TD1 Graphes

1) Exercices élémentaires

1.1) Degré, connexité

EXERCICE #1 ► **Une preuve par construction**

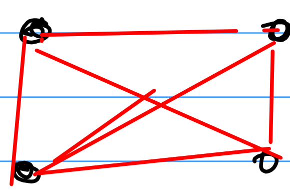
Un graphe est dit k-régulier si tous ses sommets sont de degré k. Prouver la propriété suivante :

Pour tout entier n pair, $n > 2$, il existe un graphe 3-régulier composé de n sommets.

On fait une preuve par récurrence

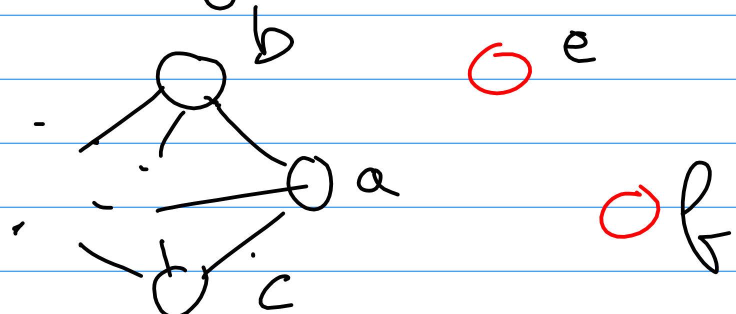
Initialisation : pour $n = 4$

On considère le graphe complet



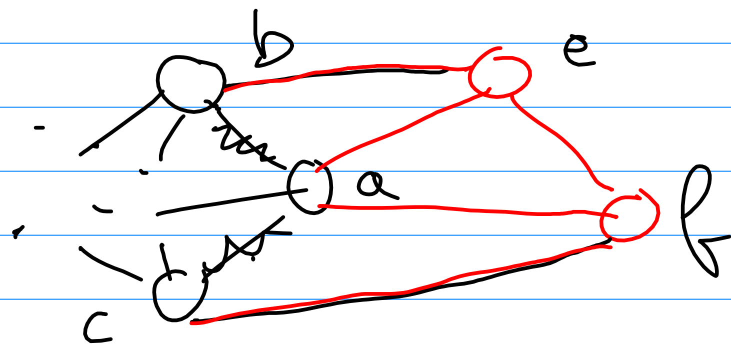
Hérédité : Supposons qu'il existe un graphe 3-régulier pour n sommets avec n pair

On rajoute deux sommets e et f



On considère un sommet s du graphe à n sommets et deux de ses voisins b et c.

On remplace l'arête (b, a) par (b, e) et l'arête (c, a) par (c, f).



On rajoute aussi les arêtes (a, e), (e, f) et (a, f).

Ainsi les sommets a, b, c sont toujours de degré 3 et e et f le sont aussi.
On a donc construit un graphe avec n+2 sommets qui est 3-régulier.

<u>Conclusion:</u> application de l'axiome de récurrence.

EXERCICE #2 ▸ **Degré**

Si m est le nombre d'arêtes d'un graphe G, montrer que

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2m.$$

Notons A l'ensemble des arêtes

$$\sum_{u \in V(G)} d_G(v) = \sum_{u \in V(G)} \sum_{\substack{v \in V(G) \\ \text{tel que} \\ (u,v) \in A}} 1 = \sum_{\substack{u \in V(G), \\ v \in V(G) \\ \text{tel que} \\ (u,v) \in A}} 1 = \underset{\text{nombre d'arêtes}}{2m}$$

Chaque arête (u,v) est comptée dans $d_G(v)$ et dans $d_G(u)$ donc dans $\sum_{u \in V(G)} d_G(v)$ chaque arête est comptée deux fois,

donc $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2m$

EXERCICE #3 ▸ **Connexité**

Montrez que tout graphe connexe à n sommets a au moins ~~n~~ $n-1$ même arêtes. $n \geq 2$

P_n : "Un graphe connexe à n sommets a au moins n arêtes"

