Prise de notes du 9/04/2021

QCM Doctools sur l'intégrale

link.dgpad.net/FrX8

Utilisateur anonyme

## Question 1 / 10

Résoudre l'équation différentielle $(E)$ : $y' = -4y$ .

Entrer votre réponse ci-dessous :

$C \times exp($ -4 $x$ $)$

Utilisateur anonyme

## Question 2 / 10

Résoudre l'équation différentielle $(E)$ : $y' + my = 0$

.

Entrer votre réponse ci-dessous :

$C \times exp($ -m $x$ $)$

Utilisateur anonyme

## Question 3 / 10

Soit l'équation différentielle $(E) : y' = 3y - 2$ .

Déterminer la solution particulière constante solution de $(E)$.

$p_0(x) =$

Entrer votre réponse ci-dessous (sous forme d'une fraction) :

$\frac{2}{3}$

Utilisateur anonyme

## Question 4 / 10

Résoudre l'équation différentielle $(E) : 2y' + y = 0$ .

$\Leftrightarrow y' = -\frac{1}{2} y$

Entrer votre réponse ci-dessous :

$k \times exp(\frac{-1}{2} x)$

Utilisateur anonyme

## Question 5 / 10

La solution de l'équation différentielle $(E)$ : $y' = -5y$ qui prendre la valeur 1 en 0 est :

- $1 - e^{-5x}$
- $e^{-5x}$
- $e^{x}$
- $1 - e^{5x}$
- $-5e^{x}$
- $e^{5x}$

Solution générale : $y(x) = Ce^{-5x}$

$y(0) = 1 \iff C = 1$

Utilisateur anonyme

## Question 6 / 10

Une solution de l'équation différentielle $(E)$ : $y' = 3y$ est :

Solution générale : $y(x) = C e^{3x}$

- $2e^{-3x}$
- $e^{3x} + 1$
- $3e^{x}$
- $7e^{3x}$
- $-10e^{-3x}$
- $-3e^{x}$

Utilisateur anonyme

## Question 7 / 10

Une solution de l'équation différentielle $(E) : y' = -2y + 4$ est :

- $e^{x} + 2$
- $e^{2x} + 2$
- $-e^{2x} + 2$
- $-2e^{x}$
- $5e^{-2x} - 2$
- $3e^{-2x} + 2$

Equation homogène : $y' = -2y$

de solution générale $y(x) = Ce^{-2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Solution particulière constante : $y(x) = 2$

Solution générale de $y' = -2y + 4$

$y(x) = Ce^{-2x} + 2$ avec $C \in \mathbb{R}$

Utilisateur anonyme

Question 8 / 10

L'équation différentielle $(E)$ : $y' - 2y - 3 = 0$ a pour solution les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $y(x) = Ce^{2x}$ où $C$ est un réel.
- $y(x) = Ce^{2x} - \frac{3}{2}$ où $C$ est un réel.
- $y(x) = Ce^{2x} + 3$ où $C$ est un réel.
- $y(x) = e^{2x} + C$ où $C$ est un réel.
- $y(x) = Ce^{-2x} + 3$ où $C$ est un réel.

$y' - 2y - 3 = 0 \iff y' = 2y + 3$

$a = 2 \quad b = 3$

Solution générale :

$y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Utilisateur anonyme

Question 10 / 10

Parmi ces fonctions, laquelle est solution de l'équation différentielle $(E) : y' + y = x + 1$ ?

- $f(x) = e^{-x} + 1$
- $f(x) = e^{-x} + x$
- $f(x) = x + 1$
- $f(x) = e^{-x} + x + 1$

équation homogène

$(E)$ $y' + y = x + 1 \iff \boxed{y' = -y} + x + 1$

Solution de l'équation homogène

$y' = -y$ : $y(x) = Ce^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

On recherche une solution particulière de l'équation (E) :

Parmi les trois fonctions $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto x+1$ la seule solution particulière est $x \mapsto x$.

Une solution de (E) est donc de la forme

$y(x) = Ce^{-x} + x$ avec $C \in \mathbb{R}$

**Capacité 7** ***Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive, voir capacité 4 p. 333***

Calculer les intégrales suivantes :

5 min

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$ ;
2. $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{1}{(2x-1)^4}\,dx$ ;
3. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \cos(\theta)\ d\theta$ ;

5 min

4. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos(2\theta)\ d\theta$ ;
5. $\displaystyle\int_{-4}^{-2} (3x-1)^6\,dx$ ;
6. $\displaystyle\int_{0}^{x} \sin^2(t)\,dt$ .

5 min

7. $\displaystyle\int_{e}^{e^3} \frac{1}{x\ln x}\,dx$
8. $\displaystyle\int_{0}^{x} \frac{1}{1+e^t}\,dt$
9. $\displaystyle\int_{2}^{e} \frac{1}{x(\ln(x))^2}\,dx$

Indication : pour la 6 :

formule d'addition

$$\cos(a+b) = \cos(a)\times\cos(b) - \sin(a)\times\cos(b)$$

donc $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$

donc $\cos(2a) = \cos^2(a) - (1-\cos^2(a))$

$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$

car $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$

On déduit aussi de $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$ que :

$$\cos(2a) = 1 - \sin^2(a) - \sin^2(a)$$

$$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$$

donc $\displaystyle\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2a)$

**Capacité 7** ***Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive, voir capacité 4 p. 333***

Calculer les intégrales suivantes :

Smin | Smin | Smin

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$ ;
2. $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{1}{(2x-1)^4}\,dx$ ;
3. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \cos(\theta)\;d\theta$ ;
4. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos(2\theta)\;d\theta$ ;
5. $\displaystyle\int_{-4}^{-2} (3x-1)^6\,dx$ ;
6. $\displaystyle\int_{0}^{x} \sin^2(t)\,dt$ .
7. $\displaystyle\int_{e}^{e^3} \frac{1}{x\ln x}\,dx$
8. $\displaystyle\int_{0}^{x} \frac{1}{1+e^t}\,dt$
9. $\displaystyle\int_{2}^{e} \frac{1}{x(\ln(x))^2}\,dx$

Correction :

1) $$\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx = \left[2\sqrt{e^x+1}\right]_{-1}^{1} = 2\sqrt{e+1} - 2\sqrt{e^{-1}+1}$$

$\dfrac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}$ est de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = e^x+1$

donc admet une primitive de la forme :

$2\sqrt{e^x+1}$

2) $$\int_{2}^{4} \frac{1}{(2x-1)^4}\,dx = \int_{2}^{4} (2x-1)^{-4}\,dx$$

$(2x-1)^{-4}$ de la forme $\frac{1}{2}u'u^{-4}$

avec $u(x) = 2x-1$ $\quad u'(x) = 2$

Rque : primitive $\qquad\qquad$ dérivée

$$\frac{1}{n+1}x^{n+1} \longrightarrow x^n \longrightarrow n x^{n-1} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{n+1}u^{n+1} \longrightarrow u'u^n \qquad n \neq -1$$

$(2x-1)^{-4}$ admet donc comme primitive

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{-4+1}\times(2x-1)^{-4+1} = -\frac{1}{6}\times(2x-1)^{-3} = -\frac{1}{6(2x-1)^3}$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{n+1}\quad u^{n+1}$$

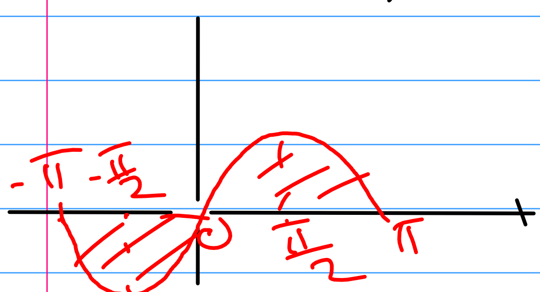
On a donc $\displaystyle\int_2^4 (2x-1)^{-4}dx = \left[-\frac{1}{6}\times\frac{1}{(2x-1)^3}\right]_2^4$

$$= -\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{(2\times4-1)^3} - \frac{1}{(2\times2-1)^3}\right)$$

3) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(\theta)d\theta = \left[\sin(\theta)\right]_0^{2\pi} = \sin(2\pi)-\sin(0)$

$$= 0-0 = 0$$

Rque: $\displaystyle\int_x^{x+2\pi}\cos(\theta)d\theta = \left[\sin(\theta)\right]_x^{x+2\pi} = \sin(x+2\pi)-\sin(x) = 0$




Rque: $\displaystyle\int_x^{x+\pi}\cos(2\theta)d\theta = \left[\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_x^{x+\pi}$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin(2x+2\pi) - \sin(2x)\right)$$

$$0 \quad - \quad 0$$

4) $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(2\theta)d\theta = \left[\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\sin(2\pi) - \frac{1}{2}\sin(2\times 0)$

$\theta \mapsto \cos(2\theta)$ admet pour primitive $\theta \mapsto \frac{1}{2}\sin(2\theta)$

$$(\sin u)' = u'\cos(u)$$

6) $\int_0^x \sin^2(t)\,dt$

Indication : $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$

donc $\sin^2(t) = \dfrac{\cos(2t) - 1}{-2} =$

linéarisées

$$\int_0^x \sin^2(t)\,dt = \int_0^x \frac{1 - \cos(2t)}{2}\,dt$$

$$\int_0^x \sin^2(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)\,dt$$

Une primitive de $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)$ est :

$$\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin(2t)$$

On a donc $\int_0^x \sin^2(t)\,dt = \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^x$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)$$

Rque : $\int_0^x \sin(t)\cos(t)\,dt = \,?$

$u(t) \times u'(t)$

$\sin(t)\times\cos(t)$ est de la forme $u'(t)\times u(t)$

$-v(t)\times v'(t)$ avec $u(t) = \sin(t)$

Une primitive est donc $\frac{1}{2}u^2(t) = \frac{1}{2}\cos^2(t)$

et donc $\int_0^x \sin(t)\cos(t)\,dt = \left[\frac{1}{2}\cos^2(t)\right]_0^x = \frac{1}{2}\left(\cos^2(x) - 1\right)$

# Cours : Propriétés de l'intégrale : inégalités

## Propriétés de l'intégrale

**PROPRIÉTÉS** Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle I.

$a$, $b$ et $c$ sont trois réels de I et $k$ est une constante réelle.

(1) $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$. (2) $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

(3) **Linéarité :**

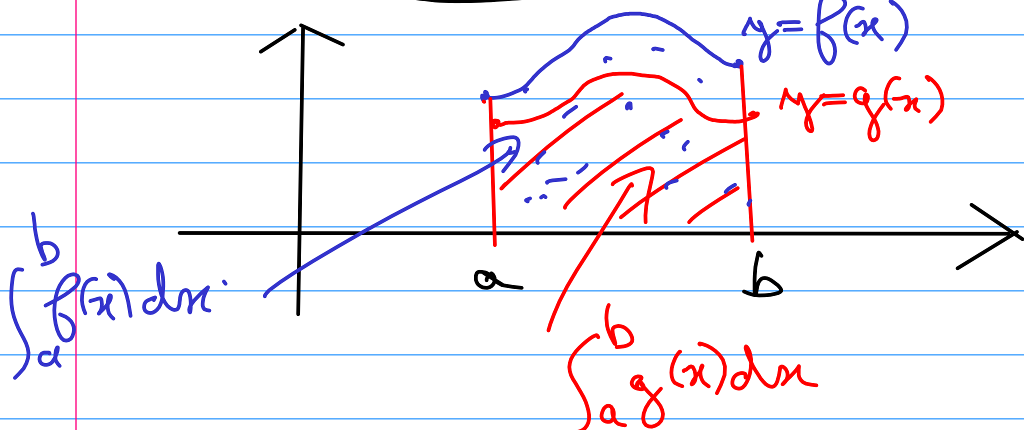
$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ et $\int_a^b (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

(4) **Relation de Chasles :** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

(5) **Positivité :** Si pour tout $x$ de $[a\,;b]$, $f(x) \geqslant 0$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

$a \leqslant b$

(6) **Comparaison :** Si pour tout $x$ de $[a\,;b]$, $f(x) \geqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.



