Exemples du cours du chapitre calcul intégral 2019/2020

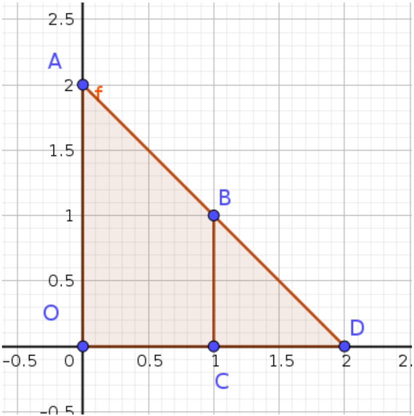
Frédéric Junier

Lycée du Parc
1 Boulevard Anatole France
69006 Lyon

25 mars 2020

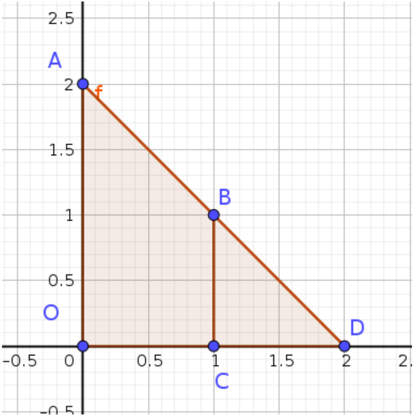
Table des matières

Soit f la fonction définie sur $[0\,;2]$ par $f(x) = 2 - x$.
La surface dont l'aire est égale à intégrale $I = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ est le triangle BCD rectangle isocèle en C dont l'aire est $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$.



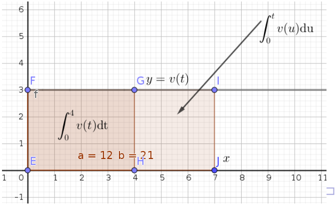
Exemple 1 Partie 2

Soit f la fonction définie sur $[0\,;2]$ par $f(x) = 2 - x$.
La surface dont l'aire est égale à intégrale $I = \int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x$ est le trapèze $OABC$ rectangle isocèle en O dont l'aire est
$\frac{1}{2} \times (OA + BC) \times OC = \frac{3}{2}$.



Soit $M(t)$ un point mobile sur un axe tel que à chaque instant $t \in [0; +\infty[$ (en secondes) on connaît sa vitesse instantanée $v(t)$ en mètres par seconde.
A l'instant $t = 0$, le point mobile est à l'origine de l'axe et pour tout $t \in [0; +\infty[$, on a $v(t) = 3$ m.s^{-1}.

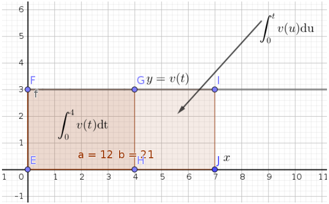
- **Question 1** La fonction v est constante donc dérivable donc continue sur $[0; +\infty[$.
  $\int_0^4 v(t)\mathrm{d}t$ est l'aire du rectangle $EFGH$ c'est-à-dire $4 \times 3 = 12$.
  On peut l'interpréter comme la distance parcourue par le mobile en 3 secondes. Notons que la dimension de l'intégrale est celle de $v(t)\mathrm{d}t$: vitesse $\times$ temps $=$ distance.



- **Question 2** $\int_2^5 v(t)\mathrm{d}t$ est égale à $(5-2)\times 3 = 9$. C'est la distance parcourue par le mobile entre les instants $t=2$ et $t=5$ à une vitesse de 3 m.s^{-1}. $\frac{1}{5-2}\int_2^5 v(t)\mathrm{d}t$ est égale à $\frac{\text{distance}}{\text{temps}} = \frac{9}{3}$, c'est la vitesse moyenne du mobile entre les instants $t=2$ et $t=5$. Comme sa vitesse est constante, c'est sa vitesse instantanée à tout instant. On a un exemple, d'utilisation de l'intégrale dans un calcul de valeur moyenne. Notons que $\frac{1}{5-2}\int_2^5 v(t)\mathrm{d}t$ a la même dimension que $v(t)$, c'est une vitesse.

Exemple 2 Question 3

- **Question 3** $g(t) = \int_0^t v(u)\,\mathrm{d}u$ est l'aire du rectangle *EFIJ* c'est-à-dire $t \times 3 = 3t$.
  On peut l'interpréter comme la distance parcourue par le mobile en $t3$ secondes.
  g est une fonction linéaire donc elle est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $g'(t) = 3$. On remarque que $g'(t) = v(t)$. On peut l'expliquer en prenant la limite du taux de variation $\frac{g(t+h)-g(t)}{h} = \frac{3(t+h)-3t}{h} = 3$ quand h tend vers 0.
  $g(t) = \int_0^t v(u)\,\mathrm{d}u$ est une primitive de v.



