Corrigé des exemples du cours
Chapitre 1 : suites et récurrence

Capacité 1 ***Modéliser une situation par une suite***

Une balle en caoutchouc est lâchée sans vitesse initiale d'une hauteur de 2 mètres au-dessus du sol.
Le choc n'étant pas parfaitement élastique, la balle rebondit jusqu'à une hauteur de 1,60 mètre et continue à rebondir, en atteignant après chaque rebond une hauteur égale au $\frac{4}{5}$ de la hauteur du rebond précédent.
On modélise les hauteurs atteintes par la balle par une suite (h_n) où pour tout entier naturel n, h_n est la hauteur, exprimée en mètres, atteinte par la balle au n-ième rebond. On a alors $h_0 = 2$.

1. **a.** Calculer h_1 et h_2.
   b. Pour tout entier naturel n, exprimer h_{n+1} en fonction de h_n.
   c. En déduire la nature de la suite (h_n). Préciser ses caractéristiques.
   d. Déterminer le sens de variation de la suite (h_n).
2. Déterminer le nombre minimal N de rebonds à partir duquel la hauteur atteinte par la balle est inférieure à 20 cm. Expliquer la démarche employée.

1) a) $h_0 = 2 \xrightarrow{\times \frac{4}{5}} h_1 = 1{,}6 \xrightarrow{\times \frac{4}{5}} h_2 = 1{,}28$

b) et c) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$h_{n+1} = \frac{4}{5} \times h_n$$

Par définition, la suite (h_n) est géométrique de raison $\frac{4}{5}$.

d) La suite (h_n) est géométrique de raison $\frac{4}{5} > 0$ donc elle est monotone.
De plus $h_0 > h_1$, donc (h_n) est décroissante.

2) Pour déterminer le plus petit entier N tel que $h_N < 0{,}2$ on utilise :

- soit le tableau de valeurs de la calculatrice et on trouve que $N = 11$

deg SEQUENCES

Sequences Graph Table

Set the interval

5	0.65536
6	0.524288
7	0.4194304
8	0.3355443
9	0.2684355
10	0.2147484
11	0.1717987
12	0.137439
13	0.1099512

- soit un algorithme de seuil programmé en Python :

https://workshop.numworks.com/python/frederic-junier/chapitre1_capacite1

```
deg                PYTHON
>>> from chapitre1_capacite1 -
11
>>> |
```

algorithme de seuil

```python
# Type your text here
def seuil(s):
  h = 2
  n = 0
  while h >= s:
    h = 0.8 * h
    n = n + 1
  return n

print(seuil(0.2))
```

Capacité 2 ***Manipuler des encadrements***

Démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+e^{-n}} < 1$$

On manipule des encadrements :

Pour tout entier $n \geq 0$:

$$0 < e^{-n} \leq 1$$

donc $1 < 1+e^{-n} \leq 2$

donc $\boxed{\frac{1}{1} > \frac{1}{1+e^{-n}} \geq \frac{1}{2}}$

Une autre méthode est d'appliquer deux fois l'étude du signe de la différence.

D'une part : $1 - \frac{1}{1+e^{-n}} = \frac{1+e^{-n}-1}{1+e^{-n}} = \frac{e^{-n}}{1+e^{-n}}$

Or $e^{-n} > 0$ donc $1 - \frac{1}{1+e^{-n}} > 0$

donc $\frac{1}{1+e^{-n}} < 1$

D'autre part : $\frac{1}{1+e^{-n}} - \frac{1}{2} = \frac{2-1-e^{-n}}{2(1+e^{-n})}$

$$= \frac{1-e^{-n}}{2(1+e^{-n})}$$

Or $n \geq 0$ donc $e^{-n} \leq 1$

et donc $\frac{1}{1+e^{-n}} - \frac{1}{2} \geq 0$

et donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+e^{-n}}$

Capacité 3 ***Utiliser la méthode du signe de la différence***

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $u_0 = 99$ et $u_{n+1} = u_n - n^2 + 2n + 8$.
   Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ et en déduire l'étude des variations de la suite (u_n).
2. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \sqrt{n}$.
   a. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.
   En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
   b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, on a $0 \leqslant u_{n+1} - u_n \leqslant \frac{1}{2}$.

