Corrigé 1

exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. Dans ce qui suit, z désigne un nombre complexe.

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer sur la copie si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier.

1. **Affirmation 1 :** L'équation $z - \mathrm{i} = \mathrm{i}(z+1)$ a pour solution $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

   Réponse :

$$\begin{aligned}
z - \mathrm{i} = \mathrm{i}(z+1) &\Leftrightarrow z - \mathrm{i}z = \mathrm{i} + \mathrm{i} \\
&\Leftrightarrow z(1-\mathrm{i}) = \mathrm{i} + \mathrm{i} \\
&\Leftrightarrow z\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \\
&\Leftrightarrow z\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{4}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \\
&\Leftrightarrow z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \\
&\Leftrightarrow z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(3\frac{\pi}{4}\right)}
\end{aligned}$$

   On a $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(3\frac{\pi}{4}\right)} \neq \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ car il s'agit de deux formes exponentielles distinctes.

   L'affirmation 1 est donc fausse.

2. **Affirmation 2 :** Pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, le nombre complexe $1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$ admet pour forme exponentielle $2\cos x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$.

   Réponse :

   Pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$,

$$1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)$$

   On a utilisé la relation $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right| = 1$

$$\begin{aligned}
1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\left(\cos(-x) + \mathrm{i}\sin(-x) + \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)\right) \\
1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\left(\cos(x) - \mathrm{i}\sin(x) + \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)\right) \\
1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} &= 2\cos(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}
\end{aligned}$$

   ⚠ $2\cos x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$ sera une forme exponentielle si $2\cos x \geqslant 0$.

   Ceci est vrai car $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

   L'affirmation 2 est donc vraie.

3. **Affirmation 3 :** Un point M d'affixe z tel que $|z-\mathrm{i}| = |z+1|$ appartient à la droite d'équation $y = -x$.

Réponse :

Notons A le point d'affixe i et et B le point d'affixe -1.

Notons Γ l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z-\mathrm{i}| = |z+1|$.

M appartient à Γ si et seulement si $|z-z_A| = |z-z_B|$. M appartient à Γ si et seulement si $MA = MB$.

Γ est donc la médiatrice du segment $[AB]$.

Γ médiatrice du segment $[AB]$ est la perpendiculaire à $[AB]$ en son milieu I.

Un vecteur normal à la droite Γ est $\overrightarrow{AB}$ d'affixe $z_B - z_A = -1-\mathrm{i}$ donc de coordonnées $(-1\,;\,-1)$.

Une équation de Γ est donc de la forme $-x-y+c=0$

Le milieu I de $[AB]$ a pour affixe $\dfrac{z_A+z_B}{2} = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{2}$ donc pour coordonnées $(-0,5\,;\,0,5)$.

On en déduit que $-(-0,5)-0,5+c=0 \Leftrightarrow c=0$.

Une équation de Γ est donc $-x-y=0 \Leftrightarrow y=-x$.

$\boxed{\textbf{L'affirmation 3 est donc vraie}}$.

4. On considère le nombre complexe $z = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.

a. Affirmation 4 : Le nombre complexe z^2 est un réel positif.

Réponse :

$z = 1+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

On en déduit que $z^2 = 2^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = 4\left(-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$\boxed{\textbf{L'affirmation 4 est donc fausse}}$.

b. Affirmation 5 : L'argument du nombre complexe $z^{2\,019}$ vaut 0 modulo 2π.

Réponse :

$\arg\left(z^{2\,019}\right) = 2019\arg(z) = 2019 \times \dfrac{2\pi}{3} = 1346\pi = 2\times 673\pi$.

On en déduit que l'argument du nombre complexe $z^{2\,019}$ vaut 0 modulo 2π.

$\boxed{\textbf{L'affirmation 5 est donc vraie}}$.

Corrigé 2

exercice 5, correction de l'AMEP

Soit la suite de nombres complexes (z_n) définie par $\begin{cases} z_0 & = & 100 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{\mathrm{i}}{3}z_n \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe z_n.

1. Pour tout entier naturel n, les points M_n et M_{n+2} ont pour affixes z_n et z_{n+2}.

$z_{n+2} = \dfrac{\mathrm{i}}{3}z_{n+1} = \dfrac{\mathrm{i}}{3}\left(\dfrac{\mathrm{i}}{3}z_n\right) = \dfrac{\mathrm{i}^2}{9}z_n = -\dfrac{1}{9}z_n$

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{O}M_{n+2}}$ a pour affixe z_{n+2} et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{O}M_n}$ a pour affixe z_n ; or $z_{n+2} = -\dfrac{1}{9}z_n$ donc $\overrightarrow{\mathrm{O}M_{n+2}} = -\dfrac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{O}M_n}$. Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{O}M_{n+2}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{O}M_n}$ sont colinéaires donc les points O, M_n et M_{n+2} sont alignés quel que soit n.

2. On rappelle qu'un disque de centre A et de rayon r, où r est un nombre réel positif, est l'ensemble des points M du plan tels que $AM \leqslant r$.

Le point M_n appartient au disque de centre O et de rayon 1 si et seulement si $OM_n \leqslant 1$. On sait que $OM_n = |z_n|$.

Soit (d_n) la suite définie pour tout n par $d_n = |z_n|$.

Pour tout entier naturel n, on a $z_{n+1} = \frac{\mathrm{i}}{3} z_n$ donc $|z_{n+1}| = \left|\frac{\mathrm{i}}{3} z_n\right| = \left|\frac{\mathrm{i}}{3}\right| \times |z_n| = \frac{1}{3}|z_n|$; donc, $d_{n+1} = \frac{1}{3} d_n$.

De plus, $d_0 = |z_0| = 100$.

La suite (d_n) est définie par $d_0 = 100$ et $d_{n+1} = \frac{1}{3} d_n$, pour tout entier naturel n.

Donc la suite (d_n) est une suite géométrique de premier terme $d_0 = 100$ et de raison $q = \frac{1}{3}$.

- $-1 < q < 1$ donc la suite (d_n) est convergente et a pour limite 0.
  D'après la définition de la limite d'une suite, on peut déduire que l'intervalle $[0\,;1]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, ce qui répond à la question.
- On peut également déterminer le rang n à partir duquel tous les points sont situés dans le disque (*mais ce n'était pas explicitement demandé*).
  On cherche n tel que $d_n < 1$. La suite (d_n) est géométrique de premier terme $d_0 = 100$ et de raison $q = \frac{1}{3}$ donc, pour tout n, $d_n = d_0 \times q^n$ donc $d_n = 100\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
  On résout l'inéquation :
  $$d_n < 1 \iff 100\left(\frac{1}{3}\right)^n < 1 \iff \left(\frac{1}{3}\right)^n < 0{,}01 \iff \ln\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) < \ln(0{,}01) \iff n \times \ln\left(\frac{1}{3}\right) < \ln(0{,}01)$$
  $$\iff n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$$
  Or $\frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} \approx 4{,}2$ donc les points M_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 1 à partir de $n = 5$.