Capacités du cours sur le logarithme népérien

Capacité 1 *Utiliser la fonction logarithme dans un contexte*

La magnitude d'un séisme d'amplitude maximale A est mesurée *l'échelle de Richter* par $M = \dfrac{\ln\left(\frac{A}{A_0}\right)}{\ln(10)}$ où A_0 est une amplitude de référence. Cette formule s'écrit souvent $M = \log\left(\dfrac{A}{A_0}\right)$ où $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$ est la fonction logarithme décimal (touche Log de la calculatrice).

1. Déterminer avec la calculatrice la magnitude sur l'échelle de Richter des séismes suivants :
   - **a.** Un séisme d'amplitude A_0.
   - **b.** Un séisme d'amplitude $10A_0$.
   - **c.** Un séisme d'amplitude $20A_0$.
   - **d.** Un séisme d'amplitude $10^n A_0$ avec n entier naturel. Quelle conjecture peut-on formuler ?
   - **e.** le séisme de Barcelonnette (France 2014) d'amplitude $A = 2 \times 10^5 A_0$.
2. Exprimer en fonction de A_0 l'amplitude maximale du séisme d'Amatrice (Italie 2016) dont la magnitude était de 6,2 sur l'échelle de Richter.
3. *L'échelle de Richter* est une **échelle logarithmique**, la valeur représentée sur l'échelle est le logarithme (népérien ou décimal) de la grandeur mesurée. D'autres exemples d'échelles logarithmiques sont présentés aux exercices 92 p. 148 (magnitude d'un astre) et 173 p. 256 (intensité sonore en décibels). Quel est l'intérêt d'une échelle logarithmique par rapport à une échelle linéaire ?

