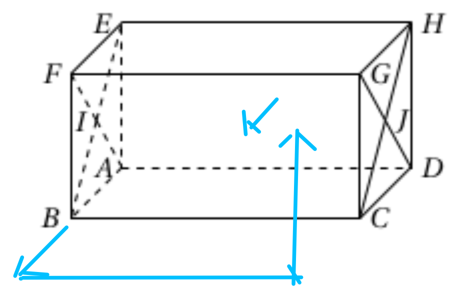
Vecteurs de l'espace
Corrigés des exemples du cours

Capacité 1 ***Prouver des égalités vectorielles***

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle.

1. Déterminer trois vecteurs égaux de la figure égaux au vecteur $\overrightarrow{FE}$.
2. Déterminer l'image du point F par la translation de vecteur $\overrightarrow{GJ}$.
3. Construire l'image K du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AG}$.

   Que peut-on dire des points H, G et K? Justifier.



1) $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{GH}$

2) On a $\overrightarrow{FI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FA}$ car I milieu de [FA]

De plus $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA}$

et $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{HD}$

car EFGH et EADH sont des parallélogrammes

donc $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{GD}$

Or J milieu de GD donc $\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GD}$

On a donc $\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA})$

$\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FI}$

L'image du point F par la translation de vecteur $\overrightarrow{GJ}$ est donc le point I.

3) On a $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$

Soit K l'image du point B par la translat°

du vecteur $\overrightarrow{AG}$. On a donc :

$$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$$

De $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AG}$ on déduit que $ABKG$ est un parallélogramme et donc que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GK}$

Or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ car $ABCD$ parallélogramme
et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HG}$ car $HGCD$ parallélogramme
donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HG}$

De $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GK}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG}$, on déduit que :

$$\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{GK}$$

et donc que G milieu de $[HK]$.
Ainsi les points G, H, K sont alignés.