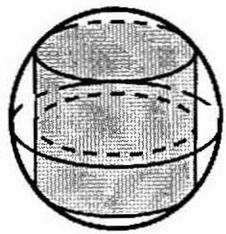
El máximo es $A(\pi/4) = \frac{v_0^2}{g}$, que es alcanzado en $\frac{\pi}{4}$.

Luego, para lograr el máximo alcance, la pelota debe lanzarse con un ángulo de inclinación de $\frac{\pi}{4}$ Rad.

PROBLEMA 10. Hallar las dimensiones del cilindro circular recto de volumen máximo inscrito en una esfera de radio R.

Solución

Sea r el radio del cilindro, h su altura y V su volumen.
Sabemos que:



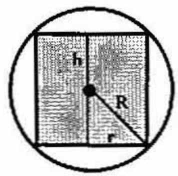
$$V = (\text{área de la base})(\text{ altura }) = \pi r^2 h \qquad \textbf{(1)}$$

Por Pitágoras se tiene:

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2 - r^2 \quad \Rightarrow \quad h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$$

$$\Rightarrow \quad V = 2\pi r^2\sqrt{R^2 - r^2}$$

Es claro que $0 \leq r \leq R$.



Debemos hallar el máximo de

$$V(r) = 2\pi r^2\sqrt{R^2 - r^2} \text{ en } [0, R].$$

Hallemos los puntos críticos:

$$V'(r) = 2\pi r^2 \frac{-r}{\sqrt{R^2 - r^2}} + 4\pi r\sqrt{R^2 - r^2} = \frac{2\pi r(2R^2 - 3r^2)}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

$$V'(r) = 0 \iff \frac{2\pi r(2R^2 - 3r^2)}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 0 \Rightarrow 2\pi r(2R^2 - 3r^2) = 0$$

$$\iff r = 0 \text{ ó } 2R^2 - 3r^2 = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ ó } r = \frac{R\sqrt{6}}{3}$$

Además, $V'(r)$ no está definida en $r = R$.

Luego, los puntos críticos de $V(r)$ en $[0, R]$ son: 0, $\dfrac{R\sqrt{6}}{3}$ y R.

Comparemos $V(0)$, $V(R)$ y $V(R\sqrt{6}/3)$:

$$V(0) = 2\pi(0)^2\sqrt{R^2 - 0^2} = 0, \qquad V(R) = 2\pi R^2\sqrt{R^2 - R^2} = 0 \quad \text{y}$$

$$V(R\sqrt{6}/3) = 2\pi\left(\frac{R\sqrt{6}}{3}\right)^2\sqrt{R^2 - (R\sqrt{6}/3)^2} = \pi\frac{4\sqrt{3}}{9}R^3$$

Luego, el máximo es $V(R\sqrt{6}/3) = \pi\dfrac{4\sqrt{3}}{9}R^3$ y es alcanzado en $r = \dfrac{R\sqrt{6}}{3}$

Por otro lado, sabemos que $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$. Luego,

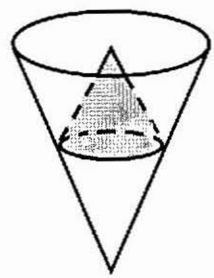
$$h = 2\sqrt{R^2 - (R\sqrt{6}/3)^2} = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

Por tanto, las dimensiones del cilindro buscado son:

$$\text{radio} = \frac{R\sqrt{6}}{3} \approx 0{,}817\,R \quad \text{y} \quad \text{altura} = \frac{2R\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}155\,R$$

PROBLEMA 11. Probar que el volumen del mayor cono circular recto inscrito en otro cono circular recto es $\frac{4}{27}$ del volumen del cono grande.

Solución



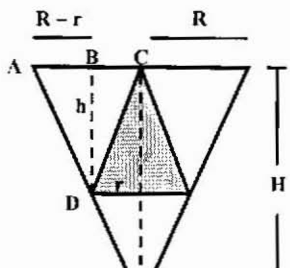
Sean r, h y V el radio, la altura y el volumen del cono pequeño. Sean R, H y V_1 el radio, la altura y el volumen del cono grande.

Sabemos que:

$$\textbf{(1)} \quad V = \frac{\pi}{3} r^2 h \qquad \textbf{(2)} \quad V_1 = \frac{\pi}{3} R^2 H$$

Como los triángulos ABD y ACE son semejantes,

$$\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{H}{R}(R-r) \quad \textbf{(3)}$$



Reemplazando (3) en (1):

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 \frac{H}{R}(R-r) = \frac{\pi H}{3R} r^2 (R-r)$$

Vemos que $0 \leq r \leq R$.

Buscamos el máximo de

$$V(r) = \frac{\pi H}{3R} r^2 (R-r) \ \text{en} \ [0, R].$$

Hallemos los puntos críticos:

$$V'(r) = \frac{\pi H}{3R}\left[r^2(-1) + 2(R-r)r\right] = \frac{\pi H}{3R}\left[2rR - 3r^2\right] = \frac{\pi H}{3R} r\left[2R - 3r\right]$$

$$V'(r) = 0 \Rightarrow r = 0 \ \text{ó} \ 2R - 3r = 0 \Rightarrow r = 0 \ \text{ó} \ r = \frac{2}{3}R$$

Comparemos $V(0)$, $V(R)$ y $V(\frac{2}{3}R)$:

$$V(0) = \frac{\pi H}{3R}(0)^2(R-(0)) = 0, \quad V(R) = \frac{\pi H}{3R} R^2 (R-R) = 0$$

$$V\left(\frac{2}{3}R\right)= \frac{\pi H}{3R}\left(\frac{2}{3}R\right)^2\left(R-\frac{2}{3}R\right)=\frac{4}{81}\pi R^2H$$

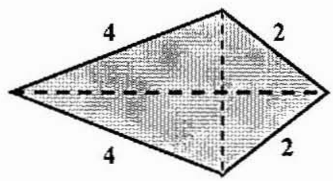
Luego, el máximo es $V\left(\frac{2}{3}R\right)=\frac{4}{81}\pi R^2H$. Ahora, teniendo en cuenta (2),

$$V\left(\frac{2}{3}R\right)=\frac{4}{81}\pi R^2H=\frac{4}{27}\left[\frac{\pi}{3}R^2H\right]=\frac{4}{27}V_1$$

Esto es, el volumen del cono pequeño es $\frac{4}{27}$ del volumen del cono grande.

PROBLEMA 12. Se quiere hacer el marco de un papagayo (cometa) con seis piezas de madera. Las cuatro piezas exteriores ya han sido cortadas con las longitudes que indica la figura. ¿Qué longitud deben tener las piezas diagonales si se quiere que el área del papagayo sea máxima?

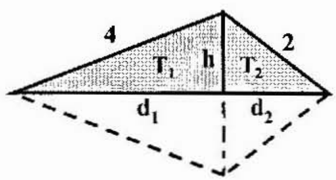
Solución



La diagonal más larga divide al papagayo en dos triángulos simétricos. Esto implica que las dos diagonales dividen al papagayo en cuatro triángulos rectángulos.

. Si h es la mitad de la longitud de la diagonal menor, se tiene que:

$$0\leq h\leq 2$$



$$\text{Area de } T_1=\frac{1}{2}d_1h=\frac{1}{2}\sqrt{4^2-h^2}\,h$$

$$\text{Area de } T_2=\frac{1}{2}d_2h=\frac{1}{2}\sqrt{2^2-h^2}\,h$$

El área A del papagayo es igual a dos veces el área de de T_1 más dos veces el área de de T_2. Luego,

$$A=\sqrt{16-h^2}\,h+\sqrt{4-h^2}\,h=\left(\sqrt{16-h^2}+\sqrt{4-h^2}\right)h$$

Optimizamos:

$$A(h)=\left(\sqrt{16-h^2}+\sqrt{4-h^2}\right)h \quad \text{en el intervalo } [0,2]$$

Derivando respecto a h:

$$A'(h)=\left(\sqrt{16-h^2}+\sqrt{4-h^2}\right)+\left(\frac{-h}{\sqrt{16-h^2}}+\frac{-h}{\sqrt{4-h^2}}\right)h$$

$$= \left(\sqrt{16-h^2} + \sqrt{4-h^2} \right) - \left(\frac{\sqrt{4-h^2} + \sqrt{16-h^2}}{\sqrt{16-h^2}\sqrt{4-h^2}} \right) h^2$$

$$= \left(\sqrt{16-h^2} + \sqrt{4-h^2} \right) \left(1 - \frac{h^2}{\sqrt{16-h^2}\sqrt{4-h^2}} \right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{16-h^2} + \sqrt{4-h^2}}{\sqrt{16-h^2}\sqrt{4-h^2}} \right) \left(\sqrt{16-h^2}\sqrt{4-h^2} - h^2 \right)$$

$$A'(h) = 0 \Rightarrow \sqrt{16-h^2}\sqrt{4-h^2} = h^2 \Rightarrow (16-h^2)(4-h^2) = h^4$$

$$\Rightarrow 128 - 20h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{64}{20} = \frac{16}{5} \Rightarrow h = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

Ahora,

$$A(0) = 0 \qquad A(2) = \left(\sqrt{16-2^2} - 0 \right)(2) = 2\sqrt{12} < 4\sqrt{3} \approx 6{,}93$$

$$A(4/\sqrt{5}) = \left(\sqrt{16-\left(4/\sqrt{5}\right)^2} + \sqrt{4-\left(4/\sqrt{5}\right)^2} \right)\left(\frac{4}{\sqrt{5}} \right)$$

$$= \left(\frac{8}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \right)\left(\frac{4}{\sqrt{5}} \right) = \left(\frac{10}{\sqrt{5}} \right)\left(\frac{4}{\sqrt{5}} \right) = 8$$

Luego, $A(4/\sqrt{5}) = 8$ es el máximo absoluto.

En consecuencia, las longitudes de las diagonales buscadas son:

$$\text{Diagonal menor} = 2h = 2\frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} \approx 3{,}58$$

$$\text{Diagonal mayor} = d_1 + d_2 = \sqrt{16-\left(4/\sqrt{5}\right)^2} + \sqrt{4-\left(4/\sqrt{5}\right)^2} = \frac{10}{\sqrt{5}} \approx 4{,}47$$

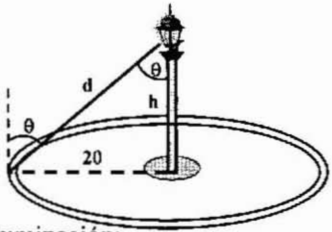
PROBLEMA 13. Se va a colocar un poste con un farol en el centro de una plazoleta circular de 20 m de radio. ¿Qué altura debe estar el farol para que ilumine lo mejor posible la vereda que rodea la plazoleta?

Se sabe que la iluminación I de la plazoleta es directamente proporcional al coseno del ángulo θ de incidencia de los rayos luminosos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d del farol a la plazoleta.

Solución

Nos dicen que:

$I(\theta) = k\dfrac{\cos\theta}{d^2}$, donde k es una constante



De acuerdo a la figura,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{20}{d} \Rightarrow d = \frac{20}{\operatorname{sen}\theta}$$

Reemplazando este valor de d en la ecuación de iluminación:

$$I(\theta) = k\frac{\cos\theta}{(20/\operatorname{sen}\theta)^2} = \frac{k}{400}\cos\theta\ \operatorname{sen}^2\theta$$

Debemos optimizar:

$$I(\theta) = \frac{k}{400}\cos\theta\ \operatorname{sen}^2\theta \text{ en el intervalo } [0, \pi/2]:$$

$$I'(\theta) = \frac{k}{400}[\cos\theta(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta) + \operatorname{sen}^2\theta(-\operatorname{sen}\theta)]$$

$$= \frac{k}{400}\operatorname{sen}\theta[2\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta]$$

$$I'(\theta) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 0 \text{ ó } 2\cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta \Rightarrow \theta = 0 \text{ ó } \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = 2$$

$$\Rightarrow \theta = 0 \text{ ó } \tan^2\theta = 2 \Rightarrow \theta = 0 \quad \text{ó} \quad \theta_1 = \tan^{-1}\sqrt{2} = 0{,}9553$$

Pero,

$$I(0) = 0,\ I(\pi/2) = 0 \text{ y } I(0{,}9553) = \frac{k}{400}\cos(0{,}9553)\operatorname{sen}^2(0{,}9553) = 0{,}00096k$$

Luego, $I(\theta_1) = I(0{,}9553) = 0{,}00096k$ es el máximo.

Por otro lado, se tiene:

$$\tan\theta = \frac{20}{h} \Rightarrow h = \frac{20}{\tan\theta}$$

En particular, tomando $\theta = \theta_1$ y sabiendo que $\tan\theta_1 = \sqrt{2}$ se tiene:

$$h = \frac{20}{\tan\theta_1} = \frac{20}{\sqrt{2}} \approx 14{,}14 \text{ m}$$

Esto es, la máxima iluminación en el corredor se obtiene al colocar el farol a 14,14 m de altura.

PROBLEMAS DE EXTREMOS EN INTERVALOS ABIERTOS O SEMICERRADOS

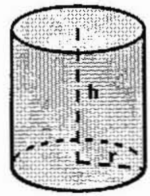
Apliquemos este teorema para resolver problemas prácticos que se expresan mediante funciones cuyos dominios son intervalos abiertos o cerrados. El resultado clave que usaremos es dado en el teorema 5.11, que afirma que un extremo local único es un extremo absoluto.

PROBLEMA 14. Una fábrica, para envasar alimentos, necesita potes de estaño con tapa que tengan la forma de un cilindro circular recto y un volumen de 250π cm^3. Hallar las dimensiones que debe tener el pote si se quiere usar la mínima cantidad de estaño en su construcción.

Solución

Sea r el radio de la base, h la altura y A el área total de las paredes del pote. El área es la suma de las áreas de las dos bases, que es $2\pi r^2$, más el área de la superficie lateral, que es $2\pi rh$. Luego,

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad (1)$$



Por otro lado, el volumen del cilindro circular recto es

$$V = \pi r^2 h.$$

En nuestro caso, como $V = 250\pi$, tenemos que

$$\pi r^2 h = 250\pi \Rightarrow r^2 h = 250 \Rightarrow h = \frac{250}{r^2}$$

Reemplazando este valor de h en (1):

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r\frac{250}{r^2} \Rightarrow A = 2\pi\left(r^2 + \frac{250}{r}\right)$$

Vemos que la función A no está definida para $r = 0$. Además, como el radio no puede ser negativo, debemos tener que $r > 0$. En consecuencia, el problema consiste en hallar el mínimo de la función área:

$$A(r) = 2\pi\left(r^2 + \frac{250}{r}\right) \quad \text{en el intervalo abierto } (0, +\infty).$$

Hallemos los puntos críticos:

$$A'(r) = 2\pi\left(2r - \frac{250}{r^2}\right) = 4\pi\left(\frac{r^3 - 125}{r^2}\right)$$

$$A'(r) = 0 \Rightarrow r^3 - 125 = 0 \Rightarrow r^3 = 125 \Rightarrow r = 5$$

$A'(r)$ no está definida en 0, pero 0 no está en $(0, +\infty)$.

Luego, 5 es el único punto crítico de $A(r)$ en el intervalo $(0, +\infty)$.

Apliquemos a 5 el criterio de la segunda derivada:

$$A''(r) = 2\pi\left(2 + \frac{500}{r^3}\right) \Rightarrow A''(5) = 2\pi\left(2 + \frac{500}{5^3}\right) = 12\pi > 0$$

Luego, $A(5) = 150\pi$ es un mínimo local. Como éste es el único extremo local de la función $A(r)$ en $(0, +\infty)$, se concluye que $A(5) = 150\pi$ es el mínimo absoluto.

En consecuencia, las dimensiones buscadas del pote son:

$$\text{radio} = r = 5 \text{ cm.} \quad \text{y} \quad \text{altura} = h = \frac{250}{5^2} = 10 \text{ cm.}$$

PROBLEMA 15. Un local tiene dos corredores de 6 y 8 metros de ancho, que forman una esquina como indica la figura. Hallar el largo del tubo de mayor longitud posible que pueda pasar horizontalmente por la esquina.

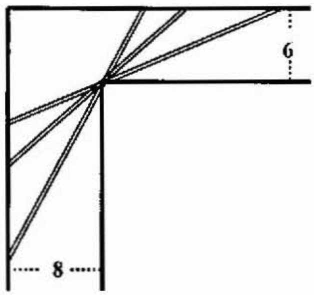
Solución

Tracemos los segmentos que, pasando por el vértice interior, tocan los lados exteriores de ambos corredores. Estos segmentos tienen distintas longitudes. La longitud del tubo que buscamos corresponde a la longitud mínima de los segmentos antes mencionados.

Tomemos uno de los segmentos. La esquina divide a este segmento en dos partes cuyas longitudes las denotamos por x e y, respectivamente. Si L es la longitud del segmento, tenemos que:

(1) $L = x + y$ **(2)** $x = 8 \sec \theta$

(3) $y = 6 \operatorname{cosec} \theta$

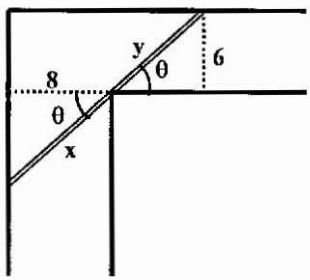


Reemplazando (2) y (3) en (1) obtenemos la función:

$$L(\theta) = 8 \sec \theta + 6 \operatorname{cosec} \theta \qquad \textbf{(4)}$$

$L(\theta)$ no está definida en 0 ni en $\frac{\pi}{2}$.

Esto es, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.



Nuestra tarea es encontrar el mínimo absoluto de la función

$$L(\theta) = 8 \sec \theta + 6 \operatorname{cosec} \theta$$

en el intervalo abierto $(0, \frac{\pi}{2})$.

Hallemos los puntos críticos:

$$L'(\theta) = 8 \sec \theta \tan \theta - 6 \operatorname{cosec} \theta \cot \theta \qquad \textbf{(5)}$$

$$L'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 8 \sec \theta \tan \theta = 6 \operatorname{cosec} \theta \cot \theta$$

$$\Leftrightarrow 8 \frac{1}{\cos \theta} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = 6 \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}^3 \theta}{\cos^3 \theta} = \frac{6}{8} \Leftrightarrow \tan^3 \theta = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \sqrt[3]{3/4} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\sqrt[3]{3/4}\right)$$

$L(\theta)$ tiene un único punto crítico en el intervalo abierto $(0, \pi/2)$, que es

$$\theta_0 = \tan^{-1}\left(\sqrt[3]{3/4}\right) \approx 0{,}7376 \text{ rad.} \approx 42^\circ 15' 25''$$

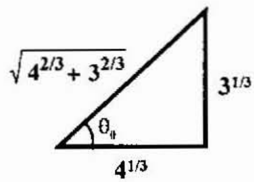
Analicemos la naturaleza del punto crítico:

$$L''(\theta) = 8\left[\sec\theta \tan^2\theta + \sec^3\theta\right] + 6\left[\operatorname{cosec}\theta \cot^2\theta + \operatorname{cosec}^3\theta\right]$$

Como θ_0 está en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$ y aquí todas la funciones trigonométricas son positivas, tenemos que $L''(\theta_0) > 0$. Por tanto, $L(\theta_0)$ es un mínimo local. Además, por ser éste el único extremo local en $(0, \frac{\pi}{2})$, concluimos también que es mínimo absoluto. Considerando que

$$\tan\theta_0 = \sqrt[3]{3/4} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3^{1/3}}{4^{1/3}},$$

construimos el triángulo adjunto y tenemos:



$$L(\theta_0) = 8\sec\theta_0 + 6\operatorname{cosec}\theta_0$$

$$= 8\,\frac{(4^{2/3} + 3^{2/3})^{1/2}}{4^{1/3}} + 6\,\frac{(4^{2/3} + 3^{2/3})^{1/2}}{3^{1/3}}$$

$$= 2(4)^{2/3}(4^{2/3} + 3^{2/3})^{1/2} + 2(3)^{2/3}(4^{2/3} + 3^{2/3})^{1/2}$$

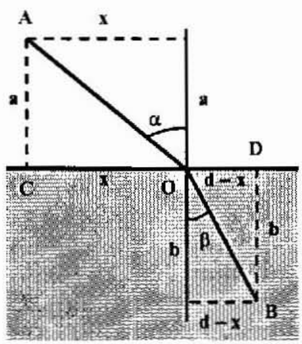
$$= 2(4^{2/3} + 3^{2/3})(4^{2/3} + 3^{2/3})^{1/2} = 2(4^{2/3} + 3^{2/3})^{3/2}$$

$$= 2\left[\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{9}\right]^{3/2} \approx 9{,}87 \text{ m.}$$

PROBLEMA 16. **Refracción de la luz.**

El **principio de Fermat** de óptica dice que la luz va de un punto a otro por el camino que requiere la menor cantidad de tiempo.

Se tiene un punto A que está a **a** m. arriba de la superficie de una piscina y un punto B que está dentro del agua a **b** m. de profundidad. Desde A parte un rayo, toca la superficie del agua en un punto **O**, cambia de dirección y pasa por el punto B. El ángulo α es el ángulo de **incidencia** y β es el de **refracción**.



Si la luz se propaga en el aire a una velocidad v_1, y en el agua a una velocidad v_2, usando el **principio de Fermat,** probar que

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Solución

Sean x la distancia de C a **O**, d la distancia de C a D y $T = T(x)$ el tiempo que toma el rayo de luz para llegar desde A hasta B pasando por el punto **O**. Sean t_1 y t_2 los tiempos que toma el rayo de luz para llegar de A a **O** y de **O** a B, respectivamente. Tenemos:

Longitud de $\overline{OA} = \sqrt{a^2 + x^2}$ y Longitud de $\overline{OB} = \sqrt{b^2 + (d-x)^2}$.

Luego,

$$t_1 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} \quad \text{y} \quad t_2 = \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{v_2}$$

Pero

$$T(x) = t_1 + t_2$$

Luego,

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{v_2}$$

Si el camino escogido es el que da tiempo mínimo, se debe cumplir: $T'(x) = 0$.
Pero,

$$T'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d-x}{v_2\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}.$$

Luego,

$$T'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{d-x}{v_2\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} \qquad \textbf{(1)}$$

Pero,

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \operatorname{sen}\alpha \quad \text{y} \quad \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = \operatorname{sen}\beta$$

Reemplazando estos valores en (1) se tiene:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{v_2} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

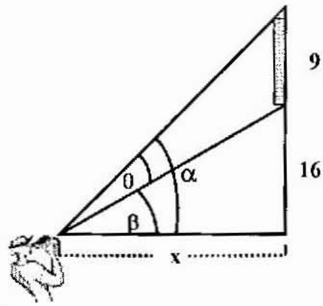
PROBLEMA 17. Un aviso comercial de 9 m. de altura está pintado sobre una pared vertical. La base del aviso está a 16 m. sobre el nivel del ojo de un observador. ¿A qué distancia de la pared debe colocarse el observador para que el ángulo formado por el ojo y los extremos superior e inferior del aviso sea máximo?

Solución

Sea x la distancia del observador a la pared y sea θ el ángulo formado por el ojo del observador y los extremos del aviso. Se tiene que,

$\theta = \alpha - \beta$, donde

$\alpha = \cot^{-1}\dfrac{x}{25}$ y $\beta = \cot^{-1}\dfrac{x}{16}$



Luego,

$$\theta = \cot^{-1}\frac{x}{25} - \cot^{-1}\frac{x}{16}$$

Debemos hallar un valor de x en el intervalo $(0, +\infty)$ en el cual la función anterior nos dé un máximo absoluto.

Derivamos la función respecto a x:

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{1+(x/25)^2}\left(\frac{1}{25}\right) + \frac{1}{1+(x/16)^2}\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$= -\frac{25}{25^2+x^2} + \frac{16}{16^2+x^2}$$

Ahora hallamos los puntos críticos:

$$\frac{d\theta}{dx} = 0 \Leftrightarrow -\frac{25}{25^2+x^2} + \frac{16}{16^2+x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{25}{25^2+x^2} = \frac{16}{16^2+x^2}$$

$$\Leftrightarrow 25(16^2+x^2) = 16(25^2+x^2) \Leftrightarrow 9x^2 = 3.600 \Rightarrow x = 20$$

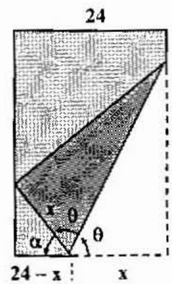
Aplicando el criterio de la primera o de la segunda se verifica que el punto crítico $x = 20$ corresponde a un máximo relativo. Además, como $x = 20$ es el único extremo relativo en el intervalo $(0, +\infty)$, estamos frente al máximo absoluto. Por tanto, para obtener un ángulo máximo, el observador debe colocarse a 20 m. de la pared.

PROBLEMA 18. Se tiene una hoja larga de papel de 24 cm. de ancho. Una esquina de la hoja es doblada hasta tocar el lado opuesto. ¿En que parte debe doblarse la hoja para que la longitud del doblez sea mínima? En otras palabras, hallar el valor de x que minimiza a L.

Solución

Tenemos que:

$\cos\theta = x/L$ (1)



$$\frac{24-x}{x} = \cos\alpha = \cos(\pi - 2\theta) = \cos(\pi + (-2\theta))$$

$= -\cos(-2\theta)$ (Ident. Trig. 20)

$= -\cos 2\theta$

$= -(2\cos^2\theta - 1)$ (Ident. Trig. 28)

$$= 1 - 2\cos^2\theta = 1 - 2(x/L)^2 \qquad \text{(por (1))}$$
$$= \frac{L^2 - 2x^2}{L^2}$$

Luego,

$$\frac{24 - x}{x} = \frac{L^2 - 2x^2}{L^2} \Rightarrow L^2(24 - x) = x(L^2 - 2x^2) \Rightarrow L^2 = \frac{x^3}{x - 12}$$
$$\Rightarrow L = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{x - 12}}$$

Por otro lado, para la esquina doblada alcance el lado opuesto en un punto que no sea la otro esquina inferior, debemos tener que $12 < x$. En consecuencia la función a minimizar es:

$$L(x) = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{x - 12}} \quad \text{en el intervalo } (12, +\infty)$$

Bien,

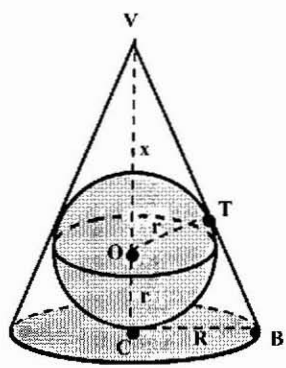
$$L'(x) = \frac{\sqrt{x-12}\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right) - x^{3/2}\frac{1}{2\sqrt{x-12}}}{x - 12} = \Rightarrow L'(x) = \frac{x^{1/2}(x - 18)}{(x - 12)^{3/2}}$$

Vemos que L(x) tiene tres números críticos: 0, 12 y 18. Pero, sólo 18 está en el intervalo $(12, +\infty)$. Además, el criterio de la primera derivada nos asegura que L(18) es un mínimo local y, por ser este el único extremo local en $(12, +\infty)$, L(18) es mínimo absoluto. Luego, $x = 18$ es el número buscado.

PROBLEMA 19. Hallar la dimensiones del cono circular recto de volumen mínimo que se puede circunscribir en una esfera de radio r.

Solución

Sean
R = radio del cono
h = altura del cono.
x = la longitud de $\overline{OV}$



Los triángulos rectángulos VCB y VTO, por tener un ángulo agudo común, son semejantes. Luego,

$$\frac{R}{r} = \frac{x + r}{\sqrt{x^2 - r^2}} \Rightarrow R = \frac{r(x + r)}{\sqrt{x^2 - r^2}}$$

$$R^2 = \frac{r^2(x+r)^2}{x^2 - r^2} = \frac{r^2(x+r)^2}{(x+r)(x-r)} = \frac{r^2(x+r)}{x-r}$$

El volumen del cono es:

$$V = \frac{\pi}{3}R^2 h = \frac{\pi}{3}\,\frac{r^2(x+r)}{x-r}(x+r) = \frac{\pi}{3}\,\frac{r^2(x+r)^2}{x-r}$$

Para tener un cono se debe tener que $x > r$. Luego, debemos optimizar:

$$V = \frac{\pi}{3}\,\frac{r^2(x+r)^2}{x-r} \quad \text{en el intervalo } (r, +\infty)$$

Derivando:

$$V'(x) = \frac{\pi r^2}{3}\,\frac{(x-r)(2)(x+r) - (x+r)^2}{(x-r)^2} = \frac{\pi r^2}{3}\,\frac{(x+r)(x-3r)}{(x-r)^2}$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow x + r = 0 \text{ ó } x - 3r = 0 \Rightarrow x = -r = 0 \text{ ó } x = 3r$$

Los números críticos son: $-r$, $3r$ y r. Pero en $(r, +\infty)$ sólo está $3r$.

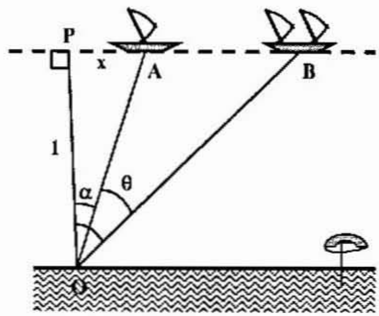
El criterio de la primera derivada nos dice $V(3r)$ es un mínimo. Luego, las dimensiones del cono buscado son:

$$h = x + r = 3r + r = 4r$$

$$R = \frac{r(x+r)}{\sqrt{x^2 - r^2}} = R = \frac{r(3r+r)}{\sqrt{(3r)^2 - r^2}} = \frac{4r^2}{\sqrt{8r^2}} = \frac{4r^2}{2r\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,r$$

PROBLEMA 20. Un bañista se encuentra en un punto O de una playa, observado dos veleros A y B, que se encuentra en un punto P. Este punto P está a 1 Km de distancia y exactamente frente al observador. Los veleros comienzan a navegar siguiendo una trayectoria paralela a la playa. El velero B es 3 veces más rápido que el velero A. Hallar el máximo valor del ángulo de observación θ entre los dos veleros.

Solución



Si β el ángulo POB y α el ángulo POA, entonces

$$\theta = \beta - \alpha$$

Sea x la distancia de P al velero A. Luego, $3x$ es la distancia del punto P al velero B. Aún más, tenemos que:

$$\tan\alpha = x \quad \text{y} \quad \tan\beta = 3x$$

De acuerdo al identidad trigonométrica 25 se tiene:

$$\tan\,\theta = \tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\beta\ \tan\alpha} = \frac{3x-x}{1+(3x)(x)} = \frac{2x}{1+3x^2} \Rightarrow$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1+3x^2}\right)$$

Optimizamos:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1+3x^2}\right) \text{ en el intervalo } [0, +\infty) \qquad (1)$$

Derivando:

$$\theta' = \frac{1}{1+\left(2x/1+3x^2\right)^2}\left(\frac{2x}{1+3x^2}\right)'$$

$$= \frac{1}{1+\left(2x/1+3x^2\right)^2}\ \frac{2(1-3x^2)}{(1+3x^2)^2} = \frac{1}{1+\left(2x/1+3x^2\right)^2}\ \frac{2(1-\sqrt{3}\,x)(1+\sqrt{3}\,x)}{(1+3x^2)^2}$$

Esto es,

$$\theta' = \frac{1}{1+\left(2x/1+3x^2\right)^2}\ \frac{2(1-\sqrt{3}\,x)(1+\sqrt{3}\,x)}{(1+3x^2)^2} \qquad (2)$$

$$\theta' = 0 \Rightarrow \frac{2(1-\sqrt{3}\,x)(1+\sqrt{3}\,x)}{(1+3x^2)^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ó } x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Desechamos $-1/\sqrt{3}$ por estar fuera de $[0, +\infty)$.

El criterio de la primera derivada aplicado en (2) nos dice que θ tiene un máximo local en $1/\sqrt{3}$ y, por ser extremo único, éste es un máximo absoluto.

Luego, el ángulo buscado es:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2(1/\sqrt{3})}{1+3\left(1/\sqrt{3}\right)^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2(1/\sqrt{3})}{1+1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 5.6

1. (Area Máxima). Hallar las dimensiones de un rectángulo de 72 m. de perímetro que encierra un área máxima.

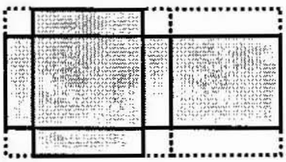
2. (Area Máxima). Probar que entre todos los rectángulos de perímetro fijo, el que encierra un área máxima es el cuadrado.

3. **(Area Máxima).** Se quiere cercar un terreno rectangular que está a las orillas de un río. Si se cercan sólo tres lados del terreno y se cuenta con 400 m. de alambrada. ¿Qué dimensiones debe tener el terreno si se quiere que tenga área máxima?

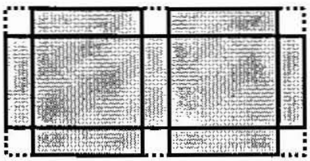
4. **(Construcción de envases).** Se construye cajas sin tapa utilizando láminas de cartón cuadrado de 96 cm. de lado, a las cuales se recorta un pequeño cuadrado en cada esquina. ¿Cuál debe ser la longitud del lado del cuadrado cortado si se quiere que la caja tenga volumen máximo?

5. **(Construcción de envases).** Se construyen cajas sin tapa utilizando láminas de cartón rectangulares de 21 cm. por 16 cm., a las cuales se recorta un pequeño cuadrado en cada esquina. ¿Cuál debe ser la longitud del lado del cuadrado si se quiere que la caja tenga máximo volumen?

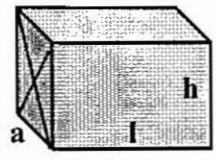
6. **(Construcción de envases).** Se construyen cajas con tapa utilizando láminas de cartón rectangulares de 8 dm. por 5 dm, a las cuales se les recortan los cuadrados y los rectángulos marcados en la figura adjunta. ¿Cuál debe ser la longitud del lado del cuadrado si se quiere que la caja tenga máximo volumen?



7. **(Construcción de envases).** Se construyen cajas con tapa, las cuales también tienen caras laterales. Para esto, se usan láminas de cartón rectangulares de 9 dm. por 6 dm., a las cuales se les recorta los 6 cuadrados indicados en la figura adjunta. ¿Cuál debe ser la longitud del lado del cuadrado si se quiere que la caja tenga máximo volumen?



8. **(Volumen máximo).** El reglamento del correo exige que la suma de las longitudes (largo, ancho y altura) de un paquete no debe exceder 120 cm. Hallar las dimensiones de la caja con base cuadrada, que cumpla las regulaciones del correo y que tenga máximo volumen.



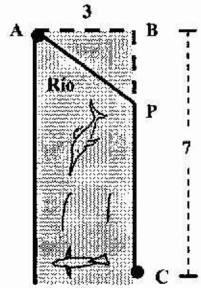
9. **(Pista de carreras).** Se desea construir una pista de carreras de 560 m. de longitud. La pista debe encerrar un terreno que tenga la forma de un rectángulo con un semicírculo adjunto a cada uno de los lados opuestos del rectángulo. El rectángulo debe tener área máxima. Hallar las dimensiones del rectángulo.

10. **(Pista de carreras).** Se desea construir una pista de carreras de 400 m. de longitud. La pista debe encerrar un terreno que tenga la forma de un rectángulo con un semicírculo adjunto a cada uno de los lados opuestos del rectángulo. ¿Cuál es la máxima área que puede tener el terreno encerrado?

11. **(Máxima claridad).** Se desea construir una ventana de 7 m. de perímetro y que tenga la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. ¿Qué dimensiones debe tener si se quiere que ella deje pasar la máxima claridad? Sugerencia: A mayor área, mayor claridad.

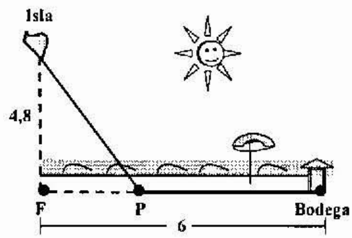
12. **(Máxima claridad).** Una ventana de 18 pies de perímetro está conformada por un rectángulo coronada por un triángulo equilátero. El vidrio que cubre el rectángulo es más claro que el que cubre el triángulo. Por pie cuadrado, el vidrio del rectángulo deja pasar el doble de luz del que cubre el triángulo. Hallar las dimensiones de la ventana que dejan pasar la máxima claridad.

13. **(Costo mínimo).** Dos puntos A y B están opuestos uno al otro en las riberas de un río de 3 Km. de ancho. Un tercer punto C está en la misma ribera que B pero a 7 Km. río abajo. Una compañía de teléfonos desea unir telefónicamente los puntos A y C. Para esto, se debe tender dos cables: Uno de A a un punto P, en la ribera opuesta, y el otro cable de P a C. Si el tendido del cable en el agua cuesta \$ 17.000 el Km. y en tierra cuesta \$ 8.000 el Km. ¿Dónde debe estar localizado el punto P para que el costo sea mínimo?



14. **(Costo mínimo).** En el problema anterior, si el tendido de cable en el agua cuesta \$ 13.000 el Km. y en tierra \$ 12.000. ¿Dónde debe estar localizado el punto P?

15. **(Tiempo mínimo).** Una isla se encuentra a 4,8 Km. de una playa recta. En la playa, a 6 Km. del punto F que está frente la isla, funciona una bodega. Un hombre que está en la isla quiere ir a la bodega. Se sabe que el hombre rema a 3 Km./h. y camina a 5 Km./h. ¿Qué camino debe seguir para llegar a la bodega en el menor tiempo posible?



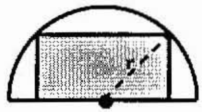
16. **(Tiempo mínimo).** Si en el problema anterior el hombre rema a razón de 4 Km./h y camina a razón de 5 Km./h. ¿Qué camino debe seguir?

17. **(Hotelería).** Un hotel tiene 100 habitaciones. El gerente sabe que cuando el precio por habitación es de \$ 45 todas las habitaciones son alquiladas; pero por cada dólar de aumento, una habitación se desocupa. Si el precio de mantenimiento de una habitación ocupada es de \$ 5. ¿Cuántas habitaciones deben alquilarse para obtener máxima ganancia? ¿Cuál debe ser el precio por habitación?

18. **(Agricultura).** Una finca está sembrada de mangos a razón de 80 plantas por hectárea. Cada planta produce un promedio de 960 mangos. Por cada planta

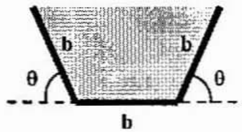
adicional que se siembre, el promedio de producción por planta se reduce en 10 mangos. ¿Cuántas plantas se deben sembrar por hectárea para obtener la máxima producción?

19. **(Area Máxima).** Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un semicírculo de radio r.



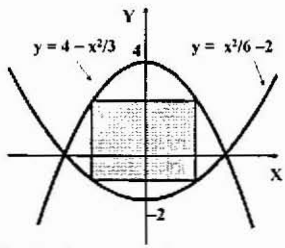
20. **(Volumen máximo).** Se planea construir un canal de concreto para transportar agua a una finca. La sección transversal del canal es como se indica la figura, teniendo la base y las paredes laterales una misma longitud b. Hallar el ángulo θ que permite que el canal transporte el mayor volumen de agua.

Sugerencia: Exprese el área del trapecio en términos de θ y maximice.



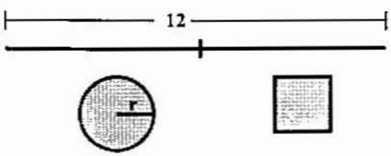
21. **(Area Máxima).** Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima, de lados paralelos a los ejes y que puede inscribirse en la región acotada por las parábolas

$$y = 4 - \frac{x^2}{3}, \quad y = \frac{x^2}{6} - 2$$

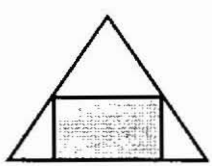


22. **(Resistencia Máxima).** De un tronco circular de radio 3 dm. se quiere cortar una viga rectangular de máxima resistencia. Hallar las dimensiones del rectángulo. Se sabe que la resistencia de una viga rectangular es directamente proporcional a su ancho y al cuadrado de su altura. Es decir, $R = kah^2$, donde R es la resistencia, k es una constante de proporcionalidad, a es el ancho del rectángulo y h su altura.

23. **(Area Mínima).** Un trozo de alambre de 12 m. se corta en dos partes. Una parte se doblará para formar una circunferencia y la otra se doblará para formar un cuadrado. ¿Dónde se hará el corte si : **a.** La suma de las áreas es mínima. **b.** La suma de las áreas es máxima?



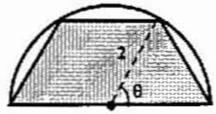
24. **(Area Máxima).** Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un triángulo equilátero de 12 cm. de lado, de tal modo que un lado del rectángulo descanse sobre un lado del triángulo.



25. **(Area Máxima).** Probar que de todos los triángulos isósceles de perímetro fijo, el que tiene área máxima es un triángulo equilátero.

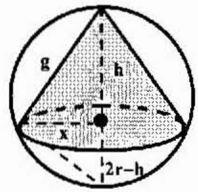
26. **(Area Máxima).** Probar que de todos los triángulos isósceles inscritos en una circunferencia, el que tiene área máxima es un triángulo equilátero.

27. (Area Máxima). Se inscribe un trapecio en un semicírculo de radio 2, en tal forma que un lado del trapecio coincide con el diámetro. Hallar máxima posible área del trapecio.



28. (Area lateral máxima). Hallar las dimensiones del cilindro circular recto de área lateral máxima inscrito en una esfera de radio r.

