Prise de notes du 27/04/2021

QCM Doctools sur l'intégrale

link.dgpad.net/kbTU

Utilisateur anonyme

Question 1 / 5

Soit n un entier naturel. On note $u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

La valeur exacte de u_0 est :

- $\frac{1}{2} ln(2)$
- $ln(2)$
- $2ln(2)$
- impossible à calculer

$$u_0 = \int_0^1 \frac{x^{2\times 0+1}}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

Primitive de $\frac{x}{1+x^2}$ de la forme $\frac{u' \times \frac{1}{2}}{u}$

avec $u(x) = 1+x^2$ et $u'(x) = 2x$

donc une primitive de $\frac{x}{1+x^2}$ est $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

donc $u_0 = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(2) = \ln(\sqrt{2})$

Rque : si $a > 0$, $\frac{1}{2}\ln(a) = \ln(\sqrt{a})$

Utilisateur anonyme

Question 2 / 5

Soit n un entier naturel. On note $u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

La somme $u_0 + u_1$ vaut :

- ○ $\frac{9}{16}$
- ● $\frac{1}{2}$
- ○ 1
- ○ on ne peut pas la calculer

$$u_0 = \frac{1}{2}\ln(2)$$

$$u_0 + u_1 = \underbrace{\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx}_{\frac{1}{2}\ln(2)} + \underbrace{\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx}_{??}$$

Par linéarité :

$$u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{x+x^3}{1+x^2}\,dx$$

$$u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{x(1+x^2)}{1+x^2}\, dx$$

$$u_0 + u_1 = \int_0^1 x \, dx$$

$$u_0 + u_1 = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

On en déduit que :

$$u_1 = \frac{1}{2} - u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(2)$$

Utilisateur anonyme

Question 3 / 5

Soit n un entier naturel. On note $I_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx$

En utilisant le fait que, sur $[0;1]$, on a $0 \leqslant x^n e^x \leqslant e^x$, donner un encadrement de I_n (donner des valeurs exactes) :

Entrer votre réponse ci-dessous :

$\square \leqslant I_n \leqslant \square$

Pour tout entier $n \geq 0$, pour tout $x \in [0;1]$.

$$0 \leq x^n e^x \leq e^x$$

Par croissance de l'intégrale

$$\int_0^1 0 \, dx \leq \int_0^1 x^n e^x \, dx \leq \int_0^1 e^x \, dx$$

$$0 \leq I_n \leq \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - 1$$

Utilisateur anonyme

Question 4 / 5

Soit n un entier naturel. On note $I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$

En utilisant le fait que, sur $[0;1]$, on a $0 \leqslant x^n \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e} x^n$ on obtient : $0 \leqslant I_n \leqslant$...

- $\dfrac{1}{n}$
- $\dfrac{\mathrm{e}}{n}$
- $\dfrac{1}{n+1}$
- $\dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout réel $x \in [0;1]$:

$$0 \leqslant x^n e^x \leqslant e x^n$$

Par croissance de l'intégrale

$$\int_0^1 0 \, dx \leqslant \int_0^1 x^n e^x \, dx \leqslant \int_0^1 e x^n \, dx$$

$$0 \leq I_n \leq \left[e \times \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$$

Remarque :

- Pour tout entier $n \geq 0$:

$$0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$$

- De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$
- D'après le théorème de limete par encadrement $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

4e

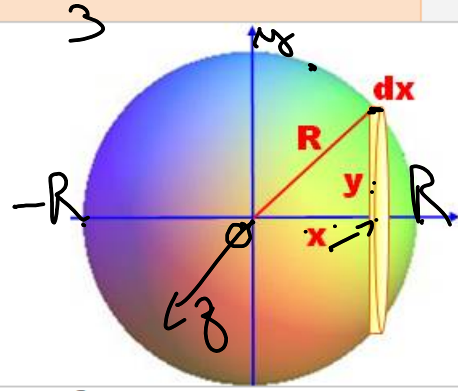
Application du calcul intégral au calcul de volume

Calcul par tranches

$V_{sphère} = \frac{4}{3}\pi \times r^3$

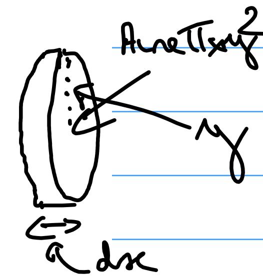
Principe

Calculer le volume de la sphère en faisant la somme des volumes des disques jaunes, considérés comme aussi fins que possible.



Calculs

Volume du disque jaune (cylindre):	$v = \pi y^2 dx$
Volume de la sphère: passage d'une somme discrète (sigma) à une somme continue (intégrale):	$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{-R}^{R} \pi y_i^2 dx = \int_{-R}^{R} \pi y^2 dx$

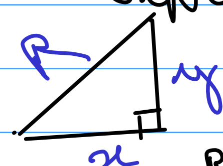


$V_{cylindre} = \pi y^2 \times dx$

↳ y dépend de x

Problème : comment exprimer y en fonction de x :

Avec Pythagore :



$y^2 = R^2 - x^2$

$$V_{sphère} = \int_{-R}^{R} \pi \times (R^2 - x^2)\,dx = \int_{-R}^{R} \pi R^2 - \pi x^2\,dx = \left[\pi R^2 \times x - \pi \times \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R}$$

$$V_{sphère} = \pi R^2 \times R - \pi \times \frac{R^3}{3} - \left(\pi \times R^2 \times (-R) - \pi \times \frac{(-R)^3}{3}\right)$$

$$V_{sphère} = \frac{2\pi R^3}{3} - \left(-\frac{2\pi R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

- http://villemin.gerard.free.fr/GeomLAV/SphereIn.htm
- Méthode de Cavalieri (principe des indivisibles, attention peut conduire à des raisonnements faux !)

https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode_des_indivisibles

↳ on donne une épaisseur aux indivisibles
↳ calcul intégral

Utilisateur anonyme

Question 5 / 5

Sans la calculer, donner le signe de

$$\int_1^{e^{-2}} \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

- positive
- négative
- on ne peut pas savoir

$$\int_1^{e^{-2}} \ln(x)\,dx = -\int_{e^{-2}}^{1} \ln(x)\,dx$$ de sorte que $a = e^{-2} < b = 1$

Or pour tout $x \in [e^{-2} ; 1]$, on a :

$$\ln(x) \leq 0$$

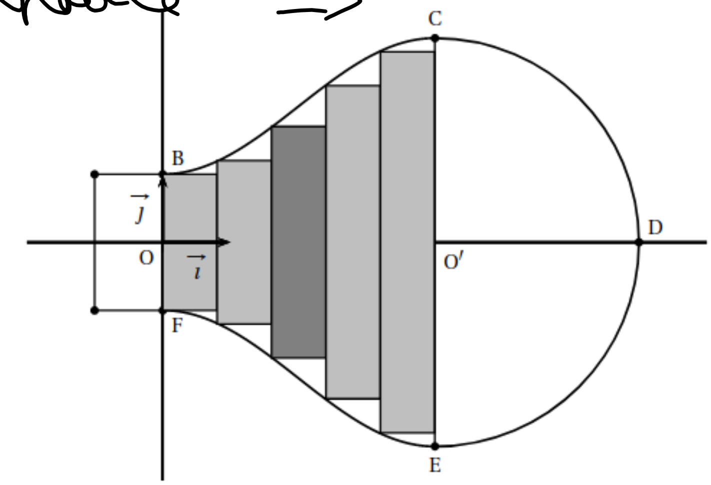
Par croissance de l'intégrale :

$$\int_{e^{-2}}^{1} \ln(x)\,dx \leq \int_{e^{-2}}^{1} 0\,dx$$

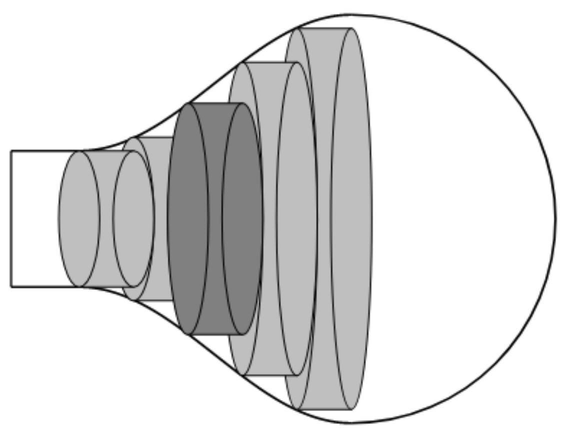
donc $$\int_{e^{-2}}^{1} \ln(x)\,dx \leq 0$$

donc $$-\int_{e^{-2}}^{1} \ln(x)\,dx \geq 0$$

• Un exemple dans un sujet de Bac (Polynésie juin 2018) calcul du volume d'une ampoule =>



