DIU EIL Bloc 5

Graphes : clôture transitive, distances

Laure Gonnord

http://laure.gonnord.org/pro/

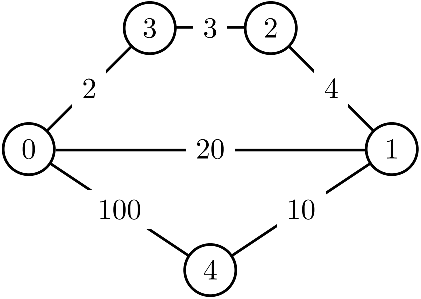
Laure.Gonnord@univ-lyon1.fr

DIU EIL, Dpt Info UCBL

Bloc 5 2019-20

1. Distances
   - Algorithme naïf
   - Floyd-Warshall
   - Dijkstra

Le problème



Distance entre...

- deux sommets ;
- ou bien tous les couples de sommets.

Crédit slides : S. Gonnord

1. Distances
   - Algorithme naïf
   - Floyd-Warshall
   - Dijkstra

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i, j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes.**
- Fastoche :

$M_{i,j}^{(n-1)}$ O(n×n) pour i et j fixés

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \mid 0 \leqslant \ell \leqslant n-1\right\}\right)$$

↳ sur $\ell \in V$ donc $O(n)$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

· On a 4 boucles imbriquées :
-> Boucle sur les k × n
-> Pour k fixé 2 boucles sur les (i,j) × n²
-> Pour k et i,j fixé boucle sur les ℓ × n

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i, j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes.**
- Fastoche :

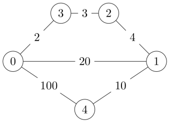
$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \mid 0 \leqslant \ell \leqslant n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

sommets

initialisation

$$G = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & \infty & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & \infty \\ 2 & \infty & 3 & \infty & \infty \\ 100 & 10 & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix} \end{array}$$



matrice symétrique car graphe non orienté

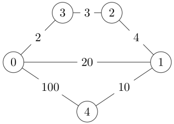
Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i, j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes.**
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \;\middle|\; 0 \leqslant \ell \leqslant n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$G = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & \infty & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & \infty \\ 2 & \infty & 3 & \infty & \infty \\ 100 & 10 & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix} \end{array}$$



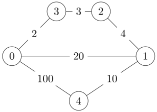
Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i, j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes.**
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \;\middle|\; 0 \leqslant \ell \leqslant n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$M^{(1)} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & 0 & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 4 & 0 & 3 & \infty \\ 2 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ 100 & 10 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

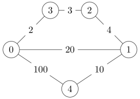


Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes.**
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \mid 0 \leqslant \ell \leqslant n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$



$$M^{(1)} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & 0 & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 4 & 0 & 3 & \infty \\ 2 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ 100 & 10 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

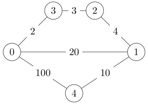
Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i, j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes.**
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \;\middle|\; 0 \leqslant \ell \leqslant n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$M^{(1)} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & 0 & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 4 & 0 & 3 & \infty \\ 2 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ 100 & 10 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

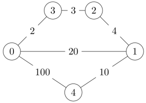
- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes.**
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \;\middle|\; 0 \leqslant \ell \leqslant n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

chemin d'au plus 2 arêtes

$$M^{(2)} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 20 & {\color{red}5} & 2 & {\color{red}30} \\ 20 & 0 & 4 & {\color{red}7} & 10 \\ {\color{red}5} & 4 & 0 & 3 & {\color{red}14} \\ 2 & {\color{red}7} & 3 & 0 & {\color{red}102} \\ {\color{red}30} & 10 & {\color{red}14} & {\color{red}102} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



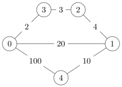
Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes.**
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \mid 0 \leqslant \ell \leqslant n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$M^{(2)} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 20 & 5 & 2 & 30 \\ 20 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 102 \\ 30 & 10 & 14 & 102 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



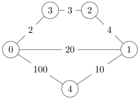
Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i, j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes.**
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \mid 0 \leqslant \ell \leqslant n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$M^{(2)} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 20 & 5 & 2 & 30 \\ 20 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 102 \\ 30 & 10 & 14 & 102 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



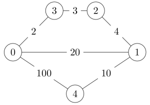
Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i, j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes.**
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \;\middle|\; 0 \leqslant \ell \leqslant n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$M^{(3)} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & 2 & 30 \\ 9 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 17 \\ 30 & 10 & 14 & 17 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

