Übung 9

Ausgabe: 17.06.2014, Abgabe: 24.06.2014, Besprechung: 26./27.06.2014

9.1 Drehmatrix

Betrachten Sie die Matrix

$$D = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

1. Vermittelt die Matrix eine Drehung? Wenn ja, welche?
2. Was wird aus den Vektoren
$$\vec{a} = (0, -2, 1)^T , \qquad \vec{b} = (3, 5, -4)^T \tag{2}$$
nach der Drehung?
3. Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ vor und nach der Drehung.
4. Zeigen Sie, dass sich die 'Längen' der Vektoren bei der Drehung nicht ändern.

9.2 Quantenmechanischer Drehimpulsoperators

Aus dem Korrespondenzprinzip ergibt sich der Drehimpulsoperator $\hat{L} = (L_1, L_2, L_3)^T = \hat{X} \times \hat{P}$, wobei die Komponenten der Orts- und Impulsoperatoren $\hat{X}$ und $\hat{P}$ die Kommutatorrelationen $[\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar\delta_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ erfüllen.

1. Zeigen Sie, dass $\hat{L}$ hermitesch ist
2. Zeigen Sie die Kommutatorrelation
$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \hat{L}_k$$
für die Drehimpulskomponenten ab.
3. Verifizieren Sie weiterhin folgende Vertauschungsrelationen
$$[\hat{L}_i, \hat{X}_j] = i\hbar \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \hat{X}_k, \qquad [\hat{L}_i, \hat{P}_j] = i\hbar \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \hat{P}_k$$
und zeigen Sie, dass der Drehimpulsoperator mit den inneren Produkten $\hat{X}^2, \hat{P}^2, \hat{X} \cdot \hat{P}$ vertauscht.
4. Zeigen Sie, dass ein Operator, der mit zwei Komponenten des Bahndrehimpulses kommutiert, dann auch mit der dritten Komponente vertauschbar ist.

9.3 Eigenzustände zu $\hat{\vec{J}}^2$ und $\hat{J}_3$

Gegeben sei die Standardbasis $|j, m\rangle$ von Drehimpulseigenzuständen bezogen auf die Operatoren $\hat{\vec{J}}^2$ und $\hat{J}_3$, wobei $\hat{\vec{J}}$ der Gesamt–Drehimpuls ist und $\hat{J}_3$ seine $z-$Komponente.

1. Drücken Sie die Drehimpulskomponenten $\hat{J}_1 = \hat{J}_x$ und $\hat{J}_2 = \hat{J}_x$ durch die Auf- und Absteigeoperatoren $\hat{J}_\pm$ aus und leiten Sie damit $\frac{1}{2}(\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+) = \hat{\vec{J}}^2 - \hat{J}_3^2$ ab. Zeigen Sie dann $\langle \hat{J}_1 \rangle = \langle j, m|\hat{J}_1|j, m\rangle = 0$ und $\langle \hat{J}_1^2 \rangle = \frac{1}{2}(j(j + 1) - m^2)\hbar^2$ (analog für $\hat{J}_2$).
2. Ermitteln Sie zu einem Zustand $|j, m\rangle$ bei fest vorgegebenem j jene Werte von m, für welche die Unbestimmtheit der Drehimpulskomponenten J_1 und J_2 minimal wird.
Hinweise: Wann ist $(\Delta J_1)^2 = \langle J_1^2 \rangle - \langle J_1 \rangle^2$ (analog für J_2) minimal?
3. Gibt es im betrachteten Zustandsraum auch Zustände, in denen alle Komponenten des Drehimpulses einen scharfen Wert besitzen?

9.4 Drehimpulsoperator als Generator einer Drehung

Eine Drehung um die z-Achse wird durch den Rotationsoperator $e^{i\alpha\hat{L}_3/\hbar}$ beschrieben, wobei $\hat{L}_3$ die z-Komponente des Bahndrehimpulsoperators ist. Ein Zustand $|\vec{x}\rangle$ sei also gemäß $|\vec{x}'\rangle = e^{-i\alpha\hat{L}_3/\hbar}|\vec{x}\rangle$ transformiert. Berechnen Sie den transformierten Ortsoperator $\vec{X}' = e^{i\alpha\hat{L}_3/\hbar}\vec{X}e^{-i\alpha\hat{L}_3/\hbar}$, motiviert durch:

$$\langle\vec{x}'|\vec{X}|\vec{x}'\rangle = \langle\vec{x}|e^{i\alpha\hat{L}_3/\hbar}\vec{X}e^{-i\alpha\hat{L}_3/\hbar}|\vec{x}\rangle = \langle\vec{x}|\vec{X}'|\vec{x}\rangle$$

Hinweise: Verwenden Sie die Baker-Hausdorff-Formel für die einzelnen Komponenten von $\vec{X}$:

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\hat{C}_n$$

mit den linearen Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ sowie den Operatoren $\hat{C}_0 = \hat{B}$ und $\hat{C}_n = \left[\hat{A}, \hat{C}_{n-1}\right]$ $(n = 1, 2, \ldots)$, wobei $e^{\hat{A}}$ durch die Taylorreihe wie folgt definiert ist:

$$e^{\hat{A}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\hat{A}^n$$

Die nach Berechnung der Kommutatoren auftretenden Summen können zu $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ zusammengefasst werden, so dass Sie die bekannte Drehung eines Vektors um die z-Achse für den Ortsoperator erhalten.