Corrigés du chapitre loi binomiale

Capacité 1 ***Modéliser une situation par une succession d"épreuves indépendantes et calculer des probabilités***

Des robots se trouvent au centre de gravité O d'un triangle de sommets S, I et X.
Chacun se déplace en trois étapes successives de la manière suivante :

- à chaque étape, il passe par l'un des trois sommets S, I et X puis il rejoint le point O ;
- les robots sont programmés de telle sorte que, lors d'une étape, la probabilité de passer par le sommet S est égale à celle de passer par le sommet X et la probabilité de passer par le sommet S est le double de celle de passer par le sommet I ;
- les différentes étapes sont indépendantes les unes des autres ;
- on ne tient pas compte des passages par O.

Un seul robot se trouve au point O.

1. Démontrer qu'à chaque étape, la probabilité que le robot passe par le sommet I est égale à $\frac{1}{5}$.
2. On note E l'évènement : « au cours des trois étapes, le robot passe successivement par les 3 sommets S, I et X dans cet ordre ».

   Démontrer que la probabilité de E est égale à $\frac{4}{125}$.
3. On note F l'évènement : « au cours des trois étapes, le robot passe exactement par les 3 sommets S, I et X dans un ordre quelconque ».

   Déterminer la probabilité de F.

1) À chaque étape, on a d'après l'énoncé :

$P(S) = P(X) = 2P(I)$

De plus $\{S, X, I\}$ forme une partition de l'univers, donc : $P(S) + P(X) + P(I) = 1$

$\iff 2P(I) + 2P(I) + P(I) = 1$

$\iff 5P(I) = 1$

$\iff P(I) = \frac{1}{5}$

2) E est réalisé par la liste d'évènements indépendants (S, I, X). D'après une propriété du cours :

$P((S,I,X)) = P(S) \times P(I) \times P(X) = 2P(I) \times P(I) \times 2P(I)$

$P(E) = 4\left(P(I)\right)^3 = 4 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{4}{125}$

3) Le nombre de listes d'évènements indépen-dants réalisant F est le nombre de permuta-tions de l'ensemble $\{S, I, X\}$ c'est-à-dire $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$.

Chaque liste d'évènements constituée des évène-ments S, I et X a une probabilité égale au produit $P(S) \times P(I) \times P(X) = \frac{4}{125}$

On en déduit que $P(F) = 6 \times \frac{4}{125} = \frac{24}{125}$

Algorithmique 1 *Simuler une variable aléatoire de Bernoulli*

On lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On appelle « succès » l'apparition de la face 6.
Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la face est 6 et la valeur 0

1. X suit-elle une loi de Bernoulli ? Si oui, déterminer son paramètre.
2. On rappelle que `randint(a, b)` est un entier choisi aléatoirement entre deux entiers a et b compris. Compléter la fonction `Python` ci-dessous pour qu'elle simule la réalisation d'une réalisation de la variable aléatoire X :

```python
from random import randint

def simulX():
    return .....
```

3. De quelle valeur devraient se rapprocher `mystere(1000)`, `mystere(10000)` et `mystere(100000)` ? Justifier.

```python
from random import randint

def mystere(n):
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + simulX()
    return s / n
```

https://frama.link/LoiBinomialeExemplesCours2021

```python
# Exemples du cours Loi Binomiale

# Algorithmique 1
from random import randint

def simulX():
    return randint(1, 6)

def mystere(n):
    """Approximation de l'espérance de X
    par la moyenne empirique (loi faible des grands nombres)
    """
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + simulX()
    return s / n

def graphique_algo1():
    # Graphique des valeurs de mystere()
    import matplotlib.pyplot as plt
    tx = [10, 100, 500, 1000, 2000, 5000, 10000]
    ty = [mystere(n) for n in tx]
    plt.clf()
    plt.title("X suit la loi B(1/6), approximation de E(X) par les moyennes empiriques")
    plt.xlabel("taille de l'échantillon")
    plt.ylabel("Moyenne empirique")
    plt.plot(tx, ty, marker = 'o', ls='-')
    plt.show()

graphique_algo1()
```