

自动控制原理

讲 稿

授课学期: 2016 年上学期

课程名称: 自动控制原理

专业: 电子信息工程

班级: 1302012

任课教师: 齐 飞

所在部门: 电子工程学院

教研室: 203 教研室

目 录

§1 第一章自动控制原理的基本概念	3
§2 第二章线性系统的数学描述	12
§3 第三章线性系统的时域分析法	39
§4 第四章根轨迹法	77
§5 第五章频率响应法	99
§6 第六章控制系统的补偿与综合	153
§7 第七章状态空间描述法	191

第一章 自动控制原理的基本概念

1.1 开环控制系统和闭环控制系统

自动控制

自动控制是在没有人的直接干预下，利用物理装置对生产设备和工艺过程进行合理的控制，使被控制的物理量保持恒定，或者按照一定的规律变化，例如矿井提升机的速度控制、轧钢厂加热炉温度的控制等等。

自动控制系统

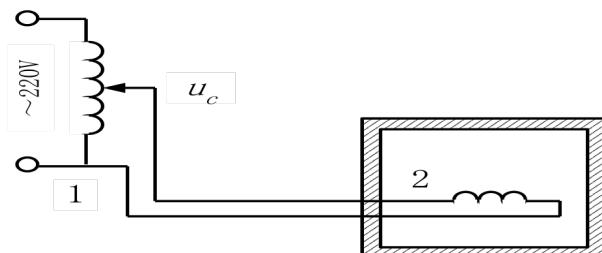
自动控制系统是为实现某一控制目标所需要的所有物理部件的有机组合体。

- 1. 开环控制系统

例 1-1 温度控制系统

- 性能指标

- 工作过程



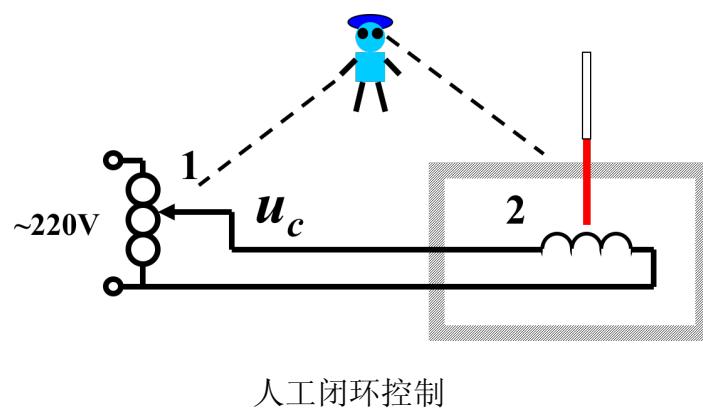
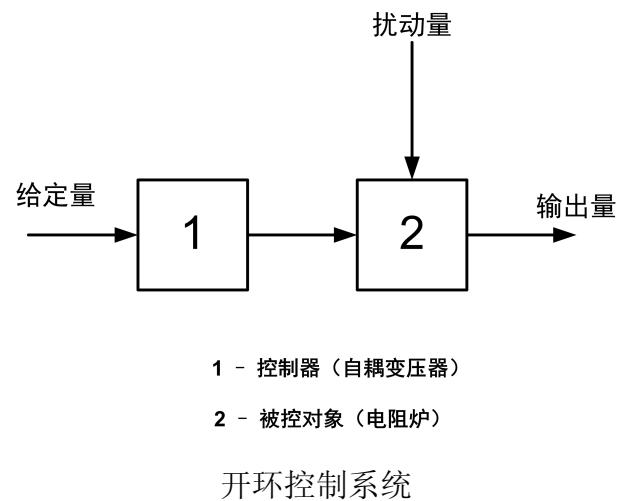
开环温度控制系统

(1) 开环控制

- 只有输入量对输出量产生控制作用，输出量不参与对系统的控制。

(2) 开环控制特点

- 输入控制输出
- 输出不参与控制
- 系统没有抗干扰能力

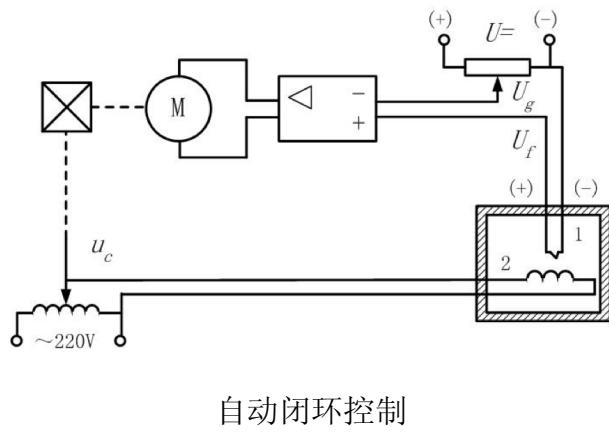


- 2. 闭环控制系统

例 1-2 温度闭环控制系统

(1) 人工闭环控制

(2) 自动闭环控制



- 室内温度控制系统

图 1-1 表示采用空调器的室内温度控制系统的元件框图。图中方块表示元部件，方框之间的有向线段代表信号(或变量)及其传递方向。室内温度是要被控制的物理量，它由空调器直接控制。电位器的输入电压 r 代表设定的室内温度。实际温度 c 由热敏电阻组成的温度传感器检测并转换成电压 y 。电子放大器的输出电压 e 代表设定温度与实际温度之差。当这个温度差大于某个规定值时，空调器开始运行，缩小室内温度与设定温度之间的差值。一旦室内温度达到设定值后，放大器输出电压 e 使空调断电而停止运行。于是室内温度就被控制在设定值的附近。

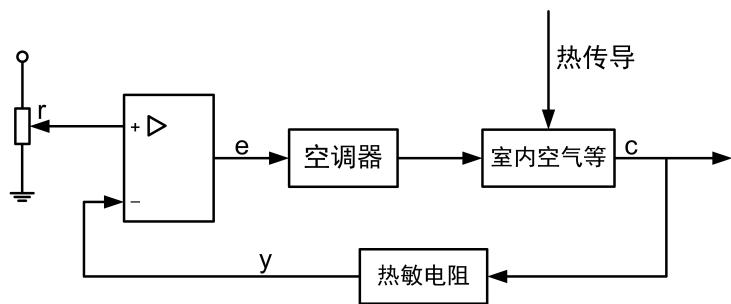


图 1-1 室温控制系统元件框图

开环控制系统是一种最简单的控制系统，在控制器和控制对象间只有正向控制作用，系统的输出量不会对控制器产生任何影响。

1) 控制器 2) 控制对象 3) 检测装置

反馈控制

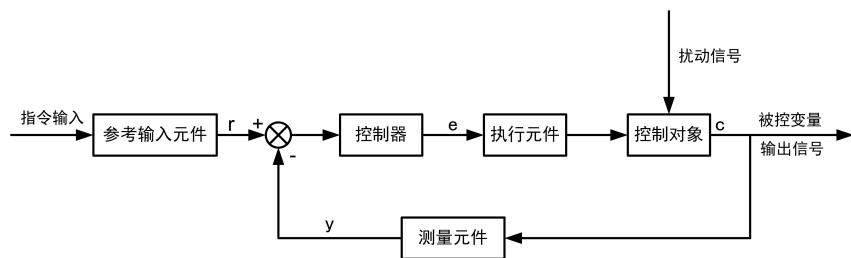


图 1-2 室温控制系统功能框图

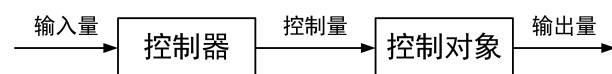
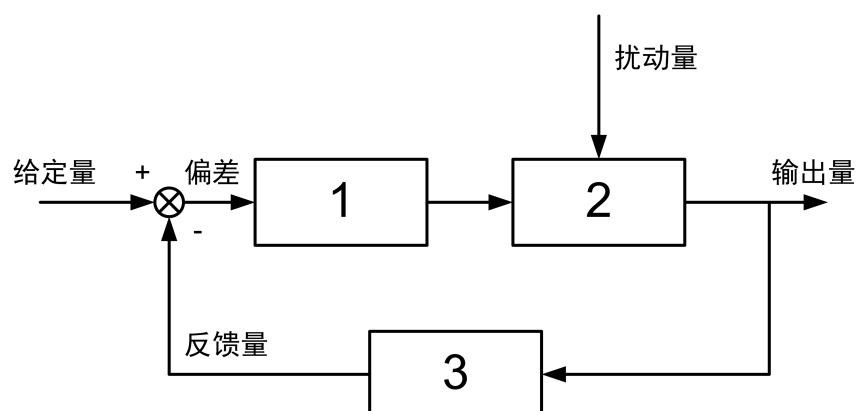


图 1-3 开环控制系统



闭环控制结构图

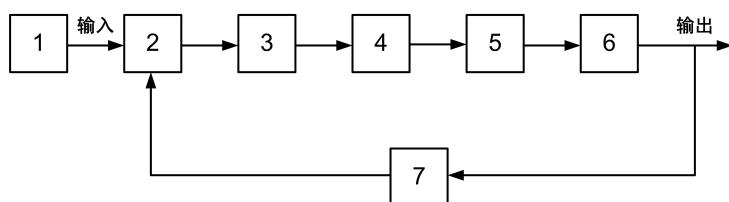
- 把输出量的一部分检测出来, 反馈到输入端, 与给定信号进行比较, 产生偏差, 此偏差经过控制器产生控制作用, 使输出量按照要求的规律变化
- 反馈信号与给定信号极性相反为负反馈, 反之为正反馈

反馈控制特点

- 输入控制输出
- 输出参与控制
- 检测偏差纠正偏差
- 具有抗干扰能力

☞ 1.2 闭环控制系统的组成和基本环节

- 1. 闭环控制系统的结构图



闭环控制系统的组成

1-给定环节; 2-比较环节; 3-校正环节; 4-放大环节; 5-执行机构; 6-被控对象; 7-检测装置

- 2. 闭环控制系统的基本环节

(1) 控制对象或调节对象

要进行控制的设备或过程。

(2) 执行机构

一般由传动装置和调节机构组成。执行机构直接作用于控制对象, 使被控制量达到所要求的数值。

(3) 检测装置或传感器

该装置用来检测被控制量, 并将其转换为与给定量相同的物理量。

(4) 给定环节

设定被控制量的给定值的装置。

(5) 比较环节

将所检测的被控制量与给定量进行比较，确定两者之间的偏差量。

(6) 中间环节

一般包括比较环节和校正环节。

- 3. 闭环控制系统中的基本术语

- | | |
|-------------|---------------|
| (1) 被控对象 | (7) 偏差量 |
| (2) 被控量或输出量 | (8) 前向通道或正向通道 |
| (3) 控制量 | (9) 反馈通道或反向通道 |
| (4) 设定量或输入 | (10) 理想输出 |
| (5) 扰动量 | (11) 实际输出 |
| (6) 反馈量 | |
-

1.3 自动控制系统类型

- 1. 按照主要元件的特性方程的输入输出特征划分

(1) 线性系统

由线性元件组成的系统，其微分方程中输出量及其各阶导数都是一次的，并且各系数与输入量（自变量）无关。例如：反馈放大器

(2) 非线性系统

由非线性元件组成的系统，其微分方程式的系数与自变量有关。例如：饱和反馈放大器

- 2. 按照信号传递方式划分

(1) 连续数据系统

系统各部分的信号都是模拟的连续函数。

(2) 离散数据系统

系统的一处或几处，信号是以脉冲系列或数码的形式传递。例如：饱和反馈放大器控制系统中各部分的信号若都是时间 t 的连续函数，则称这类系统为连续控制系统

统。在控制系统各部分的信号中只要有一个是时间 t 的离散信号，则称这类系统为离散控制系统。离散模型是计算机控制的最主要模型。

- 3. 按照输入量的变化规律划分

- (1) **恒值系统（自稳定系统）**

给定量是恒定不变的。

- (2) **随动系统**

给定量是按照一定的时间函数变化的。例如：饱和反馈放大器

- (3) **程序控制系统**

给定量按照事先未知的时间函数变化。

1.4 线性系统中信号类型

- 单位阶跃 $U(t)$, 位置信号
- 斜线信号, 速度信号
- 抛物线信号, 加速度信号

1.5 自动控制系统的性能指标

- 1. 对自动控制系统基本要求

稳定性（稳）、快速性（快）、准确性（准）

* “稳”与“快”是说明系统动态（过渡过程）品质。

系统的过渡过程产生的原因：系统中储能元件的能量不可能突变。* “准”是说明系统的稳态（静态）品质。

稳定性是保证控制系统正常工作的先决条件。线性控制系统的稳定性由系统本身结构与参数所决定的，与外部条件和初始状态无关。

- 2. 稳态性能指标

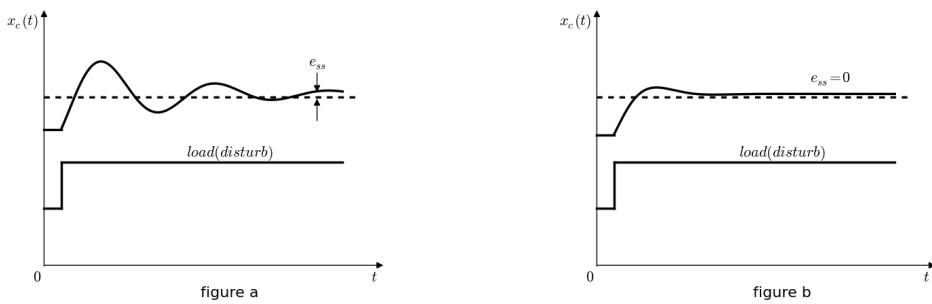
- 稳态误差

当系统从一个稳态过渡到新的稳态，或系统受扰动作用又重新平衡后，系统可能会出现偏差，这种偏差称为稳态误差。

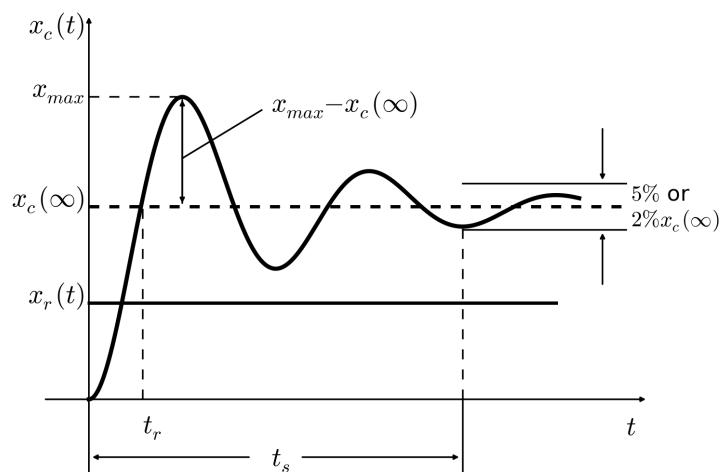
系统稳态误差的大小反映了系统的稳态精度，它表明了系统控制的准确程度。稳态误差越小，则系统的稳态精度越高。

- **有差系统（图 a）** 若稳态误差不为零，则系统称为有差系统。

- **无差系统（图 b）** 若稳态误差为零，则系统称为无差系统。



- 3. 暂态性能指标



暂态性能指标

(1) 最大超调量

$$\sigma\% = \frac{x_{max} - x_c(\infty)}{x_c(\infty)} \times 100\%$$

输出最大值与输出稳态值的相对误差。

反映了系统的平稳性。最大超调量越小，则说明系统过渡过程越平稳。

(2) 上升时间 t_r

指系统的输出量第一次到达输出稳态值所对应的时刻。

(3) 过渡过程时间 (调节时间)

系统的输出量进入并一直保持在稳态输出值附近的允许误差带内所需的时间。允许误

差带宽度一般取稳态输出值的 2% 或 5%。

调节时间的长短反映了系统的快速性。调节时间越小，系统的快速性越好。

(4) 振荡次数 μ

在调节时间内，输出量在稳态值附近上下波动的次数。它也反映系统的平稳性。振荡次数越少，说明系统的平稳性越好。

第二章线性系统的数学描述

2.1 线性系统的时域数学模型

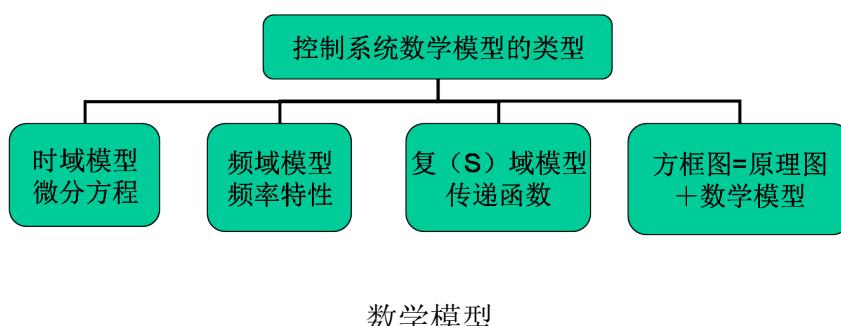
- 什么是数学模型？
 - 数学模型：描述系统内部各物理量之间关系的数学表达式。
 - 物理量：高度、速度、温度、压力、流量、电压、电流。
 - 数学表达式：代数方程、微分方程
- 为什么能够用数学方式描述系统？

系统中的输出量和输入量通常都是时间 t 的函数。很多常见的元件或系统的输出量和输入量之间的关系都可以用一个微分方程表示，方程中含有输出量、输入量及它们各自对时间的导数或积分。这种微分方程又称为动态方程或运动方程。微分方程的阶数一般是指方程中最高导数项的阶数，又称为系统的阶数。

- 为什么要建数学模型？

要对自动控制系统进行定量（精确）地分析和设计，首先要建立系统的数学模型。
马克思说：定性到定量的飞跃，才能变成一门科学。

- 静态数学模型：系统变量之间与时间无关的静态关系
- 动态数学模型：系统变量对时间的变化率，反映系统的动态特性



对于单输入、单输出 (*SISO*) 线性定常系统, 采用下列微分方程来描述:

$$\begin{aligned} & c^{(n)}(t) + a_1 c^{(n-1)}(t) + a_2 c^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1} c(t) + a_n c(t) \\ & = b_0 r^{(m)}(t) + b_1 r^{(m-1)}(t) + b_2 r^{(m-2)}(t) + \cdots + b_{m-1} r(t) + b_m r(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

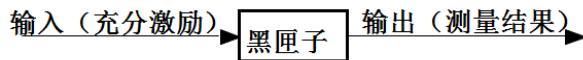
式中, $r(t)$ 和 $c(t)$ 分别是系统的输入信号和输出信号; $c^{(n)}(t)$ 为 $c(t)$ 对时间 t 的 n 阶导数;

$a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 和 $b_j (j = 0, 1, \dots, m)$ 是由系统的结构参数决定的系数。

- **线性微分方程的建立及求解**

建模方法: 分析法、实验法

- 实验法 (黑箱法、辨识法、灰箱法): 人为施加某种测试信号, 记录基本输出响应, 根据输入输出响应辨识出数学模型。



- 分析方法: 频率特性法, 最小二乘法 (曲线拟合), 神经元网络法, 模糊模型法
- 模型验证: 将实际输出与模型的计算输出进行比较, 系统模型需保证两个输出之间在选定意义上的接近。

分析法—根据系统运动规律 (定律、经验公式) 和结构参数, 推导系统输入输出之间数学关系。

建模 (微分方程) 步骤:

第一步: 将系统分成若干个环节, 列写各环节的输出输入的数学表达式。

利用适当的物理定律——如牛顿定律、基尔霍夫电流和电压定律、能量守恒定律等。

第二步: 联立各环节的数学表达式, 消去中间变量, 得到描述系统输出、输入关系的微分方程。

例 2-1 如图 2-1 所示写出 RC 电路的微分方程。

解: 明确输入量 u_r , 输出量 u_c

第一步: 环节数学表达式 $u_r = Ri + u_c \quad i = c \frac{du_c}{dt}$

第二步: 消去中间变量 $u_r = R c \frac{du_c}{dt} + u_c$

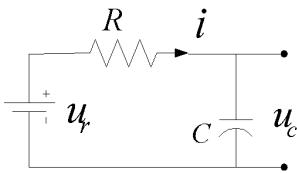


图 2-1

例 2-2 如图 2-2 是具有转动惯量位 J 的转子，与弹性系数为 K 的弹性轴和阻尼系数为 f_m 的阻尼器连接。假设施加的外扭矩为 $M(t)$ 则系统产生偏离平衡位置的角位移 $\theta(t)$ 。试写出角位移 $\theta(t)$ 与扭矩的微分方程。

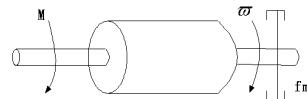


图 2-2

解：假设初始状态 $\theta(t) = 0$ 在平衡位置，扭矩 $M(t)$ 应与阻力矩总和平衡，即
牛顿定律 \Rightarrow

$$M_1 + M_2 + M_3 = M \quad (2.2.1)$$

式中， $* M_1$ —— 惯性体所产生的阻力矩，为 $M_1 = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$
 $* M_2$ —— 阻尼阻尼器所产生的阻尼力矩，为 $M_2 = f_m \frac{d\theta(t)}{dt}$

$* M_3$ —— 弹性轴所产生的弹性阻力矩，为 $M_3 = K\theta(t)$

将 M_1 、 M_2 、 M_3 代入式 (2.2.1)，得到描述系统输出输入关系的运动方程式为

$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + f_m \frac{d\theta(t)}{dt} + K\theta(t) = M(t) \quad (2.2.2)$$

• 模型的标准形式

- 输入变量及其导数置于等号的右边；
- 输出变量及其导数置于等号左边；
- 等号两边的导数项均按降幂排列；
- 系数规划为反映系统动态特性的参数，如时间常数、阻尼系数等。

$$\begin{aligned} & c^{(n)}(t) + a_1 c^{(n-1)}(t) + a_2 c^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1} c(t) + a_n c(t) \\ & = b_0 r^{(m)}(t) + b_1 r^{(m-1)}(t) + b_2 r^{(m-2)}(t) + \cdots + b_{m-1} r(t) + b_m r(t) \end{aligned}$$

- 2.1.1 电气系统

电气系统中最常见的装置是由电阻、电容、运算放大器等元件组成的电路，又称电气网络。我们将电阻、电感和电容等本身不含有电源的器件称为无源器件，而将运算放大器这样本身包含电源的器件称为有源器件。仅由无源器件构成的电气网络称为无源网络；如果电气网络中含有有源器件或电源，就称之为有源网络。

例 2-3 图 2-3 是由电阻 R 、电感 L 和电容 C 组成的无源网络，试列写以 $u_i(t)$ 为输入量，以 $u_o(t)$ 为输出量的网络微分方程。

解：设回路电流为 $i(t)$ ，由基尔霍夫电压定律可写出回路方程为

$$L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt + Ri(t) = u_i(t)$$

消去中间变量 $i(t)$ ，可得描述该无源网络输入输出关系的微分方程

$$LC \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + RC \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = u_i(t) \quad (2.3)$$

上式也可以写为

$$T_1 T_2 = \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + T_2 \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = u_i(t) \quad (2.4)$$

其中， $T_1 = L/R, T_2 = RC$ 。方程 (2.2) 和 (2.3) 就是所求的微分方程。这是一个典型的二阶线性常系数

微分方程，对应的系统称为二阶线性定常系统。

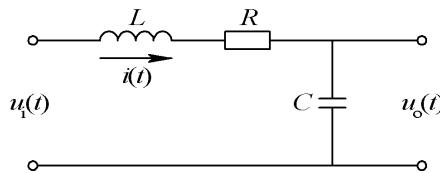


图 2-3 RLC 无源网络

例 2-4 图 2-4 是一个由理想运算放大器组成的电容负反馈电路，电压 $u_i(t)$ 和 $u_o(t)$ 分别表示输入量和输出量，试确定这个电路的微分方程式。

解：理想运算放大器正、反相输入端电位相同，且输入电流为零。根据基尔霍夫电流定律有

$$\frac{u_i(t)}{R} + C \frac{du_o(t)}{dt} = 0$$

整理后得

$$RC \frac{du_o(t)}{dt} = -u_i(t) \quad (2.5)$$

或为

$$T \frac{du_o(t)}{dt} = -u_i(t) \quad (2.6)$$

其中, $T = RC$ 为时间常数。方程 (2.4) 和 (2.5) 就是该系统的微分方程, 这是一个一阶系统。

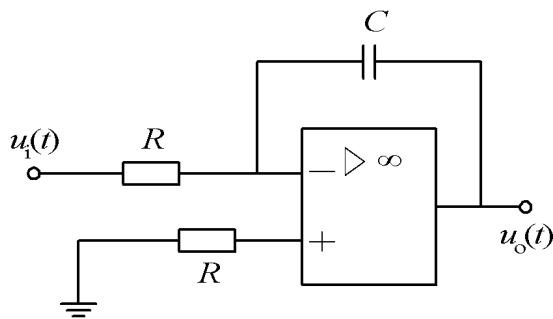


图 2-4 电容负反馈电路

• 2.1.2 机械系统

例 2-5 图 2-5 表示一个含有弹簧、运动部件、阻尼器的机械位移装置。其中 k 是弹簧系数, m 是运动部件质量, μ 是阻尼器的阻尼系数; 外力 $f(t)$ 是系统的输入量, 位移 $y(t)$ 是系统的输出量。试确定系统的微分方程。

解: 根据牛顿运动定律, 运动部件在外力作用下克服弹簧拉力 $ky(t)$ 、阻尼器的阻力 $\mu \frac{dy(t)}{dt}$, 将产生加速度力 $m \frac{d^2y(t)}{dt^2}$ 。所以系统的运动方程为

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + \mu \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = f(t) \quad (2.7)$$

或写成

$$\frac{m}{\mu} \frac{d^2y(t)}{dt^2} \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{\mu}{k} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{1}{k} f(t) \quad (2.8)$$

这也是一个二阶线性常微分方程。比较表达式 (2.7) 和 (2.3) 可以发现, 两个不同的物理系统具有相同形式的运动方程, 即具有相同的数学模型。

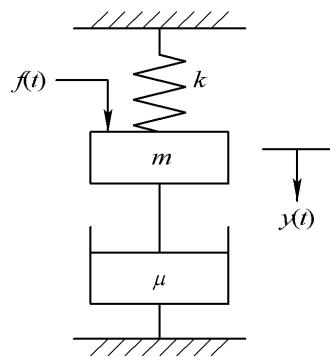


图 2-5 机械阻尼器示意图

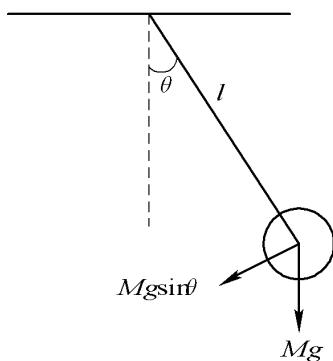


图 2-6 单摆运动示意图

例 2-6 图 2-6 表示一个单摆系统, 输入量为零 (不加外力), 输出量为摆幅 $\theta(t)$ 。摆锤的质量为 M , 摆杆长度为 l , 阻尼系数为 μ , 重力加速度为 g 。试建立系统的运动方程。

解: 对于图 2-6 所示的单摆系统, 根据牛顿运动定律可以直接推出如下系统运动方程:

$$Ml \frac{d^2\theta}{dt^2} + \mu l \frac{d\theta}{dt} + Mg \sin \theta \quad (2.9)$$

显然方程 (2.9) 是一个二阶的非线性微分方程 (因为含有 $\sin \theta$), 但是在摆幅较小的情况下, 单摆运动方程可以认为是线性的, 对应的微分方程为

$$Ml \frac{d^2\theta}{dt^2} + \mu l \frac{d\theta}{dt} + Mg\theta = 0 \quad (2.10)$$