Exercices :

n°77 p. 343

**77** Soit $f$ une fonction définie et continue sur l'intervalle $[1\,;3]$. Dans chacun des cas suivants, donner un encadrement de $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ sachant que pour tout réel $x$ de l'intervalle $[1\,;3]$ :

**a.** $-2x \leqslant f(x) \leqslant x^2$ **b.** $\frac{1}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$

a)

Inégalité / encadrement sur la fonction :

Pour tout $x \in [1;3]$ :

$$-2x \leq f(x) \leq x^2$$

L'intégrale conserve les inégalités

Inégalité / encadrement sur l'intégrale

$$\int_1^3 -2x\,dx \leq \int_1^3 f(x)\,dx \leq \int_1^3 x^2\,dx$$

$$\left[-2\times\frac{x^2}{2}\right]_1^3 \leq \int_1^3 f(x)\,dx \leq \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3$$

$$-3^2-(-1^2) \leq \int_1^3 f(x) \leq 3^2-\frac{1}{3}$$

a)

. Encadrement de la fonction :

Pour tout $x \in [1;3]$ :

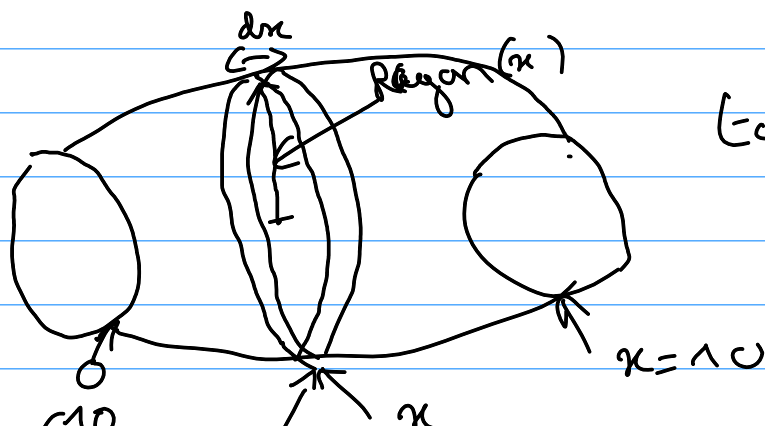
$$\frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx \leq \int_1^3 f(x)\,dx \leq \int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$$

$$\left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 \leq \int_1^3 f(x)\,dx \leq \left[\ln(x)\right]_1^3$$

$$-\frac{1}{3}+1 \leq \int_1^3 f(x)\,dx \leq \ln(3) - \underbrace{\ln(1)}_{=0}$$




Tonneau

$$\int_0^{10} A(\text{disque})\,dx \qquad A(\text{disque}) = \pi \times \text{Rayon}(x)^2$$

**78** **1.** Donner un encadrement de $\ln(x)$ sur $[1\ ;2]$.

**2.** En déduire que $0 \leqslant \int_1^2 x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{7}{3}\ln(2)$.

1) Pour tout réel $x \in [1;2]$ :

| $x$ | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|
| $\ln(x)$ | $\ln(1)$ | $\nearrow$ | $\ln(2)$ |

ln croissante sur $[1;2]$

On a donc : $\ln(1) \leq \ln(x) \leq \ln(2)$

2) On cherche un encadrement de $x^2 \ln(x)$ sur $[1;2]$ :

Pour tout $x \in [1;2]$ :

$\ln(1) \leq \ln(x) \leq \ln(2)$ d'après 1)

comme $x^2 \geq 0$, on a :

$x^2 \times 0 \leq x^2 \ln(x) \leq x^2 . \ln(2)$ (**)

Rque : on aurait pu encadrer $x^2$ :

