Übung 1

Ausgabe: 15.04.2014, Abgabe: 22.04.2014, Besprechung: 24./25.04.2014

1.1 Komplexe Zahlen

Rechnen mit komplexen Zahlen

Wir betrachten zwei komplexe Zahl z_j mit Realteil a_j und Imaginärteil b_j ($j = 1, 2$; $a, b \in \mathbb{R}$):

$$z_1 = a_1 + \mathrm{i}b_1\,, \qquad z_2 = a_2 + \mathrm{i}b_2 \tag{1}$$

Es gilt $i^2 = -1$ und die komplexe Konjugation ist definiert als $z_j^* \equiv a_j - \mathrm{i}b_j$

1. Berechnen Sie $z_1 + z_2$ und $z_1 \cdot z_2$.
2. Wie lautet der Absolutbetrag $|z_1| = \sqrt{z_1 z_1^*}$?
3. Zeigen sie, dass $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$ gilt.

Man kann eine komplexe Zahl auch durch

$$z_j = r_j e^{\mathrm{i}\phi_j} \qquad r_j, \phi_j \in \mathbb{R} \tag{2}$$

ausdrücken.

4. Welcher Zusammenhang gilt zwischen a_j, b_j und r_j, ϕ_j?
5. Wie lautet z_j^*?
6. Berechnen Sie $z_1 \cdot z_2$ und z_1/z_2.
7. Berechnen Sie $|z_1 + z_2|$

Eulersche Formel

Zeigen sie, dass

$$e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x \tag{3}$$

gilt. (*Tipp:* Taylorentwicklung!)

1.2 Interferenz ebener Wellen

Betrachten Sie zwei ebene Wellen Ψ_j mit gleicher Frequenz ω, aber unterschiedlicher Amplitude $\vec{A}_j$ und unterschiedlichem Wellenvektor $\vec{k}_j$ ($j = 1, 2$):

$$\Psi_1 = \vec{A}_1 e^{\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}_1 \vec{x})} \tag{4}$$

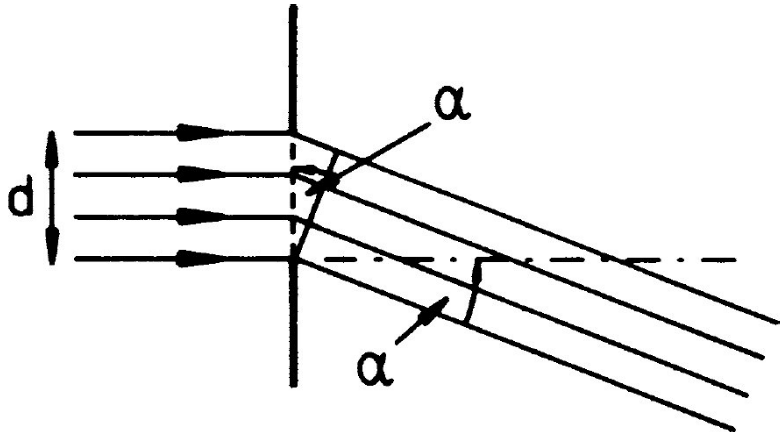
$$\Psi_2 = \vec{A}_2 e^{\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}_2 \vec{x})} \tag{5}$$

Wir nehmen an, dass beide Wellen sich kohärent überlagern.

1. Berechnen Sie die Intensität $I = |\Psi_1 + \Psi_2|^2$ der beiden Wellen.
2. Wie würde die Intensität der beiden Wellen lauten, wenn diese nicht kohärent wären?
3. Wie lautet die Bedingung für k_1, k_2, so dass die Itensität minimal (maximal) wird?
4. Unter welcher Bedingung können sich die beiden Wellen exakt aufheben?

1.3 Beugung am Einfachspalt

Wir betrachten einen Spalt der Breite d auf den eine ebene Lichtwelle mit der Wellenlänge λ eintrifft. Wir zerlegen den entsprechend breiten Lichtstrahl in eine gerade Anzahl von $N = 2n$ Bündeln gleicher Dicke. Weiterhin bezeichnen wir den Winkel zwischen den gebeugten Lichtstrahlen und der Einfallsachse mit α.



1. Wie lautet der Gangunterschied Δ zwischen zwei bencharbarten Bündeln, die unter dem Winkel α gebeugt werden?

2. Wie lautet die Bedingung für Δ für Intensitätsminima, d.h. dass sich bencharbarte Bündel exakt auslöschen? Unter welchen Winkeln treten damit Beugungsminima auf?

3. Unter welchen Winkeln erscheinen die Beugungsmaxima?

4. Was muss für die Wellenlänge λ und die Spaltbreite d gelten damit die Beugungsmuster beobachtet werden können?

Bislang haben wir nur die Lage der Intensitätsminima und -maxima bestimmt. Wir möchten nun deren relative Intensität betrachten. Hierfür gehen wir davon aus, dass nach dem Huygenschen Prinzip von jedem Spaltelement d/N eine Elementarwelle mit der Amplitude A ausgeht. Der Gangunterschied benachbarter Wellen wird wieder als Δ bezeichnet. Eine beliebige Elementarwelle Ψ_j $(j = 0, \ldots, N-1)$ hat damit die Form

$$\Psi_j = Ae^{\mathrm{i}(k(r+j\Delta)-\omega t)} \tag{6}$$

5. Um die Gesamtintensität zu erhalten, müssen zunächst alle Elementarwellen Ψ_j aufaddiert werden. Schreiben Sie $\Psi = \sum_j \Psi_j$ als geometrische Reihe und verwenden Sie

$$1 + e^{\mathrm{i}x} + e^{2\mathrm{i}x} + \cdots + e^{(N-1)\mathrm{i}x} = \frac{e^{iNx}-1}{e^{ix}-1} \tag{7}$$

6. Zeigen Sie, dass

$$\frac{e^{iN\Delta}-1}{e^{i\Delta}-1} = e^{\mathrm{i}(N-1)\Delta/2}\frac{\sin N\Delta/2}{\sin \Delta/2} \tag{8}$$

   gilt.

7. Drücken Sie Δ durch d, N und α aus und betrachten Sie Ψ im Grenzfall $N \to \infty$.

8. Zeichnen Sie das Verhalten der Intensität $I = |\Psi|^2$ als Funktion von $\sin\alpha$.