Übung 2

Ausgabe: 22.04.2014, Abgabe: 29.04.2014, Besprechung: 02.05.2014

2.1 Entartung von Energieniveaus

Zeigen Sie, dass bei einer 1-dimensionalen stationären Schrödingergleichung mit einem Potential $V(x)$ kein Energieniveau des diskreten Spektrums entartet ist. Wenn also Ψ_1 und Ψ_2 Eigenfunktionen zu derselben Energie E sind, dann müssen Ψ_1 und Ψ_2 linear abhängig sein.
Hinweis: Zeigen Sie: $\Psi_1''\Psi_2 - \Psi_1\Psi_2'' = 0$ und integrieren Sie diese Gleichung zweimal. Die erste Integrationskonstante lässt sich über die Randbedingungen bestimmen.

2.2 δ-Potential

Diese Aufgabe behandelt die Bindungszustände eines δ-förmiges Potential $V(x) = -\alpha\delta(x)$, für welche die Eigenwerte und die normierten Eigenfunktionen ermittelt werden sollen.

Zur Erinnerung: $\delta(x)$, die sogenannte Delta-Funktion, hat folgende Eigenschaften: $\delta(x) = 0$ für $x \neq 0$ und $\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x)f(x)dx = f(0)$ für beliebiges $\epsilon > 0$.

Lösen sie die Eigenwertgleichung für H unter der Annahme, dass die Energie des Teilchens negativ ist (gebundene Zustände). Welche der Grenzbedingungen müssen in diesem Fall für Ψ und $\partial\Psi/\partial x$ bei $x = 0$ gelten? Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Eigenfunktionen.
Hinweis: Integrieren Sie die Eigenwertgleichung von H zwischen $-\epsilon$ und ϵ und bilden Sie den Limes $\epsilon \to 0$.

2.3 Stückweise konstantes Potential

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einem eindimensionalen, stückweise konstanten Potential:

$$V(q) = \begin{cases} V_1 & \text{für} \quad -\infty < q \leq -q_0 \\ 0 & \text{für} \quad -q_0 < q < +q_0 \\ V_3 & \text{für} \quad +q_0 \leq q < +\infty \end{cases} \tag{1}$$

1. Formulieren Sie die Schrödinger-Gleichung und geben Sie für die Wellenfunktion die Anschlussbedingungen bei $\pm q_0$ an. Benutzen Sie dazu die Abkürzungen:

$$k^2 = \tfrac{2m}{\hbar^2}E \qquad \kappa_{1,3}^2 = \tfrac{2m}{\hbar^2}(V_{1,3} - E) \tag{2}$$

2. Zeigen Sie, dass sich die diskreten Eigenenergien aus der transzendenten Gleichung

$$1 = e^{-4ikq_0}\frac{V_3}{V_1}\left(\frac{k + i\kappa_1}{k - i\kappa_3}\right)^2 \tag{3}$$

bestimmen lassen.
(*Tipp:* Verwenden Sie die Bedingung für die Säkulardeterminante des unter 1. hergeleiteteten Gleichungssystem, dass eine Lösung existiert.)

3. Bringen Sie die Bestimmungsgleichung aus 2) in die Form:

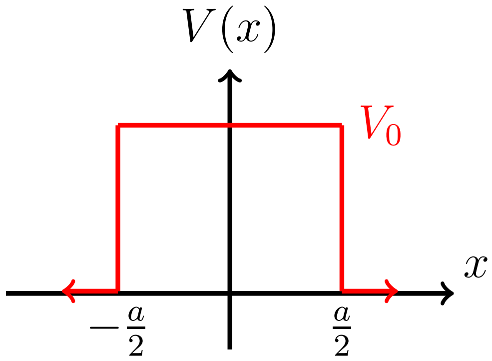
$$f(E) = \arcsin\sqrt{\frac{E}{V_1}} + \arcsin\sqrt{\frac{E}{V_3}} = n\pi - 2q_0k\,, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4}$$

(*Tipp*: Benutzen Sie für die komplexen Wellenzahlkombinationen deren Polardarstellungen.)

4. Zeigen Sie mit Hilfe einer graphischen Diskussion, dass das Eigenwertspektrum diskret ist.

5. Vergleichen Sie die Eigenwerte bei $V_3 = V_1$ mit denen bei $V_3 = 2V_1$. Wie verschiebt sich das Eigenwertspektrum?

2.4 Streuung am Potentialwall



Betrachten Sie die Streuung eines freien, von links einlaufenden Teilchens $\propto e^{ik(x-vt)}$ mit $v = \omega/k > 0$ an einem Potentialwall ($V_0 > 0$)

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad |x| \geq \frac{a}{2} \\ V_0 & \text{für} \quad |x| < \frac{a}{2} \end{cases}$$

Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung und bestimmen Sie die Energieeigenwerte für den Fall $0 < E < V_0$ in folgenden Schritten:

1. Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion folgende Form hat

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx} & \text{für} \quad x \leq -\frac{a}{2} \\ Ae^{qx} + Be^{-qx} & \text{für} \quad -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ Te^{ikx} & \text{für} \quad x \geq \frac{a}{2} \end{cases} \qquad \text{mit} \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad q = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

   mit dem Reflexionskoeffizient R und dem Transmissionskoeffizient T.

2. Formulieren Sie die Anschlussbedingungen, welche auf folgendes Gleichungssystem führen:

$$\begin{pmatrix} (1 - i\frac{q}{k})e^{-qa/2} & (1 + i\frac{q}{k})e^{qa/2} \\ (1 + i\frac{q}{k})e^{qa/2} & (1 - i\frac{q}{k})e^{-qa/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-ika/2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Lösen Sie das Gleichungssystem und ermitteln Sie A und B.

3. Berechnen Sie mit Hilfe von A und B aus den Anschlussbedingungen den Reflexions- R und Transmissionskoeffizient T. Welche Eigenschaft steht im Widerspruch zum klassischen Verhalten?