$1 \leq x^2 \leq 2^2$

et avec $\ln(1) \leq \ln(x) \leq \ln(2)$

$0 \leq x^2 \ln(x) \leq 4 \ln(2)$ plus grossier

Par croissance de l'intégrale appliquée à l'encadrement $(**)$, on obtient :

$$\int_1^2 0 \, dx \leq \int_1^2 x^2 \ln(x) \, dx \leq \int_1^2 x^2 \ln(2) \, dx$$

$$0 \leq \int_1^2 x^2 \ln(x) \, dx \leq \left[ \frac{x^3}{3} \times \ln(2) \right]_1^2$$

$$0 \leq \int_1^2 x^2 \ln(x) \, dx \leq \frac{7 \ln(2)}{3}$$

**Capacité 10** ***Majorer ou minorer une intégrale, voir capacité 5 p.335***

1. Déterminer le signe des intégrales suivantes :

a. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x \, dx$ b. $\int_{1}^{0} x^2 \, dx$ c. $\int_{1}^{\frac{1}{e}} \ln x \, dx$

2. Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \int_0^1 \ln\left(1+x^n\right) \, dx$.

   a. Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)$.

   b. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \ln 2$.
   En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.

   c. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout réel $x \in [0;1]$ on a : $0 \leqslant \ln\left(1+x^n\right) \leqslant x^n$.
   En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

2) a) $u_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)\, dx$

Pour tout entier $n \geq 1$ :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \ln(1+x^{n+1})\, dx - \int_0^1 \ln(1+x^n)\, dx$$

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \underbrace{[\ln(1+x^{n+1}) - \ln(1+x^n)]}\, dx$$

linéarité de l'intégrale

Pour $n$ entier naturel, quel est le signe de $\ln(1+x^{n+1}) - \ln(1+x^n)$ si $x \in [0;1]$

**Capacité 11** ***Étudier une suite d'intégrales, voir capacité 7 p.337***

Soit $f$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

**1.** Démontrer que pour tout $t\in[2\,;+\infty[$ on a : $0\leqslant f(t)\leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t}$.

**2.** En déduire que pour tout entier $n\geqslant 2$ on a : $0\leqslant \displaystyle\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-2}}{\sqrt{2\pi}}$

**3.** Montrer que la suite $\left(\displaystyle\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 2}$ est croissante.

# Intégration par parties

**PROPRIÉTÉS** Soit $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et dont les dérivées $u'$ et $v'$ sont continues sur I. Soit $a$ et $b$ deux réels de I.

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

**DÉMONSTRATION**

Les fonctions $u$ et $v$ sont dérivables sur I donc la fonction $uv$ l'est aussi et $(uv)' = u'v + uv'$.
Donc pour tout réel $x$ de I, $u(x)v'(x) = (uv)'(x) - u'(x)v(x)$.
Or, les fonctions $u$ et $v$ sont continues sur I car elles sont dérivables sur I. De plus $u'$ et $v'$ sont continues sur I donc les fonctions $uv'$ et $u'v$ le sont également.

Donc $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left((uv)'(x) - u'(x)v(x)\right)\mathrm{d}x$

$= \int_a^b (uv)'(x)\mathrm{d}x - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ (propriété de linéarité).

Or, une primitive de la fonction $(uv)'$ est la fonction $uv$.

Donc $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$.

*Cette méthode permet de transformer le calcul de l'intégrale d'une fonction. Un bon choix des fonctions $u$ et $v'$ conduit au calcul de l'intégrale d'une fonction dont on sait déterminer une primitive.*

**EXEMPLE :** Calcul de $\int_0^\pi x\sin(x)\mathrm{d}x$.

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin(x)$ donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\cos(x)$.

Les fonctions $u$ et $v$ sont dérivables sur $[0 ; \pi]$ et les fonctions $u'$ et $v'$ sont continues sur $[0 ; \pi]$.

Donc : $\int_0^\pi x\sin(x)\mathrm{d}x = \left[-x\cos(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos(x)\mathrm{d}x = \left[-x\cos(x)\right]_0^\pi + \left[\sin(x)\right]_0^\pi = \pi$.

**Capacité 12** ***Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties, voir capacité 6 p.335***

1. Soit l'intégrale $K = \int_0^{\pi} x \sin(x)\, \mathrm{d}x$.

   a. Compléter :
   Pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0\,;\pi]$, on pose :

   $$u(x) = x \qquad\qquad u'(x) = \ldots$$
   $$v'(x) = \sin(x) \qquad\qquad v(x) = \ldots$$

   b. Calculer l'intégrale $K$ en appliquant la méthode d'intégration par parties.

2. Calculer l'intégrale $\int_1^{\mathrm{e}} (3x-2)\ln(x)\, \mathrm{d}x$ avec la méthode d'intégration par parties.

3. a. Soit $x$ un réel strictement positif, avec la méthode d'intégration par parties, calculer $\int_1^{x} \ln(t)\, \mathrm{d}t$.

   b. En déduire une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0\,; +\infty[$.

Exercice de synthèse

Fiche d'exercices

https://frederic-junier.org/TS2020/Cours/TS-Exos-Integration2020-Fiche1-Web.pdf

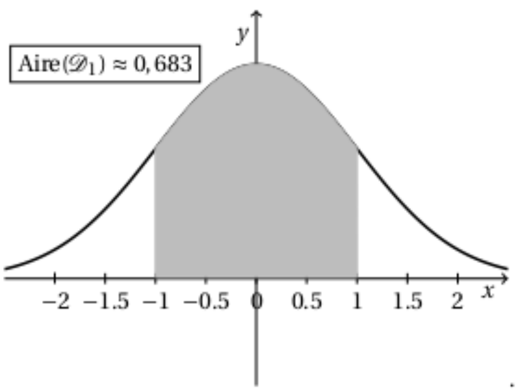
**Exercice 1** *Cloches de Pâques*

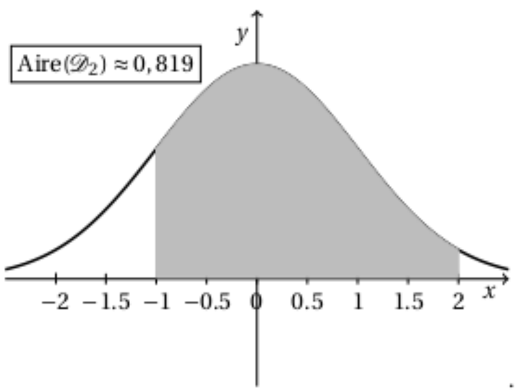
On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[1;2]$ par $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + \dfrac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$.
$f$ est dérivable et donc continue sur $[1;2]$ comme somme de fonctions dérivables sur $[1;2]$.
On munit le plan d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. La fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$ et on donne ci-dessous des valeurs approchées à $0,001$ près :

   ☞ de l'aire du domaine $\mathscr{D}_1$ délimité par les droites d'équations $x=-1$, $x=1$, $y=0$ et par la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ ;

   ☞ de l'aire du domaine $\mathscr{D}_2$ délimité par les droites d'équations $x=-1$, $x=2$, $y=0$ et par la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.




   En déduire une valeur approchée à $0,002$ près (les erreurs s'ajoutent) de l'intégrale :

$$\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

2. On considère la fonction $H$ définie et dérivable sur $[1;2]$ par $H(x) = \dfrac{\ln x}{x-\ln x}$.

   **a.** Démontrer que $H$ est une primitive de la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$ sur l'intervalle $[1;2]$.

   **b.** En déduire la valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 h(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$.

3. Déterminer une valeur approchée à $0,002$ près de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Propriétés de l'intégrale :

intégrale et inégalités → croissance de l'intégrale

## Propriétés de l'intégrale

**PROPRIÉTÉS** Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle I.

$a$, $b$ et $c$ sont trois réels de I et $k$ est une constante réelle.

**(1)** $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$. **(2)** $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

**(3) Linéarité :**

$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ et $\int_a^b (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

**(4) Relation de Chasles :** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

**(5) Positivité :** Si pour tout $x$ de $[a\,;b]$, $f(x) \geqslant 0$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

**(6) Comparaison :** Si pour tout $x$ de $[a\,;b]$, $f(x) \geqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

### 3.3.3 Intégrale et inégalités

Attention important. $a \leq b$

**Propriété 3** ***Intégrale et inégalités***

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle $I$ et $a \leq b$ deux réels de $I$.

1. Si $f \geq 0$ sur $I$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.
2. Si $f \leq 0$ sur $I$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq 0$.
3. Si $f \leq g$ sur $I$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

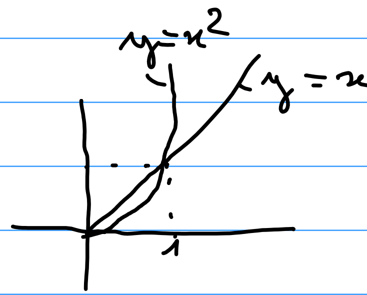
# Exercices sur la croissance de l'intégrale

**76** Capacité 5, p. 335

**1.** Démontrer que, pour tout réel $x$ de $[0\,;1]$,

$$0 \leqslant xe^{-x} \leqslant xe^{-x^2}.$$

**2.** En déduire que $0 \leqslant \int_0^1 xe^{-x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$.




1) Pour tout réel $x \in [0;1]$ :

$0 \leq x \leq 1$ $\Big)\times x \geq 0$

donc $0 \leq x^2 \leq x$.

donc $0 \geq -x^2 \geq -x$

donc $e^0 \geq e^{-x^2} \geq e^{-x}$ car l'exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$

donc $x \geq xe^{-x^2} \geq xe^{-x} \geq 0$ $\Big)\times x \geq 0$

2) Pour tout réel $x \in [0;1]$ :

$0 \leq xe^{-x} \leq xe^{-x^2}$

par croissance de l'intégrale on a :

$$\int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 xe^{-x}dx \leq \int_0^1 xe^{-x^2}dx$$

$$0 \leq \int_0^1 xe^{-x}dx \leq \int_0^1 xe^{-x^2}dx$$

On on peut calculer $\int_0^1 xe^{-x^2}dx$ à l'aide d'une primitive de $xe^{-x^2}$ qui est de la forme :

$-\frac{1}{2}u'e^{u}$ avec $u(x) = -x^2$

Donc on a $\int_0^1 xe^{-x^2}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e^0$

$= \frac{1}{2}(1-e^{-1})$

Donc on a : $0 \leq \int_0^1 xe^{-x}dx \leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$

**77** Soit $f$ une fonction définie et continue sur l'intervalle $[1\,;3]$. Dans chacun des cas suivants, donner un encadrement de $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ sachant que pour tout réel $x$ de l'intervalle $[1\,;3]$ :

**a.** $-2x \leqslant f(x) \leqslant x^2$ **b.** $\dfrac{1}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$

**78** **1.** Donner un encadrement de $\ln(x)$ sur $[1\ ;2]$.

**2.** En déduire que $0 \leqslant \int_1^2 x^2 \ln(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{7}{3}\ln(2)$.

**Capacité 10** ***Majorer ou minorer une intégrale, voir capacité 5 p.335***

1. Déterminer le signe des intégrales suivantes :

   **a.** $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x \,\mathrm{d}x$  **b.** $\displaystyle\int_{1}^{0} x^2 \,\mathrm{d}x$  **c.** $\displaystyle\int_{1}^{\frac{1}{e}} \ln x \,\mathrm{d}x$

2. Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right) \mathrm{d}x$.

   **a.** Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)$.

   **b.** Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \ln 2$.
   En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.

   **c.** Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout réel $x \in [0\,;\,1]$ on a : $0 \leqslant \ln\left(1+x^n\right) \leqslant x^n$.
   En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

Voir corrigé en ligne :

https://frederic-junier.org/TS2021/Cours/Corrige-Cours-CalculIntegralPartie2-2021-Web.pdf