Exemple 6

T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1) Soit $t \geq 0$:

$$P(T \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$P(T \leq t) = \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^t =$$

$$P(T \leq t) = \underbrace{-e^{-\lambda t} + 1}_{\text{formule du cours}}$$

$$\lim_{t \to +\infty} -e^{-\lambda t} = 0 \text{ par composition}$$

donc $\lim\limits_{t \to +\infty} P(T \leq t) = 1$

2) On suppose que $P(T \leq 7) = 0,5$

$$P(T \leq 7) = 1 - e^{-7\lambda}$$

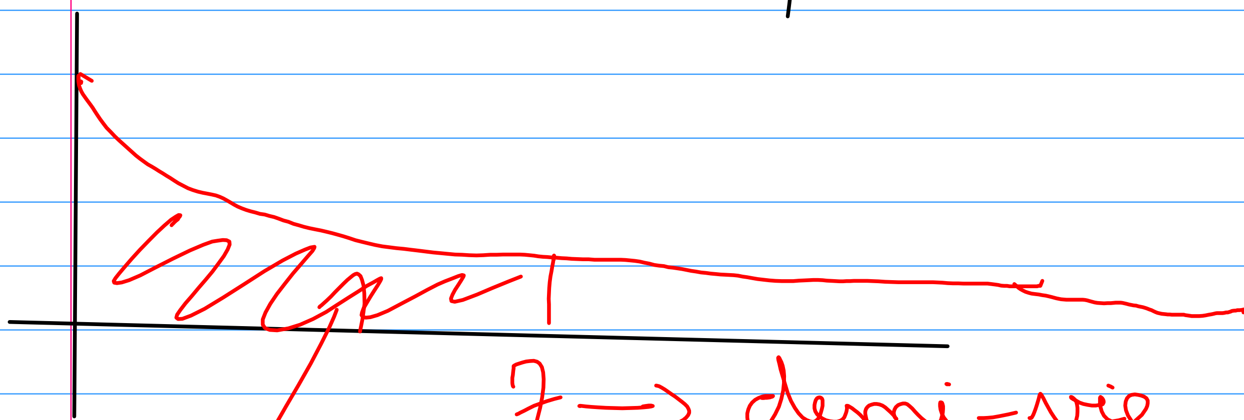
donc on résout :

$$1 - e^{-7\lambda} = 0,5$$

$$\iff e^{-7\lambda} = 0,5$$

$$\iff -7\lambda = \ln(0,5)$$

$$\iff \lambda = \frac{\ln(0,5)}{-7} \simeq 0,099 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$



$7 \longrightarrow$ demi-vie

$P(T \leq 7) = 0,5$

3) On prend $\lambda = 0,099$.

a) $P(T \geq 5) = 1 - P(T < 5)$

$$P(T \geq 5) = 1 - \int_0^5 \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$P(T \geq 5) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda 5}\right)$$

$$P(T \geq 5) = e^{-5\lambda} = e^{-5 \times 0,099}$$

$$P(T \geq 5) \approx 0,610 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

b) On doit calculer :

$$P_{(T\geq 2)}(T\geq 7) = P_{(T\geq 2)}(T\geq 5+2)$$

D'après la propriété de durée de vie sans vieillissement des lois exponentielles :

$$P_{(T\geq 2)}(T\geq 5+2) = P(T\geq 5) \simeq 0,610$$

c) D'après une formule du cours : $E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,095} \simeq 10,1$

C'est la durée de vie moyenne du composant.

Exercice n°36 p. 371 du manuel

Formulaire

T loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$

(1) $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ fonction de densité

(2) $P(T\leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\,dt = 1 - e^{-\lambda a}$

donc $P(T > a) = e^{-\lambda a}$

③ $E(T) = \frac{1}{\lambda}$

④ $P_{(T \geq a)}(T \geq a+b) = P(T \geq b)$ durée de vie sans vieillissement

1) $0,5 = P(D \leq 5730)$

$\Leftrightarrow 0,5 = 1 - e^{-\lambda 5730}$

$\Leftrightarrow e^{-\lambda 5730} = 0,5$

$\Leftrightarrow -5730\lambda = \ln(0,5)$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(0,5)}{-5730} \simeq 1,21 \times 10^{-4}$

$\lambda > 0$ ici $\ln(0,5) < 0$

car $0 < 0,5 < 1$

2) a) $P(D < 1000) = 1 - e^{-\lambda \times 1000}$

$P(D < 1000) \simeq 0,121$

b) $P(D > 10000) = 1 - P(D < 10000)$

$P(D > 10000) =$

$$P(D>10000) = 1 - \int_0^{10000} \lambda e^{-\lambda t}\, dt$$

$$= 1 - \left[-e^{-\lambda t} \right]_0^{100}$$

$$= 1 - \left(1 - e^{-10000\lambda}\right)$$

$$P(T>10000) = e^{-10000\lambda} \simeq 0{,}298$$

3) On cherche a tel que :

$$\underbrace{P(D<a)} = 0{,}95$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1 - e^{-\lambda a} = 0{,}95$$

$$\Longleftrightarrow \quad -e^{-\lambda a} = -0{,}05 \qquad \lambda \simeq 1{,}21 \times 10^{-4}$$

$$\Longleftrightarrow \quad e^{-\lambda a} = 0{,}05$$

$$\Longleftrightarrow \quad -\lambda a = \ln(0{,}05)$$

$$\Longleftrightarrow \quad a = \frac{\ln(0{,}05)}{-\lambda} \simeq 24758 \text{ ans}$$

Exercice 4 de la fiche 1

$\boxed{\text{Partie A}}$

X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Ici $f(t) = t \times \underbrace{\lambda e^{-\lambda t}}_{\text{fonction de densité}}$

On nous donne $F(t) = -\left(t+\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}$ comme primitive de f.

1) Soit x un réel positif

$$\int_0^x \underbrace{t \lambda e^{-\lambda t}}_{f(t)} dt = \Big[F(t) \Big]_0^x$$

$$\int_0^x t \lambda e^{-\lambda t} dt = F(x) - F(0)$$

$$\int_0^x t \lambda e^{-\lambda t} dt = -\left(x+\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x} - \left(-\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\int_0^x t\lambda e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1\right)$$

b) On sait que $E(X) = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x t\lambda e^{-\lambda t}\,dt$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -\lambda x = -\infty$

On pose $u = -\lambda x$

On sait que $\lim\limits_{u \to -\infty} u e^{u} = 0$

par croissances comparées

ici $-\lambda x e^{-\lambda x} = u e^{u}$

donc par composition :

$\lim\limits_{x \to +\infty} -\lambda x e^{-\lambda x} = 0$

- De même $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\lambda x} = 0$ par composition

- Donc par somme puis produit

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1\right) = \frac{1}{\lambda}$$

Finalement on a :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Partie B

1)

a) L'espérance est la durée de vie moyenne.

b) $E(X) = \frac{1}{\lambda} \iff \frac{1}{\lambda} = 2$

$\iff \lambda = \frac{1}{2}$

c) $P(X \leq 2) = 1 - e^{-\lambda \times 2}$

$P(X \leq 2) = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$

$P(X \leq 2) = \frac{e-1}{e} \simeq 0{,}63$

d) $P_{(X \geq 1)}(X \geq 3) = P_{(X \geq 1)}(X \geq 1+2)$

d'après la propriété de durée de vie sans vieillissement

$$P_{(X\geq 1)}(X\geq 3) = P(X\geq 2)$$
$$= 1 - P(X<2)$$
$$= 1-(1-e^{-2\lambda})$$
$$= e^{-2\lambda} \approx 0,37$$

↳ Pour demain :

exercice 2