

Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene, Teil I

Sommersemester 2005

Versuchsprotokoll zum Versuch

Relaxationsmessung mittels Kernresonanz

Angefertigt von
Benjamin Joachimi, Benedikt Klobes

Gruppe β 10

Betreuer: Bernhard Klöter
11. März 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	3
2.1	Spin $\frac{1}{2}$ -Teilchen im homogenen Magnetfeld	3
2.2	Prinzip der Kernspinresonanz	4
2.3	Dynamik des Gesamtspins	5
2.3.1	Dynamik im homogenen Magnetfeld	5
2.3.2	Dynamik im zeitlich veränderlichen Magnetfeld	6
2.4	Spin-Gitter Relaxation	7
3	Versuchsaufbau	8
4	Versuchsdurchführung und Auswertung	10
4.1	Bestimmung der Feldstärke des Nachweismagneten	10
4.2	Inversion im Zwischenfeld	11
4.3	Bestimmung der longitudinalen Relaxationszeit	12
4.4	Bestimmung von Polarisationsgrad und Aufenthaltsdauer im Polarisationsmagneten	15
4.5	Messung der Feldstärke des Zwischenfeldmagneten	16
5	Diskussion	19
6	Anhang	20

1 Einleitung

In diesem Versuch wird die Dynamik von Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen in äußeren Magnetfeldern anhand von Protonen im Wasserstoff des Wassermoleküls untersucht. Mit Hilfe der Kernspinresonanz wird die longitudinale Relaxationszeit des Kernspins von Protonen in Wasser bestimmt und außerdem die Feldstärke schwacher Magnetfelder vermessen.

2 Theorie

2.1 Spin $\frac{1}{2}$ -Teilchen im homogenen Magnetfeld

Klassisch betrachtet lässt sich der Spin eines Teilchens als sein Eigendrehimpuls auffassen. Rotiert nun ein positiv geladenes Teilchen wie das Proton um seine Achse, so entsteht ein magnetisches Moment $\vec{\mu}$, das proportional zum Kernspin \vec{I} ist:

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{I} = \frac{g\mu_K}{\hbar} \vec{I} \quad (1)$$

Hierbei bezeichnet $\mu_K = \frac{e\hbar}{2m_p} \approx 5,08 \cdot 10^{-27} \text{Am}^2 \approx 3,18 \cdot 10^{-18} \frac{\text{MeV}}{G}$ das Kernmagneton und γ das gyromagnetische Verhältnis. Die Stärke der Kopplung wird durch den experimentellen Wert $g = 5,586$ beschrieben, was zu $\gamma = 26908(Gs)^{-1}$ führt.

Setzt man nun ein Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen einem homogenen, äußeren Magnetfeld \vec{B} aus, so ergibt sich im Hamiltonian ein Zusatzterm

$$\hat{H} = -(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) = -\mu_z B_0 = -\gamma B_0 I_z \quad (2)$$

wobei das Koordinatensystem so gewählt wird, dass $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$. Die Anwendung der beiden möglichen Spinzustände auf \hat{H} liefert dann wegen

$$I_z \left| \left(s = \frac{1}{2} \right), m_s \right\rangle = m_s \hbar \left| \left(s = \frac{1}{2} \right), m_s \right\rangle, \quad m_s = \pm \frac{1}{2} \quad (3)$$

folgende Energieverschiebung:

$$\Delta E_{\pm\frac{1}{2}} = \mp \frac{1}{2} \gamma \hbar B_0 \quad (4)$$

also eine Energiedifferenz zwischen den beiden Spinzuständen von $\Delta E = \gamma \hbar B_0$. Eine parallele Ausrichtung des Kernspins zum Magnetfeld ist energetisch günstiger. Wird nun ein Ensemble von Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen, in dem n_{\uparrow}

Teilchen im Zustand 'up' und n_{\downarrow} Teilchen im Zustand 'down' sind, betrachtet, so gilt für die Gesamtenergiedifferenz:

$$\Delta E = n_{\uparrow} \Delta E_{+\frac{1}{2}} + n_{\downarrow} \Delta E_{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(n_{\uparrow} - n_{\downarrow})\gamma\hbar B_0 = -\frac{1}{2}n\gamma\hbar B_0 \quad (5)$$

wobei wir mit $n = n_{\uparrow} - n_{\downarrow}$ die Besetzungszahldifferenz definiert haben.

Eine analoge Rechnung liefert die Aufspaltung der Energieniveaus von Elektronen in der Atomhülle in einem äußeren Magnetfeld, in diesem Fall als Zeeman-Effekt bekannt. Dort geht allerdings anstatt μ_K das Bohrsche Magneton $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ ein. Wegen $\frac{\mu_B}{\mu_K} \approx 1836$ ist der Effekt in der Atomhülle deutlich ausgeprägter.

2.2 Prinzip der Kernspinresonanz

Um die relativ kleine Energieaufspaltung durch die unterschiedlichen Einstellungen des Kernspins zu messen, bedient man sich der Methode der Kernspinresonanz. Wenn man elektromagnetische Strahlung der Energie

$$\hbar\omega_{res} = \Delta E = \gamma\hbar B_0 \quad (6)$$

einstrahlt, können die Protonen in das andere Energieniveau übergehen, d.h. also ihren Spin umklappen. Das zu untersuchende Material, in unserem Fall das Wasser, wird in das Hochfrequenzfeld einer Spule gebracht, die wiederum Teil eines ungedämpften Schwingkreises ist. Wird nun die Frequenz des Schwingkreises oder aber - wie im hier verwendeten Aufbau - die Feldstärke des äußeren Magnetfeldes und somit die Größe der Energieaufspaltung periodisch durchlaufen, so tritt bei der nach Gleichung (6) berechneten Frequenz ω_{res} Resonanz auf. Die zum Umklappen der Kernspins benötigte Energie wird dem Schwingkreis entzogen, die auf einem Oszilloskop beobachtete Spannungsamplitude des Schwingkreises zeigt bei ω_{res} einen Puls. Da die Amplitude U des Pulses der dem Schwingkreis pro Zeiteinheit entzogenen Energie proportional ist, gilt unter Verwendung von Gleichung (5)

