L’argument diagonal

L’argument diagonal a été inventé par Georges Cantor en 1891
Il lui a permis de donner une deuxième démonstration de la non-dénombrabilité de l'ensemble des nombres réels (il n’existe pas de bijection entre R et N), beaucoup plus simple que la première qu'il avait publiée auparavant. Cantor a ensuite utilisé cet argument pour montrer qu’un ensemble a toujours strictement moins d’éléments que l’ensemble de ses parties.

Pour montrer le théorème d’incomplétude de Gödel, on utilise également un argument diagonal qui ressemble énormément à celui utilisé pour montrer le problème de l’indécidabilité du problème de l’arrêt des machines de Turing que nous allons voir plus tard.

On peut commencer par un paradoxe qui ressemble à un argument diagonal : le paradoxe du Barbier de Bertrand Russell. Dans une île il y a un barbier dont la mission est de raser tous les hommes qui ne se rasent pas eux mêmes, et uniquement ceux-là. Qui rase le barbier ? S’il ne se rase pas lui même alors sa mission est de se raser, et s’il se rase alors il ne doit pas se raser.

La version mathématique du Barbier est l’ensemble des ensembles qui ne s’appartiennent pas. Notons E cet ensemble. E appartient-il à E ? Eh bien si et seulement s’il ne s'appartient pas. Pour résoudre ce paradoxe, on dit qu’il n’existe pas d’ensemble de tous les ensembles. On ne peux donc pas parler de l’ensemble de tous les ensembles qui ne s’appartiennent pas.

C’est aussi avec un argument diagonal qu’on montre que l’ensemble des entiers naturels N a strictement moins d’éléments que l’ensemble des réels R :

Supposons que R et N ont le même nombre d’éléments, c’est à dire qu’il y a une bijection entre N et R.
On peut alors faire un tableau indexé par N de tous les réels :
…, 0432156…
….,4523456

On construit un nouveau réel r de la manière suivante :
Si la première décimale du premier réel du tableau est 0 alors la première décimale de r est 1, sinon c’est 0
Si la deuxième décimale du deuxième réel du tableau est 0 alors la deuxième décimale de r est 1, sinon c’est 0
….
Si la nième décimale du nième réel du tableau est 0 alors la nième décimale de r est 1, sinon c’est 0
….

Clairement r n’est pas dans la liste, donc il manque un élément et ce n’est pas une bijection !

Ce théorème se généralise à l’ensemble des parties d’un ensemble :

Théorème : il n’existe pas de bijection entre un ensemble et son ensemble de parties

On peut se demander s’il y a un ensemble E qui ait strictement plus d’élément que N et strictement moins que R, c’est à dire tel qu’il y ait une injection mais pas de bijection de N dans E et de E dans R ? C’est ce qu’on appelle l’hypothèse du continu. Elle a le statut d’un axiome indépendant des mathématiques que nous faisons dans la vie de tous les jours, dans le sens suivant : nous pouvons décider que la réponse est oui ou non, cela ne changera pas la cohérence des mathématiques que nous utilisons actuellement.

L'argument diagonal

Paradoxe de Russell:

$$E = \{ x \mid x \notin x \}$$

$E \in E$? $E \in E \Leftrightarrow E \notin E$

Montrons que $\mathbb{R}$ a strictement plus d'éléments que $\mathbb{N}$:

On suppose qu'il y a une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$

$\mathbb{N}$ \ $\mathbb{R}$	
0	....., 0421562....
1	...., 12378.....
2	...., 12089....
3	
⋮	

$x = 0,101\ .....$

Théorème : il n'existe pas de bijection entre un ensemble et son ensemble de parties.

Question : existe-t-il un ensemble E tq :

$$\mathbb{N} \hookrightarrow E \hookrightarrow \mathbb{R}$$

pas de bijection $\mathbb{N} \to E$ ni de $E \to \mathbb{R}$

C'est l'hypothèse du continu.