Somme de variables aléatoires Copacités du cours

🦪 Capacité 1 Calculer une espérance, une variance, un écart type

1. On considère la variable aléatoire *Y* dont la loi est donnée ci-dessous :

| k | -5 | 1 | 2 | 10 | |
|-------------------|------|-----|---|-----|--|
| $\mathbb{P}(Y=k)$ | 0,35 | 0,5 | | 0,1 | |

- **a.** Détailler les calculs de l'espérance $\mathbb{E}(Y)$ de Y, de sa variance $\mathbb{V}(Y)$ et de son écart-type $\sigma(Y)$.
- **b.** Retrouver ces résultats avec l'éditeur de listes de la calculatrice.
- 2. On lance un dé à 6 faces équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note X le nombre porté par la face du dessus.

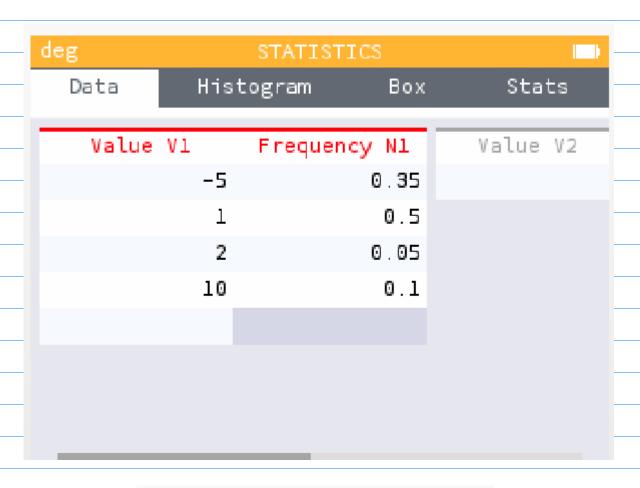
Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X.

3. On lance un dé à *n* faces équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à *n* et on note *Y* le nombre porté par la face du dessus.

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire Y.

$$V(y) = (-5)^2 \times 0,355 + \lambda^2 \times 0,55 + 2^2 \times 0,055 + 10^2 \times 0,45$$

 $V(y) = (-9.45)^2$
 $V(y) = 19,4275 + 2(y) = \sqrt{19,4275} \approx 4,44.$



| deg | STATISTIC | S | | |
|-------|------------------|------|--------|---|
| Data | Histogram | Вох | Stats | |
| | | V1/N | 11 | 1 |
| Numbe | r of data points | | 1 | |
| | Minimum | | -5 | |
| | Maximum | | 10 | - |
| | Range | | 15 | |
| | Mean | | -0.15 | |
| Stan | dard deviation σ | 4.4 | 07664 | |
| | Variance | 19 | . 4275 | |
| | First quartile | | -5 | |
| | | | | |

2. On lance un dé à 6 faces équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note X le nombre porté par la face du dessus.

Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X.

loi de probabilité de X

$$f(x) = \frac{1}{6} \times (1+2+3+4+5+6) = \frac{1}{6} \times \frac{6(6+1)-7}{2}$$

$$V(X) = \frac{1}{6} \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 \right) - \left(\frac{1}{2} \right)^2$$

$$V(x) = \frac{1}{6} \times \frac{6(6+1)(2\times6+1)}{6} - \frac{1}{2}$$

$$V(x) = \frac{91}{6} - \frac{49}{6} = \frac{35}{12}$$

$$\sqrt{\frac{35}{12} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{35}{3}}}$$

| Pour tout & | E [[1] m] | | |
|-------------|----------------|---|------------------------------|
| P(Y=&)- | _ _ 人 | | |
| 1(1-21- | ~ | | |
| e (Y) 1 | (AL 2+ 1. ton) | λ | $\omega(\omega_{t_V}) = v_V$ |

3. On lance un dé à n faces équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à n et on note Y le nombre

🥒 Capacité 2 Calculer une espérance, une variance, un écart type

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire Y.

