Exemple 1

On rappelle que dans un plan, des droites sécantes (EF) et (EH) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EH} = 0$.

1. Soit les points $A(7;2;3)$, $B(0;1;4)$ et $C(0;4;-2)$. Les droites (AC) et (AB) sont-elles perpendiculaires ?
2. Dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ soient les points $R(2;0;0)$, $S\left(1;\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{4}{\sqrt{6}}\right)$ et $T\left(1;\sqrt{3};0\right)$. Calculer les distances OR, RS, ST et TO. Les points O, R, S et T sont-ils les sommets d'un losange ?
3. *Amérique du Sud Novembre 2017*

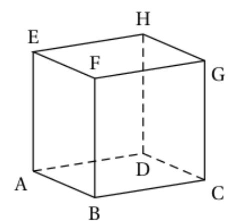
   On considère un cube ABCDEFGH.

   a. Simplifier le vecteur $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$.

   b. Sans utiliser de coordonnées, en déduire que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

   c. En choisissant un repère orthonormal du plan, démontrer que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$.

   d. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).



1) On détermine si $\vec{AC}$ et $\vec{AB}$ sont orthogonaux

$\vec{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{AB}\begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{AC} \cdot \vec{AB} = (-7)(-7) + 2 \times (-1) + (-5) \times 1$

$\vec{AC} \cdot \vec{AB} = 42$

$\vec{AC} \cdot \vec{AB} \neq 0$ donc $\vec{AC}$ et $\vec{AB}$ ne sont pas orthogonaux

donc (AC) et (AB) ne sont pas perpendiculaires.

2). $\vec{OR}\begin{pmatrix} 2-0 \\ 0-0 \\ 0-0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{OR}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{OR} \cdot \vec{OR} = 2^2 + 0^2 + 0^2 = 4$ donc $\|\vec{OR}\|^2 = 4$

donc $\boxed{OR = \sqrt{4} = 2}$

$\vec{RS}\begin{pmatrix} 1-2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} - 0 \\ \frac{4}{\sqrt{6}} - 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{RS}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{4}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{RS} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{16}{6} = 1 + 3 = 4$

donc $\boxed{RS = \sqrt{4} = 2}$

$\overrightarrow{ST} \begin{pmatrix} 1-1 \\ \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 - \frac{4}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{ST} = 0^2 + \left(\frac{\sqrt{3}^2 - 1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{-4}{\sqrt{6}}\right)^2$

$\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{ST} = 0 + \frac{2^2}{3} + \frac{16}{6} = \frac{24}{6} = 4$

donc $\boxed{ST = \sqrt{4} = 2}$

$\overrightarrow{TO} \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{TO} \cdot \overrightarrow{TO} = (-1)^2 + (-\sqrt{3})^2 = 4$

donc $\boxed{TO = \sqrt{4} = 2}$

. Les trois points $O(0;0;0)$ $R(2;0;0)$ et $T(1;\sqrt{3};0)$ sont dans le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'équation $z = 0$. Mais le point $S\left(1; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{4}{\sqrt{6}}\right)$ n'appartient pas à ce plan car sa cote $\frac{4}{\sqrt{6}}$ est non nulle.

Les points O, R, S, T ne sont donc pas coplanaires, donc même si $OR = RS = ST = TO$, ORST n'est pas un losange.

3) a) ABFE est un carré donc $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$
. BFGC est un carré donc $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG}$
On a donc $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$

On peut écrire $\boxed{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}}$

b) D'après 3) a) :

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}) \cdot \overrightarrow{BD}$$
$$= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD}.$$

. ABCD est un carré donc $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$
donc $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ *

. $\left.\begin{array}{l}(AE) \perp (AD) \\ (AE) \perp (AB)\end{array}\right\}$ donc (AE) orthogonale au plan (ABD)

. On en déduit que $(AE) \perp (BD)$
et donc que $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ **

. On peut déduire de * et ** que
$\boxed{\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 + 0 = 0}$

c) On choisit le repère orthonormal
$(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

A(0;0;0) G(1;1;1)
B(1;0;0). E(0;0;1)

$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE} = 1\times(-1) + 1\times 0 + 1\times 1 = 0$

d) On a démontré que :
d'une part $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$ donc $(AG)\perp(BD)$
d'autre part $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE} = 0$ donc $(AG)\perp(BE)$

On en déduit que (AG) est orthogonale au plan (BDE).