

Corrigé des exemples du cours

Chapitre 1 : suites et récurrence



Capacité 1 Modéliser une situation par une suite

Une balle en caoutchouc est lâchée sans vitesse initiale d'une hauteur de 2 mètres au-dessus du sol. Le choc n'étant pas parfaitement élastique, la balle rebondit jusqu'à une hauteur de 1,60 mètre et continue à rebondir, en atteignant après chaque rebond une hauteur égale au $\frac{4}{5}$ de la hauteur du rebond précédent.

On modélise les hauteurs atteintes par la balle par une suite (h_n) où pour tout entier naturel n , h_n est la hauteur, exprimée en mètres, atteinte par la balle au n -ième rebond. On a alors $h_0 = 2$.

1.
 - a. Calculer h_1 et h_2 .
 - b. Pour tout entier naturel n , exprimer h_{n+1} en fonction de h_n .
 - c. En déduire la nature de la suite (h_n) . Préciser ses caractéristiques.
 - d. Déterminer le sens de variation de la suite (h_n) .
2. Déterminer le nombre minimal N de rebonds à partir duquel la hauteur atteinte par la balle est inférieure à 20 cm. Expliquer la démarche employée.

$$1) a) \quad h_0 = 2 \quad h_1 = 1,6 \quad h_2 = 1,28$$

$\xrightarrow{\times \frac{4}{5}} \quad \xrightarrow{\times \frac{4}{5}}$

b) et c) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$h_{n+1} = \frac{4}{5} \times h_n$$

Par définition, la suite (h_n) est géométrique de raison $\frac{4}{5}$.

d) la suite (h_n) est géométrique de raison $\frac{4}{5} > 0$ donc elle est monotone.

De plus $h_0 > h_1$, donc (h_n) est décroissante.

2) Pour déterminer le plus petit entier N tel que $h_N < 0,2$ on utilise :

- soit le tableau de valeurs de la calculatrice et on trouve que $N = 11$

deg		SEQUENCES
Sequences		Graph
Set the interval		Table
5	0.65536	
6	0.524288	
7	0.4194304	
8	0.3355443	
9	0.2684355	
10	0.2147484	
11	0.1717987	
12	0.137439	
13	0.1099512	

- soit un algorithme de seuil programmé en Python :

```
deg PYTHON
>>> from chapitre1_capacitel -
11
>>> |
```

algorithme de seuil

Type your text here

```
def seuil(s):
    h = 2
    n = 0
    while h >= s:
        h = 0.8 * h
        n = n + 1
    return n

print(seuil(0.2))
```



Capacité 2 Manipuler des encadrements

Démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+e^{-n}} < 1$$

On manipule des encadrements :

Pour tout entier $n \geq 0$:

$$0 < e^{-n} \leq 1$$

$$\text{donc } 1 < 1 + e^{-n} \leq 2$$

$$\text{donc } \boxed{\frac{1}{1} > \frac{1}{1 + e^{-n}} \geq \frac{1}{2}}$$

Une autre méthode est d'appliquer deux fois l'étude du signe de la différence.

$$\text{D'une part : } 1 - \frac{1}{1 + e^{-n}} = \frac{1 + e^{-n} - 1}{1 + e^{-n}} = \frac{e^{-n}}{1 + e^{-n}}$$

$$\text{Or } e^{-n} > 0 \text{ donc } 1 - \frac{1}{1 + e^{-n}} > 0$$

$$\text{donc } \frac{1}{1 + e^{-n}} < 1$$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part : } \frac{1}{1 + e^{-n}} - \frac{1}{2} &= \frac{2 - 1 - e^{-n}}{2(1 + e^{-n})} \\ &= \frac{1 - e^{-n}}{2(1 + e^{-n})} \end{aligned}$$

$$\text{Or } n \geq 0 \text{ donc } e^{-n} \leq 1$$

$$\text{et donc } \frac{1}{1 + e^{-n}} - \frac{1}{2} \geq 0$$

$$\text{et donc } \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+e^{-n}}$$

Capacité 3 Utiliser la méthode du signe de la différence

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geq 0$ par $u_0 = 99$ et $u_{n+1} = u_n - n^2 + 2n + 8$.

Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ et en déduire l'étude des variations de la suite (u_n) .

2. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \sqrt{n}$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 4$, on a $0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2}$.

