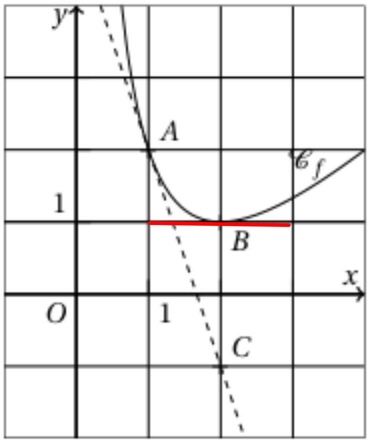
Dérivation et convexité
Corrigé des exemples du cours

Capacité 1 ***Déterminer graphiquement un nombre dérivé et une équation de tangent***

On considère une fonction f définie sur $]0;+\infty[$ et dérivable en 1 et en 2. On a représenté ci-dessous la courbe de f et ses tangentes aux points A et B d'abscisses respectives 1 et 2.



1. Le nombre dérivé de f en 2 a pour valeur :

a. 2 **b.** 1 **c.** 0 **d.** $\frac{1}{2}$

2. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A est :

a. $y=-\frac{1}{3}x+2$ **b.** $y=3x+\frac{5}{3}$ **c.** $y=5-3x$ **d.** $y=-3x+\frac{5}{3}$

1) La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses, donc son coefficient directeur est nul. Ainsi $f'(2)=0$

2) La tangente au point d'abscisse 1 passe par les points $A(1;2)$ et $C(2;-1)$.
Son coefficient directeur est donc $m=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}$

$$m=\frac{-1-2}{2-1}=-3$$

Une équation de (AC) est donc de la forme $y=-3x+p$
A appartient à (AC) donc $2=-3+p \iff p=5$.

Une équation de la tangente $(A\mathcal{C})$ en A est donc.

$$y = -3x + 5$$

Capacité 2 ***Utiliser la définition du nombre dérivé***

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$.

   On rappelle que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, on a $f'(x) = f(x)$.

   On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère du plan.

   a. À l'aide d'un nombre dérivé calculé en un point bien choisi, démontrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

   b. La droite d'équation $y = ex$ est-elle tangente à $\mathscr{C}_f$?

2. Est-il vrai que si une fonction g est définie sur un intervalle I alors g est dérivable sur I?

1)

a) $f : x \mapsto e^x$ est dérivable en 0, donc par définition, on a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = f'(0)$$

Or on a $f'(0) = e^0 = 1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1}$

b) Soit la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ex$.

$\mathcal{D}$ est une tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a si et seulement $f'(a)$ est égal au coefficient directeur de $\mathcal{D}$ c'est-à-dire e.

Pour tout réel a, on a $f'(a) = e^a$

On résout l'équation :

$$e^a = e \iff a = 1$$

De plus la droite $\mathcal{D}$ passe par le point d'abscisse 1 de $\mathcal{C}_f$, car ses coordonnées $(1 ; e)$ vérifient l'équation de $\mathcal{D}$.

$\boxed{\text{Ainsi la droite d'équation } y = ex \text{ est tangente à } \mathcal{C}_f.}$

2) La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie en 0 mais pas dérivable en 0.
Ces contre-exemples prouvent qu'une fonction définie sur un intervalle I, n'est pas nécessairement dérivable sur I.

Capacité 3 ***Dériver une somme, un produit, un inverse ou un quotient de fonctions dérivables***

Soit les fonctions f et g définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x, on a :

$$f(x) = \frac{x^6}{3} - 2x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = e^x + e$$

Déterminer les expressions des dérivées des fonctions suivantes qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$:

1. $f \times g$ **2.** g^2 **3.** $\frac{-2}{g}$ **4.** $\frac{f}{g}$

f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{3} \times 6x^5 - 2 = 2x^5 - 2 \text{ et } g'(x) = e^x$$

1) $f \times g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$$

Pour tout réel x, on a donc :

$$(f\times g)'(x) = f'(x)\times g(x) + f(x)\times g'(x)$$

$$\boxed{(f\times g)'(x) = (2x^5-2)(e^x+e) + \left(\frac{x^6}{3}-2x+1\right)e^x}$$

2) $(g^2)' = g'g + gg' = 2g'g$

Pour tout réel x, on a donc :

$$\boxed{(g^2)'(x) = 2e^x \times (e^x+e)}$$

3) $\left(-\frac{2}{g}\right)' = -2\times \frac{-g'}{g^2} = \frac{2g'}{g^2}$

Rque : $-\frac{2}{g}$ est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\left(-\frac{2}{g}\right)'(x) = \frac{2g'(x)}{g^2(x)} = \frac{2e^x}{(e^x+e)^2}}$$

4) $\frac{f}{g}$ est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, on a :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{(3x^5-2)\,(e^x+e) - \left(\frac{x^6}{3} - 2x + 1\right)e^x}{(e^x+e)^2}}$$

Capacité 4 ***Appliquer la formule de dérivation d'une fonction composée***

1. Déterminer une expression de la fonction dérivée de la fonction h dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $h(x) = \left(e^{-x} + e^{x}\right)^4$.

2. Déterminer une expression de la fonction dérivée de la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $g(x) = \dfrac{1}{\left(x^4 + e^{-2x}\right)^3}$.

3. On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $f(x) = \sqrt{x^2+1}\,e^{\sqrt{x^2+1}}$.
   Retrouver l'expression de $f'(x)$, déterminée ci-dessous avec un logiciel de calcul formel.

```
In [42]: fx = sqrt(x ** 2 + 1) * exp(sqrt(x ** 2 + 1))

In [43]: fx
```

Out[43]: $\sqrt{x^2+1}\,e^{\sqrt{x^2+1}}$

```
In [44]: factoriser(dérivée(fx, x))
```

Out[44]: $\dfrac{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)e^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}$

1). h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (e^{-x}+e^{x})^4$

- $h = u^4$ avec $u(x) = e^{-x} + e^{x}$
- h dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
- $h' = 4u'u^{4-1} = 4u'u^3$

Pour tout réel x, $u'(x) = -e^{-x} + e^{x}$

donc $\boxed{h'(x) = 4(e^{x} - e^{-x})(e^{-x} + e^{x})^3}$

2) g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{(x^4 + e^{-2x})^3}$

$g = \dfrac{1}{u^3}$ avec $u(x) = x^4 + e^{-2x}$

g dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$g' = \frac{-3u'}{u^{3+1}} = \frac{-3u'}{u^4}$$

Pour tout réel x, on a $u'(x) = 4x^3 - 2e^{-2x}$

donc $\boxed{g'(x) = \dfrac{-3(4x^3 - 2e^{-2x})}{(x^4 + e^{-2x})^4}}$

3) Soit f la fonction définie pour tout réel x, par :

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}\, e^{\sqrt{x^2+1}}$$

$f = \sqrt{u}\, e^{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = \sqrt{x^2+1}$

f dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de composées de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$f' = (\sqrt{u})' e^{\sqrt{u}} + \sqrt{u} \times \left(e^{\sqrt{u}}\right)'$$

$$f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \times e^{\sqrt{u}} + \sqrt{u} \times \frac{u'}{2\sqrt{u}} e^{\sqrt{u}}$$

Pour tout réel x, on a $u'(x) = 2x$

donc $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \times e^{\sqrt{x^2+1}} + \sqrt{x^2+1} \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \times e^{\sqrt{x^2+1}}$

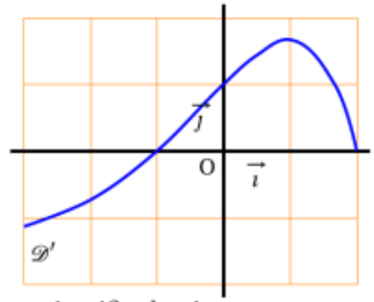
$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \times e^{\sqrt{x^2+1}} + x e^{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\boxed{f'(x) = x e^{\sqrt{x^2+1}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + 1\right)}$$

Capacité 5 *Exploiter le lien entre signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction*

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On considère une fonction f dérivable sur $[-3\ ;\ 2]$.
On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathscr{D}'$ ci-contre.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3, -1]$, $f'(x) \leqslant 0$.
2. La fonction f est décroissante sur l'intervalle ~~[2 ; 3]~~. [1 ; 2]
3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$, $f(x) \geqslant -1$.

1) Graphiquement, on peut donner le tableau de signes de f' :

x	-3		-1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0

Pour tout réel $x \in [-3;-1]$, on a donc bien $f'(x) \leq 0$

2) Sur l'intervalle $[1;2]$ on a f' strictement positive sauf en 2 donc f est strictement croissante sur $[1;2]$ et donc pas décroissante sur $[1;2]$

3) Du tableau de signe de f', on peut déduire le tableau de variations de f :

x	-3		-1		0		2
$f(x)$		$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(0) = -1$	$\nearrow$	

f est strictement croissante sur $[-1;0]$ donc pour tout $x \in [-1;0[$, on a :

$$f(x) < f(0) = -1$$

En particulier, on a $f(-1) < -1$.

Par conséquent l'affirmation :

"$\forall x \in [-3;2],\ f(x) \geqslant -1$" est fausse

Capacité 6 ***Utiliser la dérivée seconde et les dérivées d'ordre supérieur***

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^5 + 5x^4 + 15x$.

   a. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis déterminer f' et f''.

   b. Étudier les variations de f' sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(-1)$.

   c. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2. On admet que la fonction f définie sur $\mathscr{D} =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est n fois dérivable sur $\mathscr{D}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

   Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $x \neq 0$, on a :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cancel{(n-1)!}\ n!}{x^{n+1}} \quad \text{avec} \quad (n-1)! = (n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 2\times 1$$

1) a) f dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, on a :

$$f(x) = 3x^5 + 5x^4 + 15x$$

donc $\boxed{f'(x) = 15x^4 + 20x^3 + 15}$

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$\boxed{f''(x) = 60x^3 + 60x^2 = 60x^2(x+1)}$$

Pour tout réel x, on a $60x^2 \geqslant 0$ donc f''

donc $f''(x)$ est du signe de $x+1$

b) On en déduit le signe de f'' et les variations de f' :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$	$f'(-1)$		$\nearrow$		

On a $f'(-1) = 15\times(-1)^4 + 20\times(-1)^3 + 15$
$f'(-1) = 15 - 20 + 15 = 10$

D'après le tableau de variations de f', le minimum de f' sur $\mathbb{R}$ est $f'(-1) = 10$.
On en déduit que pour tout réel x, on a :

$$f'(x) > 0.$$

On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) Pour tout entier $n \geq 0$, on définit la propriété :

$$P_n : \text{"} \forall x \neq 0,\ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

Démontrons par récurrence que P_n est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

<u>Initialisation</u> : Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$f^{(1)}(x) = \frac{-1}{x^2} = \frac{(-1)^1 \, 1!}{x^{1+1}}$$

donc P_1 est vraie

<u>Hérédité</u> : Soit un entier $n \geq 1$ tel que P_n est vraie.

Par hypothèse de récurrence, pour tout réel $x \neq 0$, on a :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \, n!}{x^{n+1}}.$$

On dérive :

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \, n! \times \frac{(-1)(n+1)x^n}{(x^{n+1})^2}$$

donc $f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} (n+1)! \times \dfrac{1}{x^{n+2}}$

On en déduit que P_{n+1} est vraie

Conclusion : La propriété P_n est initialisée pour $n = 1$ et elle est héréditaire, donc elle est vraie par récurrence pour tout entier $n \geq 1$.