physik421 - Übung 3

Lino Lemmer
l2@uni-bonn.de

Frederike Schrödel

Simon Schlepphorst
s2@uni-bonn.de

6. Mai 2014

3.1 Fouriertransformation

3.1.1 Abbildung von Ableitungsoperator auf Multiplikation

$$\mathscr{F}\{\phi\}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^n x \phi(\vec{x}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\vec{x}}$$

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\partial}{\partial x_\alpha} f(x)\right\}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^n x \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_\alpha} f(\vec{x})}_{u'} \underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\vec{x}}}_{v}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \left(\left[f(\vec{x}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\vec{x}} \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^n x f(\vec{x}) (\mathrm{i}k_\alpha) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\vec{x}} \right)$$

Damit $f(\vec{x})$ quadratintegrabel ist, muss $f(\pm\infty) \to 0$ gehen

$$\Longrightarrow \underbrace{\mathrm{i}k}_{\frac{\partial}{\partial x_\alpha}} \mathscr{F}\{f(\vec{x})\}(\vec{k})$$

$$\Longrightarrow \mathscr{F}\left\{\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right\}(\vec{k}) = \mathrm{i}k_\alpha$$

Herleitung für $\mathscr{F}\left\{\frac{\partial}{\partial k_\alpha}\right\}(\vec{x})$ funktioniert analog. Nur mit $\ldots \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\vec{k}\vec{x}}$

$$\Longrightarrow \mathscr{F}\left\{\frac{\partial}{\partial k_\alpha}\right\}(\vec{x}) = -\mathrm{i}k_\alpha$$

3.1.2

$$\mathscr{F}\{\phi\}(k) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}_{a} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \phi(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \left(\phi_e(t) + \phi_o(t)\right) \cos(\omega t) - \mathrm{i}a \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \left(\phi_e(t) + \phi_o(t)\right) \sin(\omega t)$$

mit $\phi(t) = \phi_e(t) + \phi_o(t)$ und $e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$

Für Integrale über gerade bzw. ungerade Funktionen gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(x)}_{\text{odd}} \underbrace{g(x)}_{\text{even}} = 0 \quad \text{mit} \begin{cases} \cos(x) : \text{even} & \cos(x) = \cos(-x) \\ \sin(x) : \text{odd} & \sin(x) = -\sin(-x) \end{cases}$$

$$\implies \underbrace{a \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \phi_e(t) \cos(\omega t)}_{\mathrm{Re}(\phi(t))} \underbrace{- ia \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \phi_o(t) \sin(\omega t)}_{-i\,\mathrm{Im}(\phi(t))}$$

3.1.3 Abbildung von Produkt auf Faltung

Für eine Faltung gilt:

$$(\phi_1 * \phi_2)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d^n y\, \phi_1(x-y)\phi_2(y)$$

Und für $n = 1$ ergibt sich somit:

$$\sqrt{2\pi}\mathscr{F}\{\phi_1 \cdot \phi_2\}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi_1(x)\phi_2(x) e^{-ikx} \tag{1}$$

mehr Zwischenschritte angeben!

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \phi_1(x-y)\phi_2(y) e^{-ik(x-y)} e^{-iky} \tag{2}$$

$$= \left(\mathscr{F}\{\phi_1\} * \mathscr{F}\{\phi_1\}\right)(k) \tag{3}$$

3.1.4 Vertauschbarkeit von Ableitung und Faltung

Da die Ableitung unabhängig von den Variablen des Integrals ist, lässt sie sich in das Integral ziehen:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left((\phi_1 * \phi_2)(x)\right) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\int_{-\infty}^{\infty} d^n y\, \phi_1(x-y)\phi_2(y)\right) \tag{4}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d^n y \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\phi_1(x-y)\right)\phi_2(y) \tag{5}$$

$$= (\partial_\alpha \phi_1 * \phi_2)(x) \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[(\phi_1 * \phi_2)(\vec{x})\right] = (\phi_1 * [\partial_\alpha \phi_2])(\vec{x})$$

3.2 Gaußintegrale

Für diese Aufgabe ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte von

$$p(x) = Ce^{-\frac{1}{2}ax^2 = bx}$$

wobei x eine Zufallsgröße ist und gilt: $a, b \in \mathrm{Re}$ und $a > 0$.

3.2.1 Identität

Es soll gezeigt werden, dass gilt:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$$

Den Tipp nutzend berechne ich zunächst I^2 und schreib dies dann mit $\vec{x} = r(\cos\phi, \sin\phi)$ und $\mathrm{d}^2 x = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$ in Polarkoordinaten um.

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} \\ &= \int_{\mathrm{Re}^2} \mathrm{d}^2 x \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\infty} \mathrm{d}r r \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}} \end{aligned}$$

an dieser Stelle nutze ich folgenden Trick:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}}{\mathrm{d}r} &= \frac{-r}{2}\mathrm{e}^{\frac{-r^2}{2}} \cdot 2 \; ? \\ \Longrightarrow \int -\frac{r}{2}\mathrm{e}^{\frac{r^2}{2}} &= \mathrm{e}^{\frac{r^2}{2}} \\ \Longrightarrow -2\int -\frac{r}{2}\mathrm{e}^{\frac{r^2}{2}} &= -2\mathrm{e}^{\frac{r^2}{2}} \end{aligned}$$

Wenn ich damit weiter rechne erhalte ich als gesammt Lösung des Integrals:

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\infty} \mathrm{d}r r \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}} \\ &= -2\pi \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_{r=0}^{\infty} \\ &= 2\pi \\ I &= \sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

Somit haben wir es gezeigt.

3.2.2 Normierung

Nach einer Normierung muss das Integral der Wahrscheinlcihkeitsdichte über den Raum eins ergeben.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} P(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x C \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}ax^2+bx} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Zunächst formen wir den Exponenten um und substituieren.

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}a^2 + bx &= -\frac{1}{2}a(x^2 - 2\frac{b}{a}x) \\
&= -\frac{1}{2}a(x^2 - 2\frac{b}{a}x + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}) \\
&= -\frac{1}{2}a[(x - \frac{b}{a})^2 - \frac{b^2}{a^2}]
\end{aligned}
$$

Mit $\xi := x - \frac{b}{a}$ erhalten wir $e^{1\frac{1}{2}a(\xi^2 - \frac{b^2}{a^2})}$. Nun kann man über die Potenzgesetze die e-Funktion auseinander ziehen und den konstanten Term mit dem C vor das Integral Ziehen.

$$
\begin{aligned}
1 &:= Ce^{\frac{b^2}{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi e^{-\frac{1}{2}a\xi^2} \quad | \text{ mit } \psi^2 = \frac{1}{2}a\xi^2 \implies \psi = \sqrt{\frac{a}{2}}\xi \implies \mathrm{d}\xi = \sqrt{\frac{2}{a}}\mathrm{d}\psi \\
&= Ce^{\frac{b^2}{2a}} \sqrt{\frac{2}{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\psi e^{-\psi^2} \\
&= Ce^{\frac{b^2}{2a}} \sqrt{\frac{2}{a}} \sqrt{\pi} \\
\implies C &= \frac{1}{e^{\frac{b^2}{2a}} \sqrt{\frac{2}{a}} \sqrt{\pi}}
\end{aligned}
$$

3.2.3 Mittelwert

Da es sich offensichtlich um eine Gaußverteilung handelt ist der Mittelwert gegeben durch den Mittelpunkt der Gaußverteilung.

↳ der ist wo?

3.3 Freies Wellenpaket

Gegeben ist ein eindimensionales Wellenpacket $\psi(x, 0)$ durch seine Fouriertransformierte

$$
\phi(k, 0) = Ae^{(k-k_0)^2 d^2}, \qquad \text{mit } k_0, A \text{ und } d > 0
$$

und die, wiederum durch Fouriertransformation, rücktransformierte Wellengleichung

$$
\psi(x, t) = \frac{A}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-(k-k_0)^2 d^2 - i\frac{\hbar^2 k^2}{2m}t + ikx}
$$

3.3.1 Impulsverteilung

Nun soll zuerst das im Impulsraum gegebene Wellenpacket $\phi(k, 0)$ skizziert werden. Dies habe ich, unter Verwendung von GNU-Plot, für verschiedene k_0, d und A, in Abbildung 1 realisiert. Diese zeigt, dass A die Position des Maximums, d die Breite und k_0 die Position des Wellenpackets festlegen. Dabei wurde natürlich vernachlässigt, dass A noch nicht genormt worden ist.

