Classe virtuelle du 23/03/2020

Frédéric Junier

Lycée du Parc
1 Boulevard Anatole France
69006 Lyon

23 mars 2020

Table des matières

Le point sur le calcul de primitives :

- Cours : connaître les tableaux des primitives usuelles et des opérations sur les primitives (pages 8 et 9 du cours)
- S'exercer : QCM Calcul Intégral 2 sur Pronote

Intégrale d'une fonction positive

Théorème 4, page 10 du cours :

Theorem

Soit f une fonction continue positive sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I tels que $a < b$. Soit F une primitive de f. On a :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Le calcul de l'intégrale ne dépend pas de la primitive choisie.

On note aussi : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$

Intégrale d'une fonction positive : un exemple

- Comment calculer $\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ qui représente l'aire sous l'hyperbole entre les abscisses 1 et 2 dans un repère orthonormal d'unité 3 cm ?

Intégrale d'une fonction positive : un exemple

- Comment calculer $\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ qui représente l'aire sous l'hyperbole entre les abscisses 1 et 2 dans un repère orthonormal d'unité 3 cm ?
- On détermine d'abord une primitive de $\frac{1}{x}$, par exemple $F(x) = \ln(x)$.

Intégrale d'une fonction positive : un exemple

- Comment calculer $\int_1^2 \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x$ qui représente l'aire sous l'hyperbole entre les abscisses 1 et 2 dans un repère orthonormal d'unité 3 cm ?
- On détermine d'abord une primitive de $\frac{1}{x}$, par exemple $F(x) = \ln(x)$.
- Ensuite, on calcule $F(2) - F(1) = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$

Intégrale d'une fonction positive : un exemple

- Comment calculer $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$ qui représente l'aire sous l'hyperbole entre les abscisses 1 et 2 dans un repère orthonormal d'unité 3 cm ?
- On détermine d'abord une primitive de $\frac{1}{x}$, par exemple $F(x) = \ln(x)$.
- Ensuite, on calcule $F(2) - F(1) = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$
- Enfin, on donne le résultat en unités d'aires : $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = \ln(2)$ u.a. et on convertit éventuellement en cm^2, ici 1 u.a. égale à $3 \times 3 = 9\ \text{cm}^2$. On a donc $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = \ln(2) \times 9 = 9\ln(2)\ \text{cm}^2$.

Intégrale d'une fonction positive : exemple 8

Voir le corrigé.

Dans cet exercice on calcule des intégrales avec la définition générale de l'intégrale (cours page 11) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ où f continue mais pas forcément positive et sans ordre fixé sur a et b.

- $\int_{-2}^{4} x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{4} = \frac{16}{2} - \frac{4}{2} = 6$
- $\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln(x)]_{-2}^{4} = \ln(\mathrm{e}) - \ln(1) = 1$
- $\int_{-\mathrm{e}}^{-1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\ln(\left|x\right|)\right]_{-\mathrm{e}}^{-1} = \ln(1) - \ln(\mathrm{e}) = -1$
- $\int_{4}^{25} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = [2\sqrt{x}]_{4}^{25} = 2\sqrt{25} - 2\sqrt{4} = 10 - 4 = 6$
- $\int_{0}^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos(x)]_{0}^{\pi} = 1 - (-1) = 2$
- $\int_{\pi}^{0} \sin(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos(x)]_{\pi}^{0} = -1 - (-(-1)) = -2$

Calculer les intégrales suivantes (exemple 9 du cours à faire en autonomie pendant la séance de mardi).

- $\int_1^4 x^3 + 2x \ \mathrm{d}x$
- $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} \frac{\ln(x)}{x} \ \mathrm{d}x$
- $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} \frac{1}{x(\ln(x)+1)} \ \mathrm{d}x$
- $\int_2^0 \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}} \ \mathrm{d}x$

Exemples de calcul d'intégrale : réponses

Calculer les intégrales suivantes (exemple 9 du cours à faire en autonomie pendant la séance de mardi).

- $\int_1^4 x^3 + 2x \, \mathrm{d}x = ?$

Exemples de calcul d'intégrale : réponses

Calculer les intégrales suivantes (exemple 9 du cours à faire en autonomie pendant la séance de mardi).

- $\int_1^4 x^3 + 2x \, \mathrm{d}x = ?$
- $\int_1^4 x^3 + 2x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4 + x^2\right]_1^4 = \frac{315}{4}$
- $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} \frac{\ln(x)}{x} \, \mathrm{d}x = ?$

Exemples de calcul d'intégrale : réponses

Calculer les intégrales suivantes (exemple 9 du cours à faire en autonomie pendant la séance de mardi).

- $\int_1^4 x^3+2x \, \mathrm{d}x = ?$
- $\int_1^4 x^3+2x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4+x^2\right]_1^4 = \frac{315}{4}$
- $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} \frac{\ln(x)}{x} \, \mathrm{d}x = ?$
- $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} \frac{\ln(x)}{x} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} = \frac{1}{2}\left(3^2-1\right) = 4$
- $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} \frac{1}{x(\ln(x)+1)} \, \mathrm{d}x = ?$

Exemples de calcul d'intégrale : réponses

Calculer les intégrales suivantes (exemple 9 du cours à faire en autonomie pendant la séance de mardi).

