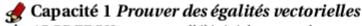
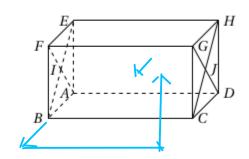
## Vedans de l'espace Courigés des exemples du coms



ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.

- Déterminer trois vecteurs égaux de la figure égaux au vecteur FE.
- Déterminer l'image du point F par la translation de vecteur GJ.
- 3. Construire l'image K du point  $\mathfrak{B}$  par la translation de vecteur  $\overrightarrow{AG}$ .

Que peut-on dire des points H, G et K? Justifier.



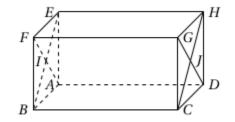
L'image du point F par la translation de vecleur Es est danc la point I

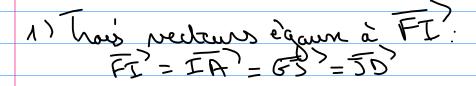
3) Gona FG= FB+BC+CG Soit K Pirrage der pointB par la transla de vecleur PG on a donc c que 6 milieures 6, H, K

#### 🕏 Capacité 2 Identifier des vecteurs colinéaires, opposés, égaux

Dans le parallélépipède rectangle ABCDEFGH de la capacité 1 :

- 1. Déterminer trois vecteurs égaux au vecteur  $\overrightarrow{FI}$  .
- 2. Déterminer trois vecteurs opposés au vecteur  $\overrightarrow{FI}$ .
- 3. Déterminer trois vecteurs colinéaires, de même sens mais pas de même norme que le vecteur  $\overrightarrow{FI}$ .
- 4. Déterminer trois vecteurs colinéaires, de sens opposé mais pas de même norme que le vecteur  $\overrightarrow{FI}$ .

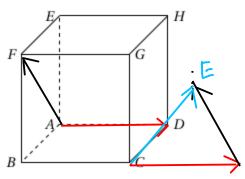




3) Trais verleurs colinéaires, de même serse mais pas de même norme que FI:  $\overline{GB} = \overline{FA} = 2\overline{FI}$  et  $\frac{3}{2}\overline{GB}$ 

n) Trois vecteus chinéaires, de sens apposer mais pas de même nouvre que FI:

#### de Capacité 3 Construire une somme vectorielle

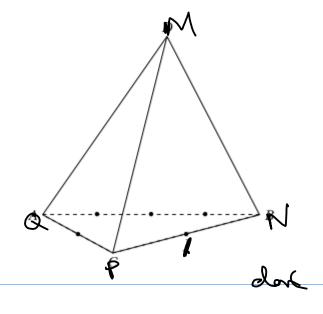


- 1. Soit ABCDEFGH un cube.
  - a. Donner un représentant d'origine A du vecteur  $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AD}$ .
  - **b.** Construire un représentant d'origine C du vecteur  $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AD}$ .
  - c. Déterminer un représentant d'origine A du vecteur  $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AE}$ .
  - **d.** Justifier que  $\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ .
  - e. Déterminer l'image du point H par la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})$ .
- 2. Soit MNPQ un tétraèdre.
  - a. Faire une figure.
  - **b.** Recopier et compléter l'égalité :  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{MP} + ... + \overrightarrow{QP}$
  - c. En déduire que  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{QN}$ .

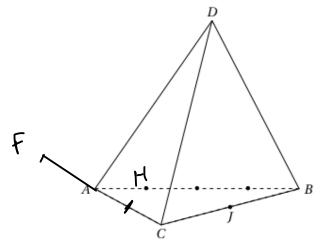
$$N(A)$$
  $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FF} = \overrightarrow{AF}$   
 $b)$   $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{FF} + \overrightarrow{AB}$   
 $c)$   $\overrightarrow{FF} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FF}$   
 $\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{FF}$   
 $\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FF} = \overrightarrow{FF}$ 

