



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PALERMO



Operazioni di Elaborazione delle Immagini Digitali

Corso di «Strumentazione Diagnostica per Immagini»

a.a. 2022 – 2023

Prof. Roberto Pirrone

LABORATORIO DI INTERAZIONE UOMO-MACCHINA
CHILAB

Sommario

- Criteri di valutazione della qualità di un'immagine
- Iistogramma di un'immagine digitale
- Operazioni puntuali ed elaborazione dell'istogramma
- Operazioni multi-immagine
- Operazioni geometriche
- Filtri

Criteri di valutazione della qualità di un'immagine

- Rumore
 - Un'immagine digitale I , acquisita tramite un qualunque dispositivo di ripresa con funzione di trasferimento H , subisce delle alterazioni del segnale legate al processo stesso di acquisizione piuttosto che a problemi/guasti nel processo di digitalizzazione e storage.
 - Il *rumore* o *disturbo* rappresenta un segnale stocastico che si somma all'immagine acquisita in forma ideale e rappresenta l'insieme di tutte le alterazioni

$$I(i, j) = h * f(i, j) + \eta(i, j)$$

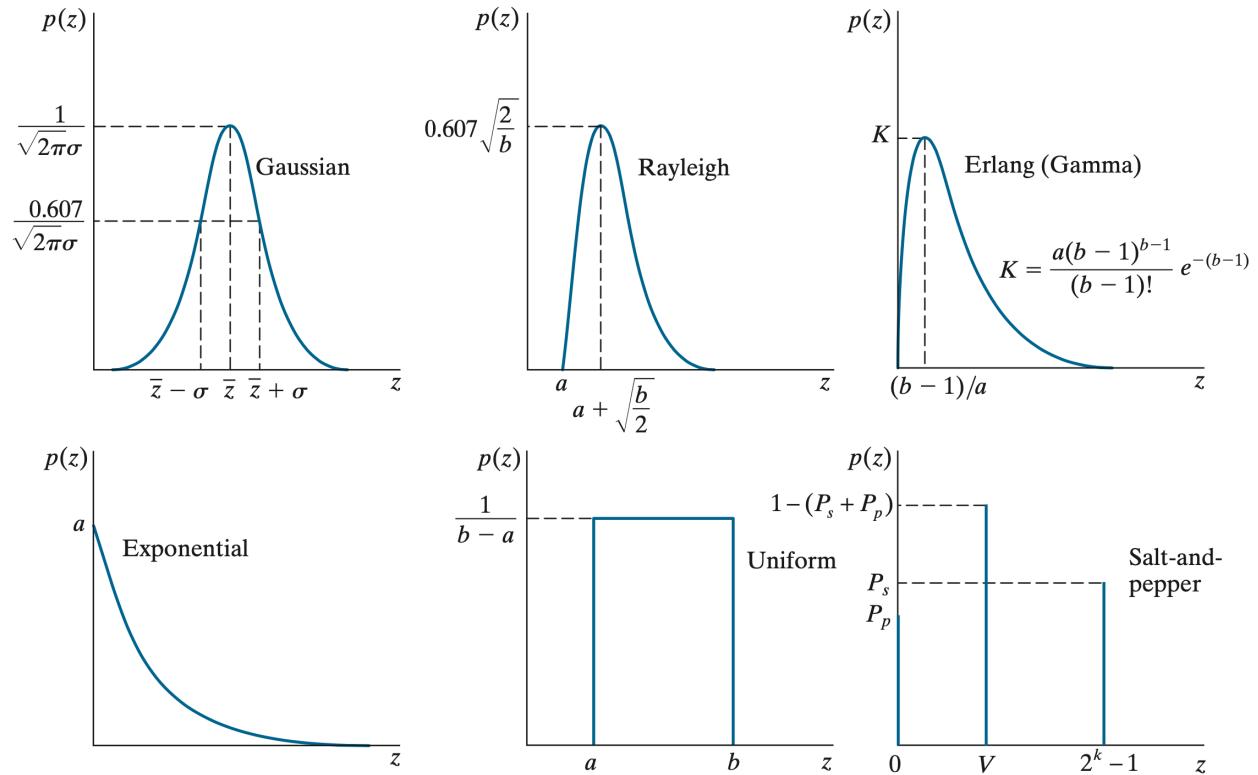
$$\mathcal{I} = H \cdot F + N$$

Criteri di valutazione della qualità di un'immagine

- L'escursione dei livelli di intensità in un'immagine digitale è detta *gamma dinamica* o semplicemente *dinamica*
 - Ovviamente la dinamica dipende direttamente dal numero k di bit usati per la quantizzazione
- Il contrasto di un'immagine è definito come la differenza tra il massimo livello riproducibile e il minimo livello di segnale rilevabile non confuso con il rumore
- Il *Contrast-to-Noise Ratio* (CNR) è il rapporto tra queste due quantità ed è in genere la misura preferita per indicare globalmente la qualità di un'immagine digitale.
 - E' l'equivalente del *SNR* (Signal-to-Noise Ratio) per i segnali tempovarianti

Criteri di valutazione della qualità di un'immagine

- Il rumore è una grandezza dipendente dalla frequenza e, in quanto segnale stocastico, può essere descritto da una distribuzione di probabilità
- *Rumore bianco:* $N(k_x, k_y) = \text{costante}$

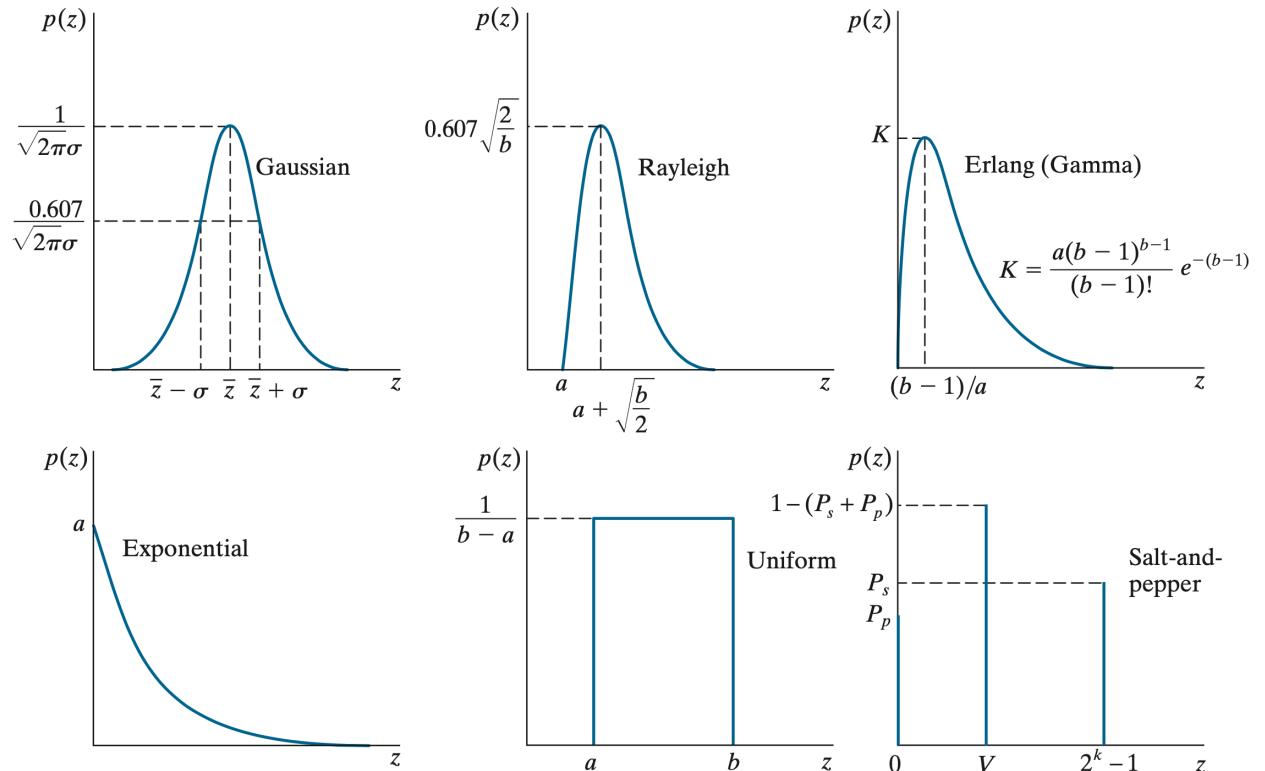


Fonte: Gonzalez, Woods «Digital Image Processing», 4th ed.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PALERMO
dipartimento di ingegneria
unipa
LABORATORIO DI INTERAZIONE UOMO-MACCHINA
CHILAB

Criteri di valutazione della qualità di un'immagine

- Il *rumore sale e pepe* è un caso particolare: esso ha probabilità P_s di assumere il livello massimo della dinamica $2^k - 1$, ovvero probabilità P_p di valere 0.
- Qualunque altro valore V in $[0, 2^k - 1]$ ha probabilità $p = 1 - (P_s + P_p)$



Fonte: Gonzalez, Woods «Digital Image Processing», 4th ed.

LABORATORIO DI INTERAZIONE UOMO-MACCHINA
CHILAB

Criteri di valutazione della qualità di un'immagine

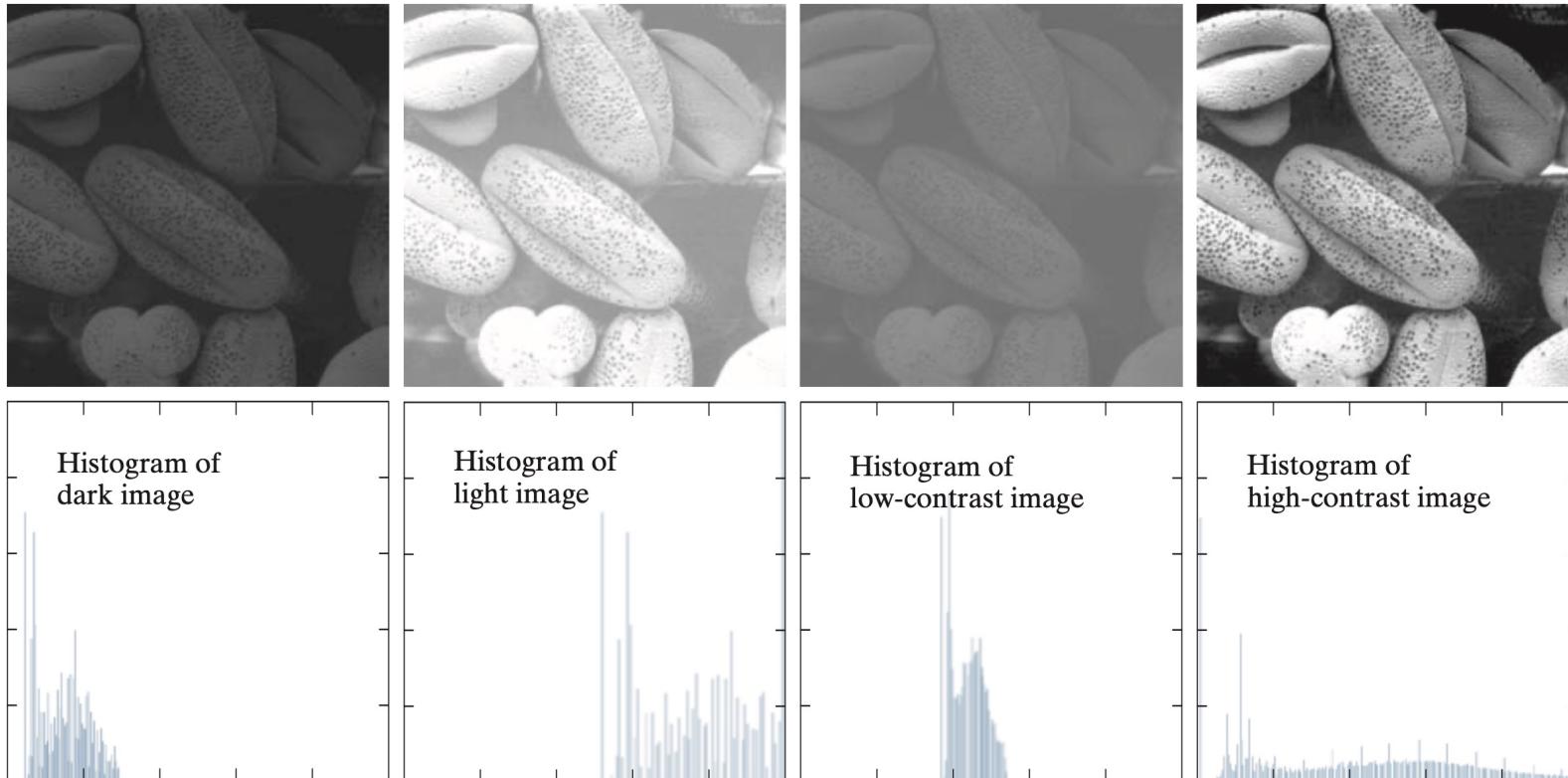
- Nella pratica una percentuale di pixel pari a $P_s + P_p$ è affetta da rumore che si ripartirà in due aliquote di pixel bianchi (sale) o neri (pepe)
- Di solito i due valori sono uguali e quindi metà dei pixel alterati sarà bianca e metà nera.

