Séance du 28/05

Exercice 1 de la fiche 1

Dans l'espace soit les points
$A(8;0;8)$ et $B(10;3;10)$

1) Soit la droite $\Delta = (AB)$

Un vecteur directeur est :

$\vec{AB}\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$

Une représentation paramétrique de Δ est :

$$\Delta \begin{cases} x = 8 + 2t \\ y = 0 + 3t \\ z = 8 + 2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

paramètre t

point mobile — origine A — vecteur directeur $\vec{u}$

2) Soit $\mathcal{D}$ la droite de représentation paramétrique :

$$\mathcal{D}\begin{cases} x = -5+3s \\ y = 1+2s \\ z = -2s \end{cases} \quad \text{avec } s \in \mathbb{R}$$

Soit $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Un vecteur directeur de Δ est :

$\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls donc ils sont colinéaires ssi il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$

$$\vec{v} = k\vec{u} \iff \begin{cases} 3 = 2k \\ 2 = 3k \\ -2 = 2k \end{cases} \iff \begin{cases} k = \frac{3}{2} \\ k = \frac{2}{3} \\ k = -1 \end{cases}$$

Les équations sont incompatibles donc les vecteurs ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles.

On détermine si les droites Δ et $\mathcal{D}$ sont sécantes.

On résout le système constitué des 2 représentations paramétriques

$$\begin{cases} -5+3s = 8+2t \\ 1+2s = 3t \\ -2s = 8+2t \end{cases}$$

← équation de compatibilité

← on résout ce sous système

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5+3s = 8+2t \\ 1+2(-4-t) = 3t \\ s = \dfrac{8+2t}{-2} = -4-t \end{cases}$$

← équation du 1er degré

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5+3s = 8+2t \\ t = \dfrac{-7}{5} \\ s = -4+\dfrac{7}{5} = -\dfrac{13}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 - \frac{39}{5} = 8 - \frac{14}{5} \\ t = -\frac{7}{5} \\ s = -\frac{13}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{64}{5} = \frac{26}{5} \text{ faux} \\ t = -\frac{7}{5} \\ s = -\frac{13}{5} \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution donc les droites $\mathcal{D}$ et Δ ne sont pas sécantes

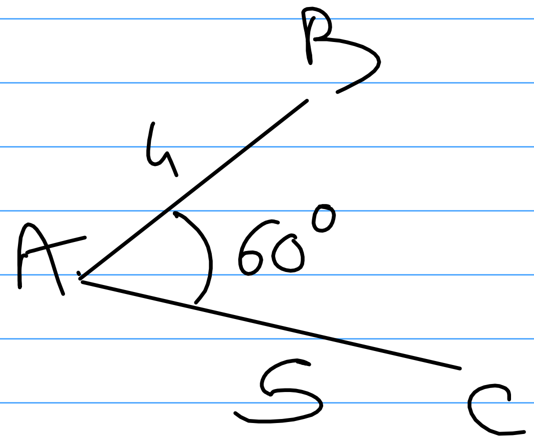
De plus $\mathcal{D}$ et Δ ne sont pas parallèles, donc $\mathcal{D}$ et Δ ne sont pas coplanaires.

Produit scalaire dans l'espace

. Quelques questions sur le produit scalaire :

$\boxed{Q1}$ Soit ABC un triangle

tel que $AB = 4$ et $AC = 5$



Formule du cosinus :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$= 4 \times 5 \times \cos(60°)$$

$$= 20 \times \cos\left(\frac{\pi}{3} \text{ rad}\right)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 20 \times \frac{1}{2} = 10$$

$\boxed{Q_2}$

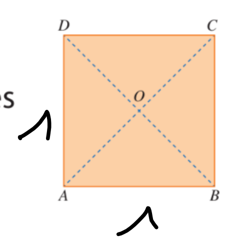
VRAI ou FAUX

ABCD est un carré de centre *O* et de côté 1.
Indiquer si les égalités suivantes sont vraies ou fausses.

a. $\vec{OB} \cdot \vec{OD} = 0$

b. $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$

c. $\vec{AC} \cdot \vec{AD} = 1$



Diagonale
BD =

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD} = OB \times OD \times \cos(\widehat{BOD})$

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD} = OB \times OD \times \cos(\pi)$

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD} = OB^2 \times (-1) = -OB^2$

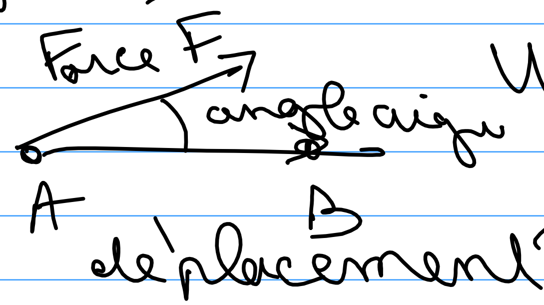
D'après Pythagore :

$BD^2 = AD^2 + AB^2 = 2$

$OB^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

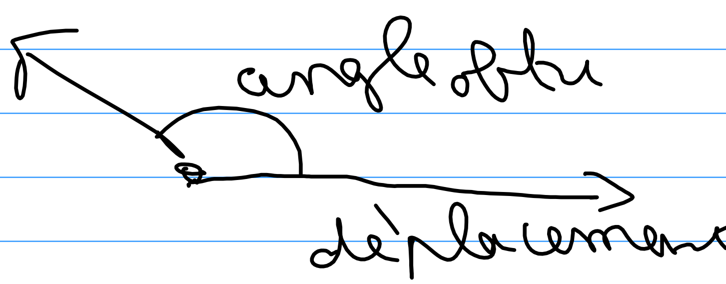
Le produit scalaire en Physique permet de calculer le travail d'une force

travail moteur



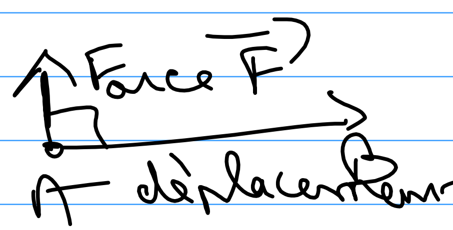
$W_{A\to B}(\vec{F}) = \underbrace{\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}}_{>0}$

travail résistant



$\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB} < 0$

travail nul



$\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

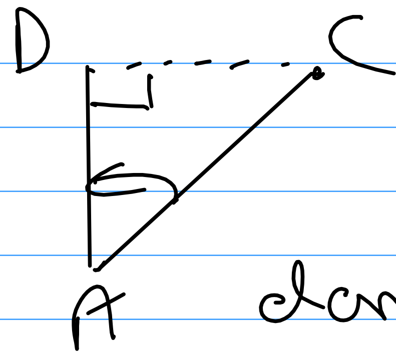
Faux a) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=0$ est faux
car $\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OD}$
donc $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=-OD^2<0$

Vrai b) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ car $\overrightarrow{AB}$ orthogonal à $\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=AC\times BD\times\cos(\widehat{COD})$

$\widehat{COD}=\frac{\pi}{2}$ donc $\cos(\widehat{COD})=0$

Vrai c) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=AD\times AC\times\cos(\widehat{CAD})$



$\cos(\widehat{CAD})=\frac{AD}{AC}$

donc $AC\times\cos(\widehat{CAD})=AD$

donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=AD^2=1^2=1$

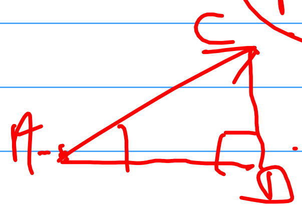
Le produit scalaire possède la propriété de la projection orthogonale :

$\vec{AC} \cdot \vec{AD} = \vec{AD} \cdot \vec{AD} = AD \times AD \times \cos(\widehat{DAD})$

$= AD^2 \times \cos(0)$

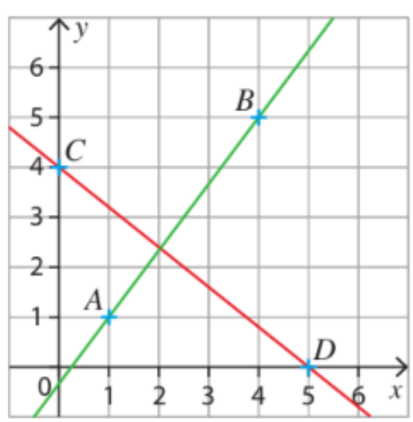
$= AD^2$

on peut remplacer $\vec{AC}$ par son projeté orthogonal sur (AD)



$\boxed{Q3}$ $A(1;1)$ $B(4;5)$ $C(0;4)$ $D(5;0)$

Dans le repère orthonormé ci-dessous, les points A, B, C et D ont des coordonnées entières.
Les droites (AB) et (CD) sont-elles perpendiculaires ?



On calcule les coordonnées les vecteurs directeurs :

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-5 ; 4\\ x ; y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3 ; 4\\ x' ; y'\end{pmatrix}$

Rappel : $\vec{u}\,(x;y)$ et $\vec{v}\,(x';y')$ dans un repère orthonormal

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'}$$

On peut calculer $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}$:

$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB} = -5\times3+4\times4 = 1$

$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB} \neq 0$ donc $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas orthogonaux donc (DC) et (AB) ne sont pas orthogonale