1 Lois de probabilité à densité

1.1 Un premier exemple

Exemple 1 *Nouvelle Calédonie novembre 2017*

Sofia utilise le bus pour se rendre au cinéma. La durée du trajet entre son domicile et le cinéma (exprimée en minutes) est une variable aléatoire T qui prend des valeurs choisies aléatoirement dans l'intervalle $[12\,;\,15]$. On dit que T suit la loi uniforme sur l'intervalle $[12\,;\,15]$.

1. Déterminer la probabilité de l'événement A = « *la durée du trajet de Sofia est inférieure ou égale à* 13 *minutes* ».
2. Déterminer la probabilité de l'événement B = « *la durée du trajet de Sofia est supérieure ou égale à* 13 *minutes* ».
3. Déterminer la probabilité de l'événement C = « *la durée du trajet de Sofia est égale exactement à* 13 *minutes* ».
4. Une variable aléatoire X donnant la face du dessus lorsqu'on lance un dé à six faces équilibré suit une **loi uniforme discrète** à valeurs dans l'ensemble $X(\Omega) = \{1;2;3;4;5;6\}$. On dit que T suit une **loi uniforme continue** à valeurs dans l'intervalle $[12\,;\,15]$. Quelle est la différence principale entre une loi discrète et une loi continue ?
5. Représenter dans un repère du plan la courbe de la fonction f définie sur l'intervalle $[12\,;\,15]$ par $f(t) = \dfrac{1}{3}$ puis hachurer des domaines d'aires égales à $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.
6. Comment pourrait-on estimer la durée moyenne du trajet de Sofia ?

1.2 Densité de probabilité et loi de probabilité à densité sur un intervalle

Définition 1

Une fonction f définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ est une **fonction de densité de probabilité sur I** si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- f est continue sur I (sauf peut-être en un nombre fini de points où les limites à droite et à gauche existent) ;
- f est positive sur I ($\forall t \in \mathrm{I},\ f(t) \geqslant 0$) ;
- l'aire située sous la courbe $\mathscr{C}_f$ sur I est égale à 1 unité d'aire : $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$

$$\text{c'est-à-dire} \begin{cases} \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 1 & \text{si I} = [a\,;\,b] \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 & \text{si I} = [a\,;\,+\infty[\\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 1 & \text{si I} =]-\infty\,;\,a] \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \lim_{y\to+\infty}\int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 & \text{si I} =]-\infty\,;\,+\infty[\end{cases}$$

Définition 2

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω et à valeurs dans un intervalle $X(\Omega) = \mathrm{I}$.
On dit que X est à densité f sur I s'il existe une fonction de densité de probabilité f définie sur I telle que pour tout intervalle J inclus dans I, la probabilité que X appartienne à J est égale à l'aire sous la courbe de f sur J.

$$P(X \in \mathrm{J}) = \int_{\mathrm{J}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

On dit que X suit une **loi à densité**.

Exemple 2

1. Vérifier que $f : t \mapsto \frac{1}{5}$ est une densité de probabilité sur $I = [2\,;7]$.
2. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $F(t) = 1-(2t+1)\mathrm{e}^{-2t}$.
   a. Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer sa dérivée f.
   b. Montrer que f est une fonction de densité de probabilité sur $\mathbb{R}^+$.
   c. Soit X une variable aléatoire de densité f, calculer $P(2 < X < 3)$.

Propriété 1

Soit X une variable aléatoire réelle à densité f sur un intervalle I, pour tous réels a et b dans I :

1. $\mathbb{P}\big(X \in [a\,;b]\big) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\mathbb{P}\big(X = a\big) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$
2. $\mathbb{P}\big(X > a\big) = 1 - \mathbb{P}\big(X \leqslant a\big)$ et $\mathbb{P}\big(a < X \leqslant b\big) = \mathbb{P}\big(X \leqslant b\big) - \mathbb{P}\big(X \leqslant a\big)$
3. Pour une loi à densité, on peut remplacer les inégalités larges par des inégalités strictes et réciproquement :
   $\mathbb{P}\big(X < a\big) = \mathbb{P}\big(X \leqslant a\big)$ et $\mathbb{P}\big(a \leqslant \mathrm{X} \leqslant b\big) = \mathbb{P}\big(a < \mathrm{X} < b\big) = \mathbb{P}\big(a \leqslant \mathrm{X} < b\big) = \mathbb{P}\big(a < \mathrm{X} \leqslant b\big)$.

1.3 Espérance

Définition 3

Soit X une variable aléatoire réelle à densité f sur un intervalle I, on note $\mathrm{E}(X)$ l'espérance de X si elle existe.

1. Si I=$[a\,;b]$ et si f est continue sur $[a\,;b]$, alors $\mathrm{E}(X) = \int_a^b t \times f(t)\,\mathrm{d}t$.

Dans ce qui suit, $\mathrm{E}(X)$ n'est définie que si les limites existent.

2. Si I=$[a\,;+\infty[$ et si f est continue sur $[a\,;+\infty[$, alors $\mathrm{E}(X) = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x t \times f(t)\,\mathrm{d}t$,
   on note alors $\mathrm{E}(X) = \int_a^{+\infty} t \times f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. Si I=$]-\infty\,;b]$ et si f est continue sur $]-\infty\,;b]$, alors $\mathrm{E}(X) = \lim\limits_{x \to -\infty} \int_x^b t \times f(t)\,\mathrm{d}t$,
   on note alors $\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{b} t \times f(t)\,\mathrm{d}t$.
4. Si I=$]-\infty\,;+\infty[$ et si f est continue sur $]-\infty\,;+\infty[$, alors $\mathrm{E}(X) = \lim\limits_{x \to -\infty} \int_x^0 t \times f(t)\,\mathrm{d}t + \lim\limits_{y \to +\infty} \int_0^y t \times f(t)\,\mathrm{d}t$,
   on note alors $\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \times f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple 3

Soit X une variable aléatoire de densité $f(t) = 3\,\mathrm{e}^{-3t}$ sur $\mathbb{R}^+$.

1. Déterminer des réels a, b tels que $G : t \longmapsto (at+b)\mathrm{e}^{-3t}$ soit une primitive de la fonction $t \longmapsto tf(t)$.
2. En déduire l'espérance de la variable aléatoire X.

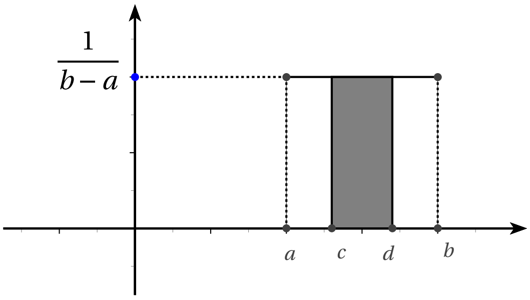
2 Loi uniforme sur un intervalle $[a\,;\,b]$

2.1 Definitions

Définition 4

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a\,;\,b]$ si sa densité est la fonction définie sur $[a\,;\,b]$ par :

$$f(t) = \frac{1}{b-a}$$



Exemple 4 *Centres-Etrangers juin 2018*

Le détaillant constate que ses melons se vendent bien lorsque leur masse est comprise entre 900 g et 1 200 g. Dans la suite, de tels melons sont qualifiés « conformes ».

Le détaillant achète ses melons auprès d'un maraîcher chez lequel, la masse en gramme des melons est modélisée par une variable aléatoire M_A qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[850\,;\,x]$, où x est un nombre réel supérieur à 1 200.

1. Le détaillant constate que 75 % des melons du maraîcher sont conformes. Déterminer x.
2. En déduire la masse moyenne d'un melon du maraîcher.

