Microeconomia 1 (Lista 1)

Frederico Fonseca Ribeiro

Questão 1

Questão 2

a)

$$UMg_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} = x_2$$

De forma semelhante, , encontramos a utilidade maginal de x_2 e temos que a $TMgS = \frac{UMg_1}{UMg_2} = \frac{x_2}{x_1}$

b)

De forma semelhante, temos que:

$$TMgS = \frac{2x_1 x^2}{2x_1^2 x_2}$$

c)

$$TMgS = \frac{1/x_1}{1/x_2}$$

Questão 3

a)

Demonstrando homogeneidade de grau zero:

$$
\begin{aligned}
x_1(p, w) &= x(kp, kw) && (1)\\
\left(\frac{2w}{2p_1 + p_2}\right) &= \left(\frac{k2w}{k2p_1 + kp_2}\right) && (2)\\
&= \left(\frac{k(ww)}{k(2p_1 + p_2)}\right) && (3)\\
&= \left(\frac{2w}{2p_1 + p_2}\right) && (4)
\end{aligned}
$$

Demonstrando Lei de Walras:

$$
\begin{aligned}
px &= w && (5)\\
p_1x_1 + p_2x_2 &= w && (6)\\
p_1\left(\frac{2w}{2p_1 + p_2}\right) + p_2\left(\frac{w}{2p_1 + p_2}\right) &= w && (7)\\
w\left(\frac{2p_1 + p_2}{2p_1 + p_2}\right) &= w && (8)\\
w &= w && (9)
\end{aligned}
$$

b)

Demonstrando grau de homogeneidade 0 para x_1, sendo os outros casos análogos:

$$
\begin{aligned}
x_1(p, w) &= x(kp, kw) && (10)\\
\left(\frac{p_2w}{(p_1 + p_2 + p_3)p_1}\right) &= \left(\frac{kp_2kw}{(kp_1 + kp_2 + kp_3)kp_1}\right) && (11)\\
&= \left(\frac{k^2p_2w}{k^2(p_1 + p_2 + p_3)p_1}\right) && (12)\\
&= \left(\frac{p_2w}{(p_1 + p_2 + p_3)p_1}\right) && (13)
\end{aligned}
$$

Demonstrando Lei de Walras

$$
\begin{align}
w &= px \tag{14}\\
&= p_1\left(\frac{p_2 w}{(p_1+p_2+p_3)p_1}\right) + p_2\left(\frac{p_3 w}{(p_1+p_2+p_3)p_2}\right) + p_3\left(\frac{\beta p_1 w}{(p_1+p_2+p_3)p_3}\right) \tag{15}\\
&= \left(\frac{p_2 w + p_3 w + \beta p_1 w}{p_1+p_2+p_3}\right) \tag{16}\\
&= \frac{w(\beta p_1 + p_2 + p_3)}{p_1+p_2+p_3} \tag{17}\\
&= w, \text{ se } \beta = 1 \tag{18}
\end{align}
$$

Questão 4

Provando homogeneidade de grau zero:

$$
\begin{align}
x_1(kp,kw) = \frac{kp_2}{kp_3} = \frac{p_2}{p_3} = x_1(p,w) \tag{19}\\
x_2(kp,kw) = -\frac{kp_1}{kp_3} = -\frac{p_1}{p_3} = x_2(p,w) \tag{20}\\
x_3(kp,kw) = \frac{kw}{kp_3} = \frac{w}{p_3} = x_3(p,w) \tag{21}
\end{align}
$$

Provando Lei de Walras:

$$p_1\left(\frac{p_2}{p_3}\right) + p_2\left(-\frac{p_1}{p_3}\right) + p_3\left(\frac{w}{p3}\right) = w$$

Os dois primeiros termos se anulam e os p_3 também se anulam no terceiro termo, sendo assim:

$$w = w$$

Questão 5

Cobb-Douglas

a)

