

---

# TMA4320 vår 2020

---

Niels Henrik Aase, Jens O. Andersen og Thorvald Ballestad

March 23, 2020

## Kompakte stjerner



Prosjektperiode: 23. mars – 14. april.

## Praktisk informasjon

Grunnet COVID-19-situasjonen er dette prosjektet *frivillig*. Studenter som velger å levere vil få en vurdering, denne vurderingen vil *kun* telle positivt på endelig karakter. Innleveringen funker på samme måte som Prosjekt 1 og 2, altså gruppearbeid med grupper på 1-3 personer (maksimalt 4). Vi oppfordrer til digitalt samarbeid så langt det er praktisk mulig. Alle relevante filer skal legges i en zip-mappe, som leveres på Insperia. Det er valgfritt om man velger å skrive besvarelse i L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X eller Jupyter, men i begge tilfeller skal all kode være vedlagt.

Situasjonen gjør at veiledning blir noe vanskeligere enn vanlig. Spørsmål kan stilles gjennom Piazza, der studentassistenter vil svare så fort som mulig. Listen under er forslag til noen ressurser som kan være nyttige for å løse prosjektet.

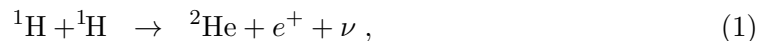
- [https://nbviewer.jupyter.org/urls/www.numfys.net/media/notebooks/Eulers\\_method\\_-\\_updated\\_module\\_-\\_Done\\_1.ipynb](https://nbviewer.jupyter.org/urls/www.numfys.net/media/notebooks/Eulers_method_-_updated_module_-_Done_1.ipynb) Dekker gloobal og lokal trunkeringsfeil, samt hvordan man kan løse høyere ordens diff. ligninger ved å skrive dem som et system av førsteordens ligninger. Viser både kode og teori som er nødvendig i prosjektet.
- [https://nbviewer.jupyter.org/urls/www.numfys.net/media/notebooks/projectile\\_motion.ipynb](https://nbviewer.jupyter.org/urls/www.numfys.net/media/notebooks/projectile_motion.ipynb) Dekker hvordan man implementerer Runge-Kutta 4. orden

Innleveringsfrist: 14. april.

Vurderingsansvarlig: Haakon Thømt Simensen [haakon.t.simensen@ntnu.no](mailto:haakon.t.simensen@ntnu.no).

## 1 Introduksjon

Ei stjerne er ei gassky som består av delvis ionisert gass. Stjerner blir danna gjennom gravitasjonskollaps av molekylsaker. Når skya byrjar å kollapse, blir delar av gravitasjonsenergien omdanna til varme og temperaturen stig.<sup>1</sup> Når temperaturen i sentrum av kjerna er høg nok til at hydrogen kan fusjonere til helium har vi ei *protonstjerne*. Temperaturen er typisk høgare enn  $10^7$  K. Prosessane i sentrum er



Her er  $e^+$  eit antielektron (positron),  $\nu$  er eit nøytrino og  $\gamma$  er eit foton. Sola er ei stjerne der fusjonsprosessane foregår i sentrum av kjerna. Slike prosessar produserer altså fotonar som diffunderer ut til overflata. Frå eit foton forlet sola til vi mottek det på jorda går det ca 8 min. Etterkvart som alt hydrogenet i det indre av stjerna er brukt opp, byrjar fusjon

---

<sup>1</sup>Her er det snakk om gravitasjonell potensiell energi som minkar ettersom skya kollapsar. Energien blir då “frigjort”.

av helium og fusjon av hydrogen i eit skall utafor. Då er temperaturen ca  $10^8\text{K}$ . Prosessane i sentrum er nå



N og O blir produsert i liknande prosessar. Dette gjev opphav til ein laukstruktur som vist i figur 1. Kva som skjer vidare er avhengig av massen til stjerna. Grovt sett har vi tre ulike

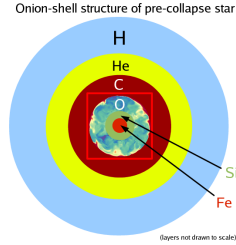


Figure 1: Skallstruktur i stjerne.