1) Pour tout entier $n \geq 0$:

$u_{n+1} - u_n = -n^2 + 2n + 8$

On étudie le signe du trinôme $-n^2+2n+8$

D'abord on détermine ses racines :

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-1) \times 8 = 36$

$\Delta > 0$ donc 2 racines distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-6}{-2} = 4$ et $x_2 x_1 = \frac{c}{a}$

donc $x_2 = \frac{-8}{x_1} = -2$

Ensuite on applique la règle du signe d'un binôme :

n	0		4		$+\infty$
$-n^2+2n+8$ $=u_{n+1}-u_n$		$+$ signe de $-a$	0	$-$ signe de a	

On en déduit que :

- pour tout $n \in [\![0;4]\!]$, $u_{n+1}-u_n \geq 0$ donc (u_n) croissante entre les rangs 0 et 4
- sinon pour tout $n \geq 4$, $u_{n+1}-u_n \leq 0$, donc (u_n) décroissante à partir du rang 4

2) Pour tout entier $n \geq 0$, on pose :

$$u_n = \sqrt{n}$$

a) On a donc :

$$u_{n+1}-u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \times (\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\ }$$

On a multiplié numérateur et dénominateur $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$

par l'expression conjuguée du numérateur car on veut "chasser" les racines du numérateur.

On a donc en développant le numérateur à l'aide de l'identité remarquable :

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}$$

Pour tout entier $n \geq 0$, on a

$\sqrt{n} \geq 0$ et $\sqrt{n+1} > 0$

donc $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} > 0$

et donc $u_{n+1} - u_n > 0$

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

b) Pour tout entier $n \geq 4$, on a :

$$\sqrt{n} \geq \sqrt{4}$$

et $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{4+1}$

par croissance de la fonction $\sqrt{\ }$ sur $[0;+\infty[$.

On en déduit que :

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \geq 2+\sqrt{5}$$

puis que $\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \leq \dfrac{1}{2+\sqrt{5}} < \dfrac{1}{2}$

Ainsi pour tout entier $n \geq 4$, on a :

$$\boxed{0 \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}}$$

Capacité 4 ***Comparer avec les fonctions de référence***

1. Soit q un réel tel que $1 < q$. Comparer $1-\frac{1}{q}$, $\left(1-\frac{1}{q}\right)^2$ et $\left(1-\frac{1}{q}\right)^3$.

2. Soit un entier $n \geqslant 1$, comparer $e^{-(1+\frac{1}{n})}$ et $e^{-\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$.

1) Soit q un réel tel que $1 < q$.

On a donc : $1 > \frac{1}{q}$

puis $1 - \frac{1}{q} > 0$

De plus $-\frac{1}{q} < 0$ donc $1 - \frac{1}{q} < 1$.

Ainsi on a : $0 < 1 - \frac{1}{q} < 1$

On applique l'échelle de comparaison des puissances :

$$0 < \left(1-\frac{1}{q}\right)^3 \leq \left(1-\frac{1}{q}\right)^2 < 1-\frac{1}{q} < 1$$

2) Soit un entier $n \geq 1$:

On a donc : $\frac{1}{n} > 0$

et donc $1 + \frac{1}{n} > 1$

D'après l'échelle de comparaison des

puissances :

$$1 \leq \sqrt{1+\frac{1}{n}} \leq 1+\frac{1}{n}$$

et donc $-\sqrt{1+\frac{1}{n}} \geq -\left(1+\frac{1}{n}\right)$

puis par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{e^{-\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \geq e^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}}$$

Capacité 5 ***Comparer membre à membre***

1. Démontrer que pour tout entier $k \geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{(k+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{k(k+1)}$.

2. Justifier que pour tout entier $k \geqslant 1$, on a : $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

3. À l'aide d'un argument de *somme télescopique*, en déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

4. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $0 < \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} < 1$.

1) Pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$k \leq k+1$$

de plus $k+1 > 0$

donc $k(k+1) \leq (k+1)^2$

$$\boxed{\text{et donc } \frac{1}{k(k+1)} \geq \frac{1}{(k+1)^2}}$$

2) Pour tout entier $k \geq 1$:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1+k-k}{k(k+1)} = \frac{1+k}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)}$$

$$\boxed{\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}$$

3) Pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier $1 \leq k \leq n$:

$k=1$ $\quad \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{1+1}}$

$k=2$ $\quad \frac{1}{2(2+1)} = \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2+1}}$

$\vdots$

$\frac{1}{k(k+1)} = \cancel{\frac{1}{k}} - \cancel{\frac{1}{k+1}}$

$k=n-1$ $\quad \frac{1}{(n-1)n} = \cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n}}$

$k=n$ $\quad \frac{1}{n(n+1)} = \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}$

Si on ajoute membre à membre ces n égalités, on obtient des simplifications en cascade dans le membre de droite :

Il reste :

$$\underbrace{\frac{1}{1(1+1)}+\frac{1}{2(2+1)}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}}_{\text{somme des membres de gauche}} = \underbrace{1-\frac{1}{n+1}}_{\substack{\text{somme des membres de droite}\\ \text{(simplification télescopique)}}}$$

On peut conclure avec le symbole de sommation $\sum$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = 1-\frac{1}{n+1}}$$

4) Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{n+1} > 0$$

donc $\boxed{1 - \frac{1}{n+1} < 1}$

De plus si on applique l'inégalité démontrée en 1) à tout entier k entre 1 et n, on obtient :

$k=1$ $$\frac{1}{1(1+1)} \geq \frac{1}{(1+1)^2}$$

$k=2$ $$\frac{1}{2(2+1)} \geq \frac{1}{(2+1)^2}$$

$\vdots$

k $$\frac{1}{k(k+1)} \geq \frac{1}{(k+1)^2}$$

$\vdots$

$k=n$ $$\frac{1}{n(n+1)} \geq \frac{1}{(n+1)^2}$$

En ajoutant membre à membre ces inégalités de même sens, on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2}}$$

D'une part on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \leq 1 - \frac{1}{n+1}$$

D'autre part on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{et} \quad 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

Par transitivité de l'inégalité, on en déduit que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \leq 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

De plus une somme de nombres positifs est positive, donc :

$$0 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} < 1$$

Capacité 6 ***Choisir une méthode adaptée pour étudier le sens de variation d'une suite***

1. **Méthode 1** : *Etudier le signe de $u_{n+1}-u_n$*

   a. Soit la suite (u_n) définie par $u_0=5$ et pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, par $u_{n+1}=u_n(1-2u_n)$.

   ☞ Étudier le signe de $u_{n+1}-u_n$ pour $n\in\mathbb{N}$.

   ☞ Conclure sur le sens de variation de la suite (u_n).

   b. Reprendre le même plan d'étude pour étudier le sens de variation de la suite (w_n) définie pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$ par $w_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$.

2. **Méthode 2** : *Si (u_n) à termes strictement positifs, comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1*

   Soit la suite (u_n) définie par $u_0>0$ et pour tout entier $n\geqslant 0$, $u_{n+1}=u_n\mathrm{e}^{-n}$. On admet que pour tout entier $n\geqslant 0$, on a $u_n>0$.

   ☞ Soit un entier $n\geqslant 0$, démontrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant 1$.

   ☞ En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

3. **Méthode 3** : *Si $u_n=f(n)$, étudier les variations de f sur $[0\,;+\infty[$*

   Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n\geqslant 0$, par $u_n=\frac{\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^n+1}$.

   Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$. On a pour tout entier $n\geqslant 0$, $u_n=f(n)$.

   ☞ Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $f'(x)$.
   ATTENTION, on peut dériver la fonction f mais pas la suite (u_n) car celle-ci n'est pas définie sur un intervalle !!!

