Prise de notes du 29/04/2021

Automatismes

147 10 min Capacité 7, p. 301

On considère l'équation différentielle (**E**) :

$$y' + y = x^2 - 2, \text{ pour } x \text{ appartenant à } \mathbb{R}.$$

1. Résoudre l'équation (**E'**) : $y' + y = 0$.

2. Montrer que la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 2x$, est une solution de (**E**).

3. En déduire toutes les fonctions solutions de l'équation (**E**).

1) $y' + y = 0 \iff y' = -y$

Les solutions de $y' = -y$ sont (sur $\mathbb{R}$) les fonctions $x \mapsto Ce^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

2) Pour tout réel x :

$g'(x) = 2x - 2$

donc $g'(x) + g(x) = 2x - 2 + x^2 - 2x = x^2 - 2$

donc g est solution de l'équation $y' + y = x^2 - 2$

3) (E) : $y' + y = 2x - 2$

Les solutions de l'équation (E) sont, d'après 1) et 2), les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{-x} + x^2 - 2x$

118 5 min Capacité 1, p. 271

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cos(4x) + 5\sin(3x)$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Calculer $f'(x)$.

2. Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ aux points A et B d'abscisses respectives 0 et π.

1) Pour tout réel x,

$$f(x) = 3\cos(4x) + 5\sin(3x)$$

donc $f'(x) = 3 \times 4 \times (-\sin(4x)) + 5 \times 3 \times \cos(3x)$

$$f'(x) = -12\sin(4x) + 15\cos(3x)$$

2) Équation de la tangente au point A d'abscisse 0 :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$y = 15x + 3$$

Rque :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin(x)}_{-u'} \underbrace{\cos(x)}_{u} \, dx = \left[-\frac{1}{2}\cos^2(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$-u'u \xrightarrow{\text{primitive}} -\frac{1}{2}u^2$

$-\frac{1}{2}\cos^2(x) = -\frac{1}{2}(1 - \sin^2(x))$
$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin^2(x)$

$\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx$

$\dfrac{1+\cos(2x)}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(2x)$

a pour primitive $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \sin(2x)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\,dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Comment en déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$?

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos^2(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Capacité 10 ***Majorer ou minorer une intégrale, voir capacité 5 p.335***

1. Déterminer le signe des intégrales suivantes :

   a. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x \, dx$ **b.** $\int_{1}^{0} x^2 \, dx$ **c.** $\int_{1}^{\frac{1}{e}} \ln x \, dx$

2. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \int_0^1 \ln\left(1+x^n\right) \, dx$.

   a. Etudier le sens de variation de la suite (u_n).

   b. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \ln 2$.
   En déduire que la suite (u_n) est convergente.

   c. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout réel $x \in [0;1]$ on a : $0 \leqslant \ln\left(1+x^n\right) \leqslant x^n$.
   En déduire la limite de la suite (u_n).

1) a)

x	0	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$\ln(x)$	$\|\|$	$-$	$-$	0	$+$

Pour tout $x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$, $\ln(x) \leq 0$

Par croissance de l'intégrale

$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln(x) \, dx \leq 0$

b) Pour tout $x \in [0;1]$:

$0 \leq x^2$

donc $\int_0^1 0 \, dx \leq \int_0^1 x^2 \, dx$

$0 \leq \int_0^1 x^2 \, dx$

donc $0 \geq \int_1^0 x^2 \, dx$

Capacité 10 :

2. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$.

a. Etudier le sens de variation de la suite (u_n).

b. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \ln 2$.
En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout réel $x \in [0;1]$ on a : $0 \leqslant \ln(1+x^n) \leqslant x^n$.
En déduire la limite de la suite (u_n).

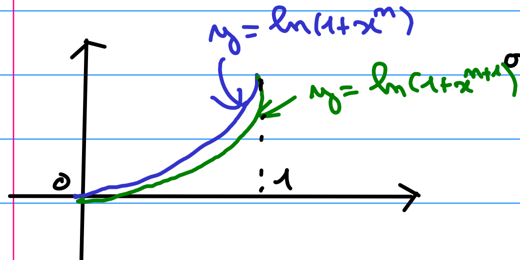
2) a)

Méthode 1 : Étude du signe de la différence

Pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \ln(1+x^{n+1})\,dx - \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$$

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \boxed{\ln(1+x^{n+1}) - \ln(1+x^n)}\,dx$$



on ne sait pas calculer de primitive ...

mais pour tout $x \in [0;1]$
$\ln(1+x^{n+1}) - \ln(1+x^n) \leq 0$
$\iff \ln(1+x^{n+1}) \leq \ln(1+x^n)$

brouillon

Pour tout entier $n \geq 0$, pour tout $x \in [0;1]$:

$0 \leq x \leq 1$

$0 \leq x^{n+1} \leq x^n$

donc $1 \leq 1+x^{n+1} \leq 1+x^n$

donc $\ln(1) \leq \ln(1+x^{n+1}) \leq \ln(1+x^n)$

donc $\ln(1+x^{n+1}) - \ln(1+x^n) \leq 0$

donc $\int_0^1 \ln(1+x^{n+1}) - \ln(1+x^n)\,dx \leq 0$

donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$

donc (u_n) est décroissante.

