physik421 - Übung 6

Lino Lemmer
l2@uni-bonn.de

Frederike Schrödel

Simon Schlepphorst
s2@uni-bonn.de

26. Mai 2014

In diesen Aufgaben lassen wir die Hütchen auf den Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$ weg, da es sich hier bei immer um Operatoren handelt.

6.1 Kommutatoren von linearen Operatoren

6.1.1

$$\begin{aligned}
[A, BC] &= ABC - BCA \\
&= ABC - BAC + BAC - BCA \\
&= (AB - BA)C + B(AC - CA) \\
&= [A, B]C + B[A, C]
\end{aligned}$$

6.1.2

$$\begin{aligned}
[AB, C] &= ABC - CAB \\
&= ABC - ACB + ACB - CAB \\
&= A(BC - CB) + (AC - CA)B \\
&= A[B, C] + [A, C]B
\end{aligned}$$

6.1.3

$$\begin{aligned}
&\big[A, [B, C]\big] + \big[B, [C, A]\big] + \big[C\,[A, B]\big] \\
&= A(BC - CB) - (BC - CB)A \\
&+ B(CA - AC) - (CA - AC)B \\
&+ C(AB - BA) - (AB - BA)C \\
&= \cancel{ABC} - ACB - BCA + CBA \\
&+ BCA - \cancel{BAC} - CAB + ACB \\
&+ CAB - CBA - \cancel{ABC} + \cancel{BAC} \\
&= 0
\end{aligned}$$

6.1.4

Aus $[A,C]=0$ und $[B,C]=0$ folgt nicht notwendigerweise $[A,B]=0$. Sei $C=1$, so folgt $[A,C]=0$ und $[B,C]=0$, nicht jedoch zwangsweise $[A,B]=0$. Beispiel: $A=\hat{x}$, $B=\hat{p}_x$.

6.2 Kommutatoren von Operatorfunktionen

A und B kommutieren mit C aber nicht miteinander: $[A,B]=C$. Operatorfunktionen sind als Potenzreihen definiert.

6.2.1 $\left[A,f(B)\right]=Cf'(B)$

$$f(B)=\sum_{n=0}\beta_n B^n$$

Behauptung:

$$\left[A,B^n\right]=nCB^{n-1}$$

Beweis durch vollständige Induktion:
$n=1$:

$$\begin{aligned}[A,B]&=C\\&=1CB^0\end{aligned}$$

$n=2$:

$$\begin{aligned}\left[A,B^2\right]&=ABB-BBA\\&=ABB-BAB+BAB-BBA\\&=[A,B]B+B[A,B]\\&=CB+BC\\&=2CB\end{aligned}$$

$n\to n+1$:

$$\begin{aligned}\left[A,B^{n+1}\right]&=AB^{n+1}-B^{n+1}A\\&=AB^nB-B^nAB+B^nAB-B^nBA\\&=\left[A,B^n\right]B+B^n[A,B]\\&=nCB^{n-1}B+B^nC\\&=nCB^n+CB^n\\&=(n+1)CB^n\end{aligned}$$

Behauptung durch vollständige Induktion bewiesen. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\left[A, f(B)\right] &= \sum_{n=0} \beta_n \left[A, B^n\right] \\
&= C \sum_{n=0} \beta_n n B^{n-1} \\
&= C \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}B} \sum_{n=0} \beta_n B^n \\
&= C \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}B} f(B) \\
&= C f'(B).
\end{aligned}$$

6.2.2 $\left[g(A), B\right] = C g'(A)$

$$g(A) = \sum_{n=0} \alpha_n A^n$$

Behauptung:

$$\left[A^n, B\right] = C n A^{n-1}$$

Beweis durch vollständige Induktion:
$n = 1$:

$$\begin{aligned}
[A, B] &= C \\
&= 1 C A^0
\end{aligned}$$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
\left[A^{n+1}, B\right] &= A^{n+1} B - B A^{n+1} \\
&= A^n A B - A^n B A + A^n B A - B A^n A \\
&= A^n [A, B] + \left[A^n, B\right] A \\
&= A^n C + C n A^{n-1} A \\
&= (n+1) C A^n
\end{aligned}$$

Behauptung durch vollständiger Induktion bewiesen. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\left[g(A), B\right] &= \sum_{n=0} \alpha_n \left[A^n, B\right] \\
&= C \sum_{n=0} \alpha_n n A^{n-1} \\
&= C \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A} \sum_{n=0} \alpha_n A^n \\
&= C \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A} g(A) \\
&= C g'(A).
\end{aligned}$$

6.3 Hermitesche Konjugation von Produkten von Operatoren

6.4 Auf- und Absteigeoperatoren

6.4.1

$$
\begin{aligned}
\hat{a}_- u_n(x) &= \hat{a}_- \frac{1}{\sqrt{\hbar\omega_0 n}} \hat{a}_+ u_{n-1}(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\hbar\omega_0 n}} \hat{a}_- \hat{a}_+ u_{n-1}(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\hbar\omega_0 n}} \left(\hat{H} + \frac{\hbar\omega_0}{2} \right) u_{n-1}(x) \\
&= \underbrace{\hat{H} \frac{1}{\sqrt{\hbar\omega_0 n}} u_{n-1}(x)}_{= \sqrt{\hbar\omega_0 n} u_{n-1}(x) - \frac{\sqrt{\hbar\omega_0}}{2\sqrt{n}} u_{n-1}(x) \quad ?} \qquad + \frac{\sqrt{\hbar\omega_0}}{2\sqrt{n}} u_{n-1}(x) \\
&= \dots \\
&= \sqrt{\hbar\omega_0 n} u_{n-1}(x)
\end{aligned}
$$

$| \hat{H} u_{n-1} = \hbar\omega_0 ((n-1)+\frac{1}{2}) u_{n-1}$

$= \hbar\omega_0 (n-\frac{1}{2}) u_{n-1}$

✓

6.4.2

Es soll gezeigt werden, das für den Besetzungszahloperator $\hat{n} = \frac{1}{\hbar\omega_0} \hat{a}_+ \hat{a}_-$ die Eigenwertgleichung $\hat{n} u_n(x) = n u_n(x)$ gilt.

$$
\begin{aligned}
\hat{n} u_n(x) &= \frac{1}{\hbar\omega_0} \hat{a}_+ \hat{a}_- u_n(x) \\
&= \frac{1}{\hbar\omega_0} \hat{a}_+ \sqrt{\hbar\omega_0 n} u_{n-1}(x) \\
&= \sqrt{\frac{n}{\hbar\omega_0}} \hat{a}_+ u_{n-1}(x) \\
&= \sqrt{\frac{n}{\hbar\omega_0}} \sqrt{\hbar\omega_0 n} u_n(x) \\
&= n u_n(x)
\end{aligned}
$$

✓ ✓

Die Eigenwertgleichung ist also erfüllt.

6.4.3

6.4.4

6.4.5

Bearbeitet: 1, 2, 4 $(\frac{1}{2})$