Para mostrar que que é homotética, deve-se provar a homogeneidade de grau 1:

$$
\begin{aligned}
tu(x_1, x_2) &= u(tx_1, tx_2) && (22)\\
&= u(K(tx_1)^{\alpha}(tx_2)^{1-\alpha}) && (23)\\
&= Kt^{\alpha}x_1^{\alpha}t^{1-\alpha}x_2^{1-\alpha} && (24)\\
&= tKx_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha} && (25)
\end{aligned}
$$

b)

Para encontrar a demanda Walrasiana, ou seja, em função de p e de w, devemos maximizar a função sujeita à restrição orçamentária, sendo assim temos o seguinte lagrangeano:

$$
\mathcal{L} = Kx_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha} + \lambda(w - p_1x_1 - p_2x_2) \tag{26}
$$

Sendo assim, temos as seguintes condições de primeira ordem:

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \alpha K x_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha} - \lambda p_1 = 0 \tag{27}
$$

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = (1-\alpha)Kx_1^{\alpha}x_2^{-\alpha} - \lambda p_2 = 0 \tag{28}
$$

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = w - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \tag{29}
$$

Isolando λ e substituindo dentro de Equação 27, temos que:

$$
K\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha} = p_1\left(\frac{(1-\alpha)Kx_1^{\alpha}x_2^{-\alpha}}{p_2}\right)
$$

Podemos eliminar K dos dois lados. Além disso, para isolar x_2, dividimos ambos os lados por $x_1^{\alpha-1}$ e multiplicamos por x_2^{α}, restando:

$$
x_2 = \frac{p_1}{p_2}\frac{(1-\alpha)}{\alpha}x_1 \tag{30}
$$

Substituindo na Equação 29, temos que:

$$
w - p_1x_1 - p_2\left(\frac{p_1}{p_2}\frac{(1-\alpha)}{\alpha}x_1\right)
$$

$$p_1 x_1 + \left(p_1 \frac{(1-\alpha)}{\alpha} x_1\right) = w$$

$$p_1 x_1 \left(1 + \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\right) = w$$

$$p_1 x_1 \frac{1}{\alpha} = w$$

E chegamos à demanda Walrasiana de x_1:

$$x_1^*(p, w) = \frac{w\alpha}{p_1} \tag{31}$$

Similarmente, encontramos $x_2^*(p, w)$:

$$x_2^*(p, w) = \frac{w(1-\alpha)}{p_2} \tag{32}$$

c)

Para encontrarmos a função de utilidade indireta, precisamos substituir a demanda Walrasiana dentro da função utilidade:

$$v(p, w) = Kw \left(\frac{w\alpha}{p_1}\right)^{\alpha} \left(\frac{w(1-\alpha)}{p_2}\right)^{1-\alpha}$$

d)

e)

Para acharmos a demanda Hicksiana, devemos minimizar o gasto em função da utilidade, sendo assim, temos:

$$\mathcal{L} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \lambda(u - K x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha})$$

Condições de primeira ordem:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = p_1 + \lambda K \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} = 0 \tag{33}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = p_2 + \lambda K(1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha} = 0 \tag{34}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = u - Kx_1^{\alpha} x_2^{-\alpha}) = 0 \tag{35}$$

Isolando λ na Equação 34 e substituindo na Equação 33, temos:

$$p_1 - \frac{p_2 h K \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}}{K(1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha}} = p_1 - \frac{p_2 \alpha x_1^{-1} x_2^{1}}{(1-\alpha)} = 0$$

Isolando x_2:

$$x_2 = \frac{p_1}{p_2} \frac{(1-\alpha)}{\alpha} x_1 \tag{36}$$

Substituindo a Equação 36 na Equação 35:

$$u - Kx_1^{\alpha} \left(\frac{p_1}{p_2} \frac{1-\alpha}{\alpha} x_1 \right)^{1-\alpha} = 0$$

Isolando x_1:

$$x_1 = \frac{u}{K} \left(\frac{p_2}{p_1} \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} = h_1^*(p, u) \tag{37}$$

Semelhantemente, encontra-se $h_2^* = \frac{u}{K} \left(\frac{p_1}{p_2} \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{\alpha}$

f)

Para achar a função dispêndio, basta substituir a demanda Hicksiana dentro:

$$\begin{aligned} e(p, u) &= p_1 \frac{u}{K} \left[\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{p_2}{p_1} \right]^{1-\alpha} + p_2 \frac{u}{K} \left[\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{p_1}{p_2} \right]^{\alpha} && (38) \\ &= \frac{u}{K} p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha} \left[\frac{\alpha^{1-\alpha}}{(1-\alpha)^{1-\alpha}} + \frac{(1-\alpha)^{\alpha}}{\alpha^{\alpha}} \right] && (39) \\ &= \frac{u}{K} p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha} \left[\alpha^{-\alpha} (1-\alpha)^{-(1-\alpha)} \right] && (40) \end{aligned}$$

g)

Aplicando o Lema de Shephard, basta derivar a função dispêndio em relação ao preço:

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_1} = \frac{u}{K}\left(\frac{p_2}{p_1}\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} = h_1^*(p,u)$$

Nota: o expoente α que desce multiplicando ajuda na simplificação ao evidenciar o expoente dos parênteses dos termos à direita.

h)

Para encontrar os efeitos Renda, Substituição e Total, devemos usar a Equação de Slutsky.

CES

Questão 6

Podemos definir a renda real como $R = w - p_0 x$. A partir da Equação 31, temos que:

$$x - x_0 = \frac{R\alpha}{p_x} = \frac{(w - px_0)\alpha}{p_x}$$

Ou seja, como se gasta primeiro com x_0, há uma redução da reta orçamentária real.

Questão 7

a)

Para resolver a questão, devemos utilizar a Identidade de Roy, sendo assim:

$$x_1^*(p,w) = -\frac{-\alpha/p_1}{(\alpha+\beta)/w} = \frac{\alpha}{(\alpha+\beta)}\frac{w}{p_1}$$

Similarmente, para x_2:

$$x_2^*(p,w) = \frac{\beta}{(\alpha+\beta)}\frac{w}{p_2}$$

b)

Para encontrar a função dispêndio, basta isolar w:

$$\ln w = \frac{\alpha \ln p_1 + \beta \ln p_2 - K + u}{(\alpha + \beta)}$$

Usando propriedades logarítimicas e depois usando função exponencial, tem-se que:

$$e(p, u) = e^{\frac{u-K}{\alpha+\beta}} p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

Para chegar à Demanda Hicksiana, aplica-se o Lema de Shephard, que é a derivação da função dispêndio pelo preço:

$$h_1(p, u) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} e^{\frac{u-K}{\alpha+\beta}} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

Semelhantemente, para o outro bem:

$$h_2(p, u) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} e^{\frac{u-K}{\alpha+\beta}} \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

Questão 8

Para esta questão, considere $\alpha = 1/2$

Logo, a fim de maximizar a utilidade dada uma restrição orçamentária, temos as seguintes CPOs:

$$\alpha x_1^{\alpha-1} + \lambda p_1 = 0$$
$$(1 - \alpha) x_2^{-\alpha} + \lambda p_2 = 0$$
$$w - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$$

Igualando as equações, temos que:

$$\frac{(1 - \alpha) x_2^{-\alpha}}{p_2} = \frac{\alpha x_1^{\alpha-1}}{p_1}$$

Isolando:

$$x_2^{\alpha} = \frac{p_1}{p_2} \frac{\alpha}{(1 - \alpha)} x_1^{\alpha-1}$$

$$x_2 = \left(\frac{p_1}{p_2} \frac{\alpha}{(1-\alpha)x_1^{1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Reduzindo ao substituir α:

$$x_2 = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^2 x_1$$

Substituindo na restrição orçamentária:

$$w = p_1 x_1 + p_2 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^2 x_1$$

$$x_1^* = \frac{w}{p_1 + \frac{p_1^2}{p_2}}$$

$$x_1^* = \frac{p_2 w}{p_1 p_2 + p_1^2}$$

Similarmente:

$$x_2^* = \frac{p_1 w}{p_1 p_2 + p_2^2}$$

Questão 9

Questão 10

Questão 11

Questão 12

Questão 13

Questão 14

Questão 15