Source: « Visa pour la prépa » de Guillaume Connan.

porté par la face du dessus.

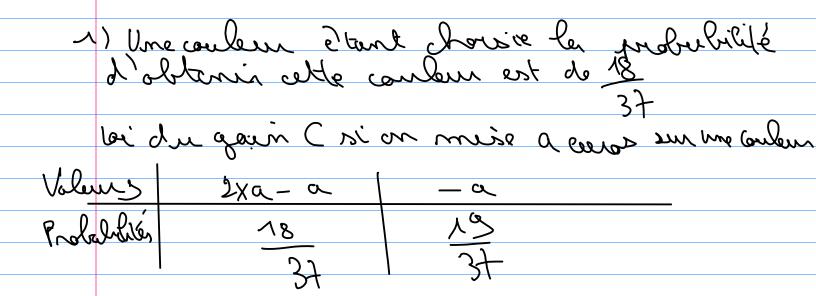
Une roulette contient 36 cases numérotées de 1 à 36 dont 18 sont rouges et 18 sont noires, plus une case numérotée 0 de couleur verte.

Un joueur qui mise sur la couleur rouge ou noire gagne deux fois sa mise si la couleur choisie sort.

Un joueur qui mise sur un numéro de 1 à 36 gagne 36 fois sa mise si le numéro sort.

Il est interdit de miser sur le zéro.

- **1.** Un joueur mise a euros sur une couleur. Soit C la variable aléatoire correspondant au gain associé. Déterminer la loi de C puis calculer $\mathbb{E}(C)$ et $\sigma(C)$.
- **2.** Un joueur mise a euros sur un numéro. Soit N la variable aléatoire correspondant au gain associé. Déterminer la loi de N puis calculer $\mathbb{E}(N)$ et $\sigma(N)$.
- 3. Vaut-il mieux miser sur une couleur ou sur un numéro?



$$E(C) = \frac{9}{37}$$

$$E(C) = \sqrt{(-a + \frac{a}{37})^2 \times \frac{19}{37} + (a + \frac{a}{37})^2 \times \frac{18}{37}}$$

$$E(C) = \sqrt{(-a + \frac{a}{37})^2 \times \frac{19}{37} + (a + \frac{a}{37})^2 \times \frac{18}{37}}$$

$$E(C) = \frac{6a\sqrt{3}8}{37}$$

$$2) \text{ Un some nowing a energy sur unmarker}$$

$$(n number of the fine)$$

$$(n number of the fine)$$

$$\frac{1}{36}$$

$$\frac{3}{37}$$

mo reum et fugurt promed mat to II



🥒 Capacité 3 Utiliser la notion d'espérance dans une résolution de problème

1. Le nombre de spectateurs pour un festival de musique définit une variable aléatoire X d'espérance 12 000 et de variance 1 500. Chaque billet est vendu au tarif de 45 € et le coût global d'organisation du festival est de 100 000 €.

Soit B la variable aléatoire associée au bénéfice réalisé par l'organisateur du spectacle. Déterminer $\mathbb{E}(B)$ et $\sigma(B)$.

2. On considère que pour la session 2 020 d'un concours, la note X sur 10 attribuée à un candidat pris au hasard, aura pour espérance $\mathbb{E}(X) = 5.4$ et pour écart-type $\sigma(X) = 2$ Le responsable du concours veut obtenir une moyenne de 5 avec un écart-type de 1,5. Ainsi, il veut appliquer une transformation affine à X en lui associant aX + b avec a et b des réels et a > 0.

Page 4/15

https://frederic-junier.org/



Sommes de variables aléatoires

SpéMaths

- **a.** Exprimer $\mathbb{E}(aX + b)$ et $\sigma(aX + b)$ en fonction de a et b.
- **b.** En déduire le calcul de *a* et *b*.

