1 Intégrale d'une fonction continue positive sur un intervalle

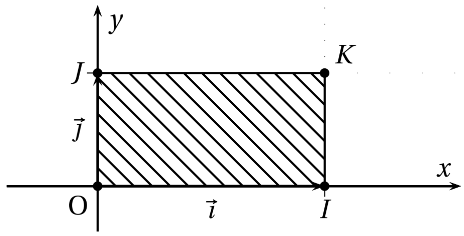
Dans toute cette section :

- *on considère le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ et a et b sont deux réels tels que $a \leqslant b$;*
- *les propriétés énoncées pour des fonctions continues sur I sont aussi valables pour des fonctions en escaliers sur I.*

1.1 Unité d'aire

Définition 1

Soit $\mathscr{P}$ le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Soient I, J et K les points tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$. On appelle unité d'aire (notée u.a.) l'unité de mesure des aires telle que Aire$(OIKJ) = 1$ u.a.



Remarque 1

- $OIKJ$ peut être un carré : le repère est alors orthonormal.
- Si l'on a, par exemple, $OI = 3$ cm et $OJ = 2$ cm, alors 1 u.a. $= 6$ cm^2.

1.2 Intégrale d'une fonction continue positive sur un intervalle

Définition 2

Soit P un plan muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a;b]$ dont la courbe est notée $\mathscr{C}_f$.
On appelle *aire sous la courbe de f entre $x = a$ et $x = b$* l'aire, exprimée en u.a., du domaine $\mathscr{D}$ défini par :

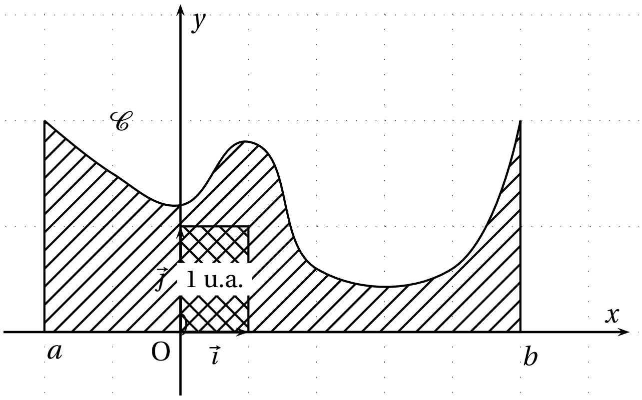
$$M(x;y) \in \mathscr{D} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{array} \right.$$

L'intégrale de f entre a et b est l'aire sous $\mathscr{C}_f$ entre $x = a$ et $x = b$, exprimée en u.a..
On la note : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

a et b sont **les bornes** de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Remarque 2

- On peut noter indifféremment $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ …
  La variable d'intégration est une variable *muette*, on peut l'appeler x ou t ou u ….
- Si $a = b$ alors $\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.
- On $\displaystyle\int_a^b 1\mathrm{d}x = b - a$ c'est l'aire d'un rectangle de hauteur 1 et de base $b - a$ mais c'est aussi la longueur de l'intervalle $[a;b]$.



1.3 Quelques exemples

Exemple 1 ***Calculs d'aires élémentaires***

Soit f la fonction définie sur $[0;2]$ par $f(x) = 2 - x$.

1. Représenter les surfaces dont les aires, en unités d'aire, sont égales aux intégrales :

$$I = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \text{ et } J = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

2. Calculer ces intégrales et vérifier avec la calculatrice.

Exemple 2 ***En physique***

Soit $M(t)$ un point mobile sur un axe tel que à chaque instant $t \in [0;+\infty[$ (en secondes) on connaît sa vitesse instantanée $v(t)$ en mètres par seconde.
A l'instant $t = 0$, le point mobile est à l'origine de l'axe et pour tout $t \in [0;+\infty[$, on a $v(t) = 3\text{ m.s}^{-1}$.

1. Justifier que la fonction v est continue sur $[0;+\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^4 v(t)\mathrm{d}t$.

   A quelle grandeur physique correspond ce nombre ?

2. Calculer $\dfrac{1}{5-2}\displaystyle\int_2^5 v(t)\mathrm{d}t$. A quelle grandeur physique correspond ce nombre ?

3. Soit un instant $t \in [0;+\infty[$.

   a. Calculer $\displaystyle\int_0^t v(u)\,\mathrm{d}x$ qu'on note $g(t)$.

   b. Quelle grandeur physique représente $g(t)$?

   c. Justifier que la fonction g est dérivable sur $[0;+\infty[$ et calculer sa dérivée.

Remarque 3

Dans l'exemple précédent $v(t)$ est une vitesse, en m.s^{-1}, et $\displaystyle\int_0^4 v(t)\mathrm{d}t = \int_0^4 v(x)\,\mathrm{d}x$ est la distance parcourue entre les instants $x = 0$ et $x = 4$, exprimée en secondes s.

