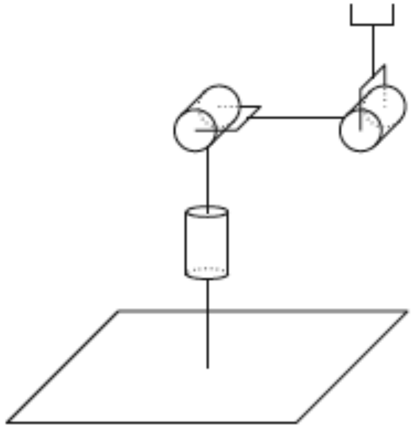
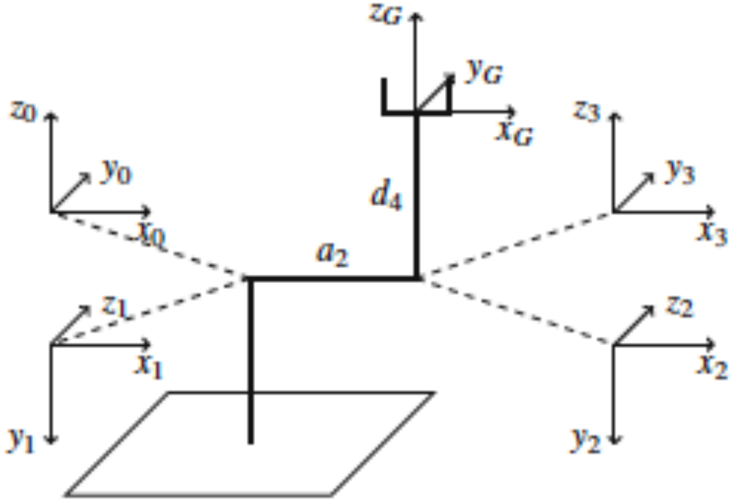
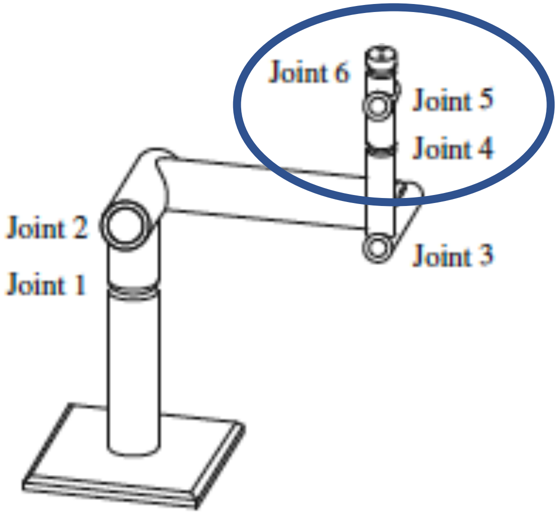
Cinematica del braccio robotico

Robot a tre giunti







Problema della cinematica inversa: fissata la terna di riferimento $\boldsymbol{T}$ del gripper trovare gli angoli ai giunti $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ che realizzano la terna

$$\boldsymbol{M}_G^0 = \boldsymbol{M}_1^0 \cdot \boldsymbol{M}_2^1 \cdot \boldsymbol{M}_3^2 \cdot \boldsymbol{M}_G^3 = \begin{pmatrix} c_1 c_{23} & -s_1 & c_1 s_{23} & a_2 c_1 c_2 + d_4 c_1 s_{23} \\ s_1 c_{23} & c_1 & s_1 s_{23} & a_2 s_1 c_2 + d_4 s_1 s_{23} \\ -s_{23} & 0 & c_{23} & -a_2 s_2 + d_4 c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{T}$$

$$M_G^0 = M_1^0 \cdot M_2^1 \cdot M_3^2 \cdot M_G^3 = \begin{pmatrix} c_1c_{23} & -s_1 & c_1s_{23} & a_2c_1c_2 + d_4c_1s_{23} \\ s_1c_{23} & c_1 & s_1s_{23} & a_2s_1c_2 + d_4s_1s_{23} \\ -s_{23} & 0 & c_{23} & -a_2s_2 + d_4c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$$

$$-\sin\theta_1 = o_x$$

$$\cos\theta_1 = o_y$$

Da queste due equazioni si ricava $\boxed{\theta_1 = \operatorname{atan2}(-o_x, o_y)}$

Conoscendo θ_1 possiamo portare a destra la matrice M_1^0 e anche la matrice M_G^3perché sono entrambi note:

$$M_2^1 \cdot M_3^2 = {M_1^0}^{-1} \cdot T \cdot {M_G^3}^{-1}$$

$$\boldsymbol{M}_2^1 \cdot \boldsymbol{M}_3^2 = {\boldsymbol{M}_1^0}^{-1} \cdot \boldsymbol{T} \cdot {\boldsymbol{M}_G^3}^{-1}$$

Svolgiamo la parte nota a sinistra:

$$\boldsymbol{T} \cdot {\boldsymbol{M}_G^3}^{-1} = \boldsymbol{T}' = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & -a_x d_4 + p_x \\ n_y & o_y & a_y & -a_y d_4 + p_y \\ n_z & o_z & a_z & -a_z d_4 + p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & p'_x \\ n_y & o_y & a_y & p'_y \\ n_z & o_z & a_z & p'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p'_x = -a_x d_4 + p_x$$
$$p'_y = -a_y d_4 + p_y$$
$$p'_z = -a_z d_4 + p_z$$

$${\boldsymbol{M}_1^0}^{-1} \cdot \boldsymbol{T} \cdot {\boldsymbol{M}_G^3}^{-1} = {\boldsymbol{M}_1^0}^{-1} \cdot \boldsymbol{T}' = \begin{pmatrix} n_x c_1 + n_y s_1 & o_x c_1 + o_y s_1 & a_x c_1 + a_y s_1 & p'_x c_1 + p'_y s_1 \\ -n_z & -o_z & -a_z & -p'_z \\ -n_x s_1 + n_y c_1 & -o_x s_1 + o_y c_1 & -a_x s_1 + a_y c_1 & -p'_x s_1 + p'_y c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Svolgiamo la parte a destra con le incognite θ_2, θ_3 :

$$\boldsymbol{M}_2^1 \cdot \boldsymbol{M}_3^2 = \begin{pmatrix} c_{23} & 0 & s_{23} & a_2 c_2 \\ s_{23} & 0 & -c_{23} & a_2 s_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mettiamo insieme le due parti e procediamo come prima:

$$\begin{pmatrix} c_{23} & 0 & s_{23} & a_2 c_2 \\ s_{23} & 0 & -c_{23} & a_2 s_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x c_1 + n_y s_1 & o_x c_1 + o_y s_1 & a_x c_1 + a_y s_1 & p'_x c_1 + p'_y s_1 \\ -n_z & -o_z & -a_z & -p'_z \\ -n_x s_1 + n_y c_1 & -o_x s_1 + o_y c_1 & -a_x s_1 + a_y c_1 & -p'_x s_1 + p'_y c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_2 s_2 = -p'_z \qquad a_2 c_2 = p'_x c_1 + p'_y s_1$$

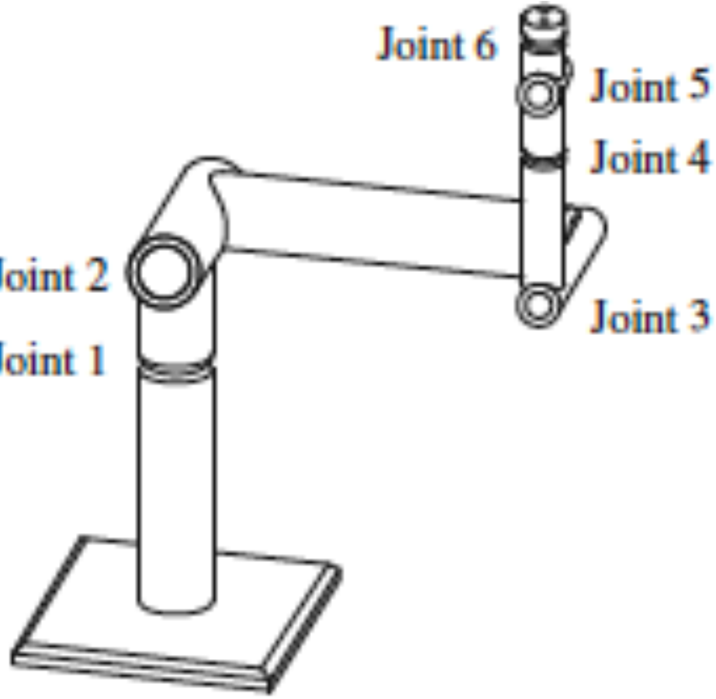
Da cui: $\boxed{\theta_2 = \text{atan2}\left(\frac{-p'_z}{a_2}, \frac{p'_x c_1 + p'_y s_1}{a_2}\right)}$

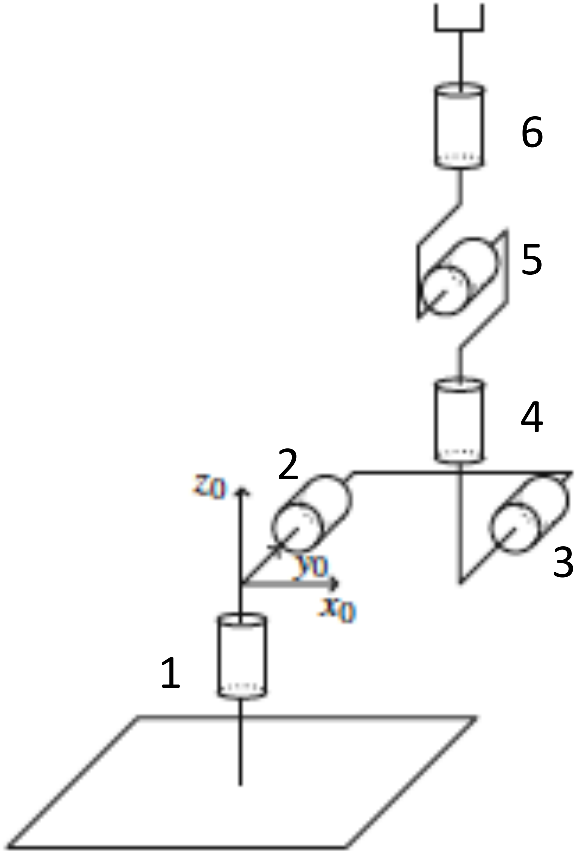
$$\begin{pmatrix} c_{23} & 0 & s_{23} & a_2 c_2 \\ s_{23} & 0 & -c_{23} & a_2 s_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x c_1 + n_y s_1 & o_x c_1 + o_y s_1 & a_x c_1 + a_y s_1 & p'_x c_1 + p'_y s_1 \\ -n_z & -o_z & -a_z & -p'_z \\ -n_x s_1 + n_y c_1 & -o_x s_1 + o_y c_1 & -a_x s_1 + a_y c_1 & -p'_x s_1 + p'_y c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sin(\theta_2 + \theta_3) = -n_z \qquad \cos(\theta_2 + \theta_3) = a_z$$

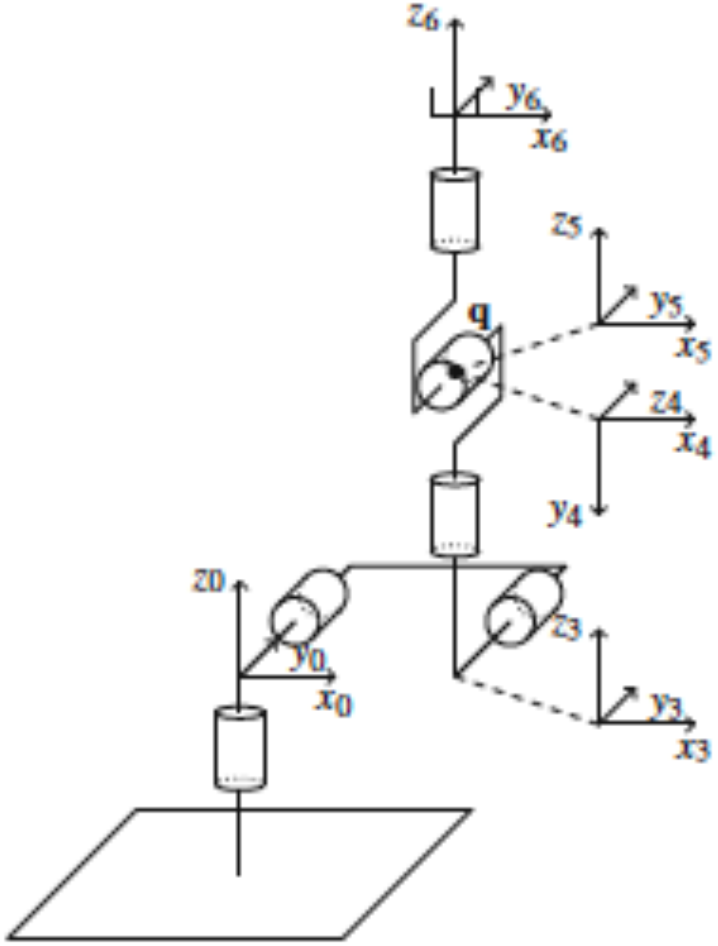
Da cui: $\boxed{\theta_3 = \text{atan2}(-n_z, a_z) - \theta_2}$

Robot a sei giunti





i	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	-90	0	0	θ_1
2	0	a_2	0	θ_2
3	90	0	0	θ_3
4	-90	0	d_4	θ_4
5	90	0	0	θ_5
6	0	0	d_6	θ_6



Il riferimento di S_6 deve corrispondere al riferimento del gripper (noto)

$$\boldsymbol{M}_6^0 = \boldsymbol{M}_1^0 \cdot \boldsymbol{M}_2^1 \cdot \boldsymbol{M}_3^2 \cdot \boldsymbol{M}_4^3 \cdot \boldsymbol{M}_5^4 \cdot \boldsymbol{M}_6^5 = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gli assi di rotazione dei giunti 4, 5, 6 si intersecano nel punto $\boldsymbol{q}$ di origine di 4 e 5.
Il moto di $\boldsymbol{q}$ quindi non dipende dal moto di 4,5,6 ma soltanto dal moto di 1,2,3.

