Università degli Studi di Palermo

dipartimento di ingegneria unipa

Matrici per la descrizione della posizione e dell’orientazione

Robotica Medica

A.A. 2022/2023

Laboratorio di Interazione Uomo-Macchina
CHILAB

Trasformazioni affini

- Le operazioni matriciali che descrivono la posizione e orientazione di un robot fanno riferimento alle cosiddette trasformazioni *affini*

  - Trasformazione affine A(*p*) → (*p'*): trasforma un punto *p* nello spazio $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ in un punto p' nello stesso spazio, mantenendo le relazioni di parallelismo tra le rette

Trasformazioni affini

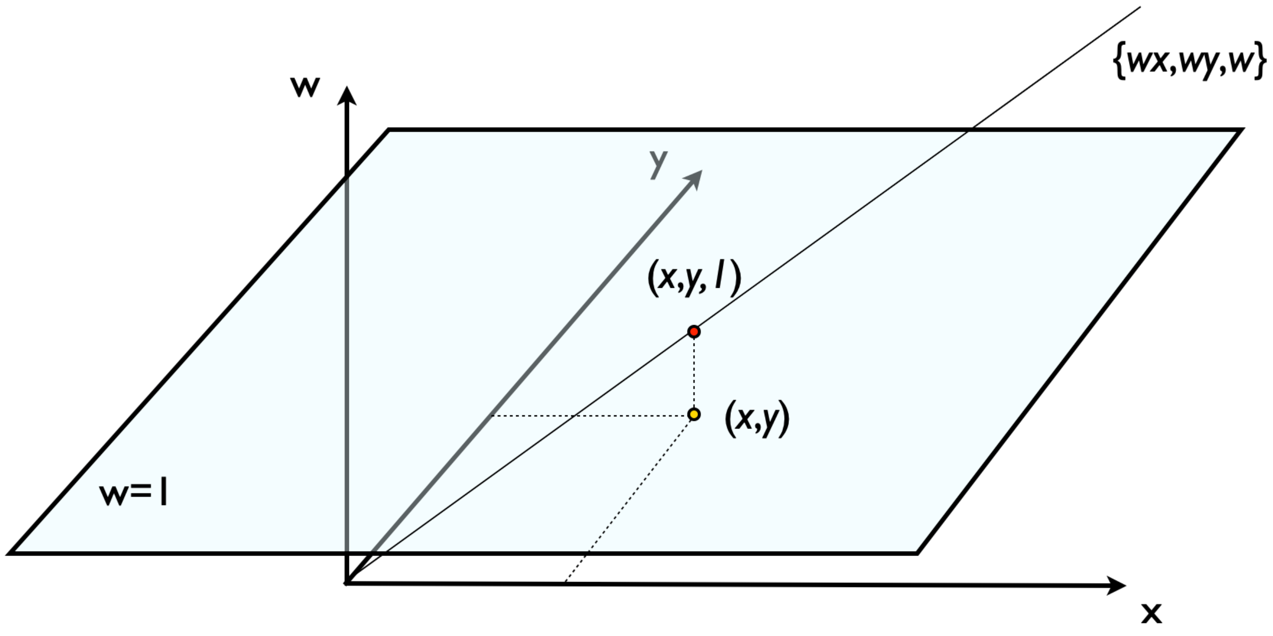
- Queste tipologie di trasformazioni vengono calcolate attraverso *operazioni di moltiplicazione matrice-vettore* anche se non sono definite nativamente come tali

- Di conseguenza a ogni trasformazione corrisponde una matrice i cui elementi hanno una disposizione particolare.

- Da un punto di vista del calcolo questo risultato si ottiene tramite la rappresentazione dei punti in *coordinate omogenee*

Trasformazioni affini

- Coordinate omogenee
  - Aggiungiamo una terza (quarta) coordinata w a $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$)
  - *Proiettiamo* dall'origine degli assi un raggio di equazione {w*x*, w*y*, w}
  - Usiamo il piano w = 1 come piano di proiezione e otteniamo il punto di coordinate (*x*, *y*, 1) che è il *punto omogeneo a (x, y)*