Si on note $y = v(x)$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b v(x)\mathrm{d}x$, est une grandeur homogène au produit des grandeurs xy.

1.4 Encadrement de l'intégrale d'une fonction continue positive

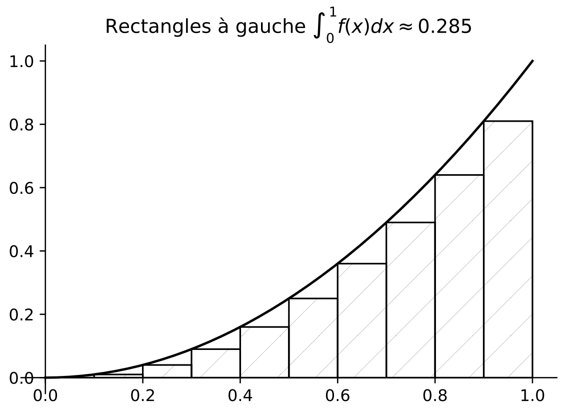
Méthode

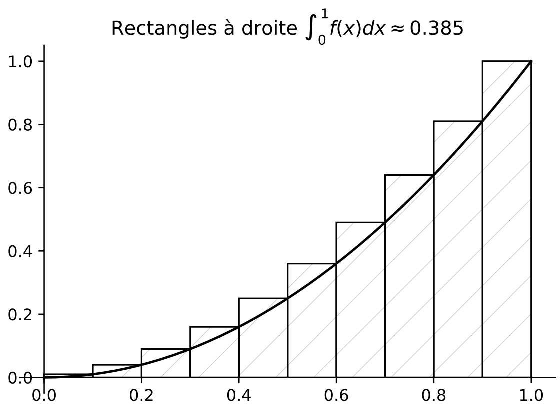
- Soit f une fonction continue positive et monotone sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
  Pour approcher $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, on peut partager $[a\,;\,b]$ en n sous-intervalles de même amplitude $h = \dfrac{b-a}{n}$.
  Sur chacun des sous-intervalles $[x_k\,;\,x_{k+1}]$, l'aire sous $\mathscr{C}_f$ peut être encadrée par l'aire d'un rectangle inférieur et l'aire d'un rectangle supérieur, respectivement $h \times f(x_k)$ et $h \times f(x_{k+1})$ si f est croissante sur $[a\,;\,b]$ (l'inverse sinon). L'aire sous $\mathscr{C}_f$ entre $x = a$ et $x = b$ est alors encadrée par les sommes des n rectangles inférieurs et des n rectangles supérieurs.
  On peut montrer que les suites correspondant aux sommes des rectangles inférieurs et supérieurs sont respectivement croissante et décroissante et qu'elles convergent vers la même limite qui est $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

- Si f n'est pas monotone sur $[a\,;\,b]$, on peut diviser $[a\,;\,b]$ par n subdivisions régulières et approcher $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ par la somme des aires des rectangles de base $\dfrac{b-a}{n}$ et de hauteurs $f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)$ avec $k \in [\![0\,;\,n-1]\!]$ pour les *rectangles à gauche* ou $f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)$ avec $k \in [\![1\,;\,n]\!]$ pour les *rectangles à droite*.

Algorithme pour f croissante sur $[a\,;\,b]$

Fonction sommeRectangle(f, a, b, n)
- $h \longleftarrow \dfrac{b-a}{n}$.
- $x \longleftarrow a$.
- $u \longleftarrow 0$.
- $v \longleftarrow 0$.
- **Pour** k variant de 0 à $n-1$.
  - $u \longleftarrow u + h \times f(x)$
  - $x \longleftarrow x + h$
  - $v \longleftarrow v + h \times f(x)$
- **Retourne** (u, v).





Exemple 3

Soit f une fonction continue positive sur un intervalle $[a\,;b]$.

1. Compléter les fonctions Python ci-dessous pour qu'elles retournent une approximation de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ par la somme de rectangles à gauche construits sur n subdivisions régulières de l'intervalle $[a\,;b]$.

```
def rectangleGauche(f, a, b, n):
    s = 0
    pas = (b - a)/n
    x = a
    for k in range(n):
        s = ..............
        x = ..............
    return s
```

```
def rectangleGauche2(f, a, b, n):
    s = 0
    pas = (b - a) / n
    for k in range(n):
        s = ...................
    return s
```

2. Écrire une fonction `rectangleDroite(f, a, b, n)` qui retourne une approximation de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ par la somme de rectangles à droite construits sur n subdivisions régulières de l'intervalle $[a\,;b]$.

2 Primitives d'une fonction continue

2.1 Théorème fondamental

Théorème 1 ***théorème fondamental***

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.

La fonction F définie sur $[a\,;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a\,;b]$ et sa dérivée est f.

