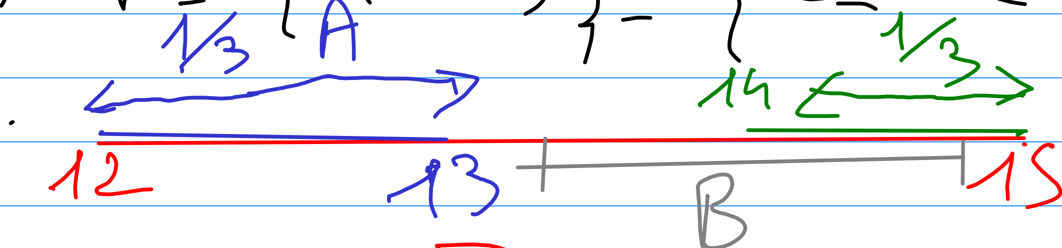
Exemple 1

T suit une loi uniforme sur $[12 ; 15]$

1) /

2) $A = \{T < 13\} = \{12 \leq T < 13\}$



Ω

$$P(12 \leq T < 13) = \frac{13-12}{15-12} = \frac{1}{3}$$

3) ~~$B = \bar{A}$ donc $P(B) = 1 - P(A) = \frac{2}{3}$~~

ou $P(B) = P(13 < T \leq 15)$

$$= \frac{15-13}{15-12} = \frac{2}{3}$$

4) $C = \{T = 13\}$

$A \cup C \cup B = \Omega$

$$[12;15] = [12;13[\cup \{13\} \cup]13;15]$$

$$\Omega = A \cup B \cup C$$

donc $P(\Omega) = 1 = P(A) + P(B) + P(C)$

$$1 = \underset{\sim}{\frac{1}{3}} + P(B) + \underset{\sim}{\frac{2}{3}}$$

$$1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = P(B) = 0$$

Pour les lois continues comme T, on a toujours $P(T = a) = 0$ pour toute valeur a dans $T(\Omega)$

$$P(12{,}5 \leq T \leq 13{,}4) = \frac{13{,}4 - 12{,}5}{15 - 12}$$

Longueur de l'intervalle	Probabilité
$15 - 12 = 3$	1
$13 - 12 = 1$	$\frac{1}{3}$
$13{,}4 - 12{,}5 = 0{,}9$	$0{,}9 \times \frac{1}{3}$

$$0{,}9 \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} 0{,}9 \times \frac{1}{3}$$

$f(t) = \frac{1}{3}$ densité de la loi T

$$P(12 \leq T \leq 13) = \int_{12}^{13} f(t)\,dt$$

$$= \int_{12}^{13} \frac{1}{3}\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{3} t\right]_{12}^{13}$$

$$= \frac{1}{3} \times (13 - 12)$$

5) Si X suit une loi uniforme discrète sur $[\![1 ; 6]\!]$

k	1	...	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} k\,P(X=k) = \frac{1}{6} \times (1+2+\dots+6)$$

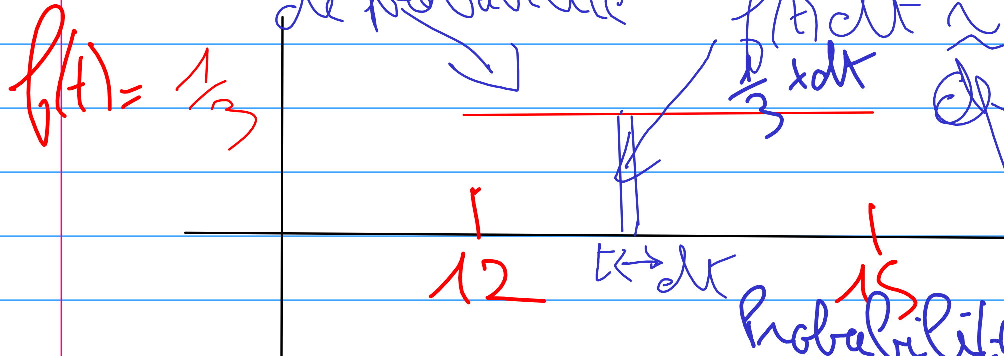
$$E(X) = \frac{1}{6} \times 6 \times (6+1) \times \frac{1}{2}$$

