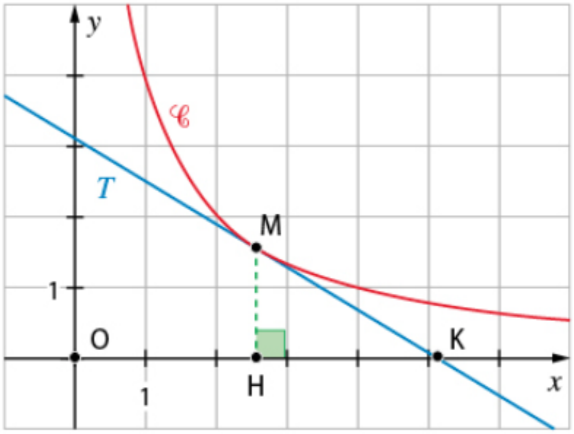
Équations différentielles

Recherche d'une courbe vérifiant une propriété

On veut résoudre le problème géométrique suivant :

« Existe-t-il une courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f dérivable sur $]0\,;+\infty[$ telle que, pour tout point M de cette courbe $\mathscr{C}$, son projeté orthogonal H sur l'axe des abscisses soit le milieu de [OK], où K est le point d'intersection de la tangente à $\mathscr{C}$ en M avec l'axe des abscisses ? »



Soit f une telle fonction, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative et M un point quelconque de $\mathscr{C}$ d'abscisse a.

1 Expliquer pourquoi on doit avoir $f'(a) \neq 0$.

2 **a.** Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point M.

b. Montrer que le point K a pour abscisse $a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$.

3 Montrer que la fonction f doit vérifier la relation suivante :

$$af'(a) + f(a) = 0 \text{ pour tout réel } a \text{ tel que } f'(a) \neq 0.$$

Cette équation, dans laquelle l'inconnue est la fonction f, est appelée équation différentielle.

4 **a.** Calculer la dérivée de la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = xf(x)$.

b. En déduire $g(a)$, puis $f(a)$ pour tout réel a strictement positif.

c. Répondre à la question posée au départ.

1) Soit a l'abscisse de M.
On doit avoir $f'(a) \neq 0$ sinon la tangente en M n'aura pas d'intersection avec l'axe des abscisses.

2) a) Équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ en M :

$$y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$$

b) K intersection de T et de l'axe des abscisses donc ses coordonnées $(x;y)$ sont solutions du système :

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = f'(a) \times (x-a) + f(a) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 = f'(a) \times (x-a) + f(a) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -f(a) = f'(a) \times (x-a) \end{cases}$$

or $f'(a) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -\dfrac{f(a)}{f'(a)} + a = x \end{cases}$$

On a donc $K\left(a - \dfrac{f(a)}{f'(a)} ; 0\right)$

3) H projeté orthogonal de $M(a;f(a))$ sur l'axe des abscisses donc $H(a;0)$

H milieu de $[OK]$ ssi $x_H = \frac{x_K}{2}$

D'après 2) b) :

H milieu de $[OK]$ ssi $\begin{cases} f'(a) \neq 0 \\ \text{et} \\ a = \left(a - \frac{f(a)}{f'(a)}\right) \times \frac{1}{2} \end{cases}$

H milieu de $[OK]$ ssi $\begin{cases} f'(a) \neq 0 \\ \text{et} \\ a = -\frac{f(a)}{f'(a)} \end{cases}$

H milieu de $[OK]$ ssi $\begin{cases} f'(a) \neq 0 \\ \text{et} \\ \boxed{a f'(a) + f(a) = 0} \end{cases}$

(E) équation différentielle d'inconnue f

4) a) Soit g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x f(x)$ avec f solution de l'équation différentielle (E) :

Pour tout $x > 0$, on a :

$$g'(x) = 1 \times f(x) + x \times f'(x)$$

Pour tout $x>0$ tel que $f'(x)>0$ on a alors : $x f'(x)+f(x)=0$ car f solution de (E) et donc $g'(x)=0$

b) On déduit de la question précédente que pour tout $x>0$ on a :

$$g(x) = \text{constante} = k$$

or $g(x) = x\, f(x)$

donc $f(x) = \dfrac{k}{x}$ avec k constante

On vérifie alors que $f'(x) = -\dfrac{k}{x^2} \neq 0$

c) On a démontré que si f solution de (E) alors pour tout $x>0$ tel que $f'(x) \neq 0$ on a $f(x) = \dfrac{k}{x}$ avec k constante

Réciproquement si pour tout $x>0$ on a $f(x) = \dfrac{k}{x}$ alors :

$$x f'(x) + f(x) = x \times \frac{-k}{x^2} + \frac{k}{x} = 0$$

donc f solution de (E)

L'ensemble des solutions sur $]0;+\infty[$ de : .

l'équation (E)
est donc l'ensemble des fonctions
$x \mapsto \frac{k}{x}$ avec $k>0$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ f_k : \left]0;+\infty\right[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{k}{x},\ k \in \mathbb{R} \right\}}$$

Capacité 1 ***Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle***

On considère l'équation différentielle (E) définie pour une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$(E)\ :\ y' - 2y = x - 1$$

1. Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ est solution de l'équation E.
2. a. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x}$ est solution de l'équation différentielle (E_0) définie pour une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ par $y' - 2y = 0$.
   L'équation (E_0) est *l'équation homogène* ou *équation avec second membre nul* associée à l'équation (E).
   b. Déterminer une autre solution de l'équation différentielle homogène (E_0).
   c. Déterminer la solution de l'équation différentielle homogène (E_0) telle que $y(0) = 3$.
3. a. Démontrer que la fonction $h = f + g$ est solution de l'équation différentielle (E).
   b. Déterminer une autre solution de l'équation différentielle (E).

1) Pour tout réel x, $f(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4}$
donc $f'(x) = -\frac{1}{2}$
donc $f'(x) - 2f(x) = -\frac{1}{2} + x - \frac{1}{2} = x - 1$
donc f solution de l'équation
$(E) : y' - 2y = x - 1$.

2) a) Soit g définie sur $\mathbb{R}$.
g dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x :

$$g'(x) - 2g(x) = 2e^{2x} - 2e^{2x} = 0$$

donc g solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$

b) Toute fonction g_k définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x :

$g_k(x) = k e^{2x}$ est solution de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$

c) Soit $g_k : x \mapsto k e^{2x}$ avec k constante réelle

une fonction solution de $y' - 2y = 0$
d'après 2) b).

$$g_k(0) = 3 \iff k \times e^{2\times 0} = 3$$

$$g_k(0) = 3 \iff k = 3$$

La fonction $g_3 : x \mapsto 3e^{2x}$ est donc solution de (E_0) et vérifie $g_3(0) = 3$.

3) a) Soit la fonction $h = f + g$

3) a) Soit $h = f + g$.
avec f solution de l'équation (E)
et g solution de l'équation (E_0)

Pour tout réel $x > 0$, on a :

$f'(x) - 2f(x) = x - 1$ car f solution de (E)

et $g'(x) - 2g(x) = 0$ car g solution de (E_0)

donc $f'(x) + g'(x) - 2f(x) - 2g(x) = x - 1$

en additionnant membre à membre

et donc $(f+g)'(x) - 2(f+g)(x) = x - 1$

Ainsi $f+g$ solution de l'équation (E)

b) Une autre solution de l'équation (E) s'obtient donc à partir de la solution f en lui ajoutant une solution g de l'équation homogène.

Par exemple la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) + 3e^{2x}$ est solution de l'équation (E)

Capacité 2 ***Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle ⇒ capacité 1 p. 297***

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

   a. Vérifier que la fonction F définie sur R par $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$ est une primitive de f.

   b. Déterminer d'autres primitives de la f.

