

E109 / (Hyper)feinstruktur und (Isotopieverschiebung) von Spektrallinien

Michael Günther, Sarah Aretz

9. März 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Phänomenologie	2
1.1	Atomspektren und Energieentartung	2
1.1.1	Spin-Bahn-Kopplung	2
1.1.2	LS -Kopplung und Feinstruktur	3
1.1.3	jj -Kopplung	3
1.1.4	Hyperfeinstruktur	3
1.1.5	Isotopieverschiebung	5
1.1.6	Hundsche Regeln	5
1.1.7	Auswahlregeln	5
1.1.8	Spektrum von Natrium und Thallium	6
1.2	Spektrallinien	7
1.2.1	Natürliche Linienbreite	7
1.2.2	Linienverbreiterung	7
1.2.3	Spektrallichtquellen	8
1.3	Fabry-Pérot-Interferometer	8
1.3.1	Interferenzbedingung	9
1.3.2	Methoden zur Auswertung von Interferenzbildern	9
1.3.3	Dispersionsgebiet	11
1.3.4	Finesse	11
1.3.5	Auflösungsvermögen	11
1.3.6	Intensitätsverteilung	12
2	Versuchsaufbau und Durchführung	13
2.1	Versuchsaufbau	13
2.2	Grobeichung	14
2.3	Feineichung	15
3	Versuchsauswertung	16
3.1	Grobeichung	16
3.2	Feineichung	20
3.3	Fazit	23

Kapitel 1

Einleitung und Phänomenologie

Ziel dieses Versuches ist es, die Hyperfeinstrukturaufspaltung von Thallium mit Hilfe eines zuvor geeichten Fabry-Pérot-Interferometers zu vermessen, sowie dessen Finesse und Auflösung zu bestimmen. Da aufgrund eines Defektes am x-y-Schreiber keine Feinsteichung vorgenommen werden konnte, beschränkt sich unser Versuch leider auf die Grob- und Feineichung des FPI mit Hilfe von Natrium. Thallium wurde nicht mehr vermessen, da dieser Versuch dann mindestens zwei Tage beansprucht hätte.

1.1 Atomspektren und Energieentartung

Die Aufhebung der Energieentartung einer Elektronenschale wird durch verschiedene Effekte verursacht. Sobald mehrere Elektronen im Spiel sind (gilt z.B. nicht für das Wasserstoffatom), muß deren Coulomb-Wechselwirkung in Rechnung gestellt werden. Das Energieniveau für eine bestimmte Hauptquantenzahl n spaltet in die verschiedenen Bahndrehimpulsterme (l -Terme) auf. Aber auch die Elektronenterme mit gleichem l können noch verschiedene Energien haben. Die antisymmetrische Wellenfunktion gehört zum niedrigeren Energiewert. Weil aber die Gesamtwellenfunktion ebenfalls antisymmetrisch sein muß (Pauli Prinzip), bleibt für den Spinanteil nur eine symmetrische Wellenfunktion übrig. Also ist der niedrigere Zustand zweier Elektronen mit gleichem Bahndrehimpuls der mit parallelem Spin.

1.1.1 Spin-Bahn-Kopplung

Als Spin-Bahn-Kopplung bezeichnet man die Wechselwirkung zwischen magnetischem Spin- und Bahnmoment:

$$V_{ls} \propto \vec{l} \cdot \vec{s}$$

Zustände, in denen \vec{l} und \vec{s} parallel oder antiparallel zueinander orientiert sind, unterscheiden sich energetisch.

1.1.2 LS -Kopplung und Feinstruktur

Kopplungsschema für schwache Spin-Bahn-Wechselwirkung, bei dem zuerst alle Bahndrehimpulse zu einem Gesamtdrehimpuls und alle Spins zu einem Gesamtspin vektoriell zu addieren sind:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i \text{ mit } \|\vec{L}\| = \hbar\sqrt{L(L+1)}$$

$$\vec{S} = \sum_i \vec{s}_i \text{ mit } \|\vec{S}\| = \hbar\sqrt{S(S+1)}$$

wobei sich die Bahndrehimpulse und Spins einer abgeschlossenen Schale zu Null addieren. Der Gesamtdrehimpuls ist dann die Summe

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \text{ mit } \|\vec{J}\| = \hbar\sqrt{J(J+1)}$$

wobei die Quantenzahl J folgende Werte annehmen kann:

$$J = L + S, L + S - 1, \dots, \|L - S\| + 1, \|L - S\|$$

Daraus ergibt sich eine **Feinstrukturaufspaltung**.

Eine typische Wellenlängendifferenz liegt bei $\Delta\lambda = 30\text{\AA}$. Für die Energiedifferenz zweier Linien gilt:

$$\Delta E \approx \mu_0 \langle H(0) \rangle$$

Dabei ist μ_0 das Bohrsche Magneton und $\langle H(0) \rangle$ der Erwartungswert des von den Elektronen am Kern erzeugten Magnetfeldes.

1.1.3 jj -Kopplung

Kopplungsschema für starke Spin-Bahn-Wechselwirkung, bei dem Bahndrehimpuls und Spin eines Elektrons zu einem Gesamtdrehimpuls dieses Elektrons koppeln:

$$\vec{j}_i = \vec{l}_i + \vec{s}_i$$

Der Gesamtdrehimpuls \vec{J} des Atoms ergibt sich als Addition der Gesamtdrehimpulse der einzelnen Elektronen:

$$\vec{J} = \sum_i \vec{j}_i$$

1.1.4 Hyperfeinstruktur

Eine weitere Struktur in den Atomspektren ergibt sich aus der Existenz eines Spins und eines magnetischen Momentes des Atomkerns. Die Wechselwirkung dieser Momente mit denen der Elektronen führt zur Hyperfeinstruktur, indem der Drehimpuls der Elektronen \vec{J} mit dem des Kerns \vec{I} zu einem Gesamtdrehimpuls \vec{F} koppeln. Dabei gilt analog zur LS -Kopplung:

$$\vec{F} = \vec{J} + \vec{I} \text{ mit } \|\vec{F}\| = \hbar\sqrt{F(F+1)}$$

wobei die Quantenzahl F folgende Werte annehmen kann:

