Exemples du cours du chapitre calcul intégral Partie 2 2019/2020

Frédéric Junier

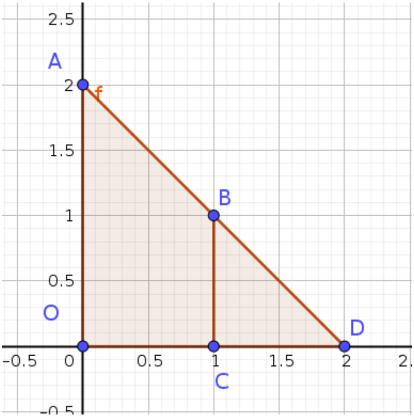
Lycée du Parc
1 Boulevard Anatole France
69006 Lyon

22 mars 2020

Table des matières

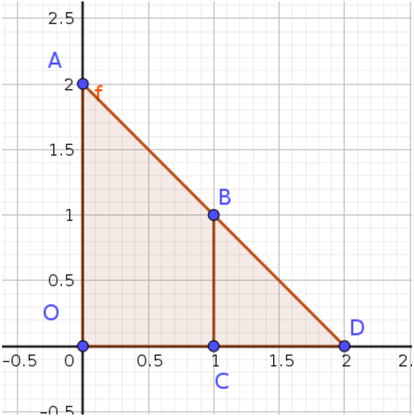
Exemple 1 Partie 1

Soit f la fonction définie sur $[0\,;2]$ par $f(x) = 2 - x$.
La surface dont l'aire est égale à intégrale $I = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ est le triangle BCD rectangle isocèle en C dont l'aire est $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$.



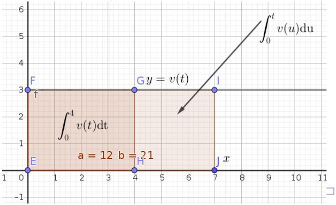
Exemple 1 Partie 2

Soit f la fonction définie sur $[0\,;2]$ par $f(x) = 2 - x$.
La surface dont l'aire est égale à intégrale $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est le trapèze $OABC$ rectangle isocèle en O dont l'aire est $\frac{1}{2} \times (OA + BC) \times OC = \frac{3}{2}$.



Soit $M(t)$ un point mobile sur un axe tel que à chaque instant $t \in [0\,; +\infty[$ (en secondes) on connaît sa vitesse instantanée $v(t)$ en mètres par seconde.
A l'instant $t = 0$, le point mobile est à l'origine de l'axe et pour tout $t \in [0\,; +\infty[$, on a $v(t) = 3$ m.s^{-1}.

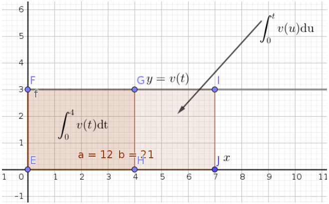
- **Question 1** La fonction v est constante donc dérivable donc continue sur $[0\,; +\infty[$.
  $\int_0^4 v(t)\mathrm{d}t$ est l'aire du rectangle $EFGH$ c'est-à-dire $4 \times 3 = 12$.
  On peut l'interpréter comme la distance parcourue par le mobile en 3 secondes. Notons que la dimension de l'intégrale est celle de $v(t)\mathrm{d}t$: vitesse × temps = distance.



Exemple 2 Question 2

- **Question 2** $\int_2^5 v(t)\mathrm{d}t$ est égale à $(5-2)\times 3 = 9$. C'est la distance parcourue par le mobile entre les instants $t=2$ et $t=5$ à une vitesse de 3 $\mathrm{m.s}^{-1}$. $\frac{1}{5-2}\int_2^5 v(t)\mathrm{d}t$ est égale à $\frac{\text{distance}}{\text{temps}} = \frac{9}{3}$, c'est la vitesse moyenne du mobile entre les instants $t=2$ et $t=5$. Comme sa vitesse est constante, c'est sa vitesse instantanée à tout instant. On a un exemple, d'utilisation de l'intégrale dans un calcul de valeur moyenne. Notons que $\frac{1}{5-2}\int_2^5 v(t)\mathrm{d}t$ a la même dimension que $v(t)$, c'est une vitesse.

- **Question 3** $g(t) = \int_0^t v(u)\,\mathrm{d}u$ est l'aire du rectangle $EFIJ$ c'est-à-dire $t \times 3 = 3t$.
  On peut l'interpréter comme la distance parcourue par le mobile en $t3$ secondes.
  g est une fonction linéaire donc elle est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $g'(t) = 3$. On remarque que $g'(t) = v(t)$. On peut l'expliquer en prenant la limite du taux de variation $\frac{g(t+h)-g(t)}{h} = \frac{3(t+h)-3t}{h} = 3$ quand h tend vers 0.
  $g(t) = \int_0^t v(u)\,\mathrm{d}u$ est une primitive de v.



Exemple 3

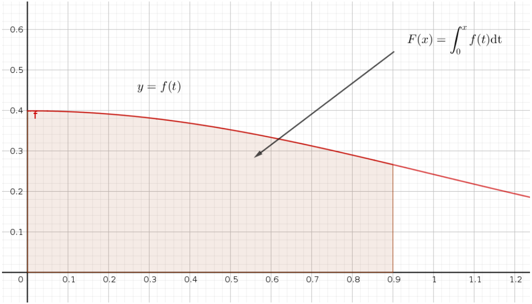
Voir Notebook et Corrigé (suivez les liens).

Exemple 4 Question 1

Soit f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$.

- f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $f'(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times(-t)e^{-\frac{t^2}{2}}$. Pour tout réel $t>0$, on a $f'(t)>0$ et $f'(0)=0$.
  On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
  Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, on a par composition $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}=0$.

f est dérivable donc continue sur $[0\,;+\infty[$.
De plus, pour tout $t \geqslant 0$, on a $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ donc $f(t) \geqslant 0$.
On peut appliquer le théorème fondamental, qui nous permet d'affirmer que $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et que pour tout réel $x \geqslant 0$, $F'(x) = f(x)$.
Notez qu'on utilise plutôt x pour F et t pour $F' = f$ mais qu'on pourrait écrire : pour tout réel $t \geqslant 0$, $F'(t) = f(t)$.
Puisque f est strictement positive sur $]0\,;+\infty[$ et ne s'annule qu'en 0, on en déduit que F est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. Page suivante un graphique qui permet de comprendre pourquoi $F(x)$ aire sous la courbe de f entre 0 et x est croissante.


$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{dt}$
$y = f(t)$
f
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1.1
1.2

Exemple 5 Question 1

Soient les fonctions f et F continues sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ définies par :

$$F(x) = \tan x - x \quad \text{et} \quad f(x) = \tan^2 x$$

F est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$F'(x) = \frac{\cos(x) \times \cos(x) - \sin(x) \times (-\sin(x))}{\cos^2(x)} - 1 = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} - 1$$

$$F'x() = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \tan^2 x$$

F est donc une primitive de f.

Exemple 5 Question 2 a)

Soient g et G les fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1+\ln x}{x} \quad \text{et} \quad G(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \ln x$$

G est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et pour tout réel $x > 0$, on a :

$$G'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} \times 2\ln(x) + \frac{1}{x} = \frac{1+\ln x}{x}$$

$$G'(x) = g(x)$$

G et donc une primitive de g.
Notons que M définie par $M(x) = G(x) + 1$, a même dérivée g que G donc c'est une aussi une primitive de g. On peut remplacer 1 par une constante k, toute fonction de la forme $G(x) + k$ est une primitive de g.

Exemple 5 Question 2 b)

$G(\mathrm{e}) = \frac{1}{2}(\ln \mathrm{e})^2 + \ln \mathrm{e} = \frac{3}{2}$.
La fonction H définie par $H(x) = G(x) - G(\mathrm{e}) = G(x) - \frac{3}{2}$, s'annule en e et a pour dérivée $H' = G' = g$ donc c'est une primitive de g qui s'annule en e.
Supposons qu'il existe une autre primitive N de g qui s'annule en e, on a $(H - N)' = H' - N' = g - g = 0$ donc $H - N$ est constante. De plus , $(H - N)(\mathrm{e}) = 0$ donc $H - N = 0$ donc $H = N$.
H est donc l'unique primitive de g qui s'annule en e.

Exemple 6 Question 1) Partie 1

Chaque fonction f considérée est continue donc admet des primitives sur son intervalle de définition.

a. $f(x) = 4$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = 4x + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

b. $f(x) = 0$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

c. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = 2\sqrt{x} + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

d. $f(x) = 3 + x + x^4$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = 3x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x^5 + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

Exemple 6 Question 1) Partie 2

Chaque fonction f considérée est continue donc admet des primitives sur son intervalle de définition.

a. $f(x) = \sin(2x)$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

b. $f(x) = \cos(3x)$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x) + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

c. $f(x) = \frac{1}{x^4}$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{-4+1}x^{-4+1} + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

Exemple 6 Question 1) Partie 3

Chaque fonction f considérée est continue donc admet des primitives sur son intervalle de définition.

a. $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{-2}\mathrm{e}^{-2x} + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

b. $f(x) = \frac{-1}{x}$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = -\ln(|x|) + k = -\ln(-x) + k \text{ avec } -x > 0 \text{ et } k \text{ constante réelle}$$

Exemple 6 Question 2)

Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F : x \mapsto x \ln x - x + 1$
Pour tout réel $x > 0$, on a,en appliquant la formule de dérivation d'un produit pour $x \ln(x)$:

$$F'(x) = x \times \frac{1}{x} + 1 \times \ln(x) - 1 = \ln(x)$$

F est donc une primitive de la fonction ln. La primitive G de ln qui s'annule en $\sqrt{\mathrm{e}}$. est donc de la forme $G(x) = F(x) + k$. Il suffit de déterminer k en évaluant G en $\sqrt{\mathrm{e}}$:

$$G(\sqrt{\mathrm{e}}) = F(\sqrt{\mathrm{e}}) + k = \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}} - \sqrt{\mathrm{e}} + 1 + k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}} - 1$$

La primitive de ln qui s'annule en $\sqrt{\mathrm{e}}$ est donc
$G(x) = x \ln x - x + \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}$.

Exemple 6 Question 2)

Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F : x \mapsto x\ln x - x + 1$
Pour tout réel $x > 0$, on a,en appliquant la formule de dérivation d'un produit pour $x\ln(x)$:

$$F'(x) = x \times \frac{1}{x} + 1 \times \ln(x) - 1 = \ln(x)$$

F est donc une primitive de la fonction ln. La primitive G de ln qui s'annule en $\sqrt{\text{e}}$. est donc de la forme $G(x) = F(x) + k$. Il suffit de déterminer k en évaluant G en $\sqrt{\text{e}}$:

$$G(\sqrt{\text{e}}) = F(\sqrt{\text{e}}) + k = \frac{1}{2}\sqrt{\text{e}} - \sqrt{\text{e}} + 1 + k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}\sqrt{\text{e}} - 1$$

La primitive de ln qui s'annule en $\sqrt{\text{e}}$ est donc
$G(x) = x\ln x - x + \frac{1}{2}\sqrt{\text{e}}$.

Exemple 7 Partie 1

1. $f(x)=x^2-2x-1-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\mathrm{e}^x$admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-x+\frac{1}{x}-\ln(|x|)+\mathrm{e}^x+k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

2. $f(x)=\cos(4x-1)-2\sin(2x)$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x)=\frac{1}{4}\sin(4x-1)+2\times\frac{1}{2}\cos(2x)+k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

3. $f(x)=\frac{\mathrm{e}^{731x}}{(\mathrm{e}^{731x}+1)^2}$ est de la forme $\frac{1}{731}\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x)=\mathrm{e}^{731x}+1$, donc admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x)=-\frac{1}{u(x)}+k=-\frac{1}{731}\frac{1}{\mathrm{e}^{731x}+1}+k= \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

Exemple 7 Partie 2

1. $f(x)=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$ est de la forme $-\frac{u'}{u}$ avec $u(x)=e^{-x}+1$, donc admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x)=-\ln(\left|u(x)\right|)+k=-\ln(\left|e^{-x}+1\right|)+k=-\ln(e^{-x}+1)+k\ ,\ k\in\mathbb{R}$$

2. $f(x)=\frac{x}{e^{x^2}}=xe^{-x^2}$ est de la forme $-\frac{1}{2}u'e^{u}$ avec $u(x)=-x^2$, donc admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x)=-\frac{1}{2}e^{u(x)}+k=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+k\ ,\ k\in\mathbb{R}$$

Exemple 7 Partie 3

1. $f(x) = \frac{1}{x \ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \ln(x)$, donc admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \ln(\left| u(x) \right|) + k = \ln(\left| \ln(x) \right|) + k \ , \ k \in \mathbb{R}$$

   Sur $]0;1[$, on a $\ln(x) < 0$ donc $F(x) = \ln(-\ln(x)) + k$.
   Sur $]1;+\infty[$, on a $\ln(x) > 0$ donc $F(x) = \ln(\ln(x)) + k$.

2. $f(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$ est de la forme $u'e^u$ avec $u(x) = \sin(x)$, donc admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = e^{u(x)} + k = e^{\sin(x)} + k \ , \ k \in \mathbb{R}$$

3. $f(x) = \frac{1}{x} \times (\ln x)^2$ est de la forme $u'u^2$ avec $u(x) = \ln(x)$, donc admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{3}u^3(x) + k = \frac{1}{3}(\ln(x))^3 + k \ , \ k \in \mathbb{R}$$

Exemple 8 Partie 1

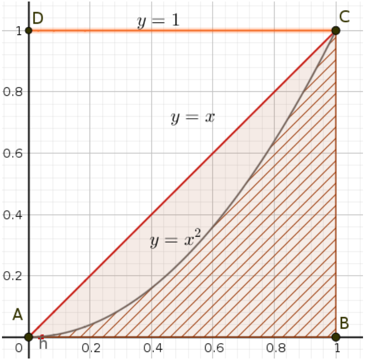
On considère les courbes d'équations $y = 1$, $y = x$ et $y = x^2$ sur l'intervalle $[0\,;1]$.
Pour tout réel $x \in [0\,;1]$, on a :

$$0 \leqslant x \leqslant 1$$

on multiplie par $x \geqslant 0$

$$0 \leqslant x^2 \leqslant x \leqslant 1$$

Exemple 8 Figure



Exemple 8 Partie 2

Puisque pour tout réel $x \in [0\,;1]$, on a $0 \leqslant x^2 \leqslant x \leqslant 1$, on en déduit que : la courbe d'équation $y = x^2$ est donc en dessous de la droite d'équation $y = x$, elle même en-dessous de la droite d'équation $y = 1$.

Par définition de l'intégrale d'une fonction continue positive comme aire du domaine « sous sa courbe » (délimité par sa courbe, l'axe des abscisses et les deux droites parallèles à l'axe des ordonnées passant par les bornes de l'intervalle), on en déduit que :

$$I = \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x \leqslant K = \int_0^1 x \, \mathrm{d}x \leqslant J = \int_0^1 1 \, \mathrm{d}x$$

De plus, par additivité des aires, l'intégrale $L = \int_0^1 1 - x^2 \, \mathrm{d}x$ représente l'aire du domaine entre la droite d'équation $y = 1$ et la courbe d'équation $y = x^2$, de même $M = \int_0^1 x - x^2 \, \mathrm{d}x$ représente l'aire du domaine entre la droite d'équation $y = x$ et la courbe d'équation $y = x^2$.
On peut noter que pour tout réel $x \in [0\,;1]$, on a $0 \leqslant x^2 \leqslant x \leqslant 1$, donc $0 \leqslant x - x^2 \leqslant 1 - x^2$ et donc $M \leqslant L$.