Espace Partie 1
Corrigés des exemples du cours
Terminale S 734

Frédéric Junier [1]

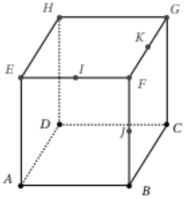
Lycée du Parc, Lyon

1. http://frederic-junier.org/

Table des matières

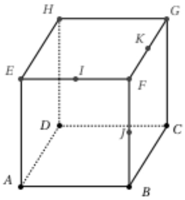
Exemple 1 : Partie 1

Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



Exemple 1 : Partie 1

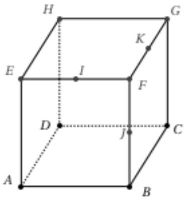
Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



- Question : Les droites (GF) et (AH) sont-elles parallèles ? sécantes ?

Exemple 1 : Partie 1

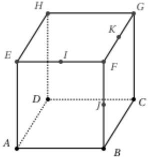
Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



- Question : Les droites (GF) et (AH) sont-elles parallèles ? sécantes ?
- Réponse : Les droites (GF) et (AH) n'ont pas d'intersection car elles sont dans des plans parallèles () et (), donc elles ne sont pas sécantes. Si on avait $(GF)//(AH)$ alors on aurait $(AH)//(EH)$ car $(GF)//(EH)$ puisque $EFGH$ est un carré . On aboutit à une contradiction donc (AH) et (GF) ne sont pas parallèles.(AH) et (GF) sont non sécantes et non

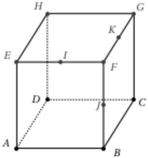
Exemple 1 : Partie 2

Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



Exemple 1 : Partie 2

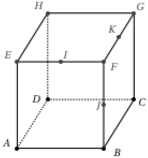
Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



- Question : Les droites (IK) et (AC) sont-elles parallèles ? sécantes ?

Exemple 1 : Partie 2

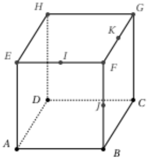
Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



- Question : Les droites (IK) et (AC) sont-elles parallèles ? sécantes ?
- Réponse : I milieu de $[EF]$ et K milieu de $[FG]$ donc $(IK)//(EG)$ d'après la réciproque de Thalès. $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{FB}$ car $EFBA$ carré et $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{GC}$ car $FBCG$ carré. Donc $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{GC}$ et donc $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ et donc $(EG)//(AC)$. De $(EG)//(AC)$ et $(IK)//(EG)$, on déduit que $(IK)//(AC)$. (IK) et (AC) sont parallèles, donc elles ne sont pas sécantes.

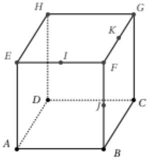
Exemple 1 : Partie 3

Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



Exemple 1 : Partie 3

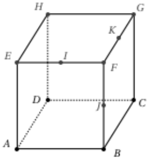
Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



- Question : La droite (FG) coupe-t-elle le plan (AEH) ?

Exemple 1 : Partie 3

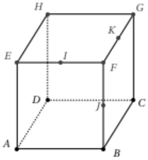
Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



- Question : La droite (FG) coupe-t-elle le plan (AEH) ?
- Réponse : (FG) contenue dans le plan (BFG) qui est parallèle et non confondu avec le plan (AEH) donc (FG) ne coupe pas le plan (AEH).

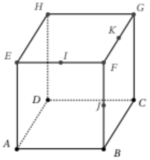
Exemple 1 : Partie 4

Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



Exemple 1 : Partie 4

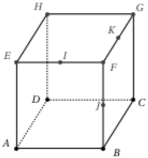
Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



- Question : Déterminer l'intersection du plan (ABC) et du plan (DHG).

Exemple 1 : Partie 4

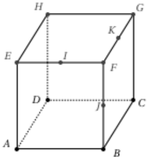
Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



- Question : Déterminer l'intersection du plan (ABC) et du plan (DHG).
- Réponse : Le plan (DHG) est égal au plan (DCG) et le plan (ABC) est égal au plan (ADC). La droite (DC) appartient aux plans (DCG) et (ADC) qui ne sont pas confondus, la droite (DC) est donc la droite d'intersection des plans $(DCG) = (DHG)$ et $(ADC) = (ABC)$.