- 在工程实际中, 大多数系统是非线性的。
- 比如, 弹簧的刚度与其形变有关系, 因此弹簧系数 k 实际上是其位移的函数, 而并非常数;
- 电阻、电容和电感等参数值与周围的环境 (温度、湿度、压力等) 及流经它们的电流有关, 也并非常值;
- 电动机本身的摩擦、死区等非线性因素会使其运动方程复杂化而成为非线性方程。
- 非线性系统的分析一般比线性系统复杂。
- 但是当控制系统在围绕平衡点附近的小范围内动作时, 通常采用泰勒级数展开的方法, 可将非线性系统线性化为平衡点附近的线性系统, 从而使问题简化。
- 如在上述的单摆系统中, 在小幅摆动的假设下, 通过将 $\sin \theta$ 在平衡点 $\theta = 0$ 处作一阶泰勒展开, 可将方程 (2.9) 中的非线性项 $\sin \theta$ 用其线性近似量 θ 表示, 从而得到方程 (2.10) 描述的线性系统。

2.2 传递函数

- 2.2.1 拉氏变换

1. 拉氏变换的定义

若将实变量 t 的函数 $f(t)$ 乘上指数函数 e^{-st} (其中 $s = \sigma + j\omega$ 是一个复数), 并且在 $[0, +\infty]$ 上对 t 积分, 就可以得到一个新的函数 $F(s)$, 称 $F(s)$ 为 $f(t)$ 的拉氏变换, 并用符号 $L[f(t)]$ 表示。

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2.11)$$

上式就是拉氏变换的定义式。从这个定义可以看出，拉氏变换将原来的实变量函数 $f(t)$ 转化为复变量函数 $F(s)$ 。通常将 $F(s)$ 称作 $f(t)$ 的象函数，将 $f(t)$ 称作 $F(s)$ 的原函数。

2. 拉氏变换的基本定理

(1) 线性定理

两个函数和的拉氏变换，等于每个函数拉氏变换的和，即

$$L[f_1(t) + f_2(t)] = L[f_1(t)] + L[f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s) \quad (2.12)$$

函数放大 k 倍的拉氏变换等于该函数拉氏变换的 k 倍，即

$$L[kf(t)] = kF(s) \quad (2.13)$$

(2) 微分定理

如果初始条件

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$$

成立，则有

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) \quad (2.14)$$

(3) 积分定理

一个函数积分后再取拉氏变换等于这个函数的拉氏变换除以复参数 s ，即

$$L\left[\int_0^T f(t)dt\right] = \frac{1}{s}L[f(t)] = \frac{1}{s}F(s) \quad (2.15)$$

重复运用式 (2.15) 可以推出

$$L\left[\int_0^T dt \int_0^T dt \cdots \int_0^T f(t)dt\right] = \frac{1}{s^n}F(s) \quad (2.16)$$

(4) 初值定理

函数 $f(t)$ 在 $t = 0$ 时的函数值可以通过 $f(t)$ 的拉氏变换 $F(s)$ 乘以 s 取 $s \rightarrow \infty$ 时的极限而得到，即

$$\lim_{u \rightarrow \infty} f(t) = f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (2.17)$$

(5) 终值定理

函数 $f(t)$ 在 $t \rightarrow +\infty$ 时的函数值 (即稳定值) 可以通过 $f(t)$ 的拉氏变换 $F(s)$ 乘以 s 取 $s \rightarrow \infty$ 时的极限而得到, 即

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = f(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (2.18)$$

- 2.2.2 传递函数的定义和特点

1. 传递函数的定义

线性定常系统的传递函数, 定义为零初始条件下, 系统输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比。

设线性定常系统由下面的 n 阶线性常微分方程描述:

$$\begin{aligned} c^{(n)}(t) + a_1c^{(n-1)}(t) + a_2c^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1}c(t) + a_nc(t) \\ = b_0r^{(m)}(t) + b_1r^{(m-1)}(t) + b_2r^{(m-2)}(t) + \cdots + b_{m-1}r(t) + b_mr(t) \end{aligned} \quad (2.19)$$

式中, $r(t)$ 和 $c(t)$ 分别是系统的输入信号和输出信号; $c^{(n)}(t)$ 为 $c(t)$ 对时间 t 的 n 阶导数;

$a_i(i = 0, 1, \dots, n)$ 和 $b_j(j = 0, 1, \dots, m)$ 是由系统的结构参数决定的常系数。如果 $r(t)$ 和 $c(t)$ 及其各阶导数在 $t = 0$ 时的值均为零, 即满足如下的零初始条件:

$$c(0) = \dot{c}(0) = \ddot{c}(0) = \cdots = c^{(n-1)}(0) = 0$$

$$r(0) = \dot{r}(0) = \ddot{r}(0) = \cdots = r^{(m-1)}(0) = 0$$

则根据拉氏变换的定义和性质, 对式 (2.19) 进行拉氏变换, 并令 $C(s) = L[c(t)]$, $R(s) = L[r(t)]$, 亦可得:

$$\begin{aligned} & [a_0s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n]C(s) \\ & = [b_0s^m + b_1s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m]R(s) \end{aligned}$$

由传递函数的定义可得系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_1s^m + b_1s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} = \frac{M(s)}{N(s)}$$

式中,

$$M(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m$$

$$N(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

$M(s)$ 和 $N(s)$ 分别称为传递函数 $G(s)$ 的分子多项式和分母多项式。

2. 传递函数的特点

- (1) 传递函数的概念适用于线性定常系统, 传递函数的结构和各项系数 (包括常数项) 完全取决于系统本身结构, 因此, 它是系统的动态数学模型, 而与输入信号的具体形式和大小无关, 也不反映系统的任何内部信息。

因此可以用图 2-7 的方块图来表示一个具有传递函数 $G(s)$ 的线性系统。该图说明, 系统输入量和输出量的因果关系可以用传递函数联系起来。

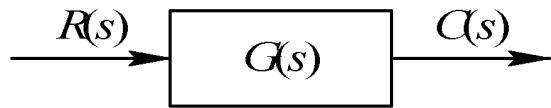


图 2-7 传递函数的图示

但是同一个系统若选择不同的量作为输入量和输出量, 所得到的传递函数可能不同。所以谈到传递函数, 必须指明输入量和输出量。

传递函数的概念主要适用于单输入、单输出的情况。

若系统有多个输入信号, 在求传递函数时, 除了指定的输入量以外, 其它输入量 (包括常值输入量) 一概视为零。

对于多输入、多输出线性定常系统, 求取不同输入和输出之间的传递函数将得到系统的传递函数矩阵。

- (2) 传递函数是在零初始条件下定义的。控制系统的零初始条件有两层含义: 一是指输入量在 $t \geq 0$ 时才起作用; 二是指输入量加于系统之前, 系统处于稳定工作状态。
- (3) 传递函数是复变量 s 的有理真分式函数, 具有复变函数的所有性质;

并且理论分析和实验都指出, 对于实际的物理系统和元件而言, 输入量和它所引起的响应 (输出量) 之间的传递函数, 分子多项式 $M(s)$ 的阶次 m 总是小于分母多项式 $N(s)$ 的阶次 n , 即 $m < n$ 。

这个结论可以看作是客观物理世界的基本属性。它反映了一个基本事实：一个物理系统的输出不可能立即复现输入信号，只有经过一段时间后，输出量才能达到输入量所要求的数值。

- (4) 传递函数与线性常微分方程一一对应。传递函数分子多项式系数和分母多项式系数，分别与相应微分方程的右端及左端微分算符多项式系数相对应。所以，将微分方程的运算符 $\frac{d}{dt}$ 用复数 s 置换便可以得到传递函数；反之，将传递函数中的复数 s 用算符 $\frac{d}{dt}$ 置换便可以得到微分方程。例如，由传递函数

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_1 s + b_2}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2}$$

可得 s 的代数方程

$$(a_0 s^2 + a_1 s + a_2)C(s) = (b_1 s + b_2)R(s)$$

用运算符 $\frac{d}{dt}$ 置换复数 s ，便得到相应的微分方程

$$a_0 \frac{d^2}{dt^2}(t) + a_1 \frac{d}{dt}c(t) + a_2 c(t) = b_1 \frac{d}{dt}r(t) + b_2 r(t)$$

- (5) 传递函数不能反映系统或元件的学科属性和物理性质。物理性质和学科类别截然不同的系统可能具有完全相同的传递函数。

例如，例 2-5 表示的 RLC 电路和例 2-7 表示的机械阻尼系统的传递函数在适当的参数代换后可以具有相同的形式，但是两者属于完全不同的学科领域。

另一方面，研究某一种传递函数所得到的结论，可以适用于具有这种传递函数的各种系统，不管它们的学科类别和工作机理如何不同。这就极大地提高了控制工作者的效率。

- (6) 传递函数除具有式 (2.19) 表示的分子、分母多项式形式外，还具有如下两种常见形式：

$$G(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad (2.23)$$

$$G(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = K \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdots (\tau_m s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_a s + 1) \cdots (T_n s + 1)} \quad (2.24)$$

表达式 (2.23) 和 (2.24) 分别称为传递函数的零极点形式和时间常数形式。

式 (2.23) 的特点是每个一次因子项中 s 的系数为 1。 $M(s) = 0$ 和 $N(s) = 04$ 的根 $z_i(i = 1, 2, \dots, m)$ 和 $p_j(j = 1, 2, \dots, n)$ 分别称为传递函数的零点和极点, k 称为传递函数的增益或根轨迹增益。

由于 $M(s)$ 和 $N(s)$ 的系数均为实数, 因此零极点是实数或共轭复数。式 (2.24) 的特点是各个因式的常数项均为 1, $\tau_i(i = 1, 2, \dots, m)$ 和 $T_j(j = 1, 2, \dots, n)$ 为系统中各环节的时间常数, K 为系统的放大倍数。

- (7) 令系统的传递函数分母等于零, 所得方程称为特征方程, 即 $N(s) = 0$ 。特征方程的根称为特征根, 也就是系统的极点。

- 2.2.3 典型环节传递函数

任何一个复杂系统都是由有限个典型环节组合而成的。典型环节通常分为以下六种。

1. 比例环节

比例环节又称放大环节, 该环节的运动方程和相对应的传递函数分别为

$$c(t) = Kr(t) \quad (2.25)$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = K \quad (2.26)$$

式中 K 为增益。

特点: 输入输出量成比例, 无失真和时间延迟。实例: 电子放大器, 齿轮, 电阻 (电位器), 感应式变送器等。

2. 惯性环节

惯性环节又称非周期环节, 该环节的运动方程和相对应的传递函数分别为

$$T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = kr(t) \quad (2.27)$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Ts + 1} \quad (2.28)$$

式中 T 为时间常数, K 为比例系数。

特点: 含一个储能元件, 对突变的输入, 其输出不能立即复现, 输出无振荡。

实例: 直流伺服电动机的励磁回路, 低通滤波器。

3. 纯微分环节

纯微分环节常简称为微分环节, 其运动方程和传递函数分别为

$$c(t) = T \frac{dr(t)}{dt} \quad (2.29)$$

$$G(s) = Ts \quad (2.30)$$

特点: 输出量正比输入量变化的速度, 能预示输入信号的变化趋势。

实例: 高通滤波器。实际中没有纯粹的微分环节, 它总是与其他环节并存的。实际中可实现的微分环节都具有一定的惯性, 其传递函数如下:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{Ts}{Ts + 1} \quad (2.31)$$

4. 积分环节

积分环节的动态方程和传递函数分别为

$$c(t) = K \int r(t) dt \quad (2.32)$$

$$G(s) = \frac{K}{s} \quad (2.33)$$

特点: 输出量与输入量的积分成正比例, 当输入消失, 输出具有记忆功能。

实例: 电动机角速度与角度间的传递函数, 模拟计算机中的积分器等。电路图?

5. 振荡环节

振荡环节的运动方程和传递函数分别为

$$T^2 \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t) \quad (0 \leq \xi < 1) \quad (2.34)$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (0 \leq \xi < 1) \quad (2.35)$$

式中 ξ 为振荡环节的阻尼比, T 为时间常数, ω_n 为系统的自然振荡角频率 (无阻尼自振角频率), 并且有

$$T = \frac{1}{\omega_n}$$

特点：环节中有两个独立的储能元件，并可进行能量交换，其输出出现振荡。

实例：RLC 电路的输出与输入电压间的传递函数，以及机械阻尼系统的传递函数。

6. 纯时间延时环节

延时环节的动态方程和传递函数分别为

$$c(t) = r(t - \tau) \quad (2.36)$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = e^{-\tau s} \quad (2.37)$$

式中 τ 为该环节的延迟时间。

特点：输出量能准确复现输入量，但要延迟一固定的时间间隔 τ 。

实例：管道压力、流量等物理量的控制，其数学模型就包含有延迟环节。

2.3 结构图

- 2.3.1 结构图的组成与绘制

1. 结构图的组成

- (1) 结构图的每一元件用标有传递函数的方框表示，方框外面带箭头的线段表示这个环节的输入信号（箭头指向方框）和输出信号（箭头离开方框），其方向表示信号传递方向。箭头处标有代表信号物理量的符号字母，如图 2-6 所示。

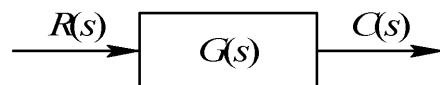


图 2-6 元件的结构图

- (2) 把系统中所有元件按系统输入信号经过各元件的先后次序都用上述方框形式表示，依次将代表各元件的方块用连接线连接起来。
- (3) 对于闭环系统，需引入两个新符号，分别称为相加点和分支点。

2. 结构图的绘制

例 2-8 在图 2-8(a) 中，电压 $u_1(t)$ 、 $u_2(t)$ 分别为输入量和输出量，绘制系统的结构图。

图 2-8(a) 对应的运算电路如图 2-8(b) 所示。设中间变量 $I_1(s)$ 、 $I_2(s)$ 和 $U_3(s)$ 。从输出量 $U_2(s)$ 开始按上述步骤列写系统方程式：

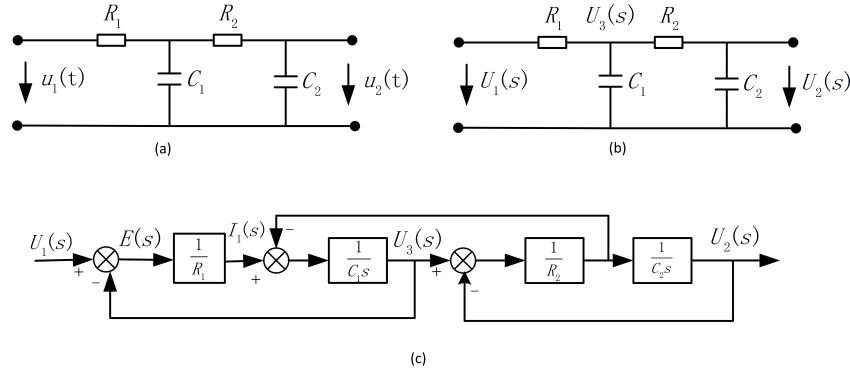
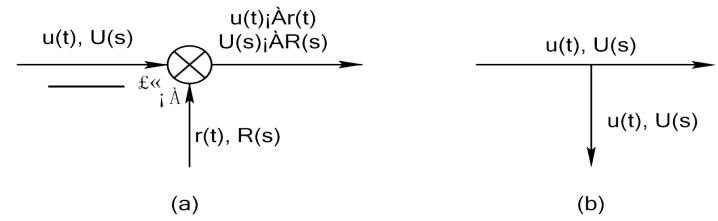


图 2-8 RC 滤波电路结构图

$$\begin{aligned}
 U_2(s) &= \frac{1}{C_2 s} I_2(s) \\
 I_2(s) &= \frac{1}{R_2} [U_3(s) - U_2(s)] \\
 U_3(s) &= \frac{1}{C_1 s} [I_1(s) - I_2(s)] \\
 I_1(s) &= \frac{1}{R_1} [U_1(s) - U_2(s)]
 \end{aligned}$$

- (1) 列写系统的微分方程组，并求出其对应的拉氏变换方程组。
- (2) 从输出量开始写，以系统输出量作为第一个方程左边的量。
- (3) 每个方程左边只有一个量。从第二个方程开始，每个方程左边的量是前面方程右边的中间变量。列写方程时尽量用已出现过的量。
- (4) 输入量至少要在一个方程的右边出现；除输入量外，在方程右边出现过的中间变量一定要在某个方程的左边出现。
- (5) 按照上述整理后拉氏变换方程组的顺序，从输出端开始绘制系统的结构图。

按照上述方程的顺序, 从输出量开始绘制系统的结构图, 其绘制结果如图 2-8(c) 所示 (注意这是一个还没有经过简化的系统结构图)。

值得注意的是, 一个系统可以具有不同的结构图, 但由结构图得到的输出和输入信号的关系都是相同的。

- 2.3.1 结构图的组成与绘制

一个闭环负反馈系统通常用图 2-9 所示的结构图来表示。输出量 $C(s)$ 反馈到相加点, 并且在相加点与参考输入量 $R(s)$ 进行比较。图中各信号之间的关系为

$$C(s) = G(s)E(s)$$

$$E(s) = R(s) - B(s)$$

$$B(s) = H(s)C(s)$$

式中 $E(s)$ 和 $B(s)$ 分别为偏差信号和反馈信号的拉氏变换, $H(s)$ 为闭环系统中的反馈传递函数。并且反馈到相加点与输入量进行比较的反馈信号 $B(s) = H(s)C(s)$ 。

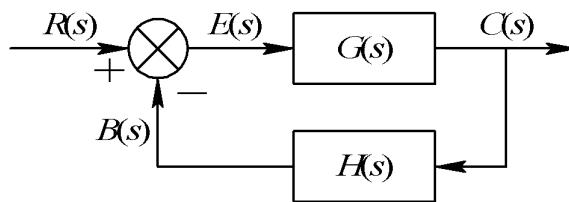


图 2-9 闭环系统结构图

反馈信号 $B(s)$ 与偏差信号 $E(s)$ 之比, 叫做开环传递函数, 即

$$\frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$$

输出量 $C(s)$ 和偏差信号 $E(s)$ 之比, 叫做前向传递函数, 即

$$\frac{C(s)}{E(s)} = G(s)$$

如果反馈传递函数等于 1, 那么开环传递函数和前向传递函数相同, 并称这时的闭环反馈系统为单位反馈系统。从图 2-9 可以推出系统输出量 $C(s)$ 和输入量 $R(s)$ 之间的关系, 具体推导如下:

$$C(s) = G(s)E(s)$$

$$E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - H(s)C(s)$$

消去 $E(s)$ 可得

$$C(s) = G(s)[R(s) - H(s)C(s)]$$

所以有

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (2.38)$$

上式就是系统输出量 $C(s)$ 和输入量 $R(s)$ 之间的传递函数, 称为闭环传递函数。这个传递函数将闭环系统的动态特性与前向通道环节和反馈通道环节的动态特性联系在一起。由方程 (2.38) 可得

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$

可见, 闭环系统的输出量取决于闭环传递函数和输入量的性质。

- 2.2.3 扰动作用下的闭环系统

实际的系统经常会受到外界扰动的干扰, 通常扰动作用下的闭环系统的结构图可由图 2-10 表示。从图 2-10 可知, 这个系统存在两个输入量, 即参考输入量 $R(s)$ 和扰动量 $N(s)$ 。

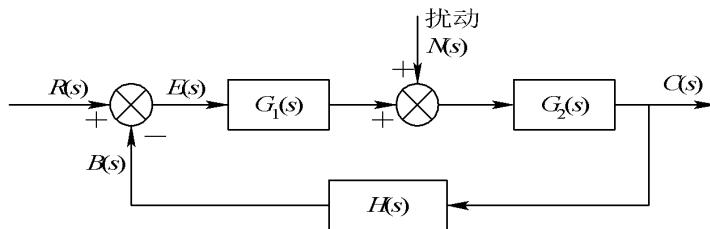


图 2-10 扰动作用下的闭环系统结构图

根据线性系统满足叠加性原理的性质, 可以先对每一个输入量单独地进行处理, 然后将每个输入量单独作用时相应的输出量进行叠加, 就可得到系统的总输出量。对于图 2-10 所示的系统, 研究扰动量 $N(s)$ 对系统的影响时, 可以假设参考输入信号 $R(s) = 0$, 经过简单的推导可以得出系统对扰动的响应 $C_N(s)$ 为

$$C_N(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} N(s)$$

所以, 系统输出对扰动的传递函数 $\Phi_N(s) = C_N(s)/N(s)$ 为

$$\Phi_N(s) = \frac{C_N(s)}{N(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad (2.39)$$

同样在分析系统对参考输入的响应时, 可以假设扰动量 $N(s) = 0$, 这时系统对参考输入量 $R(s)$ 的响应 $C_R(s)$ 为

$$C_R(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} R(s)$$

所以, 系统输出对参考输入的传递函数 $\Phi(s) = C_R(s)/R(s)$ 为

$$\Phi(s) = \frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

根据线性系统的叠加原理可知, 参考输入量 $R(s)$ 和扰动量 $N(s)$ 同时作用于系统时, 系统的响应 (总输出) $C(s)$ 为

$$C(s) = C_R(s) + C_N(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} [G_1(s)R(s) + N(s)]$$

• 2.3.4 结构图的简化和变换规则

利用结构图分析和设计系统时, 常常要对结构图进行简化和变换。对结构图进行简化和变换的基本原则是等效原则, 即对结构图任何部分进行变换时, 变换前后该部分的输入量、输出量及其相互之间的数学关系应保持不变。

变换规则

1. 串联环节的简化

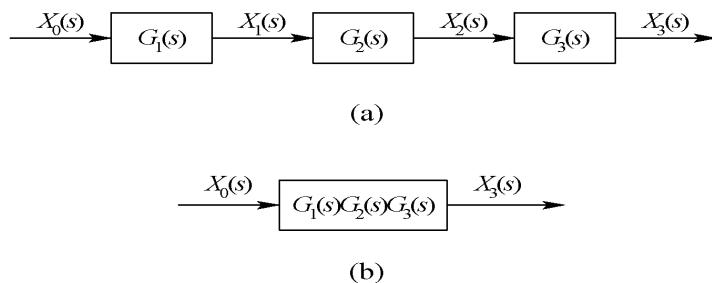


图 2-11 三个环节串联

上述结论可以推广到任意个环节的串联，即 n 个环节（每个环节的传递函数为 $G_i(s), i = 1, 2, \dots, n$ ）串联的等效传递函数等于 n 个传递函数相乘。

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)\dots G_n(s) \quad (2.42)$$

2. 并联环节的简化

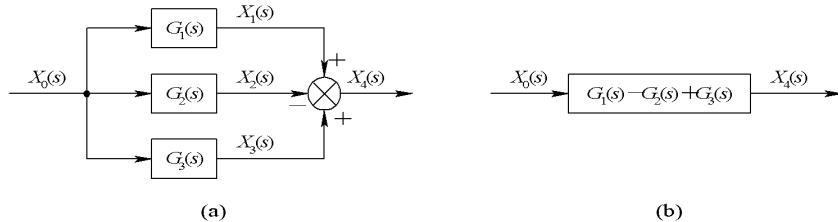


图 2-12 三个环节并联

3. 反馈回路的简化

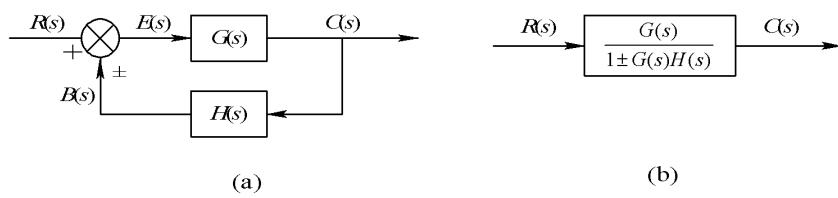


图 2-13 基本反馈回路的简化

4. 相加点和分支点的移动

(1) 相加点前移

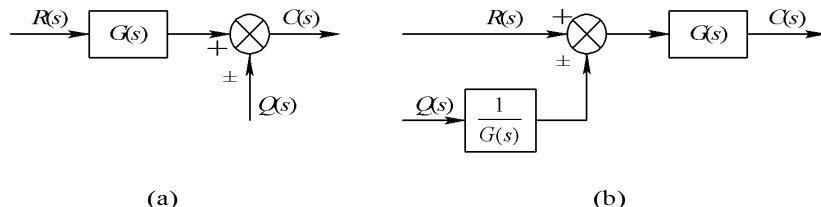


图 2-14 相加点前移

(2) 相加点后移

(3) 分支点前移

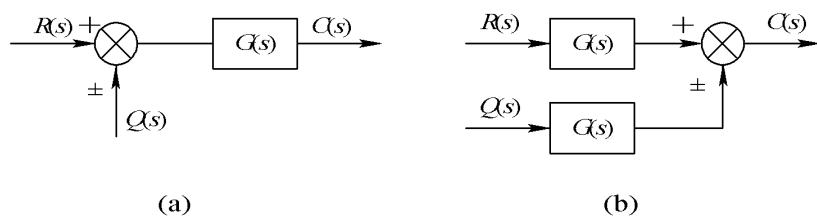


图 2-15 相加点后移

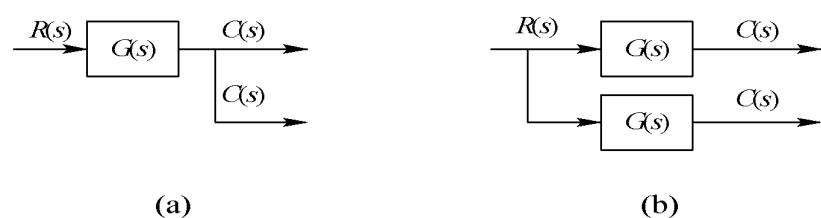


图 2-16 分支点前移

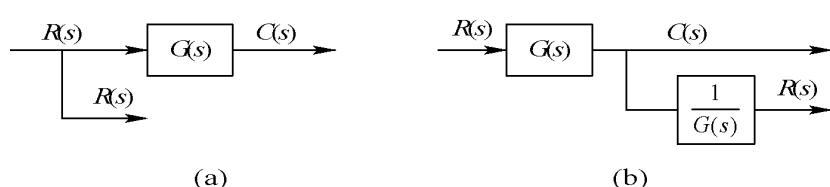


图 2-17 分支点后移

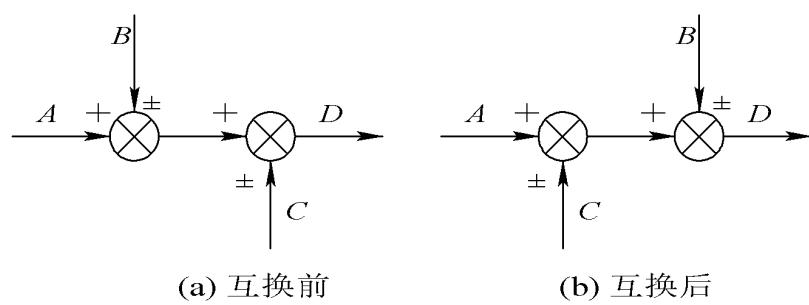


图 2-18 相加点之间的移动

(4) 分支点后移

(5) 相邻相加点之间的移动

(6) 相邻分支点之间的移动

从一个信号流线上无论分出多少条信号线, 它们都代表同一个信号。所以在一条信号流线上的各分支点之间可以随意改变位置, 不必作任何其他改动(如图 2-19 所示)。

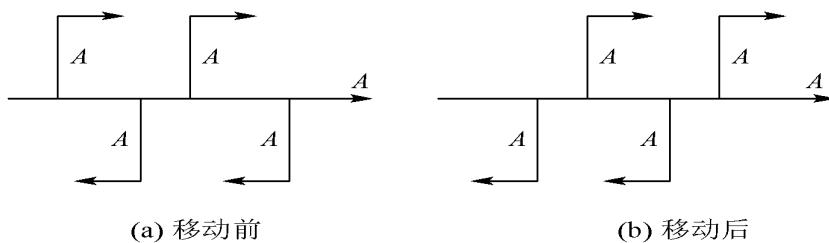


图 2-19 相邻分支点的移动

例 2-9 试简化图 2-20 系统的结构图, 并求系统的传递函数 $C(s)/R(s)$ 。

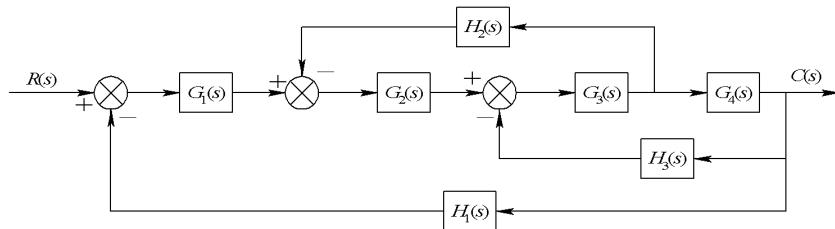


图 2-20 系统结构图

解: 在图 2-20 中, 如果不移动相加点或分支点的位置就无法进行结构图的等效运算。采用以下步骤简化原图:

- (1) 利用分支点后移规则, 将 $G_3(s)$ 和 $G_4(s)$ 之间的分支点移到 $G_4(s)$ 方框的输出端(注意不宜前移), 变换结果如图 2-21(a) 所示;
- (2) 将 $G_3(s)$ 、 $G_4(s)$ 和 $H_3(s)$ 组成的内反馈回路简化(如图 2-21(b) 所示), 其等效传递函数为

$$G_{34}(s) = \frac{G_3(s)G_4(s)}{1 + G_3(s)G_4(s)H_3(s)}$$

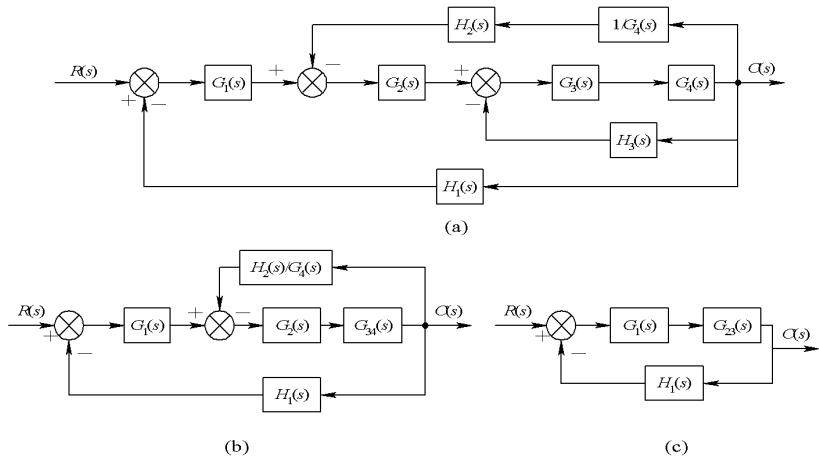


图 2-21 系统结构图简化

- (3) 再将 $G_2(s)$ 、 $G_{34}(s)$ 、 $H_2(s)$ 和 $1/G_4(s)$ 组成的内反馈回路简化 (见图 2-21(c))。其等效传递函数为

$$G_{23}(s) = \frac{G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{1 + G_3(s)G_4(s)H_3(s) + G_2(s)G_3(s)H_2(s)}$$

- (4) 将 $G_1(s)$ 、 $G_{23}(s)$ 和 $H_1(s)$ 组成的反馈回路简化便求得系统的传递函数为

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \frac{C(s)}{R(s)} \\ &= \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)H_2(s) + G_3(s)G_4(s)H_3(s) + G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)H_1(s)} \end{aligned}$$

应当指出, 在结构图简化过程中, 两个相邻的相加点和分支点不能轻易交换。

总之, 根据实际系统中各环节 (子系统) 的结构图和信息流向, 可建立系统的结构图。在确定系统的输入量和输出量后, 经过对系统结构图的简化和运算, 就能求出系统的传递函数。这是经典控制理论中利用传递函数来建立系统数学模型的基本方法。

2.4 信号流图

- 1. 信号流图中的术语

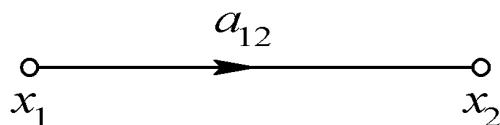


图 2-22 信号流图

下面结合图 2-23 介绍信号流图的有关术语。

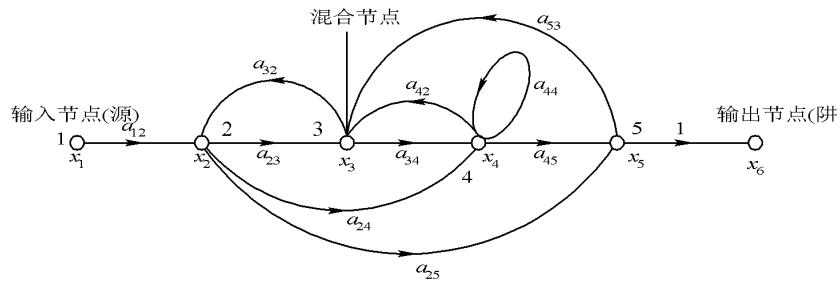


图 2-23 信号流图

输入节点(源)仅具有输出支路的节点。如图 2-23 中的 x_1 。

输出节点(阱)仅有输入支路的节点。有时信号流图中没有一个节点是仅具有输入支路的。我们只要定义信号流图中任一变量为输出变量, 然后从该节点变量引出一条增益为 1 的支路, 即可形成一输出节点, 如图 2-23 中的 x_6 。

混合节点既有输入支路又有输出支路的节点。如图 2-23 中的 x_2, x_3, x_4, x_5 。

通道沿支路箭头方向而穿过各相连支路的途径。如果通道与任一节点相交不多于一次, 就叫开通道。如果通道的终点就是起点, 并且与任何其他节点相交不多于一次, 就称作闭通道。

前向通道如果从输入节点(源)到输出节点(阱)的通道上, 通过任何节点不多于一次, 则该通道叫前向通道。如

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5, x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5, x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_5$$

前向通道增益前向通道上各支路增益之乘积, 用 P_k 表示。

回路起点和终点在同一节点, 并与其它节点相遇仅一次的通路, 也就是闭合通道。以下是图 2-23 中的一些回路:

$$x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2, x_2 \rightarrow x_4 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2,$$

$$x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_3, x_2 \rightarrow x_5 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2,$$

$$x_2 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2,$$

$$x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow x_3, x_4 \rightarrow x_4,$$

回路增益回路中所有支路的乘积, 用 L_a 表示。

不接触回路回路之间没有公共节点时, 这种回路叫做不接触回路。在信号流图中, 可以有两个或两个以上的不接触回路。例如:

$$x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2, x_4 \rightarrow x_4$$

$$x_2 \rightarrow x_5 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2, x_4 \rightarrow x_4$$

- 2. 信号流图的性质

- (1) 信号流图适用于线性系统。
- (2) 支路表示一个信号对另一个信号的函数关系, 信号只能沿支路上的箭头指向传递。
- (3) 在节点上可以把所有输入支路的信号叠加, 并把相加后的信号送到所有的输出支路。
- (4) 具有输入和输出支路的混合节点, 通过增加一个具有单位增益的支路可以把它作为输出节点来处理。
- (5) 对于一个给定的系统, 信号流图不是唯一的。由于描述同一个系统的方程可以表示为不同的形式, 因此可以画出不同的信号流程图。

- 3. 梅逊公式

用梅逊公式可以直接求信号流图从输入节点到输出节点的增益, 其表达式为

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_k P_k \Delta_k \quad (2.45)$$

式中,

P ——系统总增益 (对于控制系统的结构图而言, 就是输入到输出的传递函数);

k ——前向通道数目;

P_k ——第 k 条前向通道的增益;

Δ ——信号流图的特征式, 它是信号流图所表示的方程组的系数矩阵的行列式。在同一个信号流图中不论求图中任何一对节点之间的增益, 其分母总是 Δ , 变化的只是其分子。它可以通过下面的表达式计算:

$$\Delta = 1 - \sum L_{(1)} + \sum L_{(2)} + \sum L_{(3)} + \cdots + (-1)^m \sum L_{(m)}$$

其中, $\sum L_{(1)}$ ——所有不同回路增益乘积之和;

$\sum L_{(2)}$ ——所有任意两个互不接触回路增益乘积之和;

$\sum L_{(3)}$ ——所有任意三个互不接触回路增益乘积之和;

$\sum L_{(m)}$ ——所有任意 m 个不接触回路增益乘积之和;

Δ_k ——信号流图中除去与第 k 条前向通道 P_k 相接触的支路和节点后余下的信号流图的特征式, 称为 P_k 的余因式。

梅森 (Mason) 公式

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum P_k \Delta_k$$

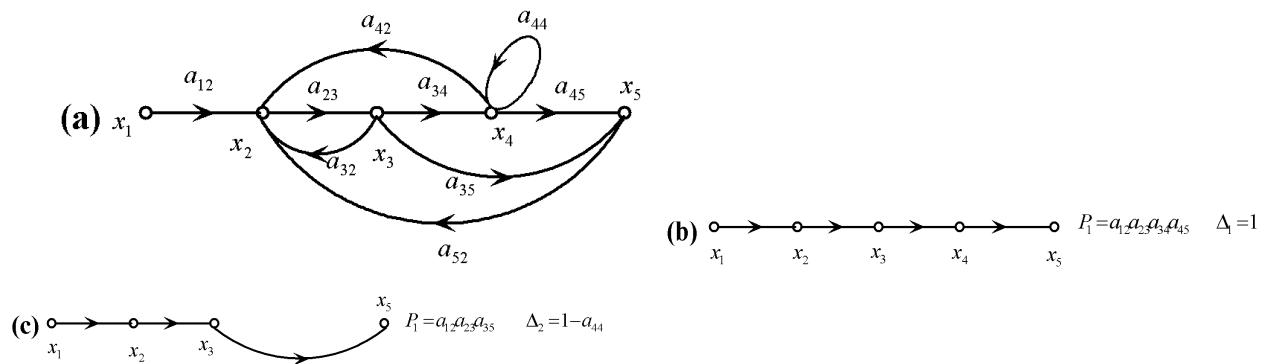
式中,

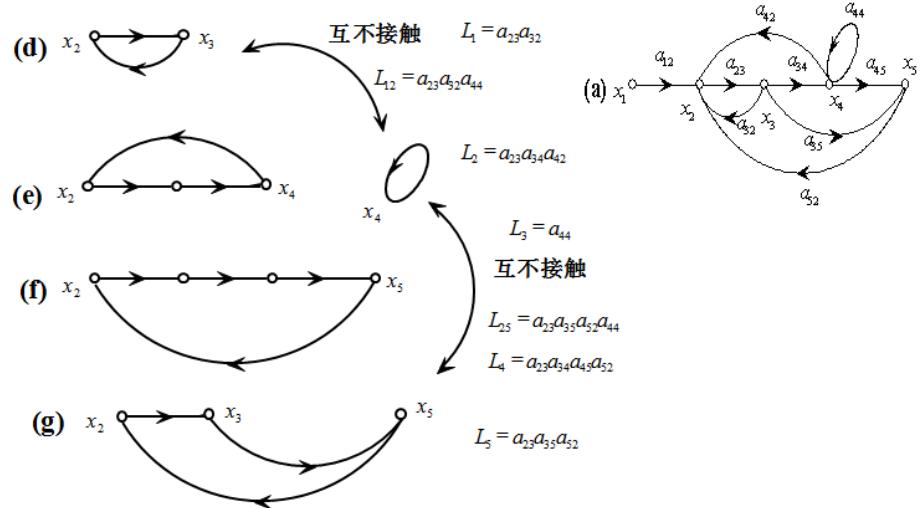
- P 系统总增益 (总传递函数)
- k 前向通路数
- P_k 第 k 条前向通路总增益
- Δ : 信号流图特征式, 它是信号流图所表示的方组的系数矩阵的行列式。在同一个信号流图中不论求图中任何一对节点之间的增益, 其分母总是 Δ , 变化的只是其分子。

$$\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c - \sum L_d L_e L_f + \cdots + (-1)^m \sum L_{(1)} \cdots L_{(m)}$$

- $\sum L_a$ 所有不同回路增益乘积之和;
- $\sum L_b L_c = \sum L_{bc}$ 所有任意两个互不接触回路增益乘积之和;
- $\sum L_{(1)} \cdots L_{(m)} = \sum L_{(1 \dots m)}$ 所有任意 m 个不接触回路增益乘积之和。
- Δ_k : 为不与第 k 条前向通路相接触的那一部分信号流图的 Δ 值, 称为第 k 条前向通路特征式的余因子。

例 2-10 求如图所示信号流图的总增益 $\frac{X_5(s)}{X_1(s)} = ?$

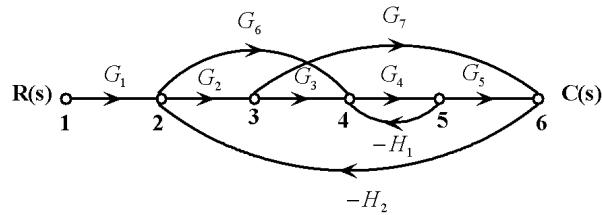




信号流图回路分解

$$P = \frac{a_{12}a_{23}a_{34}a_{45} + (1 - a_{44})a_{12}a_{23}a_{35}}{1 - (a_{23}a_{32} + a_{23}a_{34}a_{42} + a_{44} + a_{23}a_{34}a_{52} + a_{23}a_{35}a_{52}) + a_{23}a_{32}a_{44} + a_{23}a_{35}a_{52}a_{44}}$$

例 2-11 利用 Mason's gain formula 求如图所示系统的闭环传递函数。



求如图所示系统的闭环传递函数

解：前向通路有 3 个

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \quad P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5$$

$$1 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \quad P_2 = G_1 G_6 G_4 G_5$$

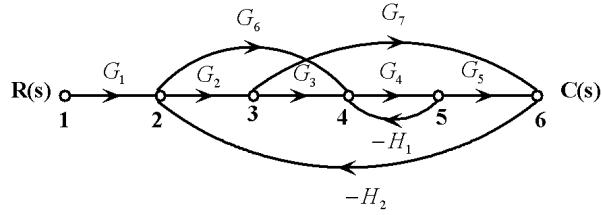
$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \quad P_3 = G_1 G_2 G_7$$

4 个单独回路

$$4 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \quad L_1 = -G_4 H_1$$

$$2 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \quad L_2 = -G_2 G_7 H_2$$

$$2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \quad L_3 = -G_6 G_4 G_5 H_2$$



$$2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \quad L_4 = -G_2 G_3 G_4 G_5 H_2$$

$$\text{互不接触 } L_1 L_2 L_{12} = L_1 L_2 = G_4 G_2 G_7 H_1 H_2$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_1 L_2$$

$$\Delta = 1 + G_1 H_1 + G_2 G_7 H_2 + G_6 G_4 G_5 H_2 + G_2 G_3 G_4 G_5 H_2 + G_4 G_5 G_7 H_1 H_2$$

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 \quad \Delta_1 = 1$$

$$P_1 = G_1 G_6 G_4 G_5 \quad \Delta_2 = 1$$

$$P_3 = G_1 G_2 G_7 \quad \Delta_3 = 1 + G_4 H_1$$

$$\begin{aligned} \frac{C(S)}{R(S)} &= P(S) = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3}{\Delta} \\ &= \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 + G_1 G_6 G_4 G_5 + G_1 G_2 G_7 (1 + G_4 H_1)}{1 + G_1 H_1 + G_2 G_7 H_2 + G_6 G_4 G_5 H_2 + G_2 G_3 G_4 G_5 H_2 + G_4 G_5 G_7 H_1 H_2} \end{aligned}$$

第三章线性系统的时域分析法

3.1 动态和稳态性能指标

- 3.1.1 典型输入信号

1. 阶跃函数

阶跃函数 (见图 3-1(a)) 的时域表达式为

$$r(t) = \begin{cases} R \cdot 1(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

式中, R 为常数, 当 $R = 1$ 时, 称 $r(t) = 1(t)$ 为单位阶跃函数。

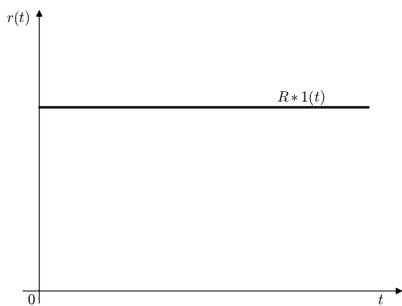


图 3-1 (a) 典型输入信号

2. 斜坡函数 (速度函数)

斜坡函数, 也称速度函数 (见图 3-1(b)), 其时域表达式为

$$r(t) = \begin{cases} Rt & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

式中, R 为常数。当 $R = 1$ 时, 称 $r(t) = t$ 为单位斜坡函数。因为 $\frac{dr(t)}{dt} = R$, 所以斜坡函数代表匀速变化的信号。

3. 加速度函数

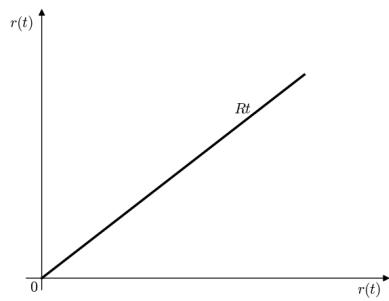


图 3-1 (b) 典型输入信号

加速度函数 (见图 3-1(c)) 的时域表达式为

$$r(t) = \begin{cases} \frac{Rt^2}{2} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

式中, R 为常数。当 $R=1$ 时, 称 $r(t) = \frac{t^2}{2}$ 为单位加速度函数。因为 $\frac{d^2r(t)}{dt^2} = R$, 所以加速度函数代表匀加速变化的信号。

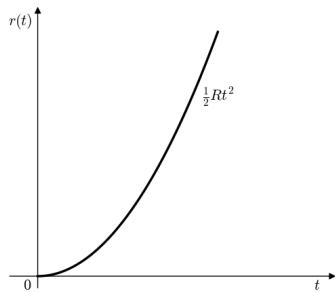


图 3-1 (c) 典型输入信号

4. 脉冲函数

脉冲函数 (见图 3-1(d)) 的时域表达式为

$$r(t) = \begin{cases} \frac{1}{h} & 0 < t < h \\ 0 & h < t < 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

式中, h 称为脉冲宽度, 脉冲的面积为 1。若对脉冲的宽度取趋于零的极限, 则有

$$\delta = r(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

及

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (3.6)$$

称此函数为理想脉冲函数, 又称 δ 函数 (见图 3-1(e))。

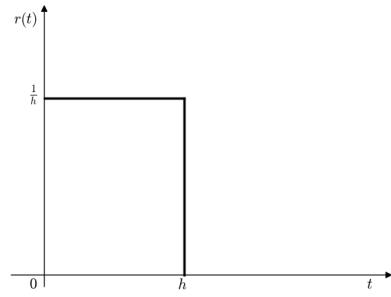


图 3-1 (d) 典型输入信号

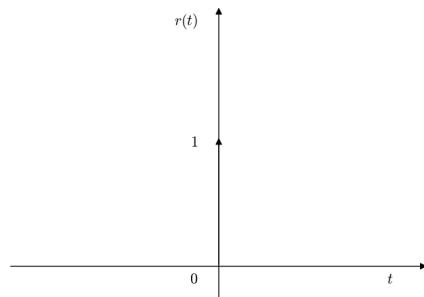


图 3-1 (e) 典型输入信号

5. 正弦函数

正弦函数 (见图 3-1(f)) 的时域表达式为

$$r(t) = A \sin \omega t \quad (3.7)$$

式中, A 为振幅, ω 为角频率。

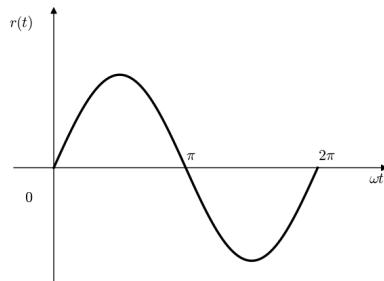


图 3-1 (e) 典型输入信号

- 3.1.2 动态过程和稳态过程

1. 动态过程

动态过程又称过渡过程或瞬态过程, 指系统在典型输入信号作用下, 系统输出量从开始状态到最终状态的响应过程。由于实际控制系统具有惯性、摩擦以及其他一些原因, 系统输出量不可能完全复现输入量的变化。根据系统结构和参数选择的情况, 动态过程表现为衰减、发散或等幅振荡形式。显然, 一个可以实际运行的控制系统, 其动态过程必须是衰减的, 即系统必须是稳定的。动态过程除提供系统的稳定性信息外, 还可以给出响应速度、阻尼情况等信息。这些信息用动态性能描述。

2. 稳态过程

稳态过程(稳态响应), 是指当时间 t 趋近于无穷大时, 系统输出状态的表现形式。它表征系统输出量最终复现输入量的程度, 提供系统有关稳态误差的信息, 用稳态性能来描述。

由此可见, 控制系统在典型输入信号作用下的性能指标, 通常由动态性能和稳态性能两部分组成。

- 3.1.3 动态性能和稳态性能

稳定是控制系统能够运行的首要条件, 因此只有当动态过程收敛时, 研究系统的稳态性能才有意义。

1. 动态性能

当系统的时间响应 $c(t)$ 中的瞬态分量较大而不能忽略时, 称系统处于**动态**或**过渡过程中**, 这时系统的特性称为**动态性能**。动态性能指标通常根据系统的阶跃响应曲线定义。设系统阶跃响应曲线如图 3-2 所示。图中 $c(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t)$ 为输出的稳态值。

动态性能指标通常有以下几种:

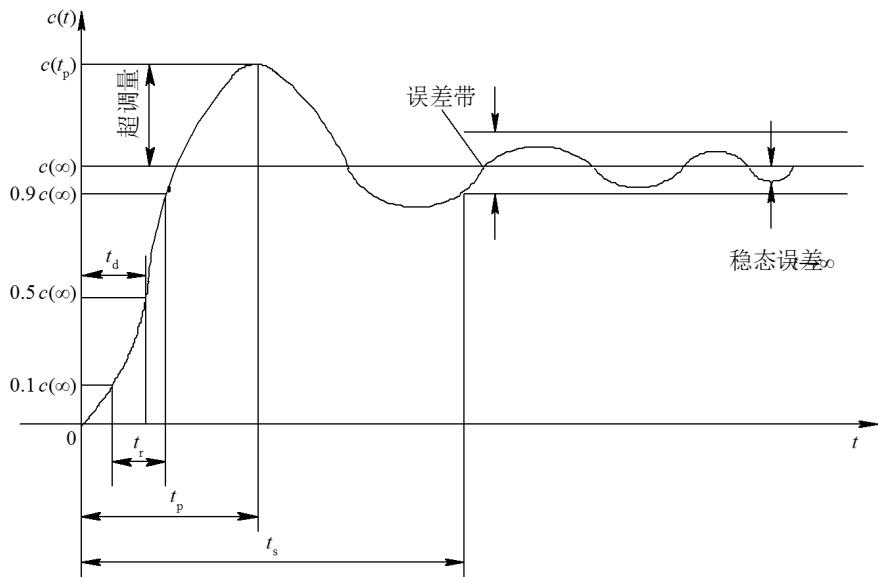


图 3-2 系统阶跃响应

延迟时间 t_d : 指响应曲线第一次达到稳态值的一半所需的时间。

上升时间 t_r : 若阶跃响应不超过稳态值, 上升时间指响应曲线从稳态值的 10% 上升到 90% 所需的时间; 对于有振荡的系统, 上升时间定义为响应从零第一次上升到稳态值所需的时间。上升时间越短, 响应速度越快。

峰值时间 t_p : 指阶跃响应曲线超过稳态值, 到达第一个峰值所需要的时间。

调节时间 t_s : 在响应曲线的稳态线上, 用稳态值的百分数 (通常取 5% 或 2%) 作一个允许误差范围, 响应曲线达到并永远保持在这一允许误差范围内所需的时间。

最大超调量 σ_p 设阶跃响应的最大值为 $c(t_p)$, 则最大超调量 σ_p 可由下式确定:

$$\sigma_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% \quad (3.8)$$

振荡次数 N: 在 $0 \leq t \leq t_s$ 内, 阶跃响应曲线穿越稳态值 $c(\infty)$ 次数的一半称为振荡次数。

上述动态性能指标中, 常用的指标有 t_r 、 t_s 和 σ_p 。上升时间 t_r 评价系统的响应速度; σ_p 评价系统的运行平稳性或阻尼程度; t_s 是同时反映响应速度和阻尼程度的综合性指标。应当指出, 除简单的一、二阶系统外, 要精确给出这些指标的解析表达式是很困难的。

2. 稳态性能

稳态误差是描述系统稳态性能的一种性能指标, 通常在阶跃函数、斜坡函数或加速度函数作用下进行测定或计算。若时间趋于无穷时, 系统输出不等于输入量或输入量的确定函数, 则系统存在稳态误差。稳态误差是系统控制精度或抗扰动能力的一种度量。

3.2 一阶系统的时域分析

描述时间常数为 T 的一阶系统的微分方程和传递函数分别如下：

$$T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t) \quad (3.9)$$

$$\phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \quad (3.10)$$

- 3.2.1 一阶系统的单位阶跃响应

对于单位阶跃输入

$$r(t) = 1(t), R(s) = \frac{1}{s}$$

有

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s(Ts + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts + 1}$$

由拉氏反变换可以得到一阶系统的单位阶跃响应 $c(t)$ 为

$$c(t) = c_s(t) + c_t(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} (t \geq 0) \quad (3.11)$$

式中, $c_s(t) = 1$ 是稳态分量, 由输入信号决定。 $c_t(t) = -e^{\frac{t}{T}}$ 是瞬态分量(暂态分量), 它的变化规律由传递函数的极点 $s = -\frac{1}{T}$ 决定。当 $t \rightarrow \infty$ 时, 瞬态分量按指数规律衰减到零。以下是一阶系统单位阶跃响应的典型数值。

- $c(0) = 1 - e^0 = 0;$
- $c(T) = 1 - e^{-1} = 0.632;$
- $c(2T) = 1 - e^{-2} = 0.865;$
- $c(3T) = 1 - e^{-3} = 0.95;$
- $c(4T) = 1 - e^{-4} = 0.982;$
- $c(5T) = 1 - e^{-5} = 0.993;$
- $c(\infty) = 1$

- 3.2.2 一阶系统的单位脉冲响应

如果输入信号为理想单位脉冲函数

$$r(t) = \delta(t), R(s) = 1$$

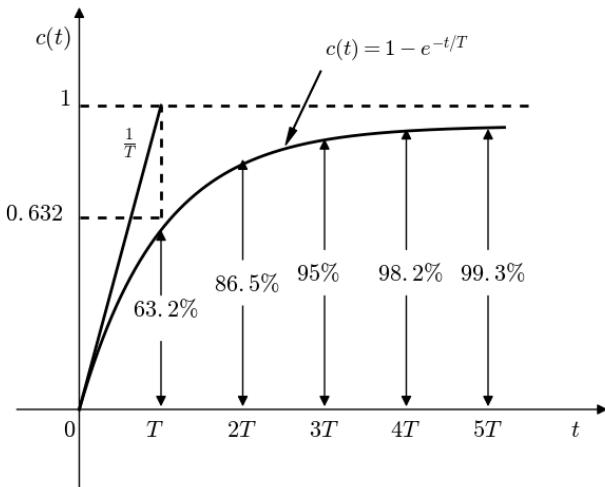


图 3-4 一阶系统单位阶跃响应曲线

输出量的拉氏变换与系统的传递函数相同, 即

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

这时的输出响应称为单位脉冲响应, 记作 $g(t)$ 。因为 $g(t) = L^{-1}[G(s)]$, 其表达式为

$$c(t) = \frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}} (t \geq 0)$$

• 3.2.3 一阶系统的单位斜坡响应

对于单位斜坡函数

$$r(t) = t, R(s) = \frac{1}{s^2}$$

可求得系统输出信号的拉氏变换为

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts + 1}$$

取拉氏反变换可得系统的单位斜坡响应为

$$c(t) + c_s(t) + c_t(t) = (t - T) + Te^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0)$$

