

Microeconomia 1 (Lista 1)

Frederico Fonseca Ribeiro

Questão 1

1. COMPLETEUDE: O indivíduo consegue formar uma relação de preferência entre todas as cestas. ($\forall x, y \in X, \quad x \succeq y \quad \text{ou} \quad y \succeq x$)
2. TRANSITIVIDADE: A relação de preferência entre as cestas consumidas é coerente. ($\forall x, y, z \in X, \quad x \succeq y \wedge y \succeq z \Rightarrow x \succeq z$)
3. DESEJABILIDADE/MONOTONICIDADE: Também tido como Não-Saciedade: quanto mais, melhor. ($\forall x, y \in X, \quad [x_i \geq y_i \quad \forall i \text{ e } \exists j : x_j > y_j] \Rightarrow x \succ y$)
4. CONVEXIDADE: A média é preferível aos extremos. ($\forall x, y \in X, \quad x \succeq y \text{ e } x \succeq z \Rightarrow x \succeq \lambda y + (1 - \lambda)z, \quad \forall \lambda \in [0, 1]$)
5. CONTINUIDADE: Permite traçar relações de utilidade. (Para todo $x \in X$, os conjuntos $\{y \in X : y \succeq x\}$ e $\{y \in X : x \succeq y\}$ são fechados.)

Questão 2

a)

$$UMg_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} = x_2$$

De forma semelhante, encontramos a utilidade marginal de x_2 e temos que a $TMgS = \frac{UMg_1}{UMg_2} = \frac{x_2}{x_1}$

b)

De forma semelhante, temos que:

$$TMgS = \frac{2x_1x^2}{2x_1^2x_2}$$

c)

$$TM_gS = \frac{1/x_1}{1/x_2}$$

Questão 3

a)

Demonstrando homogeneidade de grau zero:

$$x_1(p, w) = x(kp, kw) \quad (1)$$

$$\left(\frac{2w}{2p_1 + p_2} \right) = \left(\frac{k2w}{k2p_1 + kp_2} \right) \quad (2)$$

$$= \left(\frac{k(w)}{k(2p_1 + p_2)} \right) \quad (3)$$

$$= \left(\frac{2w}{2p_1 + p_2} \right) \quad (4)$$

Demonstrando Lei de Walras:

$$px = w \quad (5)$$

$$p_1x_1 + p_2x_2 = w \quad (6)$$

$$p_1 \left(\frac{2w}{2p_1 + p_2} \right) + p_2 \left(\frac{w}{2p_1 + p_2} \right) = w \quad (7)$$

$$w \left(\frac{2p_1 + p_2}{2p_1 + p_2} \right) = w \quad (8)$$

$$w = w \quad (9)$$

b)

Demonstrando grau de homogeneidade 0 para x_1 , sendo os outros casos análogos:

$$x_1(p, w) = x(kp, kw) \quad (10)$$

$$\left(\frac{p_2 w}{(p_1 + p_2 + p_3)p_1} \right) = \left(\frac{kp_2 kw}{(kp_1 + kp_2 + kp_3)kp_1} \right) \quad (11)$$

$$= \left(\frac{k^2 p_2 w}{k^2 (p_1 + p_2 + p_3)p_1} \right) \quad (12)$$

$$= \left(\frac{p_2 w}{(p_1 + p_2 + p_3)p_1} \right) \quad (13)$$

Demonstrando Lei de Walras

$$w = px \quad (14)$$

$$= p_1 \left(\frac{p_2 w}{(p_1 + p_2 + p_3)p_1} \right) + p_2 \left(\frac{p_3 w}{(p_1 + p_2 + p_3)p_2} \right) + p_3 \left(\frac{\beta p_1 w}{(p_1 + p_2 + p_3)p_3} \right) \quad (15)$$

$$= \left(\frac{p_2 w + p_3 w + \beta p_1 w}{p_1 + p_2 + p_3} \right) \quad (16)$$

$$= \frac{w(\beta p_1 + p_2 + p_3)}{p_1 + p_2 + p_3} \quad (17)$$

$$= w, \text{ se } \beta = 1 \quad (18)$$

Questão 4

Provando homogeneidade de grau zero:

$$x_1(kp, kw) = \frac{kp_2}{kp_3} = \frac{p_2}{p_3} = x_1(p, w) \quad (19)$$

$$x_2(kp, kw) = -\frac{kp_1}{kp_3} = -\frac{p_1}{p_3} = x_2(p, w) \quad (20)$$

$$x_3(kp, kw) = \frac{kw}{kp_3} = \frac{w}{p_3} = x_3(p, w) \quad (21)$$

Provando Lei de Walras:

$$p_1 \left(\frac{p_2}{p_3} \right) + p_2 \left(-\frac{p_1}{p_3} \right) + p_3 \left(\frac{w}{p_3} \right) = w$$

Os dois primeiros termos se anulam e os p_3 também se anulam no terceiro termo, sendo assim:

$$w = w$$

Questão 5

Cobb-Douglas

a)

Para mostrar que que é homotética, deve-se provar a homogeneidade de grau 1:

$$tu(x_1, x_2) = u(tx_1, tx_2) \quad (22)$$

$$= u(K(tx_1)^\alpha (tx_2)^{1-\alpha}) \quad (23)$$

$$= Kt^\alpha x_1^\alpha t^{1-\alpha} x_2^{1-\alpha} \quad (24)$$

$$= tKx_1^\alpha x_2^{1-\alpha} \quad (25)$$

b)

Para encontrar a demanda Walrasiana, ou seja, em função de p e de w , devemos maximizar a função sujeita à restrição orçamentária, sendo assim temos o seguinte lagrangeano:

$$\mathcal{L} = Kx_1^\alpha x_2^{1-\alpha} + \lambda(w - p_1x_1 - p_2x_2) \quad (26)$$

Sendo assim, temos as seguintes condições de primeira ordem:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \alpha Kx_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} - \lambda p_1 = 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = (1 - \alpha)Kx_1^\alpha x_2^{-\alpha} - \lambda p_2 = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = w - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \quad (29)$$

Isolando λ e substituindo dentro de Equação 27, temos que:

$$K\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} = p_1 \left(\frac{(1 - \alpha)Kx_1^\alpha x_2^{-\alpha}}{p_2} \right)$$

Podemos eliminar K dos dois lados. Além disso, para isolar x_2 , dividimos ambos os lados por $x_1^{\alpha-1}$ e multiplicamos por x_2^α , restando:

$$x_2 = \frac{p_1}{p_2} \frac{(1-\alpha)}{\alpha} x_1 \quad (30)$$

Substituindo na Equação 29, temos que:

$$w - p_1 x_1 - p_2 \left(\frac{p_1}{p_2} \frac{(1-\alpha)}{\alpha} x_1 \right)$$

$$p_1 x_1 + \left(p_1 \frac{(1-\alpha)}{\alpha} x_1 \right) = w$$

$$p_1 x_1 \left(1 + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \right) = w$$

$$p_1 x_1 \frac{1}{\alpha} = w$$

E chegamos à demanda Walrasiana de x_1 :

$$x_1^*(p, w) = \frac{w\alpha}{p_1} \quad (31)$$

Similarmente, encontramos $x_2^*(p, w)$:

$$x_2^*(p, w) = \frac{w(1-\alpha)}{p_2} \quad (32)$$

c)

Para encontrarmos a função de utilidade indireta, precisamos substituir a demanda Walrasiana dentro da função utilidade:

$$v(p, w) = Kw \left(\frac{w\alpha}{p_1} \right)^\alpha \left(\frac{w(1-\alpha)}{p_2} \right)^{1-\alpha}$$

d)

e)

Para acharmos a demanda Hicksiana, devemos minimizar o gasto em função da utilidade, sendo assim, temos:

$$\mathcal{L} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \lambda(u - K x_1^\alpha x_2^{-\alpha})$$

Condições de primeira ordem:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = p_1 + \lambda K \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} = 0 \quad (33)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = p_2 + \lambda K (1 - \alpha) x_1^\alpha x_2^{-\alpha} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = u - K x_1^\alpha x_2^{-\alpha} = 0 \quad (35)$$

Isolando λ na Equação 34 e substituindo na Equação 33, temos:

$$p_1 - \frac{p_2 h K \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}}{K(1-\alpha)x_1^\alpha x_2^{-\alpha}} = p_1 - \frac{p_2 \alpha x_1^{-1} x_2^1}{(1-\alpha)} = 0$$

Isolando x_2 :

$$x_2 = \frac{p_1 (1-\alpha)}{p_2 \alpha} x_1 \quad (36)$$

Substituindo a Equação 36 na Equação 35:

$$u - K x_1^\alpha \left(\frac{p_1 (1-\alpha)}{p_2 \alpha} x_1 \right)^{1-\alpha} = 0$$

Isolando x_1 :

$$x_1 = \frac{u}{K} \left(\frac{p_2 \alpha}{p_1 (1-\alpha)} \right)^{1-\alpha} = h_1^*(p, u) \quad (37)$$

Semelhantemente, encontra-se $h_2^* = \frac{u}{K} \left(\frac{p_1 (1-\alpha)}{p_2 \alpha} \right)^\alpha$

f)

Para achar a função dispêndio, basta substituir a demanda Hicksiana dentro:

$$e(p, u) = p_1 \frac{u}{K} \left[\frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{p_2}{p_1} \right]^{1-\alpha} + p_2 \frac{u}{K} \left[\frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{p_1}{p_2} \right]^\alpha \quad (38)$$

$$= \frac{u}{K} p_1^\alpha p_2^{1-\alpha} \left[\frac{\alpha^{1-\alpha}}{(1 - \alpha)^{1-\alpha}} + \frac{(1 - \alpha)^\alpha}{\alpha^\alpha} \right] \quad (39)$$

$$= \frac{u}{K} p_1^\alpha p_2^{1-\alpha} [\alpha^{-\alpha} (1 - \alpha)^{-(1-\alpha)}] \quad (40)$$

g)

Aplicando o Lema de Shephard, basta derivar a função dispêndio em relação ao preço:

$$\frac{\partial e(p, u)}{\partial p_1} = \frac{u}{K} \left(\frac{p_2}{p_1} \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)^{1-\alpha} = h_1^*(p, u)$$

Nota: o expoente α que desce multiplicando ajuda na simplificação ao evidenciar o expoente dos parênteses dos termos à direita.

h)

Para encontrar os efeitos Renda, Substituição e Total, devemos usar a Equação de Slutsky.

CES

Questão 6

Podemos definir a renda real como $R = w - p_0 x$. A partir da Equação 31, temos que:

$$x - x_0 = \frac{R\alpha}{p_x} = \frac{(w - p_0 x)\alpha}{p_x}$$

Ou seja, como se gasta primeiro com x_0 , há uma redução da reta orçamentária real.

Questão 7

a)

Para resolver a questão, devemos utilizar a Identidade de Roy, sendo assim:

$$x_1^*(p, w) = -\frac{-\alpha/p_1}{(\alpha + \beta)/w} = \frac{\alpha}{(\alpha + \beta)} \frac{w}{p_1}$$

Similarmente, para x_2 :

$$x_2^*(p, w) = \frac{\beta}{(\alpha + \beta)} \frac{w}{p_2}$$

b)

Para encontrar a função dispêndio, basta isolar w :

$$\ln w = \frac{\alpha \ln p_1 + \beta \ln p_2 - K + u}{(\alpha + \beta)}$$

Usando propriedades logarítmicas e depois usando função exponencial, tem-se que:

$$e(p, u) = e^{\frac{u-K}{\alpha+\beta}} p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

Para chegar à Demanda Hicksiana, aplica-se o Lema de Shephard, que é a derivação da função dispêndio pelo preço:

$$h_1(p, u) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} e^{\frac{u-K}{\alpha+\beta}} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

