

# 1 Energi i termofysikk

## 1.1 Ideell gass

For lav-tetthets gasser gjelder

$$PV = NkT = nRT$$

## 1.2 Ekvipartisjon av energi

Gjelder for alle energiformer der formelen er en kvadratisk funksjon av koordinat- eller hastighetskomponent. Dersom det i et system er  $N$  molekyler med  $f$  frihetsgrader hver, ingen ikke-kvadratiske temperaturavhengige former for energi er den midlere (totale for store  $N$ ) termiske energien gitt ved

$$U_{\text{termisk}} = Nf\frac{1}{2}kT$$

Tar ikke hensyn til for eksempel hvileenergi, så tryggest å bruke for endringer i energi med endringer i temperatur, og unngå tilfeller med faseoverganger eller andre reaksjoner der kjemiske bindinger frigjør/krever energi.

### 1.2.1 Telling av frihetsgrader

Telling av frihetsgrader. Monoatomisk gass: Kun translasjonell bevegelse i tre dimensjoner gir frihetsgrader, så  $f = 3$ . Diatomisk gass: Translasjonell bevegelse i 3D + rotasjon om to akser (aksen gjennom lengden av molekylet teller ikke pga. kvantemekanikk), så  $f = 5$ . Polyatomiske molekyler kan som regel roteres om tre akser, som gir det siste rotasjonsbidraget. Vibrasjon gir både kinetisk og potensiell energi bidrag, altså øker frihetsgraden med to. Ved romtemperatur bidrar ikke vibrasjon til termisk energi, ved høyere temperaturer kommer dette bidraget inn.

I et fast stoff kan atomer vibrere i tre ortogonale retninger, som gir 6 frihetsgrader. Noen av disse kan fryses ut ved romtemperatur. Væsker er som regel mer kompliserte, ekvipartisjonsteoremet gjelder for translasjonell bevegelse, men ikke for andre bidrag siden de er ikke-kvadratiske.

## 1.3 Varmer og arbeid

Overføringer av energi klassifiseres på to måter:

**Varmer:** overføring av energi fra et objekt til et annet på grunn av innbyrdes forskjell i temperatur. Ledning (molekylær kontakt), konveksjon (bevegelse av områder av gass/væske) og elektromagnetisk stråling.

**Arbeid** er enhver annen overføring av energi inn eller ut av et system.

Endringen i energi for et system er summen av varme og arbeid (termodynamikkens første lov)

$$\Delta U = Q + W$$

## 1.4 Kompresjonsarbeid

Arbeid som behøves for å redusere et volum av gass (trykk  $P$ )  $\Delta V$  ved **kvasistatisk** kompresjon (gassen rekker hele tiden å justere til likevekt).

$$W = -P\Delta V \quad (\text{ved } P \neq P(V)) \quad W = -\int_{V_i}^{V_f} P(V)dV \quad (\text{ved } P = P(V))$$

To idealiserte kompresjonstyper for ideell gass: **isotermal kompresjon** (så sakte at temperatur i gassen er uendret) og **adiabatisk kompresjon** (så kjapp at ingen varme slipper ut av systemet i prosessen).

**Isotermal kompresjon:** Kvasistatisk, så

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} P dV = -NkT \int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V} dV = NkT \ln \frac{V_i}{V_f}$$

Samme energi slipper ut ved varme (vises med første lov).

**Adiabatisk kompresjon:** Ingen varme unnslipper,  $\Delta U = Q + W = W$ . Bruk ekvipartisjon  $dU = \frac{f}{2} Nk dT$  og kvasistatisk kompresjon, bruk ideell gass lov for trykket og løs separabel diffign. Får (med  $\gamma = f/(f+2)$ )

$$VT^{f/2} = \text{constant} \xrightarrow{\text{Ideell gass lov}} V^\gamma P = \text{constant}$$

## 1.5 Varmekapasiteter

Varmekapasitet defineres som  $C = Q/\Delta T$  (varme per grad temperaturøkning). Tvetydig, avhenger av omstendigheter (mengde stoff/gass, arbeid osv.). Derfor har man varmekapasitet med  $W = 0$  (som regel er  $V$  da konstant, ingen kompresjon):

$$C_V = \left( \frac{\Delta U}{\Delta T} \right)_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

Ofte ekspanderer gasser når de varmes opp, da tapes energi ved arbeid på omgivelsene. Dersom det er konstant trykk i omgivelsene er

$$C_P = \left( \frac{\Delta U - (-P\Delta V)}{\Delta T} \right)_P = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_P + P \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

**Latent varme:** Ved faseoverganger øker ikke temperaturen ved tilførsel av energi. Da er varmekapasiteten per def uendelig:  $C = Q/\Delta T = Q/0 = \infty$ . Energien som kreves for å fullføre faseovergangen kalles den latente varmen  $L = Q/m$ , og er varmen per masse som kreves.

