Lois à densité
Corrigés des exemples du cours
Terminale S 734

Frédéric Junier[1]

Lycée du Parc, Lyon

1. http://frederic-junier.org/

Table des matières

Exemple 1 : Partie 1

Sofia utilise le bus pour se rendre au cinéma. La durée du trajet entre son domicile et le cinéma (exprimée en minutes) est une variable aléatoire T qui prend des valeurs choisies aléatoirement dans l'intervalle $[12\ ;\ 15]$. On dit que T suit la loi uniforme sur l'intervalle $[12\ ;\ 15]$. La probabilité que la durée de trajet appartienne à un intervalle $[a\,;\,b]$ inclus dans $[12\ ;\ 15]$ est alors proportionnelle à la longueur de cet intervalle.

- L'événement $\{12 \leqslant T \leqslant 15\}$ est égal à l'univers Ω de cette expérience aléatoire, donc $\mathrm{P}(12 \leqslant T \leqslant 15) = 1$.
- La probabilité de l'événement $\mathrm{A} =$ « *la durée du trajet de Sofia est inférieure ou égale à* 13 *minutes* » est proportionnelle à la longueur de l'intervalle $[12\,;\,13]$, égale à 1. Sachant que $\mathrm{P}(12 \leqslant T \leqslant 15) = 1$ et que la longueur de $[12\,;\,15]$ est 3, on a :

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(12 \leqslant T \leqslant 13) = \frac{13-12}{15-12} = \frac{1}{3}$$

Exemple 1 : Partie 2

Exemple 1 : Partie 2

- De même la probabilité de l'événement B = « *la durée du trajet de Sofia est strictement supérieure à* 13 *minutes* » est égale à :

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(13 < T \leqslant 15) = \frac{15-13}{15-12} = \frac{2}{3}$$

Exemple 1 : Partie 2

- De même la probabilité de l'événement B = « *la durée du trajet de Sofia est strictement supérieure à* 13 *minutes* » est égale à :

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(13 < T \leqslant 15) = \frac{15-13}{15-12} = \frac{2}{3}$$

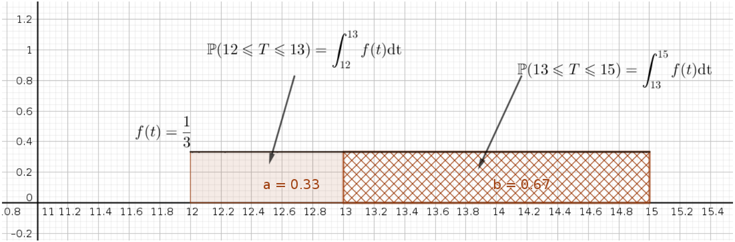
- L'événement C = « *la durée du trajet de Sofia est égale exactement à* 13 *minutes* » est tel que les événements A, B et C sont deux à deux incompatibles et $A \cup B \cup C = \Omega$. Les événements A, B et C forment une partition de l'univers donc $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) = 1$.
  Or on a $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} = 1$ donc $\mathrm{P}(C) = 0$.
  On peut aussi calculer comme précédemment par proportionnalité : $\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(13 \leqslant T \leqslant 13) = 0$
  Comme il existe une infini d'instants dans l'intervalle $[12\,;\,15]$ il n'est pas possible d'avoir la probabilité d'un instant non nulle et $\mathrm{P}(12 \leqslant T \leqslant 15) = 1$.

Exemple 1 : Partie 3

- Une variable aléatoire X donnant la face du dessus lorsqu'on lance un dé à six faces équilibré suit une **loi uniforme discrète** à valeurs dans l'ensemble $X(\Omega) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. On dit que T suit une **loi uniforme continue** à valeurs dans l'intervalle $[12\ ;\ 15]$. La différence principale entre une loi discrète et une loi continue est le nombre d'éléments (le cardinal) de l'univers : infini pour une loi continue et fini pour une loi discrète.

Exemple 1 : Partie 4

- Représenter dans un repère du plan la courbe de la fonction f définie sur l'intervalle $[12\ ;\ 15]$ par $f(t) = \dfrac{1}{3}$ puis hachurer des domaines d'aires égales à $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{P}(\mathrm{B})$.



