Le théorème de Rice

Nous allons voir maintenant qu’en fait, toutes les questions intéressantes sont indécidables !

On va définir plus généralement ce qu’est un langage reconnu par une machine de Turing M dont tous les calculs ne s’arrête pas : L(M) est l’ensemble des mots qui sont acceptés par la machine, et donc en particulier il faut que le calcul de la machine sur ce mot s’arrête. Un tel langage est appelé semi-décidable (vous trouverez aussi le terme de récursivement énumérable dans la littérature). Par exemple le problème de l’arrêt est semi-décidable : il suffit de lancer la simulation du calcul, et si la calcul s’arrête, on en déduit que le calcul s’arrête, et on accepte l’entrée.

Soit E une propriété des langages, c’est à dire un ensemble de langages : E appartient à P(P({0,1}^*)). Supposons E non triviale dans le sens suivant : il existe une machine de Turing M et L(M) appartient à E et il existe une machine de Turing M et L(M) n’appartient pas à E. Cela veut dire qu’il existe un langage semi-décidable dans E et il existe un langage semi-décidable qui n’est pas dans E. Nous avons le :

Théorème de Rice : Soit E une propriété des langages non triviale. Alors l’ensemble F des codes de machines qui reconnaissent un langage dans E n’est pas décidable.

Par exemple l’ensemble des machines qui acceptent le langage vide est indécidable. Plus généralement pour un langage L décidable donné, l’ensemble des codes de machines qui acceptent L est indécidable. Ou bien par exemple l’ensemble des codes de machines qui acceptent un langage décidable de cardinal 3 est indécidable. Ou l’ensemble des codes des machines qui reconnaissent un langage décidable.

Preuve du théorème de Rice : Soit E une propriété non triviale des langages qui ne contiennent pas le langage vide. Soit M_1 une machine telle que L(M_1) appartient à E, c’est à dire <M_1> appartient à F.

Décrivons une réduction de H’ à F. Soit M’ une machine quelconque. On veut savoir si le calcul de M’ s’arrête sur l’entrée vide, c’est à dire si <M’> appartient à H’. On définit la machine suivante :
M : sur l’entrée x

- Simule le calcul de M’ sur l’entrée vide
- Simule le calcul de M_1 sur x et répond de la même manière

Que fait la machine M ? Si le calcul de M’ sur l’entrée vide ne s’arrête pas alors elle ne s’arrête pas non plus et reconnaît le langage vide, sinon elle répond comme M_1 et reconnaît L(M_1).
On a donc : <M’> appartient à H’ ssi <M> appartient à F et phi(<M’>)=<M> est une fonction calculable.

Si E contient le langage vide, alors on montre que le complémentaire de E n’est pas décidable, ce qui montre que E est décidable.

Voyons une conséquence importante du théorème de Rice pour la programmation. Est-ce qu’un programme que nous venons d’écrire respecte bien certaines spécifications ? Si la question se pose en termes syntaxiques (le programme ne fait pas plus de 100 lignes, ou bien comporte au plus 4 boucles…) la question est en général décidable, mais si la propriété est sémantique (le programme s’arrête toujours, ou calcule la fonction nulle) alors c’est indécidable par le théorème de Rice. Ce qui ne veut pas dire que pour un programme donné, on ne peut pas le montrer. Mais cela signifie qu’on ne peut pas automatiser la preuve. On ne pourra jamais vérifier automatiquement une propriété intéressante d’un programme.

Le théorème de Rice

<u>définition</u> : $L(M) = \{ x \in \{0,1\}^* \mid M(x) = 1 \}$

Un langage accepté par une machine (dont tous les calculs ne s'arrêtent pas nécessairement) est semi-décidable.

Soit E une propriété non triviale des langages :
$E \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0,1\}^*))$
il existe L_1 semi-décidable $L_1 \in E$
L_2 non semi-décidable $L_2 \in E$

Th de Rice : Soit E une propriété non triviale des langages. Alors l'ensemble F des codes des machines qui reconnaissent un langage de E est indécidable.

<u>Preuve</u> réduction de H' à F

supposons que le langage vide $V \notin E$
il existe M_1 et $L(M_1) \in E$ ie $\langle M_1 \rangle \in F$

Soit M' une machine quelconque — $\langle M' \rangle \in H'$?

On définit la machine M qui sur l'entrée x :
- simule M' sur l'entrée vide
- simule M_1 sur x et répond pareil

$\langle M' \rangle \in H'$ ssi $\langle M \rangle \in F$
$\varphi(\langle M' \rangle) = \langle M \rangle$ est calculable

cas similaire si $V \in E$ $\square$