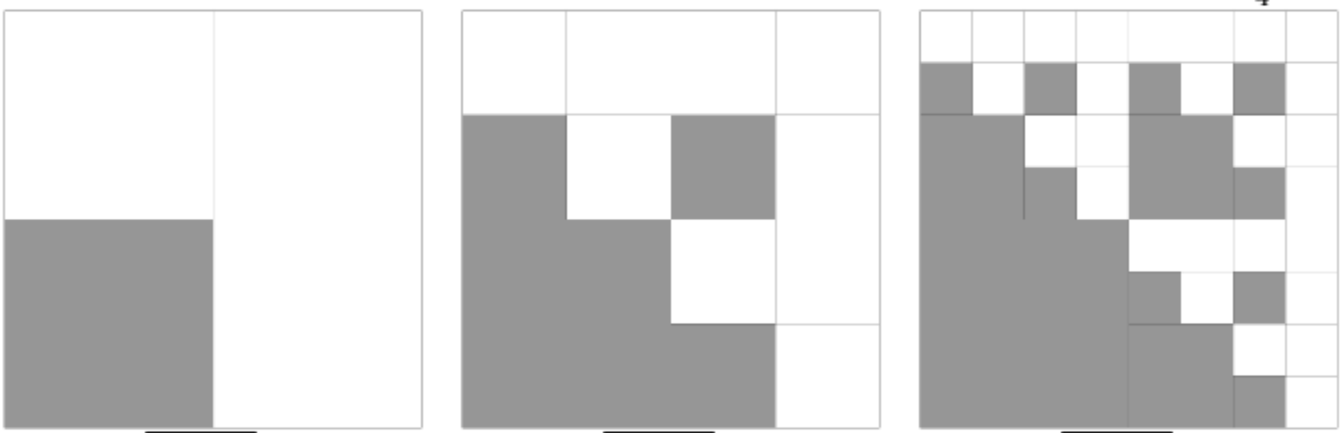
Capacités du chapitre 2

Capacité 1 ***Conjecturer la limite d'une suite définie par un motif géométrique***

On colorie un carré en plusieurs étapes :

- Étape 1 : on partage le carré en quatre carrés de même aire et on colorie le carré en bas à gauche;
- Étape 2 : on partage chaque carré non coloriée en quatre en quatre carrés de même aire et on colorie le carré en bas à gauche;
- Étapes suivantes : on répète le procédé avec chaque carré non colorié obtenu à l'étape précédente.

Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit b_n la fraction du carré initial qui n'est pas coloriée à l'étape n, ainsi $b_1 = \dfrac{3}{4}$.



Étape 1 Étape 2 Étape 3

1. Pour tout entier $n \geqslant 0$, exprimer b_{n+1} en fonction de b_n et en déduire la nature de la suite (b_n).
2. Pour tout entier $n \geqslant 0$, déterminer une formule explicite de b_n.
3. Conjecturer avec la calculatrice si la suite (b_n) possède une limite finie.
4. Écrire une fonction `Python` qui retourne le nombre d'étapes nécessaires pour que 99% du carré initial soit colorié.

1) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

$$b_{n+1} = \frac{3}{4} \times b_n$$

On en déduit que la suite (b_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

2) D'après une propriété du cours, pour tout entier $n \geqslant 0$: $b_n = b_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

donc $b_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ car $b_0 = 1$

3) Avec la calculatrice on peut conjecturer que $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$

4)

```python
# Type your text here
#u(0) = 1
#u(n+1)= 0.75 * u(n)
# recherche du plus petit entier
#n tel que u(n) <= 0.01

def seuil(s):
  u = 1
  n = 0
  while u > s:
    u = 0.75 * u
    n = n + 1
  return n

print(seuil(0.01))
```

deg PYTHON

```
>>> from chapitre2_capacite1 -
17
>>> |
```

Relancer Sauvegarder

Capacité 2 *Utiliser la définition d'une suite convergente*

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.

   a. La suite (u_n) est-elle monotone ? Justifier.

   b. Quelle limite peut-on conjecturer pour la suite (u_n) ?

   c. Déterminer à partir de quel rang, on a $u_n \in \left]-10^{-3} ; 10^{-3}\right[$. $\left]1-10^{-3} ; 1+10^{-3}\right[$

   d. À partir de la définition, démontrer que (u_n) converge.

2. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $v_n = 1 - \dfrac{(-1)^n}{n}$.

   a. La suite (v_n) est-elle monotone ? Justifier.

   b. Conjecturer la limite de (v_n) puis démontrer qu'elle converge à partir de la définition.

3. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = (-1)^n$.

1) a) Démontrons que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante :

Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{1}{n+1} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$

donc $u_{n+1} - u_n > 0$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est donc strictement croissante

deg SUITES

Suites | Graphique | Tableau

Régler l'intervalle

n	u_n
1	0
2	0.5
3	0.6666667
4	0.75
5	0.8
6	0.8333333
7	0.8571429
8	0.875

b) Avec le tableur de la calculatrice, on peut conjecturer que (u_n) converge vers 1.

c) Déterminons s'il existe un plus petit entier naturel $n \geq 1$ tel que :

$$u_n \in \left]1-10^{-3} ; 1+10^{-3}\right[$$

On raisonne par équivalences :

$$u_n \in \left]1-10^{-3} ; 1+10^{-3}\right[\iff 1-10^{-3} < 1-\frac{1}{n} < 1+10^{-3}$$

$$\iff 10^{-3}-1 > \frac{1}{n}-1 > -1-10^{-3}$$

$$u_n \in \left]1-10^{-3} ; 1+10^{-3}\right[\iff 10^{-3} > \frac{1}{n} > -10^{-3}$$

On sait que n entier naturel non nul, donc :

$$u_n \in \left]1-10^{-3} ; 1+10^{-3}\right[\iff 10^{-3} > \frac{1}{n} > 0$$

$$\boxed{u_n \in \left]1-10^{-3} ; 1+10^{-3}\right[\iff 10^{3} < n}$$

À partir du rang $10^3+1 = 1001$, on aura $u_n \in \left]1-10^{-3} ; 1+10^{-3}\right[$.

d) On démontre de même qu'en c) que pour tout réel $a>0$, l'entier n_a immédiatement supérieur à $\frac{1}{a}$ est telle que pour tout entier $n \geq n_a$, $u_n \in \left]1-a ; 1+a\right[$

Ainsi la suite (u_n) vérifie la définition d'une suite qui converge vers 1.

2) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par : $v_n = 1 - \frac{(-1)^n}{n}$

a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n} = (-1)^{n+1} \times \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)$$

donc $v_{n+1} - v_n = (-1)^{n+1} \times \frac{2n+1}{n(n+1)}$

On a $\frac{2n+1}{n(n+1)} > 0$ donc $v_{n+1} - v_n$ du signe de $(-1)^{n+1}$. Mais $(-1)^{n+1}$ n'est pas de signe constant, car son signe dépend de la parité de n. Ainsi $v_{n+1} - v_n$ n'est pas de signe constant et la suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ n'est pas monotone.

deg SUITES

Suites Graphique Tableau

Régler l'intervalle

n	u_n
1	2
2	0.5
3	1.333333
4	0.75
5	1.2
6	0.8333333
7	1.142857
8	0.875

2) b) Avec le tableau de la calculatrice, on peut conjecturer que $(v_n)_{n \geq 1}$ converge vers 1

c) Démontrons que (v_n) converge vers 1

Soit a un réel strictement positif.

On raisonne par équivalences :

$$v_n \in]1-a;1+a[\iff 1-a < 1 - \frac{(-1)^n}{n} < 1+a$$

$$v_n \in]1-a;1+a[\iff -a < \frac{(-1)^n}{n} < a$$

On passe à la valeur absolue :

$$v_n \in]1-a;1+a[\iff \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| < a$$

$$\iff \frac{1}{n} < a$$

$$v_n \in]1-a;1+a[\iff n > \frac{1}{a}$$

Ainsi pour tout réel $a > 0$, il existe un entier n_a immédiatement supérieur à $\frac{1}{a}$, tel que pour tout entier $n \geqslant n_a$:

$$v_n \in]1-a;1+a[$$

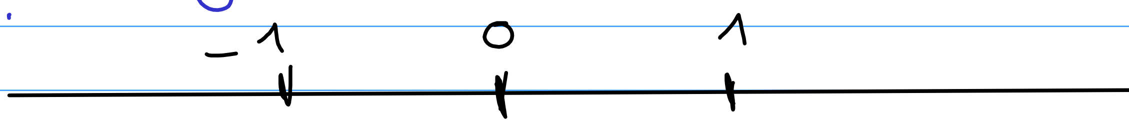
$\boxed{\text{Ainsi la suite } (v_n) \text{ vérifie la définition d'une suite convergeant vers } 1.}$

3) Soit $(w_n)_{n \geqslant 0}$ la suite définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par :

$$w_n = (-1)^n$$

Démontrons par l'absurde que la suite (w_n) ne converge pas vers un réel l.

Hypothèse : on suppose que la suite (w_n) converge vers un réel ℓ.



Par définition il existe un entier $n_{0,5}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_{0,5}$, on a :

$w_n \in]\ell - 0,5 ; \ell + 0,5[$

En particulier on doit avoir :
$w_{n_{0,5}}$ et $w_{n_{0,5}+1}$ dans l'intervalle
$]\ell - 0,5 ; \ell + 0,5[$.

Or $|w_{n_{0,5}} - w_{n_{0,5}+1}| = 2$ car deux termes consécutifs de la suite ont pour valeurs -1 et 1.

On aboutit à une contradiction : la distance entre $w_{n_{0,5}}$ et $w_{n_{0,5}+1}$ est de 2 et ils doivent appartenir à $]\ell - 0,5 ; \ell + 0,5[$ d'amplitude 1.

Par conséquent l'hypothèse de départ est fausse et on peut affirmer que la suite (w_n) ne converge pas vers 1.