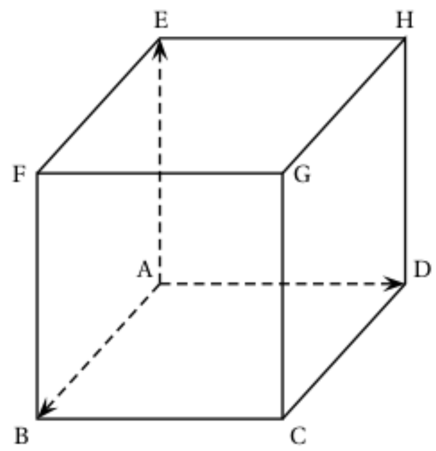
Exemple 10 *d'après Pondichéry avril 2017*

On considère le cube ABCDEFGH ci-dessous.
L'espace est rapporté au repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Déterminer les systèmes d'équations des trois axes (AB), (AD) et (AE) du repère.

2. On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z-1=0$.
   Reproduire la figure ci-dessous et construire la section du cube par le plan $\mathscr{P}$.
   La construction devra être justifiée par des calculs ou des arguments géométriques.



1)
La droite (AB) est l'intersection du plan (ABD) d'équation $z=0$ et du plan (ABE) d'équation $y=0$, donc (AB) admet pour système d'équations cartésiennes :

$$\boxed{(AB)\ \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}}$$

(AD) est l'intersection du plan (ABD) d'équation $z=0$ et du plan (AED) d'équation $x=0$ donc (AD) a pour système d'équations cartésiennes:

$$\boxed{(AD)\begin{cases} z=0 \\ x=0 \end{cases}}$$

• (AE) est l'intersection du plan (AED) d'équation $x=0$ et du plan (AEB) d'équation $y=0$ donc (AE) admet pour système d'équations cartésiennes:

$$\boxed{(AE)\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}}$$

2) Le plan $\mathcal{J}$ d'équation $x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z-1=0$ a pour vecteur normal

$$\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} \qquad \vec{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{AD}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{AE}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}\cdot\vec{AB}\neq 0 \qquad \vec{n}\cdot\vec{AD}\neq 0 \qquad \vec{n}\cdot\vec{AE}\neq 0$$

Le plan $\mathcal{J}$ est donc sécant avec les trois axes du repère.

- Soit le point d'intersection de $\mathcal{S}$ avec l'axe (AB) ses coordonnées sont solutions du système :

$$\begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z-1=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ x=1 \end{cases} \quad \boxed{B(1;0;0)}$$

- Soit M l'intersection de $\mathcal{S}$ avec l'axe (AD) ; ses coordonnées sont solutions du système :

$$\begin{cases} x=0 \\ z=0 \\ x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z-1=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=0 \\ y=4 \end{cases}$$

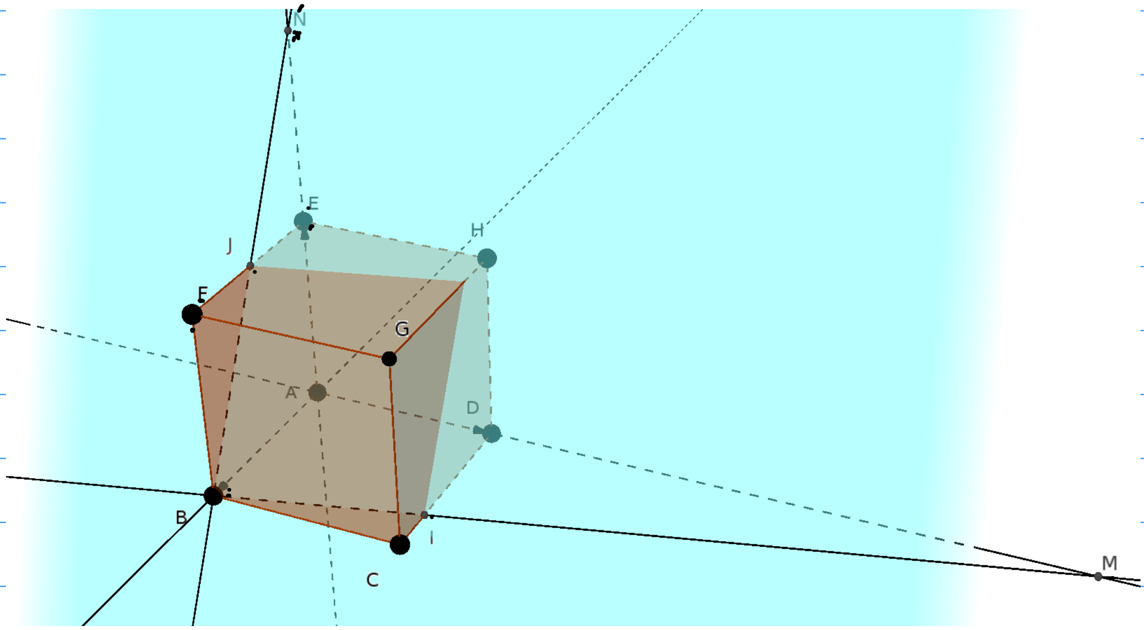
$$\boxed{M(0;4;0)}$$

- Soit P l'intersection de $\mathcal{S}$ avec l'axe (AE), ses coordonnées sont solutions du système :

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z-1=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases}$$

$$\boxed{P(0;0;2)}$$

Le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z-1=0$ est le plan (MNB)



☞ Ensuite on réalise la construction géométrique de la section à partir de ces trois points B, M, N. Parmi ces trois points, un seul, B, appartient à la section du cube par le plan $\mathscr{P}$ puisque M et N n'appartiennent pas à des arêtes du cube.

— Dans le plan (AEB), la droite (NB) contenue aussi dans $\mathscr{P}$ coupe l'arête $[EF]$ en J qui appartient donc à la section du cube par le plan $\mathscr{P}$.

— Dans le plan (ABD), la droite (MB) contenue aussi dans $\mathscr{P}$ coupe la droite (CD) en I qui appartient donc à la section du cube par le plan $\mathscr{P}$.

— Les plans (AEB) et (DHC) sont parallèles donc le plan $\mathscr{P}$ les coupe selon des droites parallèles, on construit ainsi le point K d'intersection de l'arête $[GH]$ et de la parallèle à (BJ) passant par I. Le point K appartient à la section du cube par le plan $\mathscr{P}$.

— On dispose désormais de quatre points B, I, K et J appartenant à la section du cube par le plan $\mathscr{P}$. De plus, dans l'ordre B, I, K, J, deux points successifs (le successeur de J étant B) appartiennent à une même face du cube.

— La section du cube par le plan $\mathscr{P}$ est donc le quadrilatère $BIKJ$ qui est un parallélogramme puisque les côtés opposés $[BJ]$ et $[IK]$ tout comme $[BI]$ et $[JK]$ appartiennent à des plans parallèles.