Übung 10

Ausgabe: 24.06.2014, Abgabe: 01.07.2014, Besprechung: 03./04.07.2014

10.1 Spinmatrizen

Der Observablen Elektronenspin ist der Operator

$$\hat{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \qquad \vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \tag{1}$$

zugeordnet, wobei die $\sigma_{x,y,z}$ Pauli Matrizen sind:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Als vollständige, Orthonormalbasis zur Darstellung der Operatoren $\sigma_{x,y,z}$ werden die Eigenzustände der Observablen σ_z verwendet.

1. Zeigen Sie folgende Relationen für die Spinmatrizen:

$$\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x = 0\,, \qquad \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \mathbf{1}\,, \qquad \sigma_x\sigma_y = i\sigma_z \tag{3}$$

2. Berechnen Sie die Eigenzustände $|+\rangle$,$|-\rangle$ und die Eigenwerte $\lambda_\pm$ des Operators σ_z.
3. Zeigen Sie, dass σ_x und σ_y dieselben Eigenwerte besitzen wie σ_z. Gilt das auch für die Eigenzustände?
4. Berechnen Sie die Unbestimmtheitsrelationen $\Delta\sigma_i\Delta\sigma_j \geq |\langle[\sigma_i, \sigma_j]\rangle|$ für die Operatorpaare (σ_x, σ_y), (σ_x, σ_z) und (σ_y, σ_z).

10.2 Larmor Präzession

Ein Elektron im Magnetfeld $\mathbf{B}$ besitze nur einen Spinfreiheitsgrad und werde somit durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = 2\frac{\mu_B}{\hbar}\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{B} \tag{4}$$

beschrieben, wobei das "Bohr'sche Magneton" μ_B die Größe des magnetischen Dipolmomentes des Elektrons festlegt. Wählen Sie als z-Richtung die des Magnetfeldes $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z B$ =konst. Die Larmor Frequenz sei definiert als $\omega_L = 2\frac{\mu_B}{\hbar}$.

1. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung für $\hat{\mathbf{S}}$ im Heisenberg–Bild die Form hat

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{S}} = -2\frac{\omega_L}{B}(\hat{\mathbf{S}} \times \mathbf{B})(t)\,. \tag{5}$$

2. Das Ehrenfest–Theorem besagt, dass die zeitliche Entwicklung des Erwartungswertes eines nicht explizit zeitabhängigen Operators $\hat{q}$ gegeben ist durch $\frac{d\langle q\rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H}, \hat{q}]\rangle$, s. Gl.(8.2) aus der Vorlesung. Leiten Sie daraus und aus Gl. (5) die Bewegungsgleichungen für $\langle\hat{S}_x\rangle$, $\langle\hat{S}_y\rangle$ und $\langle\hat{S}_z\rangle$ ab und zeigen Sie

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle\hat{S}_{x,y}\rangle + (2\omega_L)^2\langle\hat{S}_{x,y}\rangle = 0\,. \tag{6}$$

3. Berechnen Sie die Zeitabhängigkeiten der Erwartungswerte $\langle\hat{S}_x\rangle$, $\langle\hat{S}_y\rangle$ und $\langle\hat{S}_z\rangle$.

10.3 Zwei Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen

$\hat{\mathbf{S}}_1$ und $\hat{\mathbf{S}}_2$ seien die Spinoperatoren zweier Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen, etwa der beiden Elektronen im He-Atom.

1. Finden Sie die gemeinsamen Eigenzustände $|S_1 S_2; S m_s\rangle$ des Gesamtspinoperators $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}}_1 + \hat{\mathbf{S}}_2$, seiner z-Komponente $\hat{S}_z$ sowie $\hat{S}_1^2$ und $\hat{S}_2^2$.

2. Zeigen Sie, dass diese Zustände auch Eigenzustände des Operators $\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2$ sind. Berechnen Sie die Eigenwerte.

3. Zeigen Sie, dass der Operator
$$\hat{P} = \frac{3}{4} + \frac{1}{\hbar^2}\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2 \tag{7}$$
im Raum der Spinzustände ein Projektionsoperator ist. Auf welchen Unterraum projeziert $\hat{P}$?

10.4 Gesamtdrehimpuls des Elektrons

Berechnen Sie für den Gesamtdrehimpuls des Elektrons,

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}} \qquad S = \frac{1}{2}, \;\; l \geqslant 1 \tag{8}$$

die gemeinsamen Eigenzustände $|l\frac{1}{2}; j m_j\rangle \equiv |j m_j\rangle$ der Operatoren $\hat{J}^2$, $\hat{J}_z$, $\hat{L}^2$, $\hat{S}^2$ als Linearkombinationen der Eigenzustände $|l\frac{1}{2}; m_l m_s\rangle \equiv |m_l m_s\rangle$ der Operatoren $\hat{L}^2$, $\hat{L}_z$, $\hat{S}^2$, $\hat{S}_z$. Führen Sie dazu die folgenden Schritte aus:

1. Zeigen Sie, dass für die Quantenzahl j nur die Werte $l + \frac{1}{2}$ und $l - \frac{1}{2}$ möglich sind.

2. Verifizieren Sie für die Eigenzustände die folgenden Ausdrücke:
$$|l \pm \frac{1}{2}, m_j\rangle = \sqrt{\frac{l \pm m_j + \frac{1}{2}}{2l+1}}|m_j - \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \pm \sqrt{\frac{l \mp m_j + \frac{1}{2}}{2l+1}}|m_j + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle. \tag{9}$$