Prise de notes du 9/04/2021

QCM Doctools sur l'intégrale

link.dgpad.net/FrX8

Capacité 7 ***Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive, voir capacité 4 p. 333***

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$;
2. $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{1}{(2x-1)^4}\,dx$;
3. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \cos(\theta)\ d\theta$;
4. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos(2\theta)\ d\theta$;
5. $\displaystyle\int_{-4}^{-2} (3x-1)^6\,dx$;
6. $\displaystyle\int_{0}^{x} \sin^2(t)\,dt$.
7. $\displaystyle\int_{e}^{e^3} \frac{1}{x\ln x}\,dx$
8. $\displaystyle\int_{0}^{x} \frac{1}{1+e^t}\,dt$
9. $\displaystyle\int_{2}^{e} \frac{1}{x(\ln(x))^2}\,dx$

Cours : Propriétés de l'intégrale : inégalités

Propriétés de l'intégrale

PROPRIÉTÉS Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I.

a, b et c sont trois réels de I et k est une constante réelle.

(1) $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$. (2) $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

(3) **Linéarité :**

$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ et $\int_a^b (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

(4) **Relation de Chasles :** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

(5) **Positivité :** Si pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \geqslant 0$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

(6) **Comparaison :** Si pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \geqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Exercices :

n°77 p.343

77 Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[1\,;3]$. Dans chacun des cas suivants, donner un encadrement de $\int_1^3 f(x)\,dx$ sachant que pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;3]$:

a. $-2x \leqslant f(x) \leqslant x^2$ **b.** $\dfrac{1}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$

78 **1.** Donner un encadrement de $\ln(x)$ sur $[1 ; 2]$.

2. En déduire que $0 \leqslant \int_1^2 x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{7}{3}\ln(2)$.

Capacité 10 ***Majorer ou minorer une intégrale, voir capacité 5 p.335***

1. Déterminer le signe des intégrales suivantes :

   a. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x \, \mathrm{d}x$ **b.** $\int_{1}^{0} x^2 \, \mathrm{d}x$ **c.** $\int_{1}^{\frac{1}{e}} \ln x \, \mathrm{d}x$

2. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \int_0^1 \ln\left(1+x^n\right) \, \mathrm{d}x$.

   a. Etudier le sens de variation de la suite (u_n).

   b. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \ln 2$.
   En déduire que la suite (u_n) est convergente.

   c. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout réel $x \in [0\,;\,1]$ on a : $0 \leqslant \ln\left(1+x^n\right) \leqslant x^n$.
   En déduire la limite de la suite (u_n).

Capacité 11 ***Étudier une suite d'intégrales, voir capacité 7 p.337***

Soit f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

1. Démontrer que pour tout $t\in[2\,;+\infty[$ on a : $0\leqslant f(t)\leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t}$.

2. En déduire que pour tout entier $n\geqslant 2$ on a : $0\leqslant \displaystyle\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-2}}{\sqrt{2\pi}}$

3. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 2}$ est croissante.

Intégration par parties

PROPRIÉTÉS Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et dont les dérivées u' et v' sont continues sur I. Soit a et b deux réels de I.

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

DÉMONSTRATION

Les fonctions u et v sont dérivables sur I donc la fonction uv l'est aussi et $(uv)' = u'v + uv'$.
Donc pour tout réel x de I, $u(x)v'(x) = (uv)'(x) - u'(x)v(x)$.
Or, les fonctions u et v sont continues sur I car elles sont dérivables sur I. De plus u' et v' sont continues sur I donc les fonctions uv' et $u'v$ le sont également.

Donc $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \big((uv)'(x) - u'(x)v(x)\big)\mathrm{d}x$

$= \int_a^b (uv)'(x)\mathrm{d}x - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ (propriété de linéarité).

Or, une primitive de la fonction $(uv)'$ est la fonction uv.

Donc $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$.