式中, $c_s(t = t - T)$ 是稳态分量, 它是一个与输入信号等斜率的斜坡函数, 但时间上滞后一个时间常数 T ; $c_t(t) = Te^{-\frac{t}{T}}$ 是瞬态分量, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $c_t(t)$ 按指数规律衰减到零, 衰减速度由极点 $s = -\frac{1}{T}$ 决定。单位斜坡响应也可由单位阶跃响应积分得到, 其中初始条件为零。

系统的误差信号 $e(t)$ 为

$$e(t) = r(t) - c(t) = T(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \quad (3.14)$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时, $e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = T$ 。这表明一阶系统的单位斜坡响应在过渡过程结束后存在常值误差, 其值等于时间常数 T 。

一阶系统单位斜坡响应曲线如图 3-5 所示。由图可知, 时间常数越小, 响应越快, 跟踪误差越小, 输出信号的滞后时间也越短。

本节最后给出线性定常系统的一个重要特性——等价关系, 即线性定常系统对输入信号导数的响应, 等于此系统对该输入信号响应的导数; 线性定常系统对输入信号积分的响应, 就等于此系统对该输入信号响应的积分, 积分常数由零初始条件确定。这个重要特性适用于任何阶线性定常系统, 但不适用于线性时变系统和非线性系统。因此, 研究线性定常系统的时间响应, 不必对每种输入信号进行测定和计算, 往往只取其中一种典型形式进行研究。

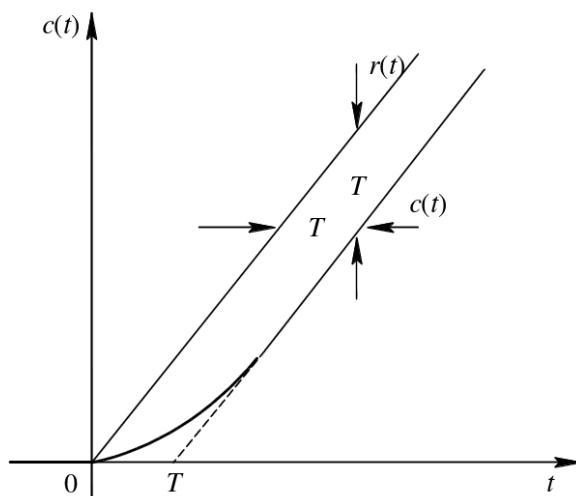


图 3-5 一阶系统的单位斜坡响应

3.3 二阶系统的时域分析

- 3.3.1 二阶系统的标准形式

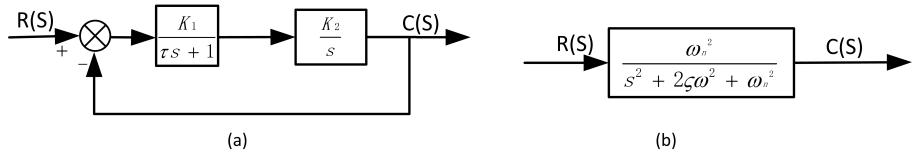


图 3-6 二阶系统结构图

典型的二阶系统的结构图如图 3-6(a) 所示, 它是由一个惯性环节和一个积分环节串联组成前向通道的单位负反馈系统。系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_1 K_2}{\tau s^2 + s + K_1 K_2}$$

令 $\omega_n^2 = \frac{K_1 K_2}{\tau}$, $\frac{1}{\tau} = 2\xi\omega_n$, 则可将二阶系统化为如下标准形式:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.15)$$

对应的系统微分方程为

$$c''(t) + 2\xi\omega_n c'(t) + \omega_n^2 c(t) = \omega_n^2 r(t) \quad (3.16)$$

式中, ξ 称为阻尼比, ω_n 称为无阻尼自振角频率。与式 (3.15) 对应的系统结构图如图 3-6(b) 所示。

二阶系统的动态特性, 可以用 ξ 和 ω_n 这两个参量的形式加以描述。这两个参数是二阶系统的重要结构参数。由式 (3.15) 可得二阶系统的特征方程为

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (3.17)$$

所以, 系统的两个特征根 (极点) 为

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (3.18)$$

随着阻尼比 ξ 的不同, 二阶系统特征根 (极点) 也不相同。

1. 欠阻尼 ($0 < \xi < 1$)

当 $0 < \xi < 1$ 时, 两特征根为

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

这是一对共轭复数根, 如图 3-7(a) 所示。

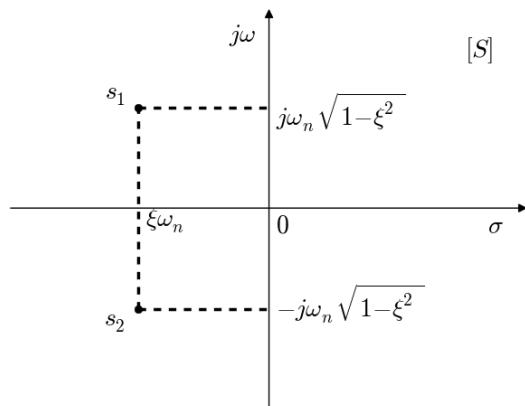


图 3-7 (a)

2. 临界阻尼 ($\xi = 1$)

当 $\xi = 1$ 时, 特征方程有两个相同的负实根, 即

$$s_{1,2} = -\omega_n$$

此时, s_1, s_2 如图 3-7(b) 所示。

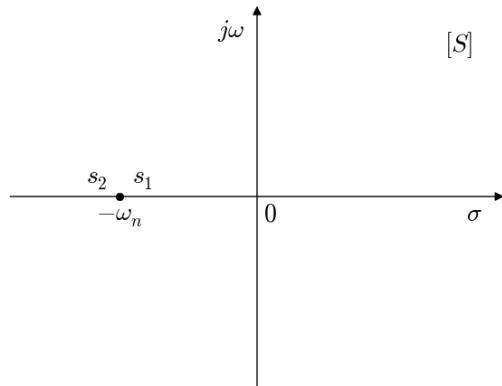


图 3-7 (b)

3. 过阻尼 ($\xi > 1$)

当 $\xi > 1$ 时, 两特征根为

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

这是两个不同的实根, 如图 3-7(c) 所示。

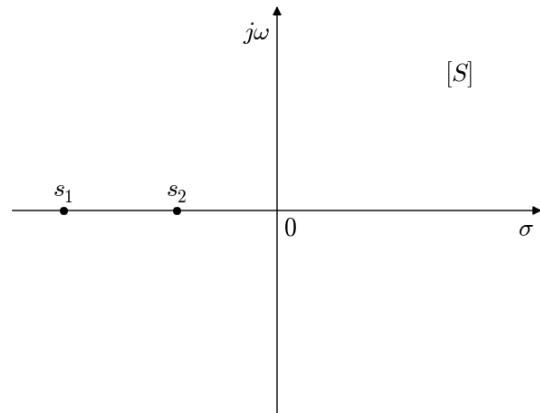


图 3-7 (c)

4. 无阻尼 ($\xi = 0$)

当 $\xi = 0$ 时, 特征方程具有一对共轭纯虚数根, 即

$$s_{1,2} = \pm j\omega_n$$

此时, s_1, s_2 如图 3-7(d) 所示。

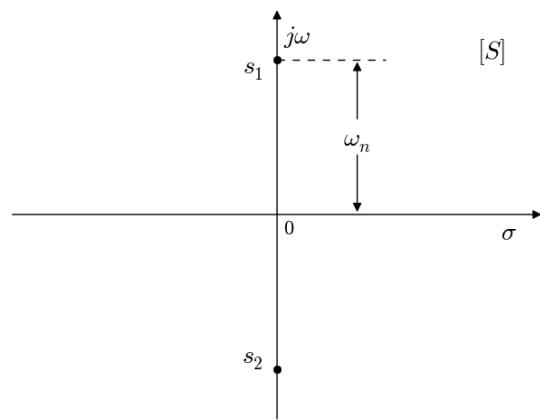


图 3-7 (3)

- 3.3.2 二阶系统的单位阶跃响应

令 $r(t) = 1(t)$, 则有 $R(s) = 1/s$ 。所以, 由式 (3.15) 可得二阶系统在单位阶跃函数作用下输出信号的拉氏变换为

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} \quad (3.19)$$

对上式求拉氏反变换, 可得二阶系统在单位阶跃函数作用下的过渡过程为

$$c(t) = L^{-1}[C(s)]$$

1. 欠阻尼情况 ($0 < \xi < 1$)

在这种情况下, 式 (3.19) 可以展成如下部分分式形式:

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n + j\omega_d)(s + \xi\omega_n - j\omega_d)} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\xi\omega_n}{\omega_d} \cdot \frac{\omega_d}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} \end{aligned} \quad (3.20)$$

式中, $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ 称为有阻尼自振角频率。方程 (3.20) 的拉氏反变换为

$$\begin{aligned} c(t) &= L^{-1}[C(s)] = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \cos \omega_d t - \frac{\xi\omega_n}{\omega_d} e^{-\xi\omega_n t} \sin \omega_d t \\ &= 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left[\cos \omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_d t \right] \end{aligned} \quad (t \geq 0) \quad (3.21)$$

上式还可以改写为

$$\begin{aligned} c(t) &= 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} (\sqrt{1 - \xi^2} \cos \omega_d t + \xi \sin \omega_d t) \\ &= 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_d t + \phi) \end{aligned} \quad (t \geq 0) \quad (3.22)$$

式中, $\phi = \arctan(\frac{1-\xi^2}{\xi})$ 由式 (3.22) 可知, 在欠阻尼情况下, 二阶系统的单位阶跃响应是衰减的正弦振荡曲线 (如图 3-8 所示)。衰减速度取决于特征根实部的绝对值 $\xi\omega_n$ 的大小, 振荡角频率是特征根虚部的绝对值, 即有阻尼自振角频率 ω_d , 振荡周期为

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (3.23)$$

2. 无阻尼情况 ($\xi = 0$)

当 $\xi = 0$ 时, 系统的单位阶跃响应为

$$c(t) = 1 - \cos \omega_n t$$

所以, 无阻尼情况下系统的阶跃响应是等幅正(余)弦振荡曲线(如图 3-8 所示), 振荡角频率是 ω_n 。

3. 临界阻尼情况 ($\xi = 1$)

当 $\xi = 1$ 时, 由式 (3.19) 可得

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2} = \frac{1}{s} - \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n^2)^2} - \frac{1}{s + \omega_n}$$

对上式进行拉氏反变换得

$$c(t) = 1 - (\omega_n t + 1)e^{-\omega_n t} (t \geq 0) \quad (3.25)$$

所以, 二阶系统临界阻尼情况下的单位阶跃响应是一条无超调的单调上升曲线(如图 3-8 所示)。

4. 过阻尼情况 ($\xi > 1$)

这种情况下, 系统存在两个不等的实根, 即

$$s_1 = -(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n, s_2 = -(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n$$

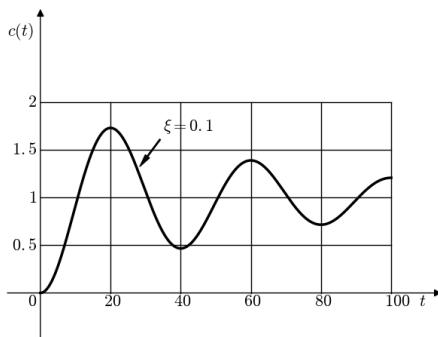
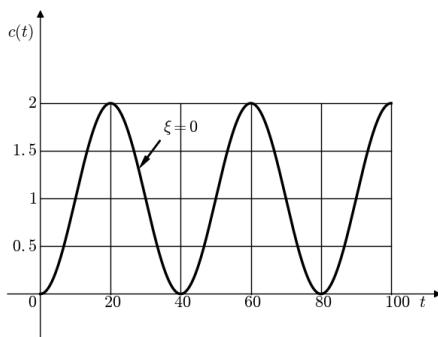
由式 (3.19) 可得

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s - s_1)(s - s_2)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + \omega_n(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})} + \frac{A_3}{s + \omega_n(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})}$$

式中, $A_1 = 1$, $A_2 = \frac{-1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})}$, $A_3 = \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})}$ 取上式的拉氏反变换可得过阻尼情况下二阶系统的单位阶跃响应为

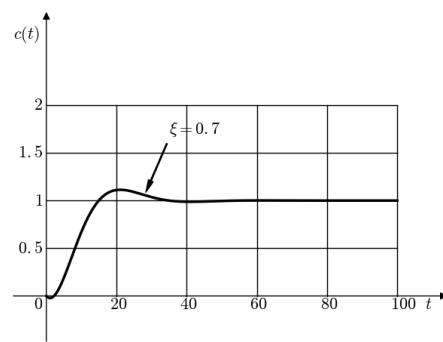
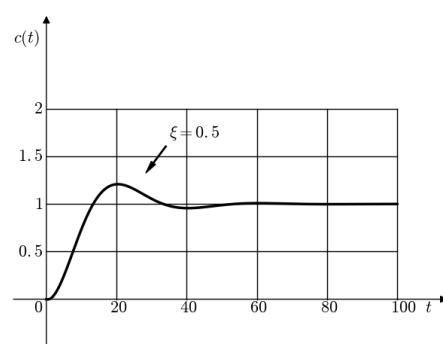
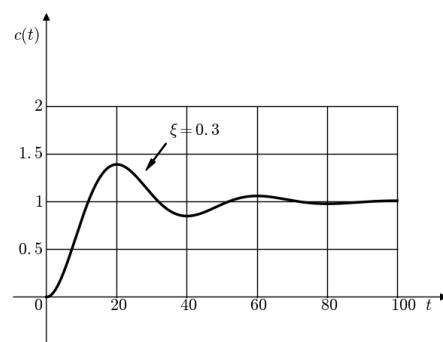
$$\begin{aligned} c(t) &= 1 - \frac{1}{(2\sqrt{\xi^2 - 1})(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})} e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} \\ &\quad - \frac{1}{(2\sqrt{\xi^2 - 1})(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})} e^{-(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} \quad (t \geq 0) \end{aligned} \quad (3.26)$$

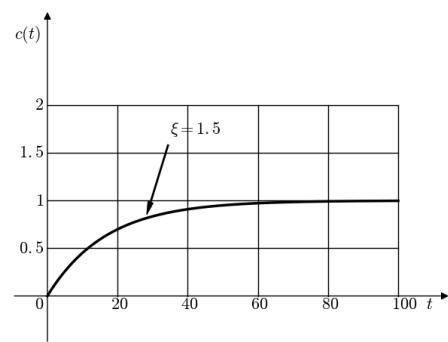
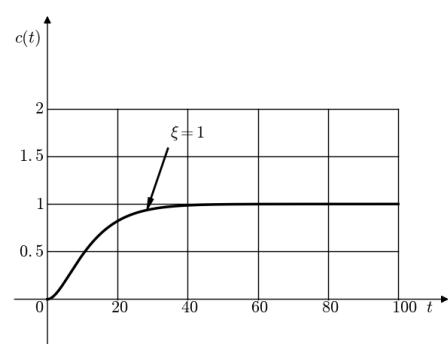
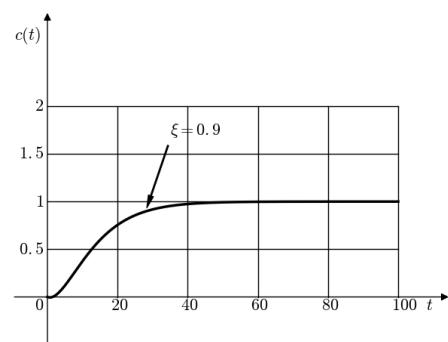
显然, 这时系统的响应 $c(t)$ 包含两个衰减的指数项, 其过渡过程曲线如图 3-8 所示。此时的二阶系统就是两个惯性环节的串联。有关分析表明, 当 $\xi \geq 2$ 时, 两极点 s_1 和 s_2 与虚轴的距离相差很大, 此时靠近虚轴的极点所对应的惯性环节的时间响应与原二阶系统非常接近, 可以用该惯性环节来代替原来的二阶系统。

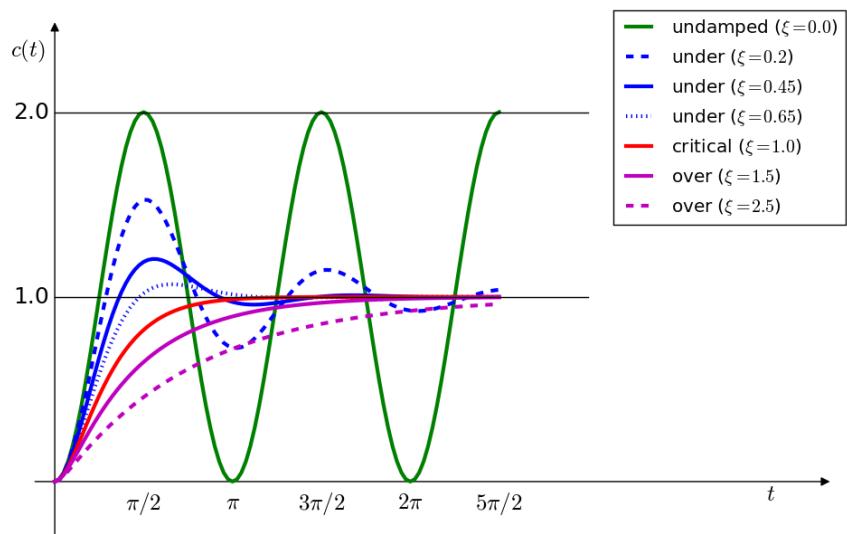
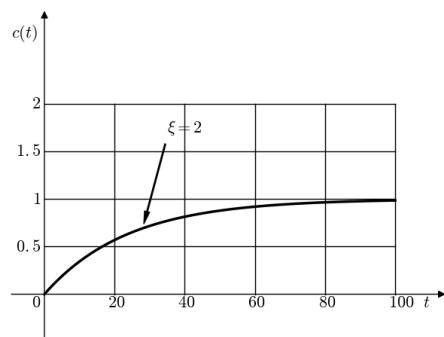


• 3.3.3 二阶系统的性能指标

在许多实际情况中, 评价控制系统动态性能的好坏是通过系统反映单位阶跃函数的过渡过程的特征量来表示的。在一般情况下, 希望二阶系统工作在 $0.4 < \xi < 0.8$ 的欠阻尼状态下。因此, 下面有关性能指标的定义和定量关系的推导主要是针对二阶系统的欠阻尼工作状态进行的。另外, 系统在单位阶跃函数作用下的过渡过程与初始条件有关, 为了便于比较各种系统的过渡过程性能, 通常假设系统的初始条件为零。







不同阻尼比下二阶系统的阶跃响应

1. 上升时间 t_r

根据 3.1 节的定义, 上升时间满足

$$c(t_r) = 1 - e^{-\xi\omega_n t_r} \cos \omega_d t_r + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_d t_r = 1$$

所以有

$$\cos \omega_d t_r + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_d t_r = 0$$

或

$$\tan \omega_d t_r = -\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

根据反三角函数的性质和式 (3.22) 中 ϕ 的表达式可得

$$\tan \omega_d t_r = \tan(\pi - \phi)$$

因此, 二阶系统阶跃响应的上升时间为

$$t_r = \frac{\pi - \phi}{\omega_d} = \frac{\pi - \phi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (3.27)$$

2. 峰值时间 t_p

将式 (3.22) 对时间求导, 并令其为零, 即

$$\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=t_p} = 0$$

得

$$\xi \omega_n e^{-\xi \omega_n t_p} \sin(\omega_d t_p + \phi) - \omega_d e^{-\xi \omega_n t_p} \cos(\omega_d t_p + \phi) = 0$$

整理、变换得

$$\tan(\omega_d t_p + \phi) = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} = \tan \phi$$

根据三角函数的周期性, 上式成立需满足: $\omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ 由于峰值时间是过渡过程达到第一个峰值所对应的时间, 因此应取

$$\omega_d t_p = \pi$$

即二阶系统过渡过程峰值时间为

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{1}{2} T_d \quad (3.28)$$

3. 最大超调量 σ_p

由最大超调量的定义式 (3.8) 和系统的阶跃响应式 (3.21) 可得

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% = -e^{-\xi\omega_n t_p} \left(\cos \omega_d t_p + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_d t_p \right) \times 100\% \\ &= -e^{-\xi\omega_n t_p} \left(\cos \pi + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \pi \right) \times 100\% = e^{-\xi\omega_n t_p} \times 100\% \end{aligned}$$

即

$$\sigma_p = e^{-\xi\pi\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\% \quad (3.29)$$

4. 过渡过程时间 t_s

由式 (3.22) 可知, 欠阻尼二阶系统的单位阶跃响应曲线 $c(t)$ 位于一对曲线

$$y(t) = 1 \pm \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

之内, 这对曲线称为响应曲线的包络线。可以采用包络线代替实际响应曲线估算过渡过程时间 t_s , 所得结果一般略偏大。若允许误差带是 Δ , 则可以认为 t_s 就是包络线衰减到 Δ 区域所需的时间, 则有

$$\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} = \Delta$$

解得

$$t_s = \frac{1}{\xi\omega_n} \left(\ln \frac{1}{\Delta} + \ln \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \right)$$

若取 $\Delta = 5\%$, 并忽略

$$\ln \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (0 < \xi < 0.9)$$

时, 则得

$$t_s \approx \frac{3}{\xi \omega_n}$$

5. 振荡次数 N

根据振荡次数的定义, 有

$$N = \frac{t_s}{T_d} = \frac{t_s}{2t_p}$$

当 $\delta = 5\%$ 和 $\delta = 2\%$ 时, 由式 (3.31) 和式 (3.32) 可得

$$N = \frac{1.5\sqrt{1-\xi^2}}{\pi\xi} (\Delta = 5\%)$$

$$N = \frac{2\sqrt{1-\xi^2}}{\pi\xi} (\Delta = 2\%)$$

若已知 σ_p , 考虑到

$$\sigma_p = \exp(-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2})$$

即

$$\ln \sigma_p = \frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

求得振荡次数 N 与最大超调量之间的关系为

$$N = -\frac{1.5}{\ln \sigma_p} (\Delta = 5\%) \quad (3.36)$$

$$N = -\frac{2}{\ln \sigma_p} (\Delta = 2\%) \quad (3.37)$$

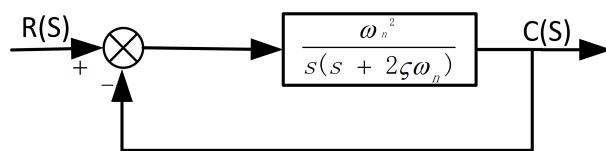


图 3-9 二阶系统结构图

例 3-1 某二阶系统如图 3-9 所示, 其中系统的结构参数 $\xi = 0.6$, $\omega_n = 5\text{rad/sec}$ 。输入信号为阶跃函数, 求性能指标 t_r 、 t_p 、 t_s 、 N 和 N 的数值。

解 根据给定的参数可以得出 $\sqrt{1 - \xi^2} = 0.8$, $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = 4$, $\phi = \arctan \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} = 0.93$

所以

$$t_r = \frac{\pi - \phi}{\omega_d} = 0.55s$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 0.785s$$

$$\sigma_p = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\% = 9.5\%$$

$$t_s \approx \frac{3}{\xi\omega_n} = 1s (\Delta = 5\%)$$

$$t_s \approx \frac{4}{\xi\omega_n} = 1.33s (\Delta = 2\%)$$

$$N = \frac{t_s}{2t_p} = 0.6 (\Delta = 5\%)$$

$$N = \frac{t_s}{2t_p} = 0.8 (\Delta = 2\%)$$

例 3-2 设一个带速度反馈的伺服系统, 其结构图如图 3-10 所示。要求系统的性能指标为 $\sigma_p\% = 20\%$, $t_p=1s$ 。试确定系统的 K 和 K_A 值, 并计算性能指标 t_r 、 t_s 和 N 。

解 首先, 根据要求的 σ_p 求取相应的阻尼比 ξ :

$$\sigma_p = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\frac{\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = 1n \frac{1}{\sigma_p} = 1.61$$

解得 $\xi = 0.456$ 。其次, 由已知条件 $t_p=1 s$ 和已求出的 $\xi = 0.456$ 求无阻尼自振频率 ω_n , 即

$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$ 解得 $\omega_n = 3.53\text{rad/s}$, 将此二阶系统的闭环传递函数与标准形式比较, 求 K 和 K_A 值。由图 3-10 得

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + (1 + KK_A)s + K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

比较上式两端, 得

$$\omega_n^2 = K, 2\xi\omega_n = 1 + KK_A$$

所以 $K=12.5, K_A=0.178$ 。

最后计算 t_r 、 t_s 和 N:

$$\phi = \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = 1.1\text{rad}$$

$$t_r = \frac{\pi - \phi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = 0.65s$$

$$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} = 1.86s, N = \frac{t_s}{2t_p} = 0.93 (\Delta = 5\%)$$

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 2.48s, N = \frac{t_s}{2t_p} = 1.2 (\Delta = 2\%)$$

3.4 高阶系统的时域分析

凡是用高于二阶的常微分方程描述输出信号与输入信号之间关系的控制系统, 均称为高阶系统。严格地说, 大多数控制系统都是高阶系统, 这些高阶系统往往是由若干惯性子系统 (一阶系统) 或振荡子系统 (二阶系统) 所组成的。由于高阶系统动态性能指标的确定是复杂的, 因此这里只对高阶系统时间响应进行简要的定性说明。

设高阶系统闭环传递函数的一般形式为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}, n \geq m \quad (3.38)$$

设此传递函数的零、极点分别为 $-z_i(i = 1, 2, \dots, m)$ 和 $-p_i(i = 1, 2, \dots, n)$, 增益为 K , 则有

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}, n \geq m \quad (3.39)$$

令系统所有零、极点互不相同, 且极点有实数极点和复数极点, 零点均为实数零点。

分析表明, 高阶系统有如下结论:

- 1) 高阶系统瞬态响应各分量的衰减快慢由指数衰减系数 p_j 和 $\zeta_k \omega_{nk}$ 决定。如果某极点远离虚轴 (对应的衰减系数大), 那么其相应的瞬态分量比较小, 且持续时间较短。
- 2) 高阶系统各瞬态分量的系数 A_k 、 B_k 和 C_k 不仅与复平面中极点的位置有关, 而且与零点的位置有关。当某极点 p_j 越靠近某零点 z_i 而远离其他极点, 同时与复平面原点的距离也很远时, 相应瞬态分量的系数就越小, 该瞬态分量的影响就越小。极端情况下, 当 p_j 和 z_i 重合时 (称这对重合的零极点为偶极子), 该极点对系统的瞬态响应几乎没有影响。因此, 对于系数很小的瞬态分量, 以及远离虚轴的极点对应的快速衰减的瞬态分量常可以忽略。于是高阶系统的响应就可以用低阶系统的响应去近似。
- 3) 在系统中, 如果距虚轴最近的极点, 其实部的绝对值为其他极点实部绝对值的 $1/5$ 甚至更小, 并且在其附近没有零点存在, 则系统的瞬态响应将主要由此极点左右。这种支配系统瞬态响应的极点叫做系统的主导极点。一般高阶系统的瞬态响应是有振荡的, 因此它的近似低阶系统的主导极点往往是一对共轭的复数极点。

3.5 线性系统的稳定性分析

- 3.5.1 稳定性的基本概念

设一个线性定常系统原处于某一平衡状态, 若它瞬间受到某一扰动的作用偏离了原来的平衡状态, 当扰动消失后, 如果系统还能回到原有的平衡状态, 则称该系统是稳定的。反之, 系统为不稳定的。这表明稳定性是表征系统在扰动消失后自身的一种恢复能力, 它是系统的一种固有特性。系统的稳定性又分为两种: 一是大范围的稳定, 即初始偏差可以很大, 但系统仍稳定; 另一种是小范围的稳定, 即初始偏差必须在一定限度内系统才稳定, 超出了这个限定值则不稳定。对于线性系统, 如果小范围内是稳定的, 则它一定也是大范围稳定的。而非线性系统不存在类似结论。

通常而言, 线性定常系统的稳定性表现为其时域响应的收敛性。当把控制系统的响应分

为过渡状态和稳定状态来考虑时, 若随着时间的推移, 其过渡过程会逐渐衰减, 系统的响应最终收敛到稳定状态, 则称该控制系统是稳定的; 而如果过渡过程是发散的, 则该系统就是不稳定的。