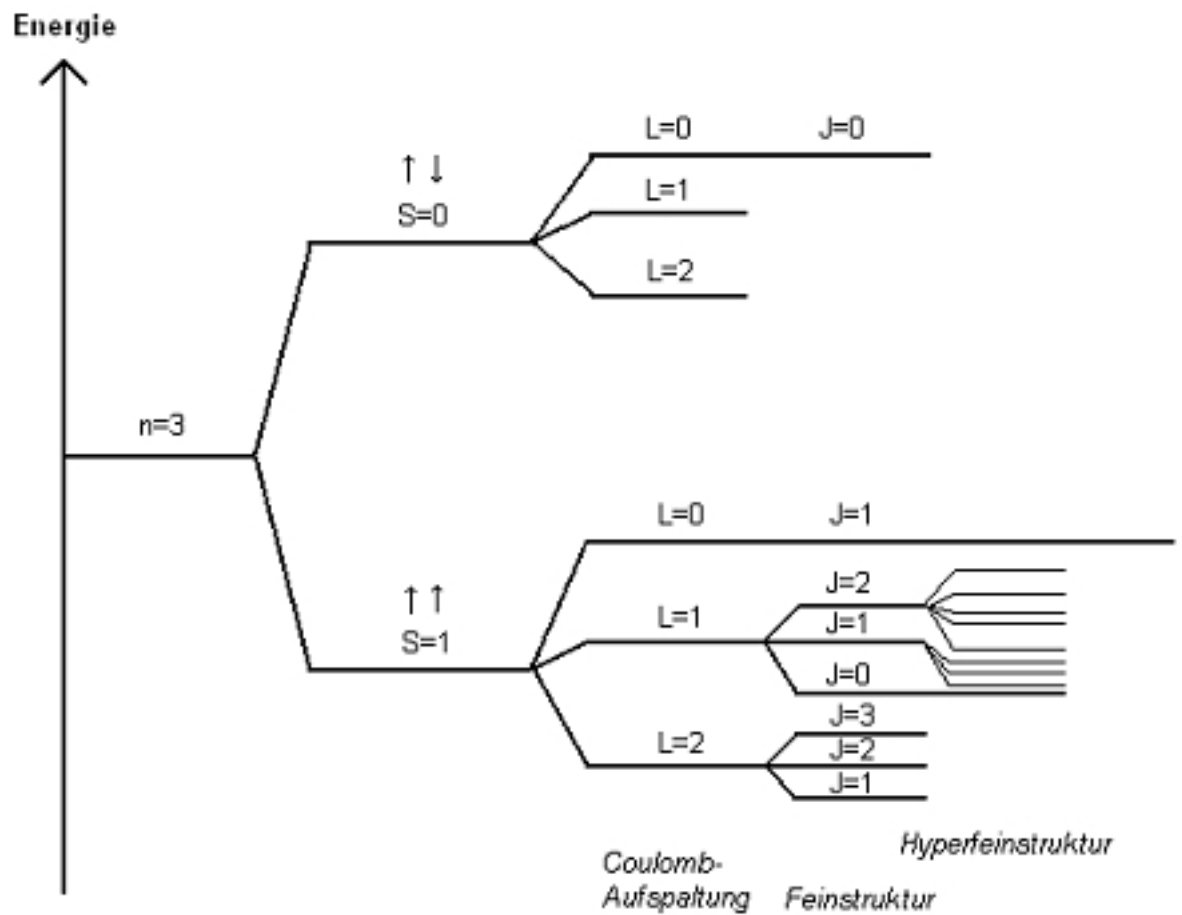
$$F = J + I, J + I - 1, \dots, \|J - I\| + 1, \|J - I\|$$

Für die Energiedifferenz zweier Linien gilt:

$$\Delta E \approx \frac{A}{2} [F(F+1) - J(J+1) - I(I+1)],$$

wobei $A = \frac{g_I \mu_k B_J}{\sqrt{J(J+1)}}$ die Hyperfeinstrukturkonstante ist, mit dem Kern-g-Faktor g_I , und dem Kernmagneton $\mu_k \approx \frac{\mu_0}{1836}$

Vereinfachte Übersicht über die Aufspaltung der Terme



1.1.5 Isotopieverschiebung

Isotope haben aufgrund der Mitbewegung des Kerns und der daraus resultierenden Abhängigkeit der Rydbergkonstante von der Kernmasse unterschiedliche Energiet Terme. Dieser Isotopeneffekt verursacht unterschiedliche Spektrallinien.

Weiter verursacht das höhere Kernvolumen bei schweren Kernen eine unterschiedliche Wechselwirkung zwischen Elektronen und Kern. Die Wellenlängenänderung ist gegeben durch:

$$\Delta\nu \approx \frac{m_e}{m_p} \cdot \frac{M_2 - M_1}{M_1 \cdot M_2} \cdot \nu$$

Hierbei bezeichnet M_i die Masse des Isotops i . Daraus ist ersichtlich, daß Isotope mit größerer Masse Licht längerer Wellenlänge emittieren.

1.1.6 Hundsche Regeln

Elektronen besetzen unter Beachtung des Pauli-Prinzips die Quantenzustände so, daß folgende drei Regeln erfüllt sind:

1. maximaler Gesamtspin S ,
2. maximaler Gesamtdrehimpuls L ,
3. Gesamtdrehimpuls $J = L - S$ für weniger als halbgefüllte Schalen, Gesamtdrehimpuls $J = L + S$ für mehr als halbgefüllte Schalen

1.1.7 Auswahlregeln

Für einen Dipol-Strahlungsübergang müssen folgende Beziehungen zwischen den Quantenzahlen zweier stationärer Zustände gelten:

- $\Delta S = 0$,
- $\Delta L = \pm 1$,
- $\Delta J = 0, \pm 1$ (aber nicht $0 \rightarrow 0$)
- $\Delta M_J = 0, \pm 1$

1.2 Spektrallinien

1.2.1 Natürliche Linienbreite

Das einfachste Modell des Elektrons ist ein klassischer Oszillator, der eine gedämpfte Schwingung ausführt. Diese Dämpfung verursacht eine Verbreiterung des Frequenzbereiches. Eine andere Erklärung ist die mittlere Lebensdauer angeregter Zustände. Aufgrund der Unschärferelation von Energie und Zeit $\Delta E \Delta t \propto \hbar$ besitzt die Emission keine fest definierte Energie oder Frequenz. Die natürliche Linienbreite kann daher nicht vermieden werden.

1.2.2 Linienverbreiterung

Vergrößerung der experimentell beobachteten Spektrallinienbreite gegenüber der natürlichen bedingt durch folgende Faktoren:

Dopplereffekt

Bewegt sich eine monochromatische Lichtquelle mit einer Geschwindigkeit v_x , erscheint die Frequenz um

$$\frac{v_0 v_x}{c}$$

im Vergleich zu der Frequenz v_0 der Laborlichtquelle verschoben. Aufgrund dieses Dopplereffektes verursacht die zufällige Bewegung der Atome eines Gases eine Verbreiterung ihrer Spektrallinien. Dieser Effekt ist sehr viel stärker als die natürliche Linienverbreiterung.

Druckverbreiterung

Die Wechselwirkung eines strahlenden Atoms mit anderen Atomen, Ionen oder Elektronen hat Auswirkungen auf die Spektrallinien. Die genauen Zusammenhänge sind sehr komplex. Die charakteristische Frequenz eines strahlenden Atoms wird durch die Anwesenheit anderer Atome oder Ionen verändert in Abhängigkeit einer bestimmten Funktion des gegenseitigen Abstandes. Die Druckverbreiterung ist z.B. proportional zum Druck, welcher innerhalb einer Gasentladungslampe herrscht.

Strahlungsfelder

Ebenso ist die Wechselwirkung mit einem Strahlungsfeld eine Ursache der Linienverbreiterung.

1.2.3 Spektrallichtquellen

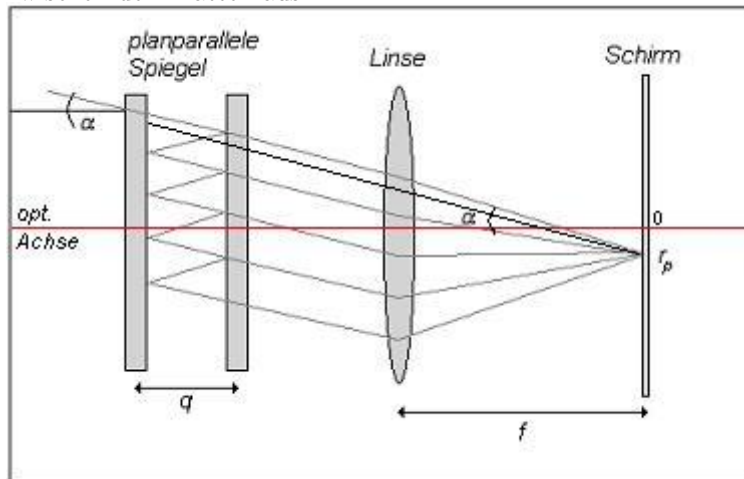
Bei einer Spektralanalyse benötigt man eine hohe Auflösung. Um dies zu erreichen, müssen die Linienbreiten so gering wie möglich gehalten werden.

