Prise de notes du 27/04/2021

QCM Doctools sur l'intégrale

link.dgpad.net/kbTU

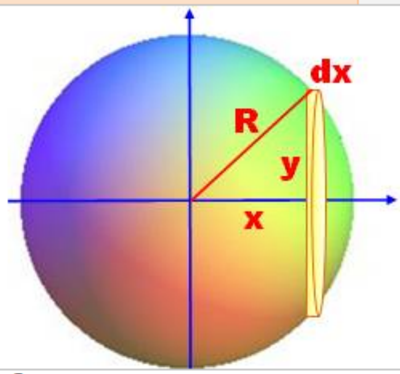
4e

Application du calcul intégral au calcul de volume

Calcul par tranches

Principe

Calculer le volume de la sphère en faisant la somme des volumes des disques jaunes, considérés comme aussi fins que possible.



Calculs

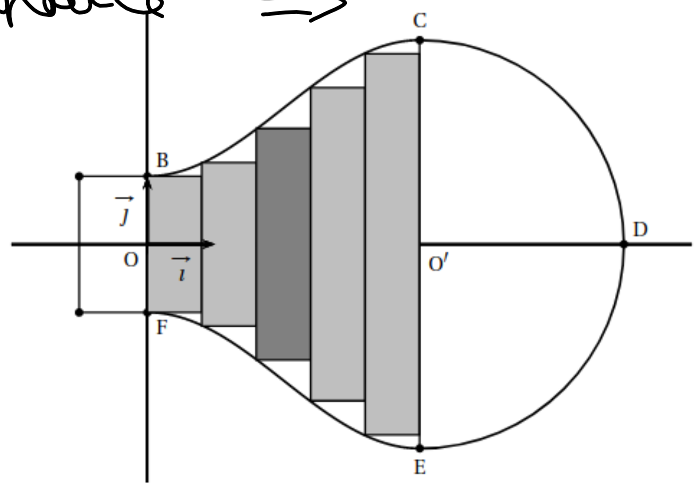
Volume du disque jaune (cylindre):	$v = \pi y^2 dx$
Volume de la sphère: passage d'une somme discrète (sigma) à une somme continue (intégrale):	$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{-R}^{R} \pi y_i^2 dx = \int_{-R}^{R} \pi y^2 dx$

Sitographie:

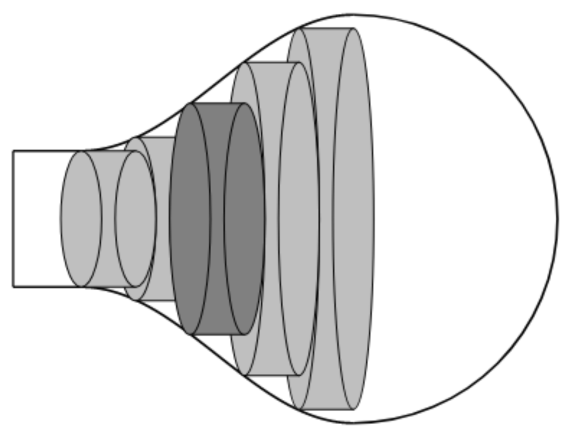
- http://villemin.gerard.free.fr/GeomLAV/SphereIn.htm
- Méthode de Cavalieri (principe des indivisibles, attention peut conduire à des raisonnements faux !)
  https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode_des_indivisibles

↳ on donne une épaisseur aux indivisibles
↳ calcul intégral

• Un exemple dans un sujet de Bac (Polynésie juin 2018) calcul du volume d'une ampoule =>



Vue dans le plan (BCE)



Vue dans l'espace

https://www.apmep.fr/IMG/pdf/S_Polynesie_20_juin_2018_DV.pdf

Capacité 7 ***Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive, voir capacité 4 p. 333***

Calculer les intégrales suivantes :

5min

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$;

2. $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{1}{(2x-1)^4}\,dx$;

3. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \cos(\theta)\ d\theta$;

5min

4. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos(2\theta)\ d\theta$;

5. $\displaystyle\int_{-4}^{-2} (3x-1)^6\,dx$;

6. $\displaystyle\int_{0}^{x} \sin^2(t)\,dt$.

5min

7. $\displaystyle\int_{e}^{e^3} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

8. $\displaystyle\int_{0}^{x} \frac{1}{1+e^t}\,dt$

9. $\displaystyle\int_{2}^{e} \frac{1}{x(\ln(x))^2}\,dx$

Capacité 10 ***Majorer ou minorer une intégrale, voir capacité 5 p.335***

1. Déterminer le signe des intégrales suivantes :

a. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x \, dx$ **b.** $\int_{1}^{0} x^2 \, dx$ **c.** $\int_{1}^{\frac{1}{e}} \ln x \, dx$

2. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \int_0^1 \ln\left(1 + x^n\right) \, dx$.

   a. Etudier le sens de variation de la suite (u_n).

   b. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \ln 2$.
   En déduire que la suite (u_n) est convergente.

   c. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout réel $x \in [0; 1]$ on a : $0 \leqslant \ln\left(1 + x^n\right) \leqslant x^n$.
   En déduire la limite de la suite (u_n).

2) a) $u_n = \int_0^1 \ln(1+x^n) \, dx$

Pour tout entier $n \geq 1$:

$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \ln(1+x^{n+1}) \, dx - \int_0^1 \ln(1+x^n) \, dx$

$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 [\ln(1+x^{n+1}) - \ln(1+x^n)] \, dx$

linéarité de l'intégrale

Pour n entier naturel, quel est le signe de $\ln(1+x^{n+1}) - \ln(1+x^n)$ si $x \in [0;1]$

Capacité 11 ***Étudier une suite d'intégrales, voir capacité 7 p.337***

Soit f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

1. Démontrer que pour tout $t\in[2\,;+\infty[$ on a : $0\leqslant f(t)\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t}$.
2. En déduire que pour tout entier $n\geqslant 2$ on a : $0\leqslant\displaystyle\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\dfrac{\mathrm{e}^{-2}}{\sqrt{2\pi}}$
3. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 2}$ est croissante.

Intégration par parties

PROPRIÉTÉS Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et dont les dérivées u' et v' sont continues sur I. Soit a et b deux réels de I.

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

DÉMONSTRATION

Les fonctions u et v sont dérivables sur I donc la fonction uv l'est aussi et $(uv)' = u'v + uv'$.
Donc pour tout réel x de I, $u(x)v'(x) = (uv)'(x) - u'(x)v(x)$.
Or, les fonctions u et v sont continues sur I car elles sont dérivables sur I. De plus u' et v' sont continues sur I donc les fonctions uv' et $u'v$ le sont également.

Donc $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left((uv)'(x) - u'(x)v(x)\right)\mathrm{d}x$

$= \int_a^b (uv)'(x)\mathrm{d}x - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ (propriété de linéarité).

Or, une primitive de la fonction $(uv)'$ est la fonction uv.

Donc $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$.

Cette méthode permet de transformer le calcul de l'intégrale d'une fonction. Un bon choix des fonctions u et v' conduit au calcul de l'intégrale d'une fonction dont on sait déterminer une primitive.

EXEMPLE : Calcul de $\int_0^\pi x\sin(x)\mathrm{d}x$.

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin(x)$ donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\cos(x)$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0 ; \pi]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[0 ; \pi]$.

Donc : $\int_0^\pi x\sin(x)\mathrm{d}x = \left[-x\cos(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos(x)\mathrm{d}x = \left[-x\cos(x)\right]_0^\pi + \left[\sin(x)\right]_0^\pi = \pi$.

Capacité 12 ***Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties, voir capacité 6 p.335***

1. Soit l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x$.

   a. Compléter :
   Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\pi]$, on pose :

   $$\begin{array}{ll} u(x) = x & u'(x) = \ldots \\ v'(x) = \sin(x) & v(x) = \ldots \end{array}$$

   b. Calculer l'intégrale K en appliquant la méthode d'intégration par parties.

2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (3x-2)\ln(x)\,\mathrm{d}x$ avec la méthode d'intégration par parties.

3. **a.** Soit x un réel strictement positif, avec la méthode d'intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^{x} \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

   b. En déduire une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0\,;+\infty[$.

125 20 min *Capacité 6, p. 335*

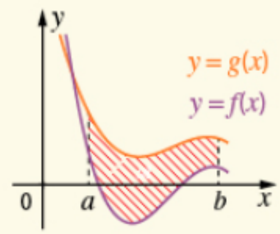
Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2x-1)\cos(x)\mathrm{d}x$.

2. $\int_1^{\mathrm{e}}5x^2\ln(x)\mathrm{d}x$.

PROPRIÉTÉ **Aire entre deux courbes**

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I telles que pour tout réel x de I, $f(x) \leqslant g(x)$. Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$. L'aire $\mathscr{A}$, en u.a., de la surface délimitée par les courbes représentant les fonctions f et g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x$.

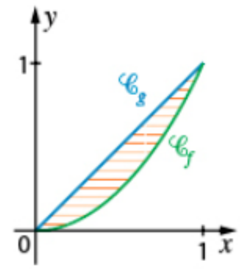


EXEMPLE : Soit f et g les fonctions définies sur [0 ; 1] par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$. Soit $\mathscr{S}$ le domaine délimité par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Pour tout réel x de [0 ; 1], on sait que $x^2 \geqslant x$.

Or, $\int_0^1 (x - x^2)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Donc, l'aire de $\mathscr{S}$, en unités d'aire, est $\frac{1}{6}$.



Capacité 13 ***Calculer l'aire entre deux courbes, capacité 8 p.337***

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0; 16]$ par

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x).$$

Dans un repère du plan $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g. Ces courbes sont données ci-dessous.

Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique.