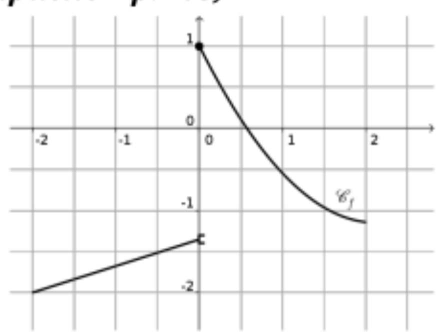
Corrigé des exemples du cours du chapitre continuité

Capacité 1 ***Étudier la continuité d'une fonction (voir capacité 1 p.203)***

1. Déterminer les points de continuité et de discontinuité de la fonction représentée ci-contre.
2. Représenter la courbe d'une fonction définie sur l'intervalle $[-2;2]$, telle que $f(-2)>0$ et $f(2)<0$ et f ne s'annule pas sur $[-2;2]$.

   f peut-elle être continue sur $[-2;2]$?

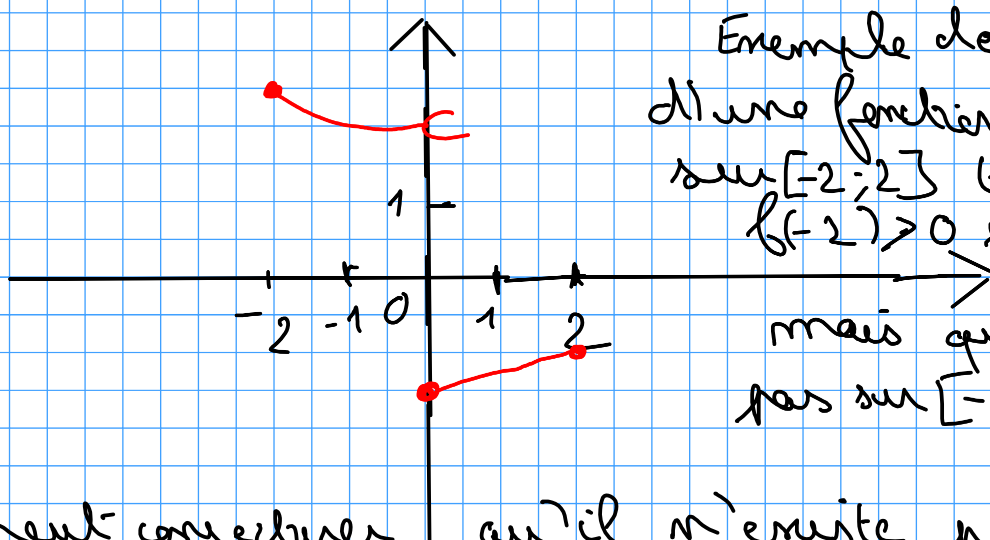


Source : Rico602 [CC BY-SA 3.0]

1) f continue sur $[-2;0[\cup]1;2]$
f discontinue en 0 car :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -1{,}5 \neq 1 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$$

2)



Exemple de courbe d'une fonction f définie sur $[-2;2]$ telle que $f(-2)>0$ et $f(2)<0$ mais qui ne s'annule pas sur $[-2;2]$

On peut conjecturer qu'il n'existe pas de fonction continue sur $[-2;2]$ telle que $f(-2)>0$ et $f(2)<0$ et que f ne s'annule pas sur $[-2;2]$

On pourra le justifier avec le théorème des valeurs intermédiaires.

Algorithmique 1 ***La fonction partie entière***

On considère la fonction Python définie ci-dessous :

```python
def f(x):
    n = 0
    if x < 0:
        while n > x:
```



```python
            n = n - 1
        return n
    else:
        while n <= x:
            n = n + 1
        return n - 1
```

1. Déterminer f(0), f(0.1), f(0.9), f(1), f(1.1), f(-0.1), f(-0.9), f(-1), f(-1.1).
2. Que représente f(x) pour un réel x?
3. Représenter la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[-5;5]$.
4. Déterminer les points de continuité ou de discontinuité de f.

1) $f(0)=0$ $f(0.1)=0$

$f(1)=1$ $f(1.1)=1$

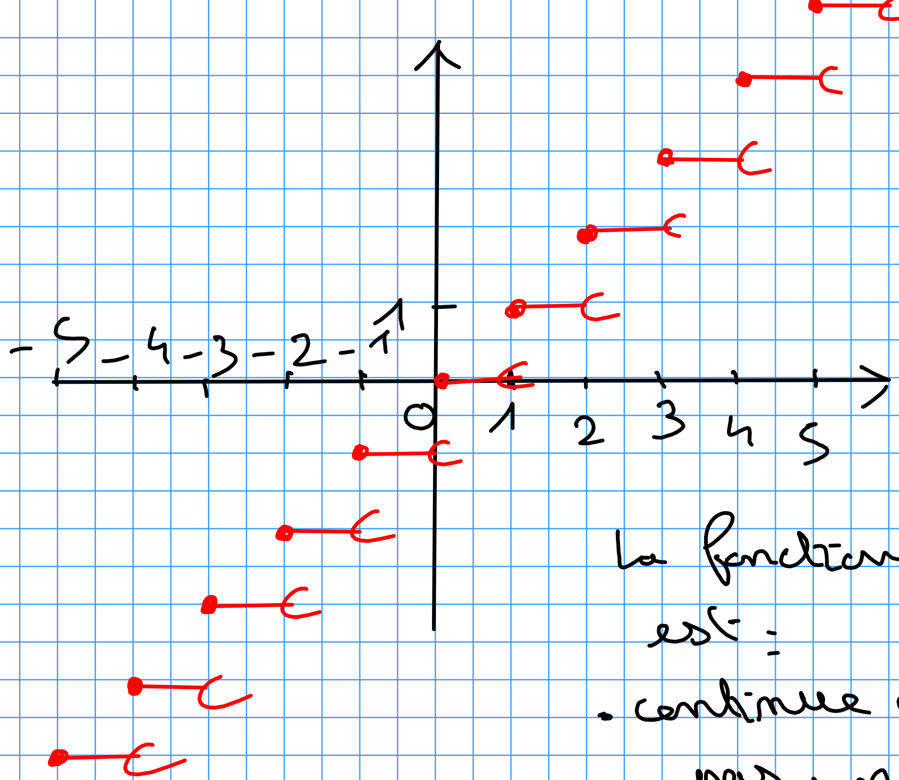
$f(-0.1)=-1$ $f(-0.9)=-1$

$f(-1)=-1$ $f(-1.1)=-2$

2) $f(x)$ représente le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Cette fonction f est la fonction partie entière, pour tout réel x, on note $f(x)=\lfloor x \rfloor$

3)



La fonction partie entière est :

- continue en x si x n'est pas un entier
- discontinue en x si x est un entier

Capacité 2 ***Étudier une suite du type*** $(f(u_n))$

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
2. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ et déterminer la valeur de ℓ en passant à la

limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

3. Étudier la limite de la suite $(f(u_n))$.

1) Pour tout entier naturel n, on définit la propriété : P_n : " $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ "
Démontrons par récurrence que P_n est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

Initialisation :

$u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{1}{2} u_0 + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

On a $1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 2$ donc P_0 est vraie

Hérédité : Soit un entier $n \geqslant 0$ tel que P_n est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$$

donc $\frac{1}{2} \times 1 + 1 \leq \frac{1}{2} u_n + 1 \leq \frac{1}{2} u_{n+1} + 1 \leq \frac{1}{2} \times 2 + 1$

$$\frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$$

donc $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$

donc P_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : P_n est initialisée pour $n = 0$ et héréditaire donc elle est vraie par récurrence pour tout entier $n \geqslant 0$.

2) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$$

· D'une part, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_n \leq u_{n+1}$ donc (u_n) est croissante.

· D'autre part, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a : $u_n \leq 2$ donc (u_n) majorée par 2

D'après le théorème de convergence monotone, on en déduit que (u_n) converge vers une limite ℓ telle que $0 \leq \ell \leq 2$.

On a pour tout entier naturel $n \geq 0$:

$$u_{n+1} = g(u_n) \text{ avec } g(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

g est continue sur $\mathbb{R}$

donc si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

alors on peut passer à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = g(u_n)$

et on a $\ell = g(\ell)$.

On résout l'équation :

$$\ell = g(\ell) \iff \ell = \frac{1}{2}\ell + 1$$

$$\ell = g(\ell) \iff \frac{1}{2}\ell = 1$$

$$\ell = g(\ell) \iff \ell = 2$$

On vérifie bien que : $0 \leq \ell \leq 2$.

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$.

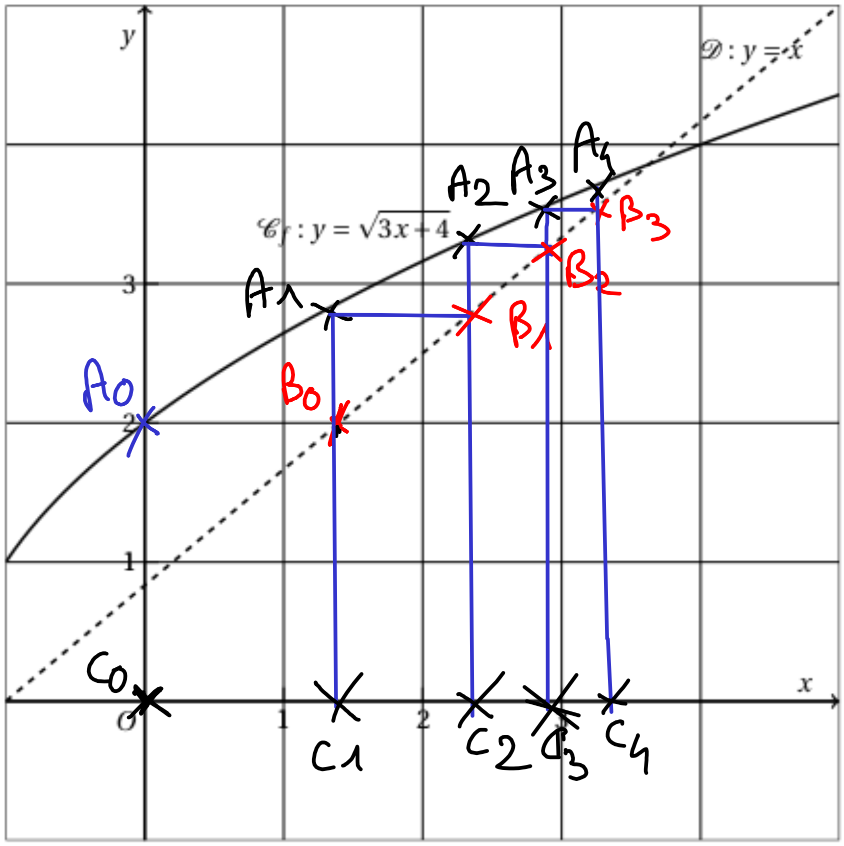
. f est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$.

. De plus la suite (u_n) converge vers $\ell = 2$

. Donc d'après une propriété du cours, la suite $(f(u_n))$ convers vers $f(\ell) = f(2)$.

Capacité 3 *Étudier une suite définie par* $u_{n+1} = f(u_n)$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.
On a représenté graphiquement la courbe $\mathscr{C}_f$ d'équation $y = f(x)$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.



1. Représenter sur le graphique les premiers termes de la suite en appliquant cet algorithme de construction :

- **Étape 1 :** On part du point de coordonnées C_0 sur l'axe des abscisses de coordonnées $(u_0\,;0)$ et on construit le point A_0 de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse u_0 et d'ordonnée $f(u_0) = u_1$.
- **Étape 2 :** On construit le point B_0 sur la droite d'équation $y = x$ de même ordonnée u_1 que A_0 et d'abscisse u_1.
- **Étape 3 :** On construit le point C_1 sur l'axe des abscisses de même abscisse que B_0. Les coordonnées de C_1 sont $(u_1\,;0)$ et on commence une nouvelle itération à l'étape 1.

2. Calculer avec une machine les valeurs décimales approchées des premiers termes de (u_n) et vérifier la cohérence de la construction graphique.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$$

4. En déduire que la suite (u_n) converge.

5. Déterminer sa limite en appliquant la propriété précédente.

deg SEQUENCES

Sequences | Graph | Table

Set the interval

n	u_n
0	0
1	2
2	3.162278
3	3.672442
4	3.87522
5	3.95293
6	3.98231
7	[illegible]

3) Graphiquement, on peut conjecturer que la suite (u_n) converge vers 4, abscisse du point d'intersection de la droite d'équation $y=x$ et de la courbe d'équation $y=f(x)$

f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{3x+4}$

$f=\sqrt{u}$ avec $u(x)=3x+4$

donc f dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout $x\geq 0$:

$f'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ donc $f'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}=\frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$

On en déduit que pour tout $x\geq 0$, on a $f'(x)>0$ donc f croissante sur $[0;+\infty[$

• Pour tout entier naturel $n\geq 0$ on définit la propriété : P_n : « $0\leq u_n\leq u_{n+1}\leq 4$ »

Démontrons par récurrence que P_n est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

<u>Initialisation :</u> $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{3\times 0+4} = \sqrt{4} = 2$

donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$

donc P_0 est vraie

<u>Hérédité :</u> Soit un entier $n \geq 0$ tel que P_n est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$$

f est croissante sur $[0;+\infty[$, donc :

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(4)$$

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$$

donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$

donc P_{n+1} est vraie

<u>Conclusion :</u> P_n est initialisée pour $n=0$ et elle est héréditaire donc elle est vraie par récurrence pour tout entier $n \geq 0$.

4) Pour tout entier $n \geq 0$, on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$

. D'une part, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \leq u_{n+1}$ donc (u_n) croissante.

. D'autre part, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \leq 4$ donc (u_n) majorée par 4.

D'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge vers une limite ℓ telle que $0 \leq \ell \leq 4$.

5) . $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ avec $0 \leq \ell \leq 4$

. Pour tout entier $n \geq 0$, on a
$u_{n+1} = f(u_n)$

. f est continue sur $[0;4]$

Donc d'après une propriété du cours, ℓ est solution sur $[0;4]$ de l'équation
$$f(x) = x.$$

On résout dans $[0;4]$:

$$f(x) = x \iff \begin{cases} \sqrt{3x+4} = x \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \sqrt{3x+4}^2 = x^2 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 3x+4 = x^2 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$f(x) = x \iff \begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

On résout l'équation $x^2 - 3x - 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times (-4) = 25$

$\Delta > 0$ donc deux racines distinctes :

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3 - \sqrt{25}}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{25}}{2} = 4$

On déduit que dans $[0;4]$:

$$f(x) = x \iff x = 4.$$

L'unique solution de $f(x) = x$ dans $[0;4]$ est 4

et d'après le raisonnement précédent, c'est forcément la limite l de la suite (u_n).