Exemple 6 *lire d'abord les Méthodes 3 et 4 page 309*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, soit $A(3;-1;4)$, $B(2;1;4)$ et $C(3;-2;0)$.

1. L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Soit le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $x+y+3z+4=0$. On note S le point de coordonnées $(1\ ;\ -2\ ;\ -2)$. Déterminer si l'affirmation suivante est *vraie* ou *fausse*.

   Affirmation : La droite passant par S, qui est perpendiculaire à $\mathscr{P}$, est paramétrée par $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2+t \\ y & = & -1+t \\ z & = & 1+3t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$

2. Déterminer une équation de chacun des trois plans de base de repères respectifs $\left(O\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, $\left(O\,;\vec{\imath}, \vec{k}\right)$, $\left(O\,;\vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

3. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_1$ passant par B et de vecteur normal $\vec{n}\,(4;-3;1)$.

4. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_2$ passant par A et orthogonal à la droite (BC).

5. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_3$ passant par C et parallèle au plan $\mathscr{P}_2$.

1) $\mathscr{P}$ d'équation $x+y+3z+4=0$ donc un vecteur normal à $\mathscr{P}$ est : $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$

Ce vecteur est directeur pour la droite $\mathscr{D}$ passant par S et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

Une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ est donc :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + u\times 1 \\ y = -2 + u\times 1 \\ z = -2 + u\times 3 \end{array}\right. \quad \text{avec } u \in \mathbb{R}$$

Soit Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+t \\ z = 1+3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

Un vecteur directeur de Δ est $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dont a vu qu'il est vecteur directeur de $\mathcal{D}$

De plus :

$$\begin{cases} 1 = 2+t \\ -2 = -1+t \\ -2 = 1+3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = t \\ -1 = t \\ -1 = t \end{cases}$$

Le point $S(1;-2;-2)$ appartient bien à Δ, donc les droites Δ et $\mathcal{D}$ sont confondues, donc

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+t \\ z = 1+t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$ est une représen-tation paramétrique de la perpendiculaire à $\mathcal{P}$ passant par S

2)

- Le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est l'ensemble des points $M(x ; y ; 0)$ donc il a pour équation : $z = 0$

- Le plan $(O, \vec{i}, \vec{k})$ est l'ensemble des points $M(x ; 0 ; z)$ donc il a pour équation $y = 0$.

- Le plan $(O, \vec{j}, \vec{k})$ est l'ensemble des points $M(0 ; y ; z)$ donc il a pour équation $x = 0$

3) Soit P_1 le plan passant par le point $B(2 ; 1 ; 4)$ et de vecteur normal $\vec{n}(\underset{a}{4} ; \underset{b}{-3} ; \underset{c}{1})$.

- Une équation de P_1 est de la forme : $4x - 3y + z + d = 0$

- De plus $B(2 ; 1 ; 4)$ appartient à P_1 donc :

$$4 \times 2 - 3 \times 1 + 4 + d = 0$$

$$\iff \quad 9 + d = 0$$

$\Leftrightarrow \quad d = -9$

$$\boxed{\text{Une équation de } \mathcal{T}_1 \text{ est donc : } \quad 4x - 3y + z - 9 = 0}$$

4) $\mathcal{T}_2$ orthogonal à (BC)

donc $\overrightarrow{BC}$ normal à $\mathcal{T}_2$

$B(2;1;4) \quad C(3;-2;0)$

donc $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Une équation de $\mathcal{T}_2$ est donc de la forme : $1x - 3y - 4z + d = 0$

De plus $A(3;-1;4)$ appartient à $\mathcal{T}_2$ donc :

$$3 + 3 - 16 + d = 0$$

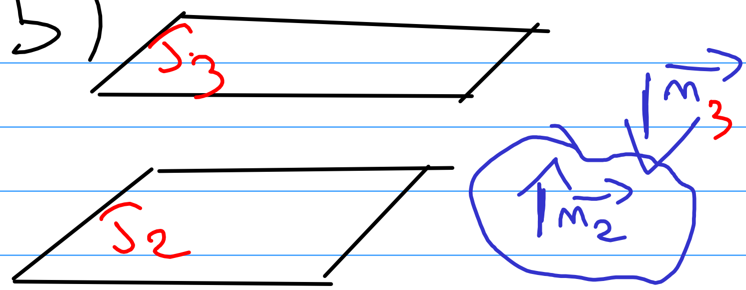
$$\Leftrightarrow \quad -10 + d = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad d = 10$$

Une équation de $\mathcal{P}_2$ est donc :

$$\boxed{x - 3y - 4z + 10 = 0}$$

5)



$\mathcal{P}_3$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles donc $\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix}$ normal à $\mathcal{P}_2$ est aussi normal à $\mathcal{P}_3$.

- Une équation de $\mathcal{P}_3$ est donc de la forme :

$$\underline{x - 3y - 4z} + d = 0$$

- De plus $C(3;-2;0)$ appartient à $\mathcal{P}_3$ donc :

$$3 - 3\times(-2) - 4\times 0 + d = 0$$

$\Longleftrightarrow \quad 3+6+d=0$

$\Longleftrightarrow \quad d=-9$

Une équation de $\mathcal{P}_3$ est donc :

$$\boxed{3x-3y-4z-9=0}$$