

Lois à densité
Corrigés des exemples du cours
Terminale S 734

Frédéric Junier¹

Lycée du Parc, Lyon

1. <http://frederic-junier.org/>

Table des matières

- Exemple 1
- Exemple 2
- Exemple 3
- Exemple 4
- Exemple 5
- Exemple 6
- Exemple 7
- Exemple 8
- Exemple 9
- Exemple 10
- Exemple 11
- Exemple 12
- Exemple 13
- Exemple 14

Exemple 1 : Partie 1

Sofia utilise le bus pour se rendre au cinéma. La durée du trajet entre son domicile et le cinéma (exprimée en minutes) est une variable aléatoire T qui prend des valeurs choisies aléatoirement dans l'intervalle $[12 ; 15]$. On dit que T suit la loi uniforme sur l'intervalle $[12 ; 15]$. La probabilité que la durée de trajet appartienne à un intervalle $[a ; b]$ inclus dans $[12 ; 15]$ est alors proportionnelle à la longueur de cet intervalle.

- L'événement $\{12 \leq T \leq 15\}$ est égal à l'univers Ω de cette expérience aléatoire, donc $P(12 \leq T \leq 15) = 1$.
- La probabilité de l'événement $A = \ll \text{la durée du trajet de Sofia est inférieure ou égale à 13 minutes} \gg$ est proportionnelle à la longueur de l'intervalle $[12 ; 13]$, égale à 1. Sachant que $P(12 \leq T \leq 15) = 1$ et que la longueur de $[12 ; 15]$ est 3, on a :

$$P(A) = P(12 \leq T \leq 13) = \frac{13 - 12}{15 - 12} = \frac{1}{3}$$

Exemple 1 : Partie 2

Exemple 1 : Partie 2

- De même la probabilité de l'événement $B = \ll \text{la durée du trajet de Sofia est strictement supérieure à 13 minutes} \gg$ est égale à :

$$P(B) = P(13 < T \leq 15) = \frac{15 - 13}{15 - 12} = \frac{2}{3}$$

Exemple 1 : Partie 2

- De même la probabilité de l'événement $B = \ll \text{la durée du trajet de Sofia est strictement supérieure à 13 minutes} \gg$ est égale à :

$$P(B) = P(13 < T \leq 15) = \frac{15 - 13}{15 - 12} = \frac{2}{3}$$

- L'événement $C = \ll \text{la durée du trajet de Sofia est égale exactement à 13 minutes} \gg$ est tel que les événements A , B et C sont deux à deux incompatibles et $A \cup B \cup C = \Omega$. Les événements A , B et C forment une partition de l'univers donc $P(A) + P(B) + P(C) = 1$.

Or on a $P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$ donc $P(C) = 0$.

On peut aussi calculer comme précédemment par proportionnalité : $P(C) = P(13 \leq T \leq 13) = 0$

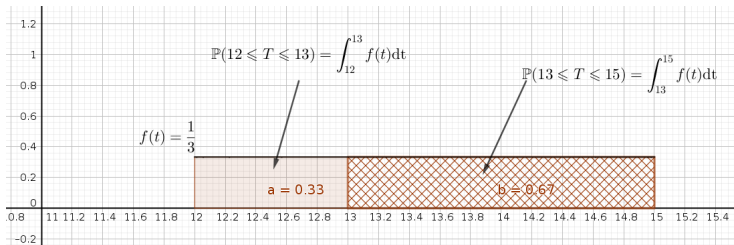
Comme il existe une infinité d'instants dans l'intervalle $[12; 15]$ il n'est pas possible d'avoir la probabilité d'un instant non nulle et $P(12 \leq T \leq 15) = 1$.

Exemple 1 : Partie 3

- Une variable aléatoire X donnant la face du dessus lorsqu'on lance un dé à six faces équilibré suit une **loi uniforme discrète** à valeurs dans l'ensemble $X(\Omega) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. On dit que T suit une **loi uniforme continue** à valeurs dans l'intervalle $[12 ; 15]$. La différence principale entre une loi discrète et une loi continue est le nombre d'éléments (le cardinal) de l'univers : infini pour une loi continue et fini pour une loi discrète.

Exemple 1 : Partie 4

- Représenter dans un repère du plan la courbe de la fonction f définie sur l'intervalle $[12 ; 15]$ par $f(t) = \frac{1}{3}$ puis hachurer des domaines d'aires égales à $P(A)$ et $P(B)$.



