Exemple 9 *Méthode 6 page 311*

Soit $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace.
On considère les plans $\mathscr{P}_1$ d'équation $x + 2y - z = -1$ et $\mathscr{P}_2$ d'équation $3x + 4y - 2z + 5 = 0$.

1. Étudier la position relative des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
2. Si elle existe, déterminer une représentation paramétrique de leur droite $\mathscr{D}$ d'intersection.
3. Répondre aux mêmes questions avec les plans $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ d'équation $4z - y = x$.

1) P_1 d'équation $x+2y-z=-1$
donc de vecteur normal $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

P_2 d'équation $3x+4y-2z+5=0$
donc de vecteur normal $\vec{n_2}\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}$

• Déterminons si $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont colinéaires :

$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ colinéaires ssi $\vec{n_1} = k\vec{n_2}$ avec $k \in \mathbb{R}$

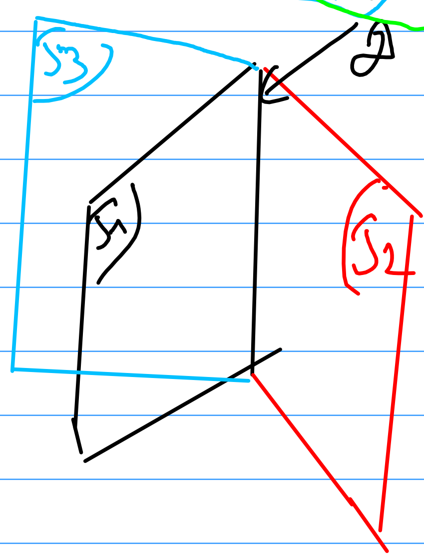
$$\vec{n_1} = k\vec{n_2} \iff \begin{cases} 1 = 3k \\ 2 = 4k \\ -1 = -2k \end{cases} \iff \begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ k = \frac{1}{2} \\ k = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution donc les vecteurs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas colinéaires

$$\boxed{\text{Les plans } \mathcal{P}_1 \text{ et } \mathcal{P}_2 \text{ sont donc sécants.}}$$

2) La droite $\mathcal{D}$ d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est caractérisée par le système :

$$\mathcal{S}\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 3x + 4y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$$



On choisit z comme paramètre et on exprime x et y en fonction de z par résolution du système :

$$\mathcal{S} \iff \begin{cases} x + 2y = z - 1 \\ 3x + 4y = 2z - 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2y + z - 1 \\ 3(-2y + z - 1) + 4y = 2z - 5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -2y + z - 1 \\ -6y + 3z - 3 + 4y = 2z - 5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -2y + z - 1 \\ -2y = -z - 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3 \\ y = \frac{1}{2}z + 1 \end{cases}$$

On peut écrire que la droite $\mathcal{D}$ est caractérisée par le système :

$$\mathcal{D} \begin{cases} x = -3 \\ y = \frac{1}{2}z + 1 \\ z = z \end{cases} \quad \text{avec } z \in \mathbb{R}$$

on peut poser $z = t$

$\mathcal{D}$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = \frac{1}{2}t + 1 \\ z = t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Vérification :

- Tout point de $\mathcal{D}$ appartient-il à $\mathcal{S}_1$ d'équation $x + 2y - z = -1$?

$-3 + 2 \times \left(\frac{1}{2}t + 1\right) - t = -3 + 2 = -1$

On a bien $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}_1$

• Tout point de $\mathcal{D}$ appartient-il à $\mathcal{S}_2$ d'équation $3x+4y-2z+5=0$?

$3\times(-3)+4\left(\frac{1}{2}t+1\right)-2t+5=0$

On a bien $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}_2$

On retrouve que $\mathcal{D} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$.

3) $\mathcal{S}_2 : 3x+4y-2z+5=0$

de vecteur normal $\overrightarrow{n_2} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\mathcal{S}_3 : 4z-y=x \iff x+y-4z=0$

$\mathcal{S}_3$ de vecteur normal $\overrightarrow{n_3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_2} = k\,\overrightarrow{n_3} \iff \begin{cases} 3 = k \\ 4 = k \\ -2 = -4k \end{cases}$ incompatibi-lité

Le système n'a pas de solution donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

$\mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}_3$ sont donc sécants

La droite $\mathcal{D}'$ d'intersection de $\mathcal{P}_2$ et de $\mathcal{P}_3$ a pour système d'équations cartésiennes :

$$\mathcal{D}' \begin{cases} 3x+4y-2z+5=0 \\ 4z-y=x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y-2z+5=0 \\ x+y-4z=0 \end{cases}$$

On choisit z comme paramètre
z est un réel quelconque

$$\mathcal{D}' : \begin{cases} 3(4z-y)+4y-2z+5=0 \\ x=4z-y \end{cases}$$

$$\mathcal{D}' \begin{cases} y+10z+5=0 \\ x=4z-y \end{cases}$$

$$\mathcal{D}', \begin{cases} y=-10z-5 \\ x=4z-(-10z-5)=14z+5 \end{cases}$$

On en déduit que $\mathcal{D}'$ a pour représentation paramétrique :

$$\mathcal{D}' \begin{cases} x = 14z + 5 \\ y = -10z + 5 \\ z = z \end{cases} \quad \text{avec } z \in \mathbb{R}$$

On peut poser $z = t$

$$\boxed{\mathcal{D}' \begin{cases} x = 14t + 5 \\ y = -10t + 5 \\ z = t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}}$$