- **3.5.2 线性定常系统稳定性的充分必要条件**

线性系统的特性或状态是由线性微分方程来描述的, 而微分方程的解通常就是系统输出量的时间表达式, 它包含两个部分: 静态分量和瞬态分量。其中静态分量对应微分方程的特解, 与外部输入有关; 瞬态分量对应微分方程的通解, 只与系统本身的参数、结构和初始条件有关, 而与外部作用无关。研究系统的稳定性, 就是研究系统输出量中瞬态分量的运动形式。这种运动形式完全取决于系统的特征方程, 即齐次微分方程, 这个特征方程反映了扰动消除之后输出量的运动情况。单输入、单输出线性定常系统传递函数的一般形式为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} (n \geq m)$$

系统的特征方程式为

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

此方程的根称为特征根, 它由系统本身的参数和结构所决定。

- **3.5.3 劳斯稳定判据**

根据线性定常系统稳定性的充分必要条件, 可以通过求取系统特征方程的所有根, 并检查所有特征根实部的符号来判断系统是否稳定。但由于一般特征方程式为高次代数方程, 因此要计算其特征根必须依赖计算机进行数值计算。采用劳斯稳定判据, 可以不用求解方程, 只根据方程系数做简单的运算, 就可以确定方程是否有(以及有几个)正实部的根, 从而判定系统是否稳定。以下是劳斯判据的具体内容。

设控制系统的特征方程式为

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (3.42)$$

首先, 劳斯稳定判据给出控制系统稳定的必要条件是: 控制系统特征方程式式 (3.42) 的所有系数 $a_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$ 均为正值, 且特征方程式不缺项。

其次, 劳斯稳定判据给出控制系统稳定的充分条件是: 劳斯表中第一列所有项均为正号。

如果方程式 (3.42) 所有系数都是正值, 将多项式的系数排成下面形式的行和列, 即为劳斯表:

$$\begin{array}{ccccccc}
 s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
 s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
 s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
 s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \cdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 s^2 & d_1 & d_2 & d_3 \\
 s^1 & e_1 & e_2 \\
 s^0 & f_1
 \end{array}$$

表中,

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}, b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}, \dots$$

系数 b 的计算, 一直进行到后面的 b 全部为零时为止。同样采用上面两行系数交叉相乘的方法, 可以求出 c, d, e, f 等系数, 即

例 3-3 设控制系统的特征方程式为

$$s^3 + 41.5s^2 + 517s + 2.3 \times 10^4 = 0$$

试用劳斯判据判别系统的稳定性。

解系统特征方程式的系数均大于零, 并且没有缺项, 所以稳定的必要条件满足。列劳

斯表

$$s^3 \quad 1 \quad 517 \quad 0$$

$$s^2 \quad 41.5 \quad 2.3 \times 10^4 \quad 0$$

$$s^1 \quad -38.5$$

$$s^0 \quad 2.3 \times 10^4$$

由于该表第一列系数的符号变化了两次，因此该方程中有两个根在复平面的右半平面，故系统是不稳定的。

例 3-4 设有一个三阶系统的特征方程

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$$

式中所有系数均为正数。试证明该系统稳定的条件是 $a_1 a_2 > a_0 a_3$ 。

证明上式对应的劳斯表为

$$s^3 \quad a_0 \quad a_2$$

$$s^2 \quad a_1 \quad a_3$$

$$s^1 \quad \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$s^0 \quad a_3$$

根据劳斯判据，系统稳定的充要条件是劳斯表第一列系数均大于零。所以有 $a_1 a_2 > a_0 a_3$

例 3-5 考虑图 3-11 所示的系统，确定使系统稳定的 K 的取值范围。

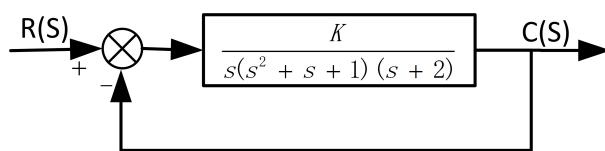


图 3-11 控制系统框图

解由图 3-11 可知，系统的闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2) + K}$$

所以系统的特征方程为

$$D(s) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

由稳定的必要条件可知, $K > 0$ 。列劳斯表如下:

$$s^3 \quad 1 \quad 517 \quad 0$$

$$s^4 \quad 1 \quad 3 \quad K$$

$$s^3 \quad 3 \quad 2 \quad 0$$

$$s^2 \quad \frac{7}{3} \quad K$$

$$s^1 \quad 2 - \frac{9K}{7}$$

$$s^0 \quad K$$

根据劳斯判据, 系统稳定必须满足

$$K > 0, 2 - \frac{9K}{7} > 0$$

因此, 使系统闭环稳定的 K 的取值范围为 $0 < K < \frac{14}{9}$ 当 $K=14/9$ 时, 系统处于临界稳定状态。

需要指出, 在运用劳斯稳定判据分析系统的稳定性时, 有时会遇到下列两种特殊情况:

- 1) 在劳斯表的某一行中, 出现第一个元为零, 而其余各元均不为零, 或部分不为零的情况;
- 2) 在劳斯表的某一行中, 出现所有元均为零的情况。

在这两种情况下, 表明系统在复平面内存在正根或存在两个大小相等符号相反的实根或存在两个共轭虚根, 系统处在不稳定状态或临界稳定状态。

面通过实例说明这时应如何排劳斯表。若遇到第一种情况, 可用一个很小的正数 ϵ 代替为零的元素, 然后继续进行计算, 完成劳斯表。

例如, 系统的特征方程为

$$D(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 6s + 1 = 0$$

其劳斯表为

$$s^4 \quad 1 \quad 3 \quad 1$$

$$s^3 \quad 2 \quad 6$$

$$s^2 \quad 0 \rightarrow \epsilon \quad 1$$

$$s^1 \quad \frac{6\epsilon-2}{\epsilon} \rightarrow -\infty$$

$$s^0 \quad 1$$

因为劳斯表第一列元素的符号改变了两次, 所以系统不稳定, 且有两个正实部的特征根。

若遇到第二种情况, 先用全零行的上一行元素构成一个辅助方程, 它的次数总是偶数, 它表示特征根中出现关于原点对称的根的数目(这些根或为共轭虚根; 或为符号相异但绝对值相同的成对实根; 或为实部符号相异而虚部数值相同的成对的共轭复根; 或上述情况同时存在)。再将上述辅助方程对 s 求导, 用求导后的方程系数代替全零行的元素, 继续完成劳斯表。

例如, 系统的特征方程为

$$D(s) = s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$$

劳斯表为

$$s^3 \quad 1 \quad 1$$

$$s^2 \quad 2 \quad 2 \quad \rightarrow \text{辅助方程 } 2s^2 + 2 = 0$$

$$s^1 \quad 4 \quad 0 \quad \leftarrow \text{辅助方程求导后的系数}$$

$$s^0 \quad 2$$

由以上可以看出, 劳斯表第一列元素符号均大于零, 故系统不含具有正实部的根, 而含一对纯虚根, 可由辅助方程 $2s^2 + 2 = 0$ 解出 $\pm j$ 。

3.6 控制系统的稳态误差

稳态误差是衡量系统控制精度的, 在控制系统设计中作为稳态指标。实际的控制系统由于本身结构和输入信号的不同, 其稳态输出量不可能完全与输入量一致, 也不可能在任何扰动作用下都能准确地恢复到原有的平衡点。另外, 系统中还存在摩擦、间隙和

死区等非线性因素。因此, 控制系统的稳态误差总是不可避免的。控制系统设计时应尽可能减小稳态误差。当稳态误差足够小, 可以忽略不计的时候, 可以认为系统的稳态误差为零, 这种系统称为无差系统, 而稳态误差不为零的系统则称为有差系统。应当强调的是, 只有当系统稳定时, 才可以分析系统的稳态误差。

- 3.6.1 误差与稳态误差

根据控制系统的一般结构 (如图 3-12 所示), 可以定义系统的误差与稳态误差。

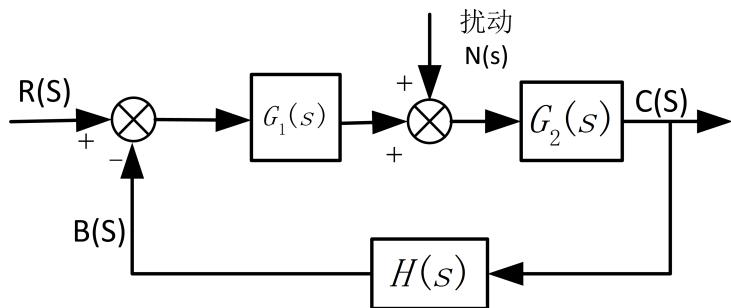


图 3-12 控制系统的一般结构

从输出端定义的误差是系统输出量的期望值与实际值之差, 即

$$e_1(t) = c_r(t) - c(t) \quad (3.42)$$

式中 $c_r(t)$ 是与系统设定输入量 $r(t)$ 相应的期望输出量。这种定义物理意义明确, 但在实际系统中往往不可测量。从输入端定义的误差是系统设定输入量与主反馈量之差, 即

$$e(t) = c(\infty) - c(t) \quad (3.43)$$

式中 $b(t)$ 是实际输出量经反馈后送到输入端的主反馈量。这样定义的误差可用系统结构图中相应的量表示, 便于进行理论分析, 在实际系统中也可以测量。

在单位负反馈情况下, 两种误差的定义是一致的。在某些情况下, 误差也可以定义为

$$e(t) = c(\infty) - c(t)$$

在工程实践中, 还会遇到更复杂的情况, 对误差的定义可视具体情况和要求而异。

稳态误差是指一个稳定的系统在设定的输入或扰动作用下, 经历过渡过程进入稳态后的误差, 即

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad (3.44)$$

为了讨论方便, 这里取误差为式 (3.43) 的形式。

- 3.6.2 系统的类型

稳态误差的计算与系统的类型有关, 而系统的类型是由开环传递函数决定的。一般情况下, 系统的开环传递函数可以表示为

$$G_o(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{s^\gamma \prod_{j=1}^n (T_j s + 1)}$$

其中 K 为系统的开环放大倍数; τ_i 和 T_j 为时间常数; γ 为开环传递函数中积分单元的个数, 即开环传递函数在原点处极点的重数。并且开环放大倍数 K 可以定义如下:

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} s^\gamma G_o(s)$$

$\gamma = 0, 1$ 和 2 的系统分别称为 0 型系统、 I 型系统和 II 型系统。 III 型以上的系统很少见。

- 3.6.3 稳态误差的计算

计算稳态误差的基本系统结构图如图 3-12 所示, 并以输入端定义的误差信号作为研究基础。图中 $R(s)$ 、 $N(s)$ 、 $C(s)$ 和 $E(s)$ 分别为系统设定输入、扰动输入、系统输出和系统的误差。根据线性系统的叠加原理, 可求得系统在设定输入和扰动输入作用下的系统误差为

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_o(s)} R(s) - \frac{G_2(s)H(s)}{1 + G_o(s)} N(s) \quad (3.47)$$

其中, $G_o(s) = G_1(s)G_2(s)H(s)$ 是系统的开环传递函数, 并具有式 (3.45) 的形式。由式 (3.47) 可知, 系统的误差由两部分组成: 由系统设定输入信号引起的误差为系统误差或原理误差 (对应式中第一项), 它反映了系统跟踪输入信号的能力; 由扰动输入信号引起的误差称为扰动误差 (对应式中第二项), 它反映了系统抑制扰动的能力。

1. 设定输入作用下系统稳态误差的计算

设定输入作用下的系统误差为

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_o(s)} R(s) \quad (3.48)$$

根据稳态误差的定义 (式 (3.44)) 和拉氏变换的终值定理 (假设 $E(s)$ 的极点全位于复平面的左半平面), 可得

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G_o(s)} R(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{\gamma+1}}{s^\gamma + K} R(s) = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} [s^{\gamma+1} R(s)]}{K + \lim_{s \rightarrow 0} s^\gamma} \end{aligned} \quad (3.49)$$

为便于讨论, 定义如下一组静态误差系数。

静态位置误差系数:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_o(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^\gamma} \quad (3.50)$$

静态速度误差系数:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_o(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{\gamma-1}} \quad (3.51)$$

静态加速度误差系数:

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_o(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{\gamma-1}} \quad (3.52)$$

则在单位阶跃输入信号作用下, 系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} \quad (3.53)$$

在单位斜坡信号输入作用下, 系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \quad (3.54)$$

在单位加速度信号输入作用下, 系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} \quad (3.55)$$

根据以上对三种典型输入、三种类型系统的分析, 可以得到如下结论: 0型系统对于阶跃输入是有差系统, 并且无法跟踪斜坡信号; I型系统由于含有一个积分环节, 所以对于阶跃输入是无差的, 但对斜坡输入是有差的, 因此, I型系统也称一阶无差系统; II型系统由于含有两个积分环节, 对于阶跃输入和斜坡输入都是无差的, 但对加速度信号是有差的, 因此, II型系统也称二阶无差系统。

系统类型	静态误差系数			稳态误差		
	K_p	K_v	K_a	$r(t) = 1(t)$	$r(t) = t$	$r(t) = t^2/2$
0型	K	0	0	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
I型	∞	K	0	0	$\frac{1}{K}$	∞
II型	∞	∞	K	0	0	$\frac{1}{K}$

表 3-1 设定输入信号作用下的稳态误差

2. 扰动输入作用下系统稳态误差的计算

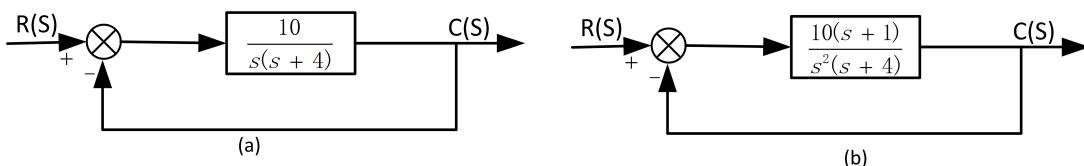
对于扰动输入作用下系统稳态误差的计算, 也可以按照类似设定输入情况的方法进行计算。在这种情况下, 稳定误差的计算稍复杂些, 这里就不再加以论述。感兴趣的读者可以自行推导。应当指出的是, 对 I 型以上的系统, 由扰动作用引起的稳态误差与扰动作用点之前的系统结构和参数有关。例 3-6 已知某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{5}{s(s+1)(s+2)}$$

试求系统输入分别为 $1(t)$, $10t$, $3t^2$ 时, 系统的稳态误差。

解由劳斯稳定判据分析可知, 该系统是闭环稳定的(这里从略)。由于此系统为 I 型系统, 系统的静态速度误差系数为

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 2.5$$

图 3-13(b) 为 II 型系统, 开环放大倍数为 $K = 10/4$ 。查表可知, 系统的稳态误差为

$$e_{ss} = 6 \times \frac{1}{K_a} = 2.4$$

需要指出的是, 标准的加速度信号为 $\frac{t^2}{2}$, 所以本题中的 $3t^2$ 是标准输入的 6 倍, 因此, 用标准输入下的公式计算稳态误差时要乘上这个倍数。

- 3.6.4 稳态误差的抑制措施

1. 提高系统的开环放大倍数

从表 3-1 可以看出: 0 型系统跟踪单位阶跃信号、I 型系统跟踪单位斜坡信号、II 型系统跟踪恒加速信号时, 其系统的稳态误差均为常值, 且都与开环放大倍数 K 有关。若增大开环放大倍数 K, 则系统的稳态误差可以显著下降。

提高开环放大倍数 K 固然可以使稳态误差下降, 但 K 值取得过大会使系统的稳定性变坏, 甚至造成系统的不稳定。如何解决这个矛盾, 将是本书以后几章中讨论的中心问题。

2. 增大系统的类型数

从表 3-1 可以看出: 若开环传递函数 (H(s)=1 时, 开环传递函数就是系统前向通道传递函数) 中没有积分环节, 即 0 型系统时, 跟踪阶跃输入信号引起的稳态误差为常值; 若开环传递函数中含有一个积分环节, 即 I 型系统时, 跟踪阶跃输入信号引起的稳态误差为零; 若开环传递函数中含有两个积分环节, 即 II 型系统时, 则系统跟踪阶跃输入信号、斜坡输入信号引起的稳态误差为零。

3. 采用复合控制

采用复合控制, 即在反馈控制基础上引入顺馈 (也称前馈) 补偿。这种方法可以在基本不改变系统动态性能的前提下, 有效改善系统的稳态性能。

3.7 基于 MATLAB 的线性系统时域分析

- 3.7.1. MATLAB 建立系统数学模型的方法

例 2-17 若给定系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{12s^3 + 24s^2 + 12s + 20}{2s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 2s + 2}$$

试用 MATLAB 语句表示该传递函数。

解: 输入上述传递函数的 MATLAB 程序如下:

```
%ex-2-17
num=[12 24 12 20];
```

```
den=[2 4 6 2 2];
G=tf(num, den)
```

程序第一行是注释语句, 不执行; 第二、三行分别按降幂顺序输入给定传递函数的分子和分母多项式的系数; 第四行建立系统的传递函数模型。

运行结果显示

```
G =
12 s^3 + 24 s^2 + 12 s + 20
-----
2 s^4 + 4 s^3 + 6 s^2 + 2 s + 2
```

Continuous-time transfer function.

注意, 如果给定的分子或分母多项式缺项, 则所缺项的系数用 0 补充, 例如一个分子多项式为 $3s^2 + 1$, 则相应的 MATLAB 输入为 num=[3 0 1];
如果分子或分母多项式是多个因子的乘积, 则可以调用 MATLAB 提供的多项式乘法处理函数 conv()。

例 2-18 已知系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{4(s+2)(s^2+6s+6)^2}{s(s+1)^3(s^3+3s+2s+5)}$$

试用 MATLAB 实现此传递函数。

解: 输入上述传递函数的 MATLAB 程序如下:

```
% ex-2-18
num=4*conv([1 2], conv([1 6 6], [1 6 6]));
den=conv([1 0], conv([1 1], conv([1 1], conv([1, 1], [1 3 2 5]))));
G=tf(num, den)
```

程序中的 conv() 表示两个多项式的乘法, 并且可以嵌套。

运行结果为

```
G =
4 s^5 + 56 s^4 + 288 s^3 + 672 s^2 + 720 s + 288
-----
```

$$s^7 + 6 s^6 + 14 s^5 + 21 s^4 + 24 s^3 + 17 s^2 + 5 s$$

Continuous-time transfer function.

例 2-19 已知系统的零极点分布和增益, 用 MATLAB 建立系统模型。系统零点为-2 和-3, 系统极点为-3,-4+j5 和-4-j5, 增益为 10。

解: 用 MATLAB 建立上述系统零极点增益模型的程序如下:

```
% ex-2-19
z=[-2 -3];
p=[-3 -4+j5 -4-j5];
k=10;
G=zpk(z, p, k)
```

运行结果显示为

G =

$$\frac{10 (s+2) (s+3)}{(s+3) (s^2 + 8s + 41)}$$

Continuous-time zero/pole/gain model.

- 3.7.2. 模型之间的转换

为了分析系统的特性, 有时需要在不同模型之间进行转换。MATLAB 早期版本中采用 `tf2ss`、`ss2tf`、`tf2zpk` 等转换函数进行模型转换。这些函数在新版本中仍可使用。新版本采用统一的转换函数, 它与模型建立函数具有相同的函数名。

例如若将 ZPK 或 SS 模型转化为 TF 模型, 函数格式为: `m = tf(sys)`。式中 `sys` 是 ZPK 模型或 SS 模型, `m` 为转换后的 TF 模型。其他的转换函数用法与此类似。

例 2-21 试将例 2-17 的传递函数转化为 ZPK 模型和 SS 模型 (采用最小实现方式)。
解: 模型转化的程序为

```
Gzpk=zpk(G)
Gss=ss(G, 'min')
```

程序第二行表示状态空间表达式的最小实现。程序运行结果如下:

Zero/pole/gain:

$$6(s+1.929)(s^2 + 0.07058s + 0.8638)$$

$$(s^2 + 0.08663s + 0.413)(s^2 + 1.913s + 2.421)$$

a =

	x1	x2	x3	x4
x1	-2	-0.75	-0.125	-0.125
x2	4	0	0	0
x3	0	2	0	0
x4	0	0	1	0

b =

	u1
x1	4
x2	0
x3	0
x4	0

c =

	x1	x2	x3	x4
y1	1.5	0.75	0.1875	0.3125

d =

	u1
y1	0

• 3.7.3. 用 MATLAB 进行动态响应分析

通过 MATLAB 提供的函数 `step()` 和 `impulse()`, 可以方便地求出各阶系统在阶跃函数和脉冲函数作用下的输出响应。

例 3-8 试用 MATLAB 绘制系统

$$G_1(s) = \frac{1}{2s+1}$$

$$G_2(s) = \frac{25}{s^2+3s+25}$$

在单位阶跃函数作用下的响应曲线。

解获取上述两系统单位阶跃响应的程序如下:

```
%ex-3-8
num1=[1]; den1=[2 1];
```

```

G1=tf(num1, den1);
figure(1); step(G1);
xlabel('时间'); ylabel('输出响应'); title('一阶系统单位阶跃响应');

num2=[25]; den2=[1 3 25];
G2=tf(num2, den2);
figure(2); step(G2);
xlabel('时间'); ylabel('输出响应'); title('二阶系统单位阶跃响应');

```

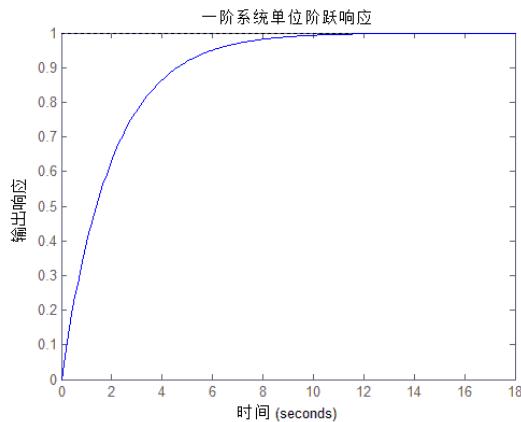


图 3-14 例 3-8 的 MATLAB 仿真结果

例 3-9 试用 MATLAB 绘制例 3-8 中两系统的单位脉冲响应。
解本题的程序实现与例 3-8 类似, 这里从略。仿真结果如图 3-15 所示。

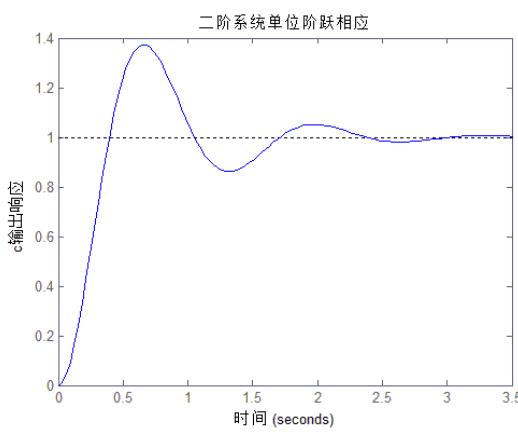


图 3-15 例 3-9 的 MATLAB 仿真结果

应当指出的是, 函数 `step()` 和 `impulse()` 具有不同的参数形式和输出形式, 具体情况请通过 MATLAB 的 Help 查询。另外, MATLAB 还提供了在任意输入信号作用下, 获取系统输出响应的函数 `lsim()`, 关于其用法请参见 MATLAB 软件的联机帮助。

- 3.7.4. 用 MATLAB 进行系统稳定性分析

可以利用 MATLAB 求系统特征方程的根来分析系统稳定性。

例 3-10 设系统是由前向通道传递函数 $G_p(s)$ 和反馈通道传递函数 $H(s)$ 组成的负反馈控制系统。其中,

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 4}, H(s) = \frac{1}{s + 1}$$

试判断系统的稳定性。

解 MATLAB 采用 `roots()` 或 `eig()` 计算系统的特征根。以下是求取上述闭环系统特征根的程序:

```
%ex-3-10
Gp=tf([1], [1 2 4]); H=tf(1, [1 1]);
G=feedback(Gp, H);
p=eig(G)
```

计算结果为 $p = -0.8389 + 1.7544i; -0.8389 - 1.7544i; -1.3222$ 由于没有正实部特征根, 因此系统稳定。

如果已知系统的特征多项式, 求取系统的特征根可采用函数 `roots()`。

需要说明的是, 程序中 `feedback()` 是构建反馈回路的 MATLAB 函数, 对于几个传递函数的串联和并联, MATLAB 也提供了相应的实现函数 `series()` 和 `parallel()`, 具体用法请查询 MATLAB 的联机帮助。

例 3-11 已知系统闭环特征多项式为 $D(s) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + 3$, 试判断系统稳定性。

解可用下面程序求取系统特征根:

```
%ex-3
den= [ 1 3 3 2 3];
p=roots(den)
```

计算结果为 $p = -1.6726 \pm 0.6531i; 0.1726 \pm 0.9491i$, 可见, 系统有两个实部为正的根, 所以系统不稳定。

第四章根轨迹法

4.1 根轨迹的基本概念

所谓根轨迹, 是指当系统的某个参数(如开环增益 K)由零连续变化到无穷大时, 闭环特征根在复平面上形成的若干条曲线。下面结合图 4-1(a) 所示的二阶系统的例子, 介绍有关根轨迹的基本概念。

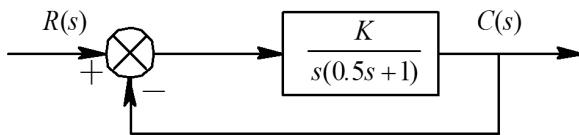


图 4-1(a) 控制系统框图

将图 4-1 所示系统的开环传递函数转化为

$$G(s) = \frac{K}{s(0.5s+1)} = \frac{k}{s(s+2)} \quad (4.1)$$

其中, $k = 2K$, 式 (4.1) 便是绘制根轨迹所用的传递函数的标准形式。由式 (4.1) 可得两开环极点分别为 $p_1 = 0$, $p_2 = -2$, 并且没有开环零点。将这两个开环极点绘于图 4-2 上, 并用“ \times ”表示。由式 (4.1) 可得闭环系统的特征方程为

$$1 + G(s) = 0$$

即

$$D(s) = s^2 + 2s + k = 0 \quad (4.2)$$

所以, 闭环系统的特征根(闭环极点)为

$$s_1 = -1 + \sqrt{s-k}, \quad s_2 = -1 - \sqrt{1-k} \quad (4.3)$$

所以, 闭环系统极点 s_1, s_2 与标准化参数 k 之间的关系可由图 4-2 表示。从图可以看出:

- (1) 当 $k = 0$ 时, s_1, s_2 与 p_1, p_2 重合, 即开环极点和闭环极点重合;
- (2) 当 $0 < k < 1$ 时, s_1, s_2 均为 $(-2, 0)$ 区间内的负实数;

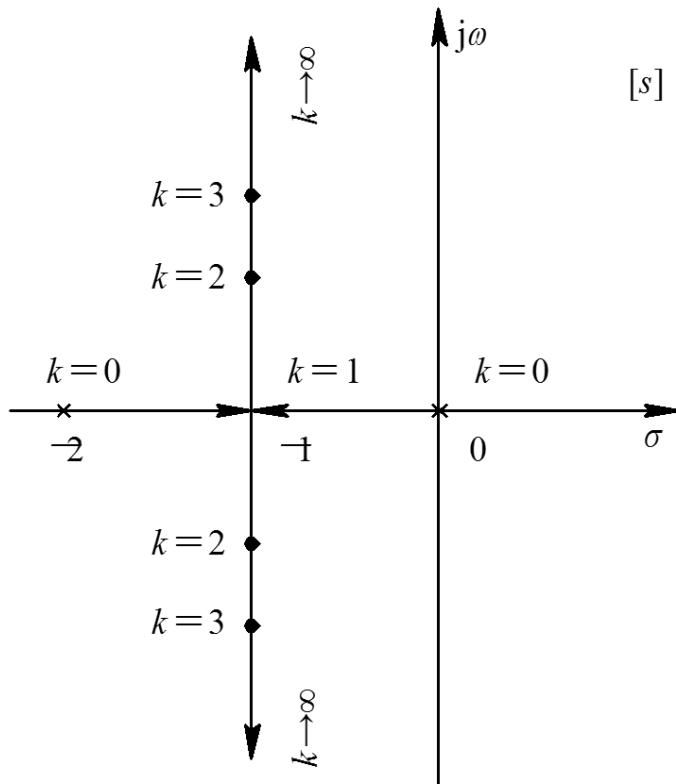


图 4-2(a) 二阶系统根轨迹

- (3) 当 $k = 1$ 时, $s_1 = s_2 = -1$, 即两闭环极点重合;
- (4) 当 $1 < k < \infty$ 时, $s_1 = -1 + j\sqrt{s-k}$, $s_2 = -1 - j\sqrt{1-k}$ 即两闭环极点互为共轭;
- (5) 当 $k \rightarrow \infty$ 时, s_1, s_2 将沿着直线 $\sigma = -1$ 趋于无穷远处。

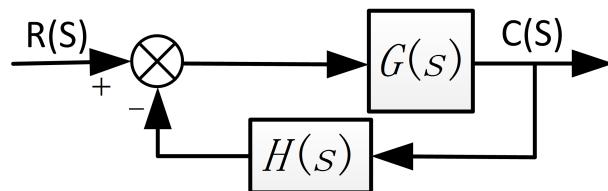


图 4-1(b) 反馈控制系统

考虑图 4-1(b) 所示负反馈控制系统, 设其开环传递函数为:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{1 + s(s+1)(s+2)} \quad (4-4)$$

则该系统的闭环特征方程为:

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

当 K 从零到无穷大连续变化时, 闭环极点 S 在平面 (复平面) 上画出的根轨迹如图 4-2 所示 (如何绘制稍后讨论)。从根轨迹图可以看到: 当 $0 < K < 0.385$ 时三个闭环极点都是负实数, 当 $K > 0.385$ 时有两个闭环极点成为共轭复数, 只要 $0 < K < 6$ 闭环系统一定稳定, 一旦 K 值给定, 比如 $K = 1, 2, 3$ 个闭环极点就是 3 支根轨迹上 3 个特定点 (标有 + 号的点)。可见, 根轨迹清晰地描绘了闭环极点与开环增益 K 的关系。

- 4.1.2 相角条件

今天, 在计算机上绘制根轨迹已经是很容易的事, 由于计算机强大的计算能力, 所以计算机绘制根轨迹大多采用直接求解特征方程的方法, 也就是每改变一次增益 K 求解一次特征方程。让 K 从零开始等间隔增大, 只要 K 的取值足够多足够密, 相应解特征方程的根就在 s 平面上绘出根轨迹。

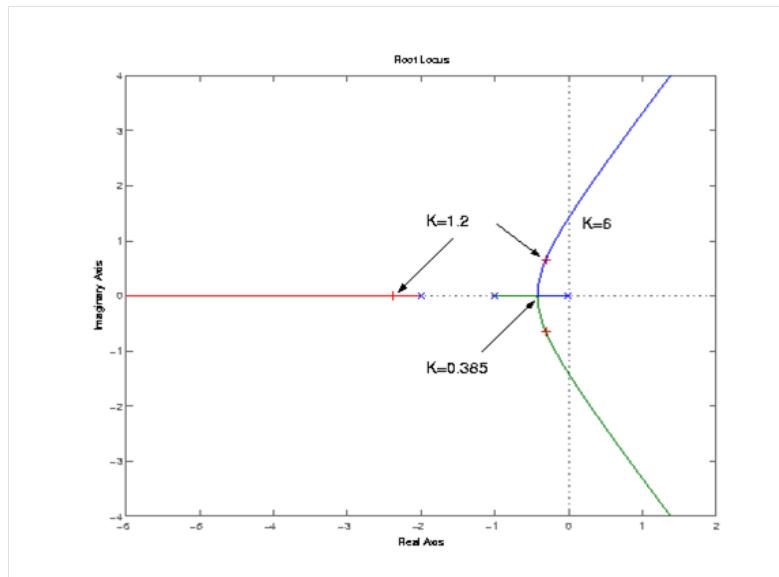


图 4-2 根轨迹图

如前所述, 传统的根轨迹法是不直接求解特征方程的, 它创造了一套行之有效办法——图解加计算的手工绘图法。如今, 尽管手工绘制根轨的一些繁琐技艺已经没有多大价值, 但是, 它所发掘出来的根轨迹基本规律, 无论用哪种方法作图都是适用的。

首先讨论根轨迹最基本最重要的规律——相角条件。考察图 4-1 所示的系统, 其闭环传递函数为:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

闭环特征方程为:

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

根轨迹上的每一点 s 都是闭环特征方程的根，所以，根轨迹上的每一点都应满足：

$$G(s)H(s) = -1$$

上式可分为幅值条件：

$$|G(s)H(s)| = 1$$

和相角条件：

$$\angle G(s)H(s) = \pm(2k + 1)180^\circ \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

在 s 平面上，给定了幅值和相角，就对应一个固定的点，所以既满足幅值条件又满足相角条件的 s 值就是特征方程的一组根，也就是一组闭环极点。

根轨迹法研究系统的一个可调参数对闭环极点的影响，最常见的可调参数是开环增益 K 。令 $G(s) = KG_0(s)$ ，显然， K 的变动只影响幅值条件不影响相角条件，也就是说，根轨迹上的所有点满足同一个相角条件， K 变动相角条件是不变的。所以，绘制根轨迹可以这样进行：首先在 s 平面上找出所有符合相角条件的点，这些点连成的曲线就是根轨迹，然后反过来按幅值条件求出根轨迹上任一点的 K 值。

4.2 绘制典型根轨迹

我们可以把现有的绘制根轨迹图的方法分为三类：

- 1) 手工画概略图（草图）。这种方法适合调试现场的应急分析、项目开始的粗略分析等不要求很精确的场合。一个熟习根轨迹基本规则的人几分钟就可以画出一张很有用的概略图。
- 2) 手工图解加计算画准确图。这种方法曾经沿用很久，以往的教科书讲述了很多绘图的技艺，不仅繁琐，精度也差，这类方法在实际应用中已逐步淘汰。
- 3) 计算机绘制精确图，目前主要指用 Matlab 工具绘制根轨迹图。它准确快捷，短时间内可以对多个可调参数进行研究，有效地指导设计与调试。

本章主要介绍 1) 3) 两种方法，着重讨论绘制根轨迹的基本原理和基本规则。

- 4.2.1 开环零极点与相角条件

这里讨论的是以开环增益 K 为参变量的根轨迹，它是最基本、最常用的根轨迹，为了区别，我们称之为“典型根轨迹”。仍然针对图 4-1 所示负反馈系统，设系统开环传递函数可以表示为：

$$G(s)H(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad K > 0$$

式中 p_1, p_2, \dots, p_n 为开环极点， z_1, z_2, \dots, z_m 为开环零点。这样，系统的闭环特征方程可以表示为：

$$1 + \frac{K(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = 0$$

以 K 为参变量的根轨迹上的每一点都必须满足该方程，相应地，我们称之为“典型根轨迹方程”。上式也可以写成：

$$\prod_{l=1}^m (s - z_l) + K \prod_{i=1}^n (s - p_i) = 0$$

这时，幅值条件具体化为：

$$K = \frac{|\prod_{i=1}^n (s - p_i)|}{|\prod_{l=1}^m (s - z_l)|} = 0$$

相角条件具体化为：

$$\sum_{l=1}^m \angle(s - z_l) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = \pm(2k + 1)180^\circ \quad (k = 1, 2, \dots)$$

按相角条件绘制根轨迹图的依据。具体方法是：在复平面上选足够多的试验点，对每一个试验点检查它是否满足相角条件，如果是则该点在根轨迹上，如果不是则该点不在根轨迹上，最后将在根轨迹上的试验点连接就得到根轨迹图。以下列 4 阶系统为例：

$$G(s)H(s) = \frac{K(s - z_1)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)(s - p_4)}$$

先在复平面上标出开环极点 p_1, p_2, p_3, p_4 和开环零点 z_1 如图 4-3。对试验点 S，如果它在根轨迹上，就应当满足相角条件：

$$\phi_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 = \pm(2k + 1)180^\circ \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

量出或计算出 5 个角度，就知道试验点 s 是否在根轨迹上。判别了一个试验点，再判别其它试验点。

为了尽快把握绘制根轨迹的要领，请牢记并理解三句话：绘制根轨迹——依据的是开环零极点分布，遵循的是不变的相角条件，画出的是闭环极点的轨迹。

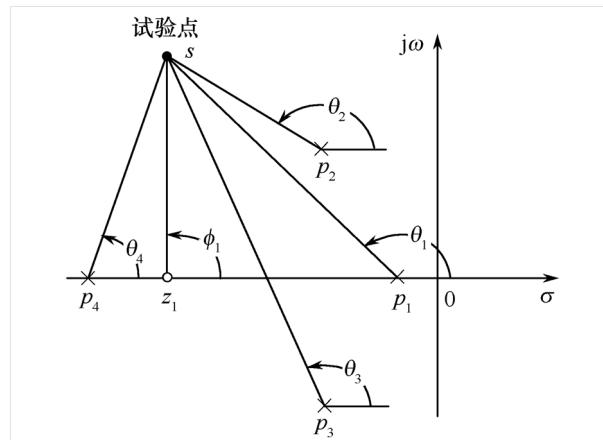


图 4-3 相角条件的图示

• 4.2.2 基本规则

纯粹用试验点的办法手工作图，工作量是十分巨大的，而且对全貌的把握也很困难，于是人们研究根轨迹图的基本规则，以便使根轨迹绘图更快更准。概括起来，以开环增益 K 为参变量的根轨迹图主要有下列基本规则：

1) 起点和终点

根轨迹一定开始于开环极点，终止于开环零点。因为根轨迹是闭环特征方程的根，当 $K = 0$ 时方程的根就是它的 n 个开环极点，当 $K \rightarrow \infty$ 时方程的根就是它的 m 个开环零点。根轨迹的起点和终点是根轨迹的特殊点。当 $n = m$ 时，开始于 n 个开环极点的 n 支根轨迹，正好终止于 m 个开环零点。

当 $n > m$ 时，开始于 n 个开环极点的 n 支根轨迹，有 m 支终止于开环零点，有 $n - m$ 支终止于无穷远处。用式 (4-9) 可以解释这一规则：终点就是 $K \rightarrow \infty$ 的点，要 $K \rightarrow \infty$ 只有两种情况， $s = z_l (l = 1, 2, \dots, m)$ ，二是 $s \rightarrow \infty$ 。这时，无穷远处也称为“无穷远零点”。

当 $n < m$ 时，终止于 m 个开环零点 m 支根轨迹，有支来自 n 个开环极点，有 $m - n$ 支来自无穷远处。必需指出，实际系统极少有 $n < m$ 的情况，但是在处理特殊根轨迹时，常常将系统特征方程变形，变形后的等价系统可能会出现这种情况（参见 3.3）。

2) 分支数和对称性

根轨迹一定对称于实轴，并且有 $\max(n, m)$ 支。

因为根轨迹是闭环特征方程的根，无论 K 如何变化特征方程始终有 $\max(n, m)$ 个根，即使出现重根，当 K 从零到无穷大连续变化时重根不可能始终为重根，所以根轨迹一定有 $\max(n, m)$ 支。

特征方程的根要么是实根（在实轴上）要么是共轭复根（对称于实轴），所以根轨迹一定对称于实轴。

3) 渐近线

如上所说，当 $n > m$ 时，根轨迹一定有 $n - m$ 支趋向无穷远；当 $n < m$ 时，根轨迹一定有 $m - n$ 支来自无穷远。根据无穷远处 $s \rightarrow \infty$ 的特点可以证明：当 $n \neq m$ 时，根轨迹存在 $|n - m|$ 支渐近线，且渐近线与实轴的夹角为：

$$\phi_k = \frac{(2k + 1)180^\circ}{n - m} \quad k = 0, 1, 2, \dots, |n - m| = 1$$

所有渐近线交于实轴上的一点，其坐标为：

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{l=1}^m z_l}{n - m}$$

4) 实轴上的根轨迹

实轴上的开环零点和开环极点将实轴分为若干段，对于其中任一段，如果其右边实轴上的开环零、极点总数是奇数，那么该段就一定是根轨迹的一部分。

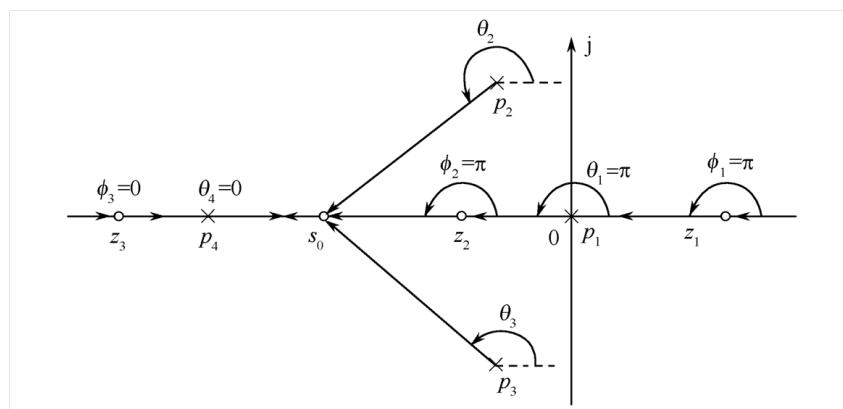


图 4-4 实轴上的根轨迹

这个规则用相角条件可以证明。考虑实轴上的某一试验点 s_0 （见图 4-4），任一对共轭开环零点或共轭极点（如 p_2, p_3 ）对应的相角（如 θ_2, θ_3 ）之和均为 360° ，也就是说任一对共轭开环零、极点不影响实轴上试验点 s_0 的相角条件。再看实轴上的开环零、极点，对试验点 s_0 ，其左边实轴上任一开环零、极点对应的相角（如 θ_3, ϕ_4 ）均为 0，

其右边实轴上任一开环零、极点对应的相角（如 θ_1, ϕ_1, ϕ_2 ）均为 180° 。所以要满足相角条件， s_0 右边实轴上的开环零、极点总数必须是奇数。

5) 根轨迹与虚轴的交点

根轨迹与虚轴的交点是临界稳定点，该点的坐标 $j\omega_o$ 和增益 K_0 是很重要的，将 $s = j\omega$ 代入闭环特征方程，令特征方程的实部和虚部分别等于零，可以解出 ω_0 和 K_0 。用劳斯（Roth）判据也可以求得 K_0 。

6) 根轨迹的分离点

当从 K 零变到无穷大时，根轨迹可能出现先会合后分离，这样的点称分离点。分离点对应重闭环极点。

显然，位于实轴上的两个相邻的开环极点之间一定有分离点，因为任何一条根轨迹不可能开始于一个开环极点终止于另一个开环极点。同理，位于实轴上的两个相邻的开环零点之间也一定有分离点。

当然，分离点也可以是复数，两个相邻的开环复极点（或零点）之间可能有分离点，对实际系统，依据规则 1) 到 4) 一般就能确定有无分离点。

基于分离点是重闭环极点的事实可以证明，分离点的座标 λ ，是下列代数方程的解：

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda - p_i} = \sum_{l=1}^m \frac{1}{\lambda - z_l}$$

必须说明的是，方程只是必要条件而非充分条件，也就是说它的解不一定是分离点，是否是分离点还要看其它规则。

7) 根轨迹的出射角和入射角

根轨迹从某个开环极点出发时的切线与实轴的夹角称为出射角，根轨迹进入某个开环零点的切线与实轴的夹角称为入射角，用相角条件不难证明，根轨迹从开环极点 p_i 出发

$$\theta_{pi} = 180^\circ + \left(\sum_{j=1}^m \angle(p_i - z_j) - \sum_{j=1, j \neq i}^n \angle(p_i - p_j) \right)$$

根轨迹进入某个开环零点 z_l 的入射角为：

$$\theta_{zl} = 180^\circ + \left(\sum_{j=1, j \neq l}^m \angle(z_l - z_j) - \sum_{j=1}^n \angle(z_l - p_j) \right)$$

根轨迹的上述规则对绘制根轨迹很有帮助，尤其是手工绘图，根据规则 1) 到 4) 就能很快地画出大致形状，再按 5) 求出临界增益 K_0 ，这样的根轨迹图就很有用了，我们称这样的根轨迹图为概略图，一般手工画根轨迹的习题（考题）就是指这种概略图。

除非系统阶次很低，否则手工解方程求分离点决非易事；手工求出射角和入射角也不太好操作，并且出射角和入射角的意义并不大，因为它仅仅反映了开环极、零点处根轨迹的走向，稍远一点就不起作用了。

所以，手工画根轨迹最有用的规则是 1) 到 5)，如果想得到更精确的根轨迹图，用 Matlab 是最为合适不过了（参见 4.4 节）。

- 4.2.3 绘图示例

按 7 个基本规则绘制根轨迹图

首先，系统有三个无穷远零点，有三个开环极点： $p_1 = 0, p_2 = -1, p_3 = -2$ 将它们标在复平面上（见图 4-5），开环极点的位置用 \times 表示（开环零点的位置一般用小圆圈表示）。根据规则 1) 和 2)，根轨迹将有 3 支，分别开始于这三个开环极点，趋向无穷远。

根据规则 3)，根轨迹有 3 根渐近线，它们与实轴的夹角是：

$$\phi_k = \frac{(2k+1)180^\circ}{3} \quad k = 0, 1, 2$$

$$\phi_0 = 60^\circ, \quad \phi_1 = 180^\circ, \quad \phi_2 = 300^\circ$$

所有渐近线交于实轴上的一点，其坐标为：

$$\sigma = \frac{0 - 1 - 2}{3}$$

根据规则 4)，实轴上的 $[-1, 0]$ 段是根轨迹的一部分，实轴上的 $(-\infty, -2]$ 段也是根轨迹的一部分，实际上后者就是从开环极点 p_3 出发趋向无穷远的一支，与渐近线的分析一致，这一支已经是精确图形了。

根据规则 5) 可以确定根轨迹与虚轴的交点，我们先用劳斯判据，根据特征方程系数列出劳斯阵列为：

$$s^3 \quad 1 \quad 2$$

$$s^2 \quad 3 \quad K$$

$$s^1 \quad \frac{6-K}{3} \quad 0$$

$$s^0 \quad K$$

使第一列中 s^1 项等于零，可以求得 $K=6$ 。通过求解由 s^2 行得出的辅助方程：

$$3s^2 + K = 3s^2 + 6 = 0$$

可以求得根轨迹与虚轴的交点为 $s = \pm j\sqrt{2}$ ，虚轴上交点处的频率为 $w = \pm\sqrt{2}$ 。
另外一种确定根轨迹与虚轴交点的方法是令特征方程中的 $s = j\omega$ 得：

$$(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + j2\omega + K = (K - 3\omega^2) + j(2\omega - \omega^3) = 0$$

令上式中的实部和虚部分别等于零，可以得到 $\omega = 0, K = 0$ 或 $\omega = \pm\sqrt{2}$ 。因此，根轨迹在 $\omega = \sqrt{2}$ 处与虚轴相交，并且交点处 $\omega = 0$ 。实轴上的根轨迹 $K = 6$ 处也与虚轴相交。

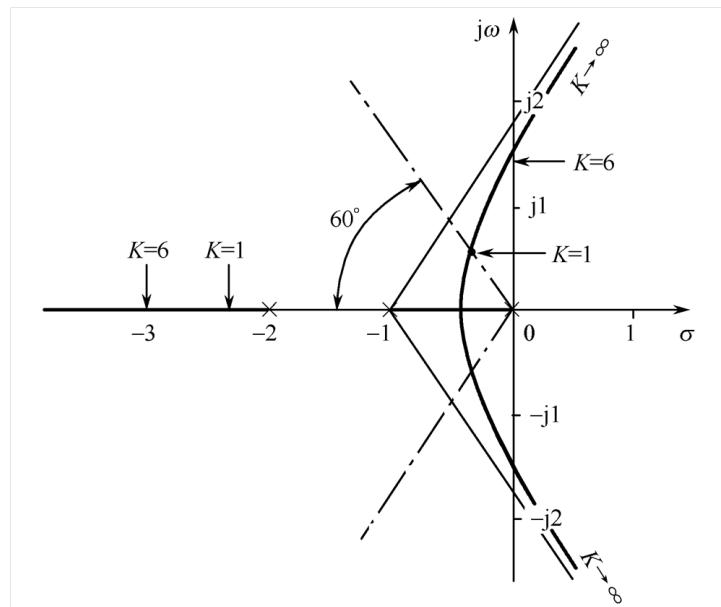


图 4-5 绘制根轨迹图示例

根轨迹从 p_1, p_2, p_3 出发的出射角已经很明确，为了验证规则 (7)，我们还是计算一下：

$$\theta_{p1} = 180^\circ - 0 - 0 = 180^\circ,$$

$$\theta_{p2} = 180^\circ - 0 - 180^\circ = 0,$$

$$\theta_{p3} = 180^\circ - 180^\circ - 180^\circ = -180^\circ$$

与实际完全一致。

以上根据基本规则画出的根轨迹仍然是概略图，它在实轴上的根轨迹、渐近线、与虚轴的交点是准确的，其它部分就不准确了。要做到根轨迹图准确，按传统方法要用试验点的办法进行细化，很繁琐也不可能有高的精度；按现代方法用 Matlab 可以快而

准地绘出高精度根轨迹图, 图 4-1 就是本例用 Matlab6.5 绘出的, 如何绘制将在 4.4 节介绍。

根轨迹在实轴上的 [-1, 0] 段一定有一个分离点, 根据规则 (6)

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda+1} + \frac{1}{\lambda+2} = 0$$

整理得

$$3\lambda^2 + 6\lambda + 2 = 0$$

解得 $\lambda = -0.423, \lambda = -1.577$, 显然只有-0.423 在根轨迹上, 所以分离点为-0.423。显然, 不管是手工作图还是 MATLAB 自动绘图, 基本规则总是具有指导意义的, 但是在一些特定的情况下, 仅依靠基本规则可能方案不唯一, 而精确的根轨迹图只是其中某一个, 下面举一个例子:

[例 7-1] 考虑图 4-1 所示系统, 其中

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+1)(s^2+s+a)} \quad a = 11$$

如果按基本规则, 图 6 (a) 和 6 (b) 两种形状都有可能, 实际上用 Matlab 绘出是图 6(a), 当 a 增加时根轨迹的中间部分在变化, 当 $a = 12$ 时 Matlab 绘出根轨迹如图 6 (b)。

4.4 用 MATLAB 绘制根轨迹图

用 Matlab 绘制根轨迹图十分准确、快捷。现在用一个例子来说明用法。

例 4-2 考虑图 4-1 所示系统, 设其中

$$G(s)H(s) = \frac{K(s^2+2s+4)}{s(s+4)(s+6)(s^2+1.4s+1)}$$

用 MATLAB 绘制根轨迹只要知道开环传递函数分子分母的系数, 并分别填入分子向量 `num` 和分母向量 `den` 中, 然后调用绘制根轨迹的专用函数 `rlocus` 就行了。

对于本例, 最简单的程序就是:

```
num = [1 2 4];
den = [1 11.6 39 43.6 24 0];
rlocus(num, den);
```

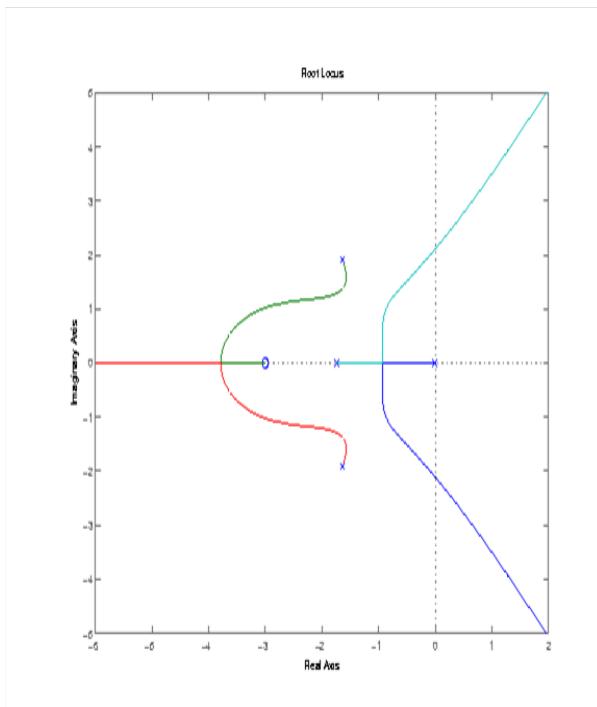


图 4-6(a) 两种根轨迹

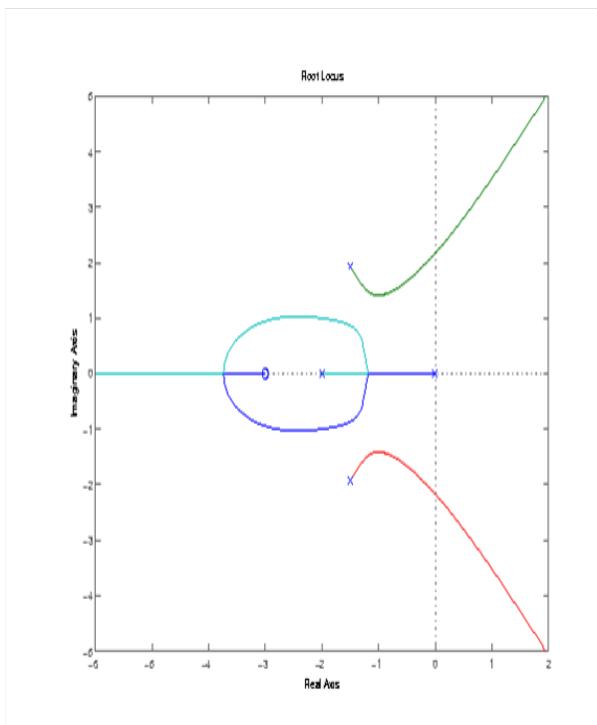


图 4-6(b) 两种根轨迹

在 Matlab6.5 的命令窗 (Command Window) 中执行这个程序，运行后就自动绘出根轨迹如图 4-12，从根轨迹图可以看出：当 $0 < K < 14$ 或 $64 < K < 195$ 时闭环系统稳定。用光标敲击根轨迹上的某一点会出一个文字框，标出该点的座标、 K 值、阻尼系数、超调量、频率等。

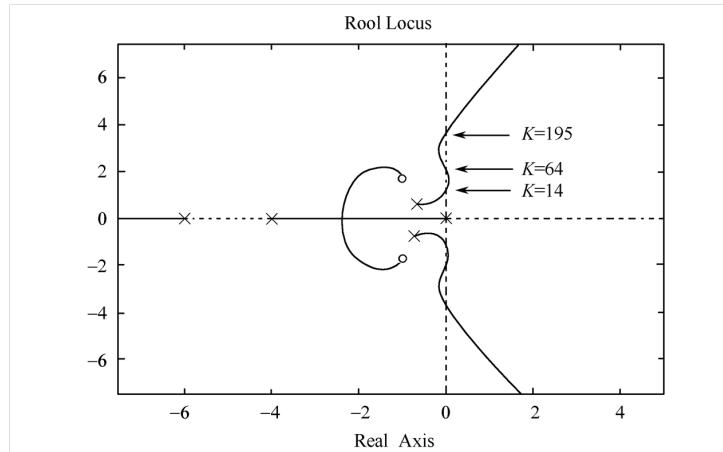


图 4-12 MATLAB 绘制根轨迹图

在 MATLAB 窗中，进入 File/Export，可将绘出的根轨迹图存为需要的图形文件，比如命名为 Exam2.pcx，这个图形文件可以插入 Word 文档。

