physik421 - Übung 5

Lino Lemmer — l2@uni-bonn.de
Frederike Schrödel
Simon Schlepphorst — s2@uni-bonn.de

20. Mai 2014

5.1 Diskrete und kontinuierliche Eigenwerte

5.2 Eigenschaften von Operatoren

5.2.1

$$
\begin{aligned}
\psi &= \hat{A}^{-1}\hat{A}\psi \\
&= \hat{A}^{-1}a\psi \\
&= a\hat{A}^{-1}\psi \\
\implies \qquad \hat{A}^{-1}\psi &= a^{-1}\psi
\end{aligned}
$$

5.2.2

Bei dieser Aufgabe lassen wir die Hütchen auf Operatoren weg. Operatoren sind durch große, Eigenwerte sind durch kleine Buchstaben gekennzeichnet.

(a)

$$
\begin{aligned}
1 &= \int \mathrm{d}x\, \psi^*\psi \\
&= \int \mathrm{d}x\, \psi^* U^{-1} U\psi
\end{aligned}
$$

Da U unitär ist, folgt

$$
= \int \mathrm{d}x\, \psi^* U^\dagger u\psi.
$$

Aus der Definition des hermitisch konjugierten Operators folgt

$$
\begin{aligned}
&= \int \mathrm{d}x \, (U\psi)^* u\psi \\
&= \int \mathrm{d}x \, (u\psi)^* u\psi \\
&= \int \mathrm{d}x \, u^* \psi^* u\psi \\
&= u^* u \underbrace{\int \mathrm{d}x \, \psi^* \psi}_{=1} \\
&= |u|^2 .
\end{aligned}
$$

Daraus folgt sofort

$$|u| = 1.$$

(b) Hermitesch heißt, dass gilt $A^\dagger = A$, wobei $A^\dagger = (A^*)^{-1}$. Nach der unitären Transformation $U^{-1}AU$ erhält man

$$
\begin{aligned}
\left(U^{-1}AU\right)^\dagger &= \left(U^{-1}\right)^\dagger A^\dagger U^\dagger \\
&= \left(\left(U^{-1}\right)^*\right)^{-1} A \left(U^*\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

Da U unitär ist gilt $U = U^*$.

$$
\begin{aligned}
&= \left(U^{-1}\right)^{-1} A U^{-1} \\
&= UAU^{-1}.
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow (U^{-1}AU)^\dagger = UAU^{-1}$

$\Leftrightarrow \bar{A}^\dagger = \bar{A}$ (Hermitesch)

Dies würde heißen, er bleib nicht hermitesch.

5.3 Basistransformation

5.3.1

Orthonormalität heißt $\vec{f}_i^T \vec{f}_j = \delta_{ij}$.

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_i &= \sum_j S_{ji} \vec{f}_j \\
\sum_k \vec{f}_k^T \vec{e}_i &= \sum_k \sum_j S_{ji} \vec{f}_j^T \vec{f}_k \\
\sum_k \vec{f}_k^T \vec{e}_i &= \sum_k S_{ki}
\end{aligned}
$$

Diese Summe muss Elementweise übereinstimmen, daher folgt

$$S_{ki} = \vec{f}_k^T \vec{e}_i$$

5.3.2

Die Transformationsmatrix **S** sieht für $i, j = 1, \ldots, n$ wie folgt aus:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & \ldots & S_{1j} & \ldots & S_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ S_{i1} & \ldots & S_{ij} & \ldots & S_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ S_{n1} & \ldots & S_{nj} & \ldots & S_{nn} \end{pmatrix}$$

5.4 Die Spur von Operatoren

5.4.1

Es soll gezeigt werden, dass die Spur unabhängig von der Basis ist.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sp}(\hat{A}) &= \sum_i \langle e_i \,|\hat{A} e_i\rangle \qquad | \text{ mit } \hat{A} = \hat{A}_1 \hat{A}_2 \\
&= \sum_i \langle e_i \,|\hat{A}_1 \hat{A}_2 e_i\rangle \\
&= \sum_i \left\langle \hat{A}_1^\dagger e_i \,\middle|\hat{A}_2 e_i\right\rangle \\
&= \sum_{i,j} \left\langle \hat{A}_1^\dagger e_i \,\middle| f_j\right\rangle \left\langle f_j \,\middle|\hat{A}_2 e_i\right\rangle \\
&= \sum_{i,j} \left\langle \hat{A}_2^\dagger f_j \,\middle| e_i\right\rangle \left\langle e_i \,\middle|\hat{A}_1 f_j\right\rangle \\
&= \sum_j \left\langle f_j \,\middle|\hat{A}_2 \hat{A}_1 f_j\right\rangle
\end{aligned}$$

↑ existieren A_1 u. A_2 immer?
Besser A nicht aufteilen und zwei mal eine $\mathbb{1} = \sum_j |f_j\rangle\langle f_j|$ einschieben

5.4.2

Nun soll gezeigt werden, dass die Spur zyklisch invariant ist. Also das gilt: $\mathrm{Sp}(\hat{A}\hat{B}) = \mathrm{Sp}(\hat{B}\hat{A})$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sp}(\hat{A}\hat{B}) &= \sum_n \langle n \,|\hat{A}\hat{B}\,| n\rangle \\
&= \sum_{n,m} \langle n \,|\hat{A}\,| m\rangle \langle m \,|\hat{B}\,| n\rangle \\
&= \sum_{n,m} \langle m \,|\hat{B}\,| n\rangle \langle n \,|\hat{A}\,| m\rangle \\
&= \sum_m \langle m \,|\hat{B}\hat{A}\,| m\rangle \\
&= \mathrm{Sp}(\hat{B}\hat{A})
\end{aligned}$$

Bearbeitet:
Aufg.: $2(\frac{2}{3}), 3(\frac{1}{2}), 4(\frac{2}{3})$