Proyecto de Investigación 1

Sebastián Hernández Bonilla
Gabriel Guzmán Rojas
Manuel Emilio Alfaro Mayorga
Frederick Obando Solano
Ingeniería en Computadores
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Cartago, Costa Rica
sebhernandez@estudiantec.cr
gabguzman@estudiantec.cr
manalfaro@estudiantec.cr
fobando@estudiantec.cr

Observación: Esta investigación se realizó en el curso CE-3102: Análisis Numéricos para Ingeniería, durante el Semestre I del 2025.

Resumen

El presente proyecto aborda la resolución de la ecuación de Colebrook-White, una expresión no lineal ampliamente utilizada en la ingeniería hidráulica para calcular el factor de fricción en el flujo de fluidos a través de tuberías. Dicha ecuación, al no poder resolverse de forma analítica, requiere del uso de métodos numéricos iterativos para encontrar su solución aproximada.

En esta investigación se implementan seis métodos iterativos para la aproximación de dicha solución. Los tres primeros métodos son los tradicionales: Bisección, Newton-Raphson y el método de la Secante, los cuales fueron estudiados durante el curso. A su vez, se incorporan tres métodos avanzados seleccionados a partir de literatura científica reciente: los esquemas bimetricos de Kim-Geum, el método de Cordero-Torregosa y el método de Kou modificado.

El objetivo principal de esta investigación es comparar la eficiencia, precisión y comportamiento numérico de estos métodos al aplicarse a una ecuación no lineal de gran relevancia en la práctica ingenieril.

I. Introducción

En la ingeniería moderna, la resolución de ecuaciones no lineales constituye una herramienta esencial para modelar fenómenos físicos y sistemas complejos que no pueden ser descritos mediante relaciones lineales simples. Uno de los ejemplos más representativos de este tipo de ecuaciones en el campo de la ingeniería hidráulica es la ecuación de Colebrook-White, la cual permite determinar el factor de fricción en flujos turbulentos dentro de conductos cerrados. Esta ecuación es fundamental en el diseño de redes de tuberías, sistemas de distribución de agua potable, plantas industriales y otras aplicaciones donde el transporte eficiente de fluidos es una necesidad crítica.

La ecuación de Colebrook-White, sin embargo, presenta un reto significativo: su carácter implícito en el factor de fricción impide obtener una solución analítica directa. Esta limitación ha impulsado históricamente el desarrollo y la aplicación de métodos numéricos que permitan aproximar su solución de forma precisa y eficiente. Los métodos iterativos, en particular, se han convertido en una de las estrategias más utilizadas, debido a su capacidad de adaptarse a la naturaleza no lineal de la ecuación y de converger a soluciones útiles en un número razonable de pasos computacionales.

En este contexto, la presente investigación busca comparar el desempeño de seis métodos iterativos aplicados a la resolución de la ecuación de Colebrook-White. Se incluyen tres métodos tradicionales ampliamente conocidos en el ámbito académico y profesional: Bisección, Newton-Raphson y Secante, los cuales poseen una sólida base teórica y han demostrado eficacia en múltiples escenarios [1]. Junto a ellos, se exploran tres métodos avanzados extraídos de literatura científica reciente: los esquemas bimetricos de Kim-Geum [2], el método de Cordero-Torregosa [3], y el método de Kou modificado [4], con el objetivo de evaluar si su uso representa ventajas significativas en términos de velocidad de convergencia, precisión o robustez frente a distintas condiciones iniciales.

La comparación de estos métodos no solo permite profundizar en su comportamiento numérico, sino también reflexionar sobre la importancia de elegir estrategias computacionales adecuadas en la ingeniería aplicada. En un entorno donde la precisión de los cálculos puede tener implicaciones reales sobre la eficiencia energética, el costo de materiales o la seguridad estructural de una instalación, el estudio de estas técnicas cobra una relevancia particular.

II. Análisis del problema

Problema general a resolver

En el campo de la ingeniería hidráulica, uno de los aspectos más críticos en el diseño y operación de sistemas de transporte de fluidos es la estimación precisa de las pérdidas de presión por fricción en el interior de las tuberías. Estas pérdidas afectan directamente la eficiencia energética del sistema, el dimensionamiento de bombas, la selección de materiales y, en última instancia, el costo y la viabilidad técnica de las instalaciones. Para abordar este tipo de cálculos, los ingenieros se apoyan en modelos matemáticos que relacionan parámetros físicos del flujo y del conducto.