Exemple 1 : Partie 5

- Pour estimer la durée moyenne du trajet de Sofia, on peut s'inspirer de la formule de l'espérance de la variable aléatoire

discrète X : $E(X) = \sum_{k=1}^6 kP(X = k)$. Comparaison entre la

variable aléatoire X suivant une loi discrète uniforme et la loi T qui suit une loi uniforme continue :

Exemple 1 : Partie 5

- Pour estimer la durée moyenne du trajet de Sofia, on peut s'inspirer de la formule de l'espérance de la variable aléatoire discrète X : $E(X) = \sum_{k=1}^6 kP(X = k)$. Comparaison entre la variable aléatoire X suivant une loi discrète uniforme et la loi T qui suit une loi uniforme continue :

| | loi discrète X | loi continue T |
|-------------|------------------------------|--------------------------|
| valeur | $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ | $t \in [12; 15]$ |
| probabilité | $P(X = k)$ | $\int_a^b f(t)dt$ |
| espérance | $\sum_{k=1}^6 kP(X = k)$ | $\int_{12}^{15} tf(t)dt$ |

Exemple 1 : Partie 6

L'espérance de T , durée moyenne du trajet de Sofia, peut être estimée ainsi :

Exemple 1 : Partie 6

L'espérance de T , durée moyenne du trajet de Sofia, peut être estimée ainsi :

$$\int_{12}^{15} tf(t)dt = \int_{12}^{15} \frac{t}{3}dt = \frac{1}{3} \left[\frac{t^2}{2 \times (15 - 12)} \right]_{12}^{15} = \frac{15 + 12}{2} = 13,5$$

On trouve le centre de l'intervalle $[12 ; 15]$ ce qui est conforme à l'intuition.

Exemple 2 : Partie 1

Vérifions que $f : t \mapsto \frac{1}{5}$ est une densité de probabilité sur $I = [2; 7]$.

Exemple 2 : Partie 1

Vérifions que $f : t \mapsto \frac{1}{5}$ est une densité de probabilité sur $I = [2; 7]$.

- **point 1** : f est continue sur $I = [2; 7]$.

Exemple 2 : Partie 1

Vérifions que $f : t \mapsto \frac{1}{5}$ est une densité de probabilité sur $I = [2; 7]$.

- **point 1** : f est continue sur $I = [2; 7]$.
- **point 2** : f est à valeurs positives.

Exemple 2 : Partie 1

Vérifions que $f : t \mapsto \frac{1}{5}$ est une densité de probabilité sur $I = [2; 7]$.

- **point 1** : f est continue sur $I = [2; 7]$.
- **point 2** : f est à valeurs positives.
- **point 3** : $\int_2^7 \frac{1}{5} dt = \left[\frac{t}{5} \right]_2^7 = \frac{7-2}{5} = 1$

f est donc bien une fonction de densité de probabilité.

Exemple 2 : Partie 1

Soit F la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $F(t) = 1 - (2t + 1)e^{-2t}$.

Exemple 2 : Partie 1

Soit F la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $F(t) = 1 - (2t + 1)e^{-2t}$.

- F est dérivable sur \mathbb{R}^+ par règles opératoire et pour tout réel $t \geq 0$, on a :

$$F'(t) = 0 - 2e^{-2t} + 2(2t + 1)e^{-2t} = 4te^{-2t} = f(t)$$

Exemple 2 : Partie 1

Soit F la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $F(t) = 1 - (2t + 1)e^{-2t}$.

- F est dérivable sur \mathbb{R}^+ par règles opératoire et pour tout réel $t \geq 0$, on a :

$$F'(t) = 0 - 2e^{-2t} + 2(2t + 1)e^{-2t} = 4te^{-2t} = f(t)$$

- La fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = 4te^{-2t}$ est dérivable donc continue sur $[0; +\infty[$ et elle est positive sur cet intervalle.

De plus pour tout réel $x \geq 0$, on a

$$\int_0^x f(t) dt = F(x) - F(0) = 1 - (2x + 1)e^{-2x} \text{ et}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ par composition et somme. On a donc bien

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = 1.$$

f est donc une fonction de densité de probabilité sur \mathbb{R}^+ .

Exemple 2 : Partie 1

Soit F la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $F(t) = 1 - (2t + 1)e^{-2t}$.

- F est dérivable sur \mathbb{R}^+ par règles opératoire et pour tout réel $t \geq 0$, on a :

$$F'(t) = 0 - 2e^{-2t} + 2(2t + 1)e^{-2t} = 4te^{-2t} = f(t)$$

- La fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = 4te^{-2t}$ est dérivable donc continue sur $[0; +\infty[$ et elle est positive sur cet intervalle.

De plus pour tout réel $x \geq 0$, on a

$$\int_0^x f(t) dt = F(x) - F(0) = 1 - (2x + 1)e^{-2x} \text{ et}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ par composition et somme. On a donc bien

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = 1.$$

f est donc une fonction de densité de probabilité sur \mathbb{R}^+ .

- Soit X une variable aléatoire de densité f , on a :

Exemple 2 : Partie 1

Soit F la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $F(t) = 1 - (2t + 1)e^{-2t}$.

- La fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = 4te^{-2t}$ est dérivable donc continue sur $[0; +\infty[$ et elle est positive sur cet intervalle.

De plus pour tout réel $x \geq 0$, on a

$$\int_0^x f(t) dt = F(x) - F(0) = 1 - (2x + 1)e^{-2x} \text{ et}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ par composition et somme. On a donc bien

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = 1.$$

f est donc une fonction de densité de probabilité sur \mathbb{R}^+ .

Exemple 2 : Partie 1

Soit F la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $F(t) = 1 - (2t + 1)e^{-2t}$.

- La fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = 4te^{-2t}$ est dérivable donc continue sur $[0; +\infty[$ et elle est positive sur cet intervalle.