Démonstration ***ROC voir manuel page 184***

Dans le cadre du programme de Terminale S on ne démontre ce théorème que dans le cas où la fonction f est continue, positive et croissante sur $[a\,;b]$.

f est continue et positive sur $[a\,;b]$ donc pour tout $x\in[a\,;b]$, $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe.

Ainsi on peut définir sur $[a\,;b]$ la fonction F par $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Soit $x\in[a\,;b]$ et $h\neq 0$ tel que $x+h\in[a\,;b]$.
Puisque f est positive sur $[a\,;b]$, $F(x)$ est l'aire du domaine $\mathscr{D}$ compris entre $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les abscisses a et x.

- $\boxed{1^{\text{er}}\text{ cas : h>0}}$

  $h>0$ donc $x<x+h$ et f positive sur $[a\,;b]$, donc $F(x+h)-F(x)$ est l'aire du domaine $\mathscr{D}^+$ compris entre $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les abscisses x et $x+h$:

$$F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$

f est croissante sur $[a\,;\,b]$ et $h>0$ donc pour tout $t\in[x\,;\,x+h]$:

$$f(x)\leqslant f(t)\leqslant f(x+h)$$

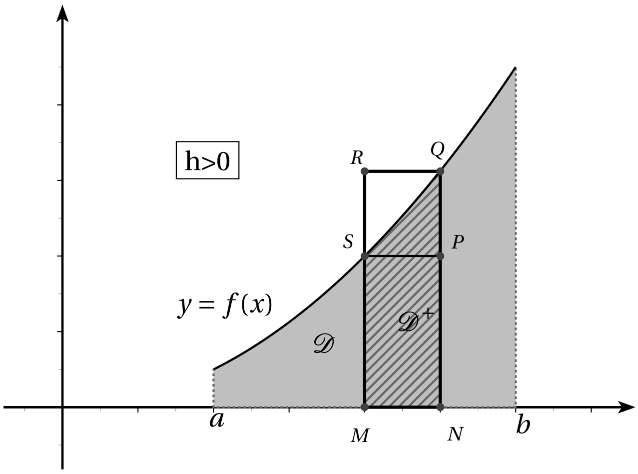
Or $F(x+h)-F(x)$, l'aire de $\mathscr{D}^+$ est comprise entre les aires des rectangles $MNPS$ et $MNQR$.

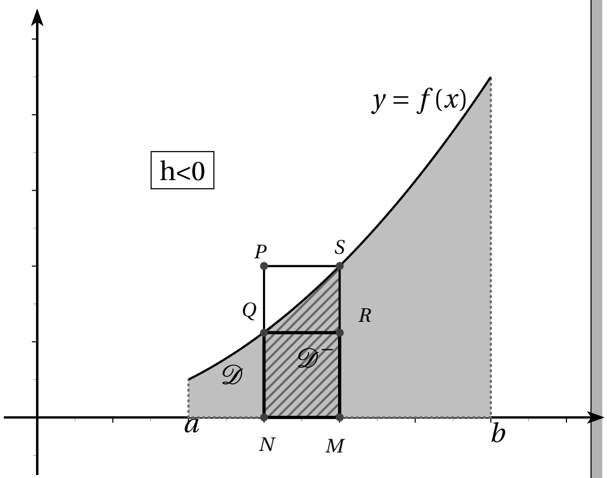
L'aire de $MNPS$ est égale à $h\times f(x)$ et l'aire de $MNQR$ est égale à $h\times f(x+h)$ donc,

$$h\times f(x)\leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant h\times f(x+h)$$

En divisant tous les membres des inégalités par $h>0$, il vient :

$$f(x)\leqslant \frac{F(x+h)-F(x)}{h}\leqslant f(x+h) \qquad (1)$$





- $\boxed{2^{\text{ème}}\text{ cas : h<0}}$

$h<0$ donc $x+h<x$ et f positive sur $[a\,;\,b]$, donc $F(x)-F(x+h)$ est l'aire du domaine $\mathscr{D}^-$ compris entre $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les abscisses $x+h$ et x :

$$F(x)-F(x+h)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{x+h}^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

f est croissante sur $[a\,;\,b]$ et $h<0$ donc pour tout $t\in[x+h\,;\,x]$:

$$f(x+h)\leqslant f(t)\leqslant f(x)$$

Or $F(x)-F(x+h)$, l'aire de $\mathscr{D}^-$ est comprise entre les aires des rectangles $MRQN$ et $MSPN$.

L'aire de $MRQN$ est égale à $(x-(x+h))\times f(x+h)$ et l'aire de $MSPN$ est égale à $-h\times f(x)$ donc,

$$-h\times f(x+h)\leqslant F(x)-F(x+h)\leqslant -h\times f(x)$$

En divisant tous les membres des inégalités par $-h>0$, il vient :

$$f(x+h)\leqslant \frac{F(x+h)-F(x)}{h}\leqslant f(x) \qquad (2)$$

- Synthèse

f est continue sur $[a\,;\,b]$ donc en $x \in [a\,;\,b]$ donc $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$.