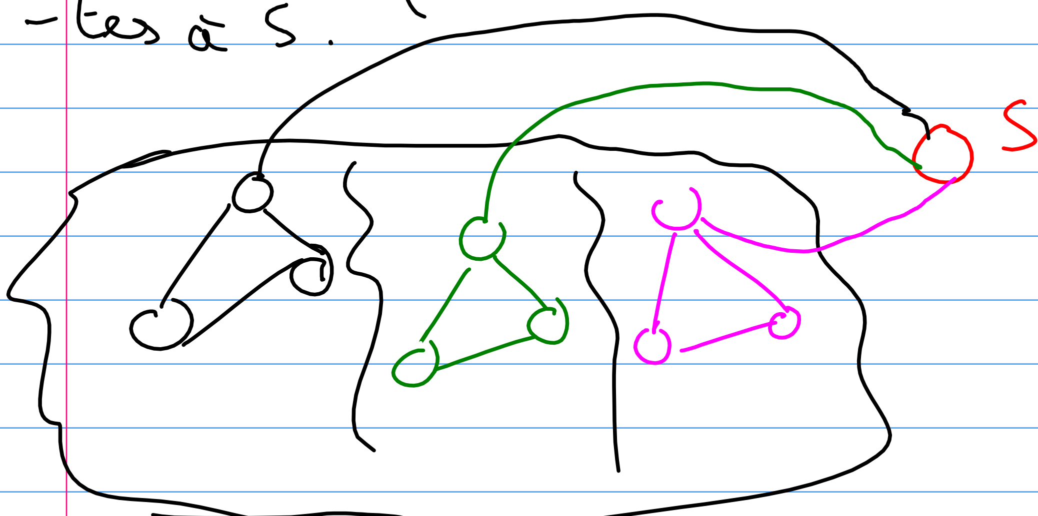
On fait une preuve par récurrence forte :

<u>Initialisation</u> : Un graphe connexe à 2 sommets a au moins une arête sinon il n'est pas connexe

Hérédité : On formule une hypothèse de récurrence forte : pour tout entier $2 \leq m \leq n$, J_m est vraie.

Soit un graphe G connexe à $n+1$ sommets.

Soit un sommet s quelconque de ce graphe ; on enlève s du graphe G ainsi que toutes les arêtes incidentes à s.



Soit $G' = G \setminus \{s\}$ sous graphe de G

et soit ses composantes connexes numérotées de 1 à k et dont les nombres de sommets sont $n_1, \dots, n_k$

avec $n_1 + \dots + n_k = n - 1$

Puisque G est connexe on a au moins une arête dans G reliant s à chacune des composantes connexes de G' :

De plus par hypothèse de récurrence forte, chaque composante connexe a au moins :

$n_1 - 1$ arêtes

$n_2 - 1$ arêtes

$\vdots$

$n_k - 1$ arêtes

soit au total $n_1 + \dots + n_k - k$ arêtes

En ajoutant les k arêtes reliant G aux composantes connexes de $G' = G \setminus \{s\}$ on a dans G au moins :

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k - k + k = n_1 + \dots + n_k$$
$$= n - 1$$

arêtes

l'hérédité est prouvée

<u>Conclusion</u> : Application de l'axiome

de récurrence.

Preuve de Brigitte :

EXERCICE 3 Connexité

Montrez que tout graphe connexe à n sommets a au moins n-1 arêtes.

Par récurrence sur le nombre n de sommets, où n≥1.

. C'est évident si n=1, pas d'arête !

. Supposons qu'on a démontré qu'un graphe connexe à n-1 sommets possède au moins n-2 arêtes.

Si on a un graphe G connexe à n de sommets,

et que celui-ci possède un sommet de degré 1, alors si on supprime ce sommet (ainsi que l'unique arête qui le rattache), on obtient un graphe, toujours connexe, à n-1 sommets donc par hypothèse de récurrence, il possède au moins n-2 arêtes, et finalement, le graphe initial G a n sommets et possède au moins n-1 arêtes ;

```
et que celui-ci ne possède pas de sommet de degré 1, tous les sommets de G sont au moins de degré2.
```

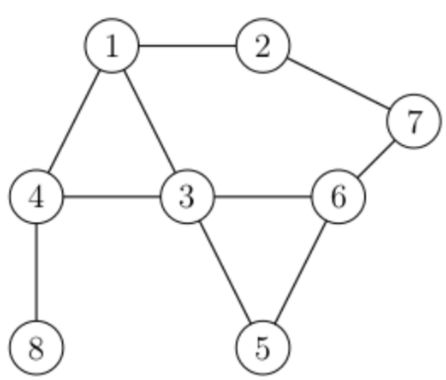
D'après l'exercice 2 : la somme des degrés des ~~arêtes~~ sommets est 2 fois le nombre d'arêtes, et ici chaque sommet est de degré ≥ 2, donc la somme des degrés est supérieure à 2n : 2a≥2n et a≥n≥n-1.