29. (Volumen máximo). Hallar las dimensiones del cono circular recto de volumen máximo inscrito en una esfera de radio r.



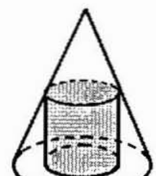
Sugerencia: V = Volumen del cono = $\frac{1}{3}\pi x^2 h$.

Pero, por semejanza de triángulos: $x^2 = h(2r - h)$.

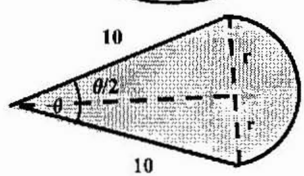
Luego, $V = \frac{1}{3}\pi h^2(2r - h)$.

30. (Area lateral máxima). Hallar las dimensiones del cono circular recto de área lateral máxima inscrito en una esfera de radio r. Ver la figura del problema anterior.
Sugerencia: A = Area lateral del cono = $\pi x g$.

31. (Volumen máximo). Probar que el volumen del mayor cilindro circular recto inscrito en un cono circular recto es $\frac{4}{9}$ del volumen del cono.



32. (Area máxima). Se construyen figuras conformadas por un triángulo isósceles de 10 cm. de lado al que se le adjunta un semicírculo, como indica el dibujo adjunto. Hallar:

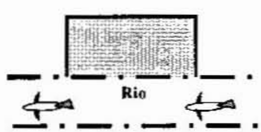


a. El ángulo θ correspondiente a la figura de área máxima.

b. El área máxima.

Sugerencia: Ver el problema resuelto 5 de la sección 1.1.

33. (Cerco mínimo). Se quiere construir un conuco rectangular de 7.200 m^2 de área a la orilla de un río. Si sólo se deben cercar los tres lados que indica la figura, ¿cuáles deben ser las longitudes de estos lados si se quiere la menor cantidad posible de cerco?



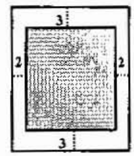
34. (Cerco mínimo). Se quiere cerrar un terreno rectangular y luego dividirlo en dos partes iguales mediante una cerca como indica la figura. El área de terreno encerrado debe ser de 864 m^2. Si se desea utilizar la mínima cantidad de cerca, ¿qué dimensiones debe tener el rectángulo?

35. (Area mínima). Se quiere construir una caja cerrada de madera de 72 dm^3 de volumen. La base debe ser un rectángulo cuyo largo sea el doble de su ancho.

a. ¿Qué dimensiones debe tener la caja si se quiere usar la mínima cantidad de madera?

b. ¿Qué dimensiones debe tener la caja si no tiene tapa?

36. (Area mínima). Se quiere imprimir un libro, en el cual cada página tenga 3 cm. de márgenes superior e inferior y 2 cm. de margen a cada lado. El texto escrito debe ocupar un área de 294 cm^2. Si se busca economizar papel, ¿qué dimensiones de la página son las más convenientes?



37. (Area máxima). Se tiene un terreno rectangular de 480 m^2. de área, sobre el cual se va a construir una casa que tendrá también forma rectangular. Para jardines se dejaran 5 m de frente, 5 m. atrás y 4 m. a los costados. ¿Qué dimensiones debe tener el terreno para que el área de la casa sea máxima?

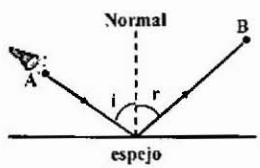
38. (Area mínima). Para envasar sus productos una compañía necesita potes cilíndricos de hojalata de 2π litros de capacidad y con tapa. Si se busca usar la mínima cantidad de hojalata, ¿qué dimensiones debe tener cada pote?

39. (Area mínima). Resolver el problema anterior para el caso en que el pote no tenga tapa superior.

40. (Volumen máximo). Se quiere construir vasos (cilíndricos sin tapa) de vidrio que tengan 108π cm^2. de material. ¿Qué dimensiones debe tener el vaso si se quiere que contenga la mayor cantidad de líquido?

41. (Velocidad más económica). Un bus debe hacer un viaje de 500 Km. a una velocidad constante x Km./h. La gasolina cuesta \$ 0,5 por litro, el bus consume $2 + \dfrac{x^2}{200}$ litros por hora, y el conductor cobra \$ 15 por hora. ¿cuál es la velocidad más económica?

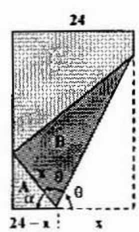
42. (Ley de reflexión). Usando el principio de Fermat (la luz viaja de un punto a otro a través de la trayectoria que minimiza el tiempo) probar que si la luz parte de A se refleja en un espejo y pasa por el punto B, entonces el ángulo de incidencia i es igual al ángulo de reflexión r.



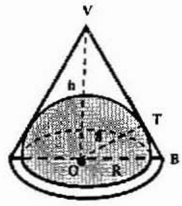
43. (Areas optimas). Se tiene una hoja larga de papel de 24 cm. de ancho Una esquina de es doblada en tal forma que el vértice doblado toque el lado opuesto, como se indica en la figura. Hallar el valor de x para el cual:

a. El triángulo A tenga área máxima.

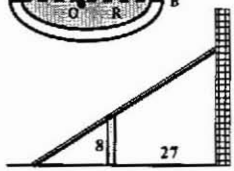
b. El triángulo B tenga área mínima.



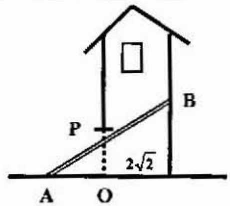
44. (Volumen mínimo). Hallar las dimensiones de un cono circular recto de volumen mínimo que se puede circunscribir en un hemisferio (semiesfera) de radio 8 cm.



45. Frente a un edificio, y a 27 pies de distancia, se tiene una pared de 8 pies de altura. Hallar la longitud de la escalera más corta que pueda apoyarse en el suelo, la pared y el edificio



46. (Altura mínima). Hallar la altura mínima $h = \overline{OP}$ que debe tener una puerta de una torre para que a través de ella pueda pasar un tubo $\overline{AB}$ de longitud $6\sqrt{6}$ m. El ancho de la torre es $2\sqrt{2}$ m.



SECCION 5.7

METODO DE NEWTON–RAPHSON

Resolver una ecuación, no siempre es simple o factible. Aún más, la situación se complica cuando en la ecuación intervienen funciones trascendentes. Así, no existen fórmulas para resolver ecuaciones tan simples como $\cos x = x$.

Para ayudarnos en la tarea de hallar raíces de ecuaciones complicadas, viene a nuestro auxilio el método de Newto-Raphson. Este método, mediante un simple proceso de iteración, podemos aproximar, con la exactitud deseada, una raíz real r de una ecuación $f(x) = 0$.

Este método fue presentado por Isaac Newton (1.642–1.727) en su obra **Method of Fluxions** escrita el año 1.671 y publicada, muchos años después, en 1.736. Para ilustrar su método, Newton, como ejemplo, encuentra aproximaciones a la raíz de la ecuación $x^3 - 2x - 5 = 0$ (ver el ejemplo 2, más abajo).

Joseph Raphson *(1.648–1.715) fue un matemático inglés egresado de la Universidad de Cambrige y amigo de Newton. Estuvo involucrado, a favor de Newton, en la reyerta con Leibniz sobre los orígenes del Cálculo. Raphson, a quien Newton le permitía acceso a sus trabajos, publicó el año 1.690, mucho antes que apareciera el Method of Fuxión, su obra* ***Analisys Aequationum Universales.*** *En esta obra aparece, por primera vez, el método que ahora se llama de Newton-Raphson.*

Veamos lo que dice este método. Sea f una función continua en el intervalo cerrado [a, b] y derivable en el intervalo abierto (a, b). Si f(a) y f(b) tiene signos distintos, entonces, el teorema del valor intermedio nos asegura que existe un número real $a < r < b$ tal que $f(r) = 0$. Esto es, r es una raíz de f que esta entre a y b. Haciendo un esbozo rápido de la gráfica de f, elegimos una primera aproximación x_1. El método de Newton se basa en la hipótesis de que la recta tangente al gráfico en el punto $(x_1, f(x_1))$ corta al eje X un punto x_2 cercano a r. Veamos como hallar x_2.

La recta tangente L en el punto $(x_1, f(x_1))$ tiene por ecuación:

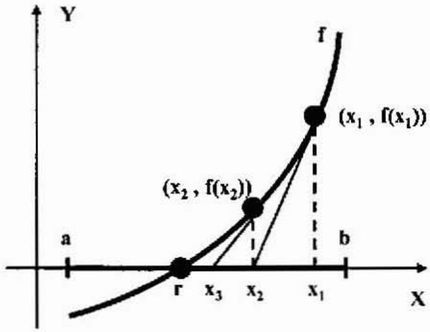
$$y = f(x_1) - f'(x_1)(x - x_1)$$

Si esta recta corta al eje X en x_2, tenemos

$$0 = f(x_1) - f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

De donde,

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \text{ si } f'(x_1) \neq 0$$



Reiniciamos el proceso tomando x_2 en lugar de x_1 y logramos la tercera aproximación x_3, dado por

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

Continuando el proceso, conseguimos una sucesión de aproximaciones $x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n, x_{n+1} \ldots$, donde

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Cada aproximación sucesiva x_n se llama una **iteración.**

Diremos que esta sucesión de aproximaciones converge a r si x_n se acerca más y más a medida que n crece; es decir cuando:

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = r$$

En resumen, tenemos:

$\boxed{\textbf{METODO DE NEWTON-RAPSON.}}$ Sea $f(r) = 0$, donde f es derivable en un intervalo abierto que contiene a r. Para aproximar a la raíz r seguir los siguientes pasos:

1. Tomar una estimación inicial x_1 cercana a r. Ayudarse con el gráfico de f.

2. A partir de x_1, hallar nuevas estimaciones $x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}$, mediante:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ donde } f'(x_1) \neq 0$$

3. La aproximación buscada es x_{n+1} si se cumple que $x_{n+1} = x_n$, con el grado de aproximación buscada.

EJEMPLO 1. Comenzando con $x_1 = 1$, calcular las aproximaciones x_2, x_3, x_4 y x_5 de la raíz positiva de la ecuación:

$$x^2 - 3 = 0$$

Solución

La raíz positiva de $x^2 - 3 = 0$ es $\sqrt{3}$. Luego, nos están pidiendo cuatro aproximaciones de $\sqrt{3}$.

Bien, la función f es diferenciable en todo $\mathbb{R}$ y, en particular, en todo intervalo abierto que contiene a $\sqrt{3}$. Además, $f'(x) = 2x$

Luego,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{(x_n)^2 - 3}{2x_n} = \frac{(x_n)^2 + 3}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right)$$

Ahora, $x_1 = 1$, entonces

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{3}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{1}\right) = 2$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{3}{x_2}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{4} = 1{,}75$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{3}{x_3}\right) = \frac{1}{2}\left(1{,}75 + \frac{3}{1{,}75}\right) = \frac{6{,}0625}{3{,}5} = 1{,}732142857$$

$$x_5 = \frac{1}{2}\left(1{,}732142857 + \frac{3}{1{,}732142857}\right) = = \frac{6{,}000318877}{3{,}464285714} = 1{,}73205081$$

Una calculadora nos da que $\sqrt{3} = 1{,}732050808$. Vemos que este valor y el de x_5 coinciden en 6 cifras decimales.

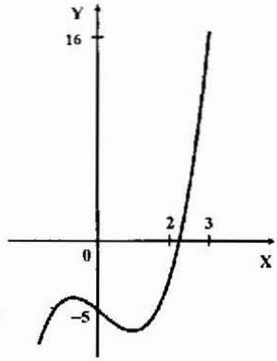
OBSERVACION. El grado de aproximación se expresa dando el números de cifras decimales deseados para la raíz. Así, si se pide una aproximación de 3 cifras decimales, se calculan las aproximaciones hasta que x_{n+1} y x_n coincidan en, por lo menos, las tres primeras cifras decimales. Otra manera de expresar este requerimiento se hace pidiendo que las aproximaciones sucesivas x_{n+1} y x_n difieran en menos de $0{,}001 = 10^{-3}$. En general, decir que una aproximación x_{n+1} es de k cifras decimales es equivalente a decir que x_{n+1} y x_n difieran en menos de 10^{-k}.

A continuación aproximamos la raíz de la ecuación $x^3 - 2x - 5 = 0$, mostrada por Newton en su obra **Method of Fluxions**.

EJEMPLO 2. Hallar una aproximación, con 6 cifras decimales, las raíces de

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

Solución



Sea $f(x) = x^3 - 2x - 5$. El gráfico de f nos muestra que la ecuación dada tiene una única raíz real que se encuentra en el intervalo [2, 3]. Esta afirmación también lo comprobamos viendo que $f(2) = -1$ es negativo y $f(3) = 16$ es positivo.

Tenemos que $f'(x) = 3x^2 - 2$ y

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 5}{3x_n^2 - 2} = \frac{2x_n^3 + 5}{3x_n^2 - 2}$$

El gráfico nos sugiere tomar como aproximación inicial a $x_1 = 2$.
Ahora,

$$x_2 = \frac{2x_1^3 + 5}{3x_1^2 - 2} = \frac{2(2)^3 + 5}{3(2)^2 - 2} = \frac{21}{10} = 2{,}1$$

$$x_3 = \frac{2x_2^3 + 5}{3x_2^2 - 2} = \frac{2(2{,}1)^3 + 5}{3(2{,}1)^2 - 2} = \frac{23{,}522}{11{,}23} = 2{,}094568121$$

$$x_4 = \frac{23{,}37864393}{11{,}16164684} = 2{,}094551482$$

$$x_5 = \frac{23{,}37820594}{11{,}16143773} = 2{,}094551482$$

Vemos que x_5 y x_4 coinciden en las seis primeras cifras decimales (en realidad, en 9 cifras). Luego, la aproximación buscada es $x_5 == 2{,}094551482$, ó, con 6 cifras decimales,

$$x_5 == 2{,}094551$$

EJEMPLO 3. Usando el método de Newton-Raphson determinar, con 8 cifras decimales, la coordenada x del punto en el primer cuadrante donde se intersentan las curvas

$$y = 2\cos x, \quad y = x^2$$

Solución

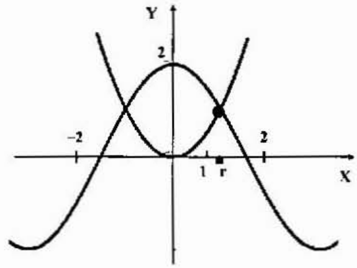
Aproximar la coordenada x del punto de intersección de las curvas $y = 2\cos x$ e $y = x^2$ equivale a aproximar la raíz de la ecuación $2\cos x = x^2$, o, equivalentemente, la raíz de la ecuación $2\cos x - x^2 = 0$. En consecuencia, aplicamos la regla de Newton-Raphson a la ecuación $f(x) = 0$, donde $f(x) = 2\cos x - x^2$.

Tenemos que $f'(x) = -2\operatorname{sen} x - 2x = -2(\operatorname{sen} x + x)$. Luego,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{2\cos x_n - (x_n)^2}{-2(\operatorname{sen} x_n + x_n)} \Rightarrow$$

$$x_{n+1} = \frac{(x_n)^2 + 2(x_n \operatorname{sen} x_n + \cos x_n)}{2(\operatorname{sen} x_n + x_n)}$$

La gráfica nos sugiere que tomemos como aproximación inicial a $x_1 = 1$. Luego,



$$x_2 = \frac{1^2 + 2((1)\operatorname{sen}(1) + \cos(1))}{2(\operatorname{sen}(1) + 1)}$$

$$= \frac{3{,}763546581}{3{,}68294197} = 1{,}02188593$$

$$x_3 = \frac{3{,}83129541}{3{,}749958935} = 1{,}021689964$$

$$x_4 = \frac{3{,}830685977}{3{,}749362477} = 1{,}021689954$$

$$x_5 = \frac{3{,}830685945}{3{,}749362446} = 1{,}021689954$$

Vemos que x_5 y x_4 coinciden en 8 (en realidad, en 9) cifras decimales. Luego la aproximación buscada es $x_5 = 1{,}021689954$, o, redondeando a 8 cifras decimales, $x_5 = 1{,}02168995$.

El sistema algebraico de computación **Derive** nos da, como solución aproximada a esta ecuación, el valor 1.021689954, él cual coincide con x_5.

DIFICULTADES EN LA REGLA DE NEWTON-RAPHSON

Algunas veces la sucesión de aproximaciones $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots$ dadas por el método de Newton-Raphson, correspondientes a una ecuación dada $f(x) = 0$, con aproximación inicial x_1, no converge. Esto se puede deber a dos razones:

1. Existe una aproximación x_k tal que $f'(x_k) = 0$, o sea cuando la recta tangente en el punto $(x_k, f(x_k))$ es horizontal. En tal situación no podemos calcular x_{k+1}, ya éste requiere dividir entre $f'(x_k) = 0$.

Puede suceder también que $f'(x_k)$, sin ser 0, esté muy cercana a 0. En este caso, la aproximación x_{k+1} se aleje del la raíz inicial y se ponga próxima a otra raíz de la ecuación.

Esta primera dificultada se salva fácilmente eligiendo la aproximación inicial con más cuidado.

2. Existen ecuaciones $f(x) = 0$ para las cuales, definitivamente, la regla de Newton-Raphson no funciona. Veremos en el problema resuelto 3, que la ecuación $f(x) = 0$, donde $f(x) = \sqrt[3]{x}$, cae dentro de este caso. Aquí la situación es insalvable y, entonces la solución se busca por otros métodos distintos al Newton-Raphson.

Para ayudarnos parcialmente, contamos con el siguiente resultado, que se encuentra en algunos textos de Análisis Numérico::

Sea r es una raíz de f(x) = 0. Si existe un intervalo abierto I que contiene a r y allí se cumple que:

$$\left|\frac{f(x)\,f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}\right| < 1,\ \forall\, x \in I, \qquad (1)$$

entonces la sucesión de aproximaciones $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots$, dadas por el método de Newton-Raphson, converge a r, para cualquier aproximación inicial x_1 tomada en el intervalo I.

Decimos que este resultado nos da una ayuda parcial debido a que el recíproco de ella no se cumple. Es decir, existen sucesiones que convergen y, sin embargo la desigualdad dada no se cumple.

EJEMPLO 4. Mediante la condición (1) anterior, comprobar que la sucesión de de aproximaciones encontrada en ejemplo 2 convergen.

Solución

$f(x) = x^3 - 2x - 5,\quad f'(x) = 3x^2 - 2,\quad f''(x) = 6x$

Ahora, en el intervalo (2, 3), donde $2 < x < 3$, tenemos que:

$$\left|\frac{f(x)\,f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}\right| = \left|\frac{\left(x^3-2x-5\right)\left(6x\right)}{\left(3x^2-2\right)^2}\right| < \left|\frac{\left(x^3-2x-5\right)\left(6x\right)}{\left(3x^2\right)^2}\right|$$

$$= \frac{6}{9}\left|\frac{\left(x^3-2x-5\right)\left(x\right)}{x^4}\right| = \frac{2}{3}\left|\frac{\left(x^3-2x-5\right)}{x^3}\right|$$

$$= \frac{2}{3}\left|1 - \frac{2}{x^2} - \frac{5}{x^3}\right| < \frac{2}{3}\left|1 - \frac{2}{2^2} - \frac{5}{2^3}\right| < \frac{2}{3}(1) < 1$$

Luego, la sucesión encontrada converge.

PROBLEMAS RESUELTOS 5. 7

PROBLEMA 1. Aproximar, con 5 cifras decimales, las raíces de

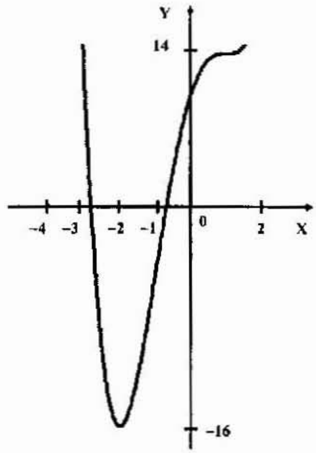
$$x^4 - 6x^2 + 8x + 8 = 0$$

Solución

Sea $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 8$. Se tiene:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x + 8 = 4(x+2)(x-1)^2,$$

$$f'(-2) = 0 \text{ y } f'(1) = 0$$



El gráfico de f nos dice que la ecuación dada tiene dos raíces: una, r_1, en el intervalo $[-3, -2]$ y la otra, r_2, en el intervalo $[-1, -0]$.

En vista de que $f'(-2) = 0$, no se puede tomar $x_1 = -2$ como aproximación inicial para ninguna de las dos raíces. Pero, nuevamente el gráfico, nos dice que para aproximar r_1 se debe escoger $x_1 < -2$, y para aproximar r_2, se debe escoger $x_1 > -2$. Más precisamente, el mismo gráfico nos sugiere que para r_1 tomemos $x_1 = -3$ y para r_2, $x_1 = -1$. Es así como procedemos a continuación:

Tenemos que:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^4 - 6x_n^2 + 8x_n + 8}{4(x_n^3 - 3x_n + 2)} = \frac{3x_n^4 - 6x_n^2 - 8}{4(x_n^3 - 3x_n + 2)}$$

2. Aproximación de r_1:

$x_1 = -3.$

$$x_2 = \frac{3(-3)^4 - 6(-3)^2 - 8}{4((-3)^3 - 3(-3) + 2)} = \frac{181}{4(-16)} = -2,8228125$$

$x_3 = -2,800151689$ $\quad x_4 = -2,799446153$ $\quad x_5 = -2,79944571$

Luego, $r_1 = x_5 = -2,79944571$, ó, con cinco cifras decimales, $r_1 = -2,79945$

2. Aproximación de r_2:

$x_1 = -1.$

$$x_2 = \frac{3(-1)^4 - 6(-1)^2 - 8}{4((-1)^3 - 3(-1) + 2)} = -\frac{11}{4(4)} = -0,6875$$

$x_3 = -0{,}679972769$ $\qquad x_4 = -0{,}67996066$ $\qquad x_5 = -0{,}67996066$

Luego, $r_2 = -0{,}67996066$ ó, con cinco cifras decimales, $r_2 = -0{,}67996$

PROBLEMA 2. **a.** Hallar el punto P_o en la gráfica de la función $y = e^x$ que esta más cercano al origen.

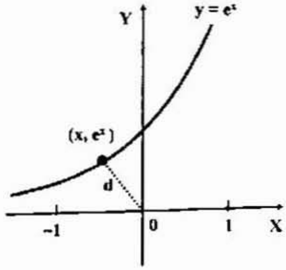
b. Hallar la distancia de este punto al origen.

Dar las respuestas con tres decimales de aproximación.

Solución

a. La distancia de un punto $P = (x, e^x)$ cualquiera del gráfico de $y = e^x$ al origen está dada por la función:

$$d = \sqrt{x^2 + (e^x)^2} = \sqrt{x^2 + e^{2x}}$$

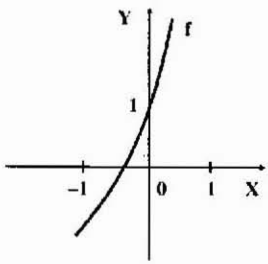


El punto que buscamos es el punto cuyas coordenadas minimizan esta distancia, o, equivalentemente, minimizan el cuadrado de esta distancia:

$$d^2 = x^2 + e^{2x}$$

En consecuencia, debemos hallar los puntos críticos de

$$d^2 = x^2 + e^{2x}$$



Bien, $\dfrac{d}{dx}\left(d^2\right) = 2x + 2e^{2x} = 0 \Rightarrow x + e^{2x} = 0$

Resolvemos la ecuación: $x + e^{2x} = 0$

Sea $f(x) = x + e^{2x}$. Se tiene que

$f'(x) = 1 + 2e^{2x}$ y

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n + e^{2x_n}}{1+2e^{2x_n}} = \frac{(2x_n - 1)e^{2x_n}}{1+2e^{2x_n}} = \frac{2x_n - 1}{e^{-2x_n} + 2}$$

El gráfico de f nos dice la ecuación dada tiene una única raíz y que está en el intervalo $[-1, 0]$.

Sea $x_1 = 0{,}5$. Entonces:

$$x_2 = \frac{2x_1 - 1}{e^{-2x_1} + 2} = \frac{2(-0{,}5) - 1}{e^{-2(-0{,}5)} + 2} = \frac{-2}{4{,}718281828} = -0{,}423883115$$

$$x_3 = \frac{-1,84776623}{4,334426452} = -0,426300053$$

$$x_4 = \frac{-1,852600108}{4,345738097} = -0,426302751$$

Luego, la aproximación con tres cifras decimales es $x = -0,426$ y el punto del grafico de $y = e^x$ más cercano al origen es

$$P_o = (-0,426,\ e^{-0,426}) = (-0,426,\ 0,653)$$

b. La distancia de $P_o = (-0,426,\ 0,653)$ al origen es

$$d = \sqrt{x^2 + e^{2x}} = \sqrt{(-0,426)^2 + e^{2(-0,426)}} = \sqrt{0,60803695} = 0,780$$

PROBLEMA 3. **a.** Sea a un número positivo y k un entero mayor que 1. Deducir, mediante el método de Newton-Raphson, la siguiente iteración para aproximar $\sqrt[k]{a}$.

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)\,x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right)$$

b. Usando esta iteración, hallar $\sqrt[5]{17}$ con una precisión de 6 cifras decimales.

La iteración anterior, para $k = 2$, dice:

$$x_{n-1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n} \right).$$

Esta fórmula fue conocida en la antigua Babilonia para computar la raíz cuadrada $\sqrt{a}$.

Solución

a. $\sqrt[k]{a}$ es la raíz de la ecuación $f(x) = x^k - a$. Luego, de acuerdo a Newton-Raphson,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^k - a}{k\,x_n^{k-1}} = \frac{kx_n^k - (x_n^k - a)}{k\,x_n^{k-1}}$$

$$= \frac{(k-1)x_n^k + a}{k\,x_n^{k-1}} = \frac{1}{k}\left((k-1)\,x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right)$$

b. Tomamos como aproximación inicial $x_1 = 1,5$.

$$x_2 = \frac{1}{5}\left(4x_1 + \frac{17}{x_1^4}\right) = \frac{1}{5}\left(4(1,5) + \frac{17}{(1,5)^4}\right) = 1,871604938$$

$x_3 = 1,774374802$ $\qquad$ $x_4 = 1,762502488$

$x_5 = 1,762340377$ $\qquad$ $x_6 = 1,762340348$

Luego, $\sqrt[5]{17} = 1,762340$, 6 cifras decimales.

PROBLEMA 4. Mostrar que el método de Newton-Raphson no funciona para aproximar la raíz de la ecuación

$$\sqrt[3]{x} = 0$$

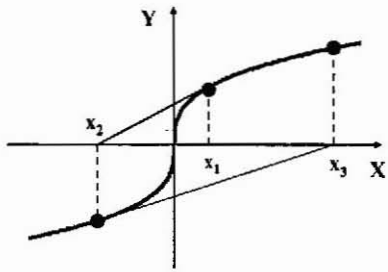
Solución

La raíz de esta ecuación es $r = 0$. Veamos que este valor no puede ser aproximado por ninguna sucesión $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots$ de aproximaciones, donde x_1 es cualquier valor no nulo. En efecto:

Tenemos: $f(x) = x^{1/3}$ y $f'(x) = \dfrac{1}{3x^{2/3}}$ y

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{(x_n)^{1/3}}{1/3(x_n)^{2/3}}$$

$$= x_n - 3x_n = -2x_n$$



Luego, la sucesión de aproximaciones es: x_1, $-2x_1$, $4x_1$, $-8x_1$ . . . Estas "aproximaciones", para cualquier $x_1 \neq 0$, se aleja de 0 a medida que n crece. Es decir, la sucesión no converge.

PROBLEMAS PROPUESTOS 5.7

En los problemas del 1 al 6, mediante un esbozo de la función correspondiente, deducir que las ecuaciones dadas tienen una única raíz. Mediante el método de Newton-Raphson, hallar una aproximación a esta raíz con seis cifras decimales.

1. $x^3 - 4x^2 + 2 = 0$ $\qquad$ **2.** $x^3 - 6x^2 + 9x + 1 = 0$ $\qquad$ **3.** $\cos x = x$

4. $\cos(x^3) = x$ $\qquad$ **5.** $e^{-x} = x$ $\qquad$ **6.** $x \ln x = 1$

En los problemas del 7 al 11, muestre que f(x) = 0 tiene una raíz en el intervalo [a,b] verificando que f(a) y f(b) tienen signos diferentes. Luego, mediante el método de Newton-Raphson, hallar una aproximación a esa raíz, con seis cifras decimales.

7. $f(x) = \text{sen } 2x - x + 1$, $a = 1$ y $b = 2$ **8.** $f(x) = \text{sen } x - e^{-x}$, $a = 2$ y $b = 4$

9. $f(x) = \tan x + x$, $a = 2$ y $b = 3$ **10.** $f(x) = \tan^{-1} x - \dfrac{x}{2}$, $a = -3$ y $b = -2$

11. $f(x) = \text{sen}^{-1} x - (x-1)^2$, $a = 0$, y $b = 1$

En los problemas del 12 y 13, hallar el valor del radical dado con 6 cifras de aproximación.

12. $\sqrt[3]{19}$ **13.** $\sqrt[6]{2}$

En los problemas 14 y 15 , usando el método de Newton-Raphson, determinar, con 6 cifras decimales, la coordenada x del punto donde se intersentan las curvas dadas.

14. $y = \ln x$, $y = 4x$, $y = 4x - x^2$ **15.** , $y = \tan^{-1} x$, $y = 2 - x$

16. a. Hallar el punto P_0 en la gráfica de la parábola $y = x^2$ que está más cerca del punto (2, 0)

b. Hallar la distancia de este punto al punto (2, 0).

Dar las respuestas con tres decimales de aproximación.

17. Hallar el máximo absoluto de la función $g(x) = \cos x + 5x - x^2$. Dar la respuesta con 3 cifras decimales de aproximación.

18. La ecuación $f(x) = 0$ tiene una raíz en a, donde f es la función

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-a}, & \text{si } x \geq a \\ -\sqrt{a-x}, & \text{si } x \leq a \end{cases}$$

Probar que el método de Newton–Raphson falla para aproximar la raíz a. Para esto, probar que ,para cualquier número positivo h, si $x_1 = a + h$, entonces $x_2 = a - h$; y si $x_1 = a - h$, entonces $x_2 = a + h$.

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

CAPITULO 1

SECCION 1.1

1. **a.** $\frac{3}{4}$ **b.** $\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ **c.** $\frac{h}{3(h+3)}$ **d.** $\frac{h}{(a+1)(a+h+1)}$

2. **a.** 2 **b.** $\frac{1}{4}a^2+a+2$ **c.** $\frac{h^2+2ah}{4}$

3. $\text{Dom}(f)=[9,+\infty)$, $\text{Rang}(f)=[0,+\infty)$

4. $\text{Dom}(g)=[-4,4]$, $\text{Rang}(g)=[0,4/3]$

5. $\text{Dom}(h)=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$, $\text{Rang}(h)=[0,+\infty)$

6. $\text{Dom}(u)=\text{Rang}(u)=\mathbb{R}$ **7.** $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{0\}$, $\text{Rang}(f)=\mathbb{R}$

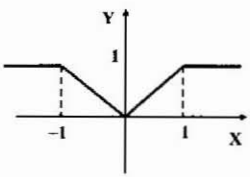
8. $\text{Dom}(y)=(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$, $\text{Rang}(y)=[0,+\infty)$. **9.** $\text{Dom}(g)=(-\infty,9]-\{5\}$

10. $\text{Dom}(y)=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)-\{-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\}$

11. $\text{Dom}(y)=(-\infty,0)\cup[\frac{1}{4},+\infty)$ **12.** $\text{Dom}(y)=(-\infty,1]-\{-15\}$

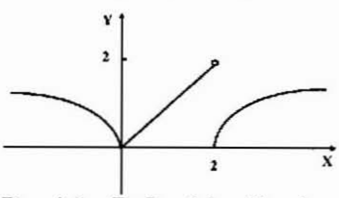
13. $\text{Dom}(y)=[-1,2)$ **14.** $\text{Dom}(y)=(-\infty,-5]\cup(3,+\infty)$

15.



$\text{Dom}(y)=\mathbb{R}$, $\text{Ran}(y)=[0,1]$

16.



$\text{Dom}(y)=\mathbb{R}$, $\text{Ran}(y)=[0,\infty)$

18. $f(x-1)=(x-5)^2$

19. $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$ **20.** $U(x)=226.000x-5.000x^2$

21. $G(x)=\begin{cases}4.000x, & \text{si } 0\le x\le 1.000\\ 4.000.000+(x-1.000)(14.000-10x), & \text{si } x>1.000\end{cases}$

22. $p(x) = 1.760x - 10x^2$ **23.** $V(x) = x^2(150 - 2x)$. **24.** $A(r) = \pi r^2 + \frac{1}{4}(6 - \pi r)^2$

25. $A(x) = 6(18 - x)\sqrt{x - 9}$ **26.** $A(x) = \frac{x}{8}(28 - 4x - \pi x)$

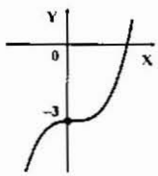
27. $V(x) = 4x(40 - x)(25 - x)$ **28.** $A(x) = \frac{1}{x}(x + 4)(252 + 6x)$

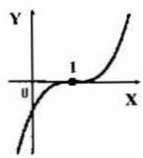
29. $P(0) = 20\left[\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right]$ **30.** $V(\theta) = \frac{125}{3\pi^2}\theta^2\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}$

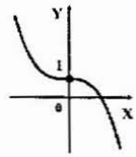
31. $y - x + 4\sqrt{2} = 0$

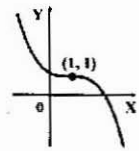
SECCION 1.2

1. **a.** $y = x^3 - 3$ **b.** $y = (x - 1)^3$ **c.** $y = -x^3 + 1$ **d.** $y = (x - 1)^3 + 1$

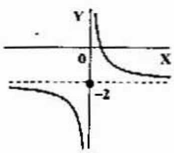


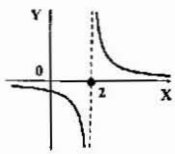


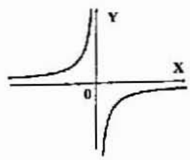


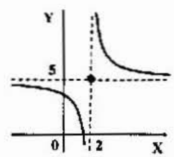


2. **a.** $y = \frac{1}{x} - 2$ **b.** $y = \frac{1}{x - 2}$ **c.** $y = -\frac{1}{x}$ **d.** $y = \frac{1}{x - 2} + 5$

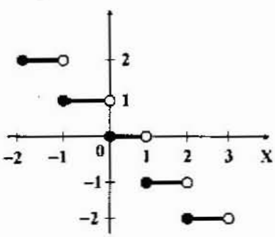


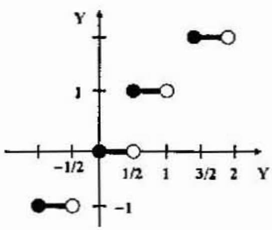


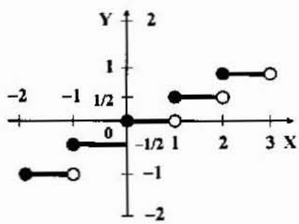




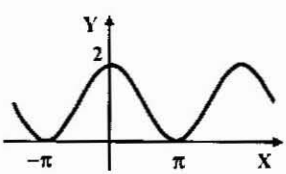
3. **a.** $y = -[\![x]\!]$ **b.** $y = [\![2x]\!]$ **c.** **b.** $y = \frac{1}{2}[\![x]\!]$



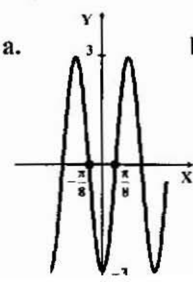




4. $y = 1 - \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$



5. **a.**



b. periodo $= \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

6. $\text{Dom}(f+g) = \text{Dom}(f-g) = \text{Dom}(fg) = (-\infty, 1) \cup (1, 2]$,

$\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = (-\infty, 1) \cup (1, 2)$

7. $\text{Dom}(f+g) = \text{Dom}(f-g) = \text{Dom}(fg) = [-4, -2] \cup [2, 4]$,

$\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = [-4, -2) \cup (2, 4]$

8. $\text{Dom}(f+g) = \text{Dom}(f-g) = \text{Dom}(fg) = (-2, 2)$, $\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = (-2, 2) - \{0\}$.

9. $\text{Dom}(f) = [1, 4]$ **10.** $\text{Dom}(f) = (-2, 0]$ **11.** $\text{Dom}(g) = [-2, 3)$

12. $(f \circ g)(x) = x - 1$, $\text{Dom}(f \circ g) = [0, +\infty)$

$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $\text{Dom}(g \circ f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

$(f \circ f)(x) = x^4 - 2x^2$, $\text{Dom}(f \circ f) = \mathbb{R}$

$(g \circ g)(x) = \sqrt[4]{x}$, $\text{Dom}(g \circ g) = [0, +\infty)$.

13. $(f \circ g)(x) = x - 4$, $\text{Dom}(f \circ g) = [4, +\infty)$

$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, $\text{Dom}(g \circ f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

$(f \circ f)(x) = x^4$, $\text{Dom}(f \circ f) = \mathbb{R}$

$(g \circ g)(x) = \sqrt{\sqrt{x-4} - 4}$, $\text{Dom}(g \circ g) = [20, +\infty)$.

14. $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$, $\text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R} - \{0\}$

$(g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2 - x}$, $\text{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R} - \{0,1\}$

$(f \circ f)(x) = x^4 - 2x^3 + x$, $\text{Dom}(f \circ f) = \mathbb{R}$

$(g \circ g)(x) = x$, $\text{Dom}(g \circ g) = \mathbb{R} - \{0\}$

15. $(f \circ g)(x) = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{x}}$, $\text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R} - \{1\}$

$(g \circ f)(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$, $\text{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R} - \{1\}$

$(f \circ f)(x) = \frac{x-1}{x}$, $\text{Dom}(f \circ f) = \mathbb{R} - \{0,1\}$, $(g \circ g)(x) = \sqrt[9]{x}$, $\text{Dom}(g \circ g) = \mathbb{R}$.

16. $(f \circ g)(x) = \sqrt{-x}$, $\text{Dom}(f \circ g) = (-\infty, 0]$

$(g \circ f)(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x^2 - 1}}$, $\quad \text{Dom}(g \circ f) = [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$

$(f \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 2}$, $\text{Dom}(f \circ f) = (-\infty, -\sqrt{2}\,] \cup [\,\sqrt{2}, +\infty]$

$(g \circ g)(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x}}$, $\text{Dom}(g \circ g) = [0, 1]$

17. $(f \circ g \circ h)(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x^2 - 1}}$

18. $(f \circ g \circ h)(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2 - x}{x^2 - x + 1}}$

19. $(f \circ f \circ f)(x) = x$, $\text{Dom}(f \circ f \circ f) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

20. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = 1 + x$.