**Entalpi:** Entalpi er energien til et system + ekspansjonsarbeidet som kreves for å putte det i det systemet det er i:  $H = U + PV$ . Observer at  $C_P = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P$ .

## 1.6 Proseshastigheter (rates of processes)

Orker ikke dette nå.

## 2 Termodynamikkens andre lov

### 2.1 To tilstands systemer - paramagnetisme

**Mikrotilstand** er alle partiklenes tilstander, **makrotilstand** sier noe mer generelt om systemet. Multiplisiteten  $\Omega(s)$  til en makrotilstand  $s$  er antallet mikrotilstander tilhørende makrotilstanden. Sannsynligheten for en makrotilstand er  $\Omega(s)/\Omega(\text{alle})$ . I en to-tilstands paramagnet kan spinnene peke opp eller ned,  $N = N_\uparrow + N_\downarrow$  er det totale antallet spinn.

$$\Omega(N_\uparrow) = \binom{N}{N_\uparrow} = \frac{N!}{N_\uparrow!(N - N_\uparrow)!} = \frac{N!}{N_\uparrow!N_\downarrow!}$$

## 2.2 Einsteinmodellen for faste stoffer

System med et vilkårlig antall energi enheter", alle med samme størrelse. Dette er tilfellet for harmonisk oscillator, med steg  $hf$  (Referansenivå settes til 0). Disse oscillatorene gjelder for atomene i faste stoffer, 3 oscillatorer per atom pga frihetsgrader. Multiplisiteten til Einstein solid med  $N$  oscillatorer og  $q$  energi enheter er

$$\Omega(N, q) = \binom{q + N - 1}{q} = \frac{(q + N - 1)!}{q!(N - 1)!}$$

## 2.3 Interagerende systemer

Har nå to Einstein solids,  $A$  og  $B$ , som kan dele energi. Systemene uavhengige av hverandre, så for en gitt energifordeling er multiplisiteten  $\Omega_{\text{tot}} = \Omega_A \Omega_B$ .

**Fundamental antagelse i statistisk mekanikk:** I et isolert system i termisk likevekt er enhver tilgjengelig mikrotilstand like sannsynlig. Merk at denne antagelsen forutsetter at tidsskalaen er mye større enn tiden energiforskyvninger skjer.

Observerer at multiplisiteten er langt høyere for de jevnere fordelingene av energi, så med antagelsen over må en måling av jevn fordeling være overveldende sannsynlig. **Termodynamikkens andre lov** (versjon 1): Multiplisiteten øker når et system er for seg selv, fordi det er overveldende sannsynlig.

## 2.4 Store systemer

### 2.4.1 Veldig store tall

**Små tall:** 2,6,98. **Store tall:** Eksponentiering av små tall, f.eks Avogadros tall  $\sim 10^{23}$ . Regneregel:  $10^{23} + 23 = 10^{23}$ . **Veldig store tall:** Eksponentiering av store tall, f.eks  $10^{10^{23}}$ . Regneregel:  $10^{10^{23}} \times 10^{23} = 10^{(10^{23} + 23)} = 10^{10^{23}}$ . Logartime gjør et veldig stort tall til et stort tall osv, dette brukes mye.

### 2.4.2 Stirlings Approksimasjon

$$N! \approx N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N}$$

Korrekt i grensen  $N \gg 1$ . God approksimasjon for logaritmen er gitt som  $\ln N! \approx N \ln N - N$ .

### 2.4.3 Multiplisiteten til et stort Einstein solid

Bruk Stirling på multiplisiteten til Einstein solid, med en rekkeutvikling av en logaritme underveis. I grensen  $q \gg N$  fåes  $\Omega(N, q) \approx \left(\frac{eq}{N}\right)^N$

### 2.4.4 Skarpheten til multiplisitetsfunksjonen

For to interagerende Einstein solids med  $q \gg N$  er  $\Omega = \left(\frac{e}{N}\right)^{2N} (q_A q_B)^{2N}$ . Har en skarp topp ved  $\Omega = (e/N)^{2N} (q/2)^{2N}$ , altså  $q_A = q_B = q/2$ , en lik fordeling av energi. Fordelingen er Gaussisk og bredden er gitt ved  $q/\sqrt{N}$ . For store  $N$  vil fluktuasjoner være umulige å måle, denne grensen kalles den **termodynamiske grensen**.