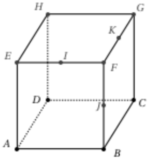
Exemple 1 : Partie 5

Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



Exemple 1 : Partie 5

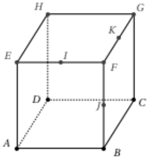
Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



- Question : Que pensez-vous de l'affirmation suivante ? A_0 : « Si deux droites de l'espace sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles. «

Exemple 1 : Partie 5

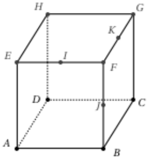
Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



- Question : Que pensez-vous de l'affirmation suivante ? A_0 : « Si deux droites de l'espace sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles. «
- Réponse : Cette affirmation est fausse, comme le prouve le contre-exemple des droites (EF) et (FG) qui sont perpendiculaires à la droite (BF) car EFG et $BFGC$ sont des carrés, mais qui sont sécantes en F et donc non parallèles.

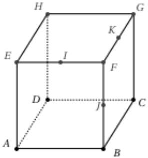
Exemple 1 : Partie 6

Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



Exemple 1 : Partie 6

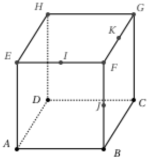
Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



- Question : Que pensez-vous de l'affirmation suivante ? A_1 : « Il existe un seul plan contenant les droites (CG) et (BF). « «

Exemple 1 : Partie 6

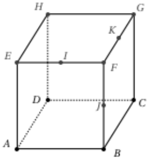
Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



- Question : Que pensez-vous de l'affirmation suivante ? A_1 : « Il existe un seul plan contenant les droites (CG) et (BF). « «
- Réponse : Cette affirmation est vraie, $BFGC$ est un carré donc $(GC)//(BF)$ et deux droites parallèles et non confondues définissent un plan.

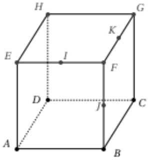
Exemple 1 : Partie 7

Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



Exemple 1 : Partie 7

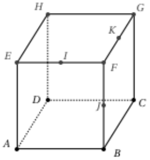
Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



- Que pensez-vous de l'affirmation suivante ? A_2 : « Il existe un seul plan contenant les droites (FC) et (BC). »

Exemple 1 : Partie 7

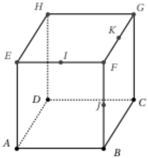
Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



- Que pensez-vous de l'affirmation suivante ? A_2 : « Il existe un seul plan contenant les droites (FC) et (BC). »
- Réponse : Cette affirmation est vraie, (FC) et (BC) sont deux droites sécantes, donc B, F et C sont trois points non alignés qui définissent un unique plan (BFC) (on peut le nommer autrement).

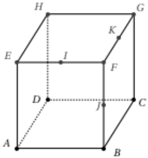
Exemple 1 : Partie 8

Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



Exemple 1 : Partie 8

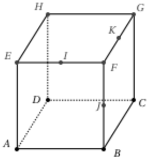
Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



- Que pensez-vous de l'affirmation suivante ? A_3 : « Il existe un seul plan contenant la droite (CG). »

Exemple 1 : Partie 8

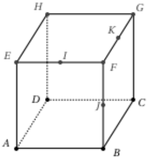
Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



- Que pensez-vous de l'affirmation suivante ? A_3 : « Il existe un seul plan contenant la droite (CG). »
- Réponse : Cette affirmation est fausse, les plans (DCG) et (BCG) sont distincts et leur droite d'intersection est la droite (CG). Il existe une infinité de plan contenant la droite (CG).