Istogramma di un'immagine digitale

- L'istogramma di un'immagine digitale di dimensioni $N \times M$ è la distribuzione di probabilità dei livelli di intensità presenti al suo interno calcolata con approccio frequentista
- Detto n_k il numero di pixel che hanno il livello r_k , tale probabilità è espressa semplicemente come:

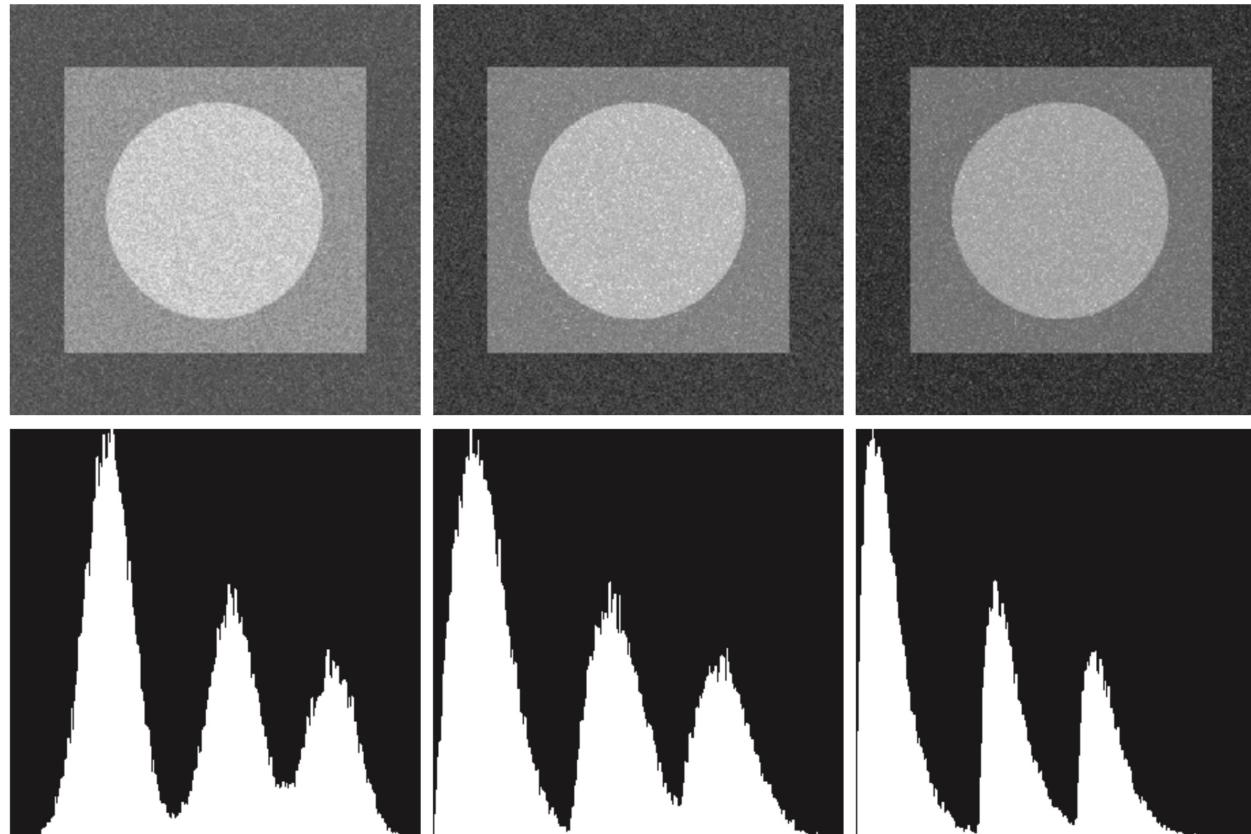
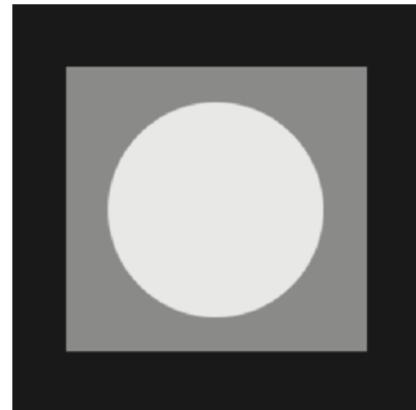
$$p(r_k) = n_k / NM$$

Istogramma di un'immagine digitale



Fonte: Gonzalez, Woods «Digital Image Processing», 4th ed.

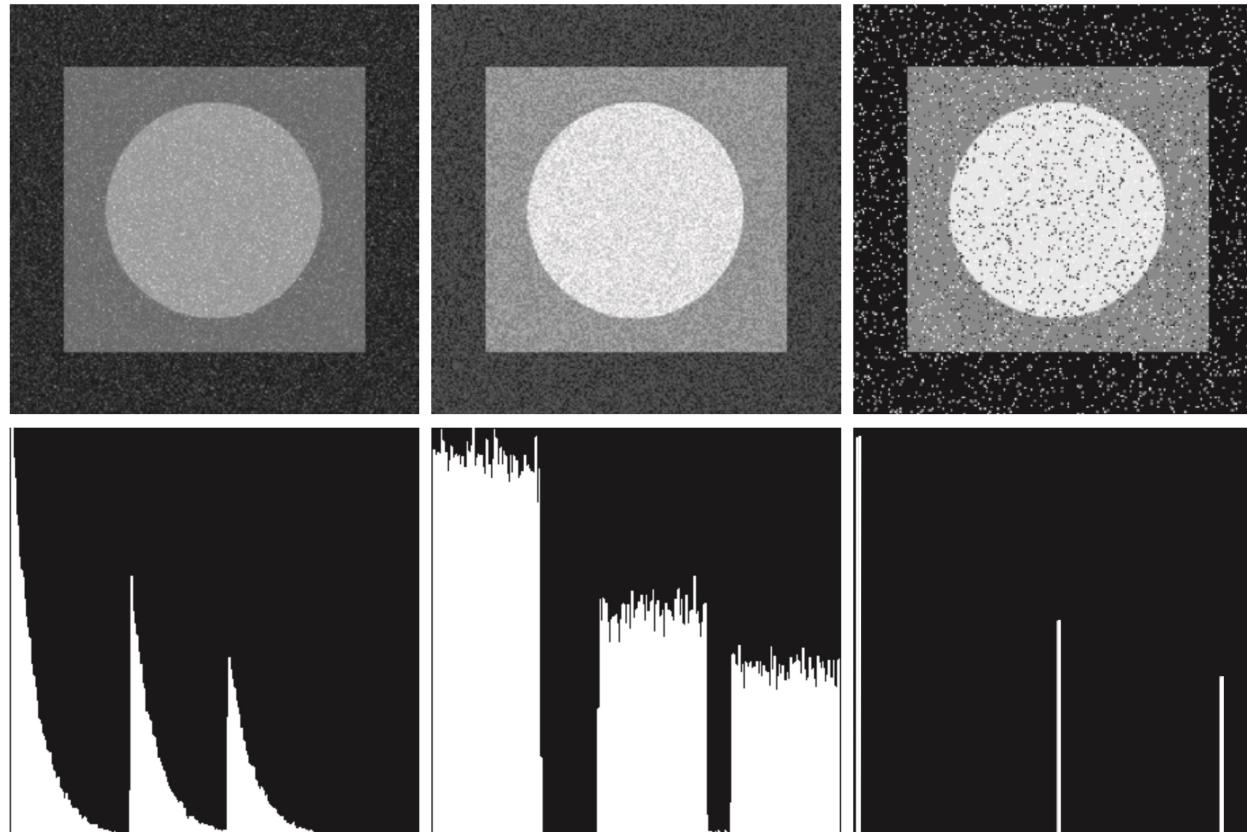
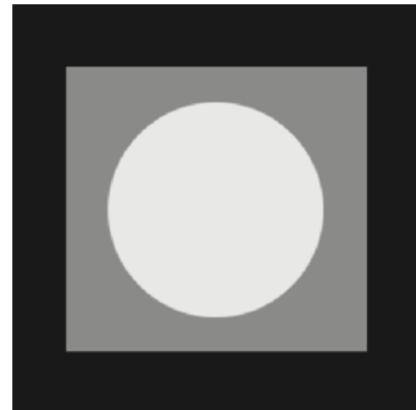
Istogramma di un'immagine digitale



Rumore:

- Gaussiano
- Rayleigh
- Gamma

Istogramma di un'immagine digitale



Fonte: Gonzalez, Woods «Digital Image Processing», 4th ed.

- Rumore:
- Esponenziale
 - Uniforme
 - Sale e pepe

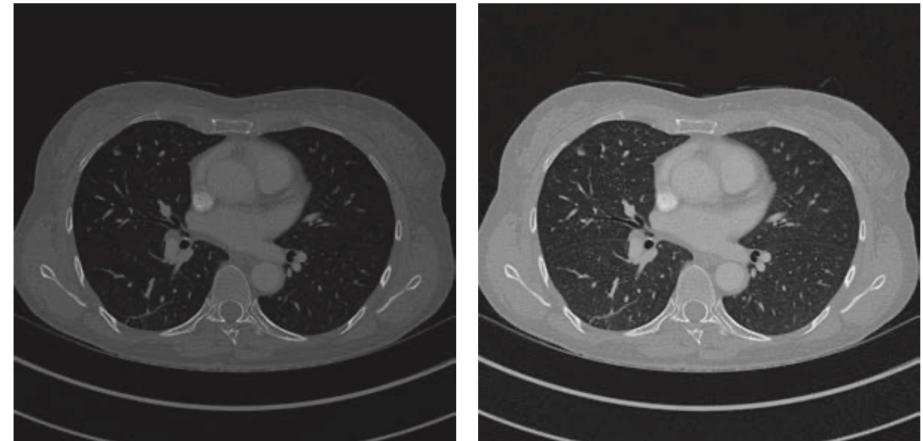
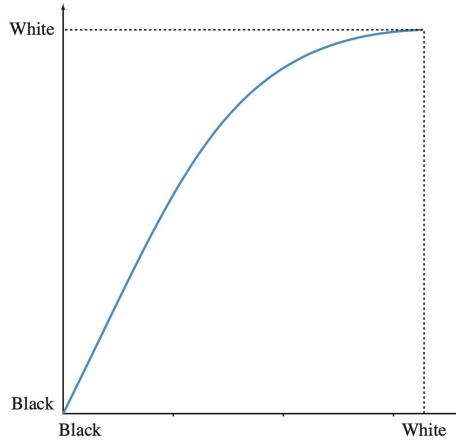
Operazioni puntuale ed elaborazione dell'istogramma

- L'ispezione diretta dell'istogramma ci fornisce spesso indicazioni per applicare delle trasformazioni ai livelli di grigio in modo da ottenere un'immagine di contrasto più elevato
- Questo tipo di trasformazioni sono dette *operazioni puntuali*

Operazioni puntuali ed elaborazione dell'istogramma

- Una trasformazione puntuale è espressa semplicemente da una legge che mappa il valore di ogni pixel in un altro sulla base di una legge di corrispondenza T tra le gamme dinamiche di ingresso e di uscita

$$I'(i, j) = T[I(i, j)]$$
$$s = T(r), s, r \in [0, L-1]$$



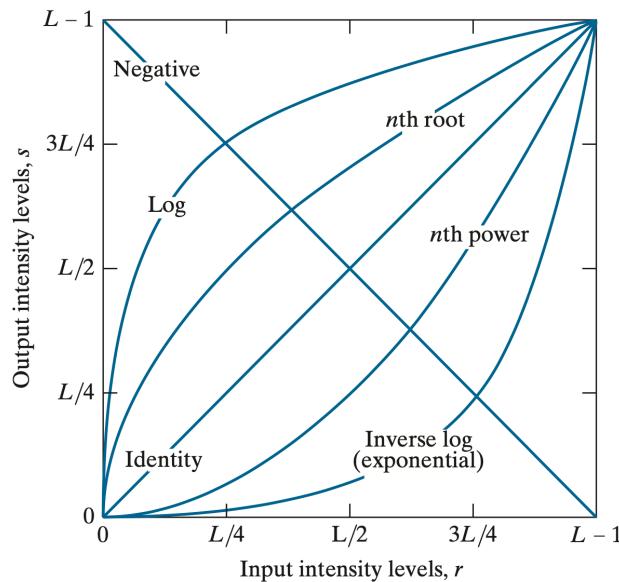
Fonte: Suetens «Fundamentals of Medical Imaging», 3rd ed.

Operazioni puntuali ed elaborazione dell'istogramma

- Una trasformazione puntuale è espressa semplicemente da una legge che mappa il valore di ogni pixel in un altro sulla base di una legge di corrispondenza T tra le gamme dinamiche di ingresso e di uscita

$$I'(i, j) = T[I(i, j)]$$

$$s = T(r), s, r \in [0, L-1]$$

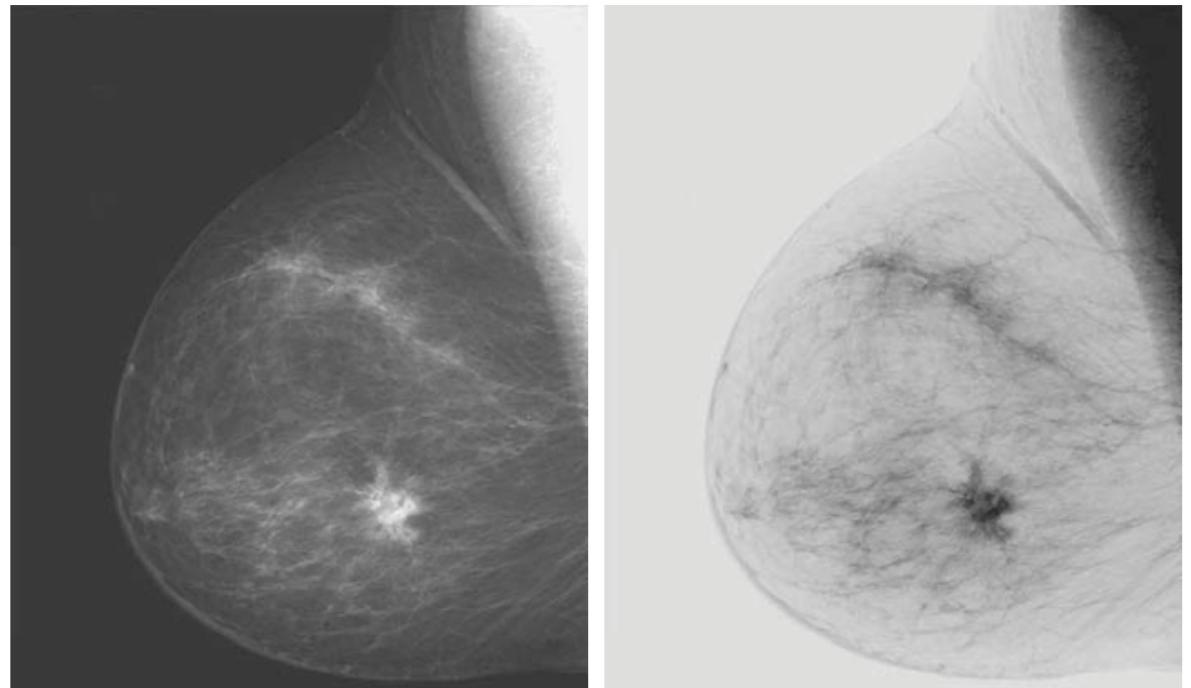


Fonte: Gonzalez, Woods «Digital Image Processing», 4th ed.

Operazioni puntuali ed elaborazione dell'istogramma

- Negativo

$$s = L - 1 - r, s, r \in [0, L-1]$$

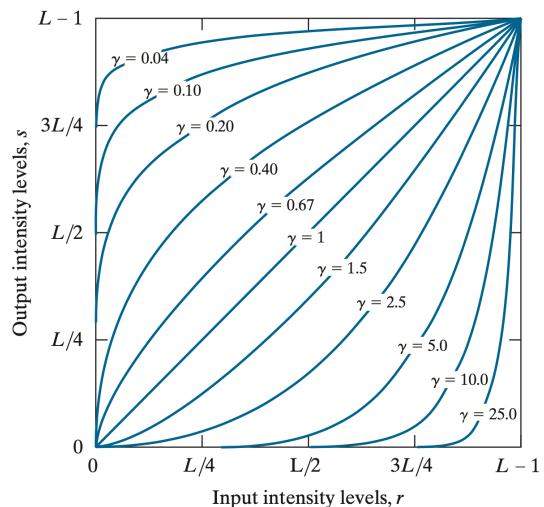


Fonte: Gonzalez, Woods «Digital Image Processing», 4th ed.

Operazioni puntuali ed elaborazione dell'istogramma

- Correzione gamma

$$s = c \cdot r^\gamma, s, r \in [0, L-1], c = 1 \text{ (di norma)}$$



$\gamma = 0.4$



$\gamma = 0.6$



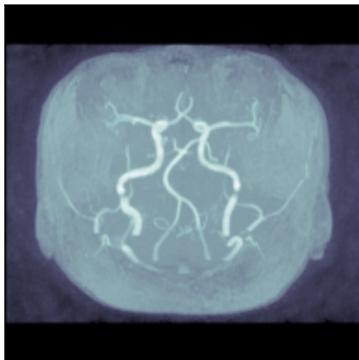
$\gamma = 0.3$

Fonte: Gonzalez, Woods «Digital Image Processing», 4th ed.