1.1.2 Parcours en largeur

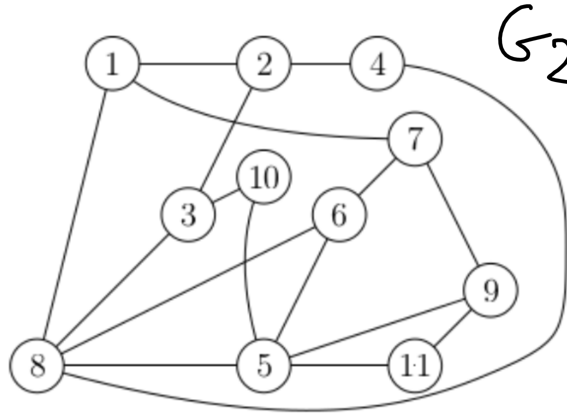
EXERCICE #4 ▸ **Parcours en largeur**

Pour chacun des graphes suivants, donner l'ordre des noeuds rencontrés lors d'un parcours en largeur, en partant du sommet 1. Donner l'arbre résultant de ce parcours.

G_1



G_2



Quelle est la complexité du parcours en largeur avec les listes d'adjacence ?

Parcours en largeur de G_1 :

$1 - \underbrace{2 - 3 - 4}_{d=1} - \underbrace{7 - 6 - 5 - 8}_{d=2}$

Parcours en largeur de G_2 :

$1 - \underbrace{2 - 7 - 8}_{d=1} - \underbrace{4 - 3 - 9 - 6 - 5}_{d=2}$

$- \underbrace{10 - 11 -}_{d=3}$

La complexité du parcours en largeur avec les listes d'adjacence est :

$O(|V| + |E|)$

nombre de sommets ← $|V|$; $|E|$ → nombre d'arêtes

EXERCICE #5 ▸ **Profondeur**

Donner l'ordre des noeuds visités dans le parcours en profondeur des deux graphes précédents à partir du noeud 1.

- Parcours en profondeur de G_1 à partir du sommet 1 :

$1 - 2 - 7 - 6 - 5 - 3 - 4 - 8$

- Parcours en profondeur de G_2 à partir du sommet 1

1 – 2 – 4 – 8 – 3 – 10 – 5 – 6 – 7 – 9 – 11.

EXERCICE #6 ▸ **Applications des parcours**

Proposer un algorithme qui permet de déterminer si un graphe contient un cycle.

On verra que les parcours de graphes peuvent répondre à des buts très divers ; dans tous les cas, le principe d'un parcours est de *visiter* l'ensemble de la composante connexe. A chaque étape on peut donc distinguer états pour les sommets :

1. les sommets pas encore visités,

2. la frontière, c'est-à-dire les sommets déjà visités, dont certains voisins n'ont pas été visités,

3. les sommets déjà traités, c'est-à-dire qu'ils ont été visités, ainsi que tous leurs voisins, visités.

Initialement, tous les sommets sont à l'état (1), sauf le sommet de départ qui est à l'état (2). Une étape du parcours consiste alors à :

- choisir un sommet s de la frontière (2),

- si tous les voisins de s ont été visités, c'est-à-dire qu'aucun n'est à l'état (1), alors s passe à l'état (3),

- sinon on choisi un de des voisins de s non visités, qui passe de l'état (1) à l'état (2).

Le parcours se termine lorsque tous les voisins (de la composante connexe) sont à l'état (3). On a alors visité tous les sommets, dans un ordre qui dépend comment sont choisis les sommets visités à chaque étape.

Dans tous les cas, au cours d'un parcours, il faut se souvenir des sommets déjà parcourus. Très souvent, on munira les sommets d'une marque permettant d'indiquer leur état.

