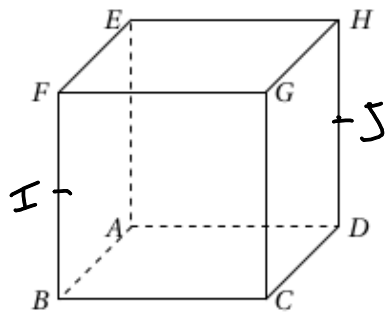
Corrigés des exemples du cours sur le produit scalaire dans l'espace

Capacité 1 ***Calculer un produit scalaire***

Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté a, I le milieu de $[BF]$ et J le milieu de $[DH]$.



Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}$
2. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AH}$
3. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AJ}$
4. $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BF}$
5. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{FH}$
6. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EG}$
7. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{GE}$
8. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BF}$

1) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=0$ 2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=AD^2=a^2$
projection orthogonale

3) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=AD^2=a^2$ par projection orthogonale

4) $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BF}$ par projection orthogonale
or $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$ donc $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}BF^2=\frac{1}{2}a^2$

5) $\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ car $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$

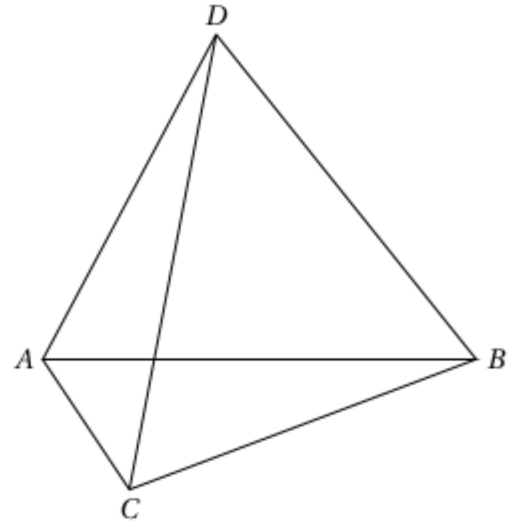
6) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=AC^2=(a\sqrt{2})^2=2a^2$

7) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{AC}\cdot(-\overrightarrow{EG})=-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EG}=-AC^2=-a^2$

8) $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{CG}$ donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CG}=0$ car $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{CG}$

Capacité 2 ***Démontrer que des vecteurs sont orthogonaux avec le produit scalaire***

Les arêtes d'un tétraèdre régulier sont toutes de même longueur.
On considère un tétraèdre régulier $ABCD$, on appelle I le milieu de $[AB]$ et on note a la longueur de l'arête $[AB]$.



1. Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ en fonction de a.
2. Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$ en fonction de a.
3. En déduire que le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1) ABD équilatéral donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD})$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a \times a \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{a^2}{2}$$

2) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(-\overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -AC \times AB \times \cos(\widehat{BAC}) = -\frac{a^2}{2}$$

3) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ par bilinéarité

donc $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$

On en déduit que $\overrightarrow{CD}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Capacité 4 ***Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, calculer une longueur ou un angle***

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. Soit les points $E(7;2;3)$, $F(0;1;4)$ et $G(0;4;-2)$. Les droites (EF) et (EG) sont-elles perpendiculaires ?

2. Dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ soit les points R (2;0;0), S $\left(1; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{4}{\sqrt{6}}\right)$ et T $\left(1; \sqrt{3}; 0\right)$. Calculer les distances OR, RS, ST et TO. Les points O, R, S et T sont-ils les sommets d'un losange ?

3. *Antilles juin 2017*

   On considère les points A(−1 ; 2 ; 0), B(1 ; 2 ; 4) et C(−1 ; 1 ; 1).

   a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

   b. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au degré.

1) On détermine si $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont orthogonaux

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \\ z_F - z_E \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} x_G - x_E \\ y_G - y_E \\ z_G - z_E \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = (-7)(-7) + 2 \times (-1) + (-5) \times 1$

$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = 42$

$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} \neq 0$ donc $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ ne sont pas orthogonaux

donc (EF) et (EG) ne sont pas perpendiculaires.

