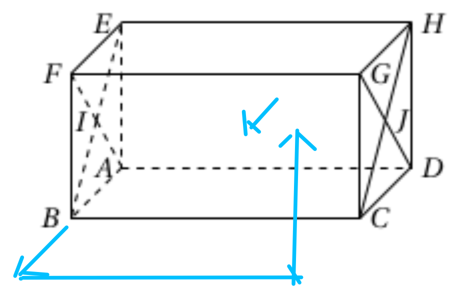
Vecteurs de l'espace
Corrigés des exemples du cours

Capacité 1 ***Prouver des égalités vectorielles***

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle.

1. Déterminer trois vecteurs égaux de la figure égaux au vecteur $\overrightarrow{FE}$.
2. Déterminer l'image du point F par la translation de vecteur $\overrightarrow{GJ}$.
3. Construire l'image K du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AG}$.

   Que peut-on dire des points H, G et K? Justifier.



1) $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{GH}$

2) On a $\overrightarrow{FI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FA}$ car I milieu de [FA]

De plus $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA}$

et $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{HD}$

car EFGH et EADH sont des parallélogrammes

donc $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{GD}$

Or J milieu de GD donc $\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GD}$

On a donc $\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EA})$

$\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FI}$

L'image du point F par la translation de vecteur $\overrightarrow{GJ}$ est donc le point I.

3) On a $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$

Soit K l'image du point B par la transla de vecteur $\overrightarrow{AG}$. On a donc :

$$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$$

De $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AG}$ on déduit que $ABKG$ est un parallélogramme et donc que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GK}$

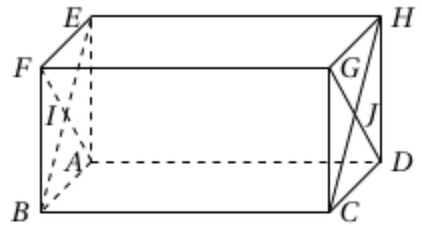
Or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ car $ABCD$ parallélogramme
et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HG}$ car $HGCD$ parallélogramme
donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HG}$

De $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GK}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG}$, on déduit que :
$\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{GK}$
et donc que G milieu de $[HK]$.
Ainsi le points G, H, K sont alignés.

Capacité 2 ***Identifier des vecteurs colinéaires, opposés, égaux***

Dans le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ de la capacité 1 :

1. Déterminer trois vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{FI}$.
2. Déterminer trois vecteurs opposés au vecteur $\overrightarrow{FI}$.
3. Déterminer trois vecteurs colinéaires, de même sens mais pas de même norme que le vecteur $\overrightarrow{FI}$.
4. Déterminer trois vecteurs colinéaires, de sens opposé mais pas de même norme que le vecteur $\overrightarrow{FI}$.



1) Trois vecteurs égaux à $\overrightarrow{FI}$:

$$\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{JD}$$

2) Trois vecteurs opposés à $\overrightarrow{FI}$:

$$\overrightarrow{FI} = -\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{JD} = -\overrightarrow{GJ}$$

3) Trois vecteurs colinéaires, de même sens mais pas de même norme que $\overrightarrow{FI}$:

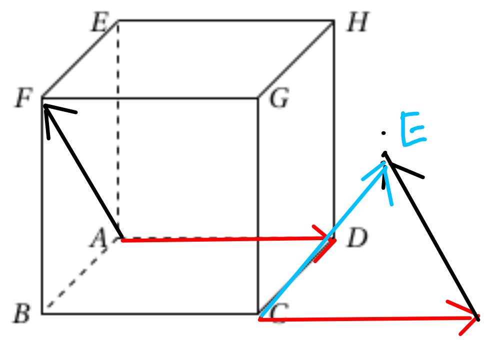
$\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{FA} = 2\overrightarrow{FI}$ et $\frac{3}{2}\overrightarrow{GD}$

4) Trois vecteurs colinéaires, de sens opposé mais pas de même norme que $\overrightarrow{FI}$:

$\overrightarrow{FA} = -2\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{GD} = -2\overrightarrow{IF}$

et $-3\overrightarrow{IF}$

Capacité 3 *Construire une somme vectorielle*



1. Soit $ABCDEFGH$ un cube.
   a. Donner un représentant d'origine A du vecteur $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AD}$.
   b. Construire un représentant d'origine C du vecteur $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AD}$.
   c. Déterminer un représentant d'origine A du vecteur $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AE}$.
   d. Justifier que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$.
   e. Déterminer l'image du point H par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})$.
2. Soit $MNPQ$ un tétraèdre.
   a. Faire une figure.
   b. Recopier et compléter l'égalité : $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{MP} + \ldots + \overrightarrow{QP}$
   c. En déduire que $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{QN}$.

