# Introduction

En 1900, le mathématicien allemand David Hilbert participe au deuxième congrès international des mathématiciens qui a lieu à Paris . C’est le congrès qui a encore lieu actuellement tous les 4 ans et délivre maintenant depuis 1936 la médaille Fields. Il donne la célèbre liste des 23 problèmes de Hilbert, la liste des problèmes qui sont pour lui important à résoudre pour le siècle à venir. Hilbert est un optimiste. Il dit “Wir müssen wissen, wir werden wissen” (nous devons savoir, nous saurons). Dans ses problèmes il y en a plusieurs où il s’agit de trouver un algorithme pour répondre à une question. Il y a le fameux 10ème problème, sur les solutions des équations diophantiennes, c’est à dire étant donné un polynôme à plusieurs variables à coefficients entiers relatifs, a-t-il une racine entière ?
C’est Matiyasevich qui apportera en 1970 la dernière pierre pour répondre à cette question par la négative.

Hilbert va plus loin en 1928 et pose le « problème de décision » (Entscheidungsproblem) : peut-on décider à l’aide d’un algorithme si un énoncé mathématique est vrai ? Ce problème n’a pas la même réponse selon le langage utilisé pour écrire les formules.

Mais pour pouvoir répondre négativement à ce genre de question, il faut pouvoir montrer qu’il n’y a pas d'algorithme pour résoudre un problème, mais ça c’est beaucoup plus difficile que de comprendre ce que c’est qu’un algorithme. Même sans connaître de définition précise, on peut reconnaître un algorithme. On peut expliquer que c’est comme une recette de cuisine, que c’est une liste finie d’instruction, on peut donner l’intuition informellement de ce que c’est. L’algorithme d’Euclide par exemple a été imaginé bien avant qu’on ait une définition d’un algorithme.

Tout le monde comprend bien ce qu'est un algorithme. Mais pour savoir ce qui n'est pas calculable par un algorithme il en faut une définition beaucoup plus précise. J'aime bien comparer ça avec la définition de fonction continue. L'intuition d’une fonction continue n’est pas tres difficile a donner. On peut dire qu’on ne lève pas le crayon. Qu’avec certaines opérations, comme l’addition, à partir de deux fonctions continues on obtient une nouvelle fonction continue. Et c'est seulement quand les élèves ont acquis une certaine familiarité avec celles ci qu'on peut passer à la définition avec les epsilon et les alpha dont on a besoin pour montrer que certaines fonctions ne sont pas continues.

Suite au congrès international de mathématiques en 1900 à Paris, dans lequel Hilbert a énoncé sa fameuse liste de problèmes, les mathématiciens se sont posé plein de questions sur les fondements des mathématiques et la calculabilité. Comment définir proprement un algorithme ?

En 1933, Kurt Gödel et Jacques Herbrand définissent formellement la classe des fonctions calculables, qu’ils appellent récursives : c’est l’ensemble qui contient comme briques de base les fonctions constantes, les projections et le successeur (ajouter un à un entier), et stable par composition, définition par récurrence et schéma mu (définit le plus petit entier qui annule une fonction déjà définie).
En 1936 Alonzo Church définit le lambda calcul et les fonctions lambda-calculables.
Indépendamment en 1936 Alan Turing définit avec ses machines, inspirées de la machine à écrire de sa mère, une autre version des fonctions calculables
On peut alors se demander : quelle est la bonne définition parmi ces trois là ?

Ce qui est remarquable, c’est que toutes ces tentatives de définir ce qu’est un algorithme, ou encore ce qu’est une fonction calculable par un algorithme, ont été prouvées équivalentes. C’est la thèse de Church.

C’est une thèse au sens philosophique : on pense avoir capturé ce qu’est une fonction calculable par un système physique. Et jusqu’à maintenant cette thèse n’a pas été démentie.

En 1936 Alonzo Church montre que  le « problème de décision » (Entscheidungsproblem) n’est pas décidable : c’est une bonne nouvelle pour les mathématiciens ! Il n’existe pas d’algorithme pour prouver des théorèmes à leur place ! En 1937 Alan Turing donne une nouvelle preuve du théorème de Church en montrant l’indécidabilité du problème de l’arrêt, que nous allons voir plus tard dans ce cours.