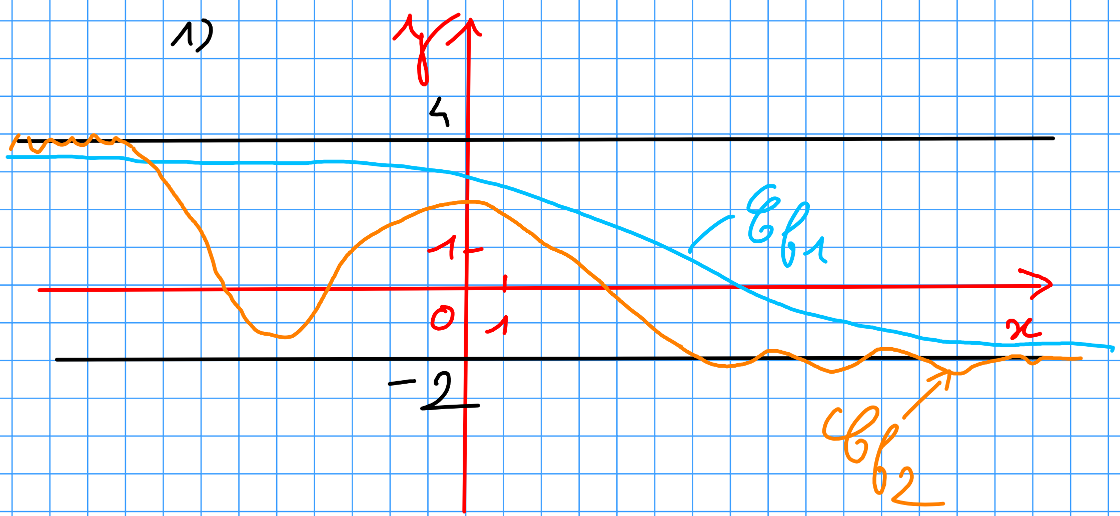
Chapitre limites de fonctions
Corrigés des exemples du cours

Capacité 1 ***Interpréter graphiquement une limite finie en l'infini***

Soit f une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{-\infty} f(x) = 4$ et $\lim_{+\infty} f(x) = -2$.

1. Représenter une courbe possible pour f en traçant ses droites asymptotes en $-\infty$ et $+\infty$.
2. f est-elle nécessairement une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$?

1)



2) On a $\lim_{x \to +\infty} f_2(x) = -2$ et $\lim_{x \to -\infty} f_2(x) = 4$

mais f_2 n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$.

Capacité 2 ***Comprendre la définition d'une limite en l'infini***

Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse :

- **Affirmation 1 :** Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors f croissante sur son intervalle de définition.
- **Affirmation 2 :** Si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ alors f décroissante sur son intervalle de définition.
- **Affirmation 4 :** Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ alors $f(x) < 0$ pour x assez grand.
- **Affirmation 5 :** Si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ alors $f(x) > 734$ pour x assez petit.

• Affirmation 1 : Faux on peut donner un contre-exemple graphique

• Affirmation 2 : Faux, idem contre-exemple graphique

• Affirmation 4 : Vraie. Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ alors par définition $f(x) < 0$ pour x assez grand

• Affirmation 5 : Vraie, par définition.

Capacité 3 ***Interpréter graphiquement des limites***

On considère une fonction f dont on donne ci-dessous le tableau de variation.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormal du plan.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$	731	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	732

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Quelles sont les valeurs de $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x)$ et de $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x)$?
3. Quelles sont les limites de f en 1^- et 1^+?
4. Déterminer les éventuelles droites asymptotes horizontales à $\mathscr{C}_f$.
5. Déterminer les éventuelles droites asymptotes verticales à $\mathscr{C}_f$.
6. Dans un repère orthonormal du plan, tracer les droites asymptotes à $\mathscr{C}_f$ puis une représentation possible de $\mathscr{C}_f$.