2. Compléter le tableau de primitives :

Fonction f	Intervalle I	Une primitive F parmi une infinité ...
$f(x) = 1$	$\mathbb{R}$	....
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	....
$f(x) = 3x - 2$	$\mathbb{R}$	....
$f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$	$]0; +\infty[$	....
$f(x) = e^x + e^{-x}$	$\mathbb{R}$	....

1) a) Pour tout réel x :

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$

donc $F'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 = x^2$

donc F primitive de f

b) Toute fonction F_k définie sur $\mathbb{R}$ par
$F_k(x) = F(x) + k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

et vérifie pour tout réel x :

$$F_k'(x) = x^2$$

donc F_k est une primitive de f.

2)

Fonction f	Intervalle I	Une primitive F parmi une infinité ...
$f(x) = 1$	$\mathbb{R}$	$F(x) = x$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$
$f(x) = 3x - 2$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x$
$f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$	$]0; +\infty[$	$F(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$
$f(x) = e^x + e^{-x}$	$\mathbb{R}$	$F(x) = e^x - e^{-x}$

Capacité 3 ***Vérifier qu'une fonction est un primitive d'une autre fonction ⇒ capacité 2 p. 297***

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 4]$ par $f(x) = (3,6x + 2,4)e^{-0,6x} - 1,4$.

1. Vérifier que la fonction que la fonction F définie par $F(x) = (-6x - 14)e^{-0,6x} - 1,4x$ est une primitive de f.
2. Déterminer la solution sur $[0; 4]$ de l'équation différentielle $y' = f$ qui vérifie $y(0) = 10$.

1) Pour tout réel x.

$$F(x) = (-6x - 14)e^{-0,6x} - 1,4x$$

donc $F'(x) = -6e^{-0,6x} - 0,6e^{-0,6x}(-6x-14) - 1,4$

$$F'(x) = e^{-0,6x}(3,6x + 8,4 - 6) - 1,4 = f(x)$$

donc F primitive de f.

2) $F' = f$ donc F solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Soit k un réel, la fonction F_k définie sur $\mathbb{R}$ par $F_k(x) = F(x) + k$ vérifie pour tout réel x :

$$F'_k(x) = F'(x) + 0 = f(x)$$

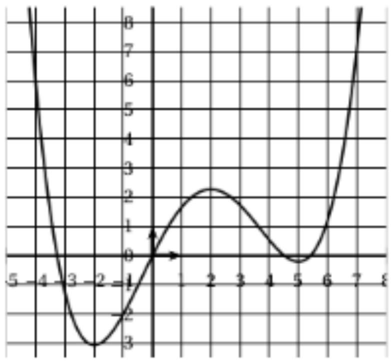
donc F_k solution de $y' = f$.

$F_k(0) = F(0) + k = 10 \iff -14 + k = 10$
$\iff k = 24$

F_{14} définie sur $\mathbb{R}$ par $F_{14}(x) = F(x) + 24$ est donc solution de l'équation différentielle $y' = y$ et vérifie $y(0) = 10$.

Capacité 4 ***Échelle des dérivées***

On considère la courbe d'une fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.



Pour chaque question, sélectionner la ou les bonne(s) réponse(s).

1. Soit f' la dérivée de f et F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

(A1)