Cette méthode permet de transformer le calcul de l'intégrale d'une fonction. Un bon choix des fonctions u et v' conduit au calcul de l'intégrale d'une fonction dont on sait déterminer une primitive.

EXEMPLE : Calcul de $\int_0^\pi x\sin(x)\mathrm{d}x$.

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin(x)$ donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\cos(x)$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0 ; \pi]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[0 ; \pi]$.

Donc : $\int_0^\pi x\sin(x)\mathrm{d}x = [-x\cos(x)]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos(x)\mathrm{d}x = [-x\cos(x)]_0^\pi + [\sin(x)]_0^\pi = \pi$.

Capacité 12 ***Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties, voir capacité 6 p.335***

1. Soit l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x$.

   a. Compléter :
   Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\pi]$, on pose :

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & u'(x) = \ldots \\ v'(x) = \sin(x) & v(x) = \ldots \end{array}$$

   b. Calculer l'intégrale K en appliquant la méthode d'intégration par parties.

2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (3x-2)\ln(x)\,\mathrm{d}x$ avec la méthode d'intégration par parties.

3. **a.** Soit x un réel strictement positif, avec la méthode d'intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^{x} \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

   b. En déduire une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0\,; +\infty[$.

Exercice de synthèse

Fiche d'exercices

https://frederic-junier.org/TS2020/Cours/TS-Exos-Integration2020-Fiche1-Web.pdf

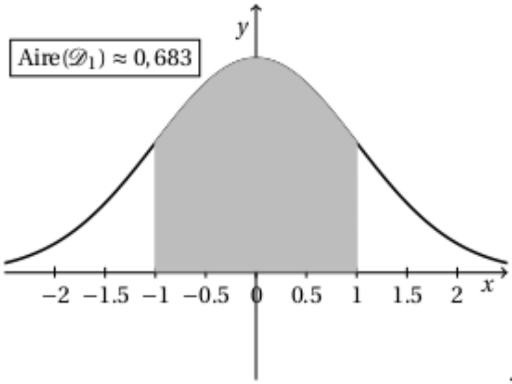
Exercice 1 *Cloches de Pâques*

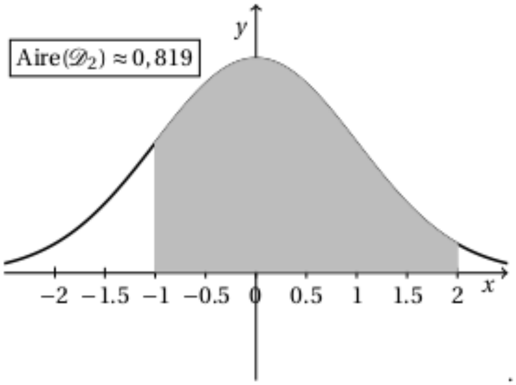
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;2]$ par $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + \dfrac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$.
f est dérivable et donc continue sur $[1;\,2]$ comme somme de fonctions dérivables sur $[1\,;2]$.
On munit le plan d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. La fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$ et on donne ci-dessous des valeurs approchées à $0,001$ près :

   ☞ de l'aire du domaine $\mathcal{D}_1$ délimité par les droites d'équations $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$ et par la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$;

   ☞ de l'aire du domaine $\mathcal{D}_2$ délimité par les droites d'équations $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$ et par la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.





   En déduire une valeur approchée à $0,002$ près (les erreurs s'ajoutent) de l'intégrale :

$$\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

2. On considère la fonction H définie et dérivable sur $[1\,;2]$ par $H(x) = \dfrac{\ln x}{x-\ln x}$.

   a. Démontrer que H est une primitive de la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$ sur l'intervalle $[1\,;2]$.

   b. En déduire la valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 h(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$.

3. Déterminer une valeur approchée à $0,002$ près de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Propriétés de l'intégrale :

intégrale et inégalités → croissance de l'intégrale

Propriétés de l'intégrale

PROPRIÉTÉS Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I.

a, b et c sont trois réels de I et k est une constante réelle.

