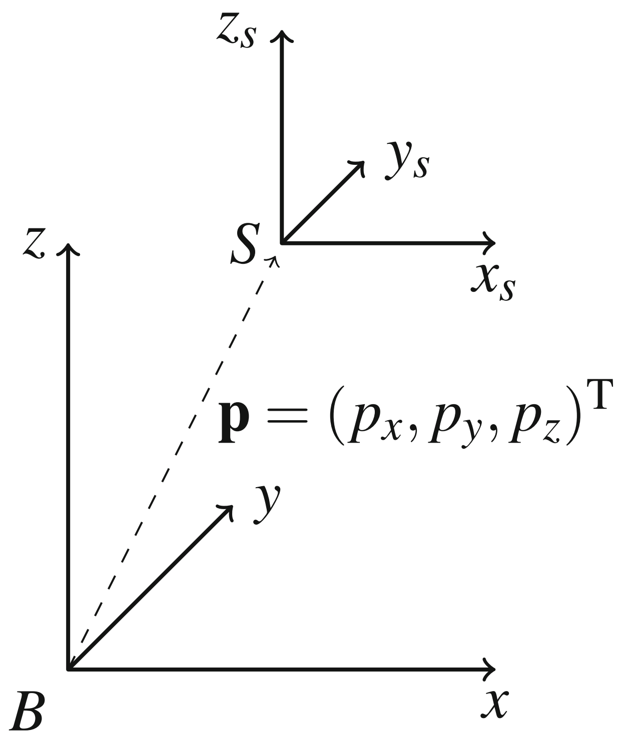
Posizione e orientazione di un braccio robotico

Sistemi di coordinate

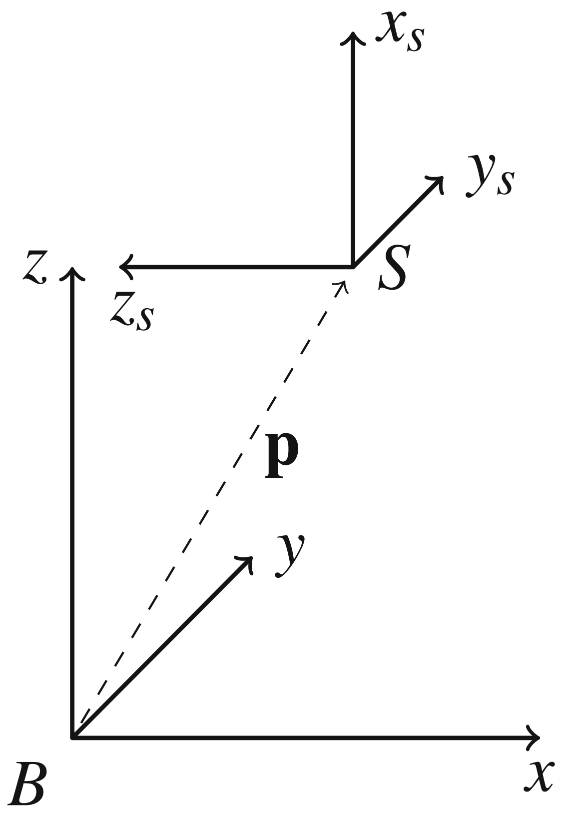


$$\mathbf{M}_S^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice di rototraslazione

Trasformiamo le coordinate locali del sistema S rispetto al sistema di coordinate B

Sistemi di coordinate



$$\mathbf{M}_S^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 1 & 0 & 0 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trasformiamo le coordinate locali del sistema S rispetto al sistema di coordinate B

Generica matrice di rototraslazione

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{n} & \boldsymbol{o} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

n_x
n_y
n_z

Versore **n dell'asse x** del nuovo sistema di riferimento rispetto al vecchio

o_x
o_y
o_z

Versore **o dell'asse y** del nuovo sistema di riferimento rispetto al vecchio

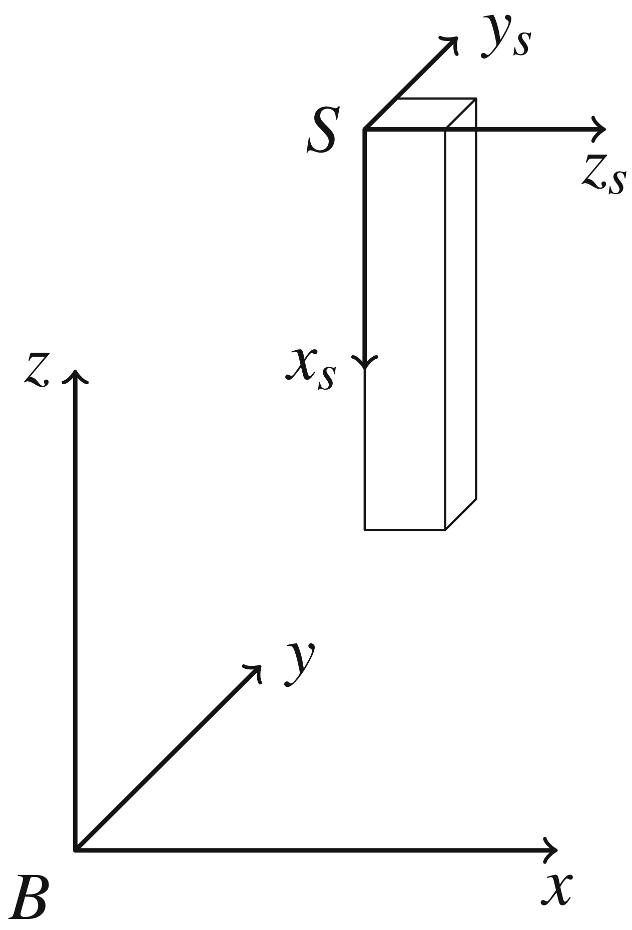
a_x
a_y
a_z

Versore **a dell'asse z** del nuovo sistema di riferimento rispetto al vecchio

p_x
p_y
p_z

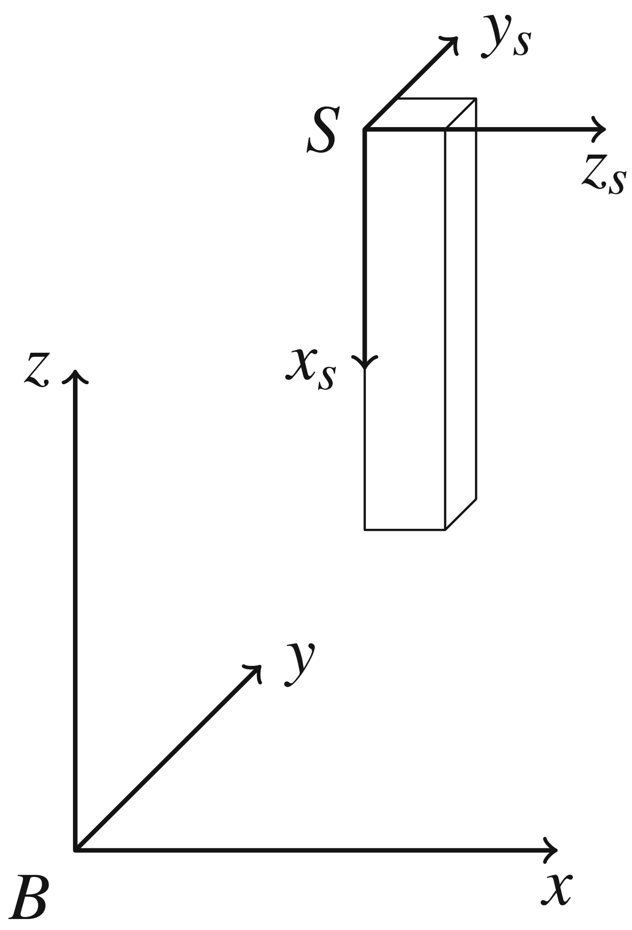
Posizione **p dell'origine** del nuovo sistema di riferimento rispetto al vecchio

