Processus Stochastiques

(STP)

Thierry Chonavel

IMT Atlantique
Bretagne-Pays de la Loire
École Mines-Télécom

Une compagnie d'assurance prélève régulièrement des cotisations auprès de ses clients. Le montant des prélèvements effectués sur une durée Δ est égal à $c\Delta$, de sorte que le montant total des cotisations perçues augmente linéairement. Initialement (instant $t = 0$), on suppose que la compagnie a immobilisé une somme de X_0 euros en caisse.
1) On suppose que les clients subissent, à des instants aléatoires et indépendants, des sinistres pour lesquels ils sont assurés. Quel type de loi permet de décrire les temps auxquels se produisent les sinistres ? Préciser cette loi si on suppose que le nombre moyen de sinistres observés pendant une durée Δ est $\lambda\Delta$? On notera N_t la variable aléatoire qui décrit le nombre total de sinistres enregistrés entre les instants 0 et t.
Pour chaque sinistre, l'assurance doit débourser un certain montant. Le montant déboursé pour le $k^{\text{ème}}$ sinistre est modélisé par une variable aléatoire notée Y_k. On supposera que les variables Y_k sont indépendantes et de même loi, supposée exponentielle. Le coût moyen d'un sinistre pour l'assurance est évalué à m.
Remarque : on suppose qu'en pratique, l'assurance possède des réserves financières qui lui permettent de rembourser ses clients même quand le montant en caisse devient nul. Simplement, le fait de prendre sur ces réserves est exprimé par un déficit de sa caisse de liquidités.
2) Exprimez en fonction des grandeurs $X_0,\ c,\ N_t,\ (Y_k)_{k\geq 0}$ introduites préc édemment le montant X_t des avoirs de la compagnie. Il s'agit d'un processus dit de *Cramer-Lundberg*.
3) Exprimez la moyenne et la variance de X_t en fonction de $X_0,\ c,\ t,\ \lambda$, et m.
L'unité de temps étant l'année, la valeur de λ est supposée égale à 1000. La valeur de X_0 est supposée égale à 10^6euros et $m = 10^3$euros.
4) Quelle est l'unité du paramètre c ? Quelle est sa valeur critique c_c en dessous de laquelle le montant moyen en caisse tend à baisser au cours du temps.
5) On considère les 3 cas suivants $c = c_c/2,\ c_c,\ 2c_c$. Pour chacun de ces 3 cas, simulez 1000 trajectoires sur un an de $(X_t)_{0\leq t\leq 1}$. Calculez les estimateurs empiriques de la moyenne et de l'écart type en fonction du temps, notés respectivement $\hat{m}_t$ et $\hat{\sigma}_t$. Tracez les courbes $\hat{m}_t$, $\hat{m}_t - 3\hat{\sigma}_t$ et $\hat{m}_t + 3\hat{\sigma}_t$. Vérifiez que les trajectoires simulées se trouvent essentiellement comprises entre les courbes $\hat{m}_t - 3\hat{\sigma}_t$ et $\hat{m}_t + 3\hat{\sigma}_t$.
6) Tracez pour les 3 cas les histogrammes et l'approximation gaussienne correspondante de la valeur de X_t pour $t = 1$an.
7) Sur la base de l'approximation gaussienne précédente, calculez dans les trois cas la probabilité que l'exercice annuel se termine avec une perte. Calculez de même la probabilité que la caisse soit en négatif à ce moment là.