Vue dans le plan (BCE)


Vue dans l'espace

https://www.apmep.fr/IMG/pdf/S_Polynesie_20_juin_2018_DV.pdf

Capacité 7 ***Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive, voir capacité 4 p. 333***

Calculer les intégrales suivantes :

5min | 5min | 5min

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$;
2. $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{1}{(2x-1)^4}\,dx$;
3. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \cos(\theta)\;d\theta$;
4. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos(2\theta)\;d\theta$;
5. $\displaystyle\int_{-4}^{-2} (3x-1)^6\,dx$;
6. $\displaystyle\int_{0}^{x} \sin^2(t)\,dt$.
7. $\displaystyle\int_{e}^{e^3} \frac{1}{x\ln x}\,dx$
8. $\displaystyle\int_{0}^{x} \frac{1}{1+e^t}\,dt$
9. $\displaystyle\int_{2}^{e} \frac{1}{x(\ln(x))^2}\,dx$

5) $\displaystyle\int_{-4}^{-2} (3x-1)^6\,dx$

$(3x-1)^6$ est de la forme $\frac{1}{3}u'u^6$

avec $u(x) = 3x-1$ et $u'(x) = 3$

donc une primitive est $\frac{1}{3} \times \frac{1}{6+1} \times (3x-1)^7$

On a donc $\displaystyle\int_{-4}^{-2} (3x-1)^6\,dx = \left[\frac{1}{21}(3x-1)^7\right]_{-4}^{-2}$

7) $\displaystyle\int_{e}^{e^3} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx =$

$\dfrac{1}{x\ln(x)} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$ de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

donc une primitive est $\ln(|\ln(x)|)$

On a donc $\displaystyle\int_e^{e^3} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \Big[\ln(|\ln(x)|)\Big]_e^{e^3}$

On peut enlever les valeurs absolues car $\ln(x) > 0$ sur $[e ; e^3]$

Donc on a :

$$\int_e^{e^3} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \ln(\ln(e^3)) - \ln(\ln(e))$$

$$= \ln(3) - \ln(1)$$

$$= \ln(3)$$

8) $\displaystyle I = \int_0^x \frac{1}{\underbrace{1+e^t}}\,dt = \int_0^x \frac{e^{-t}\times 1}{e^{-t}(1+e^t)}\,dt$

on va transformer l'expression c'est souvent possible avec l'exponentielle et on utilise : $e^t \times e^{-t} = 1$

et donc $\displaystyle I = \int_0^x \frac{e^{-t}}{e^{-t}+1}\,dt$

$\dfrac{e^{-t}}{e^{-t}+1}$ est de la forme $\dfrac{-u'}{u}$

avec $u(t) = e^{-t} + 1$.

On a donc $I = \left[-\ln(1+e^{-t})\right]_0^x$

$$I = -\ln(1+e^{-x}) + \ln(2)$$

$$I = \ln\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)$$

g) $I = \displaystyle\int_2^e \frac{1}{x(\ln(x))^2}\,dx$

$$I = \int_2^e \frac{1}{x} \times \frac{1}{(\ln(x))^2}\,dx$$

$\dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{(\ln(x))^2}$ de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$

donc admet pour primitive $-\dfrac{1}{u}$.

$I = \left[-\dfrac{1}{\ln(x)}\right]_2^e = -\dfrac{1}{\ln(e)} + \dfrac{1}{\ln(2)}$

Capacité 10 ***Majorer ou minorer une intégrale, voir capacité 5 p.335***

1. Déterminer le signe des intégrales suivantes :

   a. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x \,\mathrm{d}x$ **b.** $\displaystyle\int_{1}^{0} x^2 \,\mathrm{d}x$ **c.** $\displaystyle\int_{1}^{\frac{1}{e}} \ln x \,\mathrm{d}x$

2. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\,\mathrm{d}x$.

   a. Etudier le sens de variation de la suite (u_n).

   b. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \ln 2$.
   En déduire que la suite (u_n) est convergente.

   c. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout réel $x \in [0;1]$ on a : $0 \leqslant \ln\left(1+x^n\right) \leqslant x^n$.
   En déduire la limite de la suite (u_n).

1) a)

x	0	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$\ln(x)$	$\|\|$	$-$	$-$	0	$+$

Pour tout $x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$, $\ln(x) \leq 0$

Par croissance de l'intégrale

$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln(x)\,dx \leq 0$

b) Pour tout $x \in [0;1)$:

$0 \leq x^2$

donc $\displaystyle\int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 x^2\,dx$

$0 \leq \displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$

donc $0 \geq \displaystyle\int_1^0 x^2\,dx$

Capacité 11 ***Étudier une suite d'intégrales, voir capacité 7 p.337***

Soit f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

1. Démontrer que pour tout $t\in[2\,;+\infty[$ on a : $0\leqslant f(t)\leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t}$.
2. En déduire que pour tout entier $n\geqslant 2$ on a : $0\leqslant \displaystyle\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-2}}{\sqrt{2\pi}}$
3. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 2}$ est croissante.

Intégration par parties

PROPRIÉTÉS Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et dont les dérivées u' et v' sont continues sur I. Soit a et b deux réels de I.

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

DÉMONSTRATION

Les fonctions u et v sont dérivables sur I donc la fonction uv l'est aussi et $(uv)' = u'v + uv'$.

Donc pour tout réel x de I, $u(x)v'(x) = (uv)'(x) - u'(x)v(x)$.

Or, les fonctions u et v sont continues sur I car elles sont dérivables sur I. De plus u' et v' sont continues sur I donc les fonctions uv' et $u'v$ le sont également.

Donc $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \big((uv)'(x) - u'(x)v(x)\big)\mathrm{d}x$

$= \int_a^b (uv)'(x)\mathrm{d}x - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ (propriété de linéarité).

Or, une primitive de la fonction $(uv)'$ est la fonction uv.

Donc $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$.

Cette méthode permet de transformer le calcul de l'intégrale d'une fonction. Un bon choix des fonctions u et v' conduit au calcul de l'intégrale d'une fonction dont on sait déterminer une primitive.

EXEMPLE : Calcul de $\int_0^\pi x\sin(x)\mathrm{d}x$.

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin(x)$ donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\cos(x)$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0\,;\pi]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[0\,;\pi]$.

Donc : $\int_0^\pi x\sin(x)\mathrm{d}x = \left[-x\cos(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos(x)\mathrm{d}x = \left[-x\cos(x)\right]_0^\pi + \left[\sin(x)\right]_0^\pi = \pi$.

Capacité 12 ***Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties, voir capacité 6 p.335***

1. Soit l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(x)\ \mathrm{d}x$.

   a. Compléter :
   Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\pi]$, on pose :

   $$u(x) = x \qquad\qquad u'(x) = \ldots$$
   $$v'(x) = \sin(x) \qquad\qquad v(x) = \ldots$$

   b. Calculer l'intégrale K en appliquant la méthode d'intégration par parties.

2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (3x-2)\ln(x)\ \mathrm{d}x$ avec la méthode d'intégration par parties.

3. a. Soit x un réel strictement positif, avec la méthode d'intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^{x} \ln(t)\ \mathrm{d}t$.

   b. En déduire une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0\,;+\infty[$.

125 20 min *Capacité 6, p. 335*

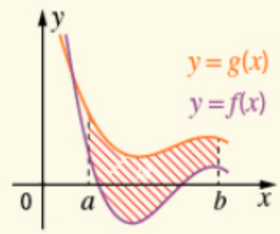
Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2x-1)\cos(x)\mathrm{d}x$.

2. $\int_1^{\mathrm{e}}5x^2\ln(x)\mathrm{d}x$.

PROPRIÉTÉ **Aire entre deux courbes**

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I telles que pour tout réel x de I, $f(x) \leqslant g(x)$. Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$. L'aire $\mathscr{A}$, en u.a., de la surface délimitée par les courbes représentant les fonctions f et g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x$.

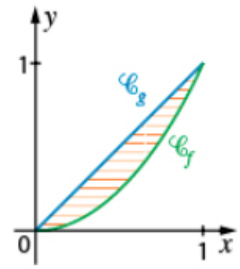


EXEMPLE : Soit f et g les fonctions définies sur [0 ; 1] par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$. Soit $\mathscr{S}$ le domaine délimité par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Pour tout réel x de [0 ; 1], on sait que $x^2 \geqslant x$.

Or, $\int_0^1 (x - x^2)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Donc, l'aire de $\mathscr{S}$, en unités d'aire, est $\frac{1}{6}$.



Capacité 13 ***Calculer l'aire entre deux courbes, capacité 8 p.337***

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0; 16]$ par

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x).$$

Dans un repère du plan $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g. Ces courbes sont données ci-dessous.

Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique.