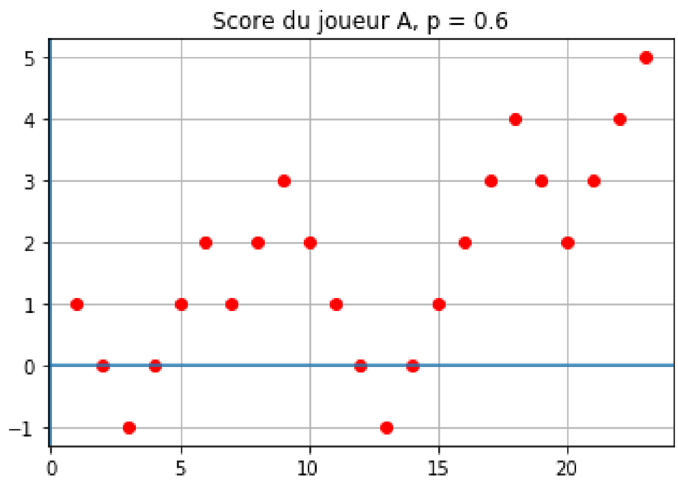
*Corrigé disponible sur .*

Deux joueurs A et B s'affrontent dans un jeu vidéo. Un joueur marque $+1$ s'il gagne une partie, $-1$ s'il perd. Le vainqueur du duel est le premier qui arrive à 5.
On suppose qu'à chaque partie, le joueur A possède trois chances sur 5 de gagner. Le déroulement du jeu peut être assimilé au déplacement aléatoire d'un pion sur un axe vertical : au départ, le pion est à l'origine : si A gagne, le pion monte d'un cran; si B gagne il descend d'un cran.

# 1 Simulation du jeu

## 1.1 Exemple de marche aléatoire

Le graphique ci-contre représente une marche aléatoire associée à un duel, en abscisse est représenté le nombre de parties et en ordonnée le score du joueur A.




1. Qui a gagné le duel représenté? Après combien de parties?
2. Quel est le nombre de parties gagnées par A?
3. Combien de fois le score de A est-il revenu à 0? Interprétez ces éventualités.

## 1.2 Nombre de parties jouées

On note N la variable aléatoire qui indique le nombre de parties jouées jusqu'à ce qu'il y ait un gagnant.

4. Quelle est la plus petite valeur que N peut prendre? Avec quelle probabilité?
5. Justifier que N peut prendre une infinité de valeurs.

## 1.3 Algorithme de simulation du jeu

Compléter la fonction `Python` contenu le fichier `cadeau.py`, pour qu'elle affiche le graphique d'évolution du score du joueur A comme ci-dessus et qu'elle retourne le nombre de parties nécessaires pour obtenir un vainqueur.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from random import random


def simulation(p):
    """Simule un duel du jeu suivant : joueur A + 1 et joueur B -1 avec une
         probabilite de p
        sinon joueur A +1 et joueur B -1
        Le duel s'arrete des qu'un joueur atteint 5
        Retourne le nombre de parties necessaires pour obtenir un vainqueur
```

```
    """
    n = 0
    yA = 0
    listn = []
    listyA = []
    #modifier la condition d'entree de boucle
    while yA != 0:
        nombre_aleatoire = random() #experience aleatoire
        #modification de yA
        if nombre_aleatoire < p:
            "a completer"
        else:
            "a completer"
        n = n + 1
        listn.append(n)
        listyA.append(yA)
    #trace du graphique
    plt.plot(listn, listyA, 'ro')
    plt.savefig("simulation-p{}.png".format(p))
    plt.grid()
    plt.axhline(0)
    plt.axvline(0)
    plt.title('Score du joueur A, p = {}'.format(p))
    plt.show()
    return x
```

**6.** Quel est le rôle des variables `x` et `yA` ?

**7.** A quelle condition le duel s'arrête-t-il? Déduisez-en la modification qu'il faut apporter à la condition d'entrée de boucle.

**8.** Tester plusieurs appels de fonction `simulation(0.6)`. Existe-t-il toujours un vainqueur du duel?

**9.** A partir de la fonction précédente, écrire une fonction `vainqueur(p)` qui simule un duel et retourne 1 si le joueur A est vainqueur et 0 sinon. La fonction ne doit pas générer et afficher de graphique.

**10.** Compléter la fonction ci-dessous pour qu'elle retourne la fréquence de victoires du joueur A sur un échantillon de `nbexp` duels.

```
def frequenceA_echantillon(nbexp, p):
    victoireA = 0
    for k in range(nbexp):
        ......................
        ......................
        ......................
        ......................
    return .....................
```

**11.** Tester plusieurs appels de fonctions `frequenceA_echantillon(10000, 0.6)` puis `frequenceA_echantillon(100000, 0.6)`.

On considère que la fréquence $f$ de succès de $A$, observée sur un échantillon de taille $n = 10\,000$, est une approximation de la probabilité $p$ de $S_A$ à $\dfrac{1}{\sqrt{10000}} = 10^{-2}$ près, puisque $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance permettant d'estimer la probabilité $p$ de $S_A$ au niveau de confiance de 95 % ( c'est-à-dire qu'environ 95 % des intervalles de confiance obtenus à partir d'échantillons de taille $n$ contiennent cette probabilité).

Quelle conjecture peut-on faire sur la probabilité de victoire du joueur A ?

**12.** Les événements $S_A$ = « A vainqueur » et $S_B$ = « B vainqueur » forment-ils une partition de l'univers ?

**13.** Ecrire une fonction qui retourne la fréquence de victoires du joueur B sur un échantillon de `nbexp` duels avec une probabilité de victoire de A égale à `p` pour chaque partie constituant un duel.

Tester plusieurs appels de fonctions `frequenceB_echantillon(10000, 0.6)` puis `frequenceB_echantillon(100000, 0.6)` et conjecturer la probabilité de victoire du joueur B.

**14.** Ecrire une fonction `nombre_moyen_partie(nbexp, p)` qui retourne le nombre moyen de parties sur un duel avec une probabilité de victoire de A égale à `p` pour chaque partie constituant un duel. La fonction calculera le nombre moyen de parties sur un échantillon de `nbexp` duels de taille suffisamment grande.

## 2 Réponses

Réponse 1: B après 13 parties Réponse 2: 13 Réponse 3: 4

Réponse 4: $0{,}088 \approx \left(\frac{3}{5}\right)^5 + \left(\frac{2}{5}\right)^5$

Réponse 7: `(y-5)*(y+5)!=0` ou `abs(y)!=5` ou `y != 5 and y != -5`

Réponse 11: on peut montrer que la probabilité de $S_A$ est $\dfrac{(\frac{3}{2})^5 - (\frac{3}{2})^{10}}{1 - (\frac{3}{2})^{10}} \approx 0{,}884$

Réponse 12: d'un point de vue ensembliste $S_A$ et $S_B$ ne sont pas complémentaires, il pourrait ne pas y avoir de vainqueur sur un nombre infini de parties,

mais on peut montrer que la probabilité de $S_B$ est $\dfrac{(\frac{2}{3})^5 - (\frac{2}{3})^{10}}{1 - (\frac{2}{3})^{10}} \approx 0{,}116$ soit $1 - \mathbb{P}(S_A)$

Réponse 14: on peut observer que le nombre moyen de parties durant un duel est environ de 19