Theoretische Physik 3: Quantenmechanik

Inhalt

0) QM im täglichen Leben
1) Probleme der klassischen Physik
2) Wellenmechanik
3) Schrödinger Gleichung
4) Mathematisches Intermezzo
5) Klassische Mechanik: Hamilton
6) Operator-Formalismus und die Postulate der QM
7) Messungen
8) Das Korrespondenz-Problem
9) Drehimpuls
10) Zentralkräfte
11) Matrix-Darstellung
12) Spin
13) Transformationen zwischen Darstellungen
14) Näherungsmethoden

Übungsgruppen: Freitag 13-16 Uhr oder 14-17 Uhr

Klausuren: 1) Di, 22.7. } 9-12 Uhr, WP
2) Do, 2.10. }

Zulassung: 50% bearbeitet haben

http://www.th.physik.uni-bonn.de/Groups/drees/teaching.html

0) Quantenmechanik im täglichen Leben

QM ist essentiell, um die Welt quantitativ zu verstehen.
Dies gilt nicht nur für sehr kleine Systeme:

*) Sonne:

→ Spektrum: Überlagerung von Kontinuum ("schwarzer Strahler")
Theo 4.) und Linien (→ Atomphysik)

→ Energiequelle: Kernfusion, beruht auf Tunneln durch "Coulomb-Barriere" (→ Kap. 3)

*) Himmel: Blauer Himmel: Streuung v. Photonen an Elektronen (→ QM2)

*) Leben: Genom, chemische Reaktionen, z.B. Photosynthese (→ Molekülphysik / theoretische Chemie)

QM ist essentiell für technische Anwendungen:

*) Supraleitung: Für Magneten: Elektronenpaar einen makroskopischen Quantenzustand (→ Festkörpertheorie)

*) Laser: Braucht System mit diskreten (quantisierten) Energiezuständen, und Quantenstatistik der Lichtteilchen (→ QM2, Theo 4., Spezialvorlesungen)

Vorhersagen der Quantenmechanik entsprechen nicht immer unserer Intuition. Sie können aber extrem genau sein!
z.B. magnetisches Dipolmoment eines freien Elektrons:

$$\frac{g_e - 2}{2} = (1\ 159\ 652\ 181{,}78 \pm 0{,}77) \cdot 10^{-12}$$

Relative Genauigkeit: $0{,}7 \cdot 10^{-9}$, dh. 0,7 ppb (→ QED, QFT)
Zum Vergleich:
Vorhersage von Sattelitenbahn in niedrigem Erd-Orbit:
Fehler nach 12h ~ 10m / 40 000 km ~ 250 ppb

⇒ Quanten ist nicht "esoterisch"; ist zentral in (fast) allen Feldern d. modernen Physik ⇒ 2 Vorlesungen

1) Probleme der klassischen Physik

In der Newton'schen Mechanik:

*) Alle Körper sind unterscheidbar

*) Jeder Körper hat zu jeder Zeit einen festen Ort und einen festen Impuls (oder Geschwindigkeit)

*) Deterministisch: Aus $\vec{x}_i(t_0)$, $\dot{\vec{x}}_i(t_0)$ können $\vec{x}_i(t)$, $\dot{\vec{x}}_i(t)$ $\forall t$ berechnet werden

Keines dieser Prinzipien ist in QM gültig!

Beachte: Naturgesetze sind Hypothesen, die streng genommen nicht bewiesen werden können, wohl aber widerlegt. Aber QM hat so viele Präzisionstest bestanden, dass QM "richtig" ist. ("FAPP")

---

i) Das klassische Atom

Rutherford's Streu-Experimente: $R_{Kern} \ll R_{Atom}$

$$M_{Kern} \simeq M_{Atom} \gg m_e$$

$\Rightarrow$ Elektronen umkreisen ruhenden, punktförmigen Kern. Dies ist eine beschleunigte Bewegung: Elektron müsste elm. Strahlung abgeben.

$\Rightarrow$ stürzt in den Kern

Abschätzung der Lebensdauer

Abgestrahlte Leistung eines Dipols: $P_{ab} = \frac{\mu_0}{6\pi c} (\ddot{\vec{p}})^2$ (1.1)

Elektron auf Kreisbahn um Kern: $\vec{x}_K = \vec{0}$:

$$x(t) = r_0 \cos \omega t \qquad y(t) = r_0 \sin \omega t \qquad z(t) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p}(t) = -q_e r_0 \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\ddot{\vec{p}}| = |q_e| r_0 \omega^2$$

Energie der Elektronen:

$$E^e_{tot} = \frac{1}{2} E^e_{pot} = -\frac{q_e^2}{8\pi \varepsilon_0 r_0} \qquad \text{(für H-Atom)}$$

$$\omega = v/r_0 := 2\pi/\tau$$

$\Rightarrow$ Energieverlust pro Umlauf:

$$\Delta E \simeq P_{ab} \tau = \underbrace{\frac{2\pi r_0}{v}}_{\tau} \cdot \frac{\mu_0}{6\pi c} \cdot \underbrace{\frac{v^4}{r_0^4}}_{\omega^4} q_e^2 r_0^2 = \frac{\mu_0}{3} \frac{v^3}{c} \frac{q_e^2}{r_0}$$

Für $r_0 = 1 Å$: $v = 10^{-2} c$ $\left(\text{aus } \frac{q_e^2}{4\pi \varepsilon_0 r^2} = \frac{m_e v^2}{r}\right)$ (1.2)

$$\Rightarrow \Delta E \simeq 10^{-5} |E^e_{tot}|$$

$$\Rightarrow \text{Zeitskala für Zerfall} \sim 10^5 \tau \sim 10^6 \frac{1 Å}{10^{-2} c} \sim 10^{-10} \text{ sec}$$

Bohrsche Lösung: Postuliere quantisierten Drehimpuls

$$m_e v_n r_n = n \cdot \frac{h}{2\pi} := n\hbar, \; n \in \mathbb{N} \qquad (1.3)$$

h: Planck'sches Wirkungsquantum $= 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Js

(1.2) in (1.3):

$$m_e r_n \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{q_e^2}{4\pi \varepsilon_0 m_e r_n}}}_{v_n} = n\hbar \Rightarrow r_n = n^2 \frac{\hbar^2 4\pi \varepsilon_0}{q_e^2 m_e^2} \qquad (1.4)$$

$$\Rightarrow E_n = -\frac{q_e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{1}{2}\left(\frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}\right)^2 \cdot m_e c^2 \cdot \frac{1}{n^2} := -\frac{1}{2} m_e c^2 \alpha^2 \frac{1}{n^2} \qquad (1.5)$$

Mit Feinstruktur-Konstante $\alpha := \frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137{,}036\ldots}$ (1.6)

*) Photo-Elektrischer Effekt

Licht kann Elektronen aus einem Körper freisetzen.

Beobachtung: $E^e_{max} = \underbrace{E_0}_{\text{material abh. Konstante}} + const. \cdot \underbrace{\nu}_{\text{Frequenz des Lichtes}}$ (1.7)

E^e_{max} hängt nicht von Intensität des Lichtes ab, die klassisch die Energie des Lichtes festlegt.

Erklärung (Einstein 1905): Licht besteht aus diskreten Quanten ("Photonen"), mit Energie $E_\gamma = h \cdot \nu$ (1.8)

Mit (1.5). Atome absorbieren oder emittieren Licht nur bei diskreten Wellenlängen! Für H-Atom:

$$h\nu = \frac{1}{2}\alpha^2 m_e c^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \quad m,n \in \mathbb{N},\ m > n \qquad (1.9)$$