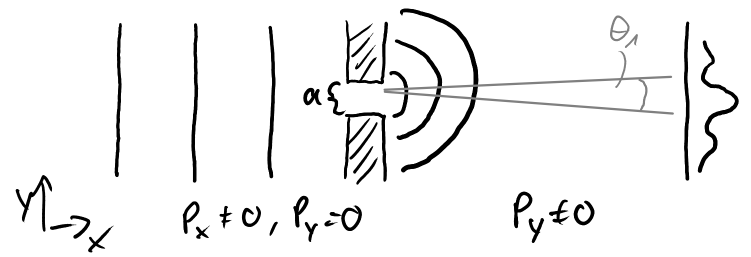
2d) Unschärferelation I

Ebene Welle fällt auf einzelnen Spalt: Wird gebeugt!



Wechselwirkung mit Spalt verändert Impuls der Welle

1. Interferenzminimum bei $\sin\theta_1 = \frac{\lambda}{a}$ (2.22)

Unbestimmtheit von P_y:

$-\sin\theta_1 P \lesssim P_y \lesssim \sin\theta_1 P$: P_y statistisch verteilt

$$\delta P_y \simeq P \sin\theta_1 \underset{(1.10,\ 2.22)}{=} \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{a} = \frac{h}{a} \qquad (2.23)$$

Teilchen muss durch Spalt gekommen sein

$\Rightarrow$ Unbestimmtheit $\delta y \simeq a$

$$\Rightarrow \boxed{\delta y \cdot \delta P_y \simeq h} \quad : \text{Approximativ } (\rightarrow \text{Kap. 7}) \qquad (2.24)$$

y, P_y sind <u>Komplimentär:</u> Können nicht beide gleichzeitig beliebig genau bestimmen. Andere Paare: x, P_x; z, P_z; t, E;
$\underbrace{L_x, L_y}_{\text{Drehimpulse}}$;

Ist eine prinzipielle Einschränkung

3) Die Schrödinger-Gleichung

a) Die Bewegungsgleichung der Wellenmechanik

Gewünschte Eigenschaften:

*) Soll zeitliche Entwicklung der Wellenfunktion $\psi(\vec{x},t)$ beschreiben
Partielle Differentialgleichung!

*) Interferenz $\Rightarrow$ Gleichung soll linear in ψ sein

*) Für konstantes Potential: Ebene Welle soll Lösung sein:

$$\psi_{EW}(\vec{x},t) = A\exp\left[i\frac{\vec{p}\vec{x}}{\hbar} - i\frac{Et}{\hbar}\right] \tag{3.1}$$

Laplace-Operator: $\Delta\psi_{EW} := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi_{EW}(\vec{x},t)$, $\vec{x} = (x,y,z)$

$$\text{z.B. } \frac{\partial}{\partial x}\psi_{EW} = A\frac{ip_x}{\hbar}\exp[\ldots] = \frac{ip_x}{\hbar}\psi_{EW} \tag{3.2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_{EV} = \left(\frac{ip_x}{\hbar}\right)^2\psi_{EW} = \frac{-p_x^2}{\hbar^2}\psi_{EW} \tag{3.3}$$

$$\Rightarrow \Delta\psi_{EW} = -\frac{1}{\hbar^2}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)\psi_{EW} = -\frac{\vec{p}^2}{\hbar^2}\psi_{EV} \tag{3.4}$$

$$\text{Analog: } \frac{\partial}{\partial t}\psi_{EV} = \frac{-iE}{\hbar}\psi_{EV} \tag{3.5}$$

Totale (nicht relativistische) Energie: $E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V$ (3.6)

Bislang: $V =$ konst.

$$\Rightarrow \left(\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta + V\right)\psi_{EV} \underset{(3.4)}{=} \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + V\right)\psi_{EW} \underset{(3.6)}{=} E\psi_{EW} \underset{(3.5)}{=} -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi_{EW}$$

$$= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_{EV}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right)\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi} \tag{3.7}$$

(Schrödinger 1926) Korrekt auch falls V <u>nicht</u> konstant!

