physik421 - Übung 1

Lino Lemmer — l2@uni-bonn.de
Frederike Schrödel
Simon Schlepphorst — s2@uni-bonn.de

21. April 2014

1.1 Komplexe Zahlen

Gegeben sind $z_1 = a_1 + ib_1$ und $z_2 = a_2 + ib_2$.

1.1.1 Summe und Produkt

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= a_1 + a_2 + \mathrm{i}\left(b_1 + b_2\right) \\ z_1 \cdot z_2 &= a_1 a_2 - b_1 b_2 + \mathrm{i}\left(a_1 b_2 + a_2 b_1\right) \end{aligned}$$

1.1.2 Absolutbetrag

$$\begin{aligned} \left|z_1\right| &= \sqrt{\left(a_1 + \mathrm{i}b_1\right)\left(a_1 - \mathrm{i}b_1\right)} \\ &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \end{aligned}$$

1.1.3 Konjungieren eines Produktes

$$\begin{aligned} \left(z_1 z_2\right)^* &= \left(a_1 a_2 - b_1 b_2 + \mathrm{i}\left(a_1 b_2 + a_2 b_1\right)\right)^* \\ &= a_1 a_2 - b_1 b_2 - \mathrm{i}\left(a_1 b_2 + a_2 b_1\right) \\ &= \left(a_1 - \mathrm{i}b_1\right)\left(a_2 - \mathrm{i}b_2\right) \\ &= z_1^* z_2^* \end{aligned}$$

1.1.4 Polare Darstellung

$$\begin{aligned} r_j &= \left|z_j\right| \\ &= \sqrt{a_j^2 + b_j^2} \\ \phi_j &= \mathrm{arc}\cancel{\cos}\tan\left(\frac{b_j}{a_j}\right) \end{aligned}$$

1.1.5 Komplex Konjungierte

$$z_j = r_j e^{i\phi_j}$$
$$z_j^* = r_j e^{-i\phi_j}$$

1.1.6 Produkt und Quotient

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\phi_1+\phi_2)}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\phi_1-\phi_2)}$$

1.1.7 Betrag einer Summe

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2| &= \sqrt{(z_1+z_2)(z_1+z_2)^*} \\
&= \sqrt{\big(a_1 + a_2 + i(b_1+b_2)\big)\big(a_1+a_2 - i(b_1+b_2)\big)} \\
&= \sqrt{(a_1+a_2)^2 + (b_1+b_2)^2}
\end{aligned}$$

1.1.8 Eulersche Summe

Die Taylor-Entwicklungen sind

$$\begin{aligned}
\cos x &= \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots \\
\sin x &= \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \\
&= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots \\
e^{ix} &= \frac{(ix)^0}{0!} + \frac{(ix)^1}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \ldots \\
&= 1 + ix - \frac{x^2}{2} - i\frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + i\frac{x^5}{120} + \ldots.
\end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass gilt

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

1.2 Interferenz ebener Wellen

Gegben sind zwei ebene Wellen der Form:

$$\Psi_1 = \vec{A}_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \vec{k}_1 \vec{x}\right)}$$
$$\Psi_2 = \vec{A}_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \vec{k}_2 \vec{x}\right)}$$

Es soll angenommen werden, diese seien kohärent.

1.2.1 Intensität

Es soll die Intensität I der beiden Wellen berechnet werden:

$$\begin{aligned}
I &= \left|\Psi_1 + \Psi_2\right|^2 \\
&= \left|\vec{A}_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \vec{k}_1 \vec{x}\right)} + \vec{A}_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \vec{k}_2 \vec{x}\right)}\right|^2 \\
&= \left(\vec{A}_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \vec{k}_1 \vec{x}\right)} + \vec{A}_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \vec{k}_2 \vec{x}\right)}\right)\left(\vec{A}_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\omega t - \vec{k}_1 \vec{x}\right)} + \vec{A}_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\omega t - \vec{k}_2 \vec{x}\right)}\right) \\
&= \vec{A}_1^2 + \vec{A}_2^2 + \vec{A}_1 \vec{A}_2 \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}\left(\vec{k}_1 - \vec{k}_2\right)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}\left(\vec{k}_2 - \vec{k}_1\right)}\right) \\
&= \vec{A}_1^2 + \vec{A}_2^2 + \vec{A}_1 \vec{A}_2 \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}\left(\vec{k}_1 - \vec{k}_2\right)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{x}\left(\vec{k}_1 - \vec{k}_2\right)}\right) \\
&= \vec{A}_1^2 + \vec{A}_2^2 + 2\vec{A}_1 \vec{A}_2 \cos\left(\vec{x}\left(\vec{k}_1 - \vec{k}_2\right)\right)
\end{aligned}$$

1.2.2 Inkohärente Intensität

Nun soll die Intensität betrachtet werden, wenn die beiden Wellen nicht kohärent sind. In diesem Fall gilt für die Intensität:

$$I = \left|\Psi_1^2 + \Psi_2^2\right|$$

→ $I = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2$
(komplex konjugieren, bzw. Betragsquadrat nicht vergessen!)