1) f définie sur $]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

2) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$

3) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$

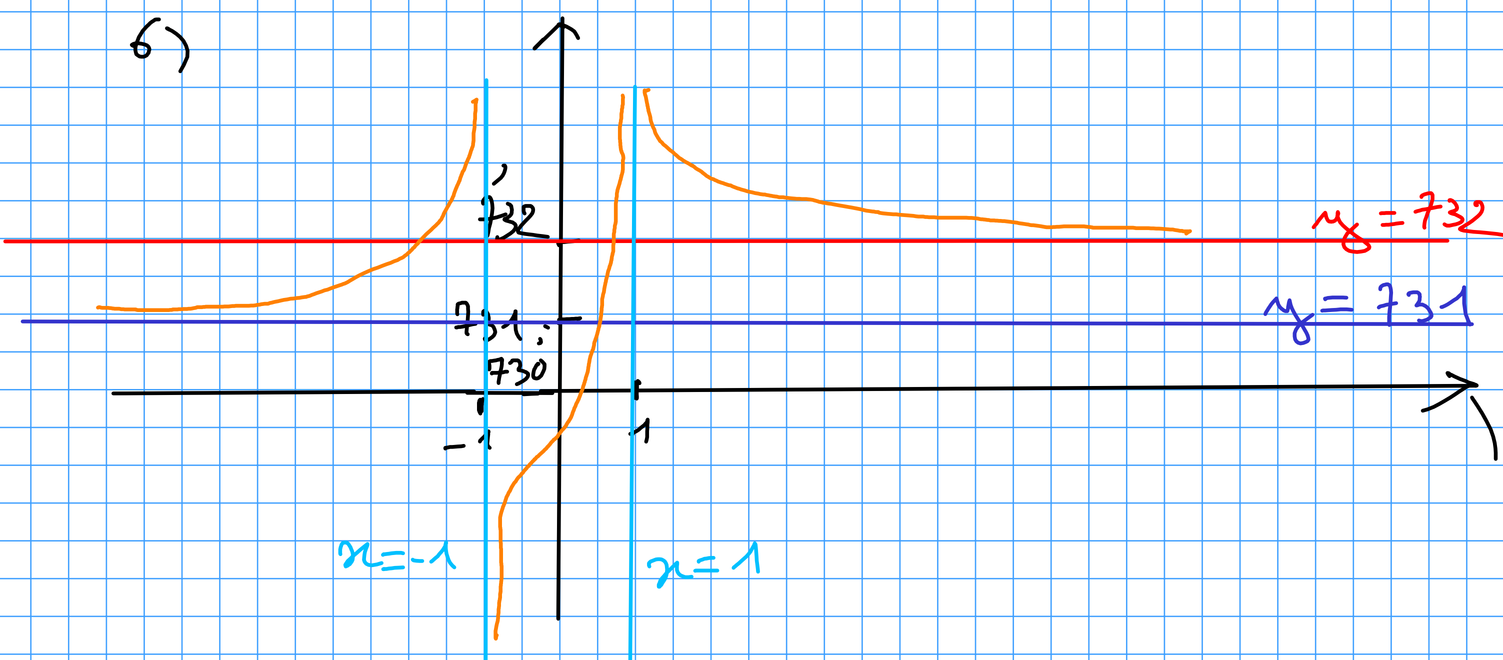
4) On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 731$ donc la droite d'équa-
-tion $y = 731$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 732$ donc la droite d'équation $y = 732$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

5) On a $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

On a $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'é-
-quation $x = 1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

6)



Capacité 5 ***Lever une forme indéterminée en factorisant le terme prépondérant***

1. Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -2x^5 + 3x^4 - x + 1$.
   Déterminer la limite de f en 0, puis en $+\infty$ et enfin en $-\infty$

2. Soit f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2; 1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 8x + 6}{x^2 + x - 2}$$

   a. Déterminer la limite de f en chacune des bornes de son ensemble de définition.

   b. Interpréter graphiquement ces limites.

1) • $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 1$

• Etude en $-\infty$:

• Par somme on a une FI du type $-\infty + +\infty$

• On factorise par le terme prépondérant ~~en $+\infty$~~ qui est x^5

$$-2x^5+3x^4-x+1 = x^5\left(-2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)$$

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5 = -\infty$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} -2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5} = -2$

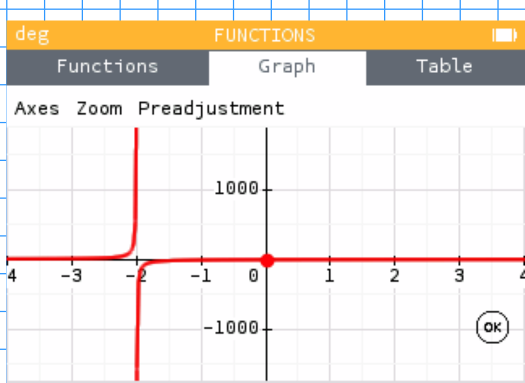
Donc par produit $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$

• Etude en $+\infty$:

De même on montre que :

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$$

2)



f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x^2-8x+6}{x^2+x-2}$

Graphiquement on peut conjecturer que $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$

et que f possède des limites finies en $-\infty$ et $+\infty$ (égales à 2 si on zoome)

. Etude en $-\infty$:

Par quotient on a une FI du type $\frac{+\infty}{+\infty}$

On factorise numérateur et dénominateur par leur terme prépondérant en $-\infty$:

$$f(x) = \frac{x^2\left(2 - \frac{8}{x} + \frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} = \frac{2 - \frac{8}{x} + \frac{6}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}$$

Par quotient on a désormais $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $-\infty$

. Etude en $+\infty$: de même on montre que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

. Pour l'étude en -2 et en 1 on a besoin d'étudier le signe du trinôme $x^2 + x - 2$:

1 est racine évidente car $1^2 + 1 - 2 = 0$

Le produit des racines est égal à $\frac{c}{a} = \frac{-2}{1} = -2$

donc l'autre racine est $\frac{-2}{1} = -2$

On en déduit le tableau de signes de x^2+x-2

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} 2x^2-8x+6 = 30$

et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} x^2+x-2 = 0^+$

donc par quotient $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \frac{2x^2-8x+6}{x^2+x-2} = +\infty$

On a $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} 2x^2-8x+6 = 30$

et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} x^2+x-2 = 0^-$

donc par quotient $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \frac{2x^2-8x+6}{x^2+x-2} = -\infty$

La droite d'équation $x=-2$ est donc asymptote à $\mathcal{C}_f$.

- Pour l'étude en 1, on est bloqué par une FI $\frac{0}{0}$.

⚠ Le terme prépondérant en 1 n'est **pas** le terme de + haut degré

On factorise le numérateur et le dénominateur pour simplifier des facteurs communs (il y en a forcément car les deux s'annulent en 1)

Pour le dénominateur les racines sont -2 et 1 et la forme factorisée $(x+2)(x-1)$

Pour le numérateur, les racines sont 1 et -3 et la forme factorisée

$$2(x-1)(x-3)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;1\}$ on a donc :

$$f(x) = \frac{2\cancel{(x-1)}(x-3)}{(x+2)\cancel{(x-1)}} = \frac{2x-6}{x+2}$$

et donc on a $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x-6}{x+2} = -\dfrac{4}{3}$

Capacité 6 ***Limite et algorithme de seuil***

Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est *vraie* ou *fausse* en justifiant la réponse.

- **Affirmation 1 :** La boucle ci-dessous se termine :

```python
def f(x):
    return x ** 3 - x ** 2

x = 0
while f(x) < 734:
    x = x + 1
```

- **Affirmation 2 :** La boucle ci-dessous ne se termine pas.

```python
def f(x):
    return x ** 3 - x ** 2
```



```python
x = 0
while f(x) > -734:
    x = x - 1
```

- **Affirmation 3 :** La boucle ci-dessous se termine.

```python
def f(x):
    return (734 * x ** 2) / (x ** 2 + 1)

x = 0
while abs(f(x) -734) > 0.001:
    x = x + 1
```

- **Affirmation 4 :**

  Même question que l'affirmation 3 mais sans la valeur absolue dans le test : `f(x)-734>0.001`.

- L'affirmation 1 est vraie.

Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$x^3 - x^2 = x^3 \times \left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

Or a $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

et $\lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$

donc par produit $\lim_{x \to +\infty} x^3 \times \left(1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$

Par définition il existe donc un entier x tel que $x^3 - x^2 \geq 734$ et la boucle se termine.

- L'affirmation 2 est fausse.

On a $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

et $\lim_{x \to -\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$

donc par produit $\lim_{x \to -\infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\infty$

Par définition il existe donc un entier x tel que $x^3 - x^2 \leq -734$ et la boucle se termine.

- L'affirmation 3 est vraie.

Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\frac{734 x^2}{x^2 + 1} = \frac{x^2 \times 734}{x^2 \times \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{734}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

Or a $\lim_{x \to +\infty} \frac{734}{1 + \frac{1}{x^2}} = 734$ par quotient

Par définition il existe donc un entier x tel que : $|f(x) - 734| \leq 0{,}001$ et la boucle se termine.

• L'affirmation 4 est fausse.

Pour tout réel x, on a :

$$\frac{734x^2}{x^2+1} - 734 = \frac{-734}{x^2+1}$$

donc $\frac{734x^2}{x^2+1} < 734$

donc la boucle de l'algorithme 4 ne se termine pas.

Capacité 7 ***Déterminer une limite par composition (voir capacité 6 p.171)***

On donne le tableau de variation d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère du plan.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$0,5$	↗	$+\infty$

De plus on sait que :

$f(-2) = -3$ et $f(3) = 2$

On donne le tableau de variation d'une fonction g dérivable sur $\mathbb{R} - \{-2\}$, on note $\mathscr{C}_g$ la courbe de g dans un repère du plan.

x	$-\infty$		-3		-2		1		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-2	↘	-5

1. Calculer $g(f(-2))$ puis déterminer un encadrement de $g\big(f(3)\big)$.
2. a. Que vaut $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} g(x)$? Interpréter graphiquement cette limite.

   b. Tracer dans un repère une représentation possible de la courbe $\mathscr{C}_g$ avec ses droites asymptote(s)qu'on peut déduire du tableau de variation de g et sa tangente au point d'abscisse 1.
3. En justifiant déterminer les limites suivantes :
   - $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)}$
   - $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) - f(x)$
   - $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) \times f(x)$
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} g(f(x))$
   - $\lim\limits_{x \to -\infty} g(f(x))$
   - $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} f(g(x))$
   - $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} f(g(x))$

1) $g(f(-2)) = g(-3) = 0$

$g(f(3)) = g(2)$

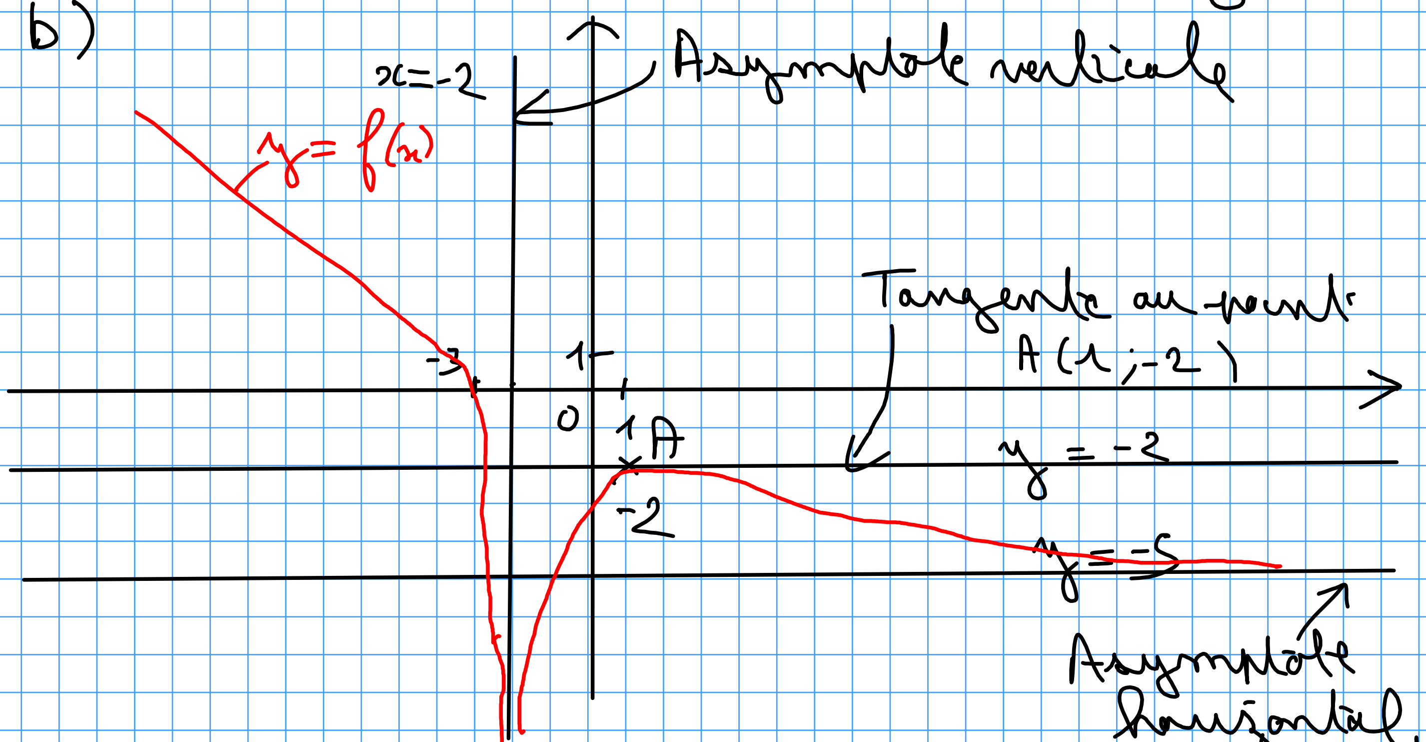
or g décroissante sur $[1;+\infty[$ donc :

$g(1) \geq g(2) \geq \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

$-2 \geq g(2) > -5$

2) a) On a $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} g(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = -2$ est asymptote à $\mathcal{C}_g$

b)



3) On a : $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = -3$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} g(x) = -\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0^+$

$$\text{. On a } \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -5 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par quotient} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0^- \end{array}$$

$$\text{. On a } \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} -f(x) = +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par somme} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) - f(x) = +\infty \end{array}$$

$$\text{. On a } \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par produit} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) \times f(x) = -\infty \end{array}$$

$$\text{. On a } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \underset{+\infty}{x} \longrightarrow \underset{+\infty}{f(x)} \longrightarrow \underset{-5}{g(f(x))}$$

$$\text{et } \lim_{y \to +\infty} g(y) = -5$$

donc par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} g(f(x)) = -5$

$$\text{. On a } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \underset{-\infty}{x} \longrightarrow \underset{-\infty}{f(x)} \longrightarrow \underset{+\infty}{g(f(x))}$$

$$\text{et } \lim_{y \to -\infty} g(y) = +\infty$$

donc par composition $\lim\limits_{x \to -\infty} g(f(x)) = +\infty$

. On a $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} g(x) = -\infty$

$x \longrightarrow g(x) \longrightarrow f(g(x))$

$-2^{-} \qquad -\infty \qquad -\infty$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

donc par composition $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(g(x)) = -\infty$

. On a $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} g(x) = -\infty$

$x \longrightarrow g(x) \longrightarrow f(g(x))$

$-2^{+} \qquad -\infty \qquad -\infty$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

donc par composition $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(g(x)) = -\infty$

Capacité 8 ***Utiliser les théorèmes de limite par comparaison ou encadrement***

1. Soit f une fonction telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Déterminer les limites suivantes :

   a. $\lim\limits_{x \to +\infty} x + f(x)$ **b.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ **c.** $\lim\limits_{x \to -\infty} x + f(x)$

2. Soit la fonction g définie sur $]-\infty\,; 0[\cup]0\,; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} + 1$.

   a. Représenter graphiquement la courbe de f avec sa calculatrice et conjecturer ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

   b. En utilisant un encadrement de $\sin(x)$, déterminer un encadrement de $g(x)$ pour tout réel x et en déduire les limites conjecturées.

1) Soit f une fonction telle que pour tout réel x : $-1 \leq f(x) \leq 1$

a) On en déduit que pour tout réel x, on a :

$$x-1 \leq f(x)+x \leq 1+x$$

pour cette question seule l'inégalité de gauche est utile.

De plus on a $\lim\limits_{x \to +\infty} x-1 = +\infty$

donc par comparaison on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)+x = +\infty$

b) Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\frac{-1}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$$

De plus on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0^-$

Donc par encadrement on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

c) Pour tout réel x, on a :

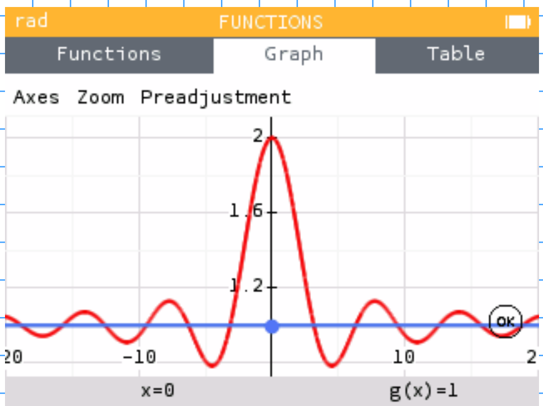
$$x-1 \leq f(x)+x \leq x+1$$

pour cette question seule l'inégalité de droite est utile.

De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} x+1 = -\infty$

Donc par comparaison $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)+x = -\infty$

2)



a) On peut conjecturer graphiquement que :

$$\lim_{x \to +\infty} 1+\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

b) Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

donc $1-\frac{1}{x} \leq 1+\frac{\sin(x)}{x} \leq 1+\frac{1}{x}$

De plus, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\frac{1}{x}=1$

Donc par encadrement on a $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{\sin(x)}{x} = 1$

De même, on montre que : $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\frac{\sin(x)}{x} = 1$

Capacité 9 ***Déterminer une limite par règles opératoires (dont composition)***

Déterminer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} - e^x$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,5t+2}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(3x+1)e^{-3x}$

- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0^+\end{array}\right\}$ donc par somme puis quotient :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$$

- Pour tout réel x, on a :

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-x}\times(e^{2x}-1)}{e^{-x}\times(e^{2x}+1)} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$ et $\lim\limits_{y\to-\infty} e^y = 0^+$

donc par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0^+$

Par somme puis quotient on a donc :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = -1$$

. On a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -e^{-x} = -\infty$ donc par somme puis quotient $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -\infty$

. On a $\lim\limits_{t \to +\infty} -0{,}5t + 2 = -\infty$

et $\lim\limits_{y \to -\infty} e^{y} = 0^+$

donc par composition $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-0,5t+2} = 0^+$

. Pour tout réel x, $e^{2x} - e^{x} = e^{x}(e^{x} - 1)$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} - 1 = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x}(e^{x} - 1) = +\infty$

. Pour tout réel x :

$$-1 \leq \sin(3x+1) \leq 1$$

donc $-e^{-3x} \leq e^{-3x} \times \sin(3x+1) \leq e^{-3x}$

De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} -3x = -\infty$ et $\lim\limits_{y \to -\infty} e^{y} = 0^+$

donc par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-3x} = 0^+$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} -e^{-3x} = 0^-$

Par encadrement on a donc :

$$\lim\limits_{x \to +\infty} \sin(3x+1)\, e^{-3x} = 0$$

Capacité 10 ***Déterminer une limite avec une règle de croissances comparées***

Déterminer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x-e^x$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2-3)e^x$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x+e^{-x}}{x}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{4x}}{x}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x)e^x}{x}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x}$

erreur $x \to -\infty$

- Pour tout $x>0$:

$$x - e^x = x\left(1 - \frac{e^x}{x}\right)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ par croissances comparées

donc par produit puis somme $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{e^x}{x} = -\infty$

Puis par produit, on a : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\dfrac{e^x}{x}\right) = -\infty}$

- Pour tout réel x, on a :

$$(x^2-3)e^x = x^2e^x - 3e^x$$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$ par croissances comparées

et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

Donc par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x - 3e^x = 0}$

- On a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x} = 0$

De plus $\dfrac{e^{-x}}{x} = \dfrac{1}{e^x x}$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x x = 0^-$

donc par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^x x} = -\infty$

On en déduit par somme que :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} + \frac{e^{-x}}{x} = -\infty}$$

- Pour tout réel x, on a :

$$\frac{e^{4x}}{x} = \frac{e^x}{x} \times e^{3x}$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par croissances comparées

et $\lim_{x\to+\infty} e^{3x} = +\infty$

donc par produit $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \times e^{3x} = +\infty}$

- Pour tout réel $x < 0$, on a :

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

de plus $x < 0$ donc $\frac{e^x}{x} < 0$

donc $-\frac{e^x}{x} \geqslant \frac{e^x}{x}\cos(x) \geqslant \frac{e^x}{x}$ $(**)$

Or $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ et $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$

donc par quotient $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = 0^- \\ \text{et donc } \lim_{x\to-\infty} -\frac{e^x}{x} = 0^+ \end{array}\right\} (*)$

Les limites $(*)$ et l'encadrement $(**)$ permettent d'appliquer le théorème de limite par encadrement : $\boxed{\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} \times \cos(x) = 0}$

Pour tout $x > 0$, on a :

$$\frac{e^{\sqrt{x}}}{x} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2} =$$

On a $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

et $\lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y^2} = +\infty$ par croissances comparées

donc par composition, on a : $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} = +\infty}$