(1) $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$ **(2)** $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

(3) Linéarité :

$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ et $\int_a^b (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

(4) Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$

(5) Positivité : Si pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \geqslant 0$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0.$

(6) Comparaison : Si pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \geqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

3.3.3 Intégrale et inégalités

Attention important. $a \leq b$

Propriété 3 ***Intégrale et inégalités***

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $a \leq b$ deux réels de I.

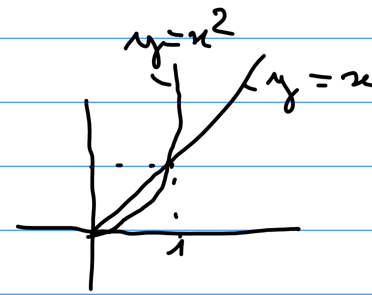
1. Si $f \geq 0$ sur I alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.
2. Si $f \leq 0$ sur I alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq 0$.
3. Si $f \leq g$ sur I alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Exercices sur la croissance de l'intégrale

76 Capacité 5, p. 335

1. Démontrer que, pour tout réel x de $[0\,;1]$,
$$0 \leqslant xe^{-x} \leqslant xe^{-x^2}.$$

2. En déduire que $0 \leqslant \int_0^1 xe^{-x}\,dx \leqslant \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$.



1) Pour tout réel $x \in [0;1]$:

$0 \leq x \leq 1$) $\times x \geq 0$

donc $0 \leq x^2 \leq x$

donc $0 \geq -x^2 \geq -x$

donc $e^0 \geq e^{-x^2} \geq e^{-x}$ car l'exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$

donc $x \geq xe^{-x^2} \geq xe^{-x} \geq 0$) $\times x \geq 0$

2) Pour tout réel $x \in [0;1]$:

$0 \leq xe^{-x} \leq xe^{-x^2}$

par croissance de l'intégrale on a :

$$\int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 xe^{-x}dx \leq \int_0^1 xe^{-x^2}dx$$

$$0 \leq \int_0^1 xe^{-x}dx \leq \int_0^1 xe^{-x^2}dx$$

On en peut calculer $\int_0^1 xe^{-x^2}dx$ à l'aide d'une primitive de xe^{-x^2} qui est de la forme :

$$-\frac{1}{2}u'e^u \quad \text{avec } u(x) = -x^2$$

Donc on a $\int_0^1 xe^{-x^2}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e^0$
$= \frac{1}{2}(1-e^{-1})$

Donc on a : $0 \leq \int_0^1 xe^{-x}dx \leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$

77 Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle [1 ; 3]. Dans chacun des cas suivants, donner un encadrement de $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ sachant que pour tout réel x de l'intervalle [1 ; 3] :

a. $-2x \leqslant f(x) \leqslant x^2$ **b.** $\frac{1}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$

78 **1.** Donner un encadrement de $\ln(x)$ sur $[1 ; 2]$.

2. En déduire que $0 \leqslant \int_1^2 x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{7}{3}\ln(2)$.

Capacité 10 ***Majorer ou minorer une intégrale, voir capacité 5 p.335***

1. Déterminer le signe des intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x \, \mathrm{d}x$ **b.** $\displaystyle\int_{1}^{0} x^2 \, \mathrm{d}x$ **c.** $\displaystyle\int_{1}^{\frac{1}{e}} \ln x \, \mathrm{d}x$

2. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right) \, \mathrm{d}x$.

a. Etudier le sens de variation de la suite (u_n).

b. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \ln 2$.
En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout réel $x \in [0\,;\,1]$ on a : $0 \leqslant \ln\left(1+x^n\right) \leqslant x^n$.
En déduire la limite de la suite (u_n).

Voir corrigé en ligne :

https://frederic-junier.org/TS2021/Cours/Corrige-Cours-CalculIntegralPartie2-2021-Web.pdf