Erinnerung: $|\psi|^2$ ist Wahrscheinlichkeitsdichte

$\Rightarrow$ *) ψ muss normierbar sein, d.h. $\int d^3x \, |\psi(\vec{x},t)|^2$ muss endlich sein $\forall t$ (3.8)

*) ψ muss stetig und hinreichend oft differenzierbar sein. (3.9)

Manchmal: Benutzen Wellenfunktionen, die nicht alle diese Eigenschaften erfüllen, z.B.: ψ_{EW} nicht normierbar

Operator auf der linken Seite von (3.7):

Hamilton Operator, $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V$ (3.10)

Falls V nicht von t abhängt: Faktorisierungs-Ansatz:

$\psi(\vec{x},t) := u(\vec{x})\, v(t)$ (3.11)

$\overset{(3.7)}{\Rightarrow} \left[\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right)u(\vec{x})\right]v(t) = u(\vec{x})\, i\hbar \frac{\partial}{\partial t} v(t) \quad \Big| \frac{1}{uv}$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right)u(\vec{x})}{u(\vec{x})}}_{\text{unabh. von } t} \underset{\forall \vec{x},t}{=} \underbrace{\frac{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} v(t)}{v(t)}}_{\text{unabh. von } \vec{x}} = E \;(= \text{konst.}) \quad (3.12)$$

$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial v}{\partial t} = E\, v(t) \Rightarrow \boxed{v(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}}$ (3.13)

Konsistent mit Ebener Welle

$(3.12, 3.10) \Rightarrow \boxed{\hat{H}\, u(\vec{x}) = E\, u(\vec{x})}$ (3.14)

zeitunabh. Schrödinger-Gl. Eigenwert-Problem: Energie E ist Eigenwert d. Hamilton. Operators $u(\vec{x})$ ist Eigenfunktion (Eigenzustand)

Konsistenzbedingungen (3.8), (3.9) oft nur diskrete Werte von E erlaubt.

Verschiedene erlaubte Eigenwerte E können verschiedene Eigenfunktionen u_E haben $\Rightarrow$ Überlagerung ist auch Lösung:

$$\psi(\vec{x},t) = \sum_E c_E \, e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \, u_E(\vec{x}) \qquad (3.15)$$

Kann zeigen ($\to$ 6. Kap.): Eigenzustände sind orthogonal:

$$\int d^3x \; u_E^*(\vec{x}) u_{E'}(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & E = E' \\ 0, & E \neq E' \end{cases} \qquad (3.16)$$

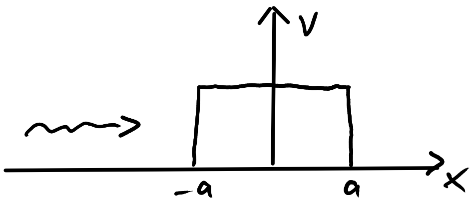
$$\Rightarrow \int |\psi(\vec{x},t)|^2 d^3x = \sum_{E,E'} c_E^* c_{E'} \, e^{\frac{i}{\hbar}(E-E')t} \underbrace{\int d^3x \; u_E^*(\vec{x}) u_{E'}(\vec{x})}_{\delta_{EE'} \; (3.16)}$$

$\Rightarrow |c_E|^2$ ist Wahrscheinlichkeit, dass Teilchen im Zustand (3.15) die Energie E hat (siehe 2.11)

3b) Eindimensionales Tunneln

Lösungen d. Schrödinger-Gl. können Eigenschaften haben, die der klassischen Physik widersprechen.

