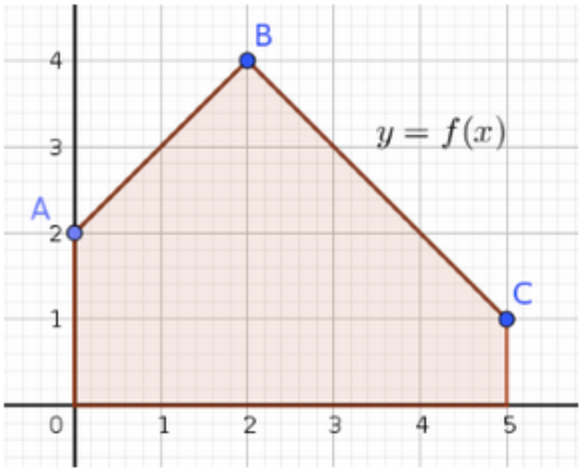
Question 1 : Q3

L'aire du domaine colorié dans l'image ci-jointe peut s'exprimer à l'aide de l'intégrale :



- $\int_1^4 f(x)\mathrm{dx}$
- $\int_2^5 f(x)\mathrm{dx}$
- $\int_2^1 f(x)\mathrm{dx}$
- $\int_0^5 f(x)\mathrm{dx}$

Question 2 : Q2

Le programme Python ci-dessous doit calculer dans la variable s une approximation de l'intégrale $\int_2^4 x^2 \mathrm{dx}$ par la somme des rectangles à gauche avec n subdivisions.

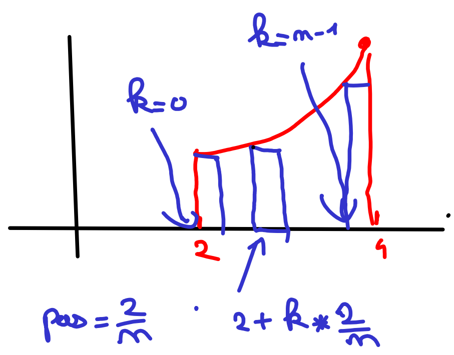
```
def rectangle_gauche(n):
    s = 0
    for k in range(n):
        ...................
    return s
```

$s = s + (4-2)/n * \left(2+k*\frac{2}{n}\right)^2$

$s = s + 2/n * 4 * \left(1+\frac{k}{n}\right)**2$

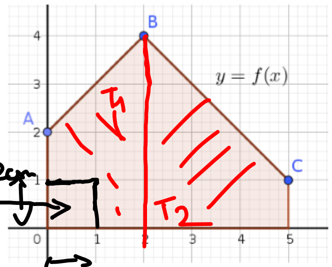
Quelleinstruction faut-il saisir pour compléter les pointillés ?

- s = s + 2 / n * f(2 + k * 2 / n)
- s = s + 8 / n * (1 + k / n) ** 2
- s = s + pas * f(x)
- s =s + (b-a)/n * f(a + k * (b-a)/n)



Question 3 : Q4

Dans un repère orthonormal d'unité 2 cm, l'aire, en cm^2, du domaine colorié ci-dessous est égale à :



1 u.a. $\longleftrightarrow$ $2 \times 2 = 4$ cm^2

Aire en u.a. :

$\frac{2+4}{2} \times 2$ aire du trapèze T_1

$\frac{4+1}{2} \times 3$ aire du trapèze T_2

- 13,5
- 14
- 27
- 54

Aire en u.a. :

$6 + 7{,}5 = 13{,}5$ u.a

Aire en cm^2 : $13{,}5 \times 4 = 54$ cm^2

QCM2

Question 1 : Q6

Une primitive de la fonction f définie sur R par $f(x)=\frac{e^x}{e^x+2}$ est

- [ ] $-\frac{1}{e^x+2}$
- [ ] $\frac{2e^x}{(e^x+2)^2}$
- [x] $\ln(e^x+2)$ car $f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x)= e^x+2$

Question 2 : Q7

Une primitive de la fonction f définie sur R par $f(x)=\frac{e^x}{(e^x+2)^2}$ est

- [ ] $\ln(e^x+2)$
- [ ] $\frac{1}{e^x+2}$
- [x] $-\frac{1}{e^x+2}$ car $f'(x)=\frac{-u'(x)}{u^2(x)}$

