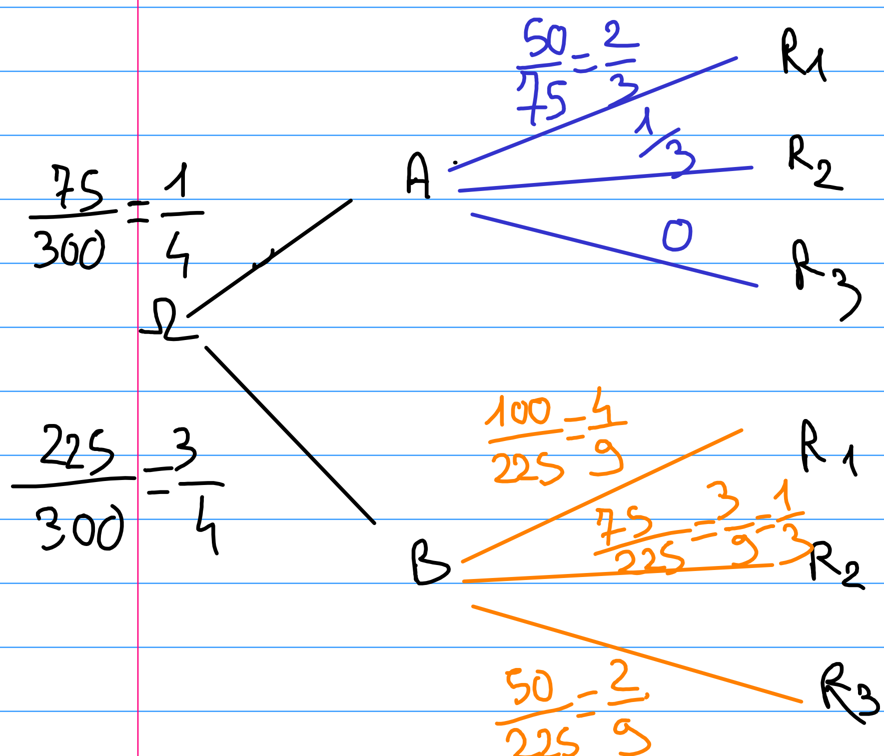
Corrigé du sujet zéro 2020-2021

Exercice 3

1) Modélisation par un arbre pondéré :



2) a) D'après la formule des probabilités composées :

$$P(A \cap R_2) = P(A) \times P_A(R_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

b) $\{A, B\}$ est une partition de l'univers Ω.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(R_2) = P(A \cap R_2) + P(B \cap R_2)$$

On applique deux fois la formule des probabilités composées :

$$P(R_2) = P(A)\times P_A(R_2) + P(B)\times P_B(R_2)$$

$$P(R_2) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\times\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{3} = \underline{\frac{1}{3}}$$

c) Sachant que R_2 est réalisé, la probabilité que A soit réalisé se calcule avec la probabilité conditionnelle :

$$P_{R_2}(A) = \frac{P(R_2\cap A)}{P(R_2)} = \frac{P(A\cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$$

On remarque que $P_{R_2}(A) = P(A)$ ce qui signifie que les événements A et R_2 sont indépendants.
Cela s'explique par le fait que :

$$P_A(R_2) = \frac{1}{3} = P_B(R_2) = P_{\bar{A}}(R_2)$$

3) Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de passages nécessaires pour réussir le permis.

a) X prend la valeur 1, 2 et 3 :

Loi de probabilité de X :

k	1	2	3
$P(X=k)$	$P(R_1)$	$P(R_2)$	$P(R_3)$

On a démontré en 2) b) que $P(R_2)=\frac{1}{3}$

En appliquant la formule des probabilités totales, il vient :

$$P(R_3) = P(A\cap R_3) + P(B\cap R_3)$$

Or $A\cap R_3 = \emptyset$ donc $P(R_3) = P(B\cap R_3)$

Avec la formule des probabilités composées, il vient :

$$P(R_3) = P(B\cap R_3) = P(B)\times P_B(R_3) = \frac{3}{4}\times\frac{2}{9} = \frac{1}{6}$$

k	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

On a $P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$

donc $P(X=1) = 1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

b) L'espérance de cette variable aléatoire X est égale à : $E(X) = \sum_{k=1}^{3} P(X=k)\times k = \frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6} = \frac{5}{3}$

Interprétation : si on extrait au hasard un échantillon de grande taille de cette population (avec remise) et que l'on calcule la moyenne empirique de la variable aléatoire X pour chaque individu de l'échantillon, on obtiendra une moyenne proche de $\frac{5}{3}$. On peut considérer $\frac{5}{3}$ comme la valeur moyenne de X.

4)

a)

Pour un individu du groupe, réussir le permis en au plus 2 examens est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = P(R_3) = \frac{1}{6}$

Si on extrait lors de tirages avec remise successifs, un échantillon de taille n du groupe, alors on peut répéter l'épreuve de Bernoulli précédente n fois de façon indépendante.

La variable aléatoire Y_n donnant le nombre de "succès" (Réussir en 3 examens) sur ce schéma de Bernoulli de paramètres n et $\frac{1}{6}$) suit une loi binomiale de paramètres $n=3$ et $p=\frac{1}{6}$..

On a $P(Y_3=0) = (1-p)^n = \left(1-\frac{1}{6}\right)^n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$

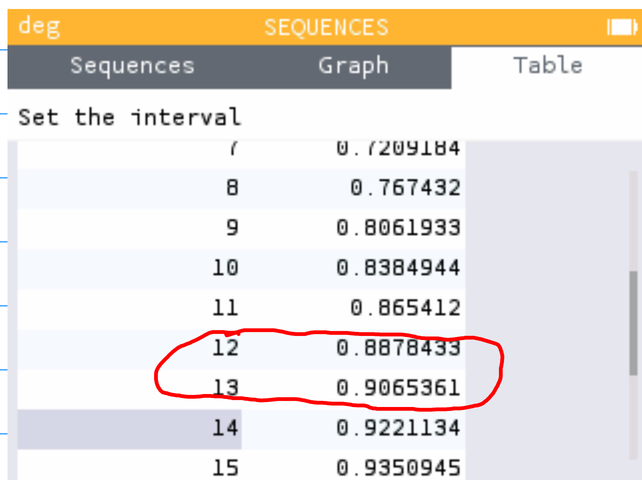
donc $P(Y_3 \geq 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

L'évènement "$Y_3 \geq 1$" peut être défini comme "Au moins un individu sur l'échantillon de taille n a eu besoin de 3 examens pour réussir son permis".

```
def seuil(p):
    n = 1
    while 1-(5/6)**n <= p:
        n = n+1
    return n
```

La valeur renvoyée par seuil(0,9) est le plus petit entier n tel que $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n > 0,9$

Avec le tableau de la calculatrice on obtient $n = 13$.


deg SEQUENCES

Sequences | Graph | Table

Set the interval

7	0.7209184
8	0.767432
9	0.8061933
10	0.8384944
11	0.865412
12	0.8878433
13	0.9065361
14	0.9221134
15	0.9350945