tilfelle

- Viss massen til stjerna er 1-2 solmassar vil prosessane stoppe opp ved elementa  $C$ ,  $N$  og  $O$ . Då vil stjerna ende opp som ein kvit dverg. Sola vil ende som ein kvit dverg om ca 5 milliardar år. Ein kvit dverg består av eit gitter av  $C$ ,  $N$  og  $O$  med elektronar rundt.
- Viss massen til stjerna er meir enn omlag eit par solmassar men mindre enn ca 8 solmassar, er temperaturen høg nok til at fusjonsprosessane kan halde fram. Dei held fram til ein får  $\text{Fe}$ . Då stoppar fusjonsprosessane opp og vi får til slutt ei nøytronstjerne.<sup>2</sup> Ei nøytronstjerne består stort sett av nøytronar, protonar og elektronar.
- Viss massen til stjerna er meir enn ca 8 solmassar kollapsar den til slutt til eit svart hol. Svarte hol har mange interessante eigenskapar som vi ikkje kan gå inn på her.

Ein kvit dverg har ca same masse som sola men radien er mykje mindre, ca lik jordradien. Ei nøytronstjerne er  $1-2 M_{\odot}$  men radien er ca 10km. Eit slikt objekt er difor særskilt kompakt. Massen og radien til ei stjerne er to av dei eigenskapane ein kan observere. Vi er interessert i å forstå samanhengen mellom masse og radius fordi dette gjev informasjon om naturkreftene mellom partiklane i stjerna. *Masse-radius relasjonen* er difor ein av dei viktigaste kurvene vi kan rekne ut. Vi må fyrst utleie *strukturelikningane* for stjerna. Det er dei likningane vi må løyse for å finne samanhengen mellom radien  $R$  og massen  $M$  til stjerna.

<sup>2</sup>For at fusjonsprosessane skal gå må det bli frigjort energi. Dette skjer ikkje for tyngre element enn jern.

Ei stjerne roterer om eigen akse på same måte som jorda roterer om eigen akse. Ei stjerne er difor ikkje kulesymmetrisk. For å kunne rekne på kompakte stjerner skal vi likevel anta at dei er kulesymmetriske. At stjerna er kulesymmetrisk tyder at massetetttheiten  $\rho$  berre er avhengig av avstanden til sentrum av stjerna. Det er difor klokt å velje kulekoordinatar  $(r, \theta, \phi)$  og vi har

$$\rho = \rho(r) . \quad (6)$$

Massen som ligg innafor eit kuleskall med radius  $r$  er gjeven ved

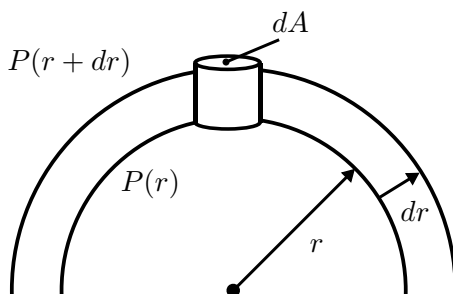


Figure 2: Kuleskall. Gravitasjonskrafta på eit kuleskall er lik trykkforskjellen mellom  $r + dr$  and  $r$  ganger  $4\pi r^2$ .

$$m(r) = \int \rho(\mathbf{r}') d^3 r' = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' , \quad (7)$$

der vi har brukt at  $\rho$  er kulesymmetrisk. Den totale massen til stjerna er difor  $M = m(R)$ . Vi kan derivere (7) og får

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi \rho(r) r^2 , \quad (8)$$

som er den fyrste strukturlikninga. Denne likninga kallast og kontinuitetslikninga fordi den uttrykkjer bevaring av masse. Dersom vi innfører energitetttheiten  $\epsilon = \rho c^2$  der  $c$  er lysfarta, kan vi skrive <sup>3</sup>

$$\frac{dm}{dr} = \frac{4\pi \epsilon(r) r^2}{c^2} . \quad (9)$$

---

<sup>3</sup>Hugs Einsteins  $E = mc^2$ !

Den andre strukturlikninga er ei likning for  $\frac{dP}{dr}$ , der  $P = P(r)$  er trykket i stjerna. For å finne denne likninga tenkjer vi oss at vi deler opp stjerna i konsentriske kuleskall med radius  $r$  og tjukna  $dr$ , sjå figur 2. Det er to krefter som verkar på eit kuleskall:

- (a) Gravitasjonskrafta frå materien som er innafor kuleskallet med radius  $r$ .<sup>4</sup>
- (b) Krafta som kjem frå trykket  $P(r)$  i materien. Trykket  $P(r)$  er minkar etter kvar som vi går utover i stjerna og radien  $R$  er definert ved  $P(R) = 0$ .

