Prise de notes du 29/04/2021

Automatismes

147 10 min Capacité 7, p. 301

On considère l'équation différentielle (**E**) :

$$y' + y = x^2 - 2, \text{ pour } x \text{ appartenant à } \mathbb{R}.$$

1. Résoudre l'équation (**E'**) : $y' + y = 0$.

2. Montrer que la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 2x$, est une solution de (**E**).

3. En déduire toutes les fonctions solutions de l'équation (**E**).

118 5 min Capacité 1, p. 271

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cos(4x) + 5\sin(3x)$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Calculer $f'(x)$.

2. Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ aux points A et B d'abscisses respectives 0 et π.

Capacité 10 ***Majorer ou minorer une intégrale, voir capacité 5 p.335***

1. Déterminer le signe des intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x \,\mathrm{d}x$ **b.** $\displaystyle\int_{1}^{0} x^2 \,\mathrm{d}x$ **c.** $\displaystyle\int_{1}^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \ln x \,\mathrm{d}x$

2. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right) \mathrm{d}x$.

a. Etudier le sens de variation de la suite (u_n).

b. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \ln 2$.
En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout réel $x \in [0;1]$ on a : $0 \leqslant \ln\left(1+x^n\right) \leqslant x^n$.
En déduire la limite de la suite (u_n).

1) a)

x	0	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$\ln(x)$	$\Vert$	$-$	$-$	0	$+$

Pour tout $x \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$, $\ln(x) \leq 0$

Par croissance de l'intégrale

$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln(x)\, dx \leq 0$

b) Pour tout $x \in [0;1)$:

$0 \leq x^2$

donc $\displaystyle\int_0^1 0 \, dx \leq \int_0^1 x^2 dx$

$0 \leq \displaystyle\int_0^1 x^2 dx$

donc $0 \geq \displaystyle\int_1^0 x^2 dx$

Capacité 11 ***Étudier une suite d'intégrales, voir capacité 7 p.337***

Soit f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

1. Démontrer que pour tout $t \in [2\,;+\infty[$ on a : $0 \leqslant f(t) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t}$.

2. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a : $0 \leqslant \displaystyle\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-2}}{\sqrt{2\pi}}$

3. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 2}$ est croissante.

Intégration par parties

PROPRIÉTÉS Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et dont les dérivées u' et v' sont continues sur I. Soit a et b deux réels de I.

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

DÉMONSTRATION

Les fonctions u et v sont dérivables sur I donc la fonction uv l'est aussi et $(uv)' = u'v + uv'$.
Donc pour tout réel x de I, $u(x)v'(x) = (uv)'(x) - u'(x)v(x)$.
Or, les fonctions u et v sont continues sur I car elles sont dérivables sur I. De plus u' et v' sont continues sur I donc les fonctions uv' et $u'v$ le sont également.

Donc $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left((uv)'(x) - u'(x)v(x)\right)\mathrm{d}x$

$= \int_a^b (uv)'(x)\mathrm{d}x - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ (propriété de linéarité).

Or, une primitive de la fonction $(uv)'$ est la fonction uv.

Donc $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$.

Cette méthode permet de transformer le calcul de l'intégrale d'une fonction. Un bon choix des fonctions u et v' conduit au calcul de l'intégrale d'une fonction dont on sait déterminer une primitive.

EXEMPLE : Calcul de $\int_0^\pi x\sin(x)\mathrm{d}x$.

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin(x)$ donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\cos(x)$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0 ; \pi]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[0 ; \pi]$.

Donc : $\int_0^\pi x\sin(x)\mathrm{d}x = \left[-x\cos(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos(x)\mathrm{d}x = \left[-x\cos(x)\right]_0^\pi + \left[\sin(x)\right]_0^\pi = \pi$.

Capacité 12 ***Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties, voir capacité 6 p.335***

1. Soit l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(x)\ \mathrm{d}x$.

   a. Compléter :
   Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\pi]$, on pose :

   $$\begin{array}{ll} u(x) = x & u'(x) = \ldots \\ v'(x) = \sin(x) & v(x) = \ldots \end{array}$$

   b. Calculer l'intégrale K en appliquant la méthode d'intégration par parties.

2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (3x-2)\ln(x)\ \mathrm{d}x$ avec la méthode d'intégration par parties.

3. **a.** Soit x un réel strictement positif, avec la méthode d'intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^{x} \ln(t)\ \mathrm{d}t$.

   b. En déduire une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0\,;+\infty[$.

125 20 min *Capacité 6, p. 335*

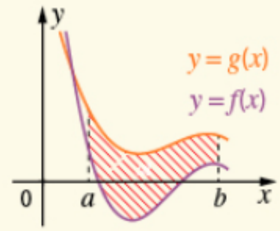
Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2x-1)\cos(x)\mathrm{d}x$.

2. $\int_1^{\mathrm{e}} 5x^2\ln(x)\mathrm{d}x$.