Bei schweren Elementen ist die Dopplerverbreiterung mit $\Delta\tilde{\nu}_d = 0,02\text{cm}^{-1}$ meist kleiner als die Hyperfeinstruktur. Um jedoch die Isotopieverschiebung von etwa $0,01\text{cm}^{-1}$ auflösen zu können, verwendet man Hohlkathoden. Diese werden mit flüssiger Luft gekühlt und bei niedriger Stromstärke und geringen Drücken betrieben. Damit kann man Dopplerbreiten von $0,007\text{cm}^{-1}$ erreichen.

Bei leichten Elementen verwendet man Atomstrahllichtquellen, da hier die Dopplerverbreiterung sehr viel größer ist. Diese wird verringert, indem man die leuchtenden Atome senkrecht zur Beobachtungsrichtung laufen läßt. Da so die mittlere Geschwindigkeitskomponente in Bezug auf den Beobachter klein gehalten wird, erreicht man damit Halbwertsbreiten von $0,001\text{cm}^{-1}$.

1.3 Fabry-Pérot-Interferometer

Bei Prismen- und Gitterspektrographen ist es schwierig, ein Auflösungsvermögen zu erreichen, daß wesentlich über 10^5 hinausgeht, da z.B. bei einem Gitterspektrographen die Beugung die Auflösung auf Nm beschränkt. Hierbei ist N die Anzahl der Gitterstriche und m die Ordnung. Beides ist nicht beliebig vergrößerbar! Auflösungen von mehr als 10^6 erreicht man nur mit Interferometern. Ein Fabry-Pérot-Interferometer besteht im Wesentlichen aus zwei hochreflektierenden im Abstand q befestigten Glasplatten. Die Reflektivität dieser Spiegel beträgt in unserem Versuch 97%. Es bildet sich also ein starkes Strahlungsfeld zwischen den Platten aus.



1.3.1 Interferenzbedingung

Der Gangunterschied der austretenden parallelen Lichtbündel berechnet sich, unter der Annahme, daß der Brechungsindex des Mediums zwischen den Spiegeln und der Umgebung 1 beträgt, wie folgt:

$$\Delta s = 2 \cdot \overline{AB} - \overline{BE} \quad (1.1)$$

Mit

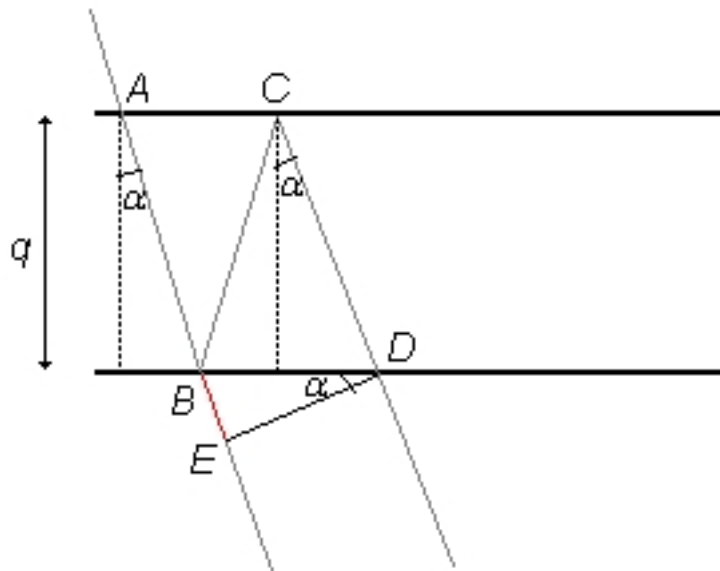
$$\overline{AB} = \frac{q}{\cos(\alpha)} \quad (1.2)$$

und

$$\overline{BE} = 2q \tan(\alpha) \sin(\alpha) \quad (1.3)$$

erhält man für den Gangunterschied

$$\Delta s = 2 \frac{q}{\cos(\alpha)} - 2q \tan(\alpha) \sin(\alpha) = 2q \cos(\alpha) \quad (1.4)$$



Dieser führt, falls der Gangunterschied gerade einem ganzen Vielfachen der Wellenlänge entspricht

$$m \cdot \lambda = 2q \cos(\alpha)$$

zu den erwünschten Haiderschen Interferenzringen.

1.3.2 Methoden zur Auswertung von Interferenzbildern

Grobeichung

Um den Radius r_p des p -ten Interferenzmaximums (von innen nach außen zählend) zu bestimmen, aus dem dann der Plattenabstand berechnet werden kann, folgen wir aus geometrischen Überlegungen:

$$\cos(\alpha) = \frac{f}{\sqrt{f^2 + r^2}} = \frac{m \cdot \lambda}{2q} \quad (1.5)$$

Da sich das Ordnungsmaximum in der Mitte befindet, kann man mit $0 < \epsilon < 1$ definieren:

$$p = m_0 - m + 1 \quad (1.6)$$

mit

$$m_0 + \epsilon = \frac{2q}{\lambda}; \quad m = 2q \frac{\cos(\alpha)}{\lambda} \quad (1.7)$$

Hierbei beschreibt ϵ , ob sich in der Mitte ein Minimum, Maximum oder etwas dazwischen befindet. Setzt man dies in (1.5) ein, erhält man mit einer Taylorentwicklung:

$$r^2 = \frac{f^2 \lambda}{q} \cot(p - 1 + \epsilon) \approx \frac{f^2 \lambda}{q} (p - 1 + \epsilon) \quad (1.8)$$

Diese Herleitung gilt streng genommen nur für monochromatisches Licht. Daher benutzt man den Mittelwert der beiden eng benachbarten Natriumlinien. Um nun den Plattenabstand q berechnen zu können, werden die Radien zweier aufeinander folgender Interferenzmaxima vermessen.

$$r_{p+1}^2 + r_p^2 = \frac{f^2 \lambda}{q} \equiv \Delta_{p,p+1} \quad (1.9)$$

Damit folgt für die Grobeichung:

$$q_{grob} = \frac{f^2 \lambda}{r_{p+1}^2 - r_p^2} \quad (1.10)$$

Feineichung

Für die Feineichung benutzen wir beide Na-Linien. Da (1.10) für unterschiedliche Wellenlängen gilt, erhält man unter Verwendung der Wellenzahlen $\tilde{\nu}_i$

$$r_{p,i}^2 = \frac{f^2}{q \tilde{\nu}_i} (p - 1 + \epsilon_i) \quad i \in \{I, II\} \quad (1.11)$$

$$r_{p+1,i}^2 - r_{p,i}^2 = \frac{f^2}{q \tilde{\nu}_i} \equiv \Delta_{p,p+1} \quad (1.12)$$

