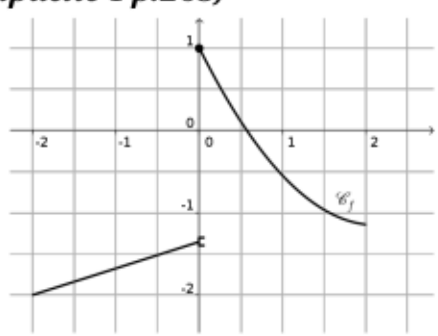
Corrigé des exemples du cours du chapitre continuité

**Capacité 1** ***Étudier la continuité d'une fonction (voir capacité 1 p.203)***

1. Déterminer les points de continuité et de discontinuité de la fonction représentée ci-contre.
2. Représenter la courbe d'une fonction définie sur l'intervalle $[-2;2]$, telle que $f(-2)>0$ et $f(2)<0$ et $f$ ne s'annule pas sur $[-2;2]$.

   $f$ peut-elle être continue sur $[-2;2]$ ?

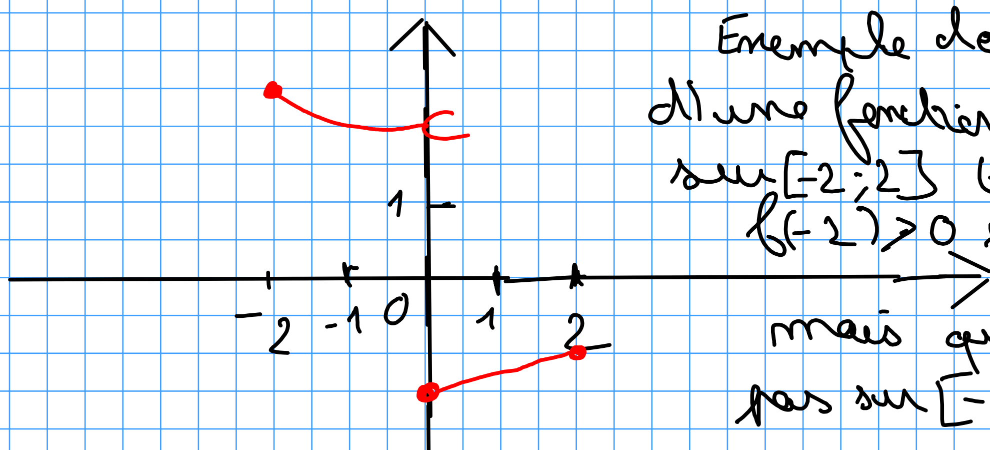



*Source : Rico602 [CC BY-SA 3.0]*

1) $f$ continue sur $[-2;0[\,\cup\,]1;2]$
$f$ discontinue en 0 car :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -1{,}5 \neq 1 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$$

2)




Exemple de courbe d'une fonction $f$ définie sur $[-2;2]$ telle que $f(-2)>0$ et $f(2)<0$ mais qui ne s'annule pas sur $[-2;2]$

On peut conjecturer qu'il n'existe pas de fonction continue sur $[-2;2]$ telle que $f(-2)>0$ et $f(2)<0$ et que $f$ ne s'annule pas sur $[-2;2]$

On pourra le justifier avec le théorème des valeurs intermédiaires.

**Algorithmique 1** ***La fonction partie entière***

On considère la fonction Python définie ci-dessous :

```python
def f(x):
    n = 0
    if x < 0:
        while n > x:
```





```python
            n = n - 1
        return n
    else:
        while n <= x:
            n = n + 1
        return n - 1
```

