Übung 6

Ausgabe: 20.05.2014, Abgabe: 27.05.2014, Besprechung: 28./30.05.2014

6.1 Kommutatoren von Lineare Operatoren

In einem Hilbertraum seien lineare Operatoren $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ gegeben. Beweisen Sie für diese die folgenden Relationen:

1. $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$ (vgl. Gl.(5.15c) aus der Vorlesung für Poisson–Klammern!)
2. $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$
3. $[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$ (Jacobi Identität)

Es gilt $[\hat{A}, \hat{C}] = 0$ und $[\hat{B}, \hat{C}] = 0$

4. Folgt daraus auch, dass $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$?

Hinweis: In der Vorlesung werden die linearen Operatoren definiert über die Wellenfunktionen, auf die sie wirken; diese Wellenfunktionen spannen einen komplexen Hilbert–Raum auf. ("Linear" heißt hier, dass $\hat{A}(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1\hat{A}\psi_1 + c_2\hat{A}\psi_2$ ist, für beliebige komplexe Konstanten c_1, c_2 und beliebige Funktionen ψ_1, ψ_2.) Ein anderes Beispiel für lineare Operatoren sind Matrizen, die mit Vektoren in einem Hilbertraum multipliziert werden können.

6.2 Kommutatoren von Operatorfunktionen

Zwei Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ mögen die Kommutatorrelation $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{C}$ erfüllen. Der Operator $\hat{C}$ kommutiere sowohl mit $\hat{A}$ als auch mit $\hat{B}$, d.h. $[\hat{A}, \hat{C}] = [\hat{B}, \hat{C}] = 0$. Zeigen Sie, dass dann für Operatorfunktionen $f(\hat{B})$ und $g(\hat{A})$ gilt:

1. $[\hat{A}, f(\hat{B})] = \hat{C}\frac{d}{d\,\hat{B}}f(\hat{B})$
2. $[g(\hat{A}), \hat{B}] = \hat{C}\frac{d}{d\,\hat{A}}g(\hat{A})$

Hinweise: Die Operatorfunktionen sind als Polynome oder Potenzreihen definiert, d.h. $f(\hat{B}) = \sum_{k=0}^{N} \beta_k \hat{B}^k$, wobei der Grenzfall $N \to \infty$ auch erlaubt ist. Zeigen Sie, dass $[\hat{A}, (\hat{B})^n] = n\hat{C}(\hat{B})^{n-1}$, mittels vollständiger Induktion.

6.3 Hermitische Konjugation von Produkten von Operatoren

Seien die $\hat{A}_i,\ i = 1, \ldots, N$, lineare Operatoren.

1. Zeigen Sie, dass für die hermitische Konjugation gilt: $(\hat{A}_1\hat{A}_2 \ldots \hat{A}_N)^\dagger = \hat{A}_N^\dagger \hat{A}_{N-1}^\dagger \ldots \hat{A}_1^\dagger$, d.h. die Reihenfolge des Produktes wird umgekehrt.
   Hinweis: Benutzen Sie die Definition $\int dx u^*(x)\hat{O}^\dagger v(x) = \int dx \left(\hat{O}u(x)\right)^* v(x)$ für beliebigen Operator $\hat{O}$ und beliebige Funktionen $u(x), v(x)$; die Behauptung kann per Induktion bewiesen werden.
2. Ist das Produkt zweier hermitischer Operatoren $\hat{A}, \hat{B}$ hermitisch, *(a)* falls, $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$, *(b)* falls $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$?

6.4 Auf- und Absteigeoperatoren

Es seien $\hat{a}_-$ und $\hat{a}_+ = (\hat{a}_-)^\dagger$ die Absteige- und Aufsteigeoperatoren des ein–dimensionalen harmonischen Oszillators, mit $\hat{a}_- u_0(x) = 0$; in der Vorlesung wurde auch gezeigt, dass die normierten Eigenfunktionen $u_n(x)$ des Hamilton–Operators die Beziehung $u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\hbar\omega_0 n}}\hat{a}_+ u_{n-1}(x)$ erfüllen, und dass $\hat{a}_-\hat{a}_+ = \hat{H} + \frac{\hbar\omega_0}{2}$.

1. Zeigen Sie, dass daraus die Beziehung

$$\hat{a}_- u_n(x) = \sqrt{\hbar\omega_0 n}\, u_{n-1}(x)$$

   folgt.

2. Zeigen Sie, dass für den "Besetzungszahl–Opertor"

$$\hat{n} := \frac{1}{\hbar\omega_0}\hat{a}_+\hat{a}_-$$

gilt:

$$\hat{n}u_n(x) = nu_n(x)$$

.

3. Verifizieren Sie die folgenden Kommutatorrelationen:
   (a) $\left[(\hat{a}_-)^m, \hat{a}_+\right] = \hbar\omega_0 m\,(\hat{a}_-)^{m-1}$
   (b) $\left[\hat{a}_-, (\hat{a}_+)^m\right] = \hbar\omega_0 m\,(\hat{a}_+)^{m-1}$
   (c) $\left[\hat{n}, (\hat{a}_-)^m\right] = -m\,(\hat{a}_-)^m$
   (d) $\left[\hat{n}, (\hat{a}_+)^m\right] = m\,(\hat{a}_+)^m$

4. Beweisen Sie explizit die Orthonormalität der Eigenzustände $u_n(x)$ des Besetzungszahloperators.
   Hinweis: Verwenden Sie $u_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a_+)^n u_0$.

5. Für jede komplexe Zahl z lässt sich ein sogenannter kohärenter Zustand $|\phi_z\rangle$ definieren durch

$$\phi_z(x) = e^{-\frac{1}{2}|z|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}u_n(x) \tag{1}$$

   (a) Zeigen Sie, dass $\phi_z(x)$ normiert ist, d.h. $\int dx\,|\phi_z(x)|^2 = 1$
   (b) Zeigen Sie, dass $\phi_z(x)$ Eigenzustand des Absteigeoperators $\hat{a}_-$ ist, d.h. $\hat{a}_-\phi_z(x) = \sqrt{\hbar\omega_0}\,z\phi_z(x)$