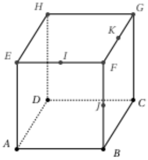
Exemple 1 : Partie 9

Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



Exemple 1 : Partie 9

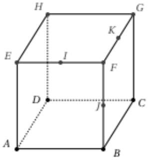
Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



- Que pensez-vous de l'affirmation suivante ? A_4 : « Il existe toujours un plan contenant quatre points de l'espace. »

Exemple 1 : Partie 9

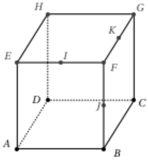
Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



- Que pensez-vous de l'affirmation suivante ? A_4 : « Il existe toujours un plan contenant quatre points de l'espace. »
- Réponse : Cette affirmation est fausse, comme le prouve le contre-exemple du tétraèdre $ABCF$ dont les quatre sommets ne peuvent être contenus dans un même plan.

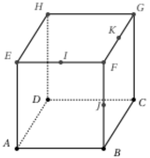
Exemple 1 : Partie 10

Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



Exemple 1 : Partie 10

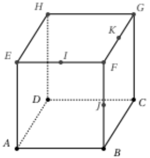
Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



- Que pensez-vous de l'affirmation suivante ? A_5 : « Il existe toujours un plan contenant trois points de l'espace. »

Exemple 1 : Partie 10

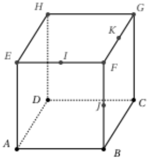
Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



- Que pensez-vous de l'affirmation suivante ? A_5 : « Il existe toujours un plan contenant trois points de l'espace. »
- Réponse : Cette affirmation est vraie, soit trois points sont alignés ou confondus et il existe une droite (et une infinité de plans) ou une infinité de droites (s'ils sont confondus) les contenant, soit ils ne sont pas alignés et il existe un unique plan les contenant.

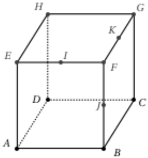
Exemple 1 : Partie 11

Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



Exemple 1 : Partie 11

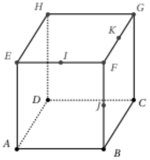
Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



- Le point B est-il l'intersection du plan (EGB) et du plan (ABC) ?

Exemple 1 : Partie 11

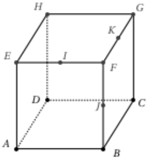
Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



- Le point B est-il l'intersection du plan (EGB) et du plan (ABC) ?
- Réponse : Cette affirmation est fausse, si deux plans ont une intersection, ils sont soit confondus (ce qui n'est pas le cas de (EGB) et (ABC)), soit sécantes selon une droite. Dans les deux cas, si l'intersection de deux plans existent, elle comporte une infinité de points.

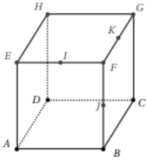
Exemple 1 : Partie 12

Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



Exemple 1 : Partie 12

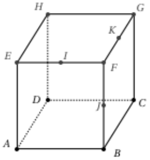
Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



- Le point B est-il l'intersection du plan (EGB) et du plan (ABC) ?

Exemple 1 : Partie 12

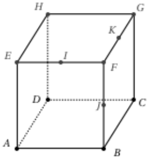
Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



- Le point B est-il l'intersection du plan (EGB) et du plan (ABC) ?
- Réponse : Cette affirmation est fausse, si deux plans ont une intersection, ils sont soit confondus (ce qui n'est pas le cas de (EGB) et (ABC)), soit sécantes selon une droite. Dans les deux cas, si l'intersection de deux plans existent, elle comporte une infinité de points.

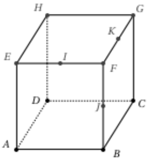
Exemple 1 : Partie 13

Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



Exemple 1 : Partie 13

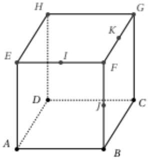
Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.



- Citer un plan contenant la droite (BG), un plan parallèle à la droite (BG) mais ne la contenant pas et un plan sécant à la droite (BG).

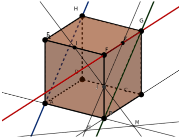
Exemple 1 : Partie 13

Figure dynamique sur https://www.geogebra.org/m/ahkmk9br.

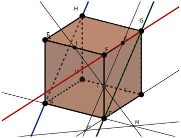


- Citer un plan contenant la droite (BG), un plan parallèle à la droite (BG) mais ne la contenant pas et un plan sécant à la droite (BG).
- Réponse : Le plan (BCG) contient la droite (BG), le plan (ADH) est parallèle à la droite (BG) et le plan (CDG) est sécante à la droite (BG) en G.

Exemple 1 : Partie 14

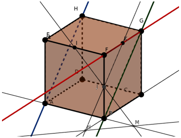


Exemple 1 : Partie 14



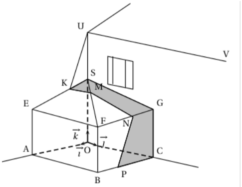
- Les plans (IJK) et (ABC) sont-ils sécants ? Si oui, déterminer leur intersection.

Exemple 1 : Partie 14

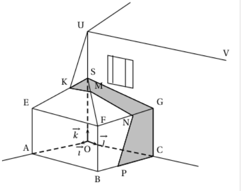


- Les plans (IJK) et (ABC) sont-ils sécants ? Si oui, déterminer leur intersection.
- Réponse : Dans le plan (ABF), les droites (IJ) et (AB) sont sécantes en un point M, qui appartient à l'intersection des plans (IJK) et du plan (ABC) car $(IJ) \subset (IJK)$ et $(AB) \subset (ABC)$. Dans le plan (BFC), les droites (KJ) et (BC) sont sécantes en un point N, qui appartient à l'intersection à l'intersection des plans (IJK) et du plan (ABC) car $(JK) \subset (IJK)$ et $(BC) \subset (ABC)$. On en déduit que la droite (MN) appartient à l'intersection des plans (IJK) et (ABC), de plus ces deux plans ne sont pas confondus donc ils sont sécants selon la droite (MN).

Exemple 2 : Partie 1

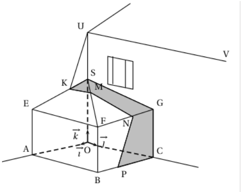


Exemple 2 : Partie 1

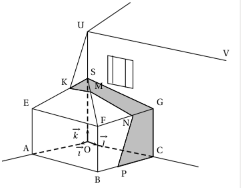


- Les plans (SEF) et (UKV) sont sécants selon la droite (KM). De plus la droite (RF) incluse dans le plan (SEF) est parallèle à la droite (UV) incluse dans le plan (UKV). D'après le théorème du toit, les droites (UV), (EF) et (KM) sont parallèles.

Exemple 2 : Partie 2



Exemple 2 : Partie 2



- Les plans (SOA) et (GCB) sont parallèles. Le plan (UVK) coupe (SOA) selon la droite (UK) et (GCB) selon la droite (NP). D'après une propriété du cours, un plan coupe deux plans parallèles selon des droites parallèles donc $(UK)//(NP)$.

Construction d'une section plane de cube Partie 1

Soit $ABCDEFGH$ un cube dont on veut construire la section par un plan $\mathcal{P}$.

- **Étape 1 :** On a deux alternatives :

Construction d'une section plane de cube Partie 1

Soit $ABCDEFGH$ un cube dont on veut construire la section par un plan $\mathcal{P}$.

- **Étape 1 :** On a deux alternatives :
  - On choisit deux points de $\mathcal{P}$ situés également dans le plan d'une face $\mathcal{F}$ du cube et on trace la droite $\mathcal{D}$ qui les relie. On construit alors les points intersections de cette droite $\mathcal{D}$ avec les droites portant les arêtes de cette face $\mathcal{F}$ du cube.

Construction d'une section plane de cube Partie 1

Soit $ABCDEFGH$ un cube dont on veut construire la section par un plan $\mathcal{P}$.