$\log(1) = 0$ ← séisme A_0

amplitude

$10\,A_0$

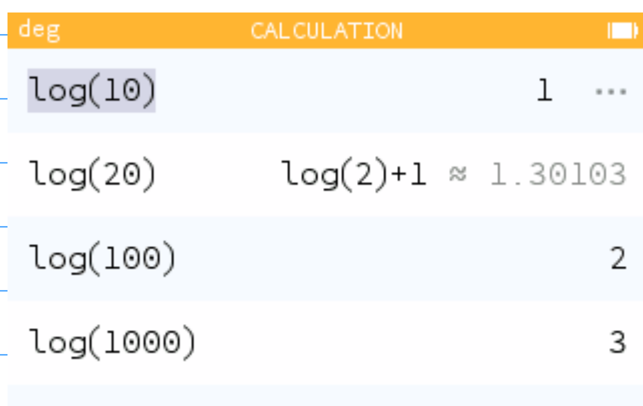
$\times 10$

$20\,A_0$

$100\,A_0$

$\times 10$

$1000\,A_0$



magnitude

1

$1 + \log(2) \simeq 1{,}3$ $+1$

2

$+1$

3

suite géométrique ⟷ suite arithmétique

$10^n A_0$

$\log\left(\dfrac{10^n A_0}{A_0}\right) = \log(10^n) = n \log(10)$

deg CALCULATION

$\log(2\times10^5)$

$\log(2)+5 \approx 5.30103$

$10^{6.2}$

1584893

relation fondamentale du logarithme

$\log(2) + \log(10^n)$

deg CALCULATION

1584893

$\log(10^{6.2})$ 6.2

$e^{\ln(10)\times 6.2}$

1584893

magnitude du séisme d'Amatrice

$\frac{A}{A_0}$ pour le séisme d'Amatrice

logarithme

amplitude → magnitude

$$A \longrightarrow M = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

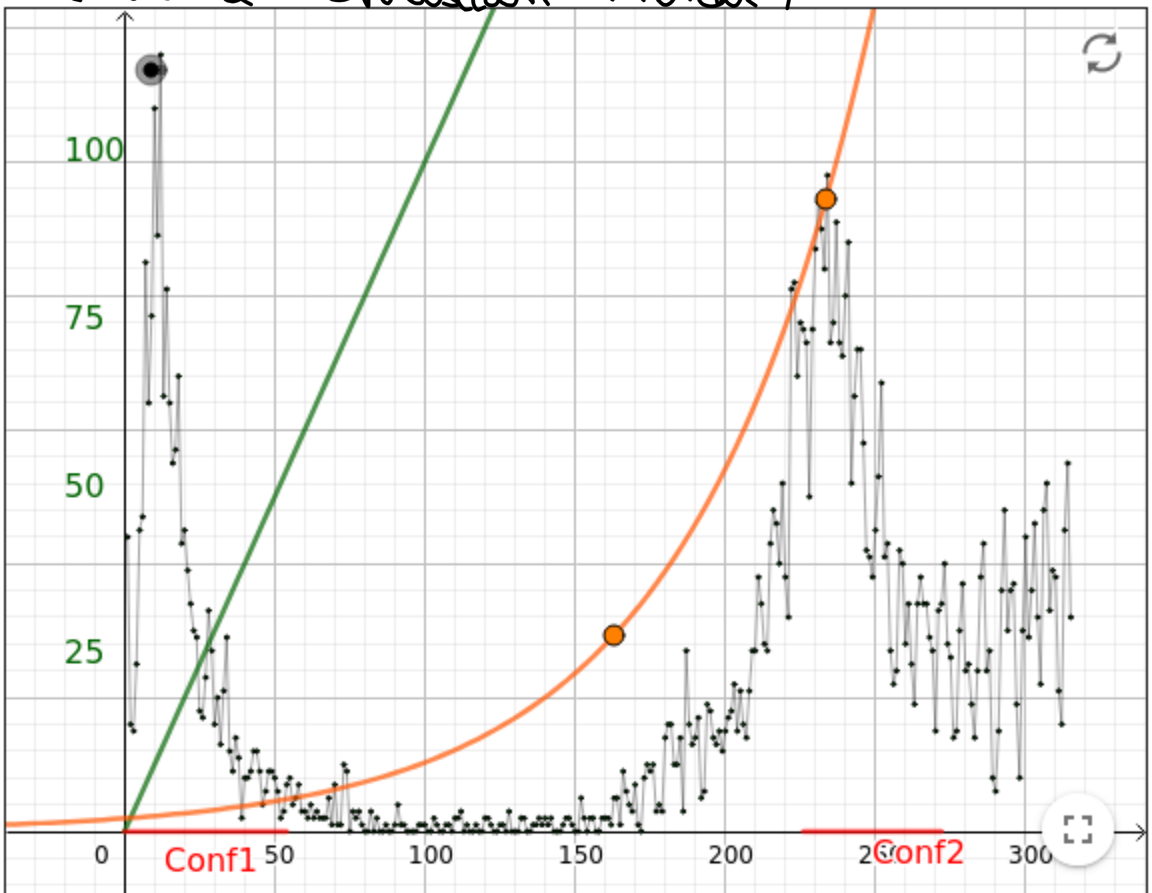
$$\frac{A}{A_0} = 10^M = 10^{\log\left(\frac{A}{A_0}\right)}$$

ou $$\frac{A}{A_0} = e^{\ln(10)\times M} = e^{\ln(10)\times \frac{\ln\left(\frac{A}{A_0}\right)}{\ln(10)}}$$