Question 3 : Q3

Une primitive de la fonction f définie sur R par $f(x)=e^x-ex+e$ est

- [x] $e^x-0{,}5ex^2+ex$
- [ ] e^x-e
- [ ] ex
- [x] $e^x-0{,}5ex^2+e(x+1)$

Question 4 : Q1

Une primitive de la fonction f définie sur]0;+oo[par $\frac{1}{x}$ est

- [ ] $-\frac{1}{x^2}$
- [x] $\ln(x)$
- [ ] $\frac{1}{0,5x^2}$
- [ ] $-\frac{1}{x^2}+1$
- [x] $\ln(x)-734$

Question 5 : Q4

Une primitive de la fonction f définie sur]0;+oo[par $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$ est

- [x] $F(x)=\ln(x)-2\sqrt{x}-\frac{1}{x}+1$
- [ ] $F(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}-2\frac{1}{x^3}$
- [ ] $F(x)=\ln(x)-\sqrt{x}-\frac{1}{x}+734$

Question 6 : Q2

Une primitive de la fonction f définie sur R par $f(x)=734x-1$ est

- $367x^2-x+1$
- 734
- $734x\times0{,}5x^2-x$
- $734-x$

$f(x)$	Primitive(s)
$x \mapsto x$	$x \mapsto \frac{1}{2}x^2+k$

Question 7 : Q5

Une primitive de la fonction f définie sur]0;+oo[par $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ est

- $-\dfrac{1}{x^3}$
- $\dfrac{1}{2}(\ln(x))^2+3$
- $F(x)=(\ln(x))^2$

car $f(x) = u'(x)\times u(x)$.

Fonction composée

$f(x)$	Primitive(s)
$x \mapsto u'(x)\times u(x)$	$x \mapsto \frac{1}{2}u^2(x)+k$

Prise de notes du 6/04/2021

Cours : preuve du théorème 2

Théorème 2 un intervalle borné

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives.

Démonstration *ROC*

Soit f une fonction continue f sur I.
On admet que f possède un minimum m sur I.
Pour tout $x \in I$, $f(x) \geq m \Leftrightarrow \underbrace{f(x) - m \geq 0}$

La fonction $g : x \mapsto f(x) - m$ est continue et positive.
D'après le théorème fondamental de l'analyse, g admet une primitive G sur I.
Pour tout $x \in I$, $G'(x) = f(x) \underbrace{- m}$

$$\Leftrightarrow G'(x) + m = f(x)$$

$x \mapsto m$ est la dérivée de $x \mapsto mx$,
donc $F : x \mapsto G(x) + mx$ est une primitive de f
Plus généralement les fonctions $F_k : x \mapsto G(x) + mx + k$ avec $k \in \mathbb{R}$ sont des primitives de f

Correction du n°64 p.342 :

64 Soit f la fonction définie sur $I =]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + x}{x+1}.$$

1. Démontrer que, pour tout réel x de I : $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x+1}$.

2. Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$.

1) Pour tout réel $x > -1$:

$$2x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{(2x-1)(x+1)}{x+1} + \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x - x - 1 + 1}{x+1} = \frac{2x^2 + x}{x+1} = f(x)$$

L'égalité est démontrée

2) Calculons l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(2x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx$$

On cherche une primitive F de f ; par exemple :

$$F(x) = x^2 - x + \ln(x+1)$$

On en déduit que :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_0^1 = F(1) - F(0)$$

et donc $\int_0^1 f(x)dx = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$.

Correction de l'exercice 47 p.342

https://capytale2.ac-paris.fr

code : d798-11639

=> accès par l'ENT
dans l'onglet
Ressources Numériques

Capacité 7 du cours : calcul d'intégrale

Corrigé en ligne :

https://frederic-junier.org/TS2021/Cours/Corrige-Cours-CalculIntegralPartie2-2021-Web.pdf

mot de passe : parcTerminale

Cours : propriétés de l'intégrale

Propriétés 1, 2, 3 du cours

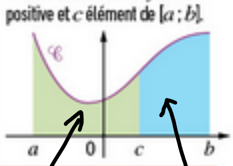
Ci-dessous un extrait du manuel Indice

COURS

3. Propriétés et intégration par parties

Propriétés de l'intégrale

À noter
Illustration de la relation de Chasles dans le cas où f est positive et c élément de $[a\,;b]$.



Démonstration des propriétés 3 et 6
Voir page 338

PROPRIÉTÉS Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I.

a, b et c sont trois réels de I et k est une constante réelle.

