

Prosjekt 3 – Kompakte stjerner

Celle under er for å importere kanselleringslinjer i markdown-koden. Cellene vises ikke riktig i HTML-fil, men vil vises riktig hvis koden kjøres gjennom Jupyter, og markdown-cellene kjøres manuelt i etterkant (Ctrl+Enter). I tillegg ligger en PDF-kopi av notebooken vedlagt med riktig markdown-visning.

```
In [1]: 1 %%javascript
        2 MathJax.Extension["TeX/cancel"]={version:"2.4.0",ALLOWED:{color:1,mathcolor:1,background:1,mathbackgrou
```

Oppgave 1

Oppgave 1a)

Vi antar en tilstandsligning for systemet vårt

$$P = K\epsilon^\gamma, \quad \gamma = 1 + \frac{1}{n},$$

hvor n er *polytropisk indeks*.

Vi innfører de dimensjonsløse variable θ og ξ slik at

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_0 \theta^{1/(\gamma-1)}, & \epsilon_0 &= \epsilon(r=0), \\ r &= a\xi, & a &= \left[\frac{(n+1)Kc^4\epsilon_0^{\gamma-2}}{4\pi G} \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

der ϵ_0 og a er konstanter.

Likning (17) kan da omskrives fra

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\epsilon} \frac{dP}{dr} \right) = -\frac{4\pi G \epsilon(r)}{c^4}.$$

Ved derivasjon av r får vi $dr = a d\xi$. Setter inn for dr , $r = a\xi$ og $P = K\epsilon^\gamma$, og skriver $\epsilon(r) = \epsilon$ slik at

$$\frac{1}{(a\xi)^2} \frac{1}{a} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{(a\xi)^2}{\epsilon} \frac{1}{a} \frac{d}{d\xi} [K\epsilon^\gamma] \right) = -\frac{4\pi G \epsilon}{c^4},$$

innsatt for $\epsilon = \epsilon_0 \theta^{1/(\gamma-1)}$ gir

$$\frac{1}{a^2 \xi^2} \frac{1}{a} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{a^2 \xi^2}{\epsilon_0 \theta^{1/(\gamma-1)}} \frac{1}{a} \frac{d}{d\xi} \left[K \left(\epsilon_0 \theta^{1/(\gamma-1)} \right)^\gamma \right] \right) = -\frac{4\pi G \epsilon_0 \theta^{1/(\gamma-1)}}{c^4}.$$

Da parameterene a , ϵ_0 , og K er konstanter, kan disse faktoriseres på tvers av derivasjoner, og dermed kansellere. Ved å faktorisere og kansellere nødvendige faktorer får vi

$$\frac{K}{a^2 \xi^2} \frac{1}{a} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\cancel{a^2} \xi^2}{\cancel{\epsilon_0} \theta^{1/(\gamma-1)}} \frac{1}{a} \frac{d}{d\xi} \left[\left(\cancel{\epsilon_0} \theta^{1/(\gamma-1)} \right)^\gamma \right] \right) = -\frac{4\pi G \cancel{\epsilon_0}^{\epsilon_0^{2-\gamma}} \theta^{1/(\gamma-1)}}{c^4},$$

som dermed kan forenkles til

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\xi^2}{\theta^{1/(\gamma-1)}} \frac{d}{d\xi} \left[\theta^{\gamma/(\gamma-1)} \right] \right) = -\frac{4\pi G \epsilon_0^{2-\gamma} a^2}{K c^4} \theta^{1/(\gamma-1)}.$$

Innsatt for a^2 vil brøken på høyre side forkortes, og vi får

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \underbrace{\frac{\xi^2}{\theta^{1/(\gamma-1)}} \frac{d}{d\xi} \left[\theta^{\gamma/(\gamma-1)} \right]}_{\text{(II)}} = -\frac{\gamma}{\gamma-1} \theta^{1/(\gamma-1)},$$

hvor (II) kan omskrives ved kjerneregelen slik at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[\theta^{\gamma/(\gamma-1)}\right] = \frac{\gamma}{\gamma-1}\theta^{\gamma/(\gamma-1)-1}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi},$$

hvor potensen

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}-1 = \frac{1}{\gamma-1}.$$

Innsatt i uttrykket får vi da

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\frac{\xi^2}{\cancel{\theta^{1/(\gamma-1)}}}\frac{\cancel{\gamma}}{\cancel{\gamma-1}}\frac{\cancel{\theta^{1/(\gamma-1)}}}{\cancel{\theta^{1/(\gamma-1)}}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi} = -\frac{\cancel{\gamma}}{\cancel{\gamma-1}}\theta^{1/(\gamma-1)}.$$

Uttrykket blir da

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\xi^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi} = -\theta^{1/(\gamma-1)}, \qquad \qquad \qquad \text{Q.E.D.}$$

med $n = 1/(\gamma-1)$. Denne ligningen vil herved bli referert til som *Lane-Emden ligningen*.

Lane-Emden ligningen er en kompakt versjon av de to strukturligningene til stjernen, og brukes med følgende randverdier (likninger 25, 26 i prosjektoppgaven)

$$\begin{aligned}\theta(0) &= 1 \\ \theta'(0) &= 0\end{aligned}$$

Oppgave 1b)

Finner løsningen av Lane-Emden ligningen for $n = 0$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\xi^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\xi^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi} &= -\theta^0 \\ &= -1,\end{aligned}$$

løser for ξ

$$-\xi^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\xi^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi},$$

fortsetter å isolere ξ ved å integrere høyre- og venstreside med hensyn på ξ

$$-\int \xi^2 \, \mathrm{d}\xi = \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[\xi^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}\right] \, \mathrm{d}\xi,$$

hvor jeg har innført klammeparantesene på høyre side slik at man tydeligere ser hvilke faktorer derivasjonen virker på. Integrasjonen gir

$$-\frac{1}{3}\overset{\nearrow \xi}{\cancel{\xi^3}} = \cancel{\xi^2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}.$$

Integrerer med hensyn på ξ for å få et uttrykk for $\theta(\xi)$

$$-\frac{1}{3}\int \xi \, \mathrm{d}\xi = \int \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi} \, \mathrm{d}\xi,$$

løser integralet

$$\theta(\xi) = -\frac{1}{6}\xi^2 + C$$

hvor C er en integrasjonskonstant som bestemmes ved randverdiene til Lane-Emden likningen.