Die Ordnung im Zentrum ist definiert durch: $m_o + \epsilon = 2q \tilde{\nu}_i$, Wird das Dispersionsgebiet so gewählt, daß die Ordnungen von $\tilde{\nu}_I$ und $\tilde{\nu}_{II}$ nah zusammenliegen, erhält man:

$$\epsilon_I = 2q \tilde{\nu}_I - m_0; \quad \epsilon_{II} = 2q \tilde{\nu}_{II} - m_0 \quad (1.13)$$

$$\Delta_{\tilde{\nu}_{I,II}} = \frac{\epsilon_I - \epsilon_{II} \pm \text{ganze Zahl}}{2q} \quad (1.14)$$

Die ganze Zahl entspricht der Anzahl der bereits überstrichenen Dispersionsgebiete. Mit (1.11) und (1.12) folgt

$$\epsilon_I = \frac{r_{p+1,I}^2}{r_{p+1,I}^2 - r_{p,I}^2} - p; \quad \epsilon_{II} = \frac{r_{p+1,II}^2}{r_{p+1,II}^2 - r_{p,II}^2} - p \quad (1.15)$$

Mit der Näherung $\tilde{\nu}_I \approx \tilde{\nu}_{II} \Rightarrow r_{p+1,I}^2 - r_{p,I}^2 \approx r_{p+1,II}^2 - r_{p,II}^2$ folgt:

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{\nu}_{I,II} &= \frac{\epsilon_I - \epsilon_{II} \pm \text{ganzeZahl}}{2q} = \frac{1}{2q} \left(\frac{r_{p+1,I}^2 - r_{p+1,II}^2}{r_{p+1,I}^2 - r_{p,I}^2} \pm \text{ganzeZahl} \right) \\ &\equiv \frac{1}{2q} \left(\frac{\delta_{I,II}}{\Delta_{p+q,p}} \pm \text{ganzeZahl} \right)\end{aligned}\quad (1.16)$$

Damit folgt für die Feineichung:

$$q = \frac{1}{2\Delta\tilde{\nu}_{I,II}} \left(\frac{r_{p,I}^2 - r_{p,II}^2}{r_{p+1,I}^2 - r_{p,I}^2} \pm \text{ganzeZahl} \right) \quad (1.17)$$

1.3.3 Dispersionsgebiet

Das Dispersionsgebiet bezeichnet den Abstand zweier aufeinanderfolgender Interferenzmaxima und wird auch freier Spektralbereich genannt. Dies entspricht bei derselben Wellenlänge einer Phasendifferenz von 2π .

1.3.4 Finesse

Die Finesse ist definiert als das Verhältnis von Dispersionsgebiet $\delta\tilde{\nu}$ zur Halbwertsbreite $d\tilde{\nu}$.

$$F = \frac{\delta\tilde{\nu}}{d\tilde{\nu}}$$

Sie ist ein Maß für die Anzahl der Linien, welche in ein Dispersionsgebiet passen. Der tatsächliche Wert ist jedoch praktisch immer kleiner aufgrund der Vergrößerung der Halbwertsbreite bedingt durch die oben aufgeführten Effekte. Diese werden in der effektiven Finesse berücksichtigt.

1.3.5 Auflösungsvermögen

Das Auflösungsvermögen des FPI ist gegeben durch:

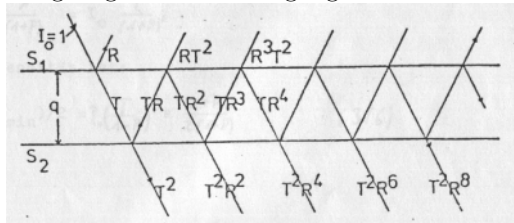
$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = m \cdot F_{eff} = \frac{\tilde{\nu}}{\Delta\tilde{\nu}}$$

Hierbei ist m die Ordnung, und F_{eff} die effektive Finesse, welche der Zahl der interferierenden Bündel entspricht. Bei einem Abstand der Platten von 2,5cm, beträgt der Gangunterschied zweier benachbarter Strahlen 5cm, was bei Licht mit einer Wellenlänge von 500nm etwa einer Interferenz der Ordnung $m = 10^5$ ($5 \cdot 10^{-2}m / 5 \cdot 10^{-7}m$) entspricht! Die Zahl der interferierenden Bündel ist durch das Reflexionsvermögen bestimmt und liegt etwa bei 10.

Das Auflösungsvermögen ist also proportional zur Ordnung und damit zum Spiegelabstand q . Es läßt sich jedoch durch Vergrößerung von q nicht beliebig steigern, da dabei das Dispersionsgebiet kleiner wird. Die beiden Na-Linien rücken zwar zunächst immer weiter auseinander aber zwei Ordnungen derselben Wellenlänge immer näher zusammen. Dadurch wird eine Zuordnung der Linien wegen der Überlappung der verschiedenen Interferenzordnungen schwierig.

1.3.6 Intensitätsverteilung

Die Intensität läßt sich durch die Airy-Funktion beschreiben. Die Anwendung gilt jedoch nur für die Idealisierung streng monochromatischen Lichtes, exakt paralleler und planer Platten sowie unendlich großer Spiegel. Folgende Abbildung zeigt den Strahlengang für die Mehrfachreflexion zwischen den Spiegeln.



3

Hierbei sind R und T die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten sowie I_0 die Intensität des einfallenden Lichtstrahls. Die Strahlen im FPI haben die Intensität $I_0 T^2 R^{2(N-1)}$. Die resultierende Intensität erhält man, indem man das Quadrat der Summe der Teilstrahlamplituden bildet:

$$I = I_0 [t^2 + t^2 r^2 e^{-2i\delta} + \dots + t^2 r^{2(N-1)} e^{-2i(N-1)\delta} + \dots]^2$$

Dabei sind t und r die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten der Amplitude mit $t^2 = T$ und $r^2 = R$. Der Gangunterschied zweier benachbarter Teilstrahlen wird durch die Phasendifferenz 2δ ausgedrückt. Damit erhält man:

$$I = \frac{I_0 T^2}{(1 - R)^2} [1 + P \cdot \sin^2 \delta]^{-1}$$

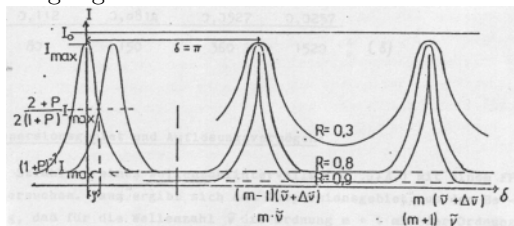
mit $P = \frac{4R}{(1-R)^2}$.

Die Intensitätsmaxima liegen hier bei $\delta = N\pi$, die Minima bei $\delta = \pi \frac{2N+1}{2}$. Damit ist das Intensitätsmaximum:

$$I_{max} = I_0 \frac{T^2}{(1 - R)^2} = I_0$$

für verschwindende Absorption $A = 0$, da gilt: $A + R + T = 1$.

Damit ist für $A = 0$ die Form der Intensitätsverteilung durch die Reflexion festgelegt.



4

Die Airy-Funktion wird also für hohes Reflexionsvermögen näherungsweise zur Deltafunktion. Durch die damit verbundene geringere Halbwertsbreite steigt das Auflösungsvermögen.