**1.** Déterminer f(0), f(0.1), f(0.9), f(1), f(1.1), f(-0.1), f(-0.9), f(-1), f(-1.1).

**2.** Que représente f(x) pour un réel x ?

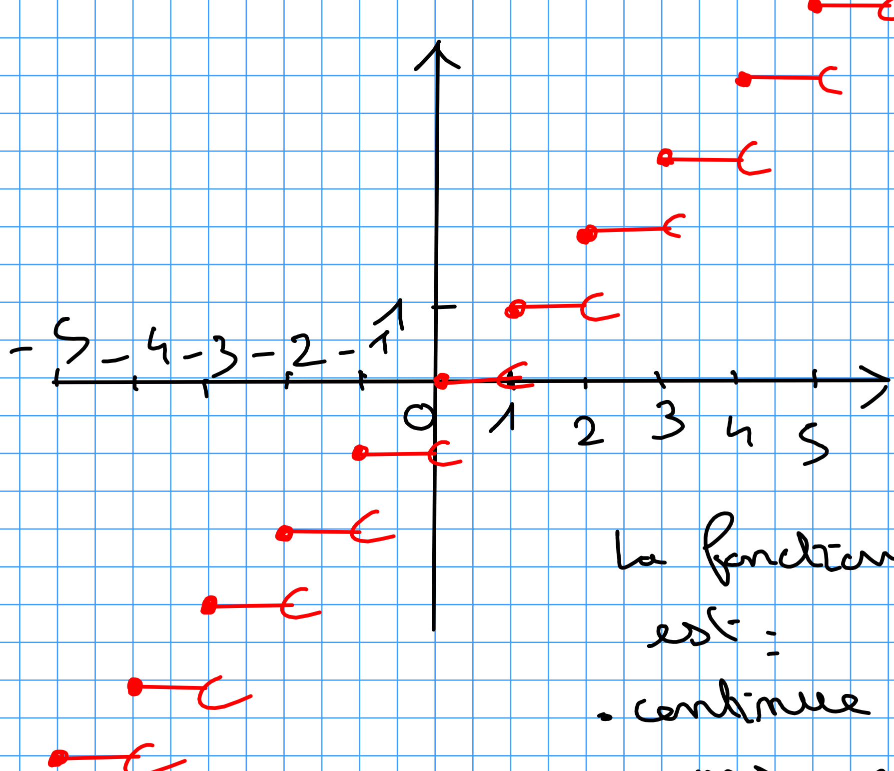
**3.** Représenter la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[-5;5]$.

**4.** Déterminer les points de continuité ou de discontinuité de $f$.

1) $f(0)=0$ $f(0.1)=0$
$f(1)=1$ $f(1.1)=1$
$f(-0.1)=-1$ $f(-0.9)=-1$
$f(-1)=-1$ $f(-1.1)=-2$

2) $f(x)$ représente le plus grand entier inférieure ou égal à $x$.
Cette fonction $f$ est la fonction partie entière pour tout réel $x$, on note $f(x)=\lfloor x \rfloor$

3)




La fonction partie entière est :

- continue en $x$ si $x$ n'est pas un entier
- discontinue en $x$ si $x$ est un entier

**Capacité 2** ***Étudier une suite du type*** $(f(u_n))$

Soit $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n$ par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, on a $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
2. En déduire que la suite $(u_n)$ converge vers une limite $\ell$ et déterminer la valeur de $\ell$ en passant à la





limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

3. Étudier la limite de la suite $(f(u_n))$.

1) Pour tout entier naturel $n$, on définit la propriété : $P_n$ : « $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ »
Démontrons par récurrence que $P_n$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

Initialisation :

$u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{1}{2} u_0 + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

On a $1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 2$ donc $P_0$ est vraie

Hérédité : Soit un entier $n \geq 0$ tel que $P_n$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$$

donc $\frac{1}{2} \times 1 + 1 \leq \frac{1}{2} u_n + 1 \leq \frac{1}{2} u_{n+1} + 1 \leq \frac{1}{2} \times 2 + 1$

$$\frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$$

donc $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$

donc $P_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : $P_n$ est initialisée pour $n = 0$ et héréditaire donc elle est vraie par récurrence pour tout entier $n \geq 0$.

2) Pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$$

. D'une part, pour tout entier $n \geq 0$, on a $u_n \leq u_{n+1}$ donc $(u_n)$ est croissante.

. D'autre part, pour tout entier $n \geq 0$, on a : $u_n \leq 2$ donc $(u_n)$ majorée par 2

D'après le théorème de convergence monotone, on en déduit que $(u_n)$ converge vers une limite $l$ telle que $0 \leq l \leq 2$.

On a pour tout entier naturel $n \geq 0$ :

$$u_{n+1} = g(u_n) \text{ avec } g(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

$g$ est continue sur $\mathbb{R}$

donc si $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$

alors on peut passer à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = g(u_n)$

et on a $\ell = g(\ell)$.

On résout l'équation :

$\ell = g(\ell) \iff \ell = \frac{1}{2}\ell + 1$

$\ell = g(\ell) \iff \frac{1}{2}\ell = 1$

$\ell = g(\ell) \iff \ell = 2$

On vérifie bien que : $0 \leq \ell \leq 2$.

3) Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$.

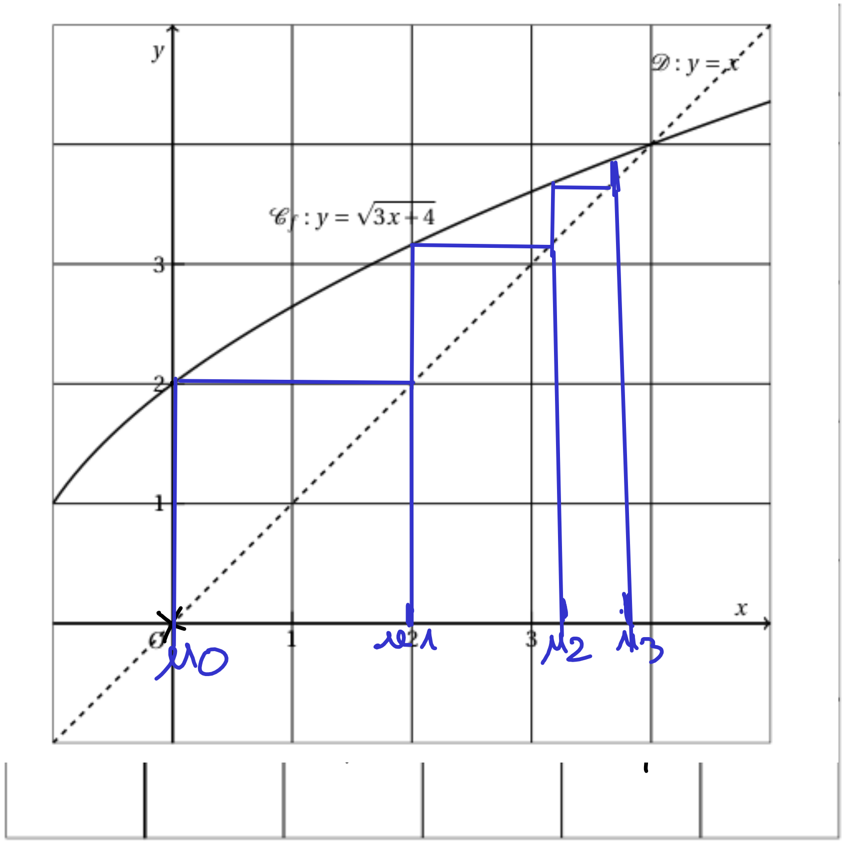
. $f$ est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$.

. De plus la suite $(u_n)$ converge vers $\ell = 2$

. Donc d'après une propriété du cours, la suite $(f(u_n))$ convers vers $f(\ell) = f(2)$.

### Capacité 3 *Étudier une suite définie par* $u_{n+1} = f(u_n)$

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.
On a représenté graphiquement la courbe $\mathscr{C}_f$ d'équation $y = f(x)$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.




