



## Histoire 1

Il y a 2500 ans environ, **Zénon d'Élée** énonçait le **paradoxe d'Achille et la tortue** : « *Achille voit une tortue devant lui. Il court pour la rattraper mais il ne pourra y arriver car lorsque Achille atteint la place qu'occupait la tortue, cette dernière a avancé; il doit donc atteindre maintenant la place qu'elle occupe alors, et ainsi de suite ...* ». Ce paradoxe peut être résolu avec la définition rigoureuse de limite d'une fonction fixée par **Weierstrass (1815-1897)** et la construction des nombres réels par **Dedekind (1831-1916)** qui fonde un continu mathématique correspondant au continu de notre intuition physique.

## 1 Limite en l'infini d'une fonction

### 1.1 Limite réelle en l'infini, asymptote horizontale



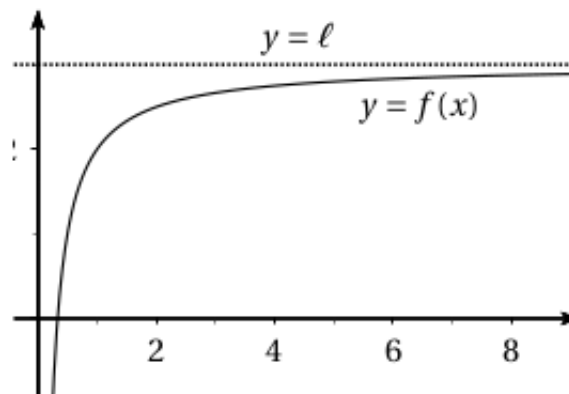
#### Définition 1

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $[a; +\infty[$  et soit  $\ell$  un réel.

- Si tout intervalle ouvert  $I$  contenant  $\ell$ , contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  assez grand alors on dit que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  et on note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f(x) = \ell$$

- On dit alors que la droite d'équation  $y = \ell$  est **asymptote horizontale** à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$ .



La droite d'équation  $y = \ell$  est asymptote à courbe  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$



#### Définition 2

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $]-\infty; a]$  et soit  $\ell$  un réel.

- Si tout intervalle ouvert  $I$  contenant  $\ell$ , contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  négatif assez

grand en valeur absolue alors on dit que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$  et on note :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{-\infty} f(x) = \ell$$

- On dit alors que la droite d'équation  $y = \ell$  est **asymptote horizontale** à  $\mathcal{C}_f$  en  $-\infty$ .

## Capacité 1 Interpréter graphiquement une limite finie en l'infini

Soit  $f$  une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\lim_{-\infty} f(x) = 4$  et  $\lim_{+\infty} f(x) = -2$ .

- Représenter une courbe possible pour  $f$  en traçant ses droites asymptotes en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
- $f$  est-elle nécessairement une fonction décroissante sur  $\mathbb{R}$ ?

## 1.2 Limite infinie en l'infini

### Définition 3

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $[\alpha; +\infty[$ .

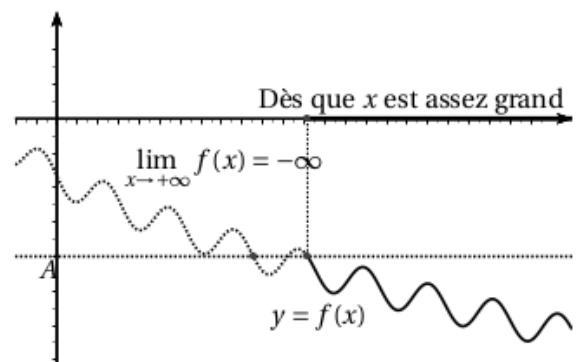
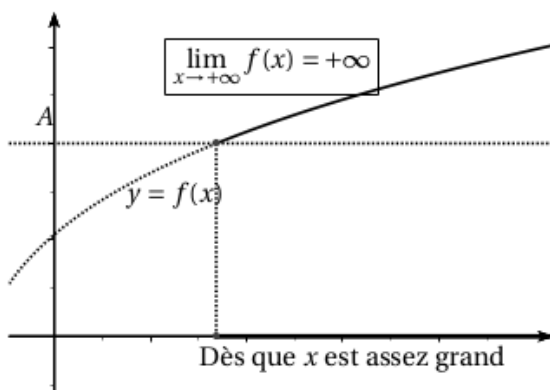
- Si tout intervalle  $]A; +\infty[$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  assez grand alors on dit que  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  et on note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f(x) = +\infty$$

