Exemple 7 *Antilles juin 2017*

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On considère les points A(−1 ; 2 ; 0), B(1; 2; 4) et C(−1 ; 1 ; 1).

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

2. **a.** Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

3. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $3x + y - 2z + 3 = 0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan passant par O et parallèle au plan d'équation $x - 2z + 6 = 0$.

   a. Démontrer que le plan $\mathscr{P}_2$ a pour équation $x = 2z$.

   b. Démontrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

   c. Soit la droite $\mathscr{D}$ dont un système d'équations paramétriques est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t \\ y & = & -4t-3, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z & = & t \end{array}\right.$$

   Démontrer que $\mathscr{D}$ est l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

4. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ coupe le plan (ABC) en un point I dont on déterminera les coordonnées.

1) $A(-1;2;0)$ $B(1;2;4)$ $C(-1;1;1)$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

A, B, C alignés ssi il existe k réel tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \iff \left\{\begin{array}{l} 2 = k\times 0 \\ 0 = -k \\ 4 = k \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2 = 0 \\ k = 0 \\ k = 0 \end{array}\right.$$

Le système n'a pas de solution donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

Soit le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

2) a) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

- $\vec{n}\cdot\vec{AB} = 2\times2 + (-1)\times4 = 0$
- $\vec{n}\cdot\vec{AC} = 2\times0 + (-1)\times(-1) + (-1)\times1$

$\vec{n}\cdot\vec{AC} = 1-1=0$

$\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ donc c'est un vecteur normal au plan (ABC).

b) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ normal au plan (ABC) donc une équation de (ABC) est de la forme : $2x-y-z+d=0$

De plus $A(-1;2;0)$ appartient au plan (ABC), donc :

$$-2-2-0+d=0$$
$$\Longleftrightarrow \quad d=4$$

Une équation du plan (ABC) est donc : $\boxed{2x-y-z+4=0}$

3) a) $\mathcal{I}_2$ parallèle au plan d'équation $x-2z+6=0$.

Un vecteur normal de ce plan par exemple $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ est normal à tout plan parallèle donc à $\mathcal{I}_2$.

Une équation de $\mathcal{I}_2$ est donc de la forme :

$$x-2z+d=0$$

De plus $O(0;0;0)$ appartient à $\mathcal{I}_2$, donc :

$$0-2\times0+d=0 \Longleftrightarrow d=0$$

Une équation de $\mathcal{P}_2$ est donc :

$$x - 2z = 0 \iff x = 2z$$

3) b) Deux plans sont sécants si et seulement si leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires.

$\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$ vecteur normal de $\mathcal{P}_1$

$\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ vecteur normal de $\mathcal{P}_2$

$\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ colinéaires ssi $\overrightarrow{n_1} = k\overrightarrow{n_2}$ avec k réel

$$\overrightarrow{n_1} = k\overrightarrow{n_2} \iff \begin{cases} 3 = k \\ 1 = 0 \text{ impossible} \\ -2 = -2k \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution donc $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires.
On en déduit que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

3) c) Soit la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -4t - 3 \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Soit un point $M(2t ; -4t-3 ; t)$ appartenant à $\mathcal{D}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

* D'une part :

$$3 \times 2t + (-4t-3) - 2 \times t + 3 = 0 - 3 + 3 = 0$$

donc les coordonnées de M satisfont l'équation de $\mathcal{S}_1$, donc M appartient à $\mathcal{S}_1$.

On en déduit que la droite $\mathcal{D}$ est contenue dans $\mathcal{S}_1$.

* D'autre part.

$$2t = 2 \times t$$

donc les coordonnées de M satisfont l'équation de $\mathcal{S}_2$, donc M appartient à $\mathcal{S}_2$.

On en déduit que la droite $\mathcal{D}$ est contenue dans le plan $\mathcal{S}_2$

$\boxed{\text{* La droite } \mathcal{D} \text{ est contenue dans } \mathcal{S}_1 \text{ et dans } \mathcal{S}_2\text{, qui sont des plans sécants, donc c'est la droite d'intersection de } \mathcal{S}_1 \text{ et } \mathcal{S}_2}$

4). • $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur

$$\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-4\\1\end{pmatrix}$$

• (ABC) d'équation $2x-y-z+4=0$ donc de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

• $\vec{u}\cdot\vec{n} = -2\times2+(-4)\times(-1)+1\times(-1)$

$\vec{u}\cdot\vec{n} = -1$

• $\vec{u}\cdot\vec{n} \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux, donc la droite $\mathcal{D}$ est sécante au plan (ABC).

• Soit $E(x;y;z)$ le point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABC).

Puisque le point E appartient à $\mathcal{D}$, il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -4t-3 \\ z = t \end{cases}$$

E appartient à (ABC) si et seulement si :

$$2\times(2t) - (-4t-3) - t + 4 = 0$$

$$\iff 4t + 4t + 3 - t + 4 = 0$$

$$\iff 7t + 7 = 0$$

$$\iff t = -1$$

On en déduit que les coordonnées du point E d'intersection de $\mathcal{D}$ et (ABC) sont :

$$\boxed{E(-2;1;-1)}$$