与绘制根轨迹有关的函数还有：

- `pzmap` ——绘制根轨迹的开环零、极点
- `rlocfind` ——计算给定点的 K 值
- `sgrid` ——在连续系统根轨迹图上绘制阻尼系数和自然频率栅格
- `zgrid` ——在离散系统根轨迹图上绘制阻尼系数和自然频率栅格

例如，在上列程序之后增加语句：

```
[k, p] = rlocfind(num, den)
```

执行后用光标（十字）左单击根轨迹上的任一点，会同时在每支根轨迹上出现红十字——标出 n 个闭环极点的位置，命令窗中出现这 n 个闭环极点的座标该点和它们对应的 K 值。

也可以在 MATLAB 窗中进入 Files/New，打开编辑器 (Editor/Debugger)，在编辑器窗口编写上述程序，并创建一个 M 文件，比如命名为 ROT2.m，然后在命令窗中运行文件名 (ROT2)。

4.5 控制系统的根轨迹分析

根轨迹图是设计和分析线性时不变控制系统的有力帮手，它揭示了稳定性、阻尼系数、振型等动态性能，用根轨迹图分析控制系统主要有以下方面：

- 4.5.1 根轨迹与稳定性

用根轨迹图分析控制系统的稳定性，比仅仅知道一组闭环极点要深刻得多。比如，当 K 在 $(0, \infty)$ 间取值时，如果 n 支根轨迹全部位于虚轴的左边，就意味着不管 K 取任何值闭环系统都是稳定的。反之，根轨迹只要有一支全部位于虚轴的右边，就意味着不管 K 取何值，闭环系统都不可能稳定，这种情况下，如果开环零、极点是系统固有的、不可改变的，那么要使系统稳定就必须人为增加开环零、极点（参见 2），这就是通常讲的要改变系统的结构，而不仅仅是改变系统的参数。

根轨迹只要有一支穿越虚轴，就说明闭环系统的稳定是有条件的，知道了根轨迹与虚轴交点的 K 值，就可以确定稳定条件，进而确定合适的 K 值（参见例 4-2 等）。

初学者容易把开环极点和闭环极点混淆，因为画根轨迹图时首先标在图上的是开环零、极点，根轨迹的起点是开环极点，有读者就误认为根轨迹上的点都是开环极点，这是不对的。根轨迹图上除了起点和终点，其它都是闭环极点的可能取值。

但是，开、闭环又具有相对性，图 4-12 所示的是多环系统，对于内环， $G_1(s)H_1(s)$ 是开环传递函数，其极点是开环极点。

而 $\phi_1(s) = G_1(s)/[1 + G_1(s)H_1(s)]$ 是闭环传递函数，其极点是闭环极点；但是对于外环， $\phi_1(s)G_2(s)H_2(s)$ 是开环传递函数，其极点是外环的开环极点， $\phi_1(s)$ 的极点是外环开环极点的一部分。

可见，多环系统也可以用根轨迹进行分析，一般，首先依据 $G(s)H(s)$ 的零、极点，绘制内环的根轨迹图，选择合适的 K_1 使内环稳定；再依据 $\phi_1(s)G_2(s)H_2(s)$ 的零、极点，绘制外环的根轨迹图，选择合适的 K_2 使外环稳定。

类似的问题还有开环稳定性和闭环稳定性，开环稳定的充要条件是开环极点都位于 S 平面的左半平面，开环稳定不意味着闭环稳定，开环不稳定也不意味着闭环不稳定，但是开环极点确实对闭环稳定有着重要影响——因为开环零、极点对根轨迹图有重要影响。

- 4.5.2 开环零极点对系统的影响

对于图 4-1 所描述的系统，影响系统稳定性有三大因素：开环增益、开环极点、开环零点。开环增益的影响上面已经讨论，现在讨论开环零、极点的影响，请看图 4-13 所示的例子。

图 4-13 (a) - (d) 所对应的系统开环传递函数分别为：

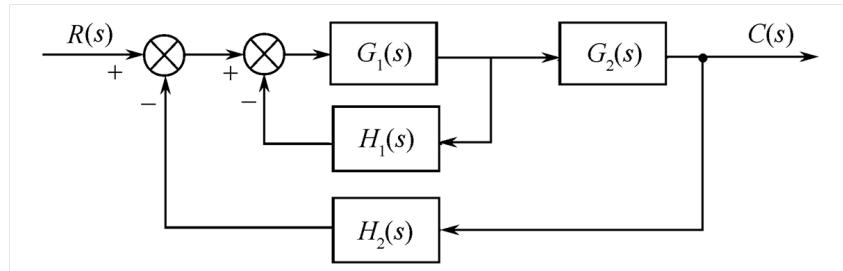


图 4-12 所示的是多环系统

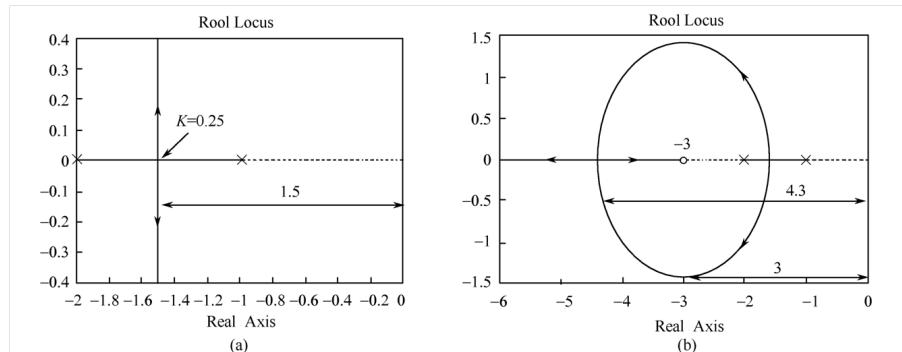


图 4-13 开环零、极点对系统的影响

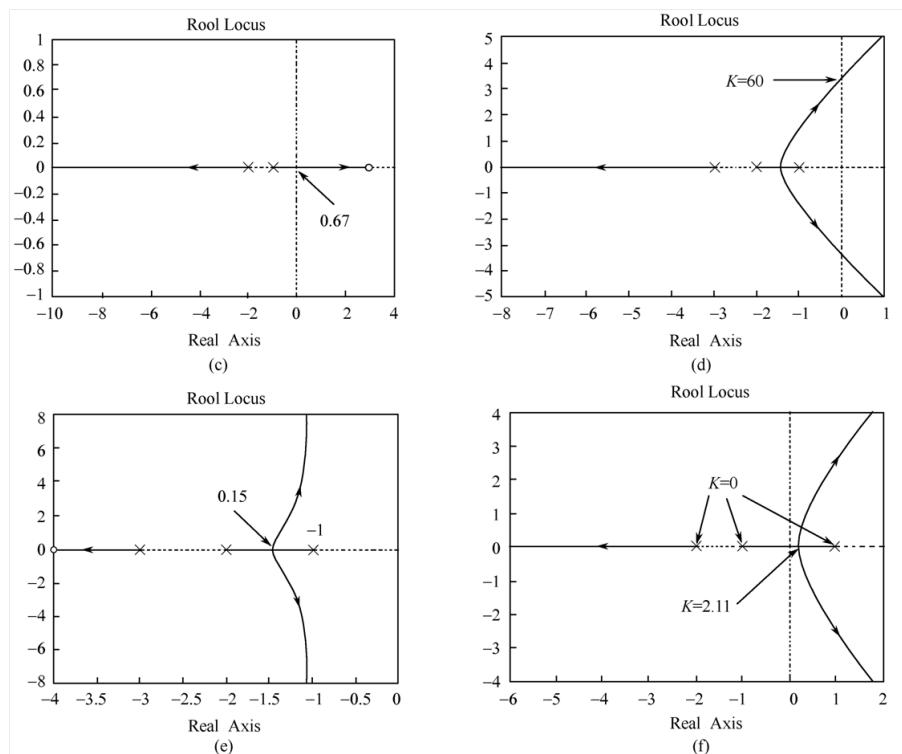


图 4-13 开环零、极点对系统的影响

$$\text{图 a: } G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

$$\text{图 b: } G(s)H(s) = \frac{s+3}{s(s+2)}$$

$$\text{图 c: } G(s)H(s) = \frac{s+3}{s(s-2)}$$

$$\text{图 d: } G(s)H(s) = \frac{s-3}{s(s+2)}$$

我们以图(a)所示系统为参照,在它基础上增加开环零、极点,研究它们对系统的影响。当 $K > 0$ 时,图(a), (b)代表的系统始终是稳定的,但图(b)代表的系统可以选择到一对比图(a)离虚轴更远的闭环极点,这说明增加合适的位于虚轴左侧的开环零点,既可以增加稳定裕度又可以提高快速性。

图(c)增加的是位于虚轴右侧的零点,显然,这时系统只有在 $K < 0.67$ 时才是稳定的,这说明增加位于虚轴右侧的开环零点,一般使稳定性下降。如果系统具有位于虚轴右侧的零点(不管是固有的还是加入的),就称之为非最小相角系统,从本例可以看出:非最小相角系统的动态性能需要认真对付。

图(d)增加的是位于虚轴左侧的极点,显然,这时系统只有在 $K < 60$ 时才是稳定的,与图(a)相比说明:给开环系统增加位于虚轴左侧的极点,一般也会使稳定性下降。

图(e)是在图(d)基础上再增加一个位于虚轴左侧的零点,闭环系统的稳定性又大大提高了。

图(f)是在图(a)基础上增加位于虚轴右侧的极点,这时从该极点出发的一支根轨迹全部位于虚轴的右边,这意味着不管 K 取何值,闭环系统都不可能稳定,所以增加位于虚轴右侧的极点是不可取的。但是如果再增加一个合适的位于虚轴左侧的零点,该系统会变成条件稳定,读者自行完成。

• 4.5.3 零、极点相消问题

在设计控制系统时,为了使系统阶次降低或者为了抵消大的惯性环节,有时用控制器的零(极)点去抵消被控对象的极(零)点,这在大多数情况下是有利的,但也有例外。

图 4-14 (a) 是下列三阶系统的根轨迹:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s + p_1)(s^2 + s + 1)} \quad p_1 = -1$$

附加一个零点 $z_1 = -1$ 去抵消系统的一个稳定 $p_1 = -1$ 极点,这样系统的传递函数变成:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s + p_1)(s^2 + s + 1)} = \frac{K}{s^2 + s + 1}$$

其根轨迹图 4-14 (b), 可见系统的稳定性大大提高了。现在考虑建模误差的影响, 如果开环传递函数参数不准确, 假设实际系统 $p_1 = -0.8$ 或 $p_1 = -1.2$, 我们却按 $p_1 = -1$ 建模, 这样零极点不能正好抵消, 根轨迹变成图 4-14 (c) (d)。

根轨迹图清楚地表示: 尽管存在建模误差, 附加零点仍然提高了系统的稳定性。但是, 情况不都是这么乐观, 考察下列三阶系统:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s - p_1)(s^2 + s + 1)} \quad p_1 = 1$$

如果用一个零点 $z_1 = 1$ 去低消系统的不稳定极点 $p_1 = 1$, 这样系统的开环传递函数变成:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s - 1)}{(s - p_1)(s^2 + s + 1)}$$

其根轨迹图 4-14 (e), 可见零、极点正好相消, 系统的稳定性大大提高了。考虑建模误差的影响, 假设实际系统 $p_1 = 0.8$, 不宜用零、极点相消的办法去低消系统的不稳定极点或零点

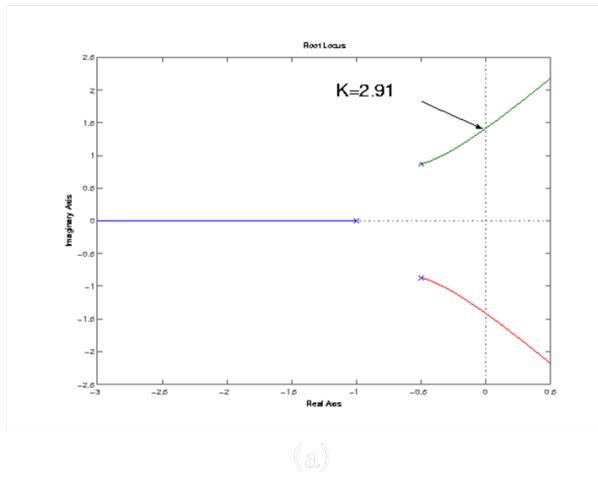
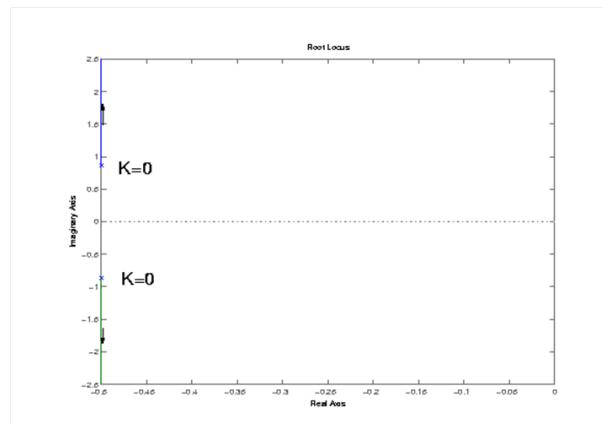


图 4-14(a) 零、极点相消问题

• 4.5.4 闭环零极点与时域响应

系统的动态性能最终体现在时域响应, 影响时域响应的因素有两个: 闭环传递函数和输入函数。在第三章中已经分析: 时域响应的暂态分量主要取决于闭环零、极点, 时域响应的稳态分量主要取决于输入函数。

如前所述, 闭环系统的稳定性完全取决于闭环极点, 实际上时域响应的暂态分量也主要取决于闭环极点。每一个闭环极点 s_i 对应时域响应中的一个因子 $\exp(s_i t)$ ——称



(b)

图 4-14(b) 零、极点相消问题

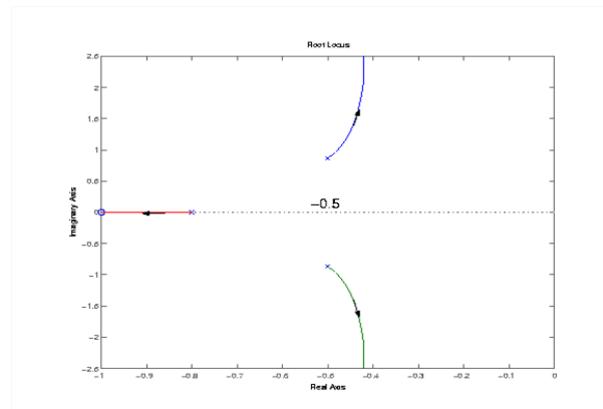


图 4-14(c) 零、极点相消问题

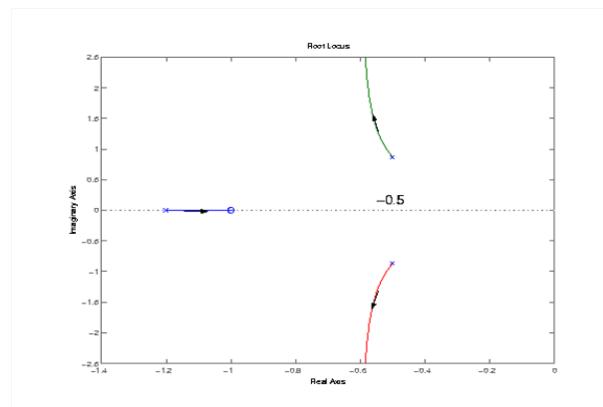


图 4-14(d) 零、极点相消问题

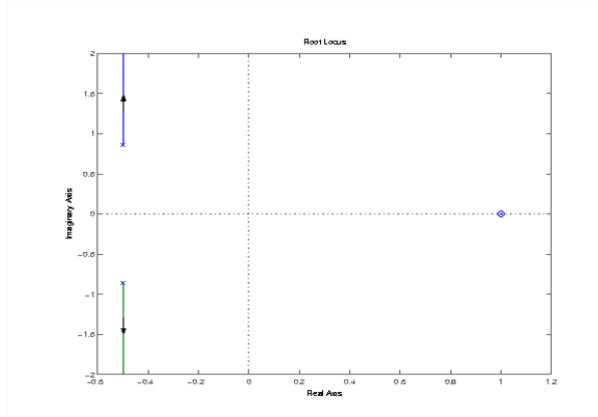


图 4-14(e) 零、极点相消问题

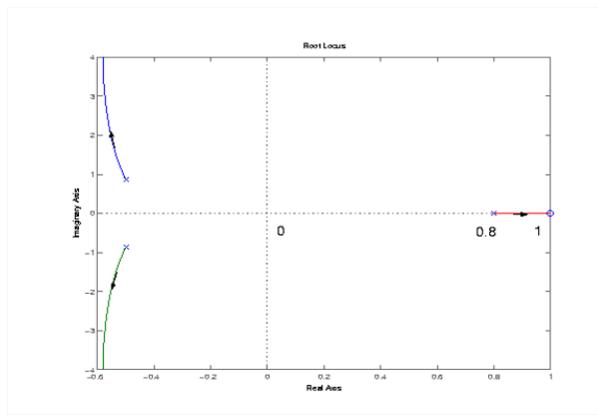


图 4-14(f) 零、极点相消问题

为系统的一个模态 (Mode), s_i 在 S 平面上的位置决定了它对应的暂态分量的运动形式。

图 4-15 表示了 s_i 分布于 S 平面上不同位置所对应的暂态分量，其规律可以总结为：

- 1) 左右分布决定终值。具体讲就是： s_i 位于虚轴左边时暂态分量最终衰减到零， s_i 位于虚轴右边时暂态分量一定发散， s_i 正好位于虚轴（除原点）时暂态分量为等幅振荡。
- 2) 虚实分布决定振型。具体讲就是： s_i 位于实轴上时暂态分量为非周期运动， s_i 位于虚轴上时暂态分量为周期运动。
- 3) 远近分布决定快慢。具体讲就是： s_i 位于虚轴左边时离虚轴愈远过渡过程衰减得愈快。所以离虚轴最近的闭环极点“主宰”系统响应的时间最长，被称为主导极点。

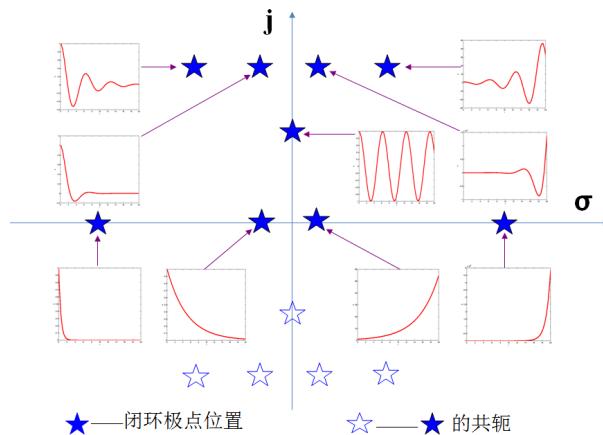


图 4-15 闭环极点分布与暂态分量的运动形式

设计系统时合理配置闭环极点是十分重要的，根据上述规律，一般首先配置主导极点，然后配置非主导极点，非主导极点与虚轴的距离应当是主导极点与虚轴距离的 2 ~ 5 倍，这样系统的时间响应就主要取决于一对主导极点。

主导极点一般安排为一对共轭复数极点，位于如图 4-5 虚轴左边 60° 扇形区内，且离虚轴有一定的距离，其理由在于：

- 1) 闭环主导极点为共轭复数，使闭环系统的动态性能与一个二阶欠阻尼系统相似，二阶系统的动态性能是分析得最透彻的，欠阻尼系统则具有较快的反应速度。

- 2) 阻尼系数太大太小都不合适, 60° 扇形区意味着阻尼系数不小于 $\cos 60^\circ = 0.5$, 一般认为最佳阻尼系数是 0.707。
- 3) 离虚轴一定的距离保证了足够的稳定裕度。稳定裕度太小, 在实际应用时可能系统不稳定, 因为数学模型的参数不会绝对准确——也就是说实际的主导极点位置与理论分析的位置有偏差。但也不是越远越好, 因为系统总存在建模误差, 离虚轴很远的极点对应很小的时间常数, 如果主导极点与建模时忽略的小时间常数相当, 那么主导极点就不“主导”, 设计的根基就动摇了。

这里提出了一个重要的设计理念: 鲁棒性设计。理论分析与工程实际总是有差距的, 不注意这种差距, 有时会闹出笑话。一个控制系统的工作, 需要充分考虑工程实际中的非理想因素, 比如: 建模误差、参数不准、外部干扰等。

建立系统数学模型时, 总要忽略一些非线性、小时间常数等因素, 这叫建模误差; 建立数学模型时, 对实际系统参数的测量或估计不可能百分之百的准确, 而且运行中系统参数也会变化, 这说明参数不准是普遍存在的; 来自外部环境的干扰更是五花八门、难以统计, 未建模的干扰会使运动偏离理论轨迹。所以, 要使理论上设计的系统能够真正用于实际, 必须保证在上述非理想因素下设计目标仍然能达到或基本达到, 这样的控制系统称为具有鲁棒性的系统。

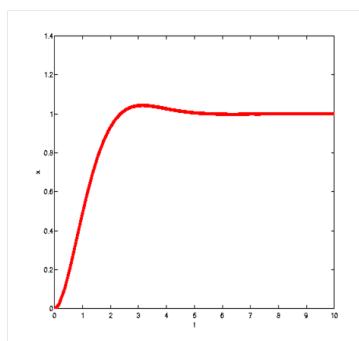


图 4-16(a) 闭环零点对时间响应的影响

现在再来看系统的闭环零点, 应该说闭环零点对系统的稳定性没有影响, 对系统的时间响应没有实质影响, 但对时间响应的具体形状是有影响的。考虑下面三个闭环传递函数:

$$\text{图 a: } \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^2 + 2s + 2}$$

$$\text{图 b: } \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2+s}{s^2 + 2s + 2}$$

$$\text{图 c: } \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2-s}{s^2 + 2s + 2}$$

它们有完全相同的闭环极点, 但闭环零点不同, 它们的阶跃响应分别如图 4-16(a), (b), (c)。图 (a) (b) 都是最小相角系统, 但图 (b) 代表的系统多了一个左半

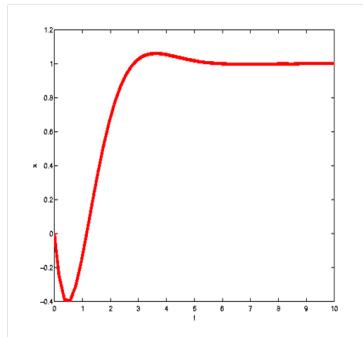


图 4-16(c) 闭环零点对时间响应的影响

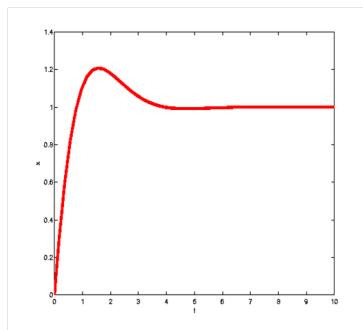
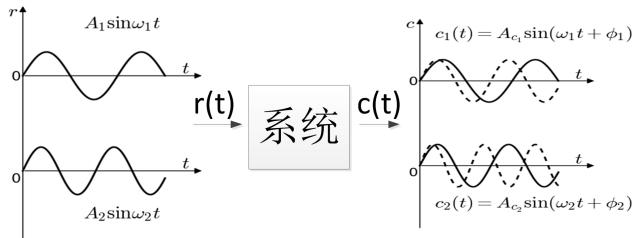


图 4-16(b) 闭环零点对时间响应的影响

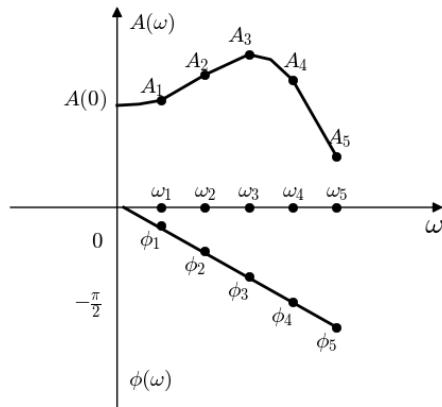
平面的零点，它加快了响应速度（有利），也加大了超调量（不利）；图（c）代表的是一个非最小相角系统，右半平面零点导致了特殊的‘反调节’现象，这对系统的动态性能是不利的，水轮机调速系统就存在这种现象。

第五章频率响应法

5.1 频域特性



频域特性 (a)



频域特性 (b)

基本概念（物理意义）

$A(\omega)$ 称幅频特性， $\varphi(\omega)$ 称相频特性。

二者统称为频率特性

- 数学本质

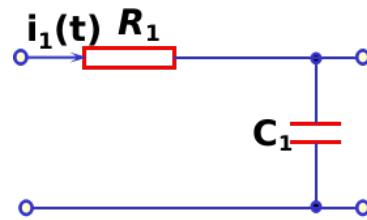
$$G(s) = \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 s + 1} + \frac{1}{T s + 1}$$

$$\text{设 } U_r = A \sin \omega t, \text{ 则 } U_r(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}, U_o(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}, u_o(t) = \frac{A\omega t}{1 + \omega^2 T^2} e^{-t/T} + \frac{A}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \sin(\omega t - \arctan \omega T)$$

稳态分量 $\frac{A}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \sin(\omega t - \arctan \omega T)$ 根据定义 $A(\omega) = 1/\sqrt{1 + \omega^2 T^2}$, $\varphi(\omega) = -\arctan \omega T$

频率特性写成一个式子 $\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} e^{-j \arctan \omega T} = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{1 + Ts}|_{s=j\omega}$

上述结论可推广到稳定的线性定常系统, 设其传递函数为



RC 电路

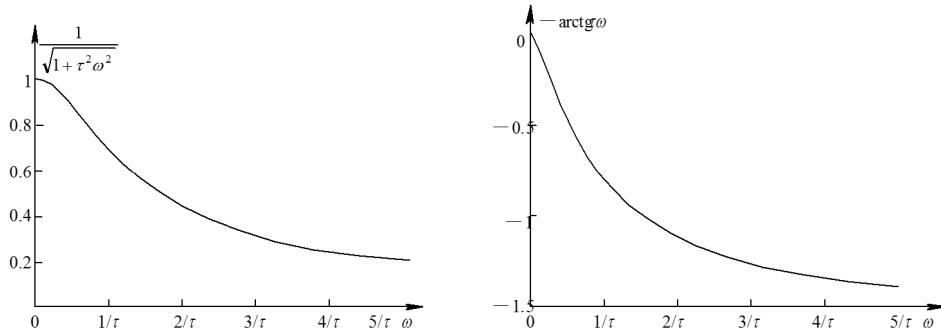


图 5-2 RC 电路的幅频和相频特性

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad (5.6)$$

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi(\omega)}$$

幅值, 相位 Bode 图

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi(\omega)} = X(\omega) + jY(\omega)$$

实部 虚部 奈氏图

在工程实际中, 常常将频率特性画成对数坐标图形式, 这种对数频率特性曲线又称伯德图, 由对数幅频特性和对数相频特性组成。伯德图的横坐标按 $\lg \omega$ 分度, 即对数分度, 单位为弧度/秒 (rad/sec), 对数幅频曲线的纵坐标按

$$L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg A(\omega)$$

线性分度, 单位是分贝 (dB)。对数相频曲线的纵坐标按 $\phi(\omega)$ 线性分度, 单位是度 ($^\circ$)。由此构成的坐标系称为半对数坐标系。