Autre méthode : Plus simple avec la croissance de l'intégrale

Pour tout entier $n \geq 0$, pour tout $x \in [0;1]$:

Méthode à retenir

$$0 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n \quad \times x^n$$

donc $1 \leq 1+x^{n+1} \leq 1+x^n$

donc $\ln(1) \leq \ln(1+x^{n+1}) \leq \ln(1+x^n)$

donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 \ln(1)\,dx \leq \int_0^1 \ln(1+x^{n+1})\,dx \leq \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$$

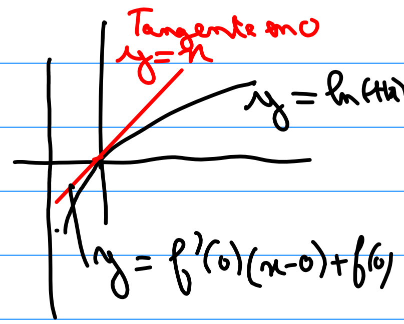
$$\boxed{0 \leq u_{n+1} \leq u_n}$$

Rque : • D'une part (u_n) est décroissante

• D'autre part (u_n) est minorée par 0

Donc elle converge d'après le théorème de convergence monotone.

c. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout réel $x \in [0;1]$ on a : $0 \leqslant \ln(1+x^n) \leqslant x^n$.
En déduire la limite de la suite (u_n).



Indice : $f : x \mapsto \ln(1+x)$

Pour tout réel $x \geq 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

$f''(x) \leq 0$ donc f concave donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de ses tangentes donc en particulier de la tangente au point d'abscisse 0 d'équation $y = x$

et donc pour tout $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$

on peut remplacer x par x^n pour tout entier $n \geq 0$:

Pour tout $x \geq 0$, pour tout entier $n \geq 0$

$$\boxed{\underbrace{\ln(1)}_{=0} \leq \ln(1+x^n) \leq x^n}$$

donc par croissance de l'intégrale

$$\int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx$$

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \leq \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$$

$$\boxed{0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \leq \frac{1}{n+1}}$$

d)

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$
- De plus pour tout entier $n \geq 0$:

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \leq \frac{1}{n+1}$$

Donc par encadrement $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx = 0$

Capacité 11 ***Étudier une suite d'intégrales, voir capacité 7 p.337***

Soit f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

1. Démontrer que pour tout $t\in[2\,;+\infty[$ on a : $0\leqslant f(t)\leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t}$.

2. En déduire que pour tout entier $n\geqslant 2$ on a : $0\leqslant \displaystyle\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-2}}{\sqrt{2\pi}}$

3. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 2}$ est croissante.

Intégration par parties

PROPRIÉTÉS Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et dont les dérivées u' et v' sont continues sur I. Soit a et b deux réels de I.

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

$(uv)' = u'v + uv'$ donc $\underbrace{[(uv)(x)]_a^b}_{=} = \int_a^b (u'v)(x)\,dx + \int_a^b (uv')(x)\,dx$

DÉMONSTRATION

Les fonctions u et v sont dérivables sur I donc la fonction uv l'est aussi et $(uv)' = u'v + uv'$.

Donc pour tout réel x de I, $u(x)v'(x) = (uv)'(x) - u'(x)v(x)$.

Or, les fonctions u et v sont continues sur I car elles sont dérivables sur I. De plus u' et v' sont continues sur I donc les fonctions uv' et $u'v$ le sont également.

Donc $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b ((uv)'(x) - u'(x)v(x))\mathrm{d}x$

$= \int_a^b (uv)'(x)\mathrm{d}x - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ (propriété de linéarité).

Or, une primitive de la fonction $(uv)'$ est la fonction uv.

Donc $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b \underline{u'(x)}v(x)\mathrm{d}x.$

Cette méthode permet de transformer le calcul de l'intégrale d'une fonction. Un bon choix des fonctions u et v' conduit au calcul de l'intégrale d'une fonction dont on sait déterminer une primitive.

$v'(x)$ $u(x)$

EXEMPLE : Calcul de $\int_0^\pi x\sin(x)\mathrm{d}x$.

$\int_0^\pi v(x)u'(x)\,dx = \int_0 \frac{x^2}{2}\cos(x)\,dx$

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin(x)$ donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\cos(x)$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0\,;\pi]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[0\,;\pi]$.

Donc : $\int_0^\pi x\sin(x)\mathrm{d}x = [-x\cos(x)]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos(x)\mathrm{d}x = [-x\cos(x)]_0^\pi + [\sin(x)]_0^\pi = \pi.$

$u(x)=x$ $v'(x)=\sin(x)$

$\int_0^\pi u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_0^\pi - \int_0^\pi u'(x)v(x)\,dx.$

Capacité 12 ***Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties, voir capacité 6 p.335***

1. Soit l'intégrale $K = \int_0^{\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Compléter :
Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\pi]$, on pose :

$$u(x) = x \qquad u'(x) = \ldots 1$$
$$v'(x) = \sin(x) \qquad v(x) = \ldots -\cos(x)$$

b. Calculer l'intégrale K en appliquant la méthode d'intégration par parties.

2. Calculer l'intégrale $\boxed{\int_1^{\mathrm{e}} (3x-2)\ln(x)\,\mathrm{d}x}$ avec la méthode d'intégration par parties.

3. a. Soit x un réel strictement positif, avec la méthode d'intégration par parties, calculer $\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

b. En déduire une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0\,;+\infty[$.

1) $K = \int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx$

a) ci-dessus

b) On applique la formule d'intégration par parties.

$$\int_0^{\pi} u(x)v'(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u'(x)v(x)\,dx$$

$$\int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx = \Big[x \times (-\cos(x))\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1 \times (-\cos x)\,dx$$

$$= \pi \times (-\cos\pi) - 0 \times (-\cos 0) - \int_0^{\pi} (-\cos x)\,dx$$

$$\int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx = -\pi - 0 - \Big[-\sin(x)\Big]_0^{\pi}$$

$$\int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx = -\pi$$

3. **a.** Soit x un réel strictement positif, avec la méthode d'intégration par parties, calculer $\int_1^x \ln(t)\,dt$.

b. En déduire une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0;+\infty[$.

3/ a) $x>0$:

On veut calculer $\int_1^x \ln(t)\,dt$ à l'aide d'une intégration par parties :

$$\int_1^x \underbrace{1\times\ln(t)}\,dt$$

$$\int_1^x u(t)\times v'(t)\,dt = \Big[u(t)\times v(t)\Big]_1^x - \int_1^x u'(t)v(t)\,dt$$

$u(t) = \ln(t)$ $\qquad$ $u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = 1$ $\qquad$ $v(t) = t$

$$\int_1^x 1\times\ln(t)\,dt = \Big[\ln(t)\times t\Big]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t}\times t\,dt$$

$$\int_1^x 1\times\ln(t)\,dt = \Big[\ln(t)\times t\Big]_1^x - \int_1^x 1\,dt$$

$$\int_1^x \ln(t)\,dt = \ln(x)\times x - 0 - \Big[t\Big]_1^x$$

$$= \ln(x)\times x - (x-1)$$

$$\boxed{\int_1^x \ln(t)\,dt} = \boxed{x\ln(x) - x + 1}$$

La fonction qui à x associe $\int_1^x \ln(t)\,dt$ est une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ d'après le théorème de fondamental de l'analyse

donc $x \mapsto x\ln(x) - x + 1$ est une primitive de $x \mapsto \ln(x)$

2) $\int_1^e (3x-2)\ln(x)\,dx$

Calculer à l'aide d'une intégration par parties:

$$\int_1^e u(x)v'(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_1^e - \int_1^e u'(x)v(x)\,dx$$

$u(x) = \ln(x)$ $\qquad\qquad$ $u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = 3x-2$ $\qquad\qquad$ $v(x) = \frac{3x^2}{2} - 2x$

$$\int_1^e (3x-2)\ln(x)\,dx = \left[\ln(x) \times \left(\frac{3x^2}{2} - 2x\right)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \left(\frac{3x^2}{2} - 2x\right) dx$$

$$\int_1^e (3x-2)\ln(x)\,dx = \left(\frac{3e^2}{2} - 2e\right) - \int_1^e \frac{3x}{2} - 2\,dx$$

$$\int_1^e (3x-2)\ln(x)\,dx = \left(\frac{3e^2}{2} - 2e\right) - \left[\frac{3}{2} \times \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^e$$

$$= \left(\frac{3e^2}{2} - 2e\right) - \left(\left(\frac{3e^2}{4} - 2e\right) - \left(\frac{3}{4} - 2\right)\right)$$

125 20 min *Capacité 6, p. 335*

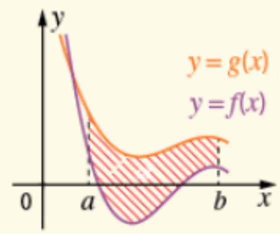
Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2x-1)\cos(x)\mathrm{d}x$.