PROPRIÉTÉ **Aire entre deux courbes**

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I telles que pour tout réel x de I, $f(x) \leqslant g(x)$. Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$. L'aire $\mathscr{A}$, en u.a., de la surface délimitée par les courbes représentant les fonctions f et g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x$.

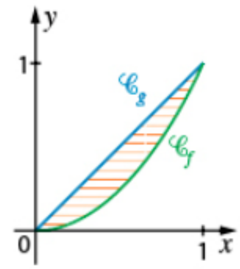


EXEMPLE : Soit f et g les fonctions définies sur [0 ; 1] par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$. Soit $\mathscr{S}$ le domaine délimité par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Pour tout réel x de [0 ; 1], on sait que $x^2 \geqslant x$.

Or, $\int_0^1 (x - x^2)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Donc, l'aire de $\mathscr{S}$, en unités d'aire, est $\frac{1}{6}$.



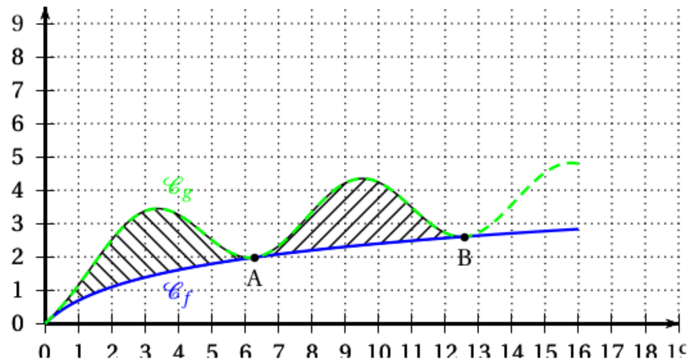
Capacité 13 ***Calculer l'aire entre deux courbes, capacité 8 p.337***

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0; 16]$ par

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x).$$

Dans un repère du plan $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g. Ces courbes sont données ci-dessous.

Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique.



102 Capacité 8, p. 337

Soit f et g les fonctions définies sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^3$ et $g(x) = x$, dont les courbes représentatives sont notées $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

1. Tracer les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

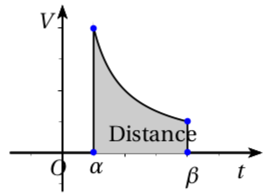
2. Préciser la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $[0\,;1]$.

3. Calculer l'aire, en unités d'aires, du domaine délimité par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Capacité 14 ***Calculer et interpréter la valeur moyenne d'une fonction, voir capacité 9 p.337***

Pour $t > 0$ la vitesse d'un mobile est $v(t) = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}$ (en m.s^{-1}).

1. Calculer la distance parcourue entre les instants $t = 1$ et $t = e^2$ (en s).
2. Calculer la vitesse moyenne du mobile entre les instants $t = 1$ et $t = e^2$.



Plus généralement, si on note $y = v(x)$ alors $\int_a^b v(x)dx$ est homogène au produit des grandeurs xy (ici m.s^{-1}.s = m). Puisque $b - a$ est homogène à x (en secondes s), la valeur moyenne de v sur $[a\,;\,b]$ est homogène à $\frac{xy}{x} = y$ (soir en m.s^{-1}), donc elle est dans la même unité que la fonction intégrée v.

Capacité 15 ***Calculer et interpréter la valeur moyenne d'une fonction, voir capacité 9 p.337***

1. On considère que la croissance d'un plant de maïs est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;250]$ par

$$f(t)=\frac{2\mathrm{e}^{0,04t}}{\mathrm{e}^{0,04t}+19}$$

Au bout de t jours avec t dans l'intervalle $[0\,;250]$, la hauteur du plant est de $f(t)$ mètres.

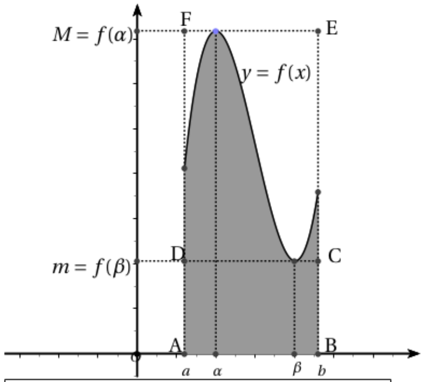
a. Déterminer la valeur exacte de la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\,;250]$.

b. En donner une valeur approchée à 10^{-2} près et interpréter ce résultat.

2. $\boxed{\text{Inégalité de la moyenne}}$

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. On suppose que pour tout $x\in[a\,;b]$ on a : $m\leqslant f(x)\leqslant M$, démontrer que :

$$m\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M$$



$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est comprise entre l'aire du rectangle $ABCD$ qui est $m(b-a)$ et l'aire du rectangle $ABEF$ qui est $M(b-a)$