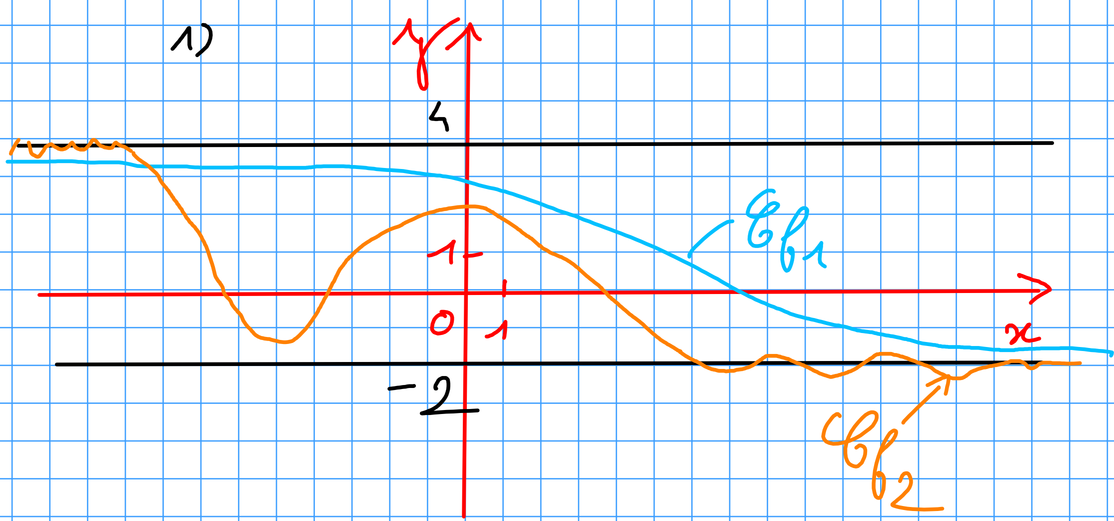
Chapitre limites de fonctions
Corrigés des exemples du cours

Capacité 1 ***Interpréter graphiquement une limite finie en l'infini***

Soit f une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{-\infty} f(x) = 4$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x) = -2$.

1. Représenter une courbe possible pour f en traçant ses droites asymptotes en $-\infty$ et $+\infty$.
2. f est-elle nécessairement une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$?

1)



2) On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = -2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f_2(x) = 4$

mais f_2 n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$.

Capacité 2 ***Comprendre la définition d'une limite en l'infini***

Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse :

- **Affirmation 1 :** Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors f croissante sur son intervalle de définition.
- **Affirmation 2 :** Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ alors f décroissante sur son intervalle de définition.
- **Affirmation 4 :** Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ alors $f(x) < 0$ pour x assez grand.
- **Affirmation 5 :** Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ alors $f(x) > 734$ pour x assez petit.

• **Affirmation 1** : Faux on peut donner un contre-exemple graphique

• **Affirmation 2** : Faux, idem contre-exemple graphique

• **Affirmation 4** : Vraie. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ alors par définition $f(x) < 0$ pour x assez grand

• **Affirmation 5** : Vraie, par définition.

Capacité 3 ***Interpréter graphiquement des limites***

On considère une fonction f dont on donne ci-dessous le tableau de variation.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormal du plan.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$	731	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	732

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Quelles sont les valeurs de $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x)$ et de $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x)$?
3. Quelles sont les limites de f en 1^- et 1^+ ?
4. Déterminer les éventuelles droites asymptotes horizontales à $\mathscr{C}_f$.
5. Déterminer les éventuelles droites asymptotes verticales à $\mathscr{C}_f$.
6. Dans un repère orthonormal du plan, tracer les droites asymptotes à $\mathscr{C}_f$ puis une représentation possible de $\mathscr{C}_f$.

1) f définie sur $]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

2) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$

3) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$

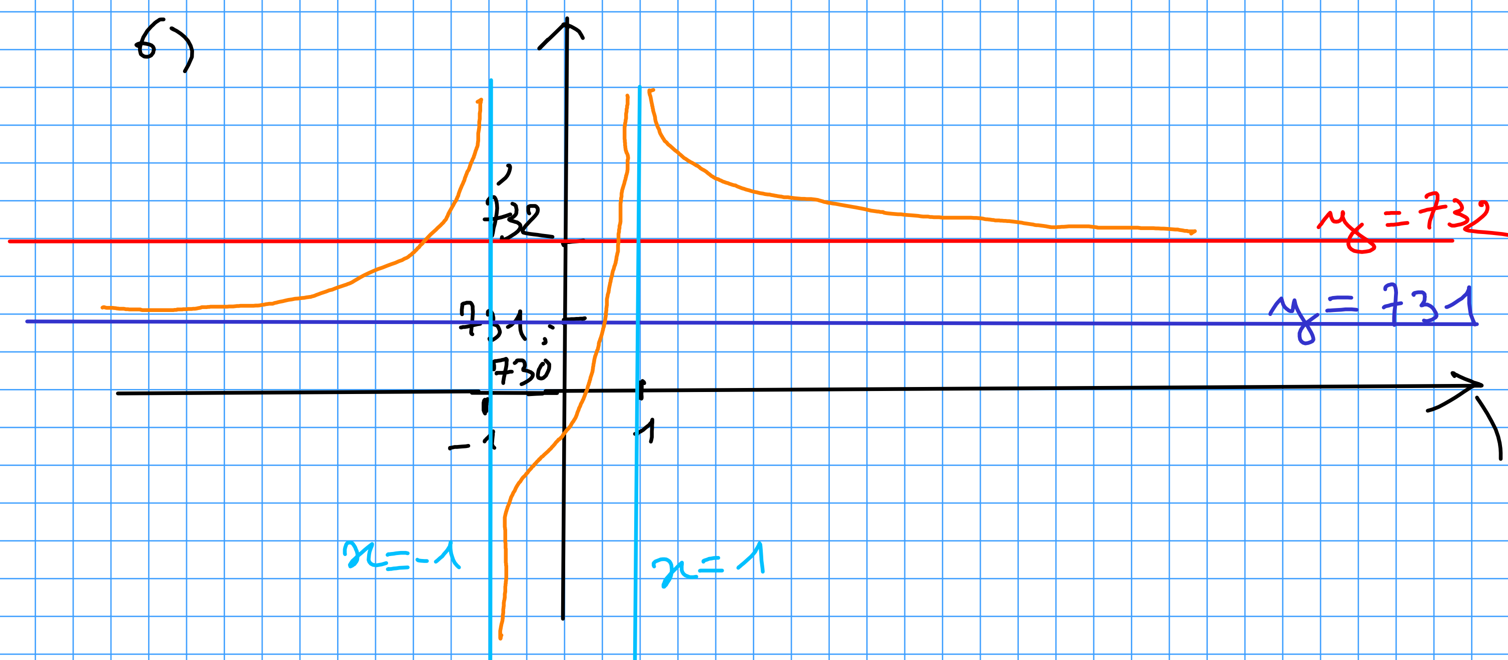
4) On a $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 731$ donc la droite d'équation $y = 731$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