Exemple 3

Voir Notebook et Corrigé (suivez les liens).

Exemple 4 Question 1

Soit f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

- f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $f'(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times(-t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$. Pour tout réel $t>0$, on a $f'(t)>0$ et $f'(0)=0$.
  On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
  Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x}=0$, on a par composition $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}=0$.

Exemple 4 Questions 2 et 3

f est dérivable donc continue sur $[0\,;+\infty[$.

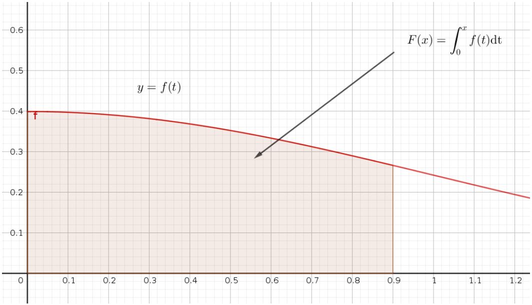
De plus, pour tout $t \geqslant 0$, on a $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ donc $f(t) \geqslant 0$.

On peut appliquer le théorème fondamental, qui nous permet d'affirmer que $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et que pour tout réel $x \geqslant 0$, $F'(x) = f(x)$.

Notez qu'on utilise plutôt x pour F et t pour $F' = f$ mais qu'on pourrait écrire : pour tout réel $t \geqslant 0$, $F'(t) = f(t)$.

Puisque f est strictement positive sur $]0\,;+\infty[$ et ne s'annule qu'en 0, on en déduit que F est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. Page suivante un graphique qui permet de comprendre pourquoi $F(x)$ aire sous la courbe de f entre 0 et x est croissante.

Exemple 4 Questions 2 et 3



Exemple 5 Question 1

Soient les fonctions f et F continues sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ définies par :

$$F(x) = \tan x - x \quad \text{et} \quad f(x) = \tan^2 x$$

F est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$F'(x) = \frac{\cos(x) \times \cos(x) - \sin(x) \times (-\sin(x))}{\cos^2(x)} - 1 = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} - 1$$

$$F'x() = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \tan^2 x$$

F est donc une primitive de f.

Exemple 5 Question 2 a)

Soient g et G les fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1+\ln x}{x} \quad \text{et} \quad G(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \ln x$$

G est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et pour tout réel $x > 0$, on a :

$$G'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} \times 2\ln(x) + \frac{1}{x} = \frac{1+\ln x}{x}$$

$$G'(x) = g(x)$$

G et donc une primitive de g.
Notons que M définie par $M(x) = G(x) + 1$, a même dérivée g que G donc c'est une aussi une primitive de g. On peut remplacer 1 par une constante k, toute fonction de la forme $G(x) + k$ est une primitive de g.

Exemple 5 Question 2 b)

$G(\mathrm{e}) = \frac{1}{2}(\ln \mathrm{e})^2 + \ln \mathrm{e} = \frac{3}{2}$.
La fonction H définie par $H(x) = G(x) - G(\mathrm{e}) = G(x) - \frac{3}{2}$, s'annule en e et a pour dérivée $H' = G' = g$ donc c'est une primitive de g qui s'annule en e.
Supposons qu'il existe une autre primitive N de g qui s'annule en e, on a $(H-N)' = H' - N' = g - g = 0$ donc $H - N$ est constante. De plus , $(H-N)(\mathrm{e}) = 0$ donc $H - N = 0$ donc $H = N$.
H est donc l'unique primitive de g qui s'annule en e.

Exemple 6 Question 1) Partie 1

Chaque fonction f considérée est continue donc admet des primitives sur son intervalle de définition.

a) $f(x) = 4$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = 4x + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

b) $f(x) = 0$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = 2\sqrt{x} + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

d) $f(x) = 3 + x + x^4$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = 3x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x^5 + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

Exemple 6 Question 1) Partie 2

Chaque fonction f considérée est continue donc admet des primitives sur son intervalle de définition.

a. $f(x) = \sin(2x)$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

b. $f(x) = \cos(3x)$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x) + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

c. $f(x) = \frac{1}{x^4}$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{-4+1}x^{-4+1} + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

Exemple 6 Question 1) Partie 3

Chaque fonction f considérée est continue donc admet des primitives sur son intervalle de définition.

