

QCM Promo Calcul Intégral 4

Question 1 : Q1

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]-8;4]$ dont on donne le tableau de variation ci-dessous.

Soit F une primitive de f sur l'intervalle $]-8;4]$.

Dans un repère du plan la courbe de F admet deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses aux points d'abscisses -6 et 1 .

De plus on sait que $F(-5) = 1$

x	-8	-5	2	4
$f(x)$	6	-2	3	1

L'affirmation 1 est vraie

L'affirmation 2 est vraie

L'affirmation 3 est vraie

Question 2 : Q2

Soit p la fonction continue, définie sur \mathbb{R} par $\frac{e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}}$

☒ Une primitive de f est $F(x) = \ln((e^{0,2x} + 1)^5)$

☒ Une primitive de f est $F(x) = \ln(2(e^{0,2x} + 1)^5)$

☐ Une primitive de f est $F(x) = \ln(e^{0,2x} + 1)$

☒ $\frac{1}{2} \int_8^{10} p(x) dx = 2,5 \ln\left(\frac{1+e^2}{1+e^{1,6}}\right)$

☐ Une primitive de f est $F(x) = \frac{-5}{1+e^{0,2x}}$

On commence par une petite question (QCM Promote)
L'énoncé de la question précédente est incomplet.

• Si $F(x) = \ln(e^{0,2x} + 1) = \ln(u(x))$

$$F'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{0,2 e^{0,2x}}{e^{0,2x} + 1}$$

• Si $F(x) = \ln((e^{0,2x} + 1)^5) = 5 \times \ln(e^{0,2x} + 1)$

donc $F'(x) = 5 \times \frac{0,2 e^{0,2x}}{e^{0,2x} + 1} = p(x)$

• $\frac{1}{2} \int_8^{10} p(x) dx = \frac{1}{2} \left[5 \times \ln(e^{0,2x} + 1) \right]_8^{10}$
 $= \frac{5}{2} (\ln(e^2 + 1) - \ln(e^{1,6} + 1)) = 2,5 \ln\left(\frac{e^2 + 1}{e^{1,6} + 1}\right)$

• $F(x) = \ln(2(e^{0,2x} + 1)^5) = \ln(2) + 5 \ln(e^{0,2x} + 1)$

donc $F'(x) = \underbrace{0}_{\ln(2)} + 5 \times \underbrace{\frac{0,2 e^{0,2x}}{e^{0,2x} + 1}}_{p(x)} = p(x)$

QCM Petite Calcul Intégrals

Question 1 : Q1

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, l'intégrale $\int_a^b 2f(x)dx$ est égale à

☒ $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$

☒ $-2 \int_b^a f(x)dx$

☐ $\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx$

$$\square \int_a^b 2f(x)dx = 2 \int_a^b f(x)dx$$

linéarité

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$$

$$\square -2 \int_b^a f(x)dx = 2 \times (-1) \times \int_b^a f(x)dx$$

$$= 2 \times \int_a^b f(x)dx$$

$$\square \int_a^{\overset{b}{\circ}} f(x)dx + \int_{\underset{b}{\circ}}^a f(x) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

Question 2 : Q2

La valeur moyenne de la fonction $f(x)=1/x$ sur l'intervalle $[2;3]$ est

égale à $1/6$ fois la valeur moyenne de la fonction inverse sur l'intervalle $[1/2;1/3]$

$[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}]$

égale à la valeur moyenne de la fonction inverse sur l'intervalle $[1/2;1/3]$

$[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}]$

égale à $\ln(1,5)$

positive

□ Pour tout $x \in [2;3]$, $0 \leq \frac{1}{x}$
donc par croissance de l'intégrale

$$\int_2^3 0 dx \leq \int_2^3 \frac{1}{x} dx$$

donc

$$0 \leq \int_2^3 \frac{1}{x} dx$$

La valeur moyenne de $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[a; b]$ est :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x) dx$$

sur $[2;3]$: $\frac{1}{3-2} \times \int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 f(x) dx$

• Valeur moyenne de $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}]$:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} \times \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{\frac{1}{6}} [\ln(x)]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}$$

$$= 6 \times \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{3}\right) \right)$$

$$= 6 \times \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

Or $\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \int_2^3 \frac{1}{x} dx$ est la valeur moyenne de $\frac{1}{x}$ sur $[2; 3]$

Question 3 : Q3

Le coût de fabrication d'une machine en centaines d'euro est donnée par $g(x) = 2x - 1 + e^{0,05x}$ sur l'intervalle $[0; 100]$.
La valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[0; 100]$ est

☐ égale à $9880 + 20e^5$

☐ égale à une autre valeur

☒ Le coût moyen de production d'une machine pour une production comprise entre 0 et 100 machines

☒ égale à $98,8 + 0,2e^5$

Valeur moyenne de g sur $[0; 100]$

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx = \frac{1}{100-0} \times \int_0^{100} g(x) dx$$

$$\mu = \frac{1}{100} \times \left[x^2 - x + 20x e^{0,05x} \right]_0^{100}$$

Primitive de $g(x) = 2x - 1 + e^{0,05x}$

$$G(x) = x^2 - x + \frac{1}{0,05} e^{0,05x}$$

$$G(x) = x^2 - x + 20x e^{0,05x}$$

$$\mu = \frac{1}{100} \times (G(100) - G(0))$$

$$\mu = 38,8 + 0,2e^5$$

Exemple 14

Pour tout réel x :

$$g(x) = f(x) = 1 - \cos(x)$$

$$\text{donc } g(x) - f(x) \geq 0$$

L'aire recherchée est l'aire
entre les 2 courbes sur

$$[0; x_B] \quad 12 \leq x_B \leq 13$$

$$\int_0^{x_B} g(x) - f(x) dx$$

x_A et x_B sont les abscisses
des points de contact entre
 C_g et C_f

On résout :

$$g(x) - f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 = \cos(x)$$

$$\Leftrightarrow \cos(0) = \cos(x)$$

$$\Leftrightarrow x = k2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Sur l'intervalle $[0; 13]$
les solutions sont 0 ,
 2π et $4\pi = x_B$

L'aire du domaine hachuré:

est :

$$\int_0^{4\pi} g(x) - f(x) dx = \int_0^{4\pi} 1 - \cos(x) dx$$

$$\int_0^{4\pi} g(x) - f(x) dx = [x - \sin(x)]_0^{4\pi}$$

$$= 4\pi - \sin(4\pi) - (0 - \sin 0)$$

$$= 4\pi$$

Exercice 15

1) Distance entre $t=1$ et $t=e^2$

$$\begin{aligned}\int_1^{e^2} v(t) dt &= \left[-\frac{1}{t} + \ln(t) \right]_1^{e^2} \\ &= -\frac{1}{e^2} + \ln(e^2) \\ &\quad - \left(-\frac{1}{1} + \ln(1) \right) \\ &= -e^{-2} + 3\end{aligned}$$

3) Vitesse moyenne entre $t=1$ et $t=e^2$:

$$\text{Vitesse moyenne} = \frac{\text{distance}}{\text{temps}}$$

$$\text{Vitesse moyenne} = \frac{1}{e^2 - 1} \times \int_1^{e^2} v(t) dt = \frac{3 - e^{-2}}{e^2 - 1}$$