0 pour non vu
1 pour frontière
2 pour vu

on suppose les sommets numérotés
de 0 à n-1

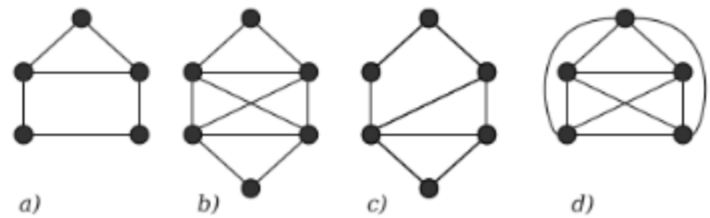
```
def detection_cycle(adj):
    cycle = False
    marque = [0] * len(adj)

    def dfs(sommet):
        nonlocal cycle
        marque[sommet] = 1

        for voisin in adj[sommet]:
            if marque[voisin] == 0:
                dfs(voisin)
            elif marque[voisin] == 1:
                cycle = True
                return
        marque[sommet] = 2

    dfs(0)
    return cycle
```

1.1.3 Cycles : graphes eulériens / hamiltoniens

1.1.3 Cycles : graphes eulériens/hamiltoniens

EXERCICE #7 ► **Cycles Eulériens**

Un chemin est dit eulérien si il passe une et une seule fois par chacune des *arêtes* du graphe. Les graphes suivants possèdent-ils un cycle eulérien ?



a) *b)* *c)* *d)*

Un graphe possède un cycle eulérien ssi tous les sommets sont de degré pair : et si le graphe est connexe.

a) → non

b) → oui

c) → non

d) → oui.

EXERCICE #8 ► **CNS Chemin Eulérien**

Montrer qu'un graphe admet un chemin eulérien ssi il est connexe et au plus 2 de ses sommets sont de degré impair.

Soit un chemin eulérien d'origine un sommet A et d'extrémité un sommet B.

Si un sommet d'un graphe eulérien de degré impair alors c'est

Forcément un sommet avec un passage qui comporte 1 entrée et pas de sortie ou (exclusif) une sortie et pas d'entrée.

Sinon, comme toutes les arêtes sont parcourues exactement une fois, on peut regrouper les arêtes incidentes à un sommet par paire (entrée, sortie) et on a forcément un sommet ~~de~~ degré pair.

Dans un chemin on a toujours une origine et une extrémité, tous les autres sommets sont des sommets de passage de degré pair d'après ce qui précède si le chemin est eulérien.

On en déduit que si un graphe est eulérien alors il est connexe (évident) et il a plus deux sommets de degré impair.

Réciproquement,

- si un graphe est connexe et a tous ses sommets de degré pair

↳ voir preuve de Wikipedia

Rappelons d'abord quelques définitions :

- le *degré* d'un sommet est le nombre d'arêtes incidentes au sommet ;
- un *parcours* est une suite d'arêtes telle que (i) pour chaque arête de la suite on peut distinguer une extrémité initiale et une terminale, (ii) l'extrémité terminale d'une arête est aussi l'extrémité initiale de l'arête qui lui succède dans la suite (et la première arête succède à la dernière) ;
- un *circuit* est un parcours non vide tel qu'aucun sommet n'est l'extrémité initiale (terminale) de plus d'une arête.

La condition suffisante du théorème d'Euler-Hierholzer s'appuie principalement sur les trois faits suivants :

1. Si tous les degrés sont pairs et non tous nuls, alors il existe un circuit ;
2. Un parcours est une union de circuits disjoints - au niveau des arêtes, et non des sommets ;
3. Si l'on retire les arêtes d'un parcours, alors les degrés pairs restent pairs.