a. $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{-2}\mathrm{e}^{-2x} + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

b. $f(x) = \frac{-1}{x}$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = -\ln(|x|) + k = -\ln(-x) + k \text{ avec } -x > 0 \text{ et } k \text{ constante réelle}$$

Exemple 6 Question 2)

Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F : x \mapsto x\ln x - x + 1$
Pour tout réel $x > 0$, on a,en appliquant la formule de dérivation d'un produit pour $x\ln(x)$:

$$F'(x) = x \times \frac{1}{x} + 1 \times \ln(x) - 1 = \ln(x)$$

F est donc une primitive de la fonction ln. La primitive G de ln qui s'annule en $\sqrt{\mathrm{e}}$. est donc de la forme $G(x) = F(x) + k$. Il suffit de déterminer k en évaluant G en $\sqrt{\mathrm{e}}$:

$$G(\sqrt{\mathrm{e}}) = F(\sqrt{\mathrm{e}}) + k = \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}} - \sqrt{\mathrm{e}} + 1 + k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}} - 1$$

La primitive de ln qui s'annule en $\sqrt{\mathrm{e}}$ est donc
$G(x) = x\ln x - x + \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}$.

Exemple 6 Question 2)

Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F : x \mapsto x\ln x - x + 1$
Pour tout réel $x > 0$, on a,en appliquant la formule de dérivation d'un produit pour $x\ln(x)$:

$$F'(x) = x \times \frac{1}{x} + 1 \times \ln(x) - 1 = \ln(x)$$

F est donc une primitive de la fonction ln. La primitive G de ln qui s'annule en $\sqrt{e}$. est donc de la forme $G(x) = F(x) + k$. Il suffit de déterminer k en évaluant G en $\sqrt{e}$:

$$G(\sqrt{e}) = F(\sqrt{e}) + k = \frac{1}{2}\sqrt{e} - \sqrt{e} + 1 + k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}\sqrt{e} - 1$$

La primitive de ln qui s'annule en $\sqrt{e}$ est donc
$G(x) = x\ln x - x + \frac{1}{2}\sqrt{e}$.

Exemple 7 Partie 1

1. $f(x) = x^2 - 2x - 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + e^x$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - x + \frac{1}{x} - \ln(|x|) + e^x + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

2. $f(x) = \cos(4x-1) - 2\sin(2x)$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{4}\sin(4x-1) + 2 \times \frac{1}{2}\cos(2x) + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

3. $f(x) = \frac{e^{731x}}{(e^{731x}+1)^2}$ est de la forme $\frac{1}{731}\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = e^{731x} + 1$, donc admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = -\frac{1}{u(x)} + k = -\frac{1}{731}\frac{1}{e^{731x}+1} + k = \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

1. $f(x) = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$ est de la forme $-\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = e^{-x} + 1$, donc admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = -\ln(\left|u(x)\right|) + k = -\ln(\left|e^{-x}+1\right|) + k = -\ln(e^{-x}+1) + k \ , \ k \in \mathbb{R}$$

2. $f(x) = \frac{x}{e^{x^2}} = xe^{-x^2}$ est de la forme $-\frac{1}{2}u'e^{u}$ avec $u(x) = -x^2$, donc admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = -\frac{1}{2}e^{u(x)} + k = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + k \ , \ k \in \mathbb{R}$$

Exemple 7 Partie 3

1. $f(x) = \frac{1}{x\ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \ln(x)$, donc admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \ln(\left| u(x) \right|) + k = \ln(\left| \ln(x) \right|) + k \ , \ k \in \mathbb{R}$$

Sur $]0;1[$, on a $\ln(x) < 0$ donc $F(x) = \ln(-\ln(x)) + k$.
Sur $]1;+\infty[$, on a $\ln(x) > 0$ donc $F(x) = \ln(\ln(x)) + k$.

2. $f(x) = \cos(x)\mathrm{e}^{\sin(x)}$ est de la forme $u'\mathrm{e}^{u}$ avec $u(x) = \sin(x)$, donc admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \mathrm{e}^{u(x)} + k = \mathrm{e}^{\sin(x)} + k \ , \ k \in \mathbb{R}$$

3. $f(x) = \frac{1}{x} \times (\ln x)^2$ est de la forme $u'u^2$ avec $u(x) = \ln(x)$, donc admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{3}u^3(x) + k = \frac{1}{3}(\ln(x))^3 + k \ , \ k \in \mathbb{R}$$

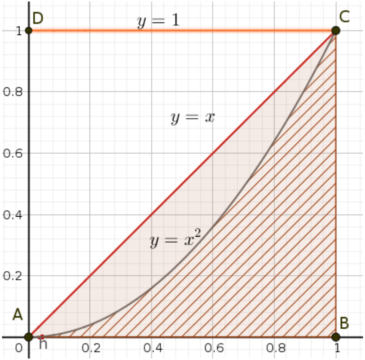
Exemple 8 Partie 1

On considère les courbes d'équations $y = 1$, $y = x$ et $y = x^2$ sur l'intervalle $[0\,;1]$.
Pour tout réel $x \in [0\,;1]$, on a :

$$0 \leqslant x \leqslant 1$$

on multiplie par $x \geqslant 0$

$$0 \leqslant x^2 \leqslant x \leqslant 1$$


D
C
$y = 1$
$y = x$
$y = x^2$
A
B
h
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Exemple 8 Partie 2

Puisque pour tout réel $x \in [0;1]$, on a $0 \leqslant x^2 \leqslant x \leqslant 1$, on en déduit que : la courbe d'équation $y = x^2$ est donc en dessous de la droite d'équation $y = x$, elle même en-dessous de la droite d'équation $y = 1$.

Par définition de l'intégrale d'une fonction continue positive comme aire du domaine « sous sa courbe » (délimité par sa courbe, l'axe des abscisses et les deux droites parallèles à l'axe des ordonnées passant par les bornes de l'intervalle), on en déduit que :

$$I = \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x \leqslant K = \int_0^1 x \, \mathrm{d}x \leqslant J = \int_0^1 1 \, \mathrm{d}x$$

De plus, par additivité des aires, l'intégrale $L = \int_0^1 1 - x^2 \, \mathrm{d}x$ représente l'aire du domaine entre la droite d'équation $y = 1$ et la courbe d'équation $y = x^2$, de même $M = \int_0^1 x - x^2 \, \mathrm{d}x$ représente l'aire du domaine entre la droite d'équation $y = x$ et la courbe d'équation $y = x^2$.
On peut noter que pour tout réel $x \in [0\,;1]$, on a $0 \leqslant x^2 \leqslant x \leqslant 1$, donc $0 \leqslant x - x^2 \leqslant 1 - x^2$ et donc $M \leqslant L$.

Calculer les intégrales suivantes :

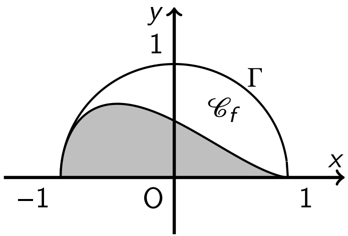
1. $\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\ dx = \left[2\sqrt{e^x+1}\right]_{-1}^{1} = 2\sqrt{e^1+1} - 2\sqrt{e^{-1}+1}$;
2. $\int_2^4 \frac{1}{(2x-1)^4}\ dx = \left[\frac{1}{2} \times \frac{1}{-4+1}(2x-1)^{-4+1}\right]_2^4$
   $\int_2^4 \frac{1}{(2x-1)^4}\ dx = \frac{1}{2} \times \frac{1}{-4+1}(7)^{-4+1} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{-4+1}(3)^{-4+1}$
3. $\int_0^{2\pi} \cos(\theta)\ \ d\theta = [\sin(\theta)]_0^{2\pi} = 0 - 0 = 0$;
4. $\int_0^{\pi} \cos(2\theta)\ \ d\theta = \left[\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\pi} = 0 - 0 = 0$;
5. $\int_{-4}^{-2} (3x-1)^6 dx = \left[\frac{1}{3} \times \frac{1}{7}(3x-1)^7\right]_{-4}^{-2} = \frac{1}{21}\left(-7^7 + 13^7\right)$;
6. $\int_0^x \sin^2(t)\ dt$. Il faut linéariser $\sin^2(t)$ avec les formules de duplication du sinus (voir chapitre sur les complexes Partie 2) : $\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$ donc :
   $\int_0^x \sin^2(t)\ dt = \int_0^x \frac{1-\cos(2t)}{2}\ dt = \left[\frac{t - 0{,}5\sin(2t)}{2}\right]_0^x = \frac{x - 0{,}5\sin(2x)}{2} - 0$

