# Feuille de calcul
# Balance de Roberval

Frédéric LLANTE

Professeur stagiaire – S2I option Information et Numérique
2016 - 2017

## Table des matières

# 1 La balance de Roberval

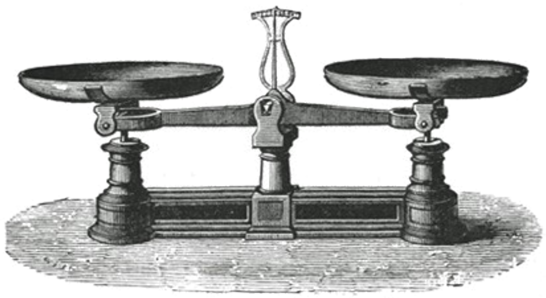


Fig. 29.

38. **Balance Roberval.** — On doit à Roberval une balance dont l'emploi s'est considérablement étendu dans le commerce. L'avantage qu'elle présente sur la balance ordinaire consiste en ce que ses plateaux ne sont pas suspendus par des chaînes souvent gênantes dans la pratique, et, par suite, reçoivent plus facilement les corps à peser, flacons, poudres, etc.

Elle est représentée par la figure 29.

Le fléau AB (fig 30) peut osciller autour du point C. A ses extrémités A et B sont suspendues des tiges AD et BE sup-

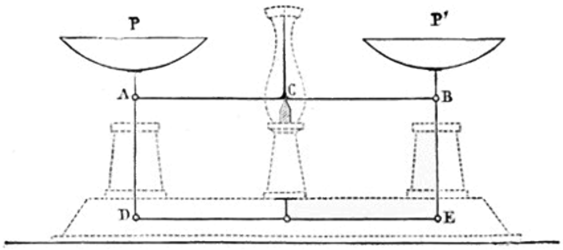



Fig. 30.

portant les plateaux P et P′ et s'articulant en D et E avec une barre DE logée dans le pied de l'instrument et mobile sur un axe placé en son milieu. Lorsque le fléau AB s'incline, DE s'incline aussi ; mais, grâce aux articulations D et E, le parallélogramme ABDE se déforme, tandis que les tiges AD et BE, restant verticales, maintiennent les plateaux horizontaux.

*LEÇONS DE PHYSIQUE "à l'usage des demoiselles" par Paul POIRÉ - Paris – 1879 (Document "Le Compendium")*

## 1.1 Bref historique

La balance de Roberval, du nom du village natal de son inventeur le mathématicien français Gilles Personne, est inventée par en 1669-1670.

Sa généralisation se fait à partir du milieu du XIXè siècle en France après son amélioration par Joseph Béranger.

Elle gardera sa place prépondérante sur les étals jusque dans les années 1980, où la généralisation des balances électroniques conduit à sa disparition progressive.

## 1.2 Intérêt

Comme l'explique l'illustration ci-contre, la balance présente l'intérêt de placer les plateaux au dessus du fléau et d'être juste et fidèle quelque soit l'emplacement de la masse sur le plateau.

# 2 La schématisation cinématique

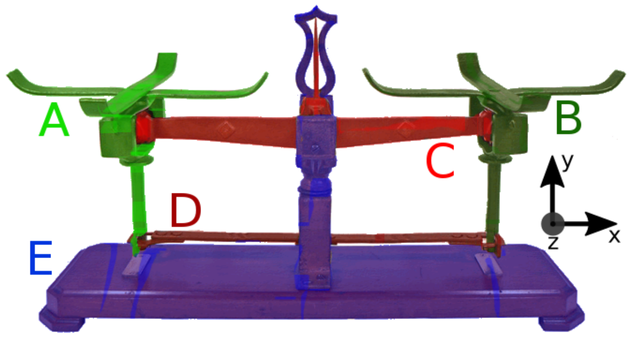
## 2.1 Principe de la schématisation

1. Recherche des classes d'équivalence cinématique, c'est à dire des ensembles de pièces mécaniques reliées entre elles par des liaisons d'encastrement ;
2. Identification des liaisons mécaniques entre les classes d'équivalence cinématique ;
   1. Recherche des surface en contact ;
   2. Déduction des degrés de liberté ;

