Prise de notes du 9/04/2021

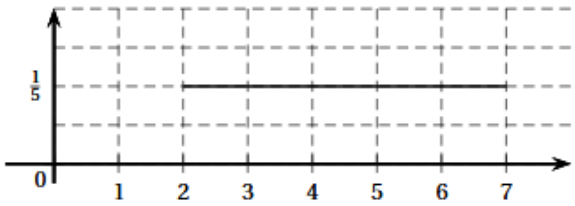
QCM Doctools sur l'intégrale

link.dgpad.net/f5w4

Question 1 / 5

Soit f la fonction définie sur [2 ; 7] par $f(x) = \dfrac{1}{5}$.

Calculer $\int_2^7 f(x)dx$



Entrer votre réponse ci-dessous :

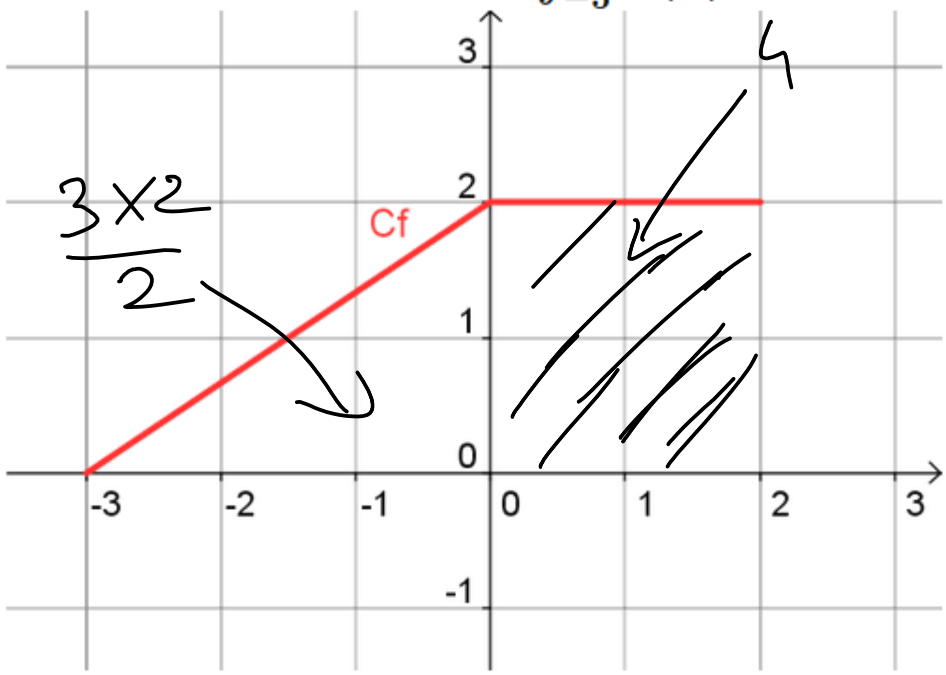
ua

$$\int_2^7 f(x)\,dx = \int_2^7 \frac{1}{5}\,dx = \frac{1}{5} \times \int_2^7 1\,dx$$

$$\int_2^5 f(x)\,dx = \frac{1}{5} \times (7-2) = 1$$

Question 2 / 5

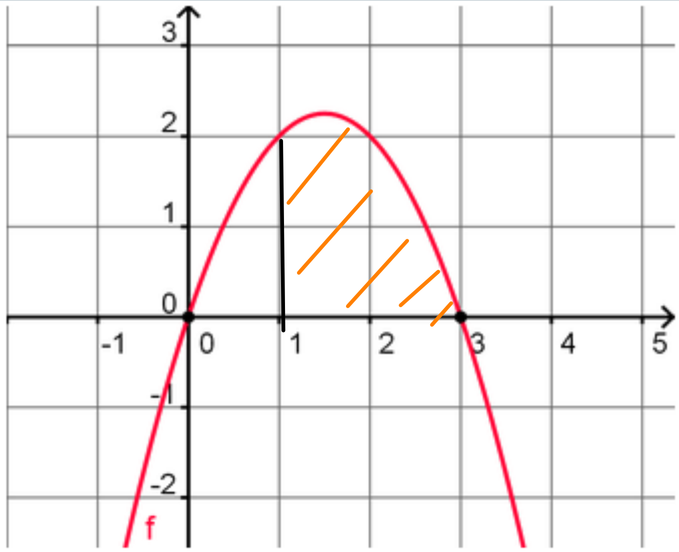
Calculer la valeur exacte de I = $\int_{-3}^{2} f(x)dx$.



Entrer votre réponse ci-dessous :

$$I = \int_{-3}^{2} f(x)\,dx = \frac{3\times 2}{2} + 4 = 7$$

Question 3 / 5



Ci-dessus est représentée une fonction f.

$\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire du domaine délimité par :

(Vous devez sélectionner QUATRE réponses)

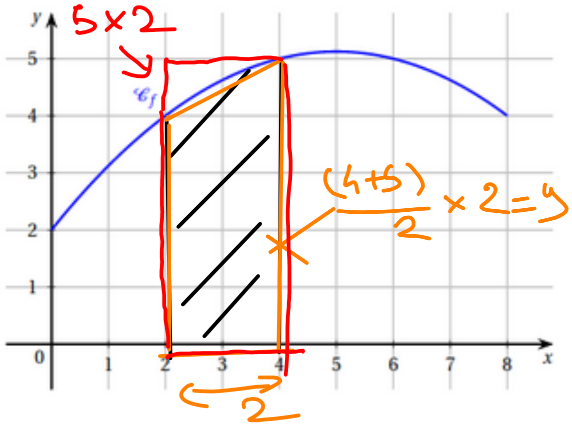
- l'axe des abscisses
- l'axe des ordonnées
- la droite d'équation $x = 1$
- la droite d'équation $x = 3$
- la droite d'équation $y = 1$
- la droite d'équation $y = 3$
- la courbe représentant f

QCM 3 Calcul Intégral sur Pronote

Utilisateur anonyme

Question 4 / 5

On considère une fonction f continue sur [0;8] dont la courbe représentative est donnée ci-dessous :



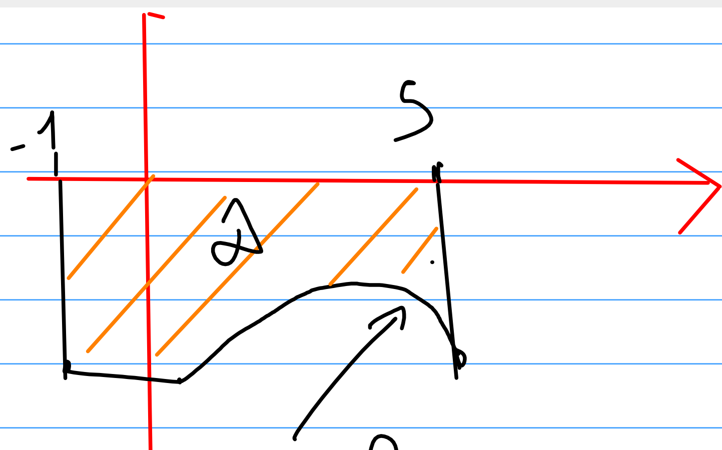
- $8 \leqslant \int_2^4 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 9$
- $\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x = f(4) - f(2)$
- $9 \leqslant \int_2^4 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 10$
- $\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x = 9$