De plus $\lim\limits_{h \to 0} f(x) = f(x)$ (limite d'une fonction constante puisque f(x) ne dépend pas de h).

D'après le théorème des « gendarmes » on déduit de ces limites et des encadrements (1) et (2) que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

Par définition, la fonction F est donc dérivable en $x \in \mathrm{I}$ et $F'(x) = f(x)$.

C'est vrai pour tout réel x appartenant à I, donc F est dérivable sur I et sa fonction dérivée sur I est f.

Sur I, on a donc $F' = f$.

Exemple 4

Soit f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

1. Étudier les variations, les limites aux bornes et le signe de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Justifier que la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.
3. En déduire le sens de variation de F sur $[0\,;\,+\infty[$.

2.2 Primitives d'une fonction continue

Définition 3

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On appelle *primitive de f* toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$ sur I.
« F a pour dérivée f » équivaut à « F est une primitive de f »

Exemple 5

1. Soient les fonctions f et F continues sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ définies par :

$$F(x) = \tan x - x \quad \text{et} \quad f(x) = \tan^2 x$$

   Démontrer que F est une primitive de f sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

2. Soient g et G les fonctions définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1+\ln x}{x} \quad \text{et} \quad G(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \ln x$$

   a. Démontrer que G est une primitive de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

   b. Déterminer une primitive de g sur $]0\,;\,+\infty[$ qui s'annule en e. En existe-t-il d'autres ?

Théorème 2
Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives.

Démonstration *ROC*
On ne démontre ce théorème que dans le cas où I=$[a;b]$ et où f admet un minimum m sur I=$[a;b]$.

Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = f(x) - m$.
g est continue et positive sur I donc d'après le théorème 1 (dit fondamental) , la fonction g admet une primitive G sur $[a;b]$.
Soit F la fonction définie sur $[a;b]$ par $F(x) = G(x) + mx$.
F est dérivable sur $[a;b]$ comme somme de fonctions dérivables et pour tout $x \in [a;b]$ on a $F'(x) = G'(x) + m = g(x) + m = f(x)$.
Donc F est une primitive de f sur I.

Théorème 3 *admis*
Soit f une fonction continue sur un intervalle I qui admet une primitive F sur I.

1. G est une primitive de f sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
2. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
   Il existe une unique primitive H de f sur I telle que $H(x_0) = y_0$.

Remarque 4
Dans un chapitre précédent on a introduit la fonction logarithme népérien ln comme fonction réciproque de la fonction exponentielle (dont on a démontré l'unicité comme solution sur $\mathbb{R}$ de $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ mais admis l'existence).
On a montré que ln était dérivable sur $]0;+\infty[$ et que pour tout $x > 0$ on a $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ avec de plus $\ln 1 = 0$.

Or la fonction $f(t) = \dfrac{1}{t}$ est continue sur $]0;+\infty[$ donc admet des primitives sur $]0;+\infty[$ d'après le théorème 3 et il existe une unique primitive de f qui s'annule en 1 d'après le théorème précédent. Ainsi on prouve l'existence et l'unicité de la fonction ln (et donc de sa réciproque la fonction exponentielle) et de plus :

$$\forall x > 0, \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

2.3 Tableaux des primitives

2.3.1 Tableau des primitives des fonctions usuelles

Le tableau 1 de la présente page donne, pour chaque fonction f de référence, les fonctions primitives F sur l'intervalle considéré, il s'obtient à partir du tableau des dérivées en vérifiant que $F' = f$.

TABLE 1 – Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	Primitive F ($C \in \mathbb{R}$ constante)	Intervalle I
$f(x) = m$ (constante)	$F(x) = mx + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + C$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
Plus généralement : $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq -1$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$\mathbb{R}$ (si $n \geqslant 0$) $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ (si $n < -1$)
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$ (pour $x > 0$)	$F(x) = \ln(x) + C$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$ (pour $x < 0$)	$F(x) = \ln(-x) + C$	$]-\infty; 0[$
$f(x) = \frac{1}{x}$ (pour $x \neq 0$)	$F(x) = \ln(\lvert x \rvert) + C$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \ln(x)$ (logarithme népérien)	$F(x) = x\ln(x) - x + C$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \mathrm{e}^x$ (exponentielle de base e)	$F(x) = \mathrm{e}^x + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \mathrm{e}^{ax+b}$ (avec $a \neq 0$)	$F(x) = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax+b} + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(ax+b)$ (avec $a \neq 0$)	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(ax+b)$ (avec $a \neq 0$)	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$F(x) = \tan x + C$	$]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exemple 6

1. Pour chacune des fonctions f suivantes, continue sur I, déterminer l'ensemble des primitives de f sur $]0; +\infty[$.

a. $f(x) = 4$ sur $I = \mathbb{R}$;

b. $f(x) = 0$ sur $I = \mathbb{R}$;

c. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $I =]0; +\infty[$;

d. $f(x) = 3 + x + x^4$ sur $I = \mathbb{R}$;

e. $f(x) = \sin(2x)$ sur $I = \mathbb{R}$;

f. $f(x) = \cos(3x)$ sur $I = \mathbb{R}$;

g. $f(x) = \frac{1}{x^4}$ sur $I =]0; +\infty[$;

h. $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ sur $I = \mathbb{R}$;

i. $f(x) = \frac{-1}{x}$ sur $I =]-\infty; 0[$.

2. Démontrer que la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F : x \mapsto x\ln x - x + 1$ est une primitive de la fonction ln. Déterminer la primitive de la fonction ln qui s'annule en $\sqrt{\mathrm{e}}$.

2.3.2 Tableau d'opérations sur les primitives

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. On a alors les propriétés résumées dans le tableau 2 de la présente page. Là encore, les résultats de ce tableau s'obtiennent en vérifiant qu'on a bien $F' = f$ sur l'intervalle considéré.

TABLE 2 – Opérations sur les primitives

Conditions	f s'écrivant sous la forme	admet comme primitive F (à une constante C près)
Pour tout $x \in \mathrm{I}$	$u' + v'$	$u + v + C$
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une constante	$\lambda u'$	$\lambda u + C$
Pour tout $x \in \mathrm{I}$	$u'u^2$	$\frac{1}{3}u^3 + C$
Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u(x) \neq 0$	$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + C$
Plus généralement : Soit $n \in \mathbb{Z}$ avec $n \neq -1$ Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u(x) \neq 0$	$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + C$
Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u(x) > 0$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$
Primitive d'une fonction composée avec une fonction affine : soient $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$	$u'(ax+b)$	$\frac{1}{a}u(ax+b) + C$
Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u(x) > 0$	$\frac{u'}{u}$	$\ln(u) + C$
Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u(x) \neq 0$	$\frac{u'}{u}$	$\ln(\mid u \mid) + C$
Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u(x) > 0$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$
Pour tout $x \in \mathrm{I}$	$u'\mathrm{e}^u$	$\mathrm{e}^u + C$
Primitive d'une fonction composée avec une fonction affine : soient $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$	$u'(ax+b)$	$\frac{1}{a}u(ax+b) + C$

Remarque 5

La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ mais on ne peut pas donner de forme explicite de celles-ci. La primitive de f s'annulant en 0 s'écrira $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple 7

Pour chacune des fonctions f suivantes, continues sur un intervalle I, déterminer l'ensemble des primitives de f sur I.

1. $f(x) = x^2 - 2x - 1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} + \mathrm{e}^x$ sur $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$;
2. $f(x) = \cos(4x-1) - 2\sin(2x)$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$;
3. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{731x}}{(\mathrm{e}^{731x}+1)^2}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$;
4. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$;
5. $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x^2}}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*$;
6. $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ sur $\mathrm{I} =]0\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$;
7. $f(x) = \cos(x)\mathrm{e}^{\sin(x)}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.
8. $f(x) = \dfrac{1}{x} \times (\ln x)^2$ sur $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$.

3 Intégrale d'une fonction continue

3.1 Intégrale d'une fonction continue positive à l'aide d'une primitive

Théorème 4

Soit f une fonction continue positive sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I tels que $a < b$. Soit F une primitive de f. On a :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Le calcul de l'intégrale ne dépend pas de la primitive choisie.

On note aussi : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$

Démonstration

f est continue et positive sur I donc d'après le théorème fondamental, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f.

De plus on a : $F(a) = \displaystyle\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$

Pour tout $b \in \mathrm{I}$ on a donc :

$$F(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Or $F(a) = 0$ donc :

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

La variable d'intégration t est muette, on peut la remplacer par x

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

De plus, si G est une autre primitive de f sur I alors d'après le théorème 4, il existe une constante k telle que pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + k$ et donc $G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Exemple 8

1. Etudier la position relative des courbes d'équations $y = 1$, $y = x$ et $y = x^2$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

2. Calculer puis interpréter graphiquement les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x \quad J = \int_0^1 1 \, \mathrm{d}x \quad K = \int_0^1 x \, \mathrm{d}x \qquad L = \int_0^1 1 - x^2 \, \mathrm{d}x \qquad M = \int_0^1 x - x^2 \, \mathrm{d}x$$

3.2 Généralisation de la notion d'intégrale

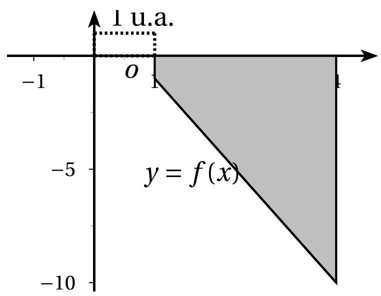
Définition 4

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f, et a et b deux réels quelconques de I.
On appelle intégrale de f entre a et b la différence $F(b) - F(a)$.
On note : $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Remarque 6

- Si $a \leqslant b$ et f est continue positive sur $[a ; b]$, cette définition est cohérente avec la définition 1 d'après le théorème 5.
  $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ représente(en unités d'aire) l'aire du domaine $\mathscr{D}$ compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ (sous $\mathscr{C}_f$).
- Si $a \leqslant b$ et f une fonction négative et continue sur $[a ; b]$,
  $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = F(b) - F(a) = -F(a) - (-F(b)) = \int_a^b -f(x) \, \mathrm{d}x$ est l'opposé de l'aire du domaine $\mathscr{D}'$ compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ (au-dessus de $\mathscr{C}_f$).

