

Exemples du cours du chapitre calcul intégral 2019/2020

Frédéric Junier

Lycée du Parc
1 Boulevard Anatole France
69006 Lyon

24 mars 2020

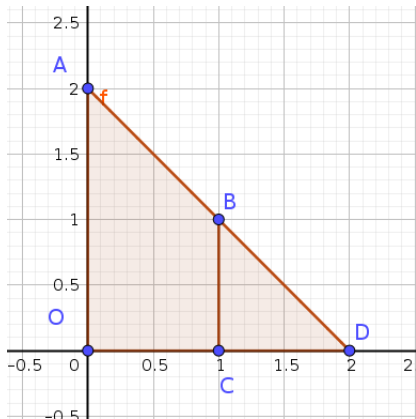
Table des matières

- Exemple 1
- Exemple 2
- Exemple 3
- Exemple 4
- Exemple 5
- Exemple 6
- Exemple 7
- Exemple 8
- Exemple 9
- Exemple 10
- Exemple 11
- Exemple 12
- Exemple 13
- Exemple 14
- Exemple 15
- Exemple 16

Exemple 1 Partie 1

Soit f la fonction définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = 2 - x$.

La surface dont l'aire est égale à l'intégrale $I = \int_1^2 f(x) dx$ est le triangle BCD rectangle isocèle en C dont l'aire est $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$.

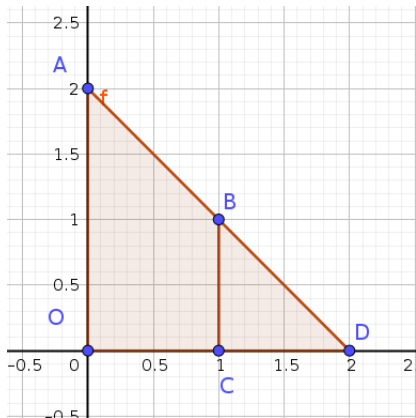


Exemple 1 Partie 2

Soit f la fonction définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = 2 - x$.

La surface dont l'aire est égale à l'intégrale $I = \int_0^1 f(x) dx$ est le trapèze $OABC$ rectangle isocèle en O dont l'aire est

$$\frac{1}{2} \times (OA + BC) \times OC = \frac{3}{2}.$$



Exemple 2 Question 1

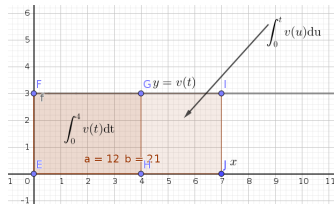
Soit $M(t)$ un point mobile sur un axe tel que à chaque instant $t \in [0; +\infty[$ (en secondes) on connaît sa vitesse instantanée $v(t)$ en mètres par seconde.

A l'instant $t = 0$, le point mobile est à l'origine de l'axe et pour tout $t \in [0; +\infty[$, on a $v(t) = 3 \text{ m.s}^{-1}$.

- **Question 1** La fonction v est constante donc dérivable donc continue sur $[0; +\infty[$.

$\int_0^4 v(t)dt$ est l'aire du rectangle $EFGH$ c'est-à-dire $4 \times 3 = 12$.

On peut l'interpréter comme la distance parcourue par le mobile en 3 secondes. Notons que la dimension de l'intégrale est celle de $v(t)dt$: vitesse \times temps = distance.



Exemple 2 Question 2

- **Question 2** $\int_2^5 v(t)dt$ est égale à $(5-2) \times 3 = 9$. C'est la distance parcourue par le mobile entre les instants $t=2$ et $t=5$ à une vitesse de 3 m.s^{-1} . $\frac{1}{5-2} \int_2^5 v(t)dt$ est égale à $\frac{\text{distance}}{\text{temps}} = \frac{9}{3}$, c'est la vitesse moyenne du mobile entre les instants $t=2$ et $t=5$. Comme sa vitesse est constante, c'est sa vitesse instantanée à tout instant. On a un exemple, d'utilisation de l'intégrale dans un calcul de valeur moyenne. Notons que $\frac{1}{5-2} \int_2^5 v(t)dt$ a la même dimension que $v(t)$, c'est une vitesse.

Exemple 2 Question 3

- **Question 3** $g(t) = \int_0^t v(u) du$ est l'aire du rectangle $EFIJ$ c'est-à-dire $t \times 3 = 3t$.

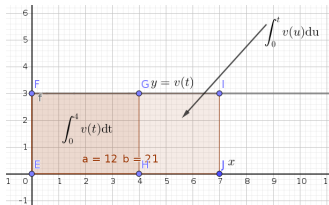
On peut l'interpréter comme la distance parcourue par le mobile en t secondes.

g est une fonction linéaire donc elle est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $g'(t) = 3$. On remarque que $g'(t) = v(t)$. On peut

l'expliquer en prenant la limite du taux de variation

$$\frac{g(t+h)-g(t)}{h} = \frac{3(t+h)-3t}{h} = 3 \text{ quand } h \text{ tend vers } 0.$$

$g(t) = \int_0^t v(u) du$ est une primitive de v .



Exemple 3

Voir [Notebook](#) et [Corrigé](#) (suivez les liens).

Exemple 4 Question 1

Soit f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

- f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times (-t) e^{-\frac{t^2}{2}}$. Pour tout réel $t > 0$, on a $f'(t) < 0$ et $f'(0) = 0$.

On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, on a par composition $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} = 0$.

Exemple 4 Questions 2 et 3

f est dérivable donc continue sur $[0; +\infty[$.

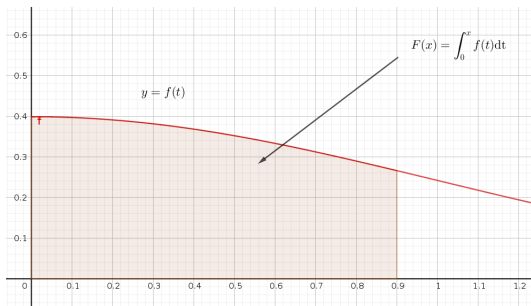
De plus, pour tout $t \geq 0$, on a $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ donc $f(t) \geq 0$.

On peut appliquer le théorème fondamental, qui nous permet d'affirmer que $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ et que pour tout réel $x \geq 0$, $F'(x) = f(x)$.

Notez qu'on utilise plutôt x pour F et t pour $F' = f$ mais qu'on pourrait écrire : pour tout réel $t \geq 0$, $F'(t) = f(t)$.

Puisque f est strictement positive sur $]0; +\infty[$ et ne s'annule qu'en 0, on en déduit que F est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Page suivante un graphique qui permet de comprendre pourquoi $F(x)$ aire sous la courbe de f entre 0 et x est croissante.

Exemple 4 Questions 2 et 3



Exemple 5 Question 1

Soient les fonctions f et F continues sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ définies par :

$$F(x) = \tan x - x \quad \text{et} \quad f(x) = \tan^2 x$$

F est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et pour tout réel $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, on a :

$$F'(x) = \frac{\cos(x) \times \cos(x) - \sin(x) \times (-\sin(x))}{\cos^2(x)} - 1 = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} - 1$$

$$F'(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \tan^2 x$$

F est donc une primitive de f .

Exemple 5 Question 2 a)

Soient g et G les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1 + \ln x}{x} \quad \text{et} \quad G(x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + \ln x$$

G est dérivable sur $]0; +\infty[$, et pour tout réel $x > 0$, on a :

$$G'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} \times 2 \ln(x) + \frac{1}{x} = \frac{1 + \ln x}{x}$$
$$G'(x) = g(x)$$

G est donc une primitive de g .

Notons que M définie par $M(x) = G(x) + 1$, a même dérivée g que G donc c'est aussi une primitive de g . On peut remplacer 1 par une constante k , toute fonction de la forme $G(x) + k$ est une primitive de g .

Exemple 5 Question 2 b)

$$G(e) = \frac{1}{2} (\ln e)^2 + \ln e = \frac{3}{2}.$$

La fonction H définie par $H(x) = G(x) - G(e) = G(x) - \frac{3}{2}$, s'annule en e et a pour dérivée $H' = G' = g$ donc c'est une primitive de g qui s'annule en e .

Supposons qu'il existe une autre primitive N de g qui s'annule en e , on a $(H - N)' = H' - N' = g - g = 0$ donc $H - N$ est constante. De plus, $(H - N)(e) = 0$ donc $H - N = 0$ donc $H = N$.

H est donc l'unique primitive de g qui s'annule en e .

Exemple 6 Question 1) Partie 1

Chaque fonction f considérée est continue donc admet des primitives sur son intervalle de définition.

- a $f(x) = 4$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = 4x + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

- b $f(x) = 0$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

- c $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = 2\sqrt{x} + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

- d $f(x) = 3 + x + x^4$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = 3x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x^5 + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

Exemple 6 Question 1) Partie 2

Chaque fonction f considérée est continue donc admet des primitives sur son intervalle de définition.