2.2 Propriétés

Propriété 2 *voir manuel page 392*

Soient deux réels $a < b$ et X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a\,;\,b]$.

1. Pour tous réels c et d tels que $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$ on a $P(c \leqslant X \leqslant d) = \displaystyle\int_c^d \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t = \frac{d-c}{b-a}$.
2. X admet une espérance mathématique de : $\mathrm{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$.

Preuve :

1. *Par définition de la loi de densité la fonction* $f : t \mapsto \frac{1}{b-a}$ *sur* $[a\,;b]$*, pour tous réels* c *et* d *tels que* $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$*,* $P(c \leqslant X \leqslant d)$ *est l'aire sous la courbe* $\mathscr{C}_f$ *entre les abscisses* c *et* d*, c'est-à-dire :*

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d \frac{1}{b-a}\,dt$$

Par linéarité de l'intégrale on a :

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \frac{1}{b-a}\int_c^d dt = \frac{d-c}{b-a}$$

2. *La fonction* $g : t \mapsto t \times f(t)$ *soit* $g : t \mapsto \frac{t}{b-a}$ *est continue donc intégrable sur* $[a\,;b]$*, donc la variable aléatoire* X *de densité* f *sur* $[a\,;b]$ *admet une espérance mathématique et on a :*

$$E(X) = \int_a^b \frac{t}{b-a}\,dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b t\,dt = \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

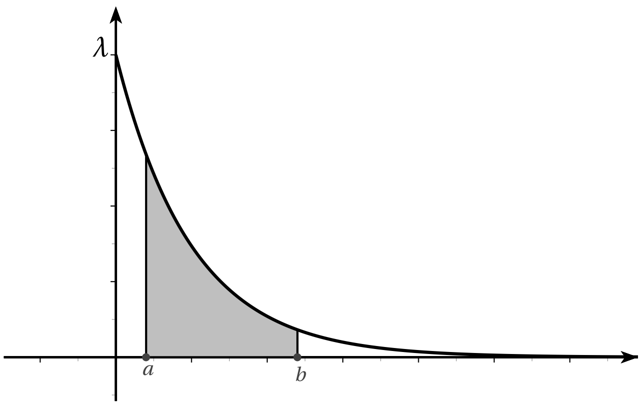
□

3 Loi exponentielle

3.1 Définitions et propriétés

Définition 5

Une variable aléatoire T suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si elle admet pour densité la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$.



Propriété 3

Soit une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Pour tous réels α et β tels que $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$ on a :

$$\mathrm{P}\left(\alpha \leqslant T \leqslant \beta\right) = \int_\alpha^\beta \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\lambda\alpha} - \mathrm{e}^{-\lambda\beta}$$

En particulier on a :

$$\mathrm{P}\left(T \leqslant \beta\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\beta} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}(T > \alpha) = \mathrm{e}^{-\lambda\alpha}$$

2. T admet une espérance mathématique et $\mathrm{E}(T) = \frac{1}{\lambda}$.

Preuve : *ROC*

1. *La fonction* $t \mapsto \lambda e^{-\lambda t}$ *est continue sur* $[0\,;\,+\infty[$ *donc elle admet des primitives sur* $[0\,;\,+\infty[$, *de la forme* $t \mapsto -e^{-\lambda t}+k$.
   Pour tous réels α *et* β *tels que* $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$ *on a :*
   $$P(\alpha \leqslant T \leqslant \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_{\alpha}^{\beta} = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$$
   En particulier on a :
   $$P(T \leqslant \beta) = P(0 \leqslant T \leqslant \beta) = e^{0} - e^{-\lambda\beta} = 1 - e^{-\lambda\beta} \qquad \text{et} \qquad P(T > \alpha) = 1 - P(T \leqslant \alpha) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda\alpha}\right) = e^{-\lambda\alpha}$$

2. *Soit* g *la fonction définie sur* $[0\,;\,+\infty[$ *par* $g(t) = t f(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$.
   g *est dérivable sur* $[0\,;\,+\infty[$ *et pour tout réel* $t \geqslant 0$ *on a*
   $$g'(t) = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda^2 t e^{-\lambda t}$$
   $$g'(t) = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda g(t)$$
   et donc puisque $\lambda \neq 0$
   $$g(t) = e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} g'(t)$$
   Pour tout réel $x \geqslant 0$, *la fonction* g *est continue sur* $[0\,;\,x]$ *et donc :*
   $$\int_0^x g(t)\,dt = \int_0^x e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} g'(t)\,dt$$
   Or les fonctions $t \mapsto e^{-\lambda t}$ *et* g' *sont continues sur* $[0\,;\,x]$, *leurs intégrales sur cet intervalle existent et avec la relation de Chasles on a :*
   $$\int_0^x g(t)\,dt = \int_0^x e^{-\lambda t}\,dt - \int_0^x \frac{1}{\lambda} g'(t)\,dt$$
   $$\int_0^x g(t)\,dt = \left[\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda t}\right]_0^x - \left[\frac{1}{\lambda} g'(t)\right]_0^x$$
   Or $g(0) = 0$ *et* $g(x) = \lambda x e^{-\lambda x}$ *donc on a :*
   $$\int_0^x g(t)\,dt = \left(\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda} \times \left(-\lambda x e^{-\lambda x}\right)$$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} -\lambda x = -\infty$ *et* $\lim\limits_{Y\to-\infty} Y e^{Y} = 0$ *par croissances comparées, donc par composition on a* $\lim\limits_{x\to+\infty} -\lambda x e^{-\lambda x} = 0$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} -\lambda x = -\infty$ *et* $\lim\limits_{Y\to-\infty} e^{Y} = 0$ *donc par composition on a* $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} = 0$.
   Par somme on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda} \times \left(-\lambda x e^{-\lambda x}\right) = \frac{1}{\lambda}$.
   On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x g(t)\,dt = \frac{1}{\lambda}$ *et donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x t \times f(t)\,dt = \frac{1}{\lambda}$.
   Par définition la variable aléatoire T *qui suit la loi exponentielle de paramètre* $\lambda > 0$ *admet donc une espérance mathématique et cette espérance est* $E(T) = \frac{1}{\lambda}$.

□

Exemple 5 *Bac Metropole Septembre 2009*

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de kilomètres parcourus par un pneu, sans crevaison. On fait l'hypothèse que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Montrer que $P(500 \leqslant X \leqslant 1000) = \mathrm{e}^{-500\lambda} - \mathrm{e}^{-1\,000\lambda}$.
2. La probabilité que le pneu parcourt entre 500 et 1 000 kilomètres sans crevaison étant égale à $\frac{1}{4}$, déterminer la valeur arrondie à 10^{-4} du paramètre λ.

3.2 Propriété de durée de vie sans vieillissement

Propriété 4 *Proriété de durée de vie sans vieillissement*

Soit une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Pour tous réels t et h positifs on a :

$$\mathrm{P}_{T\geqslant t}(T \geqslant t+h) = \mathrm{P}(T \geqslant h)$$

Preuve : *ROC*

Soit A l'événement « $T \geqslant t+h$ » et B l'événement « $T \geqslant t$ ».
D'après la propriété 3 on a $P(T \geqslant t) = e^{-\lambda t} > 0$ donc :

$$P_{T\geqslant t}(T \geqslant t+h) = P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Or $A \subset B$ donc $A \cap B = A$ donc :

$$P_{T\geqslant t}(T \geqslant t+h) = P_B(A) = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{P(T \geqslant t+h)}{P(T \geqslant t)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t)} \times e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(T \geqslant h)$$

□

3.3 Exemples d'exercices

Exemple 6 *Métropole juin 2016*

La durée de vie, en années, d'un composant électronique fabriqué dans une usine, est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un nombre réel strictement positif).

1. Démontrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbb{P}\left(T \leqslant t\right) = 1$.
2. On suppose que $\mathbb{P}\left(T \leqslant 7\right) = 0,5$. Déterminer λ à 10^{-3} près.
3. Dans cette question on prend $\lambda = 0,099$ et on arrondit les résultats des probabilités au centième.
   - **a.** On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.
     Déterminer la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans.
   - **b.** On choisit au hasard un composant parmi ceux qui fonctionnent encore au bout de 2 ans.
     Déterminer la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans.
   - **c.** Déterminer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(T)$ de la variable aléatoire T à l'unité près.
     Interpréter ce résultat.

4 Loi normale centrée réduite

4.1 Rappels sur la loi binomiale

Propriété 5 *Rappels sur la loi binomiale*

1. On appelle **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p la répétition de n épreuves de Bernoulli ($n \geqslant 1$) de paramètre p ($0 \leqslant p \leqslant 1$) identiques et indépendantes.

2. La variable aléatoire X qui donne le nombre de succès obtenus lors de la réalisation d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p suit la loi binomiale de paramètres n et p qu'on note $\mathscr{B}(n,p)$.

3. Si X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ avec n entier non nul et p réel entre 0 et 1 alors pour tout entier $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$ on a :
$$\mathrm{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
De plus on a $\mathrm{E}(X) = np$ et $\mathrm{V}(X) = np(1-p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

4.2 Théorème de Moivre-Laplace

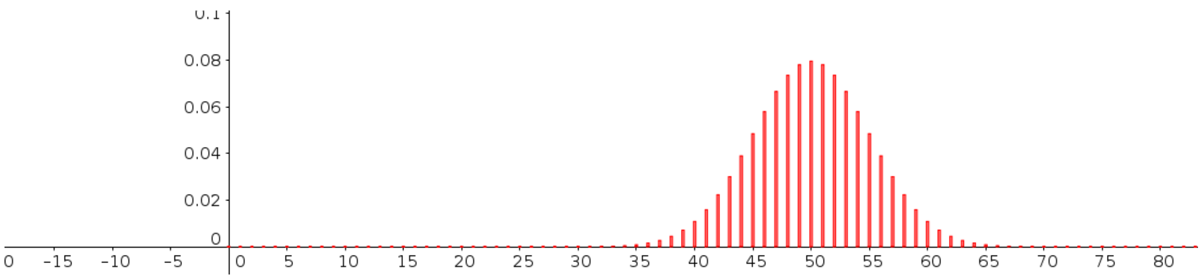
Soit un entier $n > 0$ et un réel $p \in]0;1[$.

☞ **Étape 1** *On part d'une variable aléatoire X_n suivant une loi binomiale*

On considère une variable aléatoire X_n suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$.

- L'espérance de X_n est $\mathbb{E}(X_n) = np$;
- L'écart-type de X_n est $\sigma(X_n) = \sqrt{np(1-p)}$;
- Pour tout $k \in [\![0;n]\!]$ on a $\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$;

La distribution de probabilités de X_n est un diagramme en bâtons centré en $\mathbb{E}(X_n) = 0$, par exemple pour $n = 100$ et $p = 0,5$:



☞ **Étape 2** *On centre*

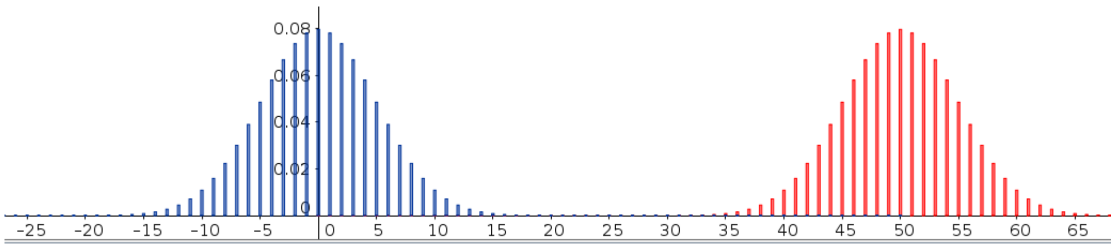
On considère la variable aléatoire centrée $C_n = X_n - \mathbb{E}(X_n) = X_n - np$.

C_n ne suit plus une loi binomiale (puisqu'elle peut prendre des valeurs négatives).

- L'espérance de C_n est nulle : $\mathbb{E}(X_n - np) = \mathbb{E}(X_n) - np = 0$;
- L'écart-type de C_n est le même que celui de X_n : $\sigma(X_n - np) = \sigma(X_n) = \sqrt{np(1-p)}$;

– Pour tout $u \in [\![0-np\,;n-np]\!]$ on a $\mathbb{P}\left(C_n = u\right) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ avec $k = u+np$;

La distribution de probabilités de $C_n = X_n - np$ est un diagramme en bâtons centré en $\mathbb{E}\left(X_n - np\right) = 0$ avec un écart de 1 entre chaque bâton, par exemple pour $n = 100$ et $p = 0,5$ c'est le diagramme bleu :



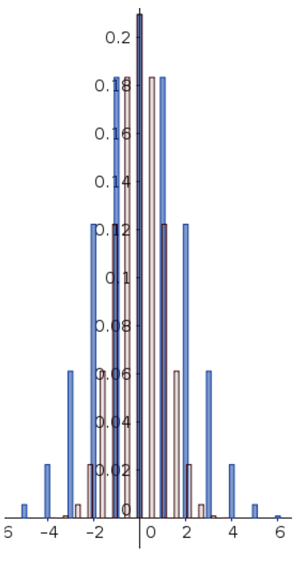
☞ **Étape 3** *On réduit*

On considère la variable aléatoire centrée $R_n = \dfrac{C_n}{\sigma\left(X_n\right)} = \dfrac{X_n - \mathbb{E}\left(X_n\right)}{\sigma\left(X_n\right)} = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

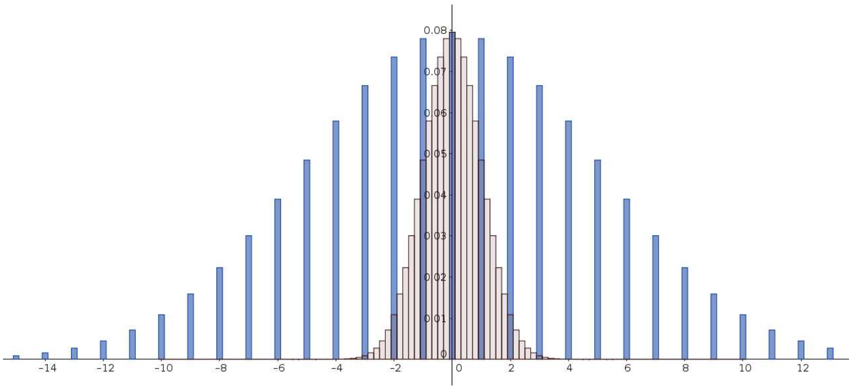
R_n ne suit pas non plus une loi binomiale (puisqu'elle peut prendre des valeurs négatives).

– L'espérance de R_n reste nulle : $\mathbb{E}\left(R_n\right) = \mathbb{E}\left(\dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\mathbb{E}\left(X_n - np\right) = 0$;
– L'écart-type de R_n est égal à 1 : $\sigma\left(R_n\right) = \sigma\left(\dfrac{C_n}{\sigma\left(X_n\right)}\right) = \dfrac{1}{\sigma\left(X_n\right)}\sigma\left(X_n\right) = 1$;
– Les valeurs prises par R_n ne sont plus forcément des entiers mais forment une subdivision régulière de l'intervalle $\left[\dfrac{0-np}{\sqrt{np(1-p)}}\,;\dfrac{n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right]$ dont le pas est $\dfrac{1}{\sigma\left(X_n\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{np(1-p)}}$.
Ce sont donc les réels v de la forme $v = \dfrac{0-np}{\sqrt{np(1-p)}} + j\dfrac{1}{\sqrt{np(1-p)}}$ avec $j \in [\![0\,;n]\!]$ et on a
$\mathbb{P}\left(R_n = v\right) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ avec $k = v\sqrt{np(1-p)} + np = v\sigma\left(X_n\right) + \mathbb{E}\left(X_n\right)$.

La distribution de probabilités de la centrée réduite $R_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ est un diagramme en bâtons centré en $\mathbb{E}\left(X_n - np\right) = 0$ avec un écart de $\dfrac{1}{\sigma\left(X_n\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{np(1-p)}}$ entre chaque bâton, par exemple pour $n = 14$ et $p = 0,5$ c'est le diagramme marron :



Et voici le diagramme en bâtons de la centrée réduite pour $n = 100$ et $p = 0,5$:



☞ **Étape 4** *On passe du diagramme en bâtons à l'histogramme*

On remplace le diagramme en bâtons de la centrée réduite $R_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ par un histogramme, c'est-à-dire qu'on remplace chaque bâton centré en une valeur v prise par R_n par un rectangle de base $\dfrac{1}{\sigma(X_n)} = \dfrac{1}{\sqrt{np(1-p)}}$ qui est aussi l'écart entre deux bâtons.

L'aire du rectangle doit représenter la même probabilité que la hauteur du bâton correspondant, on a donc :

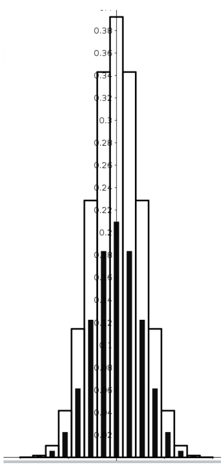
$$\text{Hauteur}_{\text{Rectangle}} = \frac{\text{Hauteur}_{\text{Bâton}}}{\text{Base}_{\text{Rectangle}}} = \frac{\mathbb{P}\left(R_n = v\right)}{\frac{1}{\sigma(X_n)}} = \sigma(X_n) \times \mathbb{P}\left(R_n = v\right) = \sqrt{np(1-p)} \times \mathbb{P}\left(R_n = v\right)$$

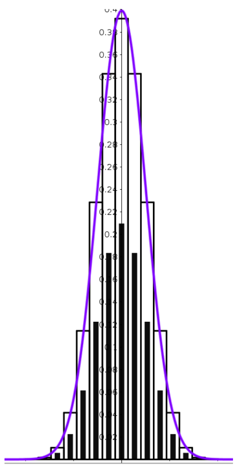
Par exemple pour $n = 100$ et $p = 0,5$, on a $\sigma(X_n) = 5$ et donc chaque bâton du diagramme en bâtons de la centrée réduite est remplacé par un rectangle de base $\dfrac{1}{5} = 0,2$ et de hauteur 5 fois celle du bâton (qui est une valeur de $\mathbb{P}\left(R_n\right) = v$).

Dans un diagramme en bâtons, la hauteur d'un bâton est une probabilité, alors que dans un histogramme, la hauteur d'un rectangle est une densité de probabilité. La probabilité (ou hauteur du bâton) se retrouve dans l'aire du rectangle.

On donne ci-après le diagramme en bâtons (en noir) et l'histogramme (rectangles vides) pour la centrée réduite lorsque $n = 14$ et $p = 0,5$.

Si on superpose la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, on observe déjà que l'histogramme s'ajuste partiellement avec le domaine sous la courbe (notons que l'histogramme est borné en abscisses mais pas la courbe).





☞ **Étape 5** *On fait tendre n vers* $+\infty$

Lorsque n tend vers $+\infty$ les valeurs prises par la centrée réduite $R_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ varient dans l'intervalle $\left[\dfrac{0-np}{\sqrt{np(1-p)}}\,;\,\dfrac{n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right]$ qui tend vers $]-\infty\,;+\infty[$, avec un pas de $\dfrac{1}{\sigma(X_n)} = \dfrac{1}{\sqrt{np(1-p)}}$ qui tend vers 0.
Autrement dit, les rectangles sont de plus en plus fins avec une base qui tend vers 0 et l'histogramme tend à couvrir l'intervalle $]-\infty\,;+\infty[$ en abscisses.

Par ailleurs, on observe, sans le démontrer, que l'histogramme de la centrée réduite $R_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ *tend à se confondre avec le domaine sous la courbe en cloche d'équation* $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.
Les hauteurs des rectangles étant des densités de probabilité comme on l'a justifié à l'étape précédente, on peut conjecturer qu'une variable aléatoire de loi discrète binomiale $\mathscr{B}(n\,;p)$ *converge en loi vers une loi à densité de fonction de densité* $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$*, qu'on appelle loi normale centrée réduite notée* $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

Cette conjecture est prouvée par le théorème approché par Abraham Moivre puis démontré par Pierre-Simon de Laplace au début du dix-neuvième siècle.

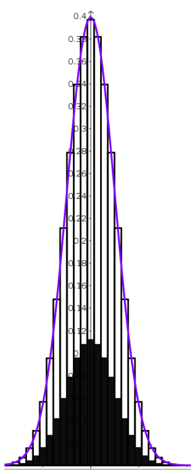
Théorème 1 *Moivre-Laplace*

Soit $p \in]0\,;1[$. On suppose que pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;p)$.
Soit $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, la variable centrée et réduite associée à X_n.
Pour tous réels a et b on a :

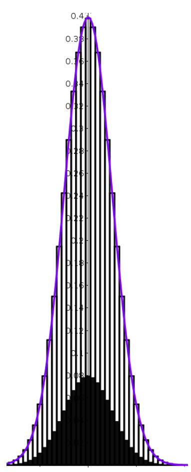
$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

Voici quelques superpositions d'histogramme de la centrée réduite (avec aussi le diagramme en bâtons en noir) et de la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$:

