



**Università  
degli Studi  
di Palermo**



# Stimatori, Stima e Campionamento

CORSO DI BIG DATA  
a.a. 2021/2022

Prof. Roberto Pirrone

# Sommario

- Definizione di stimatore
- Stimatori polarizzati e non polarizzati
- Campionamento e stimatori
- Stima MLE e MAP

# Definizione di stimatore

- Uno stimatore o una *statistica* è una funzione dei dati in nostro possesso la quale cerca di fornire la *migliore predizione possibile* di una quantità o funzione cui siamo interessati

- Stima puntuale di un parametro  $\boldsymbol{\vartheta}$  in funzione dei dati  $\boldsymbol{x}^{(i)}$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_m = g(\boldsymbol{x}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{x}^{(m)})$$

- Stima di una variabile  $\boldsymbol{y}$  funzione dei dati  $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\varepsilon}$ 
  - La relazione tra  $\boldsymbol{y}$  ed  $\boldsymbol{x}$  *non è* completamente descritta tramite  $f$
  - Stimiamo una funzione che approssima  $f$
  - È una stima puntuale nello spazio delle funzioni

# Stimatori polarizzati e non polarizzati

- La polarizzazione o *bias* di uno stimatore si misura come la differenza tra il suo valore atteso ed il valore vero della quantità da stimare

$$\text{bias}(\hat{\theta}_m) = \mathbb{E} [\hat{\theta}_m] - \theta$$

- Dipende dai dati che abbiamo per calcolare la stima
- Stimatore non polarizzato
- Stimatore asintoticamente non polarizzato

$$\mathbb{E} [\hat{\theta}_m] = \theta$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\hat{\theta}_m] = \theta$$

# Stimatori campionari di media e varianza

$$\hat{\mu}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x^{(i)}$$

$$\hat{\sigma}_m^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (x^{(i)} - \hat{\mu}_m)^2$$

- Assumiamo che i campioni siano tratti da una distribuzione normale

$$\forall i, x^{(i)} \sim \mathcal{N}(x; \mu, \sigma)$$

# Stimatori campionari di media e varianza

$$\begin{aligned}\text{bias}(\hat{\mu}_m) &= \mathbb{E} [\hat{\mu}_m] - \mu = \\ &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x^{(i)} \right] - \mu = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbb{E} [x^{(i)}] - \mu = \\ &= \frac{m \cdot \mu}{m} - \mu = 0, \quad \mathbb{E}_{x^{(i)} \sim \mathcal{N}} [x^{(i)}] \triangleq \mu \quad \text{Non polarizzato}\end{aligned}$$

- Assumiamo che i campioni siano tratti da una distribuzione normale

$$\forall i, x^{(i)} \sim \mathcal{N}(x; \mu, \sigma)$$

# Stimatori campionari di media e varianza

$$\hat{\mu}_m - \mu = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x^{(i)} - \mu = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (x^{(i)} - \mu) ;$$

$$m(\hat{\mu}_m - \mu) = \sum_{i=1}^m (x^{(i)} - \mu)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\hat{\sigma}_m^2] &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (x^{(i)} - \hat{\mu}_m)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (x^{(i)} - \hat{\mu}_m + \mu - \mu)^2 \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m ((x^{(i)} - \mu) - (\hat{\mu}_m - \mu))^2 \right] \end{aligned}$$

- Assumiamo che i campioni siano tratti da una distribuzione normale

$$\forall i, x^{(i)} \sim \mathcal{N}(x; \mu, \sigma)$$

# Stimatori campionari di media e varianza

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left( (x^{(i)} - \mu) - (\hat{\mu}_m - \mu) \right)^2 \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (x^{(i)} - \mu)^2 - \frac{2}{m} (\hat{\mu}_m - \mu) \sum_{i=1}^m (x^{(i)} - \mu) + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\hat{\mu}_m - \mu)^2 \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (x^{(i)} - \mu)^2 - \frac{2 \cdot m}{m} (\hat{\mu}_m - \mu)^2 + \frac{m}{m} (\hat{\mu}_m - \mu)^2 \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (x^{(i)} - \mu)^2 \right] - \mathbb{E} \left[ (\hat{\mu}_m - \mu)^2 \right] = \\ &= \sigma^2 - \text{Var} \left[ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x^{(i)} \right] = \sigma^2 - \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^m \text{Var} [x^{(i)}] = \sigma^2 - \frac{m}{m^2} \sigma^2 = \frac{m-1}{m} \sigma^2 \end{aligned}$$

*Polarizzato*

- Assumiamo che i campioni siano tratti da una distribuzione normale

$$\forall i, x^{(i)} \sim \mathcal{N}(x; \mu, \sigma)$$



# Stimatori campionari di media e varianza

$$\tilde{\sigma}_m^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m \left( x^{(i)} - \hat{\mu}_m \right)^2$$

$$\mathbb{E} [\tilde{\sigma}_m^2] = \mathbb{E} \left[ \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m \left( x^{(i)} - \hat{\mu}_m \right)^2 \right]$$

$$= \frac{m}{m-1} \mathbb{E} [\hat{\sigma}_m^2] = \frac{m}{m-1} \left( \frac{m-1}{m} \sigma^2 \right) = \sigma^2 \text{ *Non polarizzato*}$$

- Assumiamo che i campioni siano tratti da una distribuzione normale

$$\forall i, x^{(i)} \sim \mathcal{N}(x; \mu, \sigma)$$

# Varianza di uno stimatore

- È la misura utilizzata per quanto la stima sia stabile rispetto al variare dei campioni utilizzati
- La radice quadrata della varianza si definisce *standard error*

$$SE(\hat{\theta}_m) = \sqrt{\text{Var}(\hat{\theta}_m)}$$

*Standard error della media campionaria*

$$SE(\hat{\mu}_m) = \sqrt{\text{Var} \left[ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x^{(i)} \right]} = \frac{\sigma}{\sqrt{m}}$$

# Errore quadratico medio (MSE)

- Lo stimatore ideale ha il minimo bias, meglio se sia non polarizzato, e la minima varianza
- Per giudicare la bontà di una stima in questo senso si utilizza l'*errore quadratico medio* (mean square error – MSE)

$$\text{MSE} = \mathbb{E} \left[ (\hat{\theta}_m - \theta)^2 \right] =$$
$$\text{Bias}(\hat{\theta}_m)^2 + \text{Var}(\hat{\theta}_m)$$

# Campionamento e analisi di Monte Carlo

- Gli stimatori visti sinora sono semplici e rientrano nella famiglia di quelli detti di «Monte Carlo»
- I metodi di Monte Carlo restituiscono una stima della quantità ricercata con un certo ammontare casuale di errore
- In questo contesto il *campionamento* cioè la scelta dei campioni per formare la stima è essenziale

# Campionamento e analisi di Monte Carlo

- In genere si campionano dati da una distribuzione per approssimare un integrale non trattabile numericamente con una serie finita di somme
- Tale integrale viene visto come il *calcolo di un valore atteso* stimato attraverso la corrispondente media

$$s = \int p(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbb{E}_p [f(\mathbf{x})]$$

# Campionamento e analisi di Monte Carlo

- Campionamento con distribuzione uniforme dei campioni:
  - Fornisce gli stimatori visti in precedenza
  - La stima della varianza è polarizzata

# Campionamento e analisi di Monte Carlo

- Campionamento stratificato:
  - La stima della media e della varianza dipendono dal numero degli strati  $L$ , che possono avere dimensioni diverse  $S_k$  ( $S = \sum_k S_k$ ) e dal numero di campioni per strato  $n_k$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{S} \sum_{k=1}^L S_k \mu_k, \quad \hat{\sigma}^2 = \sum_{k=1}^L \left( \frac{S_k}{S} \right)^2 \frac{\sigma_k^2}{n_k}$$

$$S_k = \text{cost}, \quad n_k = 1 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \sigma_k^2$$

# Campionamento e analisi di Monte Carlo

- Campionamento per importanza
  - L'idea di base è quella di approssimare la distribuzione di probabilità di cui si vuole calcolare il valore atteso (l'integrale che è il vero obiettivo della stima)
  - Tale distribuzione è non nota, perché è non noto tutto l'integrando, ma si può introdurre una nuova distribuzione di probabilità, *nota*, dalla quale trarre i campioni
  - Chiamiamo questa distribuzione *funzione importanza* perché condiziona la scelta dei campioni che da questa sono tratti; auspicabilmente dovrebbe essere tale da approssimare la distribuzione originaria



# Campionamento e analisi di Monte Carlo

- Campionamento per importanza

$$s = \int p(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int q(\mathbf{x}) \frac{p(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})}{q(\mathbf{x})} d\mathbf{x}$$

$$s = \mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim q} \left[ \frac{pf}{q} \right]$$

# Campionamento e analisi di Monte Carlo

- Campionamento per importanza
  - Analizziamo il comportamento degli stimatori

$$\hat{s}_q = \frac{1}{n} \sum_{i=1, \mathbf{x}^{(i)} \sim q}^n \frac{p(\mathbf{x}^{(i)}) f(\mathbf{x}^{(i)})}{q(\mathbf{x}^{(i)})}$$

$$\mathbb{E}_q [\hat{s}_q] = \frac{1}{n} \sum_{i=1, \mathbf{x}^{(i)} \sim q}^n q(\mathbf{x}^{(i)}) \frac{p(\mathbf{x}^{(i)}) f(\mathbf{x}^{(i)})}{q(\mathbf{x}^{(i)})} = \mathbb{E}_p [\hat{s}_p] = s$$

# Campionamento e analisi di Monte Carlo

- Campionamento per importanza
  - Analizziamo il comportamento degli stimatori

$$\text{Var} [\hat{s}_q] = \text{Var} \left[ \frac{p(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})}{q(\mathbf{x})} \right] / n$$

$$q^*(x) = \frac{p(x) |f(x)|}{Z} \Rightarrow \text{Var} [\hat{s}_q^*] = 0$$

Basta *un solo campione* per  
La stima esatta

- Si possono utilizzare versioni non normalizzate di  $p$  e  $q$  che comportano una stima asintoticamente non polarizzata

# Campionamento e analisi di Monte Carlo

- Campionamento per importanza
  - La scelta di  $q^*$  è critica rispetto alla reale magnitudo di  $p|f|$  perché porta a sovrastimare/sottostimare pesantemente l'integrale
  - Possono insorgere problemi di stima in elevata dimensionalità di  $\mathbf{x}$
  - Il campionamento per importanza è comunque molto utilizzato in diversi ambiti del machine learning
    - *Stochastic Gradient Descent*

# Stima a massima verosimiglianza (MLE)

- La MLE è uno dei principi che possono essere utilizzati per definire se una particolare funzione *rappresenta un buon stimatore per una certa classe di modelli di apprendimento*
- Di conseguenza è uno dei principi fondanti del machine learning poiché se, dato il problema da risolvere, si riesce a identificare il modello più adatto, la MLE ci fornisce un criterio certo per poter stimare l'errore commesso e l'affidabilità della predizione.

# Stima a massima verosimiglianza (MLE)

$$\mathbb{X} = \{\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}\}, \quad p_{\text{data}}(\mathbf{x}) \quad \text{non nota}$$

$$\boldsymbol{\theta}_{\text{ML}} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} p_{\text{model}}(\mathbb{X}; \boldsymbol{\theta})$$

$$= \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} \prod_{i=1}^m p_{\text{model}}(\mathbf{x}^{(i)}; \boldsymbol{\theta})$$

*Assunzione di indipendenza statistica dei campioni*

# Stima a massima verosimiglianza (MLE)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta}_{\text{ML}} &= \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{i=1}^m \log p_{\text{model}} \left( \boldsymbol{x}^{(i)}; \boldsymbol{\theta} \right) = \\ &= \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} \mathbb{E}_{\boldsymbol{x} \sim \hat{p}_{\text{data}}} \log p_{\text{model}} (\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta})\end{aligned}$$

*nota empiricamente*

*dai dati osservati  $\rightarrow$  distribuzione empirica*

# Stima a massima verosimiglianza (MLE)

- Possiamo assumere di voler minimizzare la distanza tra la distribuzione empirica sui dati e quella del modello in termini della loro  $D_{KL}$

*non dipende dai parametri  
del modello*

$$\begin{aligned} D_{KL}(\hat{p}_{\text{data}} \parallel p_{\text{model}}) &= \mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim \hat{p}_{\text{data}}} [\log \hat{p}_{\text{data}}(\mathbf{x}) - \log p_{\text{model}}(\mathbf{x})] = \\ &= -\mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim \hat{p}_{\text{data}}} [\log p_{\text{model}}(\mathbf{x})] \end{aligned}$$

*Cross-entropia della  
distribuzione del modello  
Rispetto a quella dei dati!!*



# Stima a massima verosimiglianza (MLE)

- La MLE può estendersi anche alle probabilità condizionali  $p(\mathbf{y}|\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$  che rappresentano ciò che viene stima dai classificatori
- Siamo sotto l'ipotesi base del machine learning sui dati e cioè che essi siano *indipendenti e identicamente distribuiti* (*i.i.d.* assumption)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta}_{\text{ML}} &= \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} P(\mathbf{Y}|\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta}) = \\ &= \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{i=1}^m \log P(\mathbf{y}^{(i)}|\mathbf{x}^{(i)}; \boldsymbol{\theta})\end{aligned}$$

*ipotesi i.i.d.*

# Stima a massima verosimiglianza (MLE)

$$p(y|\mathbf{x}) = \mathcal{N}(y; \hat{y}(\mathbf{x}; \mathbf{w}), \sigma^2)$$

- Il MSE corrisponde alla MLE se la distribuzione è gaussiana
- Si assuma di avere un modello che forma una stima  $\hat{y}(\mathbf{x}; \mathbf{w})$  di una variabile  $y$

$$\sum_{i=1}^m \log p(y^{(i)} | \mathbf{x}^{(i)}; \mathbf{w})$$

$$= -m \log \sigma - \frac{m}{2} \log(2\pi) - \sum_{i=1}^m \frac{\|\hat{y}^{(i)} - y^{(i)}\|^2}{2\sigma^2}$$

$$\text{MSE}_{\text{train}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|\hat{y}^{(i)} - y^{(i)}\|^2$$

*Minimizzare il MSE corrisponde a massimizzare la MLE*

# Stima Maximum A Posteriori (MAP)

- La MLE rappresenta l'approccio alla massimizzazione della stima nell'ottica della *statistica frequentista*
  - La stima del parametro  $\vartheta$  è una variabile statistica che è funzione dei dati, anch'essi visti come casuali
  - L'incertezza sulla stima è rappresentata dalla sua varianza
- Nella *statistica Bayesiana*, al contrario, i dati sono considerati come già osservati e non sono casuali mentre  $\vartheta$  è esatto, ma non noto
- La nostra conoscenza imperfetta su  $\vartheta$  è rappresentata dal *prior* e cioè la sua distribuzione di probabilità  $p(\vartheta)$  prima di osservare i dati

# Stima Maximum A Posteriori (MAP)

- Il processo di stima si avvale della regola di Bayes che stima una *distribuzione di probabilità a posteriori su  $\theta$*

$$\overset{\text{posterior}}{p\left(\theta \mid x^{(1)}, \dots, x^{(m)}\right)} = \frac{\overset{\text{likelihood}}{p\left(x^{(1)}, \dots, x^{(m)} \mid \theta\right)} \overset{\text{prior}}{p(\theta)}}{\underset{\text{Costante perché i dati sono noti}}{p\left(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}\right)}}$$

- In questo contesto è importante la scelta del prior:
  - Deve riflettere l'incertezza a priori sul valore di  $\theta$
  - Distribuzione uniforme o gaussiana sul dominio di variazione
  - Elevata entropia del prior

# Stima Maximum A Posteriori (MAP)

- La stima MAP non è altro che la scelta di un valore puntuale di  $\boldsymbol{\vartheta}$  al posto di un'intera distribuzione

$$\boldsymbol{\theta}_{\text{MAP}} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{x}) = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} \log p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}) + \log p(\boldsymbol{\theta})$$

- Si sceglie il valore di  $\boldsymbol{\vartheta}$  che massimizza il posterior
- Si tratta della somma del MLE e del prior
- La stima MAP riduce la varianza rispetto a quella MLE
- Utile quando abbiamo una conoscenza su  $\boldsymbol{\vartheta}$  che non possiamo trovare nei dati