Übung 7

Ausgabe: 27.05.2014, Abgabe: 03.06.2014, Besprechung: 05./06.06.2014

7.1 Verschränkte Wellenfunktion

Wir betrachten ein System aus zwei Photonen, die in $\pm z$ Richtung propagieren. Ihr Polarisationszustand sei durch folgende Wellenfunktion gegeben:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_{1,L}\psi_{2,L} - \psi_{1,R}\psi_{2,R} \right) ; \tag{1}$$

man beachte das relative Minus!

1. Drücken Sie die Wellenfunktion in der Basis (ψ_x, ψ_y) für lineare Polarisationszustände aus. *Hinweis:* Photon 2 soll in $-z$ Richtung gehen. Zeigen Sie zunächst, dass, wie in der Vorlesung behauptet, deshalb $\psi_{2,R} = (\psi_{2,x} - i\psi_{2,y})/\sqrt{2}$, $\psi_{2,L} = (\psi_{2,x} + i\psi_{2,y})/\sqrt{2}$, d.h. die Vorzeichen von ψ_y sind anders als in den analogen Beziehungen für ψ_1.

2. Falls eine Messung an Photon 1 ergibt, dass es in $x-$Richtung linear polarisiert ist, was wissen wir dann über die Polarisierung von Photon 2 (*i*) in der linearen Polarisationsbasis, (*ii*) in der zirkularen Polarisationsbasis?

3. Nehmen wir an, eine Messung an Photon 1 ergibt, dass es in $x-$Richtung linear polarisiert ist, während eine Messung an Photon 2 ergibt, dass es linkshändige zirkulare Polarisation besitzt. Wie sieht die Wellenfunktion nach der 1. Messung aus, wenn (*i*) die Messung an Photon 1 zuerst durchgeführt wird, (*ii*) die Messung an Photon 2 zuerst durchgeführt wird?

4. Wie sieht die Wellenfunktion nach beiden im letzten Unterpunkt beschriebenen Messungen aus, (*i*) in der linearen Polarisationsbasis, (*ii*) in der zirkularen Polarisationsbasis, (*iii*) in einer geeignet gewählten gemischten Basis (in der ψ_1 und ψ_2 in verschiedenen Basen ausgedrückt werden)? Zeigen Sie, dass dieses Endergebnis unabhängig ist von der Reihenfolge, in der die Messungen durchgeführt wurden.

Korrektur: In der Gl.(7.24) der Vorlesung hatten alle ψ_y Terme das falsche Vorzeichen; das Endergebnis, $\psi = \psi_{1,L}\psi_{2,x}$, war aber korrekt.

7.2 Hamilton–Operator für Teilchen im externen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ Feldern

Die Lagrange–Funtkion für ein geladenes Teilchen (Masse m, Ladung q) in der Gegenwart elektromagnetischer (äußerer, d.h. extern vorgegebener) Felder ist

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{\vec{x}} \right)^2 - q \left(V - \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A} \right) ; \tag{2}$$

dabei ist V das elektrische Potenzial und $\vec{A}$ das Vektorpotenzial.

1. Bestimmen Sie den zur kartesischen Koordinate $\vec{x}$ kanonisch konjugierten Impuls $\vec{P}$.

2. Zeigen Sie, dass die zugehörige Hamilton–Funktion geschrieben werden kann als
$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{P} - q\vec{A} \right)^2 + qV . \tag{3}$$

3. Zeigen Sie, dass die Hamilton–Funktion in Gl.(3) die Gesamt–Energie des Teilchens ist. *Hinweis:* Berechnen Sie die kinetische Energie. Wie trägt das Magnetfeld zur Energie des Teilchens bei?

4. Zeigen Sie, dass die Hamilton'sche Bewegungsgleichung $\dot{\vec{P}} = \left\{ \vec{P}, H \right\}$ identisch ist mit der aus der Lorentz–Kraft folgenden Bewegungsgleichung
$$\dot{\vec{p}} = q \left[-\vec{\nabla} V - \partial \vec{A}/\partial t + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right] ,$$

wo $\vec{p} = \vec{v}m$ der gewöhnliche (lineare) Impuls ist. *Hinweis:* Benutzen Sie

$$\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A},$$

wobei $\vec{v}$ als unabhängig von $\vec{x}$ betrachtet wird, und zeigen und benutzen Sie die Beziehung

$$d\vec{A}/dt = \partial\vec{A}/\partial t + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}.$$

5. Berechnen Sie die Poisson–Klammern $\{x_i, P_j\}$ und $\{x_i, p_j\}$. Erlaubt dies zu entscheiden, ob der Operator $-i\hbar\partial/\partial x_k$ gemäß dem 7. Postulat dem Operator $\hat{p}_k$ oder dem Operator $\hat{P}_k$ entspricht?
6. Berechnen Sie nun die Poisson–Klammern $\{p_i, p_j\}$ und $\{P_i, P_j\}$. Nun sollten Sie entscheiden können, welcher Operator $-i\hbar\partial/\partial x_k$ zugeordnet ist.
7. Geben Sie einen expliziten Ausdruck für den Hamilton Operator $\hat{H}$ im Ortsraum.
8. Berechnen Sie den Kommutator $[\hat{H}, \hat{P}_k]$, und daraus die zeitliche Ableitung $d\langle P_k\rangle/dt$. *Hinweis:* Benutzen Sie Gl.(8.2) aus der Vorlesung, $d\langle q\rangle/dt = \langle \partial q/\partial t\rangle + i\langle[\hat{H}, \hat{q}]\rangle/\hbar$, für eine beliebige Observable q.

7.3 Wellenfunktion mit minimaler Unschärfe

In der Vorlesung wurde folgender Ausdruck für die Wellenfunktion mit minimaler Unschärfe im ein–dimensionalen Ortsraum hergeleitet:

$$\psi_m(x) = \frac{1}{\left(2\pi\langle(\Delta x)^2\rangle\right)^{1/4}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{4\langle(\Delta x)^2\rangle}} \mathrm{e}^{ix\langle p_x\rangle/\hbar} . \tag{4}$$

1. Überprüfen Sie die Normierung der Wellenfunktion, $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_m(x)|^2 \, dx = 1$.
2. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert von x in der Tat gleich $\langle x\rangle$ aus Gl.(4) ist.
3. Zeigen Sie, dass die mittlere quadratische Abweichung von x von seinem Mittelwert $\langle(\Delta x)^2\rangle = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$, in der Tat durch $\langle(\Delta x)^2\rangle$ aus Gl.(4) gegeben ist.
4. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert von p_x in der Tat durch $\langle p_x\rangle$ aus Gl.(4) gegeben ist.
5. Berechnen Sie die mittlere quadratische Abweichung von p_x, $\langle(\Delta p_x)^2\rangle = \langle p_x^2\rangle - \langle p_x\rangle^2$, und zeigen Sie, dass das Produkt $\langle(\Delta x)^2\rangle \cdot \langle(\Delta p_x)^2\rangle = \hbar^4/4$, sodass ψ_m in der Tat die Unschärferelation für x und p_x saturiert.