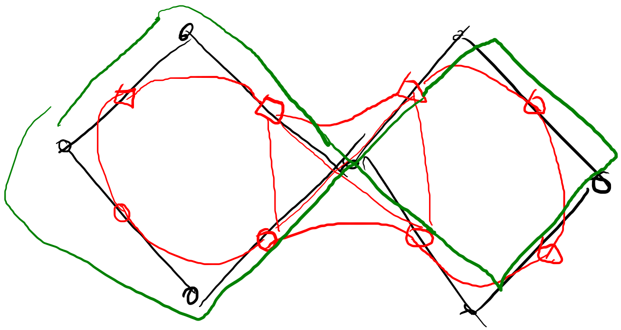
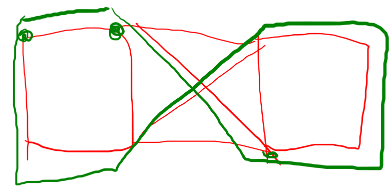
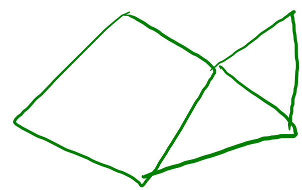
G a un cycle eulérien $\Longleftrightarrow$ G' a un cycle hamiltonien





G a un cycle eulérien $\Leftarrow$ $M(G') = $ OUI

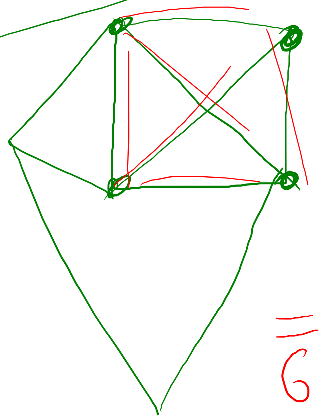
G n'a pas de cycle eulérien $\Leftarrow$ $M(G') = $ NON

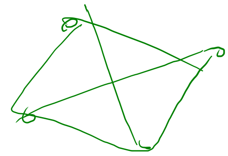


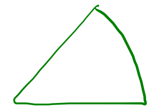
G eulérien $\Leftrightarrow$ G' hamiltonien

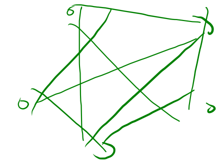
G' hamiltonien ?

CLIQUE





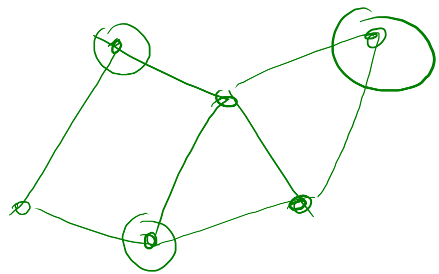


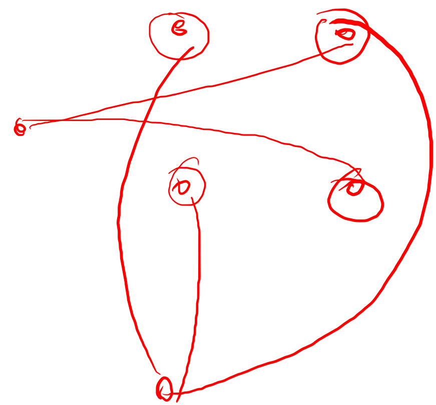


$G \sim \overline{G}$

$= \overline{G}$

INDEPENDANT





Exercice 1. *En chemin !*

Le problème du voyageur de commerce est un problème d'optimisation qui, étant donné une liste de villes, et des distances entre toutes les paires de villes, détermine un plus court chemin qui visite chaque ville une et une seule fois et qui termine dans la ville de départ.

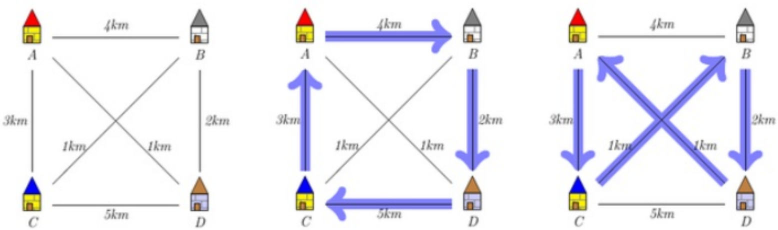


FIGURE 1 – Une instance du problème avec deux chemins : le premier de distance totale 14km, et le deuxième de 7km.

On s'intéresse à **TSP**, le problème de décision associé : étant donné un graphe complet pondéré (G, w) et un entier k, existe-t-il un cycle de poids au plus k passant par toutes les villes une et une seule fois ?