1.2.3 Minima und Maxima der Intensität

Jetzt soll errechnet werden, für welche $\vec{k}_j$ die Intensität minimal/maximal wird. Aufgrund der Cosinus-Abhängigkeit der Intensität ist diese minimal für

$$\cos\left(\vec{x}\left(\vec{k}_1 - \vec{k}_2\right)\right) = -1 \iff \vec{x}\left(\vec{k}_1 - \vec{k}_2\right) = (2n+1)\pi \qquad n \in \mathbb{N}$$

und maximal für

$$\cos\left(\vec{x}\left(\vec{k}_1 - \vec{k}_2\right)\right) = 1 \iff \vec{x}\left(\vec{k}_1 - \vec{k}_2\right) = 2n\pi \qquad n \in \mathbb{N}$$

Der demnach einfachste Fall für ein Maximum wäre bei $\vec{k}_1 = \vec{k}_2$

1.2.4 Aufheben der beiden Wellen

Nun soll gezeigt werden unter welchen Bedingungen sich die beiden Wellen exakt aufheben würden. Aus 2.3 ist bekannt, dass das Minimum der Intensität erreicht wird, wenn $\vec{x}\left(\vec{k}_1 - \vec{k}_2\right) = (2n+1)\,\pi$. In diesem Fall ist die Intensität:

$$I = \vec{A}_1^2 + \vec{A}_2^2 - 2\vec{A}_1\vec{A}_2$$

Dabei heben sich die Wellen auf wenn $I = 0$ ist:

$$\vec{A}_1^2 + \vec{A}_2^2 - 2\vec{A}_1\vec{A}_2 = 0$$

Betrachtet man die Beträge $\left|\vec{A}_1\right|$ und $\left|\vec{A}_2\right|$ so folgt:

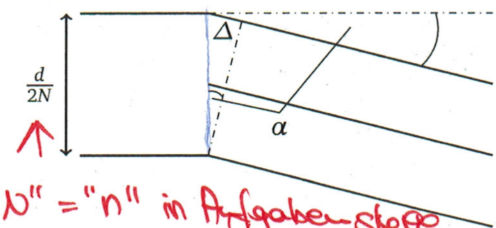
$$\left|\vec{A}_1\right| = \left|\vec{A}_2\right|$$ ✓

Die beiden Bedingungen dafür, dass sich die beiden Wellen aufheben sind also, dass die Intensität minimal wird und die Amplituden denselben Betrag haben. ✓

1.3 Beugung am Einzelspalt

1.3.1 Gangunterschied benachbarter Bündel

Einzelspalt



"N" = "n" in Aufgabenstellung

Abbildung 1: Zwei benachbarte Bündel aus dem Lichtstrahl.

Der Gangunterschied Δ zwischen zwei benachbarten Bündeln ist, wie aus Abbildung 1 ersichtlich $\Delta = \frac{d}{2N}\sin\alpha$. ✓ in Notation Aufgabenstellung: $\Delta = \frac{d}{2n} \sin\alpha$

1.3.2 Intensitätsminimum

Für ein Intensitätsminimum müssen die beiden äußeren Strahlen einen Gangunterschied von

$$\Delta = k\lambda,$$ ✓

mit $k \in \mathbb{N}$ haben, dann gibt es immer zwei Strahlen mit Gangunterschied $\frac{\lambda}{2}$. ✓ Beugungsminima treten daher unter

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{\cancel{2}Nk\lambda}{d}\right)$$ ✓

1.3.3 Intensitätsmaximum

Für ein Intensitätsmaximum muss gelten

$$\Delta = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda,$$

mit $k \in \mathbb{N}$. Beugungsminima treten daher unter

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\cancel{2N}\lambda}{d}\right)$$

1.3.4 Bedingung an Spaltbreite

Damit Beugungsmuster beobachtet werden können muss $d > \lambda$ gelten.