Classe virtuelle du 19/03/2020

Frédéric Junier

Lycée du Parc
1 Boulevard Anatole France
69006 Lyon

22 mars 2020

Table des matières

Théorème fondamental

Ce qu'il faut retenir :

- **Théorème 1 (fondamental de l'analyse)** : si f continue positive sur $[a\,;b]$ alors $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable et $F' = f$.

Théorème fondamental

Ce qu'il faut retenir :

- **Théorème 1 (fondamental de l'analyse)** : si f continue positive sur $[a\,; b]$ alors $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable et $F' = f$.
- **Définition 3** Si $F' = f$ alors F est une primitive de f.

Ce qu'il faut retenir :

- **Théorème 1 (fondamental de l'analyse)** : si f continue positive sur $[a;b]$ alors $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable et $F' = f$.
- **Définition 3** Si $F' = f$ alors F est une primitive de f.
- Animation : https://www.geogebra.org/m/u7xzjbtm

Ce qu'il faut retenir :

- **Théorème 1 (fondamental de l'analyse)** : si f continue positive sur $[a;b]$ alors $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable et $F' = f$.
- **Définition 3** Si $F' = f$ alors F est une primitive de f.
- Animation : https://www.geogebra.org/m/u7xzjbtm
- Un exemple ? $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ est une primitive de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$. On la connaît déjà, c'est la fonction ln

Ce qu'il faut retenir :

- **Théorème 2** : Plus généralement, toute fonction f continue admet une primitive.

Ce qu'il faut retenir :

- **Théorème 2** : Plus généralement, toute fonction f continue admet une primitive.
- Un exemple ? $F(x) = x^2$ et $G(x) = x^2 - 9$ sont des primitives de $f(x) = 2x$

Ce qu'il faut retenir :

- **Théorème 2** : Plus généralement, toute fonction f continue admet une primitive.
- Un exemple ? $F(x) = x^2$ et $G(x) = x^2 - 9$ sont des primitives de $f(x) = 2x$
- **Théorème 3** : Deux primitives d'une même fonction diffèrent à une constante près.

Ce qu'il faut retenir :

- **Théorème 2** : Plus généralement, toute fonction f continue admet une primitive.
- Un exemple ? $F(x) = x^2$ et $G(x) = x^2 - 9$ sont des primitives de $f(x) = 2x$
- **Théorème 3** : Deux primitives d'une même fonction diffèrent à une constante près.
- Un exemple ? $G(x) = x^2 - 9$ est l'unique primitive de $f(x) = 2x$ qui s'annule en 3.

Ce qu'il faut retenir :

- **Théorème 2** : Plus généralement, toute fonction f continue admet une primitive.
- Un exemple ? $F(x) = x^2$ et $G(x) = x^2 - 9$ sont des primitives de $f(x) = 2x$
- **Théorème 3** : Deux primitives d'une même fonction diffèrent à une constante près.
- Un exemple ? $G(x) = x^2 - 9$ est l'unique primitive de $f(x) = 2x$ qui s'annule en 3.
- Les primitives de $f(x) = 2x$ sont de la forme $F(x) = x^2 + k$ avec k constante réelle.

Primitives des fonctions de référence Partie 1

Les fonctions f considérées sont continues et donc admettent des primitives sur leur intervalle de définition.
Le tableau des primitives des fonctions de référence est le tableau des dérivées lu à l'envers.

- $f(x) = 0$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = k$ avec k constante
- $f(x) = 1$ admet pour primitive une fonction de la forme
- $f(x) = x$ admet pour primitive une fonction de la forme
- $f(x) = x^2$ admet pour primitive une fonction de la forme
- $f(x) = x^n$ avec n entier naturel admet pour primitive une fonction de la forme

Primitives des fonctions de référence Partie 1

Les fonctions f considérées sont continues et donc admettent des primitives sur leur intervalle de définition.
Le tableau des primitives des fonctions de référence est le tableau des dérivées lu à l'envers.

- $f(x) = 0$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = k$ avec k constante
- $f(x) = 1$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = x + k$ avec k constante
- $f(x) = x$ admet pour primitive une fonction de la forme
- $f(x) = x^2$ admet pour primitive une fonction de la forme
- $f(x) = x^n$ avec n entier naturel admet pour primitive une fonction de la forme

Les fonctions f considérées sont continues et donc admettent des primitives sur leur intervalle de définition.
Le tableau des primitives des fonctions de référence est le tableau des dérivées lu à l'envers.