Semelhantemente, para o outro bem:

$$h_2(p, u) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} e^{\frac{u-K}{\alpha+\beta}} \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

Questão 8

a)

Para esta questão, considere $\alpha = 1/2$

Logo, a fim de maximizar a utilidade dada uma restrição orçamentária, temos as seguintes CPOs:

$$\begin{aligned}\alpha x_1^{\alpha-1} + \lambda p_1 &= 0 \\ (1 - \alpha)x_2^{-\alpha} + \lambda p_2 &= 0 \\ w - p_1 x_1 - p_2 x_2 &= 0\end{aligned}$$

Igualando as equações, temos que:

$$\frac{(1 - \alpha)x_2^{-\alpha}}{p_2} = \frac{\alpha x_1^{\alpha-1}}{p_1}$$

Isolando:

$$\begin{aligned}x_2^\alpha &= \frac{p_1}{p_2} \frac{\alpha}{(1 - \alpha)} x_1^{\alpha-1} \\ x_2 &= \left(\frac{p_1}{p_2} \frac{\alpha}{(1 - \alpha)} x_1^{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}}\end{aligned}$$

Reduzindo ao substituir α :

$$x_2 = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^2 x_1$$

Substituindo na restrição orçamentária:

$$\begin{aligned}w &= p_1 x_1 + p_2 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^2 x_1 \\ x_1^* &= \frac{w}{p_1 + \frac{p_1^2}{p_2}} \\ x_1^* &= \frac{p_2 w}{p_1 p_2 + p_1^2}\end{aligned}$$

Similarmente:

$$x_2^* = \frac{p_1 w}{p_1 p_2 + p_2^2}$$

Substituindo na função utilidade:

$$v(p^*, w) = \left(\frac{p_1 w}{p_1 p_2 + p_2^2} \right)^{1/2} + \left(\frac{p_2 w}{p_1 p_2 + p_1^2} \right)^{1/2}$$

$$v(p^*, w) = w^{1/2} \left(\frac{p_1^2 + p_2^2}{p_1 p_2 (p_1 + p_2)} \right)^{1/2}$$

Para achar a função dispêndio, deve-se isolar w :

$$w = u^2 \left(\frac{p_1 p_2 (p_1 + p_2)}{(p_1 + p_2)^2} \right)$$

$$w = u^2 \left(\frac{p_1 p_2}{(p_1 + p_2)} \right)$$

Da função dispêndio, derivando em relação aos preços, encontra-se a Demanda Hicksiana:

Dica: Em vez de usar regra do quociente, bote a expressão em baixo elevado a -1 para usar a regra do produto.

$$u^2 [p_2 (p_1 + p_2)^{-1} - p_1 p_2 (p_1 + p_2)^{-2}] = u^2 \frac{p_2^2}{(p_1 + p_2)^2} = h_1(p, u)$$

Semelhantemente para o bem 2:

$$u^2 \frac{p_1^2}{(p_1 + p_2)^2} = h_2(p, u)$$

b)

Para responder, devemos utilizar a Equação de Slutsky:

Para achar ET , basta a diferença de x_2 com os diferentes preços:

$$\frac{1 \cdot 10}{2 \cdot 1 + 2^2} - \frac{1 \cdot 10}{1 \cdot 1 + 1^2}$$

$$\frac{10}{6} - \frac{10}{2} = \frac{-10}{3} = ET$$

Efeito renda, sendo a derivada da demanda walrasiana em relação a w :

$$-\frac{p_2}{p_1 p_2 + p_2^2} x_1$$

Sendo assim, temos:

$$-\frac{1}{2 \cdot 1 + 1^2} \cdot \frac{1 \cdot 10}{2 \cdot 1 + 2^2} = -\frac{1}{3} \frac{10}{6} = -\frac{5}{9} = ER$$

Sendo assim, o $ES = ET - ER$ é igual a:

$$-\frac{10}{3} - \left(-\frac{5}{9}\right)$$

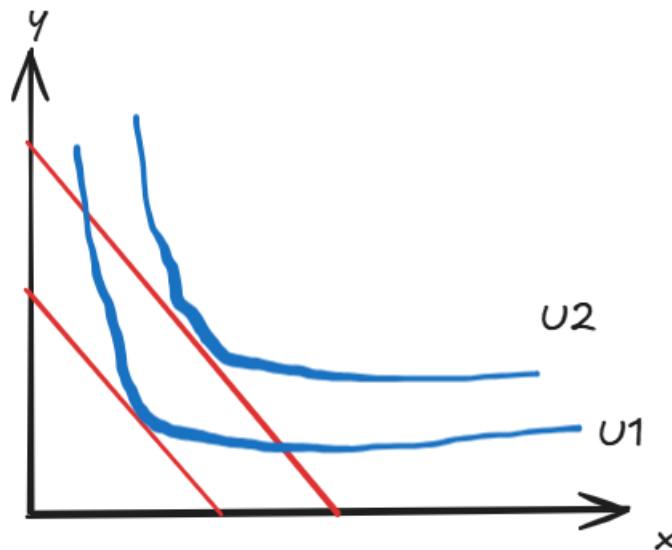
$$\frac{5}{9} - \frac{30}{9} = -\frac{25}{9} = ES$$

Questão 9

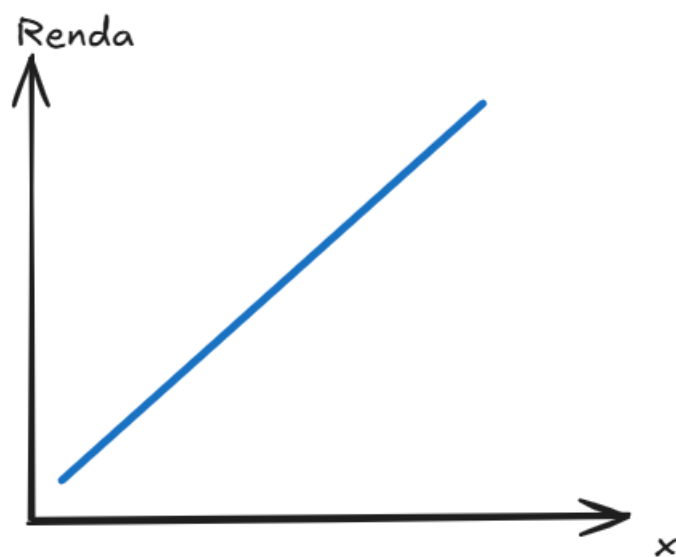
a)

Dado um aumento de renda, a demanda do bem x aumentará se for um bem normal e o oposto, caso for um bem inferior.

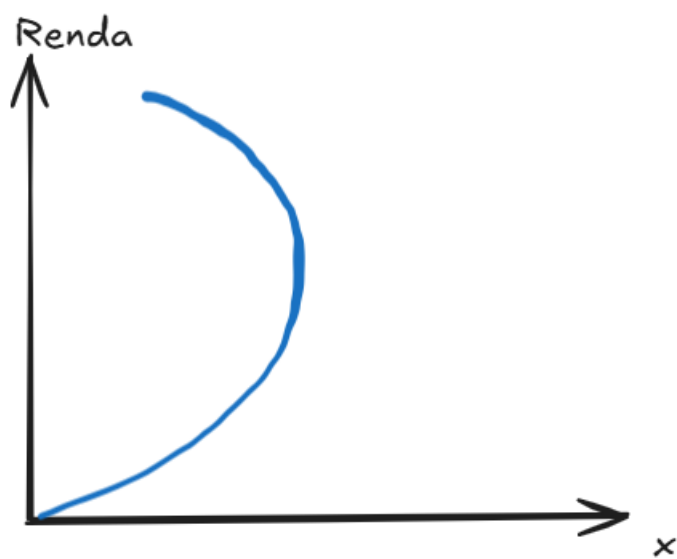
Em relação à $TMgS$, caso a renda aumente, o valor continuará o mesmo, apenas mudando a curva de indiferença em que a escolha ótima está, mas com a inclinação da reta constante.



Já para as Curvas de Engel, tem-se:



Quanto maior a renda, maior a demanda de x .



Para um bem inferior, após certo ponto da renda, a demanda diminui.

b)

Ao aumentar o preço, há o efeito substituição e o efeito renda. O de substituição se refere ao aumento da demanda de outro bem, vide a relação cruzada de demanda e preço. Já o efeito renda, se refere ao impacto do preço na renda real.

Questão 10

O resultado esperado de cada loteria se dá por:

$$L_1 = \left(0 \cdot \frac{1}{3} + 100 \cdot \frac{1}{3} + 200 \cdot \frac{1}{3}\right) = 100$$

$$L_2 = \left(0 \cdot \frac{1}{2} + 100 \cdot 0 + 200 \cdot \frac{1}{2}\right) = 100$$

$$L_3 = \left(0 \cdot 0 + 100 \cdot \frac{3}{4} + 200 \cdot \frac{1}{4}\right) = 125$$

Assumindo uma relação linear tal qual $u(x) = x$, tanto o valor esperado de L_2 quanto de L_3 são maiores que L_1 , logo há contradição.

Questão 11

a)

$$r_A(x) = -\frac{-\frac{1}{4}x^{-3/2}}{\frac{1}{2}x^{-1/2}}$$

$$r_A(x) = \frac{1}{2x}$$

Substituindo x :

$$\frac{1}{2 \cdot 5} = 0,1$$

Relativa:

$$R_R = 5 \cdot 0,1 = 0,5$$

b)

Primeiro devemos calcular a utilidade esperada:

$$\mathbb{E}(u) = \sqrt{16} \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{4} \cdot \frac{1}{2} = 3$$

Achando o Equivalente Certeza:

$$EC = 3^2 = 9$$

Prêmio de Probabilidade:

$$\sqrt{10} = \sqrt{16} \cdot \left(\frac{1}{2} - \pi\right) + \sqrt{4} \cdot \left(\frac{1}{2} + \pi\right)$$

Isolando π :

$$\sqrt{10} = 4 \cdot \left(\frac{1 - 2\pi}{2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1 + 2\pi}{2}\right)$$

$$\sqrt{10} = 2(1 - 2\pi) + (1 + 2\pi)$$

$$\sqrt{10} = 2 - 4\pi + 1 + 2\pi$$

$$\frac{\sqrt{10} - 3}{2}$$

Por que a renda inicial é 10? Não tem no enunciado. PERGUNTAR

c)

Achando a utilidade esperada:

$$\mathbb{E}(u) = \sqrt{36} \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{16} \cdot \frac{1}{2} = 5$$

Achando EC :

$$EC = 5^2 = 25$$

De forma semelhante à letra anterior, tem-se o prêmio de probabilidade:

$$\sqrt{26} = 6 \cdot \left(\frac{1 + 2\pi}{2}\right) + 4 \cdot \left(\frac{1 - 2\pi}{2}\right)$$

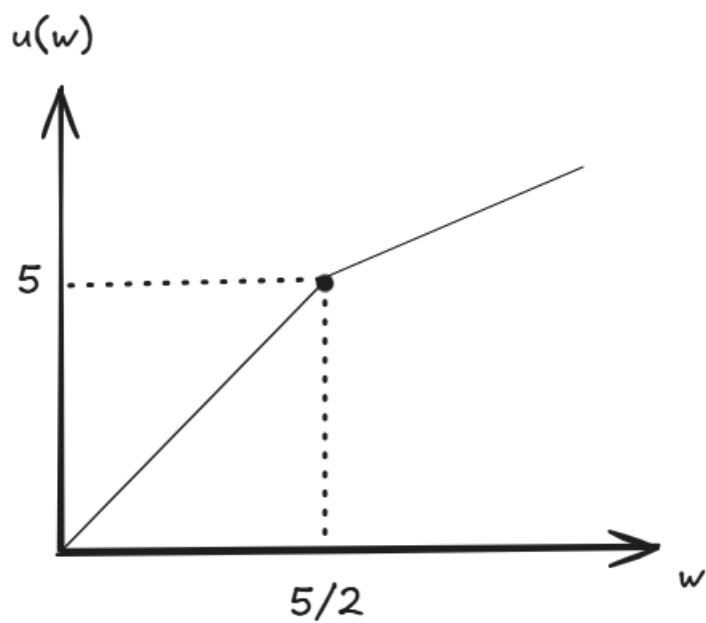
$$\sqrt{26} = 3 + 6\pi + 2 - 4\pi$$

$$\pi = \frac{\sqrt{26} - 5}{2}$$

O valor que faz o indivíduo ficar indiferente é maior no segundo caso.

Questão 12

a)



Pelo gráfico é possível perceber que a função é fracamente côncava, sendo assim, ele é fracamente averso ao risco. É possível traçar uma linha entre dois pontos cujo valor médio é preferível aos extremos.

b)

$$\mathbb{E}(u)_1 = \frac{2 + 7,5 + 11,5}{3} = 7$$

$$\mathbb{E}(u)_2 = \frac{4 + 5,5 + 12,5}{3} = 7,33333$$

Ativo 2 é preferível.

c)

Ativo 1:

$$\mathbb{E}^2(x) = \left(\frac{1 + 5 + 9}{3} \right)^2 = 25$$

$$\mathbb{E}(x^2) = \frac{1 + 25 + 81}{3} = \frac{107}{3}$$

$$V(x) = \frac{107}{3} - 25 = \frac{32}{3}$$

Ativo 2:

$$\mathbb{E}^2(y) = \left(\frac{2 + 3 + 10}{3} \right)^2 = 25$$

$$\mathbb{E}(y^2) = \frac{4 + 9 + 100}{9} = \frac{113}{3}$$

$$V(y) = \frac{38}{3}$$

O avesso prefere x, menor variância

d)

A frase é falsa. Conforme as questões anteriores, a depender de qual aversão, o resultado diverge.

Questão 13

a)

$$\frac{\partial q}{\partial k} = \frac{1}{\rho} (k^\rho + l^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1} \rho k^{\rho-1}$$

Cortando ρ e fazendo manipulação, substituindo a função de produção por q :

$$PM_g^k = \left(\frac{q}{k}\right)^{1-\rho}$$

Analogamente:

$$PM_g^l = \left(\frac{q}{l}\right)^{1-\rho}$$

b)

Para achar a $TMgST$, basta dividir PM_g^l por PM_g^k

$$TMgST = \frac{\left(\frac{q}{l}\right)^{1-\rho}}{\left(\frac{q}{k}\right)^{1-\rho}} = \left(\frac{k}{l}\right)^{1-\rho}$$

Para provar σ , devemos aplicar \ln e depois derivar:

$$\sigma = \frac{\ln(k/l)}{(1-\rho)\ln(k/l)} = \frac{1}{(1-\rho)}$$

Questão 14

Formando o lagrangeano, minimizando a função custo dada a função produção:

$$\mathcal{L} = w_k k + w_l l + \lambda (q - k^\alpha l^{1-\alpha})$$

Sendo assim, temos as seguintes CPOs:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} = w_k - \lambda \alpha k^{\alpha-1} l^{1-\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l} = w_l - \lambda (1-\alpha) k^\alpha l^{-\alpha} = 0$$

$$\frac{w_k}{w_l} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{l}{k} \Rightarrow l = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{w_k}{w_l} k$$

Substituindo na restrição de produção, temos:

$$q = k^\alpha \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{w_k}{w_l} k \right)^{1-\alpha}$$

Isolando k :

$$k^* = q \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{w_l}{w_k} \right)^{1-\alpha}$$

Semelhantemente, para l :

$$l^* = q \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{w_k}{w_l} \right)^\alpha$$

Função custo:

$$C(w_k, w_l, q) = w_l q \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{w_k}{w_l} \right)^\alpha \cdot w_k q \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{w_l}{w_k} \right)^{1-\alpha}$$

Questão 15