physik421 - Übung 7

Lino Lemmer — l2@uni-bonn.de

Frederike Schrödel

Simon Schlepphorst — s2@uni-bonn.de

3. Juni 2014

7.1 Verschränkte Wellenfunktion

7.1.1

$$
\begin{aligned}
\psi &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{1,\mathrm{L}}\psi_{2,\mathrm{L}} - \psi_{1,\mathrm{R}}\psi_{2,\mathrm{R}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\left(\psi_{1,x} - \mathrm{i}\psi_{1,y}\right)\left(\psi_{2,x} + \mathrm{i}\psi_{2,y}\right)}{2} - \frac{\left(\psi_{1,x} + \mathrm{i}\psi_{1,y}\right)\left(\psi_{2,x} - \mathrm{i}\psi_{2,y}\right)}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{8}}\left(\psi_{1,x}\psi_{2_x} + \mathrm{i}\psi_{1,x}\psi_{2,y} - \mathrm{i}\psi_{2,x}\psi_{1,y} + \psi_{1,y}\psi_{2,y} - \psi_{1,x}\psi_{2,x} + \mathrm{i}\psi_{1,x}\psi_{2,y} - \mathrm{i}\psi_{1,y}\psi_{2,x} - \psi_{1,y}\psi_{2,y}\right) \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\left(\psi_{1,x}\psi_{2,y} - \psi_{1,y}\psi_{2,x}\right)
\end{aligned}
$$

7.1.2

Ergibt die Messung für Photon 1 eine lineare Polarisation in x-Richtung können wir

(i) aus der Darstellung mit linearer Basis sagen, dass Photon 2 in y-Richtung polarisiert ist.

(ii) aus der Darstellung in zirkularen Basis nichts heraus finden.

7.1.3

Nun ergibt eine Messung eine lineare Polarisation in x-Richtung für Photon 1 und eine linkshändig zirkulare Polarisation für Photon 2.

(i) Wird die Messung an Photon 1 zuerst durchgeführt, kollabiert die Wellenfunktion zu

$$\psi_I = \psi_{1,x}\psi_{2,y}\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$$

(ii) Wird die Messung an Photon 2 zuerst durchgeführt, kollabiert die Wellenfunktion zu

$$\psi_{II} = \psi_{1,\mathrm{L}}\psi_{2,\mathrm{L}}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

7.1.4

(i) In linearer Basis lassen sich die beiden Wellenfunktionen aus der letzten Teilaufgabe als

$$\psi_I = \psi_{1,x}\psi_{2,y}$$ ✓

ψ wenn photon 1 zuerst gemessen:
$\psi = \frac{i}{\sqrt{2}} (\psi_{2L}\psi_{2L}^{+})(\psi_{1x}\psi_{2y}) = \ldots$ ein. ...
$= \ldots$ zirk

bzw. als

ψ wenn photon 2 zuerst:
$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{1x}\psi_{1x}^{+})(\psi_{1L}\psi$
$= \ldots$ ein. ...
$= \ldots$ zirk. ...

$$\begin{aligned}\psi_{II} &= \frac{\left(\psi_{1,x} - \mathrm{i}\psi_{1,y}\right)\left(\psi_{2,x} + \mathrm{i}\psi_{2,y}\right)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\psi_{1,x}\psi_{2_x} + \mathrm{i}\psi_{1,x}\psi_{2,y} - \mathrm{i}\psi_{2,x}\psi_{1,y} + \psi_{1,y}\psi_{2,y}\right)\end{aligned}$$

ψ?

ausdrücken.

(ii) In zirkularer Basis lassen sich die beiden Wellenfunktionen als

$$\begin{aligned}\psi_I &= \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\psi_{1,\mathrm{R}} - \psi_{1,\mathrm{L}}\right)\left(\psi_{2,\mathrm{R}} - \psi_{2,\mathrm{L}}\right) \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\psi_{1,\mathrm{R}}\psi_{2,\mathrm{R}} - \psi_{1,\mathrm{R}}\psi_{2,\mathrm{L}} - \psi_{1,\mathrm{L}}\psi_{2,\mathrm{R}} + \psi_{1,\mathrm{L}}\psi_{2,\mathrm{L}}\right)\end{aligned}$$

ψ?

bzw. als

$$\psi_{II} = \psi_{1,\mathrm{L}}\psi_{2,\mathrm{L}}$$

darstellen.