## 2.5 Ideell gass

Utleddning viser at  $\Omega(U, V, N) \approx f(N) V^N U^{3N/2}$ , der  $f(N) = \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N}} \frac{\pi^{3N/2}}{(3N/2)!} (2m)^{3N/2}$ . Kombineres to av disse (kun energiutveksling) fåes  $\Omega_{\text{total}} = [f(N)]^2 (V_A V_B)^2 (U_A U_B)^{3N/2}$ , samme type uttrykk som for Einstein solid. Smal peak med høye multiplisiteter.

## 2.6 Entropi

Definerer entropi som (fordi multiplisitet er et veldig stort tall, og store tall er enklere å jobbe med)

$$S = k \ln \Omega$$

Dimensjon energi per temperatur, enhet  $J/K$ . En nyttig egenskap:  $S_{\text{tot}} = k \ln \Omega_{\text{tot}} = k \ln (\Omega_A \Omega_B) = S_A + S_B$ .

**Termodynamikkens andre lov:** Ethvert stort system i likevekt vil være i makrotilstanden med størst entropi (utenom fluktuasjoner som vanligvis er for små til å måle). Altså: Entropi har en tendens til å øke.

Entropi kan ikke reduseres, enhver reduksjon i entropi i et system har skapt mer entropi utenfor systemet.

### 2.6.1 Entropi for en ideell gass

### 2.6.2 Blandingsentropi

## 3 Interaksjoner og implikasjoner

### 3.1 Temperature

Se på system med to Einstein solids med noen hundre oscillatorer hver som deler 100 enheter energi. Plott entropi (individuelle og total) mot energi. Observer at ved likevekt er  $\frac{\partial S_A}{\partial U_A} + \frac{\partial S_B}{\partial U_A} = 0 \implies \frac{\partial S_A}{\partial U_A} = -\frac{\partial S_B}{\partial U_B}$ . Dvs. det som er likt for begge systemer når de er i likevekt er stigningstallet til entropi mot energigrafene, som da må ha noe med temperatur å gjøre (siden det er slik temperatur er definert). Observer videre at det systemet med lav energi (da har det andre høy energi) har en brattere  $S$  mot  $U$  graf, så en økning i energi skaper mer entropi enn det høy energi systemet mister, så denne prosessen skjer av seg selv ifølge den andre loven. Høyt stigningstall korresponderer med lav temperatur, og lavt med høy temperatur. Dette gir:

$$\frac{1}{T} = \left( \frac{\partial S}{\partial U} \right)_{N,V}$$

### 3.2 Entropi og varme

#### 3.2.1 Finne termodynamiske størrelser for et system

1. Bruk kvantemekanikk og/eller kombinatorikk til å finne et uttrykk for multiplisiteten som funksjon av  $U, V, N$  og/eller andre variable. Må ofte bruke Stirlings approksimasjon og se på grenser.
2. Ta logaritmen for å finne entropien.
3. Deriver entropi mhp. energi for å finne temperatur som funksjon av  $U$  og evt. andre variable.
4. Deriver  $U(T)$  med hensyn på  $T$  for å finne varmekapasiteten (med andre variable holdt konstant). Gjør andre operasjoner for å finne andre variable.

#### 3.2.2 Måle entropier

#### 3.2.3 Makroskopisk syn på entropi

### 3.3 Paramagnetisme

$N$  spin  $1/2$  dipoler.  $N_{\uparrow} : q = -\mu B$  og  $N_{\downarrow} : q = \mu B$ . Total energi  $U = N_{\uparrow}(-\mu B) + N_{\downarrow}\mu B = \mu B(N_{\downarrow} - N_{\uparrow}) = \mu B(N - 2N_{\uparrow})$ . Magnetisering  $M = \mu(N_{\uparrow} - N_{\downarrow}) = \frac{-U}{B}$ . Brukes Stirling på multiplisitetsfunksjonen og stegene over fåes  $U = -N\mu B \tanh\left(\frac{\mu B}{kT}\right)$ .