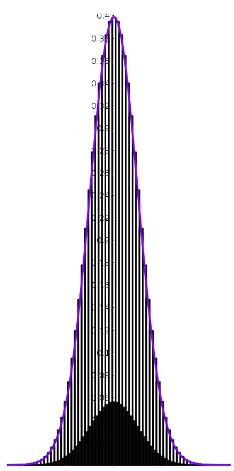
$n = 50$ et $p = 0,5$



$n = 100$ et $p = 0,5$



$n = 200$ et $p = 0,5$



4.3 Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;1)$

Propriété 6 *admise*

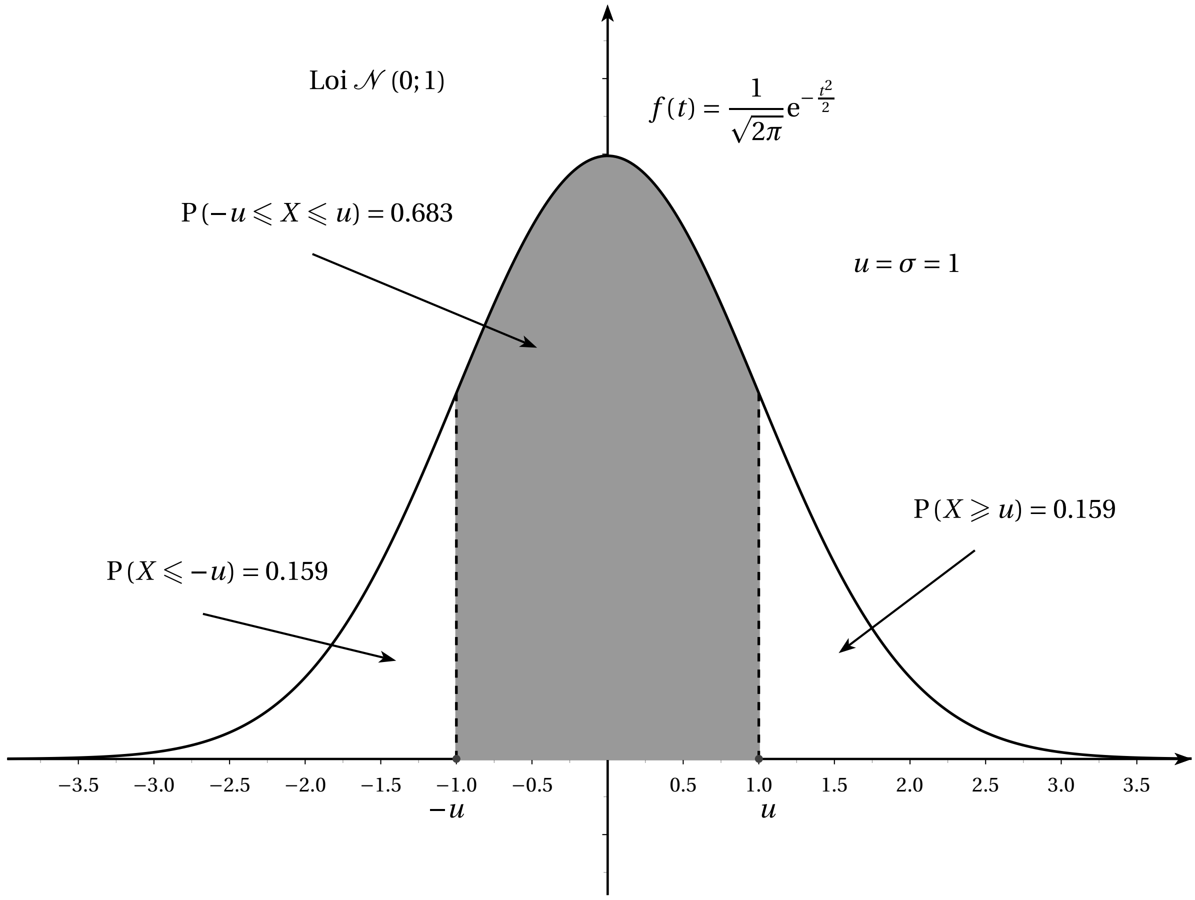
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

1. f est continue et positive sur $\mathbb{R}$;
2. L'aire sous $\mathscr{C}_f$ est 1 c'est-à-dire : $\mathrm{P}(X\in\,]-\infty\,;+\infty[) = \lim\limits_{x\to-\infty}\displaystyle\int_x^0 f(t)\,\mathrm{d}t+\lim\limits_{y\to+\infty}\int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t=1$

f est donc une fonction densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Définition 6

On dit qu'une variable aléatoire X réelle suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;1)$ si elle admet pour densité la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.



Propriété 7 *Propriétés de symétrie*

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$ de densité $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

1. Pour tous réels $\alpha \leqslant \beta$, on a $\mathrm{P}\big(\alpha \leqslant X \leqslant \beta\big) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$;
2. f est paire donc $\mathscr{C}_f$ de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;
3. Le maximum de f est atteint en 0 ;
4. Conséquences de la symétrie :
   - $\mathrm{P}(X \leqslant 0) = \mathrm{P}(X \geqslant 0) = 0,5$;
   - Pour tout réel $u \geqslant 0$ on a :
     - ❏ $\mathrm{P}(X \leqslant -u) = 1 - \mathrm{P}(X > -u) = \mathrm{P}(X \geqslant u) = 1 - \mathrm{P}(X < u)$
     - ❏ $\mathrm{P}(-u \leqslant X \leqslant u) = 1 - 2\mathrm{P}(X > u) = 1 - 2\mathrm{P}(X < -u)$
     - ❏ $\mathrm{P}(-u \leqslant X \leqslant u) = 2\mathrm{P}(X \leqslant u) - 1 = 2\mathrm{P}(X \geqslant -u) - 1$
     - ❏ $\mathrm{P}(-u \leqslant X \leqslant u) = 2\mathrm{P}(0 \leqslant X \leqslant u) = 2\mathrm{P}(-u \leqslant X \leqslant 0)$
     - ❏ $\mathrm{P}(X \leqslant u) = \dfrac{1 + \mathrm{P}(-u \leqslant X \leqslant u)}{2}$

Preuve :

1. *Si X est une variable aléatoire de densité de probabilité* $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$ *alors par définition, pour tous réels* $\alpha \leqslant \beta$, *on a* $P\big(\alpha \leqslant X \leqslant \beta\big) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$;
2. *évident ;*
3. f *est dérivable par opérations sur* $\mathbb{R}$.
   Pour tout $t \in \mathbb{R}$ *on a* $f'(t) = \frac{-t}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$.
   Or pour tout $t \in \mathbb{R}$ *on a* $e^{-\frac{t^2}{2}} > 0$ *donc* $f'(t)$ *est du signe de* $-t$.
   On en déduit que $f' < 0$ *(sauf en 0) sur* $]-\infty;0]$ *et* f *strictement croissante sur* $]-\infty;0]$.
   De même, $f' > 0$ *(sauf en 0) sur* $[0;+\infty[$ *et* f *strictement décroissante sur* $[0;+\infty[$.
   f *atteint donc son maximum en* 0.
4. *La fonction de densité* f *étant paire :*
   - *Pour tout* $x \geqslant 0$ *on a* $\int_{-x}^0 f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt$ *donc en passant à la limite avec* $x \mapsto +\infty$ *il vient* $\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^0 f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt$ *c'est-à-dire on a* $P(X \leqslant 0) = P(X \geqslant 0)$.
     Comme $P(X \leqslant 0) + P(X \geqslant 0) = P(X \in \mathbb{R}) = 1$ *on a* $P(X \leqslant 0) = P(X \geqslant 0) = 0,5$;
   - *Pour tout réel* $u \geqslant 0$ *on prouve comme pour* $u = 0$ *en utilisant la parité de* f *que :* $P(X \leqslant -u) = P(X \geqslant u)$.
     Ensuite on a $P(X < -u) + P(-u \leqslant X \leqslant u) + P(X > u) = 1$.
     Or $P(X < -u) = P(X \leqslant -u)$ *car X est une variable à densité et de même* $P(X > u) = P(X \geqslant u)$.
     Donc on a : $P(X \leqslant -u) + P(-u \leqslant X \leqslant u) + P(X \geqslant u) = 1$.
     De plus $P(X \leqslant -u) = P(X \geqslant u)$ *d'après ce qui précède, donc on a :*
     $P(-u \leqslant X \leqslant u) = 1 - 2P(X \geqslant u) = 1 - 2P(X \leqslant -u)$.
     Enfin $P(X \geqslant u) = 1 - P(X < u) = 1 - P(X \leqslant u)$.
     Donc $P(-u \leqslant X \leqslant u) = 1 - 2P(X \geqslant u) = 1 - 2\Big(1 - P(X \leqslant u)\Big) = 2P(X \leqslant u) - 1$.
     On en déduit que $P(X \leqslant u) = \dfrac{1 + P(-u \leqslant X \leqslant u)}{2}$.