1) a) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AG}$

b) $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AD}$

c) $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{HG}$

$\_\_\_\_\_\_\_\_ = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HG}$

$\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AG}$

d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$

e) $\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EA}$

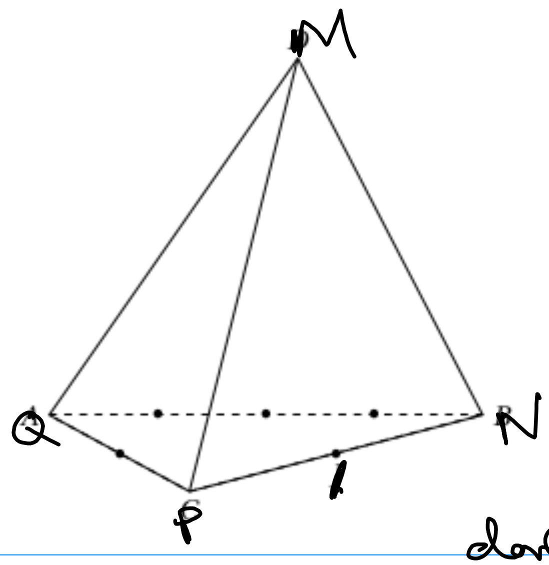
$\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EA}$

$\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}) = \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{HB}$

L'image du point H par la translation de vec-

-teur $\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})$ est donc le point B

2) Soit MNPQ un tétraèdre



a)

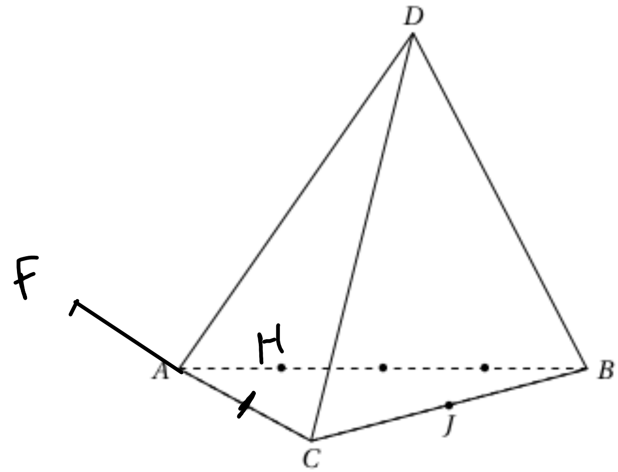
$$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{QP}$$

b) On en déduit que:

$$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PN}$$

donc $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{QN}$

Capacité 4 ***Utiliser la colinéarité pour démontrer un alignement ou un parallélisme***



Soit $ABCD$ un tétraèdre. J est le milieu de $[BC]$, H et F sont les points tels que :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

1. Compléter la figure.
2. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire que les points F, H et J sont alignés.

2) $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AH}$

donc $\overrightarrow{FH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}AB$

$\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CJ}$

$\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

en effet J milieu de [CB] donc $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

On a donc $\overrightarrow{FJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{FJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{FJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$

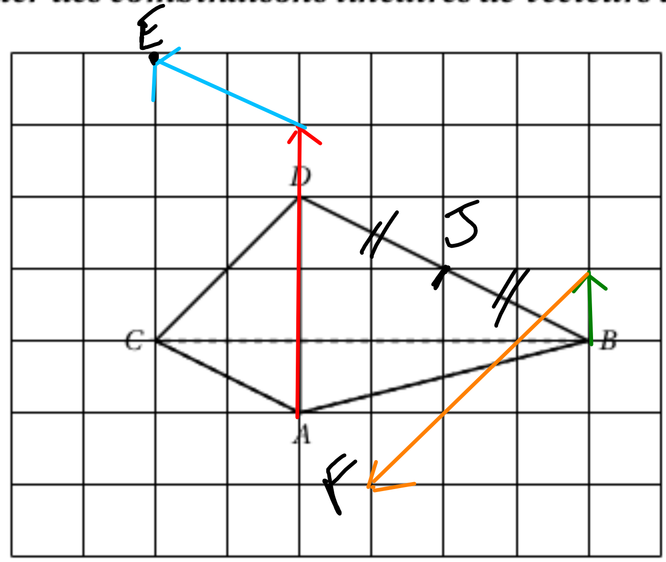
$\overrightarrow{FJ} = 3/2\,\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

donc $\vec{FJ} = \vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AB}$

On rappelle que $\vec{FH} = \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{4}\vec{AB}$

On remarque que $\vec{FJ} = 2\vec{FH}$.
Les vecteurs $\vec{FJ}$ et $\vec{FH}$ sont donc colinéaires et comme ils ont un point commun, les points F, J, et H sont alignés.