- Si tout intervalle  $] -\infty; A[$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  assez grand alors on dit que  $f(x)$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  et on note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f(x) = -\infty$$

On a des définitions similaires pour  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$



## Capacité 2 Comprendre la définition d'une limite en l'infini

Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse :

- **Affirmation 1 :** Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  alors  $f$  croissante sur son intervalle de définition.
- **Affirmation 2 :** Si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  alors  $f$  décroissante sur son intervalle de définition.
- **Affirmation 4 :** Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  alors  $f(x) < 0$  pour  $x$  assez grand.
- **Affirmation 5 :** Si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  alors  $f(x) > 734$  pour  $x$  assez petit.

### 1.3 Lien avec les suites

#### Propriété 1 admise

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $[a; +\infty[$ .

Si la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$  existe alors la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier  $n \geq a$  par  $u_n = f(n)$ , possède la même limite.

### 1.4 Limites de référence en l'infini

#### Propriété 2

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \\ +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- Soit  $p \in \mathbb{R}$  alors,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} p = p$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} p = p$
- Si  $m > 0$  alors  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} mx + p = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} mx + p = -\infty \end{cases}$
- Si  $m < 0$  alors  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} mx + p = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} mx + p = +\infty \end{cases}$
- $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{cases}$

## Démonstration

Les démonstrations des limites de la fonction exponentielle en  $-\infty$  et en  $+\infty$  sont au programme et seront établies dans la propriété 5 de ce chapitre.

## 2 Limite d'une fonction en un réel $a$

Dans toute cette section, on considère une fonction  $f$  définie sur un ensemble  $\mathcal{D}_f$  et un réel  $a$  tel que soit  $a \in \mathcal{D}_f$ , soit  $a$  est une borne de  $\mathcal{D}_f$ .

### 2.1 Limite infinie en $a$ , asymptote verticale

#### Définition 4

- Dire qu'une fonction  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $a$  signifie que tout intervalle  $]A; +\infty[$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour tous les  $x$  assez proches de  $a$ , c'est-à-dire pour tous les  $x$  d'un certain intervalle  $]a - \alpha; a + \alpha[$  et dans  $\mathcal{D}_f$ .

On note  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ .

- Lorsqu'on considère la restriction de  $f$  à  $\mathcal{D}_f \cap ]a; +\infty[$ , on dit que  $f$  a pour limite  $+\infty$  à droite de  $a$  (ou en  $a^+$ ) si tout intervalle  $]A; +\infty[$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour tous les  $x$  d'un certain intervalle  $]a; a + \alpha[$  et dans  $\mathcal{D}_f$ .

On note  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ .

- On définit de même que  $f$  a pour limite  $+\infty$  à gauche de  $a$  (ou en  $a^-$ ) et on note  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = +\infty$ .

- Si  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $a$ , en  $a^+$  ou en  $a^-$ , alors la droite d'équation  $x = a$  est asymptote verticale à  $\mathcal{C}_f$ .

On a des définitions similaires pour  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  ou  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = -\infty$  ou  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = -\infty$ .

### 2.2 Limite finie en $a$ et limites de référence

#### Définition 5

Dire qu'une fonction  $f$  a pour limite  $\ell$  en  $a$  signifie que tout intervalle ouvert de centre  $\ell$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour tous les  $x$  proches de  $a$ , c'est-à-dire pour tous les  $x$  d'un certain intervalle  $]a - \alpha; a + \alpha[$  et dans  $\mathcal{D}_f$ .

On note :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ .

En particulier, si  $a \in \mathcal{D}_f$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  alors  $\ell = f(a)$ .

Comme pour les limites infinies, on peut avoir besoin de définir les notions de limite finie à droite en  $a$

notée  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \ell$  ou de limite finie à gauche en  $a$  notée  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \ell$ .



## Propriété 3 admise

1. Soit  $a$  un réel :

- Si  $a \geq 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$
- Si  $f$  est un polynôme ou un quotient de polynômes défini en  $a$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .
- $\lim_{x \rightarrow a} e^x = e^a$

3.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \\ +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

2.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

4.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$



## Capacité 3 Interpréter graphiquement des limites

On considère une fonction  $f$  dont on donne ci-dessous le tableau de variation.  
On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe dans un repère orthonormal du plan.