Exemple 1 : Partie 5

- Pour estimer la durée moyenne du trajet de Sofia, on peut s'inspirer de la formule de l'espérance de la variable aléatoire discrète X : $\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{6} k\mathrm{P}(X = k)$. Comparaison entre la variable aléatoire X suivant une loi discrète uniforme et la loi T qui suit une loi uniforme continue :

Exemple 1 : Partie 5

- Pour estimer la durée moyenne du trajet de Sofia, on peut s'inspirer de la formule de l'espérance de la variable aléatoire discrète X : $\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{6} k\mathrm{P}(X = k)$. Comparaison entre la variable aléatoire X suivant une loi discrète uniforme et la loi T qui suit une loi uniforme continue :

-

	loi discrète X	loi continue T
valeur	$k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$t \in [12\,;\,15]$
probabilité	$\mathrm{P}(X = k)$	$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$
espérance	$\sum_{k=1}^{6} k\mathrm{P}(X = k)$	$\int_{12}^{15} tf(t)\mathrm{d}t$

Exemple 1 : Partie 6

L'espérance de T, durée moyenne du trajet de Sofia, peut être estimée ainsi :

Exemple 1 : Partie 6

L'espérance de T, durée moyenne du trajet de Sofia, peut être estimée ainsi :

$$\int_{12}^{15} tf(t)\mathrm{dt} = \int_{12}^{15} \frac{t}{3}\mathrm{dt} = \frac{1}{3}\left[\frac{t^2}{2\times(15-12)}\right]_{12}^{15} = \frac{15+12}{2} = 13,5$$

On trouver le centre de l'intervalle [12 ; 15] ce qui et conforme à l'intuition.

Exemple 2 : Partie 1

Vérifions que $f : t \mapsto \frac{1}{5}$ est une densité de probabilité sur $I = [2\,;\,7]$.

Exemple 2 : Partie 1

Vérifions que $f : t \mapsto \frac{1}{5}$ est une densité de probabilité sur $I = [2\,;\,7]$.

- **point 1 :** f est continue sur $I = [2\,;\,7]$.

Exemple 2 : Partie 1

Vérifions que $f : t \mapsto \dfrac{1}{5}$ est une densité de probabilité sur $I = [2\,;\,7]$.

- **point 1 :** f est continue sur $I = [2\,;\,7]$.
- **point 2 :** f est à valeurs positives.

Exemple 2 : Partie 1

Vérifions que $f : t \mapsto \dfrac{1}{5}$ est une densité de probabilité sur $I = [2\,;\,7]$.

- **point 1 :** f est continue sur $I = [2\,;\,7]$.
- **point 2 :** f est à valeurs positives.
- **point 3 :** $\displaystyle\int_2^7 \frac{1}{5}\mathrm{dt} = \left[\frac{t}{5}\right]_2^7 = \frac{7-2}{5} = 1$

f est donc bien une fonction de densité de probabilité.

Exemple 2 : Partie 1

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $F(t) = 1 - (2t + 1)\mathrm{e}^{-2t}$.

Exemple 2 : Partie 1

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $F(t) = 1 - (2t+1)\mathrm{e}^{-2t}$.

- F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ par règles opératoire et pour tout réel $t \geqslant 0$, on a :

$$F'(t) = 0 - 2\mathrm{e}^{-2t} + 2(2t+1)\mathrm{e}^{-2t} = 4t\mathrm{e}^{-2t} = f(t)$$

Exemple 2 : Partie 1

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $F(t) = 1 - (2t+1)\mathrm{e}^{-2t}$.

- F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ par règles opératoire et pour tout réel $t \geqslant 0$, on a :

$$F'(t) = 0 - 2\mathrm{e}^{-2t} + 2(2t+1)\mathrm{e}^{-2t} = 4t\mathrm{e}^{-2t} = f(t)$$

- La fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = 4t\mathrm{e}^{-2t}$ est dérivable donc continue sur $[0\,;+\infty[$ et elle est positive sur cet intervalle.

  De plus pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(0) = 1 - (2x+1)\mathrm{e}^{-2x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ par composition et somme. On a donc bien $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

  f est donc une fonction de densité de probabilité sur $\mathbb{R}^+$.

Exemple 2 : Partie 1

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $F(t) = 1 - (2t+1)\mathrm{e}^{-2t}$.

- F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ par règles opératoire et pour tout réel $t \geqslant 0$, on a :
$$F'(t) = 0 - 2\mathrm{e}^{-2t} + 2(2t+1)\mathrm{e}^{-2t} = 4t\mathrm{e}^{-2t} = f(t)$$
- La fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = 4t\mathrm{e}^{-2t}$ est dérivable donc continue sur $[0\,;+\infty[$ et elle est positive sur cet intervalle.
  De plus pour tout réel $x \geqslant 0$, on a
  $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(0) = 1 - (2x+1)\mathrm{e}^{-2x}$ et
  $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ par composition et somme. On a donc bien
  $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.
  f est donc une fonction de densité de probabilité sur $\mathbb{R}^+$.
- Soit X une variable aléatoire de densité f, on a :

$\int^3$

Exemple 2 : Partie 1

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $F(t) = 1 - (2t+1)\mathrm{e}^{-2t}$.