- $\int_1^4 x^3 + 2x \ \mathrm{d}x = ?$
- $\int_1^4 x^3 + 2x \ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4 + x^2\right]_1^4 = \frac{315}{4}$
- $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} \frac{\ln(x)}{x} \ \mathrm{d}x = ?$
- $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} \frac{\ln(x)}{x} \ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} = \frac{1}{2}\left(3^2 - 1\right) = 4$
- $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} \frac{1}{x(\ln(x)+1)} \ \mathrm{d}x = ?$
- $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} \frac{1}{x(\ln(x)+1)} \ \mathrm{d}x = \left[\ln(\left|\ln(x) + 1\right|)\right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} = \ln(4) - \ln(2)$
- $\int_2^0 \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}} \ \mathrm{d}x$

Exemples de calcul d'intégrale : réponses

Calculer les intégrales suivantes (exemple 9 du cours à faire en autonomie pendant la séance de mardi).

- $\int_1^4 x^3 + 2x \ \mathrm{d}x = ?$
- $\int_1^4 x^3 + 2x \ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4 + x^2\right]_1^4 = \frac{315}{4}$
- $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} \frac{\ln(x)}{x} \ \mathrm{d}x = ?$
- $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} \frac{\ln(x)}{x} \ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} = \frac{1}{2}\left(3^2 - 1\right) = 4$
- $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} \frac{1}{x(\ln(x)+1)} \ \mathrm{d}x = ?$
- $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} \frac{1}{x(\ln(x)+1)} \ \mathrm{d}x = \left[\ln(\left|\ln(x)+1\right|)\right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} = \ln(4) - \ln(2)$
- $\int_2^0 \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}} \ \mathrm{d}x$
- $\int_2^0 \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}} \ \mathrm{d}x = \left[2\sqrt{\mathrm{e}^x+1}\right]_2^0 = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{\mathrm{e}^2+1}$

Propriété de l'intégrale : Chasles

Theorem

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Un exemple, on donne $\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = 5$ et $\int_0^5 f(x)\ \mathrm{d}x = 7$

- Calculer $\int_2^0 f(x)\ \mathrm{d}x$:

Propriété de l'intégrale : Chasles

Theorem

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Un exemple, on donne $\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = 5$ et $\int_0^5 f(x)\ \mathrm{d}x = 7$

- Calculer $\int_2^0 f(x)\ \mathrm{d}x$:
- $\int_2^0 f(x)\ \mathrm{d}x + \int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_2^2 f(x)\ \mathrm{d}x = 0$ donc $\int_2^0 f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = -5$
- Calculer $\int_2^5 f(x)\ \mathrm{d}x$:

Propriété de l'intégrale : Chasles

Theorem

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Un exemple, on donne $\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = 5$ et $\int_0^5 f(x)\ \mathrm{d}x = 7$

- Calculer $\int_2^0 f(x)\ \mathrm{d}x$:
- $\int_2^0 f(x)\ \mathrm{d}x + \int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_2^2 f(x)\ \mathrm{d}x = 0$ donc $\int_2^0 f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = -5$
- Calculer $\int_2^5 f(x)\ \mathrm{d}x$:
- $\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x + \int_2^5 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^5 f(x)\ \mathrm{d}x = 0$ donc : $\int_2^5 f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_0^5 f(x)\ \mathrm{d}x - \int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = 7 - 5 = 2$

Propriété de l'intégrale : Linéarité

Theorem

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

Un exemple, on donne $\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = 5$ et $\int_2^0 g(x)\ \mathrm{d}x = 6$

- Calculer $\int_0^2 3f(x)\ \mathrm{d}x$:

Propriété de l'intégrale : Linéarité

Theorem

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

Un exemple, on donne $\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = 5$ et $\int_2^0 g(x)\ \mathrm{d}x = 6$

- Calculer $\int_0^2 3f(x)\ \mathrm{d}x$:
- $\int_0^2 3f(x)\ \mathrm{d}x = 3\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = 15$
- Calculer $\int_0^2 3f(x) - 4g(x)\ \mathrm{d}x$:

Theorem

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

Un exemple, on donne $\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = 5$ et $\int_2^0 g(x)\ \mathrm{d}x = 6$

- Calculer $\int_0^2 3f(x)\ \mathrm{d}x$:
- $\int_0^2 3f(x)\ \mathrm{d}x = 3\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = 15$
- Calculer $\int_0^2 3f(x) - 4g(x)\ \mathrm{d}x$:
- $\int_0^2 3f(x) - 4g(x)\ \mathrm{d}x = 3\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x - 4\int_0^2 g(x)\ \mathrm{d}x$

  Attention à l'ordre des bornes ! $\int_0^2 g(x)\ \mathrm{d}x = -\int_2^0 g(x)\ \mathrm{d}x$

  Donc $\int_0^2 3f(x) - 4g(x)\ \mathrm{d}x = 3\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x + 4\int_2^0 g(x)\ \mathrm{d}x =$
  $3 \times 5 + 4 \times 6 = 29$

Attention aux confusions

Ne pas confondre les propriétés de Chasles et de linéarité :

- $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_3^6 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x$ par Chasles (bornes consécutives)
- $\int_0^3 2f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ par linéarité (mêmes bornes)
- $\int_0^3 2f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^3 3f(x)\,\mathrm{d}x$
  On ne peut pas simplifier cette somme d'intégrale, en appliquant Chasles et la linéarité on peut obtenir par exemple :
  $\int_0^3 2f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x =$
  $\int_0^3 3f(x)\,\mathrm{d}x + \int_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x + -\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$