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f(x)$	731 $\nearrow$ $+\infty$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$	$+\infty$ $\searrow$ 732	

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Quelles sont les valeurs de  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x)$  et de  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x)$ ?
3. Quelles sont les limites de  $f$  en  $1^-$  et  $1^+$ ?
4. Déterminer les éventuelles droites asymptotes horizontales à  $\mathcal{C}_f$ .
5. Déterminer les éventuelles droites asymptotes verticales à  $\mathcal{C}_f$ .
6. Dans un repère orthonormal du plan, tracer les droites asymptotes à  $\mathcal{C}_f$  puis une représentation possible de  $\mathcal{C}_f$ .

## 3 Règles opératoires sur les limites

Dans toute cette section les fonctions  $u$  et  $v$  sont deux fonctions admettant une limite finie ou infinie, lorsque  $x$  tend vers  $a$  qui peut être un réel ou  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

L'abréviation FI signifie forme indéterminée, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de théorème général permettant de conclure.

### 3.1 Limite d'une somme

$\lim_{x \rightarrow a} u(x) =$	$L$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} v(x) =$	$L'$	$L'$	$L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} u(x) + v(x) =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

### 3.2 Limite d'un produit

$\lim_{x \rightarrow a} u(x) =$	$\ell$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} v(x) =$	$\ell'$	$\ell' > 0$ ou $\ell' < 0$	$\ell' > 0$ ou $\ell' < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} u(x) \times v(x) =$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$ ou $-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

### 3.3 Limite d'un quotient

$\lim_{x \rightarrow a} u(x) =$	$\ell$	$\ell$	$+\infty$	$-\infty$	$\ell > 0$ ou $\ell < 0$	$\ell > 0$ ou $\ell < 0$
$\lim_{x \rightarrow a} v(x) =$	$\ell' \neq 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	$\ell' > 0$ ou $\ell' < 0$	$\ell' > 0$ ou $\ell' < 0$	$0^+$	$0^-$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} =$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow a} u(x) =$	$-\infty$	$+\infty$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} v(x) =$	$0^+$ ou $0^-$	$0^+$ ou $0^-$	$-\infty$ ou $+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} =$	$-\infty$ ou $+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$0^-$ ou $0^+$	$0^-$ ou $0^+$	FI	FI

## **Capacité 4 Déterminer une limite par règles opératoires**

Voir les capacités 3 et 4 du manuel Indice page 169.

### 3.4 Formes indéterminées

Il existe quatre formes indéterminées : «  $\infty - \infty$  », «  $\infty \times 0$  », «  $\frac{\infty}{\infty}$  », «  $\frac{0}{0}$  ». En pratique, pour lever l'indétermination, on change de forme en factorisant par exemple par les termes prépondérants ( en l'infini pour tous entiers  $n > p$ ,  $x^n$  l'emporte sur  $x^p$ , et  $x^n$  l'emporte sur  $\sqrt{x}$ ).

#### **Méthode**

- Pour lever une forme indéterminée de la forme  $+\infty + (-\infty)$ , on peut essayer de changer de forme en factorisant l'expression par le terme prépondérant. Pour une fonction polynôme, le terme prépondérant en  $+\infty$  ou  $-\infty$  est le terme de plus haut degré.
- Pour lever une forme indéterminée de la forme  $\frac{\infty}{\infty}$  ou  $\frac{0}{0}$ , on peut factoriser le numérateur et le dénominateur par leur terme prépondérant puis simplifier le quotient des termes prépondérants.

## **Capacité 5 Lever une forme indéterminée en factorisant le terme prépondérant**

1. Soit  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = -2x^5 + 3x^4 - x + 1$ .

Déterminer la limite de  $h$  en 0, puis en  $-\infty$  et enfin en  $+\infty$

2. Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$  par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 8x + 6}{x^2 + x - 2}$$

- a. Déterminer la limite de  $f$  en chacune des bornes de son ensemble de définition.
- b. Interpréter graphiquement ces limites.

## **Capacité 6 Limite et algorithme de seuil**

Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est *vraie* ou *fausse* en justifiant la réponse.