21. $f(x) = x - 3$, $g(x) = \sqrt{x}$

22. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = (2x - 1)^2$

23. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$

24. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$, $h(x) = x^2$

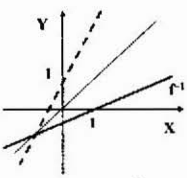
25. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = x + 1$, $h(x) = x^2 + |x|$

26. $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $g(x) = x - 1$, $h(x) = \sqrt{x}$

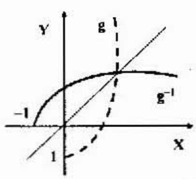
27. $g(x) = x^2 - 2x + 1$ **28.** $g(x) = \dfrac{1}{x + 1}$

SECCION 1.3

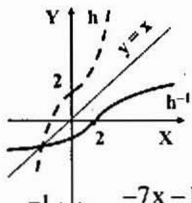
1. $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$



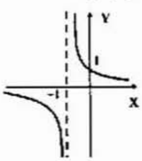
2. $g^{-1}(x) = \sqrt{x + 1}$



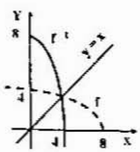
3. $h^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$



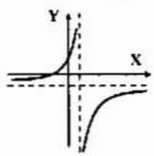
4. $k^{-1}(x) = \dfrac{1}{x + 1}$



5. $f^{-1}(x) = 8 - \dfrac{x^2}{2}$



6. $g^{-1}(x) = \dfrac{-7x - 15}{3x - 5}$



SECCION 1.4

1. $\frac{\pi}{3}$ **2.** $\frac{5}{4}\pi$ **3.** π **4.** $-\frac{\pi}{3}$ **5.** $\frac{3\pi}{4}$ **6.** $\frac{7\pi}{6}$ **7. a.** $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ **b.** $\frac{1}{4}\sqrt{2}$

c. $2\sqrt{2}$ **d.** $\frac{3}{4}\sqrt{2}$ **e.** 3 **8. a.** $\frac{1}{5}\sqrt{5}$ **b.** $\frac{2}{5}\sqrt{5}$ **c.** $\frac{1}{2}$ **d.** 2 **e.** $\sqrt{5}$

9. a. $-\frac{3}{10}\sqrt{10}$ **b.** $\frac{1}{10}\sqrt{10}$ **c.** $-\frac{1}{3}$ **d.** $\sqrt{10}$ **e.** $-\frac{\sqrt{10}}{3}$ **10.** $\frac{1}{2}$ **11.** $-\frac{1}{2}\sqrt{5}$

12. $-\frac{3}{5}$ **13.** $-\frac{3}{7}\sqrt{7}$ **14.** $\frac{\pi}{3}$ **15.** $\frac{\pi}{3}$ **16.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{10}}{30}$ **17.** $\frac{4}{9}\sqrt{2}$

18. $\sqrt{3}$ **19.** $\frac{5}{26}\sqrt{26}$ **20.** $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ **21.** $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ **22.** $\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$

23. $\sqrt{\frac{1+x}{2}}$ **24.** $x = 2\text{sen}\,(-0{,}5) \approx -0{,}958851077$ **25.** $x=\sqrt{2}-1$

26. $x \approx 0{,}8673$ ó $x \approx -1{,}4728682$

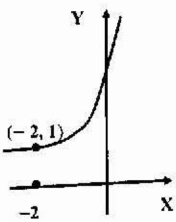
SECCION 1.5

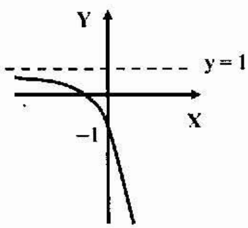
1. 3 **2.** 16 **3.** 125 **4.** $\frac{1}{125}$ **5.** 4 **6.** $\frac{4}{3\sqrt{3}}$ **7.** 100

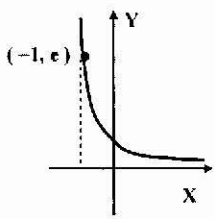
8. $e^{-4}=\frac{1}{e^4}$ **9.** $\frac{1}{81}$ **10.** $\frac{1}{5}$ **11.** 2^{14} **12.** $\frac{1}{32}$ **13.** 2

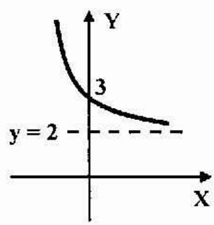
14. 2 **15.** -4 **16.** $\frac{5}{3}$ **17.** $-\frac{7}{8}$ **18.** $-\frac{1}{3}$ **19.** -1 ó 3

20. $y = e^{x+2}$ **21.** $y=-2e^x+1$ **22.** $y=e^{-x}$ **23.** $y=e^{-x}+2$

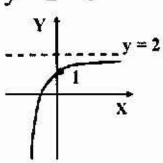


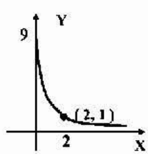


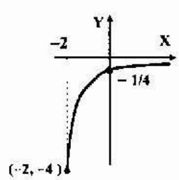




24. $y=2-e^{-x}$ **26.** $y=3^{-x+2}$ **28.** $y=-4^{-x-1}$







29. 125/81 **30.** -1.590

SECCION 1.6

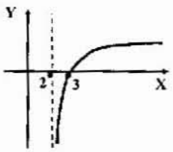
1. -6 **2.** 4 **3.** -4 **4.** $-\frac{1}{2}$ **5.** 3 **6.** 9 **7.** $\sqrt{3}$ **8.** $\frac{8}{9}$ **9.** 625

10. $8, -2$ **11.** 5 **12.** $e^{-a/3}$ **13.** $e^{-1+k/20}$ **14.** e^2 **15.** $e^{e^{-4}}$

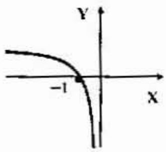
16. $\dfrac{\ln(14/3)}{-1{,}2} \approx -1{,}2837$ **17.** $1+\dfrac{3}{\ln 3} \approx 3{,}73$ **18.** $\dfrac{6}{(3+\log_2 3)} \approx 1{,}3086$

19. $\dfrac{8}{(4\log_2 3-1)} \approx 1{,}498$

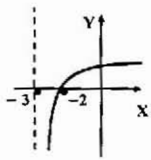
20. $y = \ln(x-2)$



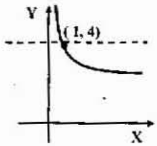
21. $y = \ln(-x)$



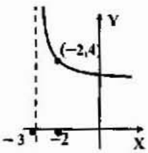
22. $y = \ln(x+3)$



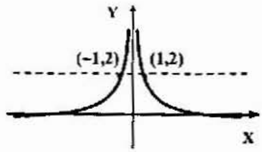
23. $y = 4 - \ln x$



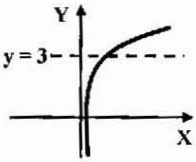
24. $y = 4 - \ln(x+3)$



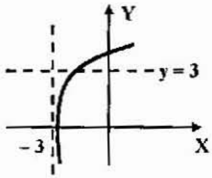
25. $y = 2 - \ln|x|$



26. $y = 3 + \log x$



27. $y = 3 + \log(x+3)$



28. $2\log a + \log b - \log c$ **29.** $\frac{1}{2}\log b - 2\log a - 3\log c$

30. $-\ln a + \frac{3}{2}\ln c - \frac{1}{2}\ln b$ **31.** $\frac{1}{5}(2\ln a - \ln b - 4\ln c)$

32. $\ln \dfrac{x^3 y}{z^2}$ **33.** $\log \dfrac{a^2 b}{(zx)^3}$ **34.** $\ln \dfrac{\sqrt[4]{a^3}\, b^3}{\sqrt{c^3}}$

35. a. $y = 5e^{(0{,}5\ln 3)t}$ **b.** $y = 6e^{(\ln(1{,}04))t}$

SECCION 1.7

1. a. 127.020 **b.** 5,127 % **2. a.** \$. 15.809,88 **b.** 22.12 %

3. a. 18 millones **b.** 24,3 millones **c.** 2,02 % **4.** 108.000 **5.** 6,75 millones

6. 6.351 gr **7.** 280,93 gr **8.** 64.000 millones **9.** 1.476,28 libras/pie^2

10. a. 81,87 % **b.** 67,03 % **c.** 14,84 % **11. a.** 12 mil **b.** 15.841 **12. b.** 980 mil

c. \$. 485.889,27 **14.** 3.924 años **15.** 2,32 horas **16.** 4 años

17. 29,54 meses **18.** 2.554 libros **19.** 81.666,666 millones

20. 29,5 años **21.** 11.460 años **22. a.** 11.700.000 **b.** 12.288.000

c. 12.886.396 **d.** 13.130.043 **e.** 13.130.043 **23. a.** 1.140.967,37

b. 1.123.322,4 **24.** 3.173.350.575 dólares **25. a.** 4,792 años

b. 4,621 años **26. a.** 7,595 años **b.** 7,324 años

CAPITULO 2

SECCION 2.1

1. 10 **2.** $\frac{1}{2}$ **3.** 0 **4.** $\frac{2}{3}$ **5.** 6 **6.** -10 **7.** $\frac{1}{4}$ **8.** 12 **9.** 27 **10.** 12 **11.** $-\frac{7}{2}$

12. -1 **13.** 6 **14.** 32 **15.** 8 **16.** $\frac{1}{3}$ **17.** 108 **18.** $2\sqrt{2}$ **19.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ **20.** $\frac{1}{4}$

21. $\frac{1}{4}$ **22.** 0 **23.** $-\frac{1}{56}$. **24.** 3 **25.** $\frac{3}{2}$ **26.** 12 **27.** $\frac{1}{3}$ **28.** $\frac{2}{3}$ **29.** $\frac{3}{2}$

30. 3 **31.** $\frac{4}{3}$ **32.** $\frac{m}{n}$ **33.** $\frac{1}{2}$ **34.** $\frac{3a^2}{a-1}$ **35.** $\frac{(a-b)\sqrt{c+d}}{(c-d)\sqrt{a+b}}$ **38.** 0 **39.** 0

40. 1 **41.** 2 **42.** -3 **43.** -2 **44.** 2 **45.** 1 **46.** 0 **47.** 12 **48.** 13 **49.** 3

50. 3 **51.** 1 **52.** 0 **53.** $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$ **54.** $\frac{9}{2}\sqrt[6]{a^7}$

55. a. 5, **b.** 5, **c.** 5 **56. a.** 8, **b.** 8, **c.** 8 **57. a.** -4 , **b.** no existe

58. $f(x)=\begin{cases} 3 & \text{si } x \leq 0 \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

59. a $f(x)=\frac{x}{|x|}$, $g(x)=-\frac{x}{|x|}$ en $a=0$ **b** Las mismas de (a)

SECCION 2.3

1. -1 **2.** $\frac{2}{3}$ **3.** $\frac{1}{2}$ **4.** 0 **5.** 0 **6.** 0 **7.** 1 **8.** $\frac{1}{2}$ **9.** $\frac{1}{2}$

10. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **11.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **12.** $\frac{\sqrt{2}}{8}$ **13.** π **14.** $\frac{3}{4}$ **15.** $\frac{1}{2}$ **16.** 0

17. 1 **18.** $\frac{2\cos a}{\cos(a/2)}$ **19.** $-2\operatorname{sen} a$ **20.** $\cos^3 a$ **21.** $-\frac{1}{3}$ **22.** 3

SECCION 2.4

2. 1/2 **4.** 0, esencial **5.** -2, esencial **6.** 2 y -2, esenciales **7.** 5 esencial

8. 3 y -8, esenciales **9.** 2, esencial **10.** 3, esencial **11.** 1 esencial **12.** 3 y 5

13. 4 **14.** 2 **15.** -1, 2 **16.** $a = 1$ y $b = -1$ **17.** $a = 12/\pi$ y $b = -7/2$

18. $a = -1$ y $b = 1$ **19.** $a = b$, b cualequiera. **20.** $\left\{n + \frac{1}{2}\text{, n un entero}\right\}$

21. $\{4n\text{, n un entero}\}$ **22.** $[0, 1) \cup \mathbb{Z}$ **23.** $\{0\}$ **24.** $\mathbb{Z}$ **25.** $\mathbb{R}$

26. 1,5 **27.** $-1{,}9$ **28.** 0,7

SECCION 2.5

1. en 2: $+\infty$, $-\infty$ **2.** en 2: $+\infty$, $+\infty$ **3.** en -1: $+\infty$, $+\infty$ **4.** en 4: $+\infty$, $-\infty$

5. en 5: $+\infty$, $-\infty$ **6.** en 0: $+\infty$, $-\infty$; en -2: $-\infty$; $+\infty$

7. en 3: $+\infty$, $-\infty$; en -1: $+\infty$, $-\infty$ **8.** en -2: $-\infty$; $+\infty$, ; en 2: $+\infty$, $-\infty$

9 en 0: $-\infty$; $+\infty$ **10.** 0 **11.** $+\infty$ **12.** $+\infty$ **13.** $-\infty$ **14.** $-\infty$ **15.** $+\infty$

16. $-\infty$ **17.** $+\infty$ **18.** $-\infty$ **19.** $-\infty$ **20.** $+\infty$ **21.** 1 **22.** $-\frac{1}{2}$ **23.** $-\infty$ **24.** 0

25. 2 **26.** 0 **27.** $-\infty$ **28.** $+\infty$ **29.** $x = 0$ **30.** $x = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$

31. $x = 1$, $x = -1$ **32.** $x = 1$, $x = -1$

SECCION 2.6

1. 0, 0 **2.** 0, 0 **3.** 1, 1 **4.** $+\infty$, $-\infty$ **5.** 1/2, 1/2

6. $+\infty$, $-\infty$ **7.** $-\infty$, $-\infty$ **8.** 1, 1 **9.** $+\infty$, $+\infty$ **10.** $+\infty$ **11.** $+\infty$ **12.** 1

13. 0, **14.** $+\infty$ **15.** -2 **16.** 0 **17.** $+\infty$ **18.** 5/2 **19.** 0 **20.** 2

21. -2 **22.** $1/2$ **23.** 0 **24.** $1/2$ **25.** 0 **26.** 1 **27.** -1

28. 1 **29.** 0 **30.** 0 **31.** 0 **35.** $y=0$ **36.** $y=0$

37. $y=0$ **38.** $y=2, y=-2$

39. $y=1, y=-1$ **40.** No tiene **41.** $y=0$ **42.** $x=-4,\ x=4,\ y=-2$

43. $x=1,\ y=2,\ y=-2$ **44.** $x=-\sqrt{2},\ x=\sqrt{2},\ y=1, y=-1.$

SECCION 2.7

1. a **2.** $\frac{1}{a}$ **3.** $\frac{1}{e}$ **4.** e **5.** $a-b$ **6.** 1

SECCION 2.8

1. $y=x+1$ **2.** $y=x$ **3.** $y=\frac{1}{2}x-1$ **4.** $y=2x+2$ **5.** $y=x,\ y=-x$

6. $y=x,\ y=-x$ **7.** $y=2x-2$, $y=-2$ (horizontal) **8.** $y=-x+2$

CAPITULO 3

SECCION 3.1

1. $f'(1)=0$ **2.** $g'(3)=1$ **3.** $h'(2)=3$ **4.** $f'(2)f=4$ **5.** $g'(-1)=-4$

6. $h'(-2)=-\frac{3}{4}$ **7.** $f'(-1)=-6$ **8.** $g'(2)=\frac{3}{4}$ **9.** $h'(-1)=3$ **12.** $a=\frac{1}{3}, b=\frac{2}{3}$

13. $f'(x)=0$ **14.** $g'(x)=1$ **15.** $h'(x)=3$ **16.** $f'(x)=4$; **17.** $g'(x)=4x$

18. $h'(x)=-\frac{3}{x^2}$ **19.** $f'(x)=6x$ **20.** $g'(x)=1-\frac{1}{x^2}$ **21.** $h'(x)=3x^2$

22. a. $f'(1)=5$ **b.** $5x-y-3=0$ **c.** $x+5y-11=0$ **23. a.** $g'(12)=\frac{1}{6}$

b. $x-6y+6=0$ **c.** $6x+y-75=0$ **24. a.** $h'(x)=x-1$ **b.** $(4, 11)$

c. $3x-y-1=0$ **25. a.** $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ **b.** $2x-4y+5=0$

SECCION 3.2

1. $y'=8x-6$ **2.** $y'=-\frac{1}{3}+x^5$ **3.** $y'=2x^3-0{,}6x+2{,}5$

4. $u' = 10v^9 - 6v^7 + 1{,}2v^2$ **5.** $s' = -10t^{-6} + t^2 + 0{,}6t^{-3}$ **6.** $z' = \frac{-1}{3y^2} + \frac{6}{y^3}$

7. $f'(x) = \frac{5}{2}x^{-1/6} + \frac{8}{3}x^{-5/3}$ **8.** $g'(x) = 5ax^4 + 4bx^{-5} + \frac{3}{2}cx^{1/2}$ **9.** $y' = -\frac{4x^5}{a}$

10. $z' = \frac{3x^2}{a+b} - \frac{5x^4}{a-b} - 1$ **11.** $z' = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}bt$ **12.** $y' = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^3}$

13. $z' = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} + \frac{1}{3t\sqrt[3]{t}}$ **14.** $u' = -\frac{\sqrt{3}}{4x\sqrt{x}} + \frac{10}{9x\sqrt[3]{x^2}}$ **15.** $y' = -64x^7 - 14x^6 + 90x^5$

16. $y' = (x^3 + 3x^2)e^x$ **17.** $y' = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^x$ **18.** $y' = ex^{e-1} + e^x$

19. $y' = 3x^2 - 12x + 11$ **20.** $72x^5 - 50x^4 - 32x^3 + 2x^2 + 10x + 4$

21. $z' = \frac{1}{2\sqrt{t}}(21t^{10} - 13t^6 - 18t^4 + 2)$ **22.** $y' = 1$ **23.** $u' = 5x\sqrt{x} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{x}} - 2$

24. $y' = \frac{-1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{6}{x^2}$ **25.** $y' = -\frac{3}{(x-9)^2}$ **26.** $y' = \frac{-8}{(x-8)^2}$

27. $y' = \frac{-6}{(x-3)^2}$ **28.** $z' = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$ **29.** $u' = \frac{4t^3 - 6t^2 - 1}{(t-1)^2}$

30. $y' = \frac{x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$ **31.** $y' = \frac{ax^2 - c}{x^2}$ **32.** $y' = \frac{3ax^2 + bx - c}{2x\sqrt{x}}$

33. $y' = \frac{2ax}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ **34.** $y' = \frac{-4x}{(x^2-1)^2} - 3x^2 + 2x + 1$ **35.** $y' = \frac{-2(x-2)}{(x-1)^2(x-3)^2}$

36. $y' = \frac{-3}{2\sqrt{x}(1+2\sqrt{x})^2}$ **37.** $y' = \frac{-4}{3\sqrt[3]{x^2}(1+3\sqrt[3]{x})^2}$ **38.** $y' = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

39. $x + y + 2 = 0$ **40.** $8x + y - 4 = 0$ **41.** $x - 2y + 2 = 0$

42. $-4ax + y + 3a^2 = 0$ **43.** $\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ **44.** $y = e$

45. $y = \frac{e}{2}$ **46.** $\left(2, -\frac{65}{6}\right), (-3, 10)$ **47.** $3x + y + 4 = 0$

48. $-x + 2y - 5 = 0$ **49.** $y = 3x^2 - 12x$ **50.** $y = -x^2 + 8x$

51. $y = x^2 + 2x - 3$.

SECCION 3.3

1. $f'(x) = 5\cos x - 2\operatorname{sen} x$ **2.** $g'(\theta) = \cot\theta - \theta\,\operatorname{cosec}^2\theta$ **3.** $y' = \operatorname{sen}\alpha\,(1 + \sec^2\alpha)$

4. $y' = \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x$ **5.** $h'(t) = \dfrac{1}{1+\cos t}$ **6.** $f'(x) = \dfrac{x - \operatorname{sen} x \cos x}{x^2 \cos^2 x}$

7. $g'(x) = \dfrac{2\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^2}$ **8.** $y' = \dfrac{-2}{(\operatorname{sen} t - \cos t)^2}$ **9.** $y' = \operatorname{sen} x + \cos x$

10 a. $y - 3\sqrt{3}\,x + \sqrt{3}\,\pi - 1 = 0$ **b.** $y + \dfrac{\sqrt{3}}{9}x - \dfrac{\sqrt{3}}{27}\pi - 1 = 0$

SECCION 3.4

1. $y' = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)e^x$ **2.** $y' = -2^{-x}\ln 2$ **3.** $y' = \left((\ln 2)x^2 + 2x\right)2^x$

4. $y' = \left(-x^2 + 2x\right)e^{-x}$ **5.** $y' = \left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)e^x$ **6.** $y' = \left(\dfrac{1}{x\ln x} + \ln 2\log_2 x\right)2^x$

7. $y' = \dfrac{1 - x\ln x}{xe^x}$ **8.** $y' = \dfrac{1 - (\ln 2)^2 x\log_2 x}{(\ln 2)x2^x}$ **9.** $y' = \dfrac{2}{x(1-\ln x)^2}$

10. $y = \dfrac{e}{2}$ **11.** $y - 2ex - e = 0$ **12.** $(2\ln 2)\,y + x - 4 = 0$

SECCION 3.5

1. $\dfrac{dy}{dx} = 3(x^2 - 3x + 5)^2(2x - 3)$ **2.** $f'(x) = -32(15 - 8x)^3$

3. $g'(t) = -18t^2(2t^3 - 1)^{-4}$ **4.** $\dfrac{dz}{dx} = -8\left(5x^5 - x^4\right)^{-9}\left(25x^4 - 4x^3\right)$

5. $\dfrac{dy}{dx} = -32x\,(3x^2 - 8)^3(-4x^2 + 1)^3 + 18x\,(3x^2 - 8)^2(-4x^2 + 1)^4$

6. $f'(u) = \dfrac{2u(u^3 - 3u - 1)}{(u^2 - 1)^2}$ **7.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{8(x-1)}{(x+3)^3}$

8. $g'(t) = \dfrac{-12t(3t^2 + 2)(t^3 + 2t + 1)}{(2t^3 - 1)^3}$ **9.** $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-2x}}$ **10.** $u' = \dfrac{1 - 4t - 24t^2}{2\sqrt{1 + t - 2t^2 - 8t^3}}$

11. $h'(x) = \dfrac{2x^5}{\sqrt{x^4 - 1}} + 2x\sqrt{x^4 - 1}$ **12.** $g'(x) = \dfrac{1}{(x^2 + 1)^{3/2}}$

13. $y' = \dfrac{2\sqrt{3x^2-1}}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}} + \dfrac{3x\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{3x^2-1}}$ 14. $z' = -\dfrac{(1-3x^2)^2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^3} - \dfrac{12x(1-3x^2)}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$

15. $h'(t) = \dfrac{3-t}{2(1-t)^{3/2}}$ 16. $z' = \dfrac{-2t}{3\left(1+t^2\right)^{4/3}}$ 17. $z' = \dfrac{ax^2}{\sqrt[3]{\left(b+ax^3\right)^2}}$

18. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\left(b^2+x^2\right)^3}}$ 19. $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1+x}\,(1+\sqrt{1+x})^2}$

20. $f'(x) = \dfrac{3x^2-2(a+b+c)x+ab+ac+bc}{2\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}}$ 21. $y' = \dfrac{1+2\sqrt{x}}{6\sqrt{x}(x+\sqrt{x})^{2/3}}$

22. $y' = \dfrac{1+2\sqrt{x}+2\sqrt{x+\sqrt{x}}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ 23. $y' = 4\sec^2 4x$

24. $y' = -\operatorname{cosec}^2\dfrac{x}{2}$ 25. $u' = -3x^2 \operatorname{sen}(x^3)$ 26. $v' = -3\operatorname{sen} x \cos^2 x$

27. $y' = 4x^3\sec^2(x^4) + 4\tan^3 x \sec^2 x$ 28. $z' = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{sen}\sqrt{x}$

29. $u' = -\dfrac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{\cos x}}$ 30. $y' = -\dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\cos\sqrt{x}}}$ 31. $y' = \dfrac{\sec^2 3x}{(\tan 3x)^{2/3}}$

32. $y' = -\dfrac{2x\operatorname{cosec}^2\sqrt[3]{1+x^2}}{3(1+x^2)^{2/3}}$ 33. $y' = -\dfrac{2\tan x}{\sqrt{\sec x}}$ 34. $y' = \dfrac{2}{x^3}\operatorname{cosec}\dfrac{1}{x^2}\cot\dfrac{1}{x^2}$

35. $y' = \dfrac{-3}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}\operatorname{sen}^2\left[\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right]\cos\left[\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right]$ 36. $y' = \dfrac{2\sec^2 x}{(\sec^2 x+1)^{3/2}}$

37. $y' = \dfrac{\cos x}{(1-\operatorname{sen} x)^2}\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}}$ 38. $y' = \dfrac{(1-x^2)\operatorname{cosec}^2(x+\frac{1}{x})}{2x^2\sqrt{1+\cot(x+\frac{1}{x})}}$

39. $y' = \dfrac{-\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}}{2\left(1-\cot^2\frac{x}{2}\right)^{3/2}}$ 40. $y' = \dfrac{(a-b)\operatorname{sen} 2x}{2\sqrt{a\operatorname{sen}^2 x+b\cos^2 x}}$

41. $y' = \operatorname{sen} x\operatorname{sen}(\cos x)$ 42. $y' = -2x\operatorname{sen} x^2\cos(\cos x^2)$

43. $y' = -4\operatorname{sen} 4x\operatorname{sen}(2\cos 4x)$ 44. $y' = \cos x\cos(\operatorname{sen} x)\cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$

45. $y' = \operatorname{sen} x \ \operatorname{sen}(2\cos x) + \cos x \ \operatorname{sen}(2\operatorname{sen} x)$

46. $y' = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} \sec^2 \sqrt{\operatorname{sen} x} \cos\left(\tan \sqrt{\operatorname{sen} x}\right)$ **47.** $y' = \operatorname{sen} 2x \sec^2(\operatorname{sen}^2 x)$

48. $y' = -6x\, e^{-3x^2+1}$ **49.** $y' = \dfrac{\ln 2}{2\sqrt{x}} 2^{\sqrt{x}}$ **50.** $y' = x^{n-1} a^{-x^2}\left(n - 2x^2 \ln a\right)$

51. $y' = \dfrac{\ln 3}{t^2} \operatorname{cosec}^2(1/t)\, 3^{\cot(1/t)}$ **52.** $y' = (\ln 2)(\ln 3)\operatorname{sen} 2x \ 3^{\operatorname{sen}^2 x} \ 2^{3^{\operatorname{sen}^2 x}}$

53. $y' = \dfrac{1}{2(\ln 5)\, x\sqrt{\log_5 x}}$ **54.** $y' = \dfrac{1}{x} - 1$ **55.** $y' = \dfrac{1 - 2t\ln t}{te^{2t}}$

56. $y' = \dfrac{8e^{4x}}{e^{8x} - 1}$ **57.** $y' = e^{x\ln x}(1 + \ln x)$ **58.** $y' = \dfrac{x-5}{2(x+1)(x-2)}$

59. $y' = -\dfrac{6}{5\left(x^2 - 1\right)}$ **60.** $y' = \dfrac{3}{x} + \cot x$ **61.** $y' = -\dfrac{1}{x^2} \tan \dfrac{x-1}{x}$

62. $G'(2) = 20$ **63.** $F'(0) = -30$ **64.** $(f \circ g)'(x) = -\dfrac{3(3x^2 + 10x + 3)}{2(x+1)^4}$

65. $h'(x) = [3u^2 - 4u](2) = 6(2x-1)^2 - 8(2x-1) = 24x^2 - 40x + 14$

66. $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{v}}(6x^2) = \dfrac{3x^2}{\sqrt{2x^3 - 4}}$ **67.** $h'(x) = 5t^4\left(-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = \dfrac{-5(1 - 2\sqrt{x})^4}{\sqrt{x}}$

68. $h'(x) = \dfrac{-2bc}{(b+cx)^2}$ **69.** $h'(x) = \left(-\dfrac{1}{v^2}\right)\left(\dfrac{-ax}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) = \dfrac{x}{a(a^2 - x^2)^{3/2}}$

70. $\dfrac{dy}{dx} = (9u^2 - 16u^3)(2x) = 18x(x^2-1)^2 - 32x(x^2-1)^3$

71. $\dfrac{dy}{dx} = 5v^4(2b) = 10b(3a + 2bx)^4$ **72.** $\dfrac{dy}{dx} = 4t^3\left(\dfrac{a}{c}\right) = \dfrac{4a(ax+b)^3}{c^4}$

73. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{2v^{3/2}}(6x) = \dfrac{-3x}{(3x^2 - 1)^{3/2}}$

74. $12x + y + 11 = 0, \ x - 12y + 13 = 0$ **75.** $y = \dfrac{3}{4}, \ x = 0$

76. $7x - 18y - 13 = 0, \ 54x + 21y - 47 = 0$ **77.** $x - 12y - 17 = 0, \ 12x + y + 86 = 0$

78. $8x - y - 3 = 0, \ 2x + 16y - 17 = 0$ **79.** $y + 4x - 1 - \pi = 0, \ 16y - 4x + \pi - 16 = 0$

80. $y - 12x + 17 = 0, \ 12y + x - 86 = 0$

81. $6y + 15x - 5\pi + 3\sqrt{3} = 0,\ 30y - 12x + 4\pi + 15\sqrt{3} = 0$

82. En (1,0): $y - 2x + 2 = 0$. En (2,0): $y + x - 2 = 0$. En (3,0): $y - 2x + 6 = 0$

83. (0, 0), (4, 0) y (2, 16) **84.** $2y - x - 4 = 0,\ 2y - x + 4 = 0$. Son paralelas.

85. $y + x = 0,\ 9y + x = 0$ **86.** $y - 5x + 2 = 0$ **87.** $2y - x - 2\ln 2 = 0$

CAPITULO 4
SECCION 4.1

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x$ **2.** $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x}$ **3.** $\frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y}$ **4.** $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + 2xy^2 - 3y^2}{6xy - 2x^2y}$

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + 2x^2}{2x^2y}$ **6.** $\frac{dy}{dx} = \frac{(3x^2 - y)y^2}{1 + xy^2}$ **7.** $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 - 2xy^2}{y^3 - 3xy^2 + 2x^2y - 1}$

8. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 3x(x - y)^2$ **9.** $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ **10.** $\frac{dy}{dx} = \frac{-b^2x}{a^2y}$ **11.** $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

12. $\frac{dy}{dx} = \frac{x - ay}{ax - y}$ **13.** $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ **14.** $\frac{dy}{dx} = \frac{6\sqrt{y}\sqrt[3]{y^2}}{2\sqrt{y} + 3\sqrt[3]{y^2}}$ **15.** $\frac{dy}{dx} = -1$

16. $y' = \frac{y}{\sec^2 y - x} = \frac{y\cos^2 y}{1 - x\cos^2 y}$ **17.** $y' = -\frac{y}{x}$ **18.** $y' = \frac{\text{sen}(x - y) + y\cos x}{\text{sen}(x - y) - \text{sen}\, x}$

19. $y' = \frac{e^y}{1 - xe^y} = \frac{e^y}{2 - y}$ **20.** $y' = \frac{e^{x+1}}{e^y + ye^y} = \frac{1}{1 + y}e^{x-y+1}$

21. $y' = 2^{x-y}\frac{2^y - 1}{1 - 2^x}$ **22.** $y' = \frac{1}{2(1 + \ln y)}$ **23.** $y' = e^{y/x} + \frac{y}{x}$

24. **b.** $(f^{-1})'(3) = -\frac{1}{4}$ **c.** $y + 4x = 7$ **d.** $4y + x = 7$

25. **b.** $(g^{-1})'(2) = \frac{1}{10}$ **c.** $y - 10x = -8$ **d.** $10y - x = 8$

26. **b.** $(h^{-1})'(0) = 1$ **c.** $y = x$ **d.** $y = x$ **27.** $x - y + 5 = 0$

28. $5x - 6y + 9 = 0$ **29.** $y - x = 0$ **30.** $14x + 13y - 12 = 0$

31. $9x + 20\sqrt{3}\ y - 75 = 0$. $-9x + 20\sqrt{3}\ y + 75 = 0$

32. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$ en (a, b) y $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2$ en (a, –b) **33.** $9x + 13y - 40 = 0$

37. 45° en (1, 2) y en (3, –2) **38.** 0° en (0, 0) y 9° 2' en (1, 1).

SECCION 4.2

1. $y' = x^{x^3+2}(1 + 3\ln x)$

2. $y' = \frac{1}{2}x^{\sqrt{x}-1/2}(2 + \ln x)$

3. $y' = 2\ln x \cdot x^{\ln x - 1}$

4. $y' = \frac{1}{x}(\ln x)^{\ln x}(1 + \ln(\ln x))$

5. $y' = (\ln 2)(\ln 3)\, 3^x 2^{3^x}$

6. $y' = a^x x^a\left(\frac{a}{x} + \ln a\right)$

7. $y' = \sqrt[x]{x}\left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)$ 8. $y' = \left(x^2 + 1\right)^{\operatorname{sen} x}\left(\frac{2x \operatorname{sen} x}{x^2 + 1} + \cos x \ln\left(x^2 + 1\right)\right)$

9. $y' = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x \ln \operatorname{sen} x\right)$

10. $y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\left(\ln\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)$

11. $y' = \frac{x(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}}\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2-1} - \frac{x}{x^2+1}\right)$

12. $y' = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x(x^2-1)}{(x+1)^2}}\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2-1} - \frac{2}{x+1}\right)$

SECCION 4.3

1. $y' = \frac{1}{\sqrt{81-x^2}}$ 2. $y' = \frac{3}{x\sqrt{x^2-9}}$ 3. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

4. $y' = \frac{2x}{x^4+2x^2+2}$ 5. $y' = -\frac{1}{1+x^2}$ 6. $y' = 2\sqrt{4-x^2}$

7. $y' = \operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$ 8. $y' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x}}$ 9. $y' = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$

10. $y' = -\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ 11. $y' = 0$ 12. $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sec^2(\cos^{-1}x)$

13. $y' = \frac{1}{x}\sqrt{4x-x^2}$ 14. $y' = (x+y)^2$ 15. $y' = \frac{y}{x}\left(\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\right)$

16. $12y + 2x - 6 - 3\pi = 0$ 17. $4y + 8x - 3\pi = 0$

SECCION 4.4

1. $y'' = \dfrac{-b^2}{\left(b^2 - x^2\right)^{3/2}}$ **2.** $y'' = \dfrac{2(1-x^2)}{3\left(1+x^2\right)^2}$ **3.** $y'' = 2\tan^{-1} x + \dfrac{2x}{1+x^2}$

4. $y'' = -\dfrac{x}{1-x^2} - \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} x}{(1-x^2)^{3/2}}$ **5.** $y'' = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^{3/2}}\right)e^{\sqrt{x}}$

6. $y'' = \dfrac{2}{1-x^2} + \dfrac{2x\operatorname{sen}^{-1} x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}$ **7.** $y'' = 20x^3 - 24x,\ y''' = 60x^2 - 24$

8. $z'' = 14x^6 - 10x^4 - 1,\ z''' = 84x^5 - 40x^3$

9. $f''(x) = 12(x-1)^2,\ f'''(x) = 24(x-1)$

10. $g''(x) = 6(x^2+1)^2 + 24x^2(x^2+1),\ g'''(x) = 120x^3 + 72x$

11. $y'' = \dfrac{-1}{4x^{3/2}},\ y''' = \dfrac{3}{8x^{5/2}}$ **12.** $h''(x) = \dfrac{-4}{(2+x)^3},\ h'''(x) = \dfrac{12}{(2+x)^4}$

13. $y'' = -x\operatorname{sen} x + 2\cos x,\ y''' = -x\cos x - 3\operatorname{sen} x$

14. $y'' = \left(4x^3 + 12x^2 + 6x\right)e^{2x},\quad y''' = \left(8x^3 + 36x^2 + 36x + 6\right)e^{2x}$

15. $y'' = \dfrac{2}{x^3}$ **16.** $y'' = \dfrac{-4a^2}{y^3} = \dfrac{-a}{xy}$ **17.** $y'' = -\dfrac{2x^4 + 2xy^3}{y^5} = -\dfrac{2x}{y^5}$

18. $y'' = \dfrac{-2x^2}{9y^5} = \dfrac{-2}{9x^{4/3}}$ **19.** $y'' = \dfrac{1}{2x^{3/2}}$ **20.** $y'' = \dfrac{-b^4}{a^2y^3}$

24. $y^{(n)} = n!$ **25.** $y^{(n)} = 0$ **26.** $y^{(n)} = (n+1)!x$ **27.** $y^{(n)} = n!a$

28. $y^{(n)} = n!a_n$ **29.** $y^{(n)} = n!a^n$ **30.** $y^{(n)} = (-1)^n\dfrac{n!}{x^{n+1}}$ **31.** $y^{(n)} = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

32. $y^{(n)} = (-1)^n\dfrac{n!}{(x-a)^{n+1}}$ **33.** $y^{(n)} = a^n\cos(ax + n\frac{\pi}{2})$

34. $y^{(n)} = 2^{n-1}\operatorname{sen}\left[2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right]$ **35.** $y^{(n)} = a^n e^{ax}$ **36.** $y^{(n)} = (x+n)e^x$

37. $y^{(n)} = (-1)^n\dfrac{(n-2)!}{x^{n-1}},\ n \geq 2$ **38.** $y^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ **39.** $y''(1) = 40$

40. $y''(-1) = -\dfrac{11}{8}$ **41.** $y''(1) = \dfrac{1}{2}$ **42.** $y''(2) = -\dfrac{3}{2}$

43. **a.** en $t = -2$ y $t = 4$ **b.** en $t = 1$ **c.** $(-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$ **d.** $(-2, 4)$

44. a. en $t = 3$ **b.** en $t = -3\sqrt[3]{2}$ **c.** $(3, +\infty)$ **d.** $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$

45. $a(-5) = -\frac{2}{3}$ m/seg^2, $a(1) = \frac{2}{3}$ m/seg^2 **46.** $a(1/2) = 2$ m/seg^2

47. $v(1) = -27$ m/seg **48. a.** 160 pies **b.** 48 pies/seg **c.** $t = 1{,}5$ seg.

d. $t = 5$ seg. **e.** $v(5) = -112$ pies/ seg. **50.** $v_0 = 117{,}6$ m/seg. **51.** 156,8 m.

SECCION 4.5

1. $y' = -\operatorname{cosech} x$ **2.** $y' = 2\cosh 2x\ e^{\operatorname{senh} 2x}$

3. $y' = x^{\tanh x}\left(\frac{\tanh x}{x} + \operatorname{sech}^2 x\ \ln x\right)$ **4.** $y' = \frac{1}{4}\operatorname{sech}^4 \frac{x}{2}$

5. $y' = e^{ax}\left[a\cosh bx + b\operatorname{senh} bx\right]$

6. $y' = \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}} = \frac{1}{2\sqrt{\cosh x + \operatorname{senh} x}}$ **7.** $y' = \frac{-2\operatorname{cosech}^{-1} x}{|x|\sqrt{1+x^2}}$

8. $y' = \frac{2x}{\sqrt{x^4 + a^4}}$ **9.** $y' = -\operatorname{cosec} x$ **10.** $y' = \frac{2}{1-x^4}$

SECCION 4.6

1. 2.100.000 litros/año **2. a.** 200 habitantes por año **b.** 2% **3.** 3π m^2/seg

4. 1,5 m/min **5.** $-4{,}5$ m/min **6.** $-2{,}8$ Km/h **7.** 16 m/min

8. 80 pies/min **9.** $(-1, -5)$ **10.** $100\sqrt{3}$ cm^2/min **11.** -15 cm/seg

12. $-\frac{10}{\pi}$ pies/min, -240 pies^2/seg **14.** $-\frac{7}{2}$ m/min **15.** $\frac{80}{3}$ m/seg

16. $\frac{1}{3\pi}$ m/min **17.** 3 m./hora **18.** $\frac{8}{75}$ m./h **19.** $-0{,}9$ m/h

20. $-\frac{17}{\sqrt{10}} \approx -5{,}38$ pies/seg **21.** $\frac{5\pi}{36} \approx 0{,}44$ m/h **22.** $-\frac{6.600}{\sqrt{124}} \approx -592{,}7$ Km/h

23. 2,33 m/seg **24.** 10π Km/min **25.** -1.200 pies/seg

26. 64 pies/seg **27.** $\frac{14{,}3}{49} \approx 0{,}292$ ohms/seg **28. b.** 2 horas.

SECCION 4.7

1. a. $\Delta y = 2x\,dx + (dx)^2$ **b.** $dy = 2x\,dx$ **c.** $(dx)^2$

2. a. $\Delta y = e^x(e^{\Delta x} - 1)$ **b.** $dy = e^x\,dx$ **c.** $e^x(e^{\Delta x} - 1 - dx)$

3. a. $\Delta y = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$ **b.** $dy = \frac{dx}{x}$ **c.** $\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) - \frac{dx}{x}$

4. a. $-0{,}1791$ **b.** $-0{,}18$ **c.** $0{,}0009$

5. a. $-0{,}2276278$ **b.** $-0{,}2302585$ **c.** $0{,}0026307$

10. $dy = -6x\,e^{-3x^2}\,dx$ **11.** $dy = -\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **12.** $dy = \frac{2\,dx}{3(x+1)^{4/3}(x-1)^{2/3}}\,dx$

13. $dy = -\frac{x}{y}\,dx$ **14.** $dy = \frac{2x + \sqrt{y/x}}{2y - \sqrt{x/y}}\,dx$ **15.** $dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{x}\right)dx$

17. 8,9444 **18.** 3,0092592 **19.** 6,0185 **20.** 2,005 **21.** $\frac{\pi}{4} + 0{,}04 \approx 0{,}8254$

22. 0,07 **23.** 0,24 **24.** 0,86618 **25. a.** 86,4 cm **b.** 87,848 cm^3

c. 28,8 cm^2 **d.** 29,04 cm^2 **26.** $3.840\,\pi \approx 12063{,}71\ cm^3$ **27.** 2,5 %

28. a. $0{,}64\,\pi\ m^3$ **b.** 0,75 % **29. a.** $72/\pi \approx 22{,}92\ cm^2$ **b.** $1/72 \approx 0.01389$

c. $1296/\pi^2 \approx 131{,}312$ **d.** $1/48 \approx 0{,}0208$ **30. a.** $\pi/18 \approx 0{,}174533$ **b.** 0,504 %

31. a. \$ 27.200 **b.** \$ 432 **c.** 0,0159 **d.** 1,59 %

CAPITULO 5

SECCION 5.1

1. máx. = f(0) = 4, mín. = no tiene **2.** máx. = no tiene, mín. = g(2) = −1

3. máx. = no tiene, mín. = h(2) = h(−2) = 0 **4.** máx. = no tiene, mín. = no tiene

5. máx. = no tiene, mín. = no tiene **6.** máx. = g(4/3) = 3, mín. = g(3) = 1/2

7. máx. = h(−4) = 6, mín. = ln 1 = 0 **8.** máx. = f(1) = 3, mín. = f(2) = 0

9. 0, 2, $\frac{8}{3}$ **10.** $\pi + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ **11.** 0, 2 **12.** Todos los reales.