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_e^{e^3} \frac{1}{x\ln x}\ \mathrm{d}x = \left[\ln\left(\left|\ln(x)\right|\right)\right]_e^{e^3} = \ln(\ln(3)) - \ln(1) = \ln(\ln(3))$
2. $\int_0^x \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\ \mathrm{d}t$ Ici il faut transformer l'expression pour faire apparaître une forme $\frac{u'}{u}$ (ici $-\frac{u'}{u}$). L'astuce classique avec l'exponentielle : $\mathrm{e}^t \times \mathrm{e}^{-t} = 1$.
   $\int_0^x \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\ \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}\times 1}{\mathrm{e}^{-t}(1+\mathrm{e}^t)}\ \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}\times 1}{\mathrm{e}^{-t}+1}\ \mathrm{d}t$
   Puis : $\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^{-t}+1}\ \mathrm{d}t = \left[-\ln\left(\left|\mathrm{e}^{-t}+1\right|\right)\right]_0^x = -\ln(\mathrm{e}^{-x}+1) + \ln(2)$
3. $\int_2^e \frac{1}{x(\ln(x))^2}\ \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]_2^e = -\frac{1}{\ln(e)} + \frac{1}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)} - 1$ Ici on a écrit $\frac{1}{x(\ln(x))^2} = \frac{u'(x)}{u^2(x)}$ avec $u(x) = \ln(x)$ pour déterminer une primitive qui est $-\frac{1}{u(x)}$.

Exemple 10 Partie 1

Le demi-cercle Γ de rayon 1, représenté sur la figure ci-dessous, a pour équation $y = \sqrt{1-x^2}$.
La partie grisée est comprise entre l'axe des abscisses d'équation $y = 0$ et la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $[-1\,;1]$ par $f(x) = \frac{1}{2}(1-x)\sqrt{1-x^2}$.



- $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ est l'aire du demi-disque de rayon 1 donc c'est $\frac{1}{2}\times\pi\times 1^2=\frac{\pi}{2}$.
- Pour tout réel $x\in[-1;1]$, si on note $g(x)=x\sqrt{1-x^2}$, on a $g(-x)=-g(x)$ donc par symétrie centrale de centre l'origine du repère $\int_{-1}^{0}g(x)\mathrm{d}x$ est l'opposé de l'aire du domaine sous la courbe de g sur l'intervalle $[0;1]$.

  On a donc $\int_{-1}^{0}g(x)\mathrm{d}x=-\int_{0}^{1}g(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\displaystyle\int_{-1}^{0}x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=-\int_{0}^{1}x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(1-x)\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-x)\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$
par linéarité.
De nouveau par linéarité, on a
$\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\right) =$
$\displaystyle\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\right).$
En appliquant la relation de Chasles, on a
$\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$
D'après la propriété d'antisymétrie de la question 2), il vient
$-\int_{0}^{1} x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = 0.$
Finalement, on a $\boxed{\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}}$.

Exemple 11

Soient f et g deux fonctions continues sur $[1;5]$, on donne :

$$I = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = -3 \qquad J = \int_5^2 f(x)\mathrm{d}x = 2 \qquad K = \int_1^5 g(x)\mathrm{d}x = 12$$

Calculer $L = \int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$, $M = \int_1^5 (f(x)+g(x))\mathrm{d}x$ puis $N = \int_1^5 (2f(x)-3g(x))\mathrm{d}x$.

- On applique la relation de Chasles :
  $L = \int_1^5 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^5 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x - \int_5^2 f(x)\mathrm{d}x = I - J = -5$
- On applique la propriété de linéarité :
  $M = \int_1^5 (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_1^5 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^5 g(x)\mathrm{d}x = I + K = -5 + 12 = 7$
- On applique la propriété de linéarité :
  $N = \int_1^5 (2f(x)-3g(x))\mathrm{d}x = 2\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x - 3\int_1^5 g(x)\mathrm{d}x = 2\times(-5) - 3\times(12) = -46$

Exemple 12 Question 1)

Déterminer le signe des intégrales suivantes :

- $I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x \, \mathrm{d}x$

  Pour tout réel $x \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$, on a :

Exemple 12 Question 1)

Déterminer le signe des intégrales suivantes :

- $I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x \, \mathrm{d}x$
  Pour tout réel $x \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$, on a :
  $$0 \geqslant \ln(x)$$
  donc par croissance de l'intégrale on a :
  $$0 \geqslant \int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x \, \mathrm{d}x$$
- $\int_{1}^{0} x^2 \, \mathrm{d}x$
- $\int_{1}^{\frac{1}{e}} \ln x \, \mathrm{d}x$

Exemple 12 Question 1)

Déterminer le signe des intégrales suivantes :

- $I = \int_1^0 x^2 \, \mathrm{d}x$
  Pour tout réel $x \in [0\,;1]$, on a :

Exemple 12 Question 1)

Déterminer le signe des intégrales suivantes :

- $I = \int_1^0 x^2 \, \mathrm{d}x$
  Pour tout réel $x \in [0;1]$, on a :

$$0 \leqslant x^2$$

donc par croissance de l'intégrale on a :

$$0 \leqslant \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$$

donc par linéarité :

$$0 \geqslant -\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$$

$$0 \geqslant \int_1^0 x^2 \, \mathrm{d}x$$

Exemple 12 Question 1)

Déterminer le signe des intégrales suivantes :

- $I = \int_1^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \ln x \, \mathrm{d}x$
  Pour tout réel $x \in \left[\frac{1}{\mathrm{e}}\,;1\right]$, on a :

Exemple 12 Question 1)

Déterminer le signe des intégrales suivantes :

- $I = \int_1^{\frac{1}{e}} \ln x \, dx$
  Pour tout réel $x \in \left[\frac{1}{e} ; 1\right]$, on a :
  $$0 \geqslant \ln x$$
  donc par croissance de l'intégrale on a :
  $$0 \geqslant \int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x \, dx$$
  donc par linéarité :
  $$0 \leqslant -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x \, dx$$
  $$0 \leqslant \int_{1}^{\frac{1}{e}} \ln x \, dx$$

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par
$u_n = \int_0^1 \ln\left(1 + x^n\right)\, \mathrm{d}x$
Pour étudier le sens de variation de la suite (u_n), deux méthodes sont possibles :

Exemple 12 Question 2)

$\boxed{\textbf{Méthode 1 :On étudie le signe de } u_{n+1} - u_n}$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

Exemple 12 Question 2)

Méthode 1 :On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \ln\left(1 + x^{n+1}\right) \, \mathrm{d}x - \int_0^1 \ln\left(1 + x^n\right) \, \mathrm{d}x$$

donc par linéarité :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \ln\left(1 + x^{n+1}\right) - \ln\left(1 + x^n\right) \, \mathrm{d}x$$

Or pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $x \in [0;1]$, on a $0 \leqslant x \leqslant 1$ donc en multipliant tous les membres par $x^n \geqslant 0$, $0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n$ puis par croissance de ln, $\ln(1) \leqslant \ln(1 + x^{n+1}) \leqslant \ln(1 + x^n)$ donc $\ln(1 + x^{n+1}) - \ln(1 + x^n) \leqslant 0$ et par croissance de l'intégrale :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \ln\left(1 + x^{n+1}\right) - \ln\left(1 + x^n\right) \, \mathrm{d}x \leqslant 0$$

On en déduit que la suite (u_n) est décroissante.

Méthode 2 : $u_{n+1} \leqslant u_n$ par croissance de l'intégrale

Le principe est de comparer les expressions sous le signe d'intégration et d'en déduire les inégalités sur les intégrales par croissance de l'intégrale. C'est similaire à la méthode précédente mais avec une rédaction plus légère. Pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout réel $x \in [0;1]$, on a :

Méthode 2 : $u_{n+1} \leqslant u_n$ par croissance de l'intégrale

Le principe est de comparer les expressions sous le signe d'intégration et d'en déduire les inégalités sur les intégrales par croissance de l'intégrale. C'est similaire à la méthode précédente mais avec une rédaction plus légère. Pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout réel $x \in [0;1]$, on a :

$$x \leqslant 1$$

on multiplie les deux membres par $x^n \geqslant 0$ puis on ajoute 1 et on compose par le ln qui est croissant, on en déduit que :

$$\ln\left(1+x^{n+1}\right) \leqslant \ln\left(1+x^n\right)$$

Par croissance de l'intégrale, il vient :

$$\int_0^1 \ln\left(1+x^{n+1}\right)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\,\mathrm{d}x$$

et donc $u_{n+1} \leqslant u_n$ et la suite (u_n) est décroissante.

Exemple 12 Question 2)

Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \ln 2$ (début).
On utilise la croissance de l'intégrale. Pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout réel $x \in [0\,;1]$, on a $0 \leqslant 1 + x^n \leqslant 2$ donc par croissance de la fonction ln :

Exemple 12 Question 2)

Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \ln 2$ (début).
On utilise la croissance de l'intégrale. Pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout réel $x \in [0\,;1]$, on a $0 \leqslant 1 + x^n \leqslant 2$ donc par croissance de la fonction ln :

$$0 \leqslant \ln\left(1+x^n\right) \leqslant \ln(2)$$

par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 0 \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \ln\left(1+x^n\right) \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \ln(2) \,\mathrm{d}x$$

par linéarité :

$$0 \times \int_0^1 1 \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \ln\left(1+x^n\right) \,\mathrm{d}x \leqslant \ln(2) \times \int_0^1 1 \,\mathrm{d}x$$

Exemple 12 Question 2)

Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \ln 2$ (fin) :

Exemple 12 Question 2)

Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \ln 2$ (fin) :

par linéarité :

$$0 \times \int_0^1 1 \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \ln\left(1+x^n\right) \, \mathrm{d}x \leqslant \ln(2) \times \int_0^1 1 \, \mathrm{d}x$$

$$0 \leqslant \int_0^1 \ln\left(1+x^n\right) \, \mathrm{d}x \leqslant \ln(2)$$

$$0 \leqslant u_n \leqslant \ln(2)$$

La suite (u_n) est donc minorée par 0, comme elle est décroissante (question précédente), elle converge d'après le théorème de convergence monotone.