(1) $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$. (2) $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

(3) **Linéarité :**

$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ et $\int_a^b (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

(4) **Relation de Chasles :** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

(5) **Positivité :** Si pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \geqslant 0$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

(6) **Comparaison :** Si pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \geqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

$\int_a^c f(x)dx$ $\int_c^b f(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ $\xleftrightarrow{\text{Vecteurs}}$ $\vec{AC}+\vec{CB}=\vec{AB}$

Propriété 1 ***Relation de* CHASLES, *admise***

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b et c trois réels de I. Alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

$\vec{AB}+\vec{BA}=\vec{0}$ $\longleftrightarrow$ $\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = \underbrace{\int_a^a f(x)dx}_{=0}$

Remarque 7

On peut étendre la définition de l'intégrale d'une fonction continue f entre deux bornes a et b au cas où les deux bornes ne sont pas dans l'ordre croissant.

Par exemple si $b > a$ on peut définir $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

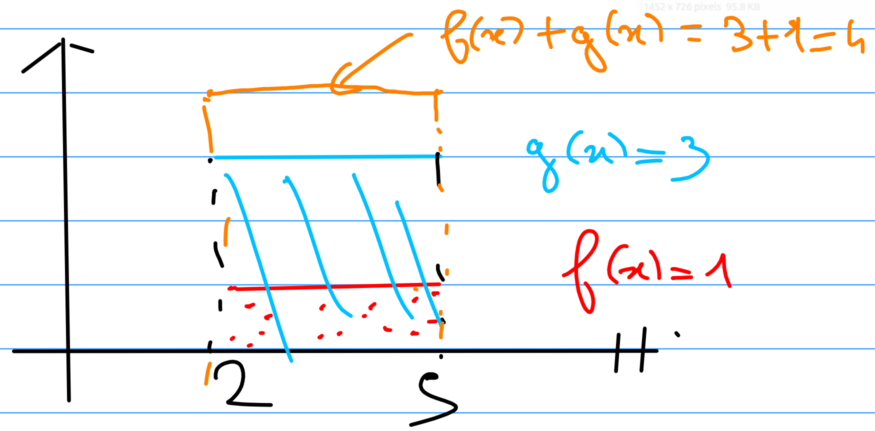
D'après la relation de Chasles on doit avoir : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\mathrm{d}x = \int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$

On en déduit donc un corollaire utile de la relation de Chasles : $\boxed{\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$

Propriété 2 ***Linéarité, admise***

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I et α et β deux réels quelconques. Alors :

- $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(x))\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- Plus généralement : $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- En particulier : $\displaystyle\int_a^b f(x)-g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$



$$\int_2^5 f(x)dx + \int_2^5 g(x)dx = 3\times 1 + 3\times 3 = 12$$
$$= \int_2^5 f(x)+g(x)\,dx$$

Exercice : sur la relation de Charles

n°36 p. 341 du manuel

36 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

On donne $\int_{-5}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 8$ et $\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 2$.

Calculer $\int_{-5}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

On applique la relation de Charles :

$$\int_{-5}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{3} f(x)dx = \int_{-5}^{3} f(x)\,dx$$

$$\int_{-5}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{3} f(x)dx = 8+2 = 10 \text{ u.a.}$$

Exercice sur la propriété de linéarité

n°37 p.341

37 Soit f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et telles que $\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 2$ et $\int_{-1}^{3} g(x)\mathrm{d}x = -5$.

Calculer : **a.** $\int_{-1}^{3} 7f(x)\mathrm{d}x$ **b.** $\int_{-1}^{3} (f(x)+g(x))\mathrm{d}x$

c. $\int_{-1}^{3} (2f(x)-3g(x))\mathrm{d}x$

a) $\int_{-1}^{3} 7f(x)dx = 7\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = 7\times 2 = 14$

$I(7f) = 7I(f)$

On peut sortir les constantes qui ne dépendent pas de x :

$\int_{-1}^{3} x f(x)dx = x\int_{-1}^{3} f(x)dx$ n'a pas de sens et faux

$\int_{-1}^{3} f(x)\times f(x)dx \neq \left(\int_{-1}^{3} f(x)dx\right)\times\left(\int_{-1}^{3} f(x)dx\right)$

L'intégrale d'un produit n'est pas le produit des intégrales

b)

$$\int_{-1}^{3}\left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_{-1}^{3} f(x)\,dx + \int_{-1}^{3} g(x)\,dx$$

$$= 2 + (-5) = -3$$

$$\int_{-1}^{3}\left(2f(x) - 3g(x)\right)dx = \int_{-1}^{3} 2f(x)\,dx - \int_{-1}^{3} 3g(x)\,dx$$

$$= 2\int_{-1}^{3} f(x)\,dx - 3\int_{-1}^{3} g(x)$$

$$= 2\times 2 - 3\times(-5) = \underline{19}$$

Exercice sur la propriété de linéarité :

n°70 p. 343

70 Soit $I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$ et $J = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1} dx$.