Capacité 5 ***Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés, voir capacité 1 p.51***



1. Construire sur la figure ci-dessus le point E défini par $\overrightarrow{AE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$.
2. Construire sur la figure ci-dessus le point F défini par $\overrightarrow{BF} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$.
3. Construire sur la figure ci-dessus le point J tel que $\overrightarrow{JD} + \overrightarrow{JB} = \vec{0}$.
4. On considère l'équation vectorielle $(\mathscr{E})$: $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ d'inconnue un point G.
   a. Démontrer que pour tout point G de l'espace, $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GJ}$.
   b. En déduire que $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \iff \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CJ}$.
   c. En déduire qu'il existe un unique point G de l'espace vérifiant l'équation $(\mathscr{E})$.
   d. Démontrer que le point G vérifiant l'équation $(\mathscr{E})$ appartient aux trois médianes du triangle BDC. On en déduit que les trois médianes du triangle BDC sont concourantes en G qui est le centre de gravité du triangle BDC.

4) a) Pour tout point G de l'espace, on a :

$$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JD}$$
$$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JD}$$

Or J milieu de [BD] donc $\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JD}=\overrightarrow{0}$

On a donc : $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GJ}$

b) On en déduit que :

$$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0} \iff 2\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$$
$$\iff \overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CJ}$$

Il existe donc un unique point G vérifiant $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$, qui est l'image du point C par la translation de vecteur $\frac{2}{3}\overrightarrow{CJ}$.
Ceci prouve à la fois l'existence et l'unicité de G.

d) On a déjà démontré qu'il existe un unique point G vérifiant $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ et que $\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CJ}$.
On en déduit que G appartient à la médiane issue de C dans le triangle CBD.

On montre de même qu'en 4) a) que si on note I le milieu de [CD] et K le milieu de [BC] alors :

$$\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GI} \text{ et } \overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GK}$$

Puis en substituant dans $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$

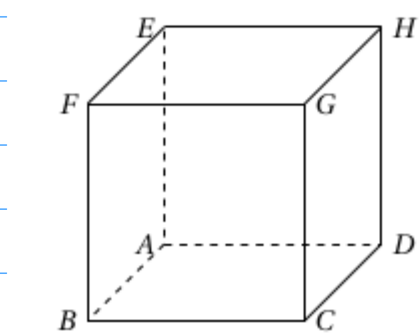
on obtient d'une part que :
$\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DK}$ et $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$

On en déduit que G appartient aux médianes (DI) et (BK).
G appartient donc aux trois médianes du triangle BCD. On en déduit d'une part que ces 3 médianes sont concourantes et d'autre part que G est leur point d'intersection appelé centre de gravité.

Capacité 6 ***Exploiter une figure pour exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs, voir capacité 2 p.51***

Soit $ABCDEFGH$ le cube de la capacité 3.

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BH}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ peut-il s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$?



1) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AD} +$

2) On ne peut pas exprimer $\overrightarrow{AE}$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, car les points

A, B, D et E n'appartiennent pas à un même plan et donc il n'existe pas de réels x et y tels que : $\vec{AB} = x\vec{AD} + y\vec{AE}$.

On dit que $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$ sont linéairement indépendants ou non coplanaires.

Capacité 7 ***Exploiter une figure pour exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs, voir capacité 2 p.51***

Soit $ABCD$ un tétraèdre. I est le milieu de $[CD]$, J celui de $[AI]$, M et H sont définis par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$$

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{BJ}$ comme combinaisons linéaires de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. En déduire que les droites (MH) et (BJ) sont parallèles.

1) $\vec{MH} = \vec{MA} + \vec{AH} = -\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AI}$

Or I milieu de $[CD]$ donc $\vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}$

et $\vec{AC} + \vec{AD} = \vec{AI} + \vec{IC} + \vec{AI} + \vec{ID}$
$= 2\vec{AI} + \vec{IC} + \vec{ID} = 2\vec{AI}$

donc $\vec{AI} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AD})$

Ainsi $\vec{MH} = -\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{6}(\vec{AC} + \vec{AD})$

$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ}$

$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AI}$

En effet $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI}$ car J milieu de [AI]

De plus $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

donc $\frac{1}{2}\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

donc $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

$$\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

Comme $\overrightarrow{MH} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

, on remarque que $\overrightarrow{MH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires, donc les droites (MH) et (BJ) sont parallèles.