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} - d_6\boldsymbol{a}$$

dove $\boldsymbol{p}$ è l'origine e $\boldsymbol{a}$ è il versore dell'asse z del sistema di riferimento del gripper (noto).

Ritorniamo (quasi) al caso precedente: conosciamo l'origine $\boldsymbol{q}$ della terna di riferimento del target $\boldsymbol{T}$ relativa ai primi tre giunti del manipolatore.
E' possibile quindi ricavare $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ e da questi ricavare le restanti incognite $\theta_4, \theta_5, \theta_6$

$$\boldsymbol{M}_4^3 \cdot \boldsymbol{M}_5^4 \cdot \boldsymbol{M}_6^5 = \boldsymbol{M}_3^{2^{-1}} \cdot \boldsymbol{M}_2^{1^{-1}} \cdot \boldsymbol{M}_1^{0^{-1}} \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

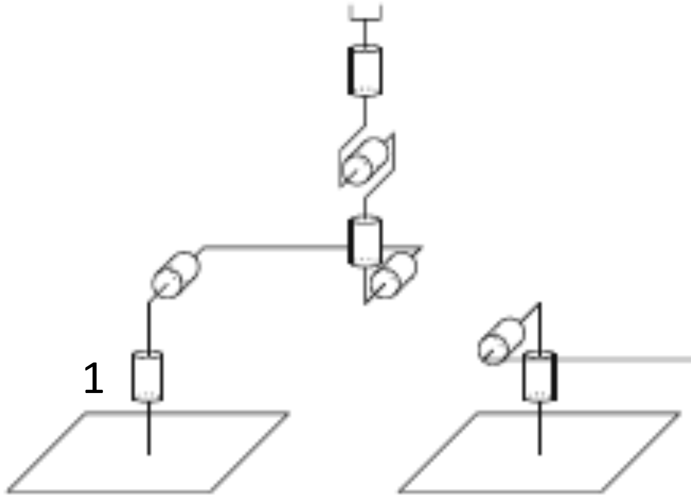
$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} - d_6 \boldsymbol{a}$$

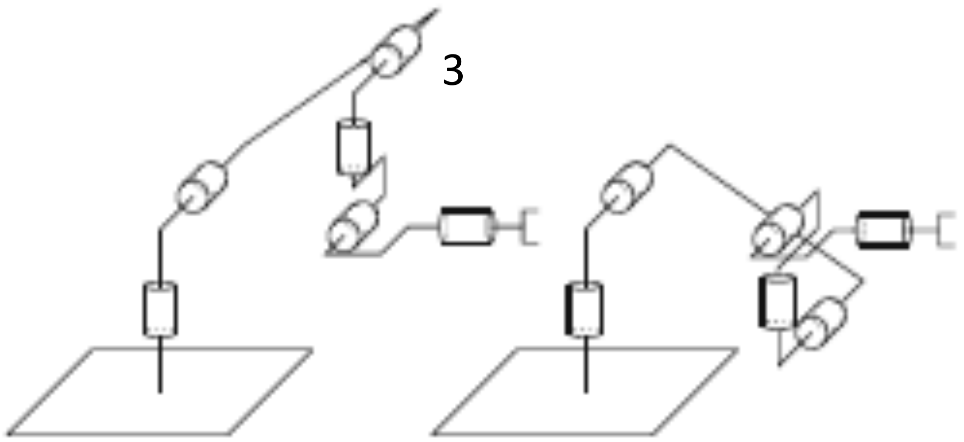
Dall'equazione della cinematica diretta del manipolatore a tre giunti:

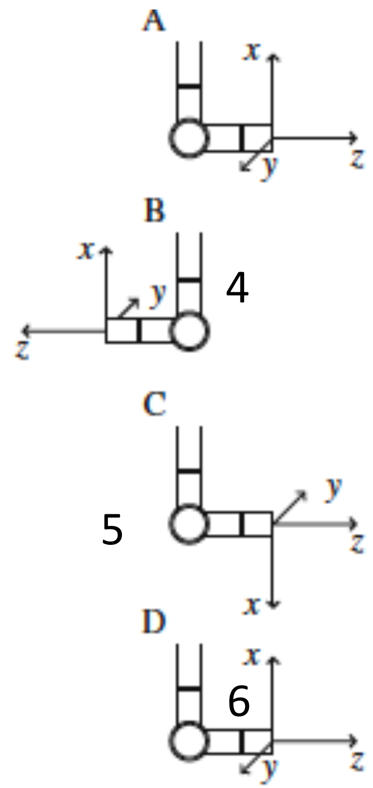
$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} a_2 c_1 c_2 + d_4 c_1 s_{23} \\ a_2 s_1 c_2 + d_4 s_1 s_{23} \\ -a_2 s_2 + d_4 c_{23} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{p} - d_6 \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_2 c_1 c_2 + d_4 c_1 s_{23} \\ a_2 s_1 c_2 + d_4 s_1 s_{23} \\ -a_2 s_2 + d_4 c_{23} \end{pmatrix}$$

Soluzioni multiple per la stessa posizione del gripper







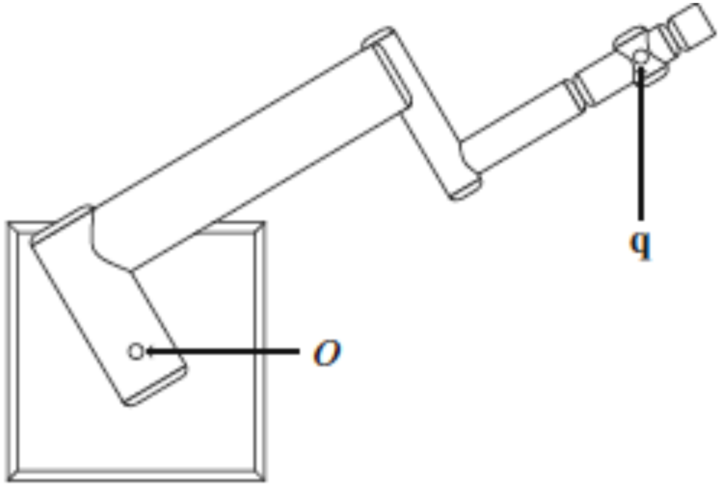
Spalla destra – Spalla sinistra
Shoulder (right, left) = (1, -1)

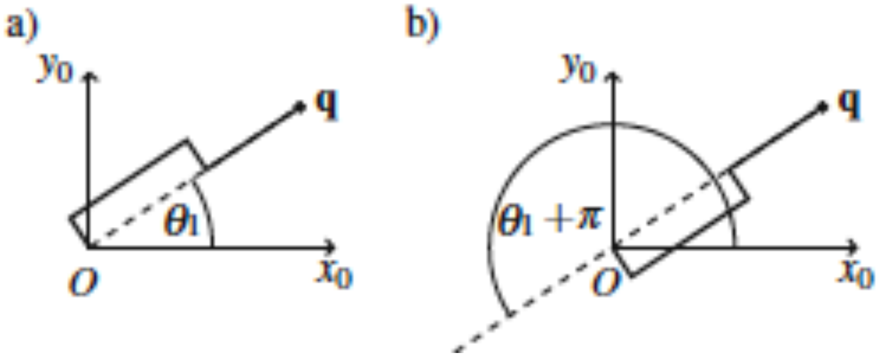
Gomito su – gomito giù
Elbow (up, down) = (1, -1)

Mano alzata – abbassata
Hand (flip, noflip) = (1, -1)

Da A a B: rotazione di 4
Da B a C: rotazione di 5
Da C a D: rotazione di 6

Soluzioni per θ_1





Spalla sinistra:

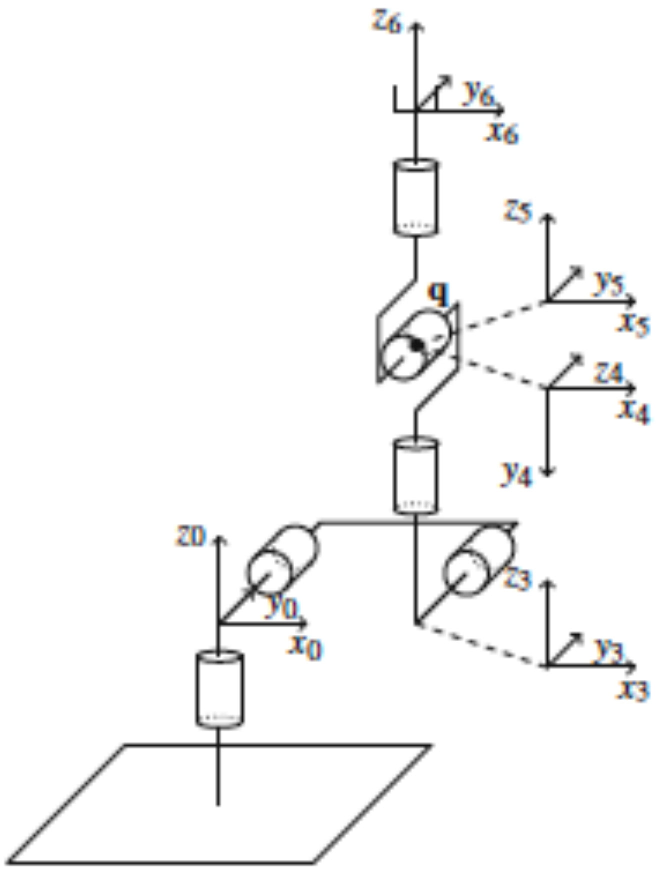
$$\theta_1 = \operatorname{atan2}(q_y, q_x)$$

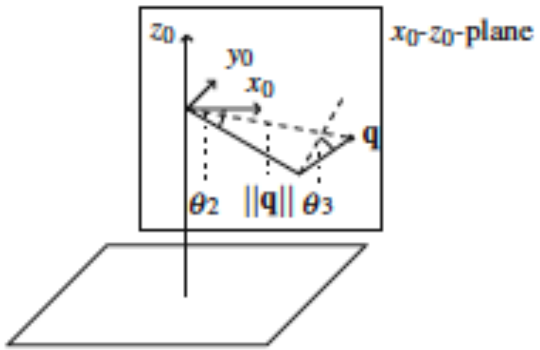
Spalla destra:

$$\theta_1 = \operatorname{atan2}(q_y, q_x) + \pi$$
$$= \operatorname{atan2}(-q_y, -q_x)$$

In generale $\boxed{\theta_1 = \operatorname{atan2}(\text{shoulder} \cdot q_y, \text{shoulder} \cdot q_x)}$

Soluzioni per θ_3





La distanza tra $\boldsymbol{q}$ e O dipende soltanto da θ_3 e non da θ_1 e θ_2

$$\|\boldsymbol{q}\|^2 = q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = (a_2 c_1 c_2 + d_4 c_1 s_{23})^2 + \\ +(a_2 s_1 c_2 + d_4 s_1 s_{23})^2 + (-a_2 s_2 + d_4 c_{23})^2 = \\ = a_2^2 + d_4^2 + 2 a_2 d_4 s_3$$

Dipende soltanto da θ_3

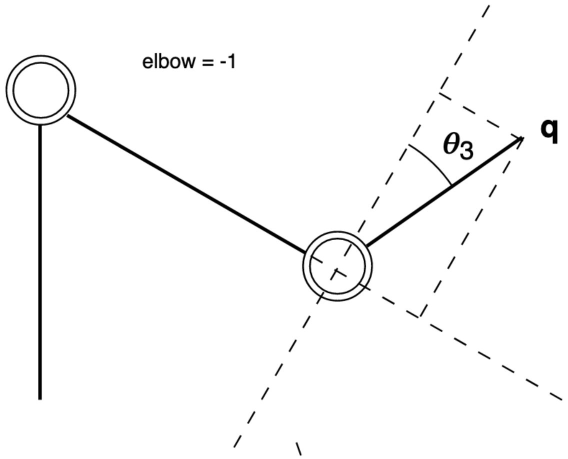
$$s_3 = \frac{\|\boldsymbol{q}\|^2 - a_2^2 - d_4^2}{2 a_2 d_4}$$

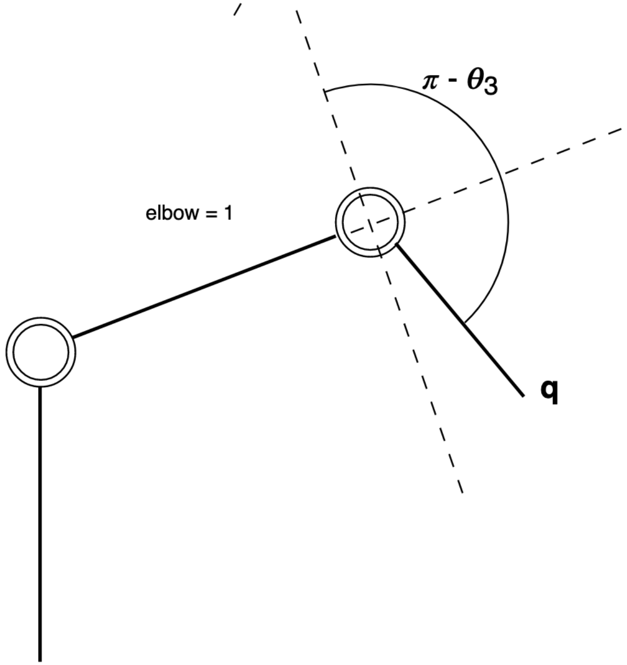
$$c_3 = \pm\sqrt{1 - s_3^2}$$

Due soluzioni dipendenti dal giunto e dal gomito

$$\boxed{\theta_3 = \mathrm{atan2}\left(s_3, -\mathrm{shoulder} \cdot \mathrm{elbow} \cdot \sqrt{1 - s_3^2}\right)}$$

Soluzioni per θ_3





La distanza tra $\boldsymbol{q}$ e O dipende soltanto da θ_3 e non da θ_1 e θ_2

$$\|\boldsymbol{q}\|^2 = q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = (a_2 c_1 c_2 + d_4 c_1 s_{23})^2 + \\ +(a_2 s_1 c_2 + d_4 s_1 s_{23})^2 + (-a_2 s_2 + d_4 c_{23})^2 = \\ = a_2^2 + d_4^2 + 2 a_2 d_4 s_3$$

Dipende soltanto da θ_3

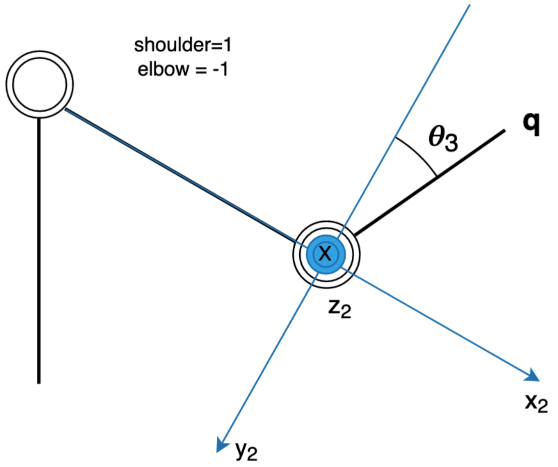
$$s_3 = \frac{\|\boldsymbol{q}\|^2 - a_2^2 - d_4^2}{2 a_2 d_4}$$

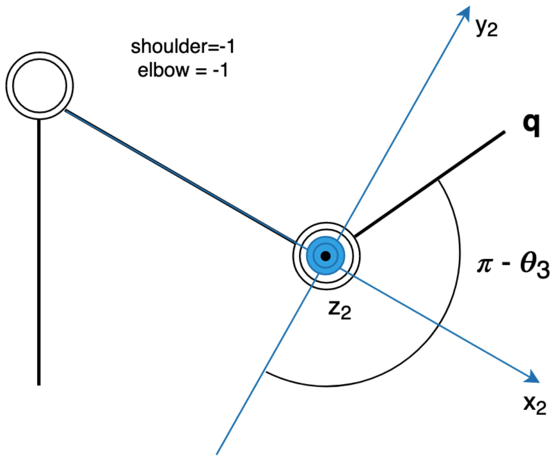
$$c_3 = \pm\sqrt{1 - s_3^2}$$

Due soluzioni dipendenti dal giunto e dal gomito

$$\boxed{\theta_3 = \mathrm{atan2}\left(s_3, -\mathrm{shoulder} \cdot \mathrm{elbow} \cdot \sqrt{1 - s_3^2}\right)}$$

Soluzioni per θ_3





La distanza tra $\boldsymbol{q}$ e O dipende soltanto da θ_3 e non da θ_1 e θ_2

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{q}\|^2 &= q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = (a_2 c_1 c_2 + d_4 c_1 s_{23})^2 + \\
&+ (a_2 s_1 c_2 + d_4 s_1 s_{23})^2 + (-a_2 s_2 + d_4 c_{23})^2 = \\
&= a_2^2 + d_4^2 + 2 a_2 d_4 s_3
\end{aligned}
$$

Dipende soltanto da θ_3

$$s_3 = \frac{\|\boldsymbol{q}\|^2 - a_2^2 - d_4^2}{2 a_2 d_4}$$

$$c_3 = \pm\sqrt{1 - s_3^2}$$

Due soluzioni dipendenti dal giunto e dal gomito

$$\boxed{\theta_3 = \operatorname{atan2}\left(s_3, -\text{shoulder} \cdot \text{elbow} \cdot \sqrt{1 - s_3^2}\right)}$$

Soluzioni per θ_2

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 c_1 c_2 + d_4 c_1 s_{23} \\ a_2 s_1 c_2 + d_4 s_1 s_{23} \\ -a_2 s_2 + d_4 c_{23} \end{pmatrix}$$

Se $c_1 \neq 0$ poniamo $x = {}^{q_x}/_{c_1}$; $z = q_z$ e si ha: $\begin{aligned} x &= a_2 c_2 + d_4 s_{23} \\ \mathrm{z} &= -a_2 s_2 + d_4 c_{23} \end{aligned}$

Se $c_1 = 0$ allora poniamo y $= {}^{q_y}/_{s_1}$ e si ha: $\begin{aligned} y &= a_2 c_2 + d_4 s_{23} \\ \mathrm{z} &= -a_2 s_2 + d_4 c_{23} \end{aligned}$

Inoltre poniamo: $\begin{aligned} u &= a_2 + d_4 s_3 \\ v &= d_4 c_3 \end{aligned}$

Le equazioni diventano: $\begin{aligned} x &= u c_2 + v s_2 \\ \mathrm{z} &= -u s_2 + v c_2 \end{aligned}$

Definiamo $r = \sqrt{u^2 + v^2}$ Nei casi pratici $r \neq 0$ per come sono definiti u e v

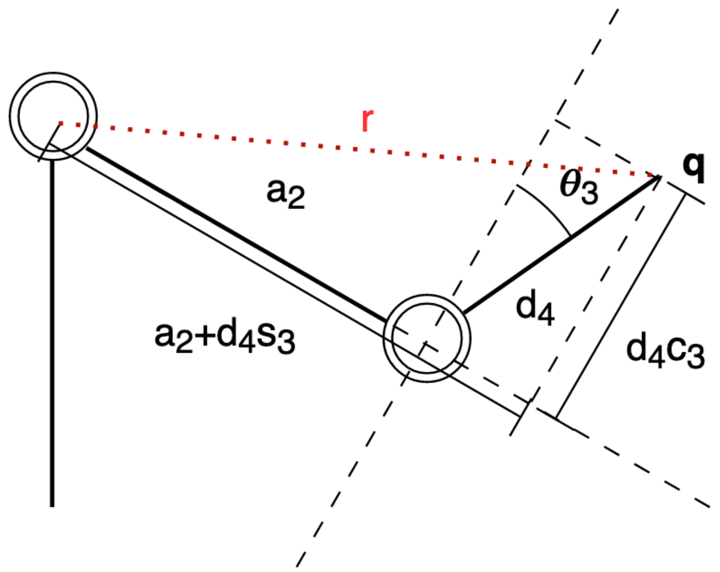
Definiamo $\gamma = \text{atan2}({}^{u}/_{r}, {}^{v}/_{r}) = \text{atan2}(u, v)$

$r = 0 \rightarrow a_2 = d_4, \sin\theta_3 = 0$
cioè il gomito è ripiegato su sé stesso e $\boldsymbol{q}$ *si trova nell'origine che non è meccanicamente possibile perché di norma* $a_2 \neq d_4$

Allora abbiamo $\begin{matrix} {}^{u}/_{r} = \sin(\gamma) \\ {}^{v}/_{r} = \cos(\gamma) \end{matrix}$

Possiamo scrivere:

$$x = r\sin(\gamma)\,c_2 + r\cos(\gamma)\,s_2 = r\sin(\gamma + \theta_2)$$
$$z = -r\sin(\gamma)\,s_2 + r\cos(\gamma)\,c_2 = r\cos(\gamma + \theta_2)$$



Da cui:

$$\gamma + \theta_2 = \text{atan2}({}^{x}/_{r}, {}^{z}/_{r})$$

Infine:

$$\theta_2 = \text{atan2}(x, z) - \text{atan2}(u, v)$$

Analogamente nel caso di $c_1 = 0$ si ha: $\theta_2 = \text{atan2}(y, z) - \text{atan2}(u, v)$

La soluzione per θ_2 è univoca ma dipende dalle scelte fatte per θ_1 e θ_3

Se $\cos(\theta_1) \neq 0$

$$\theta_2 = \operatorname{atan2}\left(-\text{shoulder·elbow} \cdot {}^{q_x}/_{\cos(\theta_1)}, -\text{shoulder·elbow} \cdot q_z\right)$$
$$-\operatorname{atan2}(-\text{shoulder·elbow} \cdot u, -\text{shoulder·elbow} \cdot v)$$

Se $\cos(\theta_1) = 0$

$$\theta_2 = \operatorname{atan2}\left(-\text{shoulder·elbow} \cdot {}^{q_y}/_{\sin(\theta_1)}, -\text{shoulder·elbow} \cdot q_z\right)$$
$$-\operatorname{atan2}(-\text{shoulder·elbow} \cdot u, -\text{shoulder·elbow} \cdot v)$$

La dipendenza è la medesima di $\boldsymbol{\theta}_3$ perché i sistemi di riferimento dei giunti J_2 e J_3 sono perfettamente allineati a meno di una traslazione

Soluzione per $\theta_4, \theta_5, \theta_6$

$$\boldsymbol{M}_4^3 \cdot \boldsymbol{M}_5^4 \cdot \boldsymbol{M}_6^5 = \boldsymbol{M}_3^{2^{-1}} \cdot \boldsymbol{M}_2^{1^{-1}} \cdot \boldsymbol{M}_1^{0^{-1}} \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_6^3 = \boldsymbol{M}_3^{0^{-1}} \cdot \boldsymbol{T}$$

$$\boldsymbol{M}_6^3 = \begin{pmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & c_4s_5 & d_6c_4s_5 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 & d_6s_4s_5 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 & d_4 + d_6c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_5 = a_x s_{23} c_1 + a_y s_{23} s_1 + a_z c_{23}$$

$$\boldsymbol{M}_3^{0^{-1}} \cdot \boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} n_x c_{23} c_1 + n_y c_{23} s_1 - n_z s_{23} & o_x c_{23} c_1 + o_y c_{23} s_1 - o_z s_{23} & a_x c_{23} c_1 + a_y c_{23} s_1 - a_z s_{23} & p_x c_{23} c_1 + p_y c_{23} s_1 - p_z s_{23} - a_2 c_3 \\ -n_x s_1 + n_y c_1 & -o_x s_1 + o_y c_1 & -a_x s_1 + a_y c_1 & -p_x s_1 + p_y c_1 \\ n_x s_{23} c_1 + n_y s_{23} s_1 + n_z c_{23} & o_x s_{23} c_1 + o_y s_{23} s_1 - o_z c_{23} & a_x s_{23} c_1 + a_y s_{23} s_1 + a_z c_{23} & p_x s_{23} c_1 + p_y s_{23} s_1 - p_z c_{23} - a_2 s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_5 = a_x s_{23} c_1 + a_y s_{23} s_1 + a_z c_{23}$$

$$s_5 = \pm\sqrt{1 - c_5^2}$$

Poniamo:
$$v_5 = a_x s_{23} c_1 + a_y s_{23} s_1 + a_z c_{23}$$
$$u_5 = \pm\sqrt{1 - v_5^2}$$

$$\boxed{\theta_5 = \mathrm{atan2}(\mathrm{hand} \cdot u_5, v_5)}$$

Se si ha il flip della mano, $\boldsymbol{\theta}_5$ *varia di* π *e di conseguenza* $\sin\boldsymbol{\theta}_5$ *si oppone in segno per cui* $\sin\boldsymbol{\theta}_5 \rightarrow$ *hand*$\cdot\sin\boldsymbol{\theta}_5$

$$M_6^3 = \begin{pmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & c_4s_5 & d_6c_4s_5 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 & d_6s_4s_5 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 & d_4 + d_6c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_4s_5 = a_xc_{23}c_1 + a_yc_{23}s_1 - a_zs_{23}$$

$$s_4s_5 = -a_xs_1 + a_yc_1$$

$$M_3^{0^{-1}} \cdot T = \begin{pmatrix} n_xc_{23}c_1 + n_yc_{23}s_1 - n_zs_{23} & o_xc_{23}c_1 + o_yc_{23}s_1 - o_zs_{23} & a_xc_{23}c_1 + a_yc_{23}s_1 - a_zs_{23} & p_xc_{23}c_1 + p_yc_{23}s_1 - p_zs_{23} - a_2c_3 \\ -n_xs_1 + n_yc_1 & -o_xs_1 + o_yc_1 & -a_xs_1 + a_yc_1 & -p_xs_1 + p_yc_1 \\ n_xs_{23}c_1 + n_ys_{23}s_1 + n_zc_{23} & o_xs_{23}c_1 + o_ys_{23}s_1 - o_zc_{23} & a_xs_{23}c_1 + a_ys_{23}s_1 + a_zc_{23} & p_xs_{23}c_1 + p_ys_{23}s_1 - p_zc_{23} - a_2s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dividiamo entrambi i membri per s_5 e poniamo:

$$u_4 = -a_xs_1 + a_yc_1$$
$$v_4 = a_xc_{23}c_1 + a_yc_{23}s_1 - a_zs_{23}$$

Supponiamo $s_5 > 0$ oppure $s_5 < 0$

$$\boxed{\theta_4 = \operatorname{atan2}(\text{hand} \cdot u_4, \text{hand} \cdot v_4)}$$

$$\boldsymbol{M}_6^3 = \begin{pmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & c_4s_5 & d_6c_4s_5 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 & d_6s_4s_5 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 & d_4 + d_6c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s_5s_6 = o_xs_{23}c_1 + o_ys_{23}s_1 - o_zc_{23}$$

$$-s_5c_6 = n_xs_{23}c_1 + n_ys_{23}s_1 + n_zc_{23}$$

$$\boldsymbol{M}_3^{0^{-1}} \cdot \boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} n_xc_{23}c_1 + n_yc_{23}s_1 - n_zs_{23} & o_xc_{23}c_1 + o_yc_{23}s_1 - o_zs_{23} & a_xc_{23}c_1 + a_yc_{23}s_1 - a_zs_{23} & p_xc_{23}c_1 + p_yc_{23}s_1 - p_zs_{23} - a_2c_3 \\ -n_xs_1 + n_yc_1 & -o_xs_1 + o_yc_1 & -a_xs_1 + a_yc_1 & -p_xs_1 + p_yc_1 \\ n_xs_{23}c_1 + n_ys_{23}s_1 + n_zc_{23} & o_xs_{23}c_1 + o_ys_{23}s_1 - o_zc_{23} & a_xs_{23}c_1 + a_ys_{23}s_1 + a_zc_{23} & p_xs_{23}c_1 + p_ys_{23}s_1 - p_zc_{23} - a_2s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dividiamo la prima equazione per s_5 e la seconda per $-s_5$ e otteniamo:

$$u_6 = o_xs_{23}c_1 + o_ys_{23}s_1 - o_zc_{23}$$
$$v_6 = n_xs_{23}c_1 + n_ys_{23}s_1 + n_zc_{23}$$