amplitude ← magnitude

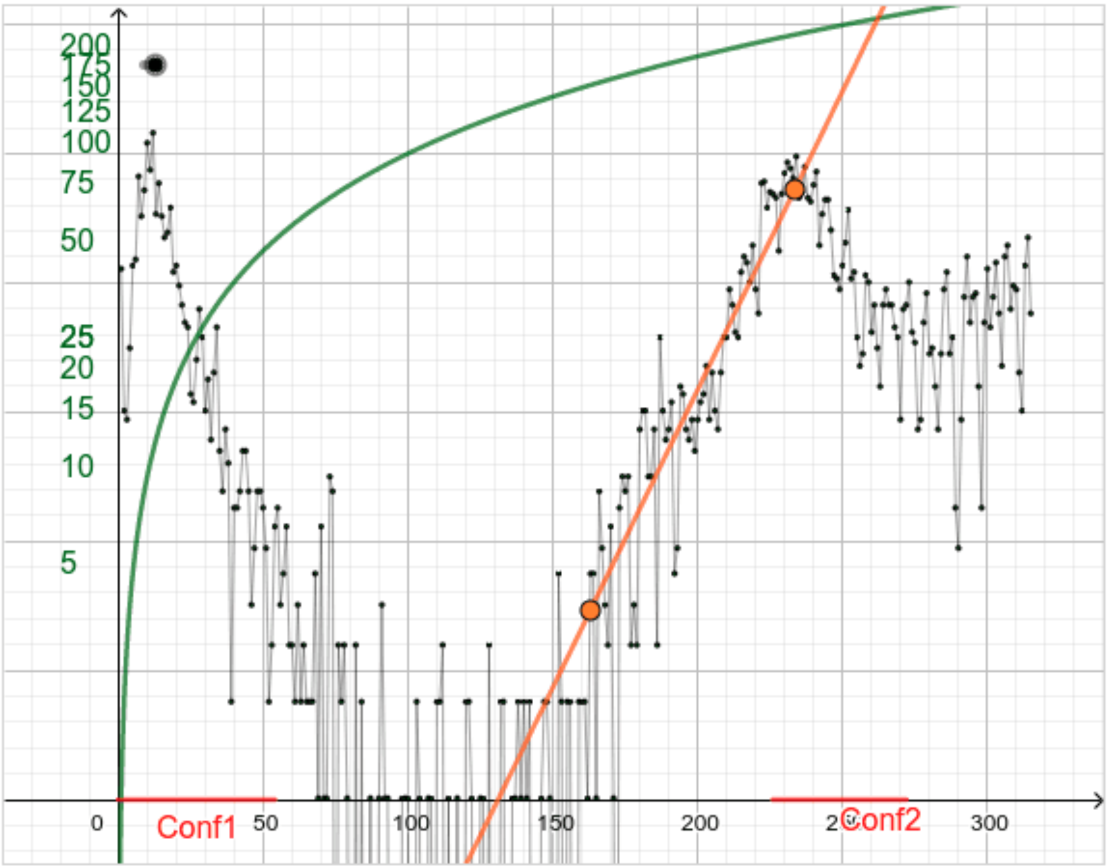
exponentielle

3) Nombre d'admissions en réanimation en région AURA entre mars 2020 et mars 2021 (source Christian Mercat)



échelle linéaire en abscisse et en ordonnée

3) Nombre d'admissions en réanimation en région AURA entre mars 2020 et mars 2021 (source Christian Mercat)



échelle linéaire en abscisse
et logarithmique en ordonnée

↳ l'évolution exponentielle avant le second confinement est mise en évidence par une relation affine entre le nombre de jours et le logarithme du nombre d'admissions

Capacité 2 *Utiliser la définition de la fonction logarithme*

1. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

   a. $f : x \mapsto \ln(1-3x)$ **b.** $g : x \mapsto \ln(x^2)$

2. Compléter les pointillés :

   a. $e^{\ln(3)} = \cdots$ **c.** $\ln(e^{-7}) = \cdots$ **e.** $\ln(e^2 \times e^3) = \cdots$

   b. $\ln(e^0) = \cdots$ **d.** $\ln(e^2) + \ln(e^3) = \cdots$ **f.** $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = \cdots$

1)

a) $f(x) = \ln(1-3x)$ définie ssi $1-3x > 0$

ssi $x < \frac{1}{3}$

$D_f =]-\infty ; \frac{1}{3}[$

b) $g(x) = \ln(x^2)$ définie ssi $x^2 > 0$

ssi $x \in]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

$D_g =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

2) a) $e^{\ln(3)} = 3$ c) $\ln(e^{-7}) = -7$ b) $\ln(e^0) = 0$

d) $\ln(e^2) + \ln(e^3) = 2+3 = 5$

f) $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln(e^{-2}) = -2 = -\ln(e^2)$.

remarque

Capacité 3 ***Utiliser les propriétés de la fonction logarithme***

Étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto x\ln(x) - x$ définie et dérivable sur $]0;+\infty[$.

g dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit et somme de fonctions dérivables.

Pour tout réel $x > 0$:

$$g'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘	$g(1) = 1 \times \ln(1) - 1 = -1$	↗	

Capacité 4 ***Résoudre des équations ou inéquations avec la fonction logarithme***

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations :

1. $\ln(2x-4) < 0$
2. $\ln(2x-4) > -5$
3. $\ln(2x) \geqslant \ln(x^2-1)$
4. $(\ln x)^2 - \ln x = 6$
5. $e^{2x} - e^x = 6$
6. $(\ln x)^2 - \ln x < 6$
7. $(e^{-x})^2 - e^{-x} < 6$
8. $e^{3-2x} > 2(e^x)^2$

1) Inéquation : $\ln(2x-4) < 0$

Ensemble de résolution : $2x - 4 > 0 \Longleftrightarrow x > 2$

$$D =]2 ; +\infty[.$$

Résolution dans $\mathcal{D}$:

$$\begin{cases} \ln(2x-4) < 0 \\ 2 < x \end{cases} \iff \begin{cases} e^{\ln(2x-4)} < e^{0} \\ 2 < x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x-4 < 1 \\ 2 < x \end{cases} \iff \begin{cases} x < \frac{5}{2} \\ 2 < x \end{cases}$$

Ensemble des solutions : $\mathcal{S} = \left]2 ; \frac{5}{2}\right[$.

