Exemple 3

Soit $\mathscr{D}$ une droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 4+3t \\ y = -2+t \\ z = 1-5t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

1. Le point $B(7;-1;-4)$ appartient-il à $\mathscr{D}$?
2. Soient $E(9;3;-2)$ et $F(11;2;-1)$, les droites $\mathscr{D}$ et (BE) sont-elles orthogonales ? Les droites $\mathscr{D}$ et (BF) sont-elles orthogonales ?
   Quelle propriété vraie dans le plan n'est plus vraie dans l'espace ?
3. Soit $\mathscr{D}'$ une droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 5t \\ y = 5t \\ z = 4t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

   Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont-elles orthogonales ? sécantes ?

1) $B(7;-1;-4)$ appartient à $\mathscr{D}$ ssi il existe un réel t tel que :

$$\mathcal{S}\begin{cases} 7 = 4+3t \\ -1 = -2+t \\ -4 = 1-5t \end{cases}$$

On résout le système $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} \iff \begin{cases} \frac{3}{3} = t = 1 \\ 1 = t \\ \frac{-5}{-5} = t = 1 \end{cases}$$

Le système admet une solution, donc le point B appartient à la droite $\mathscr{D}$.

2) D'après la représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ donnée dans l'énoncé, un vecteur

directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\\-5\end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur de (BE) est $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{BE}\cdot\vec{u} = 2\times3 + 4\times1 + 2\times(-5) = 0$$

$\boxed{\text{On en déduit que les droites } \mathcal{D} \text{ et } (BE) \text{ sont orthogonales car leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.}}$

De même, $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix}$ vecteur direc-teur de la droite (BF) est orthogonal au vecteur directeur $\vec{u}$ de $\mathcal{D}$ car $\overrightarrow{BF}\cdot\vec{u} = 4\times3+3\times1+3\times(-5)$

$$\overrightarrow{BF}\cdot\vec{u} = 0$$

$\boxed{\text{On a donc } (BF) \text{ et } \mathcal{D} \text{ orthogonales}}$

<u>Remarque</u> : (BE) et (BF) sont orthogonales à une même troisième

droite $\mathcal{D}$ mais ne sont pas parallèles.

Si (BE), (BF) et $\mathcal{D}$ avaient été coplanaires on aurait pu affirmer que (BE) // (BF).

3) Soit $\mathcal{D}'$ de représentation paramétrique :

$$\mathcal{D}' \begin{cases} x = 5t \\ y = 5t \\ z = 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$ est

$$\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times 3 + 5 \times 1 + 4 \times (-5)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont orthogonales puisqu'elles ont des vecteurs directeurs orthogonaux.

- $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes ssi elles ont un point d'intersection.

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes ssi il existe un point $M(x;y;z)$ qui peut être paramétré par un réel t dans la représentation paramétrique (RP) de $\mathcal{D}$ et par un réel u dans la RP de $\mathcal{D}'$.

Il est équivalent de résoudre le système

$$\begin{cases} x = 4+3t = 5u \\ y = -2+t = 5u \\ z = 1-5t = 4u \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5u \\ y = 5u \\ z = 4u \\ 4+3t = 5u \\ -2+t = 5u \\ 1-5t = 4u \end{cases}$$

Il est équivalent de résoudre le système d'inconnues t et u :

$$\begin{cases} 4+3t = 5u \\ \boxed{\begin{array}{l} -2+t = 5u \\ 1-5t = 4u \end{array}} \end{cases} \iff \begin{cases} 4+3t = 5u \\ t = 2+5u \\ 1-5(2+5u) = 4u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4+3t=5u \\ t=2+5u \\ -9-25u=4u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+3t=5u \\ t=2+5\times\dfrac{-9}{29} \\ u=\dfrac{-9}{29} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4+3\times\dfrac{13}{29}=5\times\left(\dfrac{-9}{29}\right) & \text{égalité fausse} \\ t=\dfrac{13}{29} \\ u=-\dfrac{9}{29} \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution car la première égalité n'est pas vérifiée.

On en déduit que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont non coplanaires (donc non sécantes) et elles sont orthogonales comme on l'a démontré précédemment.