Entre estos modelos, destaca la ecuación de Colebrook-White, una expresión empírica que permite estimar el factor de fricción de Darcy-Weisbach (f) en flujos turbulentos, teniendo en cuenta tanto el régimen del flujo como la rugosidad de las paredes internas de la tubería. Esta ecuación se ha convertido en un estándar en la industria desde su publicación en 1939, debido a su capacidad de representar con notable precisión los datos experimentales obtenidos en condiciones reales de operación [5].

La aplicación de esta ecuación es fundamental para calcular la pérdida de carga (h_f) a través de la fórmula:

$$h_f = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g}, \tag{1}$$

donde L es la longitud de la tubería, D su diámetro interno, v la velocidad del fluido, y g la aceleración de la gravedad. Dado que f depende de Re (número de Reynolds) y de la rugosidad relativa ε/D, su determinación precisa es indispensable en cualquier cálculo hidráulico avanzado. De hecho, su uso es común en el diseño de redes de distribución de agua, sistemas de riego a presión, y plantas industriales, tal como se documenta en manuales técnicos ampliamente utilizados en la ingeniería hidráulica [6].

El número de Reynolds (Re) es un parámetro adimensional que representa la relación entre las fuerzas inerciales y viscosas dentro de un flujo de fluido. Se define como:

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu}, \tag{2}$$

donde ρ es la densidad del fluido, v su velocidad, D el diámetro hidráulico del conducto y μ la viscosidad dinámica. Este número permite clasificar el tipo de régimen de flujo: si $Re < 2000$ el flujo es laminar, mientras que para $Re > 4000$ se considera turbulento. En este último caso es donde se aplica la ecuación de Colebrook-White.

Problema matemático a resolver

La ecuación de Colebrook-White se expresa comúnmente en la siguiente forma:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{\varepsilon/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{Re\sqrt{f}}\right). \tag{3}$$

En esta expresión, la incógnita f aparece tanto fuera como dentro de la función logarítmica, y en combinación con una raíz cuadrada, lo que la convierte en una ecuación trascendental no lineal. Su resolución consiste en encontrar el valor de f que satisface la igualdad para un conjunto dado de parámetros físicos: el número de Reynolds (Re), el diámetro de la tubería (D) y la rugosidad absoluta (ε).

Debido a que no es posible despejar f de manera directa, se reformula la ecuación en su forma funcional para ser tratada mediante métodos numéricos. Esta forma consiste en definir una función $F(f)$ tal que:

$$F(f) = \frac{1}{\sqrt{f}} + 2\log_{10}\left(\frac{\varepsilon/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{Re\sqrt{f}}\right) = 0, \tag{4}$$

De esta manera, la búsqueda del valor del factor de fricción f se reduce a la localización de la raíz de la función $F(f)$. Esta formulación permite aplicar técnicas iterativas que aproximan dicha raíz con una tolerancia definida.

Aunque la ecuación fue propuesta hace más de ocho décadas, continúa siendo objeto de estudio debido a su relevancia en aplicaciones reales de la ingeniería hidráulica y al desafío computacional que representa, especialmente cuando se requiere un balance entre precisión, eficiencia y robustez numérica.

En este contexto, el objetivo de la presente investigación es determinar de manera eficiente el valor de f mediante la implementación y comparación de seis métodos iterativos distintos, evaluando su desempeño en términos de convergencia, exactitud y estabilidad bajo condiciones controladas.

III. Métodos iterativos en la solución de ecuaciones no lineales

La resolución de ecuaciones no lineales ha sido históricamente uno de los desafíos más relevantes en el análisis numérico, debido a la imposibilidad, en la mayoría de los casos, de obtener soluciones exactas mediante técnicas analíticas. Ante esta limitación, los métodos iterativos se han consolidado como una alternativa robusta y flexible para aproximar raíces de ecuaciones con un alto grado de complejidad estructural, como es el caso de la ecuación de Colebrook-White. Tal como lo plantea Traub en su obra clásica sobre métodos numéricos, el éxito de un método iterativo no depende únicamente del orden de convergencia, sino también de su estabilidad y comportamiento frente a funciones mal condicionadas o estimaciones iniciales poco precisas [7].