- **Étape 1 :** On a deux alternatives :
  - On choisit deux points de $\mathcal{P}$ situés également dans le plan d'une face $\mathcal{F}$ du cube et on trace la droite $\mathcal{D}$ qui les relie. On construit alors les points intersections de cette droite $\mathcal{D}$ avec les droites portant les arêtes de cette face $\mathcal{F}$ du cube.
  - Si on connaît déjà la droite $\mathcal{D}$ d'intersection de $\mathcal{P}$ avec le plan d'une face $\mathcal{F}_1$ du cube, la droite d'intersection de $\mathcal{P}$ avec la face parallèle $\mathcal{F}_2$ est nécessairement parallèle à $\mathcal{D}$. Pour la tracer il suffit de connaître un point de $\mathcal{P}$ appartenant aussi au plan de la face $\mathcal{F}_2$.

Construction d'une section plane de cube Partie 2

Soit $ABCDEFGH$ un cube dont on veut construire la section par un plan $\mathcal{P}$.

- **Étape 2 :** On vérifie si on peut refermer un polygone dont les côtés relient des points intersections du plan $\mathcal{P}$ avec les différentes arêtes du cube donnés initialement ou obtenus lors des étapes précédentes.
  Si c'est le cas, ce polygone fermé (avec au plus 6 côtés) est la section du cube par le plan $\mathcal{P}$, sinon on recommence à l'**Étape 1** .

Construction d'une section plane, exemple 3

Dérouler le protocole de construction de la figure dynamique https://www.geogebra.org/m/vhnydz7z à partir de l'étape 9.

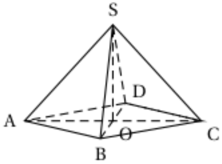
Construction d'une section plane, exemple 4, Question 1

Dérouler le protocole de construction de la figure dynamique https://www.geogebra.org/m/pgehdq4f à partir de l'étape 11.

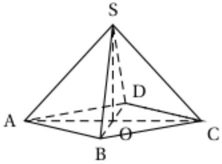
Construction d'une section plane, exemple 4, Question 2

Dérouler le protocole de construction de la figure dynamique https://www.geogebra.org/m/cmwhrsty à partir de l'étape 12.

Exemple 5, Partie 1

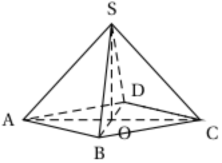


Exemple 5, Partie 1



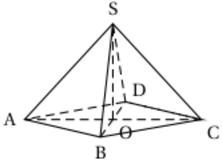
- Question : Démontrer que (SO) est orthogonale à (ABC).

Exemple 5, Partie 1

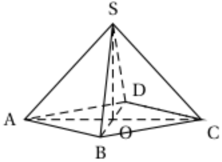


- Question : Démontrer que (SO) est orthogonale à (ABC).
- Réponse : Dans le plan (SAC), $SA = SC$ car $SA = SB = SC$ et O milieu de $[AC]$ donc (SO) médiatrice de $[AC]$ donc $(SO)|(AC)$. Dans le plan (SBD), $SB = SD$ car $SB = SC = SD$ et O milieu de $[BD]$ donc (SO) médiatrice de $[BD]$ donc $(SO)|(BD)$. (SO) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC), (AC) et (BD), donc (SO) orthogonale au plan (ABC).

Exemple 5, Partie 2

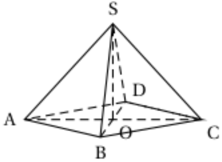


Exemple 5, Partie 2



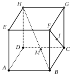
- Question : En déduire le volume, en cm^3, de la pyramide SABCD.

Exemple 5, Partie 2



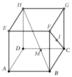
- Question : En déduire le volume, en cm^3, de la pyramide SABCD.
- Réponse : Le volume de la pyramide SABCD s'obtient en prenant le tiers du produit de l'aire de la base ABCD par la hauteur SO. AC $=$ 24 donc le côté AB du carré mesure $24/\sqrt{2}$ et son aire est égale à $24^2/2 = 288$. De plus SOA rectangle en O donc d'après le théorème de Pythagore, $SO^2 = SA^2 - OA^2 = 24^2/2 - (24/2)^2 = 12^2$ donc $SO = 12$. Le volume de la pyramide est donc de $\dfrac{1}{3} \times 12 \times 288 = 1152$.

Exemple 6, Partie 2



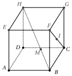
- D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HM} = \overrightarrow{FH} + \frac{2}{3}\overrightarrow{HB}$. On a donc : $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{FH} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{BD} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) - \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AE})$.

Exemple 6, Partie 3



- On a $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})$.
  Par ailleurs, $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})$.
  On en déduit que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont donc colinéaires et les points A, M et$I$ sont alignés.

Exemple 7, Partie 2



- On a $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})$.
  Par ailleurs, $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})$.
  On en déduit que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont donc colinéaires et les points A, M et$I$ sont alignés.

Exemple 7, Partie 1

L'espace est muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$. Soient les points $A\,(-1\,;\,3\,;\,4)$, $B\,(7\,;\,6\,;\,1)$ et $C\,(0\,;\,2\,;\,-5)$.

Exemple 7, Partie 1

L'espace est muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$. Soient les points $A\,(-1\,;\,3\,;\,4)$, $B\,(7\,;\,6\,;\,1)$ et $C\,(0\,;\,2\,;\,-5)$.

- Question : Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exemple 7, Partie 1

L'espace est muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$. Soient les points $A\,(-1\,;\,3\,;\,4)$, $B\,(7\,;\,6\,;\,1)$ et $C\,(0\,;\,2\,;\,-5)$.

- Question : Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme.
- Réponse : $ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.
  Or $\overrightarrow{BC}\,(-7\,;\,-4\,;\,-6)$ et si on note $D(x\,;\,y\,;\,z)$ on a $\overrightarrow{AD}\,(x+1\,;\,y-3\,;\,z-4)$.
  $$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=-7 \\ y-3=-4 \\ z-4=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-8 \\ y=-1 \\ z=-2 \end{cases}.$$

Exemple 7, Partie 2

L'espace est muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$. Soient les points $A\,(-1\,;\,3\,;\,4)$, $B\,(7\,;\,6\,;\,1)$ et $C\,(0\,;\,2\,;\,-5)$.

- Question : Calculer les coordonnées du point F symétrique de D par rapport à A.

Exemple 7, Partie 2

L'espace est muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$. Soient les points $A\,(-1\,;\,3\,;\,4)$, $B\,(7\,;\,6\,;\,1)$ et $C\,(0\,;\,2\,;\,-5)$.

- Question : Calculer les coordonnées du point F symétrique de D par rapport à A.
- Réponse : A milieu de $[FD]$ donc les coordonnées de $F(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifient : $\begin{cases} (x+x_D)/2 = x_A \\ (y+y_D)/2 = y_A \\ (z+z_D)/2 = z_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 7 \\ z = 10 \end{cases}$.
  On a donc $F(x = 6\,;\,y = 7\,;\,z = 10)$.

Exemple 7, Partie 3

L'espace est muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$. Soient les points $A\,(-1\,;\,3\,;\,4)$, $B\,(7\,;\,6\,;\,1)$ et $C\,(0\,;\,2\,;\,-5)$.

- Question : Les points $G\,(5\,;\,2\,;\,3)$, $H\,(-1\,;\,3\,;\,2)$ et $I\,(-7\,;\,4\,;\,1)$ sont-ils alignés ?

Exemple 7, Partie 3

L'espace est muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$. Soient les points $A\,(-1\,;\,3\,;\,4)$, $B\,(7\,;\,6\,;\,1)$ et $C\,(0\,;\,2\,;\,-5)$.

- Question : Les points $G\,(5\,;\,2\,;\,3)$, $H\,(-1\,;\,3\,;\,2)$ et $I\,(-7\,;\,4\,;\,1)$ sont-ils alignés ?
- Réponse : $\overrightarrow{GH}\,(-6\,;\,1\,;\,-1)$ et $\overrightarrow{HI}\,(-6\,;\,1\,;\,-1)$. On remarque que $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{HI}$ donc H est le milieu de $[GI]$ et G, H et I sont alignés.

