Prise de notes du 6/04/2021

Cours : preuve du théorème 2

Théorème 2

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives.

Démonstration ***ROC***

....

....

....

....

....

....

....

Correction du n°64 p. 342 :

64 Soit f la fonction définie sur $I =]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + x}{x+1}.$$

1. Démontrer que, pour tout réel x de I : $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$.

2. Calculer $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Correction de l'exercice 47 p.342

https://capytale2.ac-paris.fr

code : d798-11639

=> accès par l'ENT dans l'onglet Ressources Numériques

Capacité 7 du cours : calcul d'intégrale

Corrigé en ligne :

https://frederic-junier.org/TS2021/Cours/Corrige-Cours-CalculIntegralPartie2-2021-Web.pdf

mot de passe : parcTerminale

Cours : propriétés de l'intégrale

Propriétés 1, 2, 3 du cours

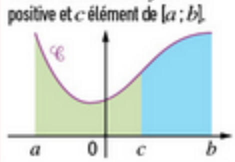
Ci-dessous un extrait du manuel Indice

COURS

3. Propriétés et intégration par parties

Propriétés de l'intégrale

A noter
Illustration de la relation de Chasles dans le cas où f est positive et c élément de $[a\,;b]$.



Démonstration des propriétés 3 et 6
Voir page 338

PROPRIÉTÉS Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I.

a, b et c sont trois réels de I et k est une constante réelle.

(1) $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$ (2) $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

(3) **Linéarité :**

$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ et $\int_a^b (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

(4) **Relation de Chasles :** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$

(5) **Positivité :** Si pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \geqslant 0$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0.$

(6) **Comparaison :** Si pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \geqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

Exercice : sur la relation de Charles

n° 36 p. 341 du manuel

36 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

On donne $\int_{-5}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 8$ et $\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 2$.

Calculer $\int_{-5}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

Exercice sur la propriété de linéarité

n°37 p.341

37 Soit f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et telles que $\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 2$ et $\int_{-1}^{3} g(x)\mathrm{d}x = -5$.

Calculer : **a.** $\int_{-1}^{3} 7f(x)\mathrm{d}x$ **b.** $\int_{-1}^{3} (f(x) + g(x))\mathrm{d}x$

c. $\int_{-1}^{3} (2f(x) - 3g(x))\mathrm{d}x$

Exercice sur la propriété de linéarité :

n°70 p. 343

70 Soit $I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ et $J = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,dx$.

1. Calculer I et I + J.
2. En déduire la valeur de J.

Exercice sur la relation de Chasles :

n° 73 p. 343

73 En utilisant la relation de Chasles, calculer : $\int_{-3}^{5} |x| \, dx$.

Cours Capacitè 8

Capacité 8 ***Application des propriétés de l'intégrale***

Soient f et g deux fonctions continues sur $[1;5]$, on donne :

$$I=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=-3 \qquad J=\int_5^2 f(x)\mathrm{d}x=2 \qquad K=\int_1^5 g(x)\mathrm{d}x=12$$

Calculer $L=\displaystyle\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$, $M=\displaystyle\int_1^5 (f(x)+g(x))\mathrm{d}x$ puis $N=\displaystyle\int_1^5 (2f(x)-3g(x))\mathrm{d}x$

Exercice de synthèse

Fiche d'exercices

https://frederic-junier.org/TS2020/Cours/TS-Exos-Integration2020-Fiche1-Web.pdf

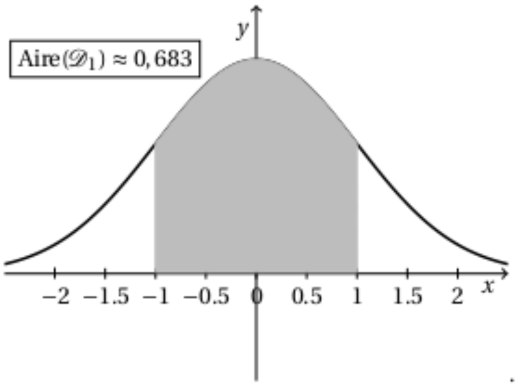
Exercice 1 *Cloches de Pâques*

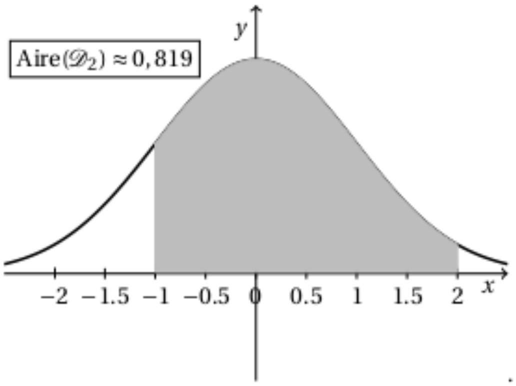
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;2]$ par $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{2\pi}}\text{e}^{-\frac{x^2}{2}} + \dfrac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$.
f est dérivable et donc continue sur $[1\,;2]$ comme somme de fonctions dérivables sur $[1\,;2]$.
On munit le plan d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. La fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\text{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$ et on donne ci-dessous des valeurs approchées à $0,001$ près :

   ☞ de l'aire du domaine $\mathscr{D}_1$ délimité par les droites d'équations $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$ et par la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\text{e}^{-\frac{x^2}{2}}$;

   ☞ de l'aire du domaine $\mathscr{D}_2$ délimité par les droites d'équations $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$ et par la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\text{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.





   En déduire une valeur approchée à $0,002$ près (les erreurs s'ajoutent) de l'intégrale :

$$\int_1^2 g(x)\,\text{d}x = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\text{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\text{d}x$$

2. On considère la fonction H définie et dérivable sur $[1\,;2]$ par $H(x) = \dfrac{\ln x}{x-\ln x}$.

   a. Démontrer que H est une primitive de la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$ sur l'intervalle $[1\,;2]$.

   b. En déduire la valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 h(x)\,\text{d}x = \int_1^2 \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\,\text{d}x$.

3. Déterminer une valeur approchée à $0,002$ près de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\text{d}x$.