Capacité 3 ***Calculer des longueurs ou des angles avec le produit scalaire***

1. On considère un triangle EFG et on note les longueurs $EF = g$, $FG = e$ et $GE = f$.

   Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle renvoie le produit scalaire $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG}$ en fonction des longueurs e, f et g passées en paramètre.

```
def p(e, f, g):
    return ...0.5*(f**2-e**2-g**2)
```

car $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{EG}$

2. On considère un tétraèdre régulier $ABCD$ d'arête $AB = 6$ cm. On note I et J les milieux respectifs des arêtes $[AC]$ et $[CD]$.

   a. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$.

   b. Calculer les longueurs AI et AJ.

   c. On admet que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$. Calculer $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$.

   d. Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\cos(\widehat{IAJ})$ et en déduire une mesure en degrés de l'angle $\widehat{IAJ}$ arrondie au dixième.

2)

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})^2\right)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right) = \frac{1}{2}\left(6^2+6^2-6^2\right) = 18$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(AB^2+AD^2-(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})^2\right) = \frac{1}{2}\left(6^2+6^2-6^2\right) = 18$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(AC^2+AD^2-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})^2\right) = \frac{1}{2}\left(AC^2+AD^2-DC^2\right)$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(6^2+6^2-6^2\right) = 18$

Autre méthode : ABC équilatéral donc

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 6 \times 6 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 18$

b)

J milieu de $[CD]$ et ACD équilatéral donc d'après le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle AJD rectangle en J, on a :

$AJ^2 = AD^2 - JD^2 = 6^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 36-9 = 27$

$AJ^2 = 27$ donc $AJ = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

De même on démontre que $AI = 3\sqrt{3}$

c) I milieu de $[BC]$ donc $\vec{AI} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$.
J milieu de $[CD]$ donc $\vec{AJ} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AD})$

$$\vec{AI} \cdot \vec{AJ} = \left(\frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})\right) \cdot \left(\frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AD})\right)$$

$$\vec{AI} \cdot \vec{AJ} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot (\vec{AC} + \vec{AD})$$

$$\vec{AI} \cdot \vec{AJ} = \frac{1}{4}(\vec{AB} \cdot \vec{AC} + AC^2 + \vec{AC} \cdot \vec{AD} + \vec{AB} \cdot \vec{AD})$$

On peut déduire des questions précédentes que :

$$\vec{AI} \cdot \vec{AJ} = \frac{1}{4}(18 + 6^2 + 18 + 18) = \frac{1}{4}(54 + 36)$$

$$\vec{AI} \cdot \vec{AJ} = \frac{1}{4} \times 90 = 22{,}5$$

d) $\vec{AI} \cdot \vec{AJ} = AI \times AJ \times \cos(\widehat{IAJ})$

$$\vec{AI} \cdot \vec{AJ} = (3\sqrt{3}) \times (3\sqrt{3}) \times \cos(\widehat{IAJ})$$

or $\vec{AI} \cdot \vec{AJ} = 22{,}5$, on en déduit que :

$$\cos(\widehat{IAJ}) = \frac{22{,}5}{9 \times 3} = \frac{22{,}5}{27}$$

On en déduit que $\widehat{IAJ} = \arccos\left(\frac{22{,}5}{27}\right) \approx 33{,}6°$

Capacité 4 ***Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, calculer une longueur ou un angle***

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.

1. Soit les points $E(7;2;3)$, $F(0;1;4)$ et $G(0;4;-2)$. Les droites (EF) et (EG) sont-elles perpendiculaires?

2. Dans un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ soit les points R (2;0;0), S $\left(1;\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{4}{\sqrt{6}}\right)$ et T $\left(1;\sqrt{3};0\right)$. Calculer les distances OR, RS, ST et TO. Les points O, R, S et T sont-ils les sommets d'un losange ?

3. *Antilles juin 2017*

   On considère les points A(−1 ; 2 ; 0), B(1 ; 2 ; 4) et C(−1 ; 1 ; 1).

   a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

   b. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au degré.

2). $\vec{OR}\begin{pmatrix}2-0\\0-0\\0-0\end{pmatrix}$ $\vec{OR}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$

$\vec{OR}\cdot\vec{OR} = 2^2+0^2+0^2=4$ donc $\|\vec{OR}\|^2=4$

donc $\boxed{OR=\sqrt{4}=2}$

$\vec{RS}\begin{pmatrix}1-2\\\frac{1}{\sqrt{3}}-0\\\frac{4}{\sqrt{6}}-0\end{pmatrix}$ $\vec{RS}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{4}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

donc $\vec{RS}\cdot\vec{RS} = 1+\frac{1}{3}+\frac{16}{6}=1+3=4$

donc $\boxed{RS=\sqrt{4}=2}$

$\vec{ST}\begin{pmatrix}1-1\\\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\0-\frac{4}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ $\vec{ST}\cdot\vec{ST}=0^2+\left(\frac{\sqrt{3}^2-1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{-4}{\sqrt{6}}\right)^2$

$\vec{ST}\cdot\vec{ST}=0+\frac{2^2}{3}+\frac{16}{6}=\frac{24}{6}=4$

donc $\boxed{ST=\sqrt{4}=2}$

$\vec{TO}\begin{pmatrix}-1\\-\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}$ $\vec{TO}\cdot\vec{TO}=(-1)^2+(-\sqrt{3})^2=4$

donc $\boxed{TO=\sqrt{4}=2}$

- Les trois points $O(0;0;0)$ $R(2;0;0)$ et $T(1;\sqrt{3};0)$ sont dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'équation $z=0$. Mais le point $S\left(1;\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{4}{\sqrt{6}}\right)$ n'appartient <u>pas</u> à ce plan car sa cote $\frac{4}{\sqrt{6}}$ est non nulle.

Les points O; R, S, T ne sont donc <u>pas</u> coplanaires, donc même si $OR=RS=ST=TO$, $ORST$ n'est pas un losange.

3)

- On détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{0}$ donc :

A, B, C alignés ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires

A, B, C alignés ssi il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \iff \begin{cases} 2 = k \times 0 \\ -1 = k \times 0 \\ 1 = k \times 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 = 0 \\ -1 = 0 \\ \frac{1}{4} = k \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution, donc il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ et donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et A, B, C ne sont pas alignés.

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 0 + 0 \times (-1) + 4 \times 1$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4}$$

b) D'après la propriété du cosinus :

$$* \quad \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}_{4} = \underbrace{AB \times AC}_{\text{à calculer}} \times \underbrace{\cos(\widehat{BAC})}_{?}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 2^2 + 0^2 + 4^2 = 20$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 \times \cos(\widehat{BAB})$$

$$= AB^2 \times \cos(0) = AB^2$$

donc $AB^2 = 20$

donc $\boxed{AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}}$

De même $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 0^2 + (-1)^2 + 1^2$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 2$

donc $AC^2 = 2$

donc $\boxed{AC = \sqrt{2}}$

On déduit de l'égalité (*) que :

$4 = 2\sqrt{5} \times \sqrt{2} \times \cos(\widehat{BAC})$

donc $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{4}{2\sqrt{5} \times \sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{10}} = \dfrac{2\sqrt{10}}{10}$

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

on en déduit que :

$$\boxed{\widehat{BAC} = \arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right) \simeq 51^\circ}$$

Capacité 5 ***Étudier des problèmes de configuration dans l'espace : orthogonalité de deux droites***

Soit $\mathscr{D}$ une droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 4+3t \\ y = -2+t \\ z = 1-5t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

1. Le point $B(7;-1;-4)$ appartient-il à $\mathscr{D}$?
2. Soit $E(9;3;-2)$ et $F(11;2;-1)$. Les droites $\mathscr{D}$ et (BE) sont-elles orthogonales ? Les droites $\mathscr{D}$ et (BF) sont-elles orthogonales ?
3. Quelle propriété vraie dans le plan n'est plus vraie dans l'espace ?

1) $B(7;-1;-4)$ appartient à $\mathscr{D}$ ssi il existe un réel t tel que :

$$\mathscr{S} \begin{cases} 7 = 4+3t \\ -1 = -2+t \\ -4 = 1-5t \end{cases}$$

On résout le système $\mathscr{S}$:

$$\mathscr{S} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{3} = t = 1 \\ 1 = t \\ \frac{-5}{-5} = t = 1 \end{cases}$$

Le système admet une solution, donc le point B appartient à la droite $\mathscr{D}$.

2) D'après la représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ donnée dans l'énoncé, un vecteur

directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\\-5\end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur de (BE) est $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{u} = 2\times3+4\times1+2\times(-5) = 0$

$\boxed{\text{On en déduit que les droites } \mathcal{D} \text{ et (BE) sont orthogonales car leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux}}$

De même, $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix}$ vecteur directeur de la droite (BF) est orthogonal au vecteur directeur $\vec{u}$ de $\mathcal{D}$ car $\overrightarrow{BF}\cdot\vec{u} = 4\times3+3\times1+3\times(-5)$

$\overrightarrow{BF}\cdot\vec{u} = 0$

On a donc (BF) et $\mathcal{D}$ orthogonales

<u>Remarque</u>: (BE) et (BF) sont orthogonales à une même troisième

droite $\mathcal{D}$ mais ne sont pas parallèles.

Si (BE), (BF) et $\mathcal{D}$ avaient été coplanaires on aurait pu affirmer que (BE)//(BF).

3) Soit $\mathcal{D}'$ de représentation paramétrique :

$$\mathcal{D}' \begin{cases} x = 5t \\ y = 5t \\ z = 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$ est

$\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est

$\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times 3 + 5 \times 1 + 4 \times (-5)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

droite $\mathcal{D}$ mais ne sont pas parallèles.

Si (BE), (BF) et $\mathcal{D}$ avaient été coplanaires on aurait pu affirmer que (BE) // (BF).

3) Soit $\mathcal{D}'$ de représentation paramétrique :

$$\mathcal{D}' \begin{cases} x = 5t \\ y = 5t \\ z = 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$ est $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times 3 + 5 \times 1 + 4 \times (-5)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4+3t=5u \\ t=2+5u \\ -9-25u=4u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+3t=5u \\ t=2+5\times\frac{-9}{29} \\ u=\frac{-9}{29} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4+3\times\frac{13}{29}=5\times\left(\frac{-9}{29}\right) \text{ égalité fausse} \\ t=\frac{13}{29} \\ u=-\frac{9}{29} \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution car la première égalité n'est pas vérifiée.

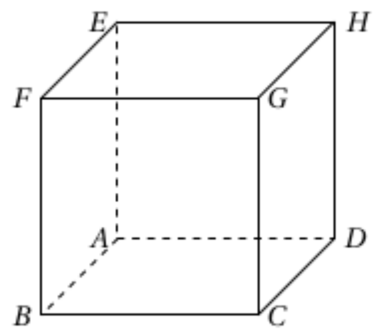
On en déduit que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont non coplanaires (donc non sécantes) et elles sont orthogonales comme on l'a démontré précédemment.

Capacité 6 ***Étudier des problèmes de configuration dans l'espace : orthogonalité d'une droite et d'un plan***

Amérique du sud novembre 2017.

On considère un cube ABCDEFGH (voir la figure de la capacité 1).

1. Simplifier le vecteur $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$.
2. Sans utiliser de coordonnées, en déduire que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.
3. En choisissant un repère orthonormal du plan, démontrer que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$.
4. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).



1) On a $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$ donc $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$

2) On a $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}) \cdot \overrightarrow{BD}$

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD}$$

Or $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ $(**)$

de plus $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{AD} \end{array}\right\}$ donc $\overrightarrow{AE}$ orthogonal au plan (ABD)

$\overrightarrow{AE}$ est donc orthogonal à tout vecteur de la direction du plan (ABD) donc :

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \quad (*)$$

On déduit de $(*)$ et $(**)$ que :

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 + 0 = 0$$

3) On munit l'espace du repère orthonormal $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

$A(0;0;0)$ $B(1;0;0)$ $D(0;1;0)$
$E(0;0;1)$ $G(1;1;1)$

$\vec{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

On a donc $\vec{AG}\cdot\vec{BE} = -1\times1 + 1\times0 + 1\times1 = 0$

et donc $\vec{AG}$ orthogonal à $\vec{BE}$.

4) D'après 2) on a $\vec{AG}\cdot\vec{BD} = 0$ donc $\vec{AG}\perp\vec{BD}$

D'après 3) on a $\vec{AG}\cdot\vec{BE} = 0$ donc $\vec{AG}\perp\vec{BE}$

$\vec{BE}$ et $\vec{BD}$ ne sont pas colinéaires donc forment une base du plan (BED)

On en déduit que $\vec{AG}$ est un vecteur normal au plan (BDE) et donc (AG) est orthogonale au plan (BDE).

Capacité 7 ***Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite.***

Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par $A(2;0;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(1;1;1)$.

1. Donner une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$.
2. Soit le point $B(3;2;4)$.
   a. Montrer que B n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}$.
   b. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de B sur $\mathscr{D}$, c'est-à-dire du point H de $\mathscr{D}$ tel que $\overrightarrow{BH} \perp \vec{u}$.

1) $\mathscr{D}$ passe par le point $A(2;0;1)$

$\mathscr{D}$ admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

donc $\mathscr{D}$ admet comme représentation paramétrique :

$$M(x;y;z) \in \mathscr{D} \iff \exists t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$$

$$\iff \begin{cases} x - x_A = t\, x_{\vec{u}} \\ y - y_A = t\, y_{\vec{u}} \\ z - z_A = t\, z_{\vec{u}} \end{cases}$$

avec $t \in \mathbb{R}$

$$\iff \begin{cases} x = x_A + t\,x_{\vec{u}} \\ y = y_A + t\,y_{\vec{u}} \\ z = z_A + t\,z_{\vec{u}} \end{cases}$$
avec $t \in \mathbb{R}$

$$\boxed{M(x;y;z) \in \mathcal{D} \iff \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 0 + t \\ z = 1 + t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}}$$

2) a) Soit le point $B(3;2;4)$.

B appartient à $\mathcal{D}$ ssi il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} 3 = 2 + t \\ 2 = 0 + t \\ 4 = 1 + t \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = t \\ 2 = t \\ 3 = t \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution donc $B(2;3;4)$ n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$.

b) H projeté orthogonal de B sur $\mathcal{D}$ est l'unique point de $\mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{u}$.

$$\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{u} \iff \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{u} = 0$$

H est un point de $\mathcal{D}$ donc il existe un réel t que : $H\begin{pmatrix} 2+t \\ t \\ 1+t \end{pmatrix}$

On a $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} t-1 \\ t-2 \\ t-3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \iff t-1+t-2+t-3=0$$

$$\iff 3t-(1+2+3)=0$$

$$\iff 3t - \frac{3\times(1+3)}{2} = 0$$

$$\iff 3t-6=0$$

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \iff t = \frac{6}{3} = 2$$

On en déduit que les coordonnées du projeté orthogonal H de B sur $\mathcal{D}$ sont :

$$H\begin{pmatrix} 2+2 \\ 2 \\ 1+2 \end{pmatrix} \text{ soit } H\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Capacité 11 ***Déterminer l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal et un point***

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, soit $A(3;-1;4)$, $B(2;1;4)$ et $C(3;-2;0)$.

1. Déterminer une équation de chacun des trois plans de base de repères respectifs $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, $\left(O;\vec{\imath},\vec{k}\right)$, $\left(O;\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

2. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_1$ passant par B et de vecteur normal $\vec{n}\,(4;-3;1)$.

3. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_2$ passant par A et orthogonal à la droite (BC).

4. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_3$ passant par C et parallèle au plan $\mathscr{P}_2$.

5. **a.** Démontrer que les points A, B, C définissent un plan.

   b. $\boxed{\text{Équation du plan } (ABC), 1^{ère} \text{ méthode}}$

   Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}\,(a;b;c)$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en résolvant un système de deux équations linéaires à trois inconnues. En déduire une équation du plan (ABC).

   c. $\boxed{\text{Équation du plan } (ABC), 2^{ème} \text{ méthode}}$

   Résoudre le système de trois équations à quatre inconnues a, b, c, d : $\begin{cases} ax_A + by_A + cz_A + d = 0 \\ ax_B + by_B + cz_B + d = 0 \\ ax_C + by_C + cz_C + d = 0 \end{cases}$

   En déduire une équation du plan (ABC).

2)

- Le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est l'ensemble des points $M(x; y; 0)$ donc il a pour équation : $z=0$
- Le plan $(O, \vec{i}, \vec{k})$ est l'ensemble des points $M(x; 0; z)$ donc il a pour équation $y=0$.
- Le plan $(O, \vec{j}, \vec{k})$ est l'ensemble des points $M(0; y; z)$ donc il a pour équation $x=0$

3) Soit $\mathcal{P}_1$ le plan passant par le point $B(2; 1; 4)$ et de vecteur normal $\vec{n}\left(\underset{a}{4}; \underset{b}{-3}; \underset{c}{1}\right)$.

