



**Università
degli Studi
di Palermo**



Preparazione dei dati

CORSO DI BIG DATA
a.a. 2021/2022

Prof. Roberto Pirrone

Sommario

- Estrazione delle feature rilevanti
- Portabilità tra diverse tipologie di dati
- Data cleaning
- Riduzione della dimensionalità

Processo di data preparation

- Estrazione delle feature e portabilità
 - Si ricercano le feature più significative in relazione al problema da risolvere e, in genere, tali feature vanno *convertite nelle tipologie di dati* più adatte per l'utilizzo con gli algoritmi di analisi
- Data cleaning
 - Eliminazione di dati erranei e/o inconsistenti
 - *Imputazione* dei dati mancanti attraverso un processo di stima
- Data reduction & transformation
 - Riduzione del volume dei dati tramite *campionamento* di un sotto insieme, *riduzione della dimensionalità* dei campioni ovvero *trasformazione* degli stessi secondo una diversa rappresentazione

Portabilità tra tipologie di dati

| Source data type | Destination data type | Methods |
|-------------------|--------------------------|--|
| Numeric | Categorical | Discretization |
| Categorical | Numeric | Binarization |
| Text | Numeric | Latent semantic analysis (<i>LSA</i>) |
| Time series | Discrete sequence | <i>SAX</i> |
| Time series | Numeric multidimensional | <i>DWT, DFT</i> |
| Discrete sequence | Numeric multidimensional | <i>DWT, DFT</i> |
| Spatial | Numeric multidimensional | 2-d <i>DWT</i> |
| Graphs | Numeric multidimensional | <i>MDS</i> , spectral |
| Any type | Graphs | Similarity graph (Restricted applicability) |

Portabilità tra tipologie di dati

- Discretizzazione
 - Si creano degli intervalli discreti per rappresentare la variazione del dato numerico
 - Intervalli ad ampiezza costante
 - Intervalli logaritmici: ogni intervallo $[a,b] \rightarrow \log(b) - \log(a) = \text{costante}$
 - Più in generale $[a,b] \rightarrow f(b) - f(a) = \text{costante}$ per una certa $f(.)$ che rappresenta la distribuzione dei dati
 - Intervalli a «profondità» costante: ogni intervallo contiene lo stesso numero di elementi

Portabilità tra tipologie di dati

- Binarizzazione
 - Ogni categoria possibile induce la creazione di un *one hot vector* i cui componenti sono tutti nulli tranne quello in posizione corrispondente alla categoria

$$a \in \{c_1, c_2, \dots, c_\phi\} \rightarrow \mathbf{x} \in \mathbb{R}^\phi,$$

$$a = c_k \rightarrow \mathbf{x} = [0_1, 0_2, \dots, 1_k, \dots, 0_\phi]$$

Portabilità tra tipologie di dati

- Latent Semantic Analysis (LSA)
 - Un corpus documentale può essere visto come una matrice binaria sparsa \mathcal{D} che ha come righe i termini e come colonne i documenti che li contengono.
 - La LSA è una forma di *Singular Value Decomposition* (SVD) di \mathcal{D} che mira a creare uno spazio euclideo in cui un corpus documentale viene trasformato in un insieme di vettori in \mathbb{R}^d dove è possibile giudicare la similarità tramite una misura di distanza.
 - Di norma gli elementi di \mathcal{D} sono pesati con una misura di tipo frequentista chiamata *Term Frequency – Inverse Document Frequency* TF-IDF

Portabilità tra tipologie di dati

- TF-IDF

- Prodotto della frequenza $f_{t,d}$ del termine t nel documento d appartenente a \mathcal{D} , avente dimensione N , per l'inverso della frequenza dei documenti che contengono il termine t e cioè N/n_t
- Diversi schemi di pesatura:

$$\text{tf}(t, d) = f_{t,d} / \sum_{t' \in d} f_{t',d}$$

$$\text{idf}(t, \mathcal{D}) = \log \left(\frac{N}{n_t} \right)$$

$$\text{tf-idf}(t, d, \mathcal{D}) = \text{tf}(t, d) \times \text{idf}(t, \mathcal{D})$$

Si può mostrare che:

$$\frac{1}{N} \sum_{t,d} \text{tf}(t, d) \times \text{idf}(t, \mathcal{D}) \equiv MI(\mathcal{T}, \mathcal{D})$$

Portabilità tra tipologie di dati

- Symbolic Aggregate Approximation (SAX)
 - Si effettua la media dei valori della serie temporale su finestre di osservazione contigue di data ampiezza w
 - Si discretizza la serie risultante con intervalli a profondità costante
 - Il risultato è una serie discreta di simboli
- Come ottengo gli intervalli a profondità costante?
 - Si assume una distribuzione gaussiana dei valori delle serie temporali mediate che viene stimata in termini di media e varianza ed i cui *quantili* forniscono gli estremi degli intervalli

Portabilità tra tipologie di dati

- Discrete Wavelet Transform (DWT) e Discrete Fourier Transform (DFT)
 - Usate per trasformare serie temporali in vettori multidimensionali di coefficienti che sono meno interdipendenti dei dati originali
 - Riduzione di dimensionalità
- La DWT si applica anche alla trasformazione di dati spaziali in dati numerici multidimensionali

Portabilità tra tipologie di dati

- Discrete Wavelet Transform (DWT) e Discrete Fourier Transform (DFT)
 - Una sequenza discreta di simboli può essere trasformata in un insieme di sequenze binarie che descrivono la presenza di un solo simbolo per volta e poi questi ultimi sono trasformati con la DWT

```
ACACACTGTGACTG
10101000001000
01010100000100
00000010100010
00000001010001
```

Portabilità tra tipologie di dati

- DWT (Haar Wavelets)
 - Si assuma una sequenza temporale $(t_i; x_i)$ avente lunghezza q che è potenza di 2 e suddivisa ricorsivamente in due metà S_k^i (i -esimo segmento a profondità di suddivisione k) fino ad arrivare a segmenti di lunghezza unitaria
 - $k = 1, \dots, \log_2(q) + 1$
 - $S_k^i = [(i - 1) \cdot q / 2^{k-1} + 1, i \cdot q / 2^{k-1}]$

Portabilità tra tipologie di dati

- DWT (Haar Wavelets)
 - Il coefficiente i -esimo della DWT è, per ogni livello di decomposizione k , la semi-differenza tra i valori medi di due sotto-sequenze adiacenti S_{k+1}^{2i} e S_{k+1}^{2i-1} al livello di suddivisione $k+1$

$$\begin{aligned}\psi_k^i &= \left(\Phi_{k+1}^{2 \cdot i - 1} - \Phi_{k+1}^{2 \cdot i} \right) / 2 \\ \Phi_k^i &= \left(\Phi_{k+1}^{2 \cdot i - 1} + \Phi_{k+1}^{2 \cdot i} \right) / 2 \\ \Phi_{\log_2(q)+1}^i &\equiv x^i\end{aligned}$$

Portabilità tra tipologie di dati

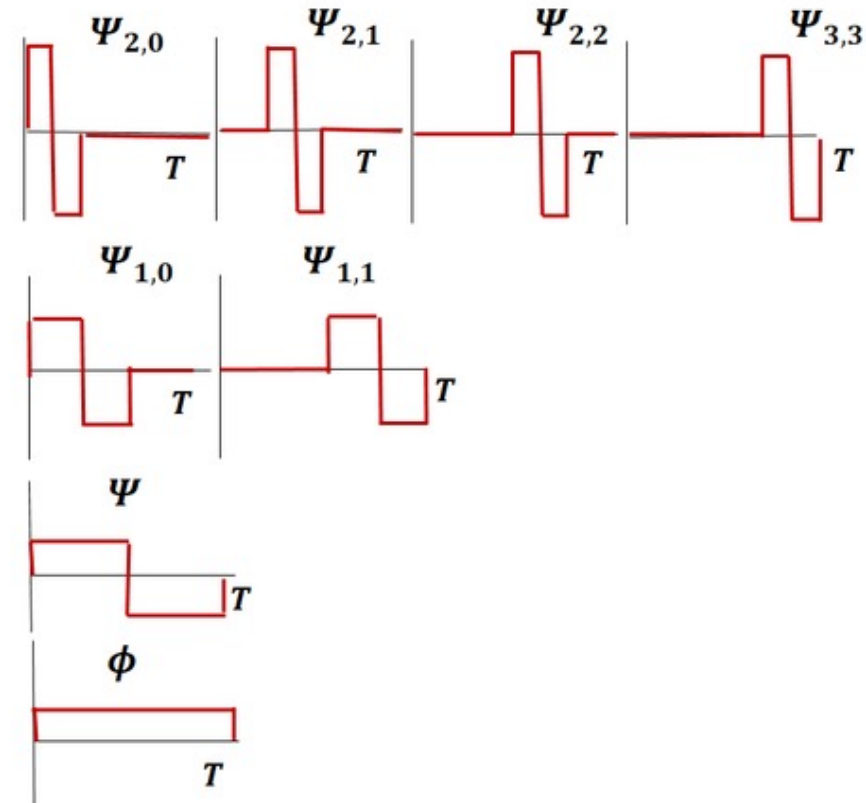
- DWT (Haar Wavelets)
 - Lo schema di calcolo è ricorsivo e parte calcolando le medie tra coppie di elementi successivi nella sequenza e poi andando a riaggregare le medie ad ogni livello fino a $k = 1$.

$$\begin{aligned}\psi_k^i &= (\Phi_{k+1}^{2 \cdot i - 1} - \Phi_{k+1}^{2 \cdot i}) / 2 \\ \Phi_k^i &= (\Phi_{k+1}^{2 \cdot i - 1} + \Phi_{k+1}^{2 \cdot i}) / 2 \\ \Phi_{\log_2(q)+1}^i &\equiv x^i\end{aligned}$$

Portabilità tra tipologie di dati

- DWT (Haar Wavelets)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Queste funzioni di base vanno bene per una sequenza di otto elementi

Portabilità tra tipologie di dati

- DWT (Haar Wavelets) $\psi = \left[\psi_{\log_2(q)+1}^1, \dots, \psi_{\log_2(q)+1}^{q/2}, \dots, \psi_1^1, \phi_1^1 \right]$
 - Il vettore $\psi = \text{DWT}(\mathbf{x})$ e ha lunghezza q
 - La ricostruzione avviene attraverso la matrice dei vettori di base wavelet W

$$W = \begin{bmatrix} \overline{W_1} \\ \vdots \\ \overline{W_q} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^q \psi_i \cdot \overline{W_i}$$

Portabilità tra tipologie di dati

- Multidimensional Scaling (MDS)

- Funziona per grafi pesati in cui il peso δ_{ij} tra due nodi abbia un significato di distanza o similarità tra essi.
- Si assuma di voler rappresentare ogni nodo $i = 1, \dots, n$ con un embedding k-dimensionale $X_i \in \mathbb{R}^k$

- Assumendo di conoscere tutte le $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ che sono $\binom{n}{2}$ si minimizzi il seguente funzionale

$$O = \sum_{i,j:i < j} (\|\overline{X_i} - \overline{X_j}\| - \delta_{ij})^2$$

Portabilità tra tipologie di dati

- Generazione di grafi di similarità
 - Può essere conveniente cercare similarità a coppie per determinate applicazioni e alcuni algoritmi di analisi se ne avvantaggiano
 - Ogni oggetto O_i del data set è considerato un nodo multidimensionale
 - Se $d(O_i, O_j)$ è minore di una certa soglia ϵ si genera un arco (i, j) che viene pesato con un peso w_{ij} generato attraverso l'applicazione di un opportuno kernel ed esprime *similarità*

$$w_{ij} = e^{-\frac{d(O_i, O_j)^2}{t^2}} \quad \text{Heat kernel}$$

Data cleaning

- Gestione dei dati mancanti
 - Eliminazione dei record incompleti
 - Stima o imputazione dei dati mancanti
 - Può inficiare le prestazioni dell'algoritmo di analisi
 - Uso di algoritmi di analisi robusti rispetto ai dati mancanti
 - Classificazione come metodo di imputazione della feature mancante come «special feature» del dato rispetto alla quale appunto si classifica
 - Utility matrix imputation nei recommender systems

Data cleaning

- Gestione dei dati mancanti

| | GLADIATOR | GODFATHER | BEN-HUR | GOODFELLAS | SCARFACE | SPARTACUS |
|----------------|-----------|-----------|---------|------------|----------|-----------|
| U ₁ | 1 | | | 5 | | 2 |
| U ₂ | | 5 | | | 4 | |
| U ₃ | 5 | 3 | | 1 | | |
| U ₄ | | | 3 | | | 4 |
| U ₅ | | | | 3 | 5 | |
| U ₆ | 5 | | 4 | | | |

(a) Ratings-based utility

| | GLADIATOR | GODFATHER | BEN-HUR | GOODFELLAS | SCARFACE | SPARTACUS |
|----------------|-----------|-----------|---------|------------|----------|-----------|
| U ₁ | 1 | | | 1 | | 1 |
| U ₂ | | 1 | | | 1 | |
| U ₃ | 1 | 1 | | 1 | | |
| U ₄ | | | 1 | | | 1 |
| U ₅ | | | | 1 | 1 | |
| U ₆ | 1 | | 1 | | | |

(b) Positive-preference utility

Collaborative filtering

Tecniche di stima dei dati mancanti (preferenze di un utente ovvero item simili per preferenze degli utenti) attraverso il calcolo di *funzioni di similarità* tra le righe o le colonne della utility matrix

I k utenti/item più simili vengono usati per imputare i valori

Data cleaning

- Eliminazione dei dati inconsistenti o erronei
 - Analisi di dati inconsistenti tra flussi in arrivo da sorgenti diverse
 - Es. «John Fitzgerald Kennedy» vs. «JFK»
 - Uso della conoscenza di dominio per eliminare le inconsistenze
 - Analisi statistica dei dati per individuare il trend ovvero esplicito utilizzo di algoritmi di outlier detection

Data cleaning

- Scalatura e normalizzazione
 - Scalatura min-max

$$y_i^j = \frac{x_i^j - \min_j}{\max_j - \min_j}$$

- Z-scaling

$$z_i^j = \frac{x_i^j - \mu_j}{\sigma_j}$$

Riduzione della dimensionalità dei dati

- Campionamento
 - Campionamento statistico per ridurre la dimensionalità di un data set
 - Campionamento di sequenze
 - Campionamento «ottimo» da una distribuzione per la stima di una certa quantità desiderata
- Selezione di sottoinsiemi di feature rilevanti
- Riduzione della dimensionalità per *rotazione degli assi*
- Riduzione della dimensionalità per trasformazione della tipologia dei dati

Riduzione della dimensionalità dei dati

- Campionamento
 - Il campionamento può essere «stratificato» nel senso che si preferisce ricoprire il dominio della variabile con una serie di intervalli o *strati* e garantire la presenza di campioni in ogni strato
 - L'altra tecnica di campionamento è quella «per importanza» nella quale alcune parti dei dati sono certamente più rilevanti di altre e quindi esiste una distribuzione $p(x)$ che descrive la probabilità di campionare un certo valore x .
 - La probabilità $p(x)$ ottima per eccellenza è la stessa distribuzione di probabilità dei dati (anche se non la conosciamo)

Riduzione della dimensionalità dei dati

- Campionamento
 - Le sequenze sono campionate attraverso la creazione di un «magazzino» di campioni di dimensione k
 - Il campione n -esimo viene inserito nel magazzino con probabilità $p(x_n)=k/n$ (si ricordi che n cresce via via che arrivano nuovi campioni)
 - Si elimina casualmente uno dei vecchi dati per far posto al nuovo campione
 - Si può dimostrare che la probabilità di essere inseriti nel magazzino dopo che sono arrivati n campioni è sempre k/n

Riduzione della dimensionalità dei dati

- Selezione di sottoinsiemi di feature rilevanti
 - tramite approccio non supervisionato → clustering
 - tramite approccio supervisionato → classificazione
- Riduzione della dimensionalità per rotazione degli assi
 - Dati altamente correlati si aggregano lungo *poche direzioni preferenziali* che possono diventare gli *assi di un apposito sistema di riferimento* ottenuto per rotazione

Riduzione della dimensionalità dei dati

- Riduzione della dimensionalità per rotazione degli assi - PCA
 - La matrice di covarianza di una data set D di n record aventi dimensione d è

$$C = \frac{D^T D}{n} - \bar{\mu}^T \bar{\mu}$$

- I suoi elementi si possono esprimere come

$$c_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k^i x_k^j}{n} - \mu_i \mu_j \quad \forall i, j \in \{1 \dots d\}$$

Riduzione della dimensionalità dei dati

- Riduzione della dimensionalità per rotazione degli assi - PCA
 - Per qualunque vettore $v \in \mathbb{R}^d$ è possibile calcolare la varianza unidimensionale della proiezione dei dati su v , Dv come:

$$\bar{v}^T C \bar{v} = \frac{(D\bar{v})^T D\bar{v}}{n} - (\bar{\mu}\bar{v})^2$$

- Cerchiamo la base ortonormale di vettori su cui proiettare i dati per *massimizzare* la loro varianza

Riduzione della dimensionalità dei dati

- Riduzione della dimensionalità per rotazione degli assi - PCA
 - Il problema di ottimizzazione può essere affrontato con i moltiplicatori di Lagrange

$$\bar{v}^T C \bar{v} + \lambda (1 - \|\bar{v}\|^2)$$

- Se poniamo il gradiente del funzionale pari a 0, otteniamo che la base di vettori è costituita dagli autovettori di C e le varianze sono i corrispondenti autovalori

$$C \bar{v} - \lambda \bar{v} = 0 \qquad \bar{v}^T C \bar{v} = \bar{v}^T \lambda \bar{v} = \lambda$$

Riduzione della dimensionalità dei dati

- Riduzione della dimensionalità per rotazione degli assi - PCA
 - C è semidefinita positiva cioè $\mathbf{v}^T C \mathbf{v} \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ e può essere diagonalizzata

$$C = P \Lambda P^T$$

- P è la matrice degli autovettori di C , $P^T P = I$, mentre Λ è la matrice diagonale degli autovalori di C
- Possiamo riordinare le righe di P in senso decrescente dal massimo al minimo autovalore (varianza dei dati lungo il corrispondente autovettore) e considerare le k **componenti principali** cioè quelle per cui gli autovalori hanno magnitudine superiore ad una certa soglia

Riduzione della dimensionalità dei dati

- Riduzione della dimensionalità per rotazione degli assi - PCA
 - Si può mostrare che i dati trasformati $D' = DP$, con media $\bar{\mu}P$, hanno una matrice di covarianza Λ :

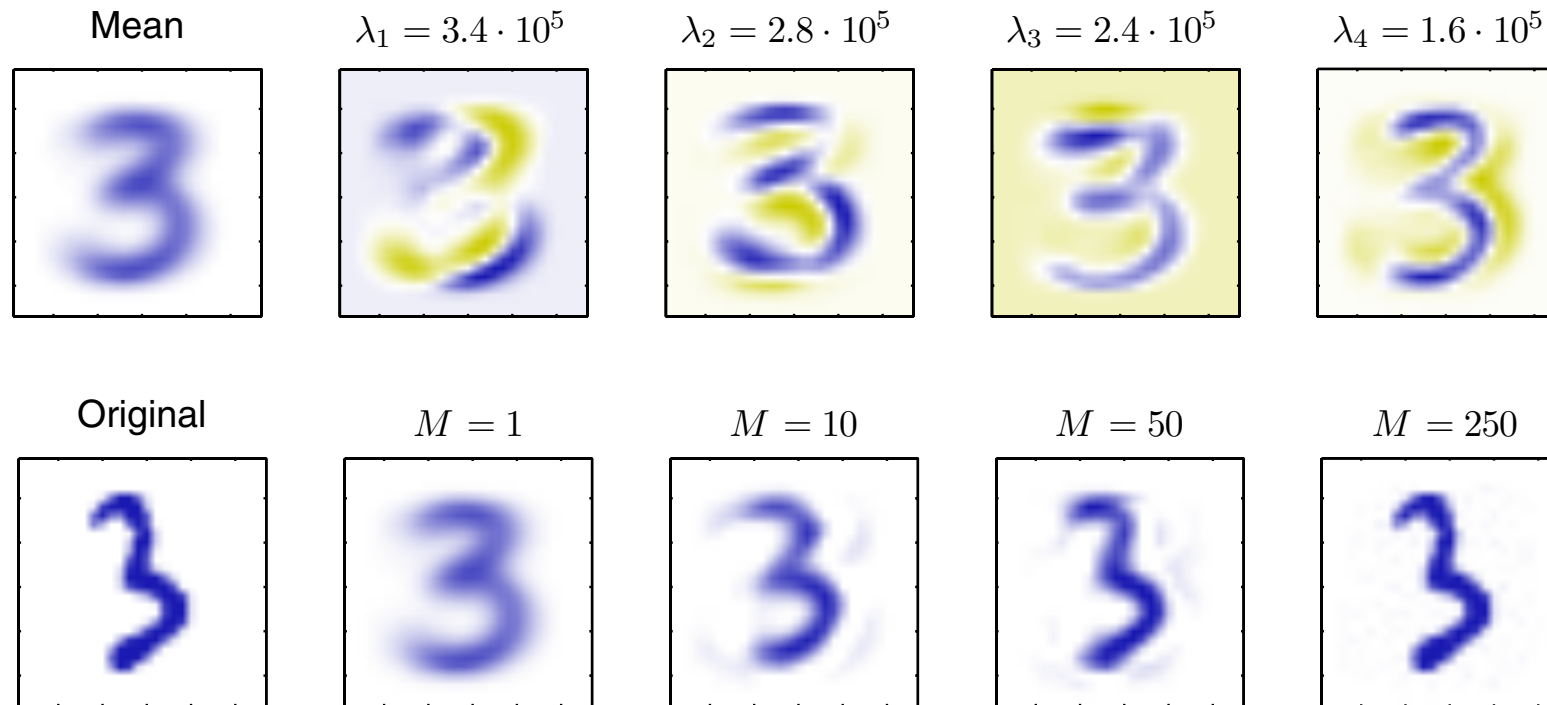
$$\frac{(DP)^T DP}{n} - (\bar{\mu}P)^T (\bar{\mu}P) =$$

$$\frac{P^T D^T DP}{n} - P^T \bar{\mu}^T \bar{\mu} P =$$

$$P^T CP \qquad P^T CP = P^T P \Lambda P^T P = I \Lambda I = \Lambda$$

Riduzione della dimensionalità dei dati

- Riduzione della dimensionalità per rotazione degli assi - PCA



Riduzione della dimensionalità dei dati

- Riduzione della dimensionalità per rotazione degli assi – SVD
 - È una fattorizzazione della matrice dei dati di dimensione $n \times d$

$$D = Q\Sigma P^T$$

- Q ha dimensione $n \times n$ e le sue colonne formano una base ortonormale denominata *left singular vectors* $\rightarrow Q^T Q = I$
- Σ è una matrice diagonale di dimensione $n \times d$ e contiene i *singular values*, non negativi; gli elementi delle righe oltre n sono tutti nulli. I singular values sono le «variabili latenti» di questa rappresentazione dei dati
- P ha dimensione $d \times d$ e le sue colonne formano una base ortonormale denominata *right singular vectors* $\rightarrow P^T P = I$

Riduzione della dimensionalità dei dati

- Riduzione della dimensionalità per rotazione degli assi – SVD

$$DD^T = Q\Sigma(P^T P)\Sigma^T Q^T = Q(\Sigma\Sigma^T)Q^T$$

$Q \rightarrow$ autovettori di DD^T
 $\Sigma\Sigma^T \rightarrow$ autovalori di DD^T

$$D^T D = P\Sigma^T(Q^T Q)\Sigma P^T = P(\Sigma^T \Sigma)P^T$$

$P \rightarrow$ autovettori di $D^T D$
 $\Sigma^T \Sigma \rightarrow$ autovalori di $D^T D$

$$\mu = \mathbf{0} \Rightarrow C = \frac{D^T D}{n}$$

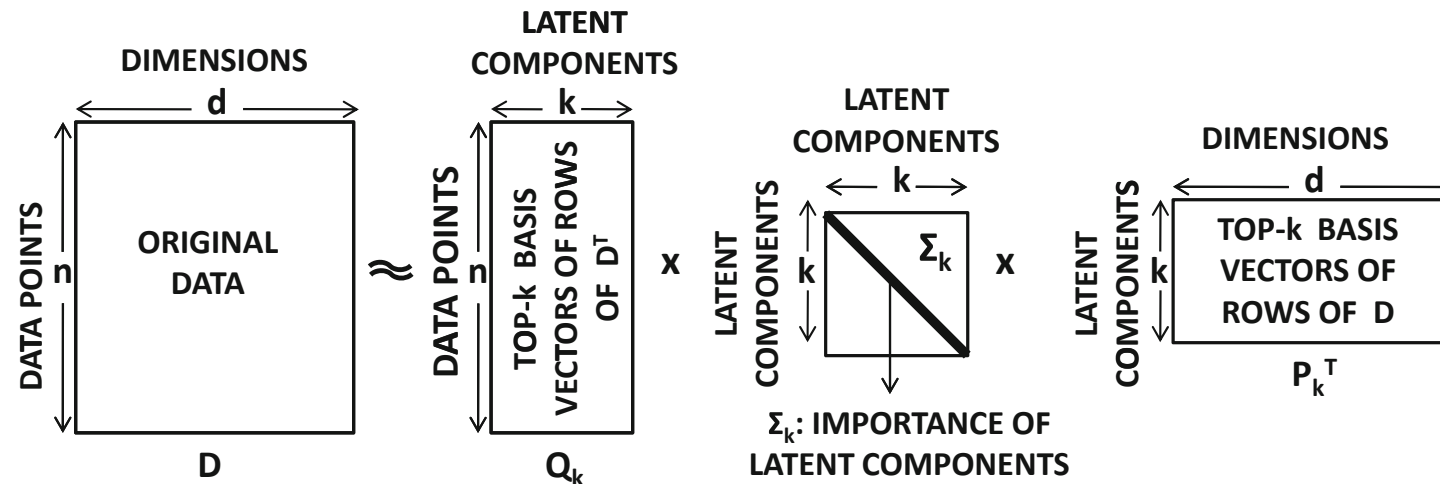
$P \rightarrow$ autovettori di C
 $\Sigma^T \Sigma \rightarrow$ autovalori di C moltiplicati per n

SVD e PCA sono la stessa rotazione degli assi per dati centrati rispetto alla propria media

Riduzione della dimensionalità dei dati

- Riduzione della dimensionalità per rotazione degli assi – SVD
 - La SVD troncata rappresenta il data set con i primi k valori singolari

$$D \approx Q_k \Sigma_k P_k^T$$



- $k \ll n, d$
- Le $d - k$ colonne restanti dei dati ricostruiti $D' = DP$ sono effettivamente nulle

Riduzione della dimensionalità dei dati

- Riduzione della dimensionalità per rotazione degli assi – SVD
 - La SVD troncata rappresenta il data set con i primi k valori singolari

$$D \approx Q_k \Sigma_k P_k^T$$

- Richiamando le considerazioni sulla PCA che massimizza la varianza (somma dei quadrati delle distanze euclidee dalla media) la *SVD massimizza l'energia associata ai dati* in termini di somma dei quadrati delle distanze dall'origine che si ottiene da $D^T D$
- Tale energia, nel caso troncato, è data dalla *somma dei quadrati dei primi k valori singolari*; dato un right singular vector v e il corrispondente valore singolare σ :

$$(D\bar{v})^T (D\bar{v}) = \bar{v}^T (D^T D) \bar{v} \equiv \bar{v}^T \bar{v} \sigma^2 \bar{v}^T \bar{v} = \sigma^2$$

Riduzione della dimensionalità dei dati

- Riduzione della dimensionalità per rotazione degli assi – LSA
 - SVD troncata applicata ad una matrice D di valori TF-IDF relativi all'occorrenza di n termini globalmente in d documenti
 - D è molto sparsa e di elevatissime dimensioni
 - Non viene fatta la normalizzazione rispetto alla media perché la sparsità garantisce una matrice di covarianza comunque approssimativamente proporzionale a $D^T D$

Riduzione della dimensionalità dei dati

- Utilizzo della Haar Wavelet Transform
 - La ricostruzione di una serie temporale si può riscrivere

$$T = \sum_{i=1}^q a_i \overline{W}_i = \sum_{i=1}^q \left(a_i ||\overline{W}_i|| \right) \frac{\overline{W}_i}{||\overline{W}_i||}$$

- I vettori di base normalizzati sono ortonormali
- Si può dimostrare che troncando la HWT con i primi k coefficienti normalizzati si minimizza l'errore di ricostruzione

Riduzione della dimensionalità dei dati

- Multi Dimensional Scaling (MDS)

$$O = \sum_{i,j:i < j} \left(\|\overline{X_i} - \overline{X_j}\| - \delta_{ij} \right)^2$$

- Piuttosto che effettuare una minimizzazione si affronta il problema come decomposizione SVD
- Nota la matrice $\Delta = [\delta_{ij}^2]_{n \times n}$, cerchiamo la matrice $D = [X_i]_{n \times k}$ dei dati che abbia Δ come insieme delle distanze e tale che $k \ll n$
- $X_i \rightarrow$ *embedding* k-dimensionale del nodo i

Riduzione della dimensionalità dei dati

- Multi Dimensional Scaling (MDS)
 - Dalla legge del coseno ($a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$) estesa ai vettori n-dimensionali possiamo ricavare la matrice dei prodotti scalari $S = [S_{ij} \triangleq X_i \cdot X_j]$ a partire da Δ

$$\overline{X_i} \cdot \overline{X_j} = -\frac{1}{2} \left[\|\overline{X_i} - \overline{X_j}\|^2 - \left(\|\overline{X_i}\|^2 + \|\overline{X_j}\|^2 \right) \right] \quad \forall i, j \in \{1 \dots n\}$$

$$S = -\frac{1}{2} (I - U/n) \Delta (I - U/n) \equiv DD^T$$

- U è la matrice di tutti 1 di ordine n

Riduzione della dimensionalità dei dati

- Multi Dimensional Scaling (MDS)
 - La SVD troncata di $S \approx Q_k \Sigma_k^2 Q_k^T$ fornisce una sua fattorizzazione per ricavare D

$$S \approx Q_k \Sigma_k^2 Q_k^T = (Q_k \Sigma_k) (Q_k \Sigma_k)^T$$

$$D = Q_k \Sigma_k$$

Riduzione della dimensionalità dei dati

- Trasformazione spettrale per embedding di grafi
 - Un grafo non orientato $G=(N,A)$ è caratterizzato da una matrice di pesi $W=[w_{ij}]$ che esprimono *similarità* (non distanze) tra i nodi \rightarrow etichette degli archi
 - Ricerchiamo l'embedding di nodi $D = [X_i]_{n \times k}$ che minimizzi

$$O = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} \left\| \bar{X}_i - \bar{X}_j \right\|^2$$

- Useremo la matrice laplaciana L di G

Riduzione della dimensionalità dei dati

- Trasformazione spettrale per embedding di grafi
 - Vediamo il caso monodimensionale cioè embedding scalare per ogni nodo

$$O = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} (y_i - y_j)^2$$

Matrice Laplaciana $L = \Lambda - W, \quad \Lambda_{ii} = \sum_{j=1}^n w_{ij}$

$$O = 2\bar{y}^T L \bar{y}, \quad \bar{y}^T \Lambda \bar{y} = 1, \quad \bar{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$$

$$\Lambda^{-1} L \bar{y} = \lambda \bar{y}$$

→ Scalatura per evitare la soluzione banale $\mathbf{y} = \mathbf{0}$

- La soluzione è data dai k più piccoli autovettori della matrice $\Lambda^{-1}L$