- a $f(x) = \sin(2x)$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

- b $f(x) = \cos(3x)$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x) + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

- c $f(x) = \frac{1}{x^4}$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{-4+1}x^{-4+1} + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

Exemple 6 Question 1) Partie 3

Chaque fonction f considérée est continue donc admet des primitives sur son intervalle de définition.

- a $f(x) = e^{-2x}$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{-2}e^{-2x} + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

- b $f(x) = \frac{-1}{x}$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = -\ln(|x|) + k = -\ln(-x) + k \text{ avec } -x > 0 \text{ et } k \text{ constante réelle}$$

Exemple 6 Question 2)

Soit la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $F : x \mapsto x \ln x - x + 1$
Pour tout réel $x > 0$, on a, en appliquant la formule de dérivation d'un produit pour $x \ln(x)$:

$$F'(x) = x \times \frac{1}{x} + 1 \times \ln(x) - 1 = \ln(x)$$

F est donc une primitive de la fonction \ln . La primitive G de \ln qui s'annule en \sqrt{e} , est donc de la forme $G(x) = F(x) + k$. Il suffit de déterminer k en évaluant G en \sqrt{e} :

$$G(\sqrt{e}) = F(\sqrt{e}) + k = \frac{1}{2}\sqrt{e} - \sqrt{e} + 1 + k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}\sqrt{e} - 1$$

La primitive de \ln qui s'annule en \sqrt{e} est donc
 $G(x) = x \ln x - x + \frac{1}{2}\sqrt{e}$.

Exemple 6 Question 2)

Soit la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $F : x \mapsto x \ln x - x + 1$
Pour tout réel $x > 0$, on a, en appliquant la formule de dérivation d'un produit pour $x \ln(x)$:

$$F'(x) = x \times \frac{1}{x} + 1 \times \ln(x) - 1 = \ln(x)$$

F est donc une primitive de la fonction \ln . La primitive G de \ln qui s'annule en \sqrt{e} , est donc de la forme $G(x) = F(x) + k$. Il suffit de déterminer k en évaluant G en \sqrt{e} :

$$G(\sqrt{e}) = F(\sqrt{e}) + k = \frac{1}{2}\sqrt{e} - \sqrt{e} + 1 + k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}\sqrt{e} - 1$$

La primitive de \ln qui s'annule en \sqrt{e} est donc
 $G(x) = x \ln x - x + \frac{1}{2}\sqrt{e}$.

Exemple 7 Partie 1

- ① $f(x) = x^2 - 2x - 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + e^x$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - x + \frac{1}{x} - \ln(|x|) + e^x + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

- ② $f(x) = \cos(4x - 1) - 2\sin(2x)$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{4} \sin(4x - 1) + 2 \times \frac{1}{2} \cos(2x) + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

- ③ $f(x) = \frac{e^{731x}}{(e^{731x} + 1)^2}$ est de la forme $\frac{1}{731} \frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = e^{731x} + 1$, donc admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = -\frac{1}{u(x)} + k = -\frac{1}{731} \frac{1}{e^{731x} + 1} + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

Exemple 7 Partie 2

- ① $f(x) = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$ est de la forme $-\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = e^{-x} + 1$, donc admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = -\ln(|u(x)|) + k = -\ln(|e^{-x} + 1|) + k = -\ln(e^{-x} + 1) + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

- ② $f(x) = \frac{x}{e^{x^2}} = xe^{-x^2}$ est de la forme $-\frac{1}{2}u'e^u$ avec $u(x) = -x^2$, donc admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = -\frac{1}{2}e^{u(x)} + k = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Exemple 7 Partie 3

- ① $f(x) = \frac{1}{x \ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \ln(x)$, donc admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \ln(|u(x)|) + k = \ln(|\ln(x)|) + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Sur $]0; 1[$, on a $\ln(x) < 0$ donc $F(x) = \ln(-\ln(x)) + k$.

Sur $]1; +\infty[$, on a $\ln(x) > 0$ donc $F(x) = \ln(\ln(x)) + k$.

- ② $f(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$ est de la forme $u'e^u$ avec $u(x) = \sin(x)$, donc admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = e^{u(x)} + k = e^{\sin(x)} + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

- ③ $f(x) = \frac{1}{x} \times (\ln x)^2$ est de la forme $u'u^2$ avec $u(x) = \ln(x)$, donc admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{3}u^3(x) + k = \frac{1}{3}(\ln(x))^3 + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Exemple 8 Partie 1

On considère les courbes d'équations $y = 1$, $y = x$ et $y = x^2$ sur l'intervalle $[0; 1]$.

