Exercice 1. *En chemin !*

Le problème du voyageur de commerce est un problème d'optimisation qui, étant donné une liste de villes, et des distances entre toutes les paires de villes, détermine un plus court chemin qui visite chaque ville une et une seule fois et qui termine dans la ville de départ.

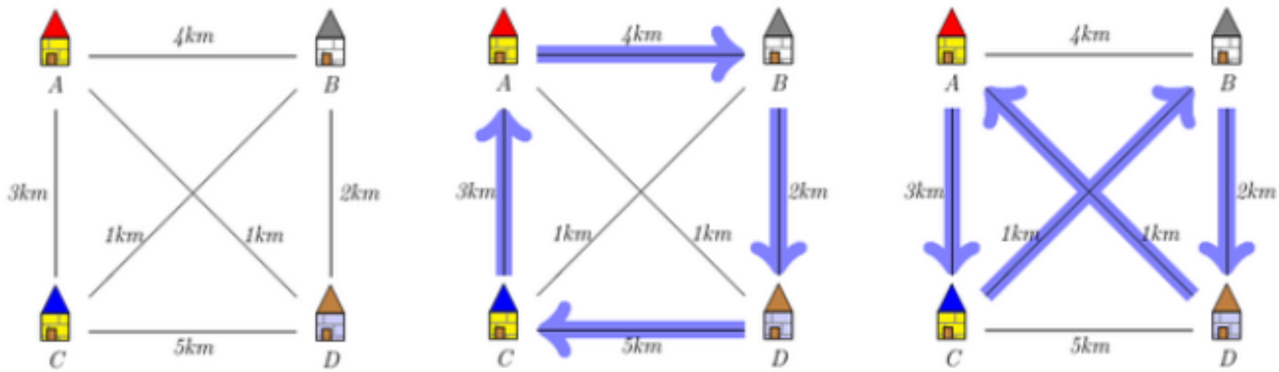


FIGURE 1 – Une instance du problème avec deux chemins : le premier de distance totale 14km, et le deuxième de 7km.

On s'intéresse à **TSP**, le problème de décision associé : étant donné un graphe complet pondéré (G, w) et un entier k, existe-t-il un cycle de poids au plus k passant par toutes les villes une et une seule fois ?

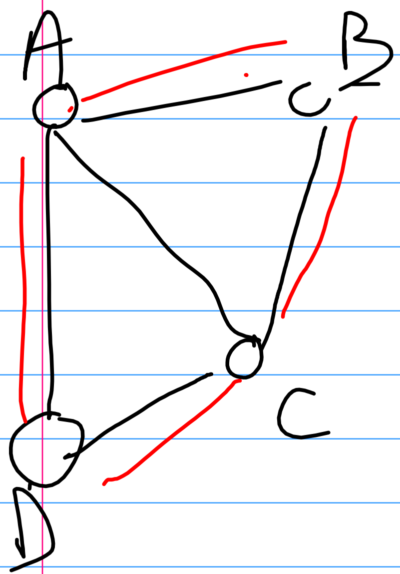
1) Ici le graphe est complet avec 4 sommets donc $3! = 6$ cycles différents passent par toutes les villes une et une seule fois. $(n-1)!$ cycles

2) Soit une solution de TSP, il suffit d'additionner les poids de toutes les arêtes du cycle et de vérifier si cette somme est $\leq k$
Donc TSP $\in$ NP

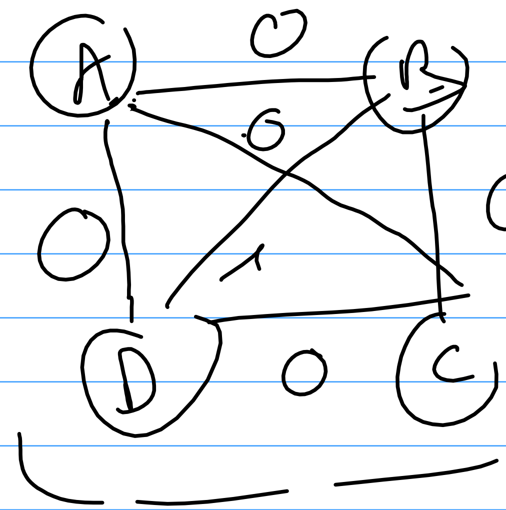
3)

cycle hamiltonien

voyageur de commerce



réduction



Une solution du problème TSP avec K = 0 est nécessairement un cycle hamilto-nien

Correction :

1) On part d'un sommet :

$n-1$ choix pour le suivant

$n-2$ choix pour le 3ème ..

etc.

On a donc au total $(n-1)\times(n-2)\times\dots\times 1 = (n-1)!$ cycles différents passant par tous les sommets.

2) Soit C "un cycle hamiltonien" solution candidate pour TSP avec paramètre K

(A) On vérifie d'abord que c'est un cycle hamiltonien.
On peut le vérifier en temps linéaire : On fait un tableau de booléens
$seen = [\underbrace{False, \ldots, False}_{\text{taille nombre de sommets}}]$

On parcourt C et on met à jour seen.

↳ en $O(n)$

(B) On vérifie ensuite que la somme des poids des arêtes est $\leq k$
c'est-à-dire que $w(C) \leq k$

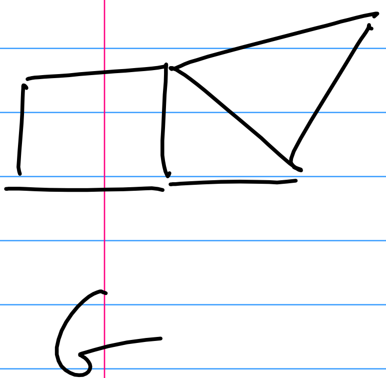
somme = 0

On parcourt C
On met à jour C :
$(u,v) \leadsto$ somme $+= w(u,v)$
On vérifie à la fin si somme $\leq k$.

↳ en $O(n)$

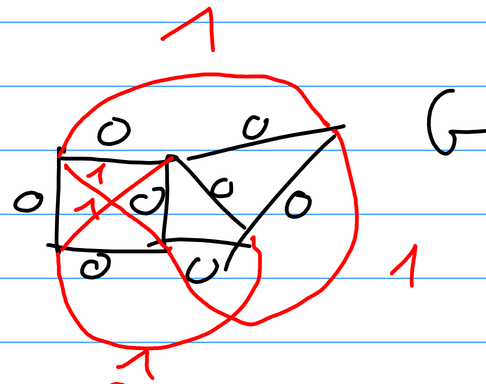
(3) Réduction de Hamiltonien à TSP

Hamiltonien



TSP

On doit avoir un graphe complet.



en rouge les arêtes ajoutées pour que le graphe soit complet.
on leur donne le poids 1 et 0 aux arêtes déjà dans G.

Preuve : par double implication

$\Leftarrow$ Si j'ai une solution C dans TSP avec $k = 0$ alors C n'emprunte que des arêtes de poids 0 alors par construction c'est un cycle hamiltonien dans G.

$\Rightarrow$ Soit un cycle hamiltonien de G dans G' son poids est 0 donc c'est une solution de G'

Exercice 2. *Le retour de Horn*

On s'intéresse à la réduction polynomial de 2-SAT vers la recherche de chemin dans un graphe orienté. On rappelle que 2-SAT est la satisfiabilité d'une Forme Normale Conjonctive F comportant au maximum 2 littéraux par clause. On considère la transformation suivante d'une instance F de 2-SAT en un graphe *orienté* G appelé le *graphe d'implication* de F.