3. Identification de la liaison ;
4. Réalisation du graphe de liaison ;
5. Élaboration du schéma.

## 2.2 Application à la balance de Roberval

### 2.2.1 Recherche des classes d'équivalence cinématique (CEC)




| CEC | Éléments |
|---|---|
| A | Tige (+ plateau) |
| B | Tige (+ plateau) |
| C | Fléau |
| D | Contre-fléau |
| E | Socle/bâti |

*http://www.lecompendium.com/, Albert Balasse*

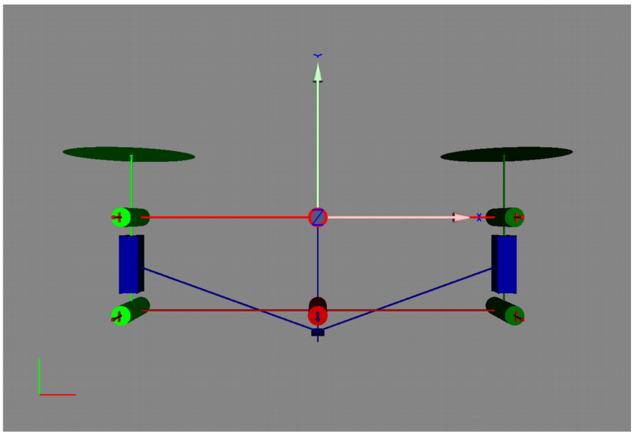
### 2.2.2 Mouvements et liaisons entre les classes d'équivalence cinématique (CEC)

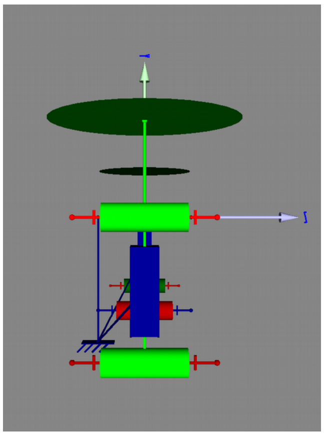
En observant les surfaces fonctionnelles qui permettent les mouvements relatifs entre les CEC en fonction des axes de translation $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$, il est possible de déterminer le tableau des liaisons suivant.

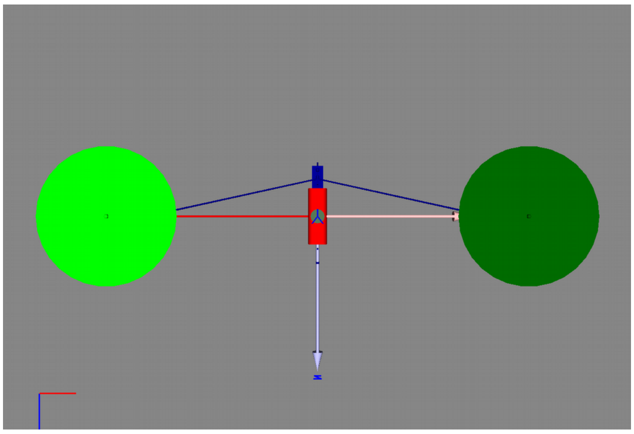
Le bâti limite la translation des tiges selon l'axe $\vec{y}$, la relation est représentée par une glissière. Le fléau et le contre fléau sont en rotation par rapport au socle et aux tiges selon l'axe $\vec{z}$, les relations sont assimilées à des pivots même si dans la réalité la relation fléau tige/bâti sont des couteaux.

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| A | | Pas de liaison | Pivot $\vec{z}$ | Pivot $\vec{z}$ | Glissière $\vec{y}$ |
| B | Pas de liaison | | Pivot $\vec{z}$ | Pivot $\vec{z}$ | Glissière $\vec{y}$ |
| C | Pivot $\vec{z}$ | Pivot $\vec{z}$ | | Pas de liaison | Pivot $\vec{z}$ |
| D | Pivot $\vec{z}$ | Pivot $\vec{z}$ | Pas de liaison | | Pivot $\vec{z}$ |
| E | Glissière $\vec{y}$ | Glissière $\vec{y}$ | Pivot $\vec{z}$ | Pivot $\vec{z}$ | |

### 2.3 Schéma cinématique







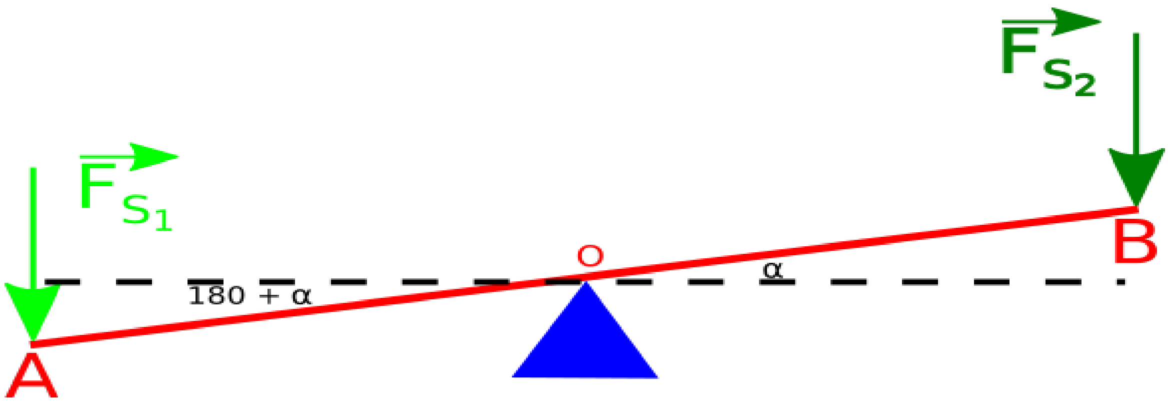
# 3 Résolution statique

### 3.1 Simplification du système

Le système (S) peut être simplifié de la manière suivante dans le plan x,y. Les plateaux sont réduits aux points A et B sur lesquels s'exercent une force F.

Les pivots sont réduits à une liaison ponctuelle au point O.

$S_1$ et $S_2$ sont les deux systèmes extérieurs qui exercent une force respectivement au point A et au point B du système balance (S).



## 3.2 Résolution à l'équilibre

### 3.2.1 Torseurs des actions mécaniques extérieures à S

***Au point d'application des forces***

$$\{F_{(S_1\to S)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{(S_1\to S)}} \\ \overrightarrow{M_{A((S_1\to S))}} \end{Bmatrix}$$

$$\{F_{(S_2\to S)}\} = {}_B\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{(S_2\to S)}} \\ \overrightarrow{M_{B((S_2\to S))}} \end{Bmatrix}$$

Les masses A et B étant immobiles, les moments sont nuls en leur point d'application.

$$\{F_{(S_1\to S)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{(S_1\to S)}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\{F_{(S_2\to S)}\} = {}_B\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{(S_2\to S)}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

***Transport des torseurs au point O***

$$\{F_{(\bar{S}\to S)}\} = {}_O\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{(\bar{S}\to S)}} \\ \overrightarrow{M(\bar{S}\to S)} \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} \overrightarrow{R_{(\bar{S}\to S)}} = \overrightarrow{F_{(S_1\to S)}} + \overrightarrow{F_{(S_2\to S)}} \\ \overrightarrow{M(\bar{S}\to S)} = \overrightarrow{M_{O(S_1\to S)}} + \overrightarrow{M_{O(S_2\to S)}} \end{matrix}$$

$$\overrightarrow{M_{O(S_1\to S)}} = \overrightarrow{M_{A(S_1\to S)}} + \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F_{(S_2\to S)}}$$

$$\overrightarrow{M_{O(S_2\to S)}} = \overrightarrow{M_{B(S_2\to S)}} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{F_{(S_2\to S)}}$$

en A, le moment $\overrightarrow{M_{A(S_1\to S)}}$ est nul et, en B, $\overrightarrow{M_{B(S_1\to S)}}$ est nul d'où :

$$\overrightarrow{M_{O(S_1\to S)}} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F_{O(S_2\to S)}}$$

$$\overrightarrow{M_{O(S_2\to S)}} = \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{F_{O(S_2\to S)}}$$