3) Inéquation : $\ln(2x) \geq \ln(x^2 - 1)$

Ensemble de résolution : $\begin{cases} 2x \geq 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[\end{cases}$

$$\iff x > 1$$

On résout dans $\mathcal{D} =]1 ; +\infty[$

Résolution dans $\mathcal{D} =]1 ; +\infty[$

$$\begin{cases} \ln(2x) \geq \ln(x^2 - 1) \\ 1 < x \end{cases} \iff \begin{cases} 2x \geq x^2 - 1 \\ 1 < x \end{cases}$$

$\iff \begin{cases} x^2 - 2x - 1 \leq 0 \\ x > 1 \end{cases}$ Les racines de $x^2 - 2x - 1$

sont $x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$ et $x_2 = 1 - \sqrt{2}$

$\mathcal{D}$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$	
x^2-2x-1		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$

On en déduit que l'ensemble des solutions est $]1\,;\,1+\sqrt{2}]$.

2) Inéquation : $\ln(2x-4) > -5$

Ensemble de résolution : $2x-4>0 \iff x>2$

$$\mathcal{D} =]2\,;+\infty[$$

Résolution dans $\mathcal{D} =]2\,;+\infty[$.

$$\begin{cases} \ln(2x-4) > -5 \\ x>2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x-4 > e^{-5} \\ x>2 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 2+\dfrac{e^{-5}}{2} \\ x>2 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \left]2+\frac{e^{-5}}{2}\,;+\infty\right[.$$

4) Équation : $(\ln(x))^2 - \ln(x) = 6$

Ensemble de résolution : $\mathcal{D} =]0\,;+\infty[$

On résout dans $\mathcal{D} =]0;+\infty[$ avec un changement d'inconnue :

$$\begin{cases} (\ln(x))^2 - \ln(x) = 6 \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X^2 - X - 6 = 0 \\ X = \ln(x) \\ x > 0 \end{cases}$$

$X^2 - X - 6$ a pour racines $X_1 = -2$ et $X_2 = 3$

$$\begin{cases} X^2 - X - 6 = 0 \\ X = \ln(x) \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2 = X \\ X = \ln(x) \\ x > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 3 = X \\ X = \ln(x \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\iff x = e^{-2} \text{ ou } x = e^3$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{e^{-2} ; e^3\}$

5) Équation : $e^{2x} - e^x = 6$

Ensemble de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

Résolution dans $\mathbb{R}$:

$$e^{2x} - e^x = 6 \iff \begin{cases} X^2 - X - 6 = 0 \\ X = e^x \end{cases}$$

D'après 6) : $\begin{cases} X^2 - X - 6 = 0 \\ X = e^x \end{cases} \iff -2 = e^x$ ou $3 = e^x$

Une exponentielle est toujours positive, donc $e^x = -2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

et $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln(3)$

$$\mathcal{S} = \{\ln(3)\}.$$

6) Inéquation : $(\ln(x))^2 - \ln(x) < 6$

Ensemble de résolution : $\mathcal{D} =]0;+\infty[$

On résout dans $]0;+\infty[$:

$$\begin{cases} (\ln(x))^2 - \ln(x) < 6 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 - X - 6 < 0 \\ X = \ln(x) \\ x > 0 \end{cases}$$

X	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$X^2 - X - 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc : $\begin{cases} X^2 - X - 6 < 0 \\ X = \ln(x) \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X < -2 \\ X = \ln(x) \\ x > 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} X > 3 \\ X = \ln(x) \\ x > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x < e^{-2}$ ou $x > e^3$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} =]-\infty ; e^{-2}[\cup]e^{3} ; +\infty[.$$

7) Inéquation : $(e^{-x})^2 - e^{-x} < 6$

Ensemble de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

Résolution dans $\mathbb{R}$:

$$(e^{-x})^2 - e^{-x} < 6 \iff \begin{cases} X^2 - X - 6 < 0 \\ X = e^{-x} \end{cases}$$

d'après question 6)

$$\iff \underbrace{\begin{cases} X < -2 \\ X = e^{-x} \end{cases}}_{\text{pas de solution car } e^{-x} > 0} \text{ ou } \begin{cases} X > 3 \\ X = e^{-x} \end{cases}$$

$$\iff e^{-x} > 3 \iff -x > \ln(3)$$

$$\iff x < -\ln(3)$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} =]-\infty ; -\ln(3)[$$

8) Inéquation : $e^{3-2x} > 2(e^{x})^2$

Ensemble de résolution : $\mathbb{R}$

Résolution dans $\mathbb{R}$:

$$e^{3-2x} > 2(e^{x})^2 \iff e^{3-2x} > 2e^{2x}$$

$$\iff e^{3-2x} > e^{\ln(2)} e^{2x}$$

$$\iff e^{3-2x} > e^{2x+\ln(2)}$$

$$\iff 3-2x > 2x+\ln(2)$$

$$\iff \frac{3-\ln(2)}{4} > x$$

L'ensemble des solutions est donc.

$$S = \left]-\infty ; \frac{3-\ln(2)}{4}\right[.$$