□

Exemple 7

Soit Xune variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}(0;1)$. On donne $\mathrm{P}(X \leqslant 1) \approx 0,841$ et $\mathrm{P}(X \leqslant -2) \approx 0,023$ à 0,001 près. En déduire une valeur approchée à à 0,001 près des probabilités suivantes :

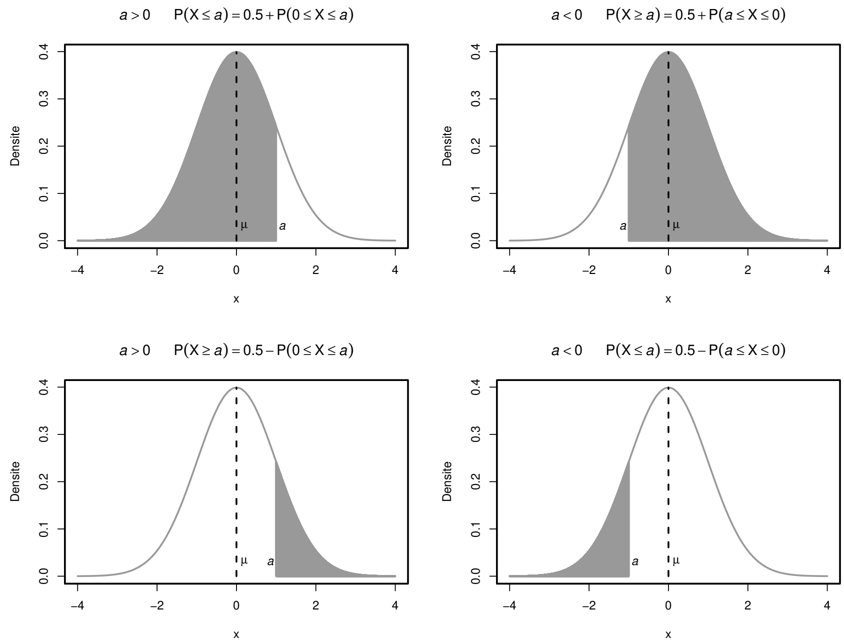
1. $\mathrm{P}(X > 1)$
2. $\mathrm{P}(X \leqslant -1)$
3. $\mathrm{P}(X \geqslant -1)$
4. $\mathrm{P}(X = 1)$
5. $\mathrm{P}(-1 < X < 1)$
6. $\mathrm{P}(-2 < X < 1)$
7. $\mathrm{P}(-2 < X)$
8. $\mathrm{P}(X \leqslant 2)$
9. $\mathrm{P}(-1 < X \leqslant 2)$

4.4 Calculs de probabilités pour une variable aléatoire X de loi $\mathcal{N}(0;1)$

Méthode

	Casio	**Texas**
Syntaxe	Touche `OPTN` puis `STAT`, puis `DIST`, puis `NORM`	Menu `Distrib` (`2nde` `var`) puis `normalFrep`, ou `FracNormale`
$\mathrm{P}(\boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{X} \leqslant \boldsymbol{b})$	Choisir `Ncd` : **NormCD(*a*,*b*)**	**normalFrep(*a*,*b*)** ou **normalFrep(*a*,*b*,0,1)**
k tel que $\mathrm{P}(\boldsymbol{X} \leqslant \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{c}$	Choisir `InvN` : **InvNormCD(*c*)**	**FracNormale(*c*)** ou **FracNormale(*c*,0,1, LEFT)**

Par symétrie de la courbe de la fonction de densité, on a $\mathrm{P}(X \leqslant 0) = \mathrm{P}(X \geqslant 0) = 0,5$. La calculatrice ne donne que $\mathrm{P}(a \leqslant X \leqslant b)$, donc pour calculer $\mathrm{P}(a \leqslant X)$ ou $\mathrm{P}(X \leqslant a)$ on procède comme ci-dessous :



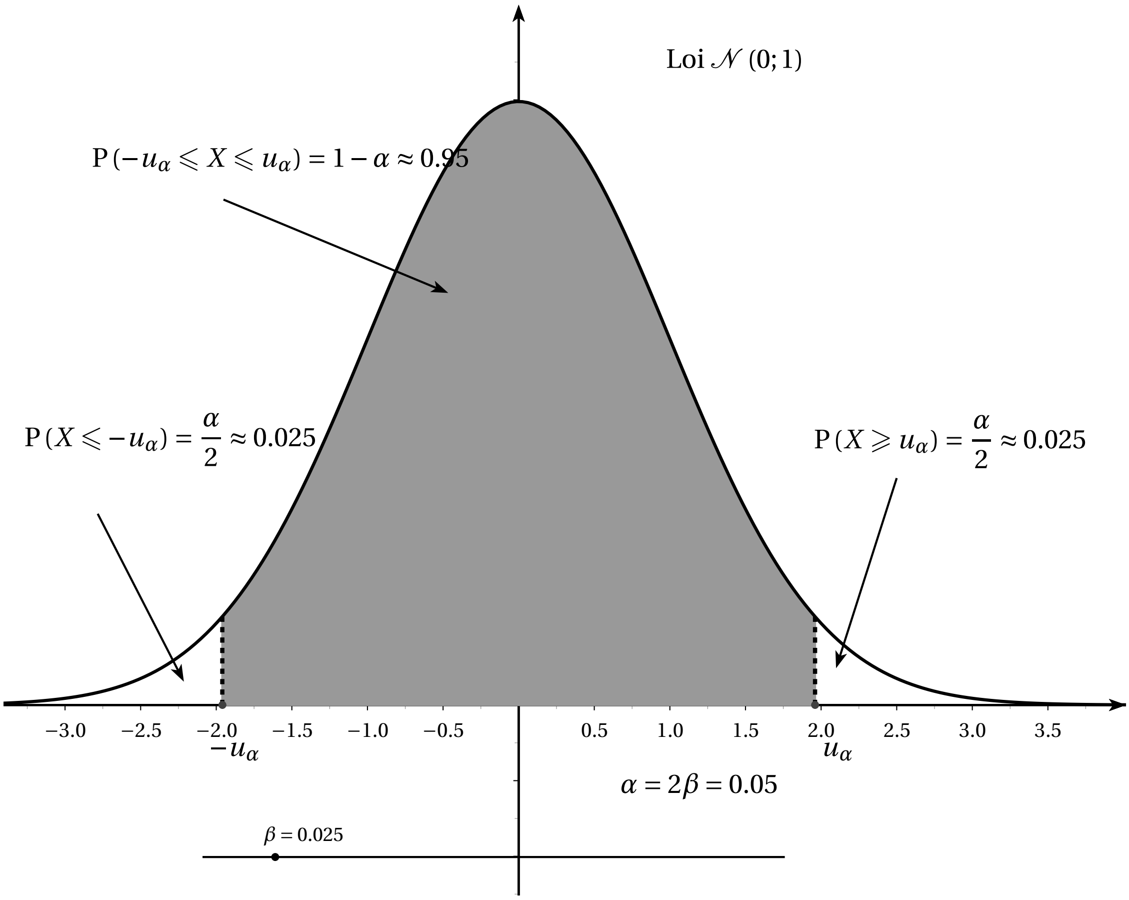
Exemple 8

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}(0;1)$. Calculer avec la machine les probabilités suivantes :

1. $P(-1{,}5 < X < 0)$
2. $P(X = 1)$
3. $P(-2 < X < 2)$
4. $P(X < 2)$
5. $P(X > -2)$
6. $P_{X>0}(X < 2)$

5 Propriétés de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$

5.1 Quantiles d'orde α de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$



Propriété 8

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ alors, pour tout réel $\alpha \in]0;1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que $\mathrm{P}(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$.

Propriété 9 *Valeurs remarquables de certains quantiles*

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ alors (à 10^{-2} près) :

- $u_{0,05} \approx 1,96$ donc $\mathrm{P}(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96) \approx 0,95$
- $u_{0,01} \approx 2,58$ donc $\mathrm{P}(-2,58 \leqslant X \leqslant 2,58) \approx 0,99$

Preuve : *ROC, preuve de la propriété 8*

Pour tout réel $u \geqslant 0$ soit la fonction H définie par $H(u) = P(-u \leqslant X \leqslant u)$.
Par symétrie de la courbe de la fonction de densité $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ de la loi $\mathcal{N}(0;1)$ on a :

$$H(u) = 2P(0 \leqslant X \leqslant u) \quad (1)$$

Posons $F : u \mapsto \int_0^u f(t)\,dt$, *la fonction* f *étant continue sur* $\mathbb{R}^+$, *d'après le théorème fondamental du calcul intégral,* F *est la primitive de* f *qui s'annule en 0.*
D'après (1) *on a pour tout réel* $u \geqslant 0$, $H(u) = 2F(u)$ *et donc* $H'(u) = 2f(u)$ *et* $H(0) = 2F(0) = 0$.
La fonction f *étant strictement positive sur* $[0\,;+\infty[$, *la fonction* H *est donc strictement croissante sur* $[0\,;+\infty[$.
De plus on a pour tout $u \geqslant 0$, $H(u) = P(-u \leqslant X \leqslant u)$ *donc* $\lim\limits_{u\to+\infty} H(u) = P(X \in \mathbb{R}) = 1$.

Pour tout réel α *dans l'intervalle* $]0\,;1[$, *on a aussi* $1-\alpha$ *dans* $]0\,;1[$.

- H *est dérivable donc continue sur* $[0\,;+\infty[$ *;*
- H *est strictement croissante sur* $[0\,;+\infty[$ *;*
- $H(0) = 0$ *et* $\lim\limits_{u\to+\infty} H(u) = 1$ *soit* $H(0) < 1-\alpha < \lim\limits_{u\to+\infty} H(u)$ *;*

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $H(u) = 1-\alpha$ *possède une unique solution notée* u_α *dans* $[0\,;+\infty[$. *On a alors* $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$ □

Exemple 9

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centré réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.
Avec la calculatrice, déterminer les réels a, b et c tels que tels que :

1. $\mathbb{P}(X \leqslant a) = 0,7$

2. $\mathbb{P}(X \geqslant b) = 0,15$

3. $\mathbb{P}(-c \leqslant X \leqslant c) = 0,3$

Exemple 10

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centré réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.
Avec la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 0,01 près du réel $u_{0,2}$ tel que tels que $\mathbb{P}(-u_{0,2} \leqslant X \leqslant u_{0,2}) = 0,8$.

5.2 Espérance et variance de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;1)$

Propriété 10

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ alors elle admet une espérance mathématique qui est 0 et un écart-type qui est 1.

$$\mathrm{E}(X) = \lim_{y \to -\infty} \int_y^0 t \times f(t)\,\mathrm{d}t + \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t \times f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Preuve : *pour l'espérance uniquement*

Soit X une variable aléatoire de densité $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ sur $\mathbb{R}$.
La fonction $g : t \mapsto t f(t)$ est continue par opérations sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$ comme la fonction $G : t \mapsto \dfrac{-1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$.
Pour tout réel $x \geqslant 0$ et tout réel $y \leqslant 0$ on a :

$$\int_y^0 t f(t)\, dt = \Big[G(t)\Big]_y^0 = G(0) - G(y) \qquad et \qquad \int_0^x t f(t)\, dt = \Big[G(t)\Big]_0^x = G(x) - G(0) \tag{2}$$

De plus on a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{Z \to +\infty} e^{-Z} = 0$ donc par composition $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} G(x) = 0$.
Par ailleurs, G est paire donc par symétrie on a $\displaystyle\lim_{y \to -\infty} G(y) = 0$.
On déduit de ce qui précède et de (2) que :

$$\lim_{y \to -\infty} \int_y^0 t f(t)\, dt = G(0) - \lim_{y \to -\infty} G(y) = G(0) \qquad et \qquad \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t f(t)\, dt = \lim_{x \to +\infty} G(x) - G(0) = -G(0) \tag{3}$$

De (3) on déduit par somme que $\displaystyle\lim_{y \to -\infty} \int_y^0 t f(t)\, dt + \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t f(t)\, dt = G(0) - G(0) = 0$.
Par définition, la variable aléatoire X admet donc une espérance et $E(X) = 0$.

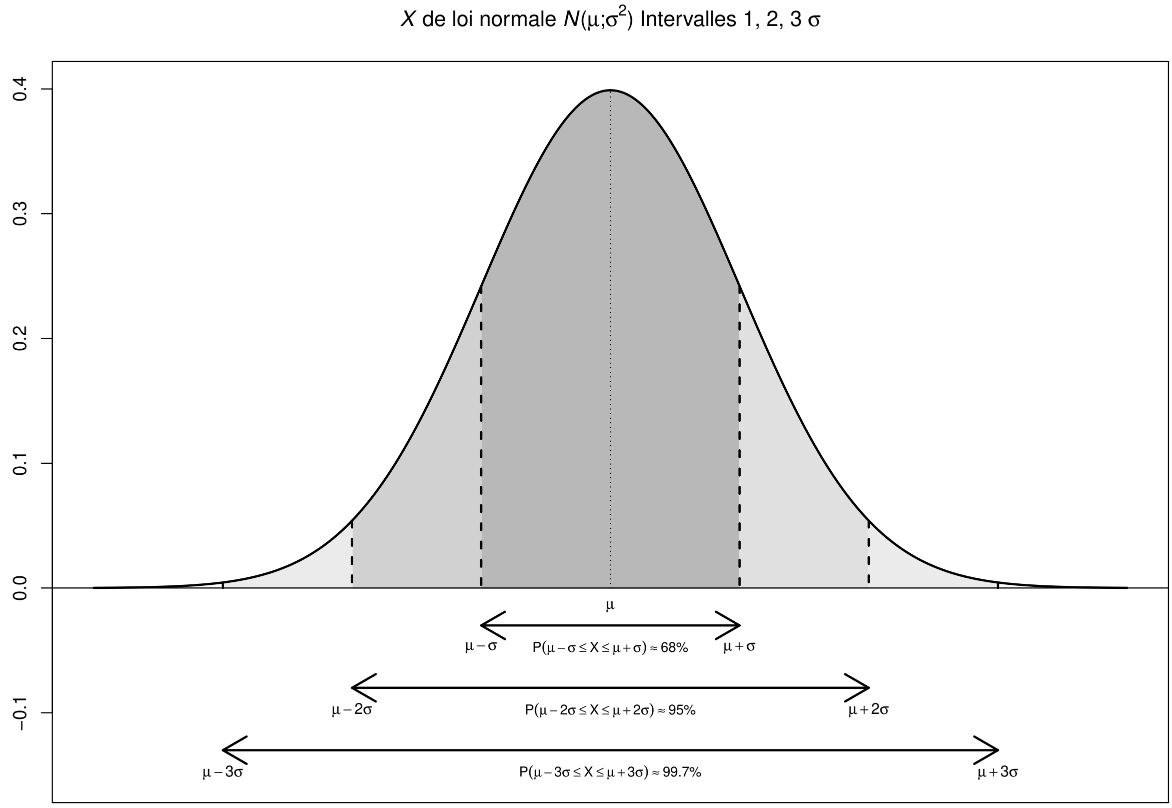
□

6 Lois normales

6.1 Définition et propriétés

Définition 7

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif.
La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$ si, et seulement si, la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.



Propriété 11 *admise*

Si une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$, alors son espérance mathématique est μ et son écart-type est σ.

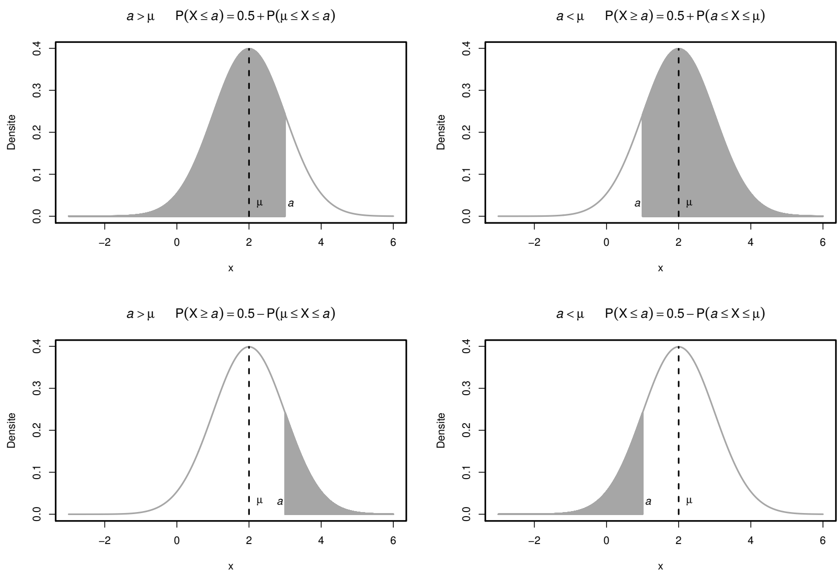
Propriété 12 *Intervalles 1, 2 et 3 σ*

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$, alors on a :

- $\mathrm{P}\left(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma\right) \approx 0,68$ (à 10^{-2} près) ;
- $\mathrm{P}\left(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma\right) \approx 0,95$ (à 10^{-2} près) ;
- $\mathrm{P}\left(\mu-3\sigma \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma\right) \approx 0,997$ (à 10^{-3} près).

6.2 Calculs de probabilités pour une variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{N}\left(\mu ; \sigma^2\right)$

Méthode



Les calculatrices ne fournissent pas $\mathrm{P}(X \leqslant x)$ mais seulement $\mathrm{P}(a \leqslant X \leqslant b)$.

Pour la loi $\mathcal{N}\left(\mu ; \sigma^2\right)$ comme pour la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$, par symétrie de la courbe de la fonction de densité, on a $\mathrm{P}\left(X \leqslant \mu\right) = \mathrm{P}\left(X \geqslant \mu\right) = 0,5$.

La calculatrice ne donne que $\mathrm{P}(a \leqslant X \leqslant b)$, donc pour calculer $\mathrm{P}(a \leqslant X)$ ou $\mathrm{P}(X \leqslant a)$ on procède comme ci-dessus.

	Casio	Texas
Syntaxe	Touche `OPTN` puis `STAT`, puis `DIST`, puis `NORM`	Menu `Distrib` (`2nde` `var`) puis `normalFrep`, ou `FracNormale`
$\mathrm{P}(\boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{X} \leqslant \boldsymbol{b})$	Choisir `Ncd` : **NormCD($\boldsymbol{a,b,\sigma,\mu}$)**	**normalFrep($\boldsymbol{a,b,\mu,\sigma}$)**
$\boldsymbol{k}$ tel que $\mathrm{P}(\boldsymbol{X} \leqslant \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{c}$	Choisir `InvN` : **InvNormCD($\boldsymbol{c,\sigma,\mu}$)**	**FracNormale($\boldsymbol{c,\mu,\sigma}$)**

6.3 Quelques exemples

Exemple 11 *Asie juin 2017*

Pour éclairer une salle de spectacle, on installe dans le plafond 500 lampes à led.

On modélise le nombre de lampes fonctionnelles après 1 an par une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 440$ et d'écart-type $\sigma = 7,3$.

1. Calculer $P(X > 445)$, la probabilité que plus de 445 lampes soient encore fonctionnelles après un an.
2. Lors de l'installation des lampes dans le plafond, la direction de la salle veut constituer un stock de lampes.

   Quelle doit-être la taille minimale de ce stock pour que la probabilité de pouvoir changer toutes les lampes défectueuses, après un an, soit supérieure ou égale à 95 % ?

Exemple 12 *Métropole juin 2014*

La chaîne de production du laboratoire fabrique, en très grande quantité, le comprimé d'un médicament.

Un comprimé est conforme si sa masse est comprise entre 890 et 920 mg. On admet que la masse en milligrammes d'un comprimé pris au hasard dans la production peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, de moyenne $\mu = 900$ et d'écart-type $\sigma = 7$.

1. Calculer la probabilité qu'un comprimé prélevé au hasard soit conforme. On arrondira à 10^{-2}.
2. Déterminer l'entier positif h tel que $P(900 - h \leqslant X \leqslant 900 + h) \approx 0,99$ à 10^{-3} près.

Exemple 13 *Antilles juin 2017*

Dans une usine automobile, certaines pièces métalliques sont recouvertes d'une fine couche de nickel qui les protège contre la corrosion et l'usure. Le procédé utilisé est un nickelage par électrolyse.

On admet que la variable aléatoire X, qui à chaque pièce traitée associe l'épaisseur de nickel déposé, suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 25$ micromètres (μm) et d'écart type σ_1.

Une pièce est conforme si l'épaisseur de nickel déposé est comprise entre 22,8 µm et 27,2 µm.

On a pu déterminer que $P(X > 27,2) = 0,023$.

1. **a.** Déterminer la probabilité qu'une pièce soit conforme.

   b. Justifier que 1,1 est une valeur approchée de σ_1 à 10^{-1} près.

   c. Sachant qu'une pièce est conforme, calculer la probabilité que l'épaisseur de nickel déposé sur celle-ci soit inférieure à 24 μm. Arrondir à 10^{-3}.
2. Une équipe d'ingénieurs propose un autre procédé de nickelage, obtenu par réaction chimique sans aucune source de courant. L'équipe affirme que ce nouveau procédé permet théoriquement d'obtenir 98 % de pièces conformes.

   La variable aléatoire Y qui, à chaque pièce traitée avec ce nouveau procédé, associe l'épaisseur de nickel déposé suit la loi normale d'espérance $\mu_2 = 25$ μm et d'écart-type σ_2.

   En admettant l'affirmation ci-dessus, comparer σ_1 et σ_2.

Exemple 14

La durée de vie d'un certain type d'appareil est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne et d'écart-type inconnus. Les spécifications impliquent que 80% de la production des appareils ait une durée de vie entre 120 et 200 jours et que 5% de la production ait une durée de vie inférieure à 120 jours.

1. Quelles sont les valeurs de μ et et σ^2 ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir un appareil dont la durée de vie soit comprise entre 200 jours et 230 jours ?

Table des matières