$$E(X)=\frac{7}{2}$$

Pour la loi continue T on calcule l'espérance ainsi :

$$\underbrace{E(T)}_{\leftrightarrow\, E(X)} = \int_{12}^{15} \underbrace{t}_{\leftrightarrow\, k} \times \underbrace{\boxed{f(t)\,dt}}_{\leftrightarrow\ \text{probabilité} \ \leftrightarrow\ P(X=k)}$$

densité de probabilité



$f(t)\,dt \simeq$ probabilité que T soit entre t et $t+dt$

Probabilité

$$E(T)=\int_{12}^{15} t\times\boxed{\frac{1}{3}\,dt}=\left[\frac{1}{2}t^2\times\frac{1}{3}\right]_{12}^{15}$$

$$E(T)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\left(15^2-12^2\right)=\frac{\cancel{(15-12)}(15+12)}{2\times\cancel{3}}$$

$$E(T)=\frac{15+12}{2}=13{,}5$$ conforme à l'intuition

T loi uniforme sur $[12 ; 15]$

- Probabilité : $P(X=k)$

$$P(a \leq T \leq b) = \int_a^b f(t)\,dt$$

où $\underbrace{f(t) = \frac{1}{3}}$ densité de probabilité

$$P(12 \leq T \leq 15) = P(\Omega) = 1$$

- Espérance (valeur moyenne de T)

$$\sum_{k=1}^{6} k \times P(X=k)$$

$$E(T) = \int_{12}^{15} t \times f(t)\,dt$$

Exemples de fonction densité :

- $f(t) = \frac{1}{3}$ sur $[12;15]$

- $f(t) = t^2$ sur $[10;20]$?
  - continue OK
  - positive OK
  - $\displaystyle\int_{10}^{20} t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{10}^{20}$
  $= \frac{20^3 - 10^3}{3} \neq 1$

donc f n'est pas une fonction de densité

$$\int_{10}^{20} t^2\,dt = \frac{7000}{3}$$

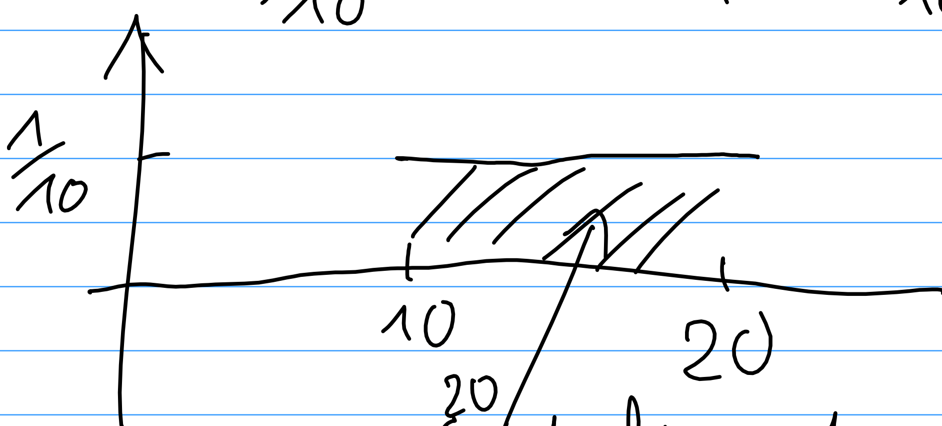
Si on prend $g(t) = \frac{3}{7000} f(t)$

$$\int_{10}^{20} g(t) = \frac{3}{7000} \times \int_{10}^{20} f(t)\,dt = 1$$

g est une fonction de densité sur $[10;20]$.

* $h(t) = \frac{1}{10}$ sur $[10;20]$

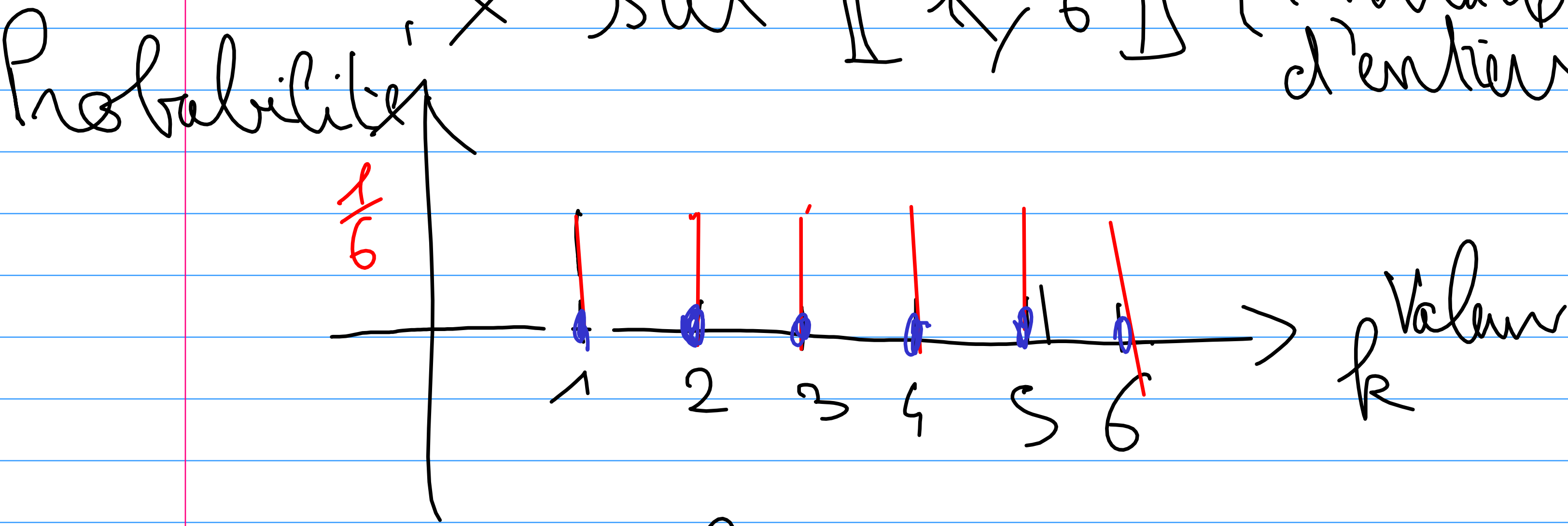
. h continue
. h positive
. $$\int_{10}^{20} \frac{1}{10}\,dt = \frac{1}{10} \times \int_{10}^{20} dt = 1$$



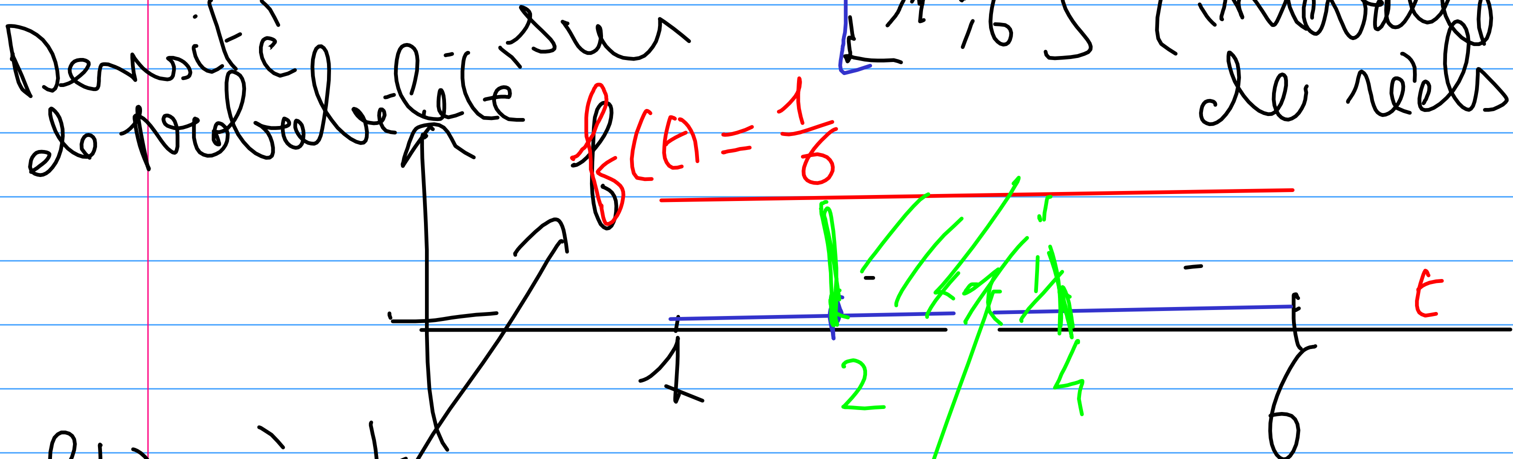
$$\int_{10}^{20} \frac{1}{10}\,dt = 1 = P(\Omega)$$

Loi discrète uniforme

X sur $[\![1;6]\!]$ (intervalle d'entiers)



Loi uniforme continue T sur $[1;6]$ (intervalle de réels)



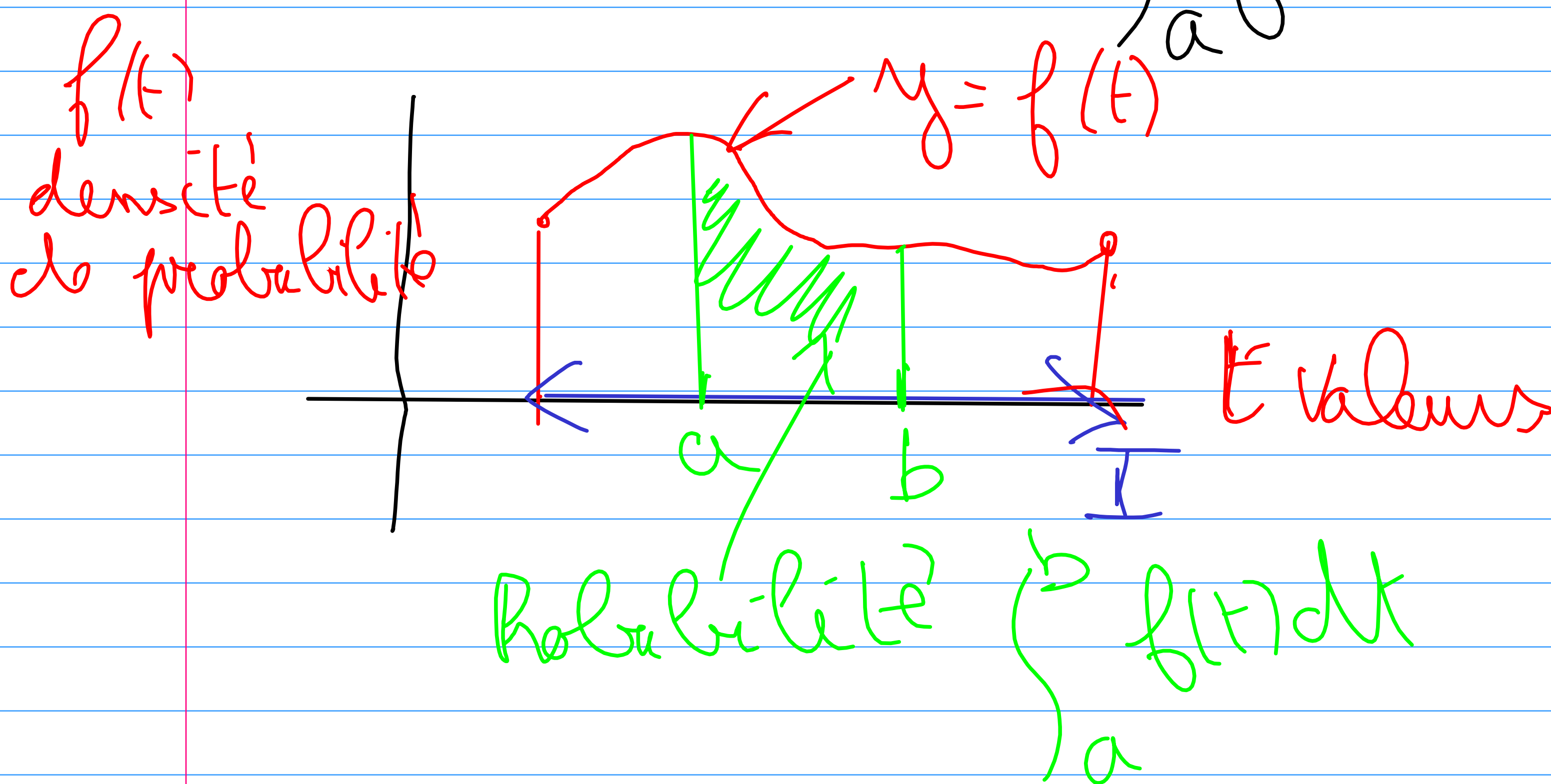
$f(t)$ n'est pas une probabilité, mais une densité de probabilité