Du kan lese litt meir om trykk i Appendix A. Sidan materien er i ro, det vil seie at vi har hydrostatisk likevekt, vil desse to kreftene på eit kuleskall vere like store og motsett retta. Dette er Newtons andre lov for kuleskallet. Massen  $dm$  til eit kuleskall er

$$dm = \rho(r)4\pi r dr . \quad (10)$$

Krafta er difor <sup>5</sup>

$$dF = -\frac{Gm(r)dm}{r^2} , \quad (11)$$

der minusteiknet indikerer at krafta peiker innover. Krafta på ytre del av kuleskallet er  $P(r+dr)4\pi(r+dr) \approx P(r+dr)4\pi r$  og krafta på indre del av kuleskallet er  $P(r)4\pi r$ . Nettokrafta  $dF$  frå materien er difor

$$dF = [P(r+dr) - P(r)]4\pi r , \quad (12)$$

og peiker utover. Denne krafta balanserer gravitasjonskrafta (11) som gjev

$$[P(r+dr) - P(r)]4\pi r = -\frac{Gm(r)\rho(r)4\pi r dr}{r^2} , \quad (13)$$

eller

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G\rho(r)m(r)}{r^2} = -\frac{G\epsilon(r)m(r)}{c^2 r^2} , \quad (14)$$

som er den andre strukturlikninga. Vi skriv denne likninga om

$$\frac{1}{\rho(r)} \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2} . \quad (15)$$

Derivasjon med omsyn på  $r$  gjev

$$\frac{d}{dr} \frac{1}{\rho(r)} \frac{dP}{dr} = \frac{2Gm(r)}{r^3} - \frac{G}{r^2} \frac{dm}{dr} = -\frac{2}{\rho(r)r} \frac{dP}{dr} - 4\pi G\rho(r) , \quad (16)$$

---

<sup>4</sup>Ein kan vise at nettokrafta frå massen som ligg utanfor kuleskallet er lik null.

<sup>5</sup>Dette uttrykket kan ein utleie frå Newtons gravitasjonslov for punktmassar.

der vi har brukt (9) og (14). Dette kan skrivast på kompakt form

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G \rho(r) .$$

Alternativt bruker vi  $\epsilon(r) = \rho(r)c^2$  og skriv

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\epsilon} \frac{dP}{dr} \right) = -\frac{4\pi G \epsilon(r)}{c^4} . \quad (17)$$

Vi ser at vi har to ukjende funksjonar,  $P(r)$  og  $\epsilon(r)$ , men berre ei likning. Vi treng difor ei likning som gjev samanhengen mellom  $P$  og  $\epsilon$  for å lukke systemet. Ei slik likning kallast ei *tilstandslikning*. Tilstandslikninga er kan ein rekne ut ved å bruke statistisk mekanikk og ein kjenner vekselverknaden mellom partiklane i gassen.

Dei tre likningane vi har funne er Newtonske likningar for ei stjerne. Desse likningane er ein god approksimasjon når gravitasjonsfeltet ikkje er for sterkt, til dømes når ein studerer ein kvit dverg. Viss skal studere eigenskapane til ei nøytronstjerne er denne approksimasjonen ikkje god nok og vi må bruke Einsteins generelle relativitetsteori (GR=generell relativitetsteori). Vi kan bruke denne teorien til å finne strukturlikningar som erstattar (9) og (14). Det vil føre altfor langt å gjere dette så vi får nøye oss med å presentere resultatet. Strukturlikningane i GR er

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi \rho(r) r^2 \quad (18)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G\epsilon(r)m(r)}{c^2 r^2} \left[ 1 + \frac{P}{\epsilon(r)} \right] \left[ 1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{m(r)c^2} \right] \left[ 1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \right]^{-1} , \quad (19)$$

der  $c$  er lysfarta. Desse likningane kallast Tolman-Oppenheimer-Volkov (TOV) likningane. Vi noterer oss at den fyrste strukturlikninga (18) er den same som (9) i Newtonsk teori. Den andre strukturlikninga (19) er derimot meir komplisert: Den fyrste faktoren er den same som i (18). Deretter er det produktet av tre ledd som gjer systemet vanskelegare men og meir interessant. Vi har to likningar, men tre ukjende. Tilstandslikninga lukkar systemet.

Ein kan ta den såkalla Newtonske grensa ved å la  $c \rightarrow \infty$ . Dette er sjølsagt ikkje korrekt, men er ein god approksimasjon viss gravitasjonsfeltet er svakt. I denne grensa blir dei tre faktorane lik ein og (19) reduserer seg til (14).

## Oppgåve 1

Vi skal fyrst studere strukturlikningane (9) og (14). Det kan vere lurt å skrive dei på dimensjonslaus form. For å få til dette, må vi anta ei tilstandslikning. Eit vanleg val er

$$P = K\epsilon^\gamma \quad (20)$$

der  $\gamma = 1 + \frac{1}{n}$  og  $n$  er den såkalla *polytropiske indeksen*. Ein kan vise at viss elektrona i den kvite dvergen oppfører seg ikkje-relativistisk, er  $n = \frac{3}{2}$ . Viss dei oppfører seg ultrarelativistisk, er  $n = 3$ . Dette svarer til  $\gamma = \frac{5}{3}$  og  $\gamma = \frac{4}{3}$

Vi innfører dei dimensjonslause variable  $\theta$  and  $\xi$  by

$$\epsilon = \epsilon_0 \theta^n , \quad (21)$$

$$r = a \xi , \quad (22)$$

der  $\epsilon_0$  er energitettheten i  $r = 0$  og konstanten  $a$  er

$$a = \left[ \frac{(n+1)Kc^4\epsilon_0^{\frac{1}{n}-1}}{4\pi G} \right]^{\frac{1}{2}} . \quad (23)$$

a) Vis at (17) kan skrivast som

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} = -\theta^n . \quad (24)$$

Dette er *Lane-Emden likninga* for ei stjerne med polytropisk indeks  $n$ . Dette er ei andreordens differensiallikning og vi treng difor to randkrav. Sidan vi skal integrere Lane-Emden numerisk frå  $r = 0$  og utover til overflata  $r = R$ , er det naturleg å velje verdiane  $P(r = 0)$  og  $\frac{dP}{dr}|_{r=0}$ . Vi må altså velje  $\theta(0)$  og  $\theta'(0)$  og finn

$$\theta(0) = 1 , \quad (25)$$

$$\theta'(0) = 0 . \quad (26)$$

Likning (25) følger direkte frå likning (21). Likning (26) kan ein finne slik: For små radier  $r$  er  $m(r) \approx 4\pi\rho_c r^3/3$ .<sup>6</sup> Likning (14) impliserer difor  $dP/dr \sim r$  eller  $\frac{dP}{dr} = 0$  i  $r = 0$ . Likning (20)-(22) gjev tilslutt  $\frac{dP}{dr} \sim \frac{d\theta}{d\xi}$  og difor (26).

Vanlegvis kan ein ikkje løyse (24) analytisk, men ein må integrere den numerisk frå  $\xi = 0$  til  $\xi = \xi_1$  som er definert ved  $\theta(\xi_1) = 0$ , det vil seie  $P(R) = 0$ , der radien til stjerna er då gjeven ved

$$R = \left[ \frac{(n+1)Kc^4\epsilon_0^{\frac{1}{n}-1}}{4\pi G} \right]^{\frac{1}{2}} \xi_1 . \quad (27)$$

Massen  $M$  til stjerna er gjeven ved

$$\begin{aligned} M &= 4\pi \int_0^R \frac{\epsilon(r)}{c^2} r^2 dr \\ &= 4\pi a^3 \epsilon_0 \int_0^{\xi_1} \theta^n \xi^2 d\xi \\ &= -4\pi a^3 \epsilon_0 \int_0^{\xi_1} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) d\xi , \end{aligned} \quad (28)$$

---

<sup>6</sup>Integrer (9)!

der vi har brukt likning (24). Denne likninga kan vi integrere og får

$$M = 4\pi \left[ \frac{(n+1)Kc^4}{4\pi G} \right]^{\frac{3}{2}} \epsilon_0^{(3-n)/2n} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| . \quad (29)$$

Vi kan eliminere tettheten  $\rho_c$  i (29) ved å løyse (27) med omsyn på  $\rho_c$ . Vi får da den såkalla masse-radius relasjonen for ein polytrop,

$$M = 4\pi R^{(3-n)/(1-n)} \left[ \frac{(n+1)Kc^4}{4\pi G} \right]^{n/(n-1)} \xi_1^{(3-n)/(1-n)} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| . \quad (30)$$

Vi noterer oss at

(a) I det ikkje-relativistiske tilfellet  $n = \frac{3}{2}$  har vi

$$M \sim R^{-3} , \quad (31)$$

(b) I det ultrarelativistiske tilfellet  $n = 3$  er massen uavhengig av radien!

I det ikkje-relativistiske tilfellet har vi altså at stjerna blir tyngre når radien blir mindre. Dette ultrarelativistiske grensetilfellet er interessant fordi det gjev ei øvre grense for kor massiv ein kvit dverg kan bli.<sup>7</sup> Grensa kallast *Chandrasekhar grensa* etter den amerikansk-indiske fysikaren Subrahmanyan Chandrasekhar (1910-1995) som er ca  $1.44M_\odot$ , der  $M_\odot$  er ein solmasse. Dersom stjerna er meir massiv enn dette, vil den kollapse under eiga tyngde til ei nøytronstjerne eller eit svart hol.

**b)** Ein kan løyse Lane-Emden likninga analytisk for  $n = 0$ ,  $n = 1$  og  $n = 5$ . Finn løysinga for  $n = 0$ .

**c)** For  $n = 1$ , skriv  $\theta = \frac{u}{\xi}$ . Finn differensiallikninga for  $u(\xi)$ . Løys differensiallikninga for  $u(\xi)$  og dimed  $\theta(\xi)$ .

## Oppgåve 2

I nokre enkle tilfelle kan ein løyse TOV-likningane (18)–(19) analytisk og den analytiske løysinga kan gje oss fysisk innsikt. Vi skal difor fyrst diskutere eit slikt tilfelle. I tillegg kan ein løyse strukturliningane numerisk og sjekke at koden funkar sidan ein har eit analytisk resultat.

Vi antar at stjerna er ei inkompressibel væske, det vil seie at energitettheten er konstant uavhengig av trykket, eller

$$\epsilon(r) = \begin{cases} \rho_0 c^2 , & r \leq R , \\ 0 , & r > R , \end{cases} \quad (32)$$

---

<sup>7</sup>Grensa er  $\rho_c \rightarrow \infty$ .



der  $\rho_0$  er ein konstant og  $R$  er radien til stjerna. Denne tilstandslikninga er heilt urealistisk, blant anna impliserer den at lydfarta er uendeleg stor! Sjøl om tilstandslikninga er urealistisk, oppfører løysinga til (18)–(19) seg pent og er rimeleg. Når ein skal løyse kopla differensiallikningar av denne typen, lønner det seg å innføre dimensjonslause størrelsar. *Schwarzschildradien*  $r_s$  til ei stjerne med masse  $M$ , er  $r_s = \frac{2GM}{c^2}$  og innfører dei dimensjonslause parameterane

$$\bar{P} = \frac{P}{\rho_0 c^2}, \quad (33)$$

$$x = \frac{r}{R}, \quad (34)$$

$$\alpha = \frac{r_s}{R}. \quad (35)$$

der  $R$  er radien til stjerna gjeven ved  $M = \frac{4\pi\rho_0 R^3}{3}$  og  $\alpha < 1$  for alle stjerner.

**a)** Vis at den dimensjonslause likningane er

$$\frac{d\bar{P}}{dx} = -\frac{1}{2}\alpha x [1 + \bar{P}] [1 + 3\bar{P}] [1 - x^2\alpha]^{-1}. \quad (36)$$

**b)** Likning (36) kan løysast analytisk ved hjelp av separasjon av variable (Bruk delbrøksoppspalting på dei ledda som inneheld  $\bar{P}$ ). Vis at løysinga er gjeven ved

$$\bar{P}(x) = \frac{\sqrt{1-\alpha} - \sqrt{1-\alpha x^2}}{\sqrt{1-\alpha x^2} - 3\sqrt{1-\alpha}}, \quad (37)$$

der du bruker randkravet  $\bar{P}(1) = 0$ .

Trykket kan tilslutt skrivast som

$$P(r) = \rho_0 c^2 \frac{\sqrt{1-\frac{r_s}{R}} - \sqrt{1-\frac{r_s}{R} \frac{r^2}{R^2}}}{\sqrt{1-\frac{r_s}{R} \frac{r^2}{R^2}} - 3\sqrt{1-\frac{r_s}{R}}} \quad (38)$$

Trykket i sentrum er

$$P(0) = \rho_0 c^2 \frac{\sqrt{1-\frac{r_s}{R}} - 1}{1 - 3\sqrt{1-\frac{r_s}{R}}} \quad (39)$$

Vi ser at trykket i  $r = 0$  divergerer viss

$$1 - 3\sqrt{1-\frac{r_s}{R}} = 0, \quad (40)$$

eller

$$R = \frac{9}{8} r_s . \quad (41)$$

Dette resultatet viser at den minste radie til ei stjerne med masse  $M$  er  $\frac{9}{8}$  Schwarzschildradie  $r_s$ .<sup>8</sup>

c) Dersom relativistiske effektar er små, blir TOV-likninga (19) veldig enkel. Då alle ledda i hakeparantesane lik ein og vi får

$$\frac{d\bar{P}}{dx} = -\frac{1}{2}\alpha x , \quad (42)$$

med løysing

$$\bar{P}(x) = \frac{1}{4}\alpha(1 - x^2) . \quad (43)$$

Vis at du kan få (43) ved å rekkjeutvikle (37) for små verdiar av  $\alpha$ . I det ikkje-relativistiske tilfellet er det ikkje ei slik nedre grense for  $R$  for ein gjeven masse  $M$ . Likning (41) er difor ein konsekvens av generell relativitetsteori!

## Numeriske metoder

For å løse differensiallikningene numerisk, skal vi bruke Eulers metode og fjerde ordens Runge-Kuttas metode.

### 1.1 Eulers metode

Eulers metode brukes til å løse initialverdiproblemet

$$y'(x) = f(y, x) , \quad (44)$$

med  $y(x_0) = y_0$ . I vårt tilfelle er  $x_0 = 0$  og  $y_0 = 1$ . Vi deler akse i punkter  $\{x_i\}$  og integrerer oss utover fra origo

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) . \quad (45)$$

Her er  $x_i = hi$  og  $h$  er steglengden. Fra nå av kommer vi til å skille på  $y(x_0 + hi) = y(x_i)$  og  $y_i$ .  $y(x_i)$  representerer den sanne/korrekte løsningen av differensiallikningen evaluert ved  $x_0 + hi$ , mens  $y_i$  representerer den numeriske approksimasjonen til løsningen evaluert ved  $x_i = x_0 + hi$ .

---

<sup>8</sup>Viss eit objekt med masse  $M$  har radius mindre enn  $r_s = \frac{2GM}{c^2}$  er det eit svart hol.

### Oppgave 3

Etter det første steget  $h$ , vil ligning (45) være en approksimasjon av den sanne løsningen av differensialligningen,  $y(x_1)$ . Avviket mellom den korrekte løsningen og den approksimerte løsningen etter et tidssteg er gitt ved

$$\tau_1 = y(x_0 + h) - y_1. \quad (46)$$

a) Vis at denne feilen,  $\tau_1$ , er proporsjonal med  $h^2$  (Hint: Taylors teorem).

Merk at ligning (46) kun beskriver den lokale feilen etter det første steget, mens ligningen som beskriver den lokale feilen etter  $i$  steg,  $\tau_i$ , er mer komplisert

$$\tau_{i+1} = y(x_{i+1}) - y(x_i) - hS(x_i, y_i, h, f). \quad (47)$$

Her er  $S$  stegfunksjonen vi bruker for å approksimere forskjellen mellom  $y(x_{i+1})$  og  $y(x_i)$ , som i Eulers metode er gitt ved  $S(x_i, y_i, h, f) = f(x_i, y_i)$ . Senere skal vi se at man kan bruke andre varianter av stegfunksjoner som vil minke den lokale feilen.

Som regel ønsker man å finne en approksimasjon for differensialligningen et stykke etter initialverdien, la oss kalle denne verdien  $x_N$ . For å nå denne verdien må man ta  $N$  steg. Forholdet mellom  $N$  og  $h$  er gitt ved

$$N = \frac{x_N - x_0}{h}. \quad (48)$$

Den globale feilen,  $e_N$ , er akkumulasjonen av den lokale feilen i hvert steg.

b) Vis at Eulers metode er av første orden, det vil si at den globale feilen er proporsjonal med  $h$ . Her er vi i utgangspunktet ute etter en kort og heuristisk (les: ikke-rigorøs) variant av beviset, men dere kan også vise det formelt (hvis dere vil) ved å bruke antagelsen om at stegfunksjonen,  $S$ , er Lipschitz-kontinuerlig.

For å løse Lane-Emden ligningen (24) er det hensiktsmessig å skrive det som et system av førsteordens differensialligninger der vi bruker de samme dimensjonsløse variablene som i ligning (24). Legg merke til at variablene  $y_i$  og  $x_i$  i teorien ovenfor, tilsvarer  $\theta_i$  og  $\xi_i$ . Hvis vi følger notasjonen tidligere om at  $\xi_1$  er radiusen til stjernen, så blir den tilsvarende, numerisk approksimerte, verdien skrevet som  $\xi_N$ . Den oppfyller  $\theta_N = 0$ .

c) Ved å innføre  $\chi = \theta'$ , reduser Lane-Emden ligningen til et system av to førsteordens differensialligninger. Skriv ligningen som en vektorligning. Dette kommer til å være svært hensiktsmessig hvis dere bruker NumPy-bibiloteket i Python for selve implementasjonen senere. Formen på ligningen burde se slik ut

$$\frac{d\vec{\omega}}{d\xi} = f(\vec{\omega}) = f \begin{bmatrix} \theta \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(\chi) \\ g_2(\theta, \chi, \xi) \end{bmatrix}, \quad (49)$$

der  $f$  er funksjonen som beskriver systemet av differensialligninger og  $\vec{\omega}$  er en vektor som inneholder  $\theta$  som første komponent, og  $\chi$  som andre komponent.  $g_1$  og  $g_2$  er funksjonene dere skal finne. Merk til slutt at dere kan bruke en slik  $f$  på akkurat samme måte som i ligning (45) når dere skal implementere Eulers metode. Dette vil spare dere tid og gjøre koden deres lettere å lese.

**d)** Vi er nå klare til å implementere Eulers metode. Løs Lane-Emden ligningen numerisk for  $n = 1$ , og sammenlign med den med analytiske løsningen du fant tidligere. Husk at randkravene er  $\theta_0 = 1$  og  $\chi_0 = 0$ , og at du skal integrere til  $\theta_N = 0$ . Fysisk svarer dette til at man integrerer trykket fra senteret av stjernen til man når overflaten til stjernen hvor trykket er lik null. Eksperimenter med forskjellige  $h$ -verdier og plott den analytiske løsningen sammen med 3 numeriske approksimasjoner der du bruker forskjellige  $h$ -verdier. Argumenter for hvilken  $h$  du mener er optimal å bruke.

*Hint:* På grunn av initialbetingelsene vil første evaluering av ligning (45), inneholde et  $\frac{0}{0}$ -uttrykk. Dette vil sannsynligvis føre til at du får feilmelding og at koden ikke vil kjøre. En løsning på dette er å innføre en  $\delta \ll 1$  som man bruker som startverdi,  $\xi_0 = \delta$ , istedenfor  $\xi_0 = 0$ .

**e)** Nå som du vet at implementasjonen din fungerer, løs Lane-Emden ligningen numerisk i det ikke-relativistiske tilfellet,  $n = \frac{3}{2}$ , og i det ultrarelativistiske tilfellet  $n = 3$ . Plott den approksimerte  $\theta(\xi)$  i de to tilfellene. Vær igjen oppmerksom på å velge liten nok  $h$ -verdi. Som hjelp kan vi nevne at man i det ikke-relativistiske tilfellet finner  $\xi_N = 3.65375$  og  $\xi_N^2 |\theta'(\xi_N)| = 2.71406$ , mens man i det ultrarelativistiske tilfellet finner  $\xi_N = 6.89685$  og  $\xi_N^2 |\theta'(\xi_N)| = 2.01824$ .

## 1.2 Fjerde ordens Runge-Kuttas metode

Runge-Kutta metoder er en familie med av numeriske metoder som gir tilnærmete løsninger av differensialligninger. Eulers metode er den mest grunnleggende metoden i denne familien, men nå skal vi se på den mest kjente metoden, fjerde ordens Runge-Kutta metode (RK4).

For å løse det samme initialverdiproblemet som tidligere, ligning (44), bruker vi nå en annen stegfunksjon  $S(x_i, y_i, h, f)$ , som er gitt ved

$$S = \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) , \quad (50)$$

der  $k_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) er gitt ved

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (51)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + h \frac{k_1}{2}) , \quad (52)$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + h \frac{k_2}{2}) , \quad (53)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + h k_3) . \quad (54)$$

For å integrere oss utover fra origo bruker vi da formelen

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) . \quad (55)$$

f) Gjenta punkt d) der du nå implementerer RK4 istedenfor Eulers metode.

Du skal nå sammeligne den globale feilen som funksjon av steglengde,  $h$ , for de to metodene. For begge tilfellene,  $n = \frac{3}{2}$  og  $n = 3$ , skal du gjøre numerisk validering av resultatene dine. Siden du kjenner den korrekte  $\xi_N$  i begge tilfellene, som vi fra nå av kaller  $\tilde{\xi}_N$ , kan du bruke begge metodene og integrere deg utover fra  $\xi = 0$  til  $\xi = \tilde{\xi}_N$ . Legg merke til at det kun er for den korrekte løsningen for  $\theta$  vi har at  $\theta(\tilde{\xi}_1) = 0$ , for den approksimerte løsningen vil  $\theta_N$  (som er evalueringen av  $\theta$  ved  $\xi = \tilde{\xi}_N$ ) være ulik null. Dette gjør at vi kan beregne den globale feilen

$$e_N = |\theta(\tilde{\xi}_N) - \theta_N| = |\theta_N|. \quad (56)$$

g) For  $n = \frac{3}{2}$  og  $n = 3$  lag et plott med  $e_N$  som funksjon av  $h$  for både Eulers metode og RK4. Plottet skal være hensiktsmessig for å se hvordan feilen minker som funksjon av  $h$ . Kommenter plottet og forklar hvordan ordenen til metoden manifesterer seg i plottet. Hvis feilen flater ut for veldig små  $h$ , forklar dette kort. Her kan det være lurt å eksperimentere med logaritmiske akser.

*Hint:* Du skal her se på feilen i din numeriske verdi for  $\theta$  i  $\tilde{\xi}_N$ ,  $\theta_N$ . Du må da selvfølgelig evaluere din numeriske løsning i  $\tilde{\xi}_N$ . Siden du bruker en endelig  $h$  kan det derimot hende at du ikke har et punkt  $\xi = \tilde{\xi}_N$ , og feilen fra dette vil være det ledende bidraget til feilen. Denne feilen vil være av orden  $h$ . Dette problemet kan fikses på flere måter, felles er at man sørger for å evaluere den numeriske løsningen i  $\tilde{\xi}_N$ .

Du skal nå bruke implementasjonene av Eulers metode og RK4 til å løse TOV-ligningene som du så på tidligere.

h) Forklar at randkravene for ligning (36) er

$$\bar{P}(0) = \frac{\sqrt{1-\alpha}-1}{1-3\sqrt{1-\alpha}} , \quad (57)$$

$$\left. \frac{d\bar{P}}{dx} \right|_{x=0} = 0 . \quad (58)$$

i) Bruk Eulers metode og RK4 til å løse ligning (36), med randkravene (57)–(58), numerisk. Velg  $\alpha = 0.86$ ,  $\alpha = 0.59$  og  $\alpha = 0.0167$ . Lag 3 separate plott (en for hver  $\alpha$ ) med den analytiske (og normaliserte) løsningen  $\bar{P}(x)/\bar{P}(0)$  sammen med løsningene fra Eulers metode og RK4. Det skal komme tydelig frem hvor stor steglengde du har brukt. Forklar hvorfor du har brukt steglengden du har brukt, gjerne med lignende argumentasjon som du brukte i tidligere oppgaver.

**j)** Lag et nytt plott som er likt det i **i**), men plott i tillegg den Newtonske approksimasjonen (43). Når er denne approksimasjonen god?