- $f(x) = 0$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = k$ avec k constante
- $f(x) = 1$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = x + k$ avec k constante
- $f(x) = x$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + k$ avec k constante
- $f(x) = x^2$ admet pour primitive une fonction de la forme
- $f(x) = x^n$ avec n entier naturel admet pour primitive une fonction de la forme

Les fonctions f considérées sont continues et donc admettent des primitives sur leur intervalle de définition.
Le tableau des primitives des fonctions de référence est le tableau des dérivées lu à l'envers.

- $f(x) = 0$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = k$ avec k constante
- $f(x) = 1$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = x + k$ avec k constante
- $f(x) = x$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + k$ avec k constante
- $f(x) = x^2$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + k$ avec k constante
- $f(x) = x^n$ avec n entier naturel admet pour primitive une fonction de la forme

Primitives des fonctions de référence Partie 1

Les fonctions f considérées sont continues et donc admettent des primitives sur leur intervalle de définition.
Le tableau des primitives des fonctions de référence est le tableau des dérivées lu à l'envers.

- $f(x) = 0$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = k$ avec k constante
- $f(x) = 1$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = x + k$ avec k constante
- $f(x) = x$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + k$ avec k constante
- $f(x) = x^2$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + k$ avec k constante
- $f(x) = x^n$ avec n entier naturel admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$ avec k constante

Primitives des fonctions de référence Partie 2

Les fonctions f considérées sont continues et donc admettent des primitives sur leur intervalle de définition.

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = 2\sqrt{x} + k$ avec k constante
- $f(x) = \frac{1}{x}$ admet pour primitive une fonction de la forme

  $F(x) = \ln(|x|) + k$ avec k constante Ne pas oublier la valeur absolue, ln définie sur $]0\,;+\infty[$
- $f(x) = \frac{1}{x^2}$ admet pour primitive une fonction de la forme
- $f(x) = \frac{1}{x^n}$ avec n entier naturel admet pour primitive une fonction de la forme

Primitives des fonctions de référence Partie 2

Les fonctions f considérées sont continues et donc admettent des primitives sur leur intervalle de définition.

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = 2\sqrt{x} + k$ avec k constante
- $f(x) = \frac{1}{x}$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = \ln(|x|) + k$ avec k constante Ne pas oublier la valeur absolue, ln définie sur $]0\,;+\infty[$
- $f(x) = \frac{1}{x^2}$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = -\frac{1}{x} + k$ avec k constante
- $f(x) = \frac{1}{x^n}$ avec n entier naturel admet pour primitive une fonction de la forme

Les fonctions f considérées sont continues et donc admettent des primitives sur leur intervalle de définition.

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = 2\sqrt{x} + k$ avec k constante
- $f(x) = \frac{1}{x}$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = \ln(|x|) + k$ avec k constante Ne pas oublier la valeur absolue, ln définie sur $]0\,;+\infty[$
- $f(x) = \frac{1}{x^2}$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = -\frac{1}{x} + k$ avec k constante
- $f(x) = \frac{1}{x^n}$ avec n entier naturel admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = \frac{1}{-n+1}x^{-n+1} + k$ avec k constante

Les fonctions f considérées sont continues et donc admettent des primitives sur leur intervalle de définition.

- $f(x) = \sin(x)$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = -\cos(x) + k$ avec k constante
- $f(x) = \cos(x)$ admet pour primitive une fonction de la forme
- $f(x) = \mathrm{e}^x$ admet pour primitive une fonction de la forme

Les fonctions f considérées sont continues et donc admettent des primitives sur leur intervalle de définition.

- $f(x) = \sin(x)$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = -\cos(x) + k$ avec k constante
- $f(x) = \cos(x)$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = \sin(x) + k$ avec k constante
- $f(x) = \mathrm{e}^x$ admet pour primitive une fonction de la forme

Primitives des fonctions de référence Partie 3

Les fonctions f considérées sont continues et donc admettent des primitives sur leur intervalle de définition.

- $f(x) = \sin(x)$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = -\cos(x) + k$ avec k constante
- $f(x) = \cos(x)$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = \sin(x) + k$ avec k constante
- $f(x) = \mathrm{e}^x$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = \mathrm{e}^x + k$ avec k constante

Opérations sur les primitives Partie 1

- Une primitive d'une somme s'obtient comme somme de primitives.

- Une primitive d'une somme s'obtient comme somme de primitives.
- Un exemple ? $f(x) = x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ admet pour primitive $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2\sqrt{x} + k$ avec k constante
- Une primitive d'un produit de fonction par une constante s'obtient comme produit d'une primitive de cette fonction par cette constante.

Opérations sur les primitives Partie 1

- Une primitive d'une somme s'obtient comme somme de primitives.
- Un exemple ? $f(x) = x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ admet pour primitive $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2\sqrt{x} + k$ avec k constante
- Une primitive d'un produit de fonction par une constante s'obtient comme produit d'une primitive de cette fonction par cette constante.
- Un exemple ? $f(x) = 5x^2 - \frac{3}{\sqrt{x}}$ admet pour primitive $F(x) = \frac{5}{3}x^3 - 6\sqrt{x} + k$ avec k constante
- Une primitive de produit/quotient ne s'obtient pas comme produit/quotient de primitives.

- Une primitive d'une somme s'obtient comme somme de primitives.
- Un exemple ? $f(x) = x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ admet pour primitive $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2\sqrt{x} + k$ avec k constante
- Une primitive d'un produit de fonction par une constante s'obtient comme produit d'une primitive de cette fonction par cette constante.
- Un exemple ? $f(x) = 5x^2 - \frac{3}{\sqrt{x}}$ admet pour primitive $F(x) = \frac{5}{3}x^3 - 6\sqrt{x} + k$ avec k constante
- Une primitive de produit/quotient ne s'obtient pas comme produit/quotient de primitives.
- Un exemple ? $f(x) = x^2 = x.x$ admet pour primitive $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + k$ et non pas $F(x) = (0,5x^2)^2 + k$ avec k constante

Opérations sur les primitives Partie 2

On peut déterminer une primitive de fonction en identifiant celle-ci à la dérivée d'une fonction composée. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle où toutes les fonctions considérées sont bien définies.

- $f(x) = u'(x)u^2(x)$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = \frac{1}{3}u^3(x) + k$ avec k constante
- $f(x) = \frac{u'(x)}{u^2(x)}$ admet pour primitive une fonction de la forme
- $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ admet pour primitive une fonction de la forme
- $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$ admet pour primitive une fonction de la forme

Opérations sur les primitives Partie 2

On peut déterminer une primitive de fonction en identifiant celle-ci à la dérivée d'une fonction composée. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle où toutes les fonctions considérées sont bien définies.

- $f(x) = u'(x)u^2(x)$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = \frac{1}{3}u^3(x) + k$ avec k constante
- $f(x) = \frac{u'(x)}{u^2(x)}$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = -\frac{1}{u(x)} + k$ avec k constante
- $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ admet pour primitive une fonction de la forme
- $f(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$ admet pour primitive une fonction de la forme

Opérations sur les primitives Partie 2

On peut déterminer une primitive de fonction en identifiant celle-ci à la dérivée d'une fonction composée. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle où toutes les fonctions considérées sont bien définies.

- $f(x) = u'(x)u^2(x)$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = \frac{1}{3}u^3(x) + k$ avec k constante
- $f(x) = \frac{u'(x)}{u^2(x)}$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = -\frac{1}{u(x)} + k$ avec k constante
- $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = \ln(\left|u(x)\right|) + k$ avec k constante
- $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$ admet pour primitive une fonction de la forme

Opérations sur les primitives Partie 2

On peut déterminer une primitive de fonction en identifiant celle-ci à la dérivée d'une fonction composée. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle où toutes les fonctions considérées sont bien définies.

- $f(x) = u'(x)u^2(x)$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = \frac{1}{3}u^3(x) + k$ avec k constante
- $f(x) = \frac{u'(x)}{u^2(x)}$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = -\frac{1}{u(x)} + k$ avec k constante
- $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = \ln(\left|u(x)\right|) + k$ avec k constante
- $f(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = \mathrm{e}^{u(x)} + k$ avec k constante

On peut déterminer une primitive de fonction en identifiant celle-ci à la dérivée d'une fonction composée. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle où toutes les fonctions considérées sont bien définies.

- $f(x) = u'(x)u^2(x)$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = \frac{1}{3}u^3(x) + k$ avec k constante
- $f(x) = \frac{u'(x)}{u^2(x)}$ admet pour primitive une fonction de la forme
- $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ admet pour primitive une fonction de la forme
- $f(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$ admet pour primitive une fonction de la forme

Opérations sur les primitives Partie 2

On peut déterminer une primitive de fonction en identifiant celle-ci à la dérivée d'une fonction composée. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle où toutes les fonctions considérées sont bien définies.

- $f(x) = u'(x)u^2(x)$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = \frac{1}{3}u^3(x) + k$ avec k constante
- $f(x) = \frac{u'(x)}{u^2(x)}$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = -\frac{1}{u(x)} + k$ avec k constante
- $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ admet pour primitive une fonction de la forme
- $f(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$ admet pour primitive une fonction de la forme

On peut déterminer une primitive de fonction en identifiant celle-ci à la dérivée d'une fonction composée. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle où toutes les fonctions considérées sont bien définies.

- $f(x) = u'(x)u^2(x)$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = \frac{1}{3}u^3(x) + k$ avec k constante
- $f(x) = \frac{u'(x)}{u^2(x)}$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = -\frac{1}{u(x)} + k$ avec k constante
- $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = \ln(\left|u(x)\right|) + k$ avec k constante
- $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$ admet pour primitive une fonction de la forme

Opérations sur les primitives Partie 2

On peut déterminer une primitive de fonction en identifiant celle-ci à la dérivée d'une fonction composée. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle où toutes les fonctions considérées sont bien définies.

- $f(x) = u'(x)u^2(x)$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = \frac{1}{3}u^3(x) + k$ avec k constante
- $f(x) = \frac{u'(x)}{u^2(x)}$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = -\frac{1}{u(x)} + k$ avec k constante
- $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = \ln(\left| u(x) \right|) + k$ avec k constante
- $f(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$ admet pour primitive une fonction de la forme $F(x) = \mathrm{e}^{u(x)} + k$ avec k constante

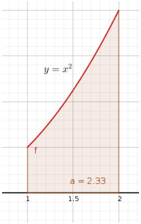
- **Théorème 4** Soit f une fonction continue positive sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I tels que $a < b$. Soit F une primitive de f. On a :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

- **Théorème 4** Soit f une fonction continue positive sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I tels que $a < b$. Soit F une primitive de f. On a :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

- Le calcul de l'intégrale ne dépend pas de la primitive choisie.



- Comment calculer $\int_1^2 x^2 \, dx$ qui représente l'aire sous la parabole entre les abscisses 1 et 2 dans un repère orthogonal d'unité 2 cm pour une unité en abscisse et 3 cm pour une unité en ordonnée ?

- Comment calculer $\int_1^2 x^2 \, \mathrm{d}x$ qui représente l'aire sous la parabole entre les abscisses 1 et 2 dans un repère orthogonal d'unité 2 cm pour une unité en abscisse et 3 cm pour une unité en ordonnée ?
- On détermine d'abord une primitive de x^2, par exemple $F(x) = \frac{1}{3}x^3$.

Intégrale d'une fonction positive Partie 2

- Comment calculer $\int_1^2 x^2 \, \mathrm{d}x$ qui représente l'aire sous la parabole entre les abscisses 1 et 2 dans un repère orthogonal d'unité 2 cm pour une unité en abscisse et 3 cm pour une unité en ordonnée ?
- On détermine d'abord une primitive de x^2, par exemple $F(x) = \frac{1}{3}x^3$.
- Ensuite, on calcule $F(2) - F(1) = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

Intégrale d'une fonction positive Partie 2

- Comment calculer $\int_1^2 x^2 \, \mathrm{d}x$ qui représente l'aire sous la parabole entre les abscisses 1 et 2 dans un repère orthogonal d'unité 2 cm pour une unité en abscisse et 3 cm pour une unité en ordonnée ?
- On détermine d'abord une primitive de x^2, par exemple $F(x) = \frac{1}{3}x^3$.
- Ensuite, on calcule $F(2) - F(1) = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$
- Enfin, on donne le résultat en unités d'aires : $\int_1^2 x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{7}{3}$ u.a. et on convertit éventuellement en cm^2, ici 1 u.a. égale à $3 \times 2 = 6 \text{ cm}^2$. On a donc $\int_1^2 x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{7}{3} \times 6 = 14 \text{ cm}^2$.