³Quelle: Pontius: Staatsexamensarbeit

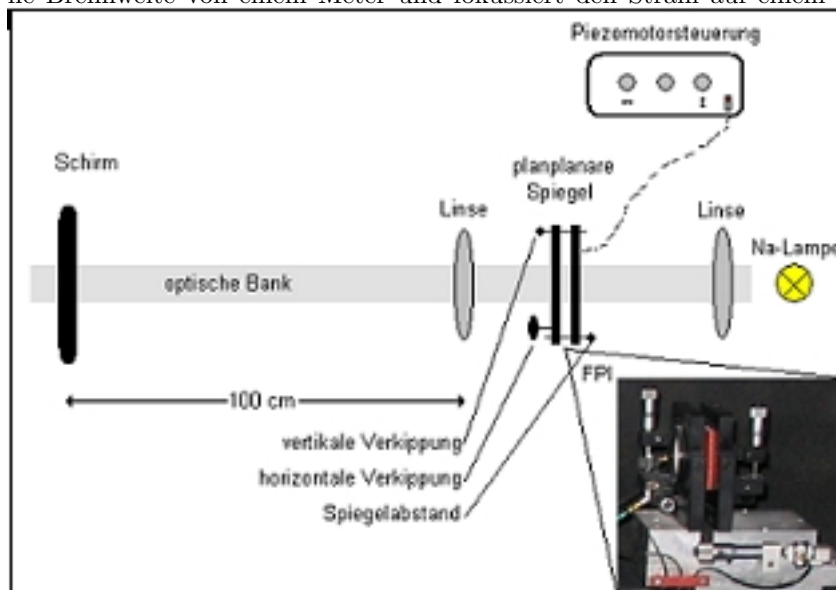
⁴Quelle: Pontius: Staatsexamensarbeit

Kapitel 2

Versuchsaufbau und Durchführung

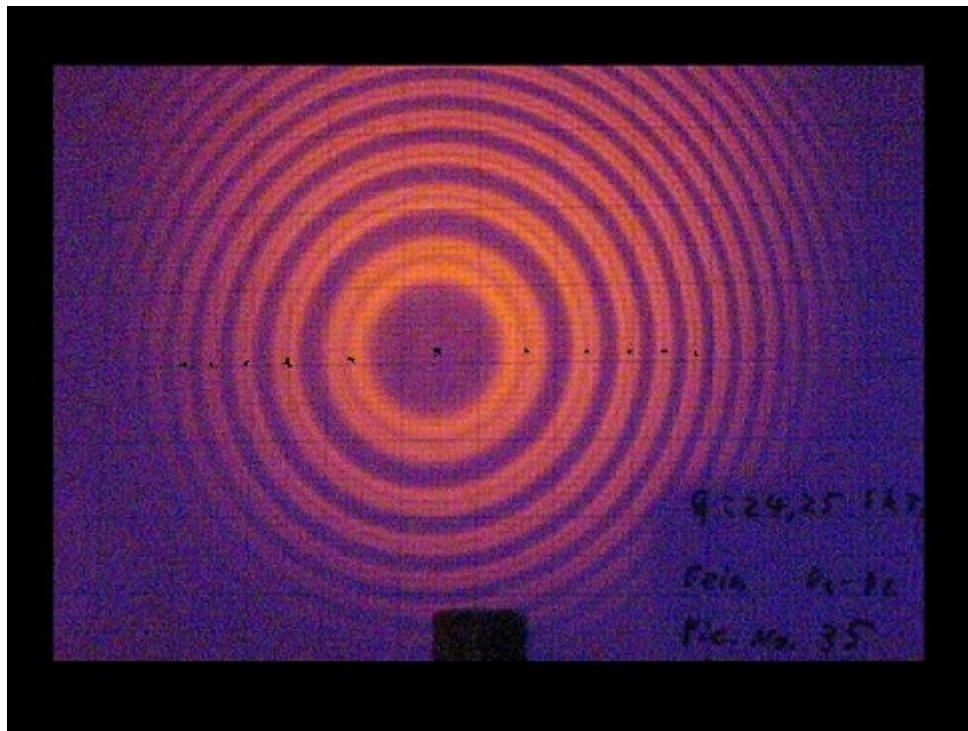
2.1 Versuchsaufbau

Der komplette Versuchsaufbau ist auf einer optischen Bank in einem Kasten aufgebaut, welche zusätzlich mit einem Vorhang abgedunkelt werden kann. Lediglich die Natriumlampe ist außen angebracht. Das Licht gelangt durch ein Loch ins Innere und wird zunächst durch eine Linse so gebrochen, daß es näherungsweise parallel auf das Fabry-Pérot-Interferometer auftrifft. Dieses ist aus zwei Glasplatten aufgebaut, welche parallel zueinander ausgerichtet werden müssen. Dies geschieht durch zwei Mikrometerschrauben, mit denen man den zweiten Spiegel vertikal und horizontal verstellen kann. Da dies jedoch sehr genau gemacht werden muß, wird die Feineinstellung mit Hilfe der Piezotranslatoren vorgenommen. Die zweite Linse hinter den Spiegeln besitzt eine Brennweite von einem Meter und fokussiert den Strahl auf einem Schirm.



2.2 Grobeichung

Für die Grobeichung werden zunächst die Spiegel ausgerichtet. Dazu wird der zweite Spiegel zunächst per Hand an den Mikrometerschrauben so justiert, dass ein Bild sichtbar wird. Die Regler der beiden Piezomotoren sollten hierbei auf Mittelstellung stehen, um anschließend eine Feinjustage in beiden Richtungen zu ermöglichen. Dies wurde für sieben verschiedene Spiegelabstände q durchgeführt und jeweils anschließend die Radien der Interferenzringe für drei bis sechs Ordnungen auf einem auf dem Schirm angebrachten Stück Millimeterpapier vermessen. Dabei wurden jeweils die Schwerpunkte der beiden Na-Linien markiert. Um dafür einen möglichst genauen Wert zu erhalten, haben wir jeweils zwei Stellen eines Ringes markiert, aus welchen der Mittelwert bestimmt wurde.

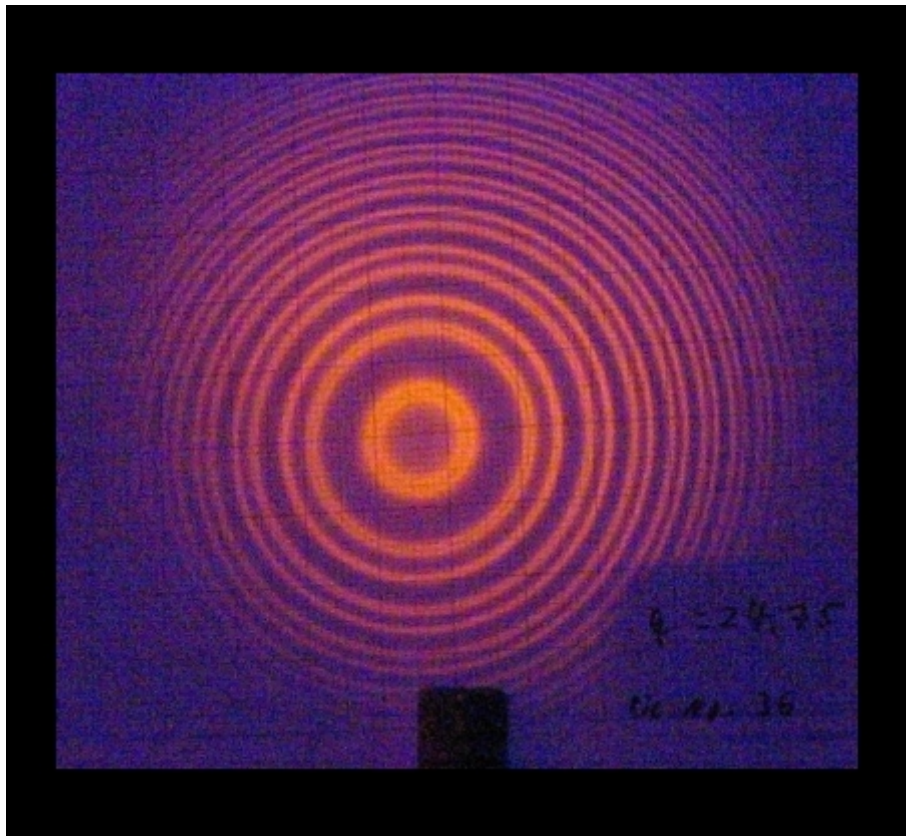


Bsp.: Markierung der Interferenzbilder für $q = 23,5 \text{ Skt}$

2.3 Feineichung

Die Durchführung der Feineichung verlief im Wesentlichen wie bei der Grobeichung. Hierbei wurden sechs verschiedene Spiegelabstände eingestellt, bei denen die beiden Na-Linien deutlich zu trennen waren (Feinaufspaltung). Diese wurden ebenfalls wieder für mehrere Ordnungen zwei Mal pro Interferenzring markiert und vermessen.

Das folgende Bild ist ein Beispiel für die Feinaufspaltung bei $q = 24,75$ Skt:



Da uns für sämtliche Abstände ein solches Bild zur Verfügung stand, waren wir in der Lage, unklare Werte auf dem Millimeterpapier im Nachhinein zu kontrollieren, was sich in einigen Fällen als positiv herausgestellt hat!

Kapitel 3

Versuchsauswertung

Da der Spiegelabstand nicht direkt abgelesen werden kann, wird nun wie in der Einleitung beschrieben die Mikrometerschraube über die experimentell ermittelten Abstandswerte geeicht und anschließend eine Ausgleichsgerade gefittet. Hierzu benutzen wir die Natriumlampe, die zwei deutlich trennbare Linien mit $D_1 = 589,6\text{nm}$ und $D_2 = 589,0\text{nm}$ liefert. Leider beschränkt sich unser Versuch auf diesen Eichvorgang.

3.1 Grobeichung

Zunächst stellen wir die jeweiligen ermittelten Radien der verschiedenen Spiegelabstände zusammen. Da wir für jedes r zwei Werte haben, r_l und r_r , werden diese zunächst fehlergewichtet gemittelt. Dies ist erforderlich, da die nach rechts vermessenen Werte besser eingezeichnet werden konnten als die linken. Daher ergeben sich natürlich unterschiedliche Fehler, die wir mit

$$\Delta r_l = 1\text{mm} \quad \text{und} \quad \Delta r_r = 0,5\text{mm}$$

festgesetzt haben. Die Mittelung erfolgt über

$$r_p = \frac{\sum_i \frac{r_i}{(\Delta r_i)^2}}{\sum_i \frac{1}{(\Delta r_i)^2}}$$

mit dem Fehler

$$\Delta r_p = \sqrt{\frac{1}{\sum_i \frac{1}{(\Delta r_i)^2}}}$$

Der Fehler, der beim Einstellen und Ablesen der Mikrometerschraube gemacht wurde, wird vernachlässigt, da er mit $\Delta q = 0,005\text{Skt}$ außerhalb des relevanten Bereiches liegt.

- $q = 22,5\text{Skt}$

Ordnung	$r_l[\text{mm}]$	$r_r[\text{mm}]$	$r_p[\text{mm}]$	$\Delta r_p[\text{mm}]$
1	12,5	12,25	12,3	0,45
2	17,5	16,5	16,7	0,45
3	20	20,5	20,4	0,45
4	-	23,75	23,75	0,45

- $q = 22,75Skt$

Ordnung	$r_l[mm]$	$r_r[mm]$	$r_p[mm]$	$\Delta r_p[mm]$
1	7,5	7,5	7,5	0,45
2	14	14	14	0,45
3	17,5	18,5	18,3	0,45

- $q = 23Skt$

Ordnung	$r_l[mm]$	$r_r[mm]$	$r_p[mm]$	$\Delta r_p[mm]$
1	-	7	7	0,45
2	-	13,75	13,75	0,45
3	-	18,5	18,5	0,45
4	-	22,5	22,5	0,45
5	-	25,75	25,75	0,45

- $q = 23,5Skt$

Ordnung	$r_l[mm]$	$r_r[mm]$	$r_p[mm]$	$\Delta r_p[mm]$
1	7,25	7	7,05	0,45
2	14,5	15,5	15,3	0,45
3	20,5	20,5	20,5	0,45
4	24,5	25	24,9	0,45
5	26,25	28,5	28,05	0,45
6	-	31,5	31,5	0,45

- $q = 24Skt$

Ordnung	$r_l[mm]$	$r_r[mm]$	$r_p[mm]$	$\Delta r_p[mm]$
1	-	9,5	9,5	0,45
2	16,5	17,5	17,3	0,45
3	22	22,5	22,4	0,45
4	26,5	26,5	26,5	0,45
5	-	31	31	0,45

- $q = 24,25Skt$

Ordnung	$r_l[mm]$	$r_r[mm]$	$r_p[mm]$	$\Delta r_p[mm]$
1	12,5	11,75	11,9	0,45
2	20,5	20	20,1	0,45
3	26	25	25,2	0,45
4	-	30,5	30,5	0,45

- $q = 24,5Skt$

Ordnung	$r_l[mm]$	$r_r[mm]$	$r_p[mm]$	$\Delta r_p[mm]$
1	11	13	12,6	0,45
2	20,5 21		20,9	0,45
3	26	26,25	26,2	0,45
4	30,5	-	30,5	0,45

Für die Grobeichung gilt nun

$$q_{grob} = \frac{f^2 \lambda}{r_{p+1}^2 - r_p^2}$$

mit dem Mittelwert der beiden Natriumlinien $\lambda = 589,3nm$. Der Fehler, der durch diese Näherung entsteht, ist zu vernachlässigen, da dieser in der Größenordnung von $\frac{\Delta \lambda}{\lambda} \approx 5 \cdot 10^{-4}$ liegt, was im Vergleich zum Fehler der Radien $\frac{\Delta r^2}{r^2} \approx 10^{-2}$ klein ist. Daraus ergibt sich für den Fehler von q gemäß Gaußscher Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta q = \sqrt{\left(\frac{f^2 \Delta \lambda}{r_{p+1}^2 - r_p^2}\right)^2 + \left(\frac{2f^2 \lambda}{(r_{p+1}^2 - r_p^2)^2}\right)^2 (r_{p+1} \cdot \Delta r_{p+1} + r_p \cdot \Delta r_p)^2}$$

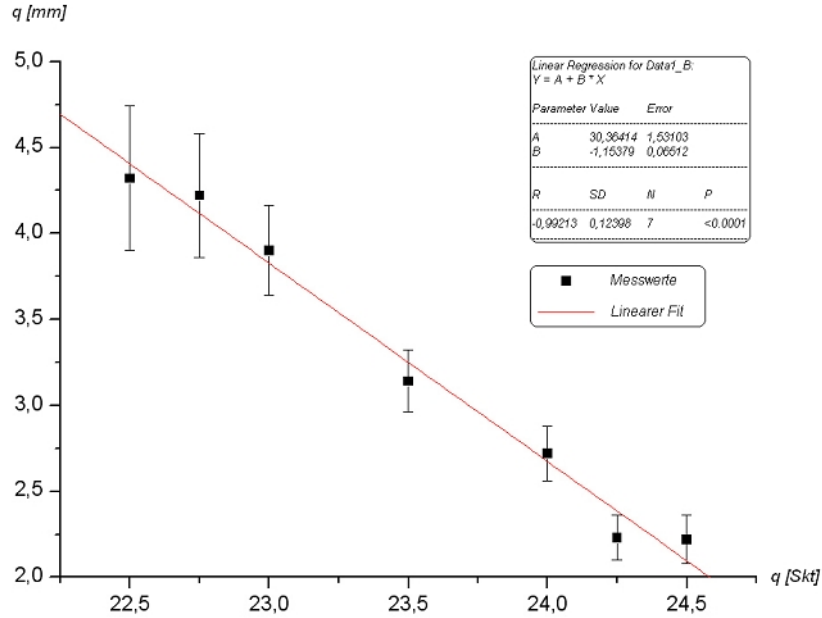
	$q = 22,5Skt$	$q = 22,75Skt$	$q = 23Skt$	$q = 23,5Skt$
$q_1[mm]$	4,62	4,21	4,21	3,20
$\Delta q_1[mm]$	0,43	0,91	0,42	0,26
$q_2[mm]$	4,29	4,24	3,85	3,17
$\Delta q_2[mm]$	0,63	0,87	0,52	0,39
$q_3[mm]$	3,98		3,59	2,95
$\Delta q_3[mm]$	0,76		0,57	0,43
$q_4[mm]$			3,76	3,53
$\Delta q_4[mm]$			0,74	0,72
$q_5[mm]$				2,87
$\Delta q_5[mm]$				0,53

	$q = 24Skt$	$q = 24,25Skt$	$q = 24,5Skt$
$q_1[mm]$	2,82	2,25	2,12
$\Delta q_1[mm]$	0,24	0,18	0,17
$q_2[mm]$	2,91	2,55	2,36
$\Delta q_2[mm]$	0,37	0,32	0,29
$q_3[mm]$	2,94	2,00	2,42
$\Delta q_3[mm]$	0,46	0,24	0,36
$q_4[mm]$	2,28		
$\Delta q_4[mm]$	0,32		

Der fehlergewichtete Mittelwert für q gibt für die verschiedenen Spiegelabstände folgende Ergebnisse:

$q[Skt]$	$q[mm]$	$\Delta q[mm]$
22,5	4,32	0,42
22,75	4,22	0,36
23	3,90	0,26
23,5	3,14	0,18
24	2,72	0,16
24,25	2,23	0,13
24,5	2,22	0,14

Eine lineare Regression unserer Messwerte liefert folgendes Ergebnis:



Nun erkennt man, daß mit steigenden Skalenteilen der tatsächliche Spiegelabstand kleiner wird! Dies ist wahrscheinlich auch der Grund, warum wir ab ca. $25Skt$ kein vernünftiges Interferenzbild mehr erhalten haben. Hier ist der Spiegelabstand offensichtlich zu klein. Die darstellende Funktion ist gegeben durch:

$$q(q_{Skt}) = A + B \cdot q_{Skt}$$

mit den Parametern:

$$A = (30,36 \pm 1,53)mm$$

$$B = (-1,15 \pm 0,07) \frac{mm}{Skt}$$

Daraus ergibt sich für den Nullpunkt des Spiegelabstandes:

$$q_0 = (26,40 \pm 2,09)Skt$$

Dieser Wert scheint ganz vernünftig zu sein.

Beim Auseinanderfahren der Spiegel beobachtet man, wie sich die Ringsysteme der beiden Natriumlinien periodisch überlagern. Auf diese Weise läßt sich ein mittlerer Spiegelabstand δq abschätzen, in dem ein Dispersionsgebiet überstrichen wird. Die größten Abstände der beiden Na-Linien wurden jeweils aufeinanderfolgend bei den Abständen

$$22,49Skt \quad ; \quad 22,75Skt \quad ; \quad 23,09Skt$$

mit einer Unsicherheit von $\Delta\delta q = 0,05Skt$ gemessen. Daraus ergibt sich für den Abstand eines Dispersionsgebietes:

$$\delta q = (0,3 \pm 0,05)Skt \approx (0,35 \pm 0,06)mm$$

3.2 Feineichung

Nun versuchen wir beide Na-Linien getrennt einzuzichnen. Hierbei müssen jedoch zunächst die unterschiedlichen Ringe den verschiedenen Wellenlängen zugeordnet werden. Dafür muß festgelegt werden, welche der beiden Na-Linien gleicher Ordnung weiter außen liegt. Aus

$$m \cdot \lambda = 2q \cos(\alpha) \quad (3.1)$$

erkennt man zum einen, daß die Ringe gleicher Ordnung bei steigendem q weiter nach außen wandern (steigendes α). Zum anderen erhöht sich die Ordnung m um eins, wenn man den Spiegelabstand um $\lambda/2$ erhöht. Das heißt die Ordnungen der Linien kürzerer Wellenlängen ändern sich schneller und die Ringe wandern schneller nach außen.

Für die Feineichung benutzen wir wie in der Theorie hergelitten

$$q = \frac{1}{2\Delta\tilde{\nu}_{I,II}} \left(\frac{r_{p,I}^2 - r_{p,II}^2}{r_{p+1,I}^2 - r_{p,I}^2} \pm k \right) \quad (3.2)$$

Hierbei ist k eine ganze Zahl, die der Anzahl der überstrichenen Dispersionsgebiete entspricht. Diese muß nun noch verifiziert werden. Man erhält k' , indem man mit Hilfe von (3.1) die Anzahl der überstrichenen Dispersionsgebiete bzw. die Ordnungsdifferenz der beiden Na-Wellenlängen bei festem Spiegelabstand q (in mm aus der Grobeichung) berechnet.

$$k' = m_I - m_{II} = 2q\Delta\tilde{\nu}_{I,II}$$

Die Wellenzahldifferenz beträgt $\Delta\tilde{\nu}_{I,II} = 1,72mm^{-1}$ ¹. Nun erhält man k aus k' , indem k' auf die nächste ganze Zahl aufgerundet wird. Daraus ergibt sich ein Fehler von $\Delta k = 1$.

Zunächst stellen wir wieder die jeweiligen ermittelten Radien der beiden Na-Linien für verschiedene Spiegelabstände zusammen. Da wir für jedes $r_{I,II}$ zwei Werte haben, $r_{l,I,II}$ und $r_{r,I,II}$, werden diese zunächst wieder wie zuvor mit den Fehlern

$$\Delta r_{l,I,II} = 1mm \quad \text{und} \quad \Delta r_{r,I,II} = 0,5mm$$

gewichtet gemittelt.

- $q = 22,5Sk \hat{=} 4,49mm$

Ordnung	$r_{l,I}[mm]$	$r_{r,I}[mm]$	$r_{p,I}[mm]$	$r_{l,II}[mm]$	$r_{r,II}[mm]$	$r_{p,II}[mm]$	$\Delta r_p[mm]$
1	4,00	3,00	3,20	8,25	6,50	6,85	0,45
2	13,00	10,75	11,20	14,75	13,00	13,35	0,45
3	18,75	16,50	16,95	19,25	17,25	17,45	0,45

- $q = 22,75Sk \hat{=} 4,20mm$

Ordnung	$r_{l,I}[mm]$	$r_{r,I}[mm]$	$r_{p,I}[mm]$	$r_{l,II}[mm]$	$r_{r,II}[mm]$	$r_{p,II}[mm]$	$\Delta r_p[mm]$
1	5,00	5,00	5,00	7,75	7,25	7,35	0,45
2	12,00	9,50	10,00	14,25	12,75	13,05	0,45
3	15,50	15,25	15,30	17,50	17,50	17,50	0,45

¹Fehlerfreier Referenzwert aus Skript

- $q = 23Skt \hat{=} 3,91\text{mm}$

Ordnung	$r_{l,I}[mm]$	$r_{r,I}[mm]$	$r_{p,I}[mm]$	$r_{l,II}[mm]$	$r_{r,II}[mm]$	$r_{p,II}[mm]$	$\Delta r_p[mm]$
1	7,25	5,50	5,85	9,25	8,75	8,85	0,45
2	14,25	13,50	13,65	15,50	15,75	15,70	0,45
3	18,50	18,00	18,10	19,75	19,50	19,55	0,45

- $q = 24,25Skt \hat{=} 2,47\text{mm}$

Ordnung	$r_{l,I}[mm]$	$r_{r,I}[mm]$	$r_{p,I}[mm]$	$r_{l,II}[mm]$	$r_{r,II}[mm]$	$r_{p,II}[mm]$	$\Delta r_p[mm]$
1	9,75	11,25	10,95	12,75	14,25	13,95	0,45
2	18,00	19,25	19,00	19,50	21,00	20,70	0,45
3	24,25	25,25	25,05	25,00	27,00	26,60	0,45

- $q = 24,5Skt \hat{=} 2,19\text{mm}$

Ordnung	$r_{l,I}[mm]$	$r_{r,I}[mm]$	$r_{p,I}[mm]$	$r_{l,II}[mm]$	$r_{r,II}[mm]$	$r_{p,II}[mm]$	$\Delta r_p[mm]$
1	12,00	11,50	11,60	17,00	15,50	15,80	0,45
2	20,50	18,50	18,90	23,50	21,75	22,10	0,45
3	26,50	25,50	25,70	28,50	27,50	27,70	0,45

- $q = 24,75Skt \hat{=} 1,90\text{mm}$

Ordnung	$r_{l,I}[mm]$	$r_{r,I}[mm]$	$r_{p,I}[mm]$	$r_{l,II}[mm]$	$r_{r,II}[mm]$	$r_{p,II}[mm]$	$\Delta r_p[mm]$
1	-	14,75	14,75	-	18,50	18,50	0,45
2	-	23,00	23,00	-	25,25	25,25	0,45
3	-	28,50	28,50	-	30,50	30,50	0,45

Nun berechnen wir mit (3.2) die q_{fein} -Werte für die verschiedenen Spiegelabstände. Gemäß Gaußscher Fehlerfortpflanzung gilt für den Fehler von q_{fein} :

$$\Delta q_{fein} = \frac{1}{2\Delta\hat{\nu}_{I,II}}$$

$$\cdot \sqrt{(\Delta k)^2 + \left(\frac{2r_{p,II} \cdot \Delta r_{p,II}}{r_{p+1,I}^2 - r_{p,I}^2} \right)^2 + \left(\frac{2\Delta r_{p,I}}{(r_{p+1,I}^2 - r_{p,I}^2)^2} \right)^2 \left(r_{p+1,I}(r_{p,I}^2 - r_{p,II}^2) + r_{p,I}(r_{p+1,I}^2 - r_{p,II}^2) \right)^2}$$

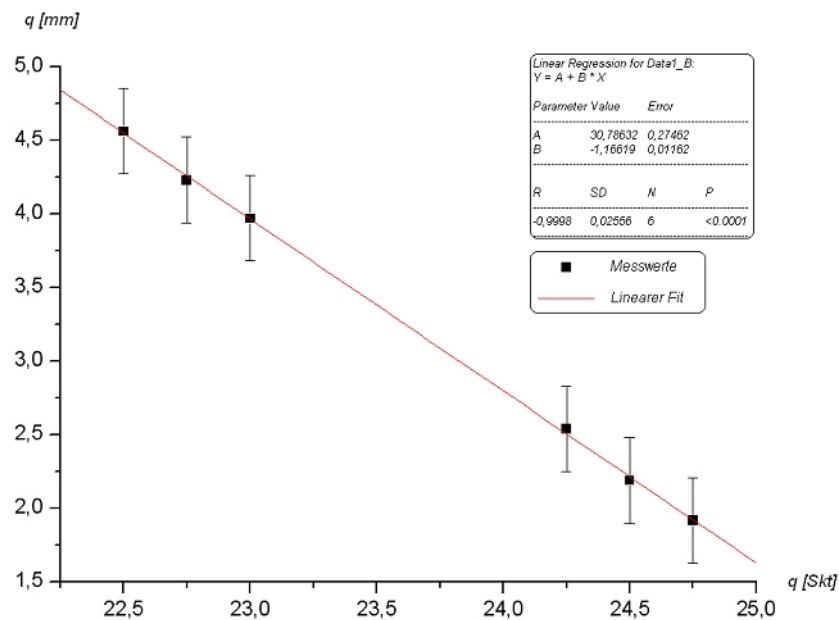
mit den Fehlern $\Delta r_{p,I,II} = 0,45\text{mm}$.

	$q = 22,5Skt$	$q = 22,75Skt$	$q = 23Skt$	$q = 24,25Skt$	$q = 24,5Skt$	$q = 24,75Skt$
k	16	15	14	9	8	7
$q_{1,fein}[mm]$	4,56	4,25	3,99	2,53	2,18	1,92
$\Delta q_{1,fein}[mm]$	0,29	0,29	0,29	0,29	0,29	0,29
$q_{2,fein}[mm]$	4,56	4,21	3,95	2,54	2,20	1,92
$\Delta q_{2,fein}[mm]$	0,29	0,29	0,29	0,29	0,29	0,29

Der Mittelwert (Fehler sind überall gleich) für q_{fein} gibt für die verschiedenen Spiegelabstände folgende Ergebnisse:

$q[Sk]$	$q_{fein}[mm]$	$\Delta q_{fein}[mm]$
22,5	4,56	0,29
22,75	4,23	0,29
23	3,97	0,29
24,25	2,54	0,29
24,5	2,19	0,29
24,75	1,92	0,29

Eine lineare Regression unserer Messwerte liefert folgendes Ergebnis:



Die darstellende Funktion ist gegeben durch:

$$q(q_{Sk}) = A + B \cdot q_{Sk}$$

mit den Parametern:

$$A = (30,79 \pm 0,27)mm$$

$$B = (-1,17 \pm 0,01) \frac{mm}{Sk}$$

Daraus ergibt sich für den Nullpunkt des Spiegelabstandes:

$$q_0 = (26,32 \pm 0,32)Sk$$

Dieser ist diesmal etwas niedriger mit einem sehr viel geringerem Fehler.

3.3 Fazit

Mit den Ergebnissen der Eichung, insbesondere der Feineichung, sind wir sehr zufrieden. Wir finden es sehr schade, daß wir keine Möglichkeit hatten, die Eichung zu kontrollieren und die Thalliumaufspaltung zu vermessen.

Wie realistisch im Endeffekt die Eichwerte für die Spiegelabstände sind, läßt sich natürlich nicht überprüfen. Allerdings würden wir hier keinen Vergleich scheuen.