Corrigé des capacités du chapitre combinatoire

Capacité 1 ***Maîtriser les opérations ensemblistes***

On considère deux ensembles : $A = \{1,3,8,4\}$ et $B = \{4,6,5,1,3\}$.

1. Déterminer un ensemble C tel que $A \subset C$.
2. Déterminer une partie de A, distincte de A et non vide.
3. Donner un élément de B qui n'appartient pas à A.
4. Déterminer l'intersection de A et B et donner son cardinal.

5. Déterminer la réunion de A et B et donner son cardinal.
6. Déterminer le complémentaire de A dans $A \cup B$.

1) L'ensemble $C = \{1,3,8,4,5\}$ contient A.
On a $A \subset C$.

2) $D = \{1,3,4\}$ est une partie de A distincte de A et non vide.

3) L'élément 6 appartient à B mais pas à A.

4) $A \cap B = \{1,3,4\}$

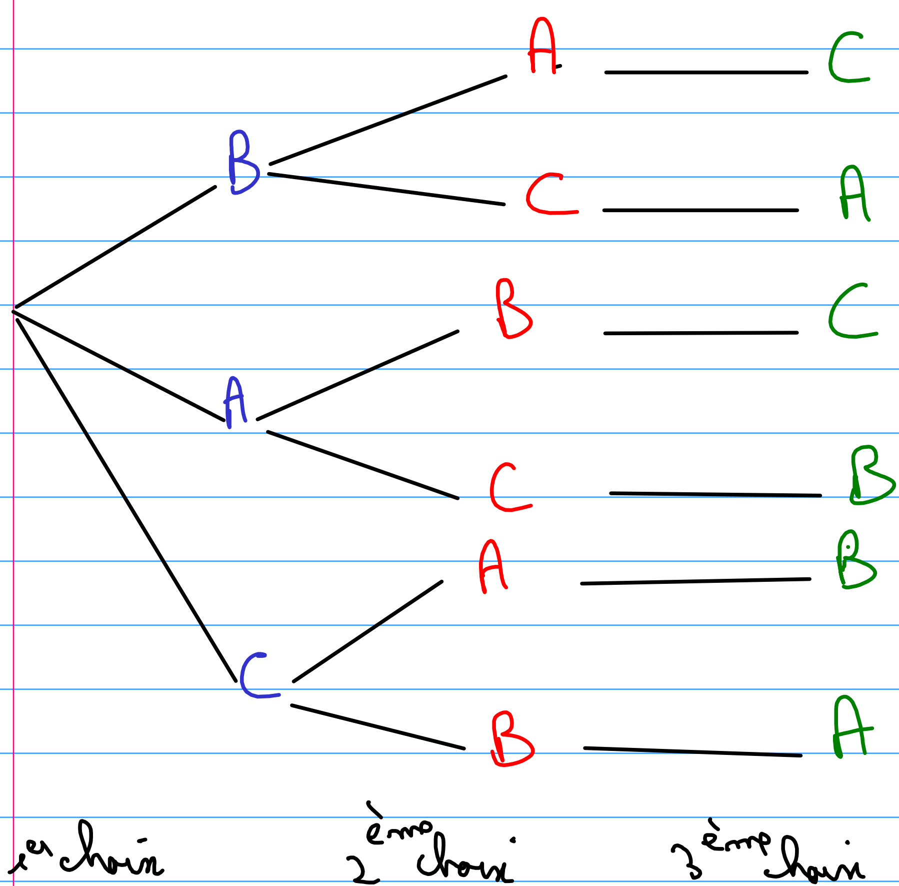
Le cardinal de $A \cap B$ est donc égal à 3.

Capacité 2 ***Effectuer un dénombrement simple à l'aide d'un arbre ou d'un tableau***

1. Combien de mots de 3 lettres, qui aient un sens ou non, peut-on former en mélangeant les 3 lettres du mot « BAC »?

2. On lance deux fois de suite un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6. Déterminer la probabilité que la somme des deux résultats obtenus soit un multiple de 3.

1) Dénombrons les anagrammes du mot BAC avec un arbre de dénombrement.



On a :

$3 \times 2 \times 1 = 6$ anagrammes du mot BAC.

2) On peut modéliser l'univers Ω de cette expérience aléatoire par l'ensemble des couples ou 2-uplets constitués du résultat du 1er dé et du résultat du 2nd dé.
On a $6 \times 6 = 36$ 2-uplets et on peut utiliser un arbre ou un tableau à 2 entrées pour les énumérer.