En esta investigación se implementan y comparan seis métodos iterativos, tres clásicos y tres de reciente desarrollo, con el fin de analizar su comportamiento al aplicarse a un problema ingenieril real.

III-A. Método de la Bisección

El método de la bisección es uno de los algoritmos más antiguos y confiables para encontrar raíces de funciones continuas. Se fundamenta en el Teorema de Bolzano, el cual garantiza la existencia de una raíz en un intervalo cerrado $[a, b]$ siempre que $f(a) \cdot f(b) < 0$. El procedimiento consiste en dividir repetidamente el intervalo por la mitad, evaluando la función en el punto medio y seleccionando el subintervalo que contiene la raíz. Aunque es un método lento debido a su orden de convergencia lineal, su gran ventaja es que siempre converge si se cumplen las condiciones iniciales. Es ideal como punto de partida o validación para otros métodos más rápidos pero menos robustos.

Pseudocódigo del Método de Bisección

Algorithm 1: Método de Bisección

Input: Función f, intervalo $[a, b]$, tolerancia ε, máximo de iteraciones N
Output: Aproximación de la raíz x

if $f(a) \cdot f(b) > 0$ **then**
  Error: no hay raíz garantizada en $[a, b]$
for $k \leftarrow 1$ **to** N **do**
  $x \leftarrow \frac{a+b}{2}$
  if $|f(x)| < \varepsilon$ ***or*** $\frac{b-a}{2} < \varepsilon$ **then**
    return x
  if $f(a) \cdot f(x) < 0$ **then**
    $b \leftarrow x$
  else
    $a \leftarrow x$
return x

III-B. Método de Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson es uno de los algoritmos más utilizados por su rápida convergencia cuadrática. A partir de una estimación inicial x_0, el método genera una sucesión definida por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{5}$$

donde $f'(x_n)$ representa la derivada de la función evaluada en x_n. Su efectividad depende de una buena elección del valor inicial y de que la derivada no sea nula ni demasiado pequeña, ya que esto puede conducir a inestabilidades. En problemas como el de Colebrook, donde la función incluye logaritmos y raíces, la evaluación correcta de la derivada es clave para mantener la precisión.

Pseudocódigo del Método de Newton-Raphson

Algorithm 2: Método de Newton-Raphson

Input: Función f, derivada f', estimación inicial x_0, tolerancia ε, máximo de iteraciones N
Output: Aproximación de la raíz x

for $k \leftarrow 1$ **to** N **do**
  $f_x \leftarrow f(x_0)$
  $df_x \leftarrow f'(x_0)$
  if $|df_x| < \varepsilon$ **then**
    Error: derivada muy cercana a cero
  $x_1 \leftarrow x_0 - \frac{f_x}{df_x}$
  if $|x_1 - x_0| < \varepsilon$ **then**
    return x_1
  $x_0 \leftarrow x_1$
return x_1

III-C. Método de la Secante

El método de la secante es una alternativa al método de Newton-Raphson que evita el cálculo directo de la derivada. Utiliza dos aproximaciones previas x_{n-1} y x_n para construir una línea secante que aproxima la tangente de la curva, y calcula el siguiente punto con la fórmula:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \tag{6}$$

Aunque su orden de convergencia es sub-cuadrático ($\approx 1{,}618$), su implementación simple y su independencia de derivadas lo convierten en un método atractivo cuando se trabaja con funciones complicadas o no diferenciables analíticamente.

Pseudocódigo del Método de la Secante

Algorithm 3: Método de la Secante

Input: Función f, estimaciones iniciales x_0, x_1, tolerancia ε, máximo de iteraciones N
Output: Aproximación de la raíz x

for $k \leftarrow 1$ **to** N **do**
  if $|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon$ **then**
    Error: división por cero inminente
  $x_2 \leftarrow x_1 - f(x_1) \cdot \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$
  if $|x_2 - x_1| < \varepsilon$ **then**
    return x_2
  $x_0 \leftarrow x_1$
  $x_1 \leftarrow x_2$
return x_2

III-D. Esquemas bimetricos de Kim-Geum

Los esquemas propuestos por Kim y Geum introducen el concepto de métodos iterativos con memoria, los cuales utilizan no solo las evaluaciones actuales, sino también información de iteraciones pasadas para mejorar la estimación de la raíz. Este enfoque permite alcanzar órdenes de convergencia superiores (hasta octavo orden en algunos casos) sin aumentar significativamente el número de evaluaciones por iteración. La familia de métodos bimetricos es especialmente eficaz cuando se requiere una solución precisa con el menor número de pasos, como en simulaciones en tiempo real o contextos con limitaciones computacionales [2].

Pseudocódigo del Método de Kim-Geum (esquema bimetric simplificado)

Algorithm 4: Esquema bimetric de Kim-Geum

Input: Función f, estimación inicial x_0, tolerancia ε, máximo de iteraciones N
Output: Aproximación de la raíz x

for $k \leftarrow 1$ **to** N **do**
  $y \leftarrow x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
  $z \leftarrow y - \frac{f(y)}{f'(x_0)}$
  $x_1 \leftarrow z - \frac{f(z)}{f'(x_0)}$
  if $|x_1 - x_0| < \varepsilon$ **then**
    return x_1
  $x_0 \leftarrow x_1$
return x_1

III-E. Método de Cordero-Torregosa

Este método pertenece a la clase de algoritmos de orden superior optimizados, con un enfoque basado en el uso de parámetros ajustables y funciones auxiliares que permiten controlar la trayectoria de convergencia. Cordero y Torregosa han demostrado que es posible construir métodos de octavo orden sin necesidad de calcular derivadas de alto nivel ni complejas expresiones simbólicas, lo que lo hace ideal para funciones no lineales complicadas como la de Colebrook [3]. Su implementación es más compleja que la de los métodos tradicionales, pero ofrece una eficiencia notable en términos de número de iteraciones.

Pseudocódigo del Método de Cordero-Torregosa (CT4 simplificado)

Algorithm 5: Método de Cordero-Torregosa (CT4)

Input: Función f, estimación inicial x_0, tolerancia ε, máximo de iteraciones N
Output: Aproximación de la raíz x

for $k \leftarrow 1$ **to** N **do**
  $f_0 \leftarrow f(x_0)$
  $z \leftarrow x_0 + f_0$
  $f_z \leftarrow f(z)$
  $y \leftarrow x_0 - \frac{f_0^2}{f_z - f_0}$
  $f_y \leftarrow f(y)$
  $D_1 \leftarrow \frac{f_y - 0{,}5 \cdot f_z}{y - z}$
  $D_2 \leftarrow \frac{f_y - 0{,}5 \cdot f_0}{y - x_0}$
  $x_1 \leftarrow y - \frac{f_y}{D_1 + D_2}$
  if $|x_1 - x_0| < \varepsilon$ **then**
    return x_1
  $x_0 \leftarrow x_1$
return x_1

III-F. Método de Kou Modificado

El método de Kou y Li es una evolución de los algoritmos clásicos orientada a alcanzar convergencia cúbica utilizando dos evaluaciones funcionales por iteración. Su versión modificada permite obtener soluciones precisas incluso cuando la función presenta cambios abruptos o zonas de baja pendiente.

Este tipo de métodos es valioso en aplicaciones donde se desea un equilibrio entre velocidad y estabilidad numérica, y ha demostrado ser competitivo en comparación con otros métodos de orden similar [4].

Cada uno de estos métodos representa una filosofía diferente en la aproximación a soluciones de ecuaciones no lineales. Su implementación y análisis en el marco del problema de la ecuación de Colebrook-White ofrece un terreno ideal para evaluar sus fortalezas, limitaciones y aplicabilidad en contextos reales de la ingeniería.

Algorithm 6: Método de Kou Modificado (MK6)

Input: Función f, derivada f', valor inicial x_0, tolerancia ε, máximo de iteraciones N, parámetro θ

Output: Aproximación x_k, error e_k, iteración k

$x \leftarrow x_0$;
for $k \leftarrow 1$ **to** N **do**
  if $|f'(x)| < 10^{-12}$ **then**
    return $(x, |f(x)|, k)$;
  $y \leftarrow x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$;
  if $|f(x) - f(y)| < 10^{-12}$ **then**
    return $(x, |f(x)|, k)$;
  $z \leftarrow x - \theta \cdot \dfrac{f(x) + f(y)}{f'(x)} - (1 - \theta) \cdot \dfrac{f(x)^2}{f'(x)(f(x) - f(y))}$;
  if $|z - y| < 10^{-12}$ ***or*** $|z - x| < 10^{-12}$ **then**
    return $(x, |f(x)|, k)$;
  $D_1 \leftarrow \dfrac{f(z) - f(y)}{z - y}$;
  $D_2 \leftarrow \dfrac{f(z) - f(x)}{z - x}$;
  $D_3 \leftarrow \dfrac{D_2 - f'(x)}{z - x}$;
  $x_{\text{new}} \leftarrow z - \dfrac{f(z)}{D_1 + D_3 \cdot (z - y)}$;
  $e \leftarrow |x_{\text{new}} - x|$;
  if $e < \varepsilon$ **then**
    return $(x_{\text{new}}, |f(x_{\text{new}})|, k)$;
  $x \leftarrow x_{\text{new}}$;
return $(\text{NaN}, \text{NaN}, N)$;

IV. Experimentos numéricos

Con el objetivo de evaluar el rendimiento de los distintos métodos iterativos implementados, se realizó una serie de experimentos numéricos utilizando la ecuación de Colebrook-White como caso de estudio. Esta ecuación, de naturaleza trascendental e implícita, presenta un reto típico en el análisis numérico de ecuaciones no lineales, por lo que representa un escenario ideal para comparar eficiencia, precisión y robustez de los algoritmos seleccionados.

Cada método fue ejecutado bajo las mismas condiciones iniciales: una tolerancia de convergencia de $\varepsilon = 10^{-10}$ y un máximo de $N = 2500$ iteraciones. Se ajustaron los valores iniciales de acuerdo con la naturaleza de cada algoritmo, buscando garantizar condiciones óptimas de arranque.

Para ilustrar la aplicación práctica de los métodos iterativos, se plantea un escenario representativo en el diseño de una red de distribución de agua potable. Supóngase una tubería de acero galvanizado, instalada en una zona urbana, encargada de transportar agua desde un tanque elevado hacia una zona residencial. Este tipo de sistemas requiere cálculos precisos del factor de fricción para estimar las pérdidas de carga, dimensionar adecuadamente las bombas y garantizar un flujo eficiente.

En este contexto, se considera una tubería con un diámetro interno tal que su rugosidad relativa sea de $\varepsilon/D = 0{,}000015$, lo cual corresponde a una superficie interna moderadamente rugosa (como el acero comercial). Además, se asume un régimen de flujo con número de Reynolds $Re = 2500$, valor que corresponde a un flujo de transición entre laminar y turbulento, común en tramos de tubería con baja demanda instantánea o en periodos de consumo reducido.

Con base en estos valores, se define la función objetivo como:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2\log_{10}\left(\frac{0{,}000015}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{2500 \cdot \sqrt{x}}\right),$$

la cual representa la forma funcional de la ecuación de Colebrook-White que se busca resolver mediante los métodos iterativos.

Cada método fue ejecutado bajo las mismas condiciones iniciales: una tolerancia de convergencia de $\varepsilon = 10^{-10}$ y un máximo de $N = 2500$ iteraciones. Se ajustaron los valores iniciales de acuerdo con la naturaleza de cada algoritmo, buscando garantizar condiciones óptimas de arranque.

A continuación, se presenta un resumen de los resultados obtenidos. Para cada método, se registró la raíz aproximada x_k, el error asociado $e_k = \text{máx}(|f(x_k)|, |x_k - x_{k-1}|)$, el número de iteraciones k requeridas para converger, y el tiempo de ejecución expresado en milisegundos (ms).

Método	**V.I.**	x_k	e_k	k	**Tiempo (ms)**
Bisección	[a,b]	0.046	$7{,}0095 \times 10^{-11}$	30	2.05
Newton-Raphson	0.05	0.046	$3{,}0445 \times 10^{-12}$	5	0.84
Secante	0.04, 0.05	0.046	$5{,}7427 \times 10^{-11}$	15	2.99
Cordero-Torregosa (CT4)	0.05	0.046	$1{,}2582 \times 10^{-11}$	6	1.86
Kou Modificado (MK6)	0.05	0.046	$8{,}6736 \times 10^{-19}$	3	4.11
Kim-Geum (KG)	0.05	0.046	$1{,}3878 \times 10^{-17}$	4	2.64

Como se puede observar, todos los métodos convergieron exitosamente hacia un mismo valor aproximado de la raíz ($x_k \approx 0{,}046$), lo que evidencia la estabilidad numérica de las soluciones obtenidas. Sin embargo, el camino hacia dicha solución varió significativamente entre los algoritmos.

El método de Bisección, a pesar de su simplicidad, fue el más costoso computacionalmente en términos de iteraciones y tiempo. No obstante, su capacidad de garantizar convergencia bajo condiciones básicas lo mantiene como una herramienta valiosa, especialmente en etapas tempranas de aproximación.

Newton-Raphson, por su parte, demostró un desempeño notable al alcanzar la solución en solo 5 iteraciones, con un tiempo de ejecución inferior a un milisegundo. Esta velocidad se debe a su orden de convergencia cuadrático, aunque requiere una estimación inicial razonablemente cercana y el cálculo explícito de la derivada, lo que puede limitar su aplicabilidad en funciones más complejas.

El método de la Secante, que no necesita derivada, se posicionó como una alternativa intermedia. Aunque necesitó más iteraciones que Newton-Raphson, su facilidad de implementación y estabilidad relativa lo hacen atractivo en ciertos contextos prácticos.

Los métodos avanzados explorados en esta investigación, particularmente el de Cordero-Torregosa (CT4), el de Kou Modificado (MK6) y el de Kim-Geum (KG), mostraron un comportamiento altamente eficiente. El método MK6 fue el más preciso, con un error cercano a 10^{-19} en tan solo tres iteraciones, aunque fue también el más exigente en tiempo de cómputo. Por su parte, CT4 y KG lograron una excelente relación entre precisión y velocidad, sin requerir derivadas de alto orden.

IV-A. Análisis de resultados y recomendaciones

A partir del análisis de los datos anteriores, se elaboró la siguiente tabla comparativa que resume, de forma cualitativa, el comportamiento general de cada algoritmo:

Método	**Precisión**	**Velocidad**	**Robustez**	**Requiere derivada**
Bisección	Media	Lenta	Alta	No
Newton-Raphson	Alta	Muy rápida	Media	Sí
Secante	Media	Rápida	Media	No
CT4	Alta	Rápida	Media	No
MK6	Muy alta	Moderada	Media	Sí
Kim-Geum (KG)	Alta	Rápida	Media	Sí

Con base en esta comparación, se pueden plantear las siguientes recomendaciones:

- **Método de Bisección**: ideal para escenarios donde la robustez es prioritaria y se dispone de un intervalo con cambio de signo.
- **Newton-Raphson**: altamente eficiente en velocidad y precisión si se cuenta con una buena aproximación inicial y derivada explícita.
- **Secante**: útil cuando no se desea o no se puede calcular la derivada, y se prefiere una implementación simple con buena eficiencia.
- **CT4, MK6 y KG**: recomendados para contextos donde se busca alta precisión en el menor número de iteraciones posibles, como en entornos científicos, simulaciones iterativas o sistemas con restricciones de tiempo.

Este estudio permite comprender con mayor profundidad las fortalezas y limitaciones de cada método, contribuyendo así a una toma de decisiones fundamentada en la elección de herramientas numéricas dentro del ámbito de la ingeniería.

V. Conclusiones

La presente investigación permitió analizar de forma comparativa el comportamiento de seis métodos iterativos al resolver la ecuación de Colebrook-White, una expresión no lineal fundamental en el campo de la ingeniería hidráulica. A través de la implementación computacional en Octave y la aplicación de criterios de análisis numérico, se obtuvieron resultados que no solo validan la efectividad de los métodos, sino que también permiten establecer lineamientos para su aplicación práctica según el contexto.

Uno de los principales logros de este estudio fue confirmar que, a pesar de las diferencias en complejidad matemática y estructura computacional, todos los métodos evaluados convergieron hacia una misma raíz aproximada de la función. Esto refleja la consistencia de sus algoritmos y la correcta elección de los parámetros iniciales. Sin embargo, los caminos hacia la convergencia fueron notablemente distintos, lo que evidenció las ventajas y limitaciones de cada enfoque.

El método de Bisección destacó por su simplicidad y robustez, características que lo convierten en una herramienta confiable cuando se dispone de un intervalo que cumple con el teorema de Bolzano. Su principal desventaja radica en su baja velocidad de convergencia, lo cual lo hace poco eficiente en aplicaciones que requieren tiempos de respuesta rápidos.

Newton-Raphson demostró ser el más eficiente en términos de velocidad, alcanzando la solución en muy pocas iteraciones. Su naturaleza cuadrática lo vuelve ideal cuando se cuenta con una buena estimación inicial y es posible calcular la derivada de la función. No obstante, su sensibilidad ante malos valores iniciales o derivadas pequeñas puede comprometer su estabilidad en ciertos escenarios.

El método de la Secante ofreció un balance entre eficiencia y simplicidad, al eliminar la necesidad de derivadas y mantener una velocidad de convergencia aceptable. Aunque requiere más iteraciones que Newton-Raphson, su facilidad de implementación lo hace especialmente útil cuando la derivada no está disponible de forma explícita.

Por otro lado, los métodos avanzados —Cordero-Torregosa (CT4), Kou Modificado (MK6) y Kim-Geum (KG)— aportaron resultados particularmente valiosos en términos de precisión y número de iteraciones. CT4, sin requerir derivadas, logró una excelente aproximación en pocas iteraciones. MK6 fue el método más preciso del estudio, con errores numéricos del orden de 10^{-19}, aunque con un tiempo de ejecución relativamente mayor.

No obstante, se debe tener especial precaución con la implementación del método MK6, ya que su estructura matemática incluye expresiones que pueden conducir fácilmente a divisiones por cero, especialmente cuando los valores de entrada no son adecuados o cuando las derivadas toman valores muy pequeños. Durante la programación, fue necesario incorporar validaciones adicionales para evitar fallos en tiempo de ejecución, asegurando así la estabilidad del código y la confiabilidad de los resultados obtenidos.

Kim-Geum combinó una alta precisión con una buena velocidad de ejecución, posicionándose como una opción poderosa cuando se requiere eficiencia sin sacrificar exactitud.

Desde una perspectiva más amplia, el estudio confirmó la importancia de seleccionar el método iterativo más adecuado en función del problema específico, considerando no solo el orden de convergencia teórico, sino también las condiciones iniciales, los requerimientos de precisión, el costo computacional y la disponibilidad de información como derivadas.

En conclusión, la investigación cumplió exitosamente con sus objetivos al comparar de forma sistemática métodos clásicos y modernos de resolución de ecuaciones no lineales. Los resultados obtenidos pueden ser de gran utilidad en contextos reales de ingeniería donde la precisión, la eficiencia y la estabilidad numérica son factores clave. Además, la implementación práctica y la validación empírica aportan evidencia clara del potencial de los métodos iterativos como herramientas fundamentales en la ingeniería computacional.

APÉNDICE

Repositorio de código fuente: Todos los scripts utilizados en esta investigación, incluyendo la definición de funciones, configuración de parámetros y generación de resultados, se encuentran disponibles en el siguiente repositorio público de GitHub:

https://github.com/fredeos/CE1101-Investigaciones-ANPI

Este repositorio contiene el código implementado en Octave para cada uno de los métodos iterativos analizados, junto con ejemplos de ejecución y visualización de resultados.

REFERENCIAS

[1] R. L. Burden and J. D. Faires, *Numerical Analysis*. Cengage Learning, 2010.

[2] Y. Kim and Y. H. Geum, "A new family of bimetric iterative methods with memory for solving nonlinear equations," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 403, p. 126192, 2021.

[3] A. Cordero and J. R. Torregrosa, "A family of optimal eighth-order iterative methods with memory for nonlinear equations," *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 37, no. 3, pp. 272–281, 2014.

[4] J. Kou and Y. Li, "On the construction of optimal iterative methods for nonlinear equations," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 206, no. 1, pp. 152–160, 2007.

[5] C. F. Colebrook and C. M. White, "Turbulent flow in pipes, with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws," *Journal of the Institution of Civil Engineers*, vol. 11, no. 4, pp. 133–156, 1939.

[6] I. Idelchik, *Handbook of Hydraulic Resistance*. Begell House Publishers, 1994.

[7] J. F. Traub, *Iterative Methods for the Solution of Equations*. Prentice-Hall, 1964.