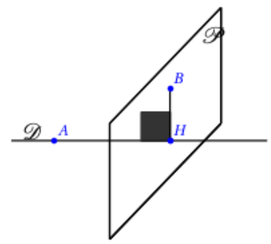
Théorème 4 *admis*

1. Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace et A un point. Il existe une unique droite $\mathscr{D}$ passant par A et orthogonale à $\mathscr{P}$.

   Le point d'intersection H de $\mathscr{D}$ avec $\mathscr{P}$ est **le projeté orthogonal** du point A sur le plan $\mathscr{P}$.

2. Soit B un point et $\mathscr{D}$ une droite de l'espace, il existe un unique plan $\mathscr{P}$ passant par B et orthogonal à $\mathscr{D}$.

   Le point d'intersection H de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{D}$ est **le projeté orthogonal** du point B sur la droite $\mathscr{D}$.



Exemple 4

Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par $A(2;0;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\ (1;1;1)$.

1. Donner une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$.
2. Soit le point $B(3;2;4)$.
   a. Montrer que B n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}$.
   b. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de B sur $\mathscr{D}$, c'est-à-dire du point H de $\mathscr{D}$ tel que $\overrightarrow{BH} \perp \vec{u}$.

1) $\mathscr{D}$ passe par le point $A(2;0;1)$

$\mathscr{D}$ admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

donc $\mathscr{D}$ admet comme représentation paramétrique :

$$M(x;y;z) \in \mathscr{D} \iff \exists t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$$

$$\iff \begin{cases} x - x_A = t\, x_{\vec{u}} \\ y - y_A = t\, y_{\vec{u}} \\ z - z_A = t\, z_{\vec{u}} \end{cases}$$

avec $t \in \mathbb{R}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = x_A + t\, x_{\vec{u}} \\ y = y_A + t\, y_{\vec{u}} \\ z = z_A + t\, z_{\vec{u}} \end{cases}$$
avec $t \in \mathbb{R}$

$$\boxed{M(x;y;z) \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 0 + t \\ z = 1 + t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}}$$

2) a) Soit le point $B(3;2;4)$.

B appartient à $\mathcal{D}$ ssi il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} 3 = 2 + t \\ 2 = 0 + t \\ 4 = 1 + t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1 = t \\ 2 = t \\ 3 = t \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution donc $B(2;3;4)$ n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$.

b) H projeté orthogonal de B sur $\mathcal{D}$ est l'unique point de $\mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{BH} \perp \vec{u}$.

$\overrightarrow{BH} \perp \vec{u} \iff \overrightarrow{BH} \cdot \vec{u} = 0$

H est un point de $\mathcal{D}$ donc il existe un réel t que : $H\begin{pmatrix} 2+t \\ t \\ 1+t \end{pmatrix}$

On a $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} t-1 \\ t-2 \\ t-3 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BH} \cdot \vec{u} = 0 \iff t-1+t-2+t-3=0$

$\iff 3t-(1+2+3)=0$

$\iff 3t - \frac{3\times(1+3)}{2} = 0$

$\iff 3t-6=0$

$\overrightarrow{BH} \cdot \vec{u} = 0 \iff t = \frac{6}{3} = 2$

On en déduit que les coordonnées du projeté orthogonal H de B sont :

$H\begin{pmatrix} 2+2 \\ 2 \\ 1+2 \end{pmatrix}$ soit $H\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$