Schön!

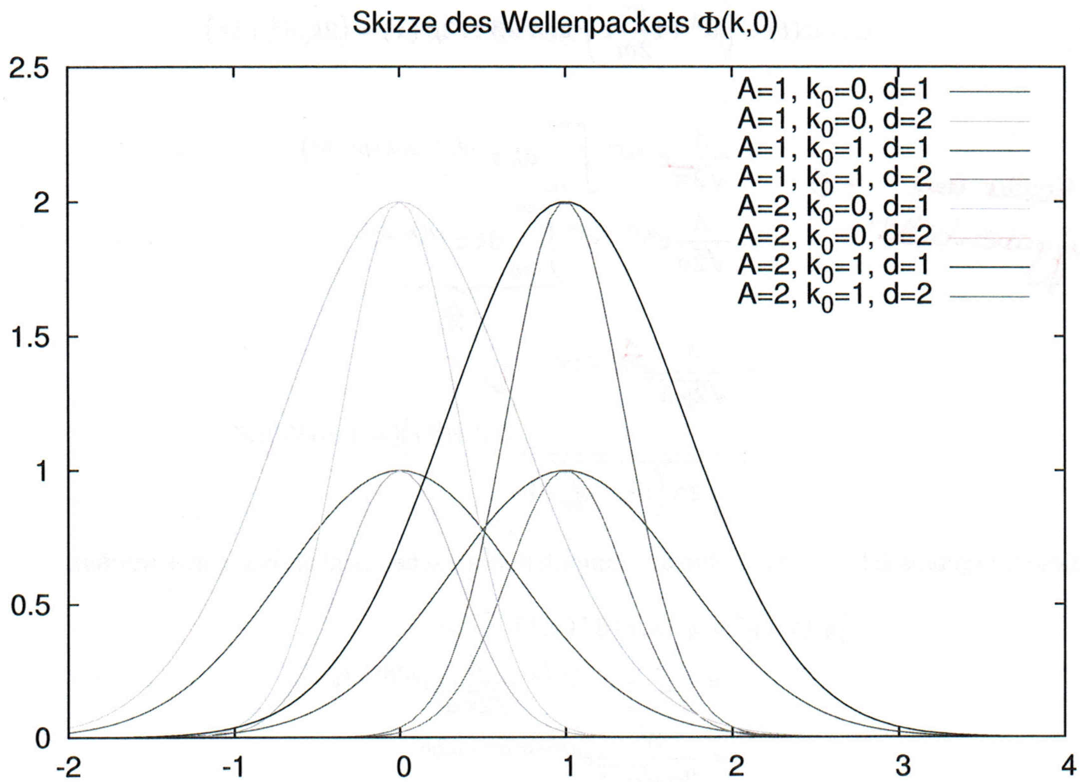

Abbildung 1: Wellenpaket $\phi\,(k,0)$ im Impulsraum für verschiedene k_0, d und A

3.3.2 Wahrscheinlichkeitsdichte

Ich führe nun obiges Integral aus:

$$
\begin{aligned}
\psi\,(x,t) &= \frac{A}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{-(k-k_0)^2 d^2 - \mathrm{i}\frac{\hbar^2 k^2}{2m} t + \mathrm{i}kx} \\
&= \frac{A}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{-k^2 d^2 + 2kk_0 d^2 - k_0^2 d^2 - \mathrm{i}\frac{\hbar^2 k^2}{2m} t + \mathrm{i}kx} \\
&= \frac{A}{\sqrt{2}\pi} \mathrm{e}^{-k_0^2 d^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{-k^2\left(d^2 + \mathrm{i}\frac{\hbar^2}{2m} t\right) + k\left(2k_0 d^2 + \mathrm{i}x\right)}
\end{aligned}
$$

setze

$$\alpha \equiv \alpha(t) = \left(d^2 + \mathrm{i}\frac{\hbar^2}{2m}t\right) \text{ und } 2\beta \equiv 2\beta(x) = \left(2k_0 d^2 + \mathrm{i}x\right)$$