1. Combien existe-t-il de cycles différents passant par toutes les villes une et une seule fois ?
2. Montrer que $TSP \in$ NP.
3. Á l'aide d'une réduction depuis le problème HAMILTONIEN, montrer que TSP est NP-*dur*, c'est-à-dire que tout les problèmes de NP se réduisent à lui. *Indication :* on pourra poser $w((u,v)) = 0$ si $(u,v) \in G$, et 1 sinon.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} & 4 & 3 & 1 \\ 4 & & & \\ 3 & & & \\ 1 & & & \end{array}\right] \end{array}$$

1] $(n-1)(n-2)\ldots 1 = (n-1)!$

2] Soit C "un cycle hamiltonien", on vérifie

- il passe par tous les sommets une et une seule fois

  seen = [False, ..., False]

  on parcourt C et on met à jour seen

  ↳ $O(n)$

- est ce que $w(C) \leq k$

  somme = 0

  on parcourt C :

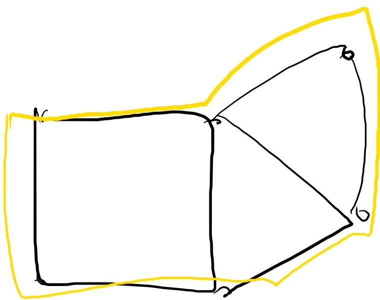
  $(u,v) \rightsquigarrow$ somme += $w((u,v))$

  somme $\leq k$?

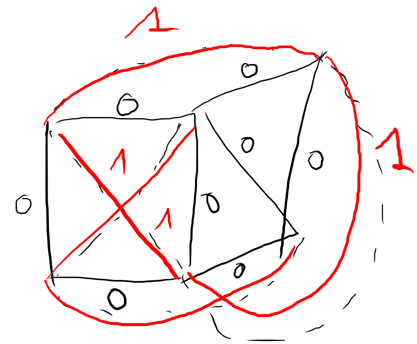
  ↳ $O(n)$

Hamiltonien

TSP



G



(G, ω, k)

$\boxed{k = 0}$

$f(G)$

si $(G, \omega, k) \in TSP$

$\Rightarrow G \in$ Hamiltonien

alors C est un cycle de G

si j'ai une solution C

↳ C n'emprunte que des arêtes de poids 0

si $G \in$ Hamiltonien $\Rightarrow (G, \omega, k) \in TSP$: soit C un cycle hamiltonien de G, on a $\omega(C) = 0$ dans G'

donc solution de TSP

— Pour chaque variable propositionnelle x_i, G possède deux sommets étiquetés x_i et $\overline{x}_i$.

— Pour chaque clause $l_i \vee l_j$, on créé une arête du sommet $\overline{l}_i$ vers l_j ("si l_i est faux alors l_j doit être vrai") et une arête du sommet $\overline{l}_j$ vers l_i ("si l_j est faux alors l_i doit être vrai").

1. Dessinez le graphe d'implication correspondant à la formule suivante :
$F = (\overline{x_1} \vee x_2) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_3} \vee x_1)$.

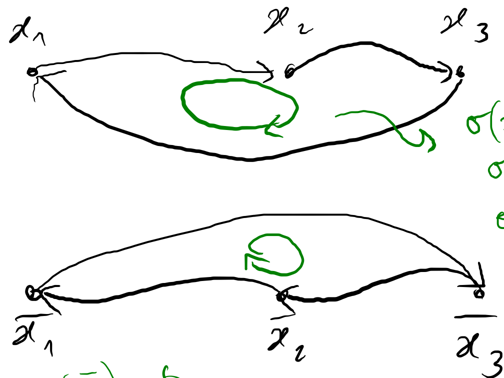
$\overline{x}_1 \vee x_2$

l_1, l_2

$\overline{l}_1 = x_1 \rightarrow x_2$ $\quad$ $\overline{x}_2 \rightarrow \overline{x}_1$

$x_1 \Rightarrow x_2 \equiv \overline{x}_1 \vee x_2$

G



$\sigma(x_1) = 1$
$\sigma(x_2) = 1$
$\sigma(x_3) = 1$

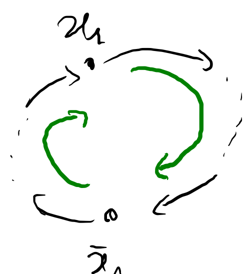
$\sigma(\overline{x}_1) = 0$
$\sigma(\overline{x}_2) = 0$
$\sigma(\overline{x}_3) = 0$

2) F dépends de n et m

nb variables (n), clauses (m)

$|G| \leq 2n + 2m$ polynomial en n et m

Si G possède un cycle



alors F est insatisfiable

$\boxed{\text{G pas de cycle :}}$

G ne possède pas de cycle contenant x_i et $\overline{x}_i$ $\Longleftrightarrow$ F est satisfiable

$\in P \leftarrow$ un parcours depuis chaque noeud $O(2n \times (2n+2m))$ polynomial

$$A \leq B$$

- si $B \in P$, alors $A \in P$ (2-SAT)

  ≤ 0 $\qquad\qquad$ ≤ 0

- si $A \in NP$-dur, alors $B \in NP$-dur (exo 7)

  $0 \leq$ $\qquad\qquad$ $0 \leq$