Exemple 7, Partie 4

L'espace est muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$. Soient les points $A\,(-1\,;\,3\,;\,4)$, $B\,(7\,;\,6\,;\,1)$ et $C\,(0\,;\,2\,;\,-5)$.

- Question : Montrer que les points $J\,(-4\,;\,5\,;\,-1)$, $K\,(-1\,;\,5\,;\,-4)$, $L\,(-2\,;\,12\,;\,4)$ et $M\,(4\,;\,12\,;\,-2)$ sont coplanaires.

Exemple 7, Partie 4

L'espace est muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$. Soient les points $A\,(-1\,;\,3\,;\,4)$, $B\,(7\,;\,6\,;\,1)$ et $C\,(0\,;\,2\,;\,-5)$.

- Question : Montrer que les points $J\,(-4\,;\,5\,;\,-1)$, $K\,(-1\,;\,5\,;\,-4)$, $L\,(-2\,;\,12\,;\,4)$ et $M\,(4\,;\,12\,;\,-2)$ sont coplanaires.
- Réponse : On calcule les coordonnées de trois vecteurs de même origine J : $\overrightarrow{JK}\,(3\,;\,0\,;\,-3)$, $\overrightarrow{JL}\,(2\,;\,7\,;\,5)$ et $\overrightarrow{JM}\,(8\,;\,7\,;\,-1)$. On remarque que $\overrightarrow{JM} = \overrightarrow{JL} + 2\overrightarrow{JK}$, on peut en déduire que $\overrightarrow{JM}$, $\overrightarrow{JL}$ et $\overrightarrow{JLK}$ sont coplanaires et que les points J, L, L et M appartiennent au même plan.

Exemple 8, Partie 1

Soit $\mathcal{D}$ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 2t - 1 \\ 4z = 8 + t \end{cases} , \ t \in \mathbb{R}$$

- Question : Déterminer les coordonnées d'un point de $\mathcal{D}$ et un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Exemple 8, Partie 1

Soit $\mathcal{D}$ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 2t - 1 \\ 4z = 8 + t \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}$$

- Question : Déterminer les coordonnées d'un point de $\mathcal{D}$ et un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
- Réponse :

$$\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 2t - 1 \\ 4z = 8 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + 0,25t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Un point de $\mathcal{D}$ est $E(4\,;\,-1\,;\,2)$ et un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}(-3\,;\,2\,;\,0,25)$.

Exemple 8, Partie 2

Soit $\mathcal{D}$ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 2t - 1 \quad , \; t \in \mathbb{R} \\ 4z = 8 + t \end{cases}$$

- Le point $A\,(19\,;\,-11\,;\,7)$ appartient-il à $\mathcal{D}$?

Exemple 8, Partie 2

Soit $\mathcal{D}$ la droite de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 4 - 3t \\ y = 2t - 1 \\ 4z = 8 + t \end{array}\right. \quad , \ t \in \mathbb{R}$$

- Le point $A\,(19\,;\,-11\,;\,7)$ appartient-il à $\mathcal{D}$?
- Réponse : on résout un système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{l} 19 = 4 - 3t \\ -11 = 2t - 1 \\ 7 = 2 + 0,5t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = -5 \\ t = -5 \\ t = 20 \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$$

Ce système n'a pas de solution, donc le point $A\,(19\,;\,-11\,;\,7)$ n'appartient à la droite $\mathcal{D}$.

Exemple 8, Partie 3

$\mathcal{D}$ droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 2t - 1 \\ 4z = 8 + t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

- Soient $B\,(3\,;\,2\,;\,-1)$ et $C\,(-9\,;\,7\,;\,0)$.
  La droite (BC) est-elle parallèle à $\mathcal{D}$?