13. 1 **14.** 0, $\frac{\pi}{3}$, π, $\frac{5\pi}{3}$ **15.** máx. = $f(3) = \frac{3}{4}$, mín. = $f(1) = \frac{1}{2}$

16. máx. = $f(1) = \frac{1}{2}$, mín. = $f(-1) = -\frac{1}{2}$ **17.** máx. = $f(\pi/4) = 1 - \frac{\pi}{4}$,

mín.= $f(-\pi/4) = \frac{\pi}{4} - 1$ **18.** máx. = f(3) = 1 , mín. = f(−5) = −3

19. máx.= $f(\pi/4) = \sqrt{2}$, mín. = $f(-\pi/2) = -1$ **20.** máx. = $f(\pi/6) = = f(5\pi/6) = 5/4$

mín. = f(0) = f(π/6) = 1 **21.** máx. = $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{e^{\pi/4}} \approx 0.6447865$

mín. = $f(\frac{5\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{e^{5\pi/4}} \approx -0{,}22489$ **22.** máx. = $f(e^{1/2}) = \frac{1}{2e} \approx 0{,}184$

mín. = f(1) = 0

SECCION 5.2

1. $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$ **2.** $c_1 = \frac{\pi}{4}$, $c_2 = \frac{5\pi}{4}$ **3.** c = 3,2 **4.** c = 1 **5.** $c = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **6.** $c = \sqrt{2}$

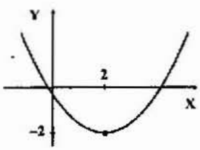
7. $c = 1 + \frac{8}{9}\sqrt{3}$ **8.** $c = \frac{1-\sqrt{1-\ln^2 2}}{\ln 2} \approx 0{,}4028$ **9.** $c = \tan^{-1}((2\ln 2)/\pi) \approx 0{,}5847$

10. $c_1 = -\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}} \approx -0{,}5227$, $c_2 = \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}} \approx 0{,}5227$ **20.** g(5) = 20

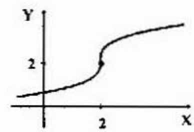
30. c = π/4 **31.** $c = \frac{e}{e-1} \approx 1{,}58198$ **32.** c = 1/2

SECCION 5.3

1.



2.



3. a. −1, 0, 2, 4 **b.** Decreciente: (−∞,−1], [0, 2] y [2, 4]. Creciente: [−1, 0] y (4, +∞) **c.** Mínimos locales en −1 y 4. Máximo local en 0

4. a. 1, 2 y 3 **b.** Cóncava hacia arriba en (−∞, 1) y (3,+∞). Cóncava hacia abajo en (1, 2) y (2, 3) **c.** 1 y 3.

5. a. −2 **b.** Creciente en (−∞,−2], decreciente en [−2, +∞) **c.** f(−2) = 11 es máximo local. **d.** No tiene **e.** Cóncava hacia abajo en (−∞,+∞) **f.** No tiene.

6. a. −1, 1 **b.** Creciente en (−∞, −1] y en [1, +∞), decreciente en [−1, 1] **c.** f(−1) = 3 es máximo local y f(1) = −1 es mínimo local **d.** 0 **e.** Cóncava hacia abajo en (−∞, 0) y cóncava hacia arriba en (0, +∞) **f.** (0, f(0)) = (0, 1)

7. a. −3, 1 **b.** Creciente en (−∞, −3] y en [1, +∞), decreciente en [−3, 1] **c.** f(−3) = 39 es máximo local y f(1) = 7 es mínimo local. **d.** −1 **e.** Cóncava hacia arriba en (−∞, −1), cóncava hacia abajo en (−1, +∞) **f.** (−1, f(−1)) = (−1, 23)

8. a. −1, 0, 1 **b.** Creciente en [−1, 0] y en [1, +∞), decreciendo en (−∞,−1] y en [0, 1] **c.** f(−1) = 3 y f(1) = 3 son mínimos locales, f(0) = 4 máximo local **d.** $-\sqrt{3}/3$, $\sqrt{3}/3$ **e.** Cóncava hacia arriba en $(-\infty, -\sqrt{3}/3)$ y en $(\sqrt{3}/3, +\infty)$, Cóncava hacia abajo en $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$ **f.** $(-\sqrt{3}/3,\ 31/9)$ y $(\sqrt{3}/3,\ 31/9)$

9. a. $-2,\ -1/2,\ 1$ **b.** Creciente en $[-2, -1/2]$ y en $[1, +\infty)$, decreciente en $(-\infty,-2)$ y en $[-1/2, 1]$ **c.** $f(-2) = -3$ y $f(1) = -3$ son mínimos locales, $f(-1/2) = 33/16$ máximo local **d.** $-1/2 - \sqrt{3}/2,\ -1/2 + \sqrt{3}/2$ **e.** Cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1/2 - \sqrt{3}/2)$ y en $(-1/2 + \sqrt{3}/2, +\infty)$, cóncaba hacia abajo en $(-1/2 - \sqrt{3}/2, -1/2 + \sqrt{3}/2)$

f. $(-1/2 - \sqrt{3}/2,\ f(-1/2 - \sqrt{3}/2)) \approx (-1/2 - \sqrt{3}/2, -0{,}73)$ y

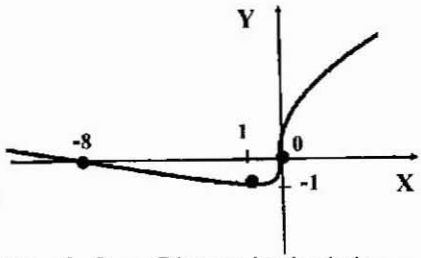
$(-1/2 + \sqrt{3}/2, f(-1/2 + \sqrt{3}/2) \approx (-1/2 + \sqrt{3}/2,\ -0{,}73)$

10. a. No tiene **b.** Decreciente en $(-\infty,2)$ y en $(2, +\infty)$ **c.** No tiene **d.** No tiene **e.** Cóncava hacia abajo en $(-\infty,2)$ y cóncava hacia arriba en $(2, +\infty)$ **f.** No tiene

11. a. 2 **b.** Creciente en $[2, +\infty)$ y decreciente en $[0, 2]$ **c.** $f(2) = -4\sqrt{2}$ mínimo local **d.** No tiene **e.** Cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$ **f.** No tiene

12. a. $-1, 0$ **b.** Creciente $[-1, +\infty)$ **c.** $f(-1) = -1$ es mínimo local **d.** $0, -8$ **e.** Cóncava hacia abajo en $(-\infty, -8)$ y en $(0, +\infty)$, cóncava hacia arriba en $(-8, 0)$

f. $(-8, f(-8)) = (-8, 0)$ y $(0, f(0)) = (0, 0)$



13. a. 0 **b.** Creciente en $(-\infty, +\infty)$ **c.** No tiene **d.** 0 **e.** Cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$, cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$ **f.** $(0, 0)$

14. a. 1 **b.** Decreciente en $(0, 1]$ y creciente en $[1, +\infty)$ **c.** $h(1) = 1$ es mínimo local **d.** No tiene **e.** Cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$ **f.** No tiene

15. a. No tiene **b.** Creciente en $(-\infty, +\infty)$ **c.** No tiene **d.** 0 **e.** Cóncava hacia abajo en $((-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$ **f.** $(0, 0)$.

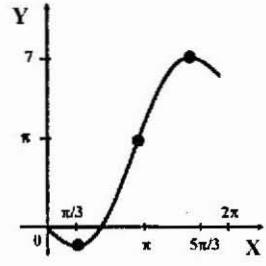
16. a. $\pi/3,\ 5\pi/3$ **b.** Decreciente en $[0, \pi/3]$ y en $[5\pi/3, 2\pi]$, decreciente en $[\pi/3, 5\pi/3]$

c. $f(\pi/3) = \pi/3 - \sqrt{3} \approx -0{,}7$ es mínimo local,

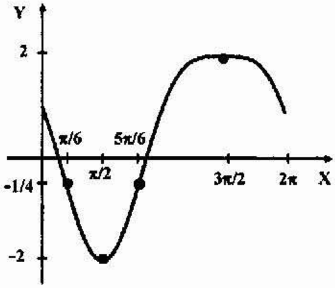
$f(5\pi/3) = 5\pi/3 + \sqrt{3} \approx 7$ es máximo local

d. π **e.** Cócava hacia arriba en $(0, \pi)$, Cóncava hacia abajo en $(\pi, 2\pi)$

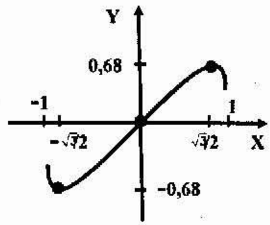
f. $(\pi, f(\pi)) = (\pi,\pi)$.



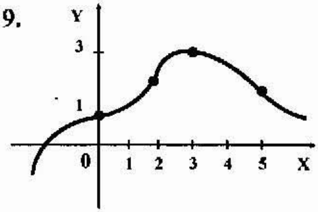
17. **a.** $\pi/2$, $3\pi/2$ **b.** Decreciente en $[0, \pi/2]$ y en $[3\pi/2, 2\pi]$ **c.** $g(\pi/2) = -2$ es mínimo local, $g(3\pi/2) = 2$ es máximo local **d.** $\pi/6$, $5\pi/6$, $3\pi/2$ **e.** Cóncava hacia abajo en $(0, \pi/6)$, $(5\pi/6, 3\pi/2)$ y en $(3\pi/2, 2\pi)$, cóncava hacia arriba en $(\pi/6, 5\pi/6)$
f. $(\pi/6, g(\pi/6) = (\pi/6, -1/4)$,
$(5\pi/6, g(5\pi/6) = (\pi/6, -1/4)$,



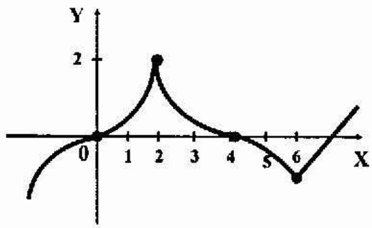
18. **a.** $-\sqrt{3}/2$, $\sqrt{3}/2$ **b.** Decreciente en $[-1, -\sqrt{3}/2]$ y en $[\sqrt{3}/2, 1]$, creciente en $[-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2]$
c. $h(-\sqrt{3}/2) = -0{,}68$ es mínimo local,
$h(\sqrt{3}/2) = 0{,}68$ es máximo local,
d. 0 **e.** Cóncavo hacia arriba en $(-1, 0)$ y cóncavo hacia abajo en $(0, 1)$ **f.** $(0, 0)$.



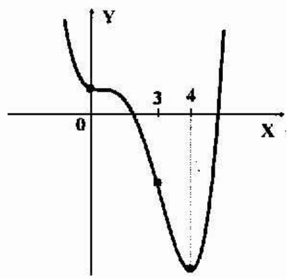
19.



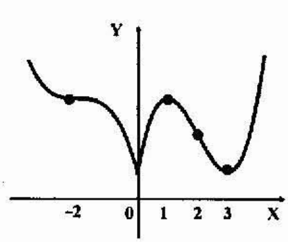
20.

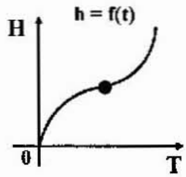


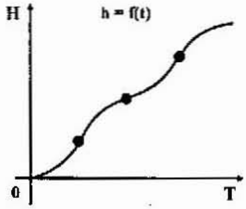
21. **a.** 0 y 4
b. Decreciente en $(-\infty, 0]$ y en $[0, 4]$
Creciente en $[4, +\infty)$
c. Mínimo local en 4.
d. 0 y 3
e. Cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$ y $(3, +\infty)$
Cóncava hacia abajo en $(0,3)$
f. 0 y 3



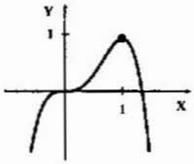
22. **a.** -2, 0, 1 y 3
b. Decreciente en $(-\infty, -2]$, $[-2, 0]$ y $[1, 3]$
Creciente en $[0, 1]$ y $[3, +\infty)$
c. Mínimo local en 0 y 3. Máximo local en 1
d. 0 y 3
e. Cóncava hacia arriba en $(-\infty, -2)$ y $(2, +\infty)$
Cóncava hacia abajo en $(-2, 0)$ y $(0, 2)$
f. -2 y 2



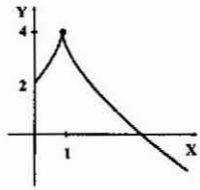
23. 

24. 

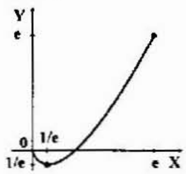
25. **Max:** $f(1) = 1$. **Min:** No tiene



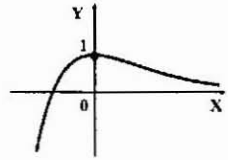
26. **Max:** $f(1) = 4$. **Min:** No tiene



27. **Max:** $f(e) = e$. **Min:** $f(1/e) = 1/e$



28. **Max:** $f(1) = 4$. **Min:** No



SECCION 5.4

1. 0 **2.** $-\frac{1}{2}$ **3.** -1 **4.** $\frac{1}{2}$ **5.** $\frac{1}{2}$ **6.** 2 **7.** $\frac{\pi^2}{2}$ **8.** 2 **9.** 0

10. 1 **11.** $\frac{\ln^2 10 - \ln^2 5}{2}$ **12.** 0 **13.** 1 **14.** $\frac{1}{2}$ **15.** $-\frac{1}{4}$ **16.** $\frac{1}{12}$

17. $\frac{1}{2}$ **18.** -1 **19.** $\frac{1}{2}$ **20.** $\frac{1}{3}$ **21.** $\frac{1}{6}$ **22.** 0 **23.** 1 **24.** $\frac{2}{\pi}$

25. $-\frac{4a^2}{\pi}$ **26.** 1 **27.** 1 **28.** $\frac{1}{e}$ **29.** e^{-2} **30.** 1 **31.** 1 **32.** 1

33. 1 **34.** $\frac{1}{e}$ **35.** 1 **36.** $\frac{2}{3}$ **37.** $+\infty$ **38.** e^2 **39.** $\frac{1}{2}$ **40.** e^2

41. 0 **42.** -8 **43.** 0

SECCION 5.5

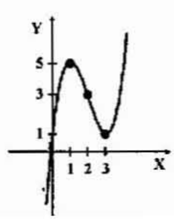
1. **A.** $\mathbb{R}$ **B.** Ninguna

C. Eje Y: $(0,1)$. Eje X: aprimadomente $(0{,}104,\ 0)$

D. No asíntotas **E.** max local $= f(1) = 5$, min local $= f(3) = 1$

F. Conc. abajo en $(-\infty, 2]$, Conc. arriba en $[2, +\infty)$

P. inflexión: $(2, 3)$

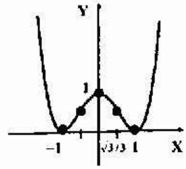


2. **A.** $\mathbb{R}$ **B.** Ninguna **C.** $(0,1), (-1, 0), (1, 0)$

D. No asíntotas **E.** max local = $f(0) = 1$, min local = $f(-1) = 0$

min local = $f(1) = 0$ **E.** Conc. arriba en $(-\infty, -\sqrt{3}/3\,]$ y en $[\sqrt{3}/3, +\infty)$. Conc. abajo en $[-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3\,]$.

P. inflexión: $(-\sqrt{3}/3, 4/9)$ y $(\sqrt{3}/3, 4/9)$

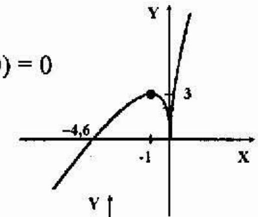


3. **A.** $\mathbb{R}$ **B.** Ninguna **C.** $(0,0), (-4{,}6, 0), (0, 0)$

D. No asíntotas **E.** max local = $f(-1) = 3$, min local = $f(0) = 0$

F. Conc. abajo en $(-\infty, 0]$ y en $[0, +\infty)$.

P. inflexión: No hay.



4. **A.** $\mathbb{R}$ **B.** Simetría resp. al origen **C.** $(0,0)$

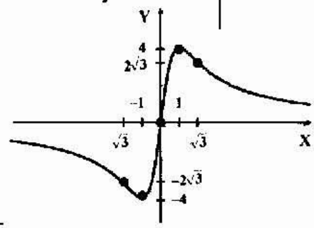
D. Asíntotas: $y = 0$ **E.** $f'(x) = -\dfrac{8(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

Min local = $f(-1) = -4$, Max local = $f(1) = 4$

E. $f''(x) = \dfrac{16(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$. Conc. abajo en $(-\infty, -\sqrt{3}\,]$

y en $[0, \sqrt{3}\,]$. Conc. arriba en $[-\sqrt{3}, 0]$ y en $[\sqrt{3}, +\infty)$.

P. inflexión: $(-\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$, $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$



5. **A.** $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

B. Ninguna simetría **C.** Interseccion con los ejes $(0, 0)$

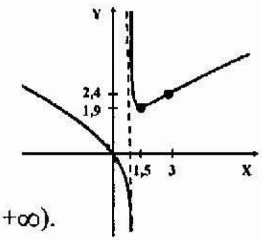
D. Continua en $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

Asíntota vertical : $x = 1$

E. $f'(x) = \dfrac{2x-3}{3(x-1)^{4/3}}$ Min. local: $f(3/2) = 3/\sqrt[3]{4} \approx 1{,}9$

F. $f''(x) = \dfrac{2(3-x)}{9(x-1)^{7/3}}$. Conc. abajo en $(-\infty, 1)$ y en $[3, +\infty)$.

Conc. arriba en $(1, 3]$. P. De inflexión: $(3, 3\sqrt[3]{2}) \approx (3, 2{,}4)$



6. **A.** $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ **B.** Simetría respecto al eje Y.

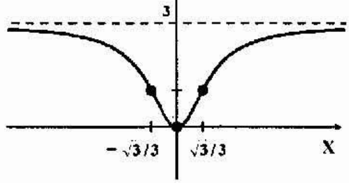
C. Intersección con los ejes: $(0, 0)$

D. Continua en todo $\mathbb{R}$.

No hay asíntotas verticales.

Asíntota horizontal: $y = 3$

E. $f'(x) = \dfrac{6x}{(x^2+1)^2}$. Min local = $f(0) = 0$.



F. $f''(x) = \dfrac{6(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$. Conc. abajo en $(-\infty, -\sqrt{3}/3)$ y en $(\sqrt{3}/3, +\infty)$

Conc. arriba en $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$

P. de inflexión: $(-\sqrt{3}/3, 3/4)$ y $(\sqrt{3}/3, 3/4)$

7. **A.** Dom(f) = $[-\pi,\pi]$ **B.** Ninguna simetría.

C. Intersecciones: Eje Y: $(0, \pi)$.

Eje X: $(-\pi/3, 0)$, $(2\pi/3, 0)$

D. Continua en $[-\pi,\pi]$. Sin asíntotas.

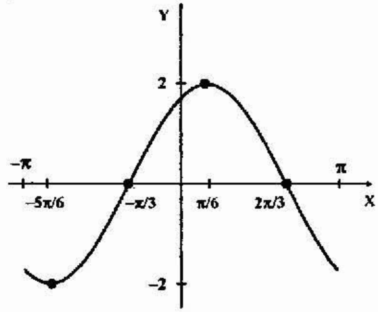
E. Min local = $f(-5\pi/6) = -2$.

Max local = $f(\pi/6) = 2$

F. Conc. arriba en $[-\pi, -\pi/3]$ y $[2\pi/3, \pi]$

Conc. abajo en $[-\pi/3, 2\pi/3]$

P. de inflexión: $(-\pi/3, 0)$ y $(2\pi/3, 0)$



8. **A.** Dom (f) = $\mathbb{R} - \{2\}$. **B.** Ninguna simetría

C. Intersecciones: Eje Y: $(0, -3)$.

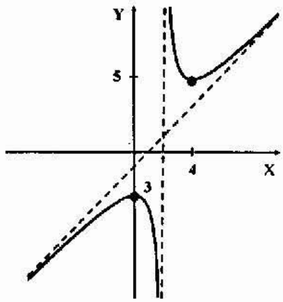
D. Continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.

Asíntota vertical: $x = 2$. Asíntota oblicua: $y = x - 1$

E. Max. local: $f(0) = -3$. Min. local: $f(4) = 5$

F. Conc. abajo en $(-\infty, 2)$. Conc. arriba: $(2, +\infty)$

No hay P. de inflexión.



9. **A.** Dom(f) = $\mathbb{R} - \{0\}$. **B.** Ninguna simetría.

C. Intersecciones: No corta al Eje Y.

Eje X:.(1, 0)

D. Cont. en $\mathbb{R} - \{0\}$.

Asíntota vertical: $x = 0$.

Asíntota oblicua: $y = x - 3$

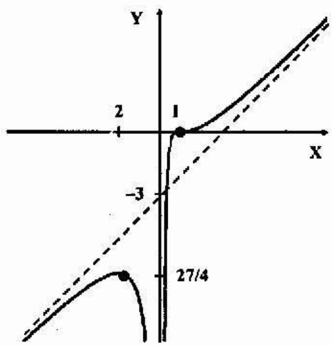
E. $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2(x+2)}{x^3}$

Max. local: $f(-2) = -27/4$. Min. local: $f(1) = 0$

F. Conc. abajo en $(-\infty, 0)$ y en $(0, 1]$

Conc. arriba en $[1, +\infty)$

P. de inflexión: $(1, 0)$



10. **A.** Dom(f) = $\mathbb{R}$. **B.** Ninguna simetría

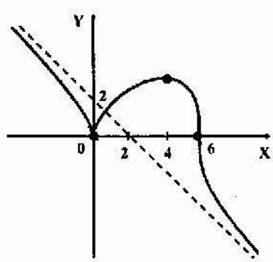
C. Intersecciones. Eje Y: $(0, 0)$. Eje X: $(0, 0)$, $(6, 0)$

D. Continua en $\mathbb{R}$. Asuntota oblicua: $y = -x + 2$

F. $f'(x) = \dfrac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}$. Min local: $f(0) = 0$

Max. local: $f(4) = 2\sqrt[3]{4} \approx 3{,}17$

E. Conc. abajo en $(-\infty, 0]$ y en $[2, 6]$.



Conc. arriba en $[6, +\infty)$. P. de inflexión: $(6, 0)$

11. **A.** $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. **B.** Simetría respecto al origen

C. No intersecta a los ejes. D. Cont. en $\mathbb{R} - \{0\}$.

D. Asíntota vertical: $x = 0$. Asíntota oblicua: $y = x$

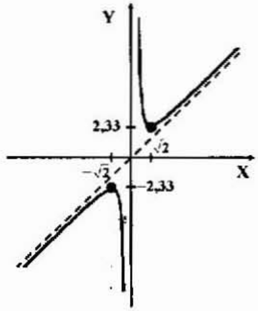
E. $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{1/x^2}\left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)$

Max. local: $f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}\ e^{1/2} \approx -2{,}33$

Min. local: $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\ e^{1/2} \approx 2{,}33$

F. Conc. abajo en $(-\infty, 0)$. Conc. arriba en $(0, +\infty)$.

No hay p. de inflexión.



SECCION 5.6

1. largo = ancho = 18 cm.

3. 100 m., 200 m. **4.** 16 cm. **5.** 3 cm. **6.** 1 dm. **7.** 1 dm.

8. largo = ancho = altura = 40 cm. **9.** 140 m., $\frac{280}{\pi}$ m. **10.** $\frac{40.000}{\pi}$ m^2.

11. base $= \frac{14}{4+\pi}$, altura rectángulo $= \frac{7}{4+\pi}$ **12.** base $= \frac{36}{12-\sqrt{3}} \approx 3{,}51$,

altura rectángulo $= \frac{54-9\sqrt{3}}{12-\sqrt{3}} \approx 3{,}74$ **13.** Entre B y C a 1,6 Km. de B.

14. P coincide con C **15.** Remar hasta P entre F y B a 3,6 Km. de F

16. Remar hasta la bodega **17.** 70 habitaciones, \$ 75 **18.** 88 plantas

19. base $= \sqrt{2}\ r$, altura $= \frac{\sqrt{2}}{2} r$ **20.** $\frac{\pi}{3}$ **21.** 4, 4 **22.** $a = 2\sqrt{3}$, $h = 2\sqrt{6}$

23. a) $\frac{12\pi}{4+\pi} \approx 5{,}28$ para la circunferencia **b)** 12 para la circunferencia (no hay cuadrado) **24.** base = 6 cm., altura = $3\sqrt{3}$ cm. **27.** $3\sqrt{3}$

28. radio del cilin. $= \frac{\sqrt{2}}{2} r$, altura $= \sqrt{2}\ r$ **29.** radio cono $= \frac{2\sqrt{2}}{3} r$, altura $= \frac{4}{3} r$

30. radio del cono $= \frac{2\sqrt{2}}{3} r$, altura $= \frac{4}{3} r$ **32. a.** $\theta \approx 2{,}5$ **b.** A $\approx 171{,}4\ m^2$

33. 60 m., 120 m. **34.** 24 m, 36 m. **35. a.** 3 dm, 6 dm, 4 dm.

b. $3\sqrt[3]{2}$, $6\sqrt[3]{2}$, $2\sqrt[3]{2}$ **36.** 18 cm., 27 cm. **37.** $8\sqrt{6}$ m., $10\sqrt{6}$ m.

38. radio = 1 dm, altura = 2 dm. **39.** radio = altura = $\sqrt[3]{2}$ dm.

40. radio = altura = 6 cm. **41.** 80 Km/h. **43. a.** x = 16 cm. **b.** x = 16 cm.

44. radio = $4\sqrt{6}$ cm., altura = $8\sqrt{3}$ cm. **45.** $\sqrt[3]{13^2} \approx 46{,}87$ **46.** 8 m.

SECCION 5.7

1. 1,179509 **2.** 0,103803 **3.** 0,739085 **4.** 0,835123 **5.** 0,567143

6. 1,763223 **7.** 1,377337 **8.** 3,096639 **9.** 2,028758 **10.** −2,331122

11. 0,377677 **12.** 2,668402 **13.** 1,1224620 **14.** 3,645174 **15.** 1,146470

16. a. $P_o = (1{,}165,\ 1{,}357)$ **b.** 1,594 **17.** g(2,058) = 5,586

APENDICES

APENDICE A

1. $(-\infty, 4)$ **2.** $(-\infty, -32/3)$ **3.** $(17/5, +\infty)$ **4.** $(-\infty, -43/37]$
5. $(17/5, 19]$ **6.** $(-19, -9)$ **7.** $(-2, 3)$ **8.** $(-1, 1)$
9. $(-\infty, -1-\sqrt{21}\,] \cup [-1+\sqrt{21}, +\infty)$ **10.** $(-\infty, -3) \cup (1/2, +\infty)$
11. $(-\infty, 1/3) \cup (2/3, +\infty)$ **12.** $(3, 4)$ **13.** $[-3, -2] \cup [1, +\infty)$
14. $(-2, 2]$ **15.** $[-10/3, 0)$ **16.** $[1/3, 1)$ **17.** $(-\infty, -2] \cup (0, 2]$

18. $(-\infty, -1-\sqrt{3}\,] \cup (-1, -1+\sqrt{3}\,]$ **19.** $(-3, -1) \cup (0, +\infty)$

20. $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ **21.** $(2-2\sqrt{3}, 0) \cup (3, 2+2\sqrt{3})$

APENDICE B

1. 9, 1 **2.** − 4/3, 2 **3.** 7/2 **4.** (1, 7) **5.** (− 16/3, 14/3) **6.** (− 3/2, 9/2)
7. $[-2, 2/3]$ **8.** $(-\infty, -3/5] \cup [-1/5, +\infty)$ **9.** $(-\infty, -1) \cup (-1/2, +\infty)$
10. $(-\infty, -5/2] \cup [25/2, +\infty)$ **11.** $[-\infty, -3] \cup [-1, 1] \cup [3, +\infty)$
12. $[-4, -1) \cup (1, 4]$ **13.** $(2, 4) - \{3\}$ **14.** $(1/2, +\infty)$ **15.** $[2/3, 4]$

16. $[-1, 2] - \{1/2\}$ **17.** $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ **18.** $[-2, 2]$. **19.** $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$

20. $(-\infty, -7] \cup [1/3, +\infty)$ **21.** M = 43 **22.** M = 9 **23.** M = 10

APENDICE C

1. 4 **2.** −4 **3.** raíces: 1, −2, −1; $(x-1)(x+2)(x+1)$.

4. raíces: 1, $1+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$; $(x-1)(x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3})$.

5. raíces: 1, −3/2, 1/2; $4(x-1)(x+3/2)(x-1/2)$.

6. raíces: −2, $3/2+\sqrt{7}/2$, $3/2-\sqrt{7}/2$; $2(x+2)(x-3/2+\sqrt{7}/2)(x-3/2-\sqrt{7}/2)$.

7. raíces: −1, 2, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$; $(x+1)(x-2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

8. raíces: 1, −1, −2, 1/3; $3(x-1)(x+1)(x+2)(x-1/3)$.

9. raíces: −1, −2, 1, 2, 3; $(x+1)(x+2)(x-1)(x-2)(x-3)$.

10. raíces: −1, −2, −3, 3 ; $(x+1)^2(x+2)((x+3)(x-3)$.

APENDICE D

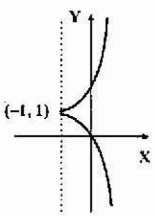
1. $\sqrt{5}$, (1/2, 1) **2.** $2\sqrt{2}$, (2, 4) **3.** $\sqrt{7-2\sqrt{2}}$, $\left(0,\ (1+\sqrt{2})/2\right)$

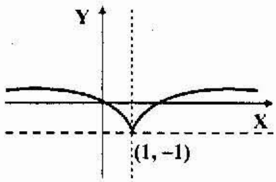
5. B = (3, 9) **6.** A = (−1, 18) **13.** (2, 2) y (−4, 2) **14.** (1, 13) y (1, −11)

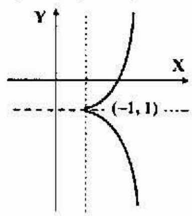
15. $5x+2y-3=0$ **16.** $x^2+y^2=9$ **17.** (1, −3), (3, 1), (−5, 7)

18. (−2, −5), (0, −9) **19.** $\left(9/2,\ 1\right)$

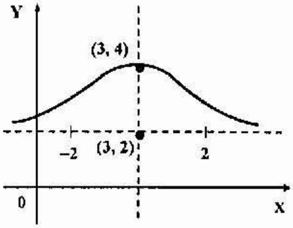
20. $(y-1)^2=(x+1)^3$ **21.** $(x-1)^2=(y+1)^3$ **22.** $(y+1)^2=(x-1)^3$

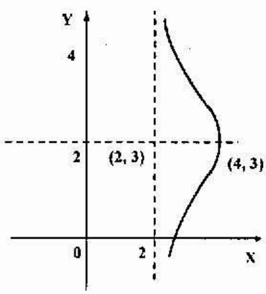


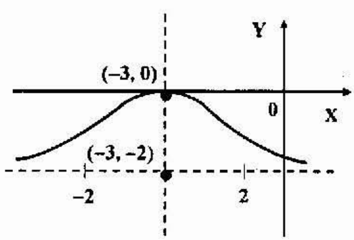




23. $(x-3)^2(y-2)=4(4-y)$ **24.** $(y-3)^2(x-2)=4(4-x)$ **25.** $(x+3)^2(y+2)=4(-y)$







APENDICE E

2. $y = 5x - 2$ **3.** $y = -3x$ **4.** $y = 2x - 1$ **5.** $y = -\frac{2}{5}x + 2$ **6.** $y = -\frac{2}{5}x + \frac{12}{5}$

7. $y = \frac{x}{5} + \frac{11}{5}$ **8.** $y = -2x + \frac{41}{23}$ **9.** $x + y = 2$, $x - y = 14$ **10. a.** $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

b. $\frac{9\sqrt{5}}{10}$ **11.** 5 **12.** L_2 es paralela a L_5 ; L_3 es perpendicular a L_1 ; L_4 es perpendicular a L_6. **13. a.** $x - 3y - 6 = 0$ **b.** $x + 2y - 13 = 0$ **c.** $y = 1$

14. $y + 3x - 25 = 0$ **15.** 3 **16.** 2 **17.** $2/\sqrt{10}$ **18.** 2 **19.** $\frac{4}{5}\sqrt{10}$

20. 28/5 **21.** $C = -7$ ó $C = 59/3$ **22.** $5x + 12y + 40 = 0$, $5x + 12y - 64 = 0$
23. $3x - 2y - 12 = 0$, $3x - 8y + 24 = 0$

24. a. $k \neq 3$, n cualquiera **b.** $k = -\frac{4}{3}$, n cualquiera **c.** $k = 3$, $n \neq 6$ **d.** $k = 3$, $n = 6$.

25. a. $k = -4$ y $n \neq 2$ ó $k = 4$ y $n \neq -2$ **b.** $k = -4$ y $n = 2$ ó $k = 4$ y $n = -2$
c. $k = 0$ y n cualquiera. **26.** $x - 2y - 18 = 0$, $2x + y + 14 = 0$, $2x + y - 16 = 0$

APENDICE F

1. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$ **2.** $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 5$ **3.** $x^2 + y^2 = 25$

4. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 50$ **5.** $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 9$ **6.** $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 16$

7. $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 10$ **8.** $(x-1)^2 + y^2 = 1$ **9.** $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$

10. Centro (1, 0), $r = 2$ **11.** Centro (0, –2), $r = 2\sqrt{2}$ **12.** Centro (0, –1/2), $r = 1/2$

13. Centro (1, –2), $r = 3$ **14.** Centro (1/4, –1/4), $r = \sqrt{10}/4$

15. Centro $(3/2, 1/2)$, $r = 9/4$

16. Parábola, vértice (0, 0) y eje el eje Y, se abre hacia arriba.

17. Parábola, vértice (0, 0) y eje el eje X, se abre hacia la derecha.

18. Parábola, vértice (0, 0) y eje el eje Y, se abre hacia abajo.

19. Parábola, vértice (0, 0) y eje el eje Y, se abre hacia arriba.

20. Elipse, centro (0, 0)

21. Hipérbola, centro (0, 0), vértices (0, –1) y (0, 1), asíntotas: $y = x$, $y = -x$

22. Hipérbola, centro (0, 0), vértices (–1, 0) y (1, 0), asíntotas: $y = 3x$, $y = -3x$

23. Parábola, vértice (0, 9) y eje el eje Y, se abre hacia arriba.

24. Parábola, vértice (1/2, 0) y eje, el eje X, se abre hacia la izquierda.

25. Hipérbola, centro (0, 0), vértices (−5, 0) y (5, 0), asíntotas: $y = \frac{4}{5}x$, $y = -\frac{4}{5}x$

26. Circunferencia, centro (0, 0) y r = 3/2

27. Parábola, vértice (0, −1/2), eje paralelo al eje X, se abre hacia la izquieda.

28. Elipse, centro (0, 2)

29. Hipérbola, centro (−3, 5), vértices (−10/3, −5) y (−8/3, 5), asíntotas: $y = 3x + 14$, $y = -3x - 4$

30. El punto (1, 2) **31.** El punto (1, 1)

32. Hipérbola, centro (−1, 1), vértices (−2, 1) y (0, 1), asíntotas: $y = x + 2$, $y = -x$

APENDICE G

1. a. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **b.** $-\frac{1}{2}$ **c.** $-\sqrt{3}$ **d.** $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **e.** -2 **2. a.** $\alpha = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

b. $\alpha = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ **c.** ninguno **d.** ninguno

e. $\alpha = \frac{4}{3}\pi + 2n\pi$ ó $\frac{5}{3}\pi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ **6.** −1. **7. a.** $-\operatorname{sen}\alpha$ **b.** 0.

8. a. $\frac{2\pi}{\lambda}$, **b.** $\frac{\pi}{2}$ **9. a.** $\frac{1}{3}$ rad. **b.** $\frac{1}{10}$ rad. **c.** $\frac{\pi}{3}$ rad. **10. a.** 4,71 cm.
b. 35,34 cm. **c.** 7,85 cm. **11. a.** 111,13 km. **b.** 3.333,76 km. **c.** 5.000,64 km.
d. 8.973,37 km. **12.** 1.852 km. **13.** $\frac{2}{3}\pi$ rad. **14.** 61,35 grados.

15. 20,45 grados. **16.** $(-\sqrt{3}, -1)$ **17.** $P = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3})$ **18.** 18.

19. a. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **b.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **20.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$ **21.** $2r \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}$ **22.** $\frac{2500}{\pi} \approx 795{,}78$ giros por min.

23. 49 revoluciones por seg. **24.** $y - x + 4\sqrt{2} = 0$ **25.** $\frac{\pi}{4}$

26. $x - 5y + 3 = 0$, $5x + y - 11 = 0$

27. $3x - 4y + 15 = 0$, $4x + 3y - 30 = 0$, $3x - 4y - 10 = 0$, $4x + 3y - 5 = 0$.