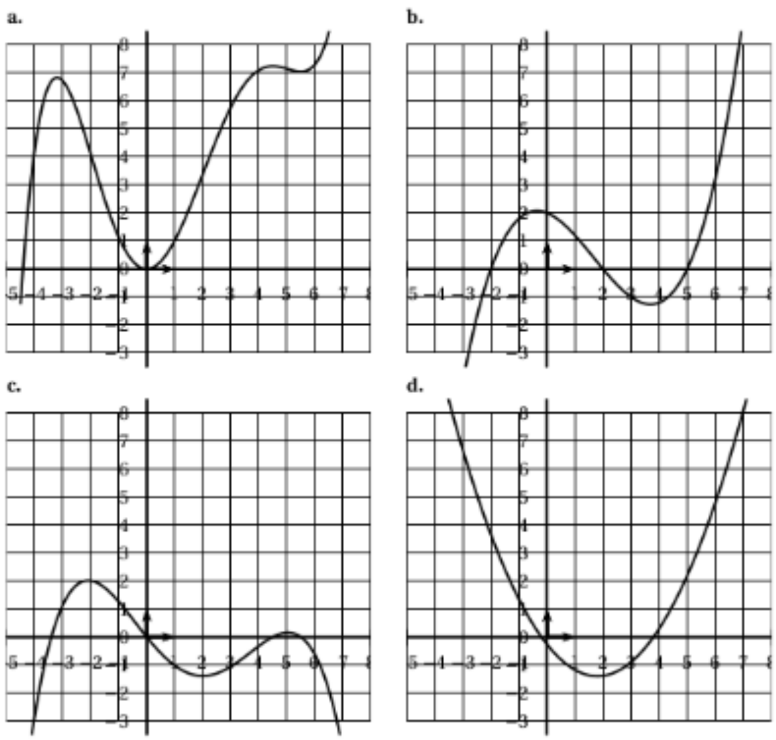
a. f' est positive sur $[2\ ;\ 4]$. Faux

b. f' est négative sur $[-4,5\ ;\ -4]$ Vrai

(A2)

c. F est décroissante sur $[2\ ;\ 4]$. Faux

d. F est décroissante sur $[-3\ ;\ -1]$ Vrai



2. Une des courbes ci-dessus représente la fonction f''. Laquelle? la d)

$\Rightarrow$ f convexe sur $]-\infty;0]$ et sur $[4;+\infty[$
et concave sur $[0;4]$

Capacité 7 ***Résoudre une équation différentielle*** $y' = ay \Rightarrow$ ***capacité 5 p. 301***

Soit (E) l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par $y' - 6y = 0$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 3$.

1) Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

(E) $y' - 6y = 0 \iff y' = 6y$

Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions $y : x \mapsto Ce^{6x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

2) Soit f une solution de l'équation (E) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{6x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

$f(0) = 3 \iff Ce^{6\times 0} = 3 \iff C = 3$

La solution f de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 3$ est donc la fonction $f : x \mapsto 3e^{6x}$

Capacité 8 ***Résoudre une équation différentielle $y' = ay + b$ ⇒ capacité 6 p. 301***

Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue. On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t, où t est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde.
On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est solution de l'équation différentielle :

$$(E)\;:\;10v'(t) + v(t) = 30$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

2. On suppose que, lorsque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle, c'est-à-dire que $v(0) = 0$. En déduire l'expression de la fonction v.

1) Soit v une fonction dérivable sur $[0; +\infty[$. qui est solution de l'équation (E).

Pour tout réel $t \geq 0$:

(E) $10v'(t) + v(t) = 30 \iff v'(t) = -\frac{1}{10}v(t) + 3$

. Résolvons l'équation (E) :

. On recherche la solution particulière constante :
On considère une fonction v constante et solution de (E).
D'une part il existe une constante k telle que pour tout réel $t \geq 0$, $v(t) = k$ et donc $v'(t) = 0$
D'autre part, pour tout réel $t \geq 0$:

$v'(t) = -\frac{1}{10}v(t) + 3 \iff 0 = -\frac{k}{10} + 3$

$\iff k = 30$

la solution particulière constante de l'équa-

-tion (E) est donc la fonction :

$$v : t \longmapsto 30.$$

- Ensuite on résout l'équation homogène.

