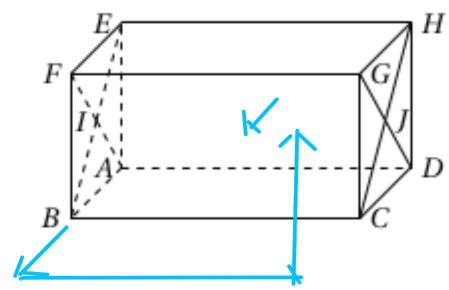
Vecteurs de l'espace
Corrigés des exemples du cours

Capacité 1 ***Prouver des égalités vectorielles***

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle.

1. Déterminer trois vecteurs égaux de la figure égaux au vecteur $\overrightarrow{FE}$.
2. Déterminer l'image du point F par la translation de vecteur $\overrightarrow{GJ}$.
3. Construire l'image K du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AG}$.

   Que peut-on dire des points H, G et K ? Justifier.



1) $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{GH}$

2) On a $\overrightarrow{FI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FA}$ car I milieu de [FA]

De plus $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA}$

et $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{HD}$

car EFGH et EADH sont des parallélogrammes

donc $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{GD}$

Or J milieu de GD donc $\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GD}$

On a donc $\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA})$

$\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FI}$

L'image du point F par la translation de vecteur $\overrightarrow{GJ}$ est donc le point I.

3) On a $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$

Soit K l'image du point B par la transla le vecteur $\overrightarrow{AG}$. On a donc :

$$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$$

De $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AG}$ on déduit que $ABKG$ est un parallélogramme et donc que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GK}$

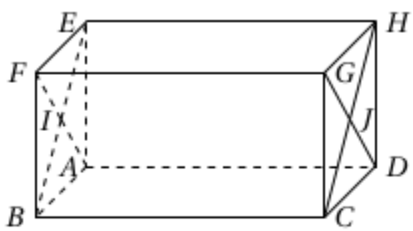
Or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ car $ABCD$ parallélogramme
et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HG}$ car $HGCD$ parallélogramme
donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HG}$

De $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GK}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG}$, on déduit que :
$$\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{GK}$$
et donc que G milieu de $[HK]$.
Ainsi le points G, H, K sont alignés.

Capacité 2 ***Identifier des vecteurs colinéaires, opposés, égaux***

Dans le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ de la capacité 1 :

1. Déterminer trois vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{FI}$.
2. Déterminer trois vecteurs opposés au vecteur $\overrightarrow{FI}$.
3. Déterminer trois vecteurs colinéaires, de même sens mais pas de même norme que le vecteur $\overrightarrow{FI}$.
4. Déterminer trois vecteurs colinéaires, de sens opposé mais pas de même norme que le vecteur $\overrightarrow{FI}$.



1) Trois vecteurs égaux à $\overrightarrow{FI}$:

$$\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{JD}$$

2) Trois vecteurs opposés à $\overrightarrow{FI}$:

$$\overrightarrow{FI} = -\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{JD} = -\overrightarrow{GJ}$$

3) Trois vecteurs colinéaires, de même sens mais pas de même norme que $\overrightarrow{FI}$:

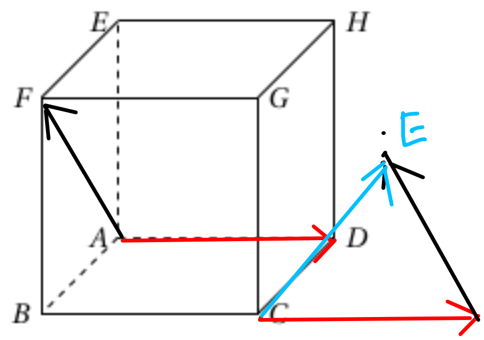
$$\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{FA} = 2\overrightarrow{FI} \quad \text{et} \quad \frac{3}{2}\overrightarrow{GD}$$

4) Trois vecteurs colinéaires, de sens opposé mais pas de même norme que $\overrightarrow{FI}$:

$$\overrightarrow{FA} = -2\overrightarrow{IF} \qquad \text{et} \quad \overrightarrow{GD} = -2\overrightarrow{IF}$$

$$\text{et} \quad -3\overrightarrow{IF}$$

Capacité 3 ***Construire une somme vectorielle***



1. Soit $ABCDEFGH$ un cube.

   a. Donner un représentant d'origine A du vecteur $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AD}$.

   b. Construire un représentant d'origine C du vecteur $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AD}$.

   c. Déterminer un représentant d'origine A du vecteur $\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AE}$.

   d. Justifier que $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$.

   e. Déterminer l'image du point H par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})$.

2. Soit $MNPQ$ un tétraèdre.

   a. Faire une figure.

   b. Recopier et compléter l'égalité : $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{MP}+\ldots+\overrightarrow{QP}$

   c. En déduire que $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{QN}$.

1) a) $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AG}$

b) $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AD}$

c) $\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{HG}$

$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HG}$

$\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{AG}$

d) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}$

e) $\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EA}$

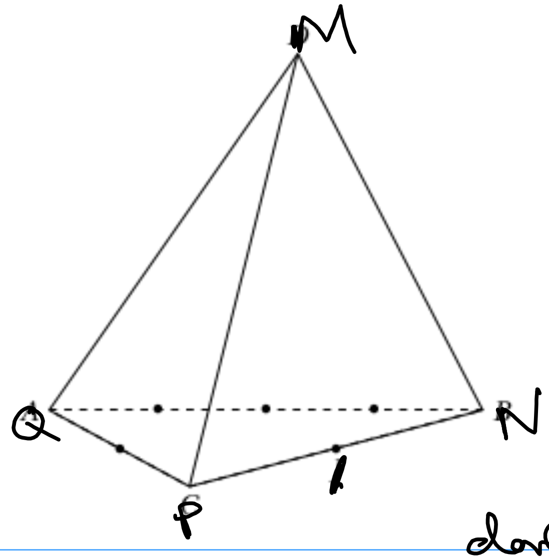
$\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{EA}$

$\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE})=\overrightarrow{HF}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{HB}$

L'image du point H par la translation de vec

- term $\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})$ est donc le point B

2) Soit MNPQ un tétraèdre



a)

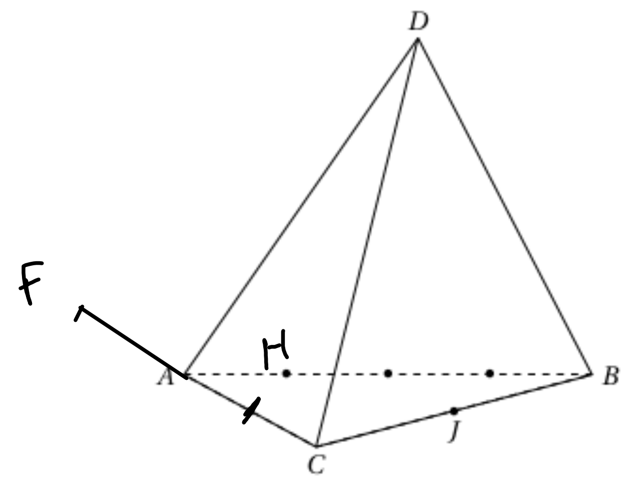
$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{QP}$

b) On en déduit que :

$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PN}$

donc $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{QN}$

Capacité 4 ***Utiliser la colinéarité pour démontrer un alignement ou un parallélisme***



Soit $ABCD$ un tétraèdre. J est le milieu de $[BC]$, H et F sont les points tels que :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

1. Compléter la figure.
2. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire que les points F, H et J sont alignés.

2) $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AH}$

donc $\overrightarrow{FH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CJ}$

$\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

en effet J milieu de $[CB]$ donc $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

On a donc $\overrightarrow{FJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{FJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{FJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$

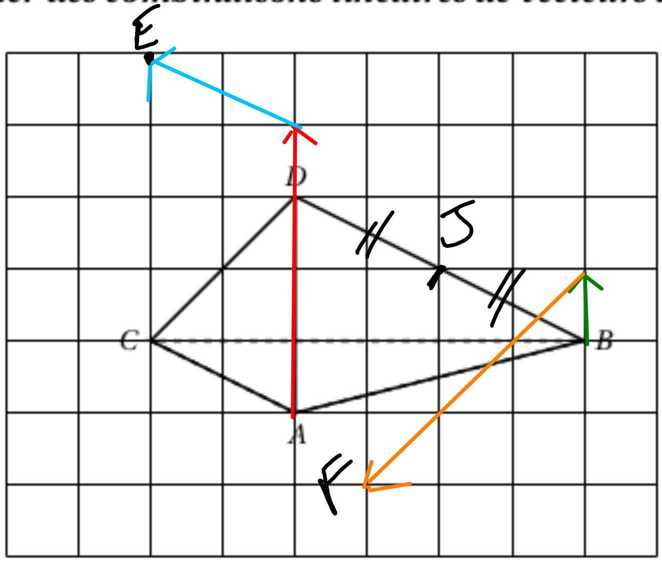
$\overrightarrow{FJ} = 3/2\,\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

donc $\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

On rappelle que $\overrightarrow{FH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