- **Affirmation 1 :** La boucle ci-dessous se termine :

```
def f(x):
    return x ** 3 - x ** 2

x = 0
while f(x) < 734:
    x = x + 1
```

- **Affirmation 2 :** La boucle ci-dessous ne se termine pas.

```
def f(x):
    return x ** 3 - x ** 2
```

```
x = 0
while f(x) > -734:
    x = x - 1
```

- **Affirmation 3 :** La boucle ci-dessous se termine.

```
def f(x):
    return (734 * x ** 2) / (x ** 2 + 1)

x = 0
while abs(f(x) - 734) > 0.001:
    x = x + 1
```

- **Affirmation 4 :**

Même question que l'affirmation 3 mais sans la valeur absolue dans le test :  $f(x) - 734 > 0.001$ .

## 4 Limite d'une fonction composée

### 4.1 Notion de fonction composée

#### Méthode

Soit la fonction  $g : x \mapsto \sqrt{2-x}$ .

- ☞ Décomposons le calcul de l'image de  $-7$  par la fonction  $g$  :

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ -7 \xrightarrow{u} 2 - (-7) = 9 \xrightarrow{v} \sqrt{9} = 3 \end{array}$$

L'image de  $-7$  s'obtient par enchaînement de deux fonctions :

- On calcule d'abord  $u(-7) = 2 - (-7) = 9$  image de  $-7$  par la fonction  $u : x \mapsto 2 - x$ .
- Ensuite on calcule  $v(9) = \sqrt{9} = 3$  image de  $u(-7)$  par la fonction  $v : y \mapsto \sqrt{y}$ .

- ☞ Et si on veut déterminer l'image de l'image de  $3$  par la fonction  $g$ ?

- $3 \xrightarrow{u} 2 - 3 = -1$
-  On ne peut pas déterminer l'image de  $-1$ , qui est négatif, par  $v : y \mapsto \sqrt{y}$

L'image de  $3$  par la fonction  $g$  n'est pas définie car l'image de  $3$  par la première fonction de l'enchaînement n'appartient pas à l'intervalle de définition de la deuxième fonction  $v$  de l'enchaînement.

- ☞  $g(x)$ , s'il est défini, s'obtient par l'enchaînement de deux fonctions :

- on part de  $x$  auquel on associe  $2 - x$  par la fonction  $u : x \mapsto 2 - x$ .
- ensuite à  $u(x) = 2 - x$  on associe  $\sqrt{u(x)} = \sqrt{2 - x}$  par la fonction  $v : y \mapsto \sqrt{y}$  où  $2 - x$  est substitué à la variable  $y$ .



On dit que  $g$  est la **composée** de la fonction  $u$  suivie de la fonction  $v$ , et on a  $g(x) = v(u(x))$ .

On note  $g = v \circ u$  où  $\circ$  est l'opérateur de **composition**.

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ x \xrightarrow{u} 2-x \xrightarrow{v} \sqrt{2-x} \end{array}$$

## Définition 6

Soit  $u$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $v$  une fonction définie sur un intervalle  $J$  telles que pour tout  $x \in I$  on a  $u(x) \in J$ .

La fonction composée  $u$  suivie de  $v$ , notée  $v \circ u$ , est la fonction définie sur  $I$  par  $v \circ u(x) = v(u(x))$ .

## 4.2 Limite par composition

### Théorème 1 admis

Soit  $u$  une fonction définie sur intervalle  $I$  et  $v$  une fonction définie sur un intervalle  $J$  telles que  $\forall x \in I, u(x) \in J$ .

On peut définir sur  $I$  la fonction composée  $g : x \mapsto (v \circ u)(x)$  par  $g(x) = v(u(x))$ .

Soit trois réels  $a$  appartenant à  $I$  (ou borne de  $I$ ),  $b$  appartenant à  $J$  (ou borne de  $J$ ) et  $c$  tels que :

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow b} v(X) = c$$

alors on a par composition des limites :

$$\lim_{x \rightarrow a} v(u(x)) = c$$

Ce théorème s'applique également aux suites  $(v(u_n))_{n \geq 0}$  définies par composition (avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u = b$ ).

On peut remplacer  $a, b$  ou  $c$  par  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

### Capacité 7 Déterminer une limite par composition (voir capacité 6 p.171)

On donne le tableau de variation d'une fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ , on note  $\mathcal{C}_f$  la courbe de  $f$  dans un repère du plan.

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0,5	$+\infty$

De plus on sait que :

$$f(-2) = -3 \quad \text{et} \quad f(3) = 2$$

On donne le tableau de variation d'une fonction  $g$  dérivable sur  $\mathbb{R} - \{-2\}$ , on note  $\mathcal{C}_g$  la courbe de  $g$  dans un repère du plan.

$x$	$-\infty$	$-3$	$-2$	$1$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$0$	$-\infty$	$-2$	$-5$

- Calculer  $g(f(-2))$  puis déterminer un encadrement de  $g(f(3))$ .
- Que vaut  $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} g(x)$ ? Interpréter graphiquement cette limite.
  - Tracer dans un repère une représentation possible de la courbe  $\mathcal{C}_g$  avec ses droites asymptote(s) qu'on peut déduire du tableau de variation de  $g$  et sa tangente au point d'abscisse 1.
- En justifiant déterminer les limites suivantes :

$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)}$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) - f(x)$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \times f(x)$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(f(x))$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(f(x))$	$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(g(x))$	$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(g(x))$

## 5 Limites par comparaison ou encadrement



### Propriété 4 Passage à la limite dans une inégalité

Soit  $a$  un réel (ou  $+\infty$  ou  $-\infty$ ), soit  $I$  un intervalle contenant  $a$  ou dont  $a$  est une borne, soit  $f$  une fonction définie sur  $I$  telle que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe et soit  $k$  un réel.

**Si pour tout réel  $x \in I$  on a  $f(x) < k$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq k$ .**

**Lorsqu'on passe à la limite dans une inégalité, son sens est conservé mais elle devient une inégalité large.**



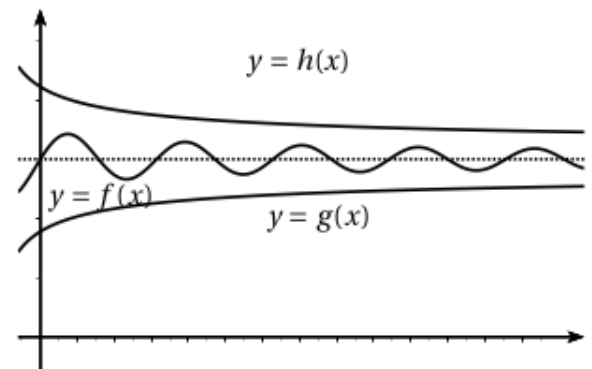
### Théorème 2 Théorème d'encadrement dit « des gendarmes », admis

Soient  $f, g, h$  trois fonctions définies sur un intervalle  $I$  du type  $]a; +\infty[$  telles que :

- pour tout  $x \in I$ , on ait  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$

Alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$

Un théorème similaire permet d'obtenir une limite par encadrement lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$  ou lorsque  $x$  tend vers un réel  $b$ .



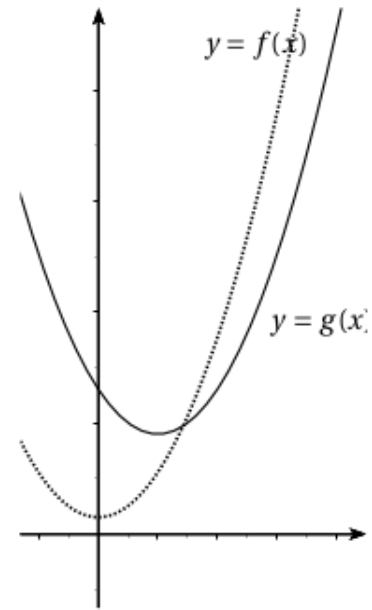


## **Théorème 3 Théorème de comparaison, même preuve que le théorème analogue pour les suites**

Soient  $f, g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$  du type  $]a; +\infty[$ .

1. Si pour tout  $x \in I$ ,  $g(x) \leq f(x)$  et si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$   
alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
2. Si pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \leq g(x)$  et si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$   
alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

Un théorème similaire permet d'obtenir une limite infinie par comparaison lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$  ou lorsque  $x$  tend vers un réel  $b$ .



## **Capacité 8 Utiliser les théorèmes de limite par comparaison ou encadrement**

1. Soit  $f$  une fonction telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $-1 \leq f(x) \leq 1$ . Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow +\infty} x + f(x) \quad \text{b. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{c. } \lim_{x \rightarrow -\infty} x + f(x)$$

2. Soit la fonction  $g$  définie sur  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$  par  $g(x) = \frac{\sin(x)}{x} + 1$ .

- a. Représenter graphiquement la courbe de  $g$  avec sa calculatrice et conjecturer ses limites en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
- b. En utilisant un encadrement de  $\sin(x)$ , déterminer un encadrement de  $g(x)$  pour tout réel  $x$  et en déduire les limites conjecturées.

## 6 Limites et exponentielle

### 6.1 Limites de la fonction exponentielle en $-\infty$ et $+\infty$



#### **Propriété 5**

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \dots$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \dots$

La droite d'équation ..... est asymptote à la courbe de la fonction exponentielle au voisinage de  $-\infty$ .



#### **Démonstration Au programme**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^x - (x + 1)$ .  
 $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on note  $f'$  sa fonction dérivée.

1. Déterminer l'expression de  $f'(x)$  pour tout réel  $x$  et en déduire le tableau de variations de  $f$ .

2. Justifier que pour tout réel  $x$ , on a  $e^x \geq x + 1$ .

3. En déduire la limite de la fonction exponentielle en  $+\infty$ .

4. Déterminer la limite de la fonction exponentielle en  $-\infty$  à l'aide du théorème de limite par composition.

## Capacité 9 Déterminer une limite par règles opératoires (dont composition)

Déterminer les limites suivantes :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\bullet \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,5t+2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} - e^x$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(3x + 1)e^{-3x}$$

## 6.2 Croissances comparées entre l'exponentielle et les puissances



### Propriété 6 Croissances comparées de $e^x$ et $x^n$

Soit  $n$  un entier naturel non nul, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$$

En particulier on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ .

### ○ Démonstration *Au programme, voir manuel p. 172*

- Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ . Étudier les variations de  $f$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- En déduire que pour tout réel  $x > 0$  on a  $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$ .

.....

.....

.....

.....

.....

- En déduire la limite de  $\frac{e^x}{x}$  en  $+\infty$ .

.....

.....

.....

.....

- Soit  $n$  un entier naturel.

- Justifier que pour tout réel  $x > 0$ , on a :  $\frac{e^x}{x^n} = \left( \frac{1}{n} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} \right)^n$ .

.....

.....

.....

- En déduire la limite de  $\frac{e^x}{x^n}$  en  $+\infty$  en appliquant le théorème de limite par composition.

.....

.....

.....

.....

.....

- Soit  $n$  un entier naturel.

- Démontrer que pour tout réel  $x < 0$ , on a :  $x^n e^x = (-1)^n \frac{(-x)^n}{e^{-x}}$ .

.....

.....

.....

- En déduire la limite de  $x^n e^x$  en  $-\infty$  en appliquant le théorème de limite par composition.

.....

.....

.....

.....

.....

- Démontrer que pour tout réel  $x > 0$ , on a :  $\frac{e^x}{\sqrt{x}} = \sqrt{2 \frac{e^{2x}}{2x}}$ .

.....

.....

En déduire la limite de  $\frac{e^x}{\sqrt{x}}$  en  $+\infty$  en appliquant le théorème de limite par composition.

## Capacité 10 Déterminer une limite avec une règle de croissances comparées

Déterminer les limites suivantes :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x - e^x$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3)e^x$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{x}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{4x}}{x}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos(x)e^x}{x}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x}$$

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Limite en l'infini d'une fonction</b>	<b>1</b>
1.1	Limite réelle en l'infini, asymptote horizontale	1
1.2	Limite infinie en l'infini	2
1.3	Lien avec les suites	3
1.4	Limites de référence en l'infini	3
<b>2</b>	<b>Limite d'une fonction en un réel <math>a</math></b>	<b>4</b>
2.1	Limite infinie en $a$ , asymptote verticale	4
2.2	Limite finie en $a$ et limites de référence	4
<b>3</b>	<b>Règles opératoires sur les limites</b>	<b>6</b>
3.1	Limite d'une somme	6
3.2	Limite d'un produit	6
3.3	Limite d'un quotient	6
3.4	Formes indéterminées	7
<b>4</b>	<b>Limite d'une fonction composée</b>	<b>8</b>
4.1	Notion de fonction composée	8
4.2	Limite par composition	9
<b>5</b>	<b>Limites par comparaison ou encadrement</b>	<b>10</b>
<b>6</b>	<b>Limites et exponentielle</b>	<b>11</b>
6.1	Limites de la fonction exponentielle en $-\infty$ et $+\infty$	11
6.2	Croissances comparées entre l'exponentielle et les puissances	13