Übung 4

Ausgabe: 06.05.2014, Abgabe: 13.05.2014, Besprechung: 15./16.05.2014

4.1 Hermitesche Polynome

Die Hermiteschen Polynome haben die Integraldarstellung

$$H_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^n \int_{-\infty}^{\infty} dy\,(x+iy)^n e^{-y^2} \qquad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots \tag{1}$$

1. Berechnen Sie nach dieser Formel H_0, H_1 und H_2.
2. Zeigen Sie durch Einsetzen der Integralformel, dass die Hermite-Polynome die erzeugende Funktion

$$\exp(-t^2 + 2tx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) \tag{2}$$

besitzen.

4.2 Eigenzustände des harmonischen Oszillators

1. Zeigen Sie durch Einsetzen, dass

$$\phi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n\, n!}}\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\, H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) \tag{3}$$

mit

$$H_n(x) = (-1)^n\, e^{x^2}\, \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \tag{4}$$

eine Eigenfunktion des Hamiltonoperators

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \tag{5}$$

ist.

2. Zeigen Sie für $n = 1, 2$, dass

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} + \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{d}{dx}\right)^n \phi_0(x) \tag{6}$$

gilt.

3. Wie lauten die Energie-Eigenwerte des (isotropen) 4-dimensionalen harmonischen Oszillators

$$H = \sum_{i=1}^{4} \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x_i^2\right)? \tag{7}$$

Wie groß ist der Entartungsgrad?

4.3 Klassisch verbotener Bereich

Ein Teilchen der Masse m bewege sich im Oszillatorpotential

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \tag{8}$$

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, das im Grundzustand befindliche Teilchen außerhalb des klassisch erlaubten Bereichs anzutreffen.
Hinweis: Sie können $\int_{-1}^{1} dx\, e^{-x^2} = 1.49365$ verwenden

4.4 Harmonischer Oszillator mit zusätzlichem Potential

Wir betrachten ein Teilchen mit der Ladung q und Masse m, das sich in einem eindimensionalen harmonischen Oszillator-Potential bewegt und zusätzlich einem elektrischen Feld $\mathcal{E}$ ausgesetzt ist. Der Hamiltonoperator lautet also

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \tag{9}$$

wobei das Potential folgende Form hat

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - q\mathcal{E}x \,. \tag{10}$$

Dabei ist ω wieder die Eigenfrequenz des harmonischen Oszillators.

1. Zeigen Sie, dass sich die Lösungen dieses Problems durch die Lösungen des eindimensionalen harmonischen Oszillators ausdrücken lassen.

2. Bestimmen Sie die neuen Eigenfunktionen und Energieeigenwerte.

3. Zeigen Sie, dass für ein bestimmtes $\mathcal{E}_0$ dies Grundzustandsenergie gleich Null wird. Geben Sie $\mathcal{E}_0$ an. Bedeutet dies, dass es in diesem Fall keine Nullpunktsenergie gibt?

4. Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle x \rangle$ und vergleichen Sie ihn mit dem Erwartungswert im Fall $\mathcal{E} = 0$.