Corrigés du chapitre loi binomiale

Capacité 1 ***Modéliser une situation par une succession d"épreuves indépendantes et calculer des probabilités***

Des robots se trouvent au centre de gravité O d'un triangle de sommets S, I et X.
Chacun se déplace en trois étapes successives de la manière suivante :

- à chaque étape, il passe par l'un des trois sommets S, I et X puis il rejoint le point O;
- les robots sont programmés de telle sorte que, lors d'une étape, la probabilité de passer par le sommet S est égale à celle de passer par le sommet X et la probabilité de passer par le sommet S est le double de celle de passer par le sommet I;
- les différentes étapes sont indépendantes les unes des autres;
- on ne tient pas compte des passages par O.

Un seul robot se trouve au point O.

1. Démontrer qu'à chaque étape, la probabilité que le robot passe par le sommet I est égale à $\frac{1}{5}$.
2. On note E l'évènement : « au cours des trois étapes, le robot passe successivement par les 3 sommets S, I et X dans cet ordre ».

   Démontrer que la probabilité de E est égale à $\frac{4}{125}$.
3. On note F l'évènement : « au cours des trois étapes, le robot passe exactement par les 3 sommets S, I et X dans un ordre quelconque ».

   Déterminer la probabilité de F.

1) À chaque étape, on a d'après l'énoncé :

$P(S) = P(X) = 2P(I)$

De plus $\{S, X, I\}$ forme une partition de l'univers, donc : $P(S) + P(X) + P(I) = 1$

$\iff 2P(I) + 2P(I) + P(I) = 1$

$\iff 5P(I) = 1$

$\iff P(I) = \frac{1}{5}$

2) E est réalisé par la liste d'évènements indépendants (S, I, X). D'après une propriété du cours :

$P((S,I,X)) = P(S) \times P(I) \times P(X) = 2P(I) \times P(I) \times 2P(I)$

$$P(E) = 4\left(P(I)\right)^3 = 4\times\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{4}{125}$$

3) Le nombre de listes d'évènements indépendants réalisant F est le nombre de permutations de l'ensemble $\{S, I, X\}$ c'est-à-dire $3! = 3\times2\times1 = 6$.

Chaque liste d'évènements constituée des évènements S, I et X a une probabilité égale au produit $P(S)\times P(I)\times P(X) = \frac{4}{125}$

On en déduit que $P(F) = 6\times\frac{4}{125} = \frac{24}{125}$

Algorithmique 1 ***Simuler une variable aléatoire de Bernoulli***

On lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On appelle « succès » l'apparition de la face 6.

Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la face est 6 et la valeur 0

1. X suit-elle une loi de Bernoulli ? Si oui, déterminer son paramètre.
2. On rappelle que `randint(a, b)` est un entier choisi aléatoirement entre deux entiers a et b compris. Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle simule la réalisation d'une réalisation de la variable aléatoire X :

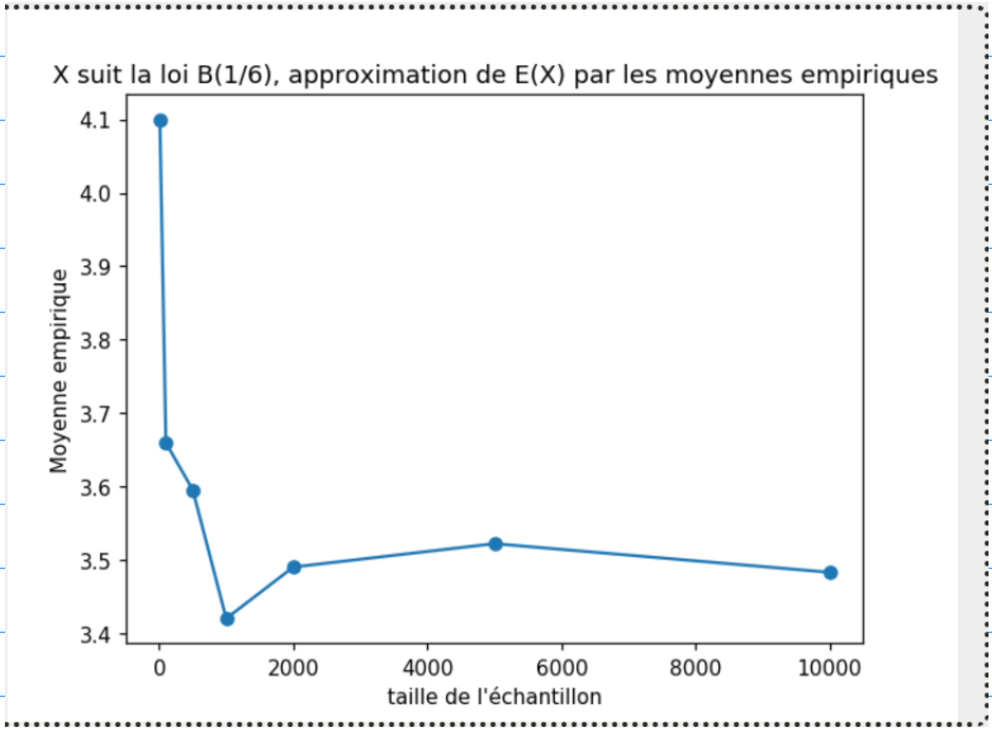
```
from random import randint

def simulX():
    return .....
```

3. De quelle valeur devraient se rapprocher `mystere(1000)`, `mystere(10000)` et `mystere(100000)` ? Justifier.

```
from random import randint

def mystere(n):
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + simulX()
    return s / n
```

https://frama.link/LoiBinomialeExemplesCours2021

```python
# Exemples du cours Loi Binomiale

# Algorithmique 1
from random import randint

def simulX():
    return randint(1, 6)

def mystere(n):
    """Approximation de l'espérance de X
    par la moyenne empirique (loi faible des grands nombres)
    """
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + simulX()
    return s / n

def graphique_algo1():
    # Graphique des valeurs de mystere()
    import matplotlib.pyplot as plt
    tx = [10, 100, 500, 1000, 2000, 5000, 10000]
    ty = [mystere(n) for n in tx]
    plt.clf()
    plt.title("X suit la loi B(1/6), approximation de E(X) par les moyennes empiriques")
    plt.xlabel("taille de l'échantillon")
    plt.ylabel("Moyenne empirique")
    plt.plot(tx, ty, marker = 'o', ls='-')
    plt.show()

graphique_algo1()
```



Capacité 2 ***Modéliser une situation par un schéma de Bernoulli***

Pour chacune des expériences aléatoires suivantes, déterminer si elle peut être modélisée par un schéma de Bernoulli et si oui, préciser ses paramètres.

1. On lance dix fois une pièce équilibrée et on compte le nombre de « Face» obtenues.
2. On lance deux fois un dé cubique à 6 faces numérotées de 1 à 6 et on compte le nombre de faces paires obtenues.
3. On tire trois fois et avec remise une boule dans une urne contenant 10 noires et 7 boules rouges et on note le nombre de boules rouges obtenues.
4. On tire trois fois et sans remise une boule dans une urne contenant 10 noires et 7 boules rouges et on note le nombre de boules rouges obtenues.

5. Un opérateur de télémarketing appelle 200 clients dans la journée. La probabilité qu'un client accepte l'offre commerciale est de $0,15$. Le chef de l'opérateur note le nombre de clients qui ont accepté l'offre.

1) Schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{2}$

2) Schéma de Bernoulli de paramètres $n = 2$ et $p = \frac{1}{2}$

3) Schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{7}{17}$

4) Tirages sans remise donc ce n'est pas un schéma de Bernoulli.

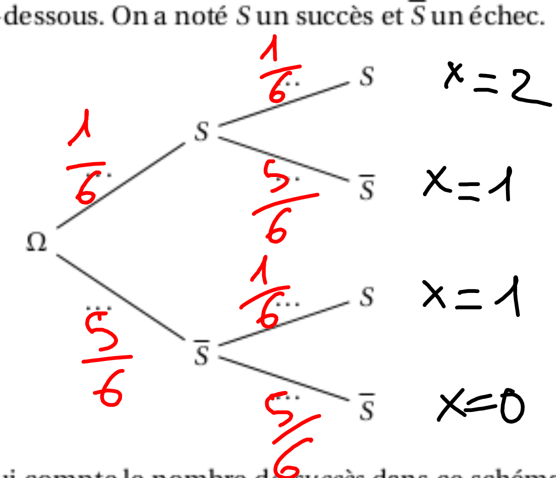
5) Schéma de Bernoulli de paramètres $n = 200$ et $p = 0,15$.

Capacité 3 *Modéliser une situation par un schéma de Bernoulli*

On considère l'épreuve de Bernoulli E de paramètre $p = \frac{1}{6}$ qui consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et à compter comme *succès* l'obtention d'un 6.

1. On répète 2 fois l'expérience aléatoire E de façon indépendante.

a. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous. On a noté S un succès et $\overline{S}$ un échec.



b. Soit la variable aléatoire X_2 qui compte le nombre de *succès* dans ce schéma de Bernoulli de paramètres $n = 2$ et $p = \frac{1}{6}$.

c. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X_2 ?

d. Déterminer sa loi de probabilité et son espérance.

1) c) X_2 prend les valeurs 0, 1 ou 2.

d) Loi de probabilité de X_2 :

k	0	1	2
$P(X_2=k)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$2\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^2$

Espérance de X : $E(X) = 0\times\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 1\times 2\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6} + 2\times\left(\frac{1}{6}\right)^2$

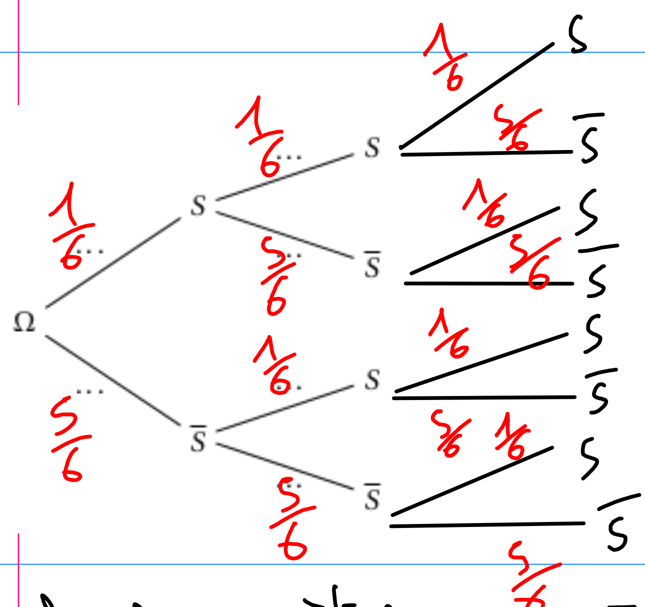
$$E(X) = 2\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times(5+1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Sur un échantillon de grande taille de réalisations indépendantes de X, la moyenne empirique de X doit être proche de $E(X) \simeq \frac{1}{3}$. C'est la loi faible des grands nombres.

2. On répète 3 fois l'expérience aléatoire E de façon indépendante.

- **a.** Représenter ce schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{6}$ par un arbre pondéré en notant S un succès et $\overline{S}$ un échec.
- **b.** Soit la variable aléatoire X_3 qui compte le nombre de *succès* dans ce schéma de Bernoulli de paramètres $n = 2$ et $p = \frac{1}{6}$.
- **c.** Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X_3 ?
- **d.** Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(X_3 = 3)$ et $\mathbb{P}(X_3 = 0)$.
- **e.** Combien de chemins dans l'arbre réalise 2 succès ? Exprimer ce nombre à l'aide d'un coefficient binomial et en déduire une formule de calcul de $\mathbb{P}(X_3 = 2)$.
- **f.** Exprimer de même $\mathbb{P}(X_3 = 1)$.
- **g.** Dresser un tableau de la loi de probabilité de X_3 et déterminer son espérance.

a)



b) On a une répétition de $n=3$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre $p = \frac{1}{6}$. C'est un schéma de Bernoulli de paramètres $n=3$ et $p = \frac{1}{6}$.

X_3, qui compte le nombre de succès dans ce schéma, suit une loi binomiale de paramètres $n=3$ et $p = \frac{1}{6}$.

c) X_3 prend les valeurs 0, 1, 2 et 3.

d) $P(X_3=0) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$.

$P(X_3=1) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$

e) Le nombre chemins réalisant 2 succès parmi 3 épreuves est le nombre de combinaisons de 2 éléments pris parmi 3, c'est-à-dire.

$\binom{3}{2} = 3$

Chaque chemin réalisant 2 succès a une probabilité de $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6}$ donc :

$$P(X_3=2) = \underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{nombre de chemins}} \times \underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6}}_{\text{probabilité d'un chemin}}$$

donc $P(X_3=2) = 3 \times \frac{1}{6^2} \times \frac{5}{6} = 3 \times \frac{5}{6^3} = \frac{5}{72}$

f) De même on a :

$$P(X_3=1) = \binom{3}{1} \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 3 \times \frac{5^2}{6^3} = \frac{5^2}{72} = \frac{25}{72}$$

g)

k	0	1	2	3
$P(X_3=k)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^3$	$3 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2$	$3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^3$

On vérifie que : $P(X_3=0) + P(X_3=1) + P(X_3=2) + P(X_3=3) = 1$

me X_n.

```python
from random import randint

def simulX(n):
    nbsucces = 0
    for k in range(n):
        if randint(1, 6) == 6 :
            nbsucces = nbsucces + 1
    return nbsucces
```

```python
## Question 4

from random import random
from math import floor

def bernoulli_truque(p):
    return floor(p + random())

def simulY(n, p):
    nbsucces = 0
    for k in range(n):
        nbsucces = nbsucces + bernoulli_truque(p)
    return nbsucces
```

On a $0 \leq random() < 1$

$\iff p \leq p + random() < 1 + p$

$floor(p + random()) == 0$ ssi $p \leq p + random() < 1$

ssi $0 \leq random < 1 - p$

Or random suit une loi uniforme sur $[0;1[$

donc $P(0 \leq \text{random}() < 1-p) = 1-p$

et donc $P(\text{floor}(\text{random}()+p) == 0) = 1-p$

et $P(\text{floor}(\text{random}()+p) == 1) = 1-(1-p) = p$