Pour tout réel $t \geq 0$:

(E_0) : $10v'(t) + v(t) = 0 \iff v'(t) = -\frac{1}{10}v(t)$

D'après une propriété du cours, les solutions de l'équation (E_0) sont les fonctions définies sur $[0;+\infty[$ par :

$$v : t \longmapsto Ce^{-\frac{1}{10}t} \quad \text{avec } C \text{ réel}$$

Finalement on peut conclure que les solutions de l'équation (E) sont les fonctions :

$$v : t \longmapsto Ce^{-\frac{1}{10}t} + 30 \quad \text{avec } C \text{ réel}$$

2) On recherche la solution de (E) telle que $v(0) = 0$. D'après la question précédente : v a pour expression :

$$v(t) = Ce^{-\frac{1}{10}t} + 30$$

$v(0) = 0 \iff Ce^{-\frac{1}{10}\times 0} + 30 = 0 \iff C = -30$

La solution de l'équation (E) telle que $v(0)=0$ est donc la fonction :

$$v : t \mapsto 30\left(1 - e^{-\frac{1}{10}t}\right)$$

Rentrée atmosphérique d'un satellite

Activité 3 p. 295

En raison de frottements avec l'atmosphère résiduelle terrestre, les satellites en orbite basse perdent progressivement de l'altitude et finissent par se consumer dans les couches basses de l'atmosphère : on appelle cet événement une « rentrée atmosphérique ».

Le temps, exprimé en jours, avant la rentrée atmosphérique d'un satellite d'un certain type dépend de l'altitude h de son orbite, exprimée en kilomètres.

Ce temps est modélisé par une fonction ϕ de la variable h, dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et solution de l'équation différentielle (**E**) : $y' - 0{,}025y = 0$.

1 Montrer que la fonction v telle que $v(h) = e^{0{,}025h}$ est une solution de (**E**).

2 Soit ϕ une solution de (**E**), et u la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $u(h) = e^{-0{,}025h}\,\phi(h)$.

a. Vérifier que $u'(h) = e^{-0{,}025h}\left(\phi'(h) - 0{,}025\,\phi(h)\right)$.

b. Justifier que u est une fonction constante.

c. En déduire que $\phi(h) = Ce^{0{,}025h}$, où C est une constante réelle.

3 Pour un satellite de ce type dont l'orbite est à l'altitude 800 kilomètres, le temps avant la rentrée atmosphérique est de 2 000 jours.

Calculer $\phi(800)$, et en déduire la fonction ϕ.

Soit y une fonction dérivable sur $[0;+\infty[$ et l'équation différentielle :

$$(E) : y' - 0{,}025\, y = 0$$

1) v est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$v(h) = e^{0{,}025h}$$

Pour tout réel $h \geq 0$: $v'(h) = 0{,}025\, e^{0{,}025h}$

et donc $v'(h) - 0{,}025\, v(h) = 0$

On en déduit que v est solution de l'équation (E).

2) Soit ϕ une solution de (E) et u la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$u(h) = e^{-0{,}025h}\, \phi(h)$$

a) Pour tout réel $h \geq 0$:

$$u'(h) = -0{,}025\, e^{-0{,}025h}\, \phi(h) + e^{-0{,}025h}\, \phi'(h)$$

donc $u'(h) = e^{-0{,}025h}\left(\phi'(h) - 0{,}025\, \phi(h)\right)$

Or ϕ solution de (E) donc $\phi'(h) - 0{,}025\, \phi(h) = 0$

On en déduit que $u'(h) = 0$

puis que la fonction u est constante sur $[0;+\infty[$.

c) On déduit des questions a) et b) qu'il existe un réel C tel que pour tout réel $h \geqslant 0$:

$$u(h) = \phi(h)\, e^{-0,025h} = C$$

$$\Leftrightarrow \phi(h) = Ce^{0,025h}$$

2) D'après l'énoncé : $\phi(800) = 2000$

$$\phi(800) = 2000 \Leftrightarrow 2000 = Ce^{0,025\times 800}$$

$$\Leftrightarrow 2000 = Ce^{20}$$

$$\Leftrightarrow C = 2000\, e^{-20}$$

On en déduit que pour tout réel $h \geqslant 0$:

$$\phi(h) = 2000\, e^{0,025h-20}$$