Fiche d'exercices n° 1 sur la géométrie dans l'espace

1) La trajectoire du premier sous-marin est paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = 140 - 60t \\ y(t) = 105 - 90t \\ z(t) = -170 - 30t \end{cases}$$

a) A l'instant $t = 0$, le sous-marin est en position $S_1(0)\,(140 ; 105 ; -170)$

b) La vitesse du sous-marin 1 est constante.

On peut calculer sa vitesse en prenant la distance parcourue pendant la 1ère seconde :

$t=0$ $\quad S_1(0)\,(140 ; 105 ; -170)$

$t=1$ $\quad S_1(1)\,(80 ; 15 ; -200)$

$\overrightarrow{S_1(0)S_1(1)}\,(-60 ; -90 ; -30)$ vecteur directeur de la trajectoire

La distance parcourue est la norme du vecteur $\overrightarrow{S_1(0)S_1(1)}$

$$\underbrace{\overrightarrow{S_1(0)S_1(1)} \cdot \overrightarrow{S_1(0)S_1(1)}}_{\text{carré scalaire}} = (-60)^2 + (-90)^2 + (-30)^2$$

$$= 3600 + 8100 + 900$$

$$\overrightarrow{S_1(0)S_1(1)} \cdot \overrightarrow{S_1(0)S_1(1)} = 12600$$

La norme du vecteur est :

$$\sqrt{12600} \approx 112{,}25 \text{ m}$$

C'est la distance parcourue en 1 s donc la vitesse en $m.s^{-1}$.

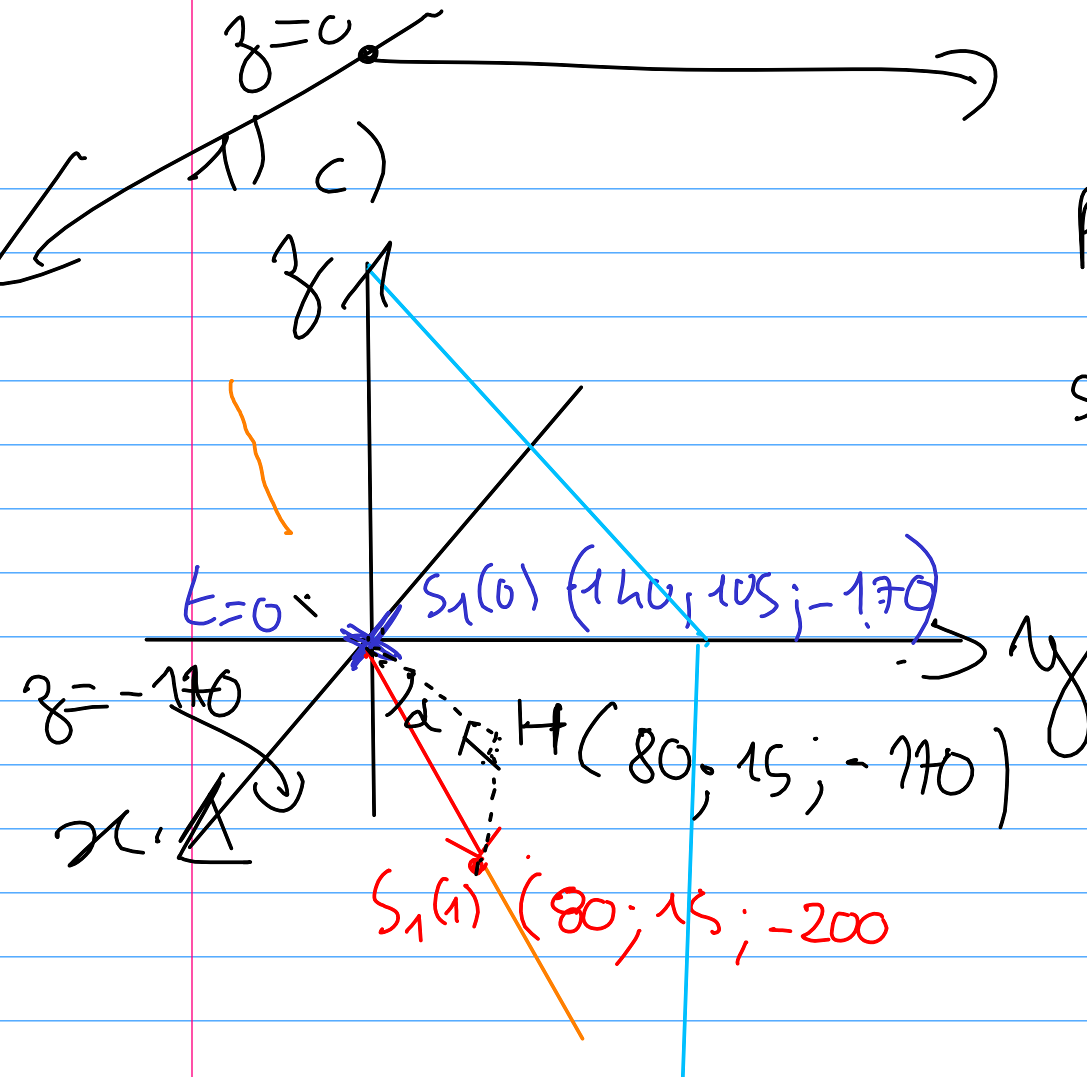
<u>Rque</u> : Une autre méthode :

$$\underset{\text{position}}{S_1(t)\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}} \qquad \underset{\text{vitesse}}{\vec{v}(t)\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}}$$