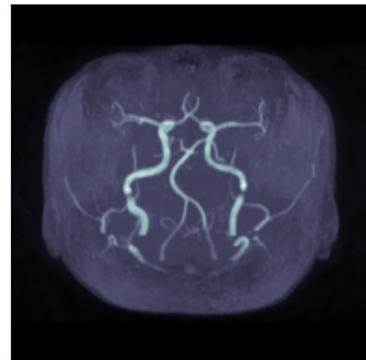
Operazioni puntuali ed elaborazione dell'istogramma

- Correzione gamma

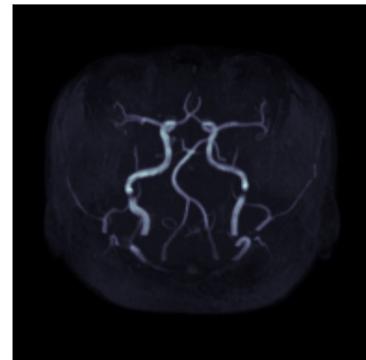
$$s = c \cdot r^\gamma, s, r \in [0, L-1], c = 1 \text{ (di norma)}$$



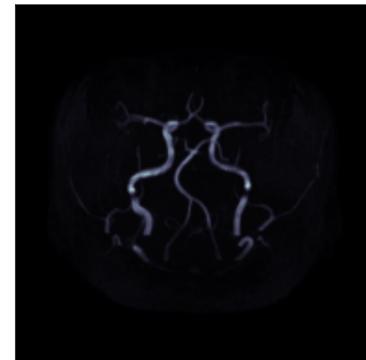
gamma = 0.2



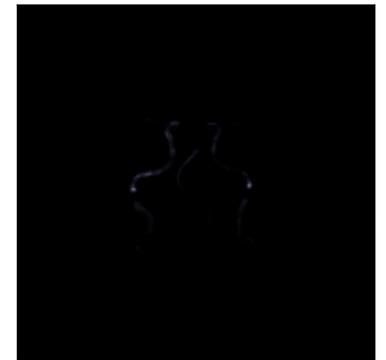
gamma = 0.5



gamma = 1.0



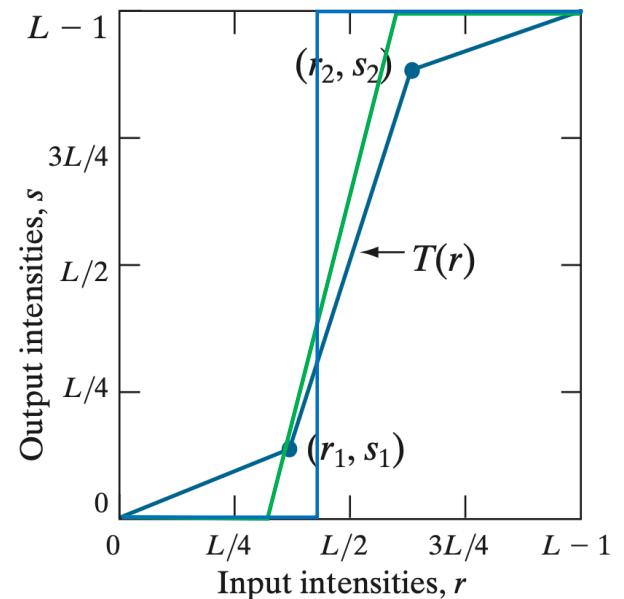
gamma = 1.5



gamma = 5.0

Operazioni puntuali ed elaborazione dell'istogramma

- Contrast stretching
 - Trasformazione lineare a tratti mirata a espandere la dinamica nella regione tra i punti (r_1, s_1) ed (r_2, s_2)
 - Non è necessario che gli estremi siano in $(0, 0)$ e $(L-1, L-1)$
 - $s_1 = 0, s_2 = L-1 \rightarrow$ selezione di una «finestra» nella dinamica di ingresso
 - $s_1 = 0, s_2 = L-1, r_1 = r_2 \rightarrow$ sogliatura

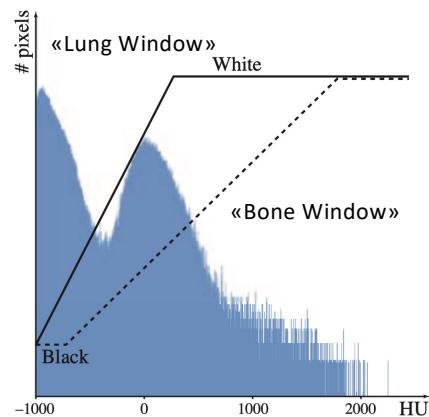


Fonte: Gonzalez, Woods «Digital Image Processing», 4th ed.

Operazioni puntuali ed elaborazione dell'istogramma

- Contrast stretching

- Nella visualizzazione di immagini mediche a 12 bpp (*bit per pixel*) la «finestratura» è molto usata per selezionare le regioni della dinamica che corrispondono a particolari regioni anatomiche.



(a)



(b)
«Bone Window»

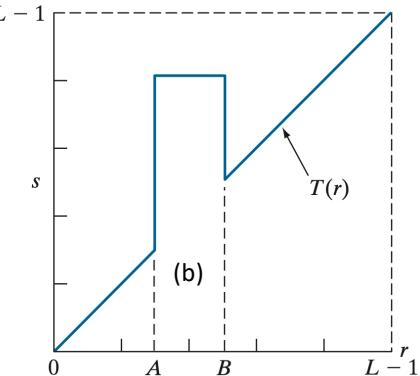
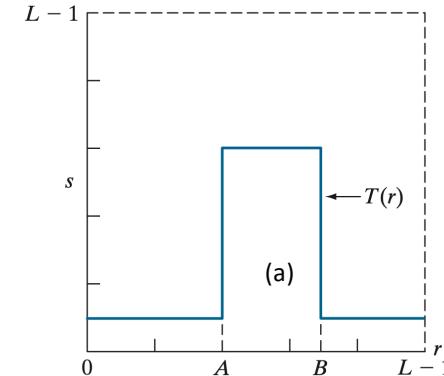
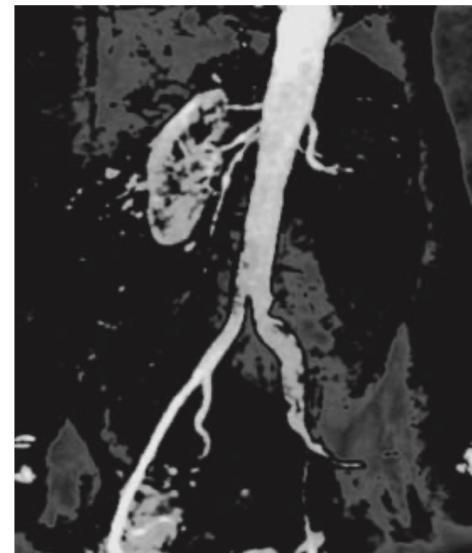
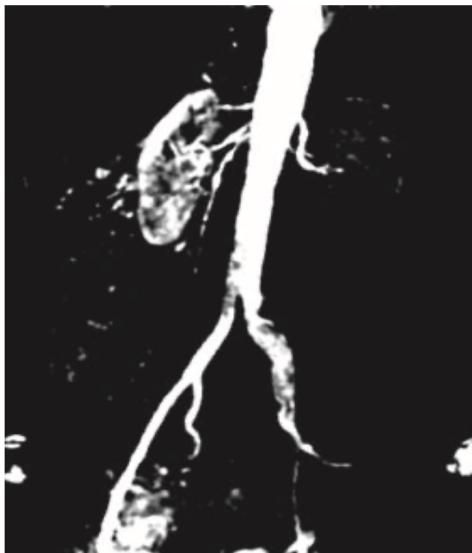
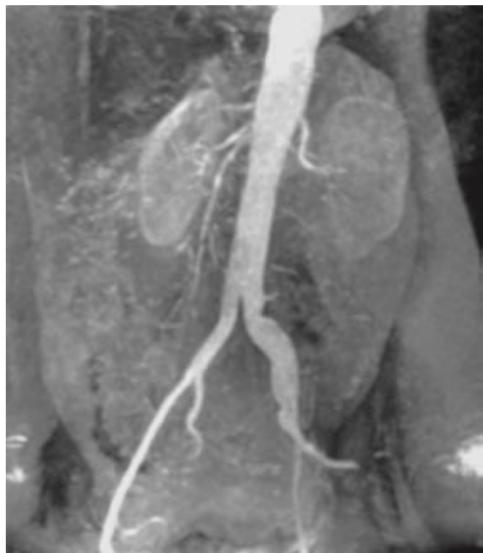


(c)
«Lung Window»

Fonte: Suetens «Fundamentals of Medical Imaging», 3rd ed.

Operazioni puntuali ed elaborazione dell'istogramma

- Slicing dei livelli di grigio



Equalizzazione dell'istogramma

- L'equalizzazione dell'istogramma tende determinare una trasformazione T tale che l'istogramma dell'immagine trasformata $I'(i,j)$ sia costante su tutta la dinamica e pari a $1/(L-1)$
- L'area sottesa dall'istogramma deve essere unitaria poiché lo abbiamo definito come una *funzione densità di probabilità* (PDF – Probability Distribution Function) $p_r(r_k)$ e quindi tale area costituisce la *funzione di distribuzione cumulativa di probabilità* (CDF – Cumulative Distribution Function)

Equalizzazione dell'istogramma

- Assumiamo una trasformazione

$s=T(r)$ *monotona crescente* di modo che si possa definire una inversa $r=T^{-1}(s)$ che è una corrispondenza biunivoca

$$\begin{aligned} P_s(s_k) &\triangleq P(s \leq s_k) = P(T(r) \leq s_k) = \\ &= P(r \leq T^{-1}(s_k)) = P_r(r_k) \end{aligned}$$

$$p_s(s_k) \triangleq \frac{dP_r(r_k)}{ds} = p_r(r_k) \left| \frac{dr}{ds} \right|$$

- Vogliamo trovare il nuovo istogramma come una PDF $p_s(s_k)$

Equalizzazione dell'istogramma

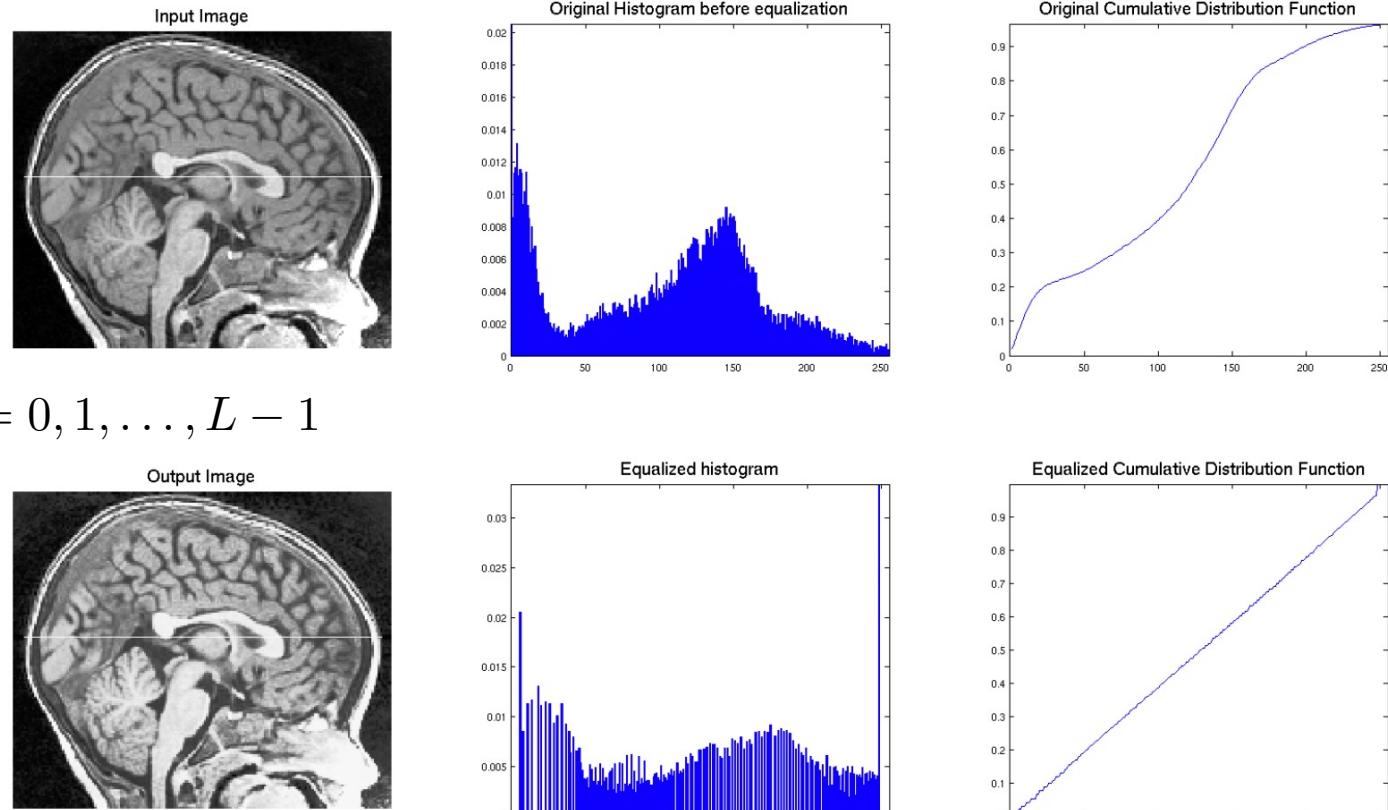
- La trasformazione di equalizzazione dell'istogramma si ottiene come riportato
- L'istogramma risultante è quello richiesto

$$s = T(r) = (L - 1) \int_0^r p_r(w) dw$$

$$\begin{aligned} p_s(s_k) &= p_r(r_k) \left| \frac{dr}{ds} \right| = p_r(r_k) \cdot 1 \left| \frac{dT(r)}{dr} \right|_{r_k} = \\ &= p_r(r_k) \cdot 1 \left| (L - 1) \frac{d}{dr} \left[\int_0^{r_k} p_r(w) dw \right] \right| = \\ &= p_r(r_k) \frac{1}{(L - 1)p_r(r_k)} \equiv \frac{1}{L - 1} \end{aligned}$$

Equalizzazione dell'istogramma

$$s_k = T(r_k) = (L - 1) \sum_{j=0}^k p_r(r_j), \quad k = 0, 1, \dots, L - 1$$



Fonte: http://www.sci.utah.edu/~acoste/uou/image/project1/Arthur_COSTE_Project_1_report.html#equalization

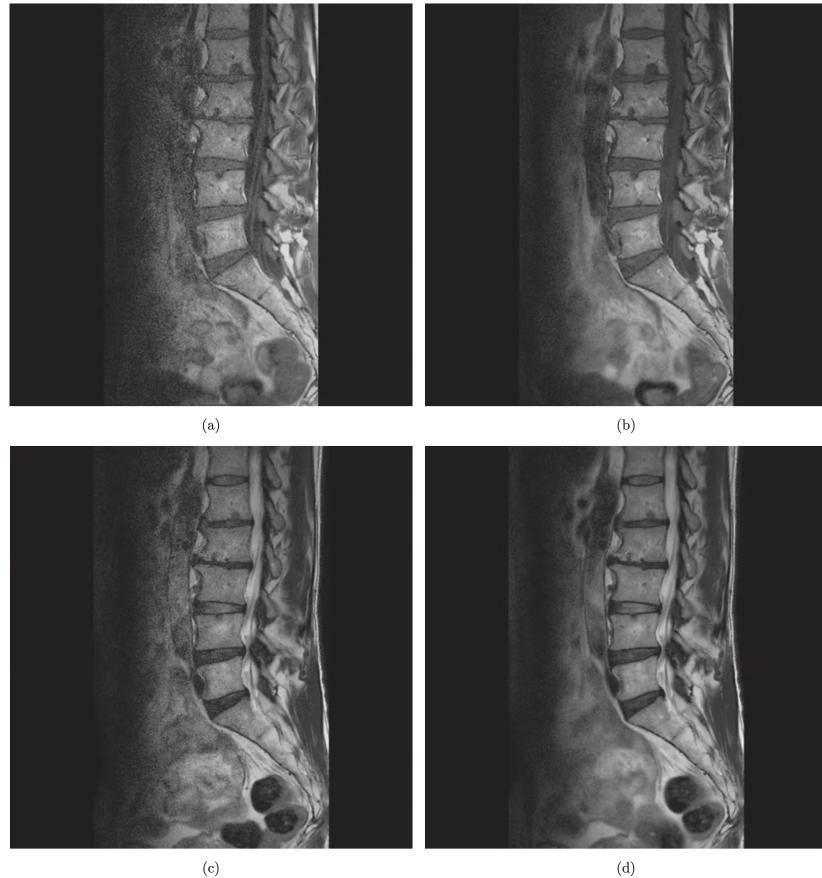
Operazioni multi-immagine

- Si tratta di operazioni applicate pixel a pixel su coppie di immagini
 - $I_+(i,j) = I_1(i,j) + I_2(i,j)$
 - $I_-(i,j) = I_1(i,j) - I_2(i,j)$
 - $I_{avg}(i,j) = 1/n [I_1(i,j) + I_2(i,j) + \dots + I_n(i,j)]$

Operazioni multi-immagine

- Si tratta di operazioni applicate pixel a pixel su coppie di immagini

- $I_+(i,j) = I_1(i,j) + I_2(i,j)$
- $I_-(i,j) = I_1(i,j) - I_2(i,j)$
- $I_{avg}(i,j) = 1/n [I_1(i,j) + I_2(i,j) + \dots + I_n(i,j)]$

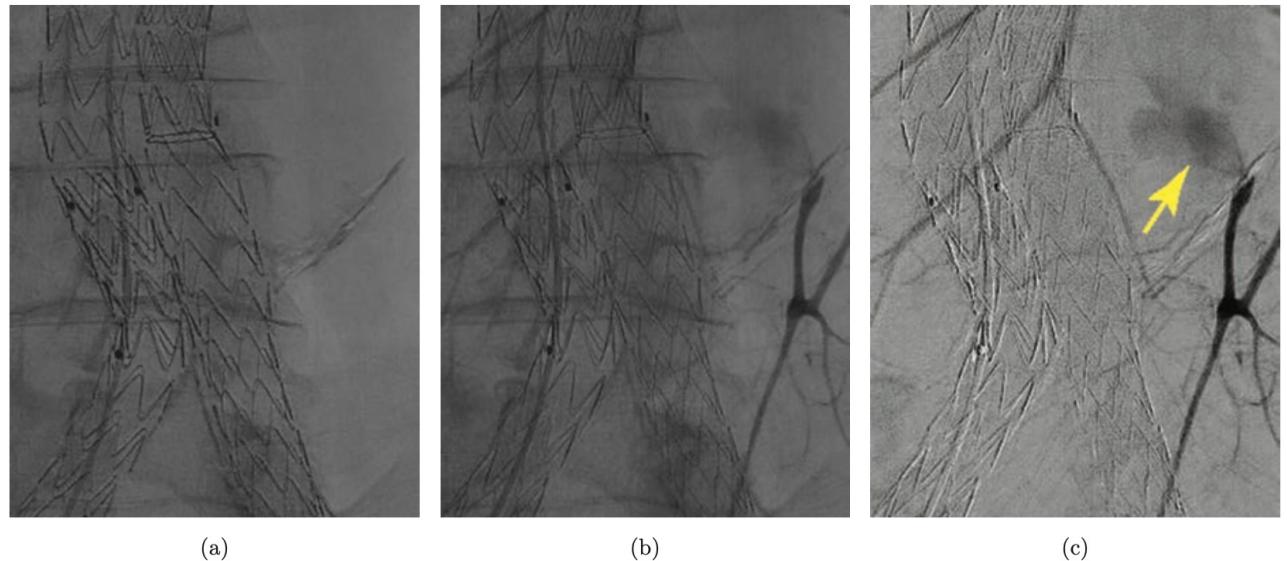


(b) (d): media di 5 sequenze pesate in T_1 (a) e T_2 (c), entrambe TurboSE

Operazioni multi-immagine

- Si tratta di operazioni applicate pixel a pixel su coppie di immagini

- $I_+(i,j) = I_1(i,j) + I_2(i,j)$
- $I_-(i,j) = I_1(i,j) - I_2(i,j)$
- $I_{avg}(i,j) = 1/n [I_1(i,j) + I_2(i,j) + \dots + I_n(i,j)]$



(b): contrast stretching di (a)
(c): contrast stretching di (b) – (a)

Fonte: Suetens «Fundamentals of Medical Imaging», 3rd ed.

Operazioni geometriche

- Le operazioni geometriche fanno riferimento alle cosiddette trasformazioni *affini* ovvero a quelle *proiettive*
- Trasformazione affine $A(p) \rightarrow (p')$: trasforma un punto p nello spazio \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 in un punto p' nello stesso spazio, mantenendo le relazioni di parallelismo tra le rette
- Trasformazione proiettiva $P(p) \rightarrow (p')$: trasforma un punto $p \in \mathbb{R}^3$ in un punto $p' \in \mathbb{R}^2$ che è l'intersezione tra un *raggio proiettore* che passa per p e per un punto fisso detto *centro di proiezione* o *fuoco* F , con un *piano di proiezione* π .
 - In generale, non c'è un vincolo nella mutua posizione di F e π nello spazio

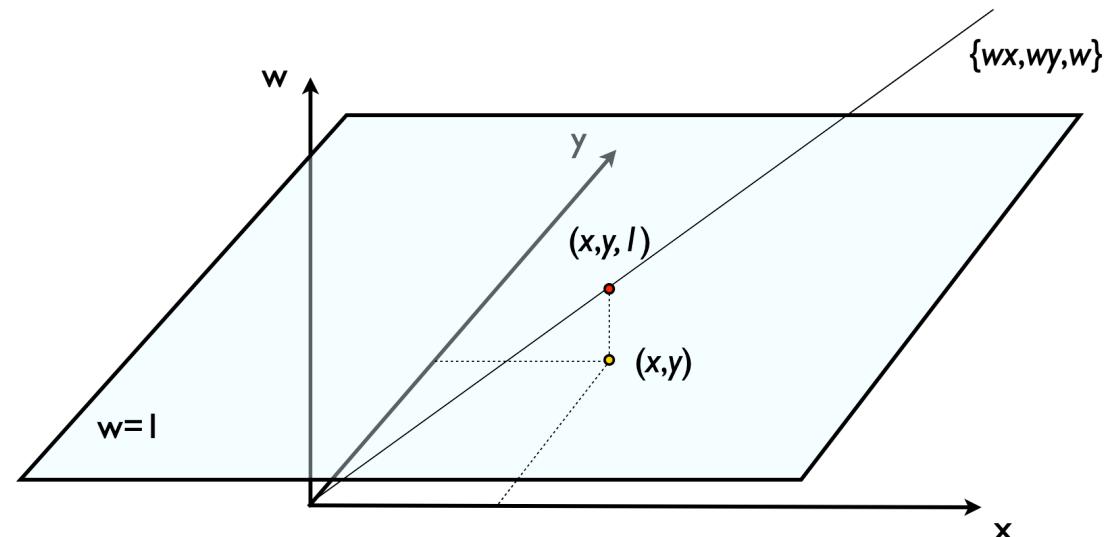
Operazioni geometriche

- Entrambe le tipologie di trasformazioni vengono calcolate attraverso *operazioni di moltiplicazione matrice-vettore* anche se non sono definite nativamente come tali
- Di conseguenza a ogni trasformazione corrisponde una matrice i cui elementi hanno una disposizione particolare.
- Da un punto di vista del calcolo questo risultato si ottiene tramite la rappresentazione dei punti in *coordinate omogenee*

Operazioni geometriche

- Coordinate omogenee

- Aggiungiamo una terza (quarta) coordinata w a \mathbb{R}^2 (\mathbb{R}^3)
- *Proiettiamo* dall'origine degli assi un raggio di equazione $\{wx, wy, w\}$
- Usiamo il piano $w = 1$ come piano di proiezione e otteniamo il punto di coordinate $(x, y, 1)$ che è il *punto omogeneo a (x, y)*



Operazioni geometriche

- Trasformazioni affini
 - Una trasformazione affine è definita come
 - Traslazione
 - Rotazione
 - Trasformazione di scala
 - Shearing
 - Riflessione
 - ...

$$\begin{cases} x^* = ax + by + l \\ y^* = cx + dy + m \end{cases}$$
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

$$\vec{p}^* = \mathbf{T} \cdot \vec{p} + \mathbf{L}$$

Operazioni geometriche

- Trasformazioni affini

- Passando alle coordinate omogenee si ottiene
- Una trasformazione affine 2D generica richiede la conoscenza di *sei parametri* e quindi la *corrispondenza nota tra tre punti*

$$\left\{ \begin{array}{l} x^* = ax + by + l \\ y^* = cx + dy + m \\ 1 = 1 \end{array} \right.$$
$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & l \\ c & d & m \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Componente di rotazione e scaling

Componente di traslazione

Operazioni geometriche

- Trasformazioni affini

- In \mathbb{R}^3 si ha

- Trasformazione generica:
12 parametri ovvero 4 punti

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & t_y \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Operazioni geometriche

- Trasformazioni affini
 - Traslazione

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} x^* = x + t_x \\ y^* = y + t_y \\ 1 = 1 \end{array} \right.$$

Operazioni geometriche

- Trasformazioni affini

- Rotazione positiva di θ in senso antiorario rispetto all'asse x

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} x^* = x \cos(\theta) - y \sin(\theta) \\ y^* = y \sin(\theta) + y \cos(\theta) \\ 1 = 1 \end{array} \right.$$

Operazioni geometriche

- Trasformazioni affini
 - Scalatura in x e y

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} x^* = s_x x \\ y^* = s_y y \\ 1 = 1 \end{array} \right.$$

Operazioni geometriche

- Trasformazioni affini
 - Shearing (scorrimento)

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} x^* = x + \alpha y \\ y^* = \beta x + y \\ 1 = 1 \end{array} \right.$$

Operazioni geometriche

- Trasformazioni affini

- Proprietà delle matrici di trasformazione:

- La trasformazione di segno opposto a M si ottiene come M^{-1}

- Le trasformazioni si compongono come prodotto di matrici e possono essere calcolate *a blocchi*

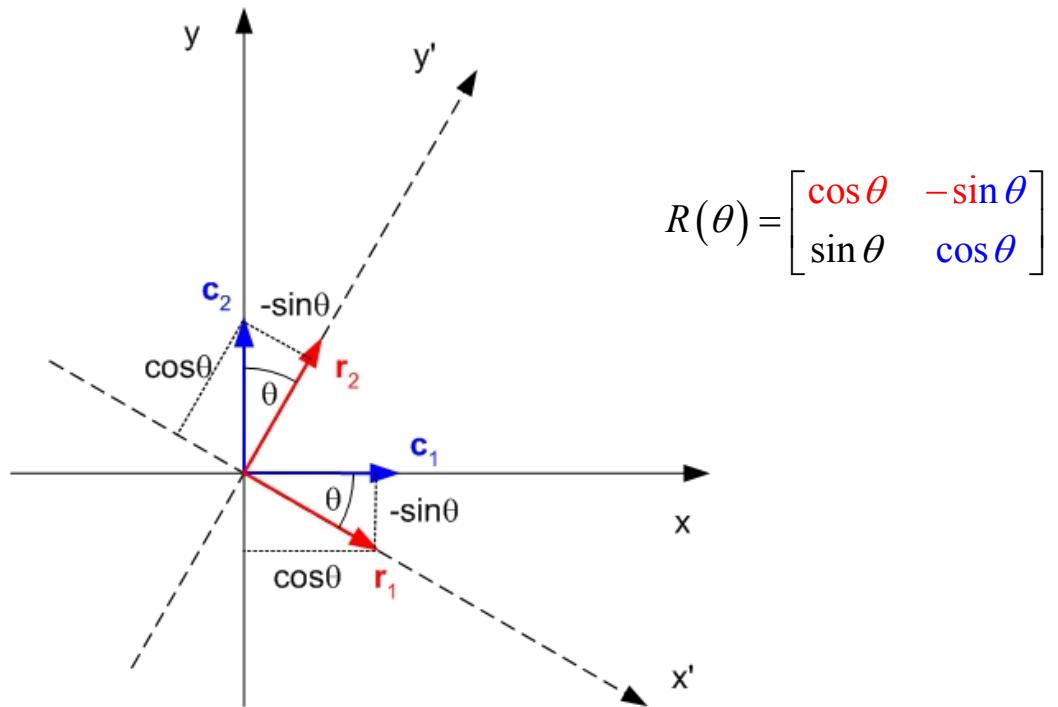
$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x \cos(\theta) & -s_y \sin(\theta) & t_x \\ s_x \sin(\theta) & s_y \cos(\theta) & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operazioni geometriche