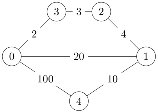
- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes.**
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \mid 0 \leqslant \ell \leqslant n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

chemins d'au plus 3 arêtes

$$M^{(3)} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & 2 & 30 \\ 9 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 17 \\ 30 & 10 & 14 & 17 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

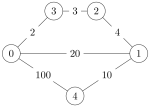


Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i, j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes.**
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \;\middle|\; 0 \leqslant \ell \leqslant n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$



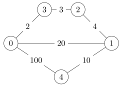
$$M^{(3)} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & 2 & 30 \\ 9 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 17 \\ 30 & 10 & 14 & 17 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i, j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes.**
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \mid 0 \leqslant \ell \leqslant n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$



chemins d'au plus 4 arêtes

$$M^{(4)} = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 9 & 5 & 2 & \color{red}{19} \\ 1 & 9 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 7 & 3 & 0 & 17 \\ 4 & \color{red}{19} & 10 & 14 & 17 & 0 \end{array}$$

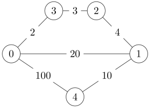
Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i, j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes.**
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \;\middle|\; 0 \leqslant \ell \leqslant n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$M^{(4)} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & 2 & 19 \\ 9 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 17 \\ 19 & 10 & 14 & 17 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



1 Distances

- Algorithme naïf
- Floyd-Warshall
- Dijkstra

Algorithme de Floyd-Warshall

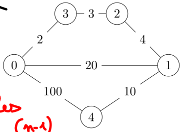
- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S|-1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !). Boucle sur k → × n
- Fastoche : Pour k fixé boucle sur les i,j → × n²

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

↳ O(n³)

exemple de programmation dynamique, à comparer avec l'algo naïf :

- Complexité ? $|S|^3$



Algo naïf

- ~~Fastoche~~ :

on économise n fois une boucle en n et ce pour les n² $N_{i,j}^{(n-1)}$

$M_{i,j}^{(n-1)}$ O(n×n) pour i et j fixés

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \mid 0 \leqslant \ell \leqslant n-1\right\}\right)$$

↳ sur ℓ ∈ V donc O(n)

On a simplifié une boucle
(en considérant un ordre d'examen)

La boucle

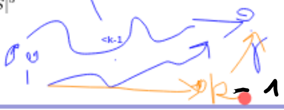
$$\min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \mid 0 \leqslant \ell \leqslant n-1\right\}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S|-1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$



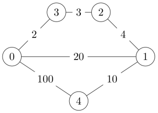
Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i, j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$G = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \infty & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & \infty & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & \infty \\ 2 & \infty & 3 & \infty & \infty \\ 100 & 10 & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix} \end{array}$$



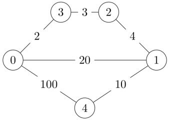
Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$G = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} \infty & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & \infty & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & \infty \\ 2 & \infty & 3 & \infty & \infty \\ 100 & 10 & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix} \end{array}$$



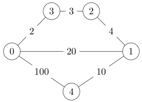
Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(0)} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & 0 & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 4 & 0 & 3 & \infty \\ 2 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ 100 & 10 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



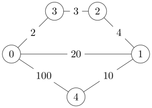
Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i, j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(0)} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & 0 & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 4 & 0 & 3 & \infty \\ 2 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ 100 & 10 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



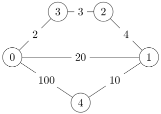
Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(0)} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & 0 & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 4 & 0 & 3 & \infty \\ 2 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ 100 & 10 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



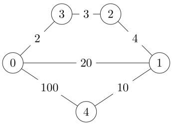
Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(1)} = \begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & 0 & 4 & 22 & 10 \\ \infty & 4 & 0 & 3 & \infty \\ 2 & 22 & 3 & 0 & 102 \\ 100 & 10 & \infty & 102 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



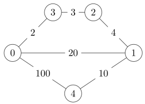
Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i, j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(1)} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & 0 & 4 & 22 & 10 \\ \infty & 4 & 0 & 3 & \infty \\ 2 & 22 & 3 & 0 & 102 \\ 100 & 10 & \infty & 102 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



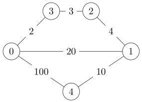
Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(1)} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & 0 & 4 & 22 & 10 \\ \infty & 4 & 0 & 3 & \infty \\ 2 & 22 & 3 & 0 & 102 \\ 100 & 10 & \infty & 102 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



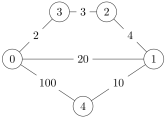
Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(2)} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 20 & 24 & 2 & 30 \\ 20 & 0 & 4 & 22 & 10 \\ 24 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 22 & 3 & 0 & 32 \\ 30 & 10 & 14 & 32 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 24 & 2 & 30 \\ 20 & 0 & 4 & 22 & 10 \\ 24 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 22 & 3 & 0 & 32 \\ 30 & 10 & 14 & 32 & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 24 & 2 & 30 \\ 20 & 0 & 4 & 22 & 10 \\ 24 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 22 & 3 & 0 & 32 \\ 30 & 10 & 14 & 32 & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i, j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 24 & 2 & 30 \\ 20 & 0 & 4 & \color{red}{7} & 10 \\ 24 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & \color{red}{7} & 3 & 0 & \color{red}{17} \\ 30 & 10 & 14 & \color{red}{17} & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 24 & 2 & 30 \\ 20 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 24 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 17 \\ 30 & 10 & 14 & 17 & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i, j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 24 & 2 & 30 \\ 20 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 24 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 17 \\ 30 & 10 & 14 & 17 & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & 2 & 19 \\ 9 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 17 \\ 19 & 10 & 14 & 17 & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i, j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & 2 & 19 \\ 9 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 17 \\ 19 & 10 & 14 & 17 & 0 \end{pmatrix}$$

Warshall pour la clôture transitive

un chemin allant de i à j avec des arêtes de n°<k
est un chemin allant de i à j ———— de n°<k-1
ou un chemin composé d'arêtes allant de i à k
avec des arêtes de n°< k-1 et d'un chemin allant
de k à j avec arêtes de n°<k-1

"il existe un chemin....":

remplacé +

$$C_k[i,j] = C_{k-1}[i,j] \text{ or } (C_{k-1}[i,k] \text{ and } C_{k-1}[k,j])$$

on peut passer par k-1

on remplace min par or

complexité en $O(n^3)$

1 Distances

- Algorithme naïf
- Floyd-Warshall
- Dijkstra

Algorithme de Dijkstra $G = (V, E)$

Dessin

- Distances à UN sommet s_0

→ Floyd-Warshall → distances minimales à tous les sommets du graphe.

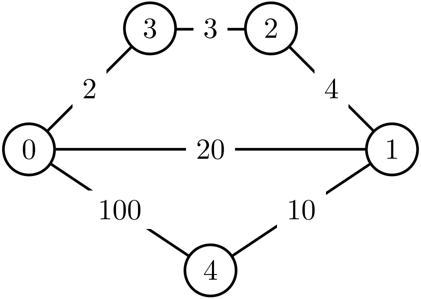
- Idée : partition $V = \mathcal{S} \cup \mathcal{Q}$, avec $\mathcal{S}$ qui grossit.
  - la distance des $s \in \mathcal{S}$ à s_0 est connue.
  - pour $s \in \mathcal{Q}$, on connaît la distance à s_0 via $\mathcal{S}$

Algorithme de Dijkstra $G = (V, E)$

Dessin

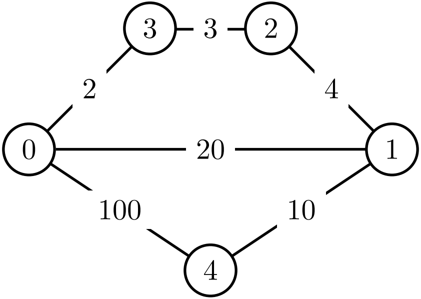
- Distances à UN sommet s_0
- Idée : partition $V = \mathcal{S} \cup \mathcal{Q}$, avec $\mathcal{S}$ qui grossit.
  - la distance des $s \in \mathcal{S}$ à s_0 est connue.
  - pour $s \in \mathcal{Q}$, on connaît la distance à s_0 via $\mathcal{S}$
- À chaque étape, on choisit u le sommet de $\mathcal{Q}$ à plus petite distance de $\mathcal{S}$. s_0
  - on le bascule dans $\mathcal{S}$;
  - pour chacune de ses arêtes (u, v) avec $v \in \mathcal{Q}$, on met à jour la nouvelle distance de v à $\mathcal{S}$ via $\mathcal{S}$.
    s_0
- Complexité ?
  - $|V|^2$ avec matrice d'adjacence . . .
  - ou $|E| \ln |E|$ avec liste d'adjacence et tas.