1. Représenter sur le graphique les premiers termes de la suite en appliquant cet algorithme de construction :

   - **Étape 1 :** On part du point de coordonnées $C_0$ sur l'axe des abscisses de coordonnées $(u_0\,;0)$ et on construit le point $A_0$ de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $u_0$ et d'ordonnée $f(u_0) = u_1$.
   - **Étape 2 :** On construit le point $B_0$ sur la droite d'équation $y = x$ de même ordonnée $u_1$ que $A_0$ et d'abscisse $u_1$.
   - **Étape 3 :** On construit le point $C_1$ sur l'axe des abscisses de même abscisse que $B_0$. Les coordonnées de $C_1$ sont $(u_1\,;0)$ et on commence une nouvelle itération à l'étape 1.

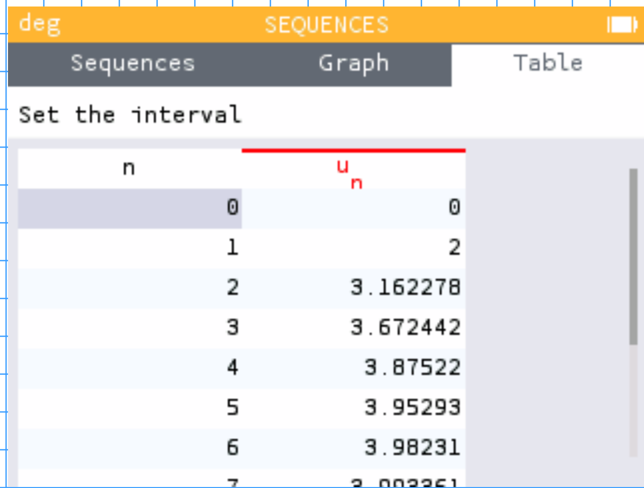
2. Calculer avec une machine les valeurs décimales approchées des premiers termes de $(u_n)$ et vérifier la cohérence de la construction graphique.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, on a :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$$

4. En déduire que la suite $(u_n)$ converge.

5. Déterminer sa limite en appliquant la propriété précédente.




| n | $u_n$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 2 |
| 2 | 3.162278 |
| 3 | 3.672442 |
| 4 | 3.87522 |
| 5 | 3.95293 |
| 6 | 3.98231 |

3) Graphiquement, on peut conjecturer que la suite $(u_n)$ converge vers 4, abscisse du point d'intersection de la droite d'équation $y=x$ et de la courbe d'équation $y=f(x)$

$f$ définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{3x+4}$

$f=\sqrt{u}$ avec $u(x)=3x+4$

donc $f$ dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout $x\geq 0$ :

$f'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ donc $f'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}=\frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$

On en déduit que pour tout $x\geq 0$, on a $f'(x)>0$

donc $f$ croissante sur $[0;+\infty[$

• Pour tout entier naturel $n\geq 0$ on définit la propriété $P_n$ : « $0\leq u_n\leq u_{n+1}\leq 4$ »

Démontrons par récurrence que $P_n$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

<u>Initialisation:</u> $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{3\times 0+4} = \sqrt{4} = 2$

donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$

donc $P_0$ est vraie

<u>Hérédité:</u> Soit un entier $n \geq 0$ tel que $P_n$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$$

$f$ est croissante sur $[0;+\infty[$, donc :

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(4)$$

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$$

donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$

donc $P_{n+1}$ est vraie

<u>Conclusion:</u> $P_n$ est initialisée pour $n=0$ et elle est héréditaire donc elle est vraie par récurrence pour tout entier $n \geq 0$.

4) Pour tout entier $n \geq 0$, on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$

. D'une part, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \leq u_{n+1}$ donc $(u_n)$ croissante.

. D'autre part, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \leq 4$ donc $(u_n)$ majorée par 4.