Supponiamo $s_5 > 0$ oppure $s_5 < 0$

$$\boxed{\theta_6 = \mathrm{atan2}(\mathrm{hand} \cdot u_6, -\mathrm{hand} \cdot v_6)}$$

Caso θ_5=0

Se $s_5 = 0$ nei casi pratici $\theta_5 = 0$ perché il polso non può ripiegarsi interamente su sé stesso e raggiungere la Configurazione $\theta_5 = \pi$. Non valgono le equazioni precedenti per θ_4e θ_6

$$\boldsymbol{M}_6^3 = \begin{pmatrix} c_4c_6 - s_4s_6 & -c_4s_6 - s_4c_6 & 0 & 0 \\ s_4c_6 + c_4s_6 & -s_4s_6 + c_4c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 + d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{46} & -s_{46} & 0 & 0 \\ s_{46} & c_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 + d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}_3^{0^{-1}} \cdot \boldsymbol{T}$$

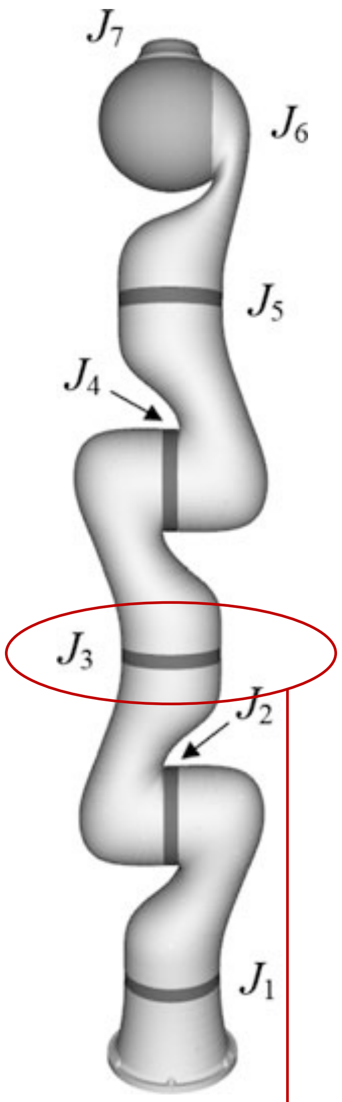
Si ricava:

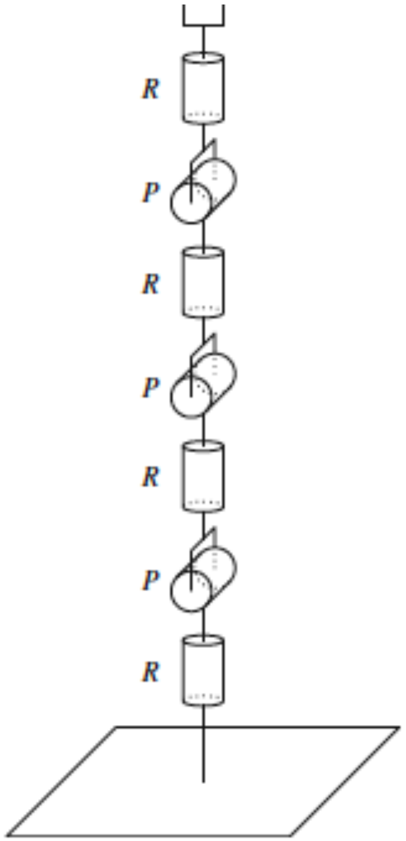
$$\boxed{\theta_4 + \theta_6 = \text{atan2}\left(-n_x s_1 + n_y c_1, n_x c_{23} c_1 + n_y c_{23} s_1 - n_z s_{23}\right)}$$

Infiniti valori possibili di θ_4

In pratica si sceglie un valore conveniente di θ_4 ad esempio $\theta_4 = 0$ e si ricava θ_6

Robot a 7 giunti: DLR-Kuka





Giunto in più rispetto al manipolatore e sei giunti

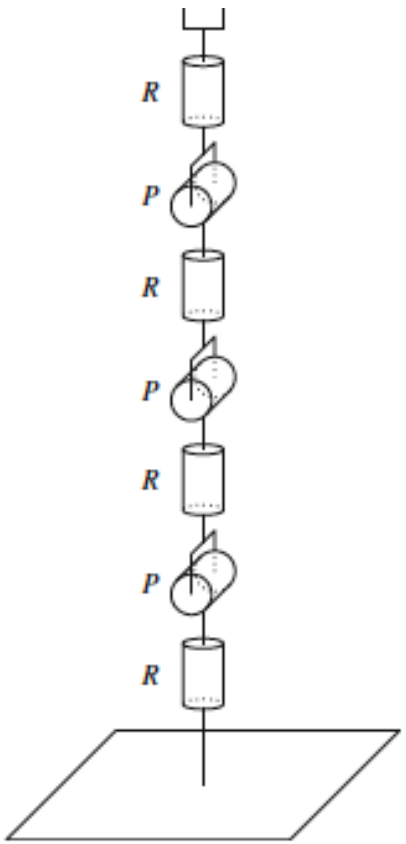
Con riferimento alla notazione degli angoli YPR,
Il DLR-Kuka ha una struttura R-PRP-RPR

7 giunti: 7 gradi di libertà
E' ridondante perché basterebbero 6 gradi di libertà per avere $\boldsymbol{M}_0^7 = \boldsymbol{T}$

Gli angoli ai giunti di un robot sono limitati:
Per DLR-Kuka gli angoli sono $\boldsymbol{R}\ \pm 170°; \boldsymbol{P}\ \pm 120°$

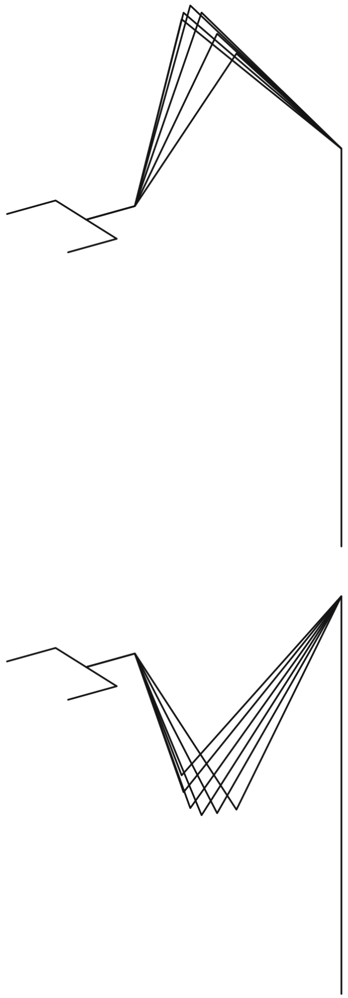
Possibilità di arrivare alla stessa presa assumendo posizioni diverse per evitare ostacoli, es. il corpo del paziente

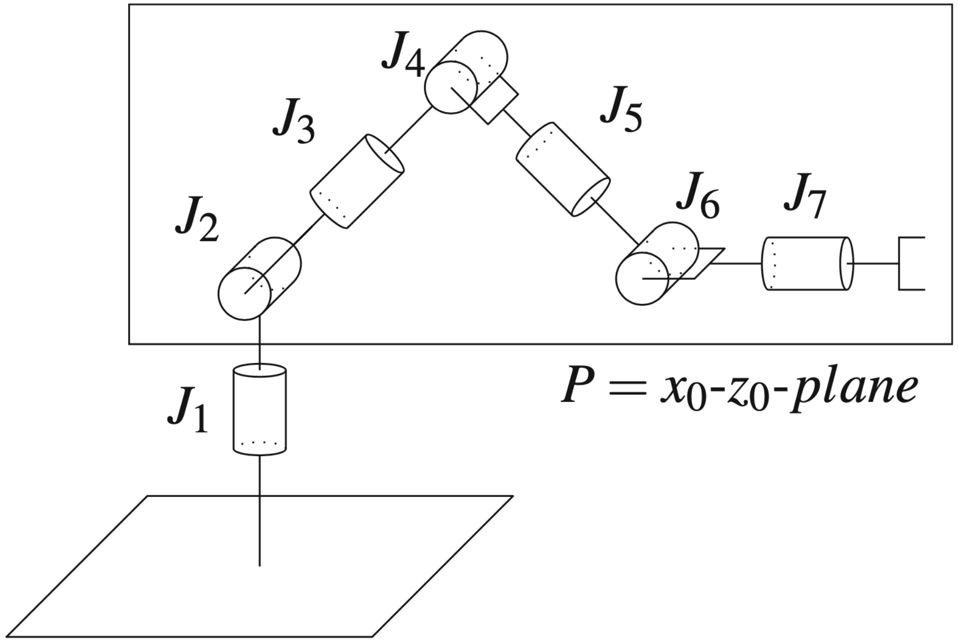
Tabella DH per il DLR-Kuka

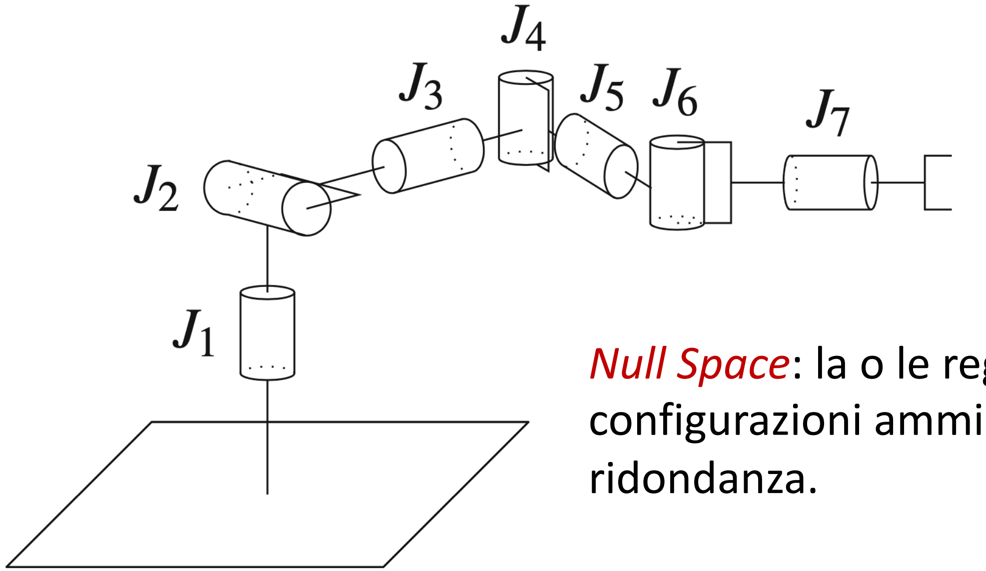


i	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	-90	0	d_1	θ_1
2	90	0	0	θ_2
3	-90	0	d_3	θ_3
4	90	0	0	θ_4
5	-90	0	d_5	θ_5
6	90	0	0	θ_6
7	0	0	d_7	θ_7

Ridondanza







Null Space: la o le regioni dello spazio delle configurazioni ammissibili in cui c'è ridondanza.

Può essere continua o fatta da punti isolati, o curve nello spazio delle configurazioni.

