Schrödinger-Gl: $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x},t)\right)\psi(\vec{x},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t)$

Falls $V$ unabhängig von $t$: $\psi(\vec{x},t) = u(\vec{x})v(t)$, mit $v(t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x})\right)u(\vec{x}) = E\,u(\vec{x})$$

Für $V = \begin{cases} V = \text{konst}, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$

$$4e^{-ika} = Te^{ika}\left[e^{-2\kappa a}\left(2 + i\frac{k^2-\kappa^2}{k\kappa}\right) + e^{i\kappa a}\left(2 - i\frac{k^2-\kappa^2}{k\kappa}\right)\right] \quad (3.25)$$

## Grenzfälle

a) Dünne /niedrige Barriere:

$$\kappa a \ll 1 \underset{(3.22)}{\Leftrightarrow} 2m(V-E) \ll \frac{\hbar^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow e^{\pm 2\kappa a} = 1 \pm 2\kappa a + 2\kappa^2 a^2$$

$$\underset{(3.15)}{\Rightarrow} |T|^2 = \frac{16}{\left|(1-2\kappa a + 2\kappa^2 a^2)\left(2 + i\frac{k^2-\kappa^2}{k\kappa}\right) + (1+2\kappa a + 2\kappa^2 a^2)\left(2 - i\frac{k^2-\kappa^2}{k\kappa}\right)\right|^2}$$

$$= \frac{16}{\left|4 + 8\kappa^2 a^2 - 4i\kappa a\frac{k^2-\kappa^2}{k\kappa}\right|^2}$$

$$= \frac{1}{(1+2\kappa^2 a^2)^2 + a^2\frac{(k^2-\kappa^2)^2}{k^2}}$$

$$\underset{(3.19,\ 3.22)}{=} \frac{1}{(1+2\kappa^2 a^2)^2 + a^2\frac{[2mE - 2m(V-E)]^2}{2mE\hbar^2}}$$

$$= \frac{1}{(1+2\kappa^2 a^2)^2 + \underbrace{\frac{2a^2 mE}{\hbar^2}}_{a^2k^2}\left(\frac{V}{E}-2\right)^2} = |T|^2 \qquad (3.26)$$

b) <u>Dicke / hohe Barriere:</u>

$$\kappa a \gg 1 \underset{(3.22)}{\Leftrightarrow} 2m(V-E) \gg \frac{\hbar^2}{a^2}$$

Beinhaltet klassischen Grenzfall: $\hbar \to 0$

$$\Rightarrow e^{2\kappa a} \gg e^{-2\kappa a}$$

$$\Rightarrow |T|^2 = \frac{16 e^{-4\kappa a}}{4 + \frac{(k^2-\kappa^2)^2}{k^2\kappa^2}}$$

$$= \frac{16 e^{-4a\sqrt{2m(V-E)}/\hbar}}{4 + \underbrace{\frac{[2mE - 2m(V-E)]^2}{2mE \cdot 2m(V-E)}}}$$

$$= \frac{4E(V-E) + [E-(V-E)]^2}{E(V-E)} = \frac{(E+(V-E))^2}{E(V-E)}$$

$$\Rightarrow |T|^2 = \frac{16 e^{-\frac{4a}{\hbar}\sqrt{2m(V-E)}} \cdot E(V-E)}{V^2} \qquad (3.27)$$

Tunnelwahrscheinlichkeit ist exponentiell unterdrückt, aber $>0$!

Relevante Größen: $a\kappa_{max} := a \cdot \frac{\sqrt{2mV}}{\hbar}$ $\quad \frac{E}{V}$ dimensionslos!

Beispiel:

**Mensch durch geschlossene Tür?**

Sei $V - E = 1\,eV / \text{Molekül}$ ; $a = 1\,cm$

Körper: $70\,kg\ H_2O \simeq 5 \cdot 10^{27}$ Moleküle

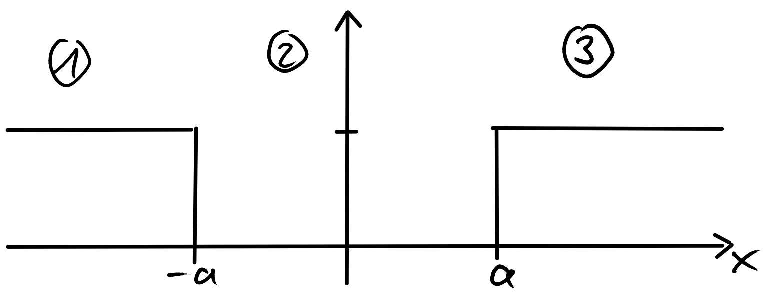
$$\Rightarrow V - E = 5 \cdot 10^{27}\,eV \approx 10^{9}\,J = 10^{9}\,\frac{kg\,m^2}{s^2}$$

$$\Rightarrow 4a\kappa = \frac{4a\sqrt{2M(V-E)}}{\hbar} \simeq 0{,}04\,m\,\frac{\sqrt{140\,kg \cdot 10^{9}\,\frac{kg\,m^2}{s^2}}}{10^{-34}\,kg\,m^2/s}$$

$$\approx 1{,}5 \cdot 10^{38}$$

$$\Rightarrow |T|^2 \sim e^{-(1{,}5 \cdot 10^{38})} \sim 10^{-(6{,}5 \cdot 10^{37})} = 0 \quad \text{FAPP.}$$

## 3 c) Eindimensionaler Potentialtopf




$$V(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq a \\ V = \text{konst}, & |x| > a \end{cases} \qquad (3.28)$$

$E < V \Rightarrow$ Klassisch kann sich das Teilchen nur im Bereich $|x| \leq a$ aufhalten:

"Gebundener Zustand" jeder Wert von $E$ erlaubt.

In QM: *) $\psi\,(|x| > a) \neq 0$ (aber gebunden, d.h. $\psi(|x| \to \infty) \to 0$)

*) Nur diskrete Werte von $E$ erlaubt!

Faktorisierung $\Rightarrow v(t) \underset{(3.14)}{=} e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$

$|x| \leq a$ : $V = 0 \Rightarrow u(x) = A_2 e^{ikx} + B_2 e^{-ikx}$ $\quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ (3.29a)

$|x| > a$ : $V - E > 0 \Rightarrow u(x) = A_i e^{\kappa x} + B_i e^{-\kappa x}$ $\quad \kappa = \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar}$ (3.29b)

$i = 1, 3$

6 Konstanten $A_i, B_i$ 4 Stetigkeitsbedingungen ?

<u>Benutze Symmetrie:</u> $V(-x) = V(x)$ , $\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d^2}{d(-x)^2}$

Wenn $\frac{d^2u(x)}{dx^2} \underset{(3.15)}{=} \frac{2m}{\hbar^2}(V(x) - E)\,u(x) \quad \forall x$

$$\underset{\text{subst.}}{\Rightarrow} \underbrace{\frac{d^2u(-x)}{d(-x)^2}}_{\frac{d^2u(-x)}{dx^2}} = \frac{2m}{\hbar^2}(\underbrace{V(-x)}_{=V(x)} - E)\,u(-x)$$

$\Rightarrow u(-x)$ ist auch Lösung der Schrödinger-Gleichung!

$\Rightarrow$ können uns beschränken auf:

gerade Lösungen:

$$u_g(x) = u(x) + u(-x) \quad \Rightarrow \quad u_g(x) = u_g(-x)$$

ungerade Lösungen:

$$u_u(x) = u(x) - u(-x) \quad \Rightarrow \quad u_u(-x) = -u(x)$$

$x \to -x$ : Paritäts-Operation (Spiegelung am Ursprung)

Wenn $V(x) = V(-x)$ : "Parität ist eine gute Quantenzahl"

Hier: $A_2 = \pm B_2$ $\quad$ ($+$: $u_g$, $-$: $u_u$)

<u>Fall g:</u> $u(x) = \cos kx \qquad |x| \leq a$ (3.30)

$u$ muss <u>überall</u> gerade sein

$\Rightarrow A_1 e^{-\kappa|x|} + B_1 e^{\kappa|x|} = A_3 e^{\kappa|x|} + B_3 e^{-\kappa|x|} \qquad \forall x$

$\Rightarrow A_1 = B_3 \quad , B_1 = A_3$ (3.31)

Stetigkeit bei $x = a$:

Für $u$: $\cos ka = A_3 e^{\kappa a} + B_3 e^{-\kappa a}$ (3.32a)

Für $u'$: $-k \sin ka = \kappa (A_3 e^{\kappa a} - B_3 e^{-\kappa a})$ (3.32b)

$(3.32a) + \frac{1}{\kappa}(3.32b) \Rightarrow 2 A_3 e^{\kappa a} = \cos ka - \frac{k}{\kappa} \sin ka$ (3.33)

Gebiet ③ geht bis $x \to +\infty \Rightarrow$ nur normierbar, wenn $A_3 = 0$ (3.34)

$\underset{(3.33)}{\Rightarrow} \cos ka = \frac{k}{\kappa} \sin ka \Rightarrow \tan ka = \frac{\kappa}{k}$ <u>gerade</u> (3.35)

Nur endlich viele Lösungen für $E \Rightarrow k, \kappa$

<u>Fall u:</u> $u(x) = \sin kx \qquad |x| \leq a$ (3.36)

$u$ überall ungerade:

$A_1 e^{-\kappa|x|} + B_1 e^{\kappa|x|} = -(A_3 e^{\kappa|x|} + B_3 e^{-\kappa|x|}) \qquad \forall x$

$\Rightarrow A_1 = -B_3 \qquad B_1 = -A_3$ (3.37)

Stetigkeit bei $x = a$:

Für $u$: $\sin ka = A_3 e^{\kappa a} + B_3 e^{-\kappa a}$ (3.38a)

Für $u'$: $k \cos ka = \kappa (A_3 e^{\kappa a} - B_3 e^{-\kappa a})$ (3.38b)

$(3.38a) + \frac{1}{\kappa}(3.38b)$: $\quad \sin ka + \frac{k}{\kappa}\cos ka = 2A_3 e^{\kappa a} \overset{!}{=} 0 \quad (A_3 \overset{!}{=} 0)$

$\Rightarrow \tan ka = -\frac{k}{\kappa}$ (ungerade) (3.39)

Hat endlich viele Lösungen für a.

$K_{max} = a\frac{\sqrt{2mV}}{\hbar} \leq \frac{\pi}{2}$ keine Lösung

<u>Beachte:</u> "Quantisierung" folgt aus Konsitenzbedingung (3.8), d.h. physikalisch sinnvolles Verhalten für $x \to \pm\infty$

Grenzfall $V \to \infty \underset{(3.29b)}{\Rightarrow} \kappa \to \infty$, da $A_3 = 0$

$\Rightarrow u(x) \to 0$ für $|x| > a$

$\Rightarrow$ Stetigkeit: $u(a) = 0$

<u>Fall g:</u> $\cos ka = 0 \Rightarrow ka = (n + \frac{1}{2})\pi \quad , n = 0, 1, 2, \ldots$ (3.40)

<u>Fall u:</u> $\sin ka = 0 \Rightarrow ka = n\pi \quad , n = 1, 2, 3, \ldots$ (3.41)

Ähnlich Resonator, anders als klassisches Teilchen

Energie: $E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2ma^2}\left(\frac{n}{2}\pi\right)^2 \quad n = 1, 2, \ldots$ (3.42)

$E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2} > 0$ Unschärferelation!

$\delta x \simeq a \Rightarrow \delta P_x \sim \frac{h}{a} \gtrsim \sqrt{P_x^2}$

$\Rightarrow E = \frac{P_x^2}{2m} \gtrsim \frac{h^2}{2ma^2}$