$$P(2 \leq T \leq 4) = \int_2^4 f(t)\,dt$$

$$P(T=2) = \int_2^2 f(t)\,dt = 0$$

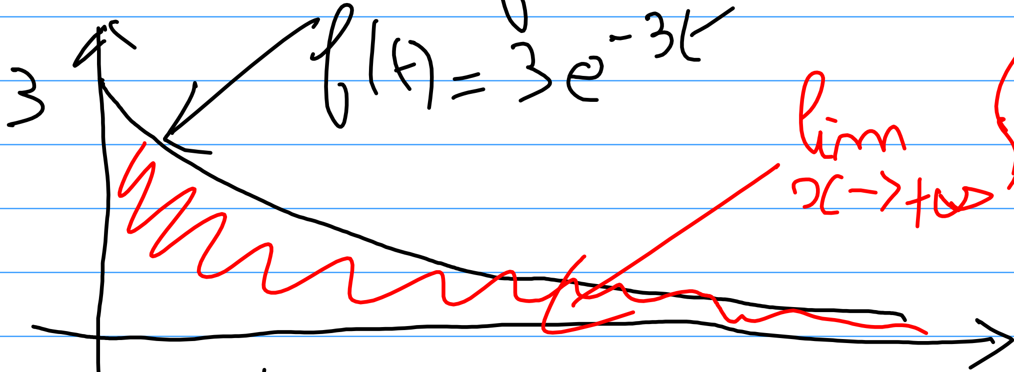
Si T suit une loi à densité f sur un intervalle I, alors pour tout $[a;b] \subset I$

$$P(a \leq T \leq b) = \int_a^b f(t)\,dt.$$



Exemple 3

2) X suit une loi de densité $f(t)=3e^{-3t}$ sur $\mathbb{R}^+$



$\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt = 1$

Pour déterminer l'espérance de X on calcule :

$$\int_0^x \underbrace{t}_{\text{valeurs}} \times \underbrace{f(t)\,dt}_{\text{probabilité}}$$

$$= \int_0^x t \times 3e^{-3t}\,dt$$

D'après la question 1)

une primitive de $t \mapsto t \times 3e^{-3t}$

est $G(t) = \left(-t - \frac{1}{3}\right)e^{-3t}$

donc $\int_0^x t \times 3e^{-3t}\,dt = \left(-x - \frac{1}{3}\right)e^{-3x} - \left(-\frac{1}{3}e^{0}\right)$

$\int_0^x t \times 3e^{-3t}\,dt = \left(-x - \frac{1}{3}\right)e^{-3x} + \frac{1}{3}$

On fait tendre x vers $+\infty$:

$\left(-x - \frac{1}{3}\right)e^{-3x} + \frac{1}{3} = \underline{-xe^{-3x}} - \frac{1}{3}e^{-3x} + \frac{1}{3}$

$\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{3}e^{-3x} = 0$ par composition

Règle de croissance comparée

$$\lim_{X \to +\infty} Xe^{-X} = 0$$

On écrit $-xe^{-3x} = \frac{1}{3} \times (-3x)e^{-3x}$

En posant $-3x = X$

sachant que $\lim\limits_{X \to +\infty} X e^{-X} = 0$

par composition :

$$\lim_{x \to +\infty} -3x \times e^{-3x} = 0$$

On a donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x t \times e^{-3t} \, dt = \frac{1}{3}$$