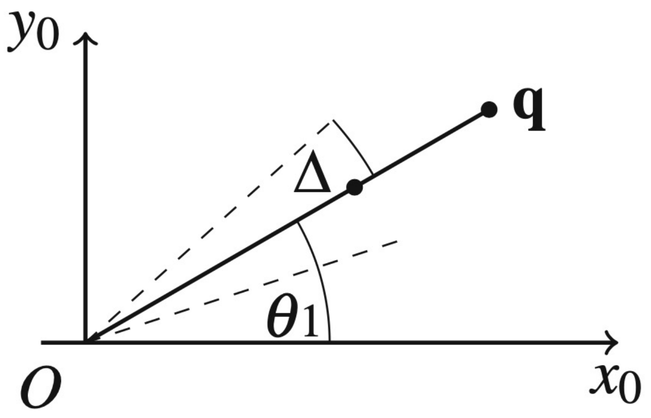
Cinematica inversa per il DLR-Kuka

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{n}\ \mathbf{o}\ \mathbf{a}\ \mathbf{p} \\ 0\ 0\ 0\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{p} - d_7\mathbf{a}$$

Polso: punto di incontro degli assi dei giunti J_5, J_6 e J_7

$$\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)^{\mathrm{T}}$$



$$\boxed{\theta_1 = \operatorname{atan2}(\text{shoulder} \cdot q_y, \text{shoulder} \cdot q_x) + \Delta \qquad \Delta \in [-\pi, \pi].}$$

Valgono le stesse considerazioni della spalla del robot a sei giunti, in cui Δ è un parametro di configurazione del piazzamento del gomito che gestisce la ridondanza delle posizioni

$$\left({}^0\mathbf{M}_1 \cdot \ldots \cdot {}^5\mathbf{M}_6\right)_{[4]} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left({}^1\mathbf{M}_2 \cdot \ldots \cdot {}^5\mathbf{M}_6\right)_{[4]} = \left({}^0\mathbf{M}_1\right)^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left({}^1\mathbf{M}_2 \cdot \ldots \cdot {}^5\mathbf{M}_6\right)_{[4]} = \begin{pmatrix} \mathbf{q'} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left({}^1\mathbf{M}_2 \cdot \ldots \cdot {}^5\mathbf{M}_6\right)_{[4]} = \begin{pmatrix} d_5(c_2c_3s_4 + s_2c_4) + s_2d_3 \\ d_5(s_2c_3s_4 - c_2c_4) - c_2d_3 \\ s_3s_4d_5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cinematica inversa per il DLR-Kuka

$$\left({}^{1}\mathbf{M}_2 \cdot \ldots \cdot {}^{5}\mathbf{M}_6\right)_{[4]} = \begin{pmatrix} d_5(c_2c_3s_4+s_2c_4)+s_2d_3 \\ d_5(s_2c_3s_4-c_2c_4)-c_2d_3 \\ s_3s_4d_5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} q'_x &= d_5\,(c_2c_3s_4+s_2c_4)+s_2d_3 \\ q'_y &= d_5\,(s_2c_3s_4-c_2c_4)-c_2d_3 \\ q'_z &= s_3s_4d_5 \end{aligned}$$

$$\| \mathbf{q'} \|^2 = q'^2_x + q'^2_y + q'^2_z .$$

$$c_4 = \frac{\| \mathbf{q'} \|^2 - d_3^2 - d_5^2}{2d_3d_5},$$

$$s_3 = \frac{q'_z}{s_4d_5}$$

Se s_4 <> 0, altrimenti poniamo $\boldsymbol{\theta}_3 = 0$

$$s_4 = \pm\sqrt{1-c_4^2},$$

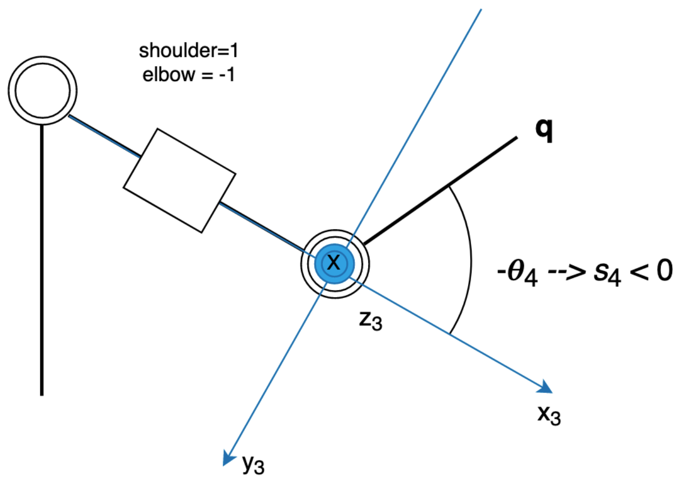
$$c_3 = \pm\sqrt{1-s_3^2}$$

$$\boxed{\theta_3 = \mathrm{atan2}(\mathrm{shoulder}\cdot\mathrm{elbow}\cdot s_3, c_3)}$$

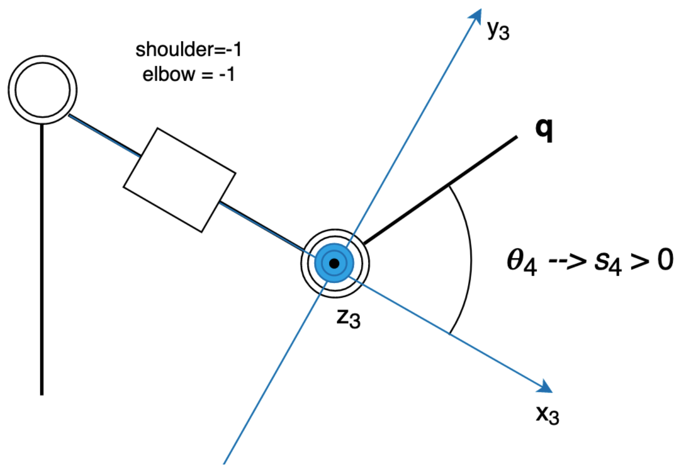
$$\boxed{\theta_4 = \mathrm{atan2}(\mathrm{shoulder}\cdot\mathrm{elbow}\cdot s_4, c_4)}$$

Il valore di sin $\boldsymbol{\theta}_4$ dipende positivamente dal prodotto shoulder · elbow *con ragionamenti analoghi al manipolatore a 6 giunti perché l'angolo $\boldsymbol{\theta}_4$ va calcolato a partire dall'asse x_3 positivo che è il punto di zero di J_4. Per $\boldsymbol{\theta}_3$ il segno di s_3 dipende direttamente da s_4.*

Cinematica inversa per il DLR-Kuka



Si può mostrare facilmente che vale anche per gli altri due casi perché La posizione del polso ricade nel quadrante con segno opposto di y_3 per cui il seno si inverte, ma si oppone anche il segno di *elbow*



Cinematica inversa per il DLR-Kuka

$$\begin{aligned} q'_x &= d_5\left(c_2c_3s_4 + s_2c_4\right) + s_2d_3 \\ q'_y &= d_5\left(s_2c_3s_4 - c_2c_4\right) - c_2d_3 \\ q'_z &= s_3s_4d_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= c_3s_4d_5, & q'_x &= uc_2 + vs_2, \\ v &= c_4d_5 + d_3. & q'_y &= us_2 - vc_2. \end{aligned}$$

Definiamo un angolo γ come: $\begin{aligned} r &= \sqrt{u^2+v^2} \\ \gamma &= \text{atan2}\left(\frac{u}{r}, \frac{v}{r}\right) \end{aligned}$. Allora avremo: $\begin{aligned} q'_x &= r\sin(\gamma)c_2 + r\cos(\gamma)s_2 = r\sin(\gamma+\theta_2) \\ q'_y &= r\sin(\gamma)s_2 - r\cos(\gamma)c_2 = -r\cos(\gamma+\theta_2) \end{aligned}$

$$\boxed{\begin{aligned} \theta_2 = \text{atan2}\left(\text{shoulder}\cdot\ \text{elbow}\ \cdot q'_x, -\ \text{shoulder}\ \cdot\ \text{elbow}\ \cdot q'_x\right) \\ -\,\text{atan2}\left(\text{shoulder}\cdot\ \text{elbow}\ \cdot u, v\right) \end{aligned}}$$

q'_x, q'_y e u dipendono positivamente da s_4.

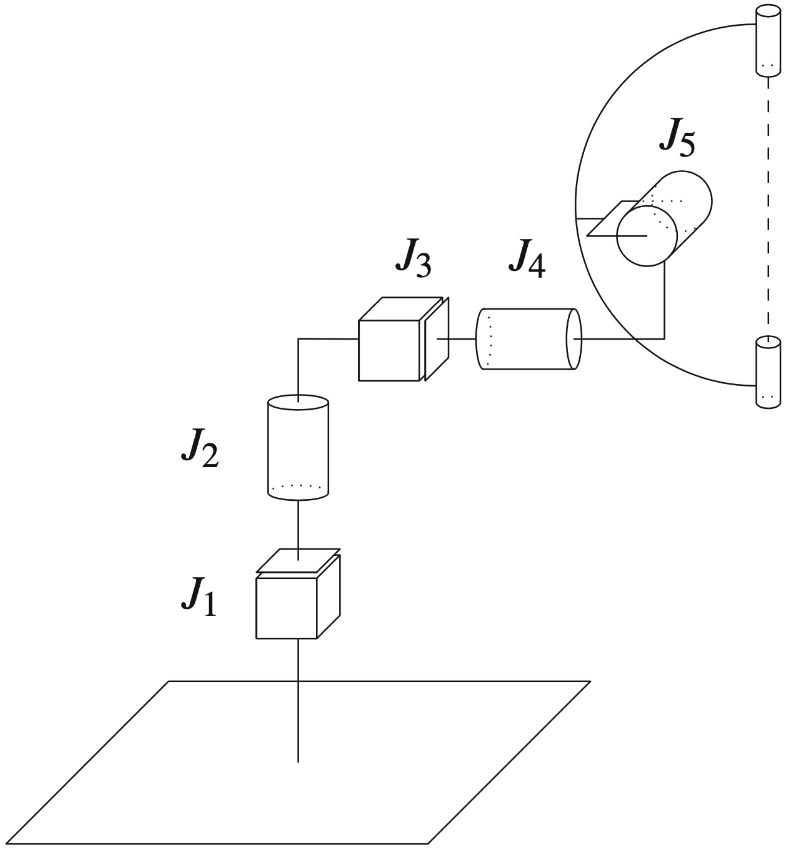
Cinematica inversa per il DLR-Kuka

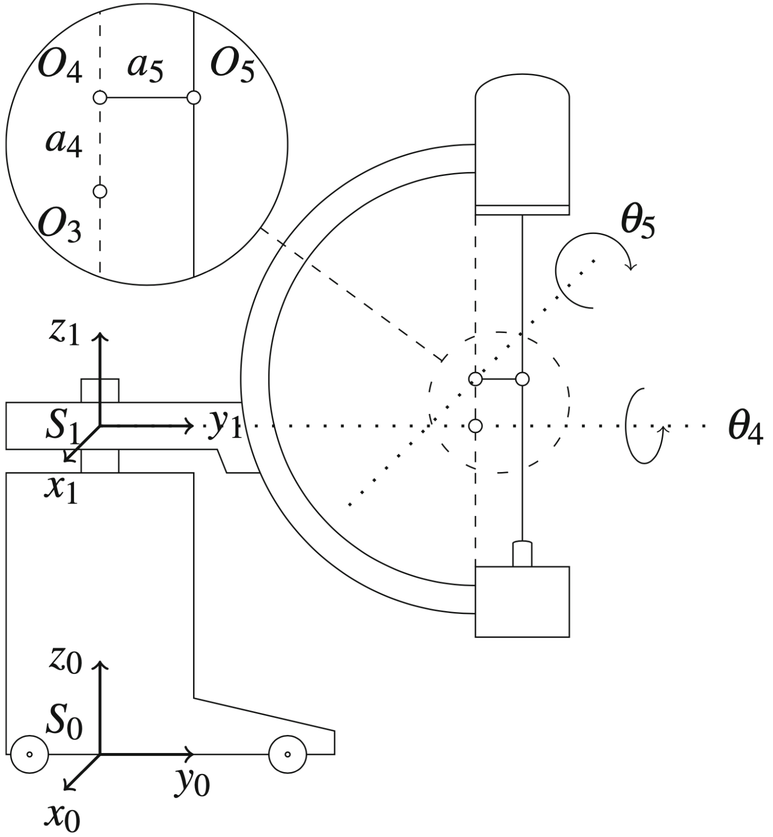
$$
{}^4\mathbf{M}_7 = {}^0\mathbf{M}_4^{-1} \cdot \mathbf{T} = \begin{pmatrix} c_5c_6c_7 - s_5s_7 & -c_7s_5 - c_5c_6s_7 & c_5s_6 & d_7c_5s_6 \\ c_6c_7s_5 + c_5s_7 & c_5c_7 - c_6s_5s_7 & s_5s_6 & d_7s_5s_6 \\ -c_7s_6 & s_6s_7 & c_6 & d_5 + d_7c_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{13} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{31} & \dots & m_{33} \end{pmatrix}
$$

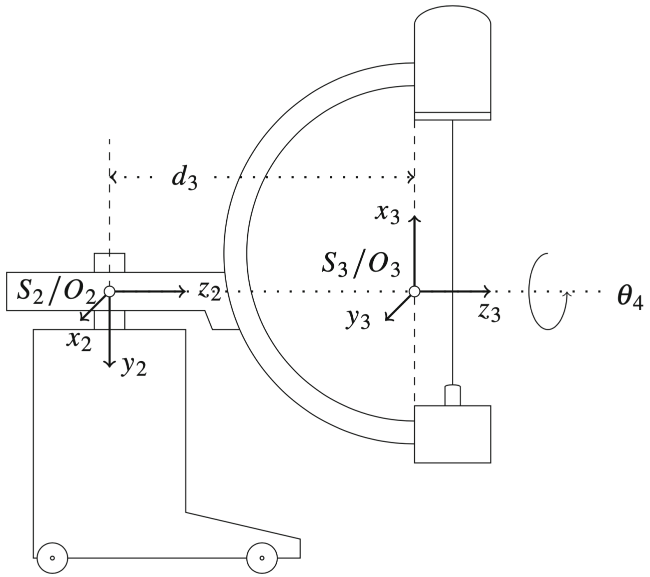
$$
\boxed{\begin{aligned} \theta_6 &= \operatorname{atan2}\left(hand \cdot \sqrt{1 - m_{33}^2}, m_{33}\right). \\ \theta_5 &= \operatorname{atan2}(hand \cdot m_{23}, hand \cdot m_{13}) \\ \theta_7 &= \operatorname{atan2}(hand \cdot m_{32}, -hand \cdot m_{31}) \end{aligned}}
$$

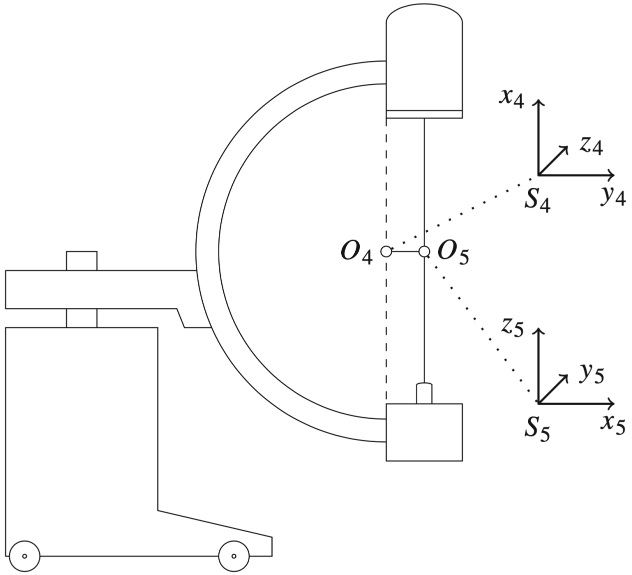
Valgono le stesse considerazioni sul coefficiente hand *del manipolatore a sei giunti rispetto alla dipendenza dei singoli coefficienti m_{ij} da s_6*

