Theoretische Physik III

Übungsblatt 2

Jan Weber
s6jawebe@uni-bonn.de

Tobias Brauell
s6tobrau@uni-bonn.de

28. April 2014

1 Entartung von Energieniveaus

Zu zeigen ist, dass bei einer eindimensionalen, stationären Schrödingergleichung mit einem zeitunabhängigen Potential $V(x)$ kein Energieniveau des diskreten Spektrums entartet ist.

$$i\hbar\partial_t\psi(x,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta^2 + V(x)\right)\psi(x,t) \tag{1}$$

Für zwei Wellenfunktionen gilt also:

$$\begin{aligned}
H\psi_1 = E\psi_1 H\psi_2 &= E\psi_2 && (2)\\
E\psi_1 = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x)\right)\psi_1 E\psi_2 &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x)\right)\psi_2 && (3)\\
E\psi_1\psi_2 = \left(\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x)\right)\psi_1\right)\psi_2 E\psi_2\psi_1 &= \left(\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x)\right)\psi_2\right)\psi_1 && (4)
\end{aligned}$$

Beide Gleichungen werden nun gleich gesetzt und die Klammern aufgelöst:

$$\left(\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x)\right)\psi_1\right)\psi_2 = \left(\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x)\right)\psi_2\right)\psi_1 \tag{5}$$

$$\cancel{-\frac{\hbar^2}{2m}}\psi_1''\psi_2 + \cancel{V(x)\psi_1\psi_2} = \cancel{-\frac{\hbar^2}{2m}}\psi_1\psi_2'' + \cancel{V(x)\psi_1\psi_2} \tag{6}$$

Das liefert also:

$$\psi_1''\psi_2 - \psi_1\psi_2'' = 0 \tag{7}$$

Nun Intergrieren wir zwei mal partiell:

$$\begin{aligned}
\int \left(\psi_1''\psi_2 - \psi_1\psi_2''\right)dx &= \psi_1'\psi_2 - \cancel{\int \left(\psi_1'\psi_2'\right)dx} - \psi_1\psi_2' + \cancel{\int \left(\psi_1'\psi_2'\right)dx} + C && (8)\\
&= \psi_1'\psi_2 - \psi_1\psi_2' && (9)
\end{aligned}$$

Hier muss es noch weiter gehen.

2 Delta-Potential

In dieser Aufgabe sollen Eigenwerte und normierte Eigenfunktionen eines δ-Potentials $V(x) = -\alpha\delta(x)$ berechnet werden. Dabei sollen die Energien als negativ betrachtet werden. Es ergibt sich also die folgende Schrödingergleichung:

$$i\hbar\partial_t\psi(x,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \alpha\delta(x)\right)\psi(x,t) = -E\psi(x,t) \tag{10}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' - \alpha\delta(x)\psi = -E\psi \tag{11}$$

Für die Grenzbedingung bei $x = 0$:

$$E\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx\psi = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx\alpha\delta(x)\psi \tag{12}$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m}\big(\psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon)\big) + \alpha\psi(0) \tag{13}$$

Nun wird der Grenzwert $\epsilon \to 0$ gebildet:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\big(\psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon)\big) + \alpha\psi(0)\right) \tag{14}$$

$$\Rightarrow \psi'(0^+) - \psi'(0^-) = -\frac{2m\alpha}{\hbar}\psi(0) \tag{15}$$

Damit die Grenzwerte 0^+ und 0^- existieren muss die Wellengleichung ψ an der Stelle $\psi(0)$ stetig sein.

Hier muss es noch weiter gehen.

3 Stückweise konstantes Potential

4 Streuung am Potentialwall