De plus pour tout réel $x \geq 0$, on a

$$\int_0^x f(t) dt = F(x) - F(0) = 1 - (2x + 1)e^{-2x} \text{ et}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ par composition et somme. On a donc bien

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = 1.$$

f est donc une fonction de densité de probabilité sur \mathbb{R}^+ .

- Soit X une variable aléatoire de densité f , on a :

$$P(2 < X < 3) = \int_2^3 f(t) dt = F(3) - F(2) = 5e^{-4} - 7e^{-6}$$

Exemple 3 : Partie 1

Soit X une variable aléatoire de densité $f(t) = 3e^{-3t}$ sur \mathbb{R}^+ .

On recherche deux réels a, b tels que $G : t \mapsto (at + b)e^{-3t}$ soit une primitive de la fonction $t \mapsto tf(t)$.

Exemple 3 : Partie 1

Soit X une variable aléatoire de densité $f(t) = 3e^{-3t}$ sur \mathbb{R}^+ .

On recherche deux réels a, b tels que $G : t \mapsto (at + b)e^{-3t}$ soit une primitive de la fonction $t \mapsto tf(t)$.

- G est dérivable sur \mathbb{R}_+ et pour tout réel $t \geq 0$, on a :

$$G'(t) = ae^{-3t} - 3(at + b)e^{-3t}$$

On a donc $G'(0) = a - 3b$ et $G'(1) = e^{-3}(-2a - 3b)$. Si pour tout $t \geq 0$, on a $G'(t) = tf(t)$ alors :

$$\begin{cases} G'(0) = 0 \\ G'(1) = f(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 3b = 0 \\ e^{-3}(-2a - 3b) = 3e^{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{3} \\ a = -1 \end{cases}$$

Réciproquement, on peut vérifier que la fonction G définie sur \mathbb{R}_+ par $G(t) = (-t - \frac{1}{3})e^{-3t}$ a pour fonction dérivée $tf(t)$.

Exemple 3 : Partie 2

Soit X une variable aléatoire de densité $f(t) = 3e^{-3t}$ sur \mathbb{R}^+ .

On recherche deux réels a, b tels que $G : t \mapsto (at + b)e^{-3t}$ soit une primitive de la fonction $t \mapsto tf(t)$.

Exemple 3 : Partie 2

Soit X une variable aléatoire de densité $f(t) = 3e^{-3t}$ sur \mathbb{R}^+ .

On recherche deux réels a, b tels que $G : t \mapsto (at + b)e^{-3t}$ soit une primitive de la fonction $t \mapsto tf(t)$.

- Pour déterminer l'espérance de la variable aléatoire X , on fixe d'abord $x \geq 0$ et on calcule

$$\int_0^x tf(t)dt = [G(t)]_0^x = G(x) - G(0) = \left(-x - \frac{1}{3}\right)e^{-3x} + \frac{1}{3}.$$

Par composition (avec règle de croissances comparées

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$) et somme on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$, donc par

somme on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x tf(t)dt = \frac{1}{3}$.

L'espérance de la variable aléatoire X est donc $\frac{1}{3}$.

Exemple 4 : Partie 1

Un détaillant constate que ses melons se vendent bien lorsque leur masse est comprise entre 900 g et 1 200 g. Dans la suite, de tels melons sont qualifiés « conformes ».

Le détaillant achète ses melons auprès d'un maraîcher chez lequel, la masse en gramme des melons est modélisée par une variable aléatoire M qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[850 ; x]$, où x est un nombre réel supérieur à 1 200.

Exemple 4 : Partie 1

Un détaillant constate que ses melons se vendent bien lorsque leur masse est comprise entre 900 g et 1 200 g. Dans la suite, de tels melons sont qualifiés « conformes ».

Le détaillant achète ses melons auprès d'un maraîcher chez lequel, la masse en gramme des melons est modélisée par une variable aléatoire M qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[850 ; x]$, où x est un nombre réel supérieur à 1 200.

- Le détaillant constate que 75 % des melons du maraîcher sont conformes.

Autrement dit, la probabilité qu'un melon du maraîcher soit conforme est 0,75 ; on a donc $P(M \in [900 , 1\ 200]) = 0,75$.

Comme la variable aléatoire M suit une loi uniforme sur $[850 , x]$, on a

$$P(M \in [900 , 1\ 200]) = \frac{1\ 200 - 900}{x - 850}.$$

On en déduit que $\frac{1\ 200 - 900}{x - 850} = 0,75$ ce qui équivaut à

Exemple 4 : Partie 2

Calcul de la masse moyenne d'un melon.

Exemple 4 : Partie 2

Calcul de la masse moyenne d'un melon.

- La masse d'un melon produit par le maraîcher suit une loi uniforme sur l'intervalle $[850; 1250]$ donc la masse moyenne d'un melon sur un échantillon de grande taille peut être approchée par l'espérance de M égale à $\frac{850 + 1250}{2} = 1050$ grammes.

Exemple 5 : Partie 1

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de kilomètres parcourus par un pneu, sans crevaisson. On fait l'hypothèse que X suit une loi exponentielle de paramètre λ .

Montrer que $P(500 \leq X \leq 1000) = e^{-500\lambda} - e^{-1000\lambda}$.

Exemple 5 : Partie 1

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de kilomètres parcourus par un pneu, sans crevaisson. On fait l'hypothèse que X suit une loi exponentielle de paramètre λ .

Montrer que $P(500 \leq X \leq 1000) = e^{-500\lambda} - e^{-1000\lambda}$.

- On a $p(500 \leq X \leq 1000) =$

$$\int_0^{1000} \lambda e^{-\lambda x} dx - \int_0^{500} \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_{500}^{1000} \lambda e^{-\lambda x} dx =$$
$$\left[e^{-\lambda x} \right]_{500}^{1000} = -e^{-1000\lambda} - \left(-e^{-500\lambda} \right) = e^{-500\lambda} - e^{-1000\lambda}.$$

Exemple 5 : Partie 2

La probabilité que le pneu parcoure entre 500 et 1 000 kilomètres sans crevaison étant égale à $\frac{1}{4}$, déterminer la valeur de λ .

Exemple 5 : Partie 2

La probabilité que le pneu parcoure entre 500 et 1 000 kilomètres sans crevaison étant égale à $\frac{1}{4}$, déterminer la valeur de λ .

- On a donc $p(500 \leq X \leq 1000) = \frac{1}{4} \iff e^{-500\lambda} - e^{-1000\lambda} = \frac{1}{4} \iff e^{-500\lambda} - (e^{-500\lambda})^2 - \frac{1}{4} = 0$. En posant $x = e^{-500\lambda}$, l'équation à résoudre s'écrit

$$x - x^2 - \frac{1}{4} = 0 \iff x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$0 \iff x - \frac{1}{2} = 0 \iff x = \frac{1}{2}. \text{ Il reste à résoudre :}$$

$$e^{-500\lambda} = \frac{1}{2} \text{ soit d'après la croissance de la fonction}$$

$$\ln, -500\lambda = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \iff$$

$$-500\lambda = -\ln 2 \iff \lambda = \frac{\ln 2}{500} \approx 0,001\ 38 \approx 0,001\ 4.$$

Exemple 6 Question 1

La durée de vie, en années, d'un composant électronique fabriqué dans une usine, est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un nombre réel strictement positif).

Démontrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(T \leq t) = 1$.

- Soit $t \in [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} P(T \leq t) &= \int_0^t f(x) dx = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^t = \left(-e^{-\lambda t} \right) - \left(-e^{-\lambda \times 0} \right) \\ &= \left(-e^{-\lambda t} \right) - (-1) = 1 - e^{-\lambda t} \\ \forall t \in [0, +\infty[\quad P(T \leq t) &= 1 - e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Exemple 6 Question 1

Exemple 6 Question 1

- Soit $t \in [0, +\infty[$:

$$\text{De } \left\{ \begin{array}{l} / \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} -\lambda t \stackrel{\lambda > 0}{=} -\infty \\ \text{et} \\ \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \end{array} \right. \quad \text{on déduit, par composition :}$$
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\lambda t} = 0.$$

On a ensuite, par somme : $\lim_{t \rightarrow +\infty} (1 - e^{-\lambda t}) = 1 - 0 = 1$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(T \leq t) = 1$$

Exemple 6 Question 2)

On suppose que $P(T \leq 7) = 0,5$. Déterminer λ à 10^{-3} près.

Exemple 6 Question 2)

On suppose que $P(T \leq 7) = 0,5$. Déterminer λ à 10^{-3} près.

- L'hypothèse s'écrit : $1 - e^{-7\lambda} = 0,5$ (1)

$$(1) \iff e^{-7\lambda} = 0,5$$

$$\iff -7\lambda = \ln \frac{1}{2}$$

$$\iff -7\lambda = -\ln 2$$

$$\iff \lambda = \frac{\ln 2}{7}$$

Une valeur approchée de λ , à 10^{-3} près, est 0,099

Exemple 6 Question 3)a)

La question est de déterminer $P(T \geq 5)$.

Exemple 6 Question 3)a)

La question est de déterminer $P(T \geq 5)$.

- Puisque $P(T \leq 5) = 1 - e^{-0,099 \times 5}$, alors

$$P(T \geq 5) = P(T > 5) = 1 - P(T \leq 5) = 1 - (1 - e^{-0,099 \times 5})$$

$$P(T \geq 5) = e^{-5 \times 0,099} = e^{-0,495}$$

La probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans est environ 0,61.

Exemple 6 Question 3)b)

Il s'agit de calculer

$$P_{(T \geq 2)}(T \geq 7)$$

Exemple 6 Question 3)b)

Il s'agit de calculer

$$P_{(T \geq 2)}(T \geq 7)$$

- La loi exponentielle étant une loi de durée de vie sans vieillissement, on a

$$P_{(T \geq 2)}(T \geq 7) = P(T \geq 5)$$

La probabilité cherchée est environ 0,61

Exemple 6 Question 3)c)

Il s'agit de calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire T .

Exemple 6 Question 3)c)

Il s'agit de calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire T .

- $E(T) = \frac{1}{\lambda}$:

Une valeur approchée de l'espérance de T est environ 10,10 :
la durée de vie moyenne d'un composant est d'environ 10 ans

Exemple 7 Partie 1

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}(0; 1)$. On donne $P(X \leq 1) \approx 0,841$ et $P(X \leq -2) \approx 0,023$ à $0,001$ près. En déduire une valeur approchée à $0,001$ près des probabilités suivantes :

- $P(X > 1) = ?$

Exemple 7 Partie 1

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}(0; 1)$. On donne $P(X \leq 1) \approx 0,841$ et $P(X \leq -2) \approx 0,023$ à $0,001$ près. En déduire une valeur approchée à $0,001$ près des probabilités suivantes :

- $P(X > 1) = ?$
- $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) \approx 1 - 0,841 = 0,159$
- $P(X \leq -1) = ?$

Exemple 7 Partie 1

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}(0; 1)$. On donne $P(X \leq 1) \approx 0,841$ et $P(X \leq -2) \approx 0,023$ à $0,001$ près. En déduire une valeur approchée à $0,001$ près des probabilités suivantes :

- $P(X > 1) = ?$
- $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) \approx 1 - 0,841 = 0,159$
- $P(X \leq -1) = ?$
- $P(X \leq -1) = P(X > 1) \approx 0,159$ par symétrie de la loi $\mathcal{N}(0; 1)$ par rapport à 0 .
- $P(X \geq -1) = ?$

Exemple 7 Partie 1

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}(0; 1)$. On donne $P(X \leq 1) \approx 0,841$ et $P(X \leq -2) \approx 0,023$ à 0,001 près. En déduire une valeur approchée à 0,001 près des probabilités suivantes :

- $P(X > 1) = ?$
- $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) \approx 1 - 0,841 = 0,159$
- $P(X \leq -1) = ?$
- $P(X \leq -1) = P(X > 1) \approx 0,159$ par symétrie de la loi $\mathcal{N}(0; 1)$ par rapport à 0.
- $P(X \geq -1) = ?$
- Par complémentaire : $P(X \geq -1) = 1 - P(X \leq -1) = 0,841$
ou par symétrie : $P(X \geq -1) = P(X \leq 1)$.
- $P(X = 1) = ?$

Exemple 7 Partie 1

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}(0; 1)$. On donne $P(X \leq 1) \approx 0,841$ et $P(X \leq -2) \approx 0,023$ à 0,001 près. En déduire une valeur approchée à 0,001 près des probabilités suivantes :

- $P(X > 1) = ?$
- $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) \approx 1 - 0,841 = 0,159$
- $P(X \leq -1) = ?$
- $P(X \leq -1) = P(X > 1) \approx 0,159$ par symétrie de la loi $\mathcal{N}(0; 1)$ par rapport à 0.
- $P(X \geq -1) = ?$
- Par complémentaire : $P(X \geq -1) = 1 - P(X \leq -1) = 0,841$ ou par symétrie : $P(X \geq -1) = P(X \leq 1)$.
- $P(X = 1) = ?$
- $P(X = 1) = 0$ car X suit une loi à densité

Exemple 7 Partie 2

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}(0; 1)$. On donne $P(X \leq 1) \approx 0,841$ et $P(X \leq -2) \approx 0,023$ à 0,001 près. En déduire une valeur approchée à 0,001 près des probabilités suivantes :

- $P(-1 < X < 1) = ?$

Exemple 7 Partie 2

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}(0; 1)$. On donne $P(X \leq 1) \approx 0,841$ et $P(X \leq -2) \approx 0,023$ à 0,001 près. En déduire une valeur approchée à 0,001 près des probabilités suivantes :

- $P(-1 < X < 1) = ?$
- $P(-1 < X < 1) = 1 - 2P(X < -1) \approx 1 - 2 \times 0,159 = 0,682$
par symétrie. On a aussi
 $P(-1 < X < 1) = 2P(X < 1) - 1 \approx 0,682.$
- $P(-2 < X < 1) = ?$

Exemple 7 Partie 2

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}(0; 1)$. On donne $P(X \leq 1) \approx 0,841$ et $P(X \leq -2) \approx 0,023$ à 0,001 près. En déduire une valeur approchée à 0,001 près des probabilités suivantes :

- $P(-1 < X < 1) = ?$
- $P(-1 < X < 1) = 1 - 2P(X < -1) \approx 1 - 2 \times 0,159 = 0,682$
par symétrie. On a aussi
 $P(-1 < X < 1) = 2P(X < 1) - 1 \approx 0,682.$
- $P(-2 < X < 1) = ?$
- $P(-2 < X < 1) = P(X < 1) - P(X < -2) \approx 0,841 - 0,023 = 0,818$
- $P(-2 < X) = ?$

Exemple 7 Partie 2

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}(0; 1)$. On donne $P(X \leq 1) \approx 0,841$ et $P(X \leq -2) \approx 0,023$ à 0,001 près. En déduire une valeur approchée à 0,001 près des probabilités suivantes :

- $P(-1 < X < 1) = ?$
- $P(-1 < X < 1) = 1 - 2P(X < -1) \approx 1 - 2 \times 0,159 = 0,682$
par symétrie. On a aussi
 $P(-1 < X < 1) = 2P(X < 1) - 1 \approx 0,682.$
- $P(-2 < X < 1) = ?$
- $P(-2 < X < 1) = P(X < 1) - P(X < -2) \approx 0,841 - 0,023 = 0,818$
- $P(-2 < X) = ?$
- $P(-2 < X) = 1 - P(X < -2) \approx 1 - 0,023 = 0,977$

Exemple 7 Partie 3

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}(0; 1)$. On donne $P(X \leq 1) \approx 0,841$ et $P(X \leq -2) \approx 0,023$ à $0,001$ près. En déduire une valeur approchée à $0,001$ près des probabilités suivantes :

- $P(X \leq 2) = ?$

Exemple 7 Partie 3

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}(0; 1)$. On donne $P(X \leq 1) \approx 0,841$ et $P(X \leq -2) \approx 0,023$ à 0,001 près. En déduire une valeur approchée à 0,001 près des probabilités suivantes :

- $P(X \leq 2) = ?$
- $P(X \leq 2) = 1 - P(X > 2) = 1 - P(X \leq -2) \approx 0,977$ par symétrie.
- $P(-1 < X \leq 2) = ?$

Exemple 7 Partie 3

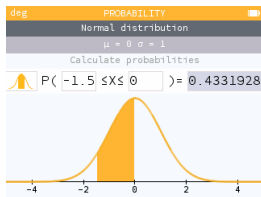
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}(0; 1)$. On donne $P(X \leq 1) \approx 0,841$ et $P(X \leq -2) \approx 0,023$ à 0,001 près. En déduire une valeur approchée à 0,001 près des probabilités suivantes :

- $P(X \leq 2) = ?$
- $P(X \leq 2) = 1 - P(X > 2) = 1 - P(X \leq -2) \approx 0,977$ par symétrie.
- $P(-1 < X \leq 2) = ?$
- $P(-1 < X \leq 2) = P(-2 < X < 1) \approx 0,818$

Exemple 8 Question 1)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

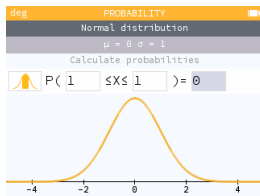
$P(-1,5 < X < 0)$ se calcule avec la commande
`normalFrép(-1.5,0,0,1) \approx 0,4332`



Exemple 8 Question 2)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

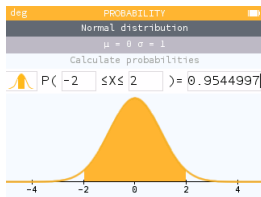
$P(X = 1) = 0$ car X suit une loi à densité.



Exemple 8 Question 3)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

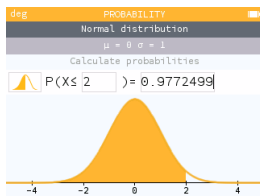
$P(-2 < X < 2)$ se calcule avec la commande
`normalFrép(-2,2,0,1) \approx 0,4331`



Exemple 8 Question 4)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

$P(X < 2) = P(X \leq 2)$ se calcule avec la commande `normalFrép(-1099, 2, 0, 1) ≈ 0,9772`. On remplace $-\infty$ par une valeur très petite comme -10^{99} .

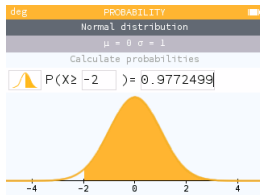


Exemple 8 Question 5)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

$P(X > -2) = P(X \geq -2)$ se calcule avec la commande `normalFrép(-2, 1099, 0, 1) ≈ 0,9772`. On remplace $+\infty$ par une valeur très grande comme 10^{99} .

Notons que par symétrie par rapport à 0, $P(X > -2) = P(X < 2)$.



Exemple 8 Question 6)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

$P_{X>0}(X < 2)$ se calcule avec la commande
`normalFrép(-1.5, 0, 0, 1) \approx 0,4331`

Exemple 9 Question 1)

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centré réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

Déterminer le réel a tel que $P(X \leq a) = 0,7$

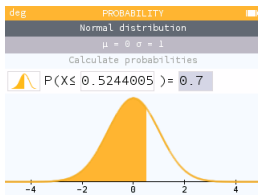
Exemple 9 Question 1)

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

Déterminer le réel a tel que $P(X \leq a) = 0,7$

- On inverse la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite pour le quantile 0,7. Avec une calculatrice TI par exemple :

$$a = \text{invNormale}(0.7, 0.1, \text{GAUCHE}) \approx 0,5244$$



Exemple 9 Question 2)

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centré réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

Déterminer le réel b tel que $P(X \geq b) = 0,15$.

Exemple 9 Question 2)

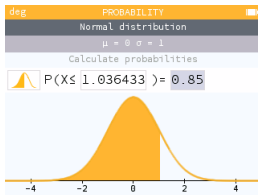
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

Déterminer le réel b tel que $P(X \geq b) = 0,15$.

- De $P(X \geq b) = 0,15$ on déduit par complémentaire que $P(X < b) = 1 - 0,15 = 0,85$.

On inverse la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite pour le quantile 0,85. Avec une calculatrice TI par exemple :

$a = \text{invNormale}(0.85, 0.1, \text{GAUCHE}) \approx 1,0364$



Exemple 9 Question 3)

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centré réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

Déterminer le réel c tel que $P(-c \leq X \leq c) = 0,3$.

Exemple 9 Question 3)

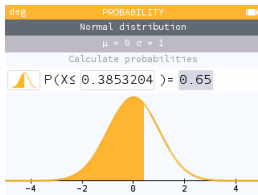
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

Déterminer le réel c tel que $P(-c \leq X \leq c) = 0,3$.

- Par symétrie, on a $2P(X \leq c) - 1 = P(-c \leq X \leq c) = 0,3$
donc $P(X \leq c) = \frac{1 + 0,3}{2} = 0,65$.

On inverse la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite pour le quantile 0,65. Avec une calculatrice TI par exemple :

`a = invNormale(0.65, 0.1, GAUCHE) \approx 0,3853`



Exemple 10

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centré réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

Avec la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 0,01 près du réel $u_{0,2}$ tel que $P(-u_{0,2} \leq X \leq u_{0,2}) = 0,8$.

Exemple 10

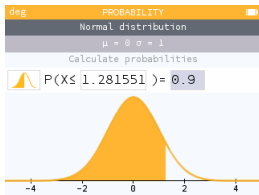
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

Avec la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 0,01 près du réel $u_{0,2}$ tel que $P(-u_{0,2} \leq X \leq u_{0,2}) = 0,8$.

- Par symétrie, on a $P(-u_{0,2} \leq X \leq u_{0,2}) = 2P(X \leq u_{0,2}) - 1$
donc $P(X \leq u_{0,2}) = \frac{1 + 0,8}{2} = 0,9$.

On inverse la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite pour le quantile 0,9. Avec une calculatrice TI par exemple :

$a = \text{invNormale}(0.9, 0.1, \text{GAUCHE}) \approx 1,2816$



Exemple 11

Le nombre de lampes fonctionnelles après 1 an suit une loi normale de moyenne $\mu = 440$ et d'écart-type $\sigma = 7,3$.

1. On a $P(X > 445) \approx 0,247$.
2. Le nombre de lampes en panne au bout d'un an est $500 - X$.

On veut déterminer α tel que

$$P(500 - X \leq \alpha) = 0,95 \Leftrightarrow P(500 - \alpha \leq X) = 0,95.$$

$$\text{Or } P(500 - \alpha \leq X) = 0,95 \Leftrightarrow P(X \leq 500 - \alpha) = 0,95.$$

On inverse la loi $\mathcal{N}(440 ; 7,3^2)$ et on note $\Psi(0,95)$ le réel u tel que $P(X \leq u) = 0,95$. La fonction Ψ est la fonction `FracNormale` ou `InvNorm` de la calculatrice.

On a $\Psi(0,95) \approx 428$ donc $\alpha = 500 - 428 = 72$. Il faut donc prévoir un stock de 72 lampes.

Exemple 12 Question 1)

- X est la variable aléatoire qui, à chaque comprimé pris au hasard dans la production associe sa masse en milligrammes. X suit la loi normale de moyenne $\mu = 900$ et d'écart-type $\sigma = 7$.

La probabilité qu'un comprimé prélevé au hasard soit conforme est :

$$P(890 \leq X \leq 920) \approx 0,92$$

Exemple 12 Question 2)

- On veut déterminer h tel que

$$P(900 - h \leq X \leq 900 + h) \approx 0,99.$$

On $\mu = 900$ donc

$$P(900 - h \leq X \leq 900 + h) = 2P(X \leq 900 + h) - 1.$$

$$\text{Ainsi } P(X \leq 900 + h) = \frac{1 + 0,99}{2} = 0,995.$$

On inverse la loi $\mathcal{N}(900 ; 7^2)$ et on note $\Psi(0,995)$ le réel u tel que $P(X \leq u) = 0,995$. La fonction Ψ est la fonction `FracNormale` ou `InvNorm` de la calculatrice.

On a $\Psi(0,995) \approx 918$ donc $h \approx 918 - 900 = 18$

Exemple 13 Question 1) a)

La variable aléatoire X , qui à chaque pièce traitée associe l'épaisseur de nickel déposé, suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 25$ micromètres (μm) et d'écart type σ_1 .

On sait que $P(X > 27,2) = 0,023$.

- La probabilité qu'une pièce soit conforme est

$$P(22,8 \leq X \leq 27,2).$$

Or $27,2 - \mu = 2,2 = \mu - 22,8$ donc par propriété de symétrie de la fonction de densité d'une loi normale on a :

$$P(22,8 \leq X \leq 27,2) = 1 - 2 \times P(X > 27,2) = 0,954$$

Exemple 13 Question 1) b)

La variable aléatoire X , qui à chaque pièce traitée associe l'épaisseur de nickel déposé, suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 25$ micromètres (μm) et d'écart type σ_1 .

X suit la loi $\mathcal{N}(\mu_1 ; \sigma^2)$ donc $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

$$P(X \geq 27,2) = 0,023 \iff P(Z \geq \frac{2,2}{\sigma_1}) = 0,023$$

$$P(X \geq 27,2) = 0,023 \iff P(Z \leq \frac{2,2}{\sigma_1}) = 0,977$$

On inverse la loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$ et on note $\Psi(0,977)$ le réel u tel que $P(Z \leq u) = 0,977$. La fonction Ψ est la fonction FracNormale ou InvNorm de la calculatrice.

On a $\Psi(0,977) \approx 1,995$ donc $\sigma_1 = \frac{2,2}{\Psi(0,977)} \approx 1,1$.

Exemple 13 Question 1) c)

La variable aléatoire X , qui à chaque pièce traitée associe l'épaisseur de nickel déposé, suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 25$ micromètres (μm) et d'écart type $\sigma_1 = 1,1$.

Sachant qu'une pièce est conforme, la probabilité que l'épaisseur de nickel déposé sur celle-ci soit inférieure à $24 \mu\text{m}$ est :

$$P_{(22,8 \leq X \leq 27,2)}(X < 24) = \frac{P((X < 24) \cap (22,8 \leq X \leq 27,2))}{P(22,8 \leq X \leq 27,2)}$$

$$P_{(22,8 \leq X \leq 27,2)}(X < 24) = \frac{P((22,8 \leq X < 24))}{P(22,8 \leq X \leq 27,2)}$$

$$P_{(22,8 \leq X \leq 27,2)}(X < 24) \boxed{\approx 0,167}$$

Exemple 13 Question 2 (1/2))

La nouvelle variable aléatoire Y , qui à chaque pièce traitée associe l'épaisseur de nickel déposé, suit la loi normale d'espérance

$\mu_2 = 25$ micromètres (μm) et d'écart type σ_2 .

On sait que $P(22,8 \leq Y \leq 27,2) = 0,98$.

Par propriété de symétrie par rapport à $\mu_2 = 25$ qui est le centre de $[22,8; 27,2]$:

$$P(Y \leq 27,2) = \frac{1 + P(22,8 \leq Y \leq 27,2)}{2} = 0,99$$

X et Y ont la même moyenne $\mu = 25$ mais

$P(22,8 \leq Y \leq 27,2) > P(22,8 \leq X \leq 27,2)$ donc la dispersion autour de la moyenne est plus grande pour la variable aléatoire X et donc $\sigma_1 > \sigma_2$.

On va calculer σ_2 pour le vérifier.

Exemple 13 Question 2 (2/2))

X suit la loi $\mathcal{N}(\mu_1 ; \sigma^2)$ donc $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

$$P(Y \leq 27,2) = 0,99 \iff P(Z \leq \frac{2,2}{\sigma_2}) = 0,99$$

On inverse la loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$ et on note $\Psi(0,99)$ le réel u tel que $P(Z \leq u) = 0,99$. La fonction Ψ est la fonction FracNormale ou InvNorm de la calculatrice.

On a $\Psi(0,99) \approx 2,326$ donc $\sigma_2 = \frac{2,2}{\Psi(0,99)} \approx 0,946$.

On a bien vérifié que $\sigma_2 < \sigma_1$.

Exemple 14 Question 1 Partie 1

La durée de vie d'un certain type d'appareil est modélisée par une variable aléatoire X suivant une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ inconnus. Les spécifications impliquent que 80% de la production des appareils ait une durée de vie entre 120 et 200 jours et que 5% de la production ait une durée de vie inférieure à 120 jours.

1. X suit la loi $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$ donc $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} P(120 \leq X \leq 200) = 0,8 \\ P(X \leq 120) = 0,05 \end{cases} &\iff \begin{cases} P(X \leq 200) = 0,85 \\ P(X \leq 120) = 0,05 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} P(Z \leq \frac{200 - \mu}{\sigma}) = 0,85 \\ P(Z \leq \frac{120 - \mu}{\sigma}) = 0,05 \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple 14 Question 1 Partie 2

1. On inverse deux fois la loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$ et on note $\Psi(0,85)$ le réel u tel que $P(Z \leq u) = 0,85$ et $\Psi(0,05)$ le réel v tel que $P(Z \leq v) = 0,05$

La fonction Ψ est la fonction `FracNormale` ou `InvNorm` de la calculatrice.

$$\begin{aligned} \begin{cases} P(120 \leq X \leq 200) = 0,8 \\ P(X \leq 120) = 0,05 \end{cases} &\iff \begin{cases} \frac{200 - \mu}{\sigma} = \Psi(0,85) \\ \frac{120 - \mu}{\sigma} = \Psi(0,05) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 200 - \mu = \sigma \times \Psi(0,85) \\ 120 - \mu = \sigma \times \Psi(0,05) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 200 - \sigma \times \Psi(0,85) = \mu \\ 80 = \sigma \times (\Psi(0,85) - \Psi(0,05)) \end{cases} \\ &\iff \boxed{\begin{cases} \mu \approx 169,08 \\ \sigma \approx 29,84 \end{cases}} \end{aligned}$$

Exemple 14 Question 2

2. Calculons la probabilité d'avoir un appareil dont la durée de vie soit comprise entre 200 jours et 230 jours :

$$P(200 \leq X \leq 230) \approx \boxed{0,129}$$