Utilisateur anonyme

Question 5 / 5

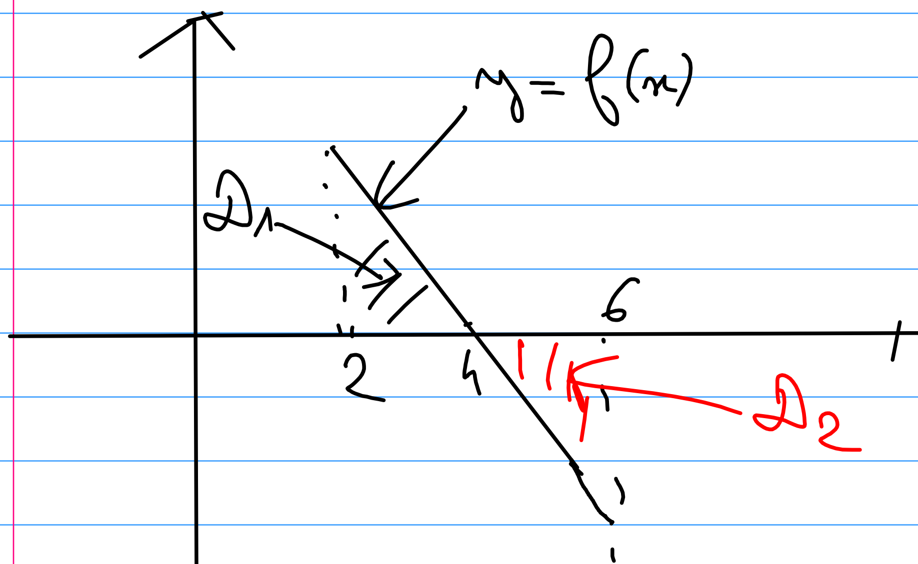
si une fonction f est continue et négative sur $[-1;5]$, alors l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équation $x=-1$ et $x=5$ est donnée par :

- ○ $\int_{-1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$
- ○ $-\int_{-1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$
- ○ une autre formule



$y = f(x)$

$\int_{-1}^{5} f(x) = -\text{Aire}(\mathcal{D})$ donc $\text{Aire}(\mathcal{D}) = -\int_{-1}^{5} f(x)dx$



$$\int_2^6 f(x)\,dx \underset{\text{Chasles}}{=} \underbrace{\int_2^4 f(x)\,dx}_{f \geq 0 \text{ sur } [2;4]} + \underbrace{\int_4^6 f(x)\,dx}_{f \leq 0 \text{ sur } [4;6]}$$

$$\int_2^6 f(x)\,dx = \mathcal{A}(\mathcal{D}_1) - \mathcal{A}(\mathcal{D}_2) = 0$$

QCM3 :

Question 1 : Q1

$\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ est égale à

- $4+2\sqrt{2}$
- $4-2\sqrt{2}$
- $2-\sqrt{2}$
- $2+\sqrt{2}$

$$\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_2^4 = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{2}$$

primitive

$$\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\times 2 - 2\sqrt{2} = 4-2\sqrt{2}$$

Question 2 : Q2

$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{dx}$ est égale à

- [ ] $\ln(2)$
- [ ] $\frac{1}{2}-1$
- [ ] $-\ln(2)$
- [ ] $-\frac{1}{2}+1$
- [ ] $\ln(18)-\ln(9)$

$\frac{2x}{x^2+1}$ est de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$

ici $u(x) = x^2+1$

$u'(x) = 2x$

donc une primitive de $\frac{2x}{x^2+1}$

est $\ln(|u(x)|) = \ln(x^2+1)$

Donc on a : $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = \left[\ln(x^2+1)\right]_0^1$

$= \ln(1^2+1) - \ln(1)$

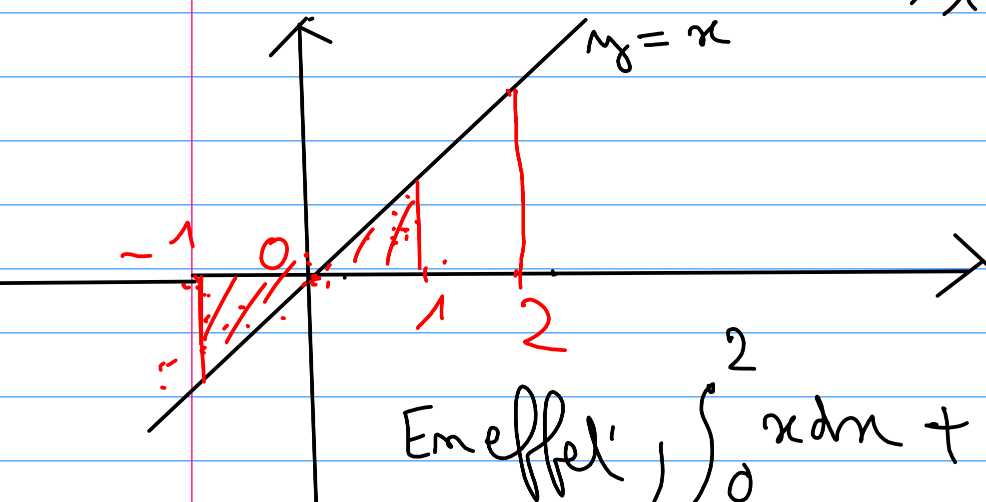
$= \ln(2)$

Question 4 : Q4

$\int_0^2 x\,\mathrm{dx} - \int_0^1 x\,\mathrm{dx}$ est égale à

- ~~$\int_1^2 x\,\mathrm{dx}$~~
- ~~$\int_{-1}^2 x\,\mathrm{dx}$~~
- ~~$\frac{3}{2}$~~
- $-\frac{3}{2}$
- $\int_2^1 x\,\mathrm{dx}$

$$\int_0^2 x\,dx - \int_0^1 x\,dx = \int_1^2 x\,dx$$



En effet, $\int_0^2 x\,dx + (-1)\times\int_0^1 x\,dx$

est égal à

$$\underbrace{\int_0^2 x\,dx + \int_1^0 x\,dx}$$

Rappel : $-\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx$

puisque $\int_b^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0$

Ensuite :

$$\int_0^2 x\,dx + \int_1^0 x\,dx = \int_1^0 x\,dx + \int_0^2 x\,dx = \int_1^2 x\,dx$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$$

De plus $\int_1^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

On a aussi : $\int_{-1}^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = \frac{3}{2}$

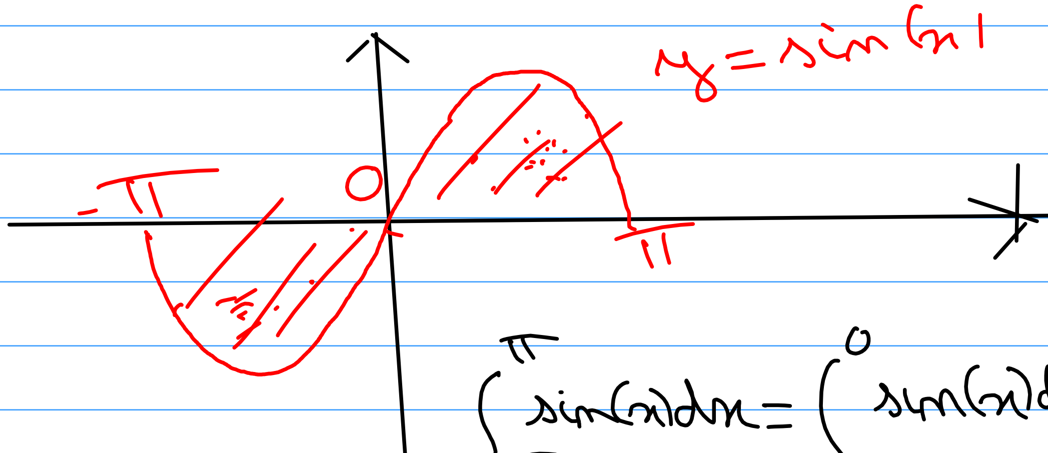
Remarque :

Si f est une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$:

Définition : f est impaire sur $\mathbb{R}$ ssi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$

Catalogue de fonctions impaires :