(iii) Als Mischbasis wähle ich für ψ_1 die lineare und für ψ_2 die zirkulare Basis. So erhalte ich für die beiden Wellenfunktionen nach der Messung

$$\psi_I = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\psi_{1,x}\left(\psi_{2,\mathrm{R}} - \psi_{2,\mathrm{L}}\right)$$

$\psi = \frac{1}{2}\psi_{1x}\psi_{2L}$

und

$$\psi_{II} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{1,x} - \mathrm{i}\psi_{1,y}\right)\psi_{2,\mathrm{L}}.$$

Setzt man nun in ψ_I die Transformation von $\psi_{2,\mathrm{R}}$ ein erhält man

$$\begin{aligned}\psi_I &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\psi_{1,x}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{2,x} - \mathrm{i}\psi_{2,y}\right) - \psi_{2,\mathrm{L}}\right) \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2}\psi_{1,x}\psi_{2,x} + \frac{1}{2}\psi_{1,x}\psi_{2,y} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\psi_{1,x}\psi_{2,\mathrm{L}} \\ &\stackrel{?}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{1,x} - \mathrm{i}\psi_{1,y}\right)\psi_{2,\mathrm{L}} \\ &= \psi_{II}\end{aligned}$$

?

7.2 Hamilton-Operator für Teilchen in externen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ Feldern

7.2.1

Es ist die Lagrange-Funktion für ein geladenes Teilchen in externen elektromagnetischen Feldern gegeben:

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{\vec{x}})^2 - q\left(V - \dot{\vec{x}}\vec{A}\right)$$

Um den kanonisch konjugierten Impuls zu bestimmen nutze ich:

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m\dot{\vec{x}} + q\vec{A} \quad (\checkmark)$$

7.2.2

Die dazu gehörige Hamilton-Funktion lautet:

$$\begin{aligned}
H &= \left\langle \dot{\vec{q}}, \vec{P} \right\rangle - L \quad \checkmark \\
&= \dot{\vec{x}}(m\dot{\vec{x}} + qA) - \frac{1}{2} m(\dot{\vec{x}})^2 + q(V - \dot{\vec{x}}A) \\
&= m\dot{\vec{x}}^2 \cancel{+ q\vec{A}\dot{x}} - \frac{1}{2} m\dot{\vec{x}}^2 + qV - \cancel{q\dot{x}A} \\
&= \frac{1}{2} m\dot{\vec{x}}^2 + qV \\
&= \frac{1}{2m}(m\dot{\vec{x}})^2 + qV \\
&= \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + qV \quad (\checkmark)
\end{aligned}$$

7.2.3

Es soll gezeigt werden, dass die Hamilton-Funktion die Gesamt-Energie des Systems beschreibt.Die Gesamt-Energie erhalten wir durch:

$$E_{\text{ges}} = T + V \quad \checkmark$$

zeigen! (rechnen ...)

Diese Formel entspricht in den meisten Fällen bereits der Hamilton-Funktion. In diesen Fall sollte man berücksichtigen, dass die kinetische Energie gegeben ist durch $T = \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^2$, die potentielle Energie lautet allerdings eigentlich nur $V = qV$, da das Magnetfeld nur eine Verschiebung verursacht.

$T = \frac{1}{2}\dot{x}^2$, $\dot{x} = \hat{p} - q\hat{A}$

7.3 Wellenfunktion mit minimaler Unschärfe

Betrachtet wird die in der Vorlesung hergeleitete Wellenfunktion mit minimaler Unschärfe

$$\psi_m(x) = \frac{1}{\left(2\pi\left\langle(\Delta x)^2\right\rangle\right)^{\frac{1}{4}}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{4\left\langle(\Delta x)^2\right\rangle}} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}x\langle p_x\rangle}{\hbar}}$$

7.3.1 Normierung

Es soll gezeigt werden, dass obige Wellenfunktion normiert ist. Definiere $a \equiv \left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \left|\psi_m(x)\right|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \psi_m^*(x)\,\psi_m(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \frac{1}{(2\pi a)^{\frac{1}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2a}} \\
&= \frac{1}{(2\pi a)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2a}(x-\langle x\rangle)^2}
\end{aligned}$$

Nach dem Hinweis von Aufgabenblatt 3, Aufgabe 3 folgt

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi a)^{\frac{1}{2}}} \cdot (2\pi a)^{\frac{1}{2}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

ψ_m ist also normiert.

Anm.: Die folgenden drei Aufgabenstellungen 3.2 - 3.4 sind leicht irritierend, eine Verwendung von x' statt x wäre evtl. sinnvoller gewesen.

7.3.2 Erwartungswert von x

Nun soll gezeigt werden, dass der Erwartungswert von x gleich $\langle x\rangle$ in ψ_m ist:

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \psi_m^*(x)\, x \psi_m(x) \\
&= \frac{1}{(2\pi a)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; x \mathrm{e}^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2a}}
\end{aligned}$$

Substituiere $z = x - \langle x\rangle \iff x = z + \langle x\rangle \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}z$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \; \left(z + \langle x\rangle\right) \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2a}} \\
&= \underbrace{\frac{1}{(2\pi a)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \; z \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2a}}}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{(2\pi a)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \; \langle x\rangle \, \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2a}}}_{=\langle x\rangle} \\
&= \langle x\rangle
\end{aligned}$$

Damit ist die Annahme gezeigt.

7.3.3 Mittlere quadratische Abweichung von x von seinem Mittelwert

Nun soll gezeigt werden, dass $\left\langle(\Delta x)^2\right\rangle = \left\langle x^2\right\rangle - \langle x\rangle^2$ gleich $\left\langle(\Delta x)^2\right\rangle$ in ψ_m ist:
Dazu berechne ich erst mal $\left\langle x^2\right\rangle$:

$$\begin{aligned}\left\langle x^2\right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \psi_m^*(x)\, x^2 \psi_m(x)\\ &= \frac{1}{(2\pi a)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ x^2 \mathrm{e}^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2a}}\end{aligned}$$

Substituiere wieder $z = x - \langle x\rangle \iff x = z + \langle x\rangle \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}z$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{(2\pi a)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z\ \left(z + \langle x\rangle\right)^2 \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2a}}\\ &= \frac{1}{(2\pi a)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z\ z^2 \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2a}} + \underbrace{\frac{1}{(2\pi a)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z\ 2z\,\langle x\rangle\, \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2a}}}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{(2\pi a)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z\ \langle x\rangle^2 \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2a}}}_{=\langle x\rangle^2}\end{aligned}$$

Mit partieller Integration von $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z\ z \cdot z\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2a}}$ folgt

$$= \underbrace{\left[az\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2a}}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{(2\pi a)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z\ a\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2a}}}_{=a} + \langle x\rangle^2$$

Mit der oben stehenden Definition von a folgt

$$= \left\langle(\Delta x)^2\right\rangle + \langle x\rangle^2$$

Und in der Tat gilt

$$\left\langle(\Delta x)^2\right\rangle = \left\langle x^2\right\rangle - \langle x\rangle^2 = \left\langle(\Delta x)^2\right\rangle + \langle x\rangle^2 - \langle x\rangle^2 = \left\langle(\Delta x)^2\right\rangle$$

Ich denke an dieser Stelle wird die Verwirrung auch recht klar.

naja

7.3.4 Erwartungswert von p_x

Nun soll gezeigt werden, dass der Erwartungswert von p_x gleich $\langle p_x \rangle$ in ψ_m ist:

$$
\begin{aligned}
\langle p_x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \psi_m^*(x)\, p_x \psi_m(x) \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \psi_m^*(x)\, \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi_m(x) \\
&= -\frac{\mathrm{i}\hbar}{(2\pi a)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{4a}} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}x\langle p_x\rangle}{\hbar}} \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{4a}} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}x\langle p_x\rangle}{\hbar}} \\
&= -\frac{\mathrm{i}\hbar}{(2\pi a)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{4a}} \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{4a}} - \frac{\mathrm{i}\hbar}{(2\pi a)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2a}} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}x\langle p_x\rangle}{\hbar}} \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}x\langle p_x\rangle}{\hbar}} \\
&= -\frac{\mathrm{i}\hbar}{(2\pi a)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \frac{1}{2a}(x-\langle x\rangle)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2a}} \underbrace{- \frac{\mathrm{i}\hbar}{(2\pi a)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \frac{\mathrm{i}\langle p_x\rangle}{\hbar} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2a}}}_{=-\langle p_x\rangle}
\end{aligned}
$$

Substituiere mal wieder $z = x - \langle x \rangle \iff x = z + \langle x \rangle \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}z$

$$
\begin{aligned}
&= \underbrace{-\frac{\mathrm{i}\hbar}{(2\pi a)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z\ \frac{z}{a}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2a}}}_{=0} + \langle p_x \rangle \\
&= \langle p_x \rangle
\end{aligned}
$$

7.3.5 Mittlere quadratische Abweichung von p_x und Unschärferelation

Nun soll die mittlere quadratische Abweichung von p_x berechnet werden. Dazu wieder zuerst $\langle p_x^2 \rangle$:

$$
\begin{aligned}
\langle p_x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \psi_m^*(x) p_x^2 \psi_m(x) \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \psi_m^*(x) \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_m(x) \\
&= -\frac{\hbar^2}{(2\pi a)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{4a}} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}x\langle p_x\rangle}{\hbar}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{4a}} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}x\langle p_x\rangle}{\hbar}} \\
&= -\frac{\hbar^2}{(2\pi a)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{4a}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{4a}} - \frac{\hbar^2}{(2\pi a)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2a}} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}x\langle p_x\rangle}{\hbar}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}x\langle p_x\rangle}{\hbar}} \\
&= -\frac{\hbar^2}{(2\pi a)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{4a}} \frac{-1}{2a} \frac{\partial}{\partial x} (x - \langle x \rangle) \mathrm{e}^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{4a}} + \underbrace{\frac{\hbar^2}{(2\pi a)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \frac{\langle p_x\rangle^2}{\hbar^2} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2a}}}_{=\langle p_x\rangle^2} \\
&= \langle p_x\rangle^2 - \frac{\hbar^2}{(2\pi a)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{4a}} \frac{1}{4a^2} \Big(-2a + \big(x^2 - x\langle x\rangle\big) - \big(x\langle x\rangle - \langle x\rangle^2\big) \Big) \mathrm{e}^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{4a}} \\
&= \langle p_x\rangle^2 - \frac{\hbar^2}{4a^2 (2\pi a)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \Big(-2a + x^2 - 2x\langle x\rangle + \langle x\rangle^2 \Big) \mathrm{e}^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2a}} \\
&= \langle p_x\rangle^2 - \frac{\hbar^2}{4a^2 (2\pi a)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \Big(-2a + \big(x - \langle x\rangle\big)^2 \Big) \mathrm{e}^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2a}}
\end{aligned}
$$

Substituiere mal wieder $z = x - \langle x \rangle \iff x = z + \langle x \rangle \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}z$

$$
\begin{aligned}
&= \langle p_x\rangle^2 - \frac{\hbar^2}{4a^2 (2\pi a)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z\, \big(-2a + z^2 \big) \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2a}} \\
&= \langle p_x\rangle^2 - \frac{\hbar^2}{4a^2} \left(-2a \underbrace{\frac{1}{(2\pi a)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z\, \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2a}}}_{=1} + \underbrace{\frac{1}{(2\pi a)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z\, z^2 \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2a}}}_{=a} \right) \\
&== \langle p_x\rangle^2 + \frac{\hbar^2}{4a}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt mit der Definition von a:

$$
\left\langle (\Delta p_x)^2 \right\rangle = \langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{4\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle} =
$$

Damit ist

$$
\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle \cdot \left\langle (\Delta p_x)^2 \right\rangle = \frac{\hbar^2}{4}
$$

Nach der Aufgabenstellung sollte $\frac{\hbar^4}{4}$ herauskommen, aber dann würde sich nicht die Unschärferelation ergeben, daher bin ich mir sicher, dass mein Ergebnis richtig ist.

↑ ja, Tippfehler auf Zettel

Bearbeitet: 1, 2 (½), 3