Dijkstra sur l'exemple



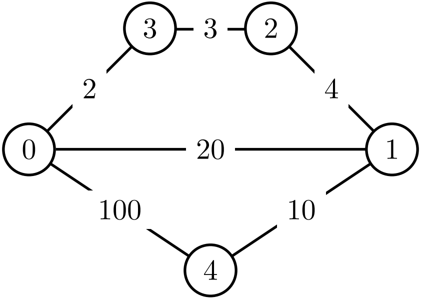
$\mathcal{S}$	$d(0)$	$d(1)$	$d(2)$	$d(3)$	$d(4)$
$\{0\}$	0	20	∞	$\boxed{2}$	100

Dijkstra sur l'exemple



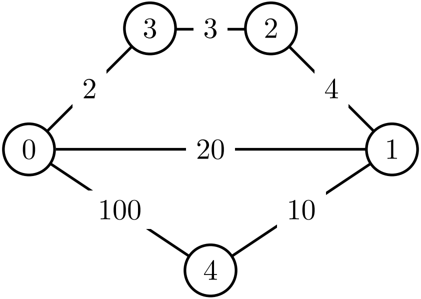
$\mathcal{S}$	$d(0)$	$d(1)$	$d(2)$	$d(3)$	$d(4)$
$\{0\}$	0	20	∞	$\boxed{2}$	100
$\{0,3\}$	0	20	$\boxed{5}$	2	100

Dijkstra sur l'exemple



$\mathcal{S}$	$d(0)$	$d(1)$	$d(2)$	$d(3)$	$d(4)$
$\{0\}$	0	20	∞	$\boxed{2}$	100
$\{0,3\}$	0	20	$\boxed{5}$	2	100
$\{0,3,2\}$	0	$\boxed{9}$	5	2	100

Dijkstra sur l'exemple



$\mathcal{S}$	$d(0)$	$d(1)$	$d(2)$	$d(3)$	$d(4)$
$\{0\}$	0	20	∞	$\boxed{2}$	100
$\{0,3\}$	0	20	$\boxed{5}$	2	100
$\{0,3,2\}$	0	$\boxed{9}$	5	2	100
$\{0,3,2,1\}$	0	9	5	2	19

Et je veux le chemin ?

Une info supplémentaire Il faut en plus garder le précédesseur sur le chemin le plus court.

slides O. Bournez

Algorithme de Dijkstra

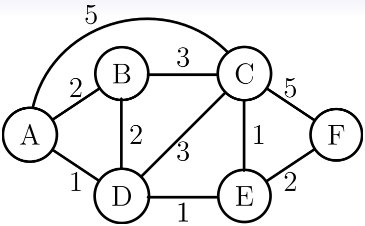
Entrée : $\begin{cases} \text{Un graphe } G = (V, E) \text{ avec une source } s \\ \text{Une fonction de poids } w : E \to \mathbb{R}^+ \end{cases}$

Sortie: $\begin{cases} \text{Un vecteur distance } d \\ \text{Une fonction père } \pi : V \to V \end{cases}$

1. Initialisation de la source s
   - 1.1 $d[s] \leftarrow 0$; $\pi[s] \leftarrow s$
   - 1.2 Pour chaque sommet v de V faire $\begin{cases} \pi(v) \leftarrow NIL \\ d(v) \leftarrow \infty^+ \end{cases}$
2. $\mathcal{Q} \leftarrow V$; $\mathcal{S} \leftarrow \emptyset$;
3. Tant que $(\mathcal{Q} \neq \emptyset)$ faire
   - 3.1 $u \leftarrow$ Extraire-Le-Minimum$(\mathcal{Q}, d)$;
   - 3.2 $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{u\}$;
   - 3.3 Pour chaque sommet v voisin de u faire

     Si $(d[v] > d[u] + w(u, v))$ alors $\begin{cases} d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v) \\ \pi(v) \leftarrow u \end{cases}$
4. retourner d et π

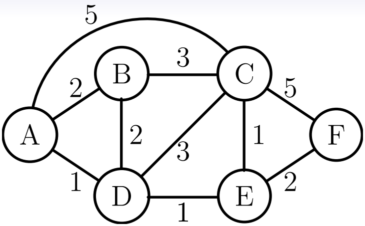
Exemple



les couples correspondent à $(d(.), \pi(.))$

	$\mathcal{Q}$	A	B	C	D	E	F
I	$\{ABCDEF\}$	$(0, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$

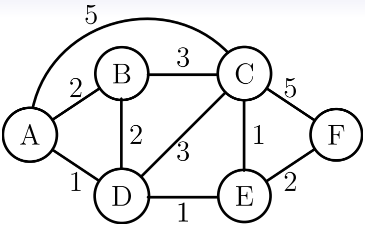
Exemple



les couples correspondent à $(d(.), \pi(.))$

	$\mathcal{Q}$	A	B	C	D	E	F
I	$\{ABCDEF\}$	$(0, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$
1	$\{BCDEF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(5, A)$	$(1, A)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$

