Übung 3

Ausgabe: 29.04.2014, Abgabe: 06.05.2014, Besprechung: 08./09.05.2014

3.1 Fouriertransformation

Die Fouriertransformation (FT) $\mathcal{F}\{\phi\}$ einer Funktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\mathcal{F}\{\phi\}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d^n x\, \phi(\vec{x})\, e^{-i\vec{k}\vec{x}} \tag{1}$$

Zur Unterscheidung von Funktion und Fouriertransformierter schreibt man auch $\vec{k}$ statt $\vec{x}$ als Argument und lässt $\mathcal{F}$ weg, also $\mathcal{F}\{\phi\}(\vec{k}) = \phi(\vec{k})$.

1. Zeigen Sie, dass die FT einen Ableitungsoperator auf eine Multiplikation abbildet, d.h.

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right\}(\vec{k}) = ik_\alpha \qquad \text{und} \qquad \mathcal{F}\left\{\frac{\partial}{\partial k_\alpha}\right\}(\vec{x}) = -ix_\alpha \tag{2}$$

2. Zerlegen Sie die Funktion $\phi(t)$ in ihren geraden und ungeraden Anteil bezüglich der Variablen t, also $\phi(t) = \phi_e(t) + \phi_0(t)$ mit $\phi_e(t) = \phi_e(-t)$ und $\phi_0(t) = -\phi_0(-t)$. Berechnen Sie nun die FT $\phi(\omega)$ und geben Sie deren Real- und Imaginärteil an.

Die Faltung zweier Funktionen ϕ_1 und ϕ_2 ist definiert als

$$(\phi_1 * \phi_2)(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^n y\, \phi_1(\vec{x} - \vec{y})\, \phi_2(\vec{y}) \tag{3}$$

3. Zeigen Sie für $n = 1$, dass die FT ein Produkt in eine Faltung überführt:

$$\sqrt{2\pi}\mathcal{F}\{\phi_1 \cdot \phi_2\}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(x)\phi_2(x)e^{-ikx} = (\mathcal{F}\{\phi_1\} * \mathcal{F}\{\phi_2\})(k) \tag{4}$$

4. Zeigen Sie, dass eine Ableitung in einen der beiden Faktoren der Faltung gezogen werden kann,

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[(\phi_1 * \phi_2)(\vec{x})\right] \equiv \left([\partial_\alpha \phi_1] * \phi_2\right)(\vec{x}) = \left(\phi_1 * [\partial_\alpha \phi_2]\right)(\vec{x})\,, \tag{5}$$

wobei $\partial_\alpha \phi(\vec{y}) = \frac{\partial}{\partial y_\alpha}\phi(\vec{y})$.

3.2 Gaußintegrale

Es sei die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p(x) = Ce^{-\frac{1}{2}ax^2 + bx} \tag{6}$$

der Zufallsgröße x mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ gegeben.

1. Zeigen Sie

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} \tag{7}$$

Hinweis: Berechnen Sie $\mathcal{I} \cdot \mathcal{I}$ in Polarkoordinaten.

2. Berechnen Sie die Normierung C

3. Berechnen Sie den Mittelwert $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x|p(x)|^2 dx$

3.3 Freies Wellenpaket

$\Psi(x,0)$, ein eindimensionales Wellenpaket zur Zeit $t = 0$, sei durch seine Fouriertransformierte

$$\phi(k) = A \exp[(k - k_0)^2 d^2] \tag{8}$$

gegeben. k_0 und A, $d > 0$ sind reelle Konstanten. Für ein freies Teilchen mit der Masse m ist dann

$$\Psi(x,t) = \frac{A}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp\left[-(k - k_0)^2 d^2 - i\frac{\hbar k^2}{2m} t + ikx\right] \tag{9}$$

1. Skizzieren Sie die Impulsverteilung $\phi(k)$ des Teilchens.
2. Führen Sie das obige Integral aus und berechnen Sie die Dichte $|\Psi(x,t)|^2$ der Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens.
3. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich der wahrscheinlichste Aufenthaltsort ?
4. Wie ändert sich die Schwankung des Ortes mit der Zeit ?
5. Berechnen Sie die Normierungskonstante A so, dass $\int |\Psi(x,t)|^2 dx = 1$ gilt.

Hinweis: Auch für komplexe Zahlen a und b gilt unter der Bedingung $\mathrm{Re}(a) > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(y+b)^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \tag{10}$$

Unter $\sqrt{a}$ ist diejenige Wurzel zu verstehen, deren Realteil > 0 ist.

3.4 δ-Potential im Impulsraum

In Aufgabe 2.2 wurde bereits das δ-Potential im Ortsraum behandelt. Dieses Potential soll nun im Impulsraum betrachtet werden: Bestimmen Sie aus der Eigenwertgleichung die fouriertransformierte Wellenfunktion $\tilde{\Psi}(p)$ als Funktion von p, E, α und $\Psi(0)$. Die entstehende Integralgleichung kann auf einfache Weise gelöst werden. Zeigen Sie, dass nur negative Werte für E möglich sind. Überzeugen Sie sich, dass die gefundene Lösung die Fouriertransformierte der in 2.2 bestimmten Lösung ist.