   ☞ En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$, puis le signe de $u_{n+1}-u_n$ pour tout entier $n\geqslant 0$ et le sens de variation de (u_n).

1) Méthode 1 :

a) Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on a :

$u_{n+1}-u_n=u_n(1-2u_n)-u_n=-2u_n^2$

On a $u_n^2\geq 0$ donc $u_{n+1}-u_n\leq 0$

La suite (u_n) est donc décroissante.

b) Pour tout entier $n \geq 1$; on a :

$$w_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

donc $$w_{n+1} - w_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

donc $$w_{n+1} - w_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n+1}$$

donc $$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{n+1}$$

Pour tout entier $n \geq 1$ on a donc

$$w_{n+1} - w_n > 0$$

La suite (w_n) est donc strictement croissante, ce qui est logique puisqu'on ajoute à chaque rang un nouveau terme positif.

2) Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{-n} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-n}$$

Or $n \geq 0$ donc $0 < e^{-n} \leq 1$

et donc $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$

De plus : $u_n > 0$ (admis se prouve par récurrence)

donc $0 \times u_n < u_{n+1} < u_n$

donc $0 < u_{n+1} < u_n$

la suite (u_n) est donc décroissante

3) Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{e^n}{e^n+1} = f(n)$$

avec f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$

$f = \dfrac{u}{v}$ avec u et v dérivables sur $\mathbb{R}$

donc f dérivable sur $\mathbb{R}$

Pour tout réel x :

$u(x) = e^x$ $\quad\quad v(x) = e^x+1$

$u'(x) = e^x$ $\quad\quad v'(x) = e^x$

D'après une formule du cours :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

donc : $f'(x) = \dfrac{e^x(e^x+1) - e^x \times e^x}{(e^x+1)^2}$

donc $f'(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$

Pour tout réel x, on $e^x > 0$ et $(e^x+1)^2 > 0$

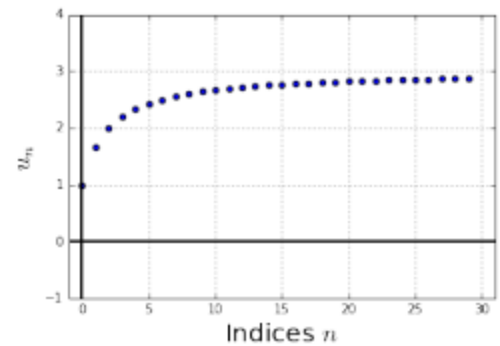
donc $f'(x) > 0$

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par $u_n = f(n)$ est donc croissante car l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{R}$.

Capacité 7 ***Démontrer qu'une suite est bornée***

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $u_n = \dfrac{3n+2}{n+2}$.



1. On donne ci-contre la représentation graphique des premiers termes de la suite (u_n) dans un repère orthonormal.

   Émettre une conjecture sur un minorant et un majorant possibles de la suite (u_n).

2. Démontrer cette conjecture.

1) Graphiquement, on peut conjecturer que pour tout entier $n \geq 0$, l'on a :

$$1 \leq u_n < 3$$

et donc que 1 est minorant et 3 un majorant de la suite (u_n).

2) Démontrons cette conjecture en appliquant deux fois la méthode du signe de la différence :

Pour tout entier $n \geq 0$:

$$3 - u_n = 3 - \frac{3n+2}{n+2} = \frac{3(n+2) - (3n+2)}{n+2}$$

$$3 - u_n = \frac{4}{n+2}$$

On a donc $3 - u_n > 0$

et donc $u_n < 3$

3 est donc un majorant de (u_n)

D'autre part :

$$u_n - 1 = \frac{3n+2}{n+2} - \frac{n+2}{n+2} = \frac{2n}{n+2}$$

On a donc $u_n - 1 \geqslant 0$

et donc $1 \leqslant u_n$

1 est donc un minorant de (u_n)

<u>Remarque :</u> On peut démontrer que (u_n) est croissante et donc minorée par son premier terme u_0.