Dé 1 \ Dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

On s'intéresse à la somme des deux faces obtenues donc on peut remplir le tableau avec les résultats des sommes.
On entoure en rouge les sommes multiples de 3, il en existe 12.

Les dés étant équilibrés on peut définir sur Ω une loi d'équiprobabilité.
La probabilité de l'événement : "obtenir un multiple de 3" est donc égale à :

$$\frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues totales}} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

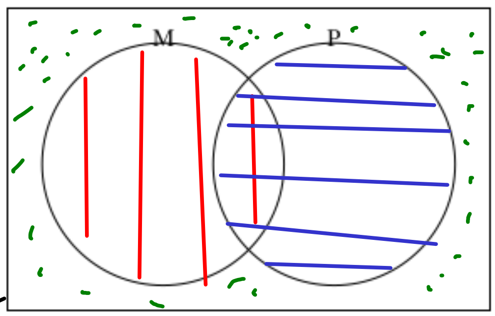
Capacité 3 ***Utiliser le principe additif pour dénombrer***

Dans une classe de 35 élèves, 25 élèves suivent la spécialité Mathématiques, 20 élèves suivent la spécialité Physique et 8 élèves ne suivent ni la spécialité Mathématiques ni la spécialité Physique.

1. Compléter le diagramme de Venn ci-dessous où M représente les Mathématiques et P représente la Physique.

Ni Maths
Ni Physique
$\overline{M} \cap \overline{P}$
$\text{Card}(\overline{M} \cap \overline{P}) = 8$

Ω : la classe
$\text{Card}(\Omega) = 35$



Maths
$\text{Card}(M) = 25$

Physique
$\text{Card}(P) = 20$

Maths et Physique

2. Calculer le nombre d'élèves qui suivent la spécialité Mathématiques ou la spécialité Physique.

3. Calculer le nombre d'élèves qui suivent la spécialité Mathématiques et la spécialité Physique.

2) On a $\text{Card}(\overline{M} \cap \overline{P}) = 8$

$\overline{M} \cap \overline{P}$ est le complémentaire de $M \cup P$

donc $\text{Card}(M \cup P) = \text{card}(\Omega) - \text{Card}(\overline{M} \cap \overline{P})$

$\text{Card}(M \cup P) = 35 - 8 = 27$

3) D'après la formule du crible, on a :

$\text{card}(M \cup P) = \text{card}(M) + \text{card}(P) - \text{card}(M \cap P)$

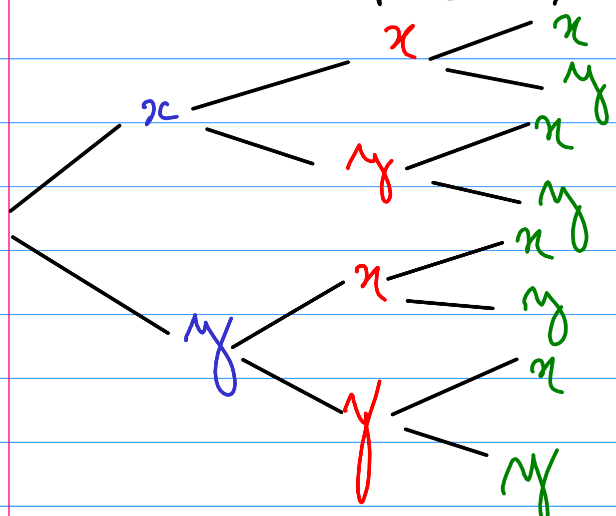
donc on a : $\text{card}(M \cap P) = \text{card}(M) + \text{card}(P) - \text{card}(M \cup P)$

On a donc $\text{card}(M \cap P) = 25 + 20 - 27 = 18$

Capacité 4 ***Utiliser le principe multiplicatif pour dénombrer***

1. Déterminer la liste des triplets de l'ensemble $E = \{x, y\}$. On pourra s'aider d'un arbre.
2. Combien de séquences génétiques de 50 nucléotides peut-on former à l'aide des quatre nucléotides de base A, C, G et T ?
3. Un octet est codée sur 8 bits et un bit peut prendre deux valeurs 0 ou 1. Combien de valeurs différentes peut-on coder sur un octet ?
4. Un pixel est constitué de trois composantes (Rouge, Vert, Bleu) et chacune est codée sur un octet. Combien de couleurs différentes peut-on coder ainsi ?