Cinematica diretta per il braccio a C





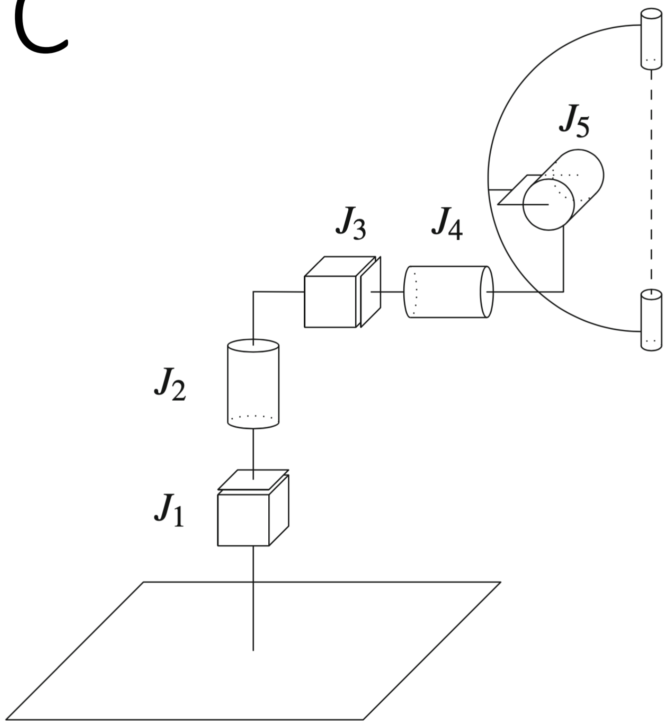




O_5 è il punto medio tra la sorgente è il rilevatore
Ma il centro di rotazione è O_4 mentre O_3 è l'intersezione con l'asse di J_4

Cinematica diretta per il braccio a C

i	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	0	0	d_1	0
2	-90	0	0	θ_2
3	0	0	d_3	-90
4	90	a_4	0	θ_4
5	90	a_5	0	θ_5+90



$$\boldsymbol{M}_1^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{M}_2^1 = \begin{pmatrix} c_2 & 0 & -s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{M}_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_4^3 = \begin{pmatrix} c_4 & 0 & s_4 & a_4 c_4 \\ s_4 & 0 & -c_4 & a_4 s_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{M}_5^4 = \begin{pmatrix} -s_5 & 0 & c_5 & -a_5 s_5 \\ c_5 & 0 & s_5 & a_5 c_5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{M}_5^0 = \boldsymbol{M}_1^0 \cdot \boldsymbol{M}_2^1 \cdot \boldsymbol{M}_3^2 \cdot \boldsymbol{M}_4^3 \cdot \boldsymbol{M}_5^4$$

Cinematica diretta per il braccio a C

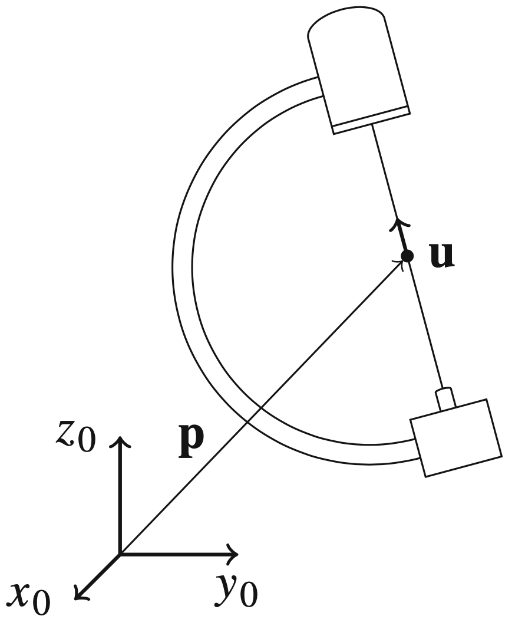
$$^{0}\mathbf{M}_5[1] = \begin{pmatrix} -c_2 s_4 s_5 - s_2 c_5 \\ -s_2 s_4 s_5 + c_2 c_5 \\ -c_4 s_5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$^{0}\mathbf{M}_5[3] = \begin{pmatrix} c_2 s_4 c_5 - s_2 s_5 \\ s_2 s_4 c_5 + c_2 s_5 \\ c_4 c_5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$^{0}\mathbf{M}_5[2] = \begin{pmatrix} -c_2 c_4 \\ -s_2 c_4 \\ s_4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

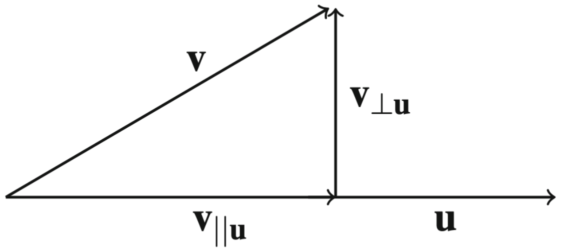
$$^{0}\mathbf{M}_5[4] = \begin{pmatrix} -a_5 c_2 s_4 s_5 - a_5 s_2 c_5 + a_4 c_2 s_4 - s_2 d_3 \\ -a_5 s_2 s_4 s_5 + a_5 c_2 c_5 + a_4 s_2 s_4 + c_2 d_3 \\ -a_5 c_4 s_5 + a_4 c_4 + d_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

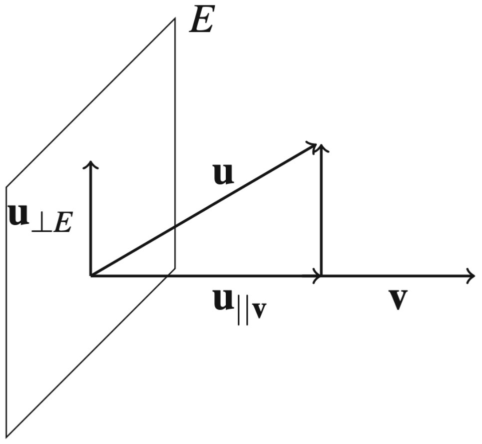
Cinematica inversa per il braccio a C



Non abbiamo una matrice $\boldsymbol{T}$ di riferimento del gripper, ma il punto $\boldsymbol{p}$ di mezzo del raggio e l'orientazione $\boldsymbol{u}$ del raggio: $\boldsymbol{p}$ è l'origine di S_5 e $\boldsymbol{u}$ è l'asse z di S_5

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

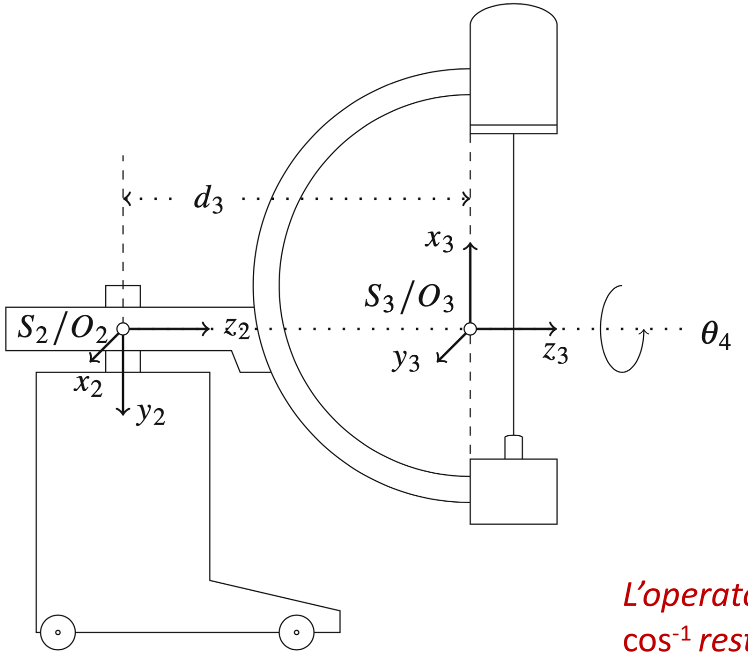


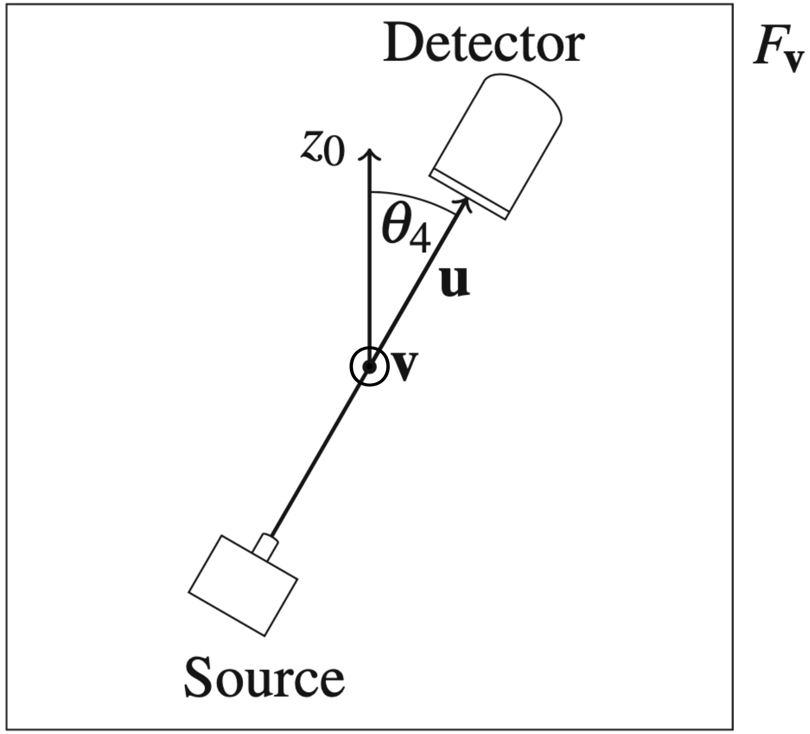


Dati i vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ è possibile ricavare le due componenti di $\boldsymbol{v}$ rispettivamente parallela e perpendicolare a $\boldsymbol{u}$:
$\boldsymbol{v}_{\|\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{uv})\boldsymbol{u}$
$\boldsymbol{v}_{\perp\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{\|\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{uv})\boldsymbol{u}$

Dato il piano E perpendicolare ad un dato vettore $\boldsymbol{v}$ definito dall'equazione $\boldsymbol{vx} = 0$, la componente di un vettore $\boldsymbol{u}$ che giace su E è data da:
$\boldsymbol{u}_{\perp E} = \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{uv})\boldsymbol{v}$

Soluzione per θ_4





Supponiamo noto l'angolo θ_2 di rotazione attorno l'asse z_1

Chiamiamo $\boldsymbol{v}$ il versore della retta che congiunge O_2, O_3 nella direzione di z_2, z_3.

Si ha: $\boldsymbol{v} = (-\sin\theta_2 \quad \cos\theta_2 \quad 0)^T$

L'operatore sgn serve perché cos[-1] *restituisce solo valori positivi*

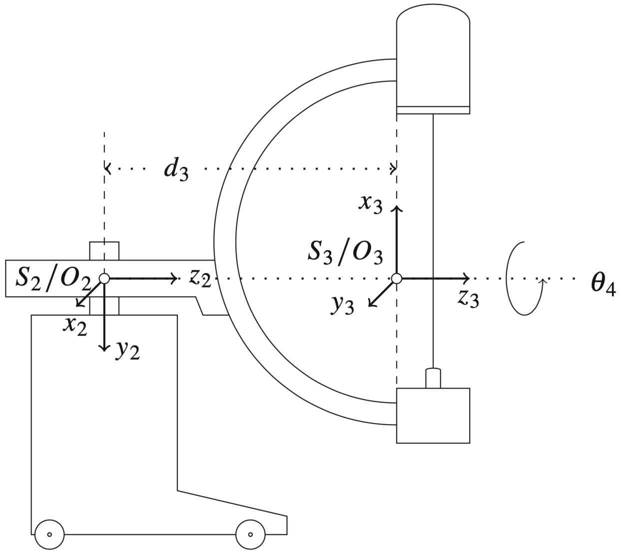
Consideriamo il piano F_v ortogonale a z_3 e $\boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{v}$ è rivolto verso di noi) e contenente z_0. θ_4 è la rotazione attorno z_3 e quindi attorno $\boldsymbol{v}$.

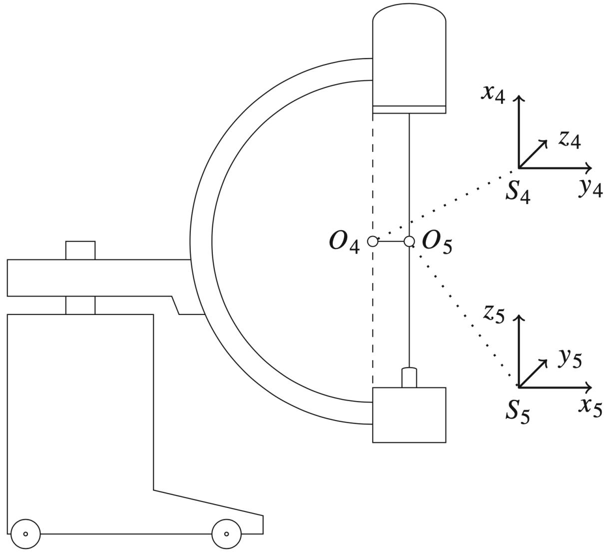
Proiettiamo $\boldsymbol{u}$ sul piano F_v: $\boldsymbol{u}_{\perp F_v} = \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u}\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$ e normalizziamo. Si ha:

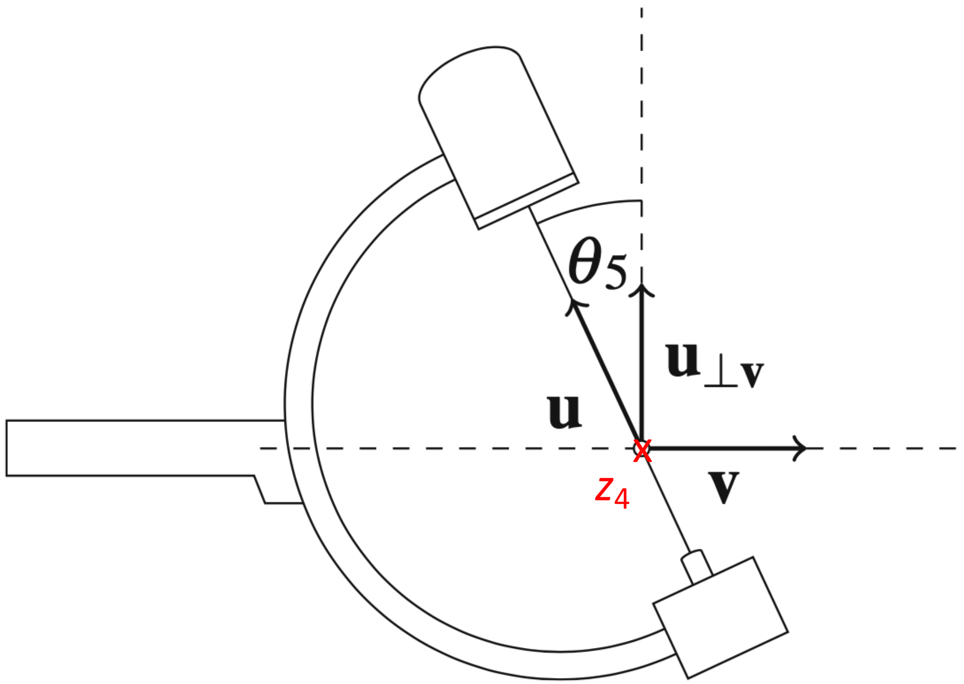
$$\theta_4 = \operatorname{sgn}(\theta_4)\cos^{-1}\left(z_0 \frac{\boldsymbol{u}_{\perp F_v}}{\left\|\boldsymbol{u}_{\perp F_v}\right\|}\right)$$

Il segno $\operatorname{sgn}(\theta_4) = 1$ se $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}\times z_0) > 0$

Soluzione per θ_5





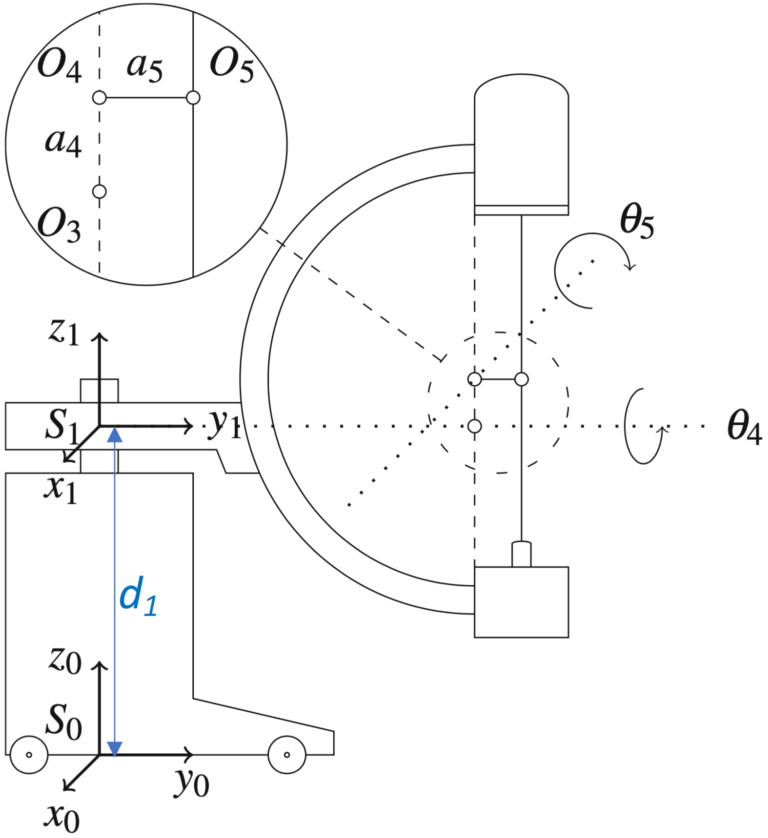


Consideriamo il piano definito dai vettori $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$:
è il piano della C. θ_5 è la rotazione attorno z_4
che è ortogonale a $\boldsymbol{v}$ e quindi è l'angolo tra $\boldsymbol{u}_{\perp v}$ e $\boldsymbol{u}$:

$$\theta_5 = \operatorname{sgn}(\theta_5) \cos^{-1}\left(\boldsymbol{u}\frac{\boldsymbol{u}_{\perp v}}{\|\boldsymbol{u}_{\perp v}\|}\right)$$

Il segno $\operatorname{sgn}(\theta_5) = 1$ se $\boldsymbol{uv} > 0$

Soluzione per d_1



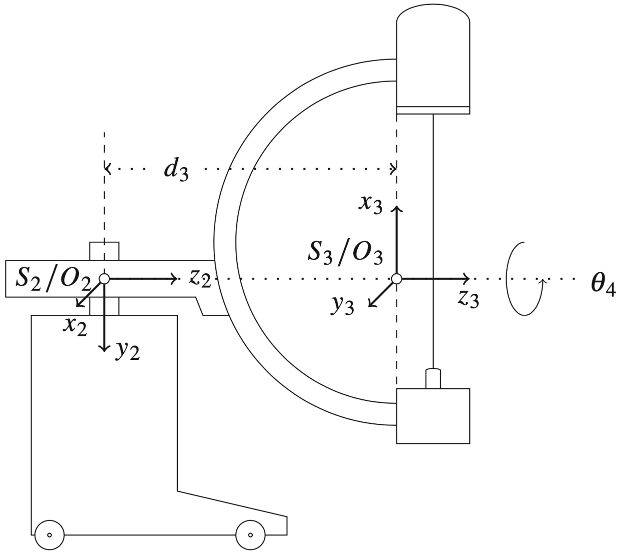
Si ricava dal confronto di $\boldsymbol{M}_5^0$ con $\boldsymbol{p}$:

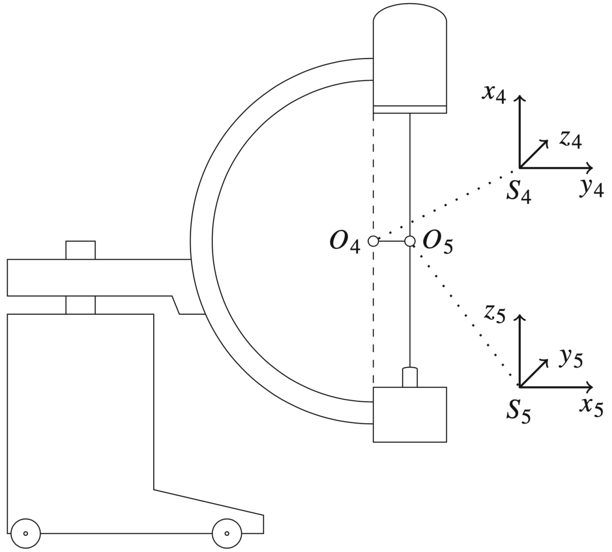
$$p_z = -a_5 c_4 s_5 + a_4 c_4 + d_1$$

da cui:

$$d_1 = p_z + a_5 c_4 s_5 - a_4 c_4$$

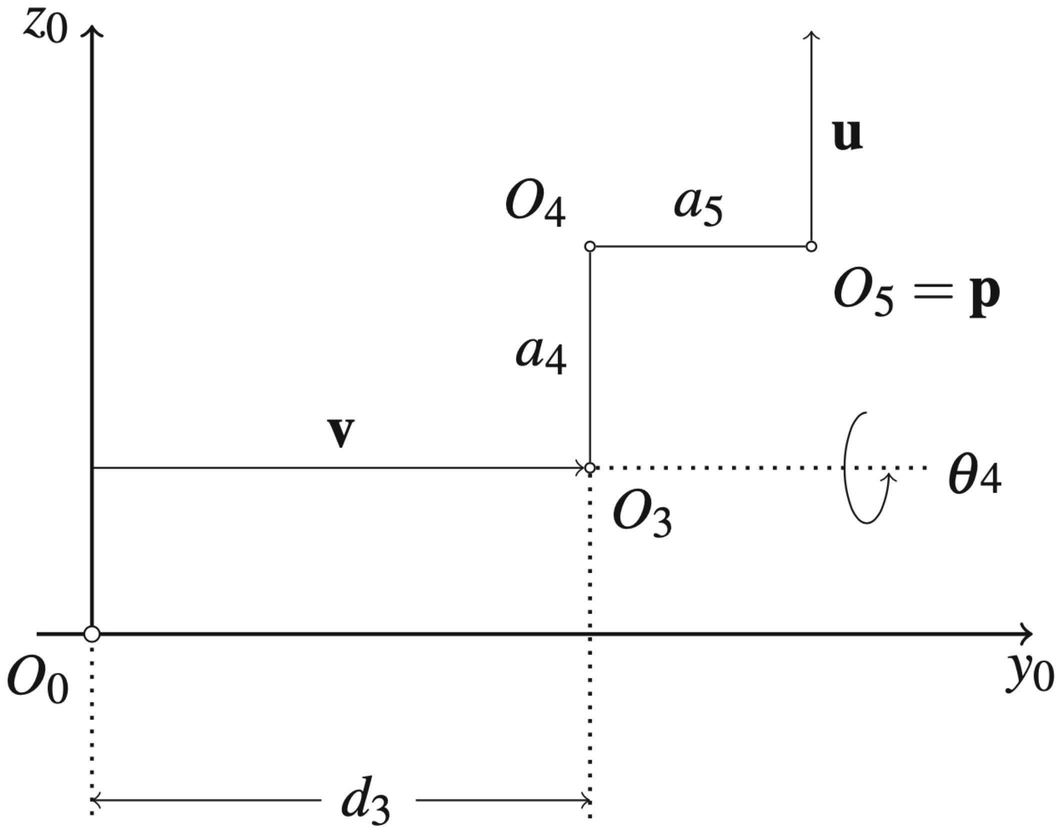
Soluzione per d_3





O_3, O_4, O_5 sono sullo stesso piano di $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$

$\boldsymbol{u}_{\perp \boldsymbol{v}}$ è nella direzione di a_4 e $\boldsymbol{v}_{\perp \boldsymbol{u}}$ è nella direzione di a_5



Soluzione per d_3

$\boldsymbol{v}_{\parallel \boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{u}\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}$

$\boldsymbol{v}_{\perp \boldsymbol{u}} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{\parallel \boldsymbol{u}} = \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u}\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}$

Dal fatto che $\boldsymbol{v}_{\perp \boldsymbol{u}}$ è nella direzione di a_5 si ha:

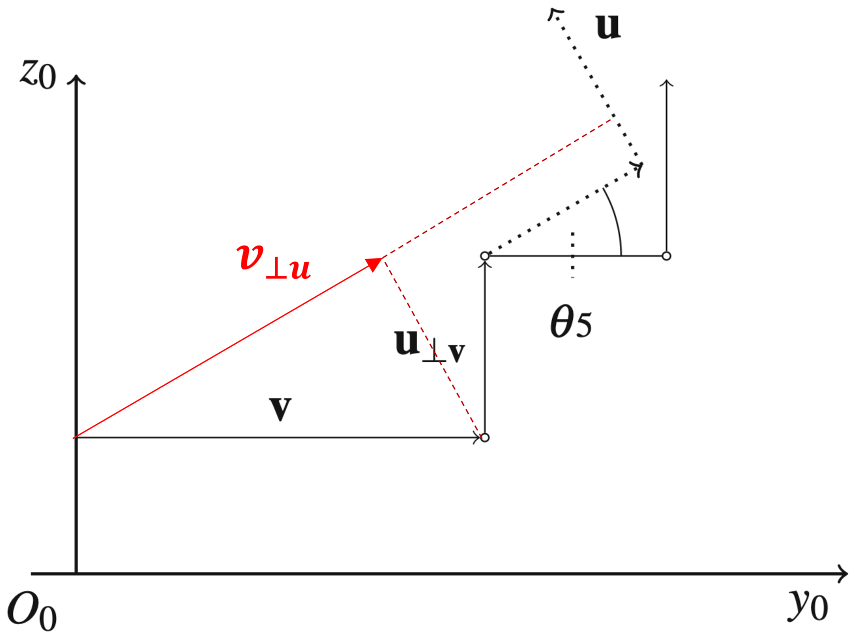
$$O_5 - O_4 = \frac{\boldsymbol{v}_{\perp \boldsymbol{u}}}{\|\boldsymbol{v}_{\perp \boldsymbol{u}}\|} a_5$$

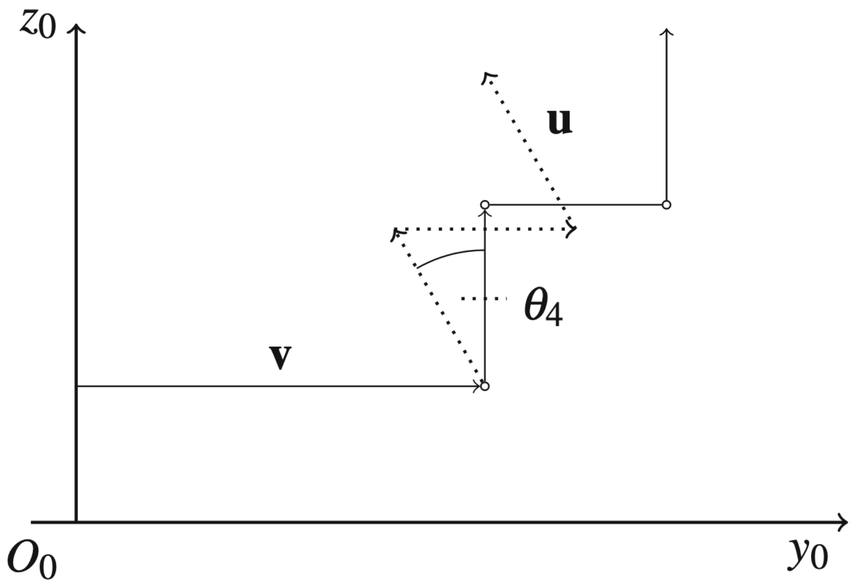
Dal fatto che $\boldsymbol{u}_{\perp \boldsymbol{v}}$ è nella direzione di a_4 si ha:

$$O_4 - O_3 = \frac{\boldsymbol{u}_{\perp \boldsymbol{v}}}{\|\boldsymbol{u}_{\perp \boldsymbol{v}}\|} a_4$$

Sappiamo che $O_5 = \boldsymbol{p}$ e che $O_2 = (0 \quad 0 \quad d_1)^T$

Possiamo quindi ricavare $d_3 = \|O_2 - O_3\|$





Soluzione per θ_2

Si cerca una soluzione numerica nell'intorno di $\theta_2 = 0 \pm 10°$ (per es. griglia di ricerca o bisezione)

Si parte con $\theta_2 = 0$

- dalla cinematica diretta si trovano i valori di $\boldsymbol{u_0}, \boldsymbol{p_0}$
- Si confrontano con $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}$ e si procede con approssimazioni successive minimizzando l'errore

$e = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u_0})^2 + (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p_0})^2$

Applicazioni del C-Arm

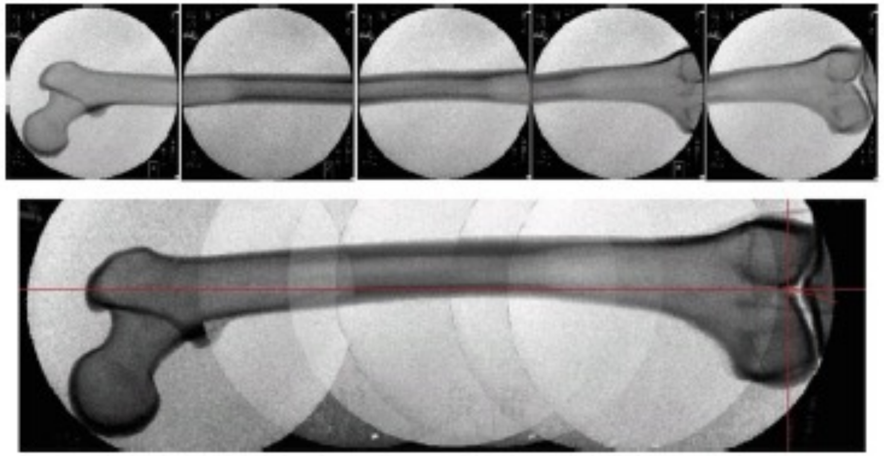
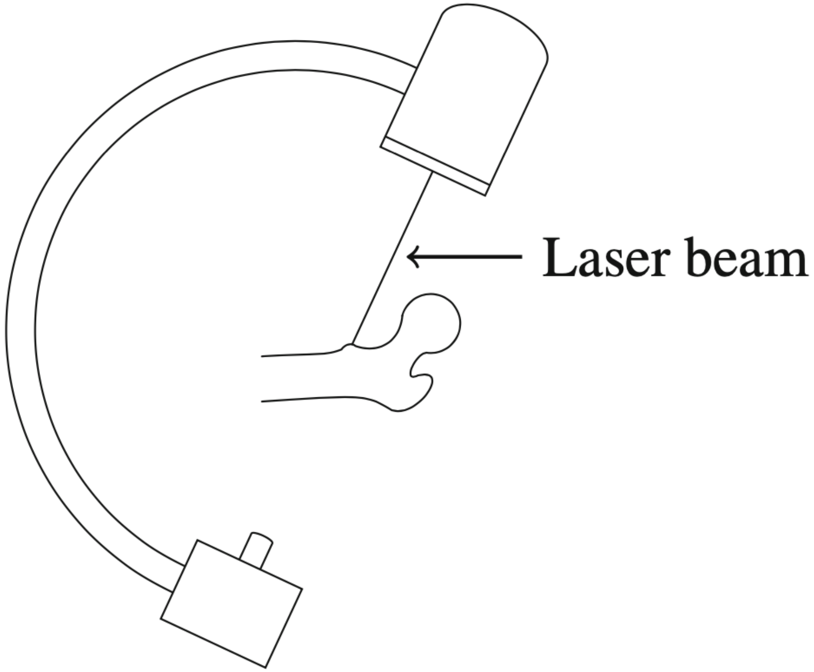


Image stitching: le singole acquisizioni sono allineate tra loro come in un’immagine panoramica senza registrazione



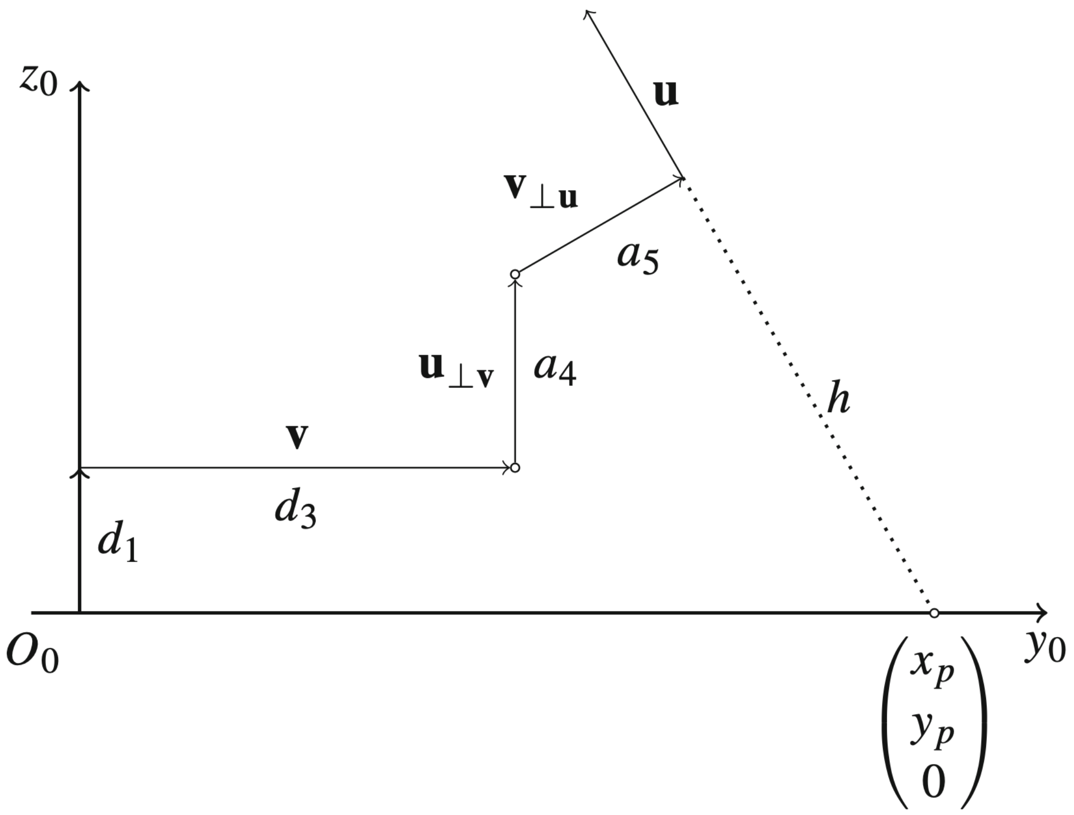
Ricostruzione 3D TAC ruotando attorno al target senza registrazione tramite puntamento con fascio laser allineato con il fascio di raggi X (asse z_5).

Il fascio laser proietta una linea sul target che può essere usata per calibrare il riferimento tra il braccio e la posizione desiderata. Dopo ogni acquisizione, la cimematica inversa riporta il braccio in posizione tale da centrare di nuovo il target.

E’ possibile anche la TAC 4D con acquisizioni in diversi momenti (caso cardiaco).

Applicazioni del C-Arm

Il radiologo fissa un'asse per l'analisi:
servono solo 4 gradi di libertà: $d_1, d_3, \theta_4, \theta_5$
Di solito si fissa $\theta_2 = 0$



Intersezione con il piano xy: $\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ 0 \end{pmatrix}$

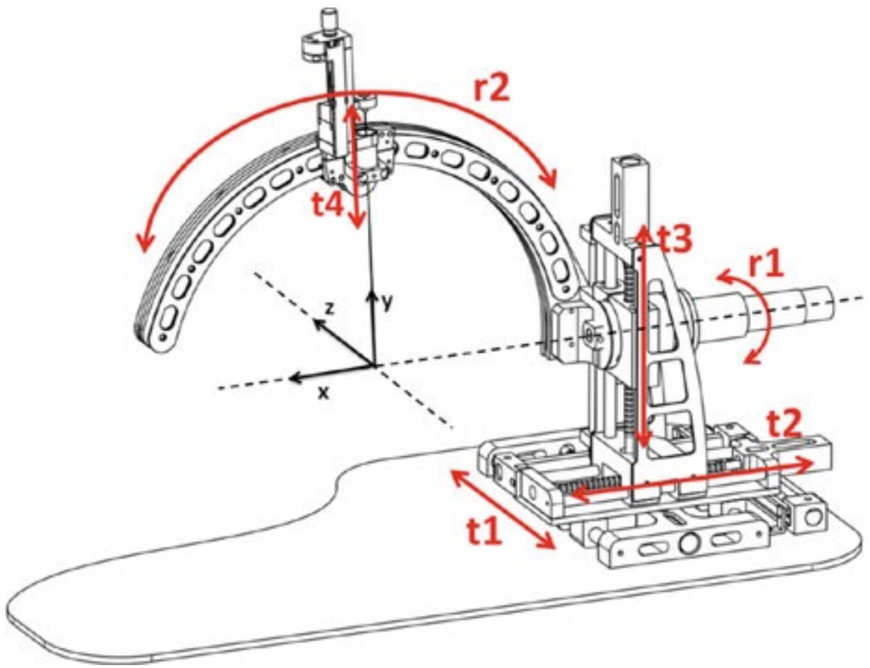
Si stimano θ_4 e θ_5 dai vettori $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$

Si ricavano d_1 e d_3 dall'equazione:

$$d_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + d_3 \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + \frac{\boldsymbol{u}_{\perp \boldsymbol{v}}}{\|\boldsymbol{u}_{\perp \boldsymbol{v}}\|} a_4 + \frac{\boldsymbol{v}_{\perp \boldsymbol{u}}}{\|\boldsymbol{v}_{\perp \boldsymbol{u}}\|} a_5 + \lambda \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dove λ è il fattore di scala

Sistemi Center-of-Arc



4 assi traslazionali (t_1, t_2, t_3, t_4)
2 assi rotazionali (r_1, r_2)

C-Arm fa parte della famiglia dei sistemi Center-of-Arc
usati per neurochirurgia, angiografia, terapie radiologiche

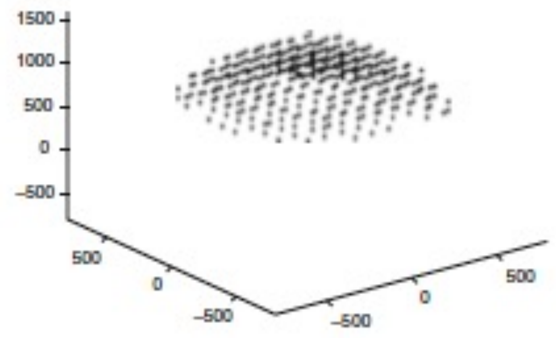
Destrezza (dexterity)

Dato un punto $\boldsymbol{p}$ nello spazio di lavoro del robot, individuare l'angolo solido di tutte le possibili orientazioni del gripper.

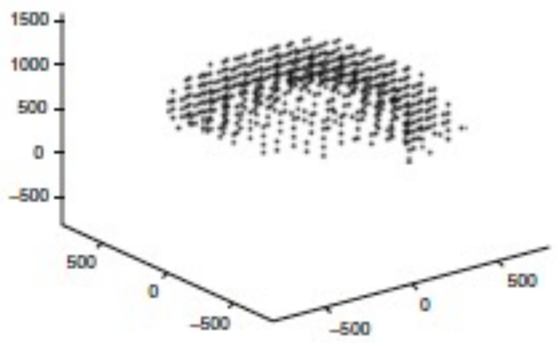
Considerando i versori unitari di tutte le orientazioni possibili in $\boldsymbol{p}$, si ottiene una calotta di una sfera unitaria

La destrezza dipende dalle limitazioni fisiche degli angoli ai giunti

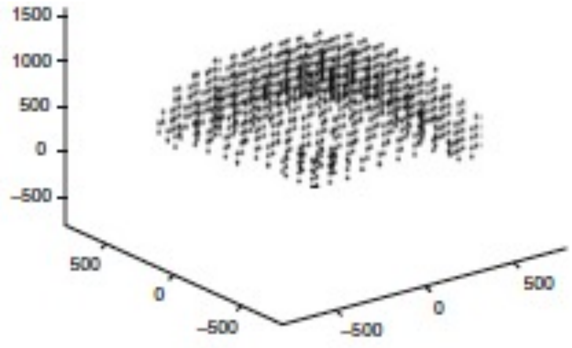
DLR-Kuka



6 giunti: $\theta_3 = 0$
R-joints $\pm 170°$ P-joints $\pm 120°$



7 giunti: θ_3 libero
R-joints $\pm 170°$ P-joints $\pm 120°$



6 giunti: $\theta_3 = 0$
R-joints $\pm 170°$ P-joints $\pm 150°$