Exemples du cours du chapitre calcul intégral 2019/2020

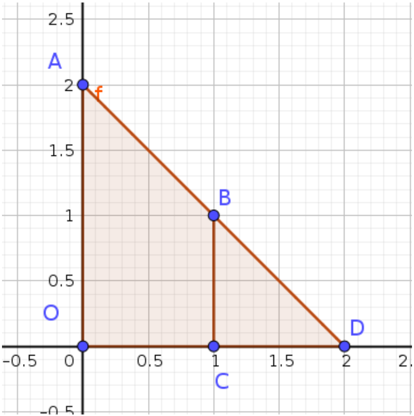
Frédéric Junier

Lycée du Parc
1 Boulevard Anatole France
69006 Lyon

23 mars 2020

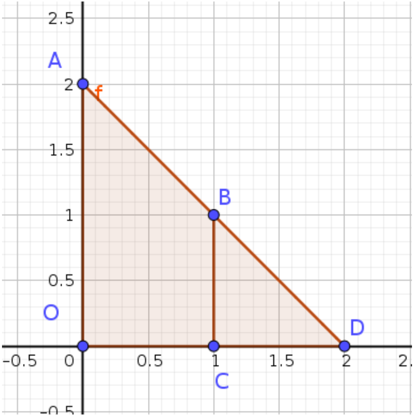
Table des matières

Soit f la fonction définie sur $[0;2]$ par $f(x) = 2 - x$.
La surface dont l'aire est égale à intégrale $I = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ est le triangle BCD rectangle isocèle en C dont l'aire est $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$.



Exemple 1 Partie 2

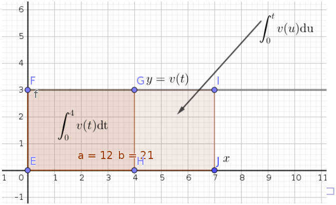
Soit f la fonction définie sur $[0;2]$ par $f(x) = 2 - x$.
La surface dont l'aire est égale à intégrale $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est le trapèze $OABC$ rectangle isocèle en O dont l'aire est $\frac{1}{2} \times (OA + BC) \times OC = \frac{3}{2}$.



Exemple 2 Question 1

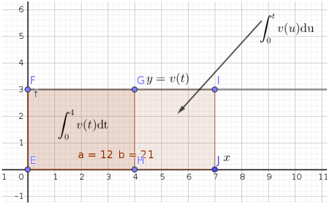
Soit $M(t)$ un point mobile sur un axe tel que à chaque instant $t \in [0; +\infty[$ (en secondes) on connaît sa vitesse instantanée $v(t)$ en mètres par seconde.
A l'instant $t = 0$, le point mobile est à l'origine de l'axe et pour tout $t \in [0; +\infty[$, on a $v(t) = 3$ m.s^{-1}.

- **Question 1** La fonction v est constante donc dérivable donc continue sur $[0; +\infty[$.
  $\int_0^4 v(t)\mathrm{d}t$ est l'aire du rectangle $EFGH$ c'est-à-dire $4 \times 3 = 12$.
  On peut l'interpréter comme la distance parcourue par le mobile en 3 secondes. Notons que la dimension de l'intégrale est celle de $v(t)\mathrm{d}t$: vitesse $\times$ temps $=$ distance.



- **Question 2** $\int_2^5 v(t)\mathrm{d}t$ est égale à $(5-2)\times 3 = 9$. C'est la distance parcourue par le mobile entre les instants $t=2$ et $t=5$ à une vitesse de 3 m.s^{-1}. $\frac{1}{5-2}\int_2^5 v(t)\mathrm{d}t$ est égale à $\frac{\text{distance}}{\text{temps}} = \frac{9}{3}$, c'est la vitesse moyenne du mobile entre les instants $t=2$ et $t=5$. Comme sa vitesse est constante, c'est sa vitesse instantanée à tout instant. On a un exemple, d'utilisation de l'intégrale dans un calcul de valeur moyenne. Notons que $\frac{1}{5-2}\int_2^5 v(t)\mathrm{d}t$ a la même dimension que $v(t)$, c'est une vitesse.

- **Question 3** $g(t)=\int_0^t v(u)\,\mathrm{d}u$ est l'aire du rectangle $EFIJ$ c'est-à-dire $t\times 3=3t$.
  On peut l'interpréter comme la distance parcourue par le mobile en $t3$ secondes.
  g est une fonction linéaire donc elle est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $g'(t)=3$. On remarque que $g'(t)=v(t)$. On peut l'expliquer en prenant la limite du taux de variation $\frac{g(t+h)-g(t)}{h}=\frac{3(t+h)-3t}{h}=3$ quand h tend vers 0.
  $g(t)=\int_0^t v(u)\,\mathrm{d}u$ est une primitive de v.



Exemple 3

Voir Notebook et Corrigé (suivez les liens).

Exemple 4 Question 1

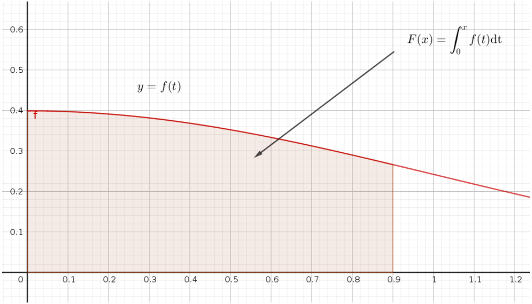
Soit f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

- f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $f'(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times(-t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$. Pour tout réel $t>0$, on a $f'(t)>0$ et $f'(0)=0$.
  On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
  Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x}=0$, on a par composition $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}=0$.

Exemple 4 Questions 2 et 3

f est dérivable donc continue sur $[0;+\infty[$.
De plus, pour tout $t \geqslant 0$, on a $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ donc $f(t) \geqslant 0$.
On peut appliquer le théorème fondamental, qui nous permet d'affirmer que $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ et que pour tout réel $x \geqslant 0$, $F'(x) = f(x)$.
Notez qu'on utilise plutôt x pour F et t pour $F' = f$ mais qu'on pourrait écrire : pour tout réel $t \geqslant 0$, $F'(t) = f(t)$.
Puisque f est strictement positive sur $]0;+\infty[$ et ne s'annule qu'en 0, on en déduit que F est strictement croissante sur $[0;+\infty[$. Page suivante un graphique qui permet de comprendre pourquoi $F(x)$ aire sous la courbe de f entre 0 et x est croissante.

Exemple 4 Questions 2 et 3



Exemple 5 Question 1

Soient les fonctions f et F continues sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ définies par :

$$F(x) = \tan x - x \quad \text{et} \quad f(x) = \tan^2 x$$

F est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$F'(x) = \frac{\cos(x)\times\cos(x) - \sin(x)\times(-\sin(x))}{\cos^2(x)} - 1 = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} - 1$$

$$F'x() = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \tan^2 x$$

F est donc une primitive de f.

Soient g et G les fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1+\ln x}{x} \quad \text{et} \quad G(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \ln x$$

G est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et pour tout réel $x > 0$, on a :

$$G'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} \times 2\ln(x) + \frac{1}{x} = \frac{1+\ln x}{x}$$

$$G'(x) = g(x)$$

G et donc une primitive de g.
Notons que M définie par $M(x) = G(x) + 1$, a même dérivée g que G donc c'est une aussi une primitive de g. On peut remplacer 1 par une constante k, toute fonction de la forme $G(x) + k$ est une primitive de g.

Exemple 5 Question 2 b)

$G(\mathrm{e}) = \frac{1}{2}(\ln \mathrm{e})^2 + \ln \mathrm{e} = \frac{3}{2}$.
La fonction H définie par $H(x) = G(x) - G(\mathrm{e}) = G(x) - \frac{3}{2}$, s'annule en e et a pour dérivée $H' = G' = g$ donc c'est une primitive de g qui s'annule en e.
Supposons qu'il existe une autre primitive N de g qui s'annule en e, on a $(H-N)' = H' - N' = g - g = 0$ donc $H - N$ est constante. De plus , $(H-N)(\mathrm{e}) = 0$ donc $H - N = 0$ donc $H = N$.
H est donc l'unique primitive de g qui s'annule en e.

