Exemple 2 *Antilles juin 2017*

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A(−1 ; 2 ; 0), B(1 ; 2 ; 4) et C(−1 ; 1 ; 1).

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
3. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au degré.

1)

- On détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ donc :

A, B, C alignés ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires

A, B, C alignés ssi il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC} \iff \begin{cases} 2 = k \times 0 \\ -1 = k \times 0 \\ 1 = k \times 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 = 0 \\ -1 = 0 \\ \frac{1}{4} = k \end{cases}$

Le système n'a pas de solution, donc il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$ et donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et A, B, C ne sont pas alignés.

2) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2 \times 0 + 0 \times (-1) + 4 \times 1$

$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4}$

3) D'après la propriété du cosinus :

$$\underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}_{4} = \underbrace{AB \times AC}_{\text{à calculer}} \times \underbrace{\cos(\widehat{BAC})}_{?}$$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 2^2 + 0^2 + 4^2 = 20$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 \times \cos(\widehat{BAB})$

$= AB^2 \times \cos(0) = AB^2$

donc $AB^2 = 20$

donc $\boxed{AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}}$

De même $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 0^2 + (-1)^2 + 1^2$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 2$

donc $AC^2 = 2$

donc $\boxed{AC = \sqrt{2}}$

On déduit de l'égalité $(*)$ que :

$4 = 2\sqrt{5} \times \sqrt{2} \times \cos(\widehat{BAC})$

donc $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{4}{2\sqrt{5} \times \sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{10}} = \dfrac{2\sqrt{10}}{10}$

$\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$

on en déduit que :

$\boxed{\widehat{BAC} = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right) \simeq 51^\circ}$