à l'équilibre

$$\{F_{(\bar{S}\to S)}\} = {}_O\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \text{soit} \quad \begin{matrix} \vec{0} = \overrightarrow{F_{(S_1\to S)}} + \overrightarrow{F_{(S_2\to S)}} \\ \vec{0} = \overrightarrow{M_{O(S_1\to S)}} + \overrightarrow{M_{O(S_2\to S)}} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{F_{(S_1\to S)}} + \overrightarrow{F_{(S_2\to S)}} = \vec{0} \\ \vec{0} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F_{(S_1\to S)}} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{F_{(S_2\to S)}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{F_{(S_1\to S)}} = -\overrightarrow{F_{(S_2\to S)}} \\ \vec{0} = \overrightarrow{OA} \wedge -\overrightarrow{F_{(S_2\to S)}} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{F_{(S_2\to S)}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{F_{(S_1 \to S)}} = -\overrightarrow{F_{(S_2 \to S)}} \\ \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F_{(S_2 \to S)}} = \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{F_{(S_2 \to S)}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{F_{(S_1 \to S)}} = -\overrightarrow{F_{(S_2 \to S)}} \\ \overrightarrow{OA} \wedge \dfrac{\overrightarrow{F_{(S_2 \to S)}}}{\overrightarrow{F_{(S_2 \to S)}}} = \overrightarrow{OB} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{F_{(S_1 \to S)}} = -\overrightarrow{F_{(S_2 \to S)}} \\ -\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \end{cases}$$

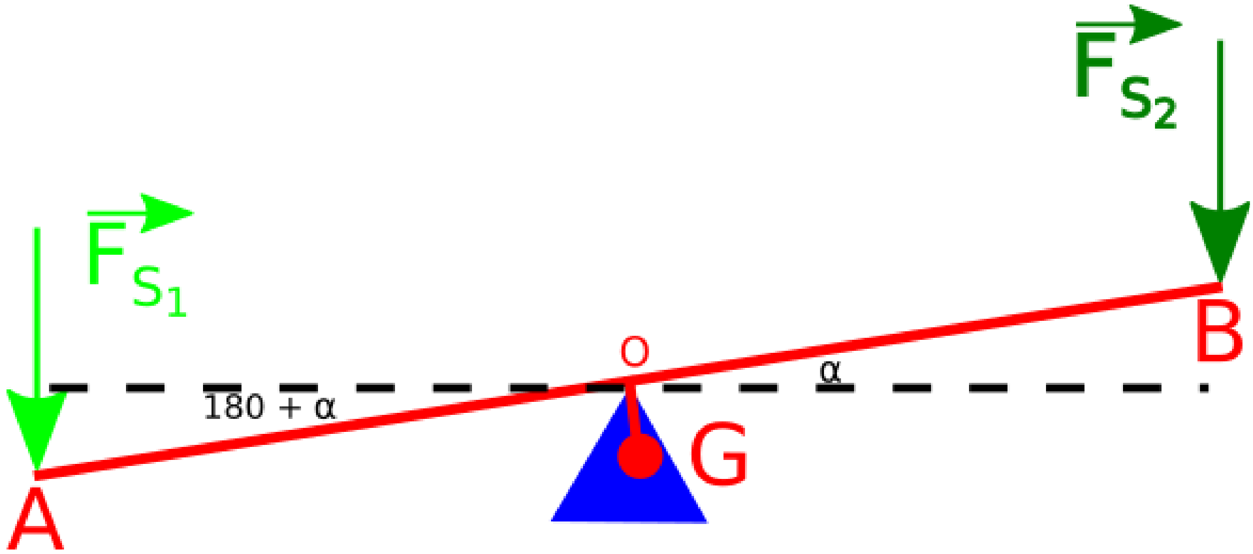
$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{F_{(S_1 \to S)}} = -\overrightarrow{F_{(S_2 \to S)}} \\ \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB} \end{cases}$$

Pour la balance de Roberval, l'équilibre est réalisé à l'horizontal lorsque les masses appliquées sur les plateaux sont identiques donc que les forces appliquées sur le plateau sont identiques. Compte tenu que les distances OA et OB sont identiques dans la conception de la balance, il en résulte que si le point de rotation se confond avec le centre de gravité du fléau, l'équilibre s'effectue quelque soit l'angle $\alpha$ du fléau. Par conséquent, le modèle proposé ci-dessus doit être adapté pour répondre à la réalité observée.

### 3.2.2 Reprise du système


Pour que l'équilibre s'effectue à l'horizontal, il est nécessaire que la transposition des forces s'effectue en un point G (centre de gravité) différent du point O centre de l'axe AB. En effet, l'observation du fléau montre qu'il ne s'agit pas d'une barre uniforme (voir image ci-contre) en taille et qu'elle s'élargit de l'extrémité vers le centre, en conséquence son centre de gravité ne correspond pas au point de rotation. Il est donc nécessaire dans le schéma simplifié de distinguer le centre de gravité G du centre de rotation O et d'effectuer la translation des torseurs en G.

### *Nouveau schéma simplifié*




Je propose donc le schéma suivant pour représenter la balance avec un centre de gravité G non concomitant avec le centre rotation O, origine du système.Le centre de gravité G est alors aligné en y à O à la seule condition que l'ange α soit égal à 0°.

### *Transport des torseurs au point G*

A l'équilibre

$$\{F_{(\bar{S}\to S)}\} = {}_G\!\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\} \quad \text{soit} \quad \begin{matrix}\vec{0}=\overrightarrow{F_{(S_1\to S)}}+\overrightarrow{F_{(S_2\to S)}}\\ \vec{0}=\overrightarrow{M_{G(S_1\to S)}}+\overrightarrow{M_{G(S_2\to S)}}\end{matrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{F_{(S_1\to S)}}+\overrightarrow{F_{(S_2\to S)}}=\vec{0}\\ \vec{0}=\overrightarrow{GA}\wedge\overrightarrow{F_{(S_1\to S)}}+\overrightarrow{GB}\wedge\overrightarrow{F_{(S_2\to S)}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{F_{(S_1\to S)}}=-\overrightarrow{F_{(S_2\to S)}}\\ \vec{0}=\overrightarrow{GA}\wedge-\overrightarrow{F_{(S_2\to S)}}+\overrightarrow{GB}\wedge\overrightarrow{F_{(S_2\to S)}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{F_{(S_1\to S)}}=-\overrightarrow{F_{(S_2\to S)}}\\ \overrightarrow{GA}\wedge\overrightarrow{F_{(S_2\to S)}}=\overrightarrow{GB}\wedge\overrightarrow{F_{(S_2\to S)}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{F_{(S_1\to S)}}=-\overrightarrow{F_{(S_2\to S)}}\\ \overrightarrow{GA}\wedge\dfrac{\overrightarrow{F_{(S_2\to S)}}}{\overrightarrow{F_{(S_2\to S)}}}=\overrightarrow{GB}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{F_{(S_1\to S)}}=-\overrightarrow{F_{(S_2\to S)}}\\ -\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{GB}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{F_{(S_1 \to S)}} = -\overrightarrow{F_{(S_2 \to S)}} \\ \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GB} \end{cases}$$

Si les forces appliquées au système sont identiques alors, l'équilibre sur l'axe horizontal est réalisé si et seulement si $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GB}$ ce qui revient à résoudre l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} x_A - x_G \\ y_A - y_G \\ z_A - z_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_G - x_B \\ y_G - y_B \\ z_G - z_B \end{pmatrix}$$

Compte tenu de l'absence de translation en z, l'équation peut être réduite à :

$$\begin{pmatrix} x_A - x_G \\ y_A - y_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_G - x_B \\ y_G - y_B \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_A - x_G \\ y_A - y_G \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_G - x_B \\ y_G - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_A - 2x_G + x_B \\ y_A - 2y_G + y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \|\overrightarrow{GA}\| \cos(180 + \alpha) + \|\overrightarrow{GB}\| \cos(\alpha) - 2x_G = 0 \\ y_A - y_B - 2\|\overrightarrow{GO}\| \sin(\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\|\overrightarrow{GA}\| \cos(\alpha) + \|\overrightarrow{GB}\| \cos(\alpha) - 2x_G = 0 \\ y_A - y_B - 2\|\overrightarrow{GO}\| \sin(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Constitutivement la norme des vecteurs $\overrightarrow{GA} \; et \; \overrightarrow{GB}$ est identique :

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G = 0 \\ y_A - y_B = 2\|\overrightarrow{GO}\| \sin(\alpha) \end{cases} \quad \text{et} \quad x_G = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G = 0 \\ y_A = y_B \end{cases}$$

En utilisant un centre de gravité (G) non confondu avec l'origine (O), la seule possibilité d'atteindre l'équilibre est que le fléau soit à l'horizontal.