Exemple 12 Question 3)

Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout réel $x \in [0\,;1]$ on a : $0 \leqslant \ln(1+x^n) \leqslant x^n$. En déduire la limite de la suite (u_n).

On utilise encore la croissance de l'intégrale.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout réel $x \in [0\,;1]$:

on a $\ln(1+x) \leqslant x$ d'après une propriété de la fonction ln (courbe de ln en-dessous de toutes ses tangentes et la droite d'équation $y = x+1$ est sa tangente au point d'abscisse 0). On peut remplacer x par x^n : $0 \leqslant \ln(1+x^n) \leqslant x^n$. Par croissance de l'intégrale, on a :

Exemple 12 Question 3)

Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout réel $x \in [0;1]$ on a : $0 \leqslant \ln(1+x^n) \leqslant x^n$. En déduire la limite de la suite (u_n).
On utilise encore la croissance de l'intégrale.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout réel $x \in [0;1]$:
on a $\ln(1+x) \leqslant x$ d'après une propriété de la fonction ln (courbe de ln en-dessous de toutes ses tangentes et la droite d'équation $y = x+1$ est sa tangente au point d'abscisse 0). On peut remplacer x par x^n : $0 \leqslant \ln(1+x^n) \leqslant x^n$. Par croissance de l'intégrale, on a :

$$0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\ \mathrm{d}x$$

$$0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\ \mathrm{d}x \leqslant \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Exemple 12 Question 3)

Exemple 12 Question 3)

$$0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\ \mathrm{d}x$$
$$0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\ \mathrm{d}x \leqslant \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$
$$0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}$$
$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exemple 13 Partie 1

Soit f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

- Démontrons que pour tout $t\in[2\,;+\infty[$ on a $0\leqslant f(t)\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t}$.
  Pour tout $t\in[2\,;+\infty[$ on a :

Soit f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

- Démontrons que pour tout $t\in[2\,;+\infty[$ on a $0\leqslant f(t)\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t}$.
  Pour tout $t\in[2\,;+\infty[$ on a :

$$2\leqslant t$$
$$2t\leqslant t^2$$
$$-t\geqslant-\frac{t^2}{2}$$

par croissance de la fonction exponentielle :

$$\mathrm{e}^{-t}\geqslant\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

Exemple 13 Partie 2

Soit f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

Exemple 13 Partie 2

Soit f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

- Pour tout entier $n \geqslant 2$ on a :

Soit f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

- Pour tout entier $n\geqslant 2$ on a :

$$0\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t}$$

donc par croissance de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
0\leqslant\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t &\leqslant\int_2^n\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\\
0\leqslant\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t &\leqslant\left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t}\right]_2^n\\
0\leqslant\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t &\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-2}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-n}\\
0\leqslant\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t &\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-2}
\end{aligned}$$

Exemple 13 Partie 3

Démontrons que la suite $(u_n) = \left(\int_2^n f(t)\ \mathrm{d}t\right)_{n \geqslant 2}$ est croissante.
Pour tout entier $n \geqslant 2$:

Démontrons que la suite $(u_n) = \left(\int_2^n f(t)\ \mathrm{d}t\right)_{n \geqslant 2}$ est croissante.
Pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\int_2^{n+1} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_2^n f(t)\ \mathrm{d}t = \int_2^{n+1} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_n^2 f(t)\ \mathrm{d}t$$
$$\int_2^{n+1} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_2^n f(t)\ \mathrm{d}t = \int_n^2 f(t)\ \mathrm{d}t + \int_2^{n+1} f(t)\ \mathrm{d}t$$
$$\int_2^{n+1} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_2^n f(t)\ \mathrm{d}t = \int_n^{n+1} f(t)\ \mathrm{d}t$$

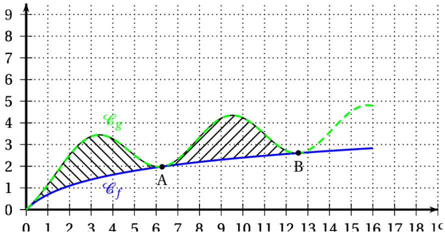
Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $0 \leqslant f(t)$ sur $[n; n+1]$, donc par croissance de l'intégrale : $0 \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\ \mathrm{d}t$
Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et donc la suite (u_n) est croissante. Comme elle est majorée par $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-2}$, elle converge d'après le théorème de convergence monotone.

Exemple 14

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;\,16]$ par

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x).$$

Dans un repère du plan $\left(O,\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$, on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g. Ces courbes sont données ci-dessous.



Exemple 14

Pour tout $x \in [0\ ;\ 16]$, on a $g(x) - f(x) = 1 - \cos(x)$.
Or $1 - \cos(x) \geqslant 0$, donc $g(x) - f(x) \geqslant 0$.
De plus $g(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = \cos(x) \Leftrightarrow x = k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Sur l'intervalle $[0\ ;\ 16]$, on a donc $g(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2\pi \\ x = 4\pi \end{cases}$.

Le domaine hachuré sur le graphique est l'aire entre les courbes de f et de g sur $[0\ ;\ 16]$.
Sachant que $g \geqslant f$, cette aire est égale à l'intégrale :

Exemple 14

Pour tout $x \in [0\ ;\ 16]$, on a $g(x) - f(x) = 1 - \cos(x)$.
Or $1 - \cos(x) \geqslant 0$, donc $g(x) - f(x) \geqslant 0$.
De plus $g(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = \cos(x) \Leftrightarrow x = k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Sur l'intervalle $[0\ ;\ 16]$, on a donc $g(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2\pi \\ x = 4\pi \end{cases}$.

Le domaine hachuré sur le graphique est l'aire entre les courbes de f et de g sur $[0\ ;\ 16]$.
Sachant que $g \geqslant f$, cette aire est égale à l'intégrale :

$$\int_0^{4\pi} g(x) - f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{4\pi} 1 - \cos(x)\ \mathrm{d}x$$

$$\int_0^{4\pi} g(x) - f(x)\ \mathrm{d}x = [x + \sin(x)]_0^{4\pi} = 4\pi$$

Exemple 15 Partie 1

Pour $t > 0$ la vitesse d'un mobile est $v(t) = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}$ (en $\mathrm{m.s}^{-1}$).

1. La distance parcourue entre les instants $t = 1$ et $t = \mathrm{e}^2$ (en s) est égale à :

$$\int_1^{\mathrm{e}^2} v(t)\ \mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$$

$$\int_1^{\mathrm{e}^2} v(t)\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t} + \ln(t)\right]_1^{\mathrm{e}^2}$$

$$\int_1^{\mathrm{e}^2} v(t)\ \mathrm{d}t = 2 - \mathrm{e}^{-2} + 1 \text{mètres}$$

2. La vitesse moyenne du mobile entre les instants $t = 1$ et $t = \mathrm{e}^2$ est est égale à :
$\int_1^{\mathrm{e}^2} v(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{e}^2 - 1} \int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = \frac{3 - \mathrm{e}^{-2}}{\mathrm{e}^2 - 1}$mètres par seconde

Exemple 16

1. Valeur moyenne de la fonction g définie sur $[-1\,;1]$ par $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_{1}^{2} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2}\right)$$

2. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. On suppose que pour tout $x \in [a\,;b]$ on a : $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Par croissance de l'intégrale :

$$m\int_{a}^{b} 1\ \mathrm{d}x \leqslant \int_{a}^{b} f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant M\int_{a}^{b} 1\ \mathrm{d}x$$

$$m(b-a) \leqslant \int_{a}^{b} f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant M$$

Exemple 16 Partie 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = [-1\,;1]$ par $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x} + 1$

1. Pour tout réel x, on a $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}(x+1) = -x\mathrm{e}^{-x}$.
   $f'(x)$ est donc du signe de $-x$ sur $[-1\,;1]$ donc positive sur $[-1\,;0]$ puis négative sur $[0\,;1]$, donc f est croissante sur $[-1\,;0]$ puis décroissante sur $[0\,;1]$.
   De plus, $f(-1) = 1$ et $f(1) = 2\mathrm{e}^{-1} + 1$, donc le minimum de f sur $[0\,;1]$ est $f(-1)$ et le maximum est $f(0) = 2$.
   D'après la propriété démontrée à la question précédente, la valeur moyenne de f sur $[-1\,;1]$ est encadrée par $f(-1)$ et $f(0)$:
   $$f(-1) \leqslant \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(0)$$