Exemple 8

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

1. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $5x + 2y - 4z + 7 = 0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $-10x - 4y + 8z - 7 = 0$. Montrer que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont strictement parallèles.
2. Soit $\mathscr{P}_3$ le plan d'équation $4x + 2y - 6z + 8 = 0$ et $\mathscr{P}_4$ le plan d'équation $-6x - 3y + 9z - 12 = 0$. Montrer que $\mathscr{P}_3$ et $\mathscr{P}_4$ sont confondus.
3. Soit $\mathscr{P}_5$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n_5}$ $(1; -1; 1)$ et $\mathscr{P}_6$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n_6}$ $(0; 2; 2)$. Démontrer que $\mathscr{P}_5$ et $\mathscr{P}_6$ sont perpendiculaires.

1)

- $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont parallèles ssi $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ colinéaires.

- $\mathscr{P}_1$ d'équation $5x+2y-4z+7=0$ admet pour vecteur normal :

$$\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}5\\2\\-4\end{pmatrix}$$

- $\mathscr{P}_2$ d'équation $-10x-4y+8z-7=0$ admet pour vecteur normal :

$$\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}-10\\-4\\8\end{pmatrix}$$

On remarque que $\overrightarrow{n_2} = -2\overrightarrow{n_1}$

donc $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles.

Soit le point $A(0;y;0)$ apparte-

-nant à $\mathcal{P}_1$, on a

$$5\times 0+2y-4\times 0+7=0 \iff y=-\frac{7}{2}$$

$A\left(0;-\frac{7}{2};0\right)$ appartient à $\mathcal{P}_1$

$$-10\times 0-4\times\left(-\frac{7}{2}\right)+8\times 0-7=7\neq 0$$

Les coordonnées de A ne satisfont pas l'équation de $\mathcal{P}_2$, donc A n'appartient pas à $\mathcal{P}_2$.

Les plans parallèles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont donc pas confondus.

On pouvait remarquer que les quatre coefficients de leurs équations ne sont pas proportionnels

2) Soit les plans $\mathcal{P}_3$ et $\mathcal{P}_4$ d'équations

$\mathcal{P}_3 : 4x+2y-6z+8=0$

$\mathcal{P}_4 : -6x-3y+9z-12=0$ $\quad \times\left(-\frac{3}{2}\right)$

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace

$$M(x;y;z) \in \mathcal{P}_3 \iff 4x+2y-6z+8=0$$
$$\iff -\frac{3}{2}(4x+2y-6z+8) = -\frac{3}{2}\times 0$$
$$\iff -6x-3y+9z-12=0$$
$$\iff M(x;y;z) \in \mathcal{P}_4$$

Les plans $\mathcal{P}_3$ et $\mathcal{P}_4$ sont donc confondus.

3) Deux plans sont perpendiculaires ssi ils admettent des vecteurs normaux orthogonaux.

$\mathcal{P}_5$ de vecteur normal $\vec{n_5}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\mathcal{P}_6$ de vecteur normal $\vec{n_6}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$

$$\vec{n_5}\cdot\vec{n_6} = 1\times 0 + (-1)\times 2 + 1\times 2$$
$$\vec{n_5}\cdot\vec{n_6} = 0$$

$\vec{n_5}$ et $\vec{n_6}$ sont orthogonaux donc $\mathcal{P}_5$ et $\mathcal{P}_6$ sont perpendiculaires