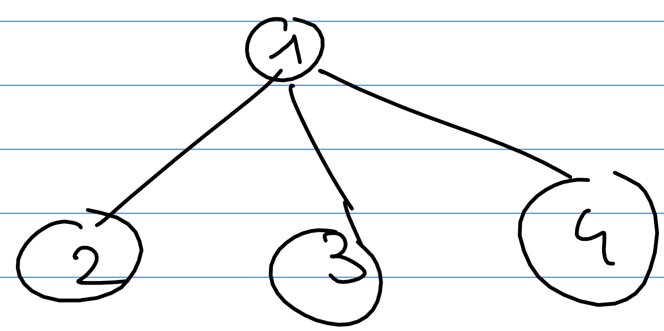
Supposons maintenant que chaque sommet a un degré pair et qu'il n'existe pas de parcours contenant toutes les arêtes. Si l'on considère un parcours avec un nombre maximum d'arêtes et que l'on retire ensuite les arêtes du parcours du graphe, par (3), les degrés restent pairs. D'où, par (1), l'existence d'un circuit disjoint de notre parcours maximum. Mais, par (2), l'union de notre parcours et du circuit forme un autre parcours avec plus d'arêtes, ce qui contredit l'hypothèse de maximalité du parcours initial. Cette contradiction implique donc le théorème.

- <u>2ème cas</u> : On a exactement deux sommets A et B de degré impair.

Puisque le graphe est connexe, il existe un chemin simple reliant A à B.
On enlève toutes les arêtes de ce chemin du graphe.
Dans le sous-graphe obtenu, tous les sommets sont de degré pair et d'après le 1er cas, il existe un circuit eulérien disjoint de notre chemin

En faisant l'union de ce circuit eulérien et de notre chemin reliant A à B on obtient un chemin eulérien d'origine A et d'extrémité B (ou vice-versa).

Rque: Attention, un graphe avec un seul sommet de degré impair n'admet pas de chemin eulérien



EXERCICE #9 ► **Graphes Hamiltoniens**

Un cycle est dit Hamiltonien ssi il passe une et une seule fois par chaque sommet du graphe.

Les graphes suivants possèdent-ils un cycle hamiltonien ?

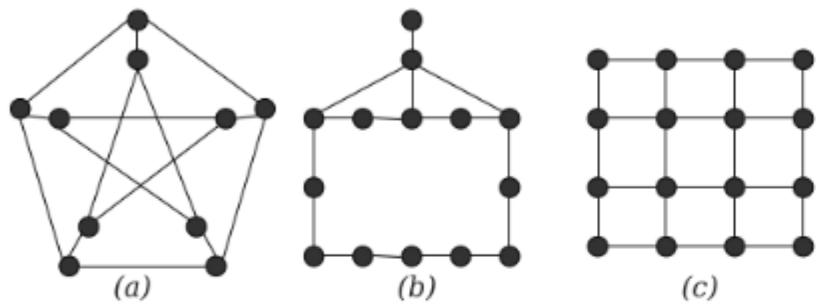
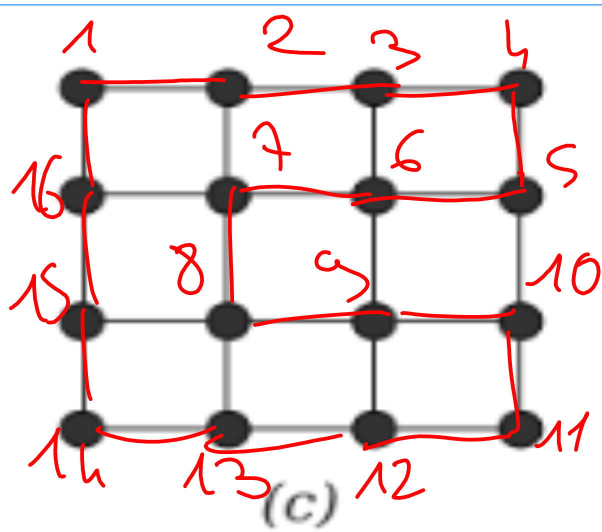
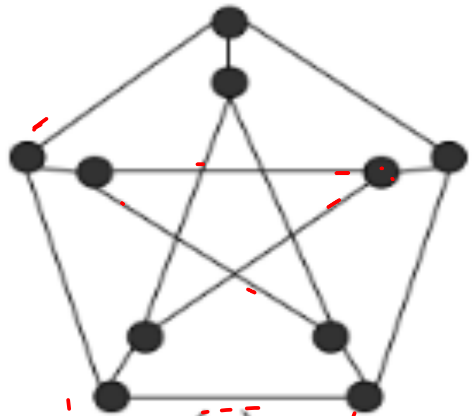


FIGURE 3 – (a) Graphe de Petersen 3-régulier, (b) maison agrandie, (c) grille

Donner un algorithme pour déterminer si un tel cycle existe.



oui cycle hamiltonien

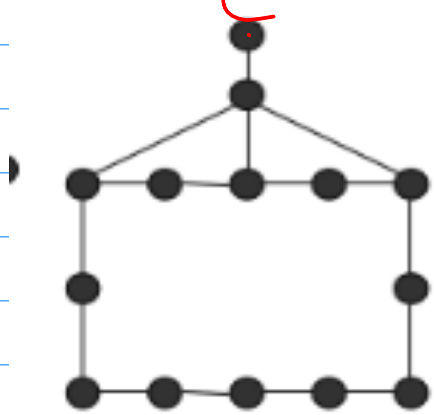


(a)

graphe de petersen

non il existe des chemins hamiltoniens pour le graphe de Petersen mais pas de cycle hamil-tonien

↳ voir wikipedia



(b)

Non car on a un sommet de degré 1 il ne peut être ni un sommet intermédiaire du cycle hamiltonien ni l'origine/extrémité car sinon son voisin serait parcouru 2 fois

Dans un cycle hamiltonien, un sommet est de degré ≥ 2.

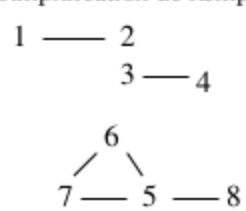
Pour déterminer si un cycle hamiltonien on peut :

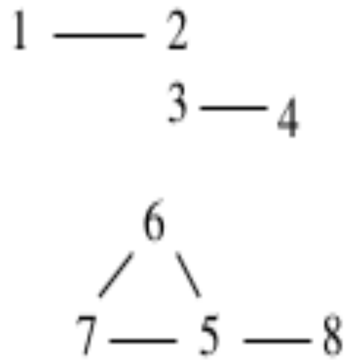
- force brute 1 : énumérer les 2^m ensembles d'arêtes et déterminer pour chacun s'il s'agit d'un cycle et s'il est hamiltonien (passage par les n sommets)

- force brute 2 : exploration à partir d'un sommet de tous les chemins couvrant tous les sommets du graphe en suivant pour chaque sommet toutes les arêtes partant vers des sommets pas encore explorés $\Rightarrow$ complexité en $O(n!)$.

1.1.4 Coloriages

EXERCICE #10 ▸ **Un exemple simple**
Avec l'algorithme polynomial vu en cours (simplification de Kempe), colorier le graphe suivant :





Tant qu'il y a des sommets,
on sélectionne le sommet de degré minimal
on l'enlève

On obtient :

1	B
2	A
3	B
4	A
8	A
5	C
6	B
7	A

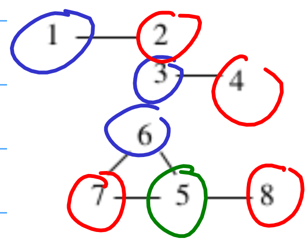
Code de couleur

	A
	B
	C

On assigne les couleurs dans l'ordre inverse en choisissant de façon gloutonne la première couleur libre. Ici on peut colorier avec trois couleurs.

Let's color !

- We assign colors to the nodes greedily, in the reverse order in which nodes are removed from the graph.
- The color of the next node is the first color that is available, *i.e.* not used by any neighbour.



EXERCICE #11 ▸ **Coloriage et Bipartisme**
On dit qu'un graphe est biparti si on peut partitionner ses sommets en deux ensembles V_1 et V_2 de sorte qu'il n'y ait aucune arête entre deux sommets de V_1 (resp. de V_2). Les seules arêtes joignent donc un sommet de V_1 à un sommet de V_2.

1. Montrer qu'un graphe à n sommets est n-coloriable. Donner un graphe à 5 sommets qui n'est pas 4 coloriable.
2. Montrer qu'un graphe est deux coloriable ssi il est biparti.

1) Il est clair qu'un graphe à n sommets est n coloriable

2) Un graphe complet à 5 sommets n'est pas 4 coloriable car la couleur de chaque sommet doit être distincte des couleurs de ses 4 voisins.