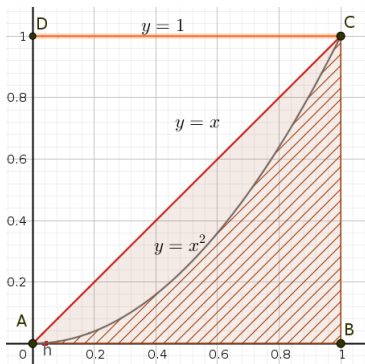
Pour tout réel $x \in [0; 1]$, on a :

$$0 \leq x \leq 1$$

on multiplie par $x \geq 0$

$$0 \leq x^2 \leq x \leq 1$$

Exemple 8 Figure



Exemple 8 Partie 2

Puisque pour tout réel $x \in [0; 1]$, on a $0 \leq x^2 \leq x \leq 1$, on en déduit que : la courbe d'équation $y = x^2$ est donc en dessous de la droite d'équation $y = x$, elle même en-dessous de la droite d'équation $y = 1$.

Par définition de l'intégrale d'une fonction continue positive comme aire du domaine « sous sa courbe » (délimité par sa courbe, l'axe des abscisses et les deux droites parallèles à l'axe des ordonnées passant par les bornes de l'intervalle), on en déduit que :

$$I = \int_0^1 x^2 \, dx \leq K = \int_0^1 x \, dx \leq J = \int_0^1 1 \, dx$$

Exemple 8 Partie 3

De plus, par additivité des aires, l'intégrale $L = \int_0^1 1 - x^2 \, dx$ représente l'aire du domaine entre la droite d'équation $y = 1$ et la courbe d'équation $y = x^2$, de même $M = \int_0^1 x - x^2 \, dx$ représente l'aire du domaine entre la droite d'équation $y = x$ et la courbe d'équation $y = x^2$.

On peut noter que pour tout réel $x \in [0; 1]$, on a $0 \leq x^2 \leq x \leq 1$, donc $0 \leq x - x^2 \leq 1 - x^2$ et donc $M \leq L$.

Exemple 9 Partie 1

Calculer les intégrales suivantes :

$$\textcircled{1} \int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx = [2\sqrt{e^x+1}]_{-1}^1 = 2\sqrt{e^1+1} - 2\sqrt{e^{-1}+1};$$

$$\textcircled{2} \int_2^4 \frac{1}{(2x-1)^4} dx = \left[\frac{1}{2} \times \frac{1}{-4+1} (2x-1)^{-4+1} \right]_2^4$$
$$\int_2^4 \frac{1}{(2x-1)^4} dx = \frac{1}{2} \times \frac{1}{-4+1} (7)^{-4+1} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{-4+1} (3)^{-4+1}$$

$$\textcircled{3} \int_0^{2\pi} \cos(\theta) d\theta = [\sin(\theta)]_0^{2\pi} = 0 - 0 = 0;$$

$$\textcircled{4} \int_0^\pi \cos(2\theta) d\theta = \left[\frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^\pi = 0 - 0 = 0;$$

$$\textcircled{5} \int_{-4}^{-2} (3x-1)^6 dx = \left[\frac{1}{3} \times \frac{1}{7} (3x-1)^7 \right]_{-4}^{-2} = \frac{1}{21} (-7^7 + 13^7);$$

$$\textcircled{6} \int_0^x \sin^2(t) dt. \text{ Il faut linéariser } \sin^2(t) \text{ avec les formules de duplication du sinus (voir chapitre sur les complexes Partie$$

$$2) : \sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2} \text{ donc :}$$

$$\int_0^x \sin^2(t) dt = \left[\frac{1-\cos(2t)}{2} \right]_0^x = \frac{1-\cos(2x)}{2} - 0$$

Exemple 9 Partie 2

Calculer les intégrales suivantes :

① $\int_e^{e^3} \frac{1}{x \ln x} dx = [\ln(|\ln(x)|)]_e^{e^3} = \ln(\ln(3)) - \ln(1) = \ln(\ln(3))$

② $\int_0^x \frac{1}{1+e^t} dt$ Ici il faut transformer l'expression pour faire apparaître une forme $\frac{u'}{u}$ (ici $-\frac{u'}{u}$). L'astuce classique avec l'exponentielle : $e^t \times e^{-t} = 1$.

$$\int_0^x \frac{1}{1+e^t} dt = \int_0^x \frac{e^{-t} \times 1}{e^{-t}(1+e^t)} dt = \int_0^x \frac{e^{-t} \times 1}{e^{-t} + 1} dt$$

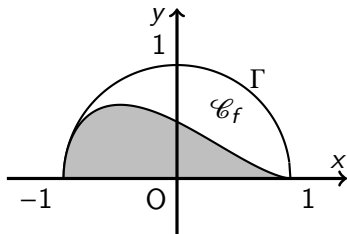
$$\text{Puis : } \int_0^x \frac{e^{-t}}{e^{-t} + 1} dt = [-\ln(|e^{-t} + 1|)]_0^x = -\ln(e^{-x} + 1) + \ln(2)$$

③ $\int_2^e \frac{1}{x(\ln(x))^2} dx = \left[-\frac{1}{\ln(x)} \right]_2^e = -\frac{1}{\ln(e)} + \frac{1}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)} - 1$ Ici on a écrit $\frac{1}{x(\ln(x))^2} = \frac{u'(x)}{u^2(x)}$ avec $u(x) = \ln(x)$ pour déterminer une primitive qui est $-\frac{1}{u(x)}$.

Exemple 10 Partie 1

Le demi-cercle Γ de rayon 1, représenté sur la figure ci-dessous, a pour équation $y = \sqrt{1-x^2}$.

La partie grisée est comprise entre l'axe des abscisses d'équation $y = 0$ et la courbe \mathcal{C}_f de la fonction f définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = \frac{1}{2}(1-x)\sqrt{1-x^2}$.



Exemple 10 Partie 2

- $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ est l'aire du demi-disque de rayon 1 donc c'est $\frac{1}{2} \times \pi \times 1^2 = \frac{\pi}{2}$.
- Pour tout réel $x \in [-1; 1]$, si on note $g(x) = x\sqrt{1-x^2}$, on a $g(-x) = -g(x)$ donc par symétrie centrale de centre l'origine du repère $\int_{-1}^0 g(x) dx$ est l'opposé de l'aire du domaine sous la courbe de g sur l'intervalle $[0; 1]$.

$$\text{On a donc } \int_{-1}^0 g(x) dx = -\int_0^1 g(x) dx \Leftrightarrow \int_{-1}^0 x\sqrt{1-x^2} dx = -\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx.$$

Exemple 10 Partie 3

- $$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1-x)\sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-x)\sqrt{1-x^2}dx$$
par linéarité.

De nouveau par linéarité, on a

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx - \int_{-1}^1 x\sqrt{1-x^2}dx \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \int_{-1}^1 x\sqrt{1-x^2}dx \right).$$

En appliquant la relation de Chasles, on a

$$\int_{-1}^1 x\sqrt{1-x^2}dx = \int_{-1}^0 x\sqrt{1-x^2}dx + \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx$$

D'après la propriété d'antisymétrie de la question 2), il vient $-\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx + \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = 0$.

Finalement, on a
$$\boxed{\int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{\pi}{4}}.$$

Exemple 11

Soient f et g deux fonctions continues sur $[1; 5]$, on donne :

$$I = \int_1^2 f(x)dx = -3 \quad J = \int_5^2 f(x)dx = 2 \quad K = \int_1^5 g(x)dx = 12$$

Calculer $L = \int_1^5 f(x)dx$, $M = \int_1^5 (f(x) + g(x))dx$ puis
 $N = \int_1^5 (2f(x) - 3g(x))dx$.

- On applique la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} L &= \int_1^5 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx = \\ &\int_1^2 f(x)dx - \int_5^2 f(x)dx = I - J = -5 \end{aligned}$$

- On applique la propriété de linéarité :

$$M = \int_1^5 (f(x) + g(x))dx = \int_1^5 f(x)dx + \int_1^5 g(x)dx = I + K = -5 + 12 = 7$$

- On applique la propriété de linéarité :

$$\begin{aligned} N &= \int_1^5 (2f(x) - 3g(x))dx = 2 \int_1^5 f(x)dx - 3 \int_1^5 g(x)dx = \\ &2 \times (-5) - 3 \times (12) = -46 \end{aligned}$$

Exemple 12 Question 1)

Déterminer le signe des intégrales suivantes :

- $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x \, dx$

Pour tout réel $x \in [\frac{1}{2}; 1]$, on a :

Exemple 12 Question 1)

Déterminer le signe des intégrales suivantes :

- $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x \, dx$

Pour tout réel $x \in [\frac{1}{2}; 1]$, on a :

$$0 \geq \ln(x)$$

donc par croissance de l'intégrale on a :

$$0 \geq \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x \, dx$$

- $\int_1^0 x^2 \, dx$

- $\int_1^{\frac{1}{e}} \ln x \, dx$

Exemple 12 Question 1)

Déterminer le signe des intégrales suivantes :

- $I = \int_1^0 x^2 \, dx$

Pour tout réel $x \in [0; 1]$, on a :

Exemple 12 Question 1)

Déterminer le signe des intégrales suivantes :

- $I = \int_1^0 x^2 dx$

Pour tout réel $x \in [0; 1]$, on a :

$$0 \leq x^2$$

donc par croissance de l'intégrale on a :

$$0 \leq \int_0^1 x^2 dx$$

donc par linéarité :

$$0 \geq - \int_0^1 x^2 dx$$

$$0 \geq \int_1^0 x^2 dx$$

Exemple 12 Question 1)

Déterminer le signe des intégrales suivantes :

- $I = \int_1^{\frac{1}{e}} \ln x \, dx$

Pour tout réel $x \in \left[\frac{1}{e}; 1\right]$, on a :

Exemple 12 Question 1)

Déterminer le signe des intégrales suivantes :

- $I = \int_1^{\frac{1}{e}} \ln x \, dx$

Pour tout réel $x \in [\frac{1}{e}; 1]$, on a :

$$0 \geq \ln x$$

donc par croissance de l'intégrale on a :

$$0 \geq \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x \, dx$$

donc par linéarité :

$$0 \leq - \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x \, dx$$

$$0 \leq \int_1^{\frac{1}{e}} \ln x \, dx$$

Exemple 12 Question 2)

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par

$$u_n = \int_0^1 \ln(1+x^n) \, dx$$

Pour étudier le sens de variation de la suite (u_n) , deux méthodes sont possibles :

Exemple 12 Question 2)

Méthode 1 : On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$

Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

Exemple 12 Question 2)

Méthode 1 : On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$

Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \ln(1 + x^{n+1}) \, dx - \int_0^1 \ln(1 + x^n) \, dx$$

donc par linéarité :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \ln(1 + x^{n+1}) - \ln(1 + x^n) \, dx$$

Or pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x \in [0; 1]$, on a $0 \leq x \leq 1$ donc en multipliant tous les membres par $x^n \geq 0$, $0 \leq x^{n+1} \leq x^n$ puis par croissance de \ln , $\ln(1) \leq \ln(1 + x^{n+1}) \leq \ln(1 + x^n)$ donc $\ln(1 + x^{n+1}) - \ln(1 + x^n) \leq 0$ et par croissance de l'intégrale :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \ln(1 + x^{n+1}) - \ln(1 + x^n) \, dx \leq 0$$

On en déduit que la suite (u_n) est décroissante.

Exemple 12 Question 2)

Méthode 2 : $u_{n+1} \leq u_n$ par croissance de l'intégrale

Le principe est de comparer les expressions sous le signe d'intégration et d'en déduire les inégalités sur les intégrales par croissance de l'intégrale. C'est similaire à la méthode précédente mais avec une rédaction plus légère. Pour tout entier $n \geq 1$, pour tout réel $x \in [0; 1]$, on a :

Exemple 12 Question 2)

Méthode 2 : $u_{n+1} \leq u_n$ par croissance de l'intégrale

Le principe est de comparer les expressions sous le signe d'intégration et d'en déduire les inégalités sur les intégrales par croissance de l'intégrale. C'est similaire à la méthode précédente mais avec une rédaction plus légère. Pour tout entier $n \geq 1$, pour tout réel $x \in [0; 1]$, on a :

$$x \leq 1$$

on multiplie les deux membres par $x^n \geq 0$ puis on ajoute 1 et on compose par le \ln qui est croissant, on en déduit que :

$$\ln(1 + x^{n+1}) \leq \ln(1 + x^n)$$

Par croissance de l'intégrale, il vient :

$$\int_0^1 \ln(1 + x^{n+1}) \, dx \leq \int_0^1 \ln(1 + x^n) \, dx$$

et donc $u_{n+1} \leq u_n$ et la suite (u_n) est décroissante.

Exemple 12 Question 2)

Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $0 \leq u_n \leq \ln 2$ (début).
On utilise la croissance de l'intégrale. Pour tout entier $n \geq 1$, pour tout réel $x \in [0; 1]$, on a $0 \leq 1 + x^n \leq 2$ donc par croissance de la fonction \ln :

Exemple 12 Question 2)

Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $0 \leq u_n \leq \ln 2$ (début).
On utilise la croissance de l'intégrale. Pour tout entier $n \geq 1$, pour tout réel $x \in [0; 1]$, on a $0 \leq 1 + x^n \leq 2$ donc par croissance de la fonction \ln :

$$0 \leq \ln(1 + x^n) \leq \ln(2)$$

par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 0 \, dx \leq \int_0^1 \ln(1 + x^n) \, dx \leq \int_0^1 \ln(2) \, dx$$

par linéarité :

$$0 \times \int_0^1 1 \, dx \leq \int_0^1 \ln(1 + x^n) \, dx \leq \ln(2) \times \int_0^1 1 \, dx$$

