Solutions devoir 1

0.22) a)-e) 10 pts   Bonus: 0.39) 4 pts.

0.24) 2 pts

0.26) 4 pts

0.29) 8 pts.

0.22) a) $f(n) = n^2$, $g(n) = n \log n$.

On remarque: $\frac{\partial}{\partial n} \log_b n = \frac{1}{n \ln b}$ ($\ln b$ est const.)

Par le test de la limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n \log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log n} \overset{R.H.}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n \ln b}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \ln b$$

$$= \infty.$$

et donc $f(n) \notin O(g(n))$.

b) $f(n) = n + d$, $g(n) = n - d$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+d}{n-d} \overset{R.H.}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1+0}{1-0} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

alors $f(n) \in O(g(n))$ (et puisqu'on a aussi $g(n) \in O(f(n))$, on a $f(n) \in \Theta(g(n))$.)

0.22) b) (suite):

Une autre façon de faire:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+d}{n-d} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-d+2d}{n-d} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-d}{n-d} + \frac{2d}{n-d}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{2d}{n-d}$$

$$= 1 + 0$$

$$= 1.$$

On remarque que $\frac{2d}{n-d}$ va vers zéro, car aussi grand qu'on choisisse d, il deviendra éventuellement petit lorsque n ira à l'infini.

c) $f(n) = \log n$, $g(n) = \sqrt{n}$

Ici, on a que $\frac{\partial}{\partial n} \sqrt{n} = \frac{\partial}{\partial n} n^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} n^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

alors:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}} \overset{R.H.}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n \ln b}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{2\sqrt{n}}{1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$$

et donc $f(n) \in O(g(n))$.

0.22) d) $f(n) = 2^n$ et $g(n) = n!$

Ici, on ne s'en sortira pas avec la règle de l'Hôpital (les dérivées de 2^n et de $n!$ ne sont pas très gentilles.)

Remarquons plutôt :

$$2^n = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cdots 2}_{n \text{ fois}}$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots (n-1) \cdot n$$

et puis :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cdots \quad 2 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \quad (n-1) \cdot n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{1}\right)\underbrace{\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\cdots\left(\frac{2}{n-1}\right)\left(\frac{2}{n}\right)}_{\substack{\text{tous } < 1, \\ \text{et le produit } \ll 1.}}$$

$$= 0.$$

donc $2^n \in O(n!)$

e) $f(n) = e^n$, $g(n) = 2^n$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{e}{2}\right)^n = \infty,$$

puisque $\left(\frac{e}{2}\right) > 1$, et $(>1)^\infty = \infty$

et donc, $e^n \notin O(2^n)$.

Solutions devoir 1

0.24) Montrez que $c\,f(n) \in O(f(n))$.

Par la définition, $x(n) \in O(y(n))$ ssi il existe une constante d t.q. $x(n) \leq d\,y(n)$, pour $n \geq n_0$.

Et donc, existe-t-il d, t.q :

$$c\,f(n) \leq d\,f(n) \quad ?$$

Oui! Il suffit de poser $d = c$, et on satisfait la définition.

0.26) Montrez que si $f(n) \in O(g(n))$, et $g(n) \in O(h(n))$, on a $f(n) \in O(h(n))$.

Si $f(n) \in O(g(n))$, alors il existe c t.q. $f(n) \leq c\,g(n)$, $n \geq n_0$,
Si $g(n) \in O(h(n))$, alors il existe d t.q. $g(n) \leq d\,h(n)$, $n \geq n_1$;
et donc, pour $n \geq n_2 = \max(n_0, n_1)$,

$$\left.\begin{aligned} f(n) &\leq c\,g(n) \\ g(n) &\leq d\,h(n) \end{aligned}\right\} \text{on combine...}$$

$$f(n) \leq c\,g(n) \leq c\,d\,h(n),$$

soit donc : $f(n) \leq cd\,h(n)$, on a notre constante, 0.26) (Suite)

en posant $e = cd$, on a $f(n) \leq e\, h(n)$,
et donc $f(n) \in O(h(n))$.

« Ordre de » est donc transitif.

0.29) Triez : $n - \log n$ $\quad \sqrt{n}$ $\quad \frac{n}{\log n}$ $\quad n^n$

$\frac{n!}{n^n}$ $\quad n^{\log n}$ $\quad n^{7/5}$ $\quad n \log\log n$.

Si on y va naïvement, on ferait $8^2 = 64$ comparaisons.
(bon, en fait seulement 28 car on ne comparera pas une fonction avec elle-même, et comparer $f(n)$ et $g(n)$, c'est comparer $g(n)$ et $f(n)$...).

Si on s'aide de la fig. p. 27 et de la chaîne p. 29, on pourra placer rapidement au moins quelques fonctions !
Voyons :

→ $n - \log n$ est plus petit que n ;
→ n^n est le plus grand,
→ n^n est plus grand que $n^{\log n}$, puisque $n > \log n$,

Solutions devoir 1

0.29) (Suite)

→ $n^{\log n}$ est plus grand que $n^{7/5}$

→ $\sqrt{n} = n^{1/2}$ est plus petit que $n^{7/5}$

→ $\sqrt{n}$ est plus petit que $\frac{n}{\log n}$, puisque $\sqrt{n} = \frac{n}{\sqrt{n}}$, et $\sqrt{n} > \log n$.

→ $\frac{n!}{n^n} \to 0$, puisque $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots (n-1)\, n}{n\cdot n\cdot n\cdot \ldots\; n\cdot n} = 0$
c'est donc le plus petit

→ $n \log\log n$ est plus grand que n, mais plus petit que $n \log n$.

Enfin:

$$\frac{n!}{n^n} < \sqrt{n} < \frac{n}{\log n} < n\cdot\log n < n\log\log n < n^{7/5} < n^{\log n} < n^n.$$

Bonus !

0.39) Montrez $f(n) + g(n) \in O(\max(f(n), g(n)))$.

Il faut d'abord comment max et + interagissent ; on a :
$a + b \leq 2\max(a, b)$, puisque:
- si $a \geq b$, $a + b \leq a + a = 2a = 2\max(a,b)$;
- si $b \geq a$, $a + b \leq b + b = 2b = 2\max(a,b)$.

Donc : $f(n) + g(n) \leq 2\max(f(n), g(n))$, ce qui nous donne 2 comme constante pour la définition, et donc on a bien $f(n) + g(n) \in O(\max(f(n), g(n)))$.