- La fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = 4t\mathrm{e}^{-2t}$ est dérivable donc continue sur $[0\,;\,+\infty[$ et elle est positive sur cet intervalle.
  De plus pour tout réel $x \geqslant 0$, on a
  $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(0) = 1 - (2x+1)\mathrm{e}^{-2x}$ et
  $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ par composition et somme. On a donc bien
  $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$
  f est donc une fonction de densité de probabilité sur $\mathbb{R}^+$.

Exemple 2 : Partie 1

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $F(t) = 1 - (2t+1)\mathrm{e}^{-2t}$.

- La fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = 4t\mathrm{e}^{-2t}$ est dérivable donc continue sur $[0\,;\,+\infty[$ et elle est positive sur cet intervalle.
  De plus pour tout réel $x \geqslant 0$, on a
  $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(0) = 1 - (2x+1)\mathrm{e}^{-2x}$ et
  $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ par composition et somme. On a donc bien
  $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.
  f est donc une fonction de densité de probabilité sur $\mathbb{R}^+$.
- Soit X une variable aléatoire de densité f, on a :

$$P\left(2 < X < 3\right) = \int_2^3 f(t)\mathrm{dt} = F(3) - F(2) = 5\mathrm{e}^{-4} - 7\mathrm{e}^{-6}$$

Exemple 3 : Partie 1

Soit X une variable aléatoire de densité $f(t) = 3\,\mathrm{e}^{-3t}$ sur $\mathbb{R}^+$.
On recherche deux réels a, b tels que $G : t \mapsto (at + b)\mathrm{e}^{-3t}$ soit une primitive de la fonction $t \mapsto tf(t)$.

Exemple 3 : Partie 1

Soit X une variable aléatoire de densité $f(t) = 3\,\mathrm{e}^{-3t}$ sur $\mathbb{R}^+$.
On recherche deux réels a, b tels que $G : t \mapsto (at+b)\mathrm{e}^{-3t}$ soit une primitive de la fonction $t \mapsto tf(t)$.

- G est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout réel $t \geqslant 0$, on a :

$$G'(t) = a\mathrm{e}^{-3t} - 3(at+b)\mathrm{e}^{-3t}$$

On a donc $G'(0) = a - 3b$ et $G'(1) = \mathrm{e}^{-3}(-2a-3b)$. Si pour tout $t \geqslant 0$, on a $G'(t) = tf(t)$ alors :

$$\begin{cases} G'(0) = 0 \\ G'(1) = f(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 3b = 0 \\ \mathrm{e}^{-3}(-2a-3b) = 3\mathrm{e}^{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{1}{3} \\ a = -1 \end{cases}$$

Réciproquement, on peut vérifier que la fonction G définie sur $\mathbb{R}_+$ par $G(t) = (-t - \dfrac{1}{3})\mathrm{e}^{-3t}$ a pour fonction dérivée $tf(t)$.

Exemple 3 : Partie 2

Soit X une variable aléatoire de densité $f(t) = 3\,\mathrm{e}^{-3t}$ sur $\mathbb{R}^+$.
On recherche deux réels a, b tels que $G : t \mapsto (at + b)\mathrm{e}^{-3t}$ soit une primitive de la fonction $t \mapsto tf(t)$.

Exemple 3 : Partie 2

Soit X une variable aléatoire de densité $f(t) = 3\,\mathrm{e}^{-3t}$ sur $\mathbb{R}^+$.
On recherche deux réels a, b tels que $G : t \mapsto (at+b)\mathrm{e}^{-3t}$ soit une primitive de la fonction $t \mapsto tf(t)$.

- Pour déterminer l'espérance de la variable aléatoire X, on fixe d'abord $x \geqslant 0$ et on calcule
  $\displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = [G(t)]_0^x = G(x) - G(0) = (-x - \frac{1}{3})\mathrm{e}^{-3x} + \frac{1}{3}.$
  Par composition (avec règle de croissances comparées $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$) et somme on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0$, donc par somme on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}.$
  L'espérance de la variable aléatoire X est donc $\dfrac{1}{3}$.

$\in 900\ ,\ 1\ 200 = 0,75$.

Comme la variable aléatoire M suit une loi uniforme sur $[850\ ,\ x]$, on a

$$P\left(M \in [900\ ,\ 1\ 200]\right) = \frac{1\ 200 - 900}{x - 850}.$$

On en déduit que $\dfrac{1\ 200 - 900}{x - 850} = 0,75$ ce qui équivaut à

$300 = 0,75x - 637,5$ ou à $937,5 = 0,75x$ c'est-à-dire $x = 1\ 250$.

Exemple 4 : Partie 2

Calcul de la masse moyenne d'un melon.

Exemple 4 : Partie 2

Calcul de la masse moyenne d'un melon.

- La masse d'un melon produit par le maraîcher suit une loi uniforme sur l'intervalle $[850; 1250]$ donc la masse moyenne d'un melon sur un échantillon de grande taille peut être approchée par l'espérance de M égale à $\dfrac{850 + 1250}{2} = 1050$ grammes.

Exemple 5 : Partie 1

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de kilomètres parcourus par un pneu, sans crevaison. On fait l'hypothèse que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.
Montrer que $P(500 \leqslant X \leqslant 1000) = \mathrm{e}^{-500\lambda} - \mathrm{e}^{1\ 000\lambda}$.

Exemple 5 : Partie 1

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de kilomètres parcourus par un pneu, sans crevaison. On fait l'hypothèse que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.
Montrer que $P(500 \leqslant X \leqslant 1000) = \mathrm{e}^{-500\lambda} - \mathrm{e}^{1\ 000\lambda}$.

- On a $p(500 \leqslant X \leqslant 1000) = \int_0^{1000} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x - \int_0^{500} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \int_{500}^{1000} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_{500}^{1000} = -\mathrm{e}^{-1000\lambda} - \left(\mathrm{e}^{-500\lambda}\right) = \mathrm{e}^{-500\lambda} - \mathrm{e}^{-1000\lambda}$.

Exemple 5 : Partie 2

La probabilité que le pneu parcoure entre 500 et 1 000 kilomètres sans crevaison étant égale à $\frac{1}{4}$, déterminer la valeur de λ.

Exemple 5 : Partie 2

La probabilité que le pneu parcoure entre 500 et 1 000 kilomètres sans crevaison étant égale à $\frac{1}{4}$, déterminer la valeur de λ.

- On a donc $p(500 \leqslant X \leqslant 1000) = \frac{1}{4} \iff e^{-500\lambda} - e^{-1000\lambda} = \frac{1}{4} \iff e^{-500\lambda} - \left(e^{-500\lambda}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$. En posant $x = e^{-500\lambda}$, l'équation à résoudre s'écrit

$$x - x^2 - \frac{1}{4} = 0 \iff x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \iff x - \frac{1}{2} = 0 \iff x = \frac{1}{2}.$$ Il reste à résoudre : $e^{-500\lambda} = \frac{1}{2}$ soit d'après la croissance de la fonction ln, $-500\lambda = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \iff$

$$-500\lambda = -\ln 2 \iff \lambda = \frac{\ln 2}{500} \approx 0{,}001\ 38 \approx 0{,}001\ 4.$$

Exemple 6 Question 1

La durée de vie, en années, d'un composant électronique fabriqué dans une usine, est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un nombre réel strictement positif).
Démontrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{P}(T \leqslant t) = 1$.

- Soit $t \in [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(T \leqslant t) &= \int_0^t f(x)\mathrm{d}x = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\
&= \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^t = \left(-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right) - \left(-\mathrm{e}^{-\lambda \times 0}\right. \\
&= \left(-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right) - (-1) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

$$\forall t \in [0, +\infty[\quad \mathrm{P}(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

Exemple 6 Question 1

Exemple 6 Question 1

- Soit $t \in [0, +\infty[$:

  De $\begin{cases} l \\ \lim\limits_{t \to +\infty} -\lambda t \overset{\lambda \geq 0}{=} -\infty \\ \text{et} \\ \lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0 \end{cases}$ on déduit, par composition : $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} = 0.$

  On a ensuite, par somme : $\lim\limits_{t \to +\infty} (1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}) = 1 - 0 = 1$:

$$\lim_{t \to +\infty} \mathrm{P}(T \leqslant t) = 1$$

Exemple 6 Question 2)

On suppose que $\mathrm{P}\big(T \leqslant 7\big) = 0,5$. Déterminer λ à 10^{-3} près.

Exemple 6 Question 2)

On suppose que $\mathrm{P}\big(T \leqslant 7\big) = 0,5$. Déterminer λ à 10^{-3} près.

- L'hypothèse s'écrit : $1 - \mathrm{e}^{-7\lambda} = 0,5 \quad (1)$

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\iff \quad \mathrm{e}^{-7\lambda} = 0,5 \\
&\iff \quad -7\lambda = \ln \frac{1}{2} \\
&\iff \quad -7\lambda = -\ln 2 \\
&\iff \quad \lambda = \frac{\ln 2}{7}
\end{aligned}$$

Une valeur approchée de λ, à 10^{-3} près, est $0,099$

Exemple 6 Question 3)a)

La question est de déterminer $P(T \geqslant 5)$.

Exemple 6 Question 3)a)

La question est de déterminer $\mathrm{P}(T \geqslant 5)$.

- Puisque $\mathrm{P}(T \leqslant 5) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}099 \times 5}$, alors

$$\mathrm{P}(T \geqslant 5) = \mathrm{P}(T > 5) = 1 - \mathrm{P}(T \leqslant 5) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-0{,}099 \times 5})$$

$$\mathrm{P}(T \geqslant 5) == \mathrm{e}^{-5 \times 0{,}099} = \mathrm{e}^{-0{,}495}$$

La probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans est environ 0,61.

Exemple 6 Question 3)b)

Il s'agit de calculer

$$\mathrm{P}_{(T\geqslant 2)}(T \geqslant 7)$$

Exemple 6 Question 3)b)

Il s'agit de calculer

$$\mathrm{P}_{(T\geqslant 2)}(T \geqslant 7)$$

- La loi exponentielle étant une loi de durée de vie sans vieillissement, on a

$$\mathrm{P}_{(T\geqslant 2)}(T \geqslant 7) = \mathrm{P}(T \geqslant 5)$$

La probabilité cherchée est environ $0,61$

Exemple 6 Question 3)c)

Il s'agit de calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire T.

Exemple 6 Question 3)c)

Il s'agit de calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire T.

- $\mathrm{E}(T) = \dfrac{1}{\lambda}$:

  Une valeur approchée de l'espérance de T est environ 10,10 : la durée de vie moyenne d'un composant est d'environ 10 ans

Exemple 7 Partie 1

Soit Xune variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}(0\,;\,1)$. On donne $\mathrm{P}(X \leqslant 1) \approx 0,841$ et $\mathrm{P}(X \leqslant -2) \approx 0,023$ à 0,001 près. En déduire une valeur approchée à à 0,001 près des probabilités suivantes :

- $\mathrm{P}(X > 1) = ?$

Exemple 7 Partie 1

Soit Xune variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}(0\,;\,1)$. On donne $\mathrm{P}(X \leqslant 1) \approx 0,841$ et $\mathrm{P}(X \leqslant -2) \approx 0,023$ à 0,001 près. En déduire une valeur approchée à à 0,001 près des probabilités suivantes :

- $\mathrm{P}(X > 1) =?$
-
- $\mathrm{P}(X \leqslant -1) =?$

Exemple 7 Partie 1

Soit Xune variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}(0\,;\,1)$. On donne $\mathrm{P}(X \leqslant 1) \approx 0,841$ et $\mathrm{P}(X \leqslant -2) \approx 0,023$ à 0,001 près. En déduire une valeur approchée à à 0,001 près des probabilités suivantes :

- $\mathrm{P}(X > 1) = ?$
-
- $\mathrm{P}(X \leqslant -1) = ?$
-
- $\mathrm{P}(X \geqslant -1) = ?$

Exemple 7 Partie 1

Soit Xune variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}(0\,;\,1)$. On donne $\mathrm{P}(X \leqslant 1) \approx 0,841$ et $\mathrm{P}(X \leqslant -2) \approx 0,023$ à 0,001 près. En déduire une valeur approchée à à 0,001 près des probabilités suivantes :

- $\mathrm{P}(X > 1) =?$
-
- $\mathrm{P}(X \leqslant -1) =?$
-
- $\mathrm{P}(X \geqslant -1) =?$
-
- $\mathrm{P}(X = 1) =?$

Exemple 7 Partie 1

Soit Xune variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}\,(0\,;\,1)$. On donne $\mathrm{P}\,(X \leqslant 1) \approx 0,841$ et $\mathrm{P}\,(X \leqslant -2) \approx 0,023$ à 0,001 près. En déduire une valeur approchée à à 0,001 près des probabilités suivantes :

- $\mathrm{P}\,(X > 1) =?$
-
- $\mathrm{P}\,(X \leqslant -1) =?$
-
- $\mathrm{P}\,(X \geqslant -1) =?$
-
- $\mathrm{P}\,(X = 1) =?$
-

Exemple 7 Partie 1

Soit Xune variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}(0\,;\,1)$. On donne $\mathrm{P}(X \leqslant 1) \approx 0,841$ et $\mathrm{P}(X \leqslant -2) \approx 0,023$ à 0,001 près. En déduire une valeur approchée à à 0,001 près des probabilités suivantes :

- $\mathrm{P}(X > 1) = ?$
-
- $\mathrm{P}(X \leqslant -1) = ?$
-
- $\mathrm{P}(X \geqslant -1) = ?$
-
- $\mathrm{P}(X = 1) = ?$
-

Exemple 7 Partie 2

Soit Xune variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}(0\,;\,1)$. On donne $\mathrm{P}(X \leqslant 1) \approx 0,841$ et $\mathrm{P}(X \leqslant -2) \approx 0,023$ à 0,001 près. En déduire une valeur approchée à à 0,001 près des probabilités suivantes :

- $\mathrm{P}(-2 < X < 1) = ?$

Exemple 7 Partie 2

Soit Xune variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}\,(0\,;\,1)$. On donne $\mathrm{P}\,(X \leqslant 1) \approx 0,841$ et $\mathrm{P}\,(X \leqslant -2) \approx 0,023$ à 0,001 près. En déduire une valeur approchée à à 0,001 près des probabilités suivantes :

- $\mathrm{P}\,(-2 < X < 1) =?$
-
- $\mathrm{P}\,(-2 < X) =?$

Exemple 7 Partie 2

Soit Xune variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}(0\,;\,1)$. On donne $\mathrm{P}(X \leqslant 1) \approx 0,841$ et $\mathrm{P}(X \leqslant -2) \approx 0,023$ à 0,001 près. En déduire une valeur approchée à à 0,001 près des probabilités suivantes :

- $\mathrm{P}(-2 < X < 1) =?$
-
- $\mathrm{P}(-2 < X) =?$
-
- $\mathrm{P}(X \leqslant 2) =?$

Exemple 7 Partie 2

Soit Xune variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}(0\,;\,1)$. On donne $\mathrm{P}(X \leqslant 1) \approx 0,841$ et $\mathrm{P}(X \leqslant -2) \approx 0,023$ à 0,001 près. En déduire une valeur approchée à à 0,001 près des probabilités suivantes :

- $\mathrm{P}(-2 < X < 1) =?$
-
- $\mathrm{P}(-2 < X) =?$
-
- $\mathrm{P}(X \leqslant 2) =?$
-
- $\mathrm{P}(-1 < X \leqslant 2) =?$

Exemple 7 Partie 2

Soit Xune variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$. On donne $\mathrm{P}(X \leqslant 1) \approx 0,841$ et $\mathrm{P}(X \leqslant -2) \approx 0,023$ à 0,001 près. En déduire une valeur approchée à à 0,001 près des probabilités suivantes :

- $\mathrm{P}(-2 < X < 1) =?$
-
- $\mathrm{P}(-2 < X) =?$
-
- $\mathrm{P}(X \leqslant 2) =?$
-
- $\mathrm{P}(-1 < X \leqslant 2) =?$
-

Exemple 6 Partie 2

- L'hypothèse s'écrit : $1 - \mathrm{e}^{-7\lambda} = 0,5 \quad (1)$

$$
\begin{aligned}
(1) \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-7\lambda} = 0,5 \\
&\Longleftrightarrow \quad -7\lambda = \ln \frac{1}{2} \\
&\Longleftrightarrow \quad -7\lambda = -\ln 2 \\
&\Longleftrightarrow \quad \lambda = \frac{\ln 2}{7}
\end{aligned}
$$

Une valeur approchée de λ, à 10^{-3} près, est $0,099$

Exemple 11

Le nombre de lampes fonctionnelles après 1 an suit une loi normale de moyenne $\mu = 440$ et d'écart-type $\sigma = 7,3$.

1. On a $\mathrm{P}\left(X > 445\right) \approx 0,247$.

2. Le nombre de lampes en panne au bout d'un an est $500 - X$.

   On veut déterminer α tel que
   $\mathrm{P}\left(500 - X \leqslant \alpha\right) = 0,95 \Leftrightarrow \mathrm{P}\left(500 - \alpha \leqslant X\right) = 0,95$.

   Or $\mathrm{P}\left(500 - \alpha \leqslant X\right) = 0,95 \Leftrightarrow \mathrm{P}\left(X \leqslant 500 - \alpha\right) = 0,05$.