L'image du voint H par la transalion de vec

# -tem FB - (FD) + FE) est-bonc le point B 2) Soil-MNPQ un létraèdre



#### 🥏 Capacité 4 Utiliser la colinéarité pour démontrer un alignement ou un parallélisme

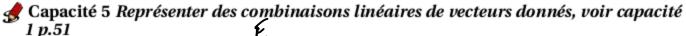


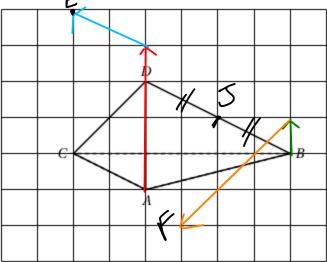
Soit ABCD un tétraèdre. J est le milieu de [BC], H et F sont les points tels que :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$
 et  $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ 

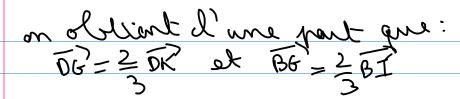
- 1. Compléter la figure.
- **2.** Exprimer les vecteurs  $\overrightarrow{FH}$  et  $\overrightarrow{FJ}$  en fonction de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .
- 3. En déduire que les points F, H et J sont alignés.

En rendeus F3 = 2 FFY. Les recleus F3 et Fft sont don colindaires et comme ils ont un point commun, les points F, 5, et H sont olignes.





- 1. Construire sur la figure ci-dessus le point E défini par  $\overrightarrow{AE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AD} \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$ .
- 2. Construire sur la figure ci-dessus le point F défini par  $\overrightarrow{BF} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$ .
- 3. Construire sur la figure ci-dessus le point J tel que  $\overrightarrow{JD} + \overrightarrow{JB} = \overrightarrow{0}$ .
- **4.** On considère l'équation vectorielle ( $\mathscr{E}$ ) :  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$  d'inconnue un point G.
  - a. Démontrer que pour tout point G de l'espace,  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GJ}$ .
  - **b.** En déduire que  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CJ}$ .
  - **c.** En déduire qu'il existe un unique point G de l'espace vérifiant l'équation  $(\mathcal{E})$ .
  - d. Démontrer que le point G vérifiant l'équation (E) appartient aux trois médianes du triangle BDC. On en déduit que les trois médianes du triangle BDC sont concourantes en G qui est le centre de gravité du triangle BDC.

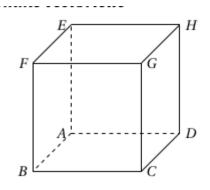


En en déduit que Grappalient aux médimes (DI) et (BK). Grappalient denc un trois médianes du triangle BCD. En en déduit d'une parl que ces 3 médianes sont concourantes el-d'autre port que Gresteur paint d'intorpolier appelé centre de grande.

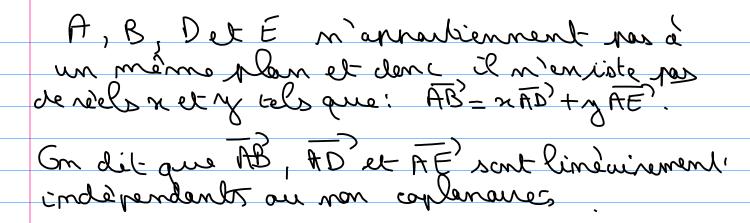
 Capacité 6 Exploiter une figure pour exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs, voir capacité 2 p.51
 Soit ABCDEFGH le cube de la capacité 3.

1. Exprimer les vecteurs  $\overrightarrow{AG}$  et  $\overrightarrow{BH}$  comme combinaisons linéaires des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AD}$  et  $\overrightarrow{AE}$ .

2. Le vecteur  $\overrightarrow{AE}$  peut-il s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AD}$ ?



2) On ne peut pes experimen FE comme une combinación limétaire des vectours AB et AD, car les pourts



Capacité 7 Exploiter une figure pour exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs, voir capacité 2 p.51

Soit ABCD un tétraèdre. I est le milieu de [CD], J celui de [AI], M et H sont définis par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$
 et  $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$ 

- 1. Exprimer les vecteurs  $\overrightarrow{MH}$  et  $\overrightarrow{BJ}$  comme combinaisons linéaires de  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AD}$ .
- 2. En déduire que les droites (MH) et (BJ) sont parallèles.