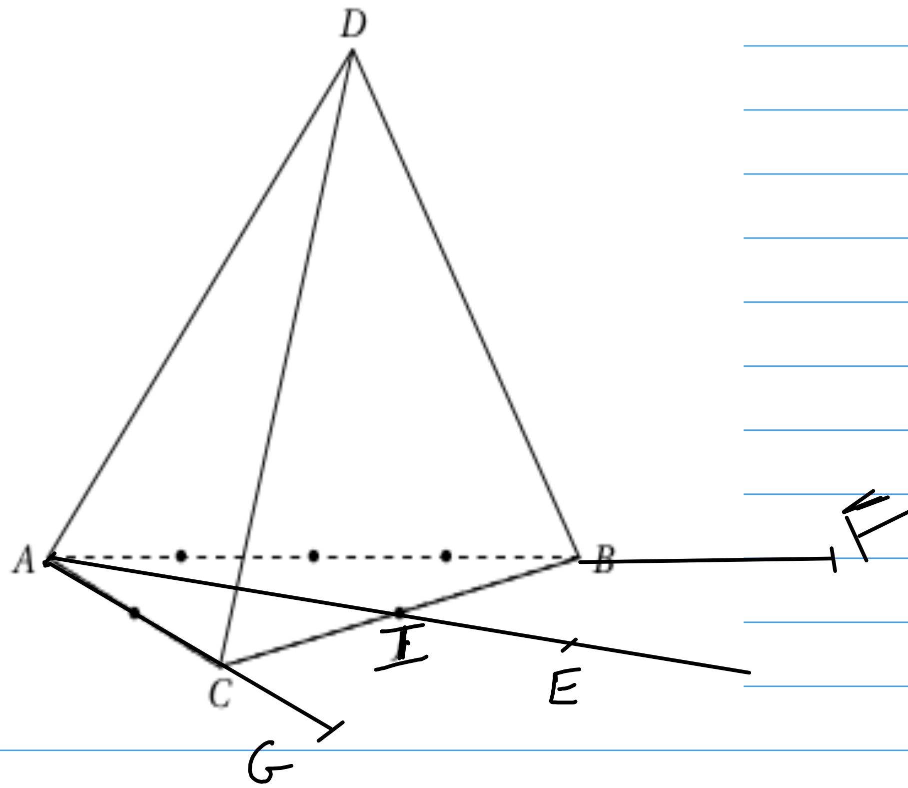
Capacité 8 ***Utiliser la colinéarité pour démontrer un alignement ou un parallélisme***

Soit $ABCD$ un tétraèdre, I le milieu de $[BC]$ et E, F et G les points définis par :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI} \quad \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{CG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$$

1. Faire une figure.
2. Démontrer que $\overrightarrow{FG} = 2\overrightarrow{FE}$. Que peut-on en déduire pour les points F, G et E ?
3. Donner trois vecteurs directeurs de la droite (FE).

1)



2) $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{IE}$

Or I milieu de [BC] donc $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

et $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$ donc $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CI}$

donc $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$

donc $\overrightarrow{FE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$

Finalement, on a

$$\overrightarrow{FE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$$

On a démontré précédemment que

$$\overrightarrow{FG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$$

On en déduit que $\overrightarrow{FG} = 2\overrightarrow{FE}$

Les vecteurs $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{FE}$ sont colinéaires et ont une extrémité commune donc F, G, E sont alignés.

3) F, G, E alignés et distincts donc $(FG) = (FE) = (EG)$

On en déduit que $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont trois vecteurs directeurs de (FE)

Logique 1

Soit $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites de l'espace. Les implications suivantes sont-elles vraies ?

