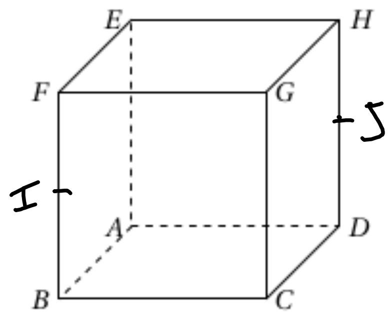
Corrigés des exemples du cours sur le produit scalaire dans l'espace

Capacité 1 ***Calculer un produit scalaire***

Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté a, I le milieu de $[BF]$ et J le milieu de $[DH]$.



Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}$
2. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AH}$
3. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AJ}$
4. $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BF}$
5. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{FH}$
6. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EG}$
7. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{GE}$
8. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BF}$

1) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=0$

2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=AD^2=a^2$ projection orthogonale

3) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=AD^2=a^2$ par projection orthogonale

4) $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BF}$ par projection orthogonale

or $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$ donc $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}BF^2=\frac{1}{2}a^2$

5) $\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ car $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$

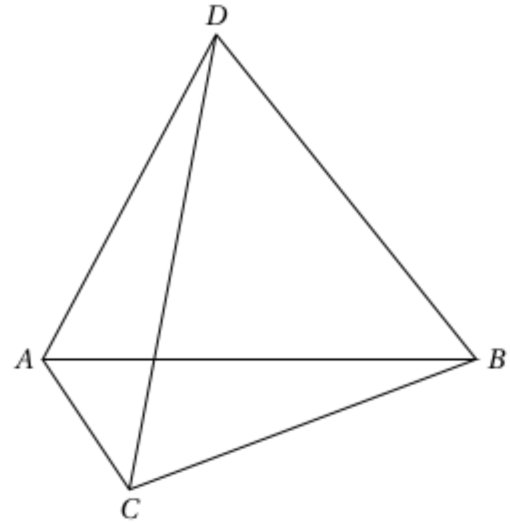
6) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=AC^2=(a\sqrt{2})^2=2a^2$

7) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{AC}\cdot(-\overrightarrow{EG})=-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EG}=-AC^2=-a^2$

8) $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{CG}$ donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CG}=0$ car $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{CG}$

Capacité 2 *Démontrer que des vecteurs sont orthogonaux avec le produit scalaire*

Les arêtes d'un tétraèdre régulier sont toutes de même longueur.
On considère un tétraèdre régulier $ABCD$, on appelle I le milieu de $[AB]$ et on note a la longueur de l'arête $[AB]$.



1. Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ en fonction de a.
2. Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$ en fonction de a.
3. En déduire que le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1) ABD équilatéral donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD})$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a \times a \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{a^2}{2}$$

2) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(-\overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -AC \times AB \times \cos(\widehat{BAC}) = -\frac{a^2}{2}$$

3) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ par bilinéarité

donc $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$

On en déduit que $\overrightarrow{CD}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$.