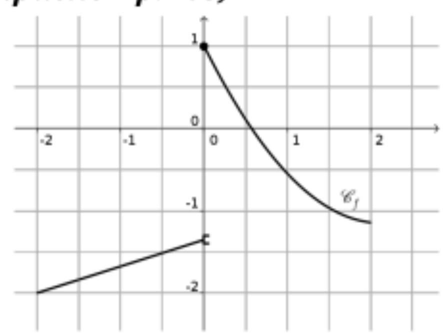
Corrigé des exemples du cours du chapitre continuité

Capacité 1 ***Étudier la continuité d'une fonction (voir capacité 1 p.203)***

1. Déterminer les points de continuité et de discontinuité de la fonction représentée ci-contre.
2. Représenter la courbe d'une fonction définie sur l'intervalle $[-2;2]$, telle que $f(-2)>0$ et $f(2)<0$ et f ne s'annule pas sur $[-2;2]$.

   f peut-elle être continue sur $[-2;2]$?



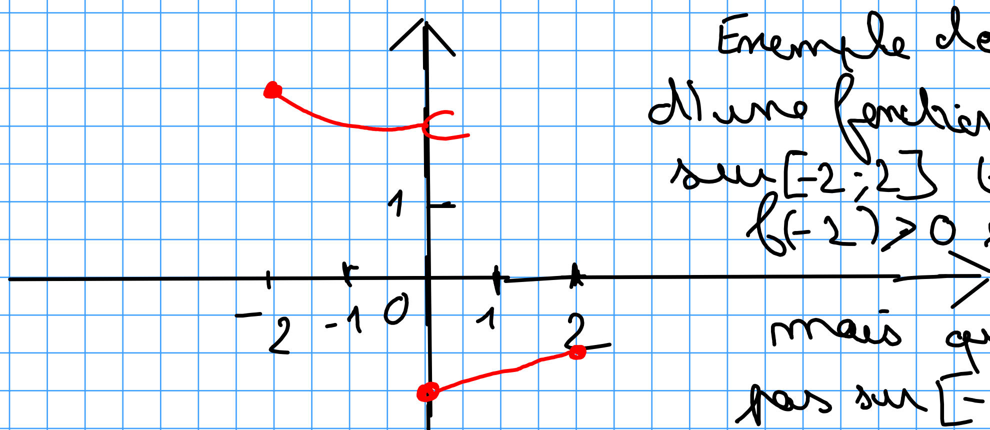
Source : Rico602 [CC BY-SA 3.0]

1) f continue sur $[-2;0[\cup]1;2]$

f discontinue en 0 car :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -1{,}5 \neq 1 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$$

2)



Exemple de courbe d'une fonction f définie sur $[-2;2]$ telle que $f(-2)>0$ et $f(2)<0$ mais qui ne s'annule pas sur $[-2;2]$

On peut conjecturer qu'il n'existe pas de fonction continue sur $[-2;2]$ telle que $f(-2)>0$ et $f(2)<0$ et que f ne s'annule pas sur $[-2;2]$

On pourra le justifier avec le théorème des valeurs intermédiaires.

Algorithmique 1 ***La fonction partie entière***

On considère la fonction Python définie ci-dessous :

```
def f(x):
    n = 0
    if x < 0:
        while n > x:
```



