Übung 5

Ausgabe: 13.05.2014, Abgabe: 20.05.2014, Besprechung: 22./23.05.2014

5.1 Diskrete und kontinuierliche Eigenwerte

Gegeben sei die Wellenfunktion

$$\psi(x) = \sum_i u_i \psi_{q_i}(x) + \int dq\, u(q)\, \psi_q(x) \tag{1}$$

welche eine Überlagerung von normierten diskreten (ψ_{q_i}) und kontinuierlichen Zuständen (ψ_q) ist. Der Operator $\hat{q}$ hat folgende Eigenschaft

$$\begin{aligned} \hat{q}\psi_{q_i} &= q_i\psi_{q_i} \quad \text{für diskrete } q_i \\ \hat{q}\psi_q &= q\psi_q \quad \text{für kontinuierliche } q \end{aligned}$$

Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle \hat{q} \rangle$.

5.2 Eigenschaften von Operatoren

1. Der lineare Operator $\hat{A}$ befolge die Eigenwertgleichung

$$\hat{A}\Psi = a\Psi \tag{2}$$

   Der inverse Operator $\hat{A}^{-1}$ existiere; er ist definiert durch $\hat{A}\hat{A}^{-1}\psi = \hat{A}^{-1}\hat{A}\Psi = \Psi\ \forall\psi$, d.h. $\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = 1$. Zeigen Sie, dass $\hat{A}^{-1}$ denselben Eigenzustand besitzt, und berechnen Sie den zugehörigen Eigenwert.

2. Für einen unitären Operator $\hat{U}$ gilt

$$\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}\,. \tag{3}$$

   Hierbei ist der hermitisch konjugierte Operator $\hat{U}^\dagger$ definiert durch $\psi^*\hat{U}^\dagger = (U\psi)^*$. Definition 1 aus der Vorlesung bedeutet also, dass ein hermitescher Operator $\hat{q}$ die Beziehung $\hat{q}^\dagger = \hat{q}$ erfüllt.

   (a) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte eines unitären Operators $\hat{U}$ komplexe Zahlen vom Betrag 1 sind.

   (b) Bleibt ein hermitescher Operator $\hat{A}$ auch nach unitärer Transformation ($\hat{A} \to \hat{U}^{-1}\hat{A}\hat{U}$) hermitesch?

3. Es sei

$$\hat{F} = \hat{F}(\hat{A}, \hat{B}) \tag{4}$$

   eine operatorwertige Funktion zweier Operatoren $\hat{A}, \hat{B}$. Zeigen Sie, dass sich der transformierte Operator

$$\bar{\hat{F}} = \hat{U}\hat{F}\hat{U}^\dagger \tag{5}$$

   dadurch ergibt, dass man im Argument von $\hat{F}$ die transformierten Operatoren $\bar{\hat{A}} = \hat{U}\hat{A}\hat{U}^\dagger$, $\bar{\hat{B}} = \hat{U}\hat{B}\hat{U}^\dagger$ einsetzt:

$$\bar{\hat{F}} = \hat{F}(\bar{\hat{A}}, \bar{\hat{B}}) \tag{6}$$

   Hinweis: Es genügt die Behauptung für Summen und Produkte zu zeigen.

5.3 Basistransformation

Bezüglich einer Basis $\mathcal{A} = \{\vec{e}_i\}$ des Vektorraums V besitze der Vektor $\vec{u} \in V$ die Basisdarstellung $\vec{u}_A = \sum_i x_i\vec{e}_i \equiv \vec{x}$, wobei $\vec{x}$ der Koordinatenvektor bezüglich der Basis $\mathcal{A}$ ist. Bezüglich einer anderen, orthonormalen Basis $\mathcal{B} = \{\vec{f}_i\}$ besitzt der selbe Vektor $\vec{u} \in V$ die Basisdarstellung $\vec{u}_B = \sum_i y_i\vec{f}_i \equiv \vec{y}$ mit dem Koordinatenvektor $\vec{y}$ bzgl. $\mathcal{B}$. Da $\mathcal{B}$ eine vollständige Basis ist, lässt sich jeder Basisvektor in $\mathcal{A}$ als Linearkombination der $\{\vec{f}_j\}$ darstellen:

