Calcul intégral

41 Soit $K = \int_1^2 x^2 \ln(x)\,dx$.

1. En utilisant la méthode d'intégration par parties, justifier que $K = \left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{3}x^2\,dx$.

2. Vérifier alors que $K = \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{7}{9}$.

1) Formule d'intégration parties :

$$\int_1^2 u(x)\,v'(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_1^2 - \int_1^2 u'(x)\,v(x)\,dx$$

$$\int_1^2 \underbrace{x^2}_{v'(x)}\,\underbrace{\ln(x)}_{u(x)}\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'(x)} \times \underbrace{\frac{1}{3}x^3}_{v(x)}\,dx$$

donc $\int_1^2 x^2\ln(x)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{3}x^2\,dx$

et ainsi $K = \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\times 1^3 \times \ln(1) - \int_1^2 \frac{1}{3}x^2\,dx$

$$K = \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}\times\frac{7}{3}$$

$$K = \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{7}{9}$$

94 Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}.$$

b. En déduire la valeur exacte de u_1.

3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

1) $u_0 = \int_0^1 \frac{x^0}{1+x}\,dx = \left[\ln(|1+x|)\right]_0^1$

$u_0 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$

2) a) Pour tout entier naturel n :

$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$

$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} + \frac{x^n}{1+x}\,dx$

$= \int_0^1 \frac{x^n\cancel{(x+1)}}{\cancel{1+x}}\,dx$

$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

2) On applique la formule précédente avec $n=0$:

$$u_1 + u_0 = \frac{1}{0+1} = 1$$

or $u_0 = \ln(2)$

$$u_1 = 1 - u_0 = \ln(e) - \ln(2) = \ln\left(\frac{e}{2}\right)$$

3) Pour tout entier $n \geq 0$:

Pour tout x tel que $0 \leq x \leq 1$ on a $0 \times x^n \leq x^{n+1} \leq x^n$ $\times x^n > 0$

puis $0 \leq \dfrac{x^{n+1}}{1+x} \leq \dfrac{x^n}{1+x}$ avec $1+x>0$

par croissance de l'intégrale

donc $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$

c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_n$

Autre méthode. On étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$

95 Soit (I_n) et (J_n) les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \text{ et } J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$

1. a. Justifier que, pour tout réel x de $[0\,;1]$, $\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1$.

b. Montrer que la suite (I_n) est majorée par 1.

2. a. Montrer que, pour n dans $\mathbb{N}^*$, $0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

b. En déduire la limite de la suite (J_n).

3. a. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_n + J_n$.

b. Déterminer la limite de la suite (I_n).

1) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [0\,;1]$

$0 \leq x^n \leq 1^n$

donc $1 \leq 1+x^n \leq 1+1$

la fonction inverse est décroissante sur $[0;1]$

donc $\frac{1}{1} \geq \frac{1}{1+x^n} \geq \frac{1}{2}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
pour tout $x \in [0;1]$, on a :

$$\frac{1}{1+x^n} \leq 1$$

donc $\int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \leq \int_0^1 1 \, dx$

donc $I_n \leq 1$

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
pour tout $x \in [0;1]$:

$$0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1$$

donc $0 \leq \frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n$

par croissance de l'intégrale :
$\int_0^1 0 \, dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx \leq \int_0^1 x^n dx$

donc $0 \leq J_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

donc $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$

b) . D'une part pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$$

. D'autre part :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

. Donc d'après le théorème de limite par encadrement

$$\lim_{n \to +\infty} J_n = 0$$

3) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n + J_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} + \frac{x^n}{1+x^n} dx$$

$$I_n + J_n = \int_0^1 \frac{1+x^n}{1+x^n} dx = \int_0^1 1 \, dx = 1$$

b)

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n + J_n = 1$$

Donc $I_n = 1 - J_n$

De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n = 0$

Donc par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 1$