On a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 732$ donc la droite d'équation $y = 732$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

5) On a $\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

On a $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

6)



Capacité 5 ***Lever une forme indéterminée en factorisant le terme prépondérant***

1. Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -2x^5 + 3x^4 - x + 1$.
   Déterminer la limite de f en 0, puis en $+\infty$ et enfin en $-\infty$

2. Soit f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2; 1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 8x + 6}{x^2 + x - 2}$$

   a. Déterminer la limite de f en chacune des bornes de son ensemble de définition.

   b. Interpréter graphiquement ces limites.

1) • $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 1$

• Etude en $-\infty$:

• Par somme on a une FI du type $-\infty + \infty$

• On factorise par le terme prépondérant ~~en +∞~~ qui est x^5

$$-2x^5+3x^4-x+1 = x^5\left(-2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)$$

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5 = -\infty$

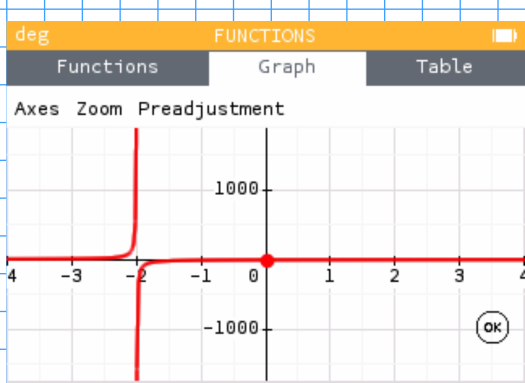
et $\lim\limits_{x \to -\infty} -2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5} = -2$

Donc par produit $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$

• Etude en $+\infty$:

De même on montre que :

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$$

2) 

f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$

par : $f(x) = \dfrac{2x^2-8x+6}{x^2+x-2}$

Graphiquement on peut conjecturer que $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$

et que f possède des limites finies en $-\infty$ et $+\infty$ (égales à 2 si on zoome)

. Etude en $-\infty$:

Par quotient on a une FI du type $\frac{+\infty}{+\infty}$

on factorise numérateur et dénominateur par leur terme prépondérant en $-\infty$:

$$f(x) = \frac{x^2\left(2 - 8/x + \frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} = \frac{2 - 8/x + \frac{6}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}$$

Par quotient on a désormais $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $-\infty$

. Etude en $+\infty$: de même on montre que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

. Pour l'étude en -2 et en 1 on a besoin d'étudier le signe du trinôme $x^2 + x - 2$:

1 est racine évidente car $1^2 + 1 - 2 = 0$

Le produit des racines est égal à $\frac{c}{a} = \frac{-2}{1} = -2$

donc l'autre racine est $\frac{-2}{1} = -2$

On en déduit le tableau de signes de x^2+x-2

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} 2x^2-8x+6 = 30$

et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} x^2+x-2 = 0^+$

donc par quotient $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} \dfrac{2x^2-8x+6}{x^2+x-2} = +\infty$

On a $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} 2x^2-8x+6 = 30$

et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} x^2+x-2 = 0^-$

donc par quotient $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} \dfrac{2x^2-8x+6}{x^2+x-2} = -\infty$

La droite d'équation $x=-2$ est donc asymptote à $\mathcal{C}_f$.

- Pour l'étude en 1, on est bloqué par une FI $\dfrac{0}{0}$.

⚠ Le terme prépondérant en 1 n'est <u>pas</u> le terme de + haut degré

On factorise le numérateur et le dénominateur pour simplifier des facteurs communs (il y en a forcément car les deux s'annulent en 1)

Pour le dénominateur les racines sont -2 et 1 et la forme factorisée $(x+2)(x-1)$

Pour le numérateur, les racines sont 1 et -3 et la forme factorisée

$$2(x-1)(x-3)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;1\}$ on a donc :

$$f(x) = \frac{2\cancel{(x-1)}(x-3)}{(x+2)\cancel{(x-1)}} = \frac{2x-6}{x+2}$$

et donc on a $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x-6}{x+2} = -\frac{4}{3}$