Exemple 12 Question 2)

Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $0 \leq u_n \leq \ln 2$ (fin) :

Exemple 12 Question 2)

Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $0 \leq u_n \leq \ln 2$ (fin) :

par linéarité :

$$0 \times \int_0^1 1 \, dx \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) \, dx \leq \ln(2) \times \int_0^1 1 \, dx$$

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) \, dx \leq \ln(2)$$

$$0 \leq u_n \leq \ln(2)$$

La suite (u_n) est donc minorée par 0, comme elle est décroissante (question précédente), elle converge d'après le théorème de convergence monotone.

Exemple 12 Question 3)

Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, pour tout réel $x \in [0; 1]$ on a : $0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n$. En déduire la limite de la suite (u_n) .

On utilise encore la croissance de l'intégrale.

Pour tout entier $n \geq 1$, pour tout réel $x \in [0; 1]$:

on a $\ln(1+x) \leq x$ d'après une propriété de la fonction \ln (courbe de \ln en-dessous de toutes ses tangentes et la droite d'équation

$y = x + 1$ est sa tangente au point d'abscisse 0). On peut remplacer x par x^n : $0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n$. Par croissance de l'intégrale, on a :

Exemple 12 Question 3)

Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, pour tout réel $x \in [0; 1]$ on a : $0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n$. En déduire la limite de la suite (u_n) .

On utilise encore la croissance de l'intégrale.

Pour tout entier $n \geq 1$, pour tout réel $x \in [0; 1]$:

on a $\ln(1+x) \leq x$ d'après une propriété de la fonction \ln (courbe de \ln en-dessous de toutes ses tangentes et la droite d'équation

$y = x + 1$ est sa tangente au point d'abscisse 0). On peut remplacer x par x^n : $0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n$. Par croissance de l'intégrale, on a :

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) \, dx \leq \int_0^1 x^n \, dx$$

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) \, dx \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) \, dx \leq \frac{1}{n+1}$$

Exemple 12 Question 3)

Exemple 12 Question 3)

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) \, dx \leq \int_0^1 x^n \, dx$$

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) \, dx \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) \, dx \leq \frac{1}{n+1}$$

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exemple 13 Partie 1

Soit f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

- Démontrons que pour tout $t \in [2; +\infty[$ on a $0 \leq f(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t}$.

Pour tout $t \in [2; +\infty[$ on a :

Exemple 13 Partie 1

Soit f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

- Démontrons que pour tout $t \in [2; +\infty[$ on a $0 \leq f(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t}$.

Pour tout $t \in [2; +\infty[$ on a :

$$2 \leq t$$

$$2t \leq t^2$$

$$-t \geq -\frac{t^2}{2}$$

par croissance de la fonction exponentielle :

$$e^{-t} \geq e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t} \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Exemple 13 Partie 2

Soit f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Exemple 13 Partie 2

Soit f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

- Pour tout entier $n \geq 2$ on a :

Exemple 13 Partie 2

Soit f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

- Pour tout entier $n \geq 2$ on a :

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t}$$

donc par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \int_2^n f(t) dt \leq \int_2^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t} dt$$

$$0 \leq \int_2^n f(t) dt \leq \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t} \right]_2^n$$

$$0 \leq \int_2^n f(t) dt \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-n}$$

$$0 \leq \int_2^n f(t) dt \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-2}$$

Exemple 13 Partie 3

Démontrons que la suite $(u_n) = (\int_2^n f(t) \, dt)_{n \geq 2}$ est croissante.
Pour tout entier $n \geq 2$:

Exemple 13 Partie 3

Démontrons que la suite $(u_n) = (\int_2^n f(t) dt)_{n \geq 2}$ est croissante.
Pour tout entier $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}\int_2^{n+1} f(t) dt - \int_2^n f(t) dt &= \int_2^{n+1} f(t) dt + \int_n^2 f(t) dt \\ \int_2^{n+1} f(t) dt - \int_2^n f(t) dt &= \int_n^2 f(t) dt + \int_2^{n+1} f(t) dt \\ \int_2^{n+1} f(t) dt - \int_2^n f(t) dt &= \int_n^{n+1} f(t) dt\end{aligned}$$

Pour tout entier $n \geq 2$, on a $0 \leq f(t)$ sur $[n; n+1]$, donc par croissance de l'intégrale : $0 \leq \int_n^{n+1} f(t) dt$

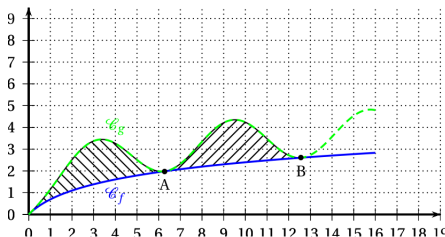
Pour tout entier $n \geq 2$, on a donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et donc la suite (u_n) est croissante. Comme elle est majorée par $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-2}$, elle converge d'après le théorème de convergence monotone.

Exemple 14

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0; 16]$ par

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x).$$

Dans un repère du plan (O, \vec{i}, \vec{j}) , on note \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les courbes représentatives des fonctions f et g . Ces courbes sont données ci-dessous.



Exemple 14

Pour tout $x \in [0 ; 16]$, on a $g(x) - f(x) = 1 - \cos(x)$.

Or $1 - \cos(x) \geq 0$, donc $g(x) - f(x) \geq 0$.

De plus $g(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = \cos(x) \Leftrightarrow x = k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Sur l'intervalle $[0 ; 16]$, on a donc $g(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2\pi \\ x = 4\pi \end{cases}$.

Le domaine hachuré sur le graphique est l'aire entre les courbes de f et de g sur $[0 ; 16]$.

Sachant que $g \geq f$, cette aire est égale à l'intégrale :

Exemple 14

Pour tout $x \in [0 ; 16]$, on a $g(x) - f(x) = 1 - \cos(x)$.

Or $1 - \cos(x) \geq 0$, donc $g(x) - f(x) \geq 0$.

De plus $g(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = \cos(x) \Leftrightarrow x = k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Sur l'intervalle $[0 ; 16]$, on a donc $g(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2\pi \\ x = 4\pi \end{cases}$.

Le domaine hachuré sur le graphique est l'aire entre les courbes de f et de g sur $[0 ; 16]$.

Sachant que $g \geq f$, cette aire est égale à l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^{4\pi} g(x) - f(x) \, dx &= \int_0^{4\pi} 1 - \cos(x) \, dx \\ \int_0^{4\pi} g(x) - f(x) \, dx &= [x + \sin(x)]_0^{4\pi} = 4\pi \end{aligned}$$

Exemple 15 Partie 1

Pour $t > 0$ la vitesse d'un mobile est $v(t) = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}$ (en m.s^{-1}).

- ① La distance parcourue entre les instants $t = 1$ et $t = e^2$ (en s) est égale à :

$$\begin{aligned}\int_1^{e^2} v(t) \, dt &= \int_1^{e^2} \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} \, dt \\ \int_1^{e^2} v(t) \, dt &= \left[-\frac{1}{t} + \ln(t) \right]_1^{e^2} \\ \int_1^{e^2} v(t) \, dt &= 2 - e^{-2} + 1 \text{ mètres}\end{aligned}$$

- ② La vitesse moyenne du mobile entre les instants $t = 1$ et $t = e^2$ est égale à :

$$\int_1^{e^2} v(t) \, dt = \frac{1}{e^2 - 1} \int_1^{e^2} \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} \, dt = \frac{3 - e^{-2}}{e^2 - 1} \text{ mètres par seconde}$$

Exemple 16

- ① Valeur moyenne de la fonction g définie sur $[-1; 1]$ par $g(x) = e^{-x}$.

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 g(x) \, dx = \frac{1}{2} [-e^{-x}]_{-1}^1 = \frac{1}{2} (e^{-1} - e^{-2})$$

- ② Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. On suppose que pour tout $x \in [a; b]$ on a : $m \leq f(x) \leq M$. Par croissance de l'intégrale :

$$m \int_a^b 1 \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M \int_a^b 1 \, dx$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a)$$

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \leq M$$

Exemple 16 Partie 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [-1; 1]$ par

$$f(x) = (x+1)e^{-x} + 1$$

- ① Pour tout réel x , on a $f'(x) = e^{-x} - e^{-x}(x+1) = -xe^{-x}$.

$f'(x)$ est donc du signe de $-x$ sur $[-1; 1]$ donc positive sur $[-1; 0]$ puis négative sur $[0; 1]$, donc f est croissante sur $[-1; 0]$ puis décroissante sur $[0; 1]$.

De plus, $f(-1) = 1$ et $f(1) = 2e^{-1} + 1$, donc le minimum de f sur $[0; 1]$ est $f(-1)$ et le maximum est $f(0) = 2$.

D'après la propriété démontrée à la question précédente, la valeur moyenne de f sur $[-1; 1]$ est encadrée par $f(-1)$ et $f(0)$:

$$f(-1) \leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) \, dx \leq f(0)$$