Trasformazioni affini

- Una trasformazione affine è definita come
  - Traslazione
  - Rotazione
  - Trasformazione di scala
  - Shearing
  - Riflessione
  - …

$$\begin{cases} x^* = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + t_x \\ y^* = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + t_y \\ z^* = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + t_z \end{cases}$$

$$\mathbf{T} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} \equiv \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{p^*} = \mathbf{T} \cdot \vec{p} + \mathbf{L}$$

Trasformazioni affini

- Passando alle coordinate omogenee in $\mathbb{R}^2$ si ottiene

$$\begin{cases} x^* = ax + by + l \\ y^* = cx + dy + m \\ 1 = 1 \end{cases}$$

- Una trasformazione affine 2D generica richiede la conoscenza di *sei parametri* e quindi la *corrispondenza nota tra tre punti in $\mathbb{R}^2$*

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & l \\ c & d & m \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Componente di rotazione e scaling

Componente di traslazione

Trasformazioni affini

- In $\mathbb{R}^3$ si ha
- Trasformazione generica:
  12 parametri
  ovvero 4 punti in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & t_y \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Componente di rotazione e scaling

Componente di traslazione

Trasformazioni affini

- Traslazione

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x^* = x + t_x \\ y^* = y + t_y \\ z^* = z + t_z \\ 1 = 1 \end{cases}$$

Trasformazioni affini

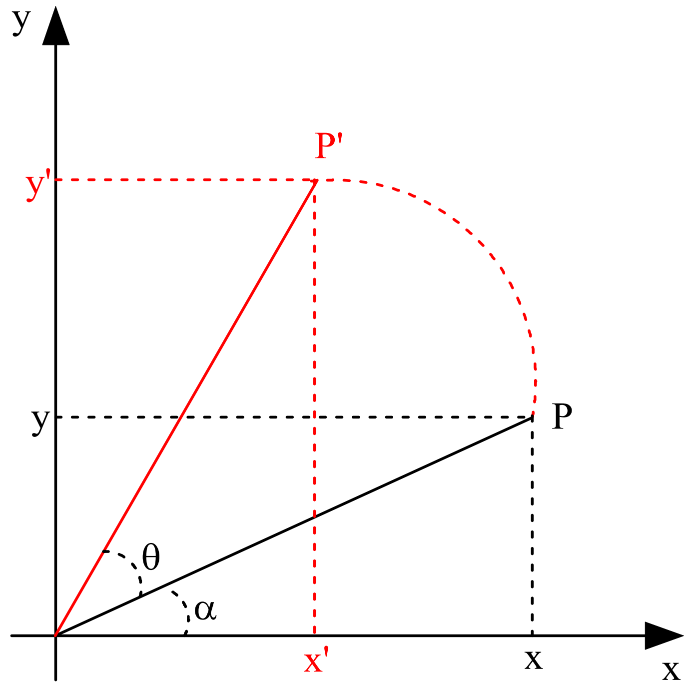
- Scalatura lungo *x*, *y* e *z*

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x^* = s_x x \\ y^* = s_y y \\ z^* = s_z y \\ 1 = 1 \end{cases}$$

Trasformazioni affini

- Rotazione positiva in $\mathbb{R}^2$ di $\boldsymbol{\theta}$ <u>in senso antiorario dall'asse *x* verso *y*</u>



$$\begin{cases} x = d\cos\alpha \\ y = d\sin\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = d\cos(\alpha+\theta) = d\cos\alpha\cos\theta - d\sin\alpha\sin\theta \\ y' = d\sin(d+\theta) = d\sin\alpha\cos\theta + d\cos\alpha\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Trasformazioni affini

- Rotazione positiva in $\mathbb{R}^2$ di $\boldsymbol{\theta}$ <u>in senso antiorario dall'asse *x* verso *y*</u>