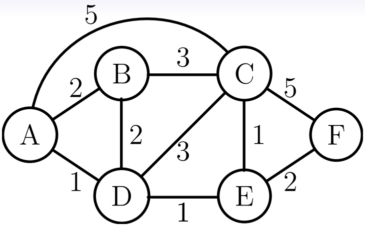
Exemple



les couples correspondent à $(d(.), \pi(.))$

	Q	A	B	C	D	E	F
I	$\{ABCDEF\}$	$(0, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$
1	$\{BCDEF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(5, A)$	$(1, A)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$
2	$\{BCEF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(4, D)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(\infty, \emptyset)$

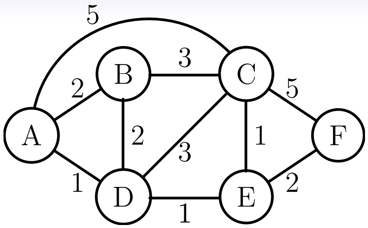
Exemple



les couples correspondent à $(d(.), \pi(.))$

	Q	A	B	C	D	E	F
I	$\{ABCDEF\}$	$(0, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$
1	$\{BCDEF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(5, A)$	$(1, A)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$
2	$\{BCEF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(4, D)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(\infty, \emptyset)$
3	$\{CEF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(4, D)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(\infty, \emptyset)$

Exemple

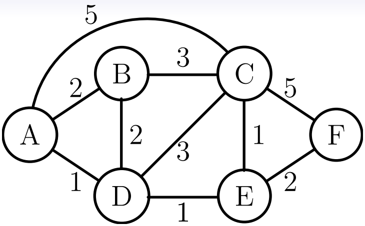


les couples correspondent à $(d(.), \pi(.))$

	Q	A	B	C	D	E	F
I	$\{ABCDEF\}$	$(0, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$
1	$\{BCDEF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(5, A)$	$(1, A)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$
2	$\{BCEF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(4, D)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(\infty, \emptyset)$
3	$\{CEF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(4, D)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(\infty, \emptyset)$
4	$\{CF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(3, E)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(4, E)$

59

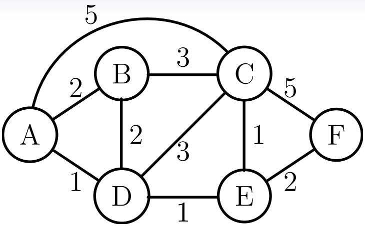
Exemple



les couples correspondent à $(d(.), \pi(.))$

	Q	A	B	C	D	E	F
I	$\{ABCDEF\}$	$(0, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$
1	$\{BCDEF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(5, A)$	$(1, A)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$
2	$\{BCEF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(4, D)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(\infty, \emptyset)$
3	$\{CEF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(4, D)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(\infty, \emptyset)$
4	$\{CF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(3, E)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(4, E)$
5	$\{F\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(3, E)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(4, E)$

Exemple



les couples correspondent à $(d(.), \pi(.))$

	Q	A	B	C	D	E	F
I	$\{ABCDEF\}$	$(0, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$
1	$\{BCDEF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(5, A)$	$(1, A)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$
2	$\{BCEF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(4, D)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(\infty, \emptyset)$
3	$\{CEF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(4, D)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(\infty, \emptyset)$
4	$\{CF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(3, E)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(4, E)$
5	$\{F\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(3, E)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(4, E)$
6	$\emptyset$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(3, E)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(4, E)$

Complexité de l'algorithme: $O(|V|^2)$

59

Fr [redacted] 11:57

sur les routeurs ils utilisent Dijkstraa ? et dans les GPS ?

Ga [redacted] 11:58

je ne pense pas c'est trop lourd

Pr [redacted] 11:59

Oui trop coûteux en pratique sur des applications type GPS/navigation avec des tailles énormes. Il faut ajouter des heuristiques très forte, voir utiliser du glouton

Fr [redacted] 12:00

donc on a tout faux dans les bouquins de SNT

Be [redacted] 12:00

La recherche de vols ?

Ol [redacted] 12:00

bah ouais frederic !?

Pr [redacted] 12:00

pas forcément ça marche bien sur les petits graphes

More docs on graphs

- In french : http://laure.gonnord.org/site-ens/mim/graphes/cours/cours_graphes.pdf or type “cours de Théorie des graphes” in Google
- In english : an interactive tutorial here : http://primes.utm.edu/cgi-bin/caldwell/tutor/graph/intro.
- (en) The theorical book “Graph Theory”, R. Diestel (electronic version : http://diestel-graph-theory.com/basic.html)
- (en) e-book for algorithms : http://code.google.com/p/graph-theory-algorithms-book/