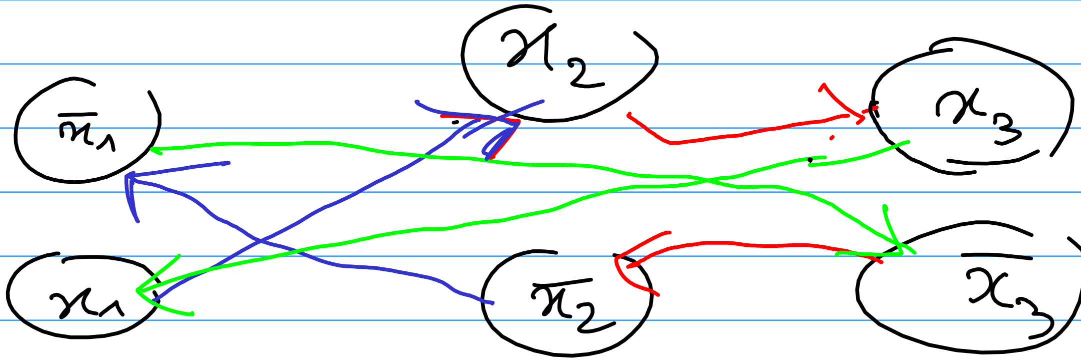
— Pour chaque variable propositionnelle x_i, G possède deux sommets étiquetés x_i et $\overline{x}_i$.

— Pour chaque clause $l_i \vee l_j$, on créé une arête du sommet $\overline{l}_i$ vers l_j ("si l_i est faux alors l_j doit être vrai") et une arête du sommet $\overline{l}_j$ vers l_i ("si l_j est faux alors l_i doit être vrai").

1) Dessiner le graphe d'implication correspondant à la formule suivante.

$$F = (\overline{x}_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_3 \wedge x_1)$$

réduction



Rque : Pour

2. Donnez l'ordre de grandeur de la complexité de la construction du graphe d'implications en fonction du nombre n de variables et du nombre m de clauses de l'instance 2-SAT à transformer.

n variables $\rightarrow$ $2n$ sommets

m clauses $\rightarrow$ $2m$ arêtes

en $O(m+n)$?

3. Soit F une instance de 2-SAT et G le graphe d'implications correspondant. Montrez que, s'il existe dans G un circuit passant par deux sommets x_i et $\overline{x_i}$, alors F est insatisfiable.

Indication : Montrez (par double implication) que les littéraux reliés par une chaîne fermée d'implications (un circuit du graphe G) ne peuvent qu'avoir la même valeur de vérité (Vrai ou Faux), dans une interprétation satisfiant F.

- Si on un circuit dans le graphe G passant deux sommets x_i et x_i alors on a par chaîne d'implications logiques :
  - soit $x_i \rightarrow \overline{x_i}$
  - soit $\overline{x_i} \rightarrow x_i$

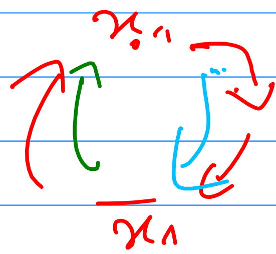
  Dans les 2 cas on a une contradiction et F est insatisfiable.

- Démontrons par double implication : que I instance de 2-SAT ssi $h(I)$ est couvert par un ensemble de circuits qui ne contiennent pas x_1 et $\overline{x_1}$:

=> On suppose que I est une instance satisfiable 2-Sat !

Correction :

1) Si G possède un cycle avec x_i et $\overline{x_i}$ F est insatisfiable



On raisonne par disjonction des cas : on suppose x_1 vrai puis $\overline{x_1}$ vrai et on aboutit à une contradiction

On peut montrer que si G ne possède pas de cycle avec x_i et $\overline{x_i}$ alors F est satisfiable.

3) et 4)

Attention à la terminologie : on dit A se réduit à B

$A \leq B$

- Si $B \in P$ alors $A \in P$ (2-Sat)
- Si $A \in NP_{dur}$ alors $B \in NP_{dur}$ (erreur)

4) Donner un algorithme qui permet de décider si deux sommets donnés font partie d'un même circuit

On lance un parcours DFS depuis le sommet A et on détermine si on peut atteindre le sommet B
Symétriquement depuis le sommet B.

Si chacun peut atteindre l'autre on a un cycle.
Cet algorithme est polynomial en le nombre de sommets et d'arêtes

5) On a construit une réduction d'une instance de 2_Sat vers une instance d'un problème de recherche de cycle entre deux sommets d'un graphe orienté, qui appartient à la classe P
. On en déduit que 2-Sat appartient à la classe P.

Exercice 3. *Cahier de coloriage*

On s'intéresse au problème K-COULEUR suivant : étant donné un graphe $G = (V, E)$, existe-t-il une fonction $c : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ telle que pour toute arête $(u, v) \in E$, on a $c(u) \neq c(v)$.

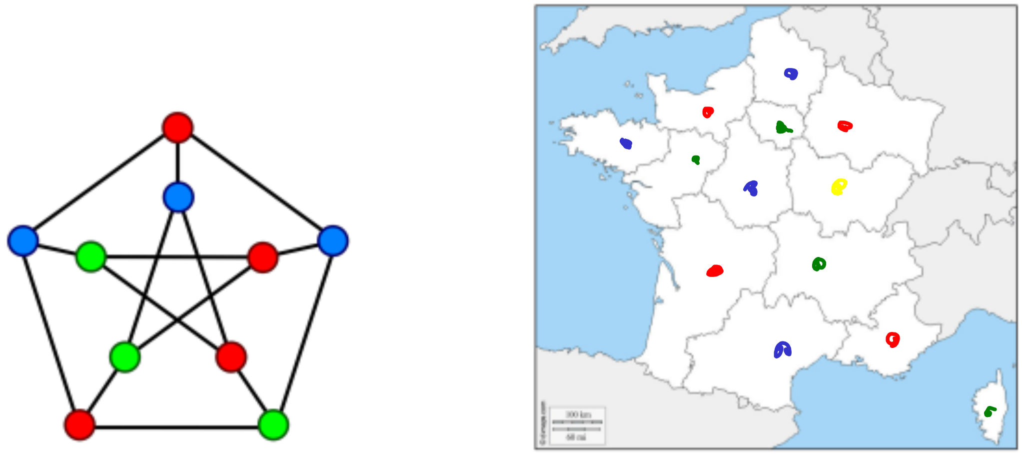


FIGURE 2 – Une instance résolue de 3-coloriage à gauche et une instance à résoudre à droite.

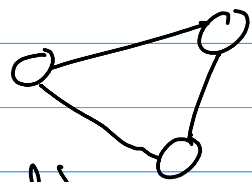
1) Trouver une 4 - coloration de la carte de France .

2) Montrer que 2_Couleur $\in P$:

Cela équivaut à déterminer si le graphe est biparti .

3) Montrer qu'un graphe G est 2 coloriable ssi il n'existe pas de cycle de longueur impaire :

$\Rightarrow$ S'il existe un cycle de longueur impaire alors si on numérote les sommets du cycle dans le sens de parcours du cycle, on démontre par récurrence que les sommets de même parité sont de même couleur.



Si on un nombre impair d'arêtes alors l'avant dernier sommet du cycle et le premier sont de même couleur et reliés par une arête $\Rightarrow$ le graphe n'est pas 2 coloriable

On a démontré l'implication par contraposée

$\Leftarrow$ On suppose qu'il n'existe pas de cycle de longueur impair dans G.

On commence un parcours dfs depuis un sommet et on alterne les couleurs.

Si on n'a pas de cycle le coloriage est possible.

Si on a un cycle, comme il est de longueur paire, le coloriage est aussi possible.

4. On suppose maintenant que le problème 2-SAT suivant est dans P : étant donnée une formule F en forme normale conjonctive dans laquelle chaque clause a exactement 2 littéraux, F est-elle satisfiable ?
Re-montrer, à l'aide d'une réduction à 2-SAT, que 2-COULEUR est dans P.

On représente chaque sommet i par une variable propositionnelle x_i

x_i → vrai si x_i est blanc
→ faux si x_i est noir

2-Couleur 2-Sat

instance Graphe ⇝ $(x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_1 \wedge \overline{x_3})$ ... $(x_1 \wedge \overline{x_k})$ ...

avec $2, 3, \ldots, k$