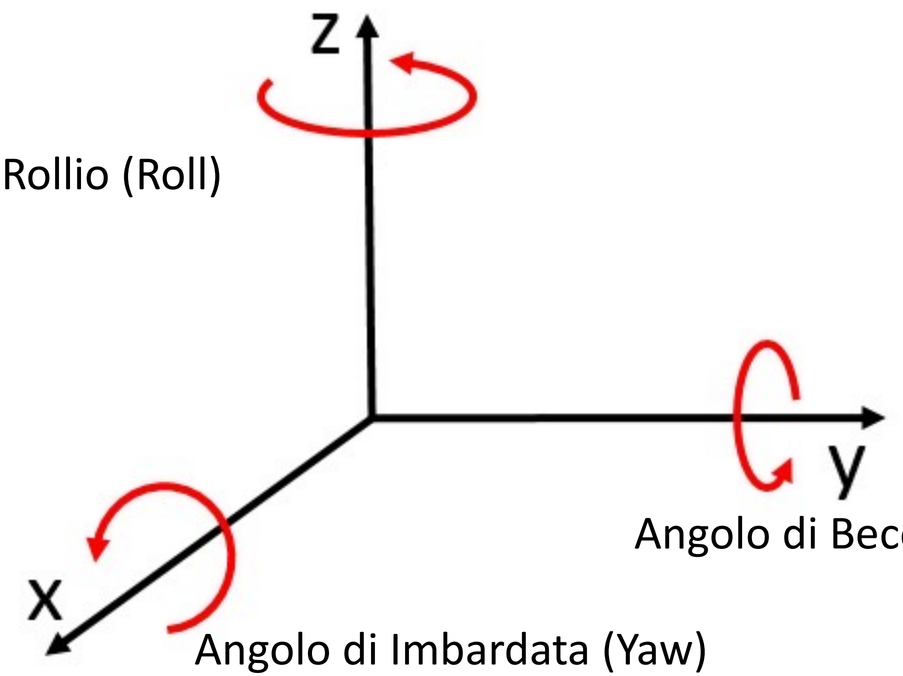
$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x^* = x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ y^* = y\sin(\theta) + y\cos(\theta) \\ 1 = 1 \end{cases}$$

Trasformazioni affini

- Rotazioni positive in $\mathbb{R}^3$ di $\boldsymbol{\theta}$ *in senso antiorario rispetto ai tre assi*

$R_x(\boldsymbol{\theta}) \rightarrow$ *y* ruota verso *z*
$R_y(\boldsymbol{\theta}) \rightarrow$ *z* ruota verso *x*
$R_z(\boldsymbol{\theta}) \rightarrow$ *x* ruota verso *y* (rotazione in 2D)



Fonte: https://bit.ly/3kyb4rt

Trasformazioni affini

- Rotazioni positive in $\mathbb{R}^3$ di $\boldsymbol{\theta}$ *in senso antiorario rispetto ai tre assi*

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

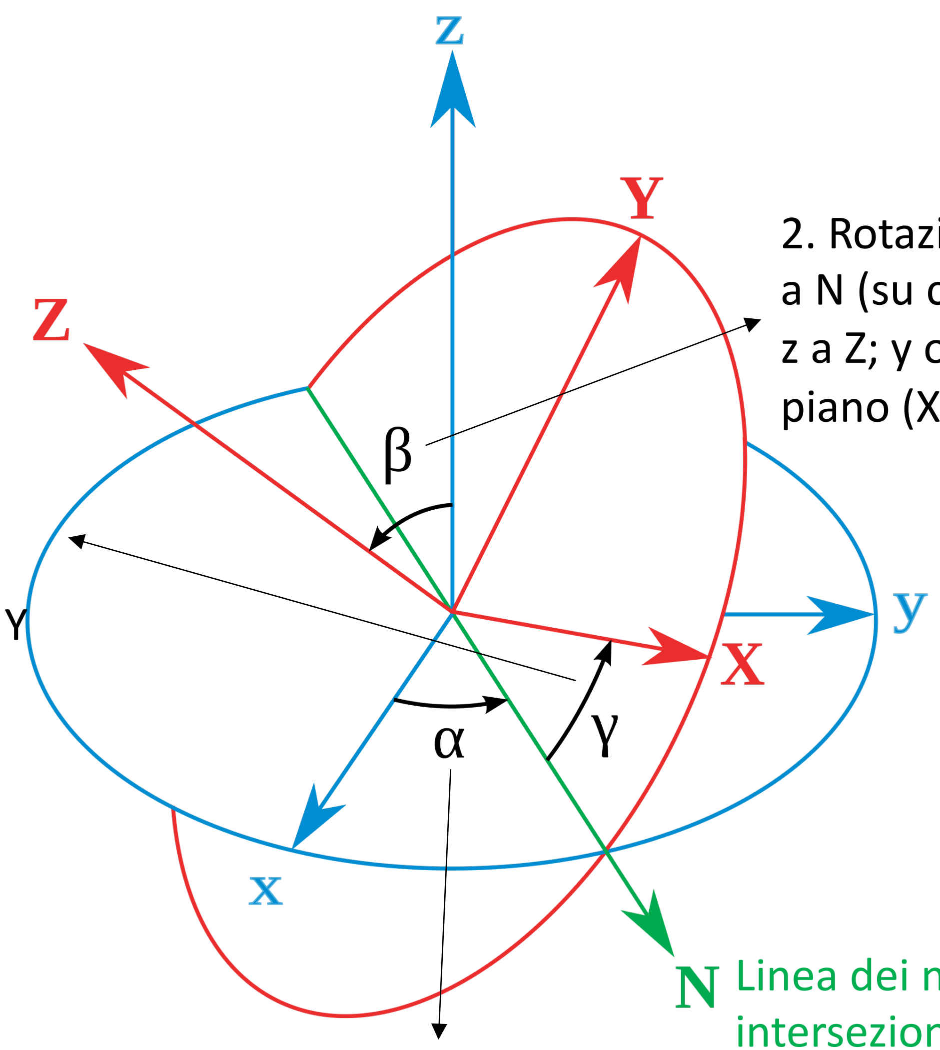
L'inversione dei segni dipende
Dal verso di circuitazione degli assi
*Che vede z come **prima** coordinata*

Trasformazioni affini

- Una notazione diversa per gli angoli: angoli di Eulero

3. Rotazione attorno a Z da N (su cui giace x) a X; x e y ora coincidono rispettivamente con X e Y

2. Rotazione attorno a N (su cui giace x) da z a Z; y ora giace sul piano (X,Y)



1. Rotazione attorno a z da x a N

Linea dei nodi: retta intersezione tra i piani (x,y) e (X,Y)

$$M_{XYZ}^{xyz} = R_Z(\gamma)R_{x//N}(\beta)R_z(\alpha)$$

Fonte: Wikipedia

Trasformazioni affini

- Shearing (scorrimento)

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x^* = x + \alpha y \\ y^* = \beta x + y \\ 1 = 1 \end{cases}$$

- In 3D si usano definire *tre matrici di scorrimento distinte* rispetto a ciascuno dei tre assi che rimane invariato mentre gli altri cambiano

Trasformazioni affini

- Proprietà delle matrici di trasformazione:
  - Le trasformazioni si compongono come prodotto di matrici e possono essere calcolate *a blocchi*
  - La trasformazione di segno opposto a *M* si ottiene come M^{-1}

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{R}_z\cdot\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 1 & 0 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} s_x\cos(\theta) & -s_y\sin(\theta) & 0 & t_x \\ s_x\sin(\theta) & s_y\cos(\theta) & 0 & t_y \\ 0 & 0 & s_z & t_y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

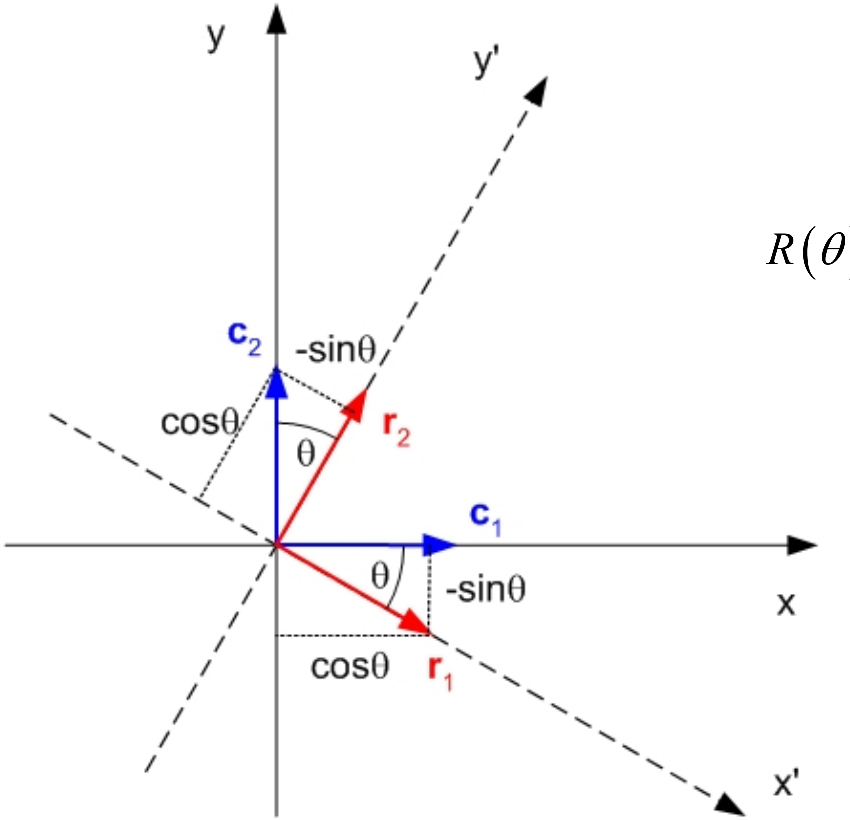
$$\mathbf{P}^* = \mathbf{M}\cdot\mathbf{P}$$

$$\mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{P}^* = \mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{P}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{P}^*$$

Trasformazioni affini

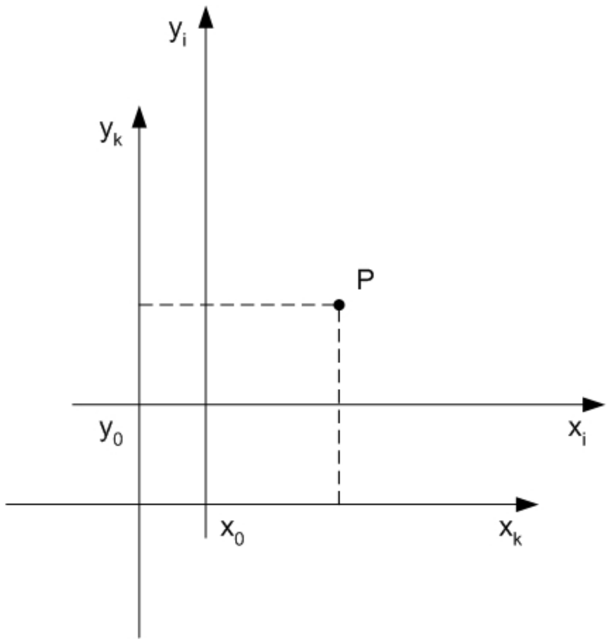
- Proprietà delle matrici di trasformazione:
  - La *componente rotazionale* di una trasformazione affine è una matrice ortogonale speciale e la sua trasposta esprime la rotazione inversa: $R^{-1} = R^{T}$



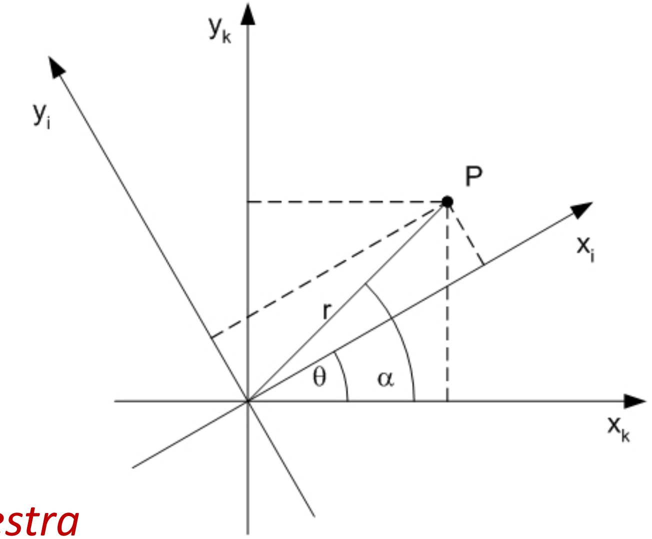
$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Trasformazioni affini

- Proprietà delle matrici di trasformazione:
    - Data una trasformazione *M*, la sua inversa M^{-1} esprime *la trasformazione di cambio di coordinate con lo stesso segno di M*



$$M_{i \leftarrow k} = T(-x_0, -y_0) = T^{-1}(x_0, y_0)$$



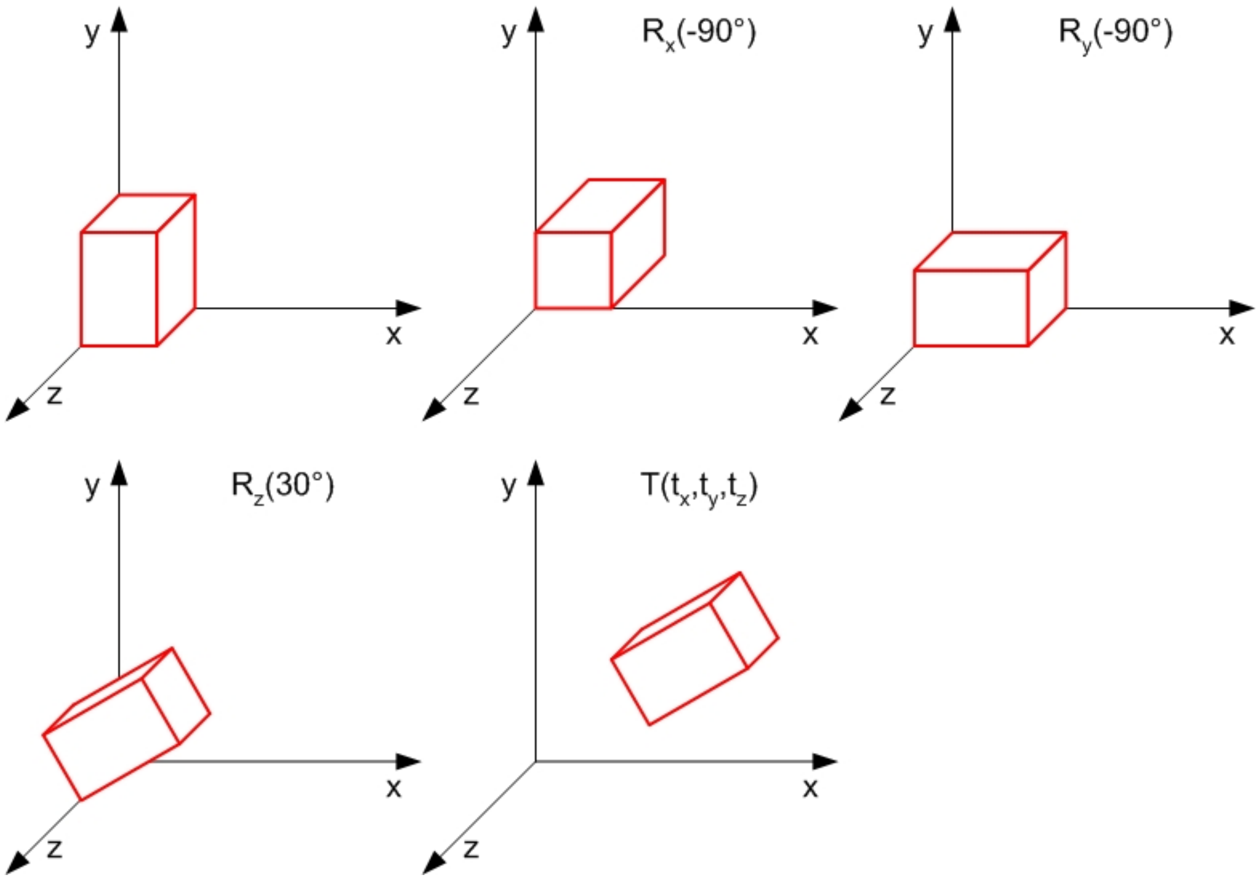
$$M_{i \leftarrow k} = R(-\theta) = R^{-1}(\theta) = R^{T}(\theta)$$

I cambi di coordinate si compongono per *moltiplicazione a destra*

Trasformazioni affini

$$M = T\left(t_x, t_y, t_z\right) \cdot R_z\left(30^\circ\right) \cdot R_y\left(-90^\circ\right) \cdot R_x\left(-90^\circ\right)$$

- Proprietà delle matrici di trasformazione:
  - Data una trasformazione *M*, la sua inversa M^{-1} esprime *la trasformazione di cambio di coordinate con lo stesso segno di M*

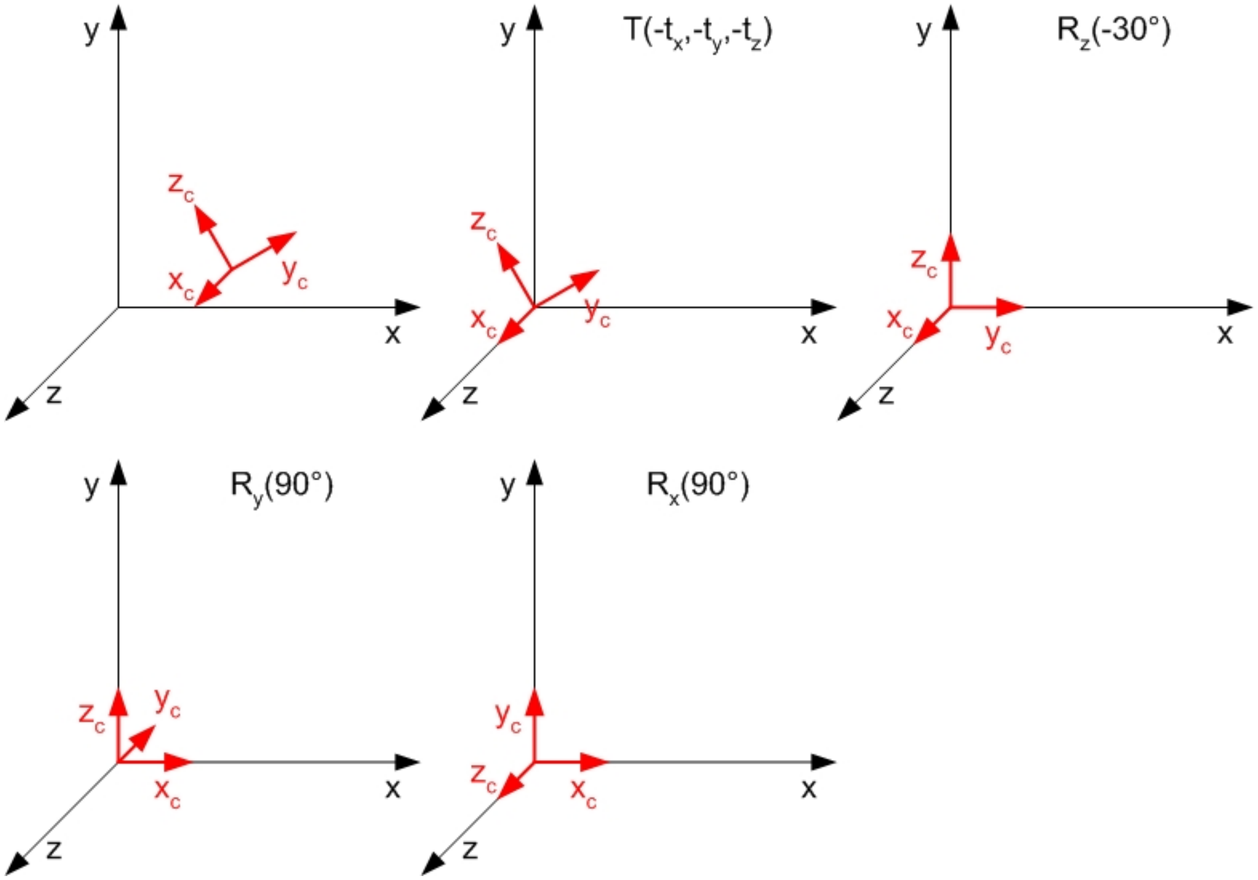


I cambi di coordinate si compongono per *moltiplicazione a destra*

Trasformazioni affini

$$M_{x \leftarrow c} = R_x\left(90^\circ\right) \cdot R_y\left(90^\circ\right) \cdot R_z\left(-30^\circ\right) \cdot T\left(-t_x, -t_y, -t_z\right)$$

- Proprietà delle matrici di trasformazione:
  - Data una trasformazione *M*, la sua inversa M^{-1} esprime *la trasformazione di cambio di coordinate con lo stesso segno di M*



I cambi di coordinate si compongono per *moltiplicazione a destra*