Beispiel: Ebene Welle trifft auf Potenzialbarriere



$$V(x) = \begin{cases} V = \text{konst}, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

Das einfallende Teilchen habe Energie $E < V$ (3.18)

$\Rightarrow$ Kann klassisch die Barriere <u>nicht</u> überwinden

$$\psi_{ein} = e^{i(kx-\omega t)} \quad , \; k = \frac{p}{\hbar} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \; ; \quad \omega = \frac{E}{\hbar} \qquad (3.19)$$

für $x < -a$

Diese Welle ist z.T. reflektiert, z.T. transmittiert

Energieerhaltung $\Rightarrow$ $\psi_R(x,t) = R\, e^{i(kx+\omega t)}$, $x < -a$ (3.20)

$\psi_T(x,t) = T e^{i(kx-\omega t)}$, $x > a$ (3.21)

$R, T \in \mathbb{C}$

Für $|x| \leq a$: V ist unabh. von t $\Rightarrow$ $v(t) = e^{-i\omega t}$

unverändert

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V\right)u(x) = E\,u(x) \Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(x)}{dx^2} = (V-E)\,u(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u(x)}{dx^2} = \underbrace{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}}_{>0 \; (3.18)} u(x)$$

$$\Rightarrow u(x) = A e^{\varkappa x} + B e^{-\varkappa x} \qquad (3.21) \quad A, B \in \mathbb{C}$$

$$\varkappa = \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar} \qquad (3.22)$$

Stetigkeit:

ψ bei $x = -a$: $e^{-ika} + R e^{ika} = A e^{-\varkappa a} + B e^{\varkappa a}$ (3.23a)

ψ' bei $x = -a$: $ike^{-ika} - ikRe^{ika} = A\varkappa e^{-\varkappa a} - B\varkappa e^{\varkappa a}$ (3.23b)

ψ bei $x = a$: $Te^{ika} = A e^{\varkappa a} + B e^{-\varkappa a}$ (3.23c)

ψ' bei $x = a$: $ikTe^{ika} = A\varkappa e^{ka} - B\varkappa e^{-\varkappa a}$ (3.23d)

Wollen T berechnen! $\Rightarrow (3.23a) + \frac{1}{ik}(3.23b)$

$$2e^{-ika} = Ae^{-\varkappa a}\left(1 - \frac{i\varkappa}{k}\right) + Be^{\varkappa a}\left(1 + \frac{i\varkappa}{k}\right) \qquad (3.24a)$$

$\Rightarrow (3.23c) \pm \frac{1}{\varkappa}(3.23d)$:

$$2Ae^{\varkappa a} = Te^{ika}\left(1 + \frac{ik}{\varkappa}\right) \qquad (3.24c)$$

$$2Be^{-\varkappa a} = Te^{ika}\left(1 - \frac{ik}{\varkappa}\right) \qquad (3.24d)$$

Einsetzen (3.24 b,c) in (3.24a):

$$2e^{-ika} = \frac{1}{2}Te^{ika}\Big[e^{-2\varkappa a}\left(1 - \frac{i\varkappa}{k}\right)\left(1 - \frac{ik}{\varkappa}\right) + e^{2\varkappa a}\left(1 + \frac{i\varkappa}{k}\right)\left(1 - \frac{i\varkappa}{k}\right)\Big]$$

$$= \frac{1}{2}Te^{ika}\Big[e^{-2\varkappa a}\left(1 - i^2 - \frac{i\varkappa}{k} + \frac{ik}{\varkappa}\right) + e^{2\varkappa a}\left(1 - i^2 - \frac{i\varkappa}{k} - \frac{ik}{\varkappa}\right)\Big]$$

$$\Rightarrow e^{-ika} = \frac{1}{4}Te^{ika}\Big[e^{-2\varkappa a}\left(2 + i\frac{k^2 - \varkappa^2}{k\varkappa}\right) + e^{2\varkappa a}\left(2 + i\frac{\varkappa^2 - k^2}{k\varkappa}\right)\Big]$$

Transmissions-Wahrscheinlichkeit $= |T|$

Reflektions-Wahrscheinlichkeit $= |R|^2$

$|R|^2 + |T|^2 = 1$ (→ Übung)