

Exemples du cours du chapitre calcul intégral

Partie 2 2019/2020

Frédéric Junier

Lycée du Parc
1 Boulevard Anatole France
69006 Lyon

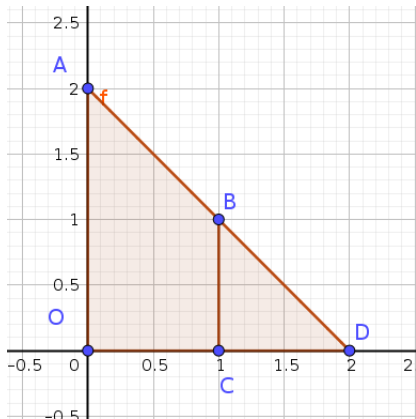
18 mars 2020

- Exemple 1
- Exemple 2
- Exemple 3
- Exemple 4
- Exemple 5

Exemple 1 Partie 1

Soit f la fonction définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = 2 - x$.

La surface dont l'aire est égale à l'intégrale $I = \int_1^2 f(x) dx$ est le triangle BCD rectangle isocèle en C dont l'aire est $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$.

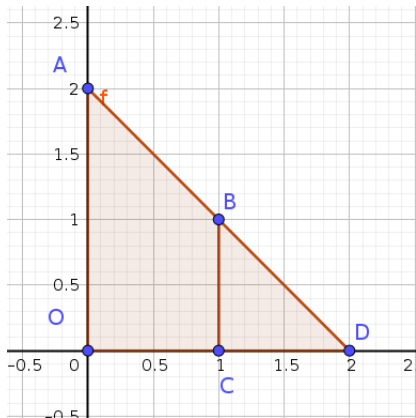


Exemple 1 Partie 2

Soit f la fonction définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = 2 - x$.

La surface dont l'aire est égale à l'intégrale $I = \int_0^1 f(x) dx$ est le trapèze $OABC$ rectangle isocèle en O dont l'aire est

$$\frac{1}{2} \times (OA + BC) \times OC = \frac{3}{2}.$$



Exemple 2 Question 1

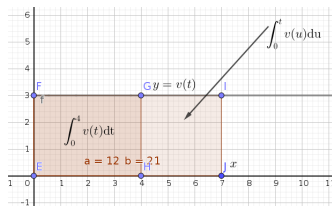
Soit $M(t)$ un point mobile sur un axe tel que à chaque instant $t \in [0; +\infty[$ (en secondes) on connaît sa vitesse instantanée $v(t)$ en mètres par seconde.

A l'instant $t = 0$, le point mobile est à l'origine de l'axe et pour tout $t \in [0; +\infty[$, on a $v(t) = 3 \text{ m.s}^{-1}$.

- **Question 1** La fonction v est constante donc dérivable donc continue sur $[0; +\infty[$.

$\int_0^4 v(t)dt$ est l'aire du rectangle $EFGH$ c'est-à-dire $4 \times 3 = 12$.

On peut l'interpréter comme la distance parcourue par le mobile en 3 secondes. Notons que la dimension de l'intégrale est celle de $v(t)dt$: vitesse \times temps = distance.



Exemple 2 Question 2

- **Question 2** $\int_2^5 v(t)dt$ est égale à $(5-2) \times 3 = 9$. C'est la distance parcourue par le mobile entre les instants $t=2$ et $t=5$ à une vitesse de 3 m.s^{-1} . $\frac{1}{5-2} \int_2^5 v(t)dt$ est égale à $\frac{\text{distance}}{\text{temps}} = \frac{9}{3}$, c'est la vitesse moyenne du mobile entre les instants $t=2$ et $t=5$. Comme sa vitesse est constante, c'est sa vitesse instantanée à tout instant. On a un exemple, d'utilisation de l'intégrale dans un calcul de valeur moyenne. Notons que $\frac{1}{5-2} \int_2^5 v(t)dt$ a la même dimension que $v(t)$, c'est une vitesse.

Exemple 2 Question 3

- **Question 3** $g(t) = \int_0^t v(u) du$ est l'aire du rectangle $EFIJ$ c'est-à-dire $t \times 3 = 3t$.

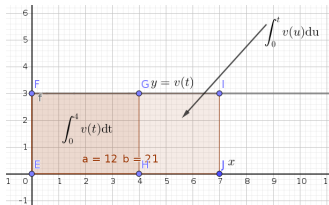
On peut l'interpréter comme la distance parcourue par le mobile en t secondes.

g est une fonction linéaire donc elle est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $g'(t) = 3$. On remarque que $g'(t) = v(t)$. On peut

l'expliquer en prenant la limite du taux de variation

$$\frac{g(t+h)-g(t)}{h} = \frac{3(t+h)-3t}{h} = 3 \text{ quand } h \text{ tend vers } 0.$$

$g(t) = \int_0^t v(u) du$ est une primitive de v .



Exemple 3

Voir [Notebook](#) et [Corrigé](#) (suivez les liens).

Exemple 4 Question 1

Soit f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

- f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times (-t) e^{-\frac{t^2}{2}}$. Pour tout réel $t > 0$, on a $f'(t) < 0$ et $f'(0) = 0$.

On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, on a par composition $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} = 0$.

Exemple 4 Questions 2 et 3

f est dérivable donc continue sur $[0; +\infty[$.

De plus, pour tout $t \geq 0$, on a $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ donc $f(t) \geq 0$.

On peut appliquer le théorème fondamental, qui nous permet d'affirmer que $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ et que pour tout réel $x \geq 0$, $F'(x) = f(x)$.

Notez qu'on utilise plutôt x pour F et t pour $F' = f$ mais qu'on pourrait écrire : pour tout réel $t \geq 0$, $F'(t) = f(t)$.

Puisque f est strictement positive sur $]0; +\infty[$ et ne s'annule qu'en 0, on en déduit que F est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Page suivante un graphique qui permet de comprendre pourquoi $F(x)$ aire sous la courbe de f entre 0 et x est croissante.

Exemple 4 Questions 2 et 3