$$U \propto \Delta E \propto n \quad (7)$$

Um einen Effekt zu beobachten, ist es also nötig, vor dem Eintritt des Wassers in die Nachweisspule eine von 0 verschiedene Besetzungszahldifferenz zu erreichen. Deshalb durchläuft das Wasser zuvor ein starkes, homogenes Magnetfeld, in dem die Protonenspins gleich ausgerichtet, mit anderen Worten polarisiert werden. Dann lässt sich mit Hilfe des Kernspinresonanzsignals die Besetzungszahldifferenz messen.

2.3 Dynamik des Gesamtspins

2.3.1 Dynamik im homogenen Magnetfeld

Zunächst soll das Verhalten von Spin $\frac{1}{2}$ -Teilchen in einem konstanten Magnetfeld $\vec{B}_0 = \mu_0 \cdot \vec{H}_0$, welches in Richtung der z-Achse zeige, klassisch untersucht werden. Das mit dem Spin einhergehende magnetische Moment $\vec{\mu} = \gamma \vec{I}$, wobei in unserem Falle natürlich $|\vec{I}| = \frac{1}{2}\hbar$ gilt, erfährt im magnetischen Feld ein Drehmoment

$$\vec{T} = \vec{\mu} \times \vec{H}_0 = \hbar \frac{d\vec{I}}{dt} \Leftrightarrow \frac{d\vec{\mu}}{dt} = \gamma \vec{\mu} \times \vec{H}_0 \quad (8)$$

Um nun (8) zu lösen, wechselt man in ein Bezugssystem S', welches gegen das Laborsystem S mit einer Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_0$ rotiert. Allgemein gilt dann für die Zeitableitung $\frac{d}{dt}$ eines Vektors \vec{A} in S bzgl. der Zeitableitung $\frac{\partial}{\partial t}$ in S':

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\omega}_0 \times \vec{A} \quad (9)$$

Aus (8) und (9) folgt dann

$$\frac{\partial \vec{\mu}}{\partial t} = \gamma \vec{\mu} \times \left(\vec{H}_0 + \frac{\vec{\omega}_0}{\gamma} \right) \quad (10)$$

Diese Gleichung hat, sofern man \vec{H}_0 durch $\vec{H}_{eff} = \vec{H}_0 + \frac{\vec{\omega}_0}{\gamma}$ ersetzt, die gleiche Form wie (8). Wählt man also ein mit $\vec{\omega} = -\gamma \vec{H}_0$ rotierendes System S', verschwindet \vec{H}_{eff} und $\vec{\mu}$ ist dort zeitlich konstant. Im Laborsystem präzediert das magnetische Moment $\vec{\mu}$ folglich mit der sogenannten *Larmorfrequenz*

$$\omega = \gamma H_0 \quad (11)$$

um die Magnetfeldrichtung, was in Abbildung 1 dargestellt ist (zur klassischen Behandlung siehe insbesondere [4]). Die Larmorfrequenz ist identisch mit der nach Gleichung (6) berechneten Übergangsfrequenz zwischen den m Unterniveaus.

Quantenmechanisch bildet der Wechselwirkungshamiltonian $H = (\vec{\mu} \cdot \vec{H}_0)$ den Ausgangspunkt der Betrachtung. Ist $|\Psi(0)\rangle$ der Anfangszustand des Teilchens, so gilt für die zeitliche Entwicklung des Zustands:

$$|\Psi(t)\rangle = U(t) |\Psi(0)\rangle \quad (12)$$

mit U(t) als Zeitentwicklungsoperator

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar} = e^{i\gamma t(\vec{I} \cdot \vec{H}_0)} \quad (13)$$

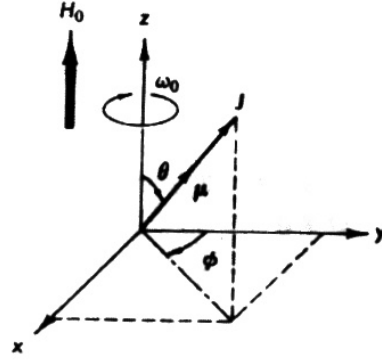


Abbildung 1: Larmor Präzession

Bekanntermaßen ist $e^{-i\vec{\Theta} \cdot \vec{I}}$ der Drehoperator um den Winkel $\vec{\Theta}$, weshalb der Zustand um einen Winkel $\vec{\Theta}(t) = -\gamma \vec{H}_0 t$ gedreht wird. Der Erwartungswert von \vec{I} und damit auch der von $\vec{\mu}$ präzediert also um \vec{H}_0 mit der *Larmorfrequenz* $\omega_0 = \gamma H_0$. Genauere Ausführungen sind [1], Kapitel 14 zu entnehmen.

2.3.2 Dynamik im zeitlich veränderlichen Magnetfeld

Nun werde dem homogenen Magnetfeld ein in der x-y-Ebene mit Winkelgeschwindigkeit ω zirkular polarisiertes Magnetfeld \vec{B}_1 mit Winkelgeschwindigkeit ω überlagert. Man erhält, wenn \vec{x}' die x-Achse des rotierenden Systems S' und das rotierende Magnetfeld zu dieser parallel ausgerichtet ist, ein statisches Feld \vec{B}_{eff}' in S' zu

$$|B_{eff}| = \sqrt{\left(B_0 + \frac{\omega_0}{\gamma}\right)^2 + B_1^2} \quad (14)$$

Gilt nun $\omega \approx \omega_0$, so wird das magnetische Moment für einen Beobachter in S' eine Rotation um \vec{x}' vollführen. Diese Bewegung überlagert sich mit der Präzession des Vektors in S (siehe Abb. 2) und es resultiert insgesamt eine spiralförmige Bewegung des magnetischen Moments im Laborsystem. (Die genaue Rechnung entnehme man [4] oder [5]) Ist die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Magnetfeldes groß oder klein gegen die Larmorfrequenz, so führt das effektive Magnetfeld lediglich zu einer periodischen Verengung bzw. Aufweitung des Präzessionskegels, was sich insgesamt allerdings wegmittelt.