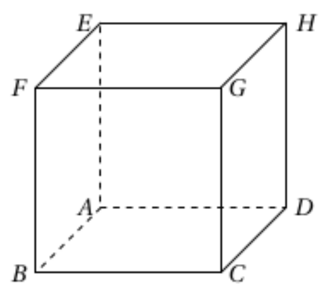
1. (I_1) « Si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles, alors une droite $\mathscr{D}_3$ dont un vecteur directeur est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est parallèle à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. »

2. (I_2) « Si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ont des vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui ne sont pas colinéaires alors elles sont sécantes. »

3. (I_3) « Si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ont des vecteurs directeurs colinéaires alors elles n'ont pas de point commun. »

1) L'implication (I_1) est vraie.
Soit $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}_3$.
Puisque $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles, on a $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires donc $\vec{u} = k\vec{v}$ avec k réel.
On en déduit que $\vec{w} = kx\vec{v} + y\vec{v}$
et donc $\vec{w} = (kx+y)\vec{v}$
$\vec{w}$ est donc colinéaire à $\vec{v}$ et donc à $\vec{u}$, ainsi $\mathcal{D}_3$ est parallèle à $\mathcal{D}_1$ et à $\mathcal{D}_2$

2) (I_2) est fausse.
Prenons par exemple le cube ABCDEFGH, les droites (AB) et (EH) ont des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{EH}$ qui ne sont pas colinéaires.



Les droites (AB) et (EH) ne sont pas parallèles. Elles ne sont pas non plus sécantes car sinon les points A, B, E et H appartiendraient au même plan, ce qui n'est pas vrai.

3) (I_3) est fausse
Si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont confondues alors elles ont des vecteurs directeurs colinéaires et une infinité de points communs.

Capacité 9

1. Déterminer le nombre maximal de plans (respectivement de droites) distincts qu'on peut définir à partir de quatre points de l'espace.

2. Déterminer le nombre de plans qu'on peut définir en utilisant uniquement les sommets d'un cube $ABCDEFGH$.

1) A partir de 4 points de l'espace on peut déterminer :

- pour les droites (définies par 2 points)
4 choix pour le premier point
3 choix pour le second point
donc $4 \times 3 = 12$ couples (Point 1, Point 2)
et donc $\frac{12}{2} = 6$ droites puisque les couples (Point 1, Point 2) et (Point 2, Point 1) définissent la même droite.

- pour les plans (définies par 3 points)
4 choix pour le premier point
3 choix pour le second point
2 choix pour le troisième point
donc $4 \times 3 \times 2 = 24$ triplets (Point 1, Point 2, Point 3)
ce qui donne $\frac{24}{6} = 4$ plans car on peut constituer $3 \times 2 \times 1 = 6$ triplets à partir de 3 points.

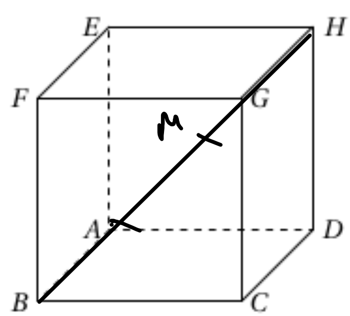
2) Avec un cube (8 sommets), on peut définir $\frac{8\times 7\times 6}{1\times 2\times 3}=56$ plans au maximum en raisonnant comme en 1)

Capacité 10 ***Démontrer que des vecteurs sont coplanaires***

Soit $ABCDEFGH$ un cube et I le milieu de $[FC]$. M est le point tel que $\overrightarrow{HM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{HB}$.

1. Compléter la figure.
2. Citer trois vecteurs coplanaires avec les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EG}$.
3. Citer trois vecteurs non coplanaires avec les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EG}$.
4. Démontrer que $\overrightarrow{FA}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AE}\right)$.

   En déduire que $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{FM}$ sont coplanaires.
5. En décomposant $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AI}$ selon $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$, démontrer de même que les points A, M et I sont alignés.



1)

2) Vecteurs coplanaires avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AC}$:
$\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{FH}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{EH}$.

3) Vecteurs non coplanaires avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AC}$:
$\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{EC}$.

4) $\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{FE}-\overrightarrow{AE}$
AEFB est un carré donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF}$
On a donc $\overrightarrow{FA}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}$

$$\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC}$$

AEFB et ABCD sont des carrés donc :

$$\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{EA} \text{ et } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$$

On a donc : $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$

Enfin, $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HM}$

$$\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{FH} + \frac{2}{3}\overrightarrow{HB}$$

Or $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$

et $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$

On a donc : $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB})$

$$\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{FM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\boxed{\overrightarrow{FM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AE})}$$

Or $\overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$

donc $\boxed{\overrightarrow{FM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{FA})}$

On en déduit que $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{FM}$ sont coplanaires.

5) I milieu de [FC]

donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD})$ car $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AE}\right)$$

donc $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}\right)$$

Comparons avec $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}\right)$

On en déduit que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{AM}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires et ont un point en commun.
donc A, I, M sont alignés.