Exemple 6 Question 1) Partie 1

Chaque fonction f considérée est continue donc admet des primitives sur son intervalle de définition.

a. $f(x) = 4$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = 4x + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

b. $f(x) = 0$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

c. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = 2\sqrt{x} + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

d. $f(x) = 3 + x + x^4$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = 3x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x^5 + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

Exemple 6 Question 1) Partie 2

Chaque fonction f considérée est continue donc admet des primitives sur son intervalle de définition.

a. $f(x) = \sin(2x)$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

b. $f(x) = \cos(3x)$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x) + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

c. $f(x) = \frac{1}{x^4}$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{-4+1}x^{-4+1} + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

Exemple 6 Question 1) Partie 3

Chaque fonction f considérée est continue donc admet des primitives sur son intervalle de définition.

a. $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{-2}\mathrm{e}^{-2x} + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

b. $f(x) = \frac{-1}{x}$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = -\ln(|x|) + k = -\ln(-x) + k \text{ avec } -x > 0 \text{ et } k \text{ constante réelle}$$

Exemple 6 Question 2)

Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F : x \mapsto x\ln x - x + 1$
Pour tout réel $x > 0$, on a,en appliquant la formule de dérivation d'un produit pour $x\ln(x)$:

$$F'(x) = x \times \frac{1}{x} + 1 \times \ln(x) - 1 = \ln(x)$$

F est donc une primitive de la fonction ln. La primitive G de ln qui s'annule en $\sqrt{\mathrm{e}}$. est donc de la forme $G(x) = F(x) + k$. Il suffit de déterminer k en évaluant G en $\sqrt{\mathrm{e}}$:

$$G(\sqrt{\mathrm{e}}) = F(\sqrt{\mathrm{e}}) + k = \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}} - \sqrt{\mathrm{e}} + 1 + k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}} - 1$$

La primitive de ln qui s'annule en $\sqrt{\mathrm{e}}$ est donc
$G(x) = x\ln x - x + \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}$.

Exemple 6 Question 2)

Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F : x \mapsto x\ln x - x + 1$
Pour tout réel $x > 0$, on a,en appliquant la formule de dérivation d'un produit pour $x\ln(x)$:

$$F'(x) = x \times \frac{1}{x} + 1 \times \ln(x) - 1 = \ln(x)$$

F est donc une primitive de la fonction ln. La primitive G de ln qui s'annule en $\sqrt{\mathrm{e}}$. est donc de la forme $G(x) = F(x) + k$. Il suffit de déterminer k en évaluant G en $\sqrt{\mathrm{e}}$:

$$G(\sqrt{\mathrm{e}}) = F(\sqrt{\mathrm{e}}) + k = \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}} - \sqrt{\mathrm{e}} + 1 + k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}} - 1$$

La primitive de ln qui s'annule en $\sqrt{\mathrm{e}}$ est donc
$G(x) = x\ln x - x + \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}$.

Exemple 7 Partie 1

1. $f(x)=x^2-2x-1-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\mathrm{e}^x$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-x+\frac{1}{x}-\ln(|x|)+\mathrm{e}^x+k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

2. $f(x)=\cos(4x-1)-2\sin(2x)$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x)=\frac{1}{4}\sin(4x-1)+2\times\frac{1}{2}\cos(2x)+k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

3. $f(x)=\frac{\mathrm{e}^{731x}}{(\mathrm{e}^{731x}+1)^2}$ est de la forme $\frac{1}{731}\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x)=\mathrm{e}^{731x}+1$, donc admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x)=-\frac{1}{u(x)}+k=-\frac{1}{731}\frac{1}{\mathrm{e}^{731x}+1}+k= \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

Exemple 7 Partie 2

1. $f(x) = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$ est de la forme $-\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = e^{-x} + 1$, donc admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = -\ln(\left|u(x)\right|) + k = -\ln(\left|e^{-x}+1\right|) + k = -\ln(e^{-x}+1) + k \ , \ k \in \mathbb{R}$$

2. $f(x) = \frac{x}{e^{x^2}} = xe^{-x^2}$ est de la forme $-\frac{1}{2}u'e^{u}$ avec $u(x) = -x^2$, donc admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = -\frac{1}{2}e^{u(x)} + k = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + k \ , \ k \in \mathbb{R}$$

