Exemples du cours du chapitre calcul intÃľgral Partie 2 2019/2020

Frédéric Junier

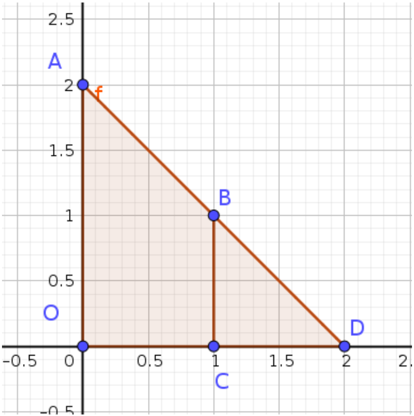
Lycée du Parc
1 Boulevard Anatole France
69006 Lyon

18 mars 2020

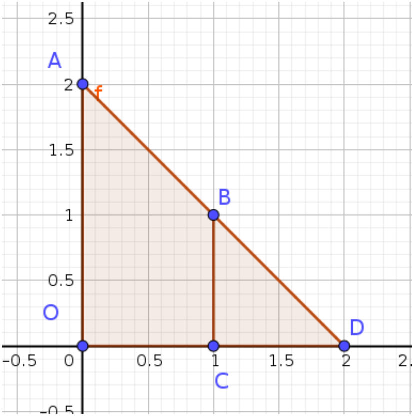
Table des matières

Exemple 1 Partie 1

Soit f la fonction définie sur $[0\,;2]$ par $f(x) = 2 - x$.
La surface dont l'aire est égale à intégrale $I = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ est le triangle BCD rectangle isocèle en C dont l'aire est $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$.



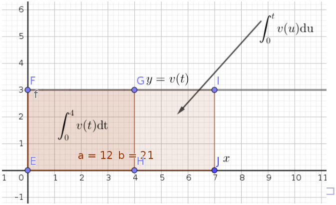
Soit f la fonction définie sur $[0;2]$ par $f(x) = 2 - x$.
La surface dont l'aire est égale à intégrale $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est le trapèze $OABC$ rectangle isocèle en O dont l'aire est $\frac{1}{2} \times (OA + BC) \times OC = \frac{3}{2}$.



Exemple 2 Question 1

Soit $M(t)$ un point mobile sur un axe tel que à chaque instant $t \in [0\,;+\infty[$ (en secondes) on connaît sa vitesse instantanée $v(t)$ en mètres par seconde.
A l'instant $t=0$, le point mobile est à l'origine de l'axe et pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, on a $v(t)=3$ m.s^{-1}.

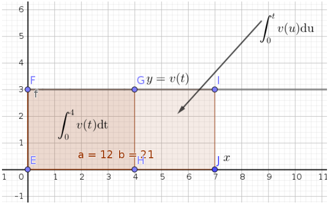
- **Question 1** La fonction v est constante donc dérivable donc continue sur $[0\,;+\infty[$.
  $\int_0^4 v(t)\mathrm{d}t$ est l'aire du rectangle $EFGH$ c'est-à-dire $4\times 3=12$.
  On peut l'interpréter comme la distance parcourue par le mobile en 3 secondes. Notons que la dimension de l'intégrale est celle de $v(t)\mathrm{d}t$: vitesse $\times$ temps $=$ distance.



Exemple 2 Question 2

- **Question 2** $\int_2^5 v(t)\mathrm{d}t$ est égale à $(5-2)\times 3 = 9$. C'est la distance parcourue par le mobile entre les instants $t=2$ et $t=5$ à une vitesse de 3 m.s^{-1}. $\frac{1}{5-2}\int_2^5 v(t)\mathrm{d}t$ est égale à $\frac{\text{distance}}{\text{temps}} = \frac{9}{3}$, c'est la vitesse moyenne du mobile entre les instants $t=2$ et $t=5$. Comme sa vitesse est constante, c'est sa vitesse instantanée à tout instant. On a un exemple, d'utilisation de l'intégrale dans un calcul de valeur moyenne. Notons que $\frac{1}{5-2}\int_2^5 v(t)\mathrm{d}t$ a la même dimension que $v(t)$, c'est une vitesse.

- **Question 3** $g(t) = \int_0^t v(u)\,\mathrm{d}u$ est l'aire du rectangle $EFIJ$ c'est-à-dire $t \times 3 = 3t$.
  On peut l'interpréter comme la distance parcourue par le mobile en $t3$ secondes.
  g est une fonction linéaire donc elle est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $g'(t) = 3$. On remarque que $g'(t) = v(t)$. On peut l'expliquer en prenant la limite du taux de variation $\frac{g(t+h)-g(t)}{h} = \frac{3(t+h)-3t}{h} = 3$ quand h tend vers 0.
  $g(t) = \int_0^t v(u)\,\mathrm{d}u$ est une primitive de v.



Exemple 3

Voir Notebook et Corrigé (suivez les liens).

Soit f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$.

- f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $f'(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times(-t)e^{-\frac{t^2}{2}}$. Pour tout réel $t>0$, on a $f'(t)>0$ et $f'(0)=0$.
  On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
  Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$, on a par composition $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}=0$.

f est dérivable donc continue sur $[0\,;+\infty[$.
De plus, pour tout $t \geqslant 0$, on a $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ donc $f(t) \geqslant 0$.
On peut appliquer le théorème fondamental, qui nous permet d'affirmer que $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et que pour tout réel $x \geqslant 0$, $F'(x) = f(x)$.
Notez qu'on utilise plutôt x pour F et t pour $F' = f$ mais qu'on pourrait écrire : pour tout réel $t \geqslant 0$, $F'(t) = f(t)$.
Puisque f est strictement positive sur $]0\,;+\infty[$ et ne s'annule qu'en 0, on en déduit que F est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. Page suivante un graphique qui permet de comprendre pourquoi $F(x)$ aire sous la courbe de f entre 0 et x est croissante.

Exemple 4 Questions 2 et 3

VCZ