Bênêfice = Prior Unitaire × Guartile - Coût-

Par limearité de l'espérance, on a .

lan l'ècent-tryre, on a: 5 (B) = 6 (hSX - 100000)

6(B) = 456(X) par propriété de l'écont-type,

2) Donnèes:
$$E(X)=5,4$$
 et $E(X)=2$

Soit $a \times b$ le nouvelle lai des noles

a) $E(a \times b) = a E(X) + b = 5,4 a + b$
 $E(a \times b) = |a|E(X)$

a) $E(a \times b) = |a|E(X)$

b) $E(a \times b) = |a|E(X)$

a) $E(a \times b) = |a|E(X)$

a) $E(a \times b) = |a|E(X)$

b) $E(a \times b) = |a|E(X)$

a) $E(a \times b) = |a|E(X)$

a) $E(a \times b) = |a|E(X)$

b) $E(a \times b) = |a|E(X)$

c) $E(a$

Capacité 4 Déterminer la loi d'une somme de variables aléatoires plus simples, capacité 1 p. 403 du manuel indice

Agathe lance deux pièces de monnaie, l'une de 1 € et l'autre de 2 €

X est la variable aléatoire qui vaut 1 si elle obtient Pile avec la pièce de $1 \in$ et 0 sinon.

Y est la variable aléatoire qui vaut 2 si elle obtient Pile avec la pièce de 2 \in et 0 sinon.

- Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
- **2.** Compléter le tableau ci-contre et en déduire la loi de probabilité de X + Y.

| X | 1 | 2 | Loi de X |
|----------|-----|-----|----------|
| 0 | 人 | .2. | 1/2 |
| 1 | .2 | Ÿ | 1/2 |
| Loi de Y | 1/2 | ۲۶ | ٠٨. |

$$\frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{1}{2}$$

loi de probabilité de X+Y:

$$P(X+Y=3) = 1 - P(X+Y=0) - P(X+Y=2)$$

 $P(X+Y=3) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$

Capacité 5 Calculer l'espérance et d'une variable aléatoire avec la propriété de linéarité, capacité 2 p. 403 du manuel Indice

1. Soit *X* et *Y* deux variables aléatoires définies sur le même univers fini.

On sait que $\mathbb{E}(X) = 3$ et $\mathbb{E}(Y) = 4$.

Déterminer l'espérance des variables aléatoires :

$$X + Y$$
, $X + Y + 1$, $X - Y$, $X + X$, $\frac{1}{3}X + \frac{1}{2}Y$ et $aX + (1 - a)Y$ où a est un réel.

- **2.** Soit S_n la variable aléatoire qui représente le nombre de piles obtenus lorsqu'on lance une pièce équilibrée n fois.
 - **a.** Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle renvoie une réalisation de S_n :

b. Déterminer l'espérance de S_n .

Capacité 6 Calculer la variance d'une variable aléatoire en l'exprimant comme somme de variables aléatoires indépendantes 1. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers fini. On sait que V(X) = 3 et V(Y) = 4. Déterminer la variance des variables aléatoires :

$$X+Y,X+Y+1$$
, $X-Y,X+X$, $\frac{1}{3}X+\frac{1}{2}Y$ et $aX+(1-a)Y$ où a est un réel.

2. Soit S_n la variable aléatoire qui représente le nombre de piles obtenus lorsqu'on lance une pièce équilibrée n fois.

Déterminer la variance de S_n .

Cette fors les vuriables abatoires sont

1) X et Y des variables aléaborés in l'penaantes

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) = 7$$
 $V(X+Y+\Lambda) = V(X) + V(Y+\Lambda) = V(X) + V(Y) = 4+3 = 7$
 $V(X-Y) = V(X) + V(-Y) = V(X) + (-\Lambda)^2 V(Y) = 4+3 = 7$