### 3.4 Mekanisk likevekt og trykk

Hva med når systemer  $A$  og  $B$  kan utveksle både energi og volum? Utveksling av energi skjer på grunn av temperaturer, utveksling av volum styres av trykk. Ved likevekt er  $\frac{\partial S}{\partial V_A} = 0$  (også ingen endring med hensyn på energi). Trykket må være likt i begge sider ved likevekt, og ved stor endring i entropi per endring i volum vil trykket være stort, gassen ønsker å ekspandere. Relasjonen blir

$$P = T \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_{U,N}$$

#### 3.4.1 Den termodynamiske identiteten

Anta det skjer en prosess på et system der energien og volumet endres med  $\Delta U$  og  $\Delta V$  (volum konstant under energiendring, energi konstant under volumendring). Prosessen kan deles opp i to steg, og endringen i entropi er gitt ved summen av endringene fra de to prosessene. Så ved identitetene over er

$$dS = \left( \frac{\partial S}{\partial U} \right)_V dU + \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_U dV$$

Dette kalles **den termodynamiske identiteten**, og skrives ofte om til (merk at disse ligningene forutsetter at andre variable, som  $N$ , holdes konstant)

$$dU = TdS - PdV$$

#### 3.4.2 Entropi og varme igjen

Uttrykket over ligner veldig på  $dU = Q + W$  (termodynamikkens første lov). Sammenligningen gjelder så lenge volumendringer skjer kvasistatisk og andre størrelser er konstante (f.eks  $N$ ). Da er  $W = -PdV$ , så  $Q = TdS$ , selv om det gjøres arbeid på systemet. I tilfellet der endringen er adiabatisk  $Q = 0$  og kvasistatisk er entropien uendret. Dette kalles en **isentropisk** prosess.

### 3.5 Diffusiv likevekt og kjemisk potensial

To systemer i termisk likevekt har like temperaturer. Mekanisk likevekt tilsvarer like trykk. Hva med diffusiv likevekt? Betrakt to systemer som kan utveksle partikler og energi, men er under konstant volum. Antar samme "art", f.eks  $H_2O$ , men tilstandsformer er vilkålig. Antar total energi og antall partikler er konstant, så ved likevekt er  $\left( \frac{\partial S}{\partial U_A} \right)_{N_A, V_A} = 0$  og  $\left( \frac{\partial S}{\partial N_A} \right)_{U_A, V_A} = 0$ . Ved likevekt er  $\frac{\partial S}{\partial N_A} = \frac{\partial S}{\partial N_B}$  ved konstant energi og volum. Ganger opp med temperatur og definerer det kjemiske potensialet

$$\mu \equiv -T \left( \frac{\partial S}{\partial N} \right)_{U,V}$$

Systemer overlatt til seg selv vil dermed gå mot lavere kjemiske potensial, siden dette gir høyere entropi. Altså strømmer partikler fra systemer med høyere  $\mu$  til lavere.

Vi kan nå utvide den termodynamiske identiteten ytterligere. Total endring i entropi ved å endre  $U$  med  $dU$ ,  $P$  med  $dP$  og  $N$  med  $dN$  er

$$\begin{aligned} dS &= \left( \frac{\partial S}{\partial U} \right)_{N,V} dU + \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_{N,U} dV + \left( \frac{\partial S}{\partial N} \right)_{U,V} dN \\ &= \frac{1}{T} dU + \frac{P}{T} dV + \mu dN \end{aligned}$$

Eller, løst for  $dU$  fåes

$$dU = TdS - PdV + \mu dN$$

De to siste leddene kalles vanligvis henholdsvis mekanisk og kjemisk arbeid, det første leddet er som tidligere varme. Dersom det er flere typer partikler/atomer har de hvert sitt kjemiske potensial, da erstattes det siste leddet av en sum av  $\mu_i dN_i$  ledd.

## 4 Motorer og kjølemaskiner

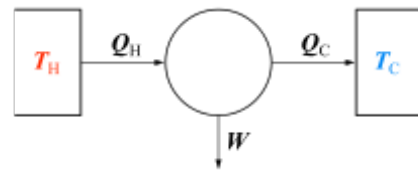
### 4.1 Varmekraftmaskiner

En **varmekraftmaskin** er et apparat som absorberer varme og omdanner deler av energien til arbeid. Et eksempel er dampturbinen. Grunnen til at kun deler av energien kan omdannes er at når varme strømmer inn kommer det også entropi, og denne må en kvitte seg med før prosessen kan starte om. Varme kommer fra det **varme reservoiret**  $T_H$  og varmen som dumpes dumpes til det **kalde reservoiret**  $T_C$ . Arbeidet motoren gjør er  $W$ . Alle størrelsene er positive. Effektivitet defineres som arbeid ut per varme inn

$$e \equiv \frac{W}{Q_h}$$

Hvordan maksimere effektiviteten? Energibevaring gir  $Q_h = Q_c + W$ , som gir effektiviteten  $e = \frac{Q_h - Q_c}{Q_h} = 1 - Q_c/Q_h$ .

Videre, entropien i systemet kan ikke bli mindre, så  $Q_c/T_c \geq Q_h/T_h$ . Settes dette inn i effektivitetsuttrykket over får man  $e \leq 1 - T_c/T_h$ . Velg  $T_c$  og  $T_h$  slik at forholdet blir så lite som mulig. Den første loven sier 'du kan ikke vinne', og den andre loven sier at 'du går uansett i underskudd'.



#### 4.1.1 Carnotsyklusen

### 4.2 Kjølemaskiner

Kjølemaskiner er varmekraftmaskiner kjørt baklengs. Varme går fra det kalde reservoiret til det varme ved tilførsel av arbeid som elektrisk energi. Kjøleskapet er det kalde reservoiret og systemet utenfor det varme. 'Søppelvarme' dumpes ut i kjøkkenet. COP (coefficient of performance) defineres som

$$\text{COP} = \frac{\text{benefit}}{\text{cost}} = \frac{Q_c}{W}$$

Kan som over bruke første og andre lov til å vise begrensninger for COP.

## 5 Fri energi og kjemisk termodynamikk

### 5.1 Fri energi som tilgjengelig arbeid

**Entalpi** er energien til et system pluss arbeidet som behøves for å lage plass ved å dytte atmosfære/annet med trykk  $P$  vekk. Altså energi som trengs hvis systemet skal dannes ut av intet og plasseres i et annet system:

$$H \equiv U + PV$$

**Helmholtz fri energi** er energien som trengs for å lage et system, minus varmen man får 'gratis' fra omliggende atmosfære med temperatur  $T$ . Ekvivalent er dette energien som kan hentes ut dersom systemet

annihileres, entropi kan ikke minke så entropi må dumpes ut som varme.  $F$  er da energien man får ut som arbeid:

$$F \equiv U - TS$$

**Gibbs fri energi** er en kobinasjon av de over.

$$G \equiv U - TS + PV$$

Som regel betraktes ikke situasjoner der hele systemet annihileres, så det er bedre å se på endringer i størrelsene over. Da er  $\Delta F = \Delta U - T\Delta S = Q + W - T\Delta S$ . Dersom ingen entropi dannes er  $Q = T\Delta S$ , og  $\Delta F = W$ . Dersom entropi dannes er  $T\Delta S > Q$ , og  $\Delta F < W$ , så ved konstant temperatur er

$$\Delta F \leq W$$

Samme argumentasjon for konstant trykk og temperatur og at  $W = -P\Delta V + W_{\text{annet}}$  gir

$$\Delta G \leq W_{\text{annet}}$$

### 5.1.1 Elektrolyse, brenselceller og batterier

Et eksempel på bruk av  $\Delta G$ , betrakt reaksjonen  $\text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_2 + \frac{1}{2}\text{O}_2$ , elektrolyse av vann til hydrogen og oksyngengass. Fra tabell er  $\Delta H = 286$  kJ (energien man ville fått dersom man brant et mol hydrogen). I denne reaksjonen må denne energien altså tilføres,  $P\Delta V = 4$  kJ av energien går til å dytte atmosfære vekk, resten blir værende i systemet. Hvor mye må tilføres ved arbeid og hvor mye ved varme? Fra tabeller er  $S_{\text{H}_2\text{O}} = 70$  J/K,  $S_{\text{H}_2} = 131$  J/K og  $S_{\text{O}_2} = 205$  J/K. Endring i entropi er  $\Delta S = S_1 - S_0 = (131 + 0.5 \cdot 205) - 70 = 163$  J/K, entropien øker. Maksimal energiendring ved varme er da  $T\Delta S = 49$  kJ. Energien som behøves via elektrisk arbeid er forskjellen  $286 - 49 = 237$  kJ. Dette er endringen i Gibbs fri energi, det minste arbeidet som behøves for å få reaksjonen til å gå:  $\Delta G = 237$  kJ =  $\Delta H - T\Delta S = 286$  kJ -  $(298 \text{ K})(163 \text{ J/K})$ .

### 5.1.2 Termodynamiske identiteter

Kan lage identiteter for de overnevnte energiene, betrakt små endringer i  $H, U, P$  og  $V$  og bruk den termodynamiske identiteten til å eliminere  $dU$ . Gir

$$dH = TdS + VdP + \mu dN$$

$$dF = -SdT - PdV + \mu dN$$

$$dG = -SdT + VdP + \mu dN$$

Fra disse kan en rekke partiellderiverte relasjoner finnes. For eksempel

$$S = - \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_{P,N}$$

kan lages ved å bruke den siste og holde  $P$  og  $N$  konstant, dvs  $dP = dN = 0$ .

## 5.2 Fri energi som kraft mot likevekt

**Reservoir** av energi: System stort nok til at det kan utveksle uendelig energi uten å endre sin temperatur. Betrakt et system med

## 5.3 Faseoverganger

En **faseovergang** er en diskontinuerlig endring i egenskapene til et stoff når noe rundt bare endres infinitesimalt. Et **fasediagram** viser likevektsfaser som funksjon av trykk og temperatur. Trykket der en gass kan sameksistere med flytende fase kalles **damptrykket**. Punktet (kombinasjonen av  $P$  og  $T$ ) der alle tre faser sameksisterer kalles **trippelpunktet**. Ved lavere temperaturer kan ikke væskeformen eksistere, fast stoff sublimerer til gass.

## 6 Boltzmann statistikk

### 6.1 Boltzmann faktoren

**Degenerert:** Flere uavhengige tilstander som tilsvarer samme energinivå. Betrakt atom med energinivåer og i kontakt med reservoir. Hva er sannsynligheten for at atomet er i tilstanden  $s_1$  eller  $s_2$ ? Tilstandene har energier  $E(s_1)$  og  $E(s_2)$  og sannsynligheter  $P(s_1)$  og  $P(s_2)$ . Atom og reservoirt er et lukket system, så alle tilgjengelige mikrotilstander like sannsynlige. Har tilsvarende multiplisiteten til reservoirt ved disse tilstandene:  $\Omega_R(s_1)$  og  $\Omega_R(s_2)$ . Logikk tilsier at

$$\frac{P(s_2)}{P(s_1)} = \frac{\Omega_R(s_2)}{\Omega_R(s_1)} = \frac{e^{S_R(s_2)/k}}{e^{S_R(s_1)/k}} = e^{[S_R(s_2) - S_R(s_1)]/k} = \frac{e^{-E(s_2)/kT}}{e^{-E(s_1)/kT}}$$

EkspONENTEN nest siste likhet er endring i entropi. Bruker termodynamisk identitet  $dS_R = 1/T(dU_R + PdV_R - \mu dN_R)$ , kaster bort de siste to leddene (entropiendring som følge av volumendring neglisjerbar i forhold til energitilstandsendring, og antallet partikler er konstant). Kan skrive om entropiendringene til energiendringer, får siste likhet over. Faktorene i siste uttrykk kalles Boltzmann faktorer, disse er sannsynligheter så lenge de normaliseres med en partisjonsfunksjon  $Z$ .

$$P(s) = \frac{1}{Z} e^{-E(s)/kT}$$

Observasjoner: Sannsynligheten går ned for høyere energis tilstander.

#### 6.1.1 Partisjonsfunksjonen

Har ved loven om total sannsynlighet (setter ofte  $\beta = 1/kT$ )

$$Z = \sum_s e^{-\beta E(s)}$$

### 6.2 Forventningsverdier (gjennomsnittsverdier)

$$\langle X \rangle = \sum_s X(s)P(s) = \sum_s X(s)e^{-\beta E(s)}$$

Husk at forventningsverdier er additive, trenger bare å regne ut gjennomsnittlig energi til en partikkel og gange med antallet partikler for å finne total energi.

### 6.3 Ekvipartisjonssteoremet - Bevis

Anta kvadratiske frihetsgrader, dvs  $E(q) = cq^2$  der  $c$  er en konstant og  $q$  er en romlig eller momentum koordinat ( $x$ ,  $p_x$  og  $L_x$  er eksempler). Anta tilstandene er  $\approx$ infinitesimalt diskretisert i deler  $\Delta q$ . Har  $Z = \sum_q e^{-\beta E(q)} = \sum_q e^{-\beta cq^2} = \frac{1}{\Delta q} \sum_q e^{-\beta cq^2} \Delta q$ . Approksimerer summen som et integral, bytte variabel til  $x = \sqrt{\beta cq}$  med



$dq = dx/\sqrt{\beta c}$ . Får  $Z = \frac{1}{\Delta q} \frac{1}{\sqrt{\beta c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = C\beta^{-1/2}$  der  $C = \sqrt{\pi/c}/\Delta q$ . Forventningsverdien til energi er da gitt som (dette blir ekvipartisjonssteoremet)

$$\langle E \rangle = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \dots = \frac{1}{2} kT$$

Gjelder ikke for kvantemekaniske systemer siden antallet distinkte tilstander som har signifikante sannsynligheter blir for liten, og integralapproksimasjonen blir dårlig. Gjelder ikke for lave temperaturer, siden for få tilstander har store nok bidrag.