   On inverse la loi $\mathcal{N}\left(440\ ;\ 7,3^2\right)$ et on note $\Psi(0,05)$ le réel u tel que $\mathrm{P}\left(X \leqslant u\right) = 0,05$. La fonction Ψ est la fonction `FracNormale` ou `InvNorm` de la calculatrice.

   On a $\Psi(0,05) \approx 428$ donc $\alpha = 500 - 428 = 72$. Il faut donc prévoir un stock de 72 lampes.

Exemple 12 Question 1)

- X est la variable aléatoire qui, à chaque comprimé pris au hasard dans la production associe sa masse en milligrammes.

  X suit la loi normale de moyenne $\mu = 900$ et d'écart-type $\sigma = 7$.

  La probabilité qu'un comprimé prélevé au hasard soit conforme est :

$$\boxed{\mathrm{P}(890 \leqslant X \leqslant 920) \approx 0,92}$$

Exemple 12 Question 2)

- On veut déterminer h tel que $\mathrm{P}\left(900 - h \leqslant X \leqslant 900 + h\right) \approx 0,99$.

  On $\mu = 900$ donc
  $\mathrm{P}\left(900 - h \leqslant X \leqslant 900 + h\right) = 2\mathrm{P}\left(X \leqslant 900 + h\right) - 1$.

  Ainsi $\mathrm{P}\left(X \leqslant 900 + h\right) = \dfrac{1 + 0,99}{2} = 0,995$.

  On inverse la loi $\mathcal{N}\left(900\ ;\ 7^2\right)$ et on note $\Psi(0,995)$ le réel u tel que $\mathrm{P}\left(X \leqslant u\right) = 0,995$. La fonction Ψ est la fonction `FracNormale` ou `InvNorm` de la calculatrice.

  On a $\Psi(0,995) \approx 918$ donc $\boxed{h \approx 918 - 900 = 18}$

Exemple 13 Question 1) a)

La variable aléatoire X, qui à chaque pièce traitée associe l'épaisseur de nickel déposé, suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 25$ micromètres (μm) et d'écart type σ_1.
On sait que $P(X > 27,2) = 0,023$.

- La probabilité qu'une pièce soit conforme est $\mathrm{P}\big(22,8 \leqslant X \leqslant 27,2\big)$.

  Or $27,2 - \mu = 2,2 = \mu - 22,8$ donc par propriété de symétrie de la fonction de densité d'une loi normale on a :

$$\boxed{\mathrm{P}\big(22,8 \leqslant X \leqslant 27,2\big) = 1 - 2 \times P(X > 27,2) = 0,954}$$

Exemple 13 Question 1) b)

La variable aléatoire X, qui à chaque pièce traitée associe l'épaisseur de nickel déposé, suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 25$ micromètres (μm) et d'écart type σ_1.

X suit la loi $\mathcal{N}\left(\mu_1 \ ; \ \sigma^2\right)$ donc $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0 \ ; \ 1)$.

$$\mathrm{P}(X \geqslant 27,2) = 0,023 \iff \mathrm{P}(Z \geqslant \frac{2,2}{\sigma_1}) = 0,023$$

$$\mathrm{P}(X \geqslant 27,2) = 0,023 \iff \mathrm{P}(Z \leqslant \frac{2,2}{\sigma_1}) = 0,977$$

On inverse la loi $\mathcal{N}(0 \ ; \ 1)$ et on note $\Psi(0,977)$ le réel u tel que $\mathrm{P}(Z \leqslant u) = 0,977$. La fonction Ψ est la fonction `FracNormale` ou `InvNorm` de la calculatrice.

On a $\Psi(0,977) \approx 1,995$ donc $\boxed{\sigma_1 = \dfrac{2,2}{\Psi(0,977)} \approx 1,1}$.

Exemple 13 Question 1) c)

La variable aléatoire X, qui à chaque pièce traitée associe l'épaisseur de nickel déposé, suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 25$ micromètres (μm) et d'écart type $\sigma_1 = 1,1$.
Sachant qu'une pièce est conforme, la probabilité que l'épaisseur de nickel déposé sur celle-ci soit inférieure à 24 μm est :

$$P_{(22,8 \leqslant X \leqslant 27,2)}(X < 24) = \frac{P((X < 24) \cap (22,8 \leqslant X \leqslant 27,2))}{P(22,8 \leqslant X \leqslant 27,2)}$$

$$P_{(22,8 \leqslant X \leqslant 27,2)}(X < 24) = \frac{P((22,8 \leqslant X < 24))}{P(22,8 \leqslant X \leqslant 27,2)}$$

$$P_{(22,8 \leqslant X \leqslant 27,2)}(X < 24) \boxed{\approx 0,167}$$

Exemple 13 Question 2 (1/2))

La nouvelle variable aléatoire Y, qui à chaque pièce traitée associe l'épaisseur de nickel déposé, suit la loi normale d'espérance $\mu_2 = 25$ micromètres (μm) et d'écart type σ_2.
On sait que $\mathrm{P}(22,8 \leqslant Y \leqslant 27,2) = 0,98$.
Par propriété de symétrie par rapport à $\mu_2 = 25$ qui est le centre de $[22,8\,;\,27,2]$:

$$\mathrm{P}(Y \leqslant 27,2) = \frac{1 + \mathrm{P}(22,8 \leqslant Y \leqslant 27,2)}{2} = 0,99$$

X et Y ont la même moyenne $\mu = 25$ mais $\mathrm{P}(22,8 \leqslant Y \leqslant 27,2) > \mathrm{P}(22,8 \leqslant X \leqslant 27,2)$ donc la dispersion autour de la moyenne est plus grande pour la variable aléatoire X et donc $\boxed{\sigma_1 > \sigma_2}$.
On va calculer σ_2 pour le vérifier.

Exemple 13 Question 2 (2/2))

X suit la loi $\mathcal{N}\left(\mu_1\ ;\ \sigma^2\right)$ donc $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

$$\mathrm{P}\big(Y \leqslant 27,2\big) = 0,99 \Longleftrightarrow \mathrm{P}\big(Z \leqslant \frac{2,2}{\sigma_2}\big) = 0,99$$

On inverse la loi $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$ et on note $\Psi(0,99)$ le réel u tel que $\mathrm{P}\big(Z \leqslant u\big) = 0,99$. La fonction Ψ est la fonction `FracNormale` ou `InvNorm` de la calculatrice.

On a $\Psi(0,99) \approx 2,326$ donc $\boxed{\sigma_2 = \dfrac{2,2}{\Psi(0,999)} \approx 0,946}$.

On a bien vérifié que $\boxed{\sigma_2 < \sigma_1}$.

Exemple 14 Question 1 Partie 1

La durée de vie d'un certain type d'appareil est modélisée par une variable aléatoire X suivant une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ inconnus. Les spécifications impliquent que 80% de la production des appareils ait une durée de vie entre 120 et 200 jours et que 5% de la production ait une durée de vie inférieure à 120 jours.

1. X suit la loi $\mathcal{N}\left(\mu\ ;\ \sigma^2\right)$ donc $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}\left(0\ ;\ 1\right)$.

$$\begin{cases} \mathrm{P}(120 \leqslant X \leqslant 200) = 0,8 \\ \mathrm{P}(X \leqslant 120) = 0,05 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{P}(X \leqslant 200) = 0,85 \\ \mathrm{P}(X \leqslant 120) = 0,05 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mathrm{P}(Z \leqslant \dfrac{200-\mu}{\sigma}) = 0,85 \\ \mathrm{P}(Z \leqslant \dfrac{120-\mu}{\sigma}) = 0,05 \end{cases}$$

Exemple 14 Question 1 Partie 2

1. On inverse deux fois la loi $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$ et on note $\Psi(0,85)$ le réel u tel que $\mathrm{P}(Z \leqslant u) = 0,85$ et $\Psi(0,05)$ le réel v tel que $\mathrm{P}(Z \leqslant v) = 0,05$

La fonction Ψ est la fonction `FracNormale` ou `InvNorm` de la calculatrice.

$$\begin{cases} \mathrm{P}(120 \leqslant X \leqslant 200) = 0,8 \\ \mathrm{P}(X \leqslant 120) = 0,05 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{200-\mu}{\sigma} = \Psi(0,85) \\ \dfrac{120-\mu}{\sigma} = \Psi(0,05) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 200-\mu = \sigma \times \Psi(0,85) \\ 120-\mu = \sigma \times \Psi(0,05) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 200-\sigma \times \Psi(0,85) = \mu \\ 80 = \sigma \times (\Psi(0,85) - \Psi(0,05)) \end{cases}$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} \mu \approx 169,08 \\ \sigma \approx 29,84 \end{cases}}$$

Exemple 14 Question 2

2. Calculons la probabilité d'avoir un appareil dont la durée de vie soit comprise entre 200 jours et 230 jours :

$$\mathrm{P}(200 \leqslant X \leqslant 230) \approx \boxed{0,129}$$