Übung 8

Ausgabe: 03.06.2014, Abgabe: 17.06.2014, Besprechung: 19./20.06.2014

8.1 Eigenvektoren in einer Orthonormalbasis

Die Vektoren $\{\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2\}$ seien eine Orthonormalbasis eines zweidimensionalen Vektorraumes. In dieser Basis sei die Matrixdarstellung $\sigma_\mathbf{y}$ eines Operators $\hat{\sigma}_y$ gegeben als:

$$\sigma_\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} .$$

1. Ist $\hat{\sigma}_y$ selbstadjungiert (hermitesch)? Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren $\vec{\phi}_i$ $(i = 1, 2)$ bezüglich der angegebenen Basis. *Hinweis*: Die Eigenvektoren $\vec{\phi}_i$ und Eigenwerte λ_i einer Matrix $\mathbf{A}$ sind die Lösungen der Eigenwertgleichung $\mathbf{A}\vec{\phi} = \lambda\vec{\phi}$; eine hermitesche $N \times N$ Matrix hat N Eigenvektoren und N (eventuell entartete) reelle Eigenwerte.

2. Prüfen Sie die Orthogonalität und Vollständigkeit der Eigenvektoren in der Darstellung der Orthonormalbasis.

3. Definieren Sie die Operatoren $\mathbf{P}_i = \vec{\phi}_i\vec{\phi}_i^\dagger$, und berechnen Sie die Produkte $\mathbf{P}_i\vec{\phi}_j$ $\forall i, j \in \{1, 2\}$. *Hinweis:* Während $\vec{\phi}_i^\dagger\vec{\phi}_i$ eine "(1×1)–Matrix", d.h. eine Zahl, ist, ergibt das hier zu berechnende Produkt eine $(N \times N)$ Matrix für $N-$dimensionale Vektoren $\vec{\phi}_i$; in unserem Fall ist natürlich $N = 2$.

4. Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass die $\mathbf{P}_i$ Projektoren sind, die die folgenden Eigenschaften erfüllen: *(i)* $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j = \delta_{ij}\mathbf{P}_i$, $i, j = 1, 2$; *(ii)* $\sum_i \mathbf{P}_i = \mathbf{1}$. *Bemerkung:* Die Summe $\sum_i \vec{\phi}_i\vec{\phi}_i^\dagger$ ist die Matrix–Darstellung der in der Vorlesung besprochenen Summe $\sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$, wobei die $|\phi_i\rangle$ die Basiszustände eines Hilbertraumes sind.

8.2 Vollständiger Satz von Operatoren

Ein dreidimensionaler Raum werde durch die Basis $\{\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \vec{\eta}_3\}$ aufgespannt. In dieser Basis seien zwei Operatoren durch folgende Matrixdarstellungen definiert:

$$\mathbf{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

1. Sind $\mathbf{H}$ und $\mathbf{B}$ hermitesch?

2. Zeigen Sie, dass $\mathbf{H}$ und $\mathbf{B}$ vertauschen.

3. Bestimmen Sie drei Vektoren $\vec{\phi}_i$, die Eigenvektoren von sowohl $\mathbf{H}$ als auch $\mathbf{B}$ sind. Wie lauten die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_{H,i}$ und $\lambda_{B,i}$?

4. Reichen die Eigenwerte $\lambda_{H,i}$ aus, um den Zustand i eindeutig zu bestimmen? Wenn nicht, reichen die Paare von Eigenwerten $(\lambda_{H,i}, \lambda_{B,i})$ um den Zustand i eindeutig zu bestimmen?
   Bemerkung: Eine Menge von m Operatoren $\{\hat{O}_\ell\}$ heisst *vollständig*, falls das $m-$Tupel von Eigenwerten $\lambda_{O_\ell,i}$, $\ell = 1, \ldots, m$ ausreicht, um den Eigenzustand i eindeutig zu bestimmen. Ein einzelner Operator bildet somit bereits eine vollständige Menge, falls er keine entarteten Eigenwerte hat.

5. Zusätzlich sei

$$\mathbf{B}' = b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   definiert. Ist $\{\mathbf{H}, \mathbf{B}'\}$ ein vollständiger Satz von Operatoren?

8.3 Heisenbergdarstellung von Operatoren

Wir betrachten ein Teilchen mit Masse m und Ladung q, das einem konstanten elektrischen Feld E ausgesetzt ist, das in $x-$Richtung zeigt. Dieses System wird beschrieben durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - qE\hat{x} \tag{1}$$

wobei $\hat{\vec{p}}$ und $\hat{x}$ zeit–unabhängige Operatoren sind, d.h. sie sind im Schrödinger–Bild gegeben.

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der Impulsopertor im Heisenberg–Bild errechnet werden kann als

$$\hat{p}_H(t) = \mathrm{e}^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{p}\,\mathrm{e}^{-i\hat{H}t/\hbar}\,. \tag{2}$$

Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass

$$\hat{\vec{p}}_H(t) = \hat{\vec{p}}_H(0) + qEt\vec{e}_x\,, \tag{3}$$

wobei $\hat{\vec{p}}_H(0)$ offensichtlich gleich dem Operator $\hat{\vec{p}}$ im Schrödinger–Bild ist, und $\vec{e}_x$ der Einheitsvektor in $x-$Richtung.
Hinweis: Zeigen Sie durch Induktion folgende Identität:

$$\left[\hat{A}^n, \hat{B}\right] = n\hat{A}^{n-1}\left[\hat{A}, \hat{B}\right]$$

für den Fall, dass $[\hat{A}, \hat{B}]$ eine (komplexe) Zahl ist, d.h. selber mit $\hat{A}$ kommutiert. Zeigen Sie, dass dies für $\hat{A} = \hat{H},\ \hat{B} = \hat{p}_x$ zutrifft, und benutzen Sie diese Identität und die Reihendarstellung der e–Funktion um Gl.(3) zu beweisen.
Bemerkung: In der Vorlesung wurde eq.(2) für die Matrix–Darstellung der Operatoren gezeigt, aber mittlerweile sollten Sie mit der Äquivalenz der Matrizen und Operatoren vertraut sein.

8.4 Zeitentwicklung der Matrix–Darstellung von Operatoren im Wechselwirkungsbild

Zeigen Sie, dass, wie in der Vorlesung behauptet, die zeitliche Ableitung der Matrixdarstellung $\mathbf{q}_I$ eines Operators $\hat{q}$ im Wechselwirkungsbild gegen ist durch

$$i\hbar\frac{d}{dt}\mathbf{q}_I = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{q}_I + [\mathbf{H}_0, \mathbf{q}_I]\ . \tag{4}$$

Hinweis: Im Wechselwirkungsbild ist $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$, und die Basisfuntkionen $u_k(\vec{x}, t)$ erfüllen $\hat{H}_0 u_k = i\hbar\partial u_k/\partial t$.