Esempio



$$\mathbf{M}_S^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ -1 & 0 & 0 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Angoli



$$(p_x \quad p_y \quad p_z \quad 0 \quad 90 \quad 0)^T$$

Rotazione del sistema di coordinate **S** rispetto a **B**
Convenzione:
- una rotazione positiva dell'asse x porta l'asse y verso l'asse z
- Una rotazione positiva dell'asse y porta l'asse z verso l'asse x

Angolo positivo	$x \to y$	$y \to z$	$z \to x$
Angolo negativo	$y \to x$	$z \to y$	$x \to z$

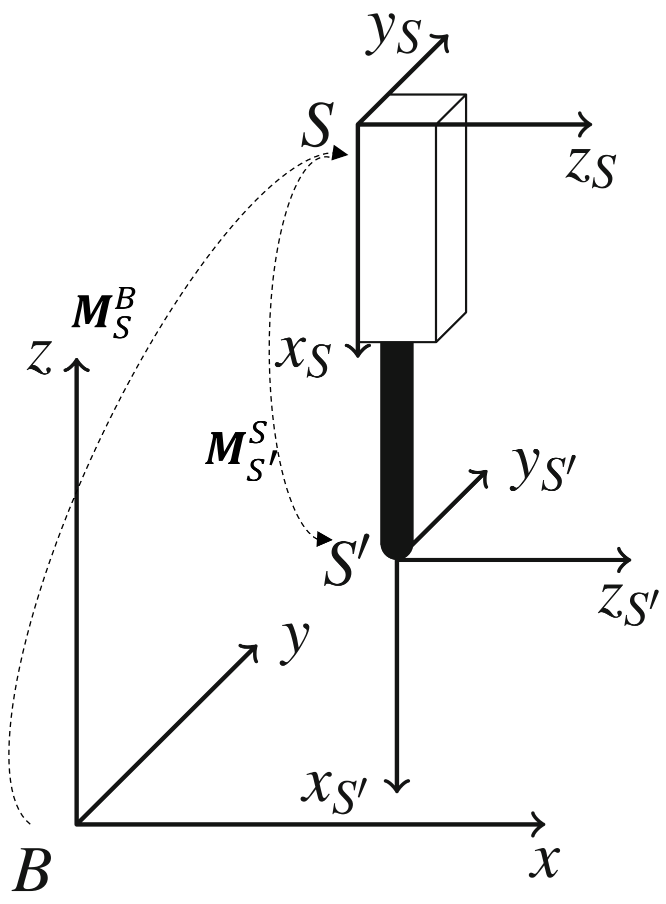
Vettore di Yaw, Pitch, Roll (imbardata, beccheggio, rollio):

$$YPR_S^B = (p_x \quad p_y \quad p_z \quad \alpha \quad \beta \quad \gamma)^T$$

Letteratura medica: Flexion/extension, Varus/valgus, Rotation/derotation

Ricodiamo l'altra convenzione: gli angoli di Eulero

Posizioni e orientazioni relative



Tre sistemi di riferimento: $\boldsymbol{M}_S^B, \boldsymbol{M}_{S'}^S, \boldsymbol{M}_{S'}^B$

$$\mathbf{M}_S^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ -1 & 0 & 0 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

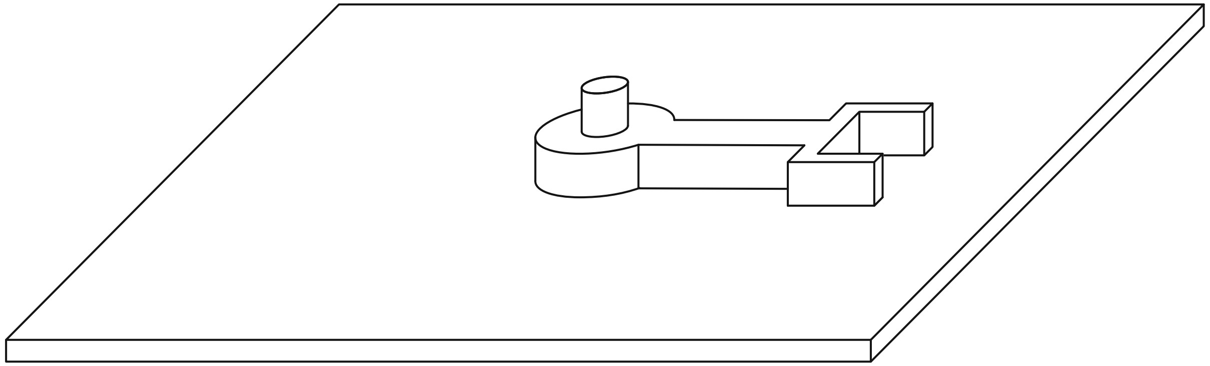
$$\mathbf{M}_{S'}^S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p'_x \\ 0 & 1 & 0 & p'_y \\ 0 & 0 & 1 & p'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dove $(p'_x \quad p'_y \quad p'_z)^T$ è l'origine di S' in coordinate di S.
Si ha:

$$\boldsymbol{M}_{S'}^B = \boldsymbol{M}_S^B \cdot \boldsymbol{M}_{S'}^S$$ → *moltiplichiamo a destra !!*

Braccio robotico

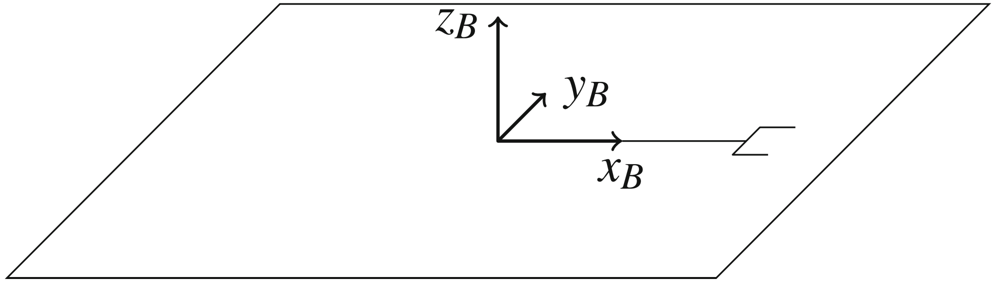
Catena robotica: bracci collegati mediante giunti



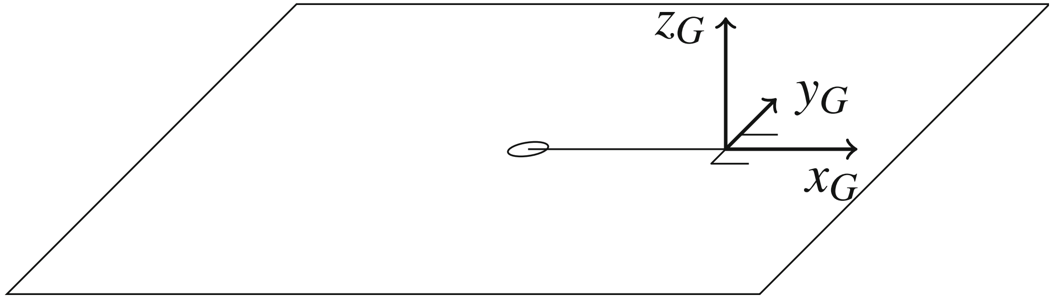
Robot planare con un giunto e una pinza (effettore)

Unico grado di libertà: rotazione θ attorno l'asse z_B

La matrice di riferimento della pinza è funzione di θ

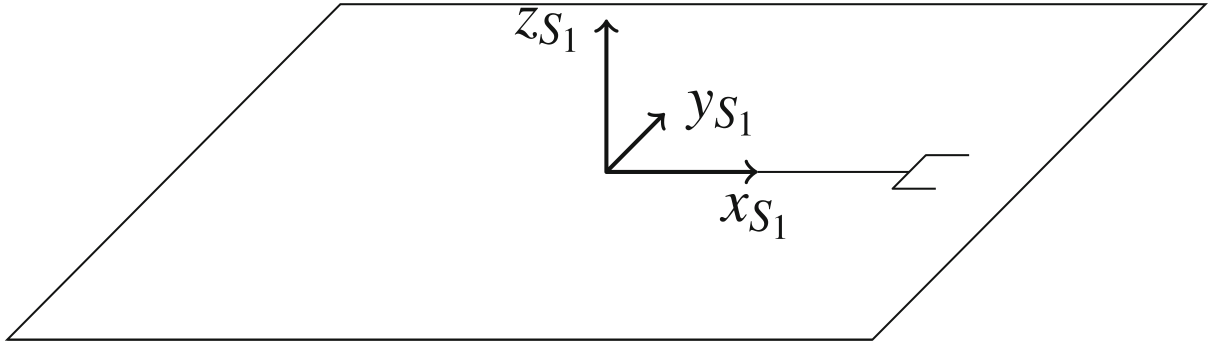


Sistema di riferimento **B** di base

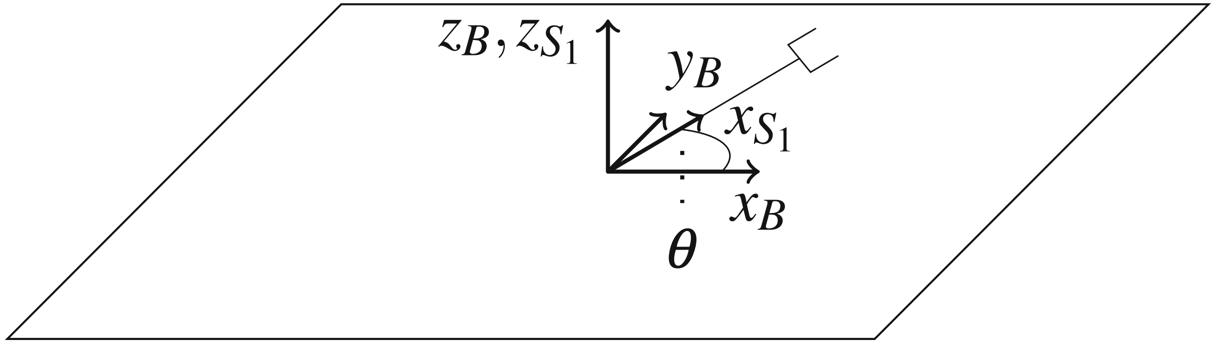


Sistema di riferimento **G** della pinza

Braccio robotico

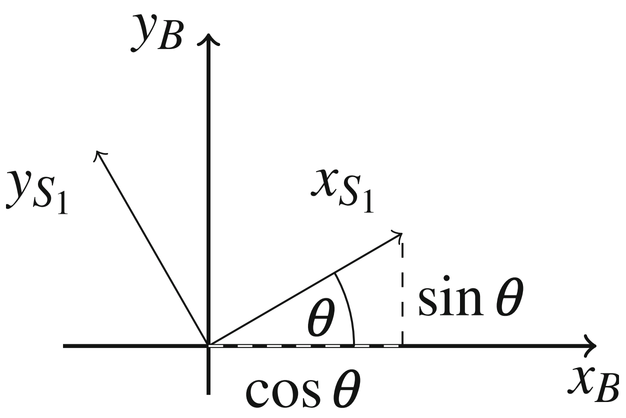


Aggiungiamo un sistema di riferimento intermedio $\boldsymbol{S_1}$ solidale al giunto
Attenzione: quando il giunto si muove, **B** resta fermo e $\boldsymbol{S_1}$ si muove con il giunto



Quando il giunto effettua una rotazione θ l'asse x_B resta fermo e l'asse x_{S_1} ruota di θ attorno l'asse $z_B = z_{S_1}$

Braccio robotico



Sistema di riferimento intermedio $\boldsymbol{S_1}$ rispetto a **B**

$$x_{S_1} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

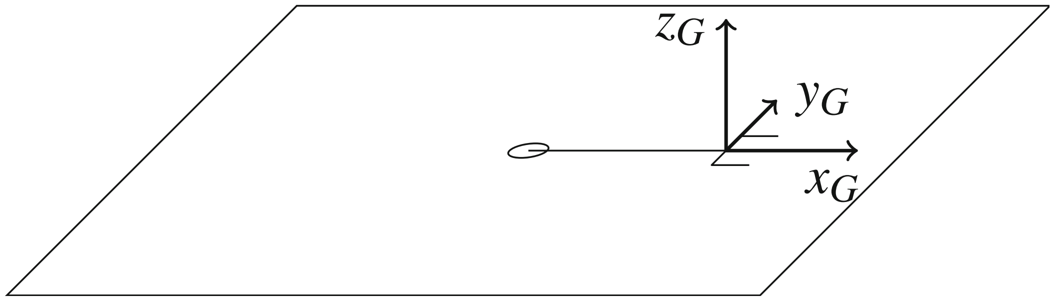
$$y_{S_1} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z_{S_1} = z_B$$

La matrice $\boldsymbol{M}_{S_1}^{B}$ è:

$$\mathbf{M}_{S_1}^{B} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Braccio robotico



Sistema di riferimento **G** della pinza rispetto $\boldsymbol{S_1}$:
Si ottiene dalla traslazione di $\boldsymbol{S_1}$ della lunghezza L del giunto

$$\mathbf{M}_G^{S_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & L \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sistema di riferimento **G** della pinza rispetto **B**:
Si ottiene dal prodotto della matrice relativa ad $\boldsymbol{S_1}$ per la matrice relativa a **G**

$$\mathbf{M}_G^{B} = \mathbf{M}_{S_1}^{B} \cdot \mathbf{M}_G^{S_1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & L\cos\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & L\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Riepilogo delle rotazioni e traslazioni semplici

$$R(x,\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotazione attorno l’asse x

$$R(y,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotazione attorno l’asse y

$$R(z,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotazione attorno l’asse z

$$T(p_x,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Traslazione lungo l’asse x

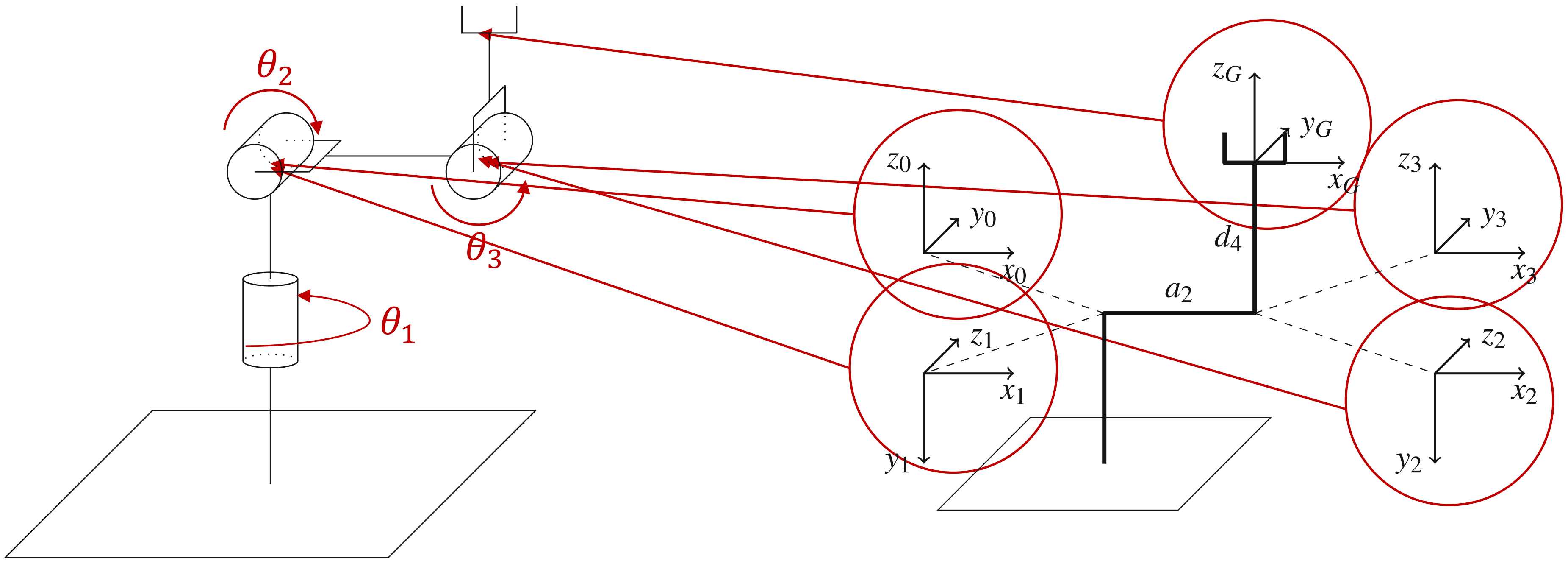
$$T\left(0,p_y,0\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Traslazione lungo l’asse y

$$T(0,0,p_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Traslazione lungo l’asse z

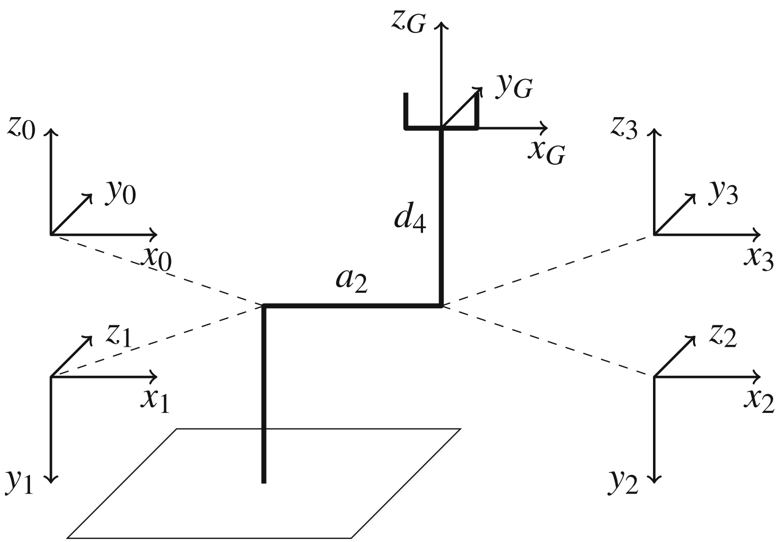
Robot a tre giunti (elbow manipulator)



Angoli ai giunti: $\theta_1, \theta_2, \theta_3$

Sistemi di coordinate intermedi $S_i = (x_i, y_i, z_i), i = 1, \cdots, 3$
$B = S_0 = (x_0, y_0, z_0)$ sistema di coordinate fissato al tavolo
Nota: l'origine di B coincide con S_1
S_G : coordinate della pinza

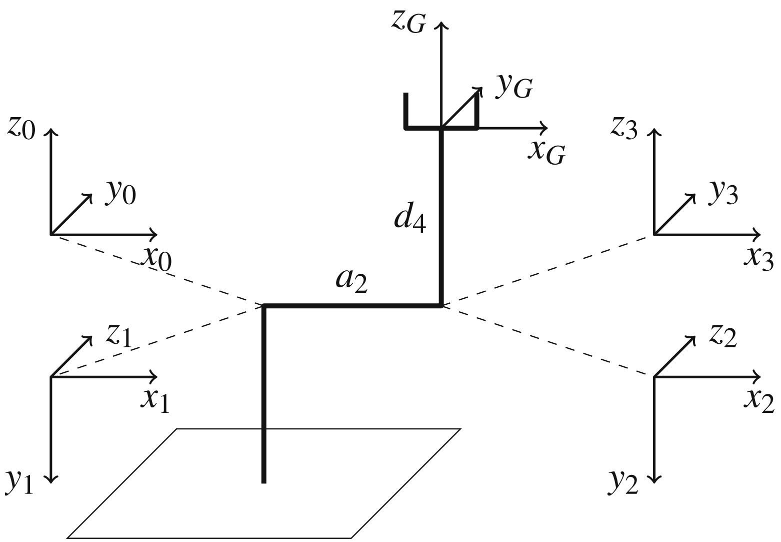
Robot a tre giunti (elbow manipulator)



Primo passo da S_0 a S_1:
- origine in comune;
- rotazione del giunto attorno l'asse z;
- Rotazione del sistema di riferimento di -90 attorno l'asse x

$$\boldsymbol{M}_{S_1}^{S_0} = \boldsymbol{M}_1^0 = R(z,\theta_1)\cdot R(x,-90) = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & 0 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

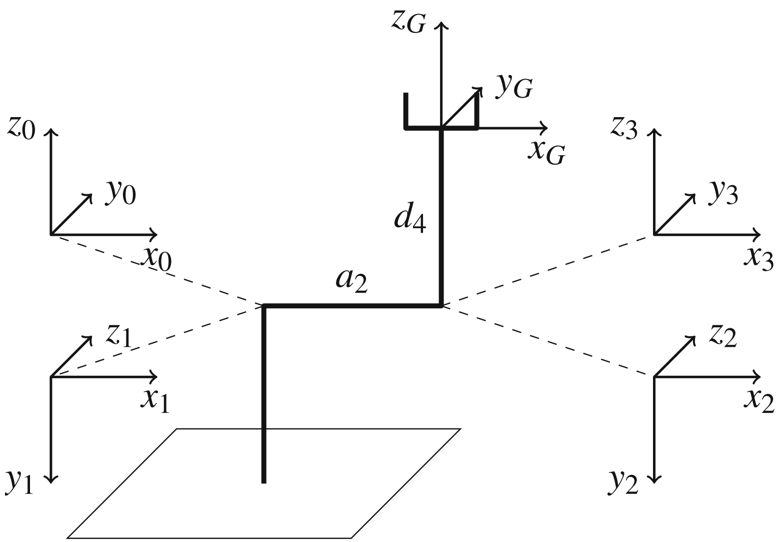
Robot a tre giunti (elbow manipulator)



Secondo passo da S_1 a S_2:
- rotazione del giunto 2 attorno l'asse z;
- Traslazione del sistema di riferimento di a_2 lungo l'asse x;

$$\boldsymbol{M}_2^1 = R(z,\theta_2)\cdot T(a_2,0,0) = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & a_2\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & a_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

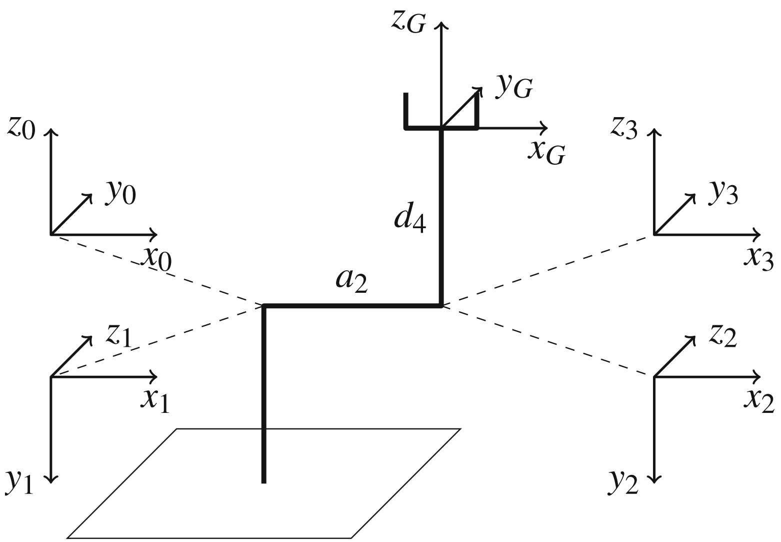
Robot a tre giunti (elbow manipulator)



Terzo passo da S_2 a S_3:
- rotazione del giunto 3 attorno l'asse z;
- Rotazione del sistema di riferimento di 90 attorno l'asse x

$$\boldsymbol{M}_3^2 = R(z,\theta_3)\cdot R(x,90) = \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & 0 & \sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_3 & 0 & -\cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Robot a tre giunti (elbow manipulator)



Quarto passo da S_3 a G:

- Traslazione del sistema di riferimento di d_4 lungo l'asse z

$$\boldsymbol{M}_G^3 = T(0, 0, d_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

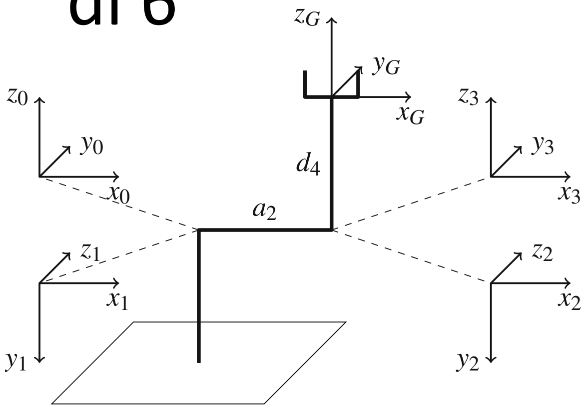
Cinematica diretta del robot a tre bracci

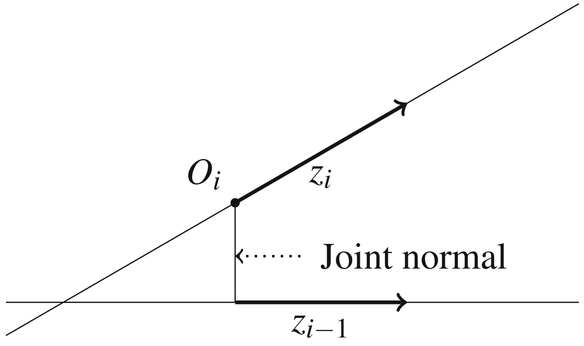
Si ottiene: $\boldsymbol{M}_G^0 = \boldsymbol{M}_1^0 \cdot \boldsymbol{M}_2^1 \cdot \boldsymbol{M}_3^2 \cdot \boldsymbol{M}_G^3 = \begin{pmatrix} c_1 c_{23} & -s_1 & c_1 s_{23} & a_2 c_1 c_2 + d_4 c_1 s_{23} \\ s_1 c_{23} & c_1 & s_1 s_{23} & a_2 s_1 c_2 + d_4 s_1 s_{23} \\ -s_{23} & 0 & c_{23} & -a_2 s_2 + d_4 c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dove: $s_1 = \sin\theta_1$ …; $s_{23} = \sin(\theta_2 + \theta_3)$ …

Convenzione di Denavit-Hartenberg (DH)

- Convenzione per definire le terne di riferimento relative ai bracci
- Minimizzare i parametri per trasformare una terna dall'altra: 4 invece di 6





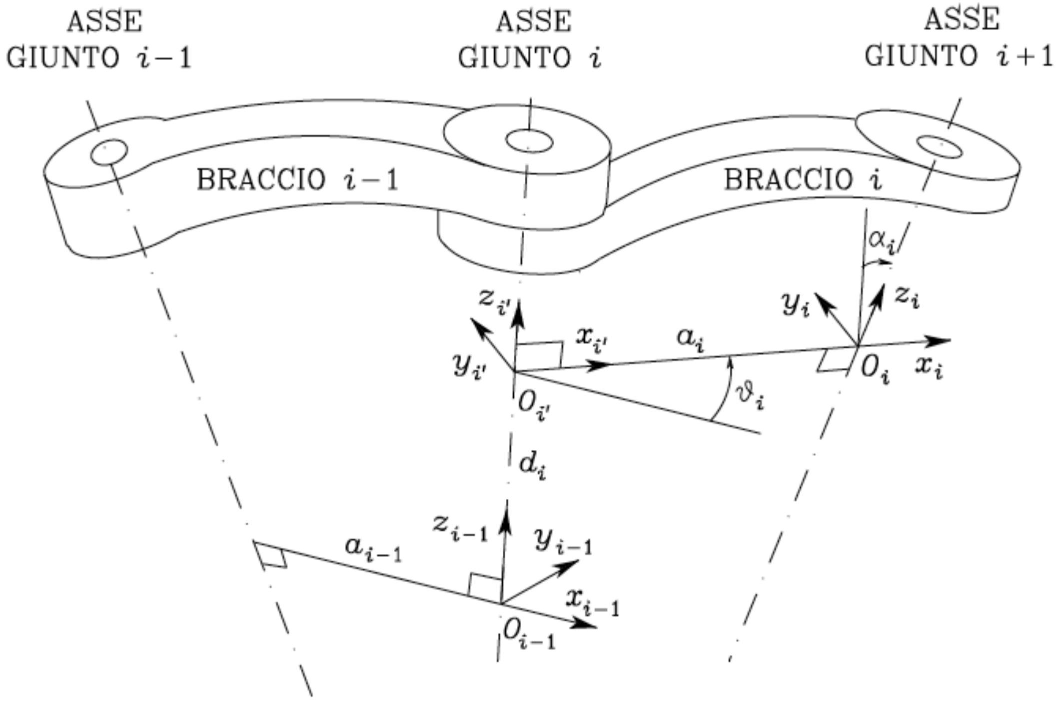
Convenzione di Denavit-Hartenberg:

- sistema base di riferimento

- Per il generico sistema S_i
  - z_i asse di rotazione del giunto $(i+1)$
  - x_i ortogonale a z_i e a z_{i-1}
    la direzione di x_i è da z_{i-1} verso z_i
  - y_i è tale da fare la terna S_i levogira

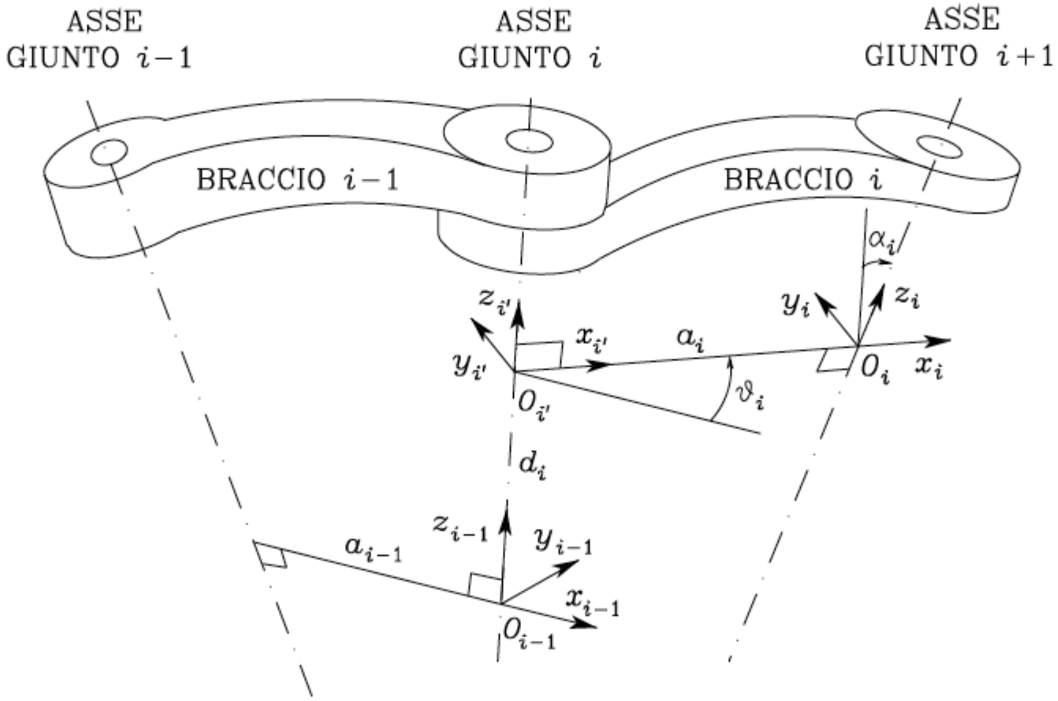
- L'origine O_i della terna S_i è all'intersezione tra z_i e la normale comune a z_{i-1} e z_i
  (non sono complanari)

Convenzione di Denavit-Hartenberg (DH)



- si sceglie l'asse z_i giacente lungo l'asse del giunto $(i+1)$
- si individua O_i all'intersezione dell'asse z_i con la normale comune agli assi z_i e a z_{i-1}, e con $O_{i'}$ si indica l'intersezione della normale comune con z_{i-1}
- si assume l'asse x_i diretto lungo la normale comune agli assi z_i e z_{i-1} con verso positivo dal giunto (i) al giunto $(i+1)$
- si sceglie l'asse y_i in modo da completare una terna levogira

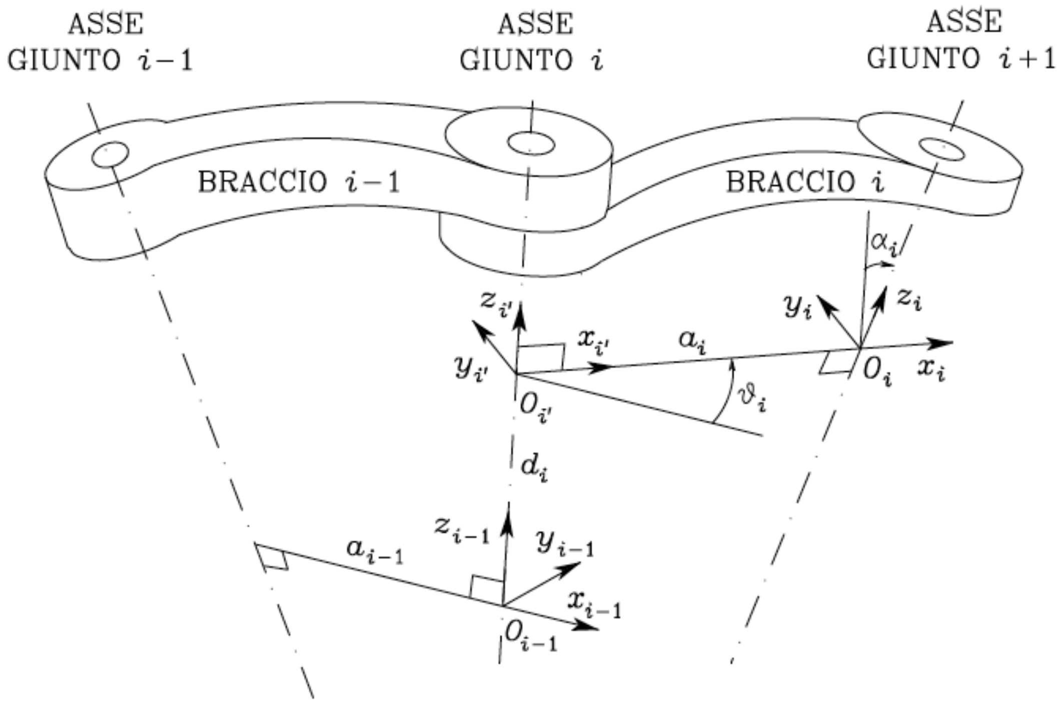
Convenzione di Denavit-Hartenberg (DH)



Definizione non univoca della terna:

- con riferimento alla terna B, per la quale la sola direzione dell'asse z_0 risulta specificata: si possono scegliere arbitrariamente O_0 e x_0
- con riferimento alla terna n per la quale il solo asse x_n risulta soggetto a vincolo (deve essere normale all'asse z_{n-1}): infatti non vi è il giunto $n+1$, per cui non è definito z_n e lo si può scegliere arbitrariamente
- quando due assi consecutivi sono paralleli, in quanto la normale comune tra di essi non è univocamente definita
- quando due assi consecutivi si intersecano, in quanto il verso di x_i è arbitrario
- quando il giunto i è prismatico, nel qual caso la sola direzione dell'asse z_{i-1} è determinata

Parametri di Denavit-Hartenberg

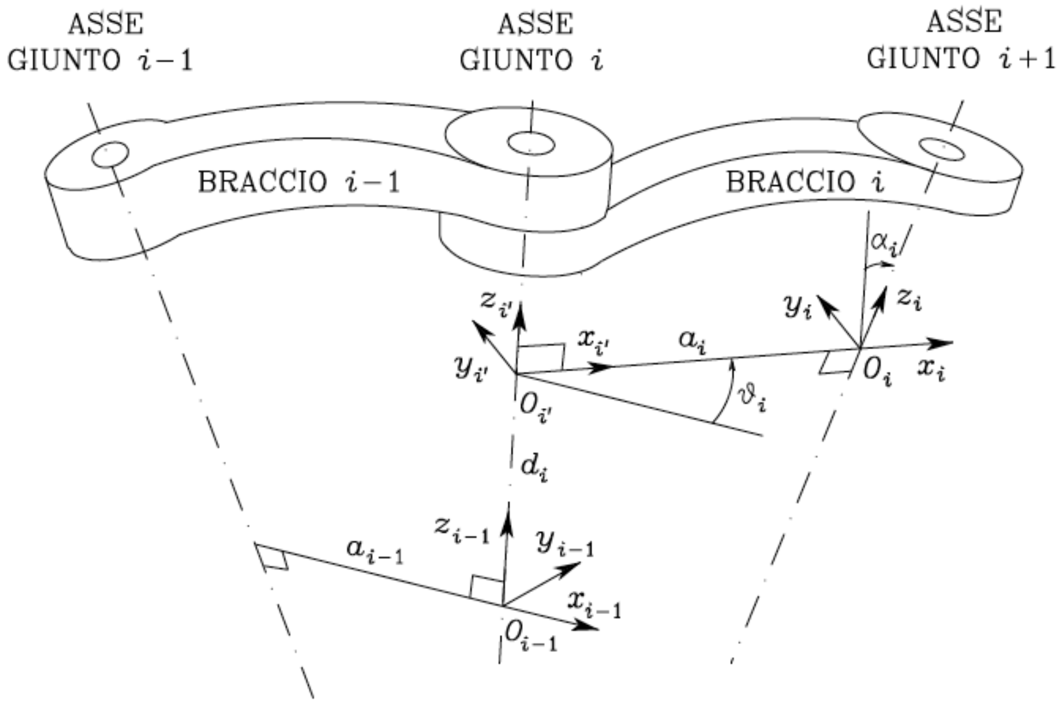


a_i distanza di O_i da $O_{i'}$;
d_i coordinata su z_{i-1} di $O_{i'}$;
α_i angolo intorno all'asse x_i tra l'asse z_{i-1} e l'asse z_i valutato positivo in senso antiorario;
θ_i angolo intorno all'asse z_{i-1} tra l'asse x_{i-1} e l'asse x_i valutato positivo in senso antiorario.

a_i e α_i sono sempre costanti
se il giunto è *rotoidale* la variabile è θ_i
se il giunto è *prismatico* la variabile è d_i

Una sola variabile per giunto!!

Procedura per passare dalla terna i-1 alla terna i



1. Traslazione lungo l'asse z_{i-1} di una quantità d_i;
2. Rotazione attorno l'asse z_{i-1} di un angolo θ_i
3. Traslazione lungo l'asse x_i di una quantità a_i
4. Rotazione attorno l'asse x_i di un angolo α_i

$$\boldsymbol{M}_i^{i-1} = T(0,0,d_i) \cdot R(z,\theta_i) \cdot T(a_i,0,0) \cdot R(x,\alpha_i)$$

Sole quattro trasformazioni per giunto!!

Procedura per passare dalla terna i-1 alla terna i

$$\boldsymbol{M}_i^{i-1} = T(0,0,d_i) \cdot R(z,\theta_i) \cdot T(a_i,0,0) \cdot R(x,\alpha_i)$$

$$\boldsymbol{M}_i^{i-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

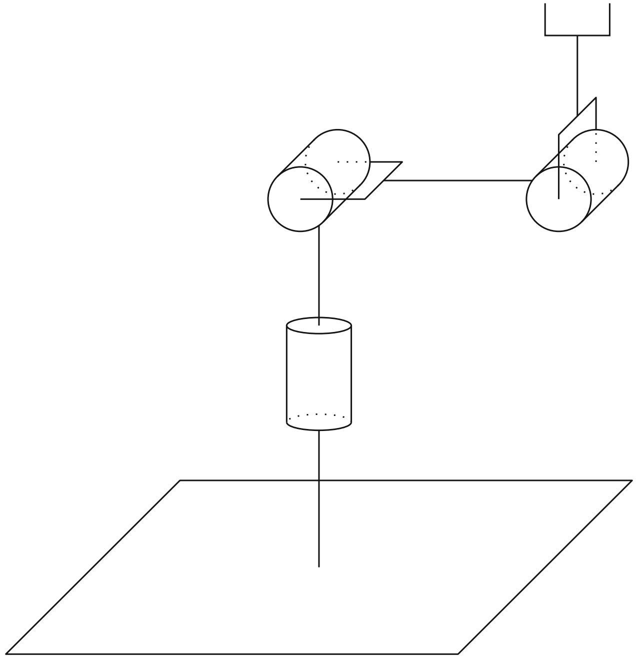
$$\boxed{\boldsymbol{M}_i^{i-1} = \begin{pmatrix} c_{\theta_i} & -c_{\alpha_i}s_{\theta_i} & s_{\alpha_i}s_{\theta_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\alpha_i}c_{\theta_i} & -s_{\alpha_i}c_{\theta_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

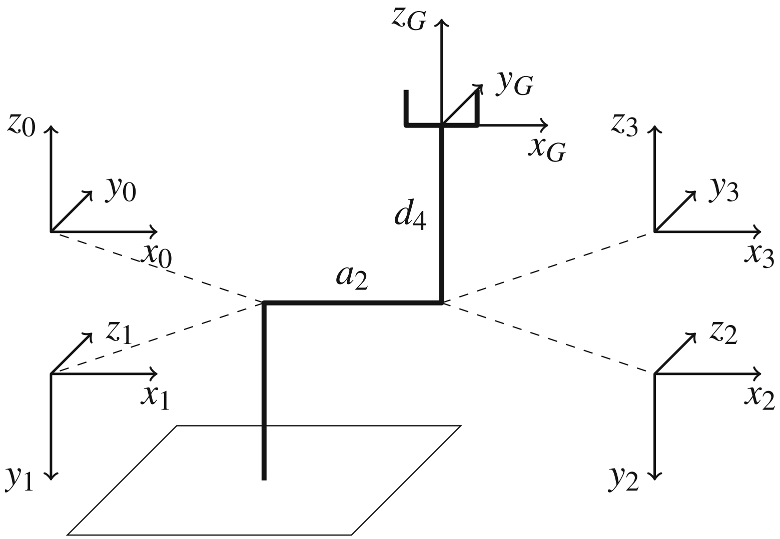
4 parametri

i	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	α_1	a_1	d_1	θ_1
2	α_2	a_2	d_2	θ_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabella DH del manipolatore

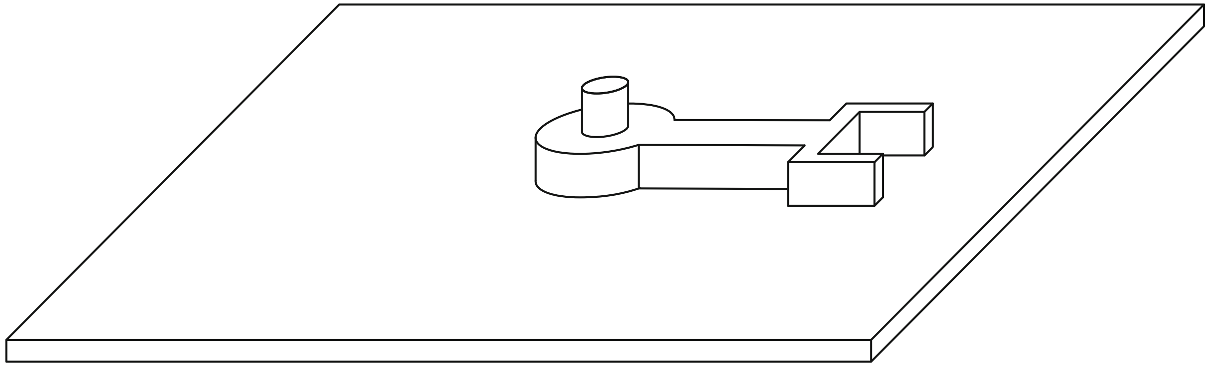
Esempio

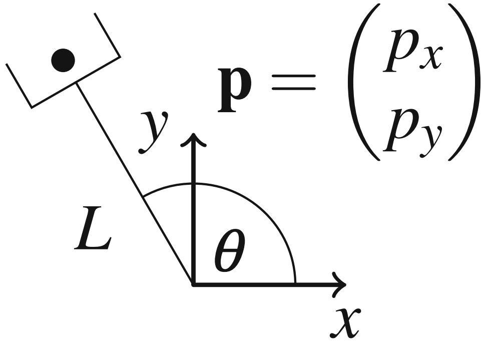




i	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	-90	0	0	θ_1
2	0	a_2	0	θ_2
3	90	0	0	θ_3
G	0	0	d_4	0

Angoli ai giunti (cinematica inversa)





Il target è $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$; dobbiamo trovare θ

Supponiamo $L = 1$; $\cos\theta = p_x$; $\sin\theta = p_y$

Da cui: $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{p_y}{p_x}$ E quindi: $\theta = \tan^{-1}\frac{p_y}{p_x}$

Estensione dell'arco-tangente: $\theta = \text{atan2}(p_y, p_x)$

Estensione della funzione arco-tangente

$$\operatorname{atan2}(y, x) = \begin{cases} 0 & x = 0, y = 0 \\ \pi/_2 & x = 0, y > 0 \\ 3 \cdot \pi/_2 & x = 0, y < 0 \\ \tan^{-1}(y/_x) & x > 0, y \geq 0 \\ 2\pi + \tan^{-1}(y/_x) & x > 0, y < 0 \\ \pi + \tan^{-1}(y/_x) & x < 0, y \geq 0 \\ \pi + \tan^{-1}(y/_x) & x < 0, y < 0 \end{cases}$$

Quaternioni

- Notazione alternativa alle matrici per indicare posizione e orientamento

- Molto usata nelle operazioni di tracciamento dell’effettore

- Durante il tracking la prescrizione della traiettoria dell’effettore tramite sequenze di trasformazioni di matrici può portare a delle singolarità posizionali inducendo movimenti «a scatto»

- I quaternioni si prestano ad una interpolazione continua della traiettoria dell’effettore

Quaternioni

Un quaternione si definisce come «numero iper-complesso» con una parte immaginaria vettoriale: $\boldsymbol{a} = a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k = (a_1, \boldsymbol{v}_a)$

Le parti immaginarie i, j, k (versori dello spazio della parte vettoriale) sono definite nel seguente modo:

$ii = -1$	$jj = -1$	$kk = -1$
$ij = k$	$jk = i$	$ki = j$
$ji = -k$	$kj = -i$	$ik = -j$

Quaternione come vettore a 4 dimensioni $\boldsymbol{a} = (a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4)^T$

Somma di quaternioni: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, \boldsymbol{v}_a + \boldsymbol{v}_b)^T = (a_1 + b_1 \quad a_2 + b_2 \quad a_3 + b_3 \quad a_4 + b_4)^T$

Quaternioni

Prodotto di quaternioni: $\boldsymbol{ab} = (a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k)(b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_4 - a_4 b_3 \\ a_1 b_3 - a_2 b_4 + a_3 b_1 + a_4 b_2 \\ a_1 b_4 + a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_4 b_1 \end{pmatrix}$

Attenzione: $\boldsymbol{ab} \neq \boldsymbol{ba}$

Norma di un quaternione: $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3 + a_4^4}$

Inverso di un quaternione: $\boldsymbol{a}^{-1} = \dfrac{(a_1 \quad -a_2 \quad -a_3 \quad -a_4)^T}{\|\boldsymbol{a}\|}$ $\qquad \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{-1} \triangleq \boldsymbol{e} = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$

Rotazioni con i quaternioni

Un quaternione, di opportuni coefficienti esprime la generica rotazione $R(\theta, \boldsymbol{n})$ di un angolo θ attorno ad un asse definito dal versore unitario $\boldsymbol{n}$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_P + \mathbf{r}_\perp, \quad \mathbf{r}_P = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}, \quad \mathbf{r}_\perp = \mathbf{r} - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}$$

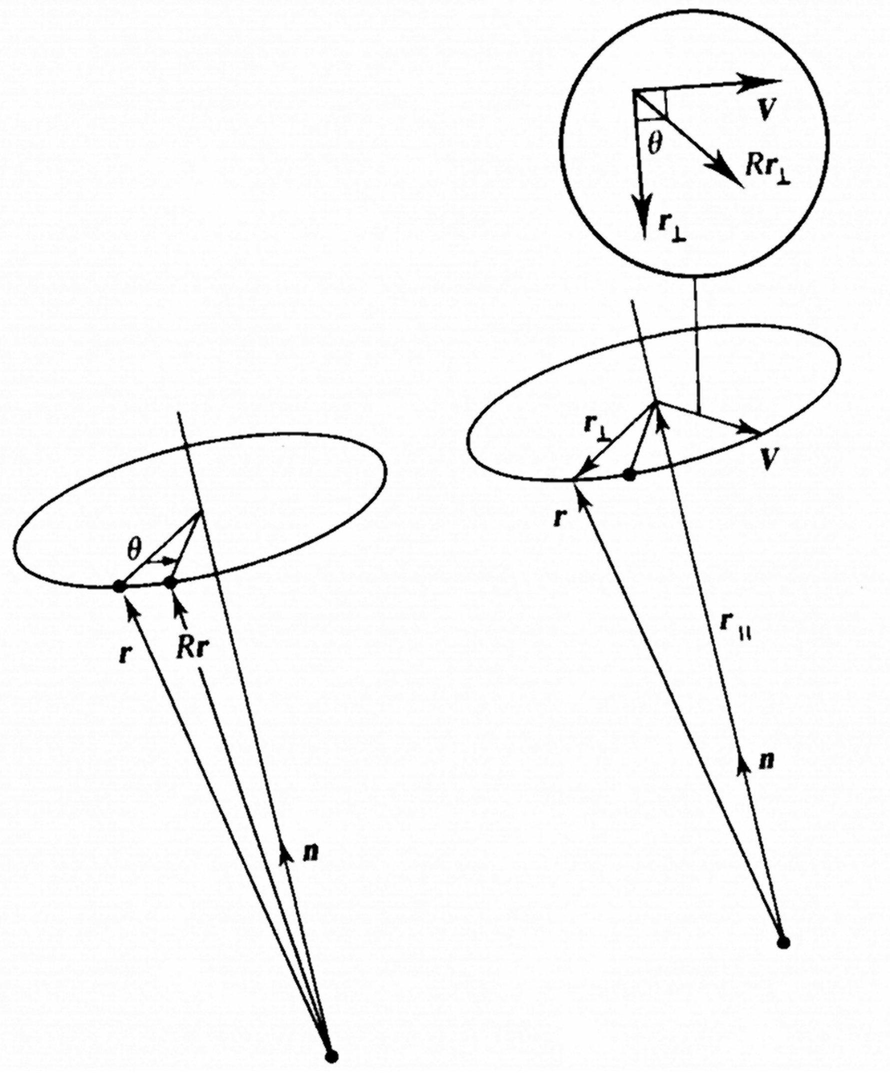
$$\mathbf{V} = \mathbf{n}\times\mathbf{r}_\perp = \mathbf{n}\times\mathbf{r}$$

$$R\mathbf{r}_\perp = \cos\theta\,\mathbf{r}_\perp + \sin\theta\,\mathbf{V}$$

$$R\mathbf{r} = R\mathbf{r}_P + R\mathbf{r}_\perp = R\mathbf{r}_P + \cos\theta\,\mathbf{r}_\perp + \sin\theta\,\mathbf{V} =$$

$$= (\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n} + \cos\theta\left(\mathbf{r} - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}\right) + \sin\theta\,\mathbf{n}\times\mathbf{r} =$$

$$= \boxed{\cos\theta\,\mathbf{r} + (1-\cos\theta)\,\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}) + \sin\theta\,\mathbf{n}\times\mathbf{r}}$$



Questa è la rotazione di un vettore $\boldsymbol{p}$ *tramite un* *quaternione unitario*
$\boldsymbol{a} = (\cos\theta/2\,, n_x \sin\theta/2\,, n_y \sin\theta/2\,, n_z \sin\theta/2)^T$ *secondo la trasformazione* $\boldsymbol{apa}^{-1}$

Rotazioni con i quaternioni

$$\boldsymbol{apa}^{-1} = \left(cos\,\theta/2\,, n_x\,sin\,\theta/2\,, n_y\,sin\,\theta/2\,, n_z\,sin\,\theta/2\right)\left(0, p_x, p_y, p_z\right)\left(cos\,\theta/2\,, -n_x\,sin\,\theta/2\,, -n_y\,sin\,\theta/2\,, -n_z\,sin\,\theta/2\right)$$

$$= \left(cos\,\theta/2\,, n_x\,sin\,\theta/2\,, n_y\,sin\,\theta/2\,, n_z\,sin\,\theta/2\right)\begin{pmatrix} \sin\theta/2\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p} \\ cos\,\theta/2\,p_x + sin\,\theta/2(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p})_x \\ cos\,\theta/2\,p_y + sin\,\theta/2(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p})_y \\ cos\,\theta/2\,p_z + sin\,\theta/2(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p})_z \end{pmatrix}$$

$$= \left(0, \cos\theta\,\boldsymbol{p} + \sin\theta\,(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p}) + (1-\cos\theta)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{n}\right)$$

Ricordando che: $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} n_y p_z - n_z p_y \\ n_z p_x - n_x p_z \\ n_x p_y - n_y p_x \end{pmatrix}$ $\quad \cos\theta = \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$ $\quad \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$