Løsningen av Lane-Emden ligningen for $n = 0$ blir dermed

$$\theta(\xi) = -\frac{1}{6}\xi^2 + 1$$

Oppgave 1c)

Finner løsningen av Lane-Emden ligningen for $n = 1 \Leftrightarrow \gamma = 2$

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} = -\theta,$$

setter inn for $\theta = \frac{u}{\xi} \Rightarrow \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left[\frac{u}{\xi} \right]$, og løser for ξ

$$-\cancel{\frac{u}{\xi^2}} \overset{\nearrow \xi^2}{\cancel{\xi^2}} = \frac{d}{d\xi} \left[\cancel{\xi^2} \underbrace{\frac{d}{d\xi} \left[\frac{u}{\xi} \right]}_{(u' \xi - u) / \cancel{\xi^2}} \right],$$

hvor jeg igjen har innført klammeparantesene på høyre side slik at man tydeligere ser hvilke faktorer derivasjonen virker på. Uttrykket forenkles til

$$\frac{d}{d\xi} \left[\frac{du}{d\xi} \xi - u \right] = -u\xi.$$

Med kjerneregel gir derivasjon av venstresiden følgende uttrykk

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} \cancel{\xi^2} = -u \cancel{\xi^2}.$$

Løser ODE'en ved å anta en løsning $u = e^{\alpha \xi}$ for en vilkårlig α

$$e^{\alpha \xi} (\alpha^2 + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = i.$$

Vi får da at løsningen for u blir

$$u = ae^{i\xi} \equiv A \sin(\xi) + B \cos(\xi),$$

hvor siste ledd er en direkte konsekvens av å bruke Eulers sammenheng mellom naturlige eksponenser og trigonometriske uttrykk. Uttrykket for θ blir

$$\theta = A \frac{\sin(\xi)}{\xi} + B \frac{\cos(\xi)}{\xi},$$

med randverdien $\theta(0) = 1$ ser vi på følgende grenser

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} B \frac{\cos(\xi)}{\xi} = 0 \quad \therefore B = 0,$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} A \frac{\sin(\xi)}{\xi} = 1 \quad \therefore A = 1.$$

Vi får dermed at uttrykkene for henholdsvis u og θ blir

$$u(\xi) = \sin(\xi)$$

$$\theta(\xi) = \frac{\sin(\xi)}{\xi}.$$

Oppgave 2

Oppgave 2a)

Bruker at $M = M(r)$, slik at

$$\frac{2GM}{c^2} = \frac{2GM(r)}{c^2} \\ \Rightarrow r_s = \frac{2GM}{c^2} \frac{r^3}{R^3}$$

Kjerneregelen gir at

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} &= \frac{\partial \bar{P}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial P}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon} \left(-\frac{G \varepsilon m(r)}{c^2 r^2} [1 + \bar{P}] \left[1 + \frac{4 \pi r^3 P(r)}{m(r) c^2} \right] \left[1 - \frac{2 G m(r)}{c^2 r} \right]^{-1} \right) \cdot R \\ &= \frac{-G M R}{c^2 r^2} [1 + \bar{P}] [1 + 3 \bar{P}] \left[1 - \frac{2 G M}{c^2 r} \right]^{-1} \end{aligned}$$

De to første parentesuttrykkene stemmer overens med det vi skal vise. Har da igjen

$$\begin{aligned} & \frac{-GMR}{c^2 r^2} \left[1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right]^{-1} = -\frac{1}{2} \frac{r_s R}{r^2} \frac{r^3}{R^3} \left[1 - \frac{r_s}{r} \frac{r^3}{R^3} \right]^{-1} \\ & = -\frac{1}{2} \frac{r_s r}{R^2} \left[\frac{R^3 - r_s r^2}{R^3} \right]^{-1} = -\frac{1}{2} \frac{r_s r}{1} \left[\frac{R^1}{R^3 - r_s r^2} \right] \\ & = -\frac{1}{2} \frac{r_s r R}{R^3 - r_s r^2} = -\frac{1}{2} \frac{\alpha x R^3}{R^3 - \alpha x^2 R^3} \\ & = -\frac{1}{2} \frac{\alpha x}{1 - \alpha x^2} \\ \therefore \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} &= -\frac{1}{2} \alpha x [1 + \bar{P}] [1 + 3\bar{P}] [1 - x^2 \alpha]^{-1} \end{aligned}$$

Oppgave 2b)

Sepererer variablene og får

$$\frac{\partial \bar{P}}{(1 + \bar{P})(1 + 3\bar{P})} = \frac{-0.5\alpha x}{1 - x^2 \alpha} \partial x$$

Høyre side er et standard integral og blir $\frac{1}{4} \ln(1 - \alpha x^2) + C$

På venstre side brukes delbrøksoppspaltning for å evaluere

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 + \bar{P})(1 + 3\bar{P})} &= \frac{A}{1 + \bar{P}} + \frac{B}{1 + 3\bar{P}} \\ \Rightarrow A + B &= 1 \wedge 3A + B = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B = -3A \Leftrightarrow -2A = 1 \Leftrightarrow A = -1/2 \Rightarrow B = 3/2$$

$$\begin{aligned} \int \frac{-1/2}{1 + \bar{P}} + \frac{3/2}{1 + 3\bar{P}} d\bar{P} &= \int \frac{-0.5\alpha x}{1 - x^2 \alpha} dx \\ \Rightarrow -\ln(1 + \bar{P}) + \ln(1 + 3\bar{P}) &= \frac{1}{2} \ln(1 - \alpha x^2) + C_1 \end{aligned}$$

I steget over har er det multiplisert med to overalt for å forenkle utregningen. Løser herfra uttrykk for $\bar{P}(x)$ og får

$$\begin{aligned} \frac{1 + 3\bar{P}}{1 + \bar{P}} &= (1 - \alpha x^2)^{1/2} \cdot C_2 \\ \Rightarrow 3\bar{P} - \bar{P} \cdot C_2 \sqrt{1 - \alpha x^2} &= C_2 \sqrt{1 - \alpha x^2} - 1 \\ \Rightarrow \bar{P} &= \frac{C_2 \sqrt{1 - \alpha x^2} - 1}{3 - C_2 \sqrt{1 - \alpha x^2}} \end{aligned}$$

Har randbetingelsen $\bar{P}(1) = 0$, dette gir verdien

$$C_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha}},$$

og endelig uttrykk blir

$$\bar{P}(x) = \frac{\sqrt{\frac{1 - \alpha x^2}{1 - \alpha}} - 1}{3 - \sqrt{\frac{1 - \alpha x^2}{1 - \alpha}}} = \frac{\sqrt{1 - \alpha} - \sqrt{1 - \alpha x^2}}{\sqrt{1 - \alpha x^2} - 3\sqrt{1 - \alpha}},$$

Oppgave 2c)

Vi ser på (37) som

$$\bar{P}(\alpha) = \frac{\sqrt{1 - \alpha} - \sqrt{1 - \alpha x^2}}{\sqrt{1 - \alpha x^2} - 3\sqrt{1 - \alpha}}$$

For små nok α , skal det holde å approksimere

$$\bar{P}(\alpha) \approx P(\alpha = 0) + \frac{\partial \bar{P}(\alpha = 0)}{\partial \alpha} \cdot \alpha$$

Ved innsetting ser man at $\bar{P}(\alpha = 0) = 0$. Finner førstederiverte:

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \alpha} = \frac{\left[\sqrt{1 - \alpha} - \sqrt{1 - \alpha x^2} \right]' \cdot (\sqrt{1 - \alpha x^2} - 3\sqrt{1 - \alpha}) - \left[\sqrt{1 - \alpha x^2} - 3\sqrt{1 - \alpha} \right]' \cdot (\sqrt{1 - \alpha} - \sqrt{1 - \alpha x^2})}{\left(\sqrt{1 - \alpha x^2} - 3\sqrt{1 - \alpha} \right)^2},$$

$$\text{der } \left[\sqrt{1 - \alpha} - \sqrt{1 - \alpha x^2} \right]' = \frac{-1}{2\sqrt{1 - \alpha}} + \frac{x^2}{2\sqrt{1 - \alpha x^2}} \text{ og } \left[\sqrt{1 - \alpha x^2} - 3\sqrt{1 - \alpha} \right]' = \frac{-x^2}{2\sqrt{1 - \alpha x^2}} + \frac{3}{2\sqrt{1 - \alpha}}$$

som, evaulert om $\alpha = 0$, blir

$$\frac{\partial \bar{P}(\alpha = 0)}{\partial \alpha} = \frac{\left[-\frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} \right](1 - 3) - [1 - 1] \left(\frac{-x^2}{2} + \frac{3}{2} \right)}{(1 - 3)^2} = \frac{1}{4}(1 - x^2)$$

$$\Rightarrow \bar{P}(\alpha) \approx 0 + \frac{1}{4}(1 - x^2) \cdot \alpha = \frac{1}{4}\alpha(1 - x^2)$$

Oppgave 3

Oppgave 3a)

Ved hjelp av Taylors teorem kan den eksakte løsningen, $y(x_0 + h)$, skrives om til en form gitt ved

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{1}{2!}h^2y''(\tau),$$

slik at

$$\tau_1 = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{1}{2!}h^2y''(\tau) - y(x_0) - hy'(x_0) = \frac{1}{2!}h^2y''(\tau),$$

der $\tau \in [\tau_0, \tau_0 + h]$.

Altså er τ_1 proporsjonal med h^2 .

Oppgave 3b)

Den globale feilen for Eulers metode er akkumulasjonen av feilen gjort i hvert tidssteg og er gitt ved

$$E_N = |y(t_N) - y_{t_N}|.$$

Vi vet allerede at den lokale feilen er av orden $\mathcal{O}h^2$, altså vil man for hvert tidssteg få feilen kh^2 , hvor k er en konstant. For å nå approksimasjonen av differensiallikningen gitt ved verdien x_N benytter man N steg.

Sammenhengen mellom N og h er gitt ved

$$N = \frac{x_N - x_0}{h},$$

som viser at antall skritt er invers proporsjonal med h. Dermed blir den globale feilen

$$E_N = kh^2\frac{1}{h} = kh.$$

Altså er Eulers metode av orden $\mathcal{O}h$.

Oppgave 3c)

Lane-Emden ligningen er gitt ved

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} (\xi^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}) = -\theta^n$$

For å redusere Lane-Emden ligningen til et system av to førsteordens differensialligninger forenkles først denne til å bli

$$\frac{1}{\xi^2} (2\xi \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi} + \xi^2 \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\xi^2}) = \theta'' + \frac{2}{\xi}\theta' = -\theta^n.$$

Videre innføres $u = \theta$ og $v = \theta'$ slik at $u' = \theta' = v$ og $v' = \theta'' = -\frac{2}{\xi}v - \theta^n$. Dermed kan Lane_emden ligningen skrives som en vektorligning hvor

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -\frac{2}{\xi}v - u^n \end{bmatrix}$$

Ved å innføre $x = \theta'$ kan dette skrives som

$$\begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(\theta, x, \xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -\frac{2}{\xi}x - \theta^n \end{bmatrix}$$

Oppgave 3d)

Ved å benytte Eulers metode på g_1 og g_2 , for n = 1 får man

$$y_{n+1} = y_n + hx_n$$

$$x_{n+1} = x_n + h(-\frac{2}{\xi}x - \theta_n)$$

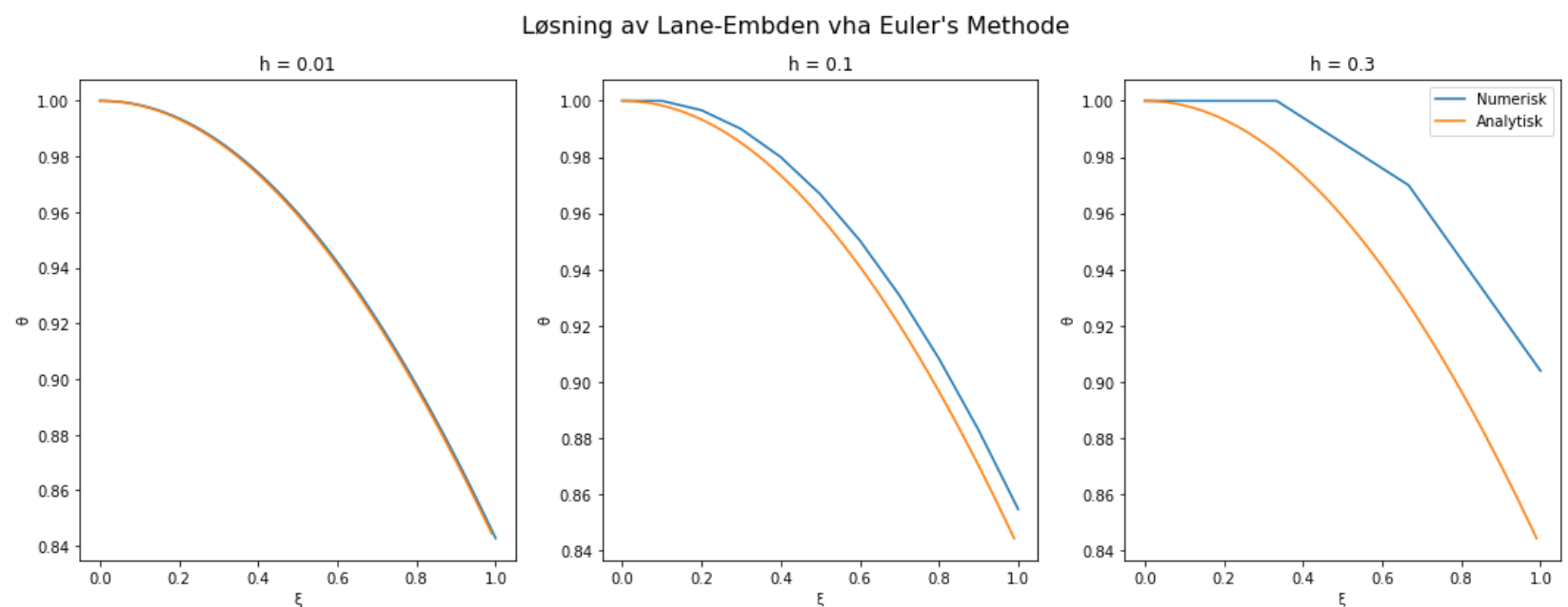
In [2]:

```
1 # IMPORTS
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 import warnings
5 warnings.filterwarnings('ignore')
6 #####
7
8 def solve_numeric(numeric_method, h, f, m, init_cond, x0=0, xend=1, implicit_N=False):
9     """ Numerisk løsningsalgoritme for både Euler og RK4.
10         Også utformet med utgangspunkt i utdelt kode på NUMFYS.
11         Parametere:
12             h:          Steglende
13             f:          Høyreside av ODE (vektorfunksjon)
14             m:          Polytropisk indeks for Lane-Emden og alpha for P(x)
15             init_cond:  Numpyarray som inneholder initialbetingelsene
16                       For Lane-Emden blir dette [1,0]
17             x0:         x-verdi (eller xi) for initialbetingelsen
18             xend:       Slutten på intervallet der Euler-metoden utføres
19             explicit_N: Bool-verdi som justerer antall steg, slik at samme funksjon kan brukes
20         Returverdier:
21             M:          Matrise med antall rader = orden til ODE (Lane-Emden: 2), og N kolonner
22                       Inneholder numerisk approksimasjon av y/theta ved tidspunktene x_list
23             t_list:     Liste av ekvidistante x/xi-verdier med mellomrom h, fra [x0, xend]"""
24     deg = len(init_cond) # The order of the ODE is equal to the number of initial conditions we need
25     if implicit_N:
26         global N #Using number of steps defined outside function scope, used in task 3g
27     else:
28         N = int((xend - x0) / h) #Number of steps
29     x_list = np.linspace(x0, xend, N + 1)
30     M = np.zeros((deg, N + 1)) # Matrix storing the values of the variable we wish to solve for
31     # (the zeroth derivative), as well as the higher order derivatives
32     M[:, 0] = init_cond # Storing the initial conditions
33     for i in range(0, N):
34         M[:, i + 1] = numeric_method(M[:, i], x_list[i], h, f, deg, m) # Running N Euler steps
35     return M, x_list
```

In [3]:

```
1 def step_Euler_high(w, x, h, f, deg, m):
2     """Implementasjon av Eulers metode. Koden er utformet med utgangspunkt på utdelt kode,
3     hentet fra NUMFYS: https://nbviewer.jupyter.org/urls/www.numfys.net/media/notebooks/Eulers\_method\_
4     Performs a single step of Euler's method on vector form.
5
6     Parameters:
7         w: Numerical approximation of w at time t
8         t: The time the Euler step is preformed at
9         h: Step size
10        f: RHS of our ODE
11        m: polytropic index
12    Returns:
13        next_w: Numerical approximation of x at time t+h
14    """
15    next_w = w + h * f(w, x, deg, m)
16    return next_w
17
18 def g(w, x, deg, m):
19     """Defines the right hand side of our differential equation. In our case it is a vector function th
20     determines the equation of motion.
21     Parameters:
22         w: Numerical approximation of w at time t
23         t: Time, not relevant here as we have no explicit time dependence
24         deg: Degree of the ODE we wish to solve
25     Returns:
26         next_w: Numerical approximation of w at time t
27     """
28    next_w = np.zeros(deg)
29    next_w[0] = w[1]
30    if x == 0: #Dette kom vi fram til i samsvar med foreleser, benyttes i oppg. 3g
31        next_w[1] = -1/3
32    else:
33        next_w[1] = -2/x * w[1] - np.absolute(w[0])**m
34    return next_w
```

```
In [24]: 1 steplengths = [0.01, 0.1, 0.3]
2 xx = np.arange(0.00001,1,0.01) #For å plotte analytisk Løsning
3 fig, ax = plt.subplots(1,3, figsize=(18, 6))
4 fig.suptitle("Løsning av Lane-Emden vha Euler's Methode", fontsize=16)
5 for i, h in enumerate(steplengths): #Itererer gjennom gitte steglengder
6     M, xi = solve_numeric(step_Euler_high, h, g, 1, np.array([1,0]), 0, 1) #Beregner numerisk Løsning
7     ax[i].set_title("h = " + str(h))
8     ax[i].set_xlabel("\u03BE")
9     ax[i].set_ylabel("\u03B8")
10    ax[i].plot(xi, M[0], label="Numerisk")
11    ax[i].plot(xx,np.sin(xx)/xx, label="Analytisk")
12 plt.subplots_adjust(hspace=1.5)
13 plt.legend()
14 plt.show()
```

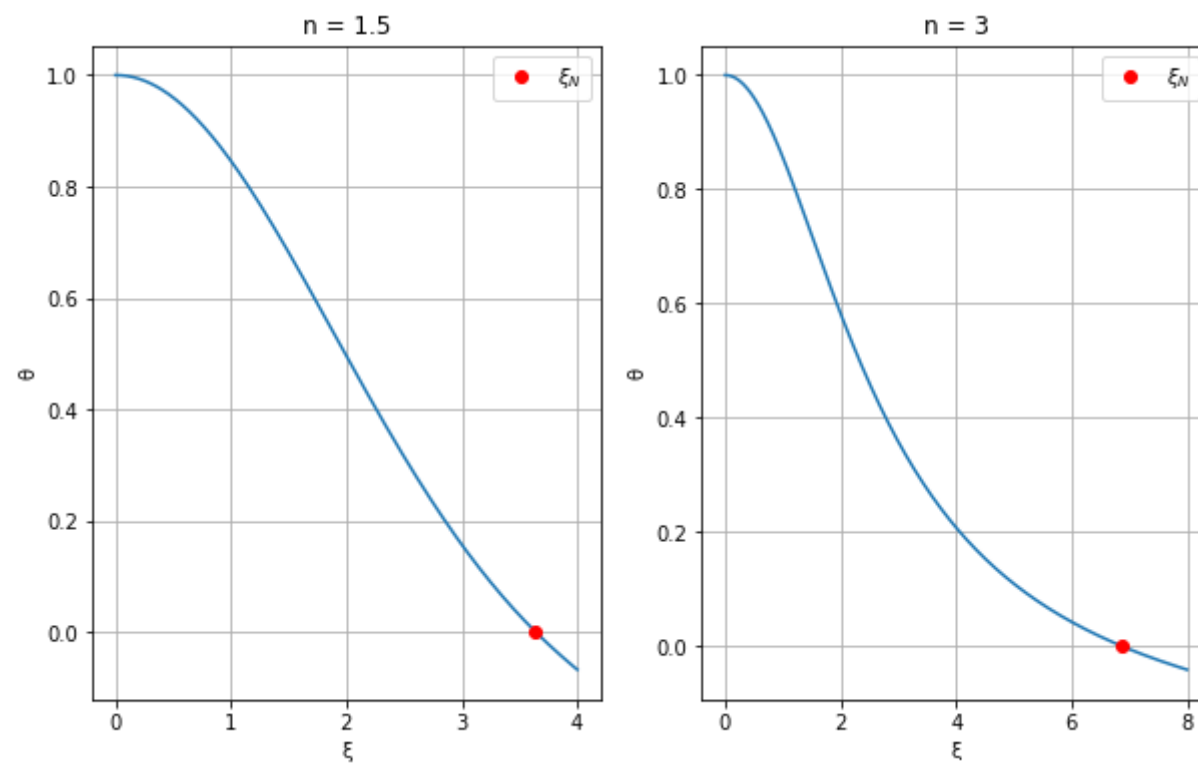


Ser fra tabellen og grafene ovenfor at den minste verdien av h , altså $h = 0.01$ gir minst avvik mellom den analytiske og den numeriske løsningen. Ser at ved å velge enda mindre h -verdier blir avviket enda mindre, men velger å tolke oppgaven slik at poenget er å vise nøyaktigheten til de ulike metodene, og ved valg av enda mindre h bli ikke avviket mellom analytisk og numerisk resultat like synlig. Velger derfor å bruke verdien $h = 0.01$ videre.

Oppgve 3e)

In [25]:

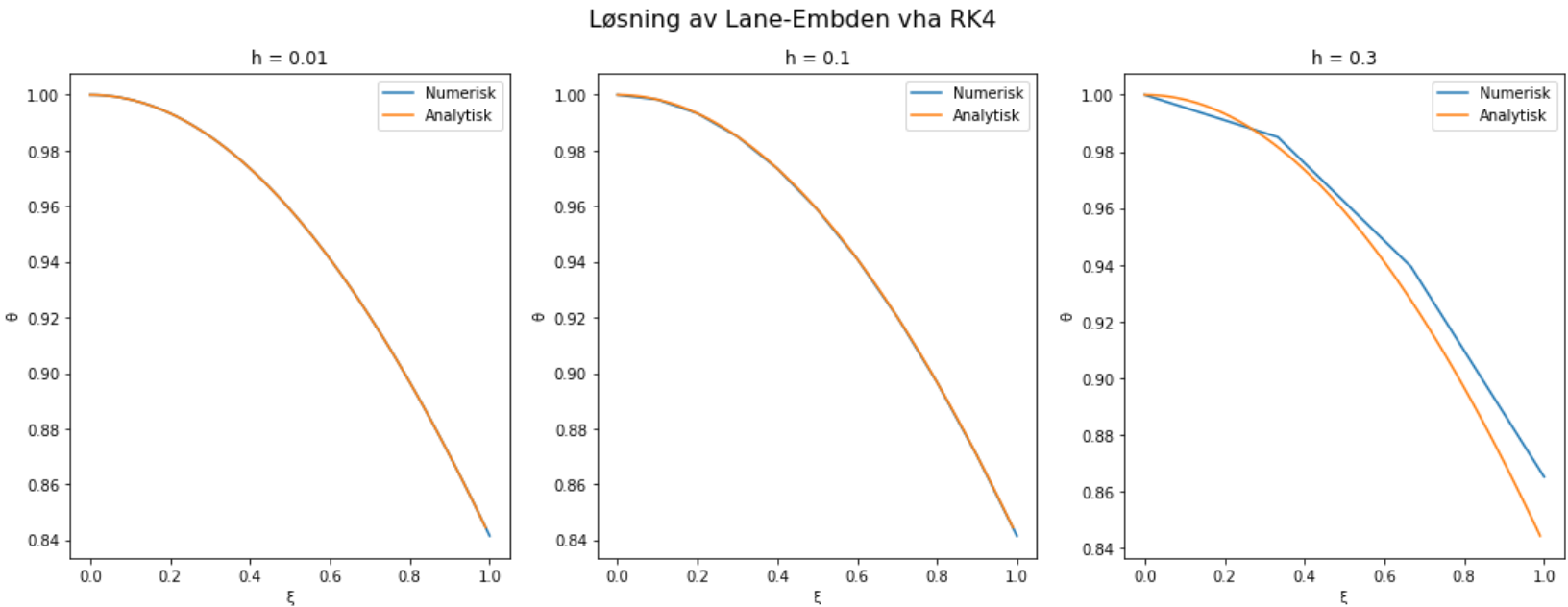
```
1 polytropic_indices = [3/2, 3]
2 fig, ax = plt.subplots(1,2, figsize=(10, 6))
3 for i, n in enumerate(polytropic_indices):
4     #Beregner numerisk løsning for hver n. Første plott går fra [0,4], andre fra [0,8]
5     M, xi = solve_numeric(step_Euler_high, 0.01, g, n, np.array([1,0]), 0, 4*(i+1))
6     ax[i].set_title("n = " + str(n))
7     ax[i].set_xlabel("\u03BE")
8     ax[i].set_ylabel("\u03B8")
9     ax[i].plot(xi, M[0]) #Plotting theta(xi)
10    ax[i].grid()
11    idx = np.argwhere(np.diff(np.sign(M[0]-0))).flatten() #Finner skjæringspunkt
12    ax[i].plot(xi[idx][0], M[0][idx][0], 'ro', label=r'\xi_N$')
13    ax[i].legend()
14 plt.show()
```



Oppgave 3f)

In [26]:

```
1
2 def RK4_step(w, x, h, f, deg, m):
3     """ Ett steg ved fjerdeordens Runge-Kutta"""
4     k1 = f(w, x, deg, m)
5     k2 = f(w+h*k1/2, x+h/2, deg, m)
6     k3 = f(w+h*k2/2, x+h/2, deg, m)
7     k4 = f(w+h*k3, x+h, deg, m)
8     return w + h/6*(k1+2*k2+2*k3+k4)
9
10 RK_steplen = [0.01, 0.1, 0.3]
11 fig, ax = plt.subplots(1,3, figsize=(18,6))
12 fig.suptitle("Løsning av Lane-Emden vha RK4", fontsize=16)
13 for i, h in enumerate(RK_steplen):
14     M, xi = solve_numeric(RK4_step, h, g, 1, np.array([1,0]), 0, 1)
15     # Parametere: (numeric_method, h, f, m, init_cond, x0, xend)
16     ax[i].set_title("h = " + str(h))
17     ax[i].set_xlabel("\u03BE")
18     ax[i].set_ylabel("\u03B8")
19     ax[i].plot(xi, M[0], label="Numerisk")
20     ax[i].plot(xx, np.sin(xx)/xx, label="Analytisk")
21     ax[i].legend()
22 plt.show()
```



Oppgave 3g)

Bruker oppgitte verdier etter faglærers anbefaling for ξ_N , både for det ultra- og ikke-relativistiske tilfellet, da disse er mer nøyaktige. Bruker disse verdiene:

$$\xi_{\text{ikke relativistisk}} = 3.653753736219229$$

$$\xi_{\text{ultra relativistisk}} = 6.89684861937$$

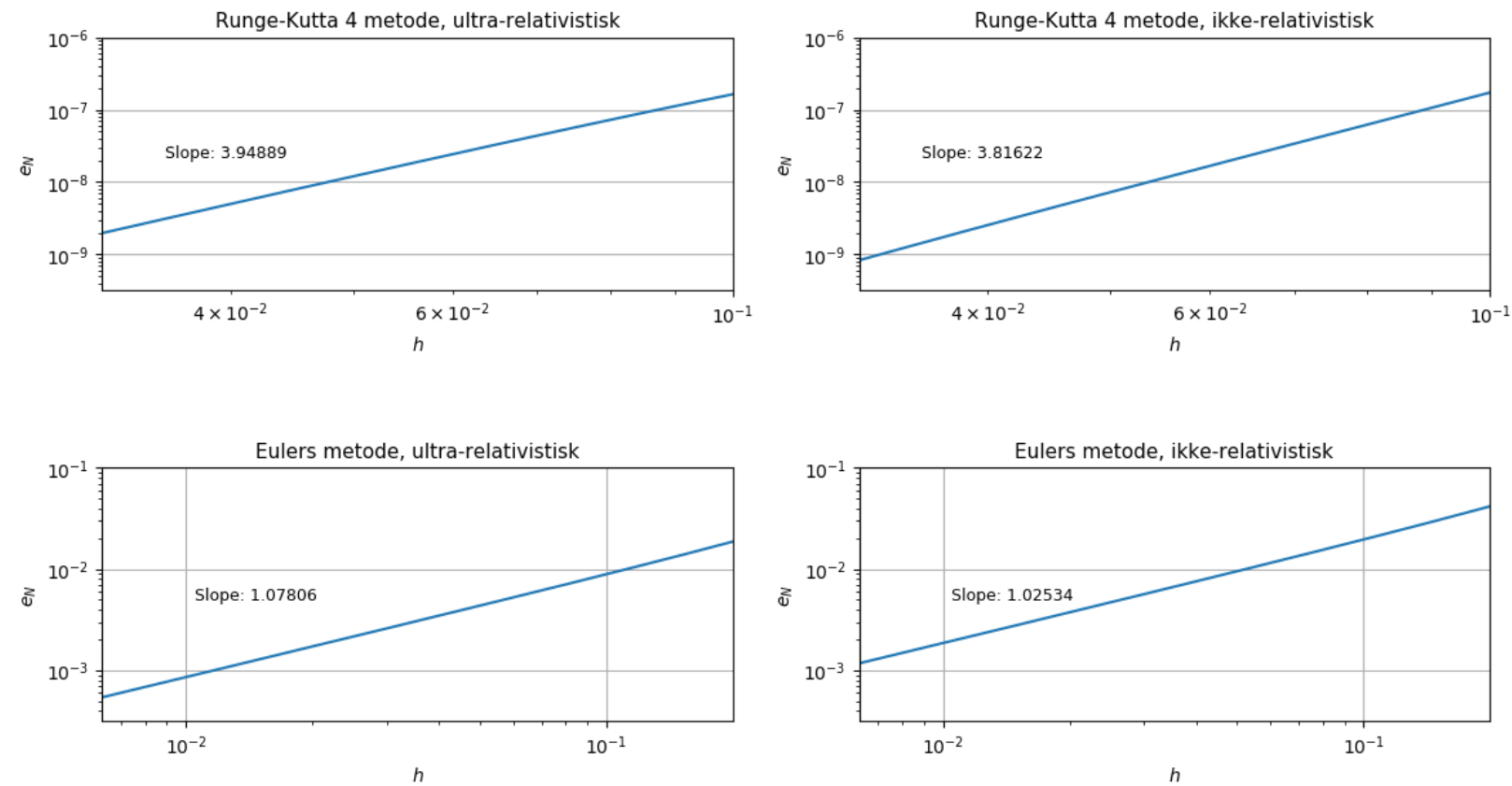
In [7]:

```
1 xi_N_rel = 6.89684861937 #n=3
2 xi_N_irel = 3.653753736219229 #n=3/2
3 ic = np.array([1,0]) #initial condition
4
5 n_rel = 3
6 n_irel = 3/2
7 #Skal være 800
8 N_arr = np.array([1 + 2*i for i in range(800)]) #steglengde fra 0.0985 til 0.00835
9 h_arr_rel = xi_N_rel/N_arr
10 h_arr_irel = xi_N_irel/N_arr
11 eRK4_rel = np.zeros(len(N_arr))
12 eRK4_irel = np.zeros(len(N_arr))
13 eEuler_rel = np.zeros(len(N_arr))
14 eEuler_irel = np.zeros(len(N_arr))
15
16 #def solve_numeric(numeric_method, h, f, m, init_cond, x0=0, xend=1, explicit_N=False):
17 #RK4_step ELLER step_Euler_high
18
19 for i, N in enumerate(N_arr):
20     #Ultrarelativistisk, RK4
21     MRK4_rel, xiRK4_rel = solve_numeric(RK4_step, h_arr_rel[i], g, n_rel, ic, 0, xi_N_rel, True)
22     thetaRK4_rel = MRK4_rel[:,0][-1]
23     eRK4_rel[i] = np.absolute(thetaRK4_rel)
24     #Ikke-relativtistisk, RK4
25     MRK4_irel, xiRK4_irel = solve_numeric(RK4_step, h_arr_irel[i], g, n_irel, ic, 0, xi_N_irel, True)
26     thetaRK4_irel = MRK4_irel[:,0][-1]
27     eRK4_irel[i] = np.absolute(thetaRK4_irel)
28     #Ultrarelativistisk, Euler
29     MEuler_rel, xiEuler_rel = solve_numeric(step_Euler_high, h_arr_rel[i], g, n_rel, ic, 0, xi_N_rel, T
30     thetaEuler_rel = MEuler_rel[:,0][-1]
31     eEuler_rel[i] = np.absolute(thetaEuler_rel)
32     #Ikke-relativistisk, Euler
33     MEuler_irel, xiEuler_irel = solve_numeric(step_Euler_high, h_arr_irel[i], g, n_irel, ic, 0, xi_N_ir
34     thetaEuler_irel = MEuler_irel[:,0][-1]
35     eEuler_irel[i] = np.absolute(thetaEuler_irel)
```

```

In [8]: 1 plt.figure("", figsize=(10, 7), dpi=(100), )
2
3 '''RK4, ultra-relativistisk'''
4 axRK4_rel = plt.subplot(221)
5 axRK4_rel.set_title("Runge-Kutta 4 metode, ultra-relativistisk", fontsize=11)
6 axRK4_rel.loglog(h_arr_rel, eRK4_rel)
7 slope_RK4_rel, intercept_RK4_rel = np.polyfit(np.log(h_arr_rel), np.log(eRK4_rel), 1)
8 axRK4_rel.text(10**(-1.45), 10**(-7.65), "Slope: {}".format(round(slope_RK4_rel, 5)), fontsize = 9)
9 axRK4_rel.grid()
10 axRK4_rel.set_xlabel("$h$")
11 axRK4_rel.set_ylabel(r"$e_N$")
12
13 axRK4_rel.set_ylim(10**(-9.5), 1e-6)
14 axRK4_rel.set_xlim(10**(-1.5), 1e-1)
15 #-----
16
17 '''RK4, ikke-relativistisk'''
18 axRK4_irel = plt.subplot(222)
19 axRK4_irel.set_title("Runge-Kutta 4 metode, ikke-relativistisk", fontsize = 11)
20 axRK4_irel.loglog(h_arr_irel, eRK4_irel)
21 slope_RK4_irel, intercept_RK4_irel = np.polyfit(np.log(h_arr_irel), np.log(eRK4_irel), 1)
22 axRK4_irel.text(10**(-1.45), 10**(-7.65), "Slope: {}".format(round(slope_RK4_irel, 5)), fontsize = 9)
23 axRK4_irel.grid()
24 axRK4_irel.set_xlabel("$h$")
25 axRK4_irel.set_ylabel(r"$e_N$")
26
27 axRK4_irel.set_ylim(10**(-9.5), 1e-6)
28 axRK4_irel.set_xlim(10**(-1.5), 1e-1)
29 #-----
30
31 '''Euler, ultra-relativistisk'''
32 axEuler_rel = plt.subplot(223)
33 axEuler_rel.set_title("Eulers metode, ultra-relativistisk", fontsize=11)
34 axEuler_rel.loglog(h_arr_rel, eEuler_rel)
35 slope_Euler_rel, intercept_Euler_rel = np.polyfit(np.log(h_arr_rel), np.log(eEuler_rel), 1)
36 axEuler_rel.text(10**(-1.98), 10**(-2.3), "Slope: {}".format(round(slope_Euler_rel, 5)), fontsize = 9)
37 axEuler_rel.grid()
38 axEuler_rel.set_xlabel("$h$")
39
40 axEuler_rel.set_ylabel(r"$e_N$")
41 axEuler_rel.set_ylim(10**(-3.5), 1e-1)
42 axEuler_rel.set_xlim(10**(-2.2), 10**(-0.7))
43 #-----
44
45 '''Euler, ikke-relativistisk'''
46 axEuler_irel = plt.subplot(224)
47 axEuler_irel.set_title("Eulers metode, ikke-relativistisk", fontsize=11)
48 axEuler_irel.loglog(h_arr_irel, eEuler_irel)
49 slope_Euler_irel, intercept_Euler_irel = np.polyfit(np.log(h_arr_irel), np.log(eEuler_irel), 1)
50 axEuler_irel.text(10**(-1.98), 10**(-2.3), "Slope: {}".format(round(slope_Euler_irel, 5)), fontsize = 9)
51 axEuler_irel.grid()
52 axEuler_irel.set_xlabel("$h$")
53 axEuler_irel.set_ylabel(r"$e_N$")
54
55 axEuler_irel.set_ylim(10**(-3.5), 1e-1)
56 axEuler_irel.set_xlim(10**(-2.2), 10**(-0.7))
57 #-----
58
59 plt.subplots_adjust(right=1.2, hspace=0.7)
60 plt.show()

```



Man kan se fra grafene for RK4 at de har et stigningstall på tilnærmet 4, noe som stemmer overens med en kompleksitet på $\mathcal{O}(h^4)$. Ved bruk av et større intervall for feilen, altså helt nede i 10^{-13} fikk vi en uforklarlig "dolp" i grafen for globalfeilen for både det ikke-relativistiske og ultra-relativistiske tilfellet ved bruk av RK4. Når dette resultatet oppstod, ble det antatt at siden denne "dolpen" oppstår helt nede i området 10^{-11} til 10^{-13} kan andre feilkilder også ha innvirkning. For eksempel kan det ha noe med at flyttall som lagres i minne har et endelig antall siffer, kanselleringsfeil i diverse beregninger eller at ξ_N er gitt med en usikkerhet. Basert på dette valgte vi å bruke et intervall fra 10^{-9} til 10^{-2} , hvor grafen er en rett linje som forventet.

I grafene som viser et loglog-plot av globalfeil for Eulers metode i de to tilfellene ser man at stigningstallet ligger på tilnærmet 1, noe som stemmer overens med en kompleksitet på $\mathcal{O}(h)$ som vist i oppgave 3b).

Ved å benytte antall steg satt til 1500 istedet for 800 fikk vi et stigningstall for RK4 på 3.60051 og 3.67417 for henholdsvis ultra-relativistisk og ikke-relativistisk tilfelle. For Euler hadde ikke endringen i antall steg en like stor effekt men man så også der at stigningstallet ble litt mindre. Denne minskningen i stigningstall, særlig for RK4 tyder på at feilen flater ut for veldig små h . Dette kommer av at man får mindre usikkerhet, altså avvik fra eksakt verdi ved bruk av mindre steglengde, som henger sammen med antall steg. Grafen flater altså ut da feilen aldri kan bli mindre enn 0.

Oppgave 3h)

Ligning (36) fra prosjektoppgaven er den dimensjonsløse likningen

$$\frac{d\bar{P}}{dx}(x) = -\frac{1}{2}\alpha x \left[1 + \bar{P}\right] \left[1 + 3\bar{P}\right] \left[1 - x^2\alpha\right]^{-1} \tag{36}$$

som er løst analytisk til følgende linking

$$\bar{P}(x) = \frac{\sqrt{1-\alpha} - \sqrt{1-\alpha x^2}}{\sqrt{1-\alpha x^2} - 3\sqrt{1-\alpha}}. \tag{37}$$

Finner henholdsvis randverdien $\bar{P}(x = 0)$ og $\left.\frac{d\bar{P}}{dx}\right|_{x=0}$

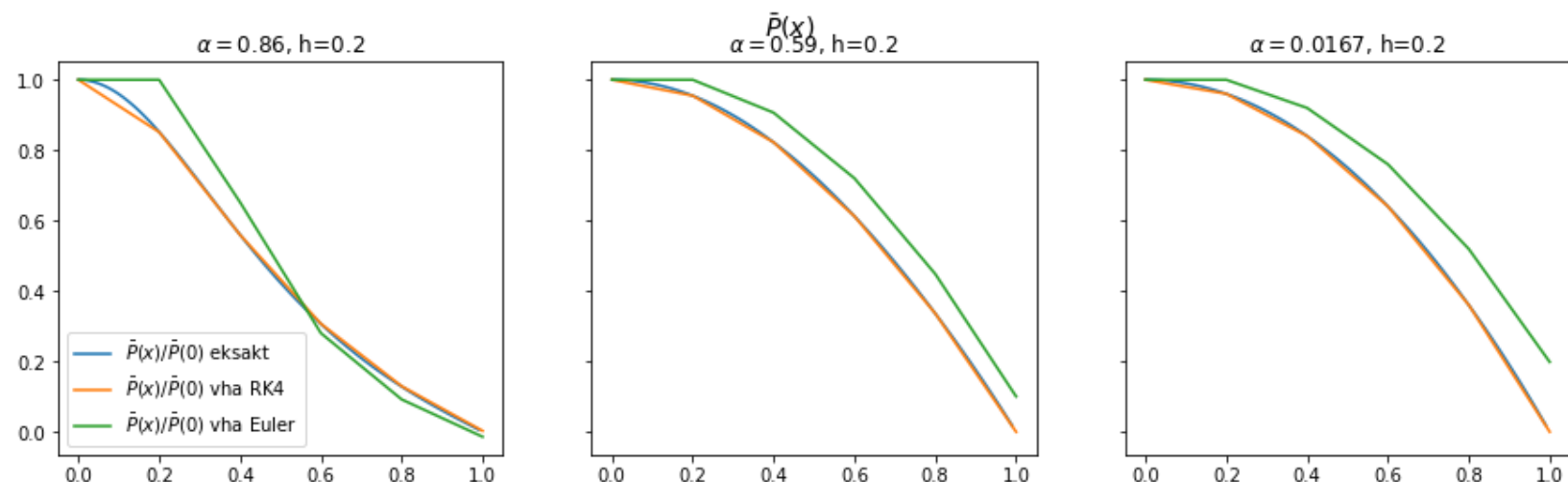
$$\begin{aligned} \bar{P}(x = 0) &= \left.\frac{\sqrt{1-\alpha} - \sqrt{1-\alpha x^2}}{\sqrt{1-\alpha x^2} - 3\sqrt{1-\alpha}}\right|_{x=0} \\ &= \frac{\sqrt{1-\alpha} - \sqrt{1}}{\sqrt{1} - 3\sqrt{1-\alpha}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{P}}{dx}(x = 0) &= -\frac{1}{2}\alpha x \left[1 + \bar{P}\right] \left[1 + 3\bar{P}\right] \left[1 - x^2\alpha\right]^{-1}\bigg|_{x=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Oppgave 3i)

In [21]:

```
1 alphas = [0.86, 0.59, 0.0167]
2 step_length = 0.2
3
4 P0 = lambda a : (np.sqrt(1-a)-1)/(1-3*np.sqrt(1-a)) #(57)
5 dpdx = lambda y, x, deg, a : -0.5*a*x*(1+y)*(1+3*y)*(1-x*x*a)**(-1) #(36)
6 exact_P = lambda x, a : (np.sqrt(1-a)-np.sqrt(1-a*x*x))/(np.sqrt(1-a*x*x)-3*np.sqrt(1-a)) #(37)
7
8 fig, ax = plt.subplots(1,3, sharex=True, sharey=True)
9 fig.suptitle(r'$\bar{P}(x)$', fontsize=14)
10 fig.set_figwidth(15)
11 ls_x = np.arange(0.0001, 1, 0.01) #Linspace for å plotte analytisk likning
12 for i, a in enumerate(alphas):
13     init_cond_3i = np.array([P0(a)])
14     RK4_M, RK4_xi = solve_numeric(RK4_step, step_length, dpdx, a, init_cond_3i, 0, 1)
15     euler_M, euler_xi = solve_numeric(step_Euler_high, step_length, dpdx, a, init_cond_3i, 0, 1)
16     ax[i].set_title(r'$\alpha=$' + str(a) + ", h=" + str(step_length))
17     ax[i].plot(ls_x, exact_P(ls_x, a)/P0(a), label=r'$\bar{P}(x)/\bar{P}(0)$ eksakt')
18     ax[i].plot(RK4_xi, RK4_M[0]/P0(a), label=r'$\bar{P}(x)/\bar{P}(0)$ vha RK4')
19     ax[i].plot(euler_xi, euler_M[0]/P0(a), label=r'$\bar{P}(x)/\bar{P}(0)$ vha Euler')
20     if i==0: ax[i].legend(loc=3)
21 #plt.subplots_adjust(top=1)
22 fig.tight_layout(rect=[0, 0, 0, 0.9])
23 plt.show()
```

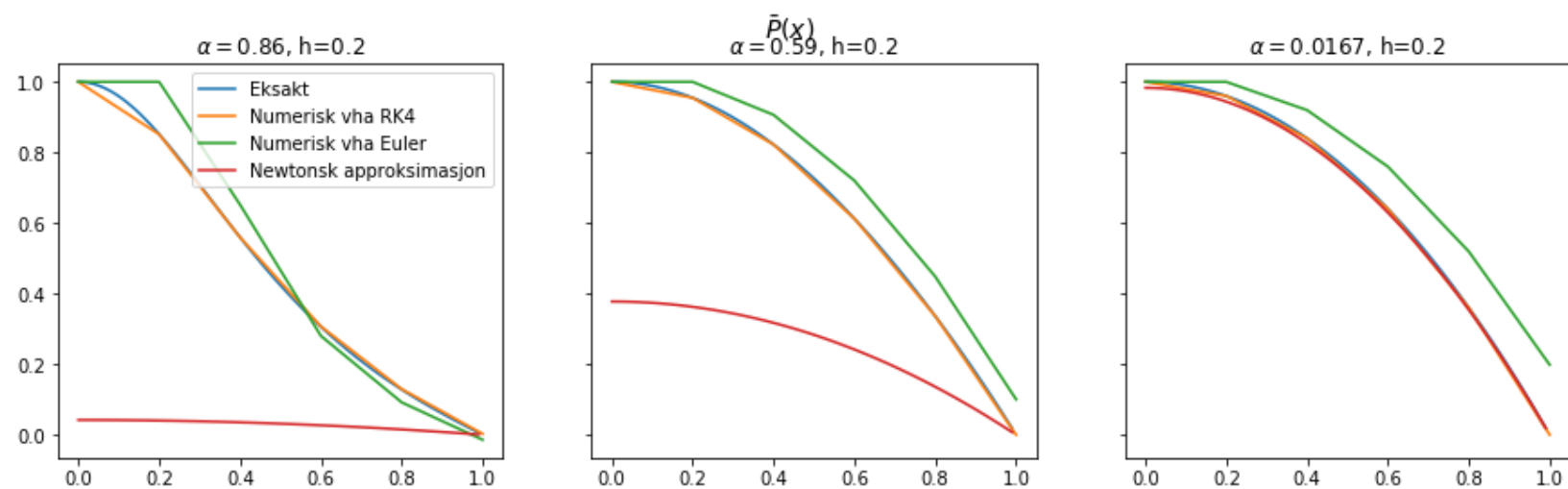


Valg av steglengde For oppgave 3i og 3j har vi valgt steglengde $h = 0.2$. Hensikten med oppgaven er å vise frem hvordan de numeriske løsningene for hhv Eulers metode og Runge Kuttas metode avviker fra den eksakte løsningen. Det er derfor hensiktsmessig med en relativt høy steglengde, slik at de numeriske løsningene ikke ser identiske ut. For $h < 0.2$ kunne man heller ikke se forskjell på eksakt løsning og løsning vha RK4, noe som ikke er ideelt for denne oppgaven.

Oppgave 3j)

In [23]:

```
1 def NewtonApprox(a,x):
2     return 1/4*a*(1-x**2)
3
4 ##### Plotting #####
5 #Plotter på tilsvarende måte som i 3i, legger bare til newtonske plott i hvert subplot
6 fig, ax = plt.subplots(1,3, sharex=True, sharey=True)
7 fig.suptitle(r'$\bar{P}(x)$', fontsize=14)
8 fig.set_figwidth(15)
9 ls_x = np.arange(0.0001, 1, 0.01) #Linspace for å plotte analytisk og newtonsk graf
10 for i, a in enumerate(alphas):
11     init_cond_3i = np.array([P0(a)])
12     RK4_M, RK4_xi = solve_numeric(RK4_step, step_length, dpdx, a, init_cond_3i, 0, 1)
13     euler_M, euler_xi = solve_numeric(step_Euler_high, step_length, dpdx, a, init_cond_3i, 0, 1)
14     ax[i].set_title(r'$\alpha=$' + str(a) + ", h=" + str(step_length))
15     ax[i].plot(ls_x, exact_P(ls_x, a)/P0(a), label=r'Eksakt')
16     ax[i].plot(RK4_xi, RK4_M[0]/P0(a), label=r'Numerisk vha RK4')
17     ax[i].plot(euler_xi, euler_M[0]/P0(a), label=r'Numerisk vha Euler')
18     ax[i].plot(ls_x, NewtonApprox(a,ls_x)/P0(a), label=r'Newtonske approksimasjon')
19     if i==0: ax[i].legend()
20 plt.subplots_adjust(hspace=0.5)
21 plt.show()
```



Ser fra grafene at Newton approksimasjonen er god for små α , dette fordi den Newtonske approksimasjonen, ligning (43) i oppgaveheftet, ble utledet ved å anta en liten α .