TD 1
Graphes (1) - exercices

Sources

- https://www.irif.fr/~francoisl/DIVERS/l3algo1617-TD2.pdf
- https://www.irif.fr/~francoisl/DIVERS/l3algo-td5-1011.pdf
- http://www.gymomath.ch/javmath/polycopie/th_graphe4.pdf
- Feuille de TD L3 ENSL.
- Diverses Annales

1.1 Exercices élémentaires (TD)

1.1.1 Degré, connexité

EXERCICE #1 ► **Une preuve par construction**
Un graphe est dit k-régulier si tous ses sommets sont de degré k. Prouver la propriété suivante :

Pour tout entier n pair, $n > 2$, il existe un graphe 3-régulier composé de n sommets.

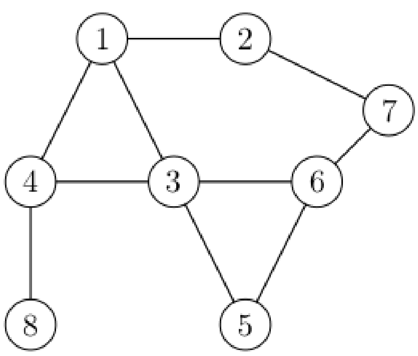
EXERCICE #2 ► **Degré**
Si m est le nombre d'arêtes d'un graphe G, montrer que

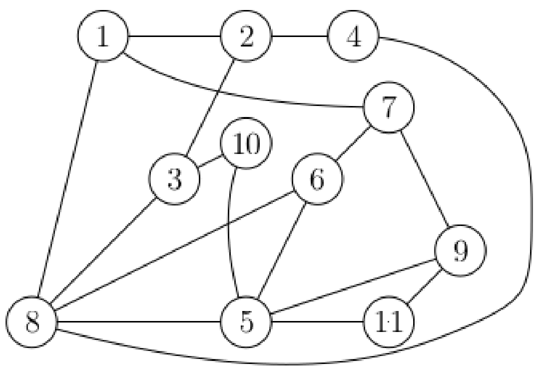
$$\sum_{u \in V(G)} d_G(v) = 2m.$$

EXERCICE #3 ► **Connexité**
Montrez que tout graphe connexe à n sommets a au moins n arêtes.

1.1.2 Parcours

EXERCICE #4 ► **Parcours en largeur**
Pour chacun des graphes suivants, donner l'ordre des noeuds rencontrés lors d'un parcours en largeur, en partant du sommet 1. Donner l'arbre résultant de ce parcours.





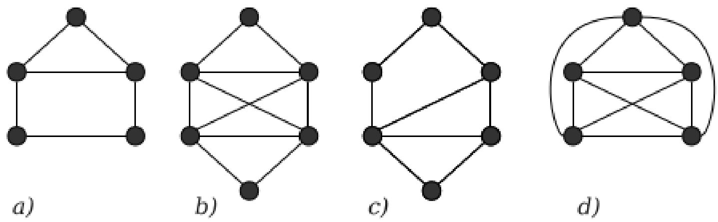
Quelle est la complexité du parcours en largeur avec les listes d'adjacence ?

EXERCICE #5 ► **Profondeur**
Donner l'ordre des noeuds visités dans le parcours en profondeur des deux graphes précédents à partir du noeud 1.

EXERCICE #6 ► **Applications des parcours**
Proposer un algorithme qui permet de déterminer si un graphe contient un cycle.

1.1.3 Cycles : graphes eulériens/hamiltoniens

EXERCICE #7 ► **Cycles Eulériens**
Un chemin est dit eulérien si il passe une et une seule fois par chacune des *arêtes* du graphe. Les graphes suivants possèdent-ils un cycle eulérien ?



EXERCICE #8 ► **CNS Chemin Eulérien**
Montrer qu'un graphe admet un chemin eulérien ssi il est connexe et au plus 2 de ses sommets sont de degré impair.

EXERCICE #9 ► **Graphes Hamiltoniens**
Un cycle est dit Hamiltonien ssi il passe une et une seule fois par chaque sommet du graphe.
Les graphes suivants possèdent-ils un cycle hamiltonien ?

