6. **a.** Démontrer que les points A, B, C définissent un plan.

b. $\boxed{\text{Equation de } (ABC)\text{, } 1^{\text{ère}} \text{ méthode}}$

Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}\,(a;b;c)$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, en déduire une équation de (ABC).

c. $\boxed{\text{Equation de } (ABC)\text{, } 2^{\text{ème}} \text{ méthode}}$

Résoudre le système de trois équations à quatre inconnues a, b, c, d : $\begin{cases} ax_A + by_A + cz_A + d = 0 \\ ax_B + by_B + cz_B + d = 0 \\ ax_C + by_C + cz_C + d = 0 \end{cases}$

En déduire une équation de (ABC).

6) a) Soit les points

$A\,(3;-1;4)$ $B(2;1;4)$ et $C(3;-2;0)$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires ssi il existe un réel k tel que : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \iff \begin{cases} -1 = k \times 0 \\ 2 = -k \\ 0 = -4k \end{cases} \iff \begin{cases} -1 = 0 \\ k = -2 \\ k = 0 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B, C ne sont pas alignés.

Ils définissent donc un plan

(ABC).

6) b) Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan (ABC).

$\vec{n}$ normal au plan (ABC) ssi $\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \\ \text{et} \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \\ \text{et} \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -a+2b = 0 \\ -b-4c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2b \\ c = -\frac{1}{4}b \end{cases}$$

On en déduit que :

$\vec{n}\begin{pmatrix} 2b \\ b \\ -\frac{1}{4}b \end{pmatrix}$ avec b réel normal

Pour $b = 4$ $\vec{n}_1\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC)

Une équation de (ABC) est donc de la forme :

$$8x + 4y - z + d = 0$$

De plus C(3;-2;0) appartient au plan (ABC), donc :

$$8\times 3 + 4\times(-2) - 0 + d = 0$$

$$\iff 16 + d = 0$$

$$\iff d = -16$$

Une équation du plan (ABC) est donc de la forme :

$$\boxed{8x + 4y - z - 16 = 0}$$

6.) c) Soit $ax+by+cz+d=0$ une équation de (ABC) :

$$\begin{cases} A \in (ABC) \\ B \in (ABC) \\ C \in (ABC) \end{cases} \iff \begin{cases} a\times 3 - b + 4c + d = 0 \\ a\times 2 + b + 4c + d = 0 \\ 3a - 2b + d = 0 \end{cases}$$

On a un système de trois équations à 4 inconnues a, b, c, d.

On choisit d'exprimer trois inconnues par exemple a, b et c en fonction d'une quatrième d.

$$\mathcal{S} \iff \begin{cases} 3a - \frac{3a+d}{2} + 4c + d = 0 \\ 2a + \frac{3a+d}{2} + 4c + d = 0 \\ b = \frac{3a+d}{2} \end{cases}$$

$$\mathcal{S} \iff \begin{cases} \frac{3a}{2} + 4c + \frac{d}{2} = 0 & L_1 \\ \frac{7a}{2} + 4c + \frac{3}{2} d = 0 & L_2 \\ b = \frac{3a+d}{2} \end{cases}$$

$$\mathcal{S} \iff \begin{cases} \frac{3a}{2} + 4c + \frac{d}{2} = 0 \\ \frac{7a}{2} - \frac{3a}{2} + d = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ b = \frac{3a+d}{2} \end{cases}$$

$$\mathcal{S} \iff \begin{cases} -\frac{3d}{4} + \frac{d}{2} + 4c = 0 \\ a = -\frac{d}{2} \\ b = -\frac{d}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} c = \frac{d}{16} \\ a = -\frac{d}{2} \\ b = -\frac{d}{4} \end{cases}$$

Une équation de (ABC) est donc :

$$-\frac{d}{2} x - \frac{d}{4} y + \frac{d}{16} z + d = 0$$

avec $d \neq 0$

On peut choisir $d = -16$

$$\boxed{\begin{array}{l} 8x + 4y - z - 16 = 0 \\ \text{est une équation de } (ABC) \end{array}}$$