1) Pour tout entier $n \geq 0$:

$$u_{n+1} - u_n = -n^2 + 2n + 8$$

On étudie le signe du trinôme $-n^2 + 2n + 8$

D'abord on détermine ses racines:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-1) \times 8 = 36$$

$\Delta > 0$ donc 2 racines distinctes:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 6}{-2} = 4 \quad \text{et} \quad x_2 x_1 = \frac{c}{a}$$

$$\text{donc } x_2 = \frac{-8}{x_1} = -2$$

Ensuite on applique la règle du signe d'un trinôme :

n	0	4	$+\infty$
$-n^2 + 2n + 8$	+	0	-
$= u_{n+1} - u_n$	signe de $-a$		signe de a

On en déduit que :

- pour tout $n \in \llbracket 0; 4 \rrbracket$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$
donc (u_n) croissante entre les rangs 0 et 4
- sinon pour tout $n \geq 4$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$
donc (u_n) décroissante à partir du rang 4

2) Pour tout entier $n \geq 0$, on pose :

$$u_n = \sqrt{n}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\ &= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{1} \times \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \end{aligned}$$

on a multiplié numérateur et dénominateur par $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

par l'expression conjuguée du numérateur car on veut "chasser" les racines du numérateur.

On a donc en développant le numérateur à l'aide de l'identité remarquable :

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$\sqrt{n} \geq 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{n+1} > 0$$

$$\text{donc} \quad \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > 0$$

$$\text{et donc} \quad u_{n+1} - u_n > 0$$

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

b) Pour tout entier $n \geq 4$, on a :

$$\sqrt{n} \geq \sqrt{4} \\ \text{et } \sqrt{n+1} \geq \sqrt{4+1}$$

par croissance de la fonction $\sqrt{\cdot}$ sur $[0; +\infty[$.

On en déduit que :

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \geq 2 + \sqrt{5}$$

puisque $\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{2 + \sqrt{5}} < \frac{1}{2}$

Ainsi pour tout entier $n \geq 4$, on a :

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}$$



Capacité 4 Comparer avec les fonctions de référence

1. Soit q un réel tel que $1 < q$. Comparer $1 - \frac{1}{q}$, $\left(1 - \frac{1}{q}\right)^2$ et $\left(1 - \frac{1}{q}\right)^3$.

2. Soit un entier $n \geq 1$, comparer $e^{-(1+\frac{1}{n})}$ et $e^{-\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$.

1) Soit q un réel tel que $1 < q$.

$$\text{On a donc : } 1 > \frac{1}{q}$$

$$\text{puis } 1 - \frac{1}{q} > 0$$

$$\text{De plus } -\frac{1}{q} < 0 \text{ donc } 1 - \frac{1}{q} < 1.$$

$$\text{Ainsi on a : } 0 < 1 - \frac{1}{q} < 1$$

On applique l'échelle de comparaison des puissances.

$$0 < \left(1 - \frac{1}{q}\right)^3 \leq \left(1 - \frac{1}{q}\right)^2 < 1 - \frac{1}{q} < 1$$

2) Soit un entier $n \geq 1$:

$$\text{On a donc : } \frac{1}{n} > 0$$

$$\text{et donc } 1 + \frac{1}{n} > 1$$

D'après l'échelle de comparaison des

puissances :

$$1 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

et donc $-\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \geq -\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

puis par croissance de la fonction exponentielle sur \mathbb{R} :

$$e^{-\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \geq e^{-\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

Capacité 5 Comparer membre à membre

1. Démontrer que pour tout entier $k \geq 1$, on a $\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k(k+1)}$.

2. Justifier que pour tout entier $k \geq 1$, on a : $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

3. À l'aide d'un argument de *somme télescopique*, en déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

4. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a $0 < \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2} < 1$.

1) Pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$k \leq k+1$$

de plus $k+1 > 0$

$$\text{donc } k(k+1) \leq (k+1)^2$$

$$\text{et donc } \frac{1}{k(k+1)} \geq \frac{1}{(k+1)^2}$$

2) Pour tout entier $k \geq 1$:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1+k-k}{k(k+1)} = \frac{1+k}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

3) Pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier $1 \leq k \leq n$:

$$k=1 \quad \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1+1}$$

$$k=2 \quad \frac{1}{2(2+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2+1}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$k=n-1 \quad \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$k=n \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Si on ajoute membre à membre ces n égalités, on obtient des simplifications en cascade dans le membre de droite:

Il reste:

$$\frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

somme des membres de gauche

somme des membres de droite
(simplification télescopique)

On peut condenser avec le symbole de sommation \sum :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

