Möchten Rekursionsrelation zwischen CG-Koeffizienten, durch Anwendung von Auf- und Absteigeoperatoren!

Dazu: $\frac{1}{\hbar}\hat{J}_\pm |j,m\rangle = K^\pm_{jm} |j, m\pm 1\rangle$ (10.70)

Kann: $1 \left|\frac{1}{\hbar}\hat{J}_\pm |j,m\rangle\right|^2 \underset{\hat{J}_\pm^+ = \hat{J}_\mp}{=} \frac{1}{\hbar^2}\langle jm|\hat{J}_\mp \hat{J}_\pm |jm\rangle$

$$\underset{(10.13)}{=} \frac{1}{\hbar^2}\langle jm|\hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 \mp \hbar \hat{J}_z |jm\rangle$$

$$= \langle jm | j(j+1) - m^2 \mp m | jm\rangle$$

$$\Rightarrow K^\pm_{jm} = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)} \qquad (10.71)$$

$$(10.67) \Rightarrow \frac{\hat{J}_+}{\hbar}|jm\rangle = \sum_{m_1,m_2} \frac{\hat{J}_{1+} + \hat{J}_{2+}}{\hbar} |m_1 m_2\rangle\langle m_1 m_2|jm\rangle$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\,|j, m+1\rangle$$
$$= \sum_{m_1 m_2}\left(\sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1+1)}\,|m_1+1, m_2\rangle + \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2+1)}\,|m_1, m_2+1\rangle\right)\langle m_1 m_2|jm\rangle$$

$$\underset{(10.67)}{\Leftrightarrow} \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \sum_{m_1' m_2'} |m_1' m_2'\rangle\langle m_1' m_2'|j, m+1\rangle$$

$$= \sum_{\tilde{m}_1, m_2} \sqrt{j_1(j_1+1) - (\tilde{m}_1 - 1)\tilde{m}_1}\,|\tilde{m}_1, m_2\rangle\langle \tilde{m}_1 - 1, m_2|jm\rangle$$

$$+ \sum_{m_1 \tilde{m}_2} \sqrt{j_2(j_2+1) - (\tilde{m}_2 - 1)\tilde{m}_2}\,|m_1 \tilde{m}_2\rangle\langle m_1, \tilde{m}_2 - 1|jm\rangle$$

$$\langle m_1'', m_2''|m_1, m_2\rangle = \delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'}$$

$$\Rightarrow \sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\langle m_1'', m_2'' | j, m+1\rangle$$
$$= \sqrt{j_1(j_1+1)-(m_1''-1)m_1''}\,\langle m_1''-1, m_2'' | jm\rangle$$
$$+ \sqrt{j_2(j_2+1)-(m_2''-1)m_2''}\,\langle m_1'', m_2''-1 | jm\rangle$$

Analog: Durch Anwenden von $\hat{J}_- = \hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-}$:

$$\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\langle m_1 m_2 | j, m-1\rangle$$
$$= \sqrt{j_1(j_1+1)-(m_1+1)m_1}\,\langle m_1+1, m_2 | jm\rangle$$
$$+ \sqrt{j_2(j_2+1)-(m_2+1)m_2}\,\langle m_1, m_2+1 | jm\rangle$$

Anwendung: Sukzessive Bestimmung der CG-Koeffizienten
z.B. (10.72b) mit $m_1 = j_1$, $m_2 = j_2+1$, $j = j_1+j_2$, $m = j_1+j_2 = j$

$$\Rightarrow \sqrt{2(j_1+j_2)}\,\langle j_1, j_2-1 | j_1+j_2, j_1+j_2-1\rangle$$
$$= \sqrt{2j_2}\,\langle \underbrace{j_1 j_2 | j_1+j_2, j_1+j_2}_{=1\ (10.69)}\rangle$$

$$\Rightarrow \langle j_1, j_2-1 | j_1+j_2, j_1+j_2-1\rangle = \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}} \qquad (10.73a)$$