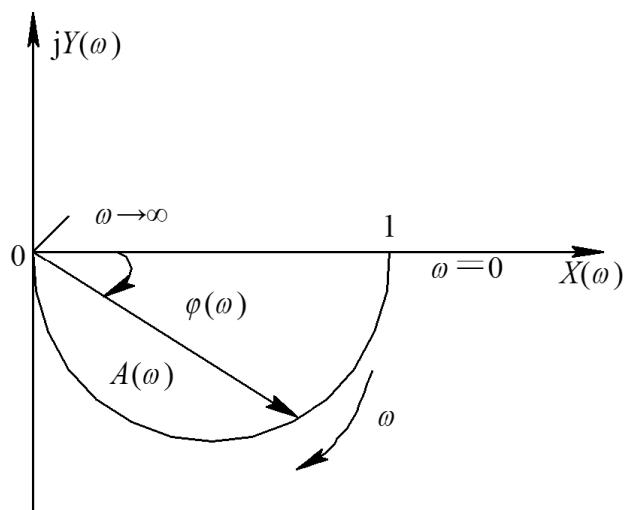


图 5-3 RC 电路的奈氏图

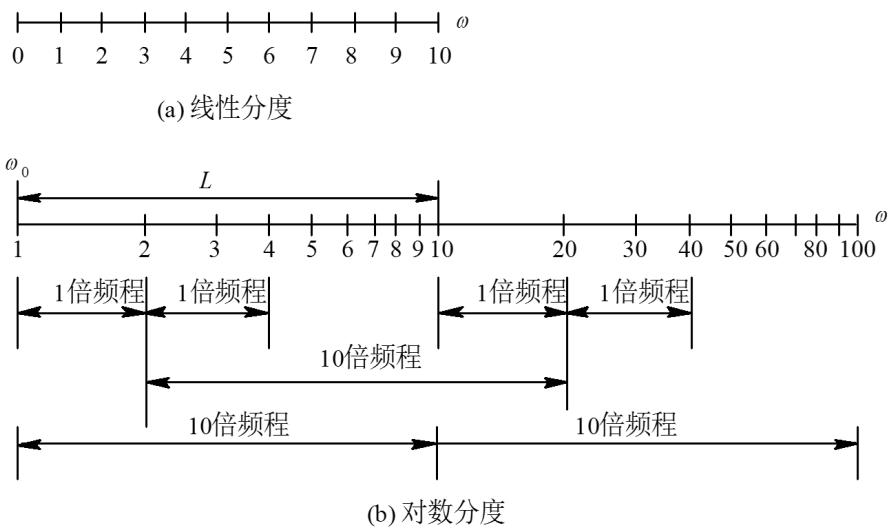


图 5-4 对数分度和线性分度

ω/ω_0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lg(\omega/\omega_0)$	0	0.301	0.477	0.602	0.699	0.788	0.845	0.903	0.954	1

表 5-1 10 倍频程内的对数分度

对数频率特性采用 ω 的对数分度实现了横坐标的非线性压缩, 便于在较大频率范围反映频率特性的变化情况。对数幅频特性采用 $20 \lg A(\omega)$, 则将幅值的乘除运算化为加减运算, 可以简化曲线的绘制过程。令 $\tau = 1$, 则用 MATLAB 画出上述 RC 电路的伯德图如图 5-5 所示, 其程序如下:

```
bode([1], [1 1])
```

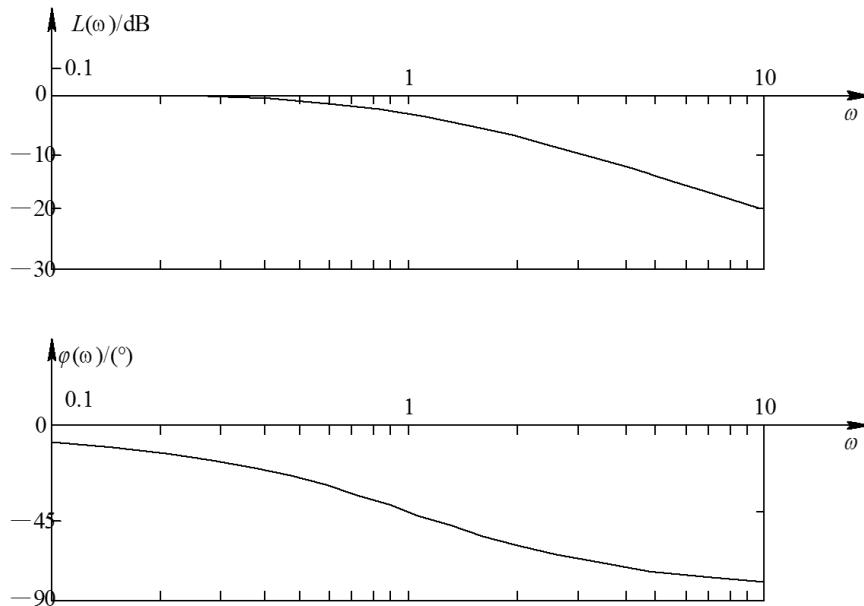


图 5-5 RC 电路的伯德图

5.2 典型环节的频率特性

- 1. 比例环节

比例环节的频率特性为

$$G(j\omega) = K \quad (5.15)$$

显然, 它与频率无关。相应的幅频特性和相频特性为

$$\begin{cases} A(\omega) = K \\ \phi(\omega) = 0^\circ \end{cases}$$

对数幅频特性和相频特性为

$$\begin{cases} L(\omega) = 20 \lg K \\ \phi(\omega) = 0^\circ \end{cases} \quad (5.17)$$

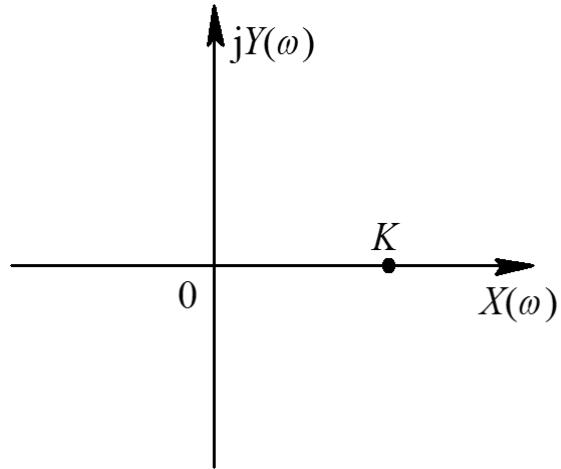


图 5-6 比例环节的奈氏图

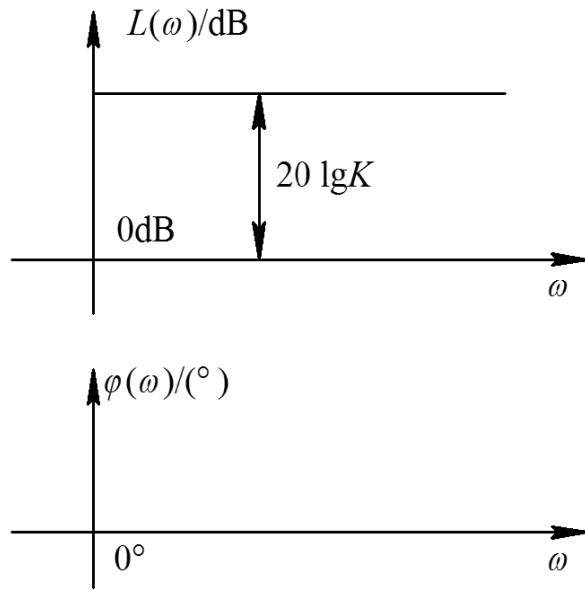


图 5-7 比例环节的伯德图

- 2. 积分环节

积分环节的频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad (5.18)$$

其幅频特性和相频特性为

$$\begin{cases} A(\omega) = 1/\omega \\ \phi(\omega) = -90^\circ \end{cases} \quad (5.19)$$

由式 (5.19) 可见, 它的幅频特性与角频率 ω 成反比, 而相频特性恒为 -90° 。对数幅频特性和相频特性为

$$\begin{cases} L(\omega) = -20 \lg \omega \\ \phi(\omega) = -90^\circ \end{cases} \quad (5.20)$$

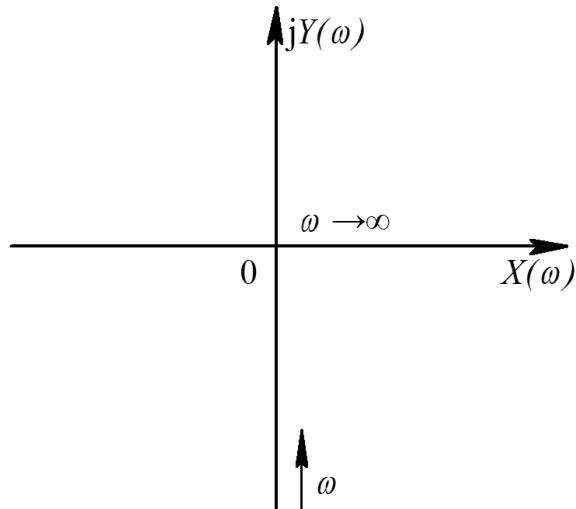
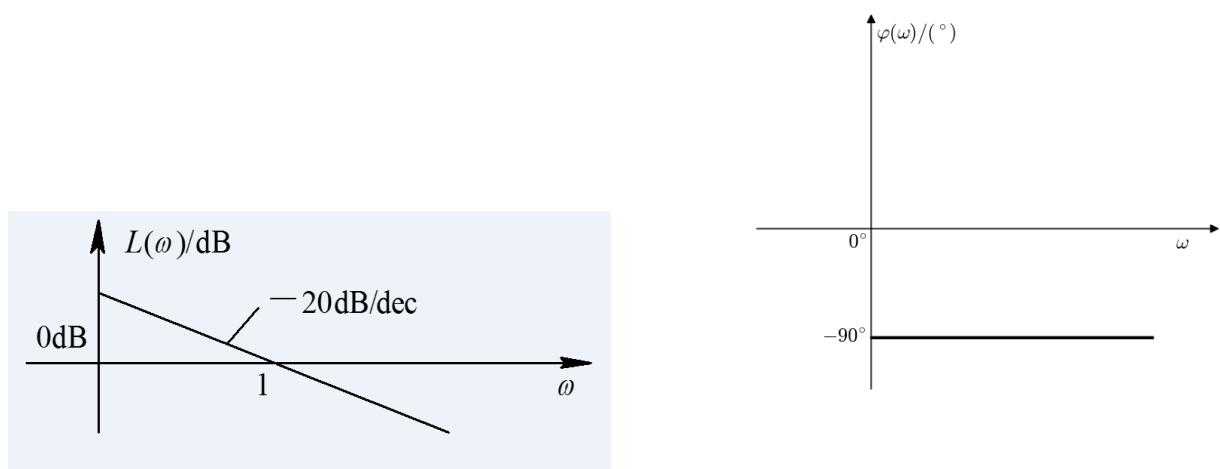


图 5-8 积分环节的奈氏图



- 3. 微分环节

微分环节的频率特性为

$$G(j\omega) = j\omega = \omega e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (5.21)$$

其幅频特性和相频特性为

$$\begin{cases} A(\omega) = \omega \\ \phi(\omega) = 90^\circ \end{cases} \quad (5.22)$$

由式 (5.22) 可见, 微分环节的幅频特性等于角频率 ω , 而相频特性恒为 90° 。对数幅频特性和相频特性为

$$\begin{cases} L(\omega) = 20 \lg \omega \\ \phi(\omega) = 90^\circ \end{cases} \quad (5.23)$$

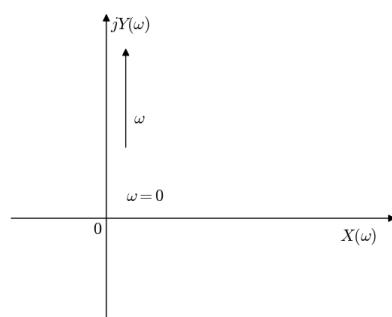


图 5-10 微分环节的奈氏图

- 4. 惯性环节

惯性环节的频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} \quad (5.24)$$

它的幅频特性和相频特性为

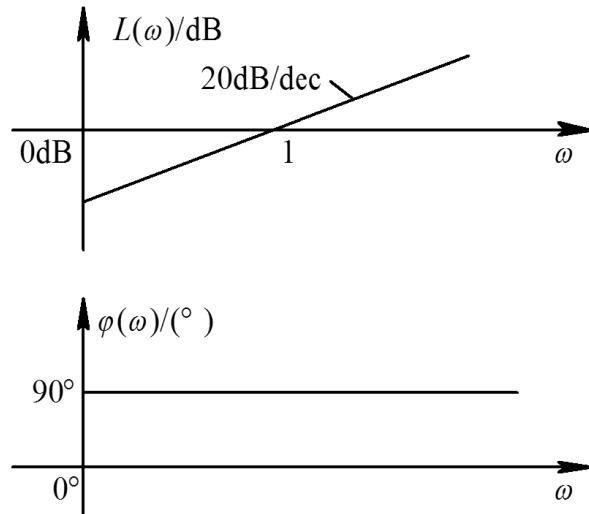


图 5-11 微分环节的伯德图

$$\begin{cases} A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}} \\ \phi(\omega) = -\arctan \omega T \end{cases} \quad (5.25)$$

式 (5.24) 写成实部和虚部形式, 即

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{1+\omega^2T^2} - j\frac{\omega T}{1+\omega^2T^2} \\ &= X(\omega) + jY(\omega) \end{aligned}$$

则有

$$X^2(\omega) + Y^2(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2T^2} = X(\omega)$$

即

$$[X(\omega) - 0.5]^2 + Y^2(\omega) = 0.5^2$$

所以, 惯性环节的奈氏图是圆心在 $(0.5, 0)$, 半径为 0.5 的半圆 (见图 5-12)。

对数幅频特性和相频特性为

$$\begin{cases} L(\omega) = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}} = -20 \lg \sqrt{1+\omega^2T^2} \\ \phi(\omega) = -\arctan \omega T \end{cases} \quad (5.26)$$

当 $\omega T = 1$ 时, $\omega = 1/T$ 称为交接频率, 或叫转折频率、转角频率。惯性环节对数幅频特性曲线的绘制方法如下: 先找到 $\omega = 1/T$, $L(\omega)=0\text{dB}$ 的点, 从该点向左作水平直

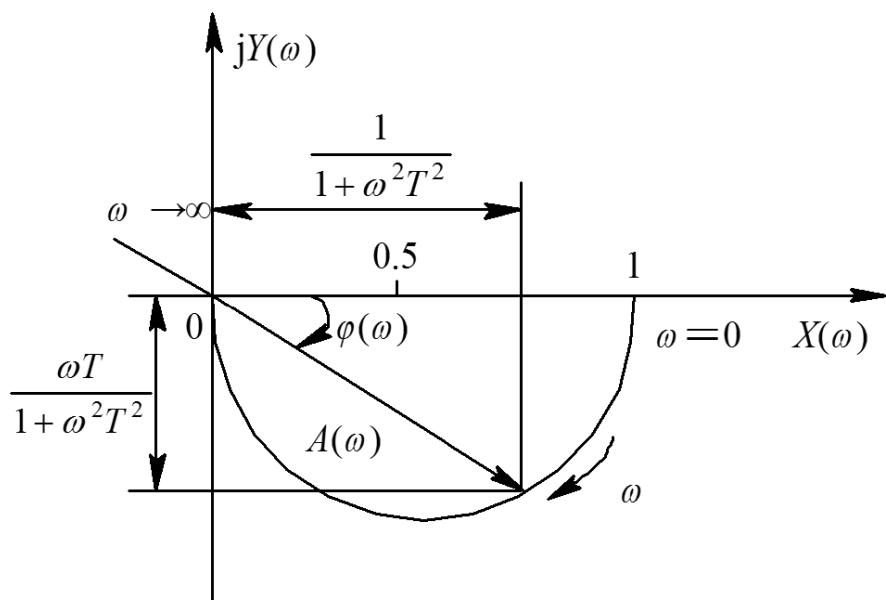


图 5-12 惯性环节的奈氏图

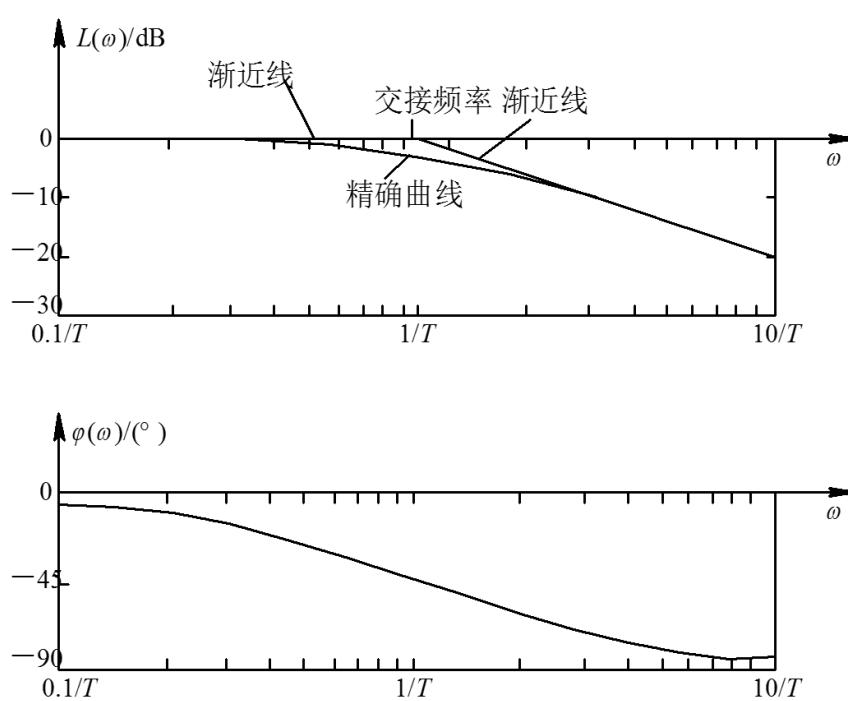


图 5-13 惯性环节的伯德图

线, 向右作斜率为-20 dB/dec 的直线。在低频段和高频段, 精确的对数幅频特性曲线与渐近线几乎重合。在 $\omega = 1/T$ 附近, 可以选几个点, 把由式 (5.26) 算出的精确的 $L(\omega)$ 值标在图上, 用曲线板光滑地连接起来, 就得精确的对数幅频特性曲线。渐近线和精确曲线在交接频率附近的误差列于表 5-2 中。

ωT	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10
$\Delta L(\omega)/(\text{dB})$	-0.04	-0.17	-0.97	-3.01	-0.97	-0.17	-0.04

表 5-2 惯性环节对数幅频特性曲线渐近线和精确曲线的误差

由表可知, 在交接频率处误差达到最大值:

$$\Delta L(\omega) = L\left(\frac{1}{T}\right) - 0 = -20 \lg \sqrt{2} \approx -3 \text{dB}$$

一般来说, 这些误差并不影响系统的分析与设计。

在低频段, ω 很小, $\omega T \ll 1$, $\phi(\omega) = 0^\circ$; 在高频段, ω 很大, $\omega T \gg 1$, $\phi(\omega) = -90^\circ$ 。所以, $\phi(\omega) = 0^\circ$ 和 $\phi(\omega) = -90^\circ$ 是曲线 $\phi(\omega)$ 的两条渐近线, 在交接频率处有

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi(\omega)} = X(\omega) + jY(\omega)$$

ωT	0.1	0.13	0.2	0.25	0.33	0.5	1	2	3	4	5	8	10
$\phi(\omega)/(\text{°})$	-6	-7	-11	-14	-18	-27	-45	-63	-72	-76	-79	-83	-84

表 5-3 惯性环节对数相频特性曲线角度值

惯性环节对数相频特性曲线是一条中心点对称的曲线, 这可以证明如下: 取两个关于 $\omega = 1/T$ 对称的频率 $\omega_1 = \alpha/T$ 和 $\omega_2 = 1/(\alpha T)$, 则有

$$\begin{aligned} \phi_1(\omega) &= -\arctan(\omega_1 T) = -\arctan \alpha, \quad \tan(-\phi_1) = \alpha \\ \phi_2(\omega) &= -\arctan(\omega_2 T) = -\arctan \frac{1}{\alpha}, \quad \tan(-\phi_2) = \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

因此有

$$(-\phi_1) + (-\phi_2) = 90^\circ, \quad \phi_1 - (-45^\circ) = -[\phi_2 - (-45^\circ)]$$

这表明 $\phi(\omega)$ 是关于 $\omega = 1/T$, $\phi(\omega) = -45^\circ$ 这一点中心对称的。用 MATLAB 画出的惯性环节的伯德图如图 5-14 所示 ($T = 1$)。

• 5. 一阶微分环节

一阶微分环节的频率特性为

$$G(j\omega) = 1 + j\omega T \tag{5.27}$$

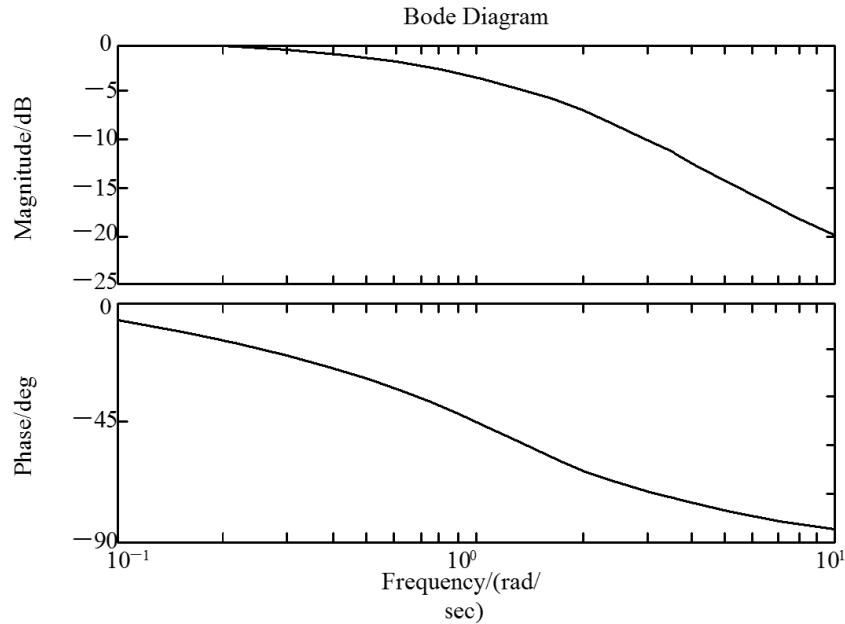


图 5-14 MATLAB 绘制的惯性环节的伯德图

幅频特性和相频特性为

$$\begin{cases} A(\omega) = \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \\ \phi(\omega) = \arctan \omega T \end{cases} \quad (5.28)$$

对数幅频特性和相频特性为

$$\begin{cases} L(\omega) = 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \\ \phi(\omega) = \arctan \omega T \end{cases} \quad (5.29)$$

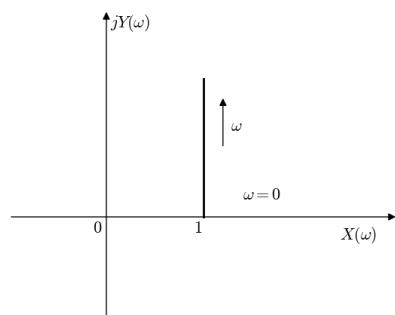


图 5-15 一阶微分环节的奈氏图

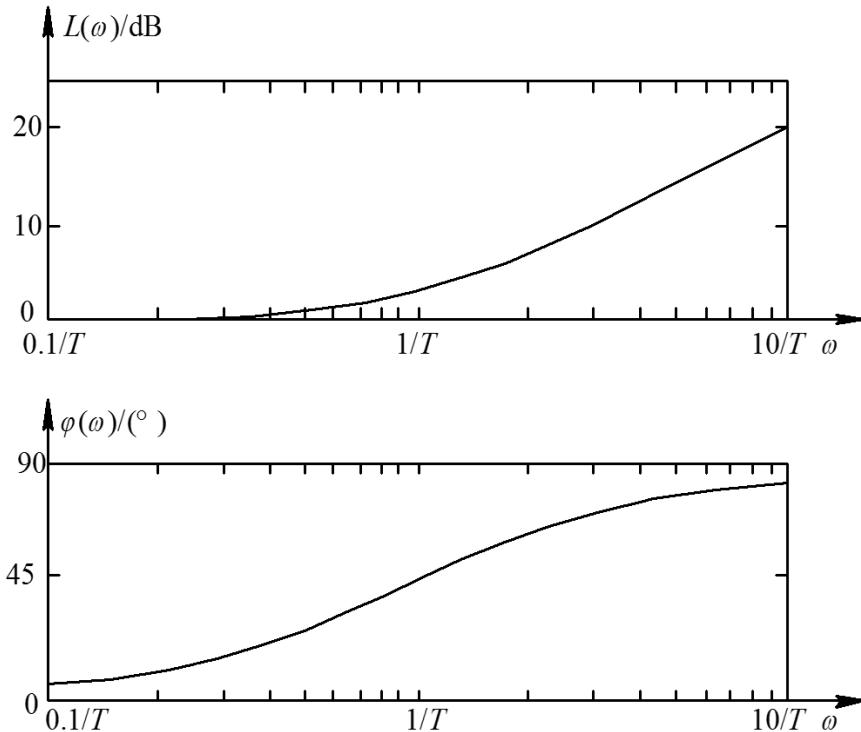


图 5-16 一阶微分环节的伯德图

- 6. 二阶振荡环节

二阶惯性环节的频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j2\xi\omega T + (j\omega T)^2} \quad (5.30)$$

它的幅频特性和相频特性为

$$\begin{cases} A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2 T^2)^2 + (2\xi\omega T)^2}} \\ \phi(\omega) = -\arctan\left(\frac{2\xi\omega T}{1-\omega^2 T^2}\right) \end{cases} \quad (5.31)$$

对数幅频特性和相频特性为

$$\begin{cases} L(\omega) = -20 \lg \sqrt{(1-\omega^2 T^2)^2 + (2\xi\omega T)^2} \\ \phi(\omega) = -\arctan\left(\frac{2\xi\omega T}{1-\omega^2 T^2}\right) \end{cases} \quad (5.32)$$

由式 (5.31) 得

$$\phi(\omega) \begin{cases} -\arctan\left(\frac{2\xi\omega T}{1-\omega^2 T^2}\right) & (\omega T \leq 1) \\ -\pi - \arctan\left(\frac{2\xi\omega T}{1-\omega^2 T^2}\right) & (\omega T > 1) \end{cases}$$

所以有

$$G(j\omega) = \begin{cases} 1\angle 0^\circ & (\omega = 0) \\ 0\angle -180^\circ & (\omega \rightarrow +\infty) \end{cases}$$

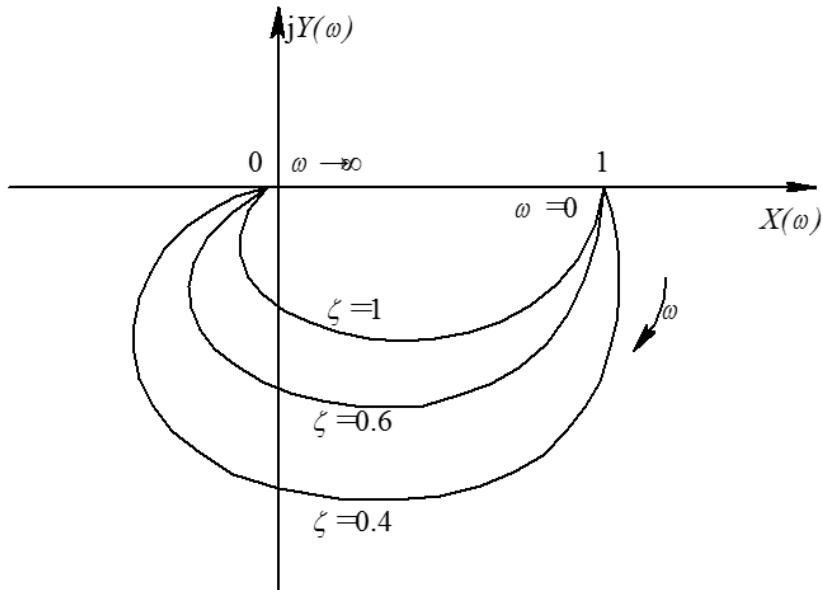


图 5-17 二阶振荡环节的奈氏图

画二阶振荡环节的伯德图时分析如下：在低频段， ω 很小， $\omega T \ll 1$ ， $L(\omