

Exemples du cours du chapitre calcul intégral

Partie 2 2019/2020

Frédéric Junier

Lycée du Parc
1 Boulevard Anatole France
69006 Lyon

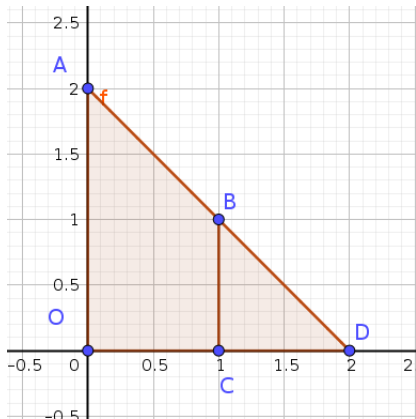
19 mars 2020

- Exemple 1
- Exemple 2
- Exemple 3
- Exemple 4
- Exemple 5
- Exemple 6
- Exemple 7
- Exemple 8

Exemple 1 Partie 1

Soit f la fonction définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = 2 - x$.

La surface dont l'aire est égale à l'intégrale $I = \int_1^2 f(x) dx$ est le triangle BCD rectangle isocèle en C dont l'aire est $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$.

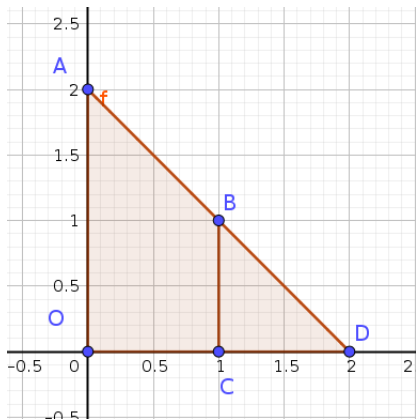


Exemple 1 Partie 2

Soit f la fonction définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = 2 - x$.

La surface dont l'aire est égale à l'intégrale $I = \int_0^1 f(x) dx$ est le trapèze $OABC$ rectangle isocèle en O dont l'aire est

$$\frac{1}{2} \times (OA + BC) \times OC = \frac{3}{2}.$$



Exemple 2 Question 1

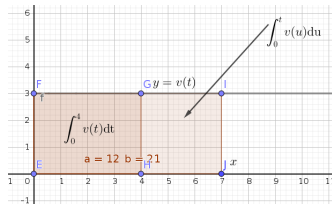
Soit $M(t)$ un point mobile sur un axe tel que à chaque instant $t \in [0; +\infty[$ (en secondes) on connaît sa vitesse instantanée $v(t)$ en mètres par seconde.

A l'instant $t = 0$, le point mobile est à l'origine de l'axe et pour tout $t \in [0; +\infty[$, on a $v(t) = 3 \text{ m.s}^{-1}$.

- **Question 1** La fonction v est constante donc dérivable donc continue sur $[0; +\infty[$.

$\int_0^4 v(t)dt$ est l'aire du rectangle $EFGH$ c'est-à-dire $4 \times 3 = 12$.

On peut l'interpréter comme la distance parcourue par le mobile en 3 secondes. Notons que la dimension de l'intégrale est celle de $v(t)dt$: vitesse \times temps = distance.



Exemple 2 Question 2

- **Question 2** $\int_2^5 v(t)dt$ est égale à $(5-2) \times 3 = 9$. C'est la distance parcourue par le mobile entre les instants $t=2$ et $t=5$ à une vitesse de 3 m.s^{-1} . $\frac{1}{5-2} \int_2^5 v(t)dt$ est égale à $\frac{\text{distance}}{\text{temps}} = \frac{9}{3}$, c'est la vitesse moyenne du mobile entre les instants $t=2$ et $t=5$. Comme sa vitesse est constante, c'est sa vitesse instantanée à tout instant. On a un exemple, d'utilisation de l'intégrale dans un calcul de valeur moyenne. Notons que $\frac{1}{5-2} \int_2^5 v(t)dt$ a la même dimension que $v(t)$, c'est une vitesse.