Exemple 7 Partie 3

1. $f(x) = \frac{1}{x \ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \ln(x)$, donc admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \ln(\left| u(x) \right|) + k = \ln(\left| \ln(x) \right|) + k \ , \ k \in \mathbb{R}$$

Sur $]0;1[$, on a $\ln(x) < 0$ donc $F(x) = \ln(-\ln(x)) + k$.
Sur $]1;+\infty[$, on a $\ln(x) > 0$ donc $F(x) = \ln(\ln(x)) + k$.

2. $f(x) = \cos(x)\mathrm{e}^{\sin(x)}$ est de la forme $u'\mathrm{e}^{u}$ avec $u(x) = \sin(x)$, donc admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \mathrm{e}^{u(x)} + k = \mathrm{e}^{\sin(x)} + k \ , \ k \in \mathbb{R}$$

3. $f(x) = \frac{1}{x} \times (\ln x)^2$ est de la forme $u'u^2$ avec $u(x) = \ln(x)$, donc admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{3}u^3(x) + k = \frac{1}{3}(\ln(x))^3 + k \ , \ k \in \mathbb{R}$$

Exemple 8 Partie 1

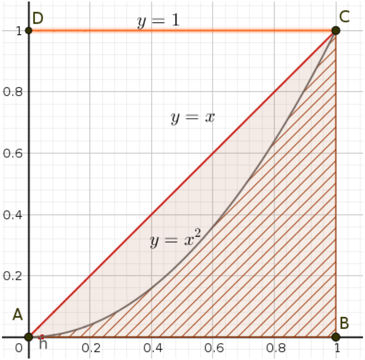
On considère les courbes d'équations $y = 1$, $y = x$ et $y = x^2$ sur l'intervalle $[0\,;1]$.
Pour tout réel $x \in [0\,;1]$, on a :

$$0 \leqslant x \leqslant 1$$

on multiplie par $x \geqslant 0$

$$0 \leqslant x^2 \leqslant x \leqslant 1$$

Exemple 8 Figure



Exemple 8 Partie 2

Puisque pour tout réel $x \in [0;1]$, on a $0 \leqslant x^2 \leqslant x \leqslant 1$, on en déduit que : la courbe d'équation $y = x^2$ est donc en dessous de la droite d'équation $y = x$, elle même en-dessous de la droite d'équation $y = 1$.
Par définition de l'intégrale d'une fonction continue positive comme aire du domaine « sous sa courbe » (délimité par sa courbe, l'axe des abscisses et les deux droites parallèles à l'axe des ordonnées passant par les bornes de l'intervalle), on en déduit que :

$$I = \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x \leqslant K = \int_0^1 x \, \mathrm{d}x \leqslant J = \int_0^1 1 \, \mathrm{d}x$$

De plus, par additivité des aires, l'intégrale $L=\int_0^1 1-x^2 \, \mathrm{d}x$ représente l'aire du domaine entre la droite d'équation $y=1$ et la courbe d'équation $y=x^2$, de même $M=\int_0^1 x-x^2 \, \mathrm{d}x$ représente l'aire du domaine entre la droite d'équation $y=x$ et la courbe d'équation $y=x^2$.
On peut noter que pour tout réel $x \in [0\,;1]$, on a $0 \leqslant x^2 \leqslant x \leqslant 1$, donc $0 \leqslant x-x^2 \leqslant 1-x^2$ et donc $M \leqslant L$.

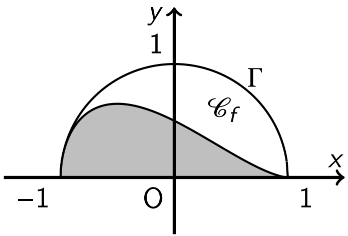
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\ dx = \left[2\sqrt{e^x+1}\right]_{-1}^{1} = 2\sqrt{e^1+1} - 2\sqrt{e^{-1}+1}$;
2. $\int_2^4 \frac{1}{(2x-1)^4}\ dx = \left[\frac{1}{2} \times \frac{1}{-4+1}(2x-1)^{-4+1}\right]_2^4$
   $\int_2^4 \frac{1}{(2x-1)^4}\ dx = \frac{1}{2} \times \frac{1}{-4+1}(7)^{-4+1} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{-4+1}(3)^{-4+1}$
3. $\int_0^{2\pi} \cos(\theta)\ \ d\theta = [\sin(\theta)]_0^{2\pi} = 0 - 0 = 0$;
4. $\int_0^{\pi} \cos(2\theta)\ \ d\theta = \left[\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\pi} = 0 - 0 = 0$;
5. $\int_{-4}^{-2} (3x-1)^6 dx = \left[\frac{1}{3} \times \frac{1}{7}(3x-1)^7\right]_{-4}^{-2} = \frac{1}{21}\left(-7^7 + 13^7\right)$;
6. $\int_0^x \sin^2(t)\ dt$. Il faut linéariser $\sin^2(t)$ avec les formules de duplication du sinus (voir chapitre sur les complexes Partie 2) : $\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$ donc :
   $\int_0^x \sin^2(t)\ dt = \left[\frac{1-\cos(2t)}{2}\right]_0^x = \frac{1-\cos(2x)}{2} - 0$

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_e^{e^3} \frac{1}{x \ln x}\, \mathrm{d}x = \left[\ln(\left|\ln(x)\right|)\right]_e^{e^3} = \ln(\ln(3)) - \ln(1) = \ln(\ln(3))$
2. $\int_0^x \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\, \mathrm{d}t$ Ici il faut transformer l'expression pour faire apparaître une forme $\frac{u'}{u}$ (ici $-\frac{u'}{u}$). L'astuce classique avec l'exponentielle : $\mathrm{e}^t \times \mathrm{e}^{-t} = 1$.
   $\int_0^x \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\, \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t} \times 1}{\mathrm{e}^{-t}(1+\mathrm{e}^t)}\, \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t} \times 1}{\mathrm{e}^{-t}+1}\, \mathrm{d}t$
   Puis : $\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^{-t}+1}\, \mathrm{d}t = \left[-\ln(\left|\mathrm{e}^{-t}+1\right|)\right]_0^x = -\ln(\mathrm{e}^{-x}+1) + \ln(2)$
3. $\int_2^e \frac{1}{x(\ln(x))^2}\, \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]_2^e = -\frac{1}{\ln(e)} + \frac{1}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)} - 1$ Ici on a écrit $\frac{1}{x(\ln(x))^2} = \frac{u'(x)}{u^2(x)}$ avec $u(x) = \ln(x)$ pour déterminer une primitive qui est $-\frac{1}{u(x)}$.

Le demi-cercle Γ de rayon 1, représenté sur la figure ci-dessous, a pour équation $y = \sqrt{1 - x^2}$.
La partie grisée est comprise entre l'axe des abscisses d'équation $y = 0$ et la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $[-1\,;1]$ par $f(x) = \frac{1}{2}(1-x)\sqrt{1-x^2}$.



- $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ est l'aire du demi-disque de rayon 1 donc c'est $\frac{1}{2}\times\pi\times 1^2=\frac{\pi}{2}$.
- Pour tout réel $x\in[-1\,;1]$, si on note $g(x)=x\sqrt{1-x^2}$, on a$g(-x)=-g(x)$ donc par symétrie centrale de centre l'origine du repère $\int_{-1}^{0}g(x)\mathrm{d}x$ est l'opposé de l'aire du domaine sous la courbe de g sur l'intervalle $[0\,;1]$.

  On a donc $\int_{-1}^{0}g(x)\mathrm{d}x=-\int_{0}^{1}g(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \displaystyle\int_{-1}^{0}x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = -\int_{0}^{1}x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

Exemple 10 Partie 3

- $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(1-x)\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-x)\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ par linéarité.

  De nouveau par linéarité, on a $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\right)$.

  En appliquant la relation de Chasles, on a $\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x\sqrt{1-x^2}$.

D'après la propriété d'antisymétrie de la question 2), il vient $-\int_{0}^{1} x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = 0$.

Finalement, on a $\boxed{\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}}$.