

# Classe virtuelle du 23/03/2020

Frédéric Junier

Lycée du Parc  
1 Boulevard Anatole France  
69006 Lyon

22 mars 2020

- Primitives
- Intégrale d'une fonction positive
- Exemple 8
- Exercice 10 p.195
- Exemples de calculs d'intégrales
- Propriété de l'intégrale : Chasles
- Propriété de l'intégrale : Linéarité

Le point sur le calcul de primitives :

- Cours : connaître les tableaux des primitives usuelles et des opérations sur les primitives (pages 8 et 9 du cours)
- S'exercer : QCM Calcul Intégral 2 sur Pronote

Théorème 4, page 10 du cours :

## Theorem

*Soit  $f$  une fonction continue positive sur un intervalle  $I$ . Soient  $a$  et  $b$  deux réels de  $I$  tels que  $a < b$ . Soit  $F$  une primitive de  $f$ . On a :*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

*Le calcul de l'intégrale ne dépend pas de la primitive choisie.*

*On note aussi :  $\int_a^b f(x)dx = \left[ F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$*

# Intégrale d'une fonction positive : un exemple

- Comment calculer  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$  qui représente l'aire sous l'hyperbole entre les abscisses 1 et 2 dans un repère orthonormal d'unité 3 cm ?

# Intégrale d'une fonction positive : un exemple

- Comment calculer  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$  qui représente l'aire sous l'hyperbole entre les abscisses 1 et 2 dans un repère orthonormal d'unité 3 cm ?
- On détermine d'abord une primitive de  $\frac{1}{x}$ , par exemple  $F(x) = \ln(x)$ .

# Intégrale d'une fonction positive : un exemple

- Comment calculer  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$  qui représente l'aire sous l'hyperbole entre les abscisses 1 et 2 dans un repère orthonormal d'unité 3 cm ?
- On détermine d'abord une primitive de  $\frac{1}{x}$ , par exemple  $F(x) = \ln(x)$ .
- Ensuite, on calcule  $F(2) - F(1) = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$

# Intégrale d'une fonction positive : un exemple

- Comment calculer  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$  qui représente l'aire sous l'hyperbole entre les abscisses 1 et 2 dans un repère orthonormal d'unité 3 cm ?
- On détermine d'abord une primitive de  $\frac{1}{x}$ , par exemple  $F(x) = \ln(x)$ .
- Ensuite, on calcule  $F(2) - F(1) = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$
- Enfin, on donne le résultat en unités d'aires :  
 $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln(2)$  u.a. et on convertit éventuellement en  $\text{cm}^2$ , ici 1 u.a. égale à  $3 \times 3 = 9 \text{ cm}^2$ . On a donc  
 $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln(2) \times 9 = 9\ln(2) \text{ cm}^2$ .



# Intégrale d'une fonction positive : exemple 8

Voir [le corrigé](#).

Dans cet exercice on calcule des intégrales avec la définition générale de l'intégrale (cours page 11)  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$  où  $f$  continue mais pas forcément positive et sans ordre fixé sur  $a$  et  $b$ .

- $\int_{-2}^4 x dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^4 = \frac{16}{2} - \frac{4}{2} = 6$
- $\int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_{-2}^4 = \ln(e) - \ln(1) = 1$
- $\int_{-e}^{-1} \frac{1}{x} dx = [\ln(|x|)]_{-e}^{-1} = \ln(1) - \ln(e) = -1$
- $\int_4^{25} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_4^{25} = 2\sqrt{25} - 2\sqrt{4} = 10 - 4 = 6$
- $\int_0^\pi \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^\pi = 1 - (-1) = 2$
- $\int_\pi^0 0 dx = [-\cos(x)]_\pi^0 = -1 - (-(-1)) = -2$

# Exemples de calcul d'intégrale : questions

Calculer les intégrales suivantes (exemple 9 du cours à faire en autonomie pendant la séance de mardi).

- $\int_1^4 x^3 + 2x \, dx$
- $\int_e^{e^3} \frac{\ln(x)}{x} \, dx$
- $\int_e^{e^3} \frac{1}{x(\ln(x)+1)} \, dx$
- $\int_2^0 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} \, dx$

# Exemples de calcul d'intégrale : réponses

Calculer les intégrales suivantes (exemple 9 du cours à faire en autonomie pendant la séance de mardi).

- $\int_1^4 x^3 + 2x \, dx = ?$

# Exemples de calcul d'intégrale : réponses

Calculer les intégrales suivantes (exemple 9 du cours à faire en autonomie pendant la séance de mardi).

- $\int_1^4 x^3 + 2x \, dx = ?$
- $\int_1^4 x^3 + 2x \, dx = \left[ \frac{1}{4}x^4 + x^2 \right]_1^4 = \frac{315}{4}$
- $\int_e^{e^3} \frac{\ln(x)}{x} \, dx = ?$

# Exemples de calcul d'intégrale : réponses

Calculer les intégrales suivantes (exemple 9 du cours à faire en autonomie pendant la séance de mardi).

- $\int_1^4 x^3 + 2x \, dx = ?$
- $\int_1^4 x^3 + 2x \, dx = \left[ \frac{1}{4}x^4 + x^2 \right]_1^4 = \frac{315}{4}$
- $\int_e^{e^3} \frac{\ln(x)}{x} \, dx = ?$
- $\int_e^{e^3} \frac{\ln(x)}{x} \, dx = [(\ln(x))^2]_e^{e^3} = 3^2 - 1 = 8$
- $\int_e^{e^3} \frac{1}{x(\ln(x)+1)} \, dx = ?$

# Exemples de calcul d'intégrale : réponses

Calculer les intégrales suivantes (exemple 9 du cours à faire en autonomie pendant la séance de mardi).