  Par exemple, ci-contre on a représenté la courbe de la fonction f définie sur $[1 ; 4]$ par $f(x) = 2 - 3x$ qui est négative sur $[1 ; 4]$. L'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$ est égale à ...



- Si $a \leqslant b$ et f de signe quelconque sur $[a ; b]$, on découpe l'intervalle en intervalles sur lesquels f garde un signe constant.
  $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ est la somme des intégrales calculées sur chaque intervalle inclus dans $[a ; b]$, où f est de signe constant. C'est la somme algébrique des aires des domaines ainsi définis.

Exemple 9

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$;
2. $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{1}{(2x-1)^4}\,dx$;
3. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \cos(\theta)\ d\theta$;
4. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos(2\theta)\ d\theta$;
5. $\displaystyle\int_{-4}^{-2} (3x-1)^6 dx$;
6. $\displaystyle\int_{0}^{x} \sin^2(t)\,dt$.
7. $\displaystyle\int_{e}^{e^3} \frac{1}{x\ln x}\,dx$
8. $\displaystyle\int_{0}^{x} \frac{1}{1+e^t}\,dt$
9. $\displaystyle\int_{2}^{e} \frac{1}{x(\ln(x))^2}\,dx$

3.3 Propriétés de l'intégrale

Dans toute cette section, on considère le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$

3.3.1 Relation de Chasles

Propriété 1 ***Relation de*** **CHASLES*, admise***

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b et c trois réels de I. Alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Remarque 7

On peut étendre la définition de l'intégrale d'une fonction continue f entre deux bornes a et b au cas où les deux bornes ne sont pas dans l'ordre croissant.

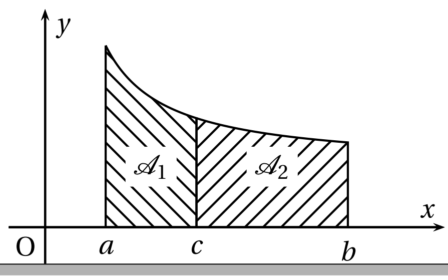
Par exemple si $b > a$ on peut définir $\displaystyle\int_b^a f(x)dx$.

D'après la relation de Chasles on doit avoir : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0$

On en déduit donc un corollaire utile de la relation de Chasles : $\boxed{\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx}$

Remarque 8

Dans le cas où $a \leq c \leq b$ et où $f \geq 0$, la relation de CHASLES se traduit par l'additivité des aires : sur la figure ci-contre, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \mathscr{A} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2$



3.3.2 Linéarité de l'intégrale

Propriété 2 ***Linéarité, admise***

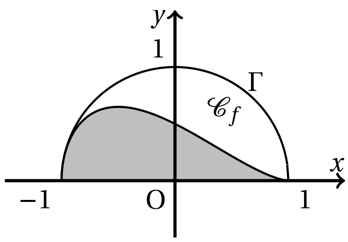
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I et α et β deux réels quelconques. Alors :

- $\displaystyle\int_a^b \left(\alpha f(x)\right) \mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right) \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- Plus généralement : $\displaystyle\int_a^b \left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right) \mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- En particulier : $\displaystyle\int_a^b f(x)-g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

Exemple 10

Le demi-cercle Γ de rayon 1, représenté sur la figure ci-contre, a pour équation $y=\sqrt{1-x^2}$.

La partie grisée est comprise entre l'axe des abscisses d'équation $y=0$ et la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $[-1\,;1]$ par $f(x)=\dfrac{1}{2}(1-x)\sqrt{1-x^2}$.



1. Déterminer la valeur exacte de $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ par un calcul géométrique.
2. Justifier que $\displaystyle\int_{-1}^{0} x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = -\int_{0}^{1} x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.
3. En déduire la valeur exacte de $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

Exemple 11 ***Application des propriétés de l'intégrale***

Soient f et g deux fonctions continues sur $[1\,;5]$, on donne :

$$I=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=-3 \qquad J=\int_5^2 f(x)\mathrm{d}x=2 \qquad K=\int_1^5 g(x)\mathrm{d}x=12$$

Calculer $\displaystyle L=\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$, $\displaystyle M=\int_1^5 (f(x)+g(x))\mathrm{d}x$ puis $\displaystyle N=\int_1^5 (2f(x)-3g(x))\mathrm{d}x$

3.3.3 Intégrale et inégalités

Propriété 3 ***Intégrale et inégalités***

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $a\leq b$ deux réels de I.