$x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto x^{2n+1}$



$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)dx = \int_{-\pi}^{0} \sin(x)dx + \int_{0}^{\pi} \sin(x)dx$$

On $\int_{-\pi}^{0} \sin(x)dx = -\int_{0}^{\pi} \sin(x)dx$ par symétrie / imparité /

Question 5 : Q5

Soit f une fonction continue sur R. Pour tout entier naturel n on définit $u_n = \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{dx}$

- [x] $u_n + u_{n+1} = \int_n^{n+2} f(x)\mathrm{dx}$
- [ ] $-u_n = \int_{-n}^{-n+1} f(x)\mathrm{dx}$
- [x] $-u_n = \int_{n+1}^{n} f(x)\mathrm{dx}$
- [x] $-u_n = \int_n^{n+1} -f(x)\mathrm{dx}$

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x)dx \qquad u_{n+1} = \int_{n+1}^{n+2} f(x)dx$$

donc $u_n + u_{n+1} = \int_n^{n+1} f(x)dx + \int_{n+1}^{n+2} f(x)dx$

par la relation de Chasles :

$$u_n + u_{n+1} = \int_n^{n+2} f(x)dx$$

$$-u_n = -\int_n^{n+1} f(x)dx = \int_{n+1}^{n} f(x)dx$$

$$-u_n = \int_n^{n+1} -f(x)dx$$

Question 3 : Q3

$\int_1^2 \frac{1}{x}dx + \int_2^3 2dx$ est égale à

- [ ] $\int_1^3 \frac{1}{x} + 2dx$
- [x] $\ln(2)+2$
- [x] $\ln(2e^2)$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx + \int_2^3 2dx = \left[\ln(x)\right]_1^2 + \left[2x\right]_2^3$$

$$= \ln(2) - \ln(1) + 2\times3 - 2\times2$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx + \int_2^3 2dx = \ln(2) + 2$$

$$= \ln(2) + \ln(e^2)$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx + \int_2^3 2dx = \ln(2e^2)$$

Correction de l'exercice 47 p.342

https://capytale2.ac-paris.fr

code : d798-11639

=> accès par l'ENT
dans l'onglet
Ressources Numériques

Exercice sur la relation de Chasles :

n° 73 p. 343

73 En utilisant la relation de Chasles, calculer : $\int_{-3}^{5}|x|\mathrm{d}x$.

$$\int_{-3}^{5}|x|dx$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

D'après la relation de Chasles

$$\int_{-3}^{5}|x|dx = \int_{-3}^{0}|x|dx + \int_{0}^{5}|x|dx$$

$$\int_{-3}^{5}|x|dx = \int_{-3}^{0}-x\,dx + \int_{0}^{5}x\,dx$$

$$\int_{-3}^{5}|x|dx = \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-3}^{0} + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{5}$$

$$\int_{-3}^{5}|x|dx = 0 - \frac{1}{2}(-3)^2 + \frac{1}{2}\times 5^2$$

$$\int_{-3}^{5}|x|dx = -4{,}5 + 12{,}5 = 8$$

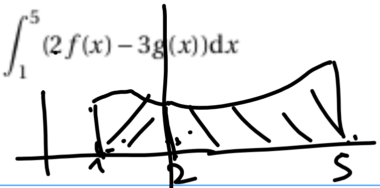
Cours   Capacité 8

Capacité 8 ***Application des propriétés de l'intégrale***

Soient f et g deux fonctions continues sur $[1\,;5]$, on donne :

$$I=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=-3 \qquad J=\int_5^2 f(x)\mathrm{d}x=2 \qquad K=\int_1^5 g(x)\mathrm{d}x=12$$

Calculer $L=\displaystyle\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$, $M=\displaystyle\int_1^5 (f(x)+g(x))\mathrm{d}x$ puis $N=\displaystyle\int_1^5 (2f(x)-3g(x))\mathrm{d}x$