D'après le théorème de convergence monotone, $(u_n)$ converge vers une limite $l$ telle que $0 \leq l \leq 4$.

5) . $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ avec $0 \leq l \leq 4$

. Pour tout entier $n \geq 0$, on a
$u_{n+1} = f(u_n)$

. $f$ est continue sur $[0;4]$

Donc d'après une propriété du cours, $l$ est solution sur $[0;4]$ de l'équation
$$f(x) = x.$$

On résout dans $[0;4]$ :

$$f(x) = x \iff \begin{cases} \sqrt{3x+4} = x \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \sqrt{3x+4}^2 = x^2 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 3x+4 = x^2 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$f(x) = x \iff \begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

On résout l'équation $x^2 - 3x - 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times (-4) = 25$

$\Delta > 0$ donc deux racines distinctes :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-\sqrt{25}}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{25}}{2} = 4$

On déduit que dans $[0;4]$ :

$$f(x) = x \iff x = 4.$$

L'unique solution de $f(x) = x$ dans $[0;4]$ est 4 et d'après le raisonnement précédent, c'est forcément la limite $l$ de la suite $(u_n)$.

**Capacité 4** ***Utiliser un théorème d'existence***

Soit $f$ la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$.

1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution sur l'intervalle $[-1; 6]$. Vérifier graphiquement avec la calculatrice.

2. Justifier que l'équation $f(x) = 2$ possède au moins une solution sur l'intervalle $[0; 1]$.

1)

On a $f(-1) = (-1)^3 - 6\times(-1)^2 + 6 = -1$

et $f(6) = 6^3 - 6^3 + 6 = 6$

donc $f(-1) < 0 < f(6)$

- $f$ dérivable donc continue sur $[-1;6]$
- $0$ est une valeur intermédiaire entre $f(-1) = -1$ et $f(6) = 6$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution dans $[-1;6]$

2) On a $f(0) = 6$ et $f(1) = 1^3 - 6 + 6 = 1$

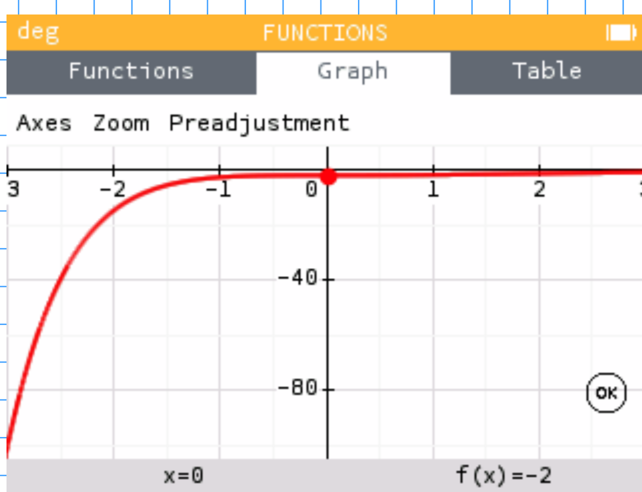
- $f$ dérivable donc continue sur $[0;1]$
- 2 est une valeur intermédiaire entre $f(0) = 6$ et $f(1) = 1$

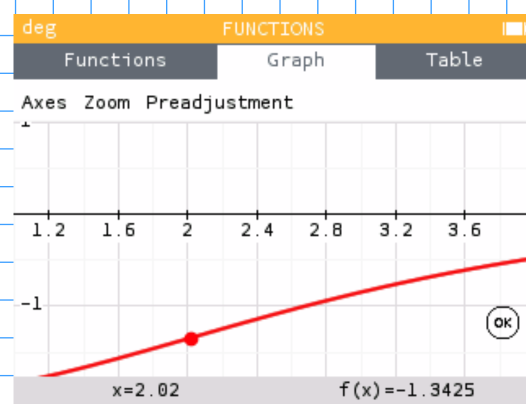
D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution dans $[0;1]$.

**Capacité 5** ***Démontrer qu'une fonction est strictement monotone***

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2)$.

1. Conjecturer graphiquement les limites aux bornes, le sens de variation, la convexité et les éventuels points d'inflexion de la fonction $f$.
2. Démontrer ces conjectures.




1) Graphiquement, on peut conjecturer que :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$
- $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$
- $f$ est concave sur $]-\infty;0]$ et sur $[2;+\infty[$ et convexe sur $[0;2]$
- $\mathcal{C}_f$ admet deux points d'inflexion aux abscisses 0 et 2

Étudions les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ :

- Tout d'abord en $-\infty$.
  - $\lim_{x \to -\infty} -x = +\infty$

    On pose $y = -x$, on a $\lim_{y \to +\infty} e^{y} = +\infty$

    donc par composition $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

Pour tout $x < 0$, $x^2 + 2x + 2 = x^2\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$

donc par produit $\lim_{x \to -\infty} x^2\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) = +\infty$

- Par produit on a donc $\boxed{\lim_{x \to -\infty} -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) = -\infty}$

- Ensuite en $+\infty$ :

Pour tout $x > 0$ : $f(x) = -\frac{x^2}{e^x} - \frac{2x}{e^x} - \frac{2}{e^x}$

Par croissances comparées on a $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$

et $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

Par quotient, on a $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

Par somme on a donc $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

- Étudions le sens de variation et la convexité de $f$.

$f$ dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$f = -e^{u} \times v \qquad \text{avec } u(x) = -x$$
$$\text{et } v(x) = x^2 + 2x + 2$$

$$f' = -(e^{u})' \times v - e^{u} \times v'$$

$$f' = -u' e^{u} \times v - e^{u} v' = -e^{u}\left(u' v + v'\right)$$

donc $f'(x) = -e^{-x} \times \left((-1) \times (x^2 + 2x + 2) + 2x + 2\right)$

$$\boxed{f'(x) = -e^{-x} \times (-x^2) = e^{-x} \times x^2}$$

Pour tout réel $x$, on a $e^{-x} \times x^2 \geq 0$

donc $f'(x) \geq 0$

donc $f$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On dérive encore 1 fois pour étudier la convexité

Pour tout réel $x$, on a : $f''(x) = -e^{-x} \times x^2 + e^{-x} \times 2x$

$$\boxed{f''(x) = e^{-x} \times x \times (2 - x)}$$

On en déduit le signe de $f''$ et la convexité de $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e^{-x}$ | | $+$ | \| | $+$ | \| | $+$ | |
| $x(2-x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Convexité de $f$ | | concave | \| | convexe | \| | concave | |

On retrouve aussi que $\mathcal{C}_f$ admet des points d'inflexion aux abscisses 0 et 2.

**Capacité 6** ***Utiliser le théorème de la bijection***

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$.

1. Étudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Dresser le tableau de variations complet de $f$.
3. A l'aide du corollaire du TVI appliqué sur trois intervalles différents, justifier que l'équation $f(x) = 0$ possède exactement trois solutions.
4. Démontrer que la plus grande solution de $f(x) = 0$ est comprise entre 5 et 6 puis déterminer par balayage un encadrement de cette solution d'amplitude 0,1 avec un tableau de valeurs sur la calculatrice.
5. Compléter les fonctions algorithmique et Python ci-dessous pour qu'elles déterminent par balayage un encadrement d'amplitude 0,1 de la plus grande solution de $f(x) = 0$.
6. Déduire du tableau de variations de $f$, son tableau de signes.

**Algorithme**

```
Fonction f(x):
  Retourne x³ − 6x² + 6

Fonction balayage():
  x ⟵ 5
  Tant que ..................
    x ⟵ x + 0,1
  Retourne (......, ......)
```

**Python**

```
def f(x):
    return x ** 3 - 6 * x ** 2 + 6

def balayage():
    x = 5
    while ..............:
        x = x + 0.1
    return (......, ......)
```

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$ definie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ .

### 0.2.1 Question 1 : Calcul de dérivée

In [7]:
```
#expression de f(x)
fexp = t**3 - 6*t**2 + 6
fexp
```

Out [7]:
$t^3 - 6t^2 + 6$

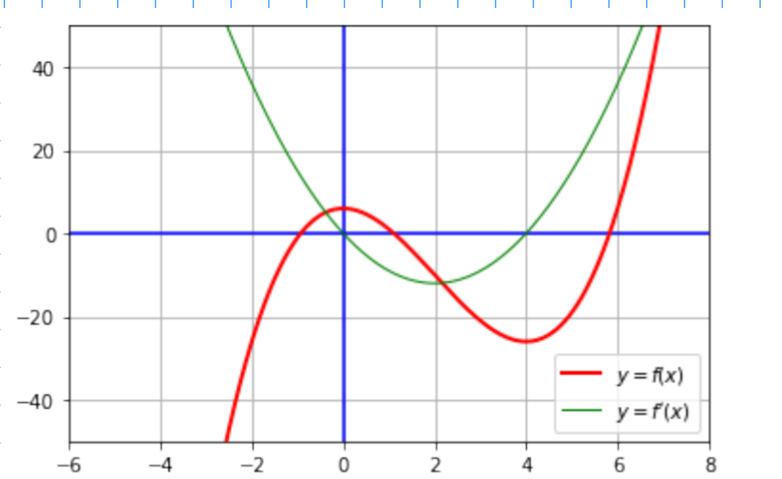
In [8]:
```
#expression de f'(x)
fprimexp = dérivée(fexp, t)
fprimexp
```



Out [8]:
$3t^2 - 12t$

In [9]:
```
simplifier(fprimexp)
```

Out [9]:
$3t\,(t-4)$




| | $-\infty$ | | $0$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t) = 3t(t-4)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(t)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

3)

### 0.2.3 Question 4 Existence de solutions de l'équation $f(x) = 0$

- $f : x \mapsto f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$ est dérivable donc continue sur $]-\infty; 0]$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $f(0) > 0$
- $f$ est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$

D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède donc une unique solution $\alpha$ dans l'intervalle $]-\infty; 0]$.

- $f : x \mapsto f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$ est dérivable donc continue sur $[0; 4]$
- $f(0) > 0$ et $f(4) < 0$
- $f$ est strictement croissante sur $[0; 4]$

D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède donc une unique solution $\beta$ dans l'intervalle $[0; 4]$

- $f : x \mapsto f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$ est dérivable donc continue sur $[4; +\infty[$
- $f(4) < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- $f$ est strictement croissante sur $[4; +\infty[$

D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède donc une unique solution $\gamma$ dans l'intervalle $[4; +\infty[$.

4) • $f$ strictement croissante sur $[5;6]$

On a donc : $f(5) < 0 < f(6) \Leftrightarrow f(5) < f(\gamma) < f(6)$

• stricte croissance de $f$ sur $[5;6]$ $\Big\} \Leftrightarrow 5 < \gamma < 6$

**Algorithme**

```
Fonction f(x):
  Retourne x³ − 6x² + 6

Fonction balayage():
  x ⟵ 5
  Tant que f(x) < 0 ...........
    x ⟵ x + 0,1
  Retourne (x-0.1, ..x..)
```

**Python**

```python
def f(x):
    return x ** 3 - 6 * x ** 2 + 6

def balayage():
    x = 5
    while f(x) < 0 .....:
        x = x + 0.1
    return (x-0.1, .x...)
```

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $\beta$ | | $4$ | | $\gamma$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $f(0)>0$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $f(4)<0$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| Signe de $f$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | | $0$ | $-$ | | | $0$ | $+$ | |