Exemple 8, Partie 3

$\mathcal{D}$ droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 2t - 1 \\ 4z = 8 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

- Soient $B\,(3\,;\,2\,;\,-1)$ et $C\,(-9\,;\,7\,;\,0)$.
  La droite (BC) est-elle parallèle à $\mathcal{D}$?
- Réponse : Un vecteur directeur de la droite (BC) est $\overrightarrow{BC}\,(-12\,;\,5\,;\,1)$. Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ est $\overrightarrow{u}\,(-3\,;\,2\,;\,0,25)$.

Exemple 8, Partie 3

$\mathcal{D}$ droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 2t - 1 \\ 4z = 8 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

- Soient $B\,(3\,;\,2\,;\,-1)$ et $C\,(-9\,;\,7\,;\,0)$.
  La droite (BC) est-elle parallèle à $\mathcal{D}$?
- Réponse : Un vecteur directeur de la droite (BC) est $\overrightarrow{BC}\,(-12\,;\,5\,;\,1)$. Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ est $\overrightarrow{u}\,(-3\,;\,2\,;\,0,25)$.
- (BC) et $\mathcal{D}$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{BC}$.
  $$\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = -12\lambda \\ 2 = 5\lambda \\ 0,25 = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,25 = \lambda \\ 0,4 = \lambda \\ 0,25 = \lambda \end{cases}.$$
  Système sans solution donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires.

Exemple 8, Partie 4

Soient $B\,(3\,;\,2\,;\,-1)$ et $C\,(-9\,;\,7\,;\,0)$.

- Représentation paramétrique de la droite (BC) ?

Exemple 8, Partie 4

Soient $B\,(3\,;\,2\,;\,-1)$ et $C\,(-9\,;\,7\,;\,0)$.

- Représentation paramétrique de la droite (BC) ?
- Réponse : $\overrightarrow{BC}\,(-12\,;\,5\,;\,1)$ donc une représentation paramétrique de la droite (BC) est :

$$\begin{cases} x = 3 - 12u \\ y = 2 + 5u \\ z = -1 + u \end{cases} ,\ u \in \mathbb{R}$$

Exemple 8, Partie 5

- Question : (BC) et $\mathcal{D}$ sont-elles sécantes ?

Exemple 8, Partie 5

- Question : (BC) et $\mathcal{D}$ sont-elles sécantes ?
- Réponse : On a déjà démontré que (BC) et $\mathcal{D}$ ne sont pas parallèles, donc (BC) et $\mathcal{D}$ sont soit sécantes soit non coplanaires. Il suffit de déterminer si elles ont un point d'intersection en résolvant le système d'inconnues x, y, z, t, u :
$$\begin{cases} x = 3 - 12u = 4 - 3t \\ y = 2 + 5u = 2t - 1 \\ z = -1 + u = 2 + 0,25t \end{cases}.$$
On élimine d'abord x, y et z pour résoudre en u et t par substitution :
$$\begin{cases} 3 - 12u = 4 - 3t \\ 2 + 5u = 2t - 1 \\ -1 + u = 2 + 0,25t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 36 - 3t = 4 - 3t \\ 2 + 15 + 1,25t = 2t - 1 \\ u = 3 + 0,25t \end{cases}$$

Exemple 8, Partie 6

- Question : (BC) et $\mathcal{D}$ sont-elles sécantes ?

Exemple 8, Partie 6

- Question : (BC) et $\mathcal{D}$ sont-elles sécantes ?
- $\begin{cases} 3-12u=4-3t \\ 2+5u=2t-1 \\ -1+u=2+0,25t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-36-3t=4-3t \\ 2+15+1,25t=2t-1 \\ u=3+0,25t \end{cases}$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} -33=4 \\ 2+15+1,25t=2t-1 \\ u=3+0,25t \end{cases}$

  La première équation n'a pas de solution, donc le système n'a pas de solution, donc (BC) et $\mathcal{D}$ ne sont pas sécantes. Comme elles ne sont pas parallèles, elles sont donc non coplanaires.