1) 
$$\overline{MH} = \overline{MA}^2 + \overline{AH}^2 = -\frac{2}{3}\overline{AB}^2 + \frac{1}{3}\overline{AI}^2$$

On I milieu de [CD] denc  $\overline{IC} + \overline{ID} = \overline{O}^2$ 

et  $\overline{AC} + \overline{AD} = \overline{AI}^2 + \overline{IC}^2 + \overline{ID}^2 = 2\overline{AI}^2$ 
 $= 2\overline{AI}^2 + \overline{IC}^2 + \overline{ID}^2 = 2\overline{AI}^2$ 

denc  $\overline{AI} = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{AD}^2)$ 

Ainsi  $\overline{MH} = -\frac{2}{3}\overline{AD} + \frac{1}{4}(\overline{AC} + \overline{AD}^2)$ 

$$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ}$$

$$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \cancel{AI}$$

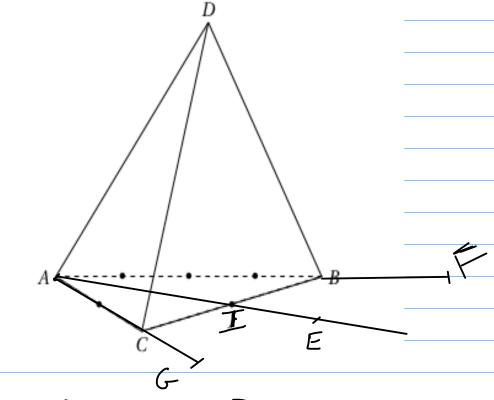
les recleurs MH et BZ sont colineaux , donc les droites (MH) et (BJ) sont parallèles.

Capacité 8 Utiliser la colinéarité pour démontrer un alignement ou un parallélisme
Soit ABCD un tétraèdre, I le milieu de [BC] et E, F et G les points définis par :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$$
  $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$   $\overrightarrow{CG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ 

- 1. Faire une figure.
- **2.** Démontrer que  $\overrightarrow{FG} = 2\overrightarrow{FE}$ . Que peut-on en déduire pour les points F, G et E?
- 3. Donner trois vecteurs directeurs de la droite (FE).

 $\wedge$ 



2) 
$$FC = FB + BC + CG = -\frac{1}{2}AB + BC - \frac{1}{2}CA$$
 $FB = BC - \frac{1}{2}(AB - AC) = BC - \frac{1}{2}CB = \frac{3}{2}BC$ 
 $FE = FB + BT + TE = -\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BC + TE$ 

On I milieu de  $BC$  donc  $BT = \frac{1}{2}BC$ 

el  $AE = \frac{3}{2}AT$  donc  $TE = \frac{1}{4}AT = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{4}CT$ 

donc  $TE = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{4}CB$ 

denc  $FE = -\frac{1}{2}AB + \frac{1}{3}BC + \frac{1}{3}AC + \frac{1}{4}CB$ 

Finalement, on a FE = -1 AB + 1 AC + 1 BC FE = 1 (BA) + AC.) + 1 BC = 3 BC On a dépontre prédedenment-que FF=3BC On en destuil-que FF=2FE Les verleurs FF et FE sont volindaires et ont une entremelé commune donc F, G, E sont alignèr. 3) F, G, E alignes et distancts Janc (F6) - (FE) = (EG) con en déduit que FF, FE et EG sont trois verleurs directeurs de (FE)

#### V Logique 1

Soit  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  deux droites de l'espace. Les implications suivantes sont-elles vraies?

