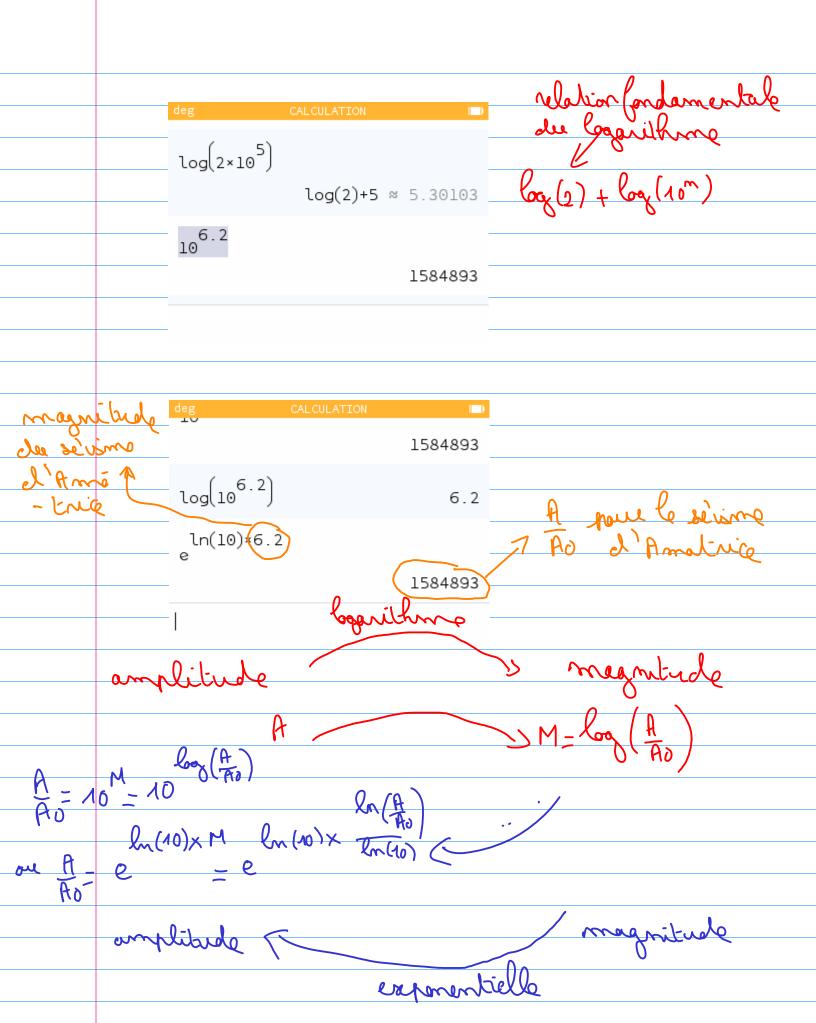
Capacites du cours sur le Cognithme népérien

de Capacité 1 Utiliser la fonction logarithme dans un contexte

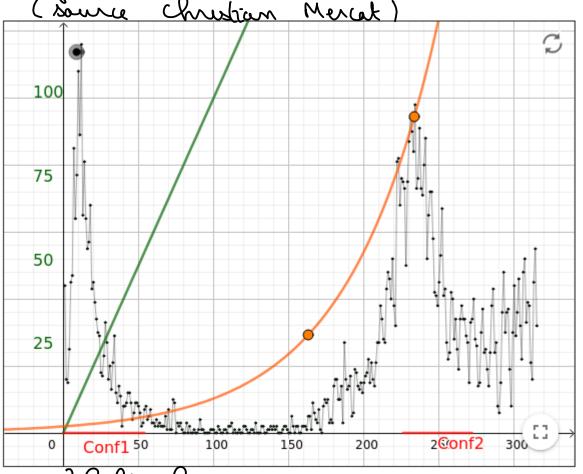
La magnitude d'un séisme d'amplitude maximale A est mesurée *l'échelle de Richter* par $M = \frac{\ln\left(\frac{A}{A_0}\right)}{\ln(10)}$ où A_0 est une amplitude de référence. Cette formule s'écrit souvent $M = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$ où $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$ est la fonction logarithme décimal (touche Log de la calculatrice).

- 1. Déterminer avec la calculatrice la magnitude sur l'échelle de Richter des séismes suivants :
 - a. Un séisme d'amplitude A₀.
 - b. Un séisme d'amplitude 10A₀.
 - c. Un séisme d'amplitude 20A₀.
 - **d.** Un séisme d'amplitude $10^n A_0$ avec n entier naturel. Quelle conjecture peut-on formuler?
 - e. le séisme de Barcelonnette (France 2014) d'amplitude $A = 2 \times 10^5 A_0$.
- Exprimer en fonction de A₀ l'amplitude maximale du séisme d'Amatrice (Italie 2016) dont la magnitude était de 6,2 sur l'échelle de Richter.
- 3. L'échelle de Richter est une échelle logarithmique, la valeur représentée sur l'échelle est le logarithme (népérien ou décimal) de la grandeur mesurée. D'autres exemples d'échelles logarithmiques sont présentés aux exercices 92 p. 148 (magnitude d'un astre) et 173 p. 256 (intensité sonore en décibels). Quel est l'intérêt d'une échelle logarithmique par rapport à une échelle linéaire?

			loox (1)=	0 6	sevimo	.
am	لىل	ude	. deg	CALCULATION		magnitude
	. 10	Ao	log(10)		1	1 0
×10 (DO DA	o A _o oo Ao	log(20)	log(2)+1 ≈	1.30103	1+ box(6) \(1,3 \) +1
			log(100)		2	2,
X10	7.	1000 Ao	log(1000)		3	2//+1
		2	/ ->			
w	te o	g e omâtric	jue			-> suite outhous tique
Λ) [^] (12				log (10 Az) - log (10)
		O				$0 \rho^{(t)} = 0$
						= m (og (10)

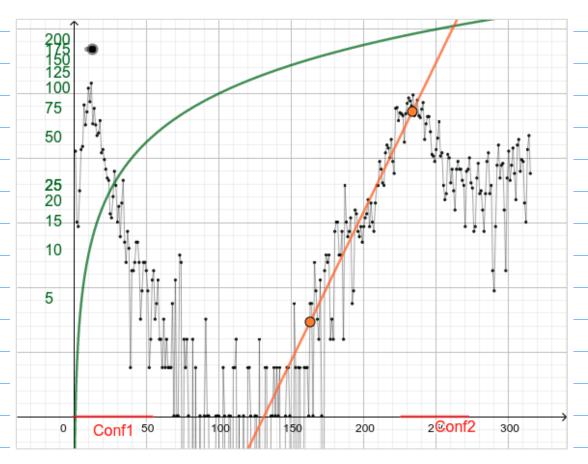


3) Nombre d'admissions en réanimation en région AVRA entre mars 2020 et mars 2021 (source Christian Mercet)



schelle linéaire en abouisse et en ordonnée

3) Nombre d'admissions en réanimation en région AVRA entre mors 2020 et mars 2021 (source Christian Mercet)



échelle limoire en abouire et logerithmèque en ordonnée

Dévolution exponentielle ouvent le second confirmement est mise en évidence pou une relation offine entre le nombre de jours et le logaithme du nombre d'admissons



de Capacité 2 Utiliser la définition de la fonction logarithme

1. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a.
$$f: x \mapsto \ln(1-3x)$$

b.
$$g: x \mapsto \ln(x^2)$$

2. Compléter les pointillés :

a.
$$e^{\ln(3)} = \cdots$$

c.
$$\ln(e^{-7}) = \cdots$$

e.
$$\ln(e^2 \times e^3) = \cdots$$

b.
$$ln(e^0) = \cdots$$

d.
$$\ln(e^2) + \ln(e^3) = \cdots$$

f.
$$\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = \cdots$$

a)
$$f(x) = \ln(1-3x)$$
 définie poi $1-3x>0$
soi $x<\frac{1}{3}$

2) a)
$$e^{\ln(3)} = 3$$
 c) $\ln(e^{-1}) = -7$ $\ln(e^{0}) = 0$

$$\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln(e^{-2}) = -2 = -\ln(e^2)$$



🚀 Capacité 3 Utiliser les propriétés de la fonction logarithme

Étudier les variations de la fonction $g: x \mapsto x \ln(x) - x$ définie et dérivable sur $]0; +\infty[$.

g dérivable sur Jo; tos [comme produit et somme de fondions dérivables.

Pour Cout rèd x>0:

g(x)= 1xln(x) + xx 1/x -1 - ln(x)

	•				
I	0		1		400
af (sk)		-	0	+	
g(z)					
U			3(1)=1x Pm	(1)	1
			3(1)=1X	^(^)-1=-1	(



🚀 Capacité 4 Résoudre des équations ou inéquations avec la fonction logarithme Résoudre dans ℝ les équations ou inéquations :

1.
$$\ln(2x-4) < 0$$

1.
$$\ln(2x-4) < 0$$
 3. $\ln(2x) \ge \ln(x^2-1)$ **5.** $e^{2x} - e^x = 6$

5.
$$e^{2x} - e^x = 6$$

7.
$$(e^{-x})^2 - e^{-x} < 6$$

2.
$$ln(2x-4) > -5$$

4.
$$(\ln x)^2 - \ln x = 6$$

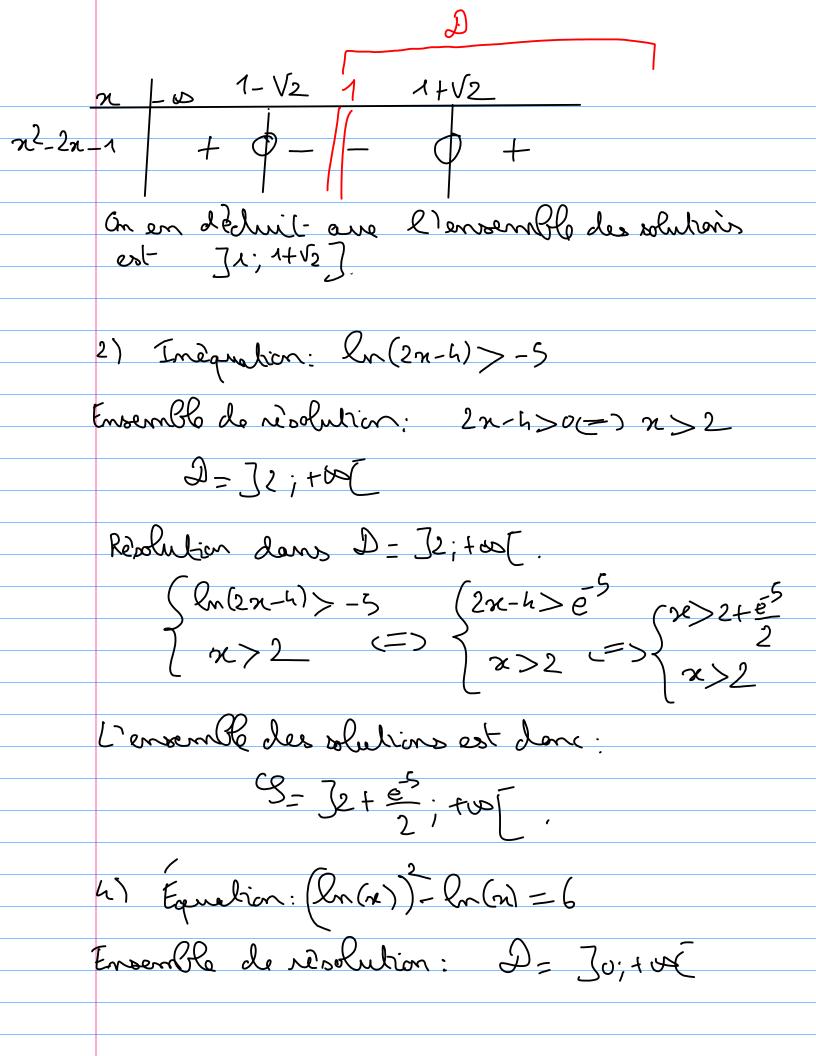
2.
$$\ln(2x-4) > -5$$
 4. $(\ln x)^2 - \ln x = 6$ **6.** $(\ln x)^2 - \ln x < 6$

8.
$$e^{3-2x} > 2(e^x)^2$$

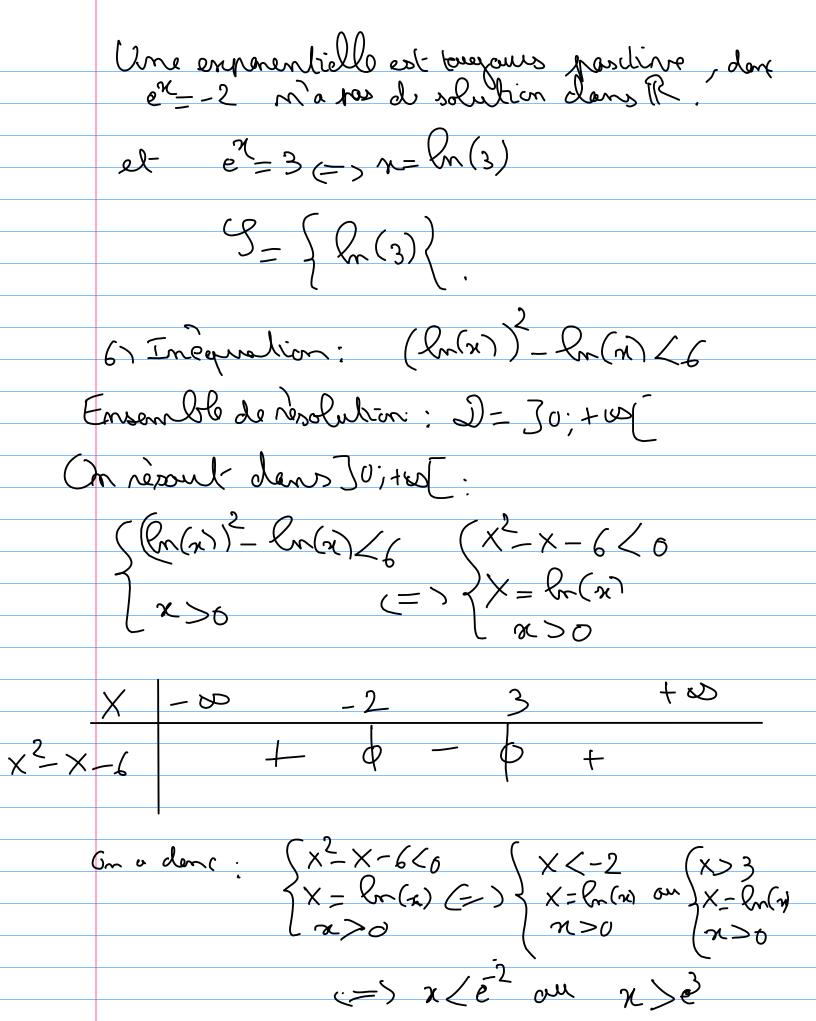
1) Inequation: Kn(2n-4) <0

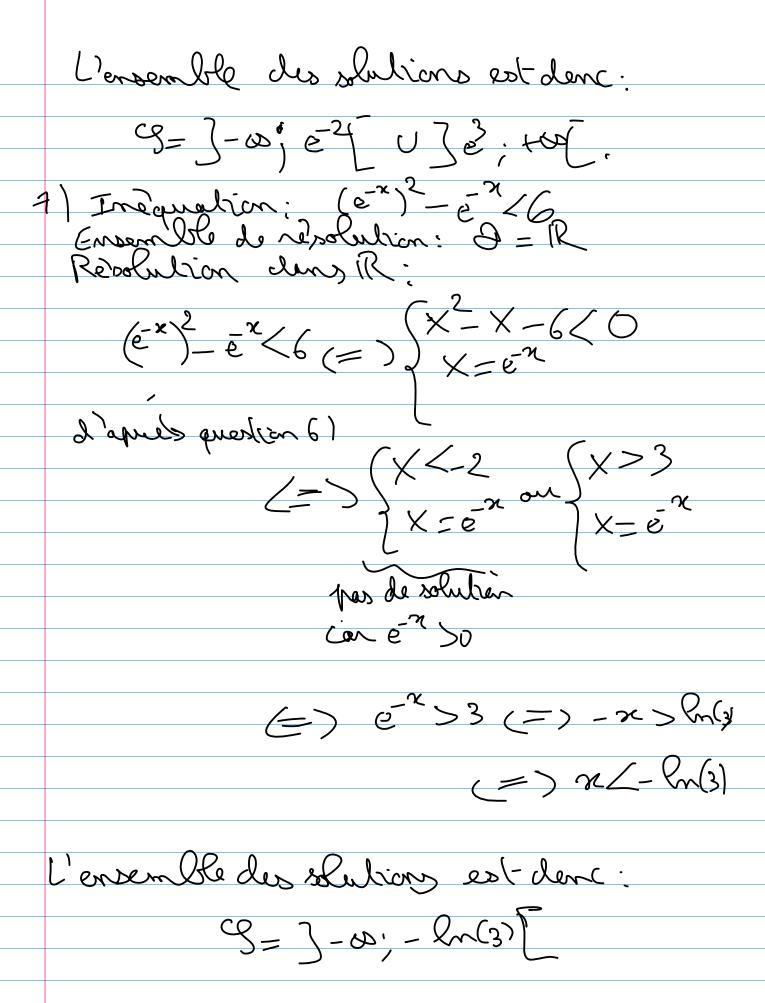
Ensemble de résolution: 2x-4>0 => x>2

Resolution alons]: $\frac{\ln(2x-4) < 0}{2 < x} = \frac{\ln(2x-4)}{2} = 0$ $\frac{2 < x}{2} < x = 2 < x$ $\frac{2 < x}{2} < x = 0$ $\begin{array}{c}
(=) \\
(=) \\
2 \times 4 \times 1 \\
2 \times 2
\end{array}$ $\begin{array}{c}
(=) \\
2 \times 4 \times 1 \\
2 \times 4 \times 1
\end{array}$ Ensemble de solutions: es= 32,5/2. 3) Irréquetion: ln(2x) > ln(x²-1) Ensemble de résolution: $(2\times > 0)$ (=>) (=> x>1 On répout dans D=]1; + 20[Résolution dans D= 11; + D[



On résout dans D-JU; + ex avec un changement d'inconnue: $\times^2 \times -6$ a pour rouines $X_1 = -2$ et $X_2 = 3$ $\begin{cases} x^{2} \times -6 = 0 \\ \times = \ln(\pi) \end{aligned} \begin{cases} -2 = x \\ \times = \ln(\pi) \end{cases}$ $\begin{cases} x = \ln(\pi) \\ \times = \ln(\pi) \end{cases}$ $\begin{cases} x = \ln(\pi) \\ \times = \ln(\pi) \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0 \end{cases}$ (=) x=e² on n = e³ l'ensemble des solutions est 3-{e²; e³} 5) Equation: e2x - ex=6 Ensemble de révolution: D= R Résolution dans (R: $2\pi - e^{2} = 6 = 5$ $\times = e^{2}$ $\times = e^{2}$ $\times = e^{2}$ $D'après 6): \begin{cases} x^2 \times -6 = 0 \\ x = e^{x} (=) -2 = e^{x} \text{ on } 3 = e^{x} \end{cases}$





8) Inequation:
$$e^{3-2x} > 2(e^x)^2$$

Ensemble de répulsion; R

Répolation dans R :

 $e^{3-2x} > 2(e^x)^2 = e^{3-2x} > 2e^{2x}$
 $(=) e^{3-2x} > e^{\ln(2)}e^{2x}$
 $(=) e^{3-2x} > e^{\ln(2)}e^{2x}$
 $(=) e^{3-2x} > e^{2x+\ln(2)}$
 $(=) e^{3-2x} > e^{2x}$

L'ensemble des solutions est danc.

 $(3-3-6x) = 3-6x$
 $(3-3-6x) = 1-6x$
 $(3-6x) = 1-6x$
 $(3-6$

Algorithmique 1 Application de l'équation fonctionnelle du logarithme aux suites géométriques

On estime que la population d'oiseaux d'une réserve diminue de 5% par an. Cette population est estimée en 2020 à 60000 individus.

On note u_n la population d'oiseaux en 2020 + n.

- a. Justifier que la suite (u_n) est géométrique et préciser sa raison.
 - b. Compléter la fonction Python ci-dessous pour que seuil(k) détermine le nombre d'années minimum au bout duquel on aura u_n < k.</p>

- c. Avec la calculatrice, déterminer la valeur de seuil (30000).
- **2.** On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(u_n)$.
 - **a.** Pour tout entier naturel n, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et en déduire la nature de (v_n) .
 - Retrouver la valeur de seuil (30000) en résolvant une inéquation.

1) a) Pour tout entier
$$m > 0$$
, on a:

$$M_{m+1} = \left(1 - \frac{5}{100}\right) \times M_m = 0,35 \times M_m$$

2) a) Paul tout entier matureling 0:

$$N_{m+1} = lm(u_{m+1}) = lm(0,35) \mu_m$$
 $N_{m+1} = lm(0,35) + lm(u_m)$
 $N_{m+1} = lm(0,35) + N_m$

la suite ($N_m l_m \ge 0$ est donc arithmetique de newon $lm(0,35)$.

a) On résout l'inéqualion: u_n. < 30000 (=> ln (u_n) < ln (3000)

	m < 30000 (=> Nm < lm (30000)
	Or (Nm) no est arithmètique de raison ln(0,95)
	et de premier terme vo=ln (60000)
	donc pour tout entier ~>0, on a:
	Nn= ln(60000) + nxln(0,95)
	En a donc:
	Mn < ln (3000) (=) ln (60000) + mx ln (0,95) (2000)
_	(=> m × ln (0,35) < ln (3000) - ln (600
	ar 0 < 0,95 < 1 donc lm (9,95) < 1
	an a done:
	$N_{m} < l_{m}(30000) = $
)	,
	e plus $ln(3000) - ln(6000) - ln(\frac{3000}{60000}) - ln(0,5)$ ln(0,5)
	In (0,5) nu encès renvoie 14
_	xn (0,37) pur ences / www.

Capacité 5 Utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme pour simplifier une expression

Exprimer en fonction de ln(3), ln(5) ou d'un entier :

5.
$$\ln(\sqrt{15})$$

4.
$$\ln\left(e^{\ln(5/3)}e^{\ln(3)}\right)$$

6.
$$ln(3^4) ln(5e)$$

3)
$$\ln (0,6) = \ln (\frac{6}{10}) - \ln (\frac{3}{5}) = \ln (3) - \ln (5)$$

4) $\ln (e^{\ln(5/3)}e^{\ln(3)}) = \ln (e^{\ln(5/3)}+\ln(3))$

$$= 2n\left(e^{\left(\frac{5}{3}\times 3\right)}\right)$$

Capacité 6 Utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme pour étudier une suite

On peut démontrer par récurrence qu'il existe une (u_n) définie par $u_0 = e^2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{eu_n}$. On peut alors définir la suite (v_n) pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(u_n) - 1$.

- 1. Démonter que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
- **2.** Exprimer v_n puis u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
- 3. Étudier la limite de la suite (u_n) .

1) Pour tout entier naturel m > 0.

Nm+1 = ln (un+1)-1= ln (veum) -1

10mm= 1 ln (e un) -1 = 1 (ln (e) + ln (ym))-1

Nontr= 1/2 + 1 lon (mm) - 1 = 1/2 lon (mm) - 1/2

12 (ln (mm) - 1) = 2 Nm

(vn) est donc une suite géométrique de raison 2.

2) Pour tout enlier n> 0 par propriété des suites géomètriques :

 $N_{w} = \sqrt{\frac{5}{2}} \times \left(\frac{8}{8} \left(\frac{6}{5} \right) - 1 \right) = \sqrt{\frac{5}{2}}$

Gr vn= ln(un) -1 (=> vn+1 = ln (un)

(=) $\frac{1}{2^m} + 1 = \frac{1}{2^m} (M^m)$

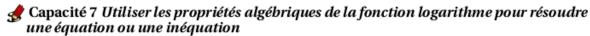
3)
$$\left| \frac{1}{2} \right| < 1 \, \text{denc} \, \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

lim e = e = 1 par continuité de la Pendrin X->0 expandatielle

donc par composition lime e 2m = e = 1

Nuis par produit lim exe²ⁿ = e

dar lim 4 = e



- 1. Résoudre les équations ou inéquations suivantes en déterminant d'abord l'ensemble de résolution :
 - **a.** $\ln(x+3) + \ln(x-2) = \ln 6$

b.
$$\ln((x+3)(x-2)) \le 2\ln(\sqrt{6})$$

Page 9/14

https://frederic-junier.org/



Logarithme népérien

SpéMaths

- 2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que :
 - **a.** $0, 8^n \le 10^{-4}$ avec $n \in \mathbb{N}$

- **b.** $1,02^n > 10^{2019}$
- 3. Un problème de Leonhard Euler:

Si le nombre des hommes est doublé tous les 100 ans, quel est l'accroissement annuel?

11 b) Inequalian: In ((2+3) (2-2) < 2 ln (V6) Ensemble de résolution: (x+3)(x-2)>0 = x<-3 on x>2D= J-00,-3[U]2;+04 En résout dans J- 00; -3[U]2; +00[$\begin{cases} 2m((x+3)(n-2)) & (2m(\sqrt{6})) \\ x \in J \end{cases} = \begin{cases} 2m(\sqrt{6}) & (2m+3)(m-2) & (2m+2)(m-2) & (2m+2)(m-2) & (2m+2)(m-2) & (2m+2)(m-2) & (2m+2)(m-2) & (2m+2)(m-2) & (2m+2)(m-2)(m-2) & (2m+2)(m-2) & (2m+2)(m-2) & (2m+2)(m-2) & (2m+2)(m-2) & (2m+2)(m-2) & (2m+2)(m-2$ Gm en déduit que CS =]-4; -3[U]2;3[2) a) 0,8 < 10 4 (=> ln (0,8") < ln (164) (=> m ln(0,8) < ln(10-4)

Go a danc : $0,8^{m} \le 10^{-1} (= > m > \frac{2m(10^{-1})}{2m(0,8)}$ ln(10-h) ~ 41,3 ~ h2 par exces Dans l'ensemble M'des entiers naturels. C'ensemble des solutions est: [42; +00[(Intervalle d'entiers b) $1,02^{2019} = 2n(1,02^{2019})$ (=) m lm (1,02) > 2014 lm (10) 1,02>1 done lin (1,02)>1 $1,02^{m} > 10^{2019} = > m > \frac{2019 \ln(10)}{\ln(1,02)}$ 2019 ln (10) ~ 23 h 762,8 ~ 23 h 763 pan exces Dans l'ensemble IN des entiers naturels, l'ensemble des solutions est [7234763, + out

3) Soit t le tour d'accroissement annuel. L'est-solution de l'équation:

(1+t) = 2 (=> ln((1+t) 100) = ln 6)

 $= \frac{\ln(2) - \ln(2)}{100}$ $= \frac{\ln(2)}{100}$

= > (- - p 100 ;

le tourn d'accroissement annuel est d'environ t 20,00636

soit environ 0,69600