Quantenmechanisch ist das Bild der Spiralbahn des magnetischen Moments, also der m-Quantenzahl für ein einzelnes Teilchen nicht ganz korrekt. Durch

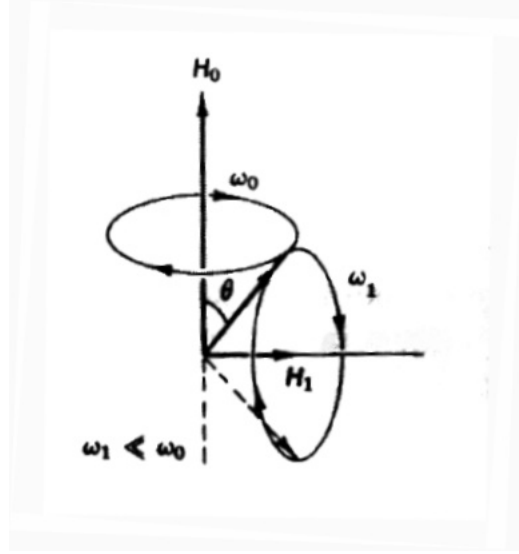


Abbildung 2: Illustration der Präzession um z- und x'-Achse

Lösen der zugehörigen Schrödingergleichung erhält man die sogenannte Rabi-Formel für ein Spin $\frac{1}{2}$ -Teilchen:

$$P_{\pm}(t) = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + (\omega - \omega_0)^2} \sin \left(\frac{\sqrt{\omega_1^2 + (\omega - \omega_0)^2}}{2} t \right) \quad (15)$$

Die Rabi-Formel beschreibt die Wahrscheinlichkeit für ein Teilchen, sich zum Zeitpunkt t im Zustand $m = \pm \frac{1}{2}$ zu befinden. Man nennt dieses Phänomen ebenso wie obige klassische Vorstellung Rabi-Oszillation.

Im Versuch werden wir uns dieses Verhalten zur Herstellung einer Inversion der Besetzungszahlen zunutze machen.

2.4 Spin-Gitter Relaxation

Im Versuch werden wir Protonen nicht einzeln untersuchen, sondern Protonenensembles großer Teilchenzahl. Befinden sich die Teilchen nicht mehr in einem äußeren Magnetfeld, z.B. dem Polarisationsfeld, kann man die Wechselwirkung der Teilchen untereinander nicht mehr vernachlässigen. Aufgrund der Brownschen Bewegung der Atome und ihrem magnetischen Moment bildet sich ein komplexes magnetisches Wechselfeld aller Teilchen, welches ebenfalls für ein Umlappen der Spins sorgt. Eine bestehende Besetzungzahldifferenz kann dadurch in einer statistisch relevanten Zeit, der sogenannten longitudinalen Relaxationszeit, wieder abgebaut werden. Dieser Effekt wird

in Analogie zur Festkörperphysik *Spin-Gitter Relaxation* genannt, wobei hier unter dem Begriff 'Gitter' die Freiheitsgrade der Translation, Rotation und Vibration subsummiert werden.

Im thermischen Gleichgewicht gilt für die Besetzungszahlen gemäß der Boltzmann-Verteilung

$$\frac{n_{\downarrow}}{n_{\uparrow}} = e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}} \quad (16)$$

wobei $\Delta E = \gamma \hbar B_0$ die Energiedifferenz zwischen den beiden Spinzuständen ist. Wird diese Gleichgewichtsverteilung zu einem Zeitpunkt $t = 0$ gestört, so nähert sich die Besetzungszahldifferenz $n(t) = n_{\downarrow}(t) - n_{\uparrow}(t)$ der ursprünglichen Verteilung mit n_{gl} gemäß

$$n(t) = n_{gl} - (n_{gl} - n(0))e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (17)$$

τ ist dabei die Relaxationszeit und materialabhängig. Anschaulich beschreibt sie, wie stark die Kopplung des einzelnen magnetischen Moments an das Gesamtfeld ist (je kleiner τ desto stärker die Kopplung).

Im Erdmagnetfeld ist die Besetzungszahldifferenz aufgrund seiner geringen Größe von rund 0,5G nur sehr klein, weshalb man wohlbegründet $n_0 \approx 0$ setzen kann. Befindet sich die Wasserprobe eine Zeit t_p im Polarisationsmagneten, so hat sich eine Besetzungszahldifferenz von

$$n_p = n_{gl}(1 - e^{-\frac{t_p}{\tau}}) \quad (18)$$

ausgebildet, welche die Probe im schwachen Erdfeld nach Durchgang durch den Polarisationsmagneten jedoch wieder bestrebt ist abzubauen. Der avisierte Gleichgewichtszustand besitzt näherungsweise wieder eine Besetzungszahldifferenz von Null, so dass

$$n(t) = n_p \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (19)$$

Durch Logarithmieren dieser Gleichung erhält man folgenden linearen Zusammenhang

$$\ln(n(t)) = \ln(n_p) - \frac{t}{\tau} \quad (20)$$

welchen man nach Messung der Besetzungszahldifferenz nach verschiedenen Zeiten verwendet, um die Relaxationszeit zu bestimmen.

3 Versuchsaufbau

Der im Experiment verwendete Versuchsaufbau ist in Abb. 3 dargestellt. Grundlage des Aufbaus ist ein geschlossener Kreislauf destillierten Wassers,

da normales Leitungswasser u.a. paramagnetische Stoffe enthält, die die Messung erheblich beeinflussen würden. Das Wasser wird von zwei Kreislaspumpen (P1, P2) angetrieben, wobei die Fließgeschwindigkeit während des Versuches gleich bleiben soll, was anhand der konstanten Füllhöhe des Steigrohrs (9) kontrolliert wird (die Strömungsgeschwindigkeit ist proportional zur Steighöhe).

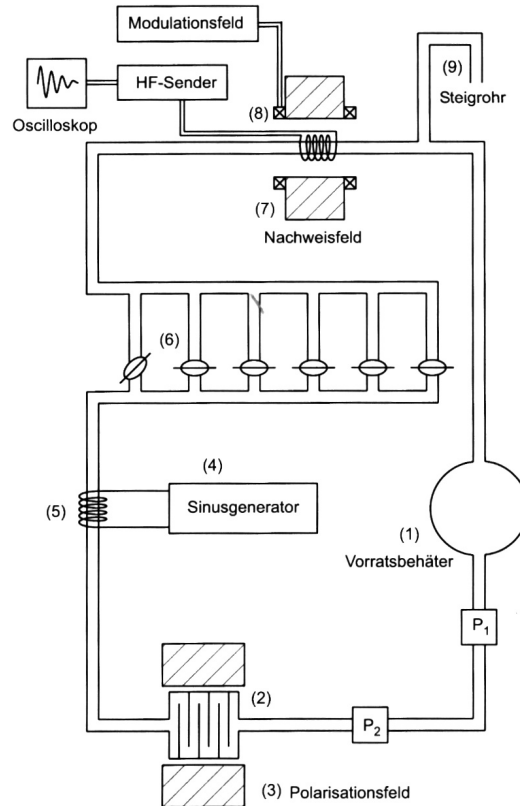


Abbildung 3: Versuchsaufbau

Aus dem Vorratsbehälter (1) fließt das Wasser zunächst in den Polarisationsmagneten (2), der über ein starkes, homogenes Feld verfügt und mit einem maximalen Strom von 7A betrieben wird. Die Windungen sorgen dafür, dass das Wasser sich ausreichend lange im Polarisationsfeld befindet, so dass beim Verlassen des Magneten der Polarisationsgrad möglichst groß ist.

Im Zwischenfeld, erzeugt von einem Helmholtzspulenpaar, das über ein Netzgerät mit einstellbarer Stromstärke versorgt werden kann, kann man ein von einem Sinusgenerator (4) erzeugtes Wechselfeld einstrahlen. Durch geeignete

Wahl der Frequenz lässt sich hier die Inversion der Besetzungszahldifferenz erreichen (siehe Abschnitt 2.3.2). Im Anschluss kann das Wasser durch sechs verschiedene Schlauchleitungen(6) mit Längen zwischen 30cm und rund 3m geschickt und somit die Zeitspanne zwischen Inversion und Erreichen des Nachweisfeldes variiert werden.

Das Nachweisfeld setzt sich aus einem Permanentmagneten(7) mit einer Feldstärke von 60mT sowie einem aufgesetzten Spulenpaar(8) zur Modulation zusammen. Dieses wird von 50-Hz Wechselstrom mit einer durch ein Potentiometer regelbaren Stromstärke von maximal 1,5A durchflossen, was das periodische Durchlaufen der Resonanz ermöglicht. Das Signal des ungedämpften Schwingkreises wird über eine um die Leitung gewickelte Spule eingekoppelt und über ein Oszilloskop betrachtet. Das Oszilloskopsignal wird mit sich selbst getriggert, so dass ein stehendes Bild zur einfacheren Analyse entsteht. Die Frequenz des Schwingkreises wird von einem HF-Generator erzeugt und kann mit dem Generator des Zwischenfeldes analysiert werden. Schließlich gelangt das Wasser wieder in den Vorratsbehälter, wo es sich lange genug aufhält, um wieder einen Gleichgewichtszustand der Kernspins zu erlangen.

4 Versuchsdurchführung und Auswertung

4.1 Bestimmung der Feldstärke des Nachweismagneten

Nach Inbetriebnahme des Wasserkreislaufs haben wir den Hahn des Wasserweges geöffnet, der den niedrigsten Pegelstand im Steigrohr verursachte. So ließen sich anschließend die Stände bei Durchfluss durch die anderen Leitungen mittels Begrenzung des Wasserflusses auf die gleiche Pegelhöhe einregeln. Nun haben wir das Resonanzsignal gesucht, indem wir Frequenz und Amplitude des Hochfrequenzfeldes sowie die Amplitude des Modulationsfeldes im Nachweismagneten variierten.

Bei einer Stromstärke des Modulationsfeldes von 0,45A und einer Frequenz von $\nu = 2361\text{kHz}$ erhielten wir ein optimales Resonanzsignal. Die Einstellung der Amplitude des Hochfrequenzfeldes erfolgte skalenlos, weswegen wir keine quantitative Angabe zur Einstellung machen können. Anzeichen für die korrekte Einstellung des Kernspinresonanzsignals waren äquidistante Abstände zwischen den Signalen, maximale Amplitude und feste Position in Bezug auf das den Oszillographen triggernde Sinussignal. Mit diesen Indikatoren war eine recht genaue Einstellung des Resonanzsignales möglich, weshalb wir den Fehler mit $\Delta\nu = 2\text{kHz}$ abschätzen. Nach Gleichung (11) erhalten wir für die

Magnetfeldstärke des Nachweismagneten

$$B_0 = \frac{2\pi\nu}{\gamma} = (551,3 \pm 0,5)G \quad (21)$$

Wie sich direkt im Anschluss herausstellte, war der von uns gewählte Wasserweg der längste, wodurch wir das kleinstmögliche Resonanzsignal erhielten. Die Verwendung des kürzesten Weges führte unmittelbar zu einem deutlich ausgeprägteren Signal, welches wir in Abb. 4 schematisch darstellen. Deutlich

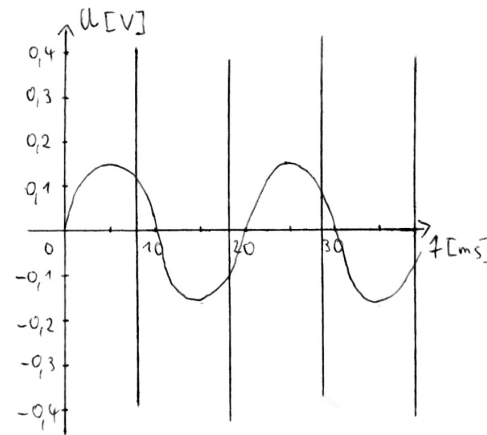


Abbildung 4: Schematisches Resonanzsignal

zu erkennen ist der zugrundeliegende 50Hz-Sinusverlauf, der allerdings von einem starken Rauschen überlagert war. Abb. 5 zeigt beispielhaft eine Detailansicht eines Resonanzsignals mittlerer Amplitude mit dem erheblichen Rauschuntergrund, der in allen nachfolgenden Messungen die Genauigkeit erheblich einschränkte.

4.2 Inversion im Zwischenfeld

Wir behielten den kürzesten Wasserweg bei und suchten unter Veränderung der Frequenz und Amplitude des Zwischenfeldes das invertierte Resonanzsignal. Bei einer Frequenz von $\nu = 4,31\text{kHz}$ und maximal möglicher Amplitude (ebenfalls ohne Skala) ergab sich das bestmögliche Inversionssignal mit ungefähr halber Amplitude in Bezug auf das nicht invertierte Resonanzsignal. Auf Anraten des Tutors wählten wir ein kleines Offset-Magnetfeld ($I = 0,4\text{A}$) im Zwischenfeld. Jetzt fanden wir das Inversionssignal bei $\nu = 6,72\text{kHz}$ und ca. halber Feldamplitude. Da sich allerdings die Ausprägung des invertierten Signals eher verschlechterte, kehrten wir zur ursprünglichen Einstellung ohne

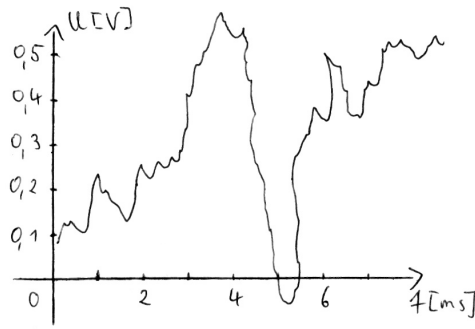


Abbildung 5: Detailansicht eines Resonanzsignals

Offset zurück. Nur beim kürzesten Wasserweg war ein tatsächlich invertiertes Signal zu erlangen, ansonsten konnten wir die Resonanzsignale bestenfalls zum Verschwinden bringen.

Eine Verkleinerung der Amplitude bewirkte eine Rückentwicklung des Inversionssignals zum gewöhnlichen Resonanzsignal, was darauf zurückzuführen ist, dass in diesem Fall für eine Inversion nicht mehr genügend Spins umgeklappt werden können. Wenn die Amplitude über das Optimum hinaus vergrößert wurde, war die Rückentwicklung ebenfalls zu beobachten. Dies erklären wir uns damit, dass die Spins dann zweimal umklappen können, also wieder in die Ausgangsrichtung zeigen.

4.3 Bestimmung der longitudinalen Relaxationszeit

Zur Bestimmung der Relaxationszeit messen wir für jeden Wasserweg die Laufzeit von der Inversion im Zwischenfeld bis zum Erscheinen des invertierten Signals im Nachweisfeld sowie jeweils unmittelbar vor der Zeitmessung auf einem Oszilloskop-Standbild die Spitze-zu-Spitze-Spannung U_{SS} . Wir führen, beginnend mit dem oberen Wasserhahn, jeweils 10 Messungen durch, um die Auswirkung der sehr großen Ablesefehler kompensieren zu können. Zum einen schwankt U_{SS} durch das aufgeprägte Rauschen sehr stark, zum anderen muss die Zeitmessung beim Nulldurchgang des Resonanzsignals gestoppt werden, da ja nur beim ersten Wasserweg Inversion zu beobachten ist, was ebenfalls aufgrund der großen Rauschamplitude kaum präzise machbar ist.

Auf diese Art und Weise haben wir die ersten drei Wasserwege durchgemessen (siehe dazu Tabelle 5 im Anhang), um dann festzustellen, dass die Spannungsamplitude übermäßig stark gesunken und kaum mehr vom Rau-

schen zu trennen war. Eine Kontrollmessung beim ersten Wasserhahn ergab ein Absinken von U_{SS} um ca. einen Faktor $\frac{1}{2}$. Da sowohl am Oszilloskop als auch an der Apparatur nichts verändert worden war, vermuten wir, dass eines der Versuchsgeräte während der Messung diesen Sprung verursacht haben muss. Alle vorherigen Versuchsschritte haben wir deshalb wiederholt und im Zwischenfeld diesmal den Magnetfeld-Offset mit $I = 0,4A$ verwendet. Das Resonanzsignal des Nachweisfeldes war exakt reproduzierbar, während sich jetzt eine Zwischenfeldfrequenz $\nu = 4,33kHz$ ergab, die ganz erheblich von der in Abschnitt 4.2 angegebenen, bei Magnetfeld-Offset eingestellten Frequenz abweicht. Eine Erklärung für dieses Verhalten haben wir leider nicht.

In Anbetracht der fortgeschrittenen Zeit konnten wir bei der jetzt wiederholten Messung lediglich fünf Zeit- und Spannungsmessungen pro Wasserweg vornehmen. Die erhaltenen Werte für Laufzeit t und Spannung U_{SS} haben wir jeweils gemittelt und die Standardabweichung σ berechnet. Auf die Laufzeit t schätzen wir einen konstanten systematischen Fehler von $\sigma_{sys} = 0,25s$ sowie auf die Spannungsmessungen einen syst. Fehler von $\sigma_{sys} = 0,04V$ für den obersten Wasserweg und $\sigma_{sys} = 0,02V$ sonst, bedingt durch eine verdoppelte y-Ablenkung des Oszillographen. Damit ergibt sich ein Gesamtfehler von

$$\sigma_{tot} = \sqrt{\sigma^2 + \sigma_{sys}^2} \quad (22)$$

Alle gemessenen und berechneten Größen haben wir in den Tabellen 1 und 2 zusammengestellt. Der Fehler auf die Laufzeit setzt sich aus den oben disku-

Weg	Zeit t [s]					\bar{t} [s]	σ [s]	σ_{sys} [s]	σ_{tot} [s]
1	6,43	6,64	6,58	6,57	6,58	6,56	0,08	0,25	0,26
2	11,16	11,59	11,44	11,11	11,40	11,34	0,20	0,25	0,32
3	10,57	10,45	10,33	10,68	10,76	10,56	0,17	0,25	0,30
4	9,83	10,09	10,00	9,78	10,09	9,96	0,15	0,25	0,29
5	9,04	9,19	9,19	9,17	9,13	9,14	0,06	0,25	0,26
6	8,88	8,54	8,76	8,61	8,93	8,74	0,17	0,25	0,30

Tabelle 1: Ergebnisse der Laufzeitmessung

tierten Ableseungenauigkeiten sowie aus von uns beobachteten Schwankungen in der Fließgeschwindigkeit des Wassers, die ja proportional zur Höhe der Wassersäule im Steigrohr ist (vergleiche [2]), zusammen. Während des gesamten Versuchstages konnten wir kurzfristige Schwankungen der Wassersäule mit einer Amplitude von ca. 5cm und zusätzlich Langzeitschwankungen noch größeren Ausmaßes beobachten. Eine mögliche Ursache dafür könnte eine zu geringe Füllung des Wasserkreislaufs sein, so war z.B. der Schlauch am

Weg	Spannung U_{SS} [V]					$\overline{U_{SS}}$ [V]	σ [V]	σ_{sys} [V]	σ_{tot} [V]
1	0,74	0,70	0,74	0,66	0,64	0,70	0,05	0,04	0,06
2	0,35	0,24	0,21	0,28	0,26	0,27	0,05	0,02	0,06
3	0,34	0,38	0,28	0,31	0,28	0,32	0,04	0,02	0,05
4	0,34	0,29	0,36	0,25	0,30	0,31	0,04	0,02	0,05
5	0,37	0,36	0,42	0,34	0,34	0,37	0,03	0,02	0,04
6	0,36	0,40	0,38	0,41	0,40	0,39	0,02	0,02	0,03

Tabelle 2: Ergebnisse der Pulshöhenmessung

Ausgang der Kreispumpe nach dem Vorratsbehälter zu keiner Zeit vollständig gefüllt.

Nun tragen wir die logarithmierten Spannungswerte gegen die Laufzeit auf und führen den in Abbildung 6 dargestellten linearen Fit durch. Wir erhal-

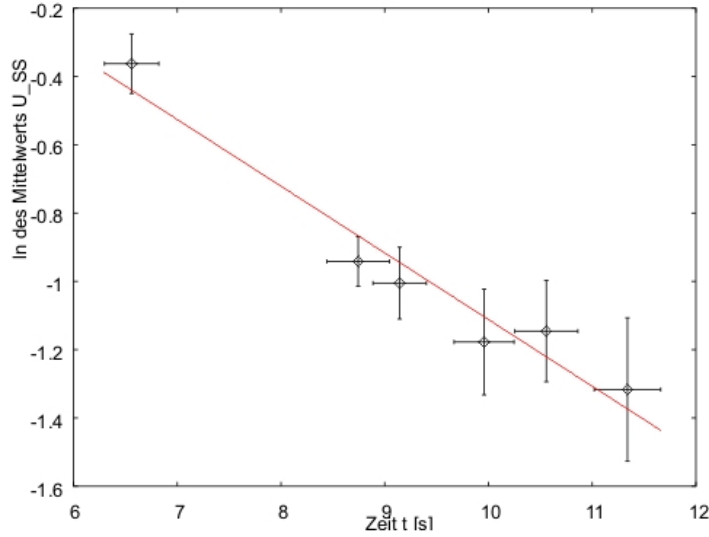


Abbildung 6: Linearer Fit zur Bestimmung der Relaxationszeit

ten für den y-Achsenabschnitt b und die Steigung m der Fitgeraden folgende Werte:

$$b = (0,8 \pm 0,2) , \quad m = (-0,20 \pm 0,02) \frac{1}{s} \quad (23)$$

Nach Gleichung (20) können wir die longitudinale Relaxationszeit zu $\tau = -\frac{1}{m}$ berechnen, mit einem Fehler von

$$\Delta\tau = \Delta m \frac{1}{m^2} \quad (24)$$

Als Resultat ergibt sich:

$$\tau = (5,0 \pm 0,5)s \quad (25)$$

Da wir den theoretischen Wert für die longitudinale Relaxationszeit von Protonen in Wasser nicht kennen, lässt sich kein Vergleich anstellen. Dennoch vermuten wir, dass unser Wert in Anbetracht der erheblichen Messungenauigkeiten wahrscheinlich nicht der Realität entsprechen wird.

4.4 Bestimmung von Polarisationsgrad und Aufenthaltsdauer im Polarisationsmagneten

Nach Durchfluss durch den Polarisationsmagneten ergibt sich eine Besetzungszahldifferenz, die durch Gleichung (18) beschrieben wird. Man definiert den Polarisationsgrad als $\Pi = \frac{n_p}{n_{gl}}$. Demnach lässt sich also Π als Verhältnis der Spitze-zu-Spitze Spannungen des normalen Spinresonanzsignals und eines Resonanzsignals U_{max} bestimmen, das sich ergibt, wenn der Wasserkreislauf für eine Zeit $t \gg \tau$ unterbrochen wird. Für eine Aufenthaltsdauer im Polarisationsmagneten $t_p \rightarrow \infty$ wird nämlich $n_p = n_{gl}$.

Wir messen dieses überhöhte Resonanzsignal mit Einstellung des obersten Wasserweges fünfmal und werten es inkl. der Fehlerbestimmung analog zu Abschnitt 4.3 aus. Die Ergebnisse sind in Tabelle 3 zusammengefasst. Für die

Messung Nr.	U_{max} [V]	U_{SS} [V]
1	1,00	0,74
2	0,90	0,70
3	0,94	0,74
4	0,88	0,66
5	0,90	0,64
Mittelwert	0,92	0,70
Standardabw.	0,05	0,05
Syst. Fehler	0,04	0,04
Ges. Fehler	0,06	0,06

Tabelle 3: Messung des überhöhten Resonanzsignals zur Bestimmung des Polarisationsgrades

Werte des gewöhnlichen Resonanzsignals greifen wir auf die Messergebnisse des vorherigen Abschnitts zurück. Somit kann man den Polarisationsgrad folgendermaßen berechnen

$$\Pi = \frac{n_p}{n_{gl}} = \frac{\overline{U_{SS}}}{\overline{U_{max}}} \quad (26)$$

mit einem Fehler von

$$\Delta\Pi = \Pi \sqrt{\left(\frac{\Delta U_{SS}}{U_{SS}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta U_{max}}{U_{max}}\right)^2} \quad (27)$$

Wir erhalten

$$\Pi = (0,75 \pm 0,08) \quad (28)$$

Durch Logarithmierung und Umformung von Gleichung (18) kann man die Verweildauer t_p des Wassers im Polarisationsmagneten bestimmen:

$$t_p = -\tau \cdot \ln(1 - \Pi) , \quad \Delta t_p = \sqrt{(\ln(1 - \Pi))^2 (\Delta\tau)^2 + \left(\frac{\tau}{1 - \Pi}\right)^2 (\Delta\Pi)^2} \quad (29)$$

mit dem Resultat

$$t_p = (6,9 \pm 1,7)s \quad (30)$$

4.5 Messung der Feldstärke des Zwischenfeldmagneten

In diesem Versuchsteil wurden die Spulen des Zwischenfeldmagneten von unterschiedlichen Strömen I durchflossen, wobei wir jeweils die zugehörige Larmorfrequenz aufgesucht haben. Die bei Verwendung von Wasserweg 1 gemessenen Daten sind in Tabelle 4 angegeben. Wir schätzen auf die Stro-

I [A]	ν [kHz]	ΔI [A]	$\Delta\nu$ [kHz]
0,40	4,3	0,03	0,1
0,50	6,1	0,03	0,1
0,70	8,5	0,03	0,1
0,90	12,2	0,03	0,1
0,80	10,2	0,03	0,1
0,60	7,6	0,03	0,1
0,30	3,9	0,03	0,1
0,20	3,1	0,03	0,1
0,10	nm	nm	nm

Tabelle 4: Ergebnisse der Messung der Zwischenfeldmagnetfeldstärke. 'nm' bedeutet, dass keine Messung möglich war.

meinstellung des Netzteils einen Fehler von 0,03A sowie auf die Einstellung des Frequenzgenerators einen Fehler von 100Hz. Dieser wird einerseits durch die mangelhafte Einstellgenauigkeit des Instruments und andererseits durch die nicht genaue Auffindbarkeit des optimalen Inversionssignals bedingt. Bei

Strömen unterhalb 0,2A konnten wir keine verwertbare Messung vornehmen, weil die Resonanzsignale im Rauschen untergingen, obwohl wir zu Anfang des Versuches sogar ganz ohne Magnetfeld deutliche Inversionssignale sehen konnten. Auch hier scheinen apparative Veränderungen eine Rolle gespielt zu haben. Mit Strömen größer als 0,9A konnten aufgrund deutlicher Zunahme von Artefakten und Rauschen, evtl. ausgelöst von Störungen in der Elektronik durch das anwachsende Zwischenmagnetfeld, keine Messungen vorgenommen werden.

Wir ermittelten folgende Parameter des Helmholtzspulenpaares:

- Anzahl N der Windungen pro Spule = 139
- Abstand der Spulen = Radius R der Spulen = 11,2cm

Aus [3] entnehmen wir folgende Formel für die Magnetfeldstärke im Zentrum der Helmholtzspulen-Konfiguration:

$$B_H = \frac{\mu_0 N I}{\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}} R} \equiv \alpha \cdot I, \quad \alpha = 11,16 \frac{G}{A} \quad (31)$$

Unter Verwendung von $\omega = \gamma B_H$ erhalten wir folgende Proportionalität zwischen Magnetstrom und Resonanzfrequenz:

$$\nu = \frac{\gamma \alpha}{2\pi} I \approx 47,79 \frac{1}{A \cdot s} I \quad (32)$$

In Abbildung 7 haben wir Resonanzfrequenz ν gegen Strom I aufgetragen. Deutlich ist der lineare Zusammenhang mit einer Abflachung für die kleinsten Ströme zu erkennen. Diese Abflachung führen wir auf den Einfluss von Streufeldern oder evtl. auch des Erdmagnetfeldes ($B = 0,5G$) zurück. Wir führen im Bereich der Linearität (0,4A bis 0,9A) einen Geradenfit durch und erhalten folgenden Zusammenhang

$$\nu = (15,1 \pm 0,7) \frac{1}{A \cdot s} \cdot I + (-1,6 \pm 0,5) \frac{1}{s} \quad (33)$$

Es ergibt sich weder eine exakte Proportionalität noch stimmt die errechnete Steigung auch nur annähernd mit der theoretisch in Gleichung (32) vorhergesagten überein. Gründe für eine derart starke Abweichung um ca. einen Faktor drei können wir uns nicht erklären. Streufelder oder paramagnetische Materialien in der Umgebung der Spule (worauf in [2] hingewiesen wird) haben zwar einen Einfluss auf die Messergebnisse, können aber wohl kaum in dieser Größenordnung einwirken.

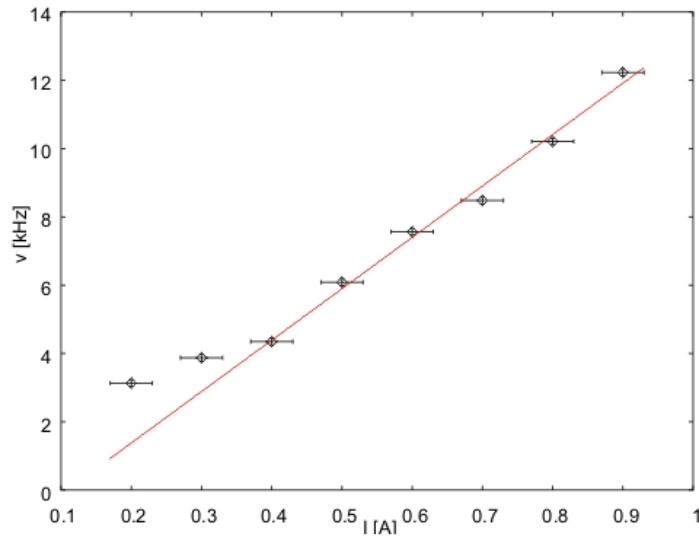


Abbildung 7: Larmorfrequenz vs. Strom zur Überprüfung der theoretischen Vorhersage

Um die Vermessung von noch kleineren Magnetfeldern möglich zu machen, müssten äußere Magnetfelder wirkungsvoll abgeschirmt werden. Eine Möglichkeit, dies zu realisieren, besteht in der Anordnung von drei zueinander senkrechten Helmholtzspulenpaaren, vergleiche [3].

5 Diskussion

Obwohl unsere Messungen letztlich verwertbares Datenmaterial ergaben, halten wir den Großteil unserer Ergebnisse für nicht sehr vertrauenswürdig. Insbesondere machte uns die mangelnde Reproduzierbarkeit der Werte Sorgen, siehe hierfür beispielsweise die Tabellen 1 und 2 im Vergleich mit Tabelle 5 im Anhang.

Eigene Bedienfehler können wir natürlich nicht ausschließen, allerdings traten auch ohne Änderung jeglicher Parameter zum Teil Abweichungen in nachfolgenden, ansonsten identischen Messungen auf. Wir verdächtigen hier vor allem den HF-Generator für das Nachweisfeld als Verursacher. Er könnte für zeitliche Sprünge, das permanente Rauschen und auch die im Vergleich zu Vorgängermessungen sehr geringe Spannungsamplitude der Resonanzen verantwortlich sein. Außerdem stellt der geringe Füllstand der Anlage offenbar eine erhebliche Fehlerquelle dar.

Im Nachhinein halten wir es für sinnvoll, obige Fehlerursachen soweit wie möglich zu beseitigen, um zufriedenstellendere Ergebnisse erzielen zu können. Ferner könnte eine Neuordnung der Messgeräte, insbesondere der Stoppuhr und des Oszilloskops, auf dem Versuchsrack, falls möglich, die Ablesegenauigkeit verbessern. Die räumliche Nähe von beweglichen Wasserschläuchen und Elektromagneten sollte zum Ausschluss weiterer Fehlerquellen vermieden werden.

6 Anhang

Weg	1	2	3	Weg	1	2	3
Zeit t [s]	8,89	12,44	10,23	Spannung U_{SS} [V]	0,96	0,34	0,32
	8,49	11,84	10,83		0,89	0,27	0,24
	9,15	11,88	11,33		0,80	0,33	0,27
	8,13	11,80	10,94		0,82	0,28	0,22
	8,21	12,12	11,27		0,82	0,24	0,28
	8,25	11,78	11,17		0,84	0,25	0,21
	8,55	11,50	10,52		0,86	0,24	0,27
	8,92	11,85	10,90		0,80	0,26	0,20
	8,19	12,34	10,61		0,80	0,21	0,20
	8,28	11,93	10,70		0,84	0,23	0,26
\bar{t} [s]	8,51	11,95	10,85	$\overline{U_{SS}}$ [V]	0,84	0,27	0,25
σ [s]	0,36	0,28	0,35	σ [V]	0,05	0,04	0,04

Tabelle 5: Ergebnisse der ersten, verworfenen Messung zur Bestimmung der Relaxationszeit

Literatur

- [1] R. Shankar: Principles of Quantum Mechanics, Plenum Press N.Y., 2nd edition (1994)
- [2] A143: Relaxationsmessung mittels Kernresonanz, Skript zum Versuch ausgegeben von den Assistenten
- [3] W. Demtröder: Experimentalphysik 2, Springer-Verlag, 1. Auflage (1995)
- [4] Abschnittsweise Kopie eines Buches, vom Assistenten ausgehändigt
- [5] H. Kopfermann: Kernmomente, Wiesbadener Graphische Betriebe GmbH, 1. Auflage (1956)