TABLAS

ALGEBRA

OPERACIONES

1. $a(b+c) = ab + ac$

2. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$

3. $\dfrac{a+c}{b} = \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b}$

4. $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{ad}{bc}$

EXPONENTES Y RADICALES

5. $a^0 = 1,\ a \neq 0$

6. $(ab)^x = a^x\, b^x$

7. $a^x\, a^y = a^{x+y}$

8. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

9. $(a^x)^y = a^{xy}$

10. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

11. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

12. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

13. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

14. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}$

15. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

TEOREMA DEL BINOMIO

16. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

17. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

18. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

19. $(a+b)^n = a^n + n\,a^{n-1}b + \dfrac{n(n-1)}{2}\,a^{n-2}b^2 + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k}b^k + \ldots + n\,a^{n-1}b + b^n$

20. $(a-b)^n = a^n - n\,a^{n-1}b + \dfrac{n(n-1)}{2}\,a^{n-2}b^2 + \ldots + (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k}b^k + \ldots$

$$- n\,a^{n-1}b + (-1)^n b^n \quad \text{, donde } \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

PROGRESION GEOMETRICA

21. $a_1 = a,\ a_2 = ar,\ a_3 = ar^2,\ a_4 = ar^3, \ldots, a_n = ar^{n-1}$ $\qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a\,\dfrac{1-r^n}{1-r}$

FACTORIZACION

22. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

23. $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

24. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

25. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

DESIGUALDADES Y VALOR ABSOLUTO

26. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

27. $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow ac < bc$

28. $a < b$ y $c < 0 \Rightarrow ac > bc$

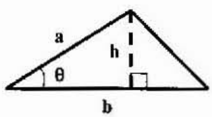
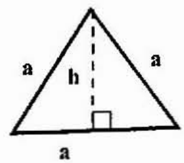
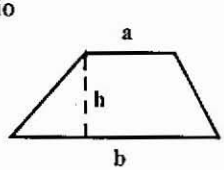
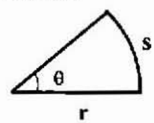
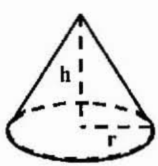
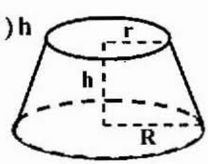
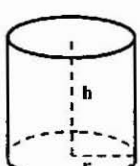
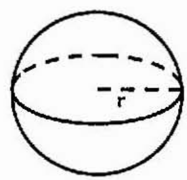
29. $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ ó $x = -a$

30. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

31. $|x| > a \Leftrightarrow -a < x$ ó $x > a$

GEOMETRIA

h = altura, A= Area, AL = Area Lateral, V = Volumen

Triángulo $h = a \operatorname{sen} \theta$ $A = \frac{1}{2} bh$ $A = \frac{1}{2} b \operatorname{sen} \theta$  	**Triángulo Equilátero** $h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ $A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ 
Trapecio $A = \frac{h}{2}(a+b)$  	**Sector Circular** $s = r\theta$ $A = \frac{1}{2} r^2 \theta$ 
Cono Circular Recto $AL = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$ $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$  	**Tronco de Cono** $V = \frac{\pi}{3}(r^2 + rR + R^2)h$ $AL = \pi s(r + R)$ 
Cilindro $V = \pi r^2 h$ $AL = 2\pi rh$  	**Esfera** $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ $A = 4\pi r^2$ 

TRIGONOMETRIA

Identidades Fundamentales

1. $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

2. $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

3. $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

4. $\cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

5. $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

6. $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

7. $1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

8. $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$

9. $\cos(-x) = \cos x$

10. $\tan(-x) = -\tan x$

Identidades de Cofunción y de Reducción

11. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

12. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$

13. $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$

14. $\cot\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$

15. $\sec\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cosec} x$

16. $\operatorname{cosec}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sec x$

17. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

18. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{sen} x$

19. $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$

20. $\cos(x + \pi) = -\cos x$

21. $\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen} x$

22. $\tan(x + \pi) = \tan x$

Identidades de Suma y Diferencia

23. $\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$

24. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

25. $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

26. $\cot(x \pm y) = \dfrac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x}$

Identidades del Angulos Dobles y triples

27. $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

28. $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$

29. $\operatorname{sen} 3x = 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x$

30. $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

31 $\tan^2 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan x}$

Identidades de Reducción de Potencias

32. $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

33. $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

34. $\tan^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$

Identidades del Angulo Mitad

35. $\operatorname{sen} \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}}$

36. $\cos \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{2}}$

Transformación de productos en sumas

37. $\operatorname{sen} x \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)\right]$

38. $\cos x \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$

39. $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$

Transformación de sumas en productos

40. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen}\dfrac{x+y}{2} \cos\dfrac{x-y}{2}$

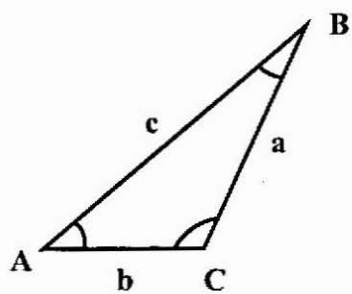
41. $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2\cos\dfrac{x+y}{2} \operatorname{sen}\dfrac{x-y}{2}$

42. $\cos x + \cos y = 2 \cos\dfrac{x+y}{2} \cos\dfrac{x-y}{2}$

43. $\cos x - \cos y = -2\operatorname{sen}\dfrac{x+y}{2} \operatorname{sen}\dfrac{x-y}{2}$

Ley de los senos

44. $\dfrac{\operatorname{sen} A}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} B}{b} = \dfrac{\operatorname{sen} C}{c}$



Ley de los cosenos

45. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

46. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

47. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS NOTABLES

Grados	Radian	sen θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	cosec θ
0°	0	0	1	0	$\mp\infty$	1	$\mp\infty$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
180°	π	0	-1	0	$\mp\infty$	-1	$\pm\infty$
210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2
225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\pm\infty$	0	$\mp\infty$	-1
300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2
360°	2π	0	1	0	$\mp\infty$	1	$\mp\infty$

EXPONENCIALES Y LOGARITMOS

1. $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ 2. $\log_a e = \dfrac{1}{\ln a}$ 3. $a^x = e^{x \ln a}$

IDENTADADES HIPERBOLICAS

1. $\operatorname{senh} x = \dfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$
2. $\cosh x = \dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$
3. $\tanh x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$
4. $\tanh x = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$
5. $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$
6. $\operatorname{cosech} x = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x}$
7. $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$
8. $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$
9. $1 - \coth^2 x = -\operatorname{cosech}^2 x$
10. $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$
11. $\cosh(-x) = \cosh x$
12. $\operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh} x \cosh y \pm \cosh x \operatorname{senh} y$
13. $\operatorname{senh}(2x) = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$
14. $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$
15. $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$
16. $\operatorname{senh}^2 x = \dfrac{\cosh 2x - 1}{2}$
17. $\cosh^2 x = \dfrac{\cosh 2x + 1}{2}$
18. $\operatorname{senh} \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{(\operatorname{coh} x - 1)/2}$
19. $\cosh \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{(\operatorname{coh} x + 1)/2}$

ALFABETO GRIEGO

Α	α	alfa	Ι	ι	iota	Ρ	ρ	rho
Β	β	beta	Κ	κ	kappa	Σ	σ	sigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	Τ	τ	tau
Δ	δ	delta	Μ	μ	mu	Υ	υ	ipsilon
Ε	ε	epsilon	Ν	ν	nu	Φ	φ	fi
Ζ	ζ	zeta	Ξ	ξ	xi	Χ	χ	ji
Η	η	eta	Ο	ο	omicron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ	theta	Π	π	pi	Ω	ω	omega

FORMULAS DE DERIVACION

1. $D_x[f(x)\,g(x)] = f(x)\,D_x\,g(x) + g(x)\,D_x\,f(x)$

2. $D_x\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{g(x)D_xf(x) - f(x)D_xg(x)}{[g(x)]^2}$

3. $D_x(u^n) = nu^{n-1}\,D_xu$ ó bien $D_x\left((gx))^n\right) = n(g(x))^{n-1}\,D_xu$

4. $D_x\,e^u = e^u\,D_xu$

5. $D_x\,a^u = a^u \ln a\,D_xu$

6. $D_x \ln u) = \dfrac{1}{u}\,D_xu$

7. $D_x \log_a u) = \dfrac{1}{u \ln a}\,D_xu$

8. $D_x\,\text{sen}\,u) = \cos u\,D_xu$

9. $D_x\cos u) = -\,\text{sen}\,u\,D_xu$

10. $D_x\tan u) = \sec^2 u\,D_xu$

11. $D_x\cot u = -\,\text{cosec}^2 u\,D_xu$

12. $D_x\sec u = \sec u \tan u\,D_xu$

13. $D_x\,\text{cosec}\,u = -\,\text{cosec}\,u \cot u\,D_xu$

14. $D_x\,\text{sen}^{-1}u = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,D_xu$

15. $D_x\cos^{-1}u = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,D_xu$

16. $D_x\tan^{-1}u = \dfrac{1}{1+u^2}\,D_xu$

17. $D_x\cot^{-1}u = -\dfrac{1}{1+u^2}\,D_xu$

18. $D_x\sec^{-1}u = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\,D_xu$

19. $D_x\,\text{cosec}^{-1}u = -\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\,D_xu$

20. $D_x\,\text{senh}\,u = \cosh u\,D_x u$

21. $D_x\cosh u = \text{senh}\,u\,D_x u$

22. $D_x\tanh u = \text{sech}^2 u\,D_x u$

23. $D_x\coth u = -\,\text{cosech}^2 u\,D_x u$

24. $D_x\,\text{sech}\,u = -\,\text{sech}\,u \tanh u\,D_xu$

25. $D_x\,\text{cosech}\,u = -\,\text{cosech}\,u \coth u\,D_xu$

26. $D_x\sec^{-1}u = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\,D_xu$

27. $D_x\,\text{cosec}^{-1}u = -\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\,D_xu$

28. $D_x\,\text{senh}^{-1}u = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,D_xu$

29. $D_x\cosh^{-1}u = \dfrac{1}{\sqrt{u^2-1}}\,D_xu$

30. $D_x\tanh^{-1}u = \dfrac{1}{1-u^2}\,D_xu$

31. $D_x\coth^{-1}u = \dfrac{1}{1-u^2}\,D_xu$

32. $D_x\,\text{sech}^{-1}u = -\dfrac{1}{u\sqrt{1-u^2}}\,D_xu$

33. $D_x\,\text{cosech}^{-1}u = -\dfrac{1}{|u|\sqrt{1+u^2}}\,D_xu$

APENDICES

A. NUMEROS REALES, INTERVALOS, DESIGUALDADES Y METODO DE STURM

B. VALOR ABSOLUTO

C. ECUACIONES POLINOMICAS

D. PLANO CARTESIANO, GRAFICAS, SIMETRIAS Y TRASLACIONES

E. LA RECTA Y LA ECUACION DE PRIMER GRADO

F. CIRCUNFERENCIA, PARABOLA E HIPERBOLA

G. TRIGONOMETRIA

APENDICE A

NUMEROS REALES, INTERVALOS, DESIGUALDADES Y METODO DE STURM

LOS NUMEROS REALES Y LA RECTA NUMERICA

Presentamos brevemente el sistema de los números reales.

Un conjunto de números muy conocido es el conjunto de los **números enteros:**

$$\mathbb{Z} = \{ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$$

Este contiene, como subconjunto, al conjunto de los **números naturales:**

$$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, \ldots \}$$

Otra clase importante de números son los **números racionales**, a los que se les conoce comúnmente con el nombre de números fraccionarios. Un número racional es un cociente de dos números enteros, donde el denominador es siempre distinto de 0. Así, son números racionales los siguientes: $\frac{1}{2}$, $\frac{-3}{4}$, $\frac{5}{-2}$, etc. Todo número entero es un número racional de denominador 1. Así, $2 = \frac{2}{1}$, $-5 = \frac{-5}{1}$.

Es usual denotar al conjunto de los números racionales con la letra $\mathbb{Q}$. Esto es

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / \ a, b \in \mathbb{Z} \quad y \quad b \neq 0 \right\}$$

Todos sabemos expresar un número mediante su expresión decimal. Así

a. $\frac{1}{2} = 0{,}500\ldots$ **b.** $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ **c.** $\frac{11}{6} = 1{,}8333\ldots$

Observen la periodicidad de estas expresiones decimales.
El siguiente resultado caracteriza a los números racionales:

Un número es racional si, y sólo si su expresión decimal es periódica.

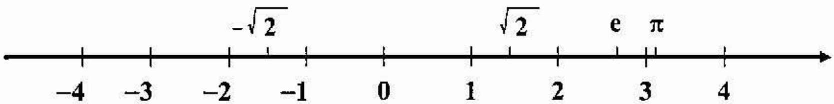
Un **número irracional** es un número que tiene una expresión decimal no periódica. Como ejemplos de números irracionales tenemos a $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, el famoso número π y el no menos famoso número **e**, base de los logaritmos naturales. Algunas cifras de sus expresiones decimales son:

$$\sqrt{2} = 1{,}41415\ldots \qquad \pi = 3{,}14159\ldots \qquad e = 2{,}7182818284\ldots$$

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es el conjunto formado por la unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales. Es decir,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{irracionales}\}$$

Una representación geométrica de los números reales se obtiene identificando a cada uno de éstos con un punto de una recta fija, la cual orientamos eligiendo una dirección positiva (a la derecha), que indicamos mediante una flecha. Fijamos un punto de la recta al que le damos el nombre de **origen**, y le asignamos el entero **0**. Elegimos una unidad de longitud y mediante ésta localizamos el punto que está a la derecha del origen a una distancia igual a la unidad escogida. A este punto le asignamos el entero 1. El punto que está a la izquierda del origen a una distancia igual a la unidad, le asignamos el entero -1. Si x es un real positivo, le asignamos el punto que está a una distancia x a la derecha del origen. Si x es negativo ($-x$ es positivo), le asignamos el punto que está a una distancia $-x$ a la izquierda del origen.



Hacemos, ahora, una afirmación fundamental:

La correspondencia establecida es biunívoca: A cada número real le corresponde un único punto y a cada punto le corresponde un único número real.

A la recta, provista de esta correspondencia, la llamaremos **recta real** o **recta numérica**. Se llama **coordenada** de un punto al número real que le asigna esta correspondencia. Por razones de comodidad, muchas veces identificaremos a cada punto de la recta numérica con su coordenada. Así, por ejemplo, diremos "el punto 2" para indicar al punto que le corresponde el número 2.

En el conjunto $\mathbb{R}$ tenemos dos operaciones fundamentales: La **adición** y la **multiplicación**. Las otras dos operaciones básicas, la **sustracción** y la **división**, se definen en términos de las dos primeras. El sistema de los números reales se construye a partir de 15 axiomas. Estos axiomas nos describen el comportamiento de la adición, multiplicación, de la relación "menor" (relación de orden) y de una propiedad de completitud de $\mathbb{R}$. A esta última propiedad sólo la mencionaremos.

PROPIEDADES DE LA ADICION Y MULTIPLICACION

1. Leyes conmutativas: $a + b = b + a$ y $ab = ba$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$

2. Leyes asociativas: $a + (b + c) = (a + b) + c$ y $a(bc) = (ab)c$, $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$

3. Ley distributiva: $a(b + c) = ab + ac$, $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$

4. Elementos neutros: $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$ y $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$, siendo $0 \neq 1$ y son tales que:

$$a + 0 = a \quad \text{y} \quad 1.a = a, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$$

5. Inverso aditivo: $\forall\ a \in \mathbb{R}\ \exists\ -a \in \mathbb{R}$ **tal que** $a + (-a) = 0$

6. Inverso multiplicativo: $\forall\ a \in \mathbb{R}$ **tal que** $a \neq 0,\ \exists\ a^{-1} \in \mathbb{R}$ **tal que** $a.a^{-1} = 1$

Haciendo uso de las propiedades anteriores podemos demostrar la siguiente proposición, que por ser importante, la presentamos como nuestro primer teorema. Su demostración la omitimos.

TEOREMA A.1 $ab = 0 \Leftrightarrow a = a$ ó $b = 0$

La **sustracción** y la **división** se definen haciendo uso del inverso aditivo e inverso multiplicativo, respectivamente, del modo siguiente:

1. $a - b = a + (-b)$ **2. Si** $b \neq 0$, **entonces** $\dfrac{a}{b} = a.b^{-1}$

ORDEN EN $\mathbb{R}$

Admitimos la existencia de un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, que es el conjunto de los **números positivos**, al que denotaremos con $\mathbb{R}^+$. En la recta numérica, los números positivos son los que están a la derecha del origen. Este conjunto nos permite definir la relación <, que se lee "es menor que", del modo siguiente:

DEFINICION. $a < b \Leftrightarrow (b - a)$ **es positivo**

Como consecuencia inmediata de esta definición obtenemos que:

$$a \text{ es positivo} \Leftrightarrow 0 < a$$

De acuerdo a la recta numérica, **a < b** significa que el punto que corresponde a **a** esta a la **izquierda** del punto que corresponde a **b.**

EJEMPLO 1. **a.** $2 < 6$, ya que $6 - 2 = 4$ y 4 es positivo

b. $-4 < -1$, ya que $-1 - (-4) = 4 - 1 = 3$ y 3 es positivo.

DEFINICION. a **es negativo** $\Leftrightarrow a < 0$

Las relaciones > ("mayor que"), ≤ ("menor o igual que") y ≥ ("menor o igual que") se definen en términos de la relación <, del siguiente modo:

DEFINICION.

1. $a > b \Leftrightarrow b < a$
2. $a \leq b \Leftrightarrow a < b$ o $a = b$
3. $a \geq b \Leftrightarrow a > b$ o $a = b$

PROPIEDADES BASICAS DE LAS DESGUALDADES

O_1. Ley de la tricotomía.

Todo par de números reales a y b cumple una y sólo una de las tres relaciones siguientes:

$$a = b, \quad a < b \quad ó \quad a > b$$

O_2. Ley de transitividad: $a < b \ \text{ y } \ b < c \ \Rightarrow \ a < c$

O_3. Ley aditiva: $a < b \Rightarrow a + c < b + c, \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$

O_4. Ley multiplicativa: $a < b \Leftrightarrow ac < bc, \ \forall\, c > 0$

$a < b \Leftrightarrow ac > bc, \ \forall\, c < 0$

O_5. $0 < a < b \ \text{ ó } \ a < b < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$

OBSERVACIONES

1. Las propiedades O_2, O_3, O_4 y O_5 se cumplen también cuando los símbolos $<$ y $>$ son reemplazados por los símbolos $\leq$ y $\geq$, respectivamente.

2. La propiedad O_4, en palabras, nos dice que si los dos términos de una desigualdad se multiplican por un número positivo, el sentido de la desigualdad persiste. En cambio, si se multiplican por un número negativo, el sentido de la desigualdad se invierte.

INTERVALOS

Más adelante aparecerán con frecuencia ciertos conjuntos de números reales llamados **intervalos**, los que se definen en términos de las relaciones de desigualdad anteriores.

Dados dos números reales a y b, se llama:

1. Intervalo cerrado de extremos **a** y b al conjunto:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}$$

2. Intervalo abierto de extremos a y b al conjunto:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\}$$

Notar que los extremos de un intervalo cerrado pertenecen al intervalo, mientras que un intervalo abierto excluye a estos extremos.

Intervalos semiabierto

3. $[a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x < b \}$

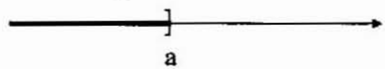
4. $(a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leq b \}$

Intervalos infinitos

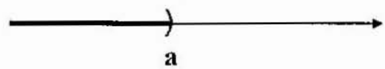
5. $[a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \}$

6. $(a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \}$

7. $(-\infty, a] = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq a \}$



8. $(-\infty, a) = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ x < a \}$



9. $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ son simples notaciones que usamos por comodidad. Ellos no representan ningún número real.

RESOLUCION DE INECUACIONES

Una desigualdad donde aparecen una o más variables es una **inecuación**. Las inecuaciones que aquí nos interesan son la que tiene **una sola variable**. Se llama **solución** o **conjunto solución** de una inecuación de una variable al conjunto formado por todos los números reales que colocados en lugar de la variable producen proposiciones verdaderas.

Las inecuaciones más simples son las inecuaciones lineales, que son las inecuaciones en las que sólo aparecen polinomios de primer grado. Estas inecuaciones se resuelven fácilmente haciendo uso de las propiedades básicas de las desigualdades. Para resolver inecuaciones expresadas en términos de polinomios de mayor grado o en términos de cocientes de polinomios (funciones racionales) aplicamos el método de Sturm.

INECUACIONES LINEALES

Una **inecuación es lineal** si la máxima potencia de la variable es 1. Estas inecuaciones son fáciles de resolver. Para esto, se despeja la variable haciendo uso de las propiedades básicas de las desigualdades.

EJEMPLO 2. Resolver la inecuación: $5x - 15 < 2x$

Solución

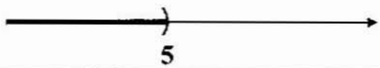
$5x - 15 < 2x \Leftrightarrow 5x < 2x + 15$ (por O_3, sumando 15 a ambos lados)

$\Leftrightarrow 3x < 15$ (por O_3, sumando $-2x$ a ambos lados)

$\Leftrightarrow$ $x < 15/3$ (por O_4, multiplicando por $1/3$ a ambos lados)

$\Leftrightarrow$ $x < 5$

Luego, el conjunto solución de esta desigualdad es el intervalo $(-\infty, 5)$



METODO DE STURM

Veamos, en primer término, como funciona este método en el caso de una inecuación expresada en términos de polinomios de grados mayores que 1.

Como primer paso, transponiendo términos trasformamos la inecuación hasta darle una de las cuatro formas siguientes:

1. $p(x) < 0$ **2.** $p(x) > 0$ **3.** $p(x) \leq 0$ **4.** $p(x) \geq 0$,

donde $p(x)$ es un polinomio de grado 2 o más.

Este método, en esencia, se basa en el siguiente resultado:

El signo de un polinomio es constante en un intervalo formado por dos raíces consecutivas.

Para esto, dividimos a la recta real en los intervalos, llamados **intervalos de prueba,** determinados por las raíces del polinomio. En estos intervalos de prueba, el polinomio no cambia de signo. Para determinar el signo en uno de estos intervalos de prueba, se toma un valor cualquiera de dicho intervalo en el cual se evalúa el polinomio. A este valor escogido lo llamaremos **valor de prueba.** Los intervalos de prueba se encuentran factorizando el polinomio. Esto es:

Si $p(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \ldots (x - r_n)$, donde $r_1 < r_2 < r_3 < \ldots < r_n$

entonces los intervalos de prueba son

$$(-\infty, r_1), \quad (r_1, r_2), \quad (r_2, r_3), \quad \ldots, \quad (r_{n-1}, r_n), \quad (r_n, +\infty)$$

En la recta numérica marcamos los signos para cada intervalo. Esta recta nos da inmediatamente la solución. Si la desigualdad viene expresada mediante las relaciones $<$ ó $>$, todos los intervalos que conforman la solución son abiertos. Si, en cambio, la desigualdad se expresa en términos de $\geq$ ó $\leq$, los intervalos que conforman la solución son cerrados.

EJEMPLO 3. Resolver la desigualdad $x^2 - 2 < 3x + 8$.

Solución

Paso 1. Transponemos y factorizamos:

$$x^2 - 2 < 3x + 8 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 < 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 5) < 0$$

Paso 2. Las raíces de $p(x) = (x + 2)(x - 5)$ son -2 y 5 y los intervalos de prueba:

$$(-\infty, -2), \qquad (-2, 5) \quad \text{y} \quad (5, +\infty)$$

Determinamos el signo de $p(x) = (x + 2)(x - 5)$ en cada intervalo de prueba.

En $(-\infty, -2)$ tomamos a $x = -3$ como valor de prueba y obtenemos:

$$p(-3) = (-3 + 2)(-3 - 5) = +8 \Rightarrow \text{ signo de } p(x) \text{ en } (-\infty, -2) \text{ es } +$$

En $(-2, 5)$ tomamos a $x = 0$ como valor de prueba y obtenemos:

$$p(0) = (0 + 2)(0 - 5) = -10 \Rightarrow \text{ signo de } p(x) \text{ en } (-2, 5) \text{ es } -$$

En $(5, +\infty)$ tomamos a $x = 6$ como valor de prueba y obtenemos:

$$p(6) = (6 + 2)(6 - 5) = +12 \Rightarrow \text{ signo de } p(x) \text{ en } (5, +\infty) \text{ es } +$$

Las raíces y los signos en los intervalos de prueba los consignamos en la recta numérica. Así:

+ + + + + | − − − − − | + + + + + + +

−2 5

Paso 3. La figura nos dice que el conjunto solución es **(−2, 5)**

DESIGUALDADES RACIONALES

Se llama **función racional a un cociente de polinomios**. Para resolver una inecuación expresada en términos de funciones racionales mediante el método se Sturm se siguen los mimos 3 pasos dados en la solución de inecuaciones polinómicas, sólo con el agregado que ahora se trabaja con dos polinomios, que son el numerador y el denominador.

Paso1. Se transforma algebraicamente la inecuación hasta obtener una expresión de la forma siguiente, donde los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ están factorizados,

$$\frac{p(x)}{q(x)} > 0, \qquad \frac{p(x)}{q(x)} \geq 0, \qquad \frac{p(x)}{q(x)} < 0 \qquad \text{ó} \qquad \frac{p(x)}{q(x)} \leq 0$$

Paso 2. Se hallan las raíces de $p(x) = 0$ y de $q(x) = 0$. Marcamos en la recta numérica las raíces halladas, así como el signo de $\frac{p(x)}{q(x)}$ correspondiente a cada intervalo en que ha quedado dividida la recta. Para hallar el signo se puede usar los valores de prueba.

Paso 3. Determinar el conjunto solución observando los signos en la recta numérica. Si la desigualdad viene expresada mediante las relaciones $<$ ó $>$, todos los intervalos que conforman la solución son abiertos. Si, en cambio, la desigualdad se expresa en términos de $\geq$ ó $\leq$, los intervalos que conforman la solución son cerrados en los extremos que corresponden a raíces del numerador y abiertos en los extremos correspondientes a raíces del denominador.

EJEMPLO 4. Resolver la desigualdad $\dfrac{x+3}{1-x} \geq -3$

Solución

Paso 1. Transponemos y factorizamos:

$$\frac{x+3}{1-x} \geq -3 \Leftrightarrow \frac{x+3}{1-x} + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+3+3(1-x)}{1-x} + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(x-3)}{x-1} \geq 0$$

Paso 2. Raíces del numerador y del denominador.

$2(x-3) = 0$ y $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ y $x = 1$.

Los intervalos de prueba son:

$$(-\infty, 1), \quad (1, 3) \quad \text{y} \quad (3, +\infty)$$

Hallemos el signo de $\dfrac{2(x-3)}{x-1}$ en cada uno de los intervalos anteriores.

Lo hacemos tomando valores de prueba:

a. En $(-\infty, 1)$, tomamos $x = 0$ y obtenemos $\dfrac{2(0-3)}{0-1} = +6$. Signo: +

b. En $(1, 3)$, tomamos $x = 2$ y obtenemos $\dfrac{2(2-3)}{2-1} = -2$. Signo: −

c. En $(3, +\infty)$, tomamos $x = 5$ y obtenemos $\dfrac{2(5-3)}{5-1} = +1$. Signo: +

+ + + + + + - - - - - - - - - - - + + + + + +

1 3

Paso 3. El conjunto solución es $(-\infty, 1) \cup [3, +\infty)$.

Observar en la solución que en el extremo correspondiente a 3 tomamos el intervalo cerrado. Esto debido a que la desigualdad viene expresada en términos de la relación $\geq$ y a que 3 es una raíz del numerador.

EJEMPLO 5. Resolver la desigualdad $\dfrac{3x+1}{x-1} \leq \dfrac{2x+7}{x+2}$

Solución

En busca de brevedad, los cuatro pasos requeridos para resolver la desigualdad, se presentarán implícitamente.

$$\frac{3x+1}{x-1} \leq \frac{2x+7}{x+2} \Leftrightarrow \frac{3x+1}{x-1} - \frac{2x+7}{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x+2)(3x+1)-(x-1)(2x+7)}{(x-1)(x+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x+9}{(x-1)(x+2)} \leq 0$$

El numerador de la última fracción es un polinomio de segundo grado con raíces complejas (su discriminante es negativo: $b^2 - 4ac < 0$). Esto significa que este polinomio no tiene raíces reales y, por tanto, no se puede factorizar en términos de números reales. Las raíces del denominador son -2 y 1.

Las raíces -2 y 1 determinan los intervalos:

$$(-\infty, -2), \quad (-2, 1), \quad (1, -\infty)$$

Hallemos el signo de $\dfrac{x^2+2x+9}{(x-1)(x+2)}$ en cada uno de los intervalos dados.

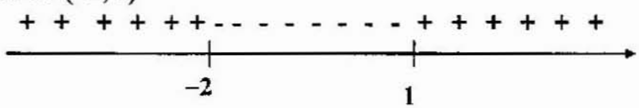
El numerador, por no tener raíces reales, nunca se anula. Luego, este polinomio o siempre es positivo o siempre es negativo. Para averiguarlo, tomamos un valor de prueba. Así, para $x = 0$ obtenemos $0^2 + 2(0) + 9 = 9$. Luego $x^2 + 2x + 9 > 0$, para todo x. En consecuencia, el signo de la fracción sólo dependerá del denominador.

a. En $(-\infty,-2)$, tomamos $x = -3$ y obtenemos $\dfrac{12}{(-4)(-1)} = +3$. Signo: +

b. En $(-2, 1)$, tomamos $x = 0$ y obtenemos $\dfrac{9}{(-1)(2)} = -\dfrac{9}{2}$. Signo: −

c. En $(1, \infty)$, tomamos $x = 2$ y obtenemos $\dfrac{17}{(1)(4)} = +\dfrac{17}{4}$. Signo: +

El conjunto solución es $(-2, 1)$



Jacques Charles François Sturm (1.803–1.855) , *matemático Suizo-francés quien hizo importantes contribuciones a la Teoría de Ecuaciones.*

PROBLEMAS RESUELTOS A

PROBLEMA 1. La temperatura Fahrenheit y la temperatura Celsius están relacionadas por la igualdad $C = \dfrac{5}{9}(F - 32)$. Si en cierto día, la temperatura Celsius de una ciudad cambió según el intervalo $25 \le C \le 40$. ¿En que intervalo cambió la temperatura ese día en grados Fahrenheit?

Solución

$$25 \leq C \leq 40 \Rightarrow 25 \leq \frac{5}{9}(F-32) \leq 40 \Rightarrow$$

$$25(9) \leq 5(F-32) \leq 40(9) \Rightarrow 225 \leq 5F - 160 \leq 360 \Rightarrow$$

$$225 + 160 \leq 5F \leq 360 + 160 \quad 385 \leq 5F \leq 520 \Rightarrow \frac{385}{5} \leq F \leq \frac{520}{5} \Rightarrow$$

$$77 \leq F \leq 104$$

PROBLEMA 2. Resolver $\dfrac{4}{x} < x \leq \dfrac{20}{x-1}$

Solución

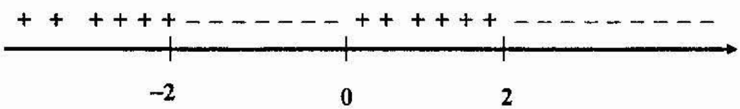
En esta expresión tenemos dos desigualdades, las que resolvemos separadamente,

$$\frac{4}{x} < x \qquad y \qquad x \leq \frac{20}{x-1}$$

1. Solución de $\dfrac{4}{x} < x$

$$\frac{4}{x} < x \Leftrightarrow \frac{4}{x} - x < 0 \Leftrightarrow \frac{4-x^2}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{(2-x)(2+x)}{x} < 0$$

Las raíces son: -2, 0 y 2. Mediante valores de prueba hallamos que:



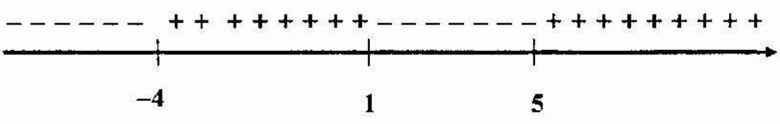
Luego la solución de esta desigualdad es $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

2. Solución de $x \leq \dfrac{20}{x-1}$

$$x \leq \frac{20}{x-1} \Leftrightarrow x - \frac{20}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-1)-20}{x-1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x-20}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-5)(x+4)}{x-1} \leq 0$$

Las raíces son: -4, 1 y 5. Mediante valores de prueba hallamos que:



Luego, la solución de esta desigualdad es $(-\infty, -4] \cup (1, 5]$.

3. Solución total. La solución total es la intersección de las soluciones parciales:

$$\left[(-2, 0) \cup (2, +\infty)\right] \cap \left[(-\infty, -4] \cup (1, 5]\right] = (2, 5].$$

PROBLEMAS PROPUESTOS A

En los problemas del 1 al 21 resolver la desigualdad dada. Ilustre la gráfica del conjunto solución.

1. $4x - 5 < 2x + 3$

2. $2(x - 5) - 3 > 5(x + 4) - 1$

3. $\dfrac{2x - 5}{3} - 3 > 1$

4. $\dfrac{5x - 1}{4} - \dfrac{x + 1}{3} \leq \dfrac{3x - 13}{10}$

5. $8 \geq \dfrac{2x - 5}{3} - 3 > 1 - x$

6. $5 < \dfrac{x - 1}{-2} < 10$

7. $(x - 3)(x + 2) < 0$

8. $x^2 - 1 < 0$

9. $x^2 + 2x - 20 \geq 0$

10. $2x^2 + 5x - 3 > 0$

11. $9x - 2 < 9x^2$

12. $(x - 2)(x - 5) < -2$

13. $(x + 2)(x - 1)(x + 3) \geq 0$

14. $\dfrac{x - 2}{x + 2} \leq 0$

15. $\dfrac{2}{x} \leq -\dfrac{3}{5}$

16. $\dfrac{2}{x - 1} \leq -3$

17. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{3}{x}$

18. $\dfrac{1}{x + 1} - \dfrac{x - 2}{3} \geq 1$

19. $\dfrac{x - 1}{x + 3} < \dfrac{x + 2}{x}$

20. $\dfrac{x + 1}{1 - x} < \dfrac{x}{2 + x}$

21. $\dfrac{4 - 2x}{x^2 + 2} > 2 - \dfrac{x}{x - 3}$

22. En cierto día la temperatura Celsius de una ciudad varió según el intervalo $5 \leq C \leq 20$ ¿En que intervalo cambió la temperatura ese día en grados Fahrenheit?

23. En cierto día la temperatura Fahrenheit de una ciudad varió según el intervalo $59 \leq F \leq 95$ ¿En que intervalo cambió la temperatura ese día en grados Celcius?

En los problemas del 24 al 30, probar la proposición dada.

24. $a < b$ y $c < d \Rightarrow a + c < b + d$ **25.** $a < b$ y $c > d \Rightarrow a - c < b - d$

26. $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$ **27.** $a > 1 \Rightarrow a^2 > a$

28. $0 < a < 1 \Rightarrow a^2 < a$ **29.** $0 < a < b$ y $0 < c < d \Rightarrow ac < bd$

30. $a \neq 0 \Rightarrow a$ y a^{-1} tienen el mismo signo (ambos son positivos o ambos negativos).

31. Se llama **media aritmética** de dos números a y b al número $\frac{a+b}{2}$. Probar que la media aritmética de dos números está entre los números; esto es, probar:

$$a < b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$$

32. Se llama **media geométrica** de dos números positivos a y b al número $\sqrt{ab}$. Probar que la media geométrica de dos números está entre los números. Esto es, probar:

$$0 < a < b \Rightarrow a < \sqrt{ab} < b$$

32. Probar que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, donde $a \geq 0$ y $b \geq 0$. Sugerencia: $0 \leq (a - b)^2$.

APENDICE B
VALOR ABSOLUTO

DEFINICION. El valor absoluto de un número real **a**, denotado por $|a|$, se define como:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

O sea, el valor absoluto de un número real es igual al mismo número si éste es 0 ó positivo y es igual a su inverso aditivo si es negativo.

Sabemos que todo número positivo x tiene dos raíces cuadradas, una positiva y otra negativa. A la positiva la denotamos con $\sqrt{x}$ y a la negativa con $-\sqrt{x}$.

Considerando que $\sqrt{a^2}$ es la raíz cuadrada positiva de a^2, se tiene que:

$$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$$

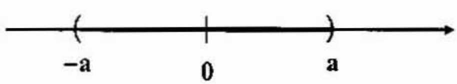
De la definición obtenemos inmediatamente que:

1. $|a| \geq 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}$
2. $-|a| \leq a \leq |a|, \quad \forall a \in \mathbb{R}$
3. $|x| = a \Leftrightarrow x = a \text{ ó } x = -a$

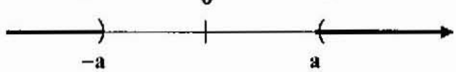
EJEMPLO 1. a. $|5| = 5$ b. $|-8| = 8$ c. $|0| = 0$

TEOREMA B.1 Para todo número real $a > 0$ se cumple que:

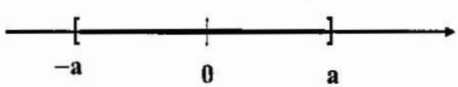
1. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$



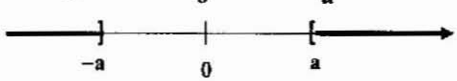
2. $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ ó } x > a$



3. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$



4. $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ ó } x \geq a$



Demostración

Ver el problema resuelto 1.

EJEMPLO 2. Resolver la ecuación $|x-3| = 1$

Solución

$$|x-3| = 1 \Leftrightarrow x-3=1 \quad ó \quad x-3=-1 \Leftrightarrow x=4 \quad ó \quad x=2.$$

EJEMPLO 3. Resolver la inecuación $|2x-3| < 5$. Ilustrar la solución.

Solución

De acuerdo a la parte 1 de la proposición anterior tenemos

$$|2x-3| < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x-3 < 5 \Leftrightarrow -2 < 2x < 8 \Leftrightarrow -1 < x < 4$$

O sea, la solución es el intervalo $(-1, 4)$

EJEMPLO 4. Resolver la inecuación $\left|\dfrac{x}{3}-2\right| > 4$. Ilustrar la solución.

Solución

De acuerdo a la parte 2 de la proposición anterior, tenemos:

$$\left|\frac{x}{3}-2\right| > 4 \Leftrightarrow \frac{x}{3}-2<-4 \quad ó \quad \frac{x}{3}-2>4 \Leftrightarrow \frac{x}{3}<-2 \quad ó \quad \frac{x}{3}>6$$

$$\Leftrightarrow x<-6 \quad ó \quad x>18$$

Luego, la solución es $(-\infty, -6) \bigcup (18, +\infty)$

OTRAS PROPIEDADES IMPORTANTES DEL VALOR ABSOLUTO

TEOREMA B.2 Si a y b son números reales y n es un número natural, entonces

1. $|ab| = |a||b|$

2. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$

3. $|a^n| = |a|^n$

4. $|a| < |b| \Leftrightarrow a^2 < b^2$

5. $|a+b| \leq |a| + |b|$ **(Desigualdad triangular)**

6. $|a-b| \leq |a| + |b|$

Demostración

Ver el problema resuelto 2

EJEMPLO 5. Resolver la inecuación $|x-2| < 1 + |x|$. Ilustrar la solución.

Solución

Dividimos a la recta en subintervalos y resolvemos la desigualdad en cada uno de ellos (divide y conquistarás).

Paso1.

Obtenemos los números donde las expresiones encerradas en valores absolutos se anulan; o sea las raíces de $|x-2| = 0$ y de $|x| = 0$. Estas son 2 y 0. Estas raíces dividen a la recta numérica en los intervalos:

$$(-\infty, 0), \qquad [0, 2) \quad \text{y} \quad [2, +\infty)$$

Los intervalos se toman cerrados a la izquierda debido a la definición del valor absoluto. Así, $|x-2| = x-2$ si $x \geq 2$. En cambio, $|x-2| = -(x-2)$, si $x < 2$.

Paso2.

Resolvemos la desigualdad en cada uno de estos intervalos. El conjunto solución en cada intervalo es la intersección del intervalo con la solución que se obtiene. Así:

En el intervalo $(-\infty, 0)$

Si $x < 0$, entonces $|x-2| = -(x-2)$ y $|x| = -x$. Luego,

$$|x-2| < 1 + |x| \Leftrightarrow -(x-2) < 1 + (-x) \Leftrightarrow -x + 2 < 1 - x$$

$$\Leftrightarrow 2 < 1 \Leftrightarrow x \in \phi \text{ (vacío).}$$

El conjunto solución en el intervalo $(-\infty, 0)$ es $(-\infty, 0) \cap \phi = \phi$

En el intervalo $[0, 2)$

Si $0 \leq x < 2$, entonces $|x-2| = -(x-2)$ y $|x| = x$. Luego,

$$|x-2| < 1 + |x| \Leftrightarrow -(x-2) < 1 + x \Leftrightarrow -x + 2 < 1 + x$$

$$\Leftrightarrow 1 < 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x \Leftrightarrow x \in (1/2, +\infty)$$

El conjunto solución en el intervalo $[0, 2)$ es

$$[0, 2) \cap (1/2, +\infty) = (1/2, 2)$$

En el intervalo $[2, +\infty)$

Si $2 \leq x$, entonces $|x-2| = x-2$ y $|x| = x$. Luego,

$$|x-2| < 1 + |x| \Leftrightarrow x - 2 < 1 + x \Leftrightarrow x - 2 < 1 + x$$

$$\Leftrightarrow -2 < 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, +\infty)$$

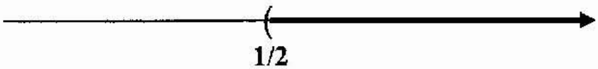
El conjunto solución en el intervalo $[2, +\infty)$ es

$$[2, +\infty) \cap (-\infty, +\infty) = [2, +\infty)$$

Paso 3.

La solución total es la unión de las soluciones parciales. Esto es, la solución de la desigualdad es

$$\phi \cup (1/2, 2) \cup [2, +\infty) = (1/2, +\infty)$$



EJEMPLO 6. Hallar un número M tal que

$$|x - 2| < 1 \Rightarrow |x^2 + 4x - 6| < M$$

Solución

Aplicando la desigualdad triangular tenemos que

$$|x^2 + 4x - 6| < |x^2| + |4x - 6|$$

$$< |x^2| + |4x| + |6| = |x|^2 + 4|x| + 6$$

O sea

$$|x^2 + 4x - 6| < |x|^2 + 4|x| + 6 \qquad \textbf{(1)}$$

Por otro lado,

$$|x - 2| < 1 \Rightarrow -1 < x - 2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3 \Rightarrow |x| < 3$$

$$\Rightarrow |x|^2 < 9 \quad \text{y} \quad 4|x| < 12$$

De estas desigualdades y de la desigualdad (1) se tiene:

$$|x - 2| < 1 \Rightarrow |x^2 + 4x - 6| < 9 + 12 + 6 = 27$$

Luego, $M = 27$ satisface la condición exigida

PROBLEMAS RESUELTOS B

PROBLEMA 1. Probar el teorema B.1:

1. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ **2.** $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ ó $x > a$

3. $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$ 4. $|x| \ge a \Leftrightarrow x \le -a$ ó $x \ge a$

Solución

1. Como $-x \le |x|$ y $x \le |x|$, tenemos que

$$|x| < a \Leftrightarrow -x < a \text{ y } x < a \Leftrightarrow -a < x \text{ y } x < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

2. Como $|x| = -x$ ó $|x| = x$, tenemos que

$$|x| > a \Leftrightarrow -x > a \text{ ó } x > a \Leftrightarrow x < -a \text{ ó } x > a$$

La propiedad 3 sigue inmediatamente de 1 y la 4 sigue de 2.

PROBLEMA 2. Probar el teorema B.2:

1. $|ab| = |a||b|$ 2. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $b \ne 0$

3. $|a^n| = |a|^n$ 4. $|a| < |b| \Leftrightarrow a^2 < b^2$

5. $|a+b| \le |a| + |b|$ **(Desigualdad triangular)** 6. $|a-b| \le |a| + |b|$

Solución

1. $|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = |a||b|$

2. Sea $\dfrac{a}{b} = c$. Luego,

$$a = bc \Rightarrow |a| = |bc| = |b||c| \Rightarrow \frac{|a|}{|b|} = |c| = \left|\frac{a}{b}\right|$$

3. Si $n = 0$, entonces $|a^0| = |1| = 1$ y $|a|^0 = 1$. Luego, $|a^0| = |a|^0$

Si $n > 0$, $|a^n| = |\underbrace{a\ a\ a\ .\ .\ .\ a}_{n}| = \underbrace{|a|\,|a|\,|a|\ .\ .\ .\ |a|}_{n} = |a|^n$

4. $(\Rightarrow)$

$$|a| < |b| \Rightarrow |a||a| < |a||b| \text{ y } |a||b| < |b||b|$$

$$\Rightarrow |a|^2 < |b|^2 \Rightarrow a^2 < b^2$$

$(\Leftarrow)$

$$a^2 < b^2 \Rightarrow |a|^2 < |b|^2 \Rightarrow |a|^2 - |b|^2 < 0$$

$$\Rightarrow (|a| - |b|)(|a| + |b|) < 0$$

$$\Rightarrow |a| - |b| < 0 \Rightarrow |a| < |b|$$

5. Tenemos que:

$$-|a| \le a \le |a| \quad \text{y} \quad -|b| \le b \le |b|$$

Sumando estas desigualdades:

$$-(\,|a|+|b|\,)\leq a+b\leq |a|+|b|$$

Aplicando la parte 1 del corolario anterior obtenemos:

$$|a+b|\leq |a|+|b|$$

6. $|a-b| = |a+(-b)| \leq |a|+|-b| = |a|+|b|$

PROBLEMA 3. Hallar un número M tal que

$$|x-1|<\frac{1}{4}\Rightarrow \frac{|x+3|}{|x-1/4|}<M$$

Solución

$$|x-1|<\frac{1}{4}\Rightarrow -\frac{1}{4}<x-1<\frac{1}{4}\Rightarrow \frac{3}{4}<x<\frac{5}{4}$$

Pero,

$$\frac{3}{4}<x<\frac{5}{4}\Rightarrow \frac{3}{4}+3<x+3<\frac{5}{4}+3 \quad y \quad \frac{3}{4}-\frac{1}{4}<x-\frac{1}{4}<\frac{5}{4}-\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{15}{4}<x+3<\frac{17}{4} \quad y \quad \frac{1}{2}<x-\frac{1}{4}<1$$

$$\Rightarrow |x+3|<\frac{17}{4} \quad y \quad \frac{1}{2}<\left|x-\frac{1}{4}\right|$$

En consecuencia,

$$|x-1|<\frac{1}{4}\Rightarrow \frac{|x+3|}{|x-1/4|}<\frac{17/4}{1/2}=\frac{17}{2}=M$$

PROBLEMAS PROPUESTOS B

En los problemas del 1 al 3, resolver la ecuación dada.