Exemple 2 Question 3

- **Question 3** $g(t) = \int_0^t v(u) du$ est l'aire du rectangle $EFIJ$ c'est-à-dire $t \times 3 = 3t$.

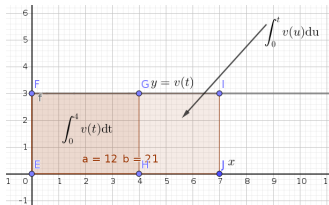
On peut l'interpréter comme la distance parcourue par le mobile en t secondes.

g est une fonction linéaire donc elle est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $g'(t) = 3$. On remarque que $g'(t) = v(t)$. On peut

l'expliquer en prenant la limite du taux de variation

$$\frac{g(t+h)-g(t)}{h} = \frac{3(t+h)-3t}{h} = 3 \text{ quand } h \text{ tend vers } 0.$$

$g(t) = \int_0^t v(u) du$ est une primitive de v .



Exemple 3

Voir [Notebook](#) et [Corrigé](#) (suivez les liens).

Exemple 4 Question 1

Soit f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

- f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times (-t) e^{-\frac{t^2}{2}}$. Pour tout réel $t > 0$, on a $f'(t) < 0$ et $f'(0) = 0$.

On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, on a par composition $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} = 0$.

Exemple 4 Questions 2 et 3

f est dérivable donc continue sur $[0; +\infty[$.

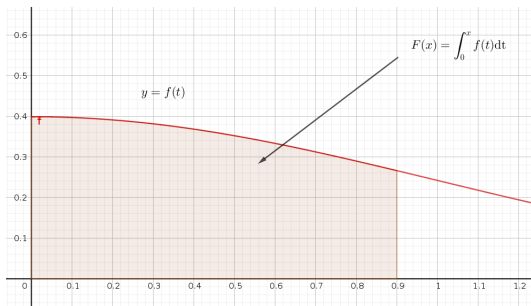
De plus, pour tout $t \geq 0$, on a $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ donc $f(t) \geq 0$.

On peut appliquer le théorème fondamental, qui nous permet d'affirmer que $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ et que pour tout réel $x \geq 0$, $F'(x) = f(x)$.

Notez qu'on utilise plutôt x pour F et t pour $F' = f$ mais qu'on pourrait écrire : pour tout réel $t \geq 0$, $F'(t) = f(t)$.

Puisque f est strictement positive sur $]0; +\infty[$ et ne s'annule qu'en 0, on en déduit que F est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Page suivante un graphique qui permet de comprendre pourquoi $F(x)$ aire sous la courbe de f entre 0 et x est croissante.

Exemple 4 Questions 2 et 3



Exemple 5 Question 1

Soient les fonctions f et F continues sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ définies par :

$$F(x) = \tan x - x \quad \text{et} \quad f(x) = \tan^2 x$$

F est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et pour tout réel $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, on a :

$$F'(x) = \frac{\cos(x) \times \cos(x) - \sin(x) \times (-\sin(x))}{\cos^2(x)} - 1 = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} - 1$$

$$F'(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \tan^2 x$$

F est donc une primitive de f .

Exemple 5 Question 2 a)

Soient g et G les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1 + \ln x}{x} \quad \text{et} \quad G(x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + \ln x$$

G est dérivable sur $]0; +\infty[$, et pour tout réel $x > 0$, on a :

$$G'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} \times 2 \ln(x) + \frac{1}{x} = \frac{1 + \ln x}{x}$$
$$G'(x) = g(x)$$

G est donc une primitive de g .

Notons que M définie par $M(x) = G(x) + 1$, a même dérivée g que G donc c'est aussi une primitive de g . On peut remplacer 1 par une constante k , toute fonction de la forme $G(x) + k$ est une primitive de g .

Exemple 5 Question 2 b)

$$G(e) = \frac{1}{2} (\ln e)^2 + \ln e = \frac{3}{2}.$$

La fonction H définie par $H(x) = G(x) - G(e) = G(x) - \frac{3}{2}$, s'annule en e et a pour dérivée $H' = G' = g$ donc c'est une primitive de g qui s'annule en e .

Supposons qu'il existe une autre primitive N de g qui s'annule en e , on a $(H - N)' = H' - N' = g - g = 0$ donc $H - N$ est constante. De plus, $(H - N)(e) = 0$ donc $H - N = 0$ donc $H = N$.

H est donc l'unique primitive de g qui s'annule en e .

Exemple 6 Question 1) Partie 1

Chaque fonction f considérée est continue donc admet des primitives sur son intervalle de définition.

- a $f(x) = 4$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = 4x + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

- b $f(x) = 0$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

- c $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = 2\sqrt{x} + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

- d $f(x) = 3 + x + x^4$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = 3x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x^5 + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

Exemple 6 Question 1) Partie 2

Chaque fonction f considérée est continue donc admet des primitives sur son intervalle de définition.

- a $f(x) = \sin(2x)$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

- b $f(x) = \cos(3x)$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x) + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

- c $f(x) = \frac{1}{x^4}$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{-4+1}x^{-4+1} + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

Exemple 6 Question 1) Partie 3

Chaque fonction f considérée est continue donc admet des primitives sur son intervalle de définition.

- a $f(x) = e^{-2x}$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{-2}e^{-2x} + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

- b $f(x) = \frac{-1}{x}$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = -\ln(|x|) + k = -\ln(-x) + k \text{ avec } -x > 0 \text{ et } k \text{ constante réelle}$$

Exemple 6 Question 2)

Soit la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $F : x \mapsto x \ln x - x + 1$
Pour tout réel $x > 0$, on a, en appliquant la formule de dérivation d'un produit pour $x \ln(x)$:

$$F'(x) = x \times \frac{1}{x} + 1 \times \ln(x) - 1 = \ln(x)$$

F est donc une primitive de la fonction \ln . La primitive G de \ln qui s'annule en \sqrt{e} , est donc de la forme $G(x) = F(x) + k$. Il suffit de déterminer k en évaluant G en \sqrt{e} :

$$G(\sqrt{e}) = F(\sqrt{e}) + k = \frac{1}{2}\sqrt{e} - \sqrt{e} + 1 + k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}\sqrt{e} - 1$$

La primitive de \ln qui s'annule en \sqrt{e} est donc
 $G(x) = x \ln x - x + \frac{1}{2}\sqrt{e}$.

Exemple 6 Question 2)

Soit la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $F : x \mapsto x \ln x - x + 1$
Pour tout réel $x > 0$, on a, en appliquant la formule de dérivation d'un produit pour $x \ln(x)$:

$$F'(x) = x \times \frac{1}{x} + 1 \times \ln(x) - 1 = \ln(x)$$

F est donc une primitive de la fonction \ln . La primitive G de \ln qui s'annule en \sqrt{e} , est donc de la forme $G(x) = F(x) + k$. Il suffit de déterminer k en évaluant G en \sqrt{e} :

$$G(\sqrt{e}) = F(\sqrt{e}) + k = \frac{1}{2}\sqrt{e} - \sqrt{e} + 1 + k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}\sqrt{e} - 1$$

La primitive de \ln qui s'annule en \sqrt{e} est donc
 $G(x) = x \ln x - x + \frac{1}{2}\sqrt{e}$.

Exemple 7 Partie 1

- ① $f(x) = x^2 - 2x - 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + e^x$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - x + \frac{1}{x} - \ln(|x|) + e^x + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

- ② $f(x) = \cos(4x - 1) - 2\sin(2x)$ admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{4} \sin(4x - 1) + 2 \times \frac{1}{2} \cos(2x) + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

- ③ $f(x) = \frac{e^{731x}}{(e^{731x} + 1)^2}$ est de la forme $\frac{1}{731} \frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = e^{731x} + 1$, donc admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = -\frac{1}{u(x)} + k = -\frac{1}{731} \frac{1}{e^{731x} + 1} + k \text{ avec } k \text{ constante réelle}$$

Exemple 7 Partie 2

- ① $f(x) = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$ est de la forme $-\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = e^{-x} + 1$, donc admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = -\ln(|u(x)|) + k = -\ln(|e^{-x} + 1|) + k = -\ln(e^{-x} + 1) + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

- ② $f(x) = \frac{x}{e^{x^2}} = xe^{-x^2}$ est de la forme $-\frac{1}{2}u'e^u$ avec $u(x) = -x^2$, donc admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = -\frac{1}{2}e^{u(x)} + k = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Exemple 7 Partie 3

- ① $f(x) = \frac{1}{x \ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \ln(x)$, donc admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \ln(|u(x)|) + k = \ln(|\ln(x)|) + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Sur $]0; 1[$, on a $\ln(x) < 0$ donc $F(x) = \ln(-\ln(x)) + k$.

Sur $]1; +\infty[$, on a $\ln(x) > 0$ donc $F(x) = \ln(\ln(x)) + k$.

- ② $f(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$ est de la forme $u'e^u$ avec $u(x) = \sin(x)$, donc admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = e^{u(x)} + k = e^{\sin(x)} + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

- ③ $f(x) = \frac{1}{x} \times (\ln x)^2$ est de la forme $u'u^2$ avec $u(x) = \ln(x)$, donc admet pour primitives les fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{3}u^3(x) + k = \frac{1}{3}(\ln(x))^3 + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Exemple 8 Partie 1

On considère les courbes d'équations $y = 1$, $y = x$ et $y = x^2$ sur l'intervalle $[0; 1]$.

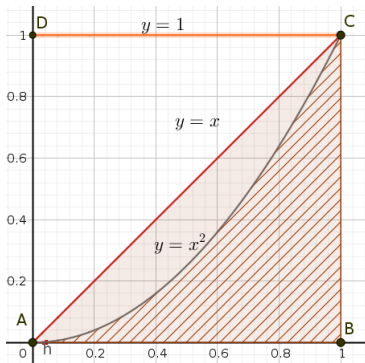
Pour tout réel $x \in [0; 1]$, on a :

$$0 \leq x \leq 1$$

on multiplie par $x \geq 0$

$$0 \leq x^2 \leq x \leq 1$$

Exemple 8 Figure



Exemple 8 Partie 2

Puisque pour tout réel $x \in [0; 1]$, on a $0 \leq x^2 \leq x \leq 1$, on en déduit que : la courbe d'équation $y = x^2$ est donc en dessous de la droite d'équation $y = x$, elle même en-dessous de la droite d'équation $y = 1$.

Par définition de l'intégrale d'une fonction continue positive comme aire du domaine « sous sa courbe » (délimité par sa courbe, l'axe des abscisses et les deux droites parallèles à l'axe des ordonnées passant par les bornes de l'intervalle), on en déduit que :

$$I = \int_0^1 x^2 \, dx \leq K = \int_0^1 x \, dx \leq J = \int_0^1 1 \, dx$$

Exemple 8 Partie 3

De plus, par additivité des aires, l'intégrale $L = \int_0^1 1 - x^2 \, dx$ représente l'aire du domaine entre la droite d'équation $y = 1$ et la courbe d'équation $y = x^2$, de même $M = \int_0^1 x - x^2 \, dx$ représente l'aire du domaine entre la droite d'équation $y = x$ et la courbe d'équation $y = x^2$.

On peut noter que pour tout réel $x \in [0; 1]$, on a $0 \leq x^2 \leq x \leq 1$, donc $0 \leq x - x^2 \leq 1 - x^2$ et donc $M \leq L$.