$$\vec{e}_i = \sum_j S_{ji}\vec{f}_j\,. \tag{7}$$

1. Drücken Sie die Koeffizienten S_{ji} iin Gl.(7) durch Skalarprodukte der Basisvektoren aus. *Hinweis:* Nutzen Sie die Orthonormalität der $\vec{f}_j$ aus!
2. Wie hängt die Transformationsmatrix $\mathbf{S}$, für die gilt
$$\vec{x} = \mathbf{S}\vec{y}\,, \tag{8}$$
mit den Koeffizienten S_{ij} zusammen?
3. Sind die Elemente der inversen Matrix $\mathbf{S}^{-1}$, definiert durch
$$\vec{y} = \mathbf{S}^{-1}\vec{x}\,, \tag{9}$$
ebenfalls gegeben durch Brüche von Skalarprodukten von Basisvektoren, wenn die $\vec{e}_i$ *nicht* orthogonal zu einander sind?

Die so berechnete Transformationsmatrix S führt zu folgender Beziehung zwischen einer Matrix M in der Basis $\mathcal{A}$, d.h. $M_A \equiv \mathbf{A}$, und derselben Matrix M in der Basis $\mathcal{B}$, d.h. $M_B \equiv \mathbf{B}$:
$$B = \mathbf{S}^{-1}A\mathbf{S}\,. \tag{10}$$
Sei V ein zweidimensionaler, reeller Vektorraum und $\mathcal{A} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ mit $\vec{e}_1 = (1,0)^T$ und $\vec{e}_2 = (0,1)^T$ eine Orthonormalbasis. Sei eine Matrix in dieser Basis gegeben durch
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

4. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ mit $\vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$ und $\vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^T$ ebenfalls eine Orthonormalbasis ist.
5. Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ und $\mathbf{S}^{-1}$ sowie die transformierte Matrix $\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}$.

5.4 Die Spur von Operatoren

Wir betrachten einen Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit einer diskreten, vollständigen, orthonormalen Basis $\{\vec{e}_i\}$. Die Spur eines Operators $\hat{A}$ kann ausgedrückt werden durch
$$\mathrm{Sp}(\hat{A}) = \sum_i \vec{e}_i^{\,T}\hat{A}_e\vec{e}_i\,, \tag{12}$$
wobei $\hat{A}_e$ die zur Basis der $\vec{e}_i$ gehörige Darstellung von $\hat{A}$ ist. $\hat{A}_e$ können Sie als Matrixoperator betrachten, die Ergebnisse gelten aber auch für allgemeinere Objekte.

1. Zeigen Sie, dass die Spur unabhängig von der Basis ist, d.h.
$$\mathrm{Sp}(\hat{A}) = \sum_i \vec{e}_i^{\,T}\hat{A}_e\vec{e}_i = \sum_i \vec{f}_i^{\,T}\hat{A}_f\vec{f}_i \tag{13}$$
gilt, wenn $\{\vec{f}_i\}$ ebenfalls eine vollständige, orthonormale Basis darstellt. *Hinweis:* Benutzen Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 5.3!
2. Zeigen Sie die zyklische Invarianz der Spur,
$$\mathrm{Sp}(\hat{A}\hat{B}) = \mathrm{Sp}(\hat{B}\hat{A}) \tag{14}$$
für zwei Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$.
3. Zeigen Sie
$$\mathrm{Sp}(\hat{A}) = \mathrm{Sp}(\hat{U}\hat{A}\hat{U}^\dagger)\,, \tag{15}$$
für alle unitären Operatoren $\hat{U}$.