1. Calculer I et I + J.

2. En déduire la valeur de J.

1) (*)

$$I + J = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx + \int_0^1 \frac{1}{e^x+1} dx = \int_0^1 \frac{e^x+1}{e^x+1} dx$$

$$= \int_0^1 1 \, dx = 1$$

(*) Calculons I =

$$I = \int_0^1 \underbrace{\frac{e^x}{e^x+1}}_{\frac{u'}{u}} dx = \Big[\ln(e^x+1) \Big]_0^1 = \ln(e+1) - \ln(2)$$

$$= \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

avec $u(x) = e^x + 1$

2) $\begin{cases} I + J = 1 \\ I = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) \end{cases} \iff \begin{cases} J = \underset{\ln(e)}{1} - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) \\ I = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} J = \ln\left(\frac{e}{\frac{e+1}{2}}\right) = \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right) \\ I = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) \end{cases}$$

b)

Exercice sur la relation de Chasles :

n° 73 p. 343

73 En utilisant la relation de Chasles, calculer : $\int_{-3}^{5} |x| \mathrm{d}x$.

Cours Capacité 8

Capacité 8 ***Application des propriétés de l'intégrale***

Soient f et g deux fonctions continues sur $[1;5]$, on donne :

$$I = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = -3 \qquad J = \int_5^2 f(x)\mathrm{d}x = 2 \qquad K = \int_1^5 g(x)\mathrm{d}x = 12$$

Calculer $L = \displaystyle\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$, $M = \displaystyle\int_1^5 (f(x)+g(x))\mathrm{d}x$ puis $N = \displaystyle\int_1^5 (2f(x)-3g(x))\mathrm{d}x$

Exercice de synthèse

Fiche d'exercices

https://frederic-junier.org/TS2020/Cours/TS-Exos-Integration2020-Fiche1-Web.pdf

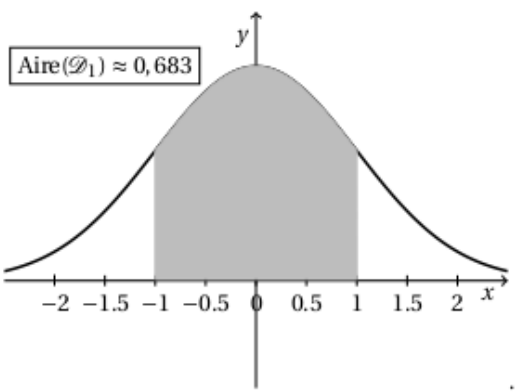
Exercice 1 *Cloches de Pâques*

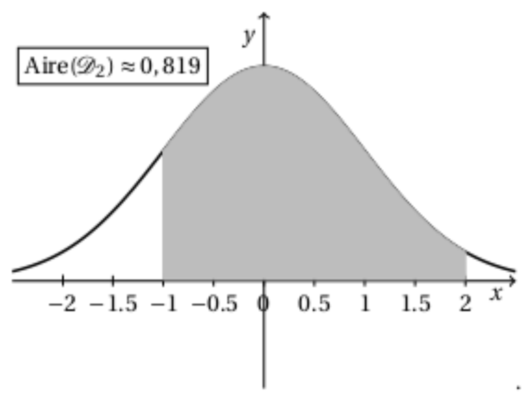
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;2]$ par $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + \dfrac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$.
f est dérivable et donc continue sur $[1\,;2]$ comme somme de fonctions dérivables sur $[1\,;2]$.
On munit le plan d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. La fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$ et on donne ci-dessous des valeurs approchées à $0,001$ près :

   ☞ de l'aire du domaine $\mathcal{D}_1$ délimité par les droites d'équations $x=-1$, $x=1$, $y=0$ et par la courbe d'équation $y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$;

   ☞ de l'aire du domaine $\mathcal{D}_2$ délimité par les droites d'équations $x=-1$, $x=2$, $y=0$ et par la courbe d'équation $y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.





   En déduire une valeur approchée à $0,002$ près (les erreurs s'ajoutent) de l'intégrale :

$$\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

2. On considère la fonction H définie et dérivable sur $[1\,;2]$ par $H(x) = \dfrac{\ln x}{x-\ln x}$.

   a. Démontrer que H est une primitive de la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$ sur l'intervalle $[1\,;2]$.

   b. En déduire la valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 h(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$.

3. Déterminer une valeur approchée à $0,002$ près de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.