1. $|x-5|=4$ **2.** $|2x+1|=x+3$ **3.** $|x-2|=3x-9$

En los problemas del 4 al 20, resolver La inecuación dada. Ilustrar la solución en la recta numérica.

4. $|x-4|<3$ **5.** $|3x+1|<15$ **6.** $\left|\frac{2x}{3}-1\right|<2$

7. $|-3x-2|\leq 4$ **8.** $|5x+2|\geq 1$ **9.** $|-4x-3|>1$

10. $\left|\frac{2x}{5}-2\right|\geq 3$ **11.** $|x^2-5|\geq 4$ **12.** $1<|x|\leq 4$

13. $0 < |x - 3| < 1$ **14.** $|x - 1| < |x|$ **15.** $\left|\dfrac{3-2x}{1+x}\right| \leq 1$

16. $\left|\dfrac{1}{1-2x}\right| \geq \dfrac{1}{3}$ **17.** $|x - 1| + |x - 2| > 1$ **18.** $|x - 1| + |x + 1| \leq 4$

19. $\dfrac{1}{|2+x|} < \dfrac{1}{|x|}$ **20.** $|3x - 5| \leq |2x - 1| + |2x + 3|$

En los problemas del 21 al 23, Hallar Un número M que satisfaga la proposición dada.

21. $|x + 2| < 1 \Rightarrow |x^3 - x^2 + 2x + 1| < M$

22. $|x - 3| < 1/2 \Rightarrow \dfrac{|x+2|}{|x-2|} < M$

23. $|x - 1/4| < 1/8 \Rightarrow \dfrac{|16x+4|}{1+x^2} < M$

24. Probar: **a.** $|a - b| \geq |a| - |b|$.

Sugerencia: Aplicar la desigualdad triangular en: $a = (a - b) + b$

b. $|a - b| \geq |b| - |a|$ **c.** $||a| - |b|| \leq |a - b|$

APENDICE C

ECUACIONES POLINOMICAS

Una **función polinómica** o **función polinomial de grado n** o, simplemente, un **polinomio de grado n**, es una expresión de la forma:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ . \ . \ . \ + a_1 x + a_0, \qquad \textbf{(1)}$$

donde n es un número natural, a_n, a_{n-1}, . . . , a_1 y a_0 son reales, siendo $a_n \neq 0$.

Los números a_n, a_{n-1}, . . . , a_1 y a_0 son los coeficientes del polinomio, siendo $\mathbf{a_n}$ el **coeficiente principal** y $\mathbf{a_0}$ es el **coeficiente constante**.

Un cero del polinomio p(x) es un número c tal que p(c) = 0. En este caso, también se dice que c es **una raíz** o **una solución** de la **ecuación polínómica:**

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ . \ . \ . \ + a_1 x + a_0 = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

En la ecuación anterior, si n = 2, tenemos la **ecuación cuadrática**, la cual se acostumbra escribirla así:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

cuyas soluciones se encuentras mediante la llamada **fórmula cuadrática**, la cual es conocida desde los tiempos babilónicos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \textbf{(3)}$$

La expresión subradical $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac}$ se llamada **discriminante** de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$. Se tiene que:

Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene 2 raíces reales distintas.

Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene 2 raíces reales iguales.

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación tiene 2 raíces complejas distintas.

Se conocen fórmula análogas la fórmula cuadrática para resolver las ecuaciones de tercer y cuarto grado (ver Breve Historia de las ecuaciones de tercer y cuarto grado), sin embargo éstas fórmulas no son fáciles de manejar, por lo cual aquí no la las usaremos. Los brillantes matemáticos Neil Abel (noruego, 1.802–1.829) y Evaristo Galois (francés, 1.811–1.832) probaron que no existe fórmula, similar a la cuadrática, para resolver las ecuaciones de grado 5 o más.

Nuestra intención en este apéndice es mostrar un camino práctico para hallar los raíces de algunas ecuaciones de grados mayores o iguales a 3.

Suponemos que el lector sabe sumar, restar, multiplicar, dividir polinomios, la regla de Ruffini. Aún más, en la división de polinomios damos por conocido el resultado llamado el algoritmo de la división, que dice:

ALGORITMO DE LA DIVISION. Si p(x) y d(x) son dos polinomios, y si d(x) no es polinomio el cero, entonces existen dos únicos polinomios q(x) y r(x) tales que

$$\mathbf{p(x) = d(x)q(x) + r(x)}$$

donde r(x) es cero o un polinomio de grado menor que el de d(x).

p(x) es el **dividendo**, d(x) es el **divisor**, q(x) es el **cociente** y r(x) es el **residuo.**

Nuestro interés se concentra en el caso especial en el que $d(x) = x - c$. En esta situación, el residuo r(x), por ser de grado menor que el grado de $x - c$, debe ser una constante, a la denotaremos simplemente con r. El valor de esta constante nos el siguiente teorema.

TEOREMA C.1 **Teorema del Residuo.**
Si el polinomio p(x) es dividido por $x - c$, entonces el valor del residuo es p(c). Esto es,

$$p(x) = (x - c)q(x) + p(c)$$

Demostración

De acuerdo al algoritmo de la división, tenemos:

$$p(x) = (x - c)q(x) + r$$

Evaluando la igualdad en $x = c$:

$$p(c) = (c - c)q(c) + r = (0)q(c) + r \Rightarrow r = p(c)$$

EJEMPLO 1. Hallar el residuo de dividir el polinomio $p(x) = x^3 - 7x^2 + 3x + 9$ entre $x - 2$

Solución

De acuerdo al teorema anterior:

$$r = p(2) = 2^3 - 7(2)^2 + 3(2) + 9 = 8 - 28 + 6 + 9 = -5$$

TEOREMA C.2 **Teorema del factor.**

$$x - c \text{ es un factor del polinomio } p(x) \Leftrightarrow p(c) = 0$$

Demostración

(⇒) Si $x - c$ es un factor de p(x), entonces $p(x) = (x - c)q(x)$. Evaluando en c:

$$p(c) = (c - c)q(c) = (0)q(c) = 0$$

($\Leftarrow$) Sabemos, por el teorema anterior:

$$p(x) = (x - c)q(x) + p(c) = (x - c)q(x) + 0 = (x - c)q(x)$$

Luego, $x - c$ es un factor de $p(x)$

OBSERVACION. Según el teorema anterior, las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. $x - c$ es un factor de $p(x)$ **2.** $p(x) = 0$

3. c es un cero de $p(x)$ **4.** c es una raíz de $p(x)$

5. c es una solución de la ecuación $p(x) = 0$

EJEMPLO 2. **Factorizar un polinomio mediante el teorema del factor**

Sea el polinomio $p(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$.

a. Probar que -3 es un cero del polinomio $p(x)$.

b. Usar la parte a. para factorizar el polinomio $p(x)$.

Solución

a. Tenemos que:

$$p(-3) = (-3)^3 - 4(-3)^2 - 11(-3) + 30 = -27 - 36 + 33 + 30 = 0$$

Luego, por el teorema del factor, -3 es un cero de $p(x)$.

b. Dividimos el polinomio $p(x)$ entre $x - (-3) = x + 3$. Para esto, procedemos por el **método abreviado** o **regla de Ruffini**:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & -11 & 30 \\ -3 & & -3 & 21 & -30 \\ \hline & 1 & -7 & 10 & \mathbf{0} \end{array}$$

Luego,

$$x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = (x - (-3))(x^2 - 7x + 10) = (x + 3)(x^2 - 7x + 10)$$

El polinomio $x^2 - 7x + 10$, por ser cuadrático, sabemos factorizarlo hallando sus raíces con la fórmula cuadrática, o por el método del tanteo, buscando dos números que sumados de -7 y multiplicados den 10. Estos son -2 y -5. Luego,

$$x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5)$$

Es consecuencia,

$$x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = (x + 3)(x - 2)(x - 5)$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA

¿Toda ecuación polínomial tiene, al menos, una raíz? La respuesta es afirmativa lo da el llamado **Teorema Fundamental del Álgebra**, que fue demostrado por C. F. Gauss en 1.799. Su demostración no es simple y requiera de resultados más avanzado, por lo que la omitimos.

TEOREMA C.3 **Teorema Fundamental del Álgebra.**

Todo polinomio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ . \ . \ . \ + a_1 x + a_0, \quad (n > 0, \ a_n \neq 0)$$

con coeficientes complejos, tiene al menos una cero complejo.

Si $p(x)$ es un polinomio de grado $n > 0$, el Teorema Fundamental del Algebra nos dice que existe un c_1, que es un cero de $p(x)$. Luego, por el teorema del factor,

$$p(x) = (x - c_1)q_1(x),$$

donde el grado de $q_1(x)$ es $n - 1$.Volviendo a aplicar el Teorema Fundamental del Álgebra a $q_1(x)$, tenemos que existe c_2, que es un cero de $q_1(x)$. Luego,

$$p(x) = (x - c_1)(x - c_2)q_2(x),$$

donde el grado de $q_2(x)$ es $n - 2$. Siguiendo el proceso, después de n pasos tendremos n ceros de $p(x)$, $c_1, c_2, \ . \ . \ . \ c_n$, y un polinomio $q_n(x)$,de grado 0 tal que:

$$p(x) = (x - c_1)(x - c_2) \ . \ . \ . (x - c_n)\, q_n(x) \quad (4)$$

El polinomio $q_n(x)$, por ser de grado 0, es una constante.

Estos resultados los resumimos en la siguiente proposición:

TEOREMA C.4 **Teorema de factorización completa.**

Si $p(x)$ es un polinomio de grado n con coeficiente principal a_n, entonces existe n números complejos, $c_1, c_2, \ . \ . \ . \ c_n$, que son ceros de $p(x)$ y se cumple que:

$$p(x) = a_n\,(x - c_1)(x - c_2) \ . \ . \ . (x - c_n) \quad \mathbf{(5)}$$

Demostración

Sólo falta probar que, en (4), $q_n(x) = a_n$.

Si efectuamos la multiplicación indicada a la derecha de (4) conseguimos un solo término de grado n, que $q_n(x)x^n$. Similarmente, si efectuamos la multiplicación indicada a la derecha de (5) conseguimos un solo término de grado n, que $a_n x^n$. En consecuencia, $q_n(x) = a_n$.

Las n ceros $c_1, c_2, \ . \ . \ . \ c_n$ no necesariamente son distintos. Si un cero se repite k veces, se dice que ese **cero** tiene **multiplicidad k**.

LOS CEROS RACIONALES DE UN POLINOMIO

Nuestro interés en el este curso de Cálculo se concentra en las funciones reales. En particular, de un polinomio, sólo nos interesan los ceros reales.

El siguiente teorema nos proporciona un camino para hallar los ceros racionales de un polinomio, o sea las raíces de una ecuación polinomial.

TEOREMA C.3 **Los ceros racionales de un polinomio.**

Si los coeficientes del siguiente polinomio son enteros

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ . \ . \ . \ + a_1 x + a_0,$$

y si el racional $\frac{h}{k}$, reducido a su mínima expresión, es un cero del polinomio, entonces

1. h es un divisor del coeficiente constante a_0 y

2. k es un divisor del coeficiente principal a_n

Demostración

Ver el problema resuelto 2.

COROLARIO. Si el coeficiente principal del polinomio es $a_n = 1$, esto es,

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ . \ . \ . \ + a_1 x + a_0,$$

entonces toda cero racional de p(x) es un **entero** que divide a a_0

Demostración

Si $\frac{h}{k}$ es un cero de p(x), entonces, por el teorema, **k** divide a $a_n = 1$ y, por tanto, $k = 1$ ó $k = -1$. Luego, $\frac{h}{k} = h$ ó $\frac{h}{k} = -h$. Esto es, el cero racional h/k es el entero h ó el entero −h.

ESTRATEGIA PARA HALLAR LOS CEROS RACIONALES

Paso 1. Haga un listado de todos los racionales que son candidatos a ceros, de acuerdo al teorema de los ceros racionales de un polinomio. De este listado, identifique cuales son realmente ceros, verificando que p(c) = 0, donde c es un candidato.

Paso 2. Tome un cero, digamos c, conseguido en el paso anterior. Divide, (puede ser mediante la regla de Ruffini) el polinomio p(x) dado en la ecuación entre x − c y hallar el polinomio cociente q(x):

$$p(x) = (x - c)q(x)$$

Paso 3. Repetir los pasos 1 y 2 con el cociente q(x) y conseguir otro cociente. Seguir repitiendo el proceso hasta conseguir un cociente que es cuadrático o un cociente de fácil factorización. Factorice este último cociente, usando la fórmula cuadrática, si es necesario.

EJEMPLO 3. Resolver la ecuación siguiente y factorizar el polinomio

$$x^3 - 3x^2 - 5x + 15 = 0$$

Solución

Paso 1. Las raíces de esta ecuación son los ceros de $p(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 15$

Como el coeficiente principal es 1, de acuerdo al corolario anterior, los candidatos a ser ceros raciones son número los enteros que dividen a 15:

$$1,\ -1,\ 3, -3,\ 5,\ -5, 15\ \text{ y }\ -15$$

Aplicamos el teorema del factor a estos candidatos.

$p(1) = 8$, $p(-1) = 16$, $p(3) = 0$ $p(-3) = -24$

$p(5) = 40$ $p(-5) = -150$ $p(15) = 2.640$ $p(-15) = -3.960$

Luego, tenemos sólo un cero racional, que es el entero 3.

Paso 2. Dividimos el polinomio $p(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 15$ entre $x - 3$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -5 & 15 \\ 3 & & 3 & 0 & -15 \\ \hline & 1 & 0 & -5 & \mathbf{0} \end{array}$$

Luego,

$$x^3 - 3x^2 - 5x + 15 = (x - 3)(x^2 - 5) = 0$$

Paso 3. El cociente $q(x) = x^2 - 5$ es ya un polinomio cuadrático, que se factoriza fácilmente como una diferencia de cuadrados:

$$x^2 - 5 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$$

Luego,

$$x^3 - 3x^2 - 5x + 15 = (x - 3)\,(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$$

Las raices son: 3, $\sqrt{5}$ y $-\sqrt{5}$, una raíz es entera y las otras son irracionales.

EJEMPLO 4. Resolver la ecuación siguiente y factorizar el polinomio.

$$2x^4 + x^3 - 9x^2 + 16x - 6 = 0$$

Solución

Paso 1. Numeradores posibles (factores de -6): ±1, ±2, ±3, ±6.

Denominadores posibles (factores de 2) : $\pm1, \pm2$

Racionales candidatos a raíces:

$$\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{2}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{6}{2}$$

Simplificando y eliminando los candidatos iguales:

$$\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$$

Si $p(x) = 2x^4 + x^3 - 9x^2 + 16x - 6$, se tiene:

$p(1) = 4$	$p(-1) = -30$	$p(2) = 30$	$p(-2) = -50$	$p(3) = 150$
$p(-3) = 0$	$p(1/2) = 0$	$p(-1/2) = -65/4$	$p(3/2) = 45/4$	$p(-3/2) = -87/2$

Vemos que $p(x)$ tiene sólo dos ceros racionales: -3 y $1/2$.

Pasos 2 y 3. Dividimos el polinomio $p(x) = 2x^4 + x^3 - 9x^2 + 16x - 6$ entre $x + 3$ y el cociente entre $x - 1/2$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 1 & -9 & 16 & -6 \\ -3 & & -6 & 15 & -18 & 6 \\ \hline & 2 & -5 & 6 & -2 & \mathbf{0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 6 & -2 \\ 1/2 & & 1 & -2 & 2 \\ \hline & 2 & -4 & 4 & \mathbf{0} \end{array}$$

$p(x) = (x + 3)(2x^3 - 5x^2 + 6x - 2)$ $\qquad$ $2x^3 - 5x^2 + 6x - 2 = (x - 1/2)(2x^2 - 4x + 4)$

Tenemos:

$$p(x) = (x + 3)\,(x - 1/2)(2x^2 - 4x + 4)$$

El polinomio $2x^2 - 4x + 4$ es de segundo grado, cuyos ceros los hallamos mediante la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16^2 - 4(1)(4)}}{4} = \frac{4 \pm 4\sqrt{-1}}{4} = 1 \pm i$$

Luego, por el teorema de factoricación completa,

$$2x^2 - 4x + 4 = 2(x - (1+ i\,))(x - (1- i\,)) = 2(x - 1- i\,))(x - 1+ i\,)$$

Finalmente, tenemos que:

$$2x^4 + x^3 - 9x^2 + 16x - 6 = 2(x + 3)\,(x - 1/2)\,(x - 1- i\,))(x - 1+ i\,)$$

La ecuación tiene dos raíces racionales, -3, $1/2$, y dos complejas, $1 + i$, $1 - i$

EJEMPLO 5. Resolver la ecuación siguiente y factorizar el polinomio.

$$4x^3 - 16x^2 + 11x + 10 = 0$$

Solución

Paso 1. Numeradores posibles (factores de 10): ± 1, ± 2, ± 5, ± 10.

Denominadores posibles (factores de 4) : $\pm 1, \pm 2$, ± 4

Racionales candidatos a raíces:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{2}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{10}{2}, \pm\frac{4}{5}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{5}{4}, \pm\frac{10}{4}$$

Simplificando y eliminando los candidatos iguales:

$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 5, \ \pm 10, \ \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \ \pm\frac{5}{2}, \ \pm\frac{5}{4}$$

Si $p(x) = 4x^3 - 16x^2 + 11x + 10$, se tiene:

$p(1) = 9$	$p(-1) = -21$	$p(2) = 0$	$p(-2) = -108$
$p(5) = 165$	$p(-5) = -945$	$p(10) = 2520$	$p(-10) = -2.500$
$p(1/2) = 12$	$p(-1/2) = 0$	$p(1/4) = 189/16$	$p(-1/4) = 99/16$
$p(5/2) = 0$	$p(-5/2) = -125$	$p(5/4) = 105/16$	$p(-5/4) = -805/16$

La ecuación tiene 3 raíces racionales: $-1/2$, 2 y $5/2$.

El hecho de que la ecuación dada es de grado 3 y de ella ya conocemos 3 raíces, el teorema de la factorización completa nos ahorra los pasos 2 y 3, ya que, de acuerdo a este teorema:

$$4x^3 - 16x^2 + 11x + 10 = 4(x + 1/2)(x - 2)(x - 5/2) = (2x + 1)(x - 2)(2x - 5)$$

PROBLEMAS RESULTOS C

PROBLEMA 1. Resolver la siguiente ecuación, factorizar el polinomio y señalar la multiplicidad de cada raíz.

$$x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$$

Solución

Sea $p(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1$

Como el coeficiente principal es 1, los racionales candidatos a raíces son los venteros divisores del coeficiente constante 1. Estos son: 1 y -1.

$p(1) = 1 + 1 - 2 - 2 + 1 + 1 = 0$ $\qquad$ $p(-1) = -1 + 1 + 2 - 2 - 1 + 1 = 0$

Tanto 1 y -1 son raíces. Dividimos $p(x)$ entre $x - 1$ y el cociente $q_1(x)$ entre $x + 1$.

$$x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1 =$$

$$(x - 1)(x + 1)(x^3 + x^2 - x - 1)$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & 1 & -2 & -2 & 1 & 1 \\
1 & & 1 & 2 & 0 & -2 & -1 \\
\hline
 & 1 & 2 & 0 & -2 & -1 & 0 \\
-1 & & -1 & -1 & 1 & 1 & \\
\hline
 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 &
\end{array}$$

Si 1 es una raíz múltiple esta también debe ser raíz del cociente:

$$q_2(x) = x^3 + x^2 - x - 1$$

Lo mismo afirmamos de la raiz -1. Veamos:

$$q_2(1) = 1 + 1 - 1 - 1 = 0 \qquad q_2(-1) = -1 + 1 + 1 - 1 = 0$$

Estos resultados nos dicen que, efectivamente, 1 y -1 son raíces de $q_2(x)$. Dividimos este cociente entre $x - 1$ y nuevo cociente $q_3(x)$ entre $x + 1$.

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x - 1)(x + 1)(x + 1)$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & & 1 & 2 & 1 \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & 0 \\
-1 & & -1 & -1 & \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 &
\end{array}$$

Luego,

$$x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1 = (x - 1)(x + 1)(x - 1)(x + 1)(x + 1)$$
$$= (x - 1)^2 (x + 1)^3$$

La raíces de la ecuación son 1, con multiplicad 2, y -1, con multiplicidad 3.

PROBLEMA 2. Demostrar el teorema de los racionales de un polinomio.

Si los coeficientes del siguiente polinomio son enteros

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ . \ . \ . \ + a_1 x + a_0,$$

y si el racional $\frac{h}{k}$, reducido a su mínima expresión, es un cero del polinomio, entonces

1. h es un divisor del coeficiente constante a_0 y

2. k es un divisor del coeficiente principal a_n

solución

Si $\frac{h}{k}$ es un cero de p(x), entonces

$$a_n\left(\frac{h}{k}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{h}{k}\right)^{n-1} + \;.\;.\;.\; a_1\left(\frac{h}{k}\right) + a_0 = 0$$

Multiplicando por k^n:

$$a_n h^n + a_{n-1}h^{n-1}k + \;.\;.\;.\; a_1 hk^{n-1} + a_0 k^n = 0 \qquad (\text{i})$$

1. Transponiendo a_0k^n en (i) y factorizando:

$$h\left(a_n h^{n-1} + a_{n-1}h^{n-2}k + \;.\;.\;.\; a_1 k^{n-1}\right) = -a_0 k^n$$

Esta igualdad nos dice que h divide a a_0k^n. Como h no divide a k, tampoco divide a k^n y, por lo tanto, h a divide a a_0.

2. Transponiendo a_nh^n en (i) y factorizando:

$$k\left(a_{n-1}h^{n-1} + \;.\;.\;.\; a_1 hk^{n-2} + a_0 k^{n-1}\right) = -a_n h^n$$

Esta igualdad nos dice que k divide a a_nh^n. Como k no divide a h, tampoco divide a h^n y, por lo tanto, k divide a a_n.

PROBLEMAS PROPUESTOS C

En los problemas del 1 y 2, usando el teorema del residuo, hallar el el residuo cuando se divide:

1. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ entre $x + 2$ **2.** $3x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 3x - 2$ entre $x - 2$

En los problemas del 3 y 10, hallar las raíces de la ecuación dada y factorice el polinomio correspondiente.

3. $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ **4.** $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$

5. $4x^3 - 7x^2 + 3 = 0$ **6.** $2x^3 - 2x^2 - 11x + 2 = 0$

7. $x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 6 = 0$ **8.** $3x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 2 = 0$

9. $x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 = 0$ **10.** $x^5 + 4x^4 - 4x^3 - 34x^2 - 45x - 18 = 0$

En los problemas del 11 al 13, usar el teorema del factor para probar que:

11. $x - a$ es un factor de $x^n - a^n$, para todo entero positivo n.

12. $x + a$ es un factor de $x^n - a^n$, para todo entero positivo par n.

13. $x + a$ es un factor de $x^n + a^n$, para todo entero positivo impar n.

APENDICE D

PLANO CARETESIANO, GRAFICAS, SIMETRIAS Y TRASLACIONES

EL PLANO CARTESIANO

Un conjunto sumamente importante y que aparecerá con mucha frecuencia más adelante, es el conjunto $\mathbb{R}^2$ formado por todos los pares ordenados (a, b) de números reales. Esto es,

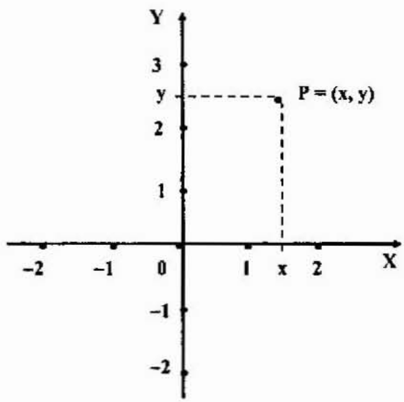
$$\mathbb{R}^2 = \{ (a, b) \,/\, a, b \in \mathbb{R} \}$$

Estamos usando la misma notación para expresar tanto al par ordenado (a, b) como al intervalo (a, b). Para evitar confusiones, en el contexto seremos suficientemente explícitos para indicar cual de los dos conceptos se está tratando.

Recordemos que un par ordenado de números reales es una pareja de números reales, en la cual se distingue un orden. Es decir, en general, $(a, b) \neq (b, a)$.

Dos pares ordenados **(a, b) y (c, d) son iguales**, si y sólo si **a = c y b = d.**

Es de fundamental importancia tener una representación geométrica de $\mathbb{R}^2$. Para esto tomamos un plano cualquiera al cual fijamos. Sobre este plano tomamos dos rectas numéricas perpendiculares a la misma escala y cuyos orígenes coinciden.



Estas dos rectas nos permiten establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos P del plano y los pares ordenados (x, y) de números reales, en la forma que indica la figura anterior. A la recta X se le llama **eje X** o eje de las **abscisas**. La recta Y es el **eje Y** o eje de las **ordenadas**.

El punto de intersección **O** de los ejes es el origen. Si al punto P le corresponde el par (x, y), diremos que x e y son las **coordenadas** de P, siendo x su abscisa e y su ordenada. Con el objeto de abreviar, identificaremos el punto P con el par (x, y), y escribiremos P = (x, y). Así, tenemos, por ejemplo, **O** = (0, 0). Esta correspondencia biunívoca también nos permite identificar al plano con $\mathbb{R}^2$.

Una correspondencia biunívoca del plano con $\mathbb{R}^2$, de la forma obtenida anteriormente, se llama un **sistema de coordenadas rectangulares o sistema de coordenadas cartesianas** del plano.

Se ha adoptado el nombre de "cartesianas" en honor al célebre matemático y filósofo René Descartes (1.596–1.650), a quién se le otorga la paternidad de la Geometría Analítica. El plano, provisto con este sistema de coordenadas, recibe el nombre de **plano cartesiano**.

EJEMPLO 1. Sea $P_1 = (3, 2)$

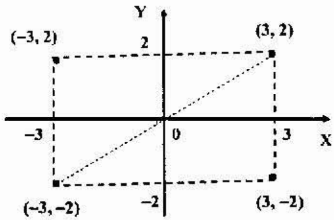
a. Hallar el punto P_2 que es simétrico respecto al eje X al punto $P_1 = (3, 2)$
b. Hallar el punto P_3 que es simétrico respecto al eje Y al punto $P_1 = (3, 2)$
c. Hallar el punto P_4 que es simétrico respecto al origen al punto $P_1 = (3, 2)$

Solución

a. $P_2 = (3, -2)$

b. $P_3 = (-3, 2)$

c. $P_4 = (-3, -2)$



DISTANCIA

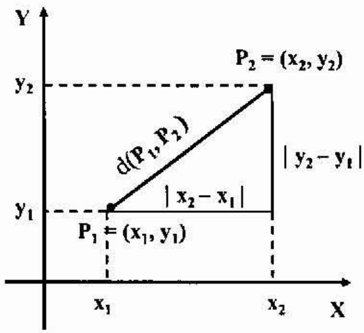
TEOREMA D.1 La distancia entre los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ es

$$\mathbf{d(P_1, P_2)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Demostración

Tomemos el triángulo rectángulo que tiene por hipotenusa el segmento que une $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ y por catetos, los segmentos paralelos a los ejes indicados en la figura.

Las longitudes de los catetos son $|x_2 - x_1|$ y $|y_2 - y_1|$. La distancia $d(P_1, P_2)$ es la longitud de la hipotenusa. Luego, aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos que:



$$\big(d(P_1, P_2)\big)^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

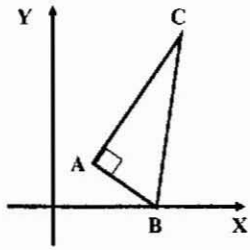
de donde obtenemos: $\mathbf{d(P_1, P_2)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

EJEMPLO 2. Empleando la fórmula de la distancia probar que los siguientes puntos son los vértices de un triángulo rectángulo:

$$A = (1, 1),\ B = (3, 0)\ \text{ y }\ C = (4, 7)$$

solución

Calculamos la longitud de los lados del triángulo:



$$d(A, B) = \sqrt{(3-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$d(A, C) = \sqrt{(4-1)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(4-3)^2 + (7-0)^2} = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50}$$

Como se cumple que:

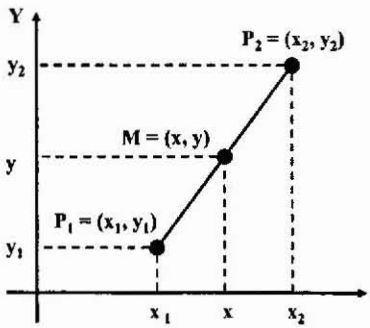
$$d(A, B)^2 + d(A, C)^2 = 5 + 45 = 50 = d(B, C)^2,$$

el triángulo debe ser rectángulo, por el teorema recíproco al teorema de Pitágoras.

PUNTO MEDIO

TEOREMA D.2 El punto medio del segmento de recta de extremos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ es el punto

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$



Demostración

Sea $M = (x, y)$.

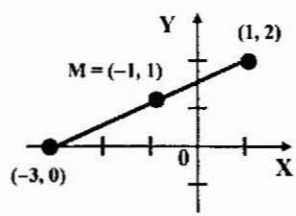
Proyectamos el segmento sobre los ejes.

Por ser $M = (x, y)$ el punto medio, x e y deben ser los puntos medios de los intervalos $[x_1, x_2]$ e $[y_1, y_2]$, respectivamente. Luego,

$$x - x_1 = x_2 - x \quad \text{e} \quad y - y_1 = y_2 - y \Rightarrow$$

$$2x = x_1 + x_2 \quad \text{e} \quad 2y = y_1 + y_2 \Rightarrow x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

EJEMPLO 4. Hallar el punto medio del segmento de recta de extremos $(-3, 0)$ y $(1, 2)$



Solución

$$M = \left(\frac{-3+1}{2}, \frac{0+2}{2} \right) = (-1, 1)$$

GRAFICAS DE ECUACIONES DE DOS VARIABLES

Dada una ecuación en dos variables **F(x, y) = 0.** Se llama **gráfico** o **gráfica** de esta ecuación al conjunto

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, F(x, y) = 0\}$$

Dos ecuaciones son **equivalentes** si ambas tienen las mismas soluciones. Así, las ecuaciones $y = x/2$ y $2y = x$ son equivalentes. Es claro que las ecuaciones equivalentes tienen el mismo gráfico.

Trazar el gráfico de una ecuación no es simple y requiere de conocimientos que desarrollaremos más adelante, después de estudiar el concepto de derivada. Sin embargo, si la ecuación no es complicada, ésta se puede graficar localizando algunos puntos. En la elección de los puntos a representar se deben tratar de escoger los más adecuados. Entre estos, están los puntos donde la gráfica intersecta a los ejes coordenados. Las abscisas de los puntos donde la gráfica intersecta al eje X se llama **abscisas en el origen.** Estas se encuentran haciendo $y = 0$ en la ecuación. Similarmente, las ordenadas de los puntos donde la gráfica intersecta al eje Y se llaman **ordenadas en el origen**, y se encuentran haciendo $x = 0$ en la ecuación.

EJEMPLO 5. Graficar la ecuación $y = x^2$

Solución

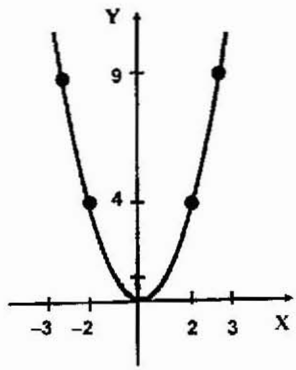
Intersección con el eje X: $y = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

Luego, la gráfica intersecta al eje X en el punto (0, 0).

Intersección con el eje Y: $x = 0 \Rightarrow y = 0^2 = 0$

Luego, la gráfica interfecta al eje Y en el punto (0, 0)

x	−3	−2	0	1	2	3
y	9	4	0	1	4	9



Esta curva es una **parábola** con vértice en el origen cuyo eje coincide con el eje Y

SIMETRIAS

CRITERIOS DE SIMETRIA

La gráfica de una ecuación es simétrica respecto al:

a. Eje Y si al sustituir **x** por **−x** se obtiene una ecuación equivalente.

b. Eje X si al sustituir **y** por **−y** se obtiene una ecuación equivalente.

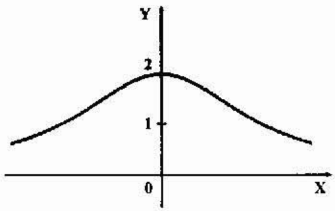
c. Origen si al sustituir **x** por **−x** e **y** por **−y** se obtiene una ecuación equivalente.

EJEMPLO 6. Probar que:

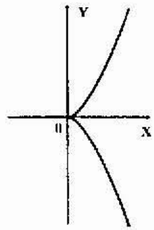
a. La **bruja de Agnesi** es simétrica respecto al eje X

c. La **parábola semicúbica** es simétrica respecto al eje Y

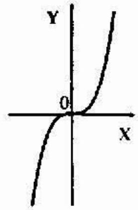
b. La parábola cúbica se es simetría respecto al origen.



$\mathbf{x^2y = 4(2 - y)}$
Bruja de Agnesi



$\mathbf{y^2 = x^3}$
Parábola semicúbica



$\mathbf{y = x^3}$
Parábola cúbica

Solución

a. Reemplazando x por –x en la ecuación de la Bruja:

$(-x)^2y = 4(2 - y) \Rightarrow x^2y = 4(2 - y)$, que es la ecuación de la Bruja.

b. Reemplazando y por –y en la ecuación de la parábola semicúbica:

$(-y)^2 = x^3 \Rightarrow y^2 = x^3$, que es la ecuación de la parábola semicúbica.

c. Reemplazando x por – x e y por –y en la ecuación de la parábola cúbica:

$-y = (-x)^3 \Rightarrow -y = -x^3 \Rightarrow y = x^3$, que es la ecuación de la parábola cúbica

---

TRASLACION

CRITERIO DE TRASLACION

La gráfica de la ecuación

$$\mathbf{F(x - h, y - k) = 0}$$

se obtiene trasladando la gráfica de la ecuación

$$\mathbf{F(x, y) = 0,}$$

mediante la traslación que lleva el **origen** al punto **(h, k)**.

EJEMPLO 7. Haciendo uso de la gráfica de $y = x^2$, dada en el ejemplo 5, y del criterio de traslación, graficar la ecuación

$$y = x^2 - 10x + 23$$

Solución

Solución

De acuerdo al criterio de traslación, debemos hallar el punto (h, k) que cumpla:

$$y - k = (x - h)^2$$

Completando cuadrados y transponiendo:

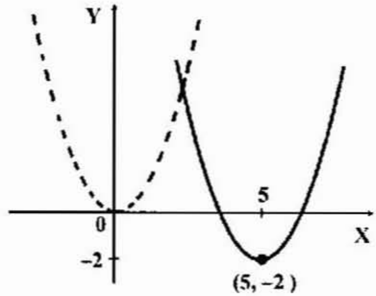
$$y = x^2 - 10x + 23 \quad \Leftrightarrow$$

$$y = (x^2 - 10x + 25) + 23 - 25 \quad \Leftrightarrow$$

$$y = (x - 5)^2 - 2 \quad \Leftrightarrow$$

$$y + 2 = (x - 5)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$y - (-2) = (x - 5)^2$$



Luego, la gráfica de $y = x^2 - 10x + 23$ se obtiene de la gráfica de $y = x^2$ mediante la traslación que lleva el origen al punto (5, −2).

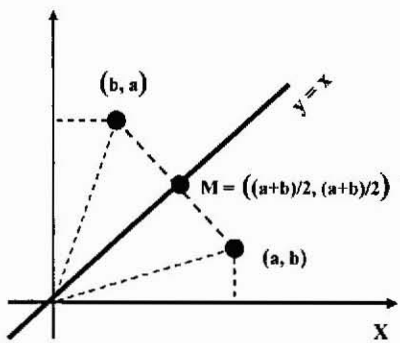
CRITERIO DE INVERSION

Si a un punto (a, b) le intercambiamos sus coordenadas obtenemos el punto (b, a). ¿Qué propiedad geométrica relaciona estos dos puntos?

Consideremos la recta diagonal y = x, a la que llamaremos **diagonal principal.**

Los puntos **(a, b)** y **(b, a)**, con coordenadas invertidas, se caracterizan por ser **simétricos respecto a la diagonal principal**.

Este resultado nos permite establecer la siguiente proposición, a la que llamaremos criterio de inversión. Le damos ese nombre debido a que, más adelante, él nos servirá para construir las gráficas de las funciones inversas.



CRITERIO DE INVERSION

La gráfica de la ecuación

$$\mathbf{F(y, x) = 0}$$

se obtiene reflejando en la **diagonal principal y = x** la gráfica de

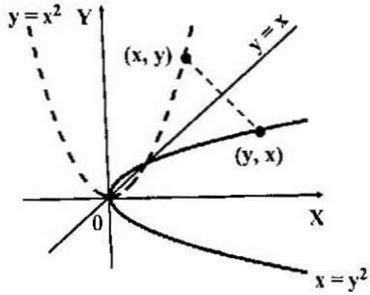
$$\mathbf{F(x, y) = 0.}$$

EJEMPLO 8. Haciendo uso de la gráfica de $y = x^2$, dada en el ejemplo 5, y del criterio de inversión, graficar la ecuación

$$x = y^2$$

Solución

La ecuación $x = y^2$ se obtiene de la ecuación $y = x^2$, intercambiando la variable x con la variable y. Luego, por el criterio de inversión, la gráfica de $x = y^2$ se obtiene reflejando la gráfica de $y = x^2$ en la diagonal principal.



PROBLEMAS PROPUESTOS D

En los problemas 1, 2 y 3 hallar la distancia entre los siguientes pares de puntos P y Q y encontrar el punto medio del segmento que los une.

1. $P = (0, 0)$, $Q = (1. 2)$ **2.** $P = (1, 3)$, $Q = (3, 5)$ **3.** $P = (-1, 1)$, $Q = (1, \sqrt{2}\,)$

4. Probar que los puntos $A = (-2, 4)$, $B = (-1, 3)$ y $C = (2, -1)$ son colineales.

5. Si $A = (-3, -5)$ y $M = (0, 2)$, hallar B sabiendo que M es el punto medio del segmento AB.

6. Si $B = (8, -12)$ y $M = (7/2, 3)$, hallar A sabiendo que M es el punto medio del segmento AB.

7. Probar que los puntos $A = (2, -3)$, $B = (4, 2)$ y $C = (-1, 4)$ son los vértices de un triángulo isósceles.

8. Probar que el triángulo con vértices $A = (4, 1)$, $B = (2, 2)$ y $C = (-1, -4)$ es rectángulo.

9. Probar que los puntos $A = (1, 2)$, $B = (4, 8)$, $C = (5, 5)$ y $D = (2, -1)$ son los vértices de un paralelogramo.

10. Probar que los puntos $A = (0, 2)$, $B = (1, 1)$, $C = (2, 3)$ y $D = (-1, 0)$ son los vértices de un rombo.

11. Probar que los puntos $A = (1, 1)$, $B = (11, 3)$, $C = (10, 8)$ y $D = (0, 6)$ son los vértices de un rectángulo.

12. Probar que los puntos $A = (-4, 1)$, $B = (1, 3)$, $C = (3, -2)$ y $D = (-2, -4)$ son los vértices de un cuadrado.

13. Hallar los puntos $P = (x, 2)$ que distan 5 unidades del punto $(-1, -2)$.

14. Hallar los puntos $P = (1, y)$ que distan 13 unidades del punto $(-4, 1)$.

15. Hallar una ecuación que relaciona a x con y y que describa el hecho de que el punto $P = (x, y)$ equidista de los puntos $A = (6, 1)$ y $B = (-4, -3)$.

16. Hallar una ecuación que relacione a x con y y que describa el hecho de que el punto $P = (x, y)$ dista 3 unidades del origen.

17. Los puntos medios de los lados de un triángulo son $M = (2, -1)$, $N = (-1, 4)$ y $Q = (-2, 2)$. Hallar los vértices.

18. Dos vértices adyacentes de un paralelogramo son $A = (2, 3)$ y $B = (4, -1)$. Si las diagonales se bisecan en el punto $M = (1, -3)$, hallar los otros dos vértices.

19. Los vértices de un cuadrilátero son $A = (-2, 14)$, $B = (3, -4)$, $C = (6, -2)$ y $D = (6, 6)$. Hallar el punto donde las diagonales se intersectan.

En los problemas 20, 21 y 22, aplicando los criterios de traslación a la gráfica de la parábola semicúbica (ejemplo 6), graficar las siguientes ecuaciones.

20. $(y - 1)^2 = (x + 1)^3$ **21.** $(x - 1)^2 = (y + 1)^3$ **22.** $(y + 1)^2 = (x - 1)^3$

En los problemas del 23, 24 y 25, aplicando los criterios de traslación y de reflexión a la gráfica de la Bruja de Agnesi (ejemplo 6), graficar las siguientes ecuaciones.

23. $(x - 3)^2(y - 2) = 4(4 - y)$ **24.** $(y - 3)^2(x - 2) = 4(4 - x)$

25. $(x + 3)^2(y + 2) = 4(-y)$

NOTA HISTORICA.

María Gaetana Agnesi (1.718–1.779). *Nació en Milán., Italia. Desde muy joven demostró talento y afición por la Matemática. Escribió, en italiano, un texto para la enseñanza del Cálculo Diferencial:* ***Institución Analitiche al uso della Gioventu Italiana.*** *En este libro describió la curva que ahora se llama la* ***Bruja de Agnesi****, cuyo nombre en inicial fue "versiera" (derivada de una palabra latina que la idea de voltear). En una traducción del libro se confundió la palabra "versiera" con "avversiera", que significa "bruja". De esta confusión viene el nombre de* ***bruja de Agnesi****.*

APENDICE E

LA RECTA Y LA ECUACION DE PRIMER GRADO

PENDIENTE DE UNA RECTA

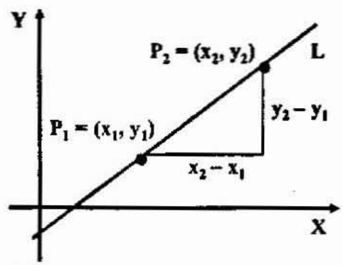
Introducimos el concepto de **pendiente** de una recta para medir la razón de elevación o inclinación de la recta. Este concepto capta el sentido intuitivo de la palabra pendiente que usamos en frases como "la pendiente de una carretera" o "la pendiente de una colina".

DEFINICION. La **pendiente** de una recta **no vertical** L que pasa por los puntos

$P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$

es el cociente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

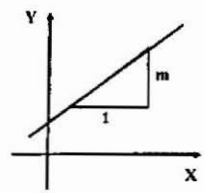


OBSERVACIONES.

1. La pendiente de una recta es independiente de los puntos que se toman para definirla. Esto es, si $P'_1 = (x'_1, y'_1)$ y $P'_2 = (x'_2, y'_2)$ son otros puntos de la recta, se tiene:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1}$$

4. La pendiente m indica el número de unidades que la recta sube (si $m > 0$) o baja (si $m < 0$) por cada unidad horizontal que se avance a la derecha. Si $m = 0$, la recta es horizontal.



TEOREMA E.1 **Ecuación punto–pendiente.**
Una ecuación de la recta de pendiente **m** y que pasa por el punto $P_0 = (x_0, y_0)$ es

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

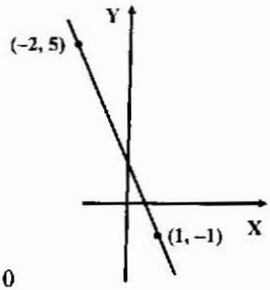
Demostración

Sea $P = (x, y)$ un punto cualquiera de la recta. De la definición de pendiente:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$$

EJEMPLO 1. Hallar una ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-2, 5)$ y $(1, -1)$.

Solución



Hallemos, en primer lugar, la pendiente de la recta:

$$m = \frac{-1-5}{1-(-2)} = \frac{-6}{3} = -2$$

Ahora hallamos la ecuación punto–pendiente de la recta.

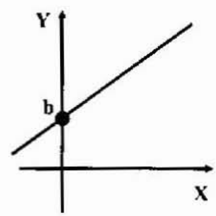
Como el punto P_0 podemos tomar cualquiera de los dos puntos dados, $(-2, 5)$ ó $(1, -1)$. Así, si $P_0 = (1, -1)$,

$$y-(-1) = -2(x-1) \Rightarrow y+1 = -2x+2 \Rightarrow y+2x-1 = 0$$

Si en la ecuación punto–pendiente tomamos $P_0 = (0, b)$, el punto donde la recta corta al eje Y, se tiene que:

$$y - b = m(x-0) \Rightarrow y = mx + b$$

Esta nueva ecuación de la recta se llama ecuación **pendiente–intersección.**



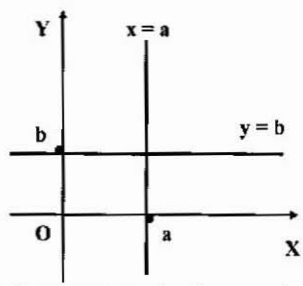
TEOREMA E.2 **Ecuación pendiente-intersección.**

Una ecuación de la recta que tiene pendiente **m** y pasa por el punto **(0, b)** es

$$\mathbf{y = mx + b}$$

RECTAS VERTICALES Y HORIZONTALES

Ninguna de las ecuaciones de la recta presentadas describe a las rectas verticales, debido a que éstas no tienen pendiente.



Supongamos que una recta vertical L corta al eje X en el punto (a, 0); es decir **a** su **abscisa en el origen.** Un punto cualquiera (x, y) está en L **si** y sólo si su abscisa es a; es decir, si x = a. Por tanto, una ecuación para esta recta vertical es: **x = a**

Por otro lado, una recta horizontal tiene pendiente m = 0, ya que cualquier par de puntos de la recta tienen la misma ordenada. Luego, reemplazando m = 0 en la ecuación punto–intersección se obtiene, para la recta horizontal, la ecuación **y = b.**

En resumen, tenemos:

1. Una ecuación de la **recta vertical** con abscisa en el origen **a** es: **x = a**

2. Una ecuación de la **recta horizontal** con ordenada en el origen **b** es: **y = b**

LA ECUACION LINEAL

Recordemos que una **ecuación lineal** en dos variables, x e y, es una ecuación de la forma

$$\mathbf{Ax + By + C = 0}, \text{ donde } \mathbf{A \neq 0} \text{ ó } \mathbf{B \neq 0}$$

Las distintas ecuaciones que hemos hallado anteriormente para las rectas, ya sean oblicuas, horizontales o verticales, son todas ecuaciones lineales. Probaremos ahora que lo recíproco también es cierto; es decir, el gráfico de una ecuación lineal es una recta. De hecho, el nombre de "ecuación lineal" está motivado por este resultado.

TEOREMA E.3 El gráfico de la ecuación lineal $\mathbf{Ax + By + C = 0}$, $\mathbf{A \neq 0}$ ó $\mathbf{B \neq 0}$ es una **recta**. Además:

1. Si $A \neq 0$ y $B \neq 0$, la recta es **oblicua.**

2. Si $A = 0$ y $B \neq 0$, la recta es **horizontal**

3. Si $A \neq 0$ y $B = 0$, la recta es **vertical.**

Demostración

Caso 1. Si $A \neq 0$ y $B \neq 0$, despejamos y: $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$

Su gráfica es una recta oblicua, ya que su pendiente $m = -\dfrac{A}{B} \neq 0$.

Caso 2. Si $A = 0$, la ecuación lineal se convierte en $By + C = 0$. De donde, despejando y obtenemos $y = -\dfrac{C}{B}$, la cual tiene por gráfica una recta horizontal.

Caso 3. Si $B = 0$, la ecuación se convierte en $Ax + C = 0$. De donde, $x = -\dfrac{C}{A}$, la cual tiene por gráfica una recta vertical.

CONVENCION. Frecuentemente, con el ánimo de simplificar, en lugar de decir "la recta que es el gráfico de la ecuación $Ax + By + C = 0$" diremos simplemente "la recta $Ax + By + C = 0$".

EJEMPLO 2. Dada la recta $L: 2x - 3y + 12 = 0$, hallar su pendiente, ordenada en el origen y abscisa en el origen. Graficarla.

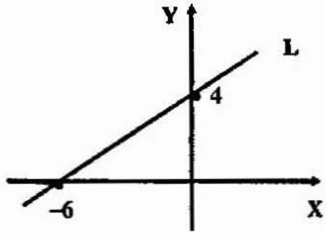
Solución

Despejamos y: $y = \dfrac{2}{3}x + 4$. Luego, la pendiente es $m = \dfrac{2}{3}$

Si en $y = \frac{2}{3}x + 4$ hacemos $x = 0$ obtenemos que $y = 4$. Luego la ordenada en el origen es 4.

Si en $2x - 3y + 12 = 0$ ó en $y = \frac{2}{3}x + 4$ hacemos $y = 0$, obtenemos que $x = -6$. Luego, la abscisa en el origen es -6.

Para graficar una recta basta conocer dos de sus puntos. De esta recta ya conocemos los puntos (0, 4) y (−6, 0), obtenidos a partir de la ordenada y la abscisa en el origen. El gráfico se obtiene trazando la recta que une estos dos puntos.



EJEMPLO 3. Sea L_1 la recta que pasa por los puntos $P_1 = (4, 6)$ y $P_2 = (5, 8)$. Hallar el punto donde L_1 intersecta la recta L_2: $x + y - 7 = 0$.

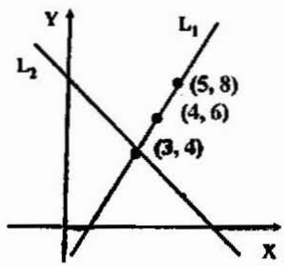
Solución

En primer lugar hallemos una ecuación de L_1. Como L_1 pasa por $P_1 = (4, 6)$ y $P_2 = (5, 8)$, tenemos:

$$y - 6 = \frac{8-6}{5-4}(x - 4) \Leftrightarrow y - 6 = 2(x - 4)$$

$$\Leftrightarrow 2x - y - 2 = 0$$

Luego, L_1: $2x - y - 2 = 0$



El punto donde L_1 y L_2 se intersectan, debe tener por coordenadas la solución común a ambas ecuaciones. Luego, debemos resolver el sistema:

$$L_1: 2x - y - 2 = 0$$
$$L_2: x + y - 7 = 0$$

La solución es $x = 3$, $y = 4$. Luego, las rectas se intersectan en el punto (3, 4).

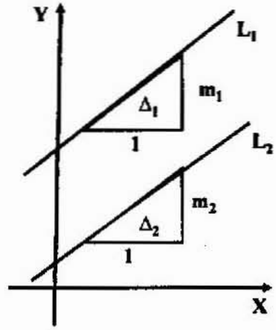
RECTAS PARALELAS

Dos rectas del plano, L_1 y L_2, son **paralelas** si no se **intersectan** o son coincidentes; es decir: L_1 y L_2 son paralelas $\Leftrightarrow L_1 \cap L_2 = \emptyset$ ó $L_1 = L_2$

La siguiente proposición traduce el paralelismo en términos de pendientes.

TEOREMA E.4 Sean L_1 y L_2 dos rectas del plano que son no verticales y tienen pendientes m_1 y m_2 respectivamente, entonces

$$L_1 \text{ y } L_2 \text{ son paralelas} \Leftrightarrow m_1 = m_2$$



Demostración

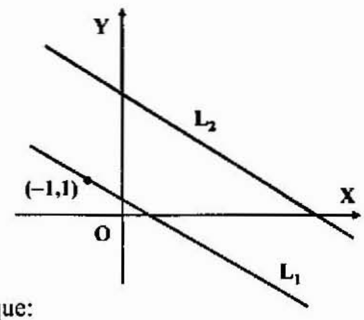
Sean Δ_1 y Δ_2 los triángulos rectángulos mostrados en la figura adjunta. Se tiene que:

$$L_1 \text{ y } L_2 \text{ son paralelas} \Leftrightarrow \Delta_1 \text{ y } \Delta_2 \text{ son congruentes}$$
$$\Leftrightarrow m_1 = m_2$$

EJEMPLO 4. Hallar una ecuación de la recta L_1 que pasa por el punto $P_1 = (-1,1)$ y es paralela a la recta L_2: $2x + 3y - 8 = 0$.

Solución

Tenemos que:



$$2x + 3y - 8 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$$

Luego, la pendiente de L_2 es $m = -\frac{2}{3}$

Como L_1 y L_2 son paralelas, por la proposición anterior, la pendiente de L_1 también es $m = -\frac{2}{3}$.

Además, como L_1 pasa por $P_1 = (-1,1)$, tenemos que:

$$L_1: y - 1 = -\frac{2}{3}(x+1) \Leftrightarrow L_1: 2x + 3y - 1 = 0$$

RECTAS PERPENDICULARES

Dos rectas en el plano son **perpendiculares** si éstas se cortan formando un ángulo recto. La siguiente proposición caracteriza la perpendicularidad de rectas en términos de las pendientes.

TEOREMA E.5 Si L_1 y L_2 son dos rectas no verticales con pendientes m_1 y m_2 respectivamente, entonces,

$$L_1 \text{ y } L_2 \text{ son perpendiculares} \Leftrightarrow m_1 m_2 = -1$$

Demostración

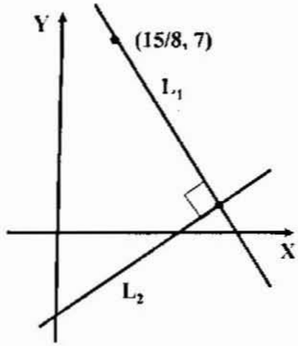
Ver el problema resuelto 2.

EJEMPLO 5. **a.** Hallar una ecuación de la recta L_1 que pasa por el punto $P_1 = (15/8, 7)$ y es perpendicular a la recta $L_2 : 3x - 4y - 12 = 0$

b. Hallar el punto donde L_1 corta a L_2.

Solución

a. Sean m_1 y m_2 las pendientes de L_1 y L_2, respectivamente. Por la proposición anterior tenemos que $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$. Pero,



L_2: $3x - 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow L_2 : y = \dfrac{3}{4}x - 3$

Luego, $m_2 = \dfrac{3}{4}$ y, por tanto,

$$m_1 = -\frac{1}{3/4} = -\frac{4}{3}$$

Como L_1 pasa por el punto $P_1 = (15/8, 7)$ y tiene pendiente $m_1 = -\dfrac{4}{3}$, aplicando la ecuación punto–pendiente, tenemos:

$$L_1: y - 7 = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{15}{8}\right) \Leftrightarrow L_1: 8x + 6y - 57 = 0$$

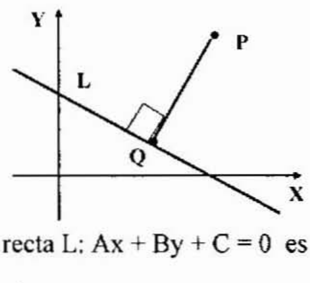
b. Resolvemos el sistema determinado por las ecuaciones de L_1 y L_2: $8x + 6y - 57 = 0$ y $3x - 4y - 12 = 0$

hallamos que $x = 6$ e $y = \dfrac{3}{2}$. Luego, las rectas se cortan en el punto $(6, 3/2)$.

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Dado un punto P y una recta L, se llama **distancia del punto P a la recta** L a la distancia de P al punto Q, donde Q es la intersección de L con la recta perpendicular a L que pasa por P. Esto es,

$$d(P, L) = d(P, Q)$$



El siguiente teorema nos proporciona una fórmula muy simple para calcular la distancia de un punto a una recta. La demostración la presentamos en el problema resuelto 3.

TEOREMA E.6 La distancia del punto $P = (x_0, y_0)$ a la recta L: $Ax + By + C = 0$ es

$$\mathbf{d(P, L)} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

EJEMPLO 6. Hallar la distancia del punto $P = (-2, 3)$ a la recta $L: 3x = 4y + 2$.

Solución

$$d(P, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3(-2) - 4(3) - 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{20}{5} = 4$$

EJEMPLO 7. Hallar la distancia entre las rectas paralelas.

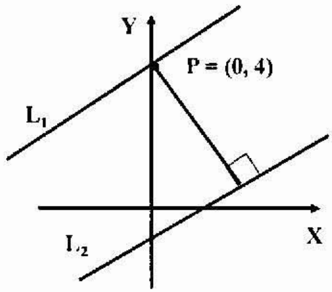
$$L_1: 2y - x - 8 = 0, \qquad L_2: 2y - x + 2 = 0$$

Solución

Se entiende que la distancia entre dos rectas paralelas es la distancia de un punto cualquiera de una de ellas a la otra recta. Consigamos un punto de la recta $L_1: 2y - x - 8 = 0$. Por ejemplo, el punto P donde L_1 corta al eje Y. Si hacemos $x = 0$, entonces $2y - 8 = 0$ y, por tanto, $y = 4$. Luego $P = (0, 4)$.

Ahora:

$$d(L_1, L_2) = d(P, L_2) = \frac{|2(4) - 0 + 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$



PROBLEMAS RESUELTOS E

PROBLEMA 1. Hallar una ecuación de la recta que es perpendicular a la recta

$$L: 3y - 4x - 15 = 0$$

y que forma con los ejes coordenados un triángulo de área igual a 6.

Solución

La pendiente de la recta $L: 3y - 4x - 15 = 0$ es $m_1 = \frac{4}{3}$. Luego, la pendiente de la recta buscada es,

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{4/3} = -\frac{3}{4}$$

y, por tanto, esta recta tiene por ecuación:

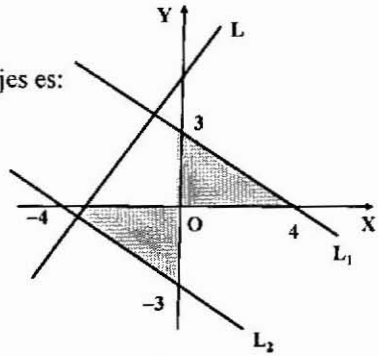
$$y = -\frac{3}{4}x + b \qquad (1)$$

Sea $(a, 0)$ el punto donde esta recta corta al eje X.

Reemplazando estos valores en la ecuación anterior:

$$0 = -\frac{3}{4}a + b \Rightarrow a = \frac{4}{3}b \qquad \textbf{(2)}$$

El área del triángulo formado por la recta y los ejes es:



$$\frac{|a||b|}{2} = 6 \iff |ab| = 12$$

Reemplazando (2) en esta última igualdad:

$$|ab| = 12 \iff \left|\frac{4}{3}bb\right| = 12 \iff b^2 = 9$$

$$\iff b = \pm 3$$

Reemplazando $b = 3$ y $b = -3$ en la ecuación (1) encontramos dos respuestas:

$$L_1: y = -\frac{3}{4}x + 3 \quad ó \quad L_2: y = -\frac{3}{4}x - 3$$

PROBLEMA 2. Si L_1 y L_2 son dos rectas no verticales con pendiente m_1 y m_2, respectivamente. Probar que:

$$L_1 \text{ y } L_2 \text{ son perpendiculares} \iff m_1m_2 = -1$$

Solución

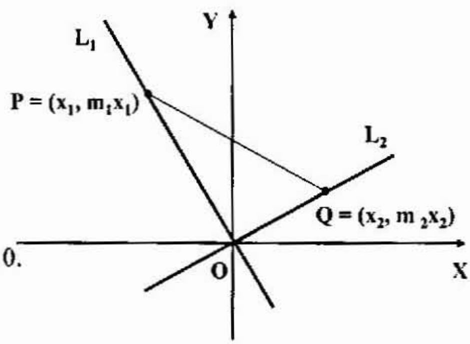
Como la perpendicularidad permanece invariante por traslaciones, podemos suponer que estas dos rectas se intersectan en el origen.

Las ecuaciones pendiente–intersección de estas rectas son:

$$L_1: y = m_1x \ , \quad L_2: y = m_2x$$

Sea $P = (x_1, m_1x_1)$ un punto de L_1 y

$Q = (x_2, m_2x_2)$ un punto de L_2, tales que ninguno de ellos es el origen.



Luego, $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ y, por tanto, $x_1x_2 \neq 0$.

De acuerdo al teorema de Pitágoras:

L_1 y L_2 son perpendiculares $\iff \Delta POQ$ es rectángulo

$$\iff d(P, Q)^2 = d(O, P)^2 + d(O, Q)^2$$

Pero,

$$d(P, Q)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (m_2x_2 - m_1x_1)^2$$

$$= x_2^2 - 2x_2x_1 + x_1^2 + (m_2x_2)^2 - 2m_2m_1x_2x_1 + (m_1x_1)^2$$

$$d(O,P)^2 = x_1^2 + (m_1x_1)^2 \quad y \quad d(O,Q)^2 = x_2^2 + (m_2x_2)^2$$

Luego,

L_1 y L_2 son perpendiculares $\Leftrightarrow$

$$x_2^2 - 2x_2x_1 + x_1^2 + (m_2x_2)^2 - 2m_2m_1x_2x_1 + (m_1x_1)^2 = x_1^2 + (m_1x_1)^2 + x_2^2 + (m_2x_2)^2$$

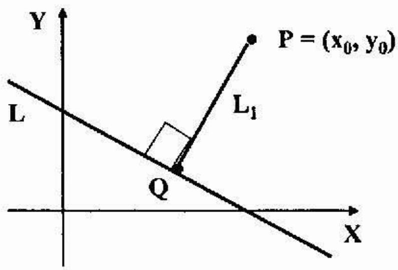
$$\Leftrightarrow \ -2x_2x_1 - 2m_2m_1x_2x_1 = 0 \Leftrightarrow -2x_2x_1(1 + m_2m_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ 1 + m_2m_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m_2m_1 = -1$$

PROBLEMA 3. Probar que la distancia del punto $P_0 = (x_0, y_0)$ a la recta L: $Ax + By + C = 0$, es

$$d(P, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Solución



Sea L_1 la recta perpendicular a L y que pasa por el punto $P = (x_0, y_0)$.

La pendiente de L es $m = -\dfrac{A}{B}$ y,

por tanto, la pendiente de L_1 es $m_1 = \dfrac{B}{A}$

La ecuación punto pendiente de L_1 es

$$y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0) \Leftrightarrow \ Ay - Bx + (Bx_0 - Ay_0) = 0$$

Hallemos el punto Q donde se intersectan las rectas perpendiculares L y L_1. Para esto resolvemos el sistema:

$$(1) \quad Ax + By + C = 0\,, \qquad (2) \quad Ay - Bx + (Bx_0 - Ay_0) = 0$$

El resultado es $Q = \left(\dfrac{B^2x_0 - ABy_0 - AC}{A^2 + B^2}, \dfrac{A^2y_0 - ABx_0 - BC}{A^2 + B^2} \right)$

Ahora,

$$d(P,L)^2 = d(P,Q)^2 = \left(\frac{B^2x_0 - ABy_0 - AC}{A^2 + B^2} - x_0 \right)^2 + \left(\frac{A^2y_0 - ABx_0 - BC}{A^2 + B^2} - y_0 \right)^2$$

$$= \left(\frac{-A}{A^2 + B^2} \right)^2 \left(Ax_0 + By_0 + C \right)^2 + \left(\frac{-B}{A^2 + B^2} \right)^2 \left(Ax_0 + By_0 + C \right)^2$$

$$= \frac{A^2+B^2}{(A^2+B^2)^2}\left(Ax_0+Bx_0+C\right)^2 = \frac{1}{A^2+B^2}\left(Ax_0+Bx_0+C\right)^2$$

Extrayendo raíz cuadrada,

$$d(P, L) = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS E

1. Usando pendientes probar que los puntos $A = (2, 1)$, $B = (-4, -2)$, $C = (1, 1/2)$ son colineales.

En los problemas del 2 al 9, hallar una ecuación de la recta que satisface las condiciones dadas y llevarla a la forma $y = mx + b$.

2. Pasa por el punto $(1, 3)$ y tiene pendiente 5.

3. Tiene pendiente -3 y pasa por el origen.

4. Pasa por los puntos $(1, 1)$ y $(2, 3)$.

5. Intersecta al eje X en 5 y al eje Y en 2.

6. Pasa por el punto $(1, 3)$ y es paralela a la recta $5y + 3x - 6 = 0$.

7. Pasa por el punto $(4, 3)$ y es perpendicular a la recta $5x + y - 2 = 0$.

8. Es paralela a $2y + 4x - 5 = 0$ y pasa por el punto de intersección de las rectas
$5x + y = 4$, $2x + 5y - 3 = 0$.

9. Intersecta a los ejes coordenados a igual distancia del origen y pasa por $(8, -6)$.

10. Dada la recta $L: 2y - 4x - 7 = 0$

a. Encontrar la recta que pasa por el punto $P = (1, 1)$ y es perpendicular a L.

b. Hallar la distancia del punto $P = (1, 1)$ a la recta L.

11. Usando pendientes probar que los puntos $A = (3, 1)$, $B = (6, 0)$ y $C = (4, 4)$ son los vértices de un triángulo rectángulo. Hallar el área de dicho triángulo.

12. Determinar cuáles de las siguientes rectas son paralelas y cuáles son perpendiculares:

a. L_1: $2x + 5y - 6 = 0$, **b.** L_2: $4x + 3y - 6 = 0$ **c.** L_3: $-5x + 2y - 8 = 0$

d. L_4: $5x + y - 3 = 0$ **e.** L_5: $4x + 3y - 9 = 0$ **f.** L_6: $-x + 5y - 20 = 0$

13. Hallar la mediatriz de cada uno de los siguientes segmentos de extremos

a. $(1, 0)$ y $(2, -3)$ **b.** $(-1, 2)$ y $(3, 10)$ **c.** $(-2, 3)$ y $(-2, -1)$

14. Los extremos de una de las diagonales de un rombo son $(2, -1)$ y $(14, 3)$. Hallar una ecuación de la recta que contiene a la otra diagonal. Sugerencia: las diagonales de un rombo son perpendiculares.

15. Hallar la distancia del origen a la recta $4x + 3y - 15 = 0$.

16. Hallar la distancia del punto $(0, -3)$ a la recta $5x - 12y - 10 = 0$.

17. Hallar la distancia del punto $(1, -2)$ a la recta $x - 3y = 5$.

18. Hallar la distancia entre las rectas paralelas $3x - 4y = 0$, $3x - 4y = 10$.

19. Hallar la distancia entre las rectas paralelas $3x - y + 1 = 0$, $3x - y + 9 = 0$.

20. Hallar la distancia de $Q = (6, -3)$ a la recta que pasa por $P = (-4, 1)$ y es paralela a la recta $4x + 3y = 0$

21. Determinar el valor de C en la recta L: $4x + 3y + C = 0$ sabiendo que la distancia del punto $Q = (5, 9)$ a L es 4 veces la distancia del punto $P = (-3, 3)$ a L.

22. Hallar las rectas paralelas a la recta $5x + 12y - 12 = 0$ y que distan 4 unidades de ésta.

23. Hallar la ecuación de la recta que pasando por el punto $P = (8, 6)$ intersecta a los ejes coordenados formando un triángulo de área 12 unidades cuadradas.

24. Determinar para que valores de k y de n las rectas:

$$kx - 2y - 3 = 0, \qquad 6x - 4y - n = 0$$

a. Se intersectan en un único punto. **b**. son perpendiculares
c. son paralelas no coincidentes **d.** son coincidentes.

25. Determinar para qué valores de k y de n las rectas:

$$kx + 8y + n = 0 \ , \ 2x + ky - 1 = 0$$

a. son paralelas no coincidentes **b**. son coincidentes. **c.** son perpendiculares

26. Un cuadrado tiene por centro $C = (1, -1)$ y uno de sus lados está en la recta $x - 2y = -12$. Hallar las ecuaciones de las rectas que contienen a los otros lados.

27. Probar que los puntos $A = (1, 4)$, $B = (5, 1)$, $C = (8, 5)$ y $D = (4, 8)$ son los vértices de un rombo (cuadrilátero de lados de igual longitud). Verifique que las diagonales se cortan perpendicularmente.

28. Sean a y b la abscisa en el origen y la ordenada en el origen de una recta.

Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, probar que una ecuación de esta recta es $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

APENDICE F

CIRCUNFERENCIA, PARABOLA, ELIPSE E HIPERBOLA

Nuestra intención en la presente sección es hacer una breve presentación de circunferencia, parábola, elipse e hipérbola. A estas tres últimas curvas las presentamos como gráficas de ciertas ecuaciones de segundo grado en dos variables. Para un estudio más exhaustivo se procede a partir de las propiedades geométricas de cada curva. Esto corresponde a un curso posterior.

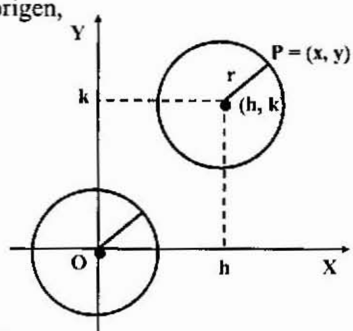
LA CIRCUNFERENCIA

TEOREMA F.1 La **circunferencia** de centro $\mathbf{C = (h, k)}$ y radio $\mathbf{r}$ tiene por ecuación:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

En particular, si el centro es el origen,

$$x^2+y^2=r^2$$



Demostración

$P = (x, y)$ está en la circunferencia $\Leftrightarrow$

$$d(P, C) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r$$

$$\Leftrightarrow (x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

Observar que la circunferencia

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

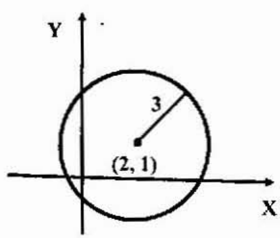
puede ser vista como la circunferencia $x^2+y^2=r^2$ a la cual le hemos aplicado la traslación que lleva el origen $(0, 0)$ al punto (h, k).

EJEMPLO 1. Hallar una ecuación de la circunferencia de centro $(2, 1)$ y radio 3

Solución

Por la proposición anterior, una ecuación de esta circunferencia es:

$$(x-2)^2+(y-1)^2=3^2$$



Esta ecuación también podemos presentarla desarrollando los cuadrados y simplificando. Esto es,

$$x^2+y^2-4x-2y-4=0$$

LA PARABOLA

Llamaremos **parábola al** gráfico de cualquiera de las dos ecuaciones siguientes, donde a, b y c son constantes con $a \neq 0$.

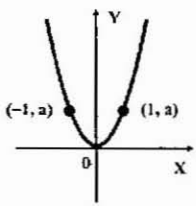
$$(1) \quad y = ax^2 + bx + c \qquad\qquad (2) \quad x = ay^2 + by + c$$

Las parábolas más simples, y de las cuales se pueden obtener todas las otras mediante traslaciones y reflexiones en la diagonal principal, son las parábolas que tienen por ecuación

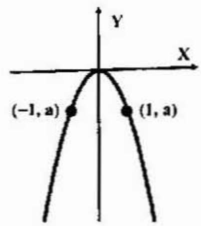
$$(3) \quad y = ax^2,\ a \neq 0$$

La parábola se abre hacia arriba o hacia abajo según $a > 0$ o $a < 0$

$y = ax^2,\ a > 0$



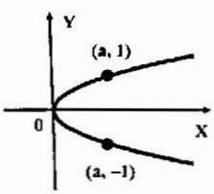
$y = ax^2,\ a < 0$



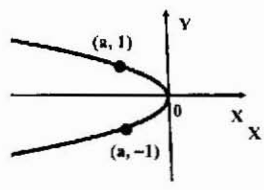
Si en la ecuación $y = ax^2$ intercambiamos las variables x e y, obtenemos las parábolas

$$(4) \quad x = ay^2$$

Esta parábolas, de acuerdo al criterio de inversión, se obtienen a partir de las anteriores, reflejando en la diagonal principal.



$x = ay^2,\ a > 0$



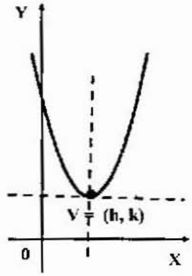
$x = ay^2,\ a < 0$

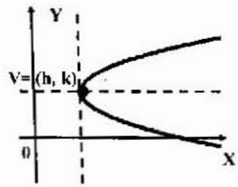
La parábola es una curva simétrica. Se llama **vértice** de la parábola al punto donde el eje de simetría corta a la parábola. En los casos anteriores, el vértice es el origen $O = (0, 0)$.

PARABOLAS TRASLADADAS

Las ecuaciones iniciales (1) $y = ax^2 + bx + c$ y (2) $x = ay^2 + by + c$, completando cuadrados y transponiendo términos, se trasformas en las siguientes ecuaciones, que nos muestran que cualquier parábola es una traslación de una parábola de tipo (3) o de tipo (4)

$y - k = a(x - h)^2$ $\qquad\qquad$ $x - h = a(y - k)^2$



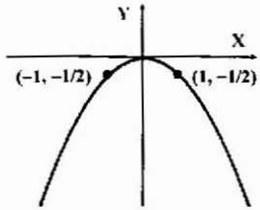


EJEMPLO 2. Graficar las siguientes parábolas:

a. $y = -\dfrac{1}{2}x^2$ $\qquad$ **b.** $2y = -x^2 - 2x + 5$

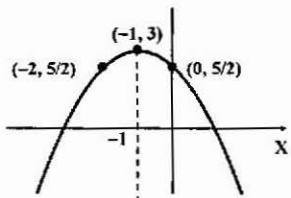
Solución

a. El gráfico de $y = -\dfrac{1}{2}x^2$ es una parábola con vértice en el origen. Como $a = -1/2 < 0$, la parábola se abre hacia abajo.
Para $x = 1$ ó $x = -1$, obtenemos $y = -1/2$
Luego, la curva pasa por los puntos
$(-1, -1/2)$ y $(1, -1/2)$.



b. Completamos cuadrados:

$$2y = -x^2 - 2x + 5 \iff$$
$$2y = -(x^2 + 2x + 1) + 1 + 5 \iff$$
$$y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 3 \iff$$
$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x+1)^2$$



En consecuencia, la gráfica de $2y = -x^2 - 2x + 5$ se obtiene de la gráfica de $y = -\dfrac{1}{2}x^2$ mediante la traslación que lleva el origen al punto $(-1, 3)$.

EJEMPLO 3. Bosquejar la región del plano encerrada por la recta $y = x - 4$ y la parábola $x = y^2 - 2y$

Solución

Completando cuadrados en la parábola:

$$x = y^2 - 2y \iff x = (y^2 - 2y + 1) - 1 \iff x - (-1) = (y - 1)^2$$

La parábola se abre hacia la derecha y su vértice es $(-1, -1)$

Hallemos los puntos de intersección de la parábola y la recta:

En primer lugar: $y = x - 4 \iff x = y + 4$

Igualando las ecuaciones $x = y^2 - 2y$ y $x = y + 4$ tenemos:

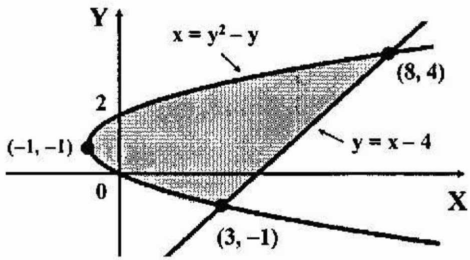
$y^2 - 2y = y + 4 \iff$

$y^2 - 3y - 4 = 0$

$(y - 4)(y + 1) = 0$

$y = 4$ ó $y = -1$

Luego, la curvas se intersectan en los puntos $(8, 4)$ y $(3, -1)$



La región indicada es la sombreada.

LA ELIPSE

Llamaremos **elipse en posición normal** al gráfico de la siguiente ecuación:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

donde **a** y **b** son dos números positivos. A esta ecuación llamaremos **ecuación normal** de la elipse con **centro en origen.**

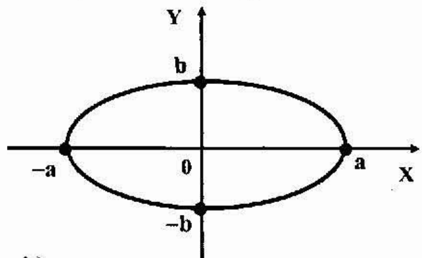
Esta ecuación no se altera si cambiamos x por $-x$ ó y por $-y$. Esto significa que la elipse es simétrica respecto a eje X, al eje Y y, por tanto, también al origen.

Hallemos las intersecciones con los ejes:

$y = 0 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = a$ ó $x = -a$.

Luego, la curva intersecta al eje X en $(a, 0)$ y $(-a, 0)$.

$x = 0 \Rightarrow y^2 = b^2 \Rightarrow y = b$ ó $y = -b$.



Luego, la curva intersecta al eje Y en $(0, b)$ y $(0, -b)$.

Por ser la elipse en posición normal simétrica respecto al **origen,** diremos que éste es su **centro**.

EJEMPLO 4. Identificar y bosquejar el gráfico de la ecuación:

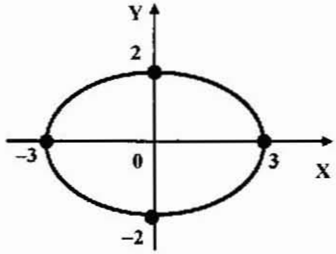
$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

Solución

1. Dividimos ambos lados de la ecuación entre 36:

$$\frac{4x^2}{36}+\frac{9y^2}{36}=\frac{36}{36}\Rightarrow \frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$$

Vemos que se trata de una elipse en posición normal con centro en el origen. Además, tenemos que **a = 3** y **b = 2.** Esto significa que corta al eje X en los puntos (–3, 0) y (3, 0), y al eje Y en (0, –2) y (0, 2).



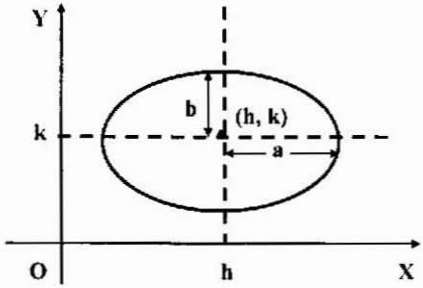
ELIPSE TRASLADADA

Si aplicamos la traslación que lleva el origen de coordenadas al punto (h, k), de acuerdo al criterio de traslación, la gráfica de la ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

es la elipse correspondiente a la primera ecuación, trasladada al punto (h, k).

A esta ecuación la llamaremos **ecuación normal** de la elipse con **centro en (h, k).**



EJEMPLO 5. Identificar y bosquejar el gráfico de la ecuación:

$$4x^2+9y^2+16x+18y-11=0$$

Solución

Completamos cuadrados:

$$4x^2+9y^2+16x+18y-11=0 \quad\Rightarrow$$

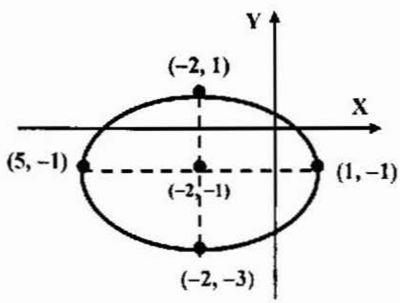
$$(4x^2+16x)+(9y^2+18y)-11=0 \quad\Rightarrow$$

$$4(x^2+4x)+9(y^2+2y)-11=0 \quad\Rightarrow$$

$$4(x+2)^2+9(y+1)^2=36$$

Dividiendo entre 36 y simplificando,

$$\frac{(x+2)^2}{3^2}+\frac{(y+1)^2}{2^2}=1$$

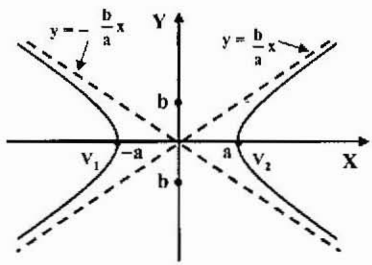


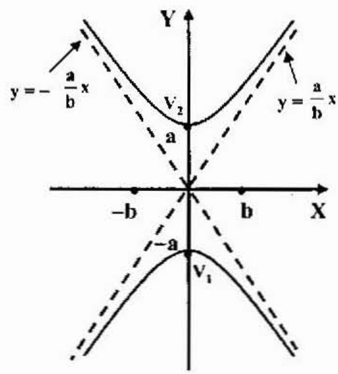
Esta ecuación es la ecuación normal de una elipse con centro en (–2, –1). Comparando esta ecuación con ecuación de la elipse del ejemplo anterior, deducimos que esta nueva elipse se obtiene de la anterior, mediante la traslación que lleva el origen al punto (–2, –1).

LA HIPERBOLA

Llamaremos **hipérbola** en **posición normal** al gráfico de cualquiera de las dos ecuaciones siguientes, donde **a** y **b** son dos constantes positivas. A estas ecuaciones las llamaremos **ecuación normales** de la hipérbola con **centro en origen.**

(1) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (2) $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$





Analicemos cada una de estas ecuaciones:

1. La ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ no se altera si se cambia x por −x ó y por −y.

Luego, esta hipérbola es simétrica respecto a los dos ejes y al origen.

Esta hipérbola intersecta al eje X. En efecto:

$$y = 0 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = a \text{ ó } x = -a.$$

Estos puntos de intersección:

$$V_1 = (-a, 0) \text{ y } V_2 = (a, 0),$$

son los **vértices** de la hipérbola.

Esta hipérbola no intersecta al eje Y. En efecto: $x = 0 \Rightarrow y^2 = -b^2$, pero esta última ecuación no tiene soluciones reales.

De (1) obtenemos:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq a^2 \Rightarrow |x| \geq a \Rightarrow x \geq a \text{ ó } x \leq -a$$

Esto quiere decir que la hipérbola se compone de dos partes, a las que se les llama **ramas**.

Se llaman **asíntotas** de esta hipérbola a las rectas:

$$y = \frac{b}{a}x, \qquad y = -\frac{b}{a}x,$$

Estas rectas se obtienen igualando a 0 el primer miembro de la izquierda de la ecuación de la hipérbola. Así:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \text{ ó } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \Rightarrow y = \frac{b}{a}x \text{ ó } y = -\frac{b}{a}x.$$

Las asíntotas tienen la particularidad de que ambas ramas de la hipérbola se van aproximando cada vez más a ellas, a medida que nos alejamos del origen.

Para graficar la hipérbola se recomienda trazar las asíntotas primero.

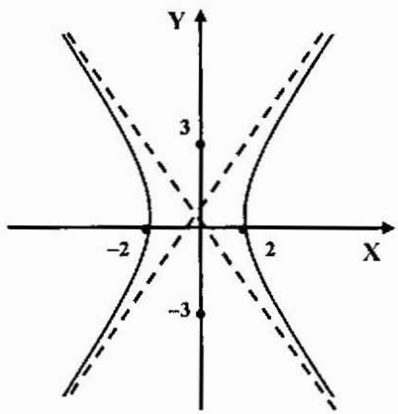
2. Para la ecuación (2), $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, podríamos hacer una discusión como la anterior. Este trabajo lo ahorramos observando que esta ecuación se puede obtener de la (1) intercambiando la x por la y. Esto significa que la hipérbola correspondiente a (2) se obtiene reflejando en la diagonal principal la hipérbola correspondiente a (1). Para esta hipérbola se tiene:

Vértices: $V_1 = (0, -a)$, $V_2 = (0, a)$. **Asíntotas:** $y = \frac{a}{b}x$, $y = -\frac{a}{b}x$

EJEMPLO 6. Identificar y bosquejar la gráfica de las ecuaciones siguientes:

a. $9x^2 - 4y^2 = 36$ **b.** $16y^2 - 9x^2 = 144$

Solución



a. Dividiendo (1) entre 36 obtenemos:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Es una hipérbola en posición normal y centro en el origen.

Vértices:

$y = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = -2$ ó $x = 2$.

Luego, $V_1 = (-2, 0)$ y $V_2 = (2, 0)$

Asíntotas:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right) = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x \text{ ó } y = -\frac{3}{2}x.$$

b. Dividiendo (2) entre 144 obtenemos $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

Es una hipérbola en posición normal y centro en el origen.

Vértices:

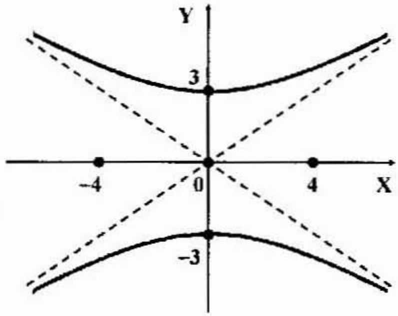
$x = 0 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = -3$ ó $y = 3$.

Luego, $V_1 = (0, -3)$ y $V_2 = (0, 3)$

Asíntotas:

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 0 \Rightarrow \left(\frac{y}{3} - \frac{x}{4}\right)\left(\frac{y}{3} + \frac{x}{4}\right) = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{4}x \text{ ó } y = -\frac{3}{4}x.$$



HIPERBOLA TRASLADADA

Si aplicamos la traslación que lleva el origen de coordenadas al punto (h, k), de acuerdo al criterio de traslación, las gráficas de las ecuaciones siguientes son hipérbolas con centro en (h, k). A estas nuevas ecuaciones las llamaremos ecuaciones normales de **normales con centro en (h, k)**.

$$(3) \quad \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad (4) \quad \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

EJEMPLO 4. Identificar y bosquejar el gráfico de la ecuación

$$16y^2 - 9x^2 + 32y + 36x - 164 = 0$$

Solución

Completamos cuadrados:

$$16y^2 - 9x^2 + 32y + 36x - 164 = 0 \Rightarrow 16(y+1)^2 - 9(x-2)^2 = 144$$

$$\Rightarrow \frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{16} = 1$$

Comparando esta ecuación con la ecuación normal de la hipérbola del ejemplo anterior parte b, deducimos que esta nueva hipérbola se obtiene de la anterior, mediante la traslación que lleva el origen al punto (2, –1). Además, tenemos:

Vértices:

$V_1 = (2, -3 - 1) = (2, -4)$, $V_2 = (2, 3 - 1) = (2, 2)$

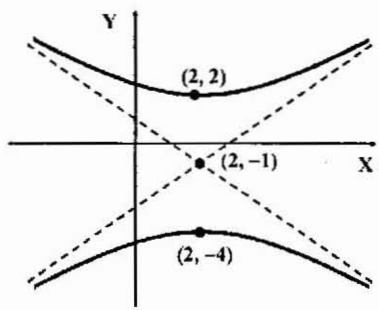
Asíntotas:

$$\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{16} = 0 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{y+1}{3} - \frac{x-2}{4}\right]\left[\frac{y+1}{3} + \frac{x-2}{4}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$y + 1 = \frac{3}{4}(x-2), \quad y + 1 = -\frac{3}{4}(x-2) \Rightarrow$$

$$4y - 3x + 10 = 0, \quad 4y + 3x - 2 = 0$$



PROBLEMAS PROPUESTOS F

En los problemas del 1 al 9 hallar una ecuación de la circunferencia que satisface las condiciones dadas.

1. Centro $(2, -1)$; $r = 5$

2. Centro $(-3, 2)$; $r = \sqrt{5}$

3. Centro el origen y pasa por $(-3, 4)$

4. Centro $(1, -1)$ y pasa por $(6, 4)$

5. Centro $(1, -3)$ y es tangente al eje X

6. Centro $(-4, 1)$ y es tangente al eje Y

7. Tiene un diámetro de extremos $(2, 4)$ y $(4, -2)$

8. De radio $r = 1$ y pasa por $(1, 1)$ y $(1, -1)$

9. Pasa por los puntos $(0, 0)$, $(0, 8)$ y $(6, 0)$

En los problemas del 10 al 15 probar que la ecuación dada representa una circunferencia, hallando su centro y su radio.

10. $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

11. $x^2 + y^2 + 4y - 4 = 0$

12. $x^2 + y^2 + y = 0$

13. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

14. $2x^2 + 2y^2 - x + y - 1 = 0$

15. $16x^2 + 16y^2 - 48x - 16y - 41 = 0$

Identificar y bosquejar el gráfico de cada una de las siguientes ecuaciones. Además, si se trata de una parábola hallar su vértice y si es una hipérbola hallar sus vértices y asíntotas.

16. $y = 9x^2$

17. $x = 2y^2$

18. $x^2 = -8y$

19. $3y = 5x^2$

20. $x^2 + 4y^2 = 16$

21. $y^2 - x^2 = 1$

22. $9x^2 - y^2 = 9$

23. $y - x^2 = 9$

24. $y^2 = 10 - 20x$

25. $16x^2 - 25y^2 = 400$

26. $4x^2 + 4y^2 = 9$

27. $4y^2 + 4y + 4x + 1 = 0$

28. $16x^2 + 9y^2 - 36y = 108$

29. $9x^2 - y^2 + 54x + 10y + 55 = 0$

30. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$

31. $4x^2 + 9y^2 - 8x - 18y + 13 = 0$

32. $y^2 - x^2 - 2y - 2x + 1 = 0$

APENDICE G

TRIGONOMETRIA

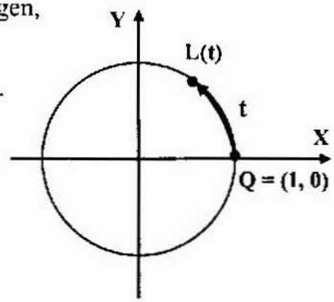
FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

Sea **C** la circunferencia unitaria de centro en el origen,

$$x^2 + y^2 = 1,$$

a la que llamaremos **Circunferencia Trigonométrica**.



En primer lugar definimos una función:

$$L: \mathbb{R} \to C.$$

Para esto fijamos el punto **Q = (1, 0)**, el que será nuestro punto de referencia. Sea $t \in \mathbb{R}$. Si $t = 0$, entonces

$$\mathbf{L(0) = Q = (1, 0)}$$

Si $t > 0$ comenzando en el punto **Q = (1, 0)**, nos movemos sobre la circunferencia **C** en sentido antihorario hasta formar un arco de longitud t. El punto final de este arco es L(t). Si $t < 0$, comenzando en el mismo punto **Q = (1,0)**, nos movemos sobre la circunferencia en sentido horario hasta formar un arco de longitud $|t|$. El punto final de éste es L(t). Así,

$$L(\pi/2) = (0, 1) \quad \text{y} \quad L(-\pi/2) = (0, -1)$$

Considerando que la longitud de **C** es 2π, se tiene que:

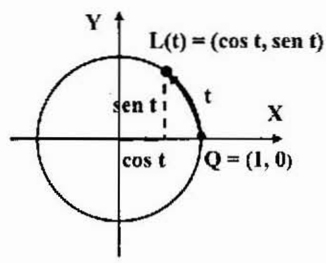
$$\mathbf{L(t + 2\pi) = L(t)}, \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Además, 2π es el menor número positivo que cumple esta igualdad. Es decir, L es periódica con periodo 2π. En general, una función f es **periódica,** si existe un número real $k > 0$ tal que:

$$\mathbf{f(t + k) = f(t)}, \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

El **menor número k** que cumple esta condición es el **período** de la función.

DEFINICION. Llamamos **función seno** y **función coseno** a las funciones:



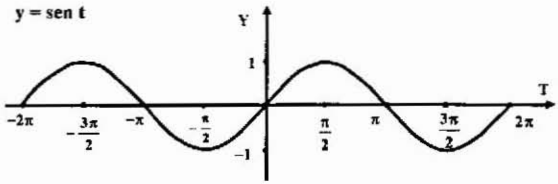
sen: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, **sen(t) = ordenada de L(t)**

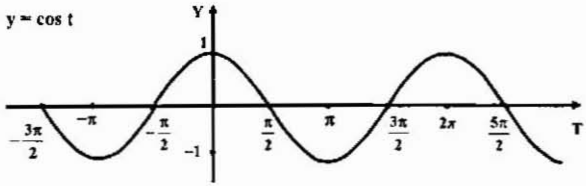
cos: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, **cos(t) = abscisa de L(t)**

Es decir,

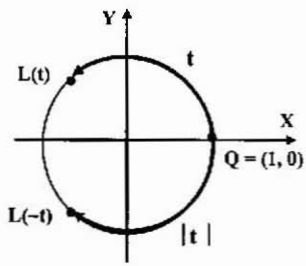
$$\mathbf{L(t) = (cos(t), sen(t))}$$

Escribiremos cos t y sen t, en lugar de cos(t) y sen(t)





TEOREMA G.1 Para cualquier número real t se cumple:



1. $\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t$, $\cos(t + 2\pi) = \cos t$
2. $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$, $\cos(-t) = \cos t$
3. $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$, $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \operatorname{sen} t$
4. $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$
5. $|\operatorname{sen} t| \leq 1$, $|\cos t| \leq 1$

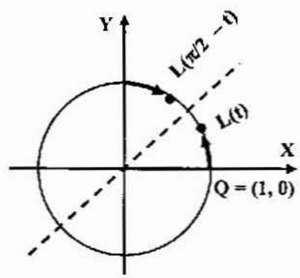
Demostración

1. Esta propiedad es consecuencia directa de la periodicidad de la función L.

2. Esta identidad es consecuencia de que los puntos

$L(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ y $L(-t) = (\cos(-t), \operatorname{sen}(-t))$

son simétricos respecto al eje X (figura anterior).



3. Los puntos:

$L(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ y

$L(\pi/2 - t) = (\cos(\pi/2 - t), \operatorname{sen}(\pi/2 - t))$

son simétricos respecto a la diagonal $y = x$, por tanto, sus coordenadas se intercambian.

4. El punto $L(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ está en la circunferencia trigonométrica. Por lo tanto, se tiene que:

$$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

5. Como $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, se tiene que $\operatorname{sen}^2 t \leq 1$ y $\cos^2 t \leq 1$. Extrayendo raíz cuadrada a estas dos desigualdades obtenemos lo deseado.

La propiedad (1) nos dice que las funciones seno y coseno son periódicas. Se puede probar que el periodo es 2π. La propiedad (2) nos dice que el seno es una función impar y que el coseno es par.

EJEMPLO 1. Hallar todos los $t \in \mathbb{R}$ tales que:

1. $\operatorname{sen} t = 0$. **2.** $\cos t = 0$.

Solución

1. $\operatorname{sen} t = 0 \Leftrightarrow L(t) = (1, 0)$ ó $L(t) = (-1, 0)$

$\Leftrightarrow t = 2n\pi$ ó $t = \pi + 2n\pi,\ \forall n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = n\pi,\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

2. $\cos t = 0 \Leftrightarrow L(t) = (0, 1)$ ó $L(t) = (0, -1)$

$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ ó $t = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi,\ \forall n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

LAS OTRAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Las restantes funciones trigonométricas: **tangente, cotangente, secante** y **cosecante**, a las que abreviamos con **tan, cot, sec y cosec**, respectivamente, las definimos en términos de las funciones seno y coseno.

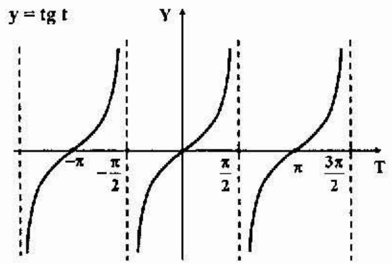
DEFINICION. **a.** $\tan t = \dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$ **b.** $\cot t = \dfrac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$

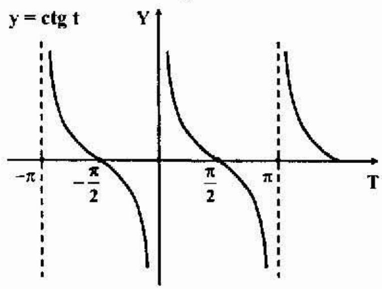
c. $\sec t = \dfrac{1}{\cos t}$ **d.** $\operatorname{cosec} t = \dfrac{1}{\operatorname{sen} t}$

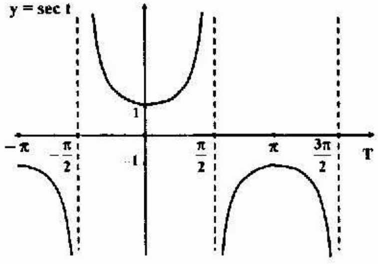
De acuerdo a los resultados del ejemplo anterior tenemos que:

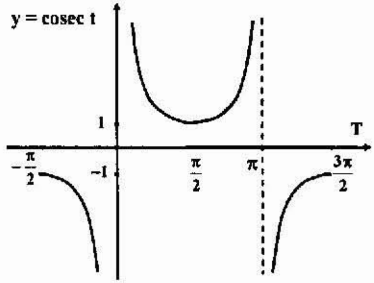
1. $\text{Dom}(\tan) = \text{Dom}(\sec) = \{ t \in \mathbb{R} / t \neq \pi/2 + n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \}$

2. $\text{Dom}(\cot) = \text{Dom}(\operatorname{cosec}) = \{ t \in \mathbb{R} / t \neq n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \}$









EJEMPLO 2. Hallar el valor que toman las funciones trigonométricas en $t = -9\pi$.

Solución

Tenemos que $L(-9\pi) = L(-\pi + 2(-4)\pi) = L(-\pi) = (-1, 0)$.
Luego,

a. $\operatorname{sen}(-9\pi) = 0$ **b.** $\cos(-9\pi) = -1$ **c.** $\tan(-9\pi) = \dfrac{\operatorname{sen}(-9\pi)}{\cos(-9\pi)} = \dfrac{0}{-1} = 0$

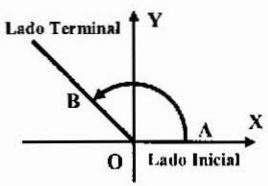
d. $\cot(-9\pi)$ no está definida **e.** $\sec(-9\pi) = \dfrac{1}{\cos(-9\pi)} = \dfrac{1}{-1} = -1$

f. $\operatorname{cosec}(-9\pi)$ no está definida

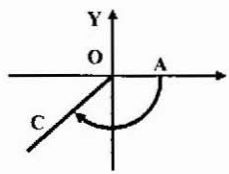
ANGULOS ORIENTADOS

Diremos que un ángulo está en **posición normal** si su vértice coincide con el origen del sistema de coordenadas y uno de sus lados, al que llamaremos **lado inicial**, coincide con el semieje positivo de las X. El otro lado es el **lado terminal.** La figura adjunta muestra al ángulo AOB en posición normal. El lado inicial es OA y OB es el lado terminal.

Angulo Positivo



Angulo Negativo



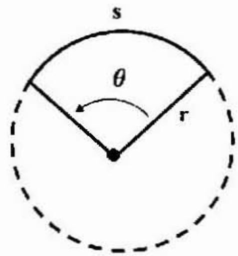
El concepto de ángulo dado en Geometría no es satisfactorio para el Cálculo. Es necesario que a cada ángulo le asignemos además una rotación y obtener, de este modo, un **ángulo orientado**. Así, el ángulo orientado AOB se obtiene por la rotación del lado inicial OA hasta el lado terminal OB. Un ángulo orientado es **positivo** si la rotación es antihoraria (contraria a las agujas del reloj) y es **negativo** si la rotación es horaria. El ángulo orientado AOB adjunto es positivo, mientras que el ángulo AOC es negativo. El punto A del lado inicial, al rotar describe un arco que tiene cierta longitud. Convenimos en considerar esta longitud positiva si la rotación es antihoraria, y negativa si la rotación es horaria.

Es claro que para un ángulo cualquiera existe otro ángulo en posición normal al cual es congruente. Por esta razón, no perderemos generalidad si nos concentramos en estudiar los ángulos en posición normal.

Los ángulos se miden en grados o en radianes (rad.). En el Cálculo se simplifican las fórmulas si se trabaja con radianes. Por esta razón el Cálculo adopta este tipo de medida.

DEFINICION. Si un ángulo central (con vértice en el centro) subtiende un arco de longitud s sobre una circunferencia de radio r, entonces el ángulo mide

$$\theta = \frac{s}{r} \textbf{ radianes} \qquad \textbf{(1)}$$



Si un ángulo subtiende un arco igual a la circunferencia completa, entonces el ángulo mide:

$$\frac{2\pi r}{r} \text{ radianes} = 2\pi \text{ rad.}$$

Luego, $360° = 2\pi$ rad. ó, simplemente,

$$\mathbf{180° = \pi \ rad.} \qquad \textbf{(2)}$$

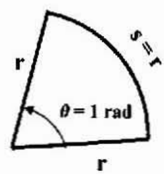
De donde

$$\textbf{(3)} \quad 1° = \frac{\pi}{180} \textbf{ rad.} \approx \textbf{0,017 rads.} \qquad \textbf{(4)} \quad \textbf{1 rad.} = \frac{180°}{\pi} \approx \textbf{57,3°}$$

Para tener una idea geométrica de un ángulo de 1 rad. tomemos un ángulo central θ que subtiende un arco de longitud igual a un radio.

Se tiene, por (1),

$$\theta = \frac{r}{r} = 1 \text{ rad.}$$



Es decir, un ángulo mide 1 rad. si éste subtiende un arco de longitud igual al radio.

EJEMPLO 3. Hallar la longitud del arco subtendido por un ángulo central de $\theta = 1{,}8$ radianes en una circunferencia de 12 cm. de radio.

Solución

$$s = \theta r = 1{,}8(12 \text{ cm.}) = 21{,}6 \text{ cm.}$$

Usaremos (3) y (4) para convertir grados en radianes y radianes en grados, respectivamente.

EJEMPLO 4. Expresar:

a. 60° en radianes **b.** $-\frac{5}{2}\pi$ radianes en grados

Solución

a. $60° = 60\left(\frac{\pi}{180} \text{rad}\right) = \frac{\pi}{3} \text{rad}$ **b.** $-\frac{5}{2}\pi \text{ rad} = -\frac{5}{2}\pi\left(\frac{180°}{\pi}\right) = -450°$

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS

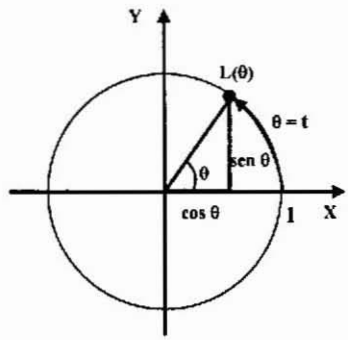
Hemos definido las funciones trigonométricas de números reales. Sin embargo, en la trigonometría elemental las funciones trigonométricas se definen para un ángulo agudo de un triángulo rectángulo como las siguientes razones:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{Op}}{\text{Hip}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{Ady}}{\text{Hip}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{Op}}{\text{Ady}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{Ady}}{\text{Op}}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{Hip}}{\text{Ady}} \qquad \text{cosec } \theta = \frac{\text{Hip}}{\text{Op}}$$

Debemos reconciliar estos dos puntos de vista.



DEFINICION. Si un ángulo orientado θ tiene t radianes, entonces:

$$\textbf{sen } \theta = \textbf{sen } t$$

Si la medida del ángulo está dada en grados, convertimos los grados en radianes. Así, si el ángulo tiene $A°$, que equivalen a t radianes, entonces

$$\textbf{sen}(A°) = \textbf{sen } t.$$

Con las demás funciones trigonométricas se procede de igual forma.

Ahora, tomemos el círculo trigonométrico, un ángulo central θ medido en radianes (θ radianes) y el arco de longitud t que éste subtiende. De acuerdo a la fórmula (1) se tiene que:

$$\theta = \frac{t}{1} = t$$

Es decir, en el círculo trigonométrico, la medida del ángulo en radianes es igual a la longitud del arco subtendido.

Ahora, mirando la figura anterior vemos que la definición de las funciones trigonométricas mediante el triángulo rectángulo (definición antigua) coincide con la dada mediante la circunferencia trigonométrica (definición nueva) Así:

(Definición antigua) $\text{sen } \theta = \dfrac{\text{Op}}{\text{Hip}} = \dfrac{\text{sen } \theta}{1}$

$= \text{sen } \theta =$ ordenada de $L(\theta)$ (definición nueva)

ANGULO DE INCLINACION

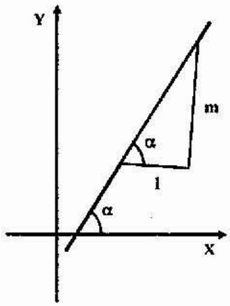
Se llama **ángulo de inclinación** de una recta no horizontal al menor ángulo positivo que forma la recta con el semieje positivo de las X. A las rectas horizontales les asignamos como ángulo de inclinación al ángulo de medida 0.

Es claro que si la medida del ángulo de inclinación es α radianes, entonces

$$0 \leq \alpha < \pi$$

Si L es una recta no vertical de pendiente m y ángulo de inclinación α, entonces

$$\mathbf{m = \tan \alpha}$$



En efecto, mirando el triángulo de la figura, tenemos que:

$$\tan \alpha = \frac{\text{Op}}{\text{Ady}} = \frac{m}{1} = m$$

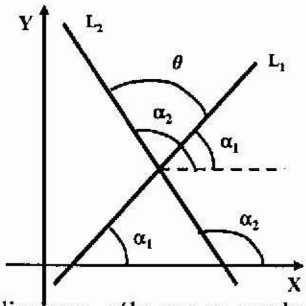
Si la recta es vertical, su ángulo de inclinación mide $\frac{\pi}{2}$ rads. Pero $\tan(\frac{\pi}{2})$ no está definida. Este resultado concuerda con el hecho de que las rectas verticales no tienen pendiente.

ANGULO ENTRE DOS RECTAS

Sean L_1 y L_2 dos rectas que se cortan y que tienen ángulo de inclinación α_1 y α_2, respectivamente. En el punto de intersección de estas rectas se forman dos ángulos suplementarios. Uno de ellos es:

$$\theta_1 = \begin{cases} \alpha_2 - \alpha_1 & \text{si } \alpha_2 \geq \alpha_1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 & \text{si } \alpha_1 \geq \alpha_2 \end{cases}$$

y el otro es $\theta_2 = \pi - \theta_1$



De estos dos ángulos, si las rectas no son perpendiculares, sólo uno es agudo. El siguiente teorema nos dice como calcular este ángulo agudo.

TEOREMA G.2 Sean L_1 y L_2 dos rectas no verticales y no perpendiculares, con pendientes m_1 y m_2, respectivamente. Si θ es el ángulo agudo entre L_1 y L_2, entonces

$$\tan \theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$$

Demostración

El ángulo agudo θ es θ_1 si $\tan \theta_1 \geq 0$ ó es θ_2 si $\tan \theta_2 \geq 0$.

Sea α_1 el ángulos de inclinación de L_1 y α_2 el de L_2. Supongamos que $\alpha_2 \geq \alpha_1$.

Se tiene: $\theta_1 = \alpha_2 - \alpha_1$, $\theta_2 = \pi - \theta_1$, $\tan \alpha_2 = m_2$ y $\tan \alpha_1 = m_1$.

Usando las identidades trigonométricas 6 y 11 y sabiendo que la función tangente tiene periodo π, obtenemos:

$$\tan \theta_1 = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_2 \tan \alpha_1} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

$$\tan\theta_2 = \tan(\pi - \theta_1) = \tan(-\theta_1) = -\tan\theta_1 = -\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Luego, $\tan\theta = \left| \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$

EJEMPLO 5. Hallar los ángulos entre las rectas:

$$L_1 : 9y - 2x - 30 = 0, \qquad L_2 : 3y - 8x + 12 = 0$$

Solución

La pendiente de L_1 es $m_1 = \dfrac{2}{9}$ y la de L_2 es $m_2 = \dfrac{8}{3}$

Si θ es el ángulo agudo entre las rectas, entonces

$$\tan\theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{8/3 - 2/9}{1 + (2/9)(8/3)} \right| = \left| \frac{24 - 2}{27 + 16} \right| = \frac{66}{43}$$

Luego, $\theta = \arctan\left(\dfrac{66}{43}\right) \approx 0{,}993$ rads. $\approx 56°\ 54'\ 54''$

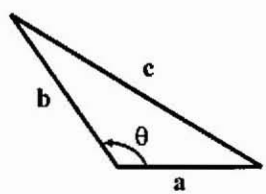
El otro ángulo es $\theta' = \pi - 0{,}993 = 2{,}1486$ rads. $\approx 123°\ 5'\ 6''$

LEY DE LOS COSENOS

El siguiente resultado generaliza el teorema Pitágoras

TEOREMA G.3 Si los lados de un triángulo miden a, b y c y θ es el ángulo opuesto a c, entonces

$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$$

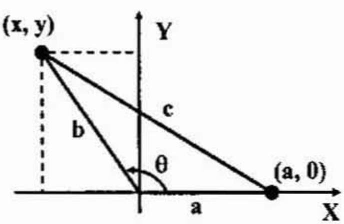


Demostración

Tomamos un sistema de coordenadas en tal forma que el ángulo θ quede en posición normal y el lado a descanse sobre el eje X

Tenemos que $y = b \operatorname{sen}\theta$ y $x = b\cos\theta$

Aplicando la fórmula de distancia para los vértices del lado c:



$$\begin{aligned} c^2 &= (x - a)^2 + (y - 0)^2 \\ &= (b\cos\theta - a)^2 + (b\operatorname{sen}\theta - 0)^2 \\ &= b^2\cos^2\theta - 2ab\cos\theta + a^2 + b^2\operatorname{sen}^2\theta \\ &= a^2 + b^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) - 2ab\cos\theta \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \end{aligned}$$

FORMULAS DE ADICION Y SUSTRACCION

Las identidades trigonométricas que presentaremos en el resto de este apéndice son consecuencia de las siguientes fórmulas de adición. Presentamos una demostración parcial de del siguiente teorema en el problema resuelto 4.

TEOREMA G.4

a. $\text{sen}(x+y) = \text{sen}\, x \cos y + \cos x\, \text{sen}\, y$

b. $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \text{sen}\, x\, \text{sen}\, y$

c. $\text{sen}(x-y) = \text{sen}\, x \cos y - \cos x\, \text{sen}\, y$

d. $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \text{sen}\, x\, \text{sen}\, y$

e. $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

f. $\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

FORMULAS DEL ANGULO DOBLE

Si en las fórmulas a, b y e tomamos $y = x$, se tiene:

$\text{sen}(2x) = 2\text{sen}\, x \cos x$, $\quad \cos(2x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x \qquad \tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

La fórmula anterior de cos (2x) combinada con la identidad $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$ nos dan otras dos fórmulas para cos (2x):

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \qquad \cos(2x) = 1 - 2\,\text{sen}^2 x$$

FORMULAS DE REDUCCION DE POTENCIA

Si en las dos fórmulas anteriores despejamos $\text{sen}^2 x$ y $\cos^2 x$ obtenemos:

$$\text{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \tan^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$$

Estas fórmulas, a su vez, sustituyendo x por x/2 y sacando raíz cuadrada, nos las fórmulas del ángulo mitad

FORMULAS DEL ANGULO MITAD

$$\text{sen}\,\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

TRASFORMACION DE PRODUCTOS EN SUMAS

Combinando, mediante sumas y restas, las fórmulas a, b, c y d obtenemos:

$$\text{sen}\, x \cos x = \frac{1}{2}\left[\text{sen}(x+y) + \text{sen}(x-y)\right]$$

$$\cos x \cos x = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$$

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$$

TRASFORMACION DE SUMAS EN PRODUCTOS

En fórmulas anteriores, haciendo un adecuado cambio de variables y despejado, se obtienen:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \qquad \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \qquad \cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}$$

Todas estas fórmulas estas fórmulas aparecerán en una tabla más adelante.

PROBLEMAS RESUELTOS G

PROBLEMA 1. Probar que las funciones tangente, cotangente y cosecante son impares y que la función secante es par. Es decir, probar que:

a. $\tan(-t) = -\tan t$ **b.** $\cot(-t)) = -\cot t$

c. $\sec(-t) = \sec t$ **d.** $\operatorname{cosec}(-t) = -\operatorname{cosec} t$

Solución

Sólo probaremos las partes (a) y (c). Para las otras se procede en forma similar.

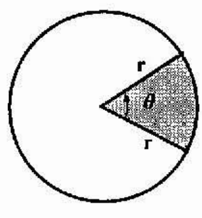
a. $\tan(-t) = \dfrac{\operatorname{sen}(-t)}{\cos(-t)} = \dfrac{-\operatorname{sen} t}{\cos t} = -\dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = -\tan t$

c. $\sec(-t) = \dfrac{1}{\cos(-t)} = \dfrac{1}{\cos t} = \sec t$

PROBLEMA 2. Probar que el área A de un sector circular correspondiente a un ángulo de θ radianes en una circunferencia de radio r es

$$A = \frac{1}{2}\,\theta r^2$$

Solución



Es claro que en una misma circunferencia, las áreas de dos sectores circulares son proporcionales a las medidas de los ángulos centrales correspondientes. De acuerdo a este resultado y al hecho de que el círculo total es un sector circular de 2π radianes, tenemos que la razón entre el área A y el área total del círculo (πr^2) es la misma que la razón entre θ y 2π. Esto es,

$$\frac{A}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}\theta r^2$$

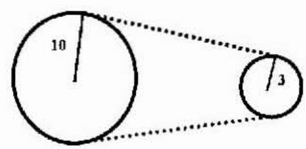
PROBLEMA 3. Los dos piñones que enlaza la cadena de una bicicleta tienen 10 cm. y 3 cm. de radio, respectivamente.

a. Si el piñón grande (el de los pedales) gira a razón de 75 revoluciones por minuto. ¿A cuántas revoluciones por minuto gira el piñón pequeño (el del caucho) ?

b. Si los ruedas de la bicicleta tienen un radio de 45 cm. ¿A qué velocidad se desplaza ésta?

Solución

a. La circunferencia del borde del piñón grande tiene una longitud de $2\pi(10)$ cm. Luego, en un minuto, cualquier punto de esta circunferencia hace un recorrido de $2\pi(10)(75)$ cm. por minuto. Por otro lado, la longitud de la circunferencia exterior del piñón pequeño es $2\pi(3)$ cm. Luego, el piñón pequeño debe hacer:



$$\frac{2\pi(10)(75)}{2\pi(3)} = 250 \text{ revoluciones por minuto.}$$

b. La rueda trasera de la bicicleta, al igual que el piñón pequeño, gira a razón de 250 revoluciones por minuto, lo que da un recorrido de:

$$2\pi(45)(250) \text{ cm/min.} = 22.500\pi \text{ cm/min.} \approx 706{,}86 \text{ m/min.}$$

PROBLEMA 4. Probar las siguientes fórmulas aditivas

a. $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$

b. $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

c. $\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$

d. $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

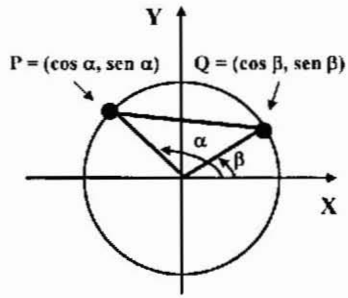
e. $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

f. $\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

Solución

Probaremos solamente a, c, d y e. Las otras fórmulas se prueban en forma similar. Comenzamos probando d.

d. Calculamos longitud del segmento $\overline{PQ}$ del gráfico adjunto de dos maneras: mediante la fórmula de la distancia y mediante la ley de los cosenos:



$$(d(P, Q))^2 = (\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\alpha)^2$$
$$= (\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) + (\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta)$$
$$- 2\cos\alpha\cos\beta - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$= 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$(d(P, Q))^2 = (d(O, P))^2 + (d(O, Q))^2$$
$$- 2\,(d(O, P))(d(O, Q))\cos(\alpha - \beta)$$
$$= 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$$

Luego,

$$2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \Rightarrow$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

c. La parte 3 del teorema G.1 dice que: $\operatorname{sen} t = \cos[\pi/2 - t]$ y $\cos t = \operatorname{sen}[\pi/2 - t]$.

Luego,

$$\operatorname{sen}(x - y) = \cos[\pi/2 - (x - y)] = \cos[(\pi/2 - x) - (-y)]$$
$$= \cos(\pi/2 - x)\cos(-y) + \operatorname{sen}(\pi/2 - x)\operatorname{sen}(-y)$$
$$= \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$$

a. $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen}(x - (-y)) = \operatorname{sen} x\cos(-y) - \cos x\operatorname{sen}(-y)$

$$= \operatorname{sen} x\cos y + \cos x\operatorname{sen} y$$
$$= \operatorname{sen} x\cos y - \cos x\operatorname{sen} y$$

e. $\tan(x + y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x + y)}{\cos(x + y)} = \dfrac{\operatorname{sen} x\cos y + \cos x\operatorname{sen} y}{\cos x\cos y - \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y}$

Dividiendo el numerador y el denominar entre $\cos x \cos y$:

$$\tan(x + y) = \frac{\operatorname{sen} x/\cos x + \operatorname{sen} y/\cos y}{1 - (\operatorname{sen} x/\cos x)(\operatorname{sen} y/\cos y)} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS G

1. Sin usar calculadora hallar:

a. $\cot\dfrac{5\pi}{3}$, **b.** $\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{6}$, **c.** $\tan(-\dfrac{\pi}{3})$, **d.** $\sec(-\dfrac{7\pi}{6})$, **e.** $\operatorname{cosec}(-\dfrac{241\pi}{6})$.

2. Hallar todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que:

a. $\tan\alpha = 0$ **b.** $\cot\alpha = 0$ **c.** $\sec\alpha = 0$ **d.** $\operatorname{cosec}\alpha = 0$ **e.** $\operatorname{sen}\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

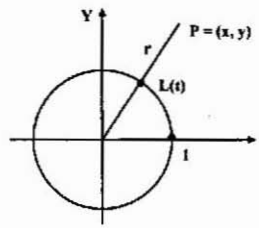
3. Probar que:

a. $\cot(\alpha+\pi) = \cot\alpha$ **b.** $\sec(\alpha+\pi) = -\sec\alpha$ **c.** $\operatorname{cosec}(\alpha+\pi) = -\operatorname{cosec}\alpha$.

4. Probar que:

a. $\cos(n\pi) = (-1)^n$ **b.** $\cos(\alpha+n\pi) = (-1)^n\cos\alpha$ **c.** $\operatorname{sen}(\alpha+n\pi) = (-1)^n\operatorname{sen}\alpha$.

5. Sea $P = (x, y) \neq (0,0)$ un punto del plano que está a una distancia r del origen. Si $L(t)$ es el punto de intersección del rayo OP con la circunferencia unitaria, probar que



a. $\operatorname{sen} t = \dfrac{y}{r}$ **b.** $\cos t = \dfrac{x}{r}$ **c.** $\tan t = \dfrac{y}{x}$, $x \neq 0$

6. Hallar el valor de $\operatorname{sen}(-23\pi/2)\cos(31\pi)$

7. Si $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, simplificar

a. $\operatorname{sen}(2\alpha + \beta + \gamma)$ **b.** $\operatorname{sen}(2\alpha + \beta + \gamma) + \operatorname{sen}(\beta + \gamma)$

8. Sabiendo que el periodo de $y = \operatorname{sen} x$ es 2π y el de $y = \cot x$ es π, hallar el periodo de las funciones:

a. $f(x) = \operatorname{sen}(\lambda x)$, donde λ es una constante mayor que 0. **b.** $g(x) = \cot(2x)$.

9. Una circunferencia tiene un radio de 18 cm. Hallar la medida en radianes de un ángulo determinado por un arco de longitud

a. 6 cm. **b.** 11.8 cm. **c.** 6π cm.

10. Hallar la longitud de un arco subtendido en una circunferencia de 9 cm de radio por un ángulo central de:

a. $\dfrac{\pi}{6}$ radianes **b.** $\dfrac{5}{4}\pi$ radianes **c.** $50°$.

11. La distancia entre dos puntos A y B sobre la tierra se mide a lo largo de la circunferencia que pasa por A y B y tiene por centro C, el centro de la tierra. Si el radio de la tierra es, aproximadamente, 6.367 Km., hallar la distancia entre A y B si el ángulo ACB es de

a. $1°$ **b.** $30°$ **c.** $45°$ **d.** $80°\ 45'$.

12. En el problema anterior, si el ángulo ACB mide $1'$ (un minuto), entonces la distancia entre A y B es de una milla náutica. ¿Cuántos Km. tiene una milla náutica?

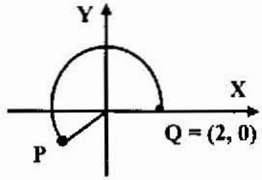
13. ¿Cuántos radianes gira el minutero de un reloj en un lapso de 20 minutos?

14. Hallar la medida en grados de un ángulo que es suplemento de un ángulo de $\dfrac{\pi+1}{2}$ radianes.

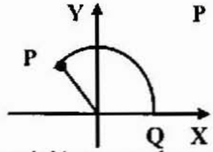
15. Dos ángulos internos de un triángulo miden $\frac{\pi+1}{2}$ y $\frac{\pi-1}{2}$ radianes. Hallar la medida, en grados, del tercer ángulo.

16. En la figura, el arco QP tiene una longitud de $\frac{7\pi}{3}$ cm.

Hallar el punto P.



17. En la figura, el radio de la circunferencia es 3 cm. y la longitud del arco es 2π. Hallar P.



18. El lado terminal de un ángulo orientado en posición normal es el rayo OP, donde O es el origen y P = (–2,6). Si la medida de este ángulo es α radianes, hallar el valor de:

$$(\operatorname{sen}\alpha - 3\cos\alpha)(\tan\alpha)(\sec\alpha)$$

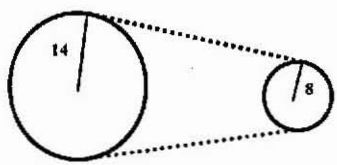
19. Hallar el valor de: **a.** $\dfrac{\operatorname{sen}(-750°)}{\cos(-150°)}$ **b.** $\dfrac{\cos(-1290°)}{\tan(7.515°)}$

20. Hallar el valor de $\left(\cos\frac{11\pi}{6} + \operatorname{sen}\frac{26\pi}{4}\right)\left(\tan\frac{\pi}{6} + \cos\frac{14\pi}{3}\right)$

21. Hallar la longitud del lado de un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio r.

22. El caucho de un automóvil tiene un diámetro de 60 cm. ¿ A cuántas revoluciones por minuto gira el caucho cuando el automóvil viaja a 90 Km. por hora ?

23. Una banda enlaza a dos poleas, como indica la figura. Los radios de las poleas son de 8 cm. y 14 cm., respectivamente. ¿ A cuántas revoluciones por segundo gira la polea pequeña cuando la grande gira a razón de 28 revoluciones por segundo ?



24. El ángulo de inclinación de una recta que no intersecta el segundo cuadrante es de $\pi/4$ rads. Hallar su ecuación sabiendo que su distancia al origen es de 4 unidades.

25. Hallar el ángulo agudo formado por las rectas: $3x + 2y = 0$ y $5x - y + 7 = 0$.

26. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto Q = (2, 1) y forma un ángulo de $\pi/4$ rads. con la recta $3y + 2x + 4 = 0$ (dos soluciones).

27. Los puntos (6, 2) y (–1, 3) son dos vértices opuestos de un cuadrado. Hallar las ecuaciones de las rectas donde están los lados del cuadrado.

INDICE ALFABETICO

Tipografía
Litografía
HORIZONTE C.A.
Telf.(0251) 4462324 - Fax: 4462317
e-mail: edt-horizonte@cantv.net
Barquisimeto - Estado Lara - Venezuela

ACERCA DEL AUTOR

Jorge Sáenz Camacho, estudió Matemáticas en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (Lima, Perú) y en la Universidad de Notre Dame (Indiana, USA), donde obtuvo su maestría y doctorado (Ph. D.). Estudió Educación Matemática en la Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle (La Cantuta, Perú) y en el Teachers College, Universidad de Columbia (Nueva York).

El Dr. Sáenz ha sido profesor en la Pontificia Universidad Católica del Perú, en la Universidad de los Andes, en la Universidad de Puerto Rico y en la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado". Es autor de varios textos de Matemáticas.

ISBN 980-6588-04-5
9 799806 588041