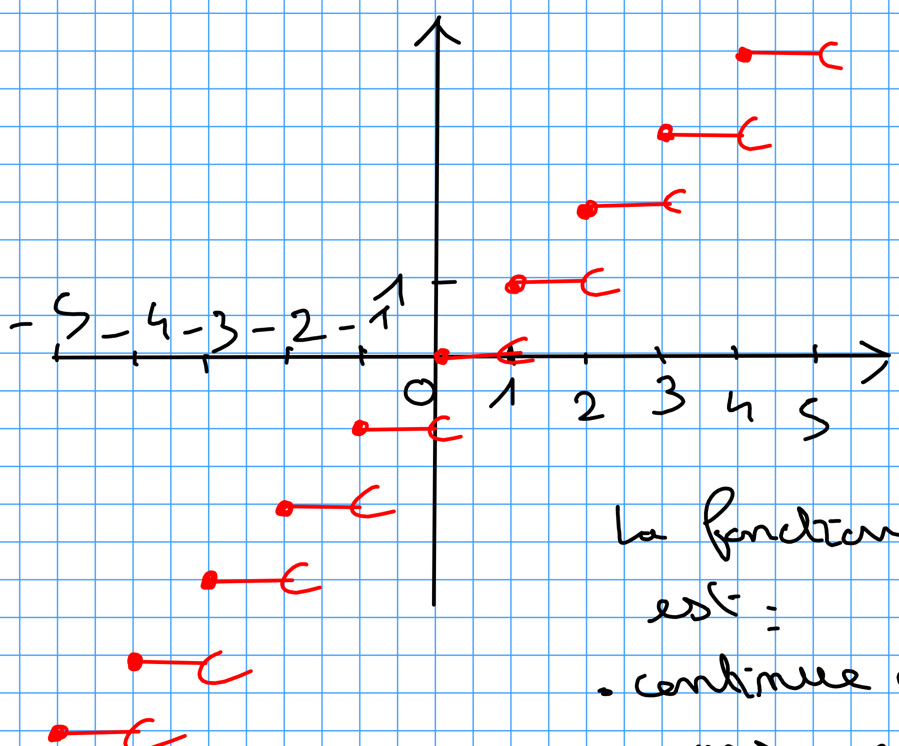
```
            n = n - 1
        return n
    else:
        while n <= x:
            n = n + 1
        return n - 1
```

1. Déterminer f(0), f(0.1), f(0.9), f(1), f(1.1), f(-0.1), f(-0.9), f(-1), f(-1.1).
2. Que représente f(x) pour un réel x?
3. Représenter la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[-5; 5]$.
4. Déterminer les points de continuité ou de discontinuité de f.

1) $f(0)=0$ $f(0.1)=0$
$f(1)=1$ $f(1.1)=1$
$f(-0.1)=-1$ $f(-0.9)=-1$
$f(-1)=-1$ $f(-1.1)=-2$

2) $f(x)$ représente le plus grand entier inférieure ou égal à x.
Cette fonction f est la fonction partie entière pour tout réel x, on note $f(x)=\lfloor x \rfloor$

3)



La fonction partie entière est :

- continue en x si x n'est pas un entier
- discontinue en x si x est un entier

Capacité 2 ***Étudier une suite du type*** $(f(u_n))$

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
2. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ et déterminer la valeur de ℓ en passant à la

limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

3. Étudier la limite de la suite $(f(u_n))$.

1) Pour tout entier naturel n, on définit la propriété : P_n : « $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ »
Démontrons par récurrence que P_n est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

Initialisation :

$u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{1}{2} u_0 + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

On a $1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 2$ donc P_0 est vraie

Hérédité : Soit un entier $n \geqslant 0$ tel que P_n est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$$

donc $\frac{1}{2} \times 1 + 1 \leq \frac{1}{2} u_n + 1 \leq \frac{1}{2} u_{n+1} + 1 \leq \frac{1}{2} \times 2 + 1$

$$\frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$$

donc $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$

donc P_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : P_n est initialisée pour $n = 0$ et héréditaire donc elle est vraie par récurrence pour tout entier $n \geqslant 0$.

2) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$$

. D'une part, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_n \leq u_{n+1}$ donc (u_n) est croissante.

. D'autre part, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a : $u_n \leq 2$ donc (u_n) majorée par 2

D'après le théorème de convergence monotone, on en déduit que (u_n) converge vers une limite ℓ telle que $0 \leq \ell \leq 2$.

On a pour tout entier naturel $n \geq 0$:

$$u_{n+1} = g(u_n) \quad \text{avec} \quad g(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

g est continue sur $\mathbb{R}$

donc si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

alors on peut passer à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = g(u_n)$

et on a $\ell = g(\ell)$.

On résout l'équation :

$$\ell = g(\ell) \iff \ell = \frac{1}{2}\ell + 1$$

$$\ell = g(\ell) \iff \frac{1}{2}\ell = 1$$

$$\ell = g(\ell) \iff \ell = 2$$

On vérifie bien que : $0 \leq \ell \leq 2$.

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$.

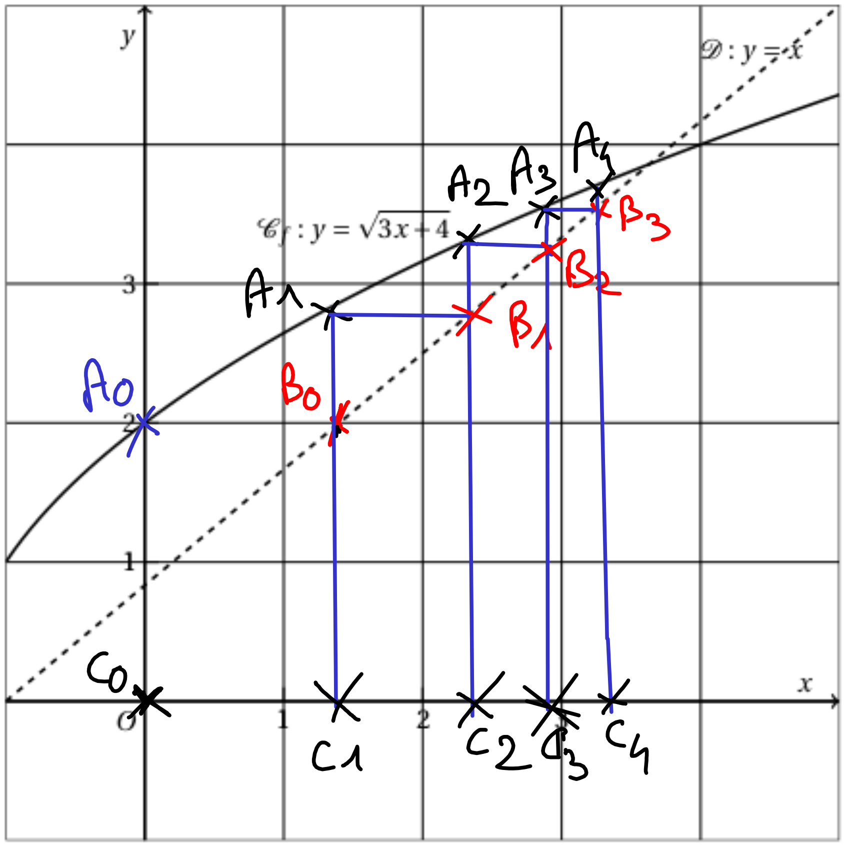
. f est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$.

. De plus la suite (u_n) converge vers $\ell = 2$

. Donc d'après une propriété du cours, la suite $(f(u_n))$ convers vers $f(\ell) = f(2)$.

Capacité 3 *Étudier une suite définie par* $u_{n+1} = f(u_n)$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.
On a représenté graphiquement la courbe $\mathscr{C}_f$ d'équation $y = f(x)$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.



1. Représenter sur le graphique les premiers termes de la suite en appliquant cet algorithme de construction :

   - **Étape 1 :** On part du point de coordonnées C_0 sur l'axe des abscisses de coordonnées $(u_0\,;0)$ et on construit le point A_0 de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse u_0 et d'ordonnée $f(u_0) = u_1$.
   - **Étape 2 :** On construit le point B_0 sur la droite d'équation $y = x$ de même ordonnée u_1 que A_0 et d'abscisse u_1.
   - **Étape 3 :** On construit le point C_1 sur l'axe des abscisses de même abscisse que B_0. Les coordonnées de C_1 sont $(u_1\,;0)$ et on commence une nouvelle itération à l'étape 1.

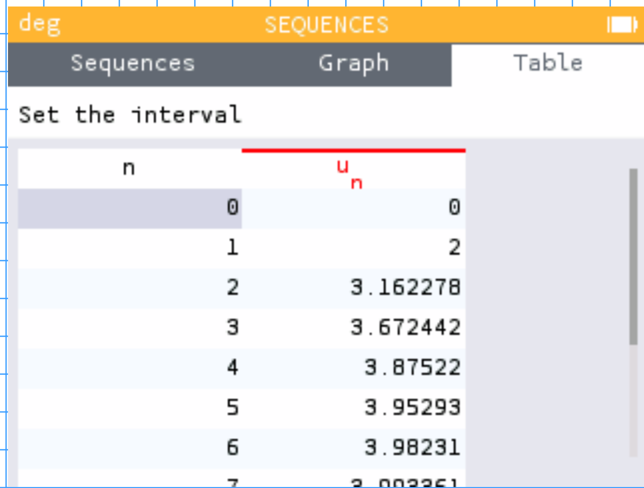
2. Calculer avec une machine les valeurs décimales approchées des premiers termes de (u_n) et vérifier la cohérence de la construction graphique.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$$

4. En déduire que la suite (u_n) converge.

5. Déterminer sa limite en appliquant la propriété précédente.



n	u_n
0	0
1	2
2	3.162278
3	3.672442
4	3.87522
5	3.95293
6	3.98231
7	[illegible]

3) Graphiquement, on peut conjecturer que la suite (u_n) converge vers 4, abscisse du point d'intersection de la droite d'équation $y=x$ et de la courbe d'équation $y=f(x)$

f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{3x+4}$

$f=\sqrt{u}$ avec $u(x)=3x+4$

donc f dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout $x\geq 0$:

$f'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ donc $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}=\dfrac{3}{2\sqrt{3x+4}}$

On en déduit que pour tout $x\geq 0$, on a $f'(x)>0$ donc f croissante sur $[0;+\infty[$

• Pour tout entier naturel $n\geq 0$ on définit la propriété P_n : « $0\leq u_n\leq u_{n+1}\leq 4$ »

Démontrons par récurrence que P_n est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

<u>Initialisation:</u> $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{3\times 0+4} = \sqrt{4} = 2$

donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$

donc P_0 est vraie

<u>Hérédité:</u> Soit un entier $n \geq 0$ tel que P_n est vraie

Par hypothèse de récurrence, on a:

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$$

f est croissante sur $[0;+\infty[$, donc:

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(4)$$

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$$

donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$

donc P_{n+1} est vraie

<u>Conclusion:</u> P_n est initialisée pour $n=0$ et elle est héréditaire donc elle est vraie par récurrence pour tout entier $n \geq 0$.

4) Pour tout entier $n \geq 0$, on a: $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$

. D'une part, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \leq u_{n+1}$ donc (u_n) croissante.

. D'autre part, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \leq 4$ donc (u_n) majorée par 4.

D'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge vers une limite l telle que $0 \leq l \leq 4$.

5) . $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ avec $0 \leq \ell \leq 4$

. Pour tout entier $n \geq 0$, on a
$u_{n+1} = f(u_n)$

. f est continue sur $[0;4]$

Donc d'après une propriété du cours, ℓ est solution sur $[0;4]$ de l'équation
$f(x) = x$.

On résout dans $[0;4]$:

$$f(x) = x \iff \begin{cases} \sqrt{3x+4} = x \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \sqrt{3x+4}^2 = x^2 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x+4 = x^2 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$f(x) = x \iff \begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

On résout l'équation $x^2 - 3x - 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times (-4) = 25$

$\Delta > 0$ donc deux racines distinctes :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-\sqrt{25}}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{25}}{2} = 4$

On déduit que dans $[0;4]$:

$$f(x) = x \iff x = 4.$$

L'unique solution de $f(x) = x$ dans $[0;4]$ est 4 et d'après le raisonnement précédent, c'est forcément la limite l de la suite (u_n).

Capacité 4 ***Utiliser un théorème d'existence***

Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$.

1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution sur l'intervalle $[-1;6]$. Vérifier graphiquement avec la calculatrice.

2. Justifier que l'équation $f(x) = 2$ possède au moins une solution sur l'intervalle $[0;1]$.

1)

On a $f(-1) = (-1)^3 - 6\times(-1)^2 + 6 = -1$

et $f(6) = 6^3 - 6^3 + 6 = 6$

donc $f(-1) < 0 < f(6)$

- f dérivable donc continue sur $[-1;6]$
- 0 est une valeur intermédiaire entre $f(-1) = -1$ et $f(6) = 6$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution dans $[-1;6]$

2) On a $f(0)=6$ et $f(1)=1^3-6+6=1$

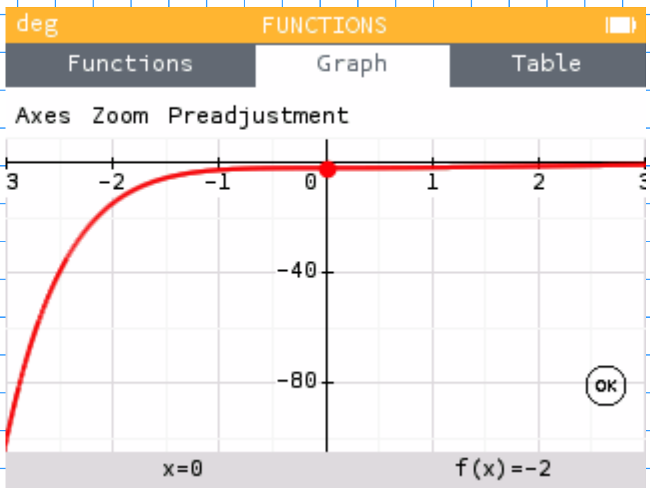
- f dérivable donc continue sur $[0;1]$
- 2 est une valeur intermédiaire entre $f(0)=6$ et $f(1)=1$

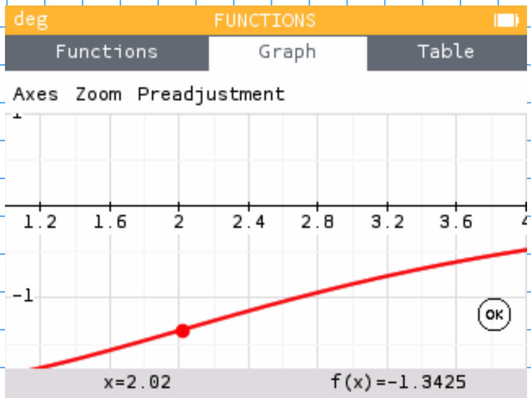
D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=0$ possède au moins une solution dans $[0;1]$.

Capacité 5 ***Démontrer qu'une fonction est strictement monotone***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-e^{-x}(x^2+2x+2)$.

1. Conjecturer graphiquement les limites aux bornes, le sens de variation, la convexité et les éventuels points d'inflexion de la fonction f.
2. Démontrer ces conjectures.





1) graphiquement, on peut conjecturer que :

- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0^+$
- f est croissante sur $\mathbb{R}$
- f est concave sur $]-\infty;0]$ et sur $[2;+\infty[$ et convexe sur $[0;2]$
- $\mathcal{C}_f$ admet deux points d'inflexion aux abscisses 0 et 2

Étudions les limites en $-\infty$ et en $+\infty$:

- Tout d'abord en $-\infty$.
  - $\lim_{x \to -\infty} -x = +\infty$

    On pose $y = -x$, on a $\lim_{y \to +\infty} e^{y} = +\infty$

    donc par composition $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

Pour tout $x < 0$, $x^2 + 2x + 2 = x^2\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$

donc par produit $\lim_{x \to -\infty} x^2\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) = +\infty$

- Par produit on a donc $\boxed{\lim_{x \to -\infty} -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) = -\infty}$

- Ensuite en $+\infty$:

Pour tout $x > 0$: $f(x) = -\frac{x^2}{e^x} - \frac{2x}{e^x} - \frac{2}{e^x}$

Par croissances comparées on a $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$

et $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

Par quotient, on a $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

Par somme on a donc $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

. Étudions le sens de variation et la convexité de f.

f dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$

$$f = -e^{u} \times v \quad \text{avec } u(x) = -x$$
$$\text{et } v(x) = x^2 + 2x + 2$$

$$f' = -(e^{u})' \times v - e^{u} \times v'$$
$$f' = -u' e^{u} \times v - e^{u} v' = -e^{u}(u'v + v')$$

donc $f'(x) = -e^{-x} \times ((-1) \times (x^2 + 2x + 2) + 2x + 2)$

$$\boxed{f'(x) = -e^{-x} \times (-x^2) = e^{-x} \times x^2}$$

Pour tout réel x, on a $e^{-x} \times x^2 > 0$

donc $f'(x) > 0$

donc f strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On dérive encore 1 fois pour étudier la convexité

Pour tout réel x, on a : $f''(x) = -e^{-x} \times x^2 + e^{-x} \times 2x$

$$\boxed{f''(x) = e^{-x} \times x \times (2 - x)}$$

On en déduit le signe de f'' et la convexité de f.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
e^{-x}		$+$	|	$+$	|	$+$	
$x(2-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Convexité de f		concave	|	convexe	|	concave	

On retrouve aussi que $\mathcal{C}_f$ admet des points d'inflexion aux abscisses 0 et 2.

Capacité 6 *Utiliser le théorème de la bijection*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et déterminer ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Dresser le tableau de variations complet de f.
3. A l'aide du corollaire du TVI appliqué sur trois intervalles différents, justifier que l'équation $f(x) = 0$ possède exactement trois solutions.
4. Démontrer que la plus grande solution de $f(x) = 0$ est comprise entre 5 et 6 puis déterminer par balayage un encadrement de cette solution d'amplitude $0,1$ avec un tableau de valeurs sur la calculatrice.
5. Compléter les fonctions algorithmique et Python ci-dessous pour qu'elles déterminent par balayage un encadrement d'amplitude $0,1$ de la plus grande solution de $f(x) = 0$.
6. Déduire du tableau de variations de f, son tableau de signes.

Algorithme

```
Fonction f(x):
   Retourne x³ − 6x² + 6

Fonction balayage():
   x ⟵ 5
   Tant que ..................
      x ⟵ x + 0,1
   Retourne (......, ......)
```

Python

```
def f(x):
    return x ** 3 - 6 * x ** 2 + 6

def balayage():
    x = 5
    while ..............:
        x = x + 0.1
    return (......, ......)
```

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$ definie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.

0.2.1 Question 1 : Calcul de dérivée

In [7]:
```
#expression de f(x)
fexp = t**3 - 6*t**2 + 6
fexp
```

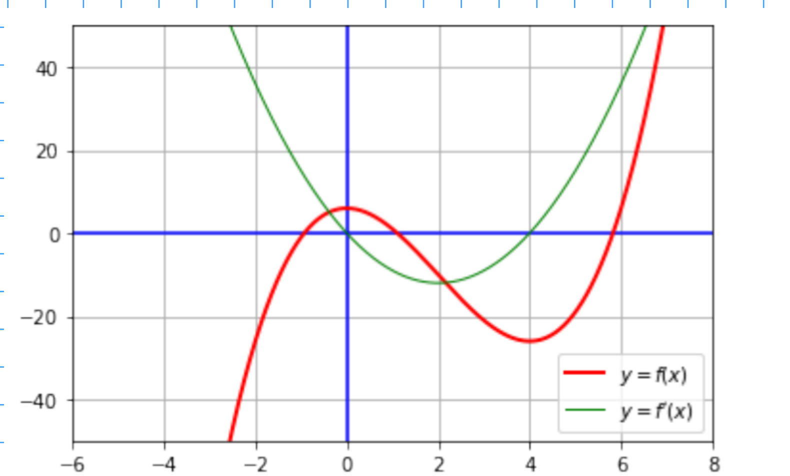
Out [7] :
$t^3 - 6t^2 + 6$

In [8]:
```
#expression de f'(x)
fprimexp = dérivée(fexp, t)
fprimexp
```


Out [8] :
$3t^2 - 12t$

In [9]:
```
simplifier(fprimexp)
```

Out [9] :
$3t\,(t-4)$



	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(t) = 3t(t-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

3)

0.2.3 Question 4 Existence de solutions de l'équation $f(x) = 0$

- $f : x \mapsto f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$ est dérivable donc continue sur $]-\infty; 0]$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $f(0) > 0$
- f est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$

D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède donc une unique solution α dans l'intervalle $]-\infty; 0]$.

- $f : x \mapsto f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$ est dérivable donc continue sur $[0; 4]$
- $f(0) > 0$ et $f(4) < 0$
- f est strictement croissante sur $[0; 4]$

D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède donc une unique solution β dans l'intervalle $[0; 4]$

- $f : x \mapsto f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$ est dérivable donc continue sur $[4; +\infty[$
- $f(4) < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- f est strictement croissante sur $[4; +\infty[$

D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède donc une unique solution γ dans l'intervalle $[4; +\infty[$.

4) • f strictement croissante sur $[5;6]$

On a donc : $f(5) < 0 < f(6) \iff f(5) < f(\gamma) < f(6)$

• stricte croissance de f sur $[5;6]$ $\iff 5 < \gamma < 6$

Algorithme

```
Fonction f(x):
   Retourne x³ − 6x² + 6

Fonction balayage():
   x ⟵ 5
   Tant que .f(x) < 0..........
      x ⟵ x + 0,1
   Retourne (x-0.1, ..x..)
```

Python

```python
def f(x):
    return x ** 3 - 6 * x ** 2 + 6

def balayage():
    x = 5
    while f(x) < 0.....:
        x = x + 0.1
    return (x-0.1, .x...)
```

x	$-\infty$		α		0		β		4		γ		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(0)>0$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f(4)<0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
Signe de f		$-$	0	$+$			0	$-$			0	$+$	