- Trasformazioni affini

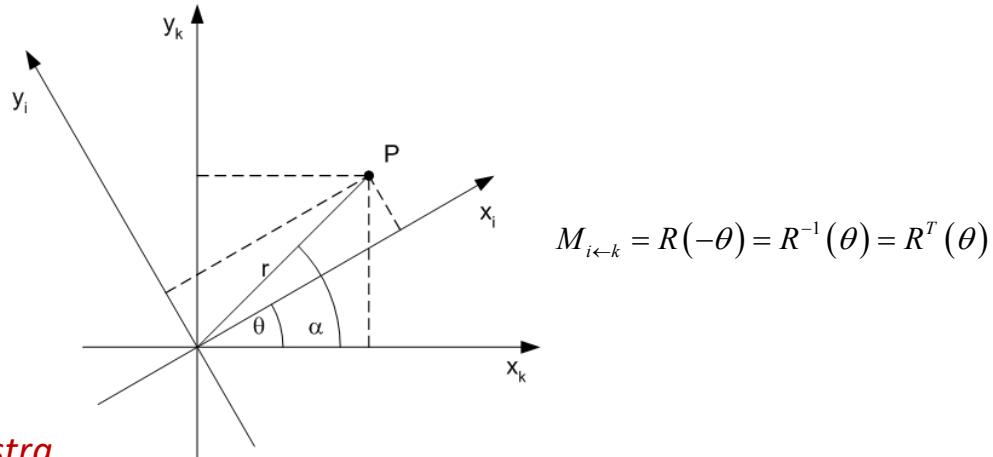
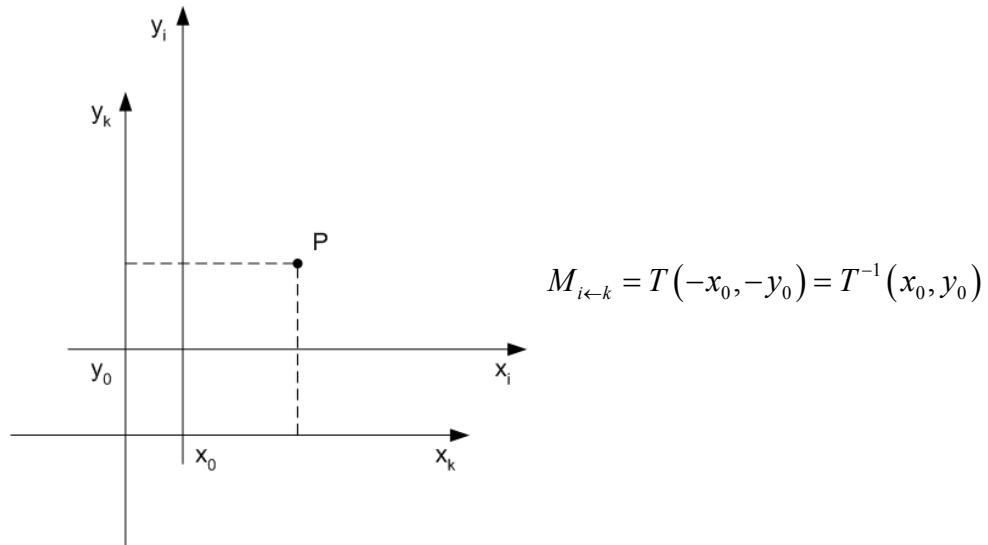
- Proprietà delle matrici di trasformazione:

- La *componente rotazionale* di una trasformazione affine è una matrice ortogonale speciale e la sua trasposta esprime la rotazione inversa: $R^{-1} = R^T$



Trasformazioni affini

- Trasformazioni affini
 - Proprietà delle matrici di trasformazione:
 - Data una trasformazione M , la sua inversa M^{-1} esprime
la trasformazione di cambio di coordinate con lo stesso segno di M



I cambi di coordinate si compongono per *moltiplicazione a destra*

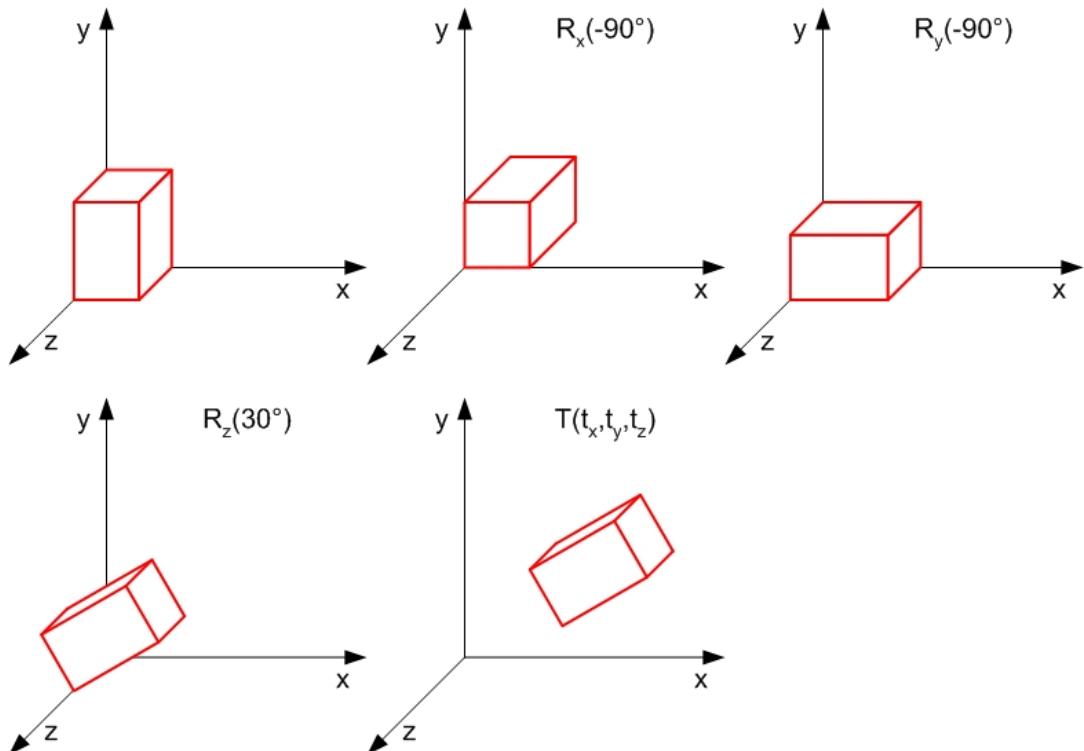
Trasformazioni affini

- Trasformazioni affini

- Proprietà delle matrici di trasformazione:

- Data una trasformazione M , la sua inversa M^{-1} esprime
la trasformazione di cambio di coordinate con lo stesso segno di M

$$M = T(t_x, t_y, t_z) \cdot R_z(30^\circ) \cdot R_y(-90^\circ) \cdot R_x(-90^\circ)$$

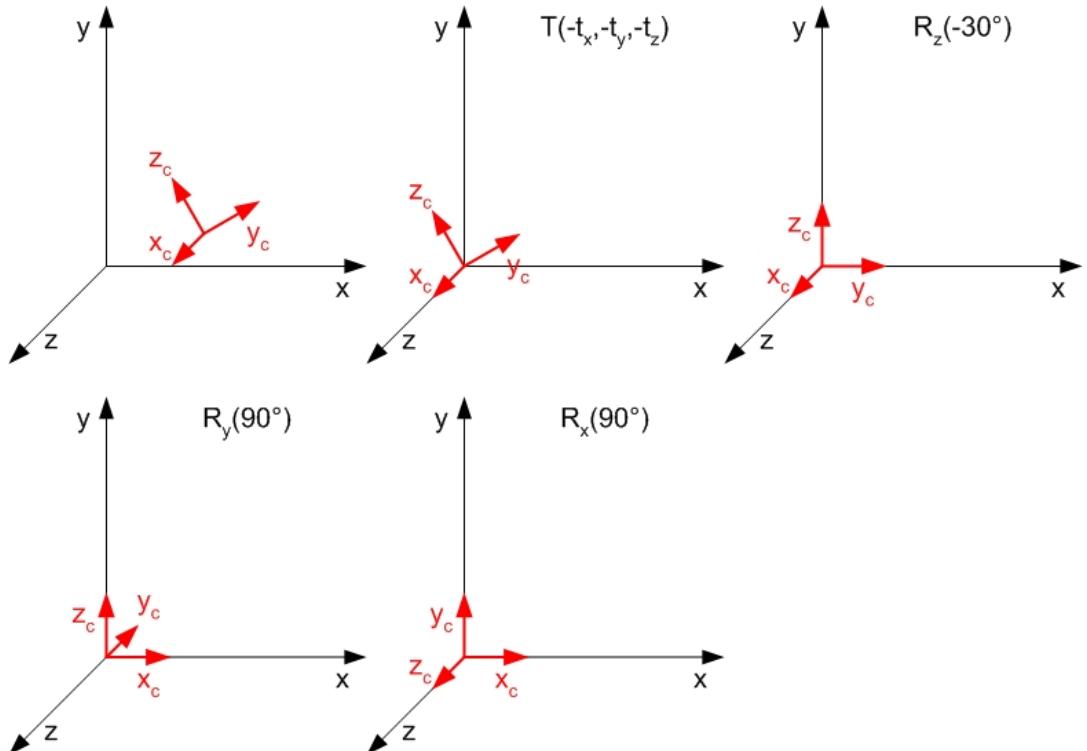


I cambi di coordinate si compongono per *moltiplicazione a destra*

Trasformazioni affini

- Trasformazioni affini
 - Proprietà delle matrici di trasformazione:
 - Data una trasformazione M , la sua inversa M^{-1} esprime
la trasformazione di cambio di coordinate con lo stesso segno di M

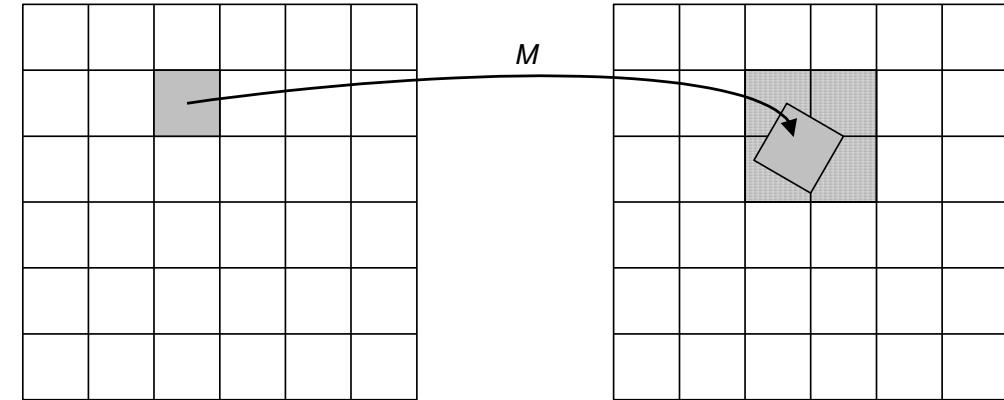
$$M_{x \leftarrow c} = R_x(90^\circ) \cdot R_y(90^\circ) \cdot R_z(-30^\circ) \cdot T(-t_x, -t_y, -t_z)$$



I cambi di coordinate si compongono per *moltiplicazione a destra*

Operazioni geometriche

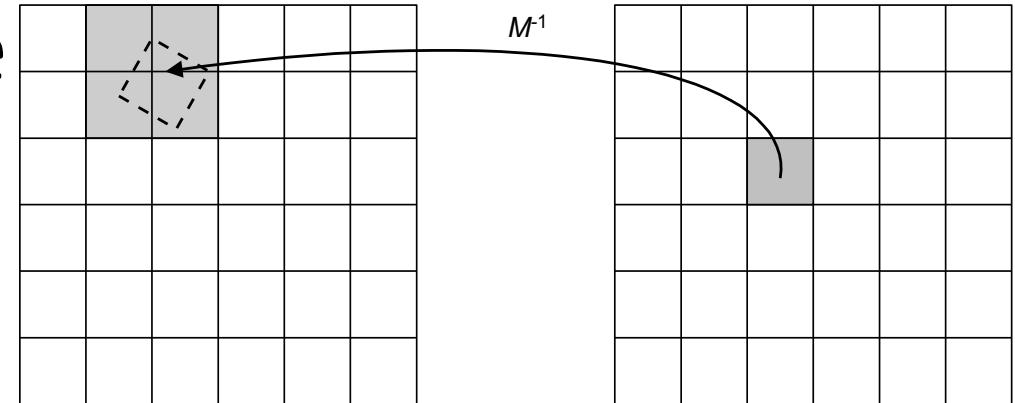
- Trasformazioni affini
 - Mapping inverso e interpolazione



- Applicare una trasformazione M a un'immagine $I(i,j)$ *discreta* genera un'immagine $I'(i',j')$ tale per cui ogni pixel si mappa in una posizione $(i',j', 1)^T = M (i,j, 1)^T$
- Questo *non garantisce* che le posizioni (i',j') *coincidano con i centri dei pixel dell'immagine* ovvero che (i',j') *siano interi e, soprattutto, disposti sempre su centri di pixel adiacenti*

Operazioni geometriche

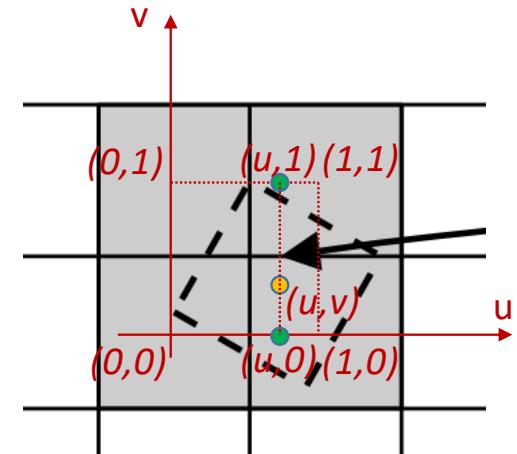
- Trasformazioni affini
 - Mapping inverso e interpolazione



- Questo problema si affronta utilizzando il cosiddetto *mapping inverso* ovvero M^{-1} , per stabilire quali sono i pixel in / più vicini a $M^{-1}(i',j',1)^T$
- Il valore $I'(i',j')$ viene ottenuto per *interpolazione* tipicamente con *legge bilineare o con legge cubica*

Operazioni geometriche

- Trasformazioni affini
 - Interpolazione bilineare
 - Il valore di $I'(i', j')$ viene calcolato a partire dai quattro pixel più vicini in I , considerati in un sistema di coordinate locali $(u, v) \in [0, 1]$.
 - Il generico valore $I(u, v)$ si ottiene interpolando linearmente dapprima $I(u, 0)$ tra $I(0,0)$ e $I(1,0)$ nonché $I(u, 1)$ tra $I(0,1)$ e $I(1,1)$
 - Successivamente si interpola linearmente $I(u, v)$ tra $I(u, 0)$ e $I(u, 1)$



Operazioni geometriche

- Trasformazioni affini

- Interpolazione bilineare

- Il valore interpolato di $I(u, v)$ segue l'equazione di un *paraboloide iperbolico*

$$I(u, 0) = I(0, 0) + u[I(1, 0) - I(0, 0)]$$

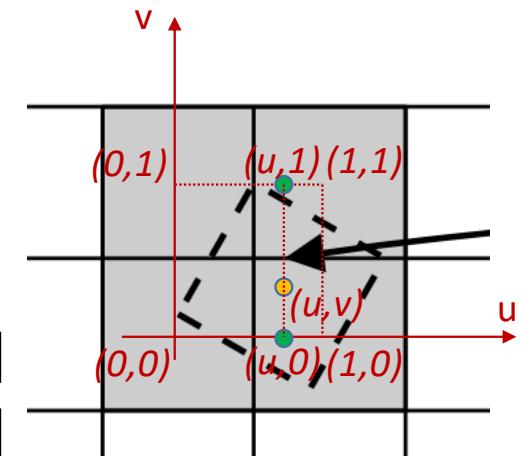
$$I(u, 1) = I(0, 1) + u[I(1, 1) - I(0, 1)]$$

$$I(u, v) = I(u, 0) + v[I(u, 1) - I(u, 0)] =$$

$$= I(0, 0) + u[I(1, 0) - I(0, 0)] +$$

$$+ v\{I(0, 1) + u[I(1, 1) - I(0, 1)] - I(0, 0) - u[I(1, 0) - I(0, 0)]\} =$$

$$= I(0, 0) + u[I(1, 0) - I(0, 0)] + v[I(0, 1) - I(0, 0)] + uv[I(0, 0) + I(1, 1) - I(0, 1) - I(1, 0)]$$