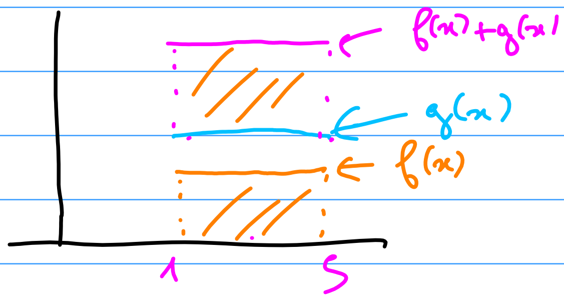


$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$

$\int_1^5 f(x)dx = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^5 f(x)dx$ où $\int_2^5 f(x)\,dx = -\int_5^2 f(x)dx$

$\int_1^5 f(x) = -3 - 2 = -5$

$\int_1^5 (f(x)+g(x))\,dx \underset{\text{linéarité}}{=} \int_1^5 f(x)\,dx + \int_1^5 g(x)\,dx = -5 + 12 = 7$



$\int_1^5 (2f(x) - 3g(x))\,dx = 2\int_1^5 f(x)\,dx + (-3)\int_1^5 g(x)\,dx$

$\int_1^5 (2f(x) - 3g(x))dx = 2\times(-3) + (-3)\times 12 = -42$

Exercice de synthèse

Fiche d'exercices

https://frederic-junier.org/TS2020/Cours/TS-Exos-Integration2020-Fiche1-Web.pdf

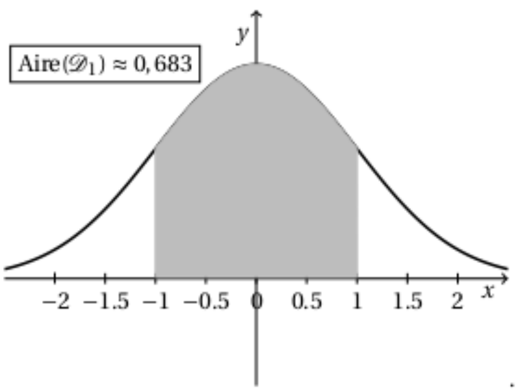
Exercice 1 *Cloches de Pâques*

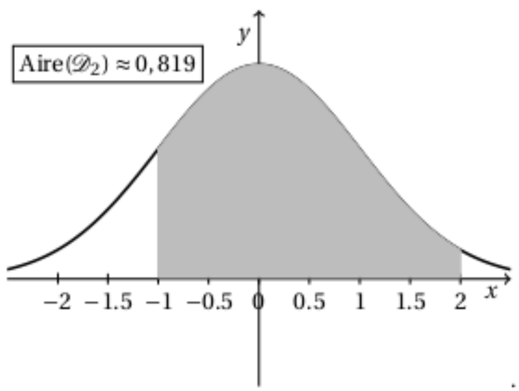
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1;2]$ par $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + \dfrac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$.
f est dérivable et donc continue sur $[1;2]$ comme somme de fonctions dérivables sur $[1;2]$.
On munit le plan d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. La fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$ et on donne ci-dessous des valeurs approchées à $0,001$ près :

   ☞ de l'aire du domaine $\mathscr{D}_1$ délimité par les droites d'équations $x=-1$, $x=1$, $y=0$ et par la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$;

   ☞ de l'aire du domaine $\mathscr{D}_2$ délimité par les droites d'équations $x=-1$, $x=2$, $y=0$ et par la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.





   En déduire une valeur approchée à $0,002$ près (les erreurs s'ajoutent) de l'intégrale :

$$\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

2. On considère la fonction H définie et dérivable sur $[1;2]$ par $H(x) = \dfrac{\ln x}{x-\ln x}$.

   a. Démontrer que H est une primitive de la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$ sur l'intervalle $[1;2]$.

   b. En déduire la valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 h(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$.

3. Déterminer une valeur approchée à $0,002$ près de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Propriétés de l'intégrale :

intégrale et inégalités → croissance de l'intégrale

Propriétés de l'intégrale

PROPRIÉTÉS Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I.

a, b et c sont trois réels de I et k est une constante réelle.