1) Ensemble des triplets / 3-uplets de l'ensemble $E = \{x, y\}$



On a $2^3 = 8$ triplets de l'ensemble E :
(x, x, x)
(x, x, y)
...
(y, y, y)

2) Avec les 4 nucléotides pris dans l'ensemble $E = \{A, C, G, T\}$ on peut former 4^{50} séquences génétiques, c'est le nombre de 50-uplets de E, ou encore le cardinal du produit cartésien :

$$\underbrace{E \times \dots \times E}_{50 \text{ fois}} = E^{50}$$

3) Le nombre de 8-uplets d'éléments de $E = \{0; 1\}$ est $2^8 = 256$

4) Chaque pixel codé sur un octet est un élément du produit cartésien $F = \{0;1\}^8$ qui ~~a~~ pour cardinal $2^8 = 256$.
Un pixel de couleur est un 3-uplet d'éléments de F donc il existe $(\text{Card}(E))^3 = 256^3$ pixels de couleurs distincts.

On a $256^3 = 16\,777\,216 \approx 16{,}8$ millions de couleurs

Capacité 5 ***Dénombrer des k-uplets d'éléments deux à deux distincts***

1. Sur sa guitare, Martha joue avec sept notes : *Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Si*. Combien d'accords différents peut-elle obtenir avec quatre notes distinctes de cet ensemble? et avec quatre notes qui peuvent être confondues ?

2. Huit athlètes s'affrontent sur un 100 mètres. Déterminer le nombre de podiums possibles (or, argent, bronze).

3. Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle retourne le nombre de k-uplets d'éléments deux à deux distincts d'un ensemble à n éléments :

```
def kuplets_distincts(n, k):
    c = 1
    ...............
    ...............
    return c
```

1). Ensemble des notes : $E = \{Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Si\}$
$\text{Card}(E) = 7$.

. Nombre de 4-uplets d'éléments distincts de E :
$7 \times 6 \times 5 \times 4 = 820$

• Nombre de 4-uplets d'éléments de E qui peuvent être identiques : 7^4.

2) L'ensemble E est constitué des 8 coureurs.
Card(E) = 8
Le nombre de podiums est le nombre de 3-uplets d'éléments distincts de E : $8 \times 7 \times 6 = 336$.

```
def kuplets_distincts(n, k):
    c = 1
    for i in range(0, k):
        c = c × (n-i)
    return c
```

Algorithmique 1 *Factorielle de n*

1. Déterminer le nombre de classements possibles dans une course de 8 chevaux.
2. À l'aide du tableau page 16 du manuel Indice, calculer 12! avec la calculatrice. Donner une interprétation de ce nombre.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a $n! = n \times (n-1)!$.
4. Démontrer que le nombre de k-uplets d'éléments deux à deux distincts d'un ensemble à n éléments est égal à $\frac{n!}{(n-k)!}$.
5. Compléter la fonction Python ci-dessous pour que `fact(n)` soit égal à n! pour tout entier naturel n non nul.

```
def fact(n):
    f = 1
    for k in range(...., ......):
        f = .....
    return f
```

1) Le nombre de classements possibles dans une course de 8 chevaux est le nombre de permutations d'un ensemble à 8 éléments, c'est-à-dire 8!

On a $8! = 40320$

2) On a $12! = 479\,001\,600$

3) Pour tout entier naturel n non nul, on a :

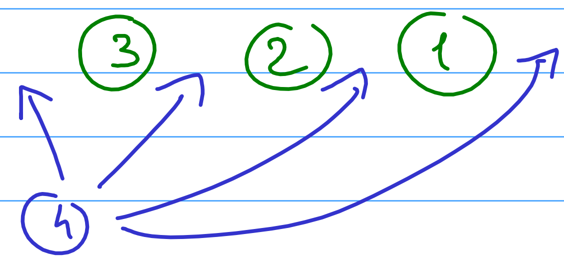
$$n! = \underbrace{1\times 2\times \dots \times(n-1)}_{(n-1)!} \times n = (n-1)! \times n$$

Par ailleurs considérons l'ensemble $E_n = \{1,\dots,n\}$ des n premiers entiers naturels.

On a $E_n = E_{n-1} \cup \{n\}$

Pour une permutation de E_{n-1} fixée, il existe n façons d'insérer l'élément n, donc chaque permutation de E_{n-1} va donner n permutations de E_n.

<u>Un exemple pour $n=4$:</u>



permutation de E_{n-1}

En insérant 4 on obtient 4 permutations de E_n:

4 3 2 1
3 4 2 1
3 2 4 1
3 2 1 4

De plus chaque permutation de E_n est une permutation de E_{n-1} dans laquelle on a inséré l'élément n.

On en déduit que $\mathrm{card}(E_n) = n \times \mathrm{card}(E_{n-1})$

et donc $n! = n \times (n-1)!$

```
def fact(n):
    f = 1
    for k in range(..1.., n+1):   # ou 2
        f = f×k
    return f
```

Algorithmique 2 *Tirage aléatoire d'une permutation*

On peut modéliser le tirage aléatoire d'une permutation de l'ensemble des entiers entre 1 et n, par le n-uplet obtenu lors de n tirages successifs sans remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

Compléter la fonction Python ci-dessous, pour que `generer_perm(n)` soit un tirage aléatoire de l'ensemble des entiers entre 1 et n.

```
def generer_perm(n):
    perm = []
    urne = list(range(1, n + 1))
    for k in range(n):
        index_aleatoire = randint(0, len(urne)-1)
        choix = urne.pop(index_aleatoire)
        perm.append(.choix..)
    return perm
```

Capacité 6 ***Dénombrement par codage binaire et fonction indicatrice***

Soit E un ensemble fini contenant n éléments : $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.
On définit une fonction indicatrice $\mathscr{I}$ de E, qui à chaque partie P de $\mathscr{P}(E)$ associe l'unique n-uplets de $\{0, 1\}$ tel que pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\begin{cases} i_k = 1 \text{ si } e_k \in P \\ i_k = 0 \text{ si } e_k \notin P \end{cases}$$

1. Déterminer le nombre de parties de l'ensemble à 0 élément, l'ensemble vide noté $\emptyset$.

2. On considère un ensemble E à trois éléments $E = \{e_1, e_2, e_3\}$.

- **a.** Énumérer toutes les parties de $\mathscr{P}(E)$ puis déterminer pour chaque partie son image par la fonction indicatrice $\mathscr{I}$ de E décrite ci-dessus.
- **b.** Justifier que deux partie distinctes de $\mathscr{P}(E)$ ont des images distinctes par la fonction indicatrice $\mathscr{I}$ de E. On dit que la fonction indicatrice de E est *injective*.
- **c.** Justifier que tout 3-uplet de $\{0, 1\}$ est l'image d'une partie de $\mathscr{P}(E)$ par la fonction indicatrice $\mathscr{I}$ de E. On dit que la fonction indicatrice de E est *surjective*.
- **d.** La fonction indicatrice de E étant *injective* et *surjective*, on dit qu'elle est *bijective*, cela signifie qu'on peut définir sa fonction réciproque : pour tout 3-uplet de $\{0, 1\}$, il existe une unique partie de $\mathscr{P}(E)$ dont elle est l'image. Que peut-on en déduire pour le nombre d'éléments de $\mathscr{P}(E)$?

3. Généraliser la question précédente au cas d'un ensemble E à n éléments avec n entier non nul.

1) L'ensemble vide noté $\emptyset$, a une seule partie : lui-même.

2) Soit un ensemble à trois éléments $E = \{e_1, e_2, e_3\}$.

a) Déterminer toutes les parties d'un ensemble à 3 éléments équivaut à déterminer toutes les images de la fonction indicatrice de E définie sur l'ensemble $\mathcal{I}(E)$ de ses parties.

L'image d'une partie de E par la fonction indicatrice est un triplet de l'ensemble $\{0; 1\}$ indiquant si chaque élément e_1, e_2 puis e_3 appartient à la partie : 1 s'il appartient et 0 sinon.

Image de la fonction indicatrice

	Partie
0 0 0	$\emptyset$ ensemble vide
0 0 1	$\{e_3\}$
0 1 0	$\{e_2\}$
0 1 1	$\{e_2, e_3\}$
1 0 0	$\{e_1\}$
1 0 1	$\{e_1, e_3\}$
1 1 0	$\{e_1, e_2\}$
1 1 1	$\{e_1, e_2, e_3\}$

b) Deux parties distinctes de $\mathcal{P}(E)$ ont au moins un élément qui appartient à l'une mais pas à l'autre ce qui donne des valeurs différentes dans les images de ces deux parties par la fonction indicatrice

c) Par définition de la fonction indicatrice, toute partie de E a une image par la fonction indicatrice

(*) distinctes évidemment.

d) On en déduit que le nombre d'éléments de $\mathcal{P}(E)$ (nombre de parties de E) est le nombre d'images* de la fonction indicatrice, c'est-à-dire 2^3 dans l'exemple d'un ensemble E à 3 éléments.

2) En raisonnant comme pour un ensemble à 3 éléments, on obtient que le nombre de parties d'un ensemble E à n éléments est le nombre d'images distinctes de sa fonction

indicatrice, c'est-à-dire le nombre de n-uplets de l'ensemble $\{0;1\}$, c'est-à-dire 2^n.

En informatique on parlerait du nombre de mots codés sur n bits.