

**Corrigé 1**

*exercice 1*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Dans ce qui suit,  $z$  désigne un nombre complexe.

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer sur la copie si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier.

**1. Affirmation 1 :** L'équation  $z - i = i(z + 1)$  a pour solution  $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ .

Réponse :

$$\begin{aligned} z - i &= i(z + 1) \Leftrightarrow z - iz = i + i \\ &\Leftrightarrow z(1 - i) = i + i \\ &\Leftrightarrow z\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &\Leftrightarrow z\sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{4}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &\Leftrightarrow z = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})} \\ &\Leftrightarrow z = \sqrt{2}e^{i(3\frac{\pi}{4})} \end{aligned}$$

On a  $\sqrt{2}e^{i(3\frac{\pi}{4})} \neq \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$  car il s'agit de deux formes exponentielles distinctes.

**L'affirmation 1 est donc fausse.**

**2. Affirmation 2 :** Pour tout réel  $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , le nombre complexe  $1 + e^{2ix}$  admet pour forme exponentielle  $2\cos x e^{-ix}$ .


Réponse :

Pour tout réel  $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ,

$$1 + e^{2ix} = e^{ix}(e^{-ix} + e^{ix})$$

On a utilisé la relation  $e^{ix} \times e^{-ix} = |e^{ix}| = 1$

$$\begin{aligned} 1 + e^{2ix} &= e^{ix}(\cos(-x) + i\sin(-x) + \cos(x) + i\sin(x)) \\ 1 + e^{2ix} &= e^{ix}(\cos(x) - i\sin(x) + \cos(x) + i\sin(x)) \\ 1 + e^{2ix} &= 2\cos(x)e^{ix} \end{aligned}$$

  $2\cos x e^{ix}$  est une forme exponentielle si  $2\cos x \geq 0$ .

Ceci est vrai car  $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

Néanmoins, on n'a pas  $2\cos x e^{-ix}$  mais  $2\cos(x)e^{ix}$ , ces deux expressions sont différentes, pour la valeur  $\frac{\pi}{3}$  par exemple car  $e^{-i\frac{\pi}{3}} \neq e^{i\frac{\pi}{3}}$  (à vérifier sur les formes algébriques)

**L'affirmation 2 est donc fausse.**

**3. Affirmation 3 :** Un point M d'affixe  $z$  tel que  $|z - i| = |z + 1|$  appartient à la droite d'équation  $y = -x$ .

Réponse :

Notons  $A$  le point d'affixe  $i$  et  $B$  le point d'affixe  $-1$ .

Notons  $\Gamma$  l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tel que  $|z - i| = |z + 1|$ .

$M$  appartient à  $\Gamma$  si et seulement si  $|z - z_A| = |z - z_B|$ .  $M$  appartient à  $\Gamma$  si et seulement si  $MA = MB$ .

$\Gamma$  est donc la médiatrice du segment  $[AB]$ .

$\Gamma$  médiatrice du segment  $[AB]$  est la perpendiculaire à  $[AB]$  en son milieu  $I$ .

Un vecteur normal à la droite  $\Gamma$  est  $\overrightarrow{AB}$  d'affixe  $z_B - z_A = -1 - i$  donc de coordonnées  $(-1; -1)$ .

Une équation de  $\Gamma$  est donc de la forme  $-x - y + c = 0$

Le milieu  $I$  de  $[AB]$  a pour affixe  $\frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-1 + i}{2}$  donc pour coordonnées  $(-0,5; 0,5)$ .

On en déduit que  $-(-0,5) - 0,5 + c = 0 \Leftrightarrow c = 0$ .

Une équation de  $\Gamma$  est donc  $-x - y = 0 \Leftrightarrow y = -x$ .

**L'affirmation 3 est donc vraie.**

4. On considère le nombre complexe  $z = 1 + i\sqrt{3}$ .

a. **Affirmation 4** : Le nombre complexe  $z^2$  est un réel positif.

Réponse :

$$z = 1 + i\sqrt{3} = 2 \left( \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{On en déduit que } z^2 = 2^2 e^{i\frac{2\pi}{3}} = 4 \left( -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

**L'affirmation 4 est donc fausse.**

b. **Affirmation 5** : L'argument du nombre complexe  $z^{2019}$  vaut 0 modulo  $2\pi$ .

Réponse :

$$\arg(z^{2019}) = 2019 \arg(z) = 2019 \times \frac{2\pi}{3} = 1346\pi = 2 \times 673\pi.$$

On en déduit que l'argument du nombre complexe  $z^{2019}$  vaut 0 modulo  $2\pi$ .

**L'affirmation 5 est donc vraie.**

## Corrigé 2

exercice 5, correction de l'AMEP

Soit la suite de nombres complexes  $(z_n)$  définie par 
$$\begin{cases} z_0 &= 100 \\ z_{n+1} &= \frac{i}{3} z_n \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $M_n$  le point d'affixe  $z_n$ .

1. Pour tout entier naturel  $n$ , les points  $M_n$  et  $M_{n+2}$  ont pour affixes  $z_n$  et  $z_{n+2}$ .

$$z_{n+2} = \frac{i}{3} z_{n+1} = \frac{i}{3} \left( \frac{i}{3} z_n \right) = \frac{i^2}{9} z_n = -\frac{1}{9} z_n$$

Le vecteur  $\overrightarrow{OM_{n+2}}$  a pour affixe  $z_{n+2}$  et le vecteur  $\overrightarrow{OM_n}$  a pour affixe  $z_n$ ; or  $z_{n+2} = -\frac{1}{9} z_n$  donc  $\overrightarrow{OM_{n+2}} = -\frac{1}{9} \overrightarrow{OM_n}$ . Les vecteurs  $\overrightarrow{OM_{n+2}}$  et  $\overrightarrow{OM_n}$  sont colinéaires donc les points  $O$ ,  $M_n$  et  $M_{n+2}$  sont alignés quel que soit  $n$ .

2. On rappelle qu'un disque de centre A et de rayon  $r$ , où  $r$  est un nombre réel positif, est l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $AM \leq r$ .

Le point  $M_n$  appartient au disque de centre O et de rayon 1 si et seulement si  $OM_n \leq 1$ . On sait que  $OM_n = |z_n|$ .

Soit  $(d_n)$  la suite définie pour tout  $n$  par  $d_n = |z_n|$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on a  $z_{n+1} = \frac{i}{3} z_n$  donc  $|z_{n+1}| = \left| \frac{i}{3} z_n \right| = \left| \frac{i}{3} \right| \times |z_n| = \frac{1}{3} |z_n|$ ; donc,  $d_{n+1} = \frac{1}{3} d_n$ .

De plus,  $d_0 = |z_0| = 100$ .

La suite  $(d_n)$  est définie par  $d_0 = 100$  et  $d_{n+1} = \frac{1}{3} d_n$ , pour tout entier naturel  $n$ .

Donc la suite  $(d_n)$  est une suite géométrique de premier terme  $d_0 = 100$  et de raison  $q = \frac{1}{3}$ .

- $-1 < q < 1$  donc la suite  $(d_n)$  est convergente et a pour limite 0.  
D'après la définition de la limite d'une suite, on peut déduire que l'intervalle  $[0; 1]$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, ce qui répond à la question.
- On peut également déterminer le rang  $n$  à partir duquel tous les points sont situés dans le disque (*mais ce n'était pas explicitement demandé*).

On cherche  $n$  tel que  $d_n < 1$ . La suite  $(d_n)$  est géométrique de premier terme  $d_0 = 100$  et de raison  $q = \frac{1}{3}$  donc, pour tout  $n$ ,  $d_n = d_0 \times q^n$  donc  $d_n = 100 \left( \frac{1}{3} \right)^n$ .

On résout l'inéquation :

$$\begin{aligned} d_n < 1 &\iff 100 \left( \frac{1}{3} \right)^n < 1 \iff \left( \frac{1}{3} \right)^n < 0,01 \iff \ln \left( \left( \frac{1}{3} \right)^n \right) < \ln(0,01) \iff n \times \ln \left( \frac{1}{3} \right) < \ln(0,01) \\ &\iff n > \frac{\ln(0,01)}{\ln \left( \frac{1}{3} \right)} \end{aligned}$$

Or  $\frac{\ln(0,01)}{\ln \left( \frac{1}{3} \right)} \approx 4,2$  donc les points  $M_n$  appartiennent au disque de centre O et de rayon 1 à partir de  $n = 5$ .