Fehler auf Aufgabenblatt →

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{\sqrt{2}\pi}\mathrm{e}^{-k_0^2 d^2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{-\alpha\left(k^2 - 2\beta k + \beta^2 - \beta^2\right)} \\
&= \frac{A}{\sqrt{2}\pi}\mathrm{e}^{\alpha\beta^2 - k_0^2 d^2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{-\alpha(k-\beta)^2}}_{=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}} \\
&= \frac{A}{\sqrt{2\cancel{\pi}\alpha}}\mathrm{e}^{\overset{1}{\cancel{\alpha}}\beta^2 - k_0^2 d^2} \\
&= \frac{A}{\sqrt{2\pi\left(d^2 + \mathrm{i}\frac{\hbar^2}{2m}t\right)}}\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\left(d^2 + \mathrm{i}\frac{\hbar^2}{2m}t\right)\left(2k_0 d^2 + \mathrm{i}x\right)^2 - k_0^2 d^2}
\end{aligned}$$

Mit diesem Ergebnis soll nun die Dichte der Aufenthaltswahrscheinlichkeit berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\left|\psi(x,t)\right|^2 &= \psi(x,t)\,\psi^*(x,t) \\
&= \frac{A}{\sqrt{2\pi\alpha}}\mathrm{e}^{\alpha\beta^2 - k_0^2 d^2}\frac{A}{\sqrt{2\pi\alpha^*}}\mathrm{e}^{\alpha^*\beta^{*2} - k_0^2 d^2} \\
&= \frac{A^2}{2\pi\sqrt{\alpha\alpha^*}}\mathrm{e}^{\alpha\beta^2 + \alpha^*\beta^{*2} - 2k_0^2 d^2} \\
&= \frac{A^2}{2\pi|\alpha|}\mathrm{e}^{2\,\mathrm{Re}\left(\alpha\beta^2\right) - 2k_0^2 d^2} \\
&= \frac{A^2}{2\pi\sqrt{d^4 + \frac{\hbar^4}{4m^2}t^2}}\mathrm{e}^{-\frac{d^2}{4}x^2 + k_0^2 d^6 - \frac{\hbar^2 k_0 d^2}{4m}xt - \frac{k_0^2 d^2}{2}}
\end{aligned}$$

kann man noch einfacher schreiben

3.3.3 Geschwindigkeit

3.3.4 Änderung der Ortsschwankung mit der Zeit

Nun soll die Schwankung des Ortes $\left\langle x^2 \right\rangle$ bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
\left\langle x^2 \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \psi(x,t)\, x^2 \psi^*(x,t) \\
&= \frac{A^2}{2\pi^2|\alpha|}\mathrm{e}^{-2k_0^2 d^2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x^2 \mathrm{e}^{2\,\mathrm{Re}\left(\alpha\beta^2\right)} \\
&= \frac{A^2}{2\pi^2|\alpha|}\mathrm{e}^{-2k_0^2 d^2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x^2 \mathrm{e}^{k_0^2 d^6 - \frac{d^2}{4}x^2 - \frac{\hbar^2 k_0 d^2 t}{4m}x} \\
&= \frac{A^2}{2\pi^2|\alpha|}\mathrm{e}^{k_0^2 d^2 (d^4 - 2)}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x^2 \mathrm{e}^{-\frac{d^2}{4}\left(x^2 + \frac{\hbar^2 k_0 t}{m}x + \frac{\hbar^4 k_0^2 t^2}{4m^2} - \frac{\hbar^4 k_0^2 t^2}{4m^2}\right)} \\
&= \frac{A^2}{2\pi^2|\alpha|}\mathrm{e}^{k_0^2 d^2 (d^4 - 2) + \frac{\hbar^4 k_0^2 d^2 t^2}{8m^2}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x^2 \mathrm{e}^{-\frac{d^2}{4}\left(x + \frac{\hbar^2 k_0 t}{2m}\right)^2}
\end{aligned}$$

Substituiere $z = x + \frac{\hbar^2 k_0 t}{2m} \iff x = z - \frac{\hbar^2 k_0 t}{2m}$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}z$ und setzte $\gamma \equiv \gamma(t) = \frac{A^2}{2\pi^2|\alpha|} \mathrm{e}^{k_0^2 d^2 (d^4-2) + \frac{\hbar^4 k_0^2 d^2 t^2}{8m^2}}$

$$
\begin{aligned}
&= \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \left(z - \frac{\hbar^2 k_0 t}{2m} \right)^2 \mathrm{e}^{-\frac{d^2}{4} z^2} \\
&= \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z\, z^2 \mathrm{e}^{-\frac{d^2}{4} z^2} - \underbrace{\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z\, z \frac{\hbar^2 k_0 t}{m} \mathrm{e}^{-\frac{d^2}{4} z^2}}_{=0} + \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z\, \frac{\hbar^4 k_0^2 t^2}{4m^2} \mathrm{e}^{-\frac{d^2}{4} z^2} \\
&= \underbrace{\gamma \left[-z \frac{2}{d^2} \mathrm{e}^{-\frac{d^2}{4} z^2} \right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z\, \frac{2}{d^2} \mathrm{e}^{-\frac{d^2}{4} z^2} + \gamma \frac{\sqrt{\pi} \hbar^4 k_0^2 t^2}{2m^2 d} \\
&= \gamma \left(\frac{4\sqrt{\pi}}{d^3} + \frac{\sqrt{\pi} \hbar^4 k_0^2 t^2}{2m^2 d} \right) \\
&= \frac{A^2}{2\pi^2 |\alpha|} \mathrm{e}^{k_0^2 d^2 (d^4-2) + \frac{\hbar^4 k_0^2 d^2 t^2}{8m^2}} \left(\frac{4\sqrt{\pi}}{d^3} + \frac{\sqrt{\pi} \hbar^4 k_0^2 t^2}{2m^2 d} \right)
\end{aligned}
$$

3.3.5 Normierungskonstante

Nun soll zuletzt noch A mit der Normierungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, |\psi(x,t)|^2 \stackrel{!}{=} 1$$

bestimmt werden. Glücklicherweise lässt sich bei dieser Rechung ein Großteil aus Aufgabenteil 3.4 übernehmen:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, |\psi(x,t)|^2 &= \frac{A^2}{2\pi^2 |\alpha|} \mathrm{e}^{k_0^2 d^2 (d^4-2) + \frac{\hbar^4 k_0^2 d^2 t^2}{8m^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \mathrm{e}^{-\frac{d^2}{4} \left(x + \frac{\hbar^2 k_0 t}{2m} \right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi} A^2}{\pi^2 d |\alpha|} \mathrm{e}^{k_0^2 d^2 (d^4-2) + \frac{\hbar^4 k_0^2 d^2 t^2}{8m^2}} \\
&\stackrel{!}{=} 1
\end{aligned}
$$

Es folgt für A:

$$A = \sqrt{\frac{\pi^2 d |\alpha|}{\sqrt{2\pi}}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} k_0^2 d^2 (d^4-2) - \frac{\hbar^4 k_0^2 d^2 t^2}{16m^2}}$$ nicht ganz richtig

Mit bekanntem A lässt sich $\langle x^2 \rangle$ wie folgt ausdrücken:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\sqrt{2}}{d^2} + \frac{\hbar^4 k_0^2 t^2}{4\sqrt{2} m^2}$$

3.4 δ-Potenzial im Impulsraum

Eigenwertgleichung im Ortsraum:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) - \alpha \delta(x) \psi(x) = -E \psi(x)$$

Fouriertransformation in den Impulsraum:

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \psi(x) \mathrm{e}^{-\frac{ipx}{\hbar}}$$

$$= \ldots$$

Bearbeitet: Aufg. 1, 2, 3, 4