Operazioni geometriche

- Trasformazioni affini

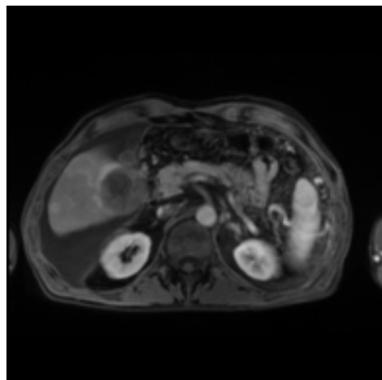
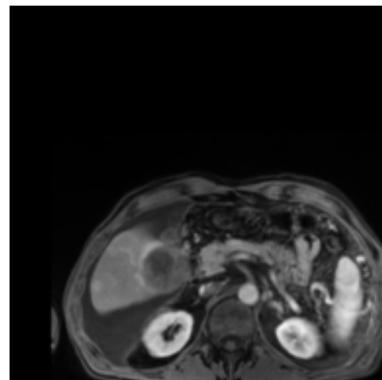
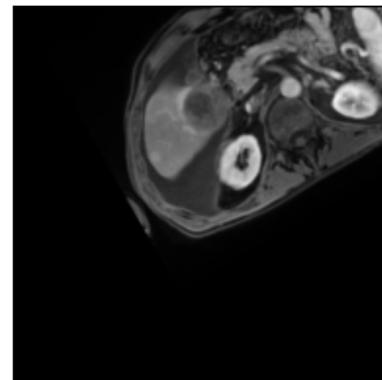


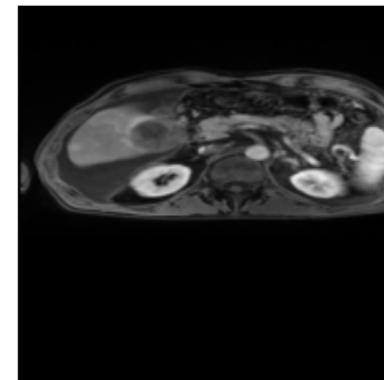
immagine originale



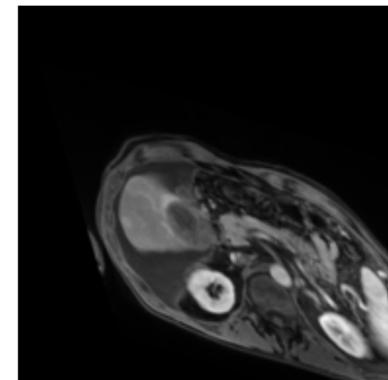
traslazione (100,50)



rotazione 30°



scalatura (0.7, 1.2)

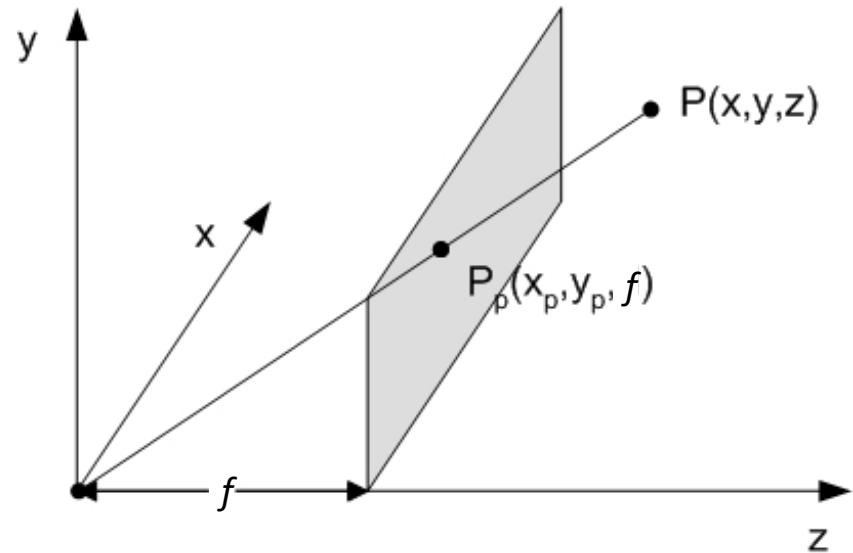


shear (0.3, 0.3)

Operazioni geometriche

- Trasformazioni proiettive

- Le trasformazioni proiettive sono usate per proiettare un volume di dati 3D su un piano ed ottenere quindi un'unica immagine
- La proiezione, in questo caso, ha una geometria semplice: il fuoco F si trova nell'origine e il piano di proiezione è parallelo al piano (x, y) a distanza f per cui ha equazione $z = f$

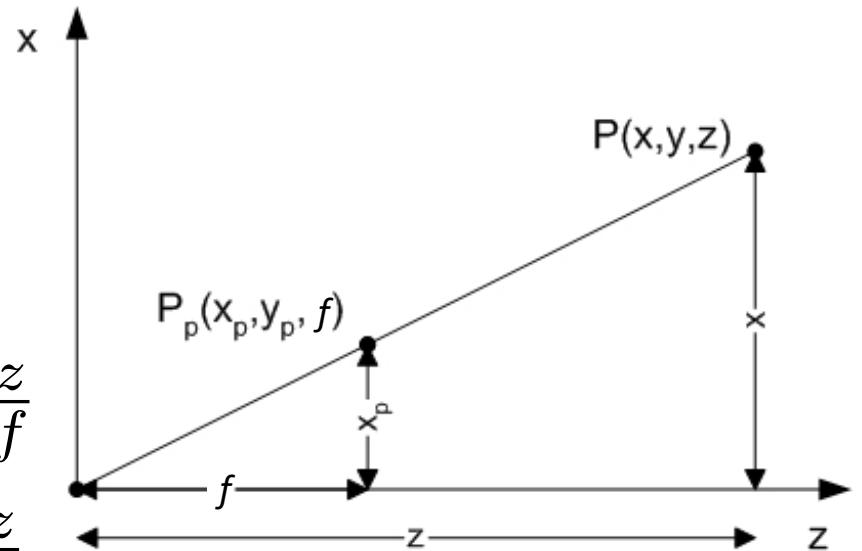


Operazioni geometriche

- Trasformazioni proiettive

- Anche la proiezione prospettica può essere rappresentata in coordinate omogenee a *meno della divisione esplicita per la coordinata omogenea*

$$\left\{ \begin{array}{l} x_p/x = f/z \\ y_p/y = f/z \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x_p = x / \frac{z}{f} \\ y_p = y / \frac{z}{f} \end{array} \right.$$

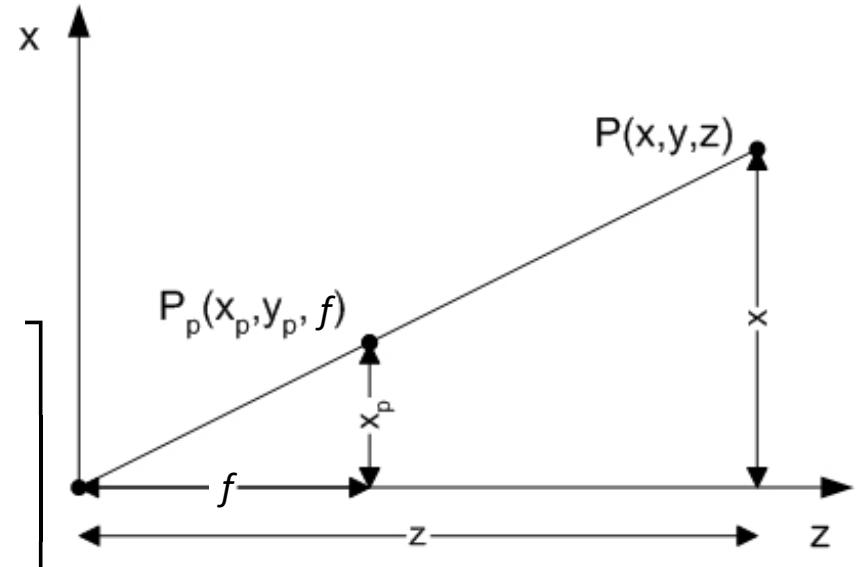


Operazioni geometriche

- Trasformazioni proiettive

- Anche la proiezione prospettica può essere rappresentata in coordinate omogenee a *meno della divisione esplicita per la coordinata omogenea*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ (z/f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1/f) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x / \frac{z}{f} \\ y / \frac{z}{f} \\ f \\ 1 \end{bmatrix}$$



Filtri

- L'applicazione di un filtro ad un'immagine digitale è orientata al cosiddetto *miglioramento della qualità* (image enhancement)
- Il miglioramento della qualità può essere inteso in senso generale, per esempio per ridurre il rumore o aumentare la nitidezza dell'immagine, ma può essere anche mirato a mettere in evidenza delle caratteristiche non ben visibili nell'immagine originale

Filtri

- I filtri possono essere applicati sia direttamente nel dominio spaziale sia nel dominio della frequenza
 - Filtri spaziali: sono kernel $h(x, y)$ a supporto finito e, in genere, molto piccolo rispetto alle dimensioni dell'immagine che vengono applicati su ogni pixel usando l'operatore di convoluzione (cross-correlazione)
 - Filtri frequenziali: sono funzioni $H(u, v)$ della frequenza definite su tutto lo spettro che si applicano tramite moltiplicazione punto a punto con la DFT dell'immagine
 - Ovviamente sussiste la relazione per cui $H(u, v) = \mathcal{F}[h(x, y)]$

Filtri

- Filtri nel dominio spaziale
 - Dalla teoria dei sistemi lineari sappiamo che per un'immagine $I(i, j)$ di dimensione $M \times N$

$$I(i, j) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} I(k, l) \delta(i - k, j - l)$$

Filtri

- Filtri nel dominio spaziale
 - Se applichiamo una trasformazione LSI

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{I(i, j)\} &= \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} I(k, l) \mathcal{L}\{\delta(i - k, j - l)\} = \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} I(k, l) h(i - k, j - l) = \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} h(k, l) I(i - k, j - l) \equiv \boxed{h} * I(i, j)\end{aligned}$$

Filtro

Filtri

- Filtri nel dominio spaziale

- Il supporto all'operatore di convoluzione è l'intera immagine, ma normalmente i kernel h (detti anche *maschere*) sono definiti a supporto finito (tipicamente 3x3 o 5x5) e spesso sono *simmetrici rispetto al loro punto di origine* $h(0,0)$ per cui è possibile riscrivere il tutto usando la *cross correlazione*

$$\mathcal{L}\{I(i, j)\} = \sum_{k=-a}^a \sum_{l=-a}^a h(-k, -l) I(i + k, j + l) \equiv h \bullet I(i, j)$$

- La riflessione del kernel rispetto a $h(0,0)$ non ha alcun effetto pratico se i kernel sono simmetrici

Filtri

- Filtri nel dominio spaziale
 - L'applicazione di un kernel ad un pixel sui bordi dell'immagine necessita di aggiungere dei valori attorno all'immagine stessa (*padding*) per rispettare la formulazione dell'operazione di convoluzione o cross-correlazione
 - Zero padding: si aggiungono $w/2$ colonne e $w/2$ righe di valori nulli attorno all'immagine i quali non daranno contributo all'applicazione della maschera sui punti di bordo
 - Constant padding: l'ultima riga/colonna viene ripetuta per riempire il supporto del filtro
 - Wrap o mirror padding: si «avvolge» l'immagine su sé stessa quindi la prima riga/colonna fornisce contributo alla prima e viceversa

Filtri

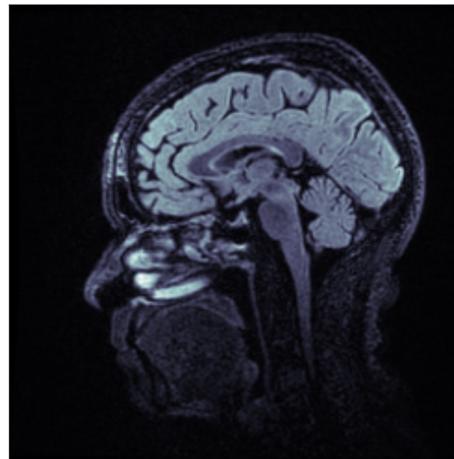
- Filtri nel dominio spaziale – passa basso
 - Sono i filtri che tendono a rimuovere le alte frequenza spaziali e lasciar passare quelle basse. Si usano per la riduzione del rumore («smussamento» o *smoothing*)
 - Box filter o filtro di media: ha una maschera in cui $h(k_x, l_y) = 1/w^2$, dove w è la dimensione della maschera

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{array}$$

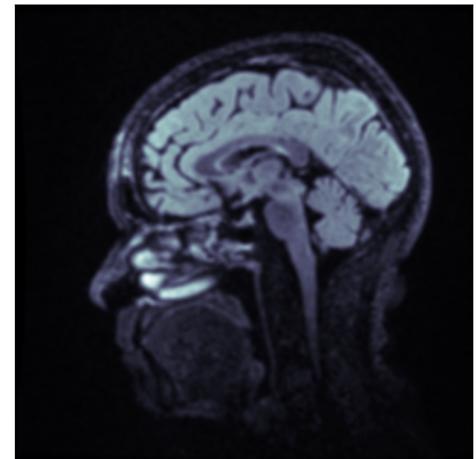
Fonte: Suetens «Fundamentals of Medical Imaging», 3rd ed.

Filtri

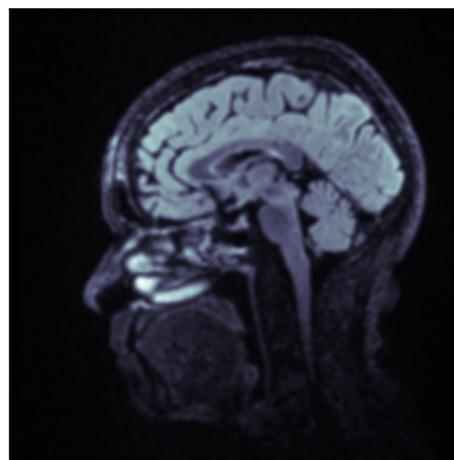
- Filtri nel dominio spaziale – passa basso
 - Sono i filtri che tendono a rimuovere le alte frequenza spaziali e lasciar passare quelle basse. Si usano per la riduzione del rumore («smussamento» o *smoothing*)
 - Box filter o filtro di media: ha una maschera in cui $h(k_x, l_y) = 1/w^2$, dove w è la dimensione della maschera



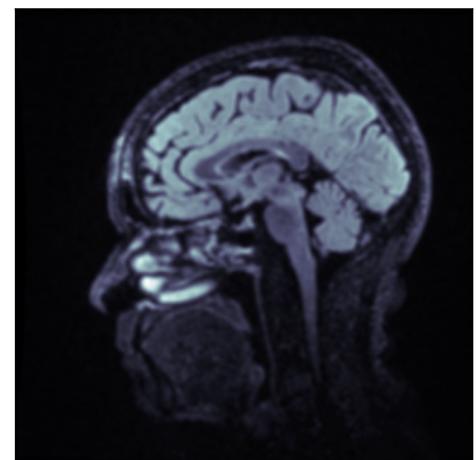
Originale



Box filter 3x3



Box filter 5x5



Box filter 7x7
LABORATORIO DI INTERAZIONE UOMO-MACCHINA
CHILAB

Filtri

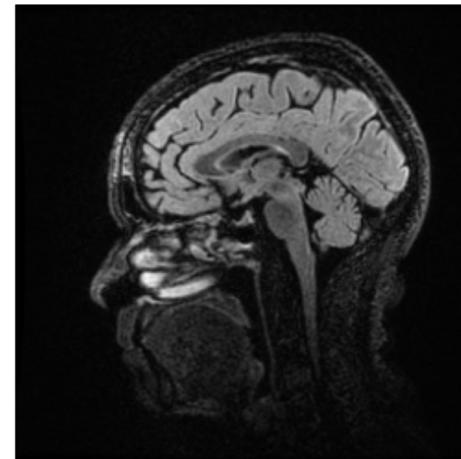
- Filtri nel dominio spaziale – gaussiano
 - E' un filtro passa-basso *a simmetria circolare* (isotropico: la risposta non dipende dall'orientazione). Basta definirne il profilo 1D e ruotarlo sul suo asse

$$h(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma^2}\right), \quad \vec{r} = (i, j)$$

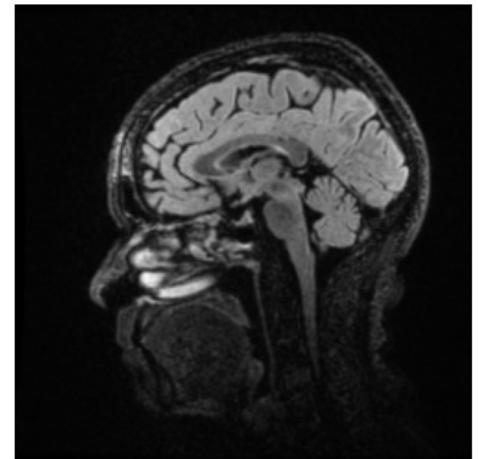
- L'azione passa-basso aumenta all'aumentare di σ , ma questo influenza la dimensione $w \geq \lceil 6 \sigma \rceil$ in modo tale da consentire l'azzeramento dei valori della gaussiana

Filtri

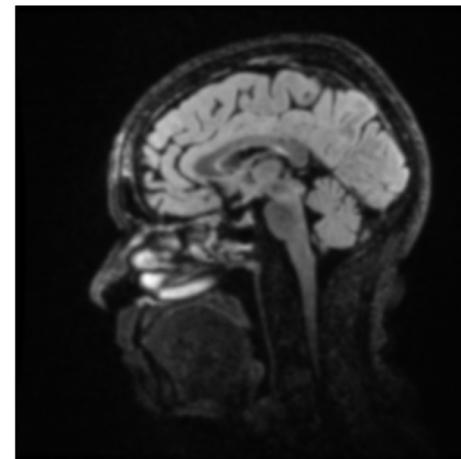
- Filtri nel dominio spaziale – gaussiano



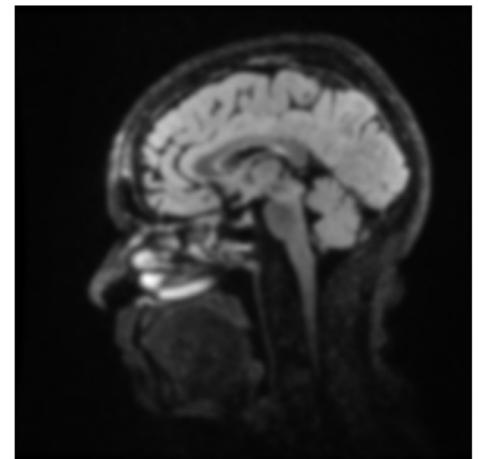
Originale



Gaussiano $\sigma = 0.5$ (3x3)



Gaussiano $\sigma = 1.0$ (6x6)

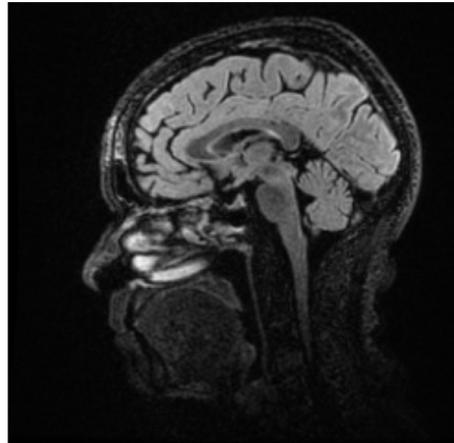


Gaussiano $\sigma = 1.5$ (9x9)

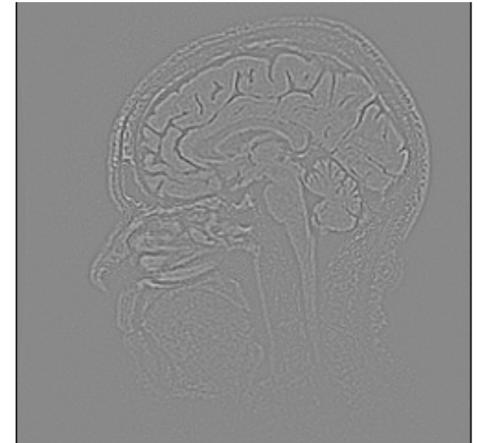
Filtri

- Filtri nel dominio spaziale – passa alto
 - Il filtro passa alto mira a esaltare le alte frequenza spaziali (contorni dettagli)
 - Si può ottenere sottraendo da I il passa basso complementare

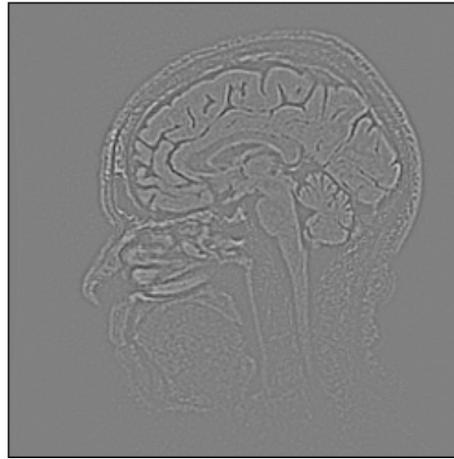
$$hp * I(i, j) = I(i, j) - lp * I(i, j) = \\ [\delta - lp] * I(i, j)$$



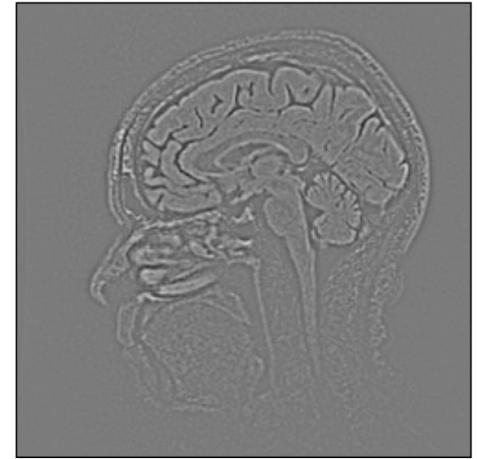
Originale



Passa alto da Gaussiano (3x3)



Passa alto da Gaussiano (6x6)



Passa alto da Gaussiano (9x9)

Filtri

- Filtri nel dominio spaziale – passa banda e rigetta banda
 - Questi filtri mirano a estrarre o rimuovere un certo intervallo di frequenze spaziali
 - Possono essere ottenuti algebricamente dal passa basso

Filter type	Spatial kernel in terms of lowpass kernel, lp
Lowpass	$lp(x, y)$
Highpass	$hp(x, y) = \delta(x, y) - lp(x, y)$
Bandreject	$br(x, y) = lp_1(x, y) + hp_2(x, y)$ $= lp_1(x, y) + [\delta(x, y) - lp_2(x, y)]$
Bandpass	$bp(x, y) = \delta(x, y) - br(x, y)$ $= \delta(x, y) - [lp_1(x, y) + [\delta(x, y) - lp_2(x, y)]]$

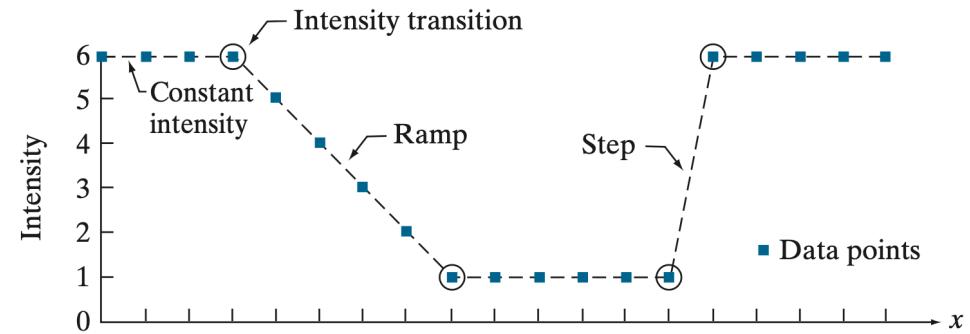
Fonte: Gonzalez, Woods «Digital Image Processing», 4th ed.

Filtri

- Filtri nel dominio spaziale – filtri derivativi
 - Sono dei filtri orientati al miglioramento della qualità dell'immagine in termini di esaltazione dei contorni
 - Sono da considerarsi operatori lineari perché le derivate prime e seconde discrete sono espresse con sommatorie

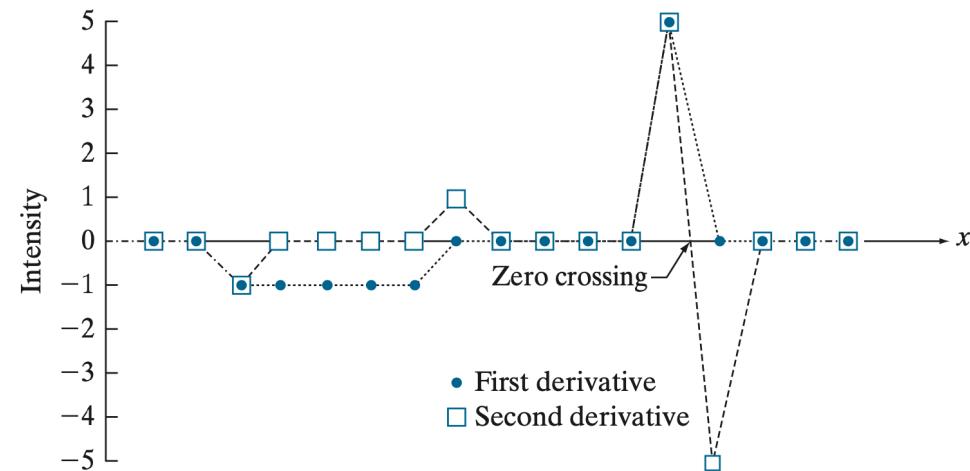
Filtri

- Filtri nel dominio spaziale – filtri derivativi
 - Le derivate prime hanno dei massimi/minimi in corrispondenza delle variazioni
 - Le derivate seconde hanno un andamento particolare in corrispondenza dei bordi, detto *zero-crossing*



Values of scan line
1st derivative
2nd derivative

6	6	6	6	5	4	3	2	1	1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6
0	0	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0
0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	5	-5	0	0	0	0



Fonte: Gonzalez, Woods «Digital Image Processing», 4th ed.

LABORATORIO DI INTERAZIONE UOMO-MACCHINA
CHILAB

Filtri

- Filtri nel dominio spaziale – filtri derivativi

$$\frac{\partial I}{\partial x} \approx I(x+1, y) - I(x, y), \quad \frac{\partial I}{\partial y} \approx I(x, y+1) - I(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \approx \left. \frac{\partial I}{\partial x} \right|_{x+1} - \left. \frac{\partial I}{\partial x} \right|_x = I(x+1, y) + I(x-1, y) - 2I(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \approx \left. \frac{\partial I}{\partial y} \right|_{y+1} - \left. \frac{\partial I}{\partial y} \right|_y = I(x, y+1) + I(x, y-1) - 2I(x, y)$$

$$\nabla^2 I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} = I(x+1, y) + I(x-1, y) + I(x, y+1) + I(x, y-1) - 4I(x, y)$$

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

1	1	1
1	-8	1
1	1	1

0	-1	0
-1	4	-1
0	-1	0

-1	-1	-1
-1	8	-1
-1	-1	-1

Fonte: Gonzalez, Woods «Digital Image Processing», 4th ed.

Filtri

- Filtri nel dominio spaziale – filtri derivativi
 - I *filtri di Sobel* approssimano il gradiente lungo x ed y
 - Il coefficiente 2 al centro vuole esaltare un po' la zona centrale e fornire smoothing nella direzione perpendicolare al gradiente

-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

Fonte: Gonzalez, Woods «Digital Image Processing», 4th ed.

Filtri

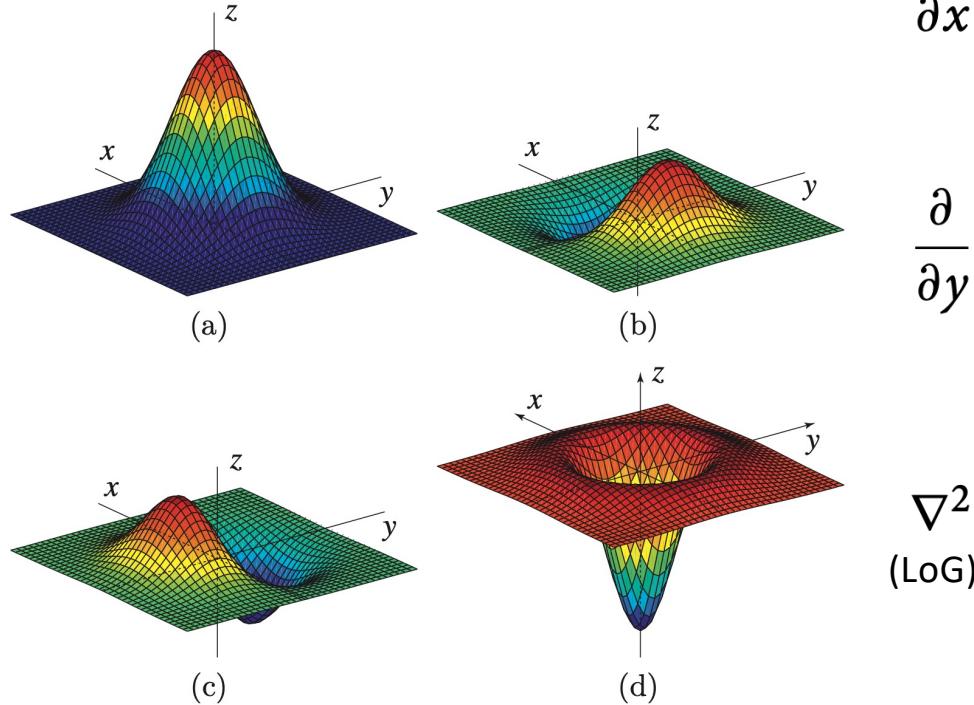
- Filtri nel dominio spaziale – filtri derivativi
 - Un altro approccio alla discretizzazione della derivata è la sua approssimazione con la derivata della convoluzione di I con una funzione continua e derivabile come, per esempio la gaussiana: g^*I
 - L'operatore di convoluzione gode di commutatività rispetto agli operatori di gradiente e laplaciano che sono lineari:

$$\Im[\nabla(g(x) * I(x))] = [j2\pi k \cdot G(k)] \cdot I(k) = \Im[\nabla g(x) * I(x)]$$

$$\Im[\nabla^2(g(x) * I(x))] = [(j2\pi k)^2 \cdot G(k)] \cdot I(k) = \Im[\nabla^2 g(x) * I(x)]$$

Filtri

- Filtri nel dominio spaziale – filtri derivativi



Le maschere sono ottenute
campionando le derivate
della gaussiana

gaussian

0.01	0.08	0.01
0.08	0.64	0.08
0.01	0.08	0.01

$$\frac{\partial}{\partial x}$$

0.05	0	-0.05
0.34	0	-0.34
0.05	0	-0.05

$$\frac{\partial}{\partial y}$$

0.05	0.34	0.05
0	0	0
-0.05	-0.34	-0.05

$$\nabla^2$$

(LoG)

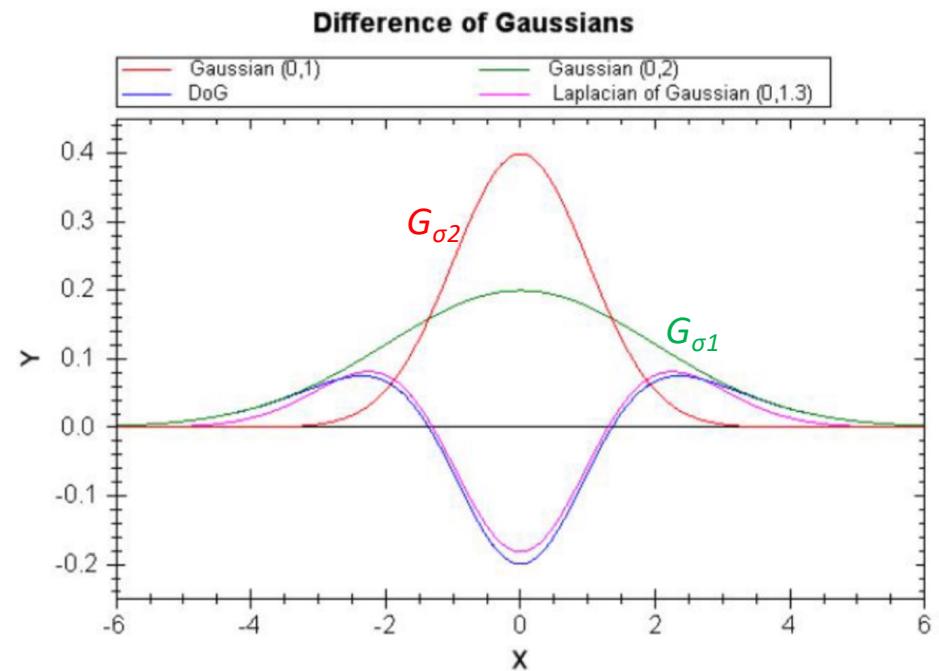
0.3	0.7	0.3
0.7	-4	0.7
0.3	0.7	0.3

LABORATORIO DI INTERAZIONE UOMO-MACCHINA
CHILAB

Fonte: Suetens «Fundamentals of Medical Imaging», 3rd ed.

Filtri

- Filtri nel dominio spaziale – filtri derivativi
 - Il filtro *LoG* – *Laplacian of the Gaussian*
 - può essere approssimato con la *Difference of Gaussians* (*DoG*)
 - Per cui $DoG * I = (G_{\sigma_1} * I - G_{\sigma_2} * I) = (G_{\sigma_1} - G_{\sigma_2}) * I$
 - Le due deviazioni standard sono molto vicine tra loro mentre le ampiezze sono differenti

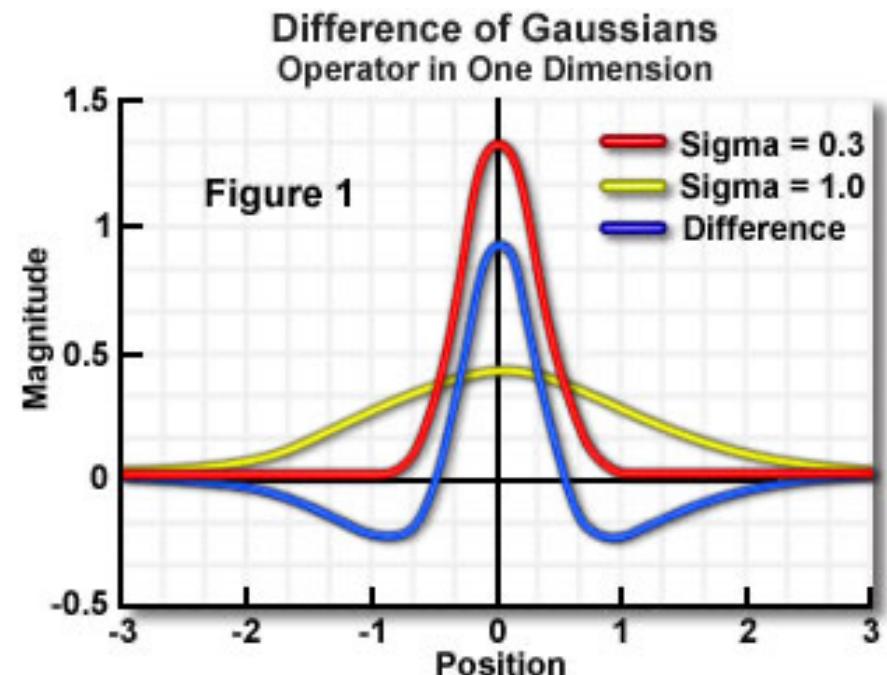


Fonte <https://bit.ly/3ZNGvgx>

Che succede calcolando $(G_{\sigma_2} - G_{\sigma_1}) * I$?

Filtri

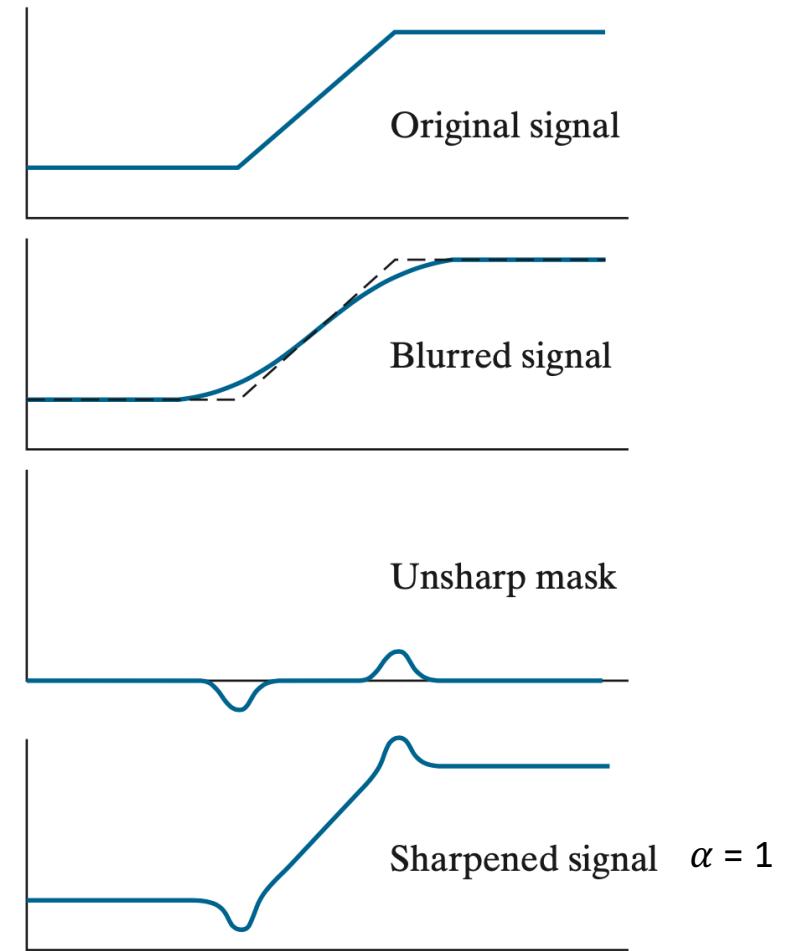
- Filtri nel dominio spaziale – filtri derivativi
 - $(G_{\sigma_2} - G_{\sigma_1}) * I$ è un *passa-banda*
 - Sottraiamo da una gaussiana a varianza più stretta (filtra meno alte frequenze) una seconda gaussiana a varianza più larga (filtra più basse frequenze)



Fonte <http://bit.ly/3msfukg>

Filtri

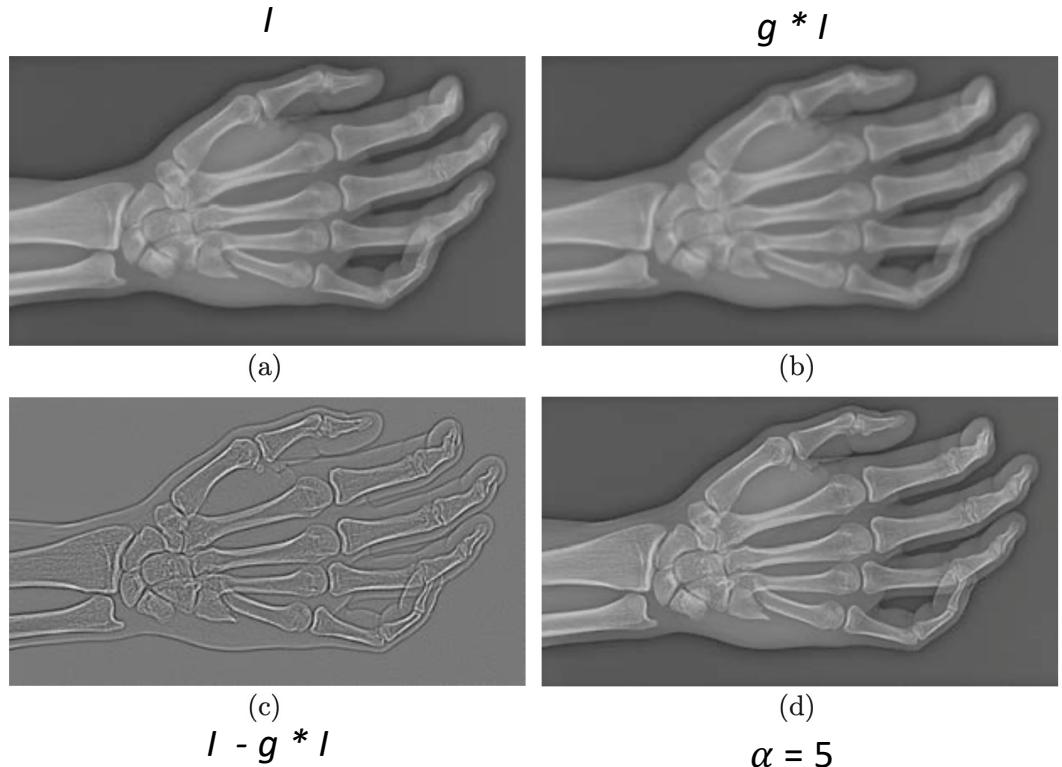
- Filtri nel dominio spaziale – unsharp masking
 - Il processo di unsharp masking esalta i contorni dell'immagine e preserva le zone con variazione lenta
 - $I' = I + \alpha(I - g * I)$



Fonte: Gonzalez, Woods «Digital Image Processing», 4th ed.

Filtri

- Filtri nel dominio spaziale – unsharp masking
 - Il processo di unsharp masking esalta i contorni dell'immagine e preserva le zone con variazione lenta
 - $I' = I + \alpha(I - g * I)$



Fonte: Suetens «Fundamentals of Medical Imaging», 3rd ed.

Filtri

- Filtri nel dominio della frequenza
 - Un filtro frequenziale trasforma l'immagine originale $I(x, y)$ in una nuova immagine $I'(x, y) = \text{Re}\{ \mathcal{F}^{-1}[H(u, v) I(u, v)] \}$
 $= \text{Re}\{ \mathcal{F}^{-1}[H(u, v)\text{Re}\{I(u, v)\} + j H(u, v)\text{Im}\{I(u, v)\}] \}$
 - Questo tipo di filtri viene detto *zero-phase-shift* poiché viene applicato egualmente sulla parte reale e su quella immaginaria della DFT di I
 - Nel dominio della frequenza i filtri visti sinora sono di semplice implementazione perché la funzione di trasferimento va semplicemente moltiplicata per la trasformata dell'immagine

Filtri

- Filtri nel dominio della frequenza – algoritmo di filtraggio
 1. L'immagine viene trasformata con la *Discrete Fourier Transform* (DFT) che viene implementata tramite l'algoritmo *Fast Fourier Transform* (FFT)
 2. Si crea una pseudo-immagine nel dominio della frequenza, con la stessa dimensionalità di $I(u, v)$, che descrive punto a punto $H(u, v)$
 3. Si moltiplicano H e I per ogni (u, v)
 4. Si calcola la IDFT del prodotto

Filtri

- Filtri nel dominio della frequenza – caratteristiche della DFT
 - Da un punto di vista puramente computazionale, la matrice dei coefficienti complessi della DFT viene gestita con gli indici che variano come le frequenze per cui il punto $(u, v) = (0, 0)$ *si trova in alto a sinistra e non al centro*
 - La soluzione sarà quella di effettuare lo swap dei quadranti: 1° e 4°, 2° e 3°
 - Corrisponde a fare lo swap delle righe che distano metà della dimensione di riga, seguito dallo swap delle colonne che distano metà della dimensione di colonna

Filtri

- Filtri nel dominio della frequenza – caratteristiche della DFT
 - La DFT e la IDFT sono funzioni periodiche per cui la IDFT del prodotto $H \cdot I$, che è equivalente alla convoluzione delle IDFT separate porta a un *errore dovuto all'interferenza tra queste due funzioni periodiche con periodo simile*
 - Si può dimostrare che, se I ha dimensione $M \times N$, la soluzione il padding di I nel dominio spaziale fino a $2M \times 2N$ e il prodotto nel dominio della frequenza con un filtro H della medesima dimensione

Filtri

- Filtri nel dominio della frequenza – algoritmo di filtraggio (finale)
 1. Si crea una nuova immagine I_p di dimensioni $2M \times 2N$ con padding e se ne calcola la DFT
 2. Si effettua lo swap dei quadranti di $\mathbf{I}_p(u, v)$, la DFT di I_p
 3. Si crea il filtro $H(u, v)$ di dimensioni $2M \times 2N$ che sia una funzione simmetrica rispetto al centro di coordinate (M, N)
 4. Si moltiplicano H e \mathbf{I}_p per ogni (u, v) – parte reale e immaginaria ovvero zero-phase-shift
 5. Si fa di nuovo lo swap dei quadranti del prodotto, si calcola la sua IDFT e se ne considera la parte reale
 6. Si considera la regione centrale del risultato, avente dimensione $M \times N$, come immagine filtrata