Classe Ãă la maison du 24/03/2020

Frédéric Junier

Lycée du Parc
1 Boulevard Anatole France
69006 Lyon

23 mars 2020

Table des matières

Propriété de l'intégrale : Chasles

Theorem

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Un exemple, on donne $\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = 5$ et $\int_0^5 f(x)\ \mathrm{d}x = 7$

- Calculer $\int_2^0 f(x)\ \mathrm{d}x$:

Propriété de l'intégrale : Chasles

Theorem

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Un exemple, on donne $\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = 5$ et $\int_0^5 f(x)\ \mathrm{d}x = 7$

- Calculer $\int_2^0 f(x)\ \mathrm{d}x$:
- $\int_2^0 f(x)\ \mathrm{d}x + \int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_2^2 f(x)\ \mathrm{d}x = 0$ donc $\int_2^0 f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = -5$
- Calculer $\int_2^5 f(x)\ \mathrm{d}x$:

Propriété de l'intégrale : Chasles

Theorem

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Un exemple, on donne $\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = 5$ et $\int_0^5 f(x)\ \mathrm{d}x = 7$

- Calculer $\int_2^0 f(x)\ \mathrm{d}x$:
- $\int_2^0 f(x)\ \mathrm{d}x + \int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_2^2 f(x)\ \mathrm{d}x = 0$ donc $\int_2^0 f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = -5$
- Calculer $\int_2^5 f(x)\ \mathrm{d}x$:
- $\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x + \int_2^5 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^5 f(x)\ \mathrm{d}x = 0$ donc : $\int_2^5 f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_0^5 f(x)\ \mathrm{d}x - \int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = 7 - 5 = 2$

Propriété de l'intégrale : Linéarité

Theorem

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

Un exemple, on donne $\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = 5$ et $\int_2^0 g(x)\ \mathrm{d}x = 6$

- Calculer $\int_0^2 3f(x)\ \mathrm{d}x$:

Propriété de l'intégrale : Linéarité

Theorem

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

Un exemple, on donne $\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = 5$ et $\int_2^0 g(x)\ \mathrm{d}x = 6$

- Calculer $\int_0^2 3f(x)\ \mathrm{d}x$:
- $\int_0^2 3f(x)\ \mathrm{d}x = 3\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = 15$
- Calculer $\int_0^2 3f(x) - 4g(x)\ \mathrm{d}x$:

Theorem

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

Un exemple, on donne $\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = 5$ et $\int_2^0 g(x)\ \mathrm{d}x = 6$

- Calculer $\int_0^2 3f(x)\ \mathrm{d}x$:
- $\int_0^2 3f(x)\ \mathrm{d}x = 3\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = 15$
- Calculer $\int_0^2 3f(x) - 4g(x)\ \mathrm{d}x$:
- $\int_0^2 3f(x) - 4g(x)\ \mathrm{d}x = 3\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x - 4\int_0^2 g(x)\ \mathrm{d}x$

  Attention à l'ordre des bornes ! $\int_0^2 g(x)\ \mathrm{d}x = -\int_2^0 g(x)\ \mathrm{d}x$

  Donc $\int_0^2 3f(x) - 4g(x)\ \mathrm{d}x = 3\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x + 4\int_2^0 g(x)\ \mathrm{d}x =$
  $3 \times 5 + 4 \times 6 = 29$

Attention aux confusions

Ne pas confondre les propriétés de Chasles et de linéarité :

- $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_3^6 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x$ par Chasles (bornes consécutives)
- $\int_0^3 2f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ par linéarité (mêmes bornes)
- $\int_0^3 2f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^3 3f(x)\,\mathrm{d}x$
  On ne peut pas simplifier cette somme d'intégrale, en appliquant Chasles et la linéarité on peut obtenir par exemple :
  $\int_0^3 2f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x =$
  $\int_0^3 3f(x)\,\mathrm{d}x + \int_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x + -\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

Lire d'abord la méthode 4 page 190 et faire l'exercice 53 page 199 corrigé à la fin du manuel, traiter ensuite l'exercice suivant.

On considère les intégrales $I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\, dx$ et $J = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\, dx$

1. Calculer I.
2. En utilisant la linéarité, calculer $I + J$ puis en déduire la valeur de J.

Exercice d'application : corrigé

1. Par ailleurs, on a $I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\ dx = [\ln(e^x+1)]_0^1$ Donc $I = \ln(e^1+1) - \ln(e^0+1) = \ln(e^1+1) - \ln(2) = \ln\left(\frac{e^1+1}{2}\right)$.
2. Par linéarité, on a :

$$I + J = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} + \frac{1}{e^x+1}\ dx = \int_0^1 \frac{e^x+1}{e^x+1}\ dx = \int_0^1 1\ dx = 1$$

On a donc $J = 1 - I = 1 - \ln\left(\frac{e^1+1}{2}\right) = \ln\left(\frac{2e}{e^1+1}\right)$