4) Pour tout entier $n \geq 1$, on a:

$$\frac{1}{n+1} > 0$$

donc $\boxed{1 - \frac{1}{n+1} < 1}$

De plus, si on applique l'inégalité démontrée en 1) à l'entier k entre 1 et n , on obtient:

$$k=1 \quad \frac{1}{1(1+1)} \geq \frac{1}{(1+1)^2}$$

$$k=2 \quad \frac{1}{2(2+1)} \geq \frac{1}{(2+1)^2}$$

$$\vdots$$
$$k \quad \frac{1}{k(k+1)} \geq \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$\vdots$$
$$k=n \quad \frac{1}{n(n+1)} \geq \frac{1}{(n+1)^2}$$

En ajoutant membre à membre ces inégalités de même sens, on obtient:

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2}}$$

2) une part on a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \leq 1 - \frac{1}{n+1}$$

n d'autre part on a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \text{ et } 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

Par transitivité de l'inégalité,
on en déduit que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \leq 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

De plus une somme de nombres
positifs est positive, donc :

$$0 < \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2} < 1$$



Capacité 6 Choisir une méthode adaptée pour étudier le sens de variation d'une suite

1. **Méthode 1** : Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

a. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = u_n(1 - 2u_n)$.

☞ Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

☞ Conclure sur le sens de variation de la suite (u_n) .

b. Reprendre le même plan d'étude pour étudier le sens de variation de la suite (w_n) définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ par $w_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

2. **Méthode 2** : Si (u_n) à termes strictement positifs, comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n e^{-n}$. On admet que pour tout entier $n \geq 0$, on a $u_n > 0$.

☞ Soit un entier $n \geq 0$, démontrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$.

☞ En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

3. **Méthode 3** : Si $u_n = f(n)$, étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 0$, par $u_n = \frac{e^n}{e^n + 1}$.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$. On a pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = f(n)$.

☞ Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R} et déterminer l'expression de $f'(x)$.

ATTENTION, on peut dériver la fonction f mais pas la suite (u_n) car celle-ci n'est pas définie sur un intervalle!!!

☞ En déduire le sens de variation de la fonction f sur \mathbb{R} , puis le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier $n \geq 0$ et le sens de variation de (u_n) .

1) Méthode 1:

a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$u_{n+1} - u_n = u_n(1 - 2u_n) - u_n = -2u_n^2$$

Or on a $u_n^2 \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$

La suite (u_n) est donc décroissante.

b) Pour tout entier $n \geq 1$, on a:

$$W_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\text{donc } W_{n+1} - W_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

$$\text{donc } W_{n+1} - W_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n+1}$$

$$\text{donc } W_{n+1} - W_n = \frac{1}{n+1}$$

Pour tout entier $n \geq 1$ on a donc

$$W_{n+1} - W_n > 0$$

La suite (W_n) est donc strictement croissante, ce qui est logique puisqu'on ajoute à chaque rang un nouveau terme positif.

2) Soit (u_n) la suite définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-n} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-n}$$

Or $n \geq 0$ donc $0 < e^{-n} \leq 1$

et donc $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$

De plus $u_n \geq 0$ (admis se prouve par récurrence)

donc $0 < u_n < u_{n+1} < u_n$

donc $0 < u_{n+1} < u_n$

la suite (u_n) est donc décroissante

3) Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{e^n}{e^n + 1} = f(n)$$

avec f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

$$f = \frac{u}{v} \text{ avec } u \text{ et } v \text{ dérivables sur } \mathbb{R}$$

donc f dérivable sur \mathbb{R}

Pour tout réel x :

$$u(x) = e^x$$

$$v(x) = e^x + 1$$

$$u'(x) = e^x$$

$$v'(x) = e^x$$

D'après une formule des cours :

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\text{donc : } f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$\text{donc } f'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

Pour tout réel x , on $e^x > 0$ et $(e^x + 1)^2 > 0$
donc $f'(x) > 0$

La fonction f est donc strictement croissante sur \mathbb{R} .

La suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par $u_n = f(n)$ est donc croissante car l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} est inclus dans \mathbb{R} .



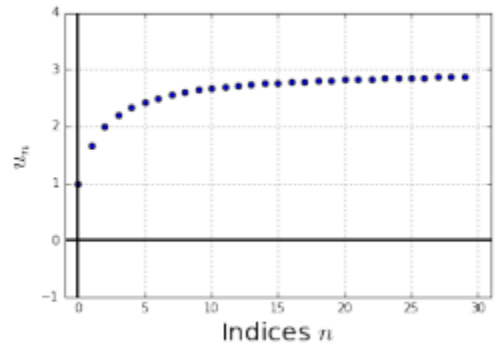
Capacité 7 Démontrer qu'une suite est bornée

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geq 0$ par $u_n = \frac{3n+2}{n+2}$.

1. On donne ci-contre la représentation graphique des premiers termes de la suite (u_n) dans un repère orthonormal.

Émettre une conjecture sur un minorant et un majorant possibles de la suite (u_n) .

2. Démontrer cette conjecture.



1) Graphiquement, on peut conjecturer que pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$1 \leq u_n < 3$$

et donc que 1 est minorant et 3 un majorant de la suite (u_n) .

2) Démontrons cette conjecture en appliquant deux fois la méthode du signe de la différence :

Pour tout entier $n \geq 0$:

$$3 - u_n = 3 - \frac{3n+2}{n+2} = \frac{3(n+2) - (3n+2)}{n+2}$$

$$3 - u_n = \frac{4}{n+2}$$

Gn a donc $3 - u_n > 0$

et donc $u_n < 3$

3 est donc un majorant de (u_n)

D'autre part :

$$u_n - 1 = \frac{3n+2}{n+2} - \frac{n+2}{n+2} = \frac{2n}{n+2}$$

Gn a donc $u_n - 1 \geq 0$

et donc $1 \leq u_n$

1 est donc un minorant de (u_n)

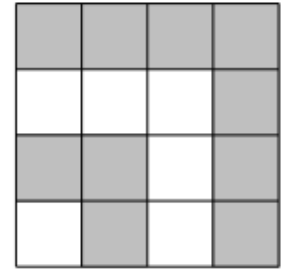
Remarque: Gn peut démontrer que (u_n) est croissante et donc minorée par son premier terme u_0 .

Capacité 8 Étudier une suite arithmétique

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ des entiers impairs successifs :

$$u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = 5, \dots$$

1. Justifier que $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite arithmétique.
2. Soit n un entier naturel positif, exprimer u_n en fonction de n .
3. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $\sum_{k=1}^n u_k = n^2$.



1) Pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} = u_n + 2$$

La suite des entiers impairs successifs est donc arithmétique de raison 2.

2) D'après une propriété du cours, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = u_1 + (n-1) \times 2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$$

3) D'après une propriété du cours, pour tout entier naturel n , on a

$$\sum_{k=1}^n u_k = u_1 + \dots + u_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2}$$

donc

$$\sum_{k=1}^n u_k = n \times \frac{1 + 2n - 1}{2} = n^2$$

Capacité 9 Étudier une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite arithmétique des entiers impairs définie dans l'exemple 9.

On définit la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ pour tout entier $n \geq 1$ par $v_n = e^{u_n}$.

1. Justifier que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est géométrique.

2. Calculer la somme $\sum_{k=1}^{30} v_k$.

3. Soit un entier $n \geq 1$, exprimer en fonction de n le produit de termes consécutifs :

$$\prod_{k=1}^n v_k = v_1 \times v_2 \times \dots \times v_{n-1} \times v_n$$

1) Pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$v_{n+1} = e^{u_{n+1}} = e^{u_n+2} = e^2 \times e^{u_n}$$

donc $v_{n+1} = e^2 \times v_n$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison e^2 .

2) D'après une propriété du cours :

$$\sum_{k=1}^{30} v_k = v_1 \times \frac{1 - (e^2)^{30}}{1 - e^2} = e^1 \times \frac{1 - e^{60}}{1 - e^2}$$

donc $\sum_{k=1}^{30} v_k = e^1 \times \frac{e^{60} - 1}{e^2 - 1}$

Pour tout entier $n \geq 1$:

$$\prod_{k=1}^n N_k = N_1 \times \dots \times N_n = e^{u_1} \times \dots \times e^{u_n}$$

$$\prod_{k=1}^n N_k = e^{u_1 + \dots + u_n} = e^{\sum_{k=1}^n u_k}$$

On la suite (u_n) est arithmétique de raison 2 donc d'après une propriété du cours :

$$\sum_{k=1}^n u_k = n \times \frac{u_1 + u_n}{2} = n \times \frac{1 + 2n - 1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n u_k = n^2 \quad (\text{d\u00e9j\u00e0 d\u00e9montr\u00e9 en l\u00e9g\u00e8re 8})$$

On en d\u00e9duit que :

$$\prod_{k=1}^n N_k = e^{n^2}$$