- $\int_1^4 x^3 + 2x \, dx = ?$
- $\int_1^4 x^3 + 2x \, dx = \left[ \frac{1}{4}x^4 + x^2 \right]_1^4 = \frac{315}{4}$
- $\int_e^{e^3} \frac{\ln(x)}{x} \, dx = ?$
- $\int_e^{e^3} \frac{\ln(x)}{x} \, dx = [(\ln(x))^2]_e^{e^3} = 3^2 - 1 = 8$
- $\int_e^{e^3} \frac{1}{x(\ln(x)+1)} \, dx = ?$
- $\int_e^{e^3} \frac{1}{x(\ln(x)+1)} \, dx = [\ln(|\ln(x) + 1|)]_e^{e^3} = \ln(4) - \ln(2)$
- $\int_2^0 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} \, dx$

# Exemples de calcul d'intégrale : réponses

Calculer les intégrales suivantes (exemple 9 du cours à faire en autonomie pendant la séance de mardi).

- $\int_1^4 x^3 + 2x \, dx = ?$
- $\int_1^4 x^3 + 2x \, dx = \left[ \frac{1}{4}x^4 + x^2 \right]_1^4 = \frac{315}{4}$
- $\int_e^{e^3} \frac{\ln(x)}{x} \, dx = ?$
- $\int_e^{e^3} \frac{\ln(x)}{x} \, dx = [(\ln(x))^2]_e^{e^3} = 3^2 - 1 = 8$
- $\int_e^{e^3} \frac{1}{x(\ln(x)+1)} \, dx = ?$
- $\int_e^{e^3} \frac{1}{x(\ln(x)+1)} \, dx = [\ln(|\ln(x)+1|)]_e^{e^3} = \ln(4) - \ln(2)$
- $\int_2^0 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} \, dx$
- $\int_2^0 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} \, dx = [2\sqrt{e^x+1}]_2^0 = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{e^2+1}$



## Theorem

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Un exemple, on donne  $\int_0^2 f(x) dx = 5$  et  $\int_0^5 f(x) dx = 7$

- Calculer  $\int_2^0 f(x) dx$  :

## Theorem

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Un exemple, on donne  $\int_0^2 f(x) dx = 5$  et  $\int_0^5 f(x) dx = 7$

- Calculer  $\int_2^0 f(x) dx$  :
- $\int_2^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = \int_2^2 f(x) dx = 0$  donc  
 $\int_2^0 f(x) dx = -\int_0^2 f(x) dx = -5$
- Calculer  $\int_2^5 f(x) dx$  :

## Theorem

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Un exemple, on donne  $\int_0^2 f(x) dx = 5$  et  $\int_0^5 f(x) dx = 7$

- Calculer  $\int_2^0 f(x) dx$  :
- $\int_2^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = \int_2^2 f(x) dx = 0$  donc  
 $\int_2^0 f(x) dx = -\int_0^2 f(x) dx = -5$
- Calculer  $\int_2^5 f(x) dx$  :
- $\int_0^2 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx = \int_0^5 f(x) dx = 7$  donc :  
 $\int_2^5 f(x) dx = -\int_0^5 f(x) dx - \int_0^2 f(x) dx = 7 - 5 = 2$

## Theorem

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

Un exemple, on donne  $\int_0^2 f(x) dx = 5$  et  $\int_2^0 g(x) dx = 6$

- Calculer  $\int_0^2 3f(x) dx$  :

## Theorem

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

Un exemple, on donne  $\int_0^2 f(x) dx = 5$  et  $\int_2^0 g(x) dx = 6$

- Calculer  $\int_0^2 3f(x) dx$  :
- $\int_0^2 3f(x) dx = 3 \int_0^2 f(x) dx = 15$
- Calculer  $\int_0^2 3f(x) - 4g(x) dx$  :

## Theorem

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

Un exemple, on donne  $\int_0^2 f(x) dx = 5$  et  $\int_2^0 g(x) dx = 6$

- Calculer  $\int_0^2 3f(x) dx$  :
- $\int_0^2 3f(x) dx = 3 \int_0^2 f(x) dx = 15$
- Calculer  $\int_0^2 3f(x) - 4g(x) dx$  :
- $\int_0^2 3f(x) - 4g(x) dx = 3 \int_0^2 f(x) dx - 4 \int_0^2 g(x) dx$



Attention à l'ordre des bornes !  $\int_0^2 g(x) dx = - \int_2^0 g(x) dx$

Donc  $\int_0^2 3f(x) - 4g(x) dx = 3 \int_0^2 f(x) dx + 4 \int_2^0 g(x) dx =$   
 $3 \times 5 + 4 \times 6 = 29$



Ne pas confondre les propriétés de Chasles et de linéarité :

- $\int_0^3 f(x) \, dx + \int_3^6 f(x) \, dx = \int_0^6 f(x) \, dx$  par Chasles (bornes consécutives)
- $\int_0^3 2f(x) \, dx = 2 \int_0^3 f(x) \, dx$  par linéarité (mêmes bornes)
- $\int_0^3 2f(x) \, dx + \int_1^4 f(x) \, dx \neq \int_0^3 3f(x) \, dx$

On ne peut pas simplifier cette somme d'intégrale, en appliquant Chasles et la linéarité on peut obtenir par exemple :

$$\begin{aligned} \int_0^3 2f(x) \, dx + \int_1^4 f(x) \, dx &= \\ \int_0^3 3f(x) \, dx + \int_3^4 f(x) \, dx + - \int_0^1 f(x) \, dx \end{aligned}$$