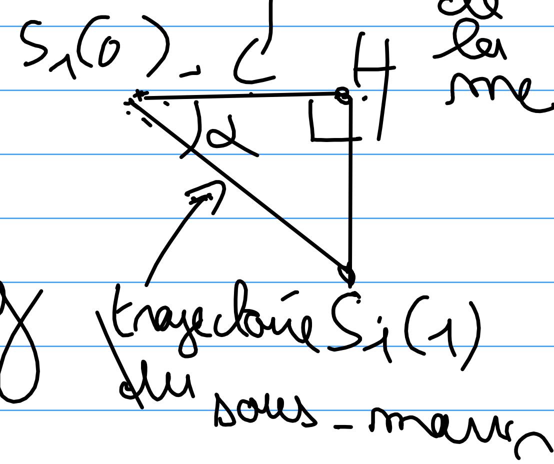
norme de la vitesse :

$$\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

1) c)



Plan de coupe



On appelle H le projeté orthogonal du point $S_1(1)$ dans le plan d'équation $z=-170$ qui est parallèle au niveau de la mer et qui contient $S_1(0)$

On a : $S_1(0)\,(140\,;\,105\,;\,-170)$

$H\,(80\,;\,15\,;\,-170)$

$S_1(1)\,(80\,;\,15\,;\,-200)$

$\overrightarrow{S_1(0)S_1(1)}\begin{pmatrix}-60 ; -90 ; -30\end{pmatrix}$

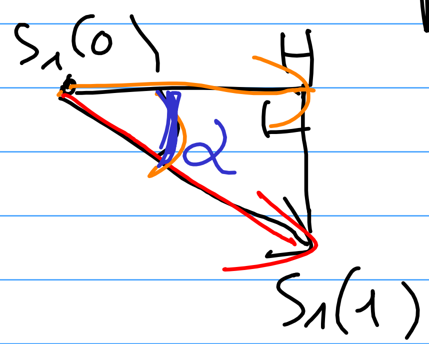
$\overrightarrow{S_1(0)H}\begin{pmatrix}-60 ; -90 ; 0\end{pmatrix}$

On fait le produit scalaire :

$\overrightarrow{S_1(0)S_1(1)} \cdot \overrightarrow{S_1(0)H} = (-60)^2 + (-90)^2$

$\overrightarrow{S_1(0)S_1(1)} \cdot \overrightarrow{S_1(0)H} = 11700$

D'après la propriété du cosinus :



$$\underbrace{\overrightarrow{S_1(0)S_1(1)} \cdot \overrightarrow{S_1(0)H}}_{\text{déjà calculé } 11700} = S_1(0)S_1(1) \times S_1(0)H \times \cos(\alpha)$$

deux longueurs

Pour calculer les longueurs $S_1(0)S_1(1)$ et $S_1(0)H$ il suffit de connaître les coordonnées des vecteurs

$\overrightarrow{S_1(0)S_1(1)}\left(-60\,;-90\,;-30\right)$

donc $S_1(0)S_1(1) = \sqrt{(-60)^2+(-90)^2+(-30)^2}$

$\overrightarrow{S_1(0)H}\left(-60\,;-90\,;\,0\right)$

donc $S_1(0)H = \sqrt{(-60)^2+(-90)^2+0^2}$

donc $\cos(\alpha) = \dfrac{11700}{\sqrt{12600} \times \sqrt{11700}}$

$\cos(\alpha) \simeq 0{,}963$

avec la touche $\cos^{-1}$ on obtient l'angle en degrés.

donc $\alpha \simeq 15{,}5°$

$C(0;4;-2)$

Exemple 1 : 1) $A(7;2;3)$ $B(0;1;4)$

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-7\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-7\\2\\-5\end{pmatrix}$

On calcule le produit scalaire :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (-7)^2 + (-1)\times 2 + 1\times(-5)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 49 - 2 - 5 = 42$

Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \neq 0$

Donc (AB) et (AC) ne sont pas perpendiculaires

3) a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$

b) Calculons $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}$:

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE})\cdot\overrightarrow{BD}$

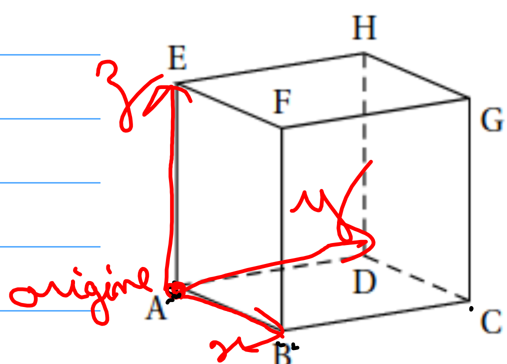
$= \underbrace{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}_{0} + \underline{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}}$

Or $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$ car $[AC] \perp [BD]$

car $[AC]$ et $[BD]$ diagonales du carré ABCD

De plus $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$
car (AE) et (BF) sont des droites orthogonales au plan (ABC)
donc (AE) orthogonale à toute droite du plan (ABD) donc à (BD)
Donc $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 + 0 = 0$

c)



On choisit le repère orthonormal
$(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

A (0 ; 0 ; 0)
G (1 ; 1 ; 1)
B (1 ; 0 ; 0)
E (0 ; 0 ; 1)

$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 1 \times (-1) + 1 \times 0 + 1 \times 1$

donc $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = -1 + 1 = 0$

donc $\overrightarrow{AG}$ orthogonal à $\overrightarrow{BE}$

donc (AG) orthogonale à (BE)

d) D'une part $(AG) \perp (BD)$

D'autre part $(AG) \perp (BE)$

Donc (AG) orthogonale au plan (BDE)