On remarque que $\overrightarrow{FJ} = 2\overrightarrow{FH}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{FJ}$ et $\overrightarrow{FH}$ sont donc colinéaires et comme ils ont un point commun, les points F, J, et H sont alignés.

Capacité 5 ***Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés, voir capacité 1 p.51***



1. Construire sur la figure ci-dessus le point E défini par $\overrightarrow{AE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$.

2. Construire sur la figure ci-dessus le point F défini par $\overrightarrow{BF} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$.

3. Construire sur la figure ci-dessus le point J tel que $\overrightarrow{JD} + \overrightarrow{JB} = \overrightarrow{0}$.

4. On considère l'équation vectorielle $(\mathscr{E})$: $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ d'inconnue un point G.

   a. Démontrer que pour tout point G de l'espace, $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GJ}$.

   b. En déduire que $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CJ}$.

   c. En déduire qu'il existe un unique point G de l'espace vérifiant l'équation $(\mathscr{E})$.

   d. Démontrer que le point G vérifiant l'équation $(\mathscr{E})$ appartient aux trois médianes du triangle BDC. On en déduit que les trois médianes du triangle BDC sont concourantes en G qui est le centre de gravité du triangle BDC.

4) a) Pour tout point G de l'espace, on a :

$$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JD}$$
$$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JD}$$

Or J milieu de [BD] donc $\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JD}=\overrightarrow{0}$

On a donc : $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GJ}$

b) On en déduit que :

$$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0} \iff 2\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$$
$$\iff \overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CJ}$$

Il existe donc un unique point G vérifiant $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$, qui est l'image du point C par la translation de vecteur $\frac{2}{3}\overrightarrow{CJ}$.
Ceci prouve à la fois l'existence et l'unicité de G.

d) On a déjà démontré qu'il existe un unique point G vérifiant $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ et que $\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CJ}$.
On en déduit que G appartient à la médiane issue de C dans le triangle CBD.

On montre de même qu'en 4) a) que si on note I le milieu de [CD] et K le milieu de [BC] alors :

$$\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GI} \text{ et } \overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GK}$$

Puis en substituant dans $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$

on obtient d'une part que :

$\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DK}$ et $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$

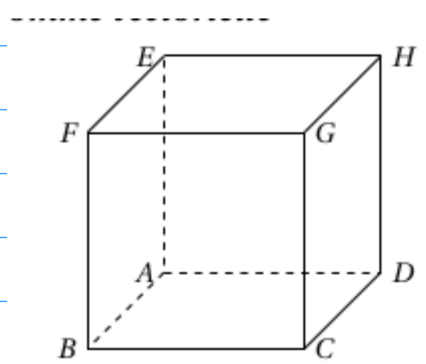
On en déduit que G appartient aux médianes (DI) et (BK).

G appartient donc aux trois médianes du triangle BCD. On en déduit d'une part que ces 3 médianes sont concourantes et d'autre part que G est leur point d'intersection appelé centre de gravité.

Capacité 6 ***Exploiter une figure pour exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs, voir capacité 2 p.51***

Soit $ABCDEFGH$ le cube de la capacité 3.

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BH}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ peut-il s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$?



1) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AD} +$

2) On ne peut pas exprimer $\overrightarrow{AE}$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, car les points

A, B, D et E n'appartiennent pas à un même plan et donc il n'existe pas de réels x et y tels que : $\vec{AB} = x\vec{AD} + y\vec{AE}$.

On dit que $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$ sont linéairement indépendants ou non coplanaires.

Capacité 7 ***Exploiter une figure pour exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs, voir capacité 2 p.51***

Soit $ABCD$ un tétraèdre. I est le milieu de $[CD]$, J celui de $[AI]$, M et H sont définis par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$$

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{BJ}$ comme combinaisons linéaires de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. En déduire que les droites (MH) et (BJ) sont parallèles.

1) $\vec{MH} = \vec{MA} + \vec{AH} = -\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AI}$

Or I milieu de $[CD]$ donc $\vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}$

et $\vec{AC} + \vec{AD} = \vec{AI} + \vec{IC} + \vec{AI} + \vec{ID}$
$= 2\vec{AI} + \vec{IC} + \vec{ID} = 2\vec{AI}$

donc $\vec{AI} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AD})$

Ainsi $\vec{MH} = -\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{6}(\vec{AC} + \vec{AD})$

$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ}$

$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AI}$

En effet $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI}$ car J milieu de [AI]

De plus $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

donc $\frac{1}{2}\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

donc $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

$$\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

Comme $\overrightarrow{MH} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

, on remarque que $\overrightarrow{MH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires, donc les droites (MH) et (BJ) sont parallèles.

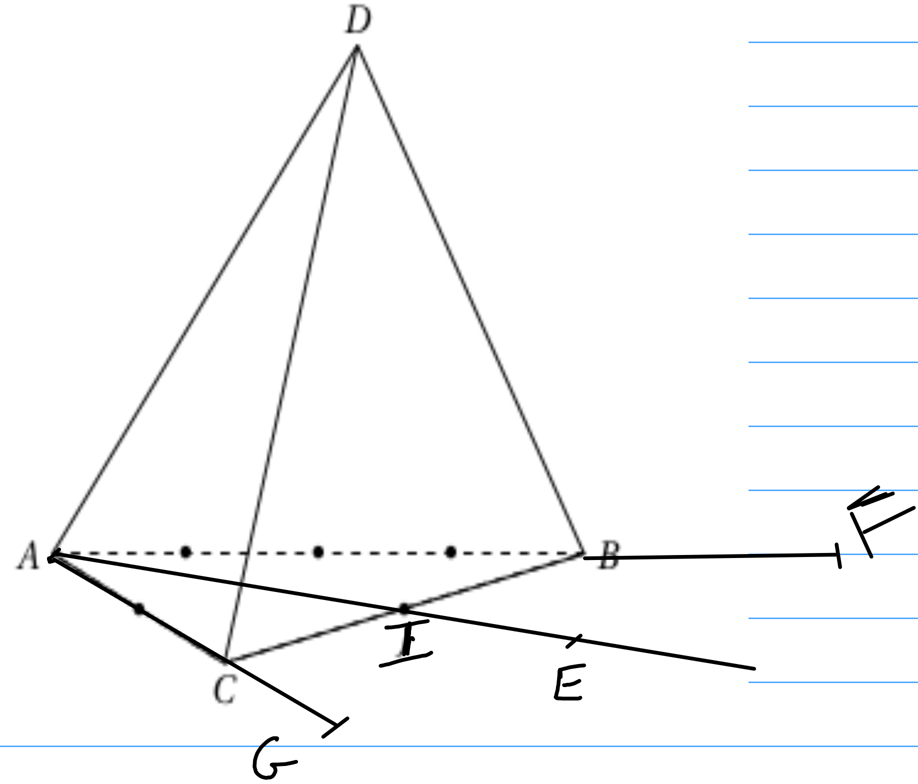
Capacité 8 ***Utiliser la colinéarité pour démontrer un alignement ou un parallélisme***

Soit $ABCD$ un tétraèdre, I le milieu de $[BC]$ et E, F et G les points définis par :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI} \quad \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{CG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$$

1. Faire une figure.
2. Démontrer que $\overrightarrow{FG} = 2\overrightarrow{FE}$. Que peut-on en déduire pour les points F, G et E ?
3. Donner trois vecteurs directeurs de la droite (FE).

1)



2) $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{IE}$

Or I milieu de [BC] donc $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

et $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$ donc $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CI}$

donc $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$

donc $\overrightarrow{FE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$

Finalement, on a

$$\overrightarrow{FE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$$

On a démontré précédemment que

$$\overrightarrow{FG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$$

On en déduit que $\overrightarrow{FG} = 2\overrightarrow{FE}$

Les vecteurs $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{FE}$ sont colinéaires et ont une extrémité commune donc F, G, E sont alignés.

3) F, G, E alignés et distincts donc $(FG) = (FE) = (EG)$

On en déduit que $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont trois vecteurs directeurs de (FE)