## 6.4 Maxwells hastighetsfordeling - utledning

Ønsker å finne sannsynlighetstetthet for molekylhastigheter i en ideell gass. Forventer at tettheten  $D$  oppfyller følgende proporsjonalitet

$$D(v) \propto (\text{Sannsynlighet for å ha hastighet } \mathbf{v}) \times (\text{Antall vektorer } \mathbf{v} \text{ som finnes for en hastighet } v) = 4\pi v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

Den første faktoren finnes enkelt ved at energien er  $mv^2/2$ , så proporsjonaliteten til sannsynligheten er gitt ved Boltzmannfaktoren  $e^{-mv^2/2kT}$ . Den andre finnes ved å betrakte arealet til sfæren av mulige momentum vektorer, som har areal  $4\pi v^2$ . Proporsjonalitetskonstanten er effektivt en normaliseringskonstant. Denne kan regnes ut til resultatfordelingen

$$D(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

## 6.5 Partisjonsfunksjoner og fri energi

$$F = -kT \ln Z \quad Z = e^{-F/kT}$$

Fra denne kan entropi, trykk og kjemisk potensial regnes ut:

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} \quad P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} \quad \mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V}$$

## 6.6 Partisjonsfunksjoner for sammensatte? (composite) systems

Hvordan relateres  $Z$  for et system til  $Z$  for hver partikkel? Betrakter først system med to partikler. Hvis disse ikke interagerer med hverandre er den totale energien  $E_1 + E_2$ , og

$$Z_{\text{tot}} = \sum_s e^{-\beta[E_1(s)+E_2(s)]} = \sum_s e^{-\beta E_1(s)} e^{-\beta E_2(s)}$$

der summen er over alle tilstandene til det sammensatte systemet. Hvis, i tillegg, partiklene er adskillebare er tilstandene for det sammensatte systemet ekvivalent med settet med alle mulige par av tilstander

$$Z_{\text{total}} = \sum_{s_1} \sum_{s_2} e^{-\beta E_1(s_1)} e^{-\beta E_2(s_2)} = \sum_{s_1} e^{-\beta E_1(s_1)} \sum_{s_2} e^{-\beta E_2(s_2)} = Z_1 Z_2$$

(Distinguishable, noninteracting particles)

Hvis partiklene er ikke-adskillebare er

$$Z_{\text{total}} = \frac{1}{2} Z_1 Z_2 \quad (\text{Noninteracting, undistinguishable particles})$$

Denne er ikke helt korrekt ettersom det er noen ledd i dobbeltsummen over der begge partiklene er i samme tilstand, disse ble ikke telt dobbelt og burde ikke kuttet bort. I ideell gass og lignende systemer er sjansene for at to partikler er i samme tilstand neglisjerbare. Generelt, for  $N$  partikler er

$$Z_{\text{total}} = Z_1 Z_2 \dots Z_N \quad (N \text{ noninteracting, distinguishable particles})$$

$$Z_{\text{total}} = \frac{1}{N!} Z_1^N \quad (N \text{ noninteracting, indistinguishable particles})$$

## 6.7 Ideel gass igjen

# 7 Kvantestatistikk

## 7.1 Gibbsfaktoren

Samme utledning som for Boltzmannfaktoren, men denne gangen kan systemet utveksle partikler med reservoiret, det er i diffusiv likevekt. Tar med  $\mu dN$  leddet fra termodynamisk identitet, endring for reservoiret er lik endring for systemet, får faktorer på formen

$$P(s) = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-[E(s) - \mu N(s)]/kT} \quad \text{der } \mathcal{Z} = \sum_s e^{-[E(s) - \mu N(s)]/kT}$$

kalles **Gibbs summen** og summen går over alle mulige tilstander (inkludert alle mulige verdier for  $N$ ). Dersom det er flere typer partikler blir  $\mu dN$  leddet en sum over  $\mu_i dN_i$ , og Gibbs faktoren blir  $e^{-[E(s) - \mu_A N_A(s) - \mu_B N_B(s)]/kT}$  for et tilfelle med to typer partikler.