Analog mit $m_1 = j_1+1$, $m_2 = j_2$, $j = j_1+j_2 = m$

$$\Rightarrow \langle j_1-1, j_2 | j_1+j_2, j_1+j_2-1\rangle = \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}} \qquad (10.73b)$$

Einträge mit $m = j_1 + j_2 - 1 = j$ folgen aus (10.73) und Unitarität der CG-Matrix: $\langle m_1' m_2' | jm\rangle^* = \langle m_1' m_2' | jm\rangle$

$$\sum_{j,m} \langle m_1 m_2 | jm\rangle\langle jm | m_1' m_2'\rangle = \delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'}$$

$$\Rightarrow \langle j_1, j_2 - 1 | j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle\langle j_1 - 1, j_2 | j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle$$

$$+ \langle j_1, j_2 - 1 | j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1\rangle\langle j_1 - 1, j_2 | j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle j_1, j_2 - 1 | j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1\rangle = \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}} \qquad (10.74a)$$

$$\langle j_1 - 1, j_2 | j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1\rangle = -\sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}} \qquad (10.74b)$$

10 f) Operatoren der Klasse T

Entsprechen Vektor-Observablen: $\hat{\vec{T}} = (\hat{T}_x, \hat{T}_y, \hat{T}_z)$

müssen erfüllen:

$$[\hat{J}_a, \hat{T}_a] = 0 \quad \forall\, a \in \{x, y, z\} \qquad (10.75a)$$

$$[\hat{J}_x, \hat{T}_y] = i\hbar \hat{T}_z \qquad (10.75b)$$

$$[\hat{J}_x, \hat{T}_z] = -i\hbar \hat{T}_y \qquad (10.75c)$$

und zyklische Permutation von (x, y, z)

$$\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$$

Beispiele

*) $\hat{\vec{J}}$ selber: (10.61)

*) $\vec{x}$: Da $[\hat{S}_a, \hat{x}_b] = 0 \quad \forall a,b$ mit (10.5)

*) $\vec{p}$: Da $[\hat{S}_a, \hat{p}_b] = 0 \quad \forall a,b$ mit (10.5)

*) jedes Vektor-Produkt von $\hat{\vec{J}}, \hat{\vec{x}}, \hat{\vec{p}}$

Seien $\hat{\vec{T}}_1, \hat{\vec{T}}_2$ Operatoren d. Klasse T:

$$\Rightarrow [\hat{J}_x, \hat{\vec{T}}_1 \cdot \hat{\vec{T}}_2] = \underbrace{[\hat{J}_x, \hat{T}_{1x}\hat{T}_{2x}]}_{=0,\ (10.75a)} + [\hat{J}_x, \hat{T}_{1y}\hat{T}_{2y}] + [\hat{J}_x, \hat{T}_{1z}\hat{T}_{2z}]$$

$$= \hat{T}_{1y}[\hat{J}_x, \hat{T}_{2y}] + [\hat{J}_x, \hat{T}_{1y}]\hat{T}_{2y} + \hat{T}_{1z}[\hat{J}_x, \hat{T}_{2z}] + [\hat{J}_x, \hat{T}_{1z}]\hat{T}_{2z}$$

$$\overset{(10.75abc)}{=} i\hbar\left(\hat{T}_{1z}\hat{T}_{2y} + \hat{T}_{1y}\hat{T}_{2z} - \hat{T}_{1z}\hat{T}_{2y} - \hat{T}_{1y}\hat{T}_{2z}\right) = 0 \qquad (10.76)$$

Definiere: $\hat{T}_+ = \hat{T}_x + i\hat{T}_y$ (10.77)

$$[\hat{J}_z, \hat{T}_+] = [\hat{J}_z, \hat{T}_x] + i[\hat{J}_z, \hat{T}_y]$$

$$\overset{(10.75)}{=} i\hbar(\hat{T}_y - i\hat{T}_x) = \hbar\hat{T}_+ \qquad (10.78)$$

$\Rightarrow$ Anwendung von $\hat{T}_+$ erhöhen EW von $\hat{J}_z$ um $\hbar$

$$[\hat{J}_+, \hat{T}_z] = [\hat{J}_x + i\hat{J}_y, \hat{T}_z] = i\hbar(-\hat{T}_y + i\hat{T}_x) = -\hbar\hat{T}_+ \qquad (10.79)$$

$$[\hat{J}^2, \hat{T}_+] = [\hat{J}_x^2, \hat{T}_+] + [\hat{J}_y^2, \hat{T}_+] + [\hat{J}_z^2, \hat{T}_+]$$

$$= \hat{J}_x[\hat{J}_x, \hat{T}_+] + [\hat{J}_x, \hat{T}_+]\hat{J}_x + (x \to y) + (x \to z)$$

$$\underset{(10.75, 10.78)}{=} i\hbar(i\hat{J}_x\hat{T}_z + i\hat{T}_z\hat{J}_x - \hat{J}_y\hat{T}_z - \hat{T}_z\hat{J}_y - \hat{J}_y\hat{T}_+ - i\hat{T}_+\hat{J}_z)$$

$$= \hbar\{\underbrace{(-\hat{J}_x - i\hat{J}_y)}_{-\hat{J}_+}\hat{T}_z + \hat{T}_z\underbrace{(-\hat{J}_x - i\hat{J}_y)}_{-\hat{J}_+} + \hat{J}_z\hat{T}_+ + \hat{T}_+\hat{J}_z)$$

$$= \hbar\{-2\hat{T}_z\hat{J}_+ - [\hat{J}_+, \hat{T}_z] + 2\hat{T}_+\hat{J}_z + [\hat{J}_z, \hat{T}_+]$$

$$\underset{(10.78, 10.79)}{=} \hbar(-2\hat{T}_z\hat{J}_+ + \hbar T_+ + 2\hat{T}_+\hat{J}_z + \hbar\hat{T}_+)$$

$$= 2\hbar(\hat{T}_+\hat{J}_z - \hat{T}_z\hat{J}_+ + \hbar\hat{T}_+) \qquad 10.80$$

$$\hat{T}_+\hat{J}^2\psi_{ij} = \hbar^2 j(j+1)\hat{T}_+\psi_{ij}$$

$$= \{\hat{J}^2\hat{T}_+ - 2\hbar(\hat{T}_+\hat{J}_z - \hat{T}_z\hat{J}_+ + \hbar\hat{T}_+)\}\psi_{ij}$$

$$\Rightarrow \hat{J}^2\hat{T}_+\psi_{ij} = \hbar^2\{j(j+1) + 2j + 2\}\hat{T}_+\psi_{ij}$$

$$= \hbar^2(j+2)(j+1)\hat{T}_+\psi_{ij}$$

$\Rightarrow$ Anwendung von $\hat{T}_+$ erhöht EWe von $\hat{J}_z$ und $\hat{J}^2$

$$\hat{T}_+\psi_{ij} = \text{konst.}\ \psi_{i+1, j+1} \qquad (10.82)$$

Da $\hat{\vec{x}}$ von der Klasse T ist:

$$(x+iy)\, Y_{\ell\ell}(\theta,\varphi) = f(r)\, Y_{\ell+1,\ell+1}(\theta,\varphi)$$

$$\Rightarrow Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \text{konst.}\, \underbrace{(\hat{L}_x - i\hat{L}_y)}_{\hat{L}_-}{}^{\ell-m} \cdot \underbrace{\left(\frac{x+iy}{r}\right)^{\ell}}_{\text{unabh. von } r} \underset{\uparrow\, Y_{00}}{1} \qquad (10.83)$$

<u>Bemerkungen:</u> $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$ u. zykl. definiert Algebra
$\rightarrow$ Gruppe

$e^{i\alpha_i \hat{L}_i}$ Elemente einer Gruppe $SU(2)$

$\uparrow$ Generatoren der Gruppe