physik421 - Übung 4

Lino Lemmer — l2@uni-bonn.de

Frederike Schrödel

Simon Schlepphorst — s2@uni-bonn.de

13. Mai 2014

4.1 Hermitesche Polynome

Die Hermitischen Polynome haben die Integraldarstellung

$$H_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^n \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, (x + \mathrm{i}y)^n \mathrm{e}^{-y^2}$$

4.1.1 Erste drei Polynome

Mit der Integraldarstellung sollen die ersten drei Polynome berechnet werden.

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^0 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, (x + \mathrm{i}y)^0 \mathrm{e}^{-y^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, \mathrm{e}^{-y^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} \\
&= 1 \\
H_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^1 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, (x + \mathrm{i}y)^1 \mathrm{e}^{-y^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, \mathrm{e}^{-y^2} + \mathrm{i} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, \underbrace{y}_{\text{unger.}} \underbrace{\mathrm{e}^{-y^2}}_{\text{ger.}} \right) \\
&= \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} + 0 \\
&= 2x \\
H_2(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, (x + \mathrm{i}y)^2 \mathrm{e}^{-y^2} \\
&= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(x^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, \mathrm{e}^{-y^2} + \underbrace{2\mathrm{i}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, y\mathrm{e}^{-y^2}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, y^2 \mathrm{e}^{-y^2} \right)
\end{aligned}$$

Hier wenden wir einen kleinen Trick an. Wir benutzen, dass $y^2 e^{-y^2} = -\frac{d}{dc} e^{-cy^2}\Big|_{c=1}$ gilt. Da diese Funktion stetig und genügend häufig differenzierbar ist, können wir Ableitung und Integration vertauschen:

$$
\begin{aligned}
&= 4x^2 + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dc} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-cy^2}\Big|_{c=1} \\
&= 4x^2 + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dc} \sqrt{\frac{\pi}{c}}\Big|_{c=1} \\
&= 4x^2 - 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{c}^3}\Big|_{c=1} \\
&= 4x^2 - 2
\end{aligned}
$$

4.1.2 Erzeugende Funktion

Zu zeigen ist, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) = \exp\left(2tx - t^2\right)$$

gilt.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2t)^n}{n!} (x - iy)^n \exp\left(-y^2\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \exp\left(2tx - 2tiy - y^2\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \exp\left(2tx - t^2 + t^2 - 2tiy - y^2\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \exp\left(2tx - t^2 - (it + y)^2\right) \\
&= \frac{\exp\left(2tx - t^2\right)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \exp\left(-(it + y)^2\right)
\end{aligned}
$$

Mit $z = it + y$ und $dz = dy$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\exp\left(2tx - t^2\right)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dz\, \exp\left(-z^2\right) \\
&= \exp\left(2tx - t^2\right).
\end{aligned}
$$

(✓) Integralgrenzen müssen eigentlich auch geändert werden: $\int_{-\infty - it}^{\infty - it} dz$

4.2 Eigenzustände des harmonischen Oszillators

4.3 Klassisch verbotener Bereich

4.4 Harmonischer Oszillator mit zusätzlichem Potenzial

Bearbeitet: Aufg. 1