### 7.1.1 Eksempel: Karbonmonoksidforgiftning

## 7.2 Bosoner og Fermioner

Gibbsfaktorer sin viktigste anvendelse er i **kvantestatistikk**. Da er det ofte så få mulige tilstander eller så høy tetthet at det er en betydelig sannsynlighet for at identiske partikler ønsker å ta opp samme en-partikkels tilstand. Partisjonsfunksjonen for system med  $N$  ikke-skillbare, ikke-interagerende partikler  $Z = Z_1^N/N!$  i forrige kapittel gjelder kun når ingen partikler er i samme tilstand.

Noen partikler kan oppta samme tilstand. Partikler som kan dele samme tilstand med hverandre kalles **bosoner** (for eksempel fotoner, pioner, helium-4 atomer). Mange partikler kan ikke dele samme tilstand, disse kalles **fermioner**, og eksempler er elektroner, protoner, osv. Regelen som sier dette kalles **Paulis eksklusjonsprinsipp**. Partikler med heltalls spinn er bosoner, halvtallige spinn er fermioner.

I mange tilfeller er det irrelevant om partiklene er bosoner eller fermioner. Dette gjelder når antallet tilgjengelige tilstander er langt større enn antallet partikler  $Z_1 \gg N$ . Med uttrykket for enpartikkels partisjonsfunksjon for ideell gass blir kravet  $V/N \gg v_Q$  der  $V$  er volumet til gassen,  $N$  er antallet partikler og  $v_Q$  er kvantevolumet (omtrent den gjennomsnittlige de Broglie bølgelengden i tredje potens). Altså må gjennomsnittlig avstand mellom partiklene være mye større enn den gjennomsnittlige de Broglie bølgelengden. Når avstandene blir for små og kravet ikke holder vil bølgefunksjonene begynne å overlappe, og oppførselen blir helt annerledes enn for en ideell gass. Veldig høy tetthet eller lave temperaturer gjør at dette skjer.

### 7.2.1 Distribusjonsfunksjoner

Betrakter en-partikkel tilstanden til et system som har energi  $\epsilon$  når en partikkel tar den opp og energi 0 når den ikke er tatt opp. Sannsynligheten for at den er tatt opp av  $n$  partikler er

$$P(n) = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-(n\epsilon - \mu n)/kT} = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-n(\epsilon - \mu)/kT}$$

Gibbs summen er enkel dersom partiklene er fermioner,  $\mathcal{Z} = 1 + e^{-(\epsilon - \mu)/kT}$ . Forventningsverdien til antallet tilstander tatt opp (kalles **okkupans**) er

$$\langle n \rangle = \sum_n n P(n) = \frac{e^{-n(\epsilon - \mu)/kT}}{1 + e^{-(\epsilon - \mu)/kT}} = \frac{1}{e^{(\epsilon - \mu)/kT} + 1}$$

Dette kalles **Fermi-Dirac fordelingen**.

Dersom partiklene er bosoner kan  $n$  være ethvert ikke-negativt heltall, så Gibbs summen er

$$\mathcal{Z} = 1 + e^{-(\epsilon-\mu)/kT} + e^{-2(\epsilon-\mu)/kT} + \dots = 1 + e^{-(\epsilon-\mu)/kT} + (e^{-(\epsilon-\mu)/kT})^2 + \dots = \frac{1}{1 - e^{-(\epsilon-\mu)/kT}}$$

Gjennomsnittlig antall partikler i tilstanden er (sett  $x = (\epsilon - \mu)/kT$ )

$$\langle n \rangle = \sum_n n P(n) = \sum_n n \frac{e^{-nx}}{\mathcal{Z}} = -\frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_n \frac{\partial}{\partial x} e^{-nx} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial x} = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/kT} - 1}$$

Dette kalles **Bose-Einstein fordelingen**. Begge disse fordelingene reduserer til Boltzmannfordelingen i grensen der  $\epsilon \gg \mu$ .

### 7.3 Degenererte Fermi gasser

## 8 Konstanter og annet nyttig

### 8.1 Fysiske konstanter

$$\begin{aligned} k &= 1.381 \times 10^{-23} \text{ J/K} = 6.617 \times 10^{-5} \text{ eV/K} \\ N_A &= 6.022 \times 10^{23} \\ R &= 8.315 \text{ J/mol}\cdot\text{K} \\ h &= 6.626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} = 4.136 \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s} \end{aligned}$$

### 8.2 Konvertering mellom enheter

### 8.3 Viktigste formler

$$\langle E \rangle = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}$$