2. $\int_1^{\mathrm{e}}5x^2\ln(x)\mathrm{d}x$.

PROPRIÉTÉ **Aire entre deux courbes**

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I telles que pour tout réel x de I, $f(x) \leqslant g(x)$. Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$. L'aire $\mathscr{A}$, en u.a., de la surface délimitée par les courbes représentant les fonctions f et g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x$.

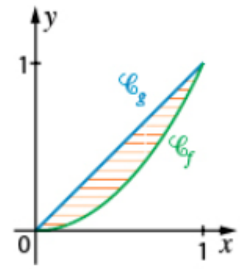


EXEMPLE : Soit f et g les fonctions définies sur [0 ; 1] par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$. Soit $\mathscr{S}$ le domaine délimité par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Pour tout réel x de [0 ; 1], on sait que $x^2 \geqslant x$.

Or, $\int_0^1 (x - x^2)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Donc, l'aire de $\mathscr{S}$, en unités d'aire, est $\frac{1}{6}$.



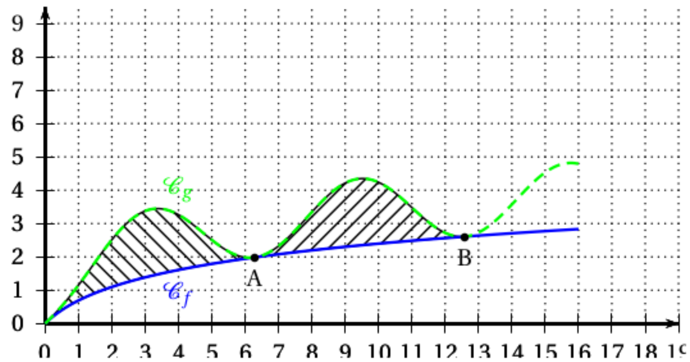
Capacité 13 ***Calculer l'aire entre deux courbes, capacité 8 p.337***

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0; 16]$ par

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x).$$

Dans un repère du plan $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g. Ces courbes sont données ci-dessous.

Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique.



102 Capacité 8, p. 337

Soit f et g les fonctions définies sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=x^3$ et $g(x)=x$, dont les courbes représentatives sont notées $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

1. Tracer les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

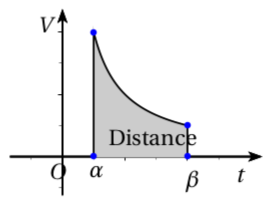
2. Préciser la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $[0\,;1]$.

3. Calculer l'aire, en unités d'aires, du domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

Capacité 14 ***Calculer et interpréter la valeur moyenne d'une fonction, voir capacité 9 p.337***

Pour $t > 0$ la vitesse d'un mobile est $v(t) = \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{t}$ (en $m.s^{-1}$).

1. Calculer la distance parcourue entre les instants $t = 1$ et $t = e^2$ (en s).
2. Calculer la vitesse moyenne du mobile entre les instants $t = 1$ et $t = e^2$.



Plus généralement, si on note $y = v(x)$ alors $\int_a^b v(x)dx$ est homogène au produit des grandeurs xy (ici $m.s^{-1}.s = m$). Puisque $b - a$ est homogène à x (en secondes s), la valeur moyenne de v sur $[a ; b]$ est homogène à $\dfrac{xy}{x} = y$ (soir en $m.s^{-1}$), donc elle est dans la même unité que la fonction intégrée v.

Capacité 15 ***Calculer et interpréter la valeur moyenne d'une fonction, voir capacité 9 p.337***

1. On considère que la croissance d'un plant de maïs est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;250]$ par

$$f(t)=\frac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t}+19}$$

Au bout de t jours avec t dans l'intervalle $[0\,;250]$, la hauteur du plant est de $f(t)$ mètres.

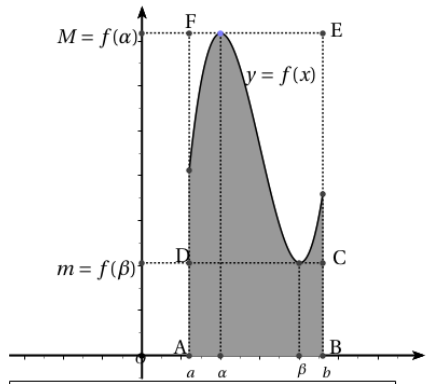
   a. Déterminer la valeur exacte de la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\,;250]$.

   b. En donner une valeur approchée à 10^{-2} près et interpréter ce résultat.

2. Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On suppose que pour tout $x\in[a;b]$ on a : $m\leqslant f(x)\leqslant M$, démontrer que :

$$m\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M$$



$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est comprise entre l'aire du rectangle $ABCD$ qui est $m(b-a)$ et l'aire du rectangle $ABEF$ qui est $M(b-a)$