- Une équation de $\mathcal{P}_1$ est de la forme : $4x - 3y + z + d = 0$
- De plus $B(2; 1; 4)$ appartient à $\mathcal{P}_1$ donc :

$$4 \times 2 - 3 \times 1 + 4 + d = 0$$

$$\Rightarrow \quad 9 + d = 0$$

$\Leftrightarrow \quad d = -9$

Une équation de $\mathcal{T}_1$ est donc :

$$\boxed{4x - 3y + z - 9 = 0}$$

4) $\mathcal{T}_2$ orthogonal à (BC)
donc $\overrightarrow{BC}$ normal à $\mathcal{T}_2$

$B(2;1;4) \quad C(3;-2;0)$

donc $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix}$

Une équation de $\mathcal{T}_2$ est donc de la forme : $1x - 3y - 4z + d = 0$

De plus $A(3;-1;4)$ appartient à $\mathcal{T}_2$ donc :

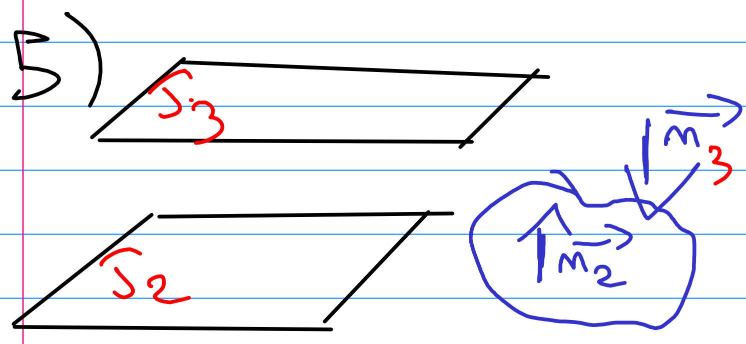
$$3 + 3 - 16 + d = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -10 + d = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad d = 10$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Une équation de } \mathcal{P}_2 \text{ est donc :}\\ x - 3y - 4z + 10 = 0\end{array}}$$

5)



$\mathcal{P}_3$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles donc $\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix}$ normal à $\mathcal{P}_2$ est aussi normal à $\mathcal{P}_3$.

- Une équation de $\mathcal{P}_3$ est donc de la forme :

$$\underbrace{x - 3y - 4z}\ + d = 0$$

- De plus $C(3;-2;0)$ appartient à $\mathcal{P}_3$ donc :

$$3 - 3\times(-2) - 4\times 0 + d = 0$$

$\Leftrightarrow \quad 3+6+d=0$

$\Leftrightarrow \quad d=-9$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Une équation de } \mathcal{T}_3 \text{ est donc :}\\ \quad 3x-3y-4z-9=0\end{array}}$$

(ABC).

6) b) Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan (ABC).

$\vec{n}$ normal au plan (ABC) ssi $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \text{et}\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$

$\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\ -1\\ -4\end{pmatrix}$

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \text{et}\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-a+2b=0\\ -b-4c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2b\\ c=-\frac{1}{4}b\end{cases}$

On en déduit que :

$\vec{n}\begin{pmatrix}2b\\ b\\ -\frac{1}{4}b\end{pmatrix}$ avec b réel non nul

Pour $b=4$ $\vec{n_1}\begin{pmatrix}8\\ 4\\ -1\end{pmatrix}$ est normal

au plan (ABC)

Une équation de (ABC) est donc de la forme :

$$8x + 4y - z + d = 0$$

De plus $C(3;-2;0)$ appartient au plan (ABC), donc :

$$8\times 3+4\times(-2)-0+d=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 16+d=0$$

$$\Leftrightarrow \quad d=-16$$

Une équation du plan (ABC) est donc de la forme :

$$\boxed{8x+4y-z-16=0}$$

6.) c) Soit $ax+by+cz+d=0$ une équation de (ABC) :

$$\begin{cases} A\in(ABC) \\ B\in(ABC) \\ C\in(ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\times 3-b+4c+d=0 \\ a\times 2+b+4c+d=0 \\ 3a-2b+d=0 \end{cases}$$

On a un système de trois équations à 4 inconnues a, b, c, d.

On choisit d'exprimer trois inconnues par exemple a, b et c en fonction d'une quatrième d.

Capacité 12 ***Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan***

Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -7+t \\ y & = & 4+2t \\ z & = & -5-t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$$

et le plan $\mathscr{P}$ d'équation $-2x-3y+z-6=0$.

1. Déterminer si la droite $\mathscr{D}$ et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants.
2. Si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ sont sécants, calculer les coordonnées de leur point d'intersection.