1. Si $f \geq 0$ sur I alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.
2. Si $f \leq 0$ sur I alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq 0$.
3. Si $f \leq g$ sur I alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Démonstration

f, g, $f-g$ sont continues sur I donc toutes les intégrales considérées sont légitimes.

1. On suppose $f \geqslant 0$ sur I.

   Si $a \leqslant b$, par définition $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est l'aire du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ donc elle est positive.

2. Si $f \leqslant 0$ sur I alors $-f \geqslant 0$ sur I et donc d'après le premier point on a $\displaystyle\int_a^b -f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

   Par linéarité on en déduit que $-\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$ et donc $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq 0$.

3. On suppose $f \leqslant g$ sur I.

   On a donc $0 \leqslant g - f$ sur I donc d'après la propriété précédente on a $\displaystyle\int_a^b g(x) - f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

   Par linéarité de l'intégrale, il vient $\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$ c'est-à-dire $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Exemple 12

1. Déterminer le signe des intégrales suivantes :

   a. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x\,\mathrm{d}x$ | **b.** $\displaystyle\int_1^0 x\text{š}\,\mathrm{d}x$ | **c.** $\displaystyle\int_1^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \ln x\,\mathrm{d}x$

2. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1 + x^n\right)\,\mathrm{d}x$.

   a. Etudier le sens de variation de la suite (u_n).

   b. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \ln 2$.
   En déduire que la suite (u_n) est convergente.

   c. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout réel $x \in [0\,;\,1]$ on a : $0 \leqslant \ln\left(1 + x^n\right) \leqslant x^n$.
   En déduire la limite de la suite (u_n).

Exemple 13

Soit f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

1. Démontrer que pour tout $t \in [2\,;+\infty[$ on a : $0 \leqslant f(t) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t}$.
2. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a : $0 \leqslant \displaystyle\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-2}}{\sqrt{2\pi}}$

3. Montrer que la suite $\left(\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 2}$ est croissante.

4. Déduire de ce qui précède que la suite $\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 2}$ converge.

4 Applications du calcul intégral

4.1 Calcul de l'aire entre deux courbes

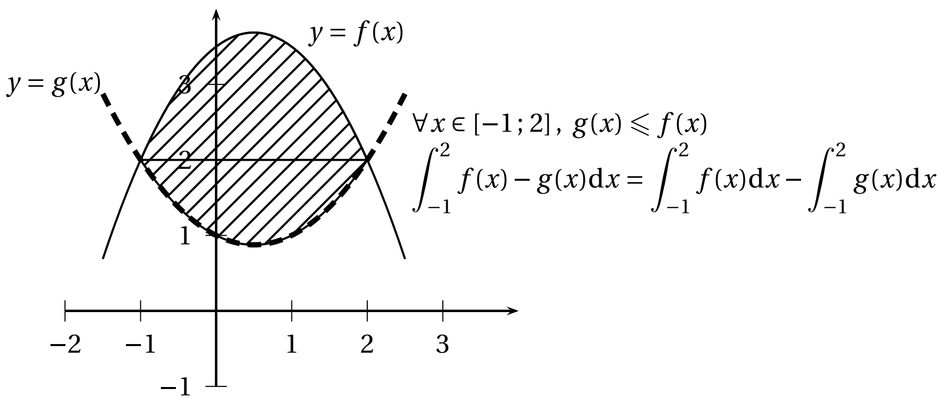
Propriété 4

Soient f et g deux fonction continues positives sur $[a\,;\,b]$ telles que pour tout $x \in [a\,;\,b]$, $g(x) \leqslant f(x)$ alors :

$$\int_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

représente l'aire (en un u.a.) du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Si f ou g n'est pas positive sur $[a\,;\,b]$ mais que $f \leqslant g$ sur $[a\,;\,b]$, $\int_a^b f(x) - g(x)\,dx$ représente aussi l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

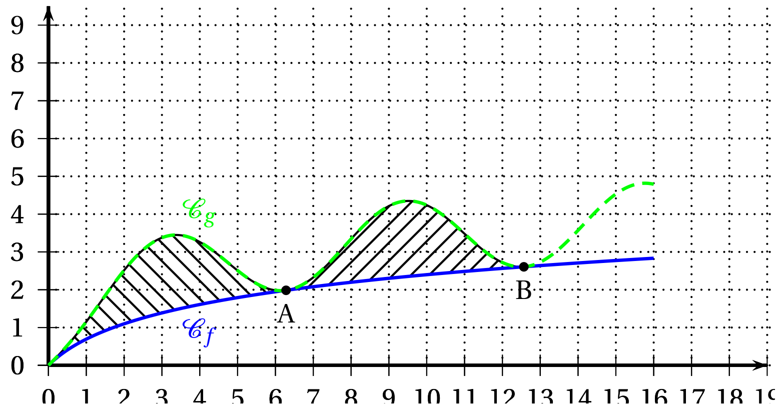


Exemple 14

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;\,16]$ par

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x).$$

Dans un repère du plan $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g. Ces courbes sont données ci-dessous.
Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique.



4.2 Valeur moyenne

Définition 5

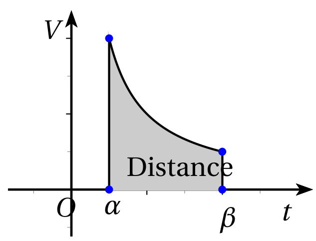
Soit $a < b$, la valeur moyenne d'une fonction f continue (ou en escaliers) sur un intervalle $[a;b]$ est le nombre :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Exemple 15

Pour $t > 0$ la vitesse d'un mobile est $v(t) = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}$ (en m.s^{-1}).

1. Calculer la distance parcourue entre les instants $t = 1$ et $t = \mathrm{e}^2$ (en s).
2. Calculer la vitesse moyenne du mobile entre les instants $t = 1$ et $t = \mathrm{e}^2$.



Plus généralement, si on note $y = v(x)$ alors $\int_a^b v(x)\mathrm{d}x$ est homogène au produit des grandeurs xy (ici m.s^{-1}.s = m). Puisque $b-a$ est homogène à x (en secondes s), la valeur moyenne de v sur $[a;b]$ est homogène à $\frac{xy}{x} = y$ (soir en m.s^{-1}), donc elle est dans la même unité que la fonction intégrée v.

Remarque 9

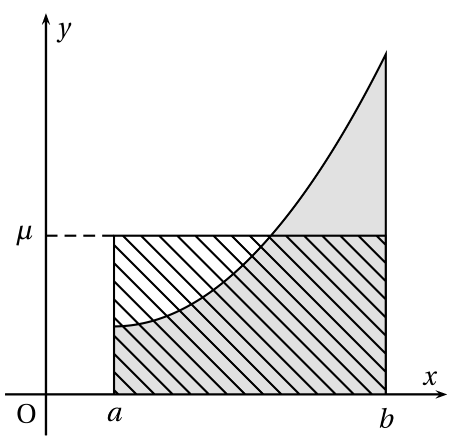
Dans le cas où f est continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ (avec $a \neq b$) , on peut interpréter la valeur moyenne en terme d'aire.

On cherche un nombre μ tel que, en remplaçant chaque valeur de f par μ, la somme des $\mu\mathrm{d}x$ soit la même que la somme des $f(x)\mathrm{d}x$, ce qui revient à chercher une fonction constante telle que l'aire sous la courbe de cette fonction soit la même que l'aire sous la courbe de la fonction f.

Or l'aire sous la courbe entre a et b d'une fonction constante μ vaut $(b-a)\mu$.

On a donc $(b-a)\mu = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Sur la figure ci-contre, l'aire grise et l'aire hachurée sont égales quand μ est égale à la valeur moyenne de la fonction sur $[a;b]$.



'

Exemple 16

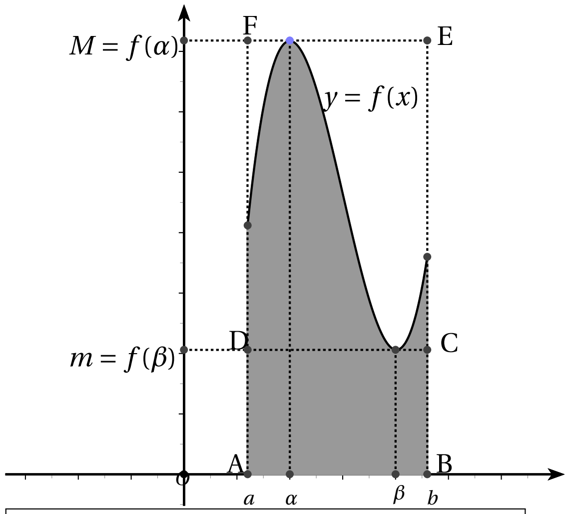
1. Calculer la valeur moyenne de la fonction g définie sur $[-1;1]$ par $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

2. $\boxed{\text{Inégalité de la moyenne}}$

   Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On suppose que pour tout $x \in [a;b]$ on a : $m \leqslant f(x) \leqslant M$, démontrer que :
   $$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M$$

3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = [-1;1]$ par
   $$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x} + 1$$
   a. Déterminer le tableau de variations complet de f sur I.

   b. En déduire un encadrement de $\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ puis de la valeur moyenne de f sur $[-1;1]$.



$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est comprise entre l'aire du rectangle $ABCD$ qui est $m(b-a)$ et l'aire du rectangle $ABEF$ qui est $M(b-a)$

Table des matières

Liste des tableaux