- 1.  $(I_1)$  « Si  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  de vecteurs directeurs respectifs  $\overrightarrow{u}$  et  $\overrightarrow{v}$  sont parallèles, alors une droite  $\mathcal{D}_3$  dont un vecteur directeur est une combinaison linéaire de  $\overrightarrow{u}$  et  $\overrightarrow{v}$  est parallèle à  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ . »
- **2.**  $(I_2)$  « Si  $\mathscr{D}_1$  et  $\mathscr{D}_2$  ont des vecteurs directeurs  $\overrightarrow{u}$  et  $\overrightarrow{v}$  qui ne sont pas colinéaires alors elles sont sécantes. »
- 3.  $(I_3)$  « Si  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  ont des vecteurs directeurs colinéaires alors elles n'ont pas de point commun.»

1) L'implication (Ix) est vaie.

Goit No = x wit y no un vectour directeur

de Do.

Prinque D, el-De sont spacellèles, on a

wi el-rè colinéaires donc wi = k vi avec

le reel

On en déduit que no = k x vi try v

el-donc no = (k x + m) v

re est donc colinéaire à vi el donc à vi

oùnsi De cot parallèle à De et à De

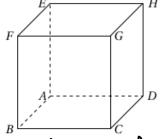
21 (I2) est fourse.

Prevous par exemple le culre AB(DEFGH)

les droites (AB) et (EH) ont des verlous

AB et EH qui ne pont pas colinéaires.

Les droites (AB) et (EH)



re sont pos poulles.
Elles ne sont pous nen
plus récenters car
inon les points A, B, E

et Happarliendraient au même plan jee que n'est pas vrai. 3) (Iz) est fausse Si Di et De sont confendues alors elles ont des preteurs directours chine aus et une infinité de points

#### Capacité 9

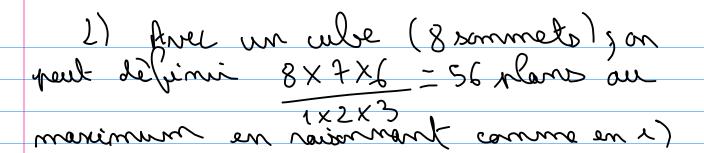
- Déterminer le nombre maximal de plans (respectivement de droites) distincts qu'on peut définir à partir de quatre points de l'espace.
- 2. Déterminer le nombre de plans qu'on peut définir en utilisant uniquement les sommets d'un cube ABCDEFGH.

1) A partir de 4 points de l'espece in peut déterminer:

pour les droiles (définies par 2 noutr 4 chair pour le premier point donc 4x3=12 couples ( Point 1) Point 2) et donc 12-6 droiter pursque les couples (Points, 2 bints) et (Points, 2 oints) définissent la mêmo droite.

pour les plans (définies pars routs) 3 chans paule second point 2 chavi jour le troisième pourl Lone 4x3x2 = 24 triplets (Point 1, Point 2, Points) ce que denne 24 - 4 plans car peut constituer 3×2×1:6 triplets à partir

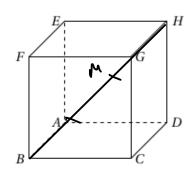
do 3 pontr



#### des vecteurs sont coplanaires

Soit ABCDEFGH un cube et I le milieu de [FC]. M est le point tel que  $\overrightarrow{HM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HB}$ .

- 1. Compléter la figure.
- **2.** Citer trois vecteurs coplanaires avec les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{EG}$ .
- 3. Citer trois vecteurs non coplanaires avec les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{EG}$ .
- **4.** Démontrer que  $\overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AE}$ ,  $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AD} \overrightarrow{AE}$  et  $\overrightarrow{FM} = \frac{1}{3} \left( \overrightarrow{AD} \overrightarrow{AB} 2\overrightarrow{AE} \right)$ . En déduire que  $\overrightarrow{FA}$ ,  $\overrightarrow{FC}$  et  $\overrightarrow{FM}$  sont coplanaires.
- 5. En décomposant  $\overrightarrow{AM}$  et  $\overrightarrow{AI}$  selon  $\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AE}$ , démontrer de même que les points A, M et I sont alignés.



2) Vecleurs caplanaires avec AB et Eb = AC. EH = AD, BD = FH, TC, BC = EH.

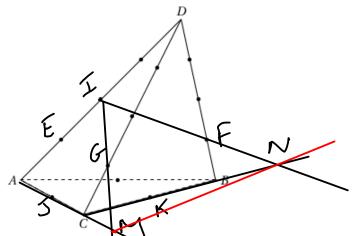
3) Vectous non coplanaires avec AB et-EG-AC

RE, AG, AF, AH, EC.

4) FR = FE' + EA = FE' - AE AEFB est un cave donc AB = EF On a donc FA = - AB - AE

5) I milion de (FC) donc AT = 1 (AF + AC) = 1 (AB + AE) Inc AT = 1 (2AB + AE + AD) CONBERD 2 + AB + BC)

### Capacité 11 Décrire la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans.



On considère un tétraèdre ABCD et les points E, F G, I, J et K définis par :

$$\overrightarrow{DE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DA} \quad \overrightarrow{DF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DB} \quad \overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC} \quad \overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} \quad \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{0} \quad \overrightarrow{KB} = -\overrightarrow{KC}$$

- 1. Compléter la figure.
- 2. Les droites (IG) et (JK) sont-elles sécantes?
- 3. Démontrer que les droites (EF) et (AB) sont parallèles.
- 4. Démontrer que les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles.
- Démontrer que la droite (IG) est sécante avec le plan (ABC).
- 6. En déduire que les plans (IGF) et (ABC) sont sécants et construire leur intersection sur la figure.

2) Hypothèse: Supposers que (IG) et (JK) sont sèconties (onclusion: On en dédeuit que Kottantient ou plan (IG5). Bette conclusion est en contra diction ouser le contente de l'enercice: K mi-l'eu de (BC) ne seul appartenir ou plan (IG5) l'es avoir pas sècontes l'or un raionnement par l'abourde, or en dobuit-que (IG) et (K) ne sont pas sècontes (l'hupothèse est fousse cer elle aboutit à une contradiction).

4) On applique deun fois le thédienne de

Thale's: Thale's:

Dans ADC, on a  $DE = \frac{3}{4}DA$  et  $PG = \frac{3}{4}DC$ den (  $EG = \frac{3}{4}AC$ Dans DBC, on a  $\overline{DF} = \frac{3}{4}\overline{DB}$  at  $\overline{DG} = \frac{3}{4}\overline{DC}$ don(  $\overline{GF} = \frac{3}{4}\overline{CB}$ ) (EG) EF) est une losse du plan (EGF) EG et EF sont respectionement colinevires à FC et CB qui forment une bosse du plan (ACB) On en de duit que les plans (EGF) et (A(B) sont parelle les. 3) Dans le triangle ABD, on a:  $\overline{DE} = \frac{3}{4} \overline{DA} + \overline{DE} = \frac{3}{4} \overline{DB}$ D'après le théverne de Rales, on a: EF\_3 AB? et donc EF? et-AB? colindares. el-donc (EF) parellèle à (AB)

5) Dans le triangle A(D, ona: DI=1DA) et DE=3 DC), ona:

D'amés la contrapasée du théorème de Thales
on en déduit, pusque 3. $\pm \frac{1}{2}$ que (IE) et (AC) sont se cantin 2  Gn (AC) est une droite incluse dans le
que (It) et (AC) sont secantis ?
Griffe) est une droite incluse dans te
plan RBC
Con en déduit que (IF) est sécante avec le plan (TBC).
6) (IG) droite de (IGF)
est-séante vec (AC) droite de (ABC)
or en deduct que (TET) et (ABC)
on en deduit que (TEF) et (ABC) ont ou airon un jount commun  De plus I mélieu de [AD] M'apper  - tient pas our plan (ABC) car tetrecèdre n'est pas applati.
- tient par our plan (ABC) carb
tetracides n'est pas applati.
Den ( (16+) et (AB() secants selan
Pon((IGF) et-(ABC) seconts selon une draite qui passe yer l'intersection M de (IE) et-(AC) et-l'intersection V de (IF) et-(BC)
et-Pintersection N Je (IF) et (B()