(1) $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$. **(2)** $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

(3) Linéarité :

$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ et $\int_a^b (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

(4) Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

(5) Positivité : Si pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \geqslant 0$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

(6) Comparaison : Si pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \geqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

3.3.3 Intégrale et inégalités

Attention important. $a \leq b$

Propriété 3 ***Intégrale et inégalités***

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $a \leq b$ deux réels de I.

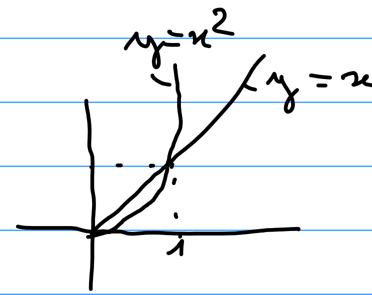
1. Si $f \geq 0$ sur I alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.
2. Si $f \leq 0$ sur I alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq 0$.
3. Si $f \leq g$ sur I alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Exercices sur la croissance de l'intégrale

76 Capacité 5, p. 335

1. Démontrer que, pour tout réel x de $[0\,;1]$,
$$0 \leqslant xe^{-x} \leqslant xe^{-x^2}.$$

2. En déduire que $0 \leqslant \int_0^1 xe^{-x}dx \leqslant \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$.



1) Pour tout réel $x \in [0;1]$:

$0 \leq x \leq 1$) $\times x \geq 0$

donc $0 \leq x^2 \leq x$

donc $0 \geq -x^2 \geq -x$

donc $e^0 \geq e^{-x^2} \geq e^{-x}$ car l'exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$

donc $x \geq xe^{-x^2} \geq xe^{-x} \geq 0$) $\times x \geq 0$

2) Pour tout réel $x \in [0;1]$:

$0 \leq xe^{-x} \leq xe^{-x^2}$

par croissance de l'intégrale on a :

$$\int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 xe^{-x}dx \leq \int_0^1 xe^{-x^2}dx$$

$$0 \leq \int_0^1 xe^{-x}dx \leq \int_0^1 xe^{-x^2}dx$$

On en peut calculer $\int_0^1 xe^{-x^2}dx$ à l'aide d'une primitive de xe^{-x^2} qui est de la forme :

$$-\frac{1}{2}u'e^u \quad \text{avec} \quad u(x) = -x^2$$

Donc on a $\int_0^1 xe^{-x^2}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e^0$
$= \frac{1}{2}(1-e^{-1})$

Donc on a : $0 \leq \int_0^1 xe^{-x}dx \leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$

77 Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle [1 ; 3]. Dans chacun des cas suivants, donner un encadrement de $\int_1^3 f(x)\,dx$ sachant que pour tout réel x de l'intervalle [1 ; 3] :

a. $-2x \leqslant f(x) \leqslant x^2$

b. $\dfrac{1}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$

78 **1.** Donner un encadrement de $\ln(x)$ sur $[1 ; 2]$.

2. En déduire que $0 \leqslant \int_1^2 x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{7}{3}\ln(2)$.

Capacité 10 ***Majorer ou minorer une intégrale, voir capacité 5 p.335***

1. Déterminer le signe des intégrales suivantes :

   a. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x \, dx$ **b.** $\int_{1}^{0} x^2 \, dx$ **c.** $\int_{1}^{\frac{1}{e}} \ln x \, dx$

2. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \int_0^1 \ln\left(1+x^n\right) \, dx$.

   a. Etudier le sens de variation de la suite (u_n).

   b. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \ln 2$.
   En déduire que la suite (u_n) est convergente.

   c. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout réel $x \in [0;1]$ on a : $0 \leqslant \ln\left(1+x^n\right) \leqslant x^n$.
   En déduire la limite de la suite (u_n).

Voir corrigé en ligne :

https://frederic-junier.org/TS2021/Cours/Corrige-Cours-CalculIntegralPartie2-2021-Web.pdf