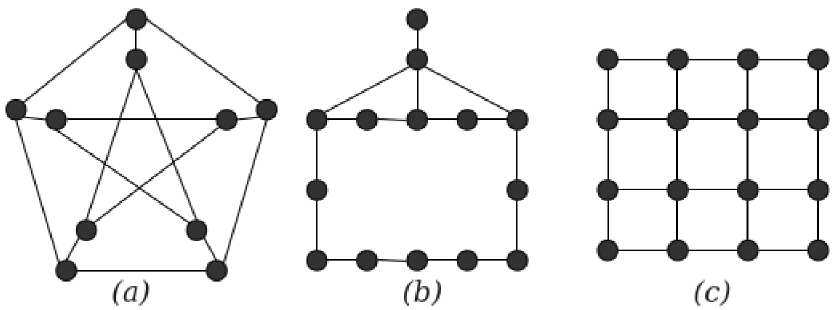
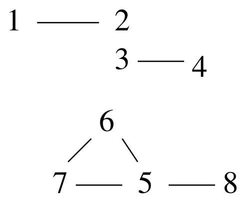


FIGURE 3 – (a) Graphe de Petersen 3-régulier, (b) maison agrandie, (c) grille

Donner un algorithme pour déterminer si un tel cycle existe.

1.1.4 Coloriages

EXERCICE #10 ► **Un exemple simple**
Avec l'algorithme polynomial vu en cours (simplification de Kempe), colorier le graphe suivant :

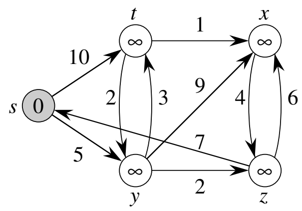


EXERCICE #11 ▶ **Coloriage et Bipartisme**
On dit qu'un graphe est biparti si on peut partitionner ses sommets en deux ensembles V_1 et V_2 de sorte qu'il n'y ait aucune arête entre deux sommets de V_1 (resp. de V_2). Les seules arêtes joignent donc un sommet de V_1 à un sommet de V_2.

1. Montrer qu'un graphe à n sommets est n-coloriable. Donner un graphe à 5 sommets qui n'est pas 4 coloriable.
2. Montrer qu'un graphe est deux coloriable ssi il est biparti.

1.1.5 Distances

EXERCICE #12 ▶ **Dijkstra**
Appliquer l'algorithme au graphe suivant (source = s) :

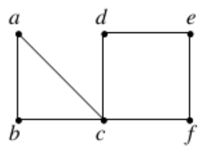


1.1.6 Exercices plus avancés

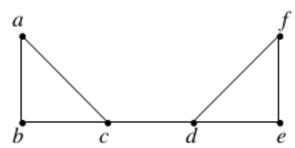
EXERCICE #13 ▶ **Application : fiabilité des réseaux - notion de coupure - facultatif**
Si on considère un réseau informatique où tout le monde doit communiquer avec tout le monde, il est important que le graphe associé soit connexe. Maintenant, il faut aussi que le retrait d'une machine (ou d'un lien) soit sans douleur, d'où les définitions suivantes :

> Le retrait d'un sommet et de toutes les arêtes incidentes à ce sommet conduit à former un sous-graphe avec plus de composantes connexes que dans le graphe initial. Ces sommets sont appelés **points de coupure**. Le retrait d'un point coupure à partir d'un graphe connexe produit un sous-graphe qui n'est pas connexe. De façon similaire, une arête dont le retrait produit un graphe avec plus de composantes connexes que dans le graphe initial est appelée un **séparateur**.

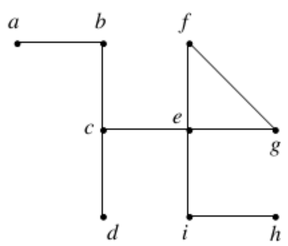
Dans les graphes suivants trouver les points de coupure et les séparateurs :



F



G



H