Considered que si x et y sont indépendentes

alors X et - Y sont indépendentes

$$V(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y) = V(\frac{1}{3}x) + V(\frac{1}{2}y) = \frac{1}{3}2V(x) + \frac{1}{2}2V(y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4$$

$$V(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{3}$$

$$V(ax+(1-a)y) = V(ax) + V((1-a)y)$$

$$= a^{2}V(x) + (1-a)^{2}V(y)$$

$$V(ax+(1-a)y) = a^{2}x^{3} + (1-a)^{2}x^{4} - 7a^{2}t^{4} - 8a$$

| | On just admettre que les XR avec & E[[1] m] ant mulcuellement indépendents. |
|---|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| | ant mulcuellement independents. |
| | Par soussemes en ampliquent successivement |
| | la propriété de la variance d'une somme de varia |
| | Par réurrence, en appliquant successivement la propriété de la variance d'une somme de varia - Cles aléaboires indépendentes, on obtient: |
| \ | |
| | ((xx+:x2++xm)= V(xx)+V(x2)++V(xm) |
| | |
| | aver V(xx)=V(x2)==V(xx)=p(1-9)-1/2×(1-1)-1/4 |
| | donc V (Xx+X2++Xm)= 1xm |
| | h |
| | |
| | , |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

Adrivite 1 n. 120 Marquel Indere

Jeux de cartes en double

Un joueur tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes, puis tire une seconde carte dans un autre jeu de 32 cartes.

On note X la variable aléatoire qui, au premier tirage, associe un gain de $2 \in S$ i la carte tirée est un as, un gain de $1 \in S$ i la carte tirée est une carte « habillée » (roi, dame, valet), et rien du tout dans les autres cas.



On note Y la variable aléatoire qui, au second tirage, associe un gain de $1 \in S$ i la carte tirée est un pique, et rien du tout dans les autres cas.

On appelle Z la variable aléatoire qui, à chaque double tirage, associe le gain total du joueur. On peut noter cette variable : Z = X + Y.

- 1 Déterminer les valeurs prises par X, par Y et par Z.
- \bigcirc Donner la loi de X et la loi de Y.
- 3 a. Exprimer l'événement $\{Z=0\}$ en fonction des événements $\{X=0\}$ et $\{Y=0\}$.
- **b.** En utilisant l'indépendance des deux épreuves, déterminer P(Z=0).
- **c.** Calculer de la même façon P(Z=3).
- 4 a. Déterminer P(Z=1) en exprimant l'événement $\{Z=1\}$ comme réunion de deux événements incompatibles.
- **b.** En déduire P(Z=2), puis la loi de Z.
- Calculer l'espérance et la variance des variables X, Y et Z. Que constate-t-on ?

| | 0 | | | | |
|---|-------------|-------------|---------------------|------|--|
| | 1) <u>k</u> | 2 | ノ | 0 | |
| | P(x=&) | 4-1 32 0 | 12 <u>3</u> 32 8 | 8-12 | |
| | L | Λ | 0 | | |
| į | P(Y=R) | 1 | 3 | | |
| | / | 4 | 1 h | | |

lous de X et y

Voleus mises har Z = X+Y

O 1

O 0+0=0 0+1=1

1 1+0=1 1+1=2

2 2+0=2 2+1=3

| {Z=0} = {X=0et}=0} | on les deux hineges sont | independants, den | P({Z=0}) = P({X=0}) × P({Y=0}) | P({Z=0}) = {2 × 3 = 3/8} De même on a:

Par indérendance des vouiables aléatoures Xet Y, il ment:

$$P(\{2=3\}) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$$

(1) a) {Z=12= {X=0et Y=1} U{X=1et Y=y}

Par indépendance des vouiables aléabories X et Y:

donc P({x=1et x=0}) - 3 x 3 = 9 1

{x=0 et >= 1 } et {x=1 et >= 0}

sont-incompabilles, donc:

P(Z=Q)+P(Z=1) +P(Z=2)+P(Z=3)=1 on diduit-que

$$P(Z=2)=1-P(Z=0)$$

- $P(Z=3)$

dong

$$P(z=2)=1-\frac{3}{8}-\frac{1-\frac{13}{32}}{32\cdot 32}$$

$$den(P(Z=2)=\frac{6-3}{32-16}$$

Loi de Z

| R | P(Z=R) |
|---|---------|
| O | 3/5=125 |
| 1 | 13/32 |
| 2 | 6/32 |
| 3 | 1 |
| | 32 |

4) on a
$$E(x) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

$$E(y) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{E(Z) - \frac{13}{32} + 2 \times \frac{6}{32} + 3 \times \frac{1}{32}}{= \frac{28}{32} - \frac{1}{8}}$$

En remarque que:

$$E(X) + E(Y) = \frac{5}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

est-egal a E(Z) = E(X+Y)= = = =

C'ost C Rindonite de l'experance

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Adirile 2 n. 120 Manuel Indeze

Tombola de clés USB

Un sac contient cinq clés USB dont deux clés d'une valeur de 10 € et trois clés d'une valeur de 30 €. À l'issue d'une épreuve sportive, le vainqueur tire au hasard dans ce sac une clé USB puis, sans remettre la clé dans le sac, il tire une seconde clé.



On note X la variable aléatoire qui, au premier tirage associe le prix de la clé obtenue, et Y la variable aléatoire qui, au second tirage, associe le prix de la c

variable aléatoire qui, au second tirage, associe le prix de la clé obtenue. On note S la variable aléatoire qui, aux deux tirages, associe la somme des prix des clés gagnées.

- $oldsymbol{0}$ Quelles sont les valeurs prises par S ?
- 2 a. Déterminer la loi de X.
- b. Calculer son espérance et sa variance.
- 3 a. Construire un arbre pondéré modélisant cette expérience aléatoire.
- **b.** Calculer P(Y=10) à l'aide de l'arbre pondéré.
- c. En déduire la loi de probabilité de Y.
- d. Calculer l'espérance et la variance de Y.
- 4 a. Calculer P(S=20), puis P(S=60).
- **b.** Déterminer la loi de probabilité de S.
- c. Calculer l'espérance et la variance de S. Que constate-t-on ?

| 1) Voleu | s rossilles nour S=X+X |
|--------------|------------------------|
| ×× | ло 3 ₀ |
| | |
| 10 | 10+10=20 16+30-40 |
| 30 | 30+30=60 |
| , | |
| 21a) Loi | le X. R 10 1 30 |
| C + W / (= - | P(v D) 2 3 |
| | 14=12) 3 13 |
| | |

b)
$$E(X) = 10 \times \frac{2}{5} + 30 \times \frac{2}{5} = \frac{110}{5} = 22$$

 $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{5} \times 10^2 + \frac{3}{5} \times 10^2 - 22$

X Y S=X+Y 10 10 20 2=3 /=30 30 30 60 b) cen unplique la formula des probabilités vololes pour valuler P(7-10): P(Y=10)= P(X=10) × P(Y=10) + P(X=30) X P (Y=10) P(Y=10) - 2 x 1 +3 x 1 - 10 +3 = 4 P(Y=10)-2 c) On en déduit que P(Y=30)-1-P(Y-10) loi de parolulité de 7: P(Y=R) 2/5 3/5

on remarks que
$$X$$
 et Y suivend:

le même lei; ce qui est normal.

Con a denc $V(Y) = V(X) = 36$

et $E(Y) = E(Y) = 22$

for $P(Y) = 20$
 $P(X = 10 \text{ et } Y = 10)$
 $P(X = 10)$
 $P(X$

don(
$$P(S=40) = 1 - P(S=20) - P(S=60)$$

= $1 - \frac{1}{10} - \frac{3}{10}$
 $P(S=40) = \frac{6}{10}$

loi de Z:

$$E(Z) = 20 \times \frac{1}{10} + 40 \times \frac{6}{10} + 60 \times \frac{3}{10}$$

$$V(2) = 20^{2} \times 1 + 40^{2} \times 6 + 60^{2} \times 3 - 10$$

$$- (E(Z))$$

On remarque que:

| mais | V(> |) - \(() | (+7) = | - 144 | |
|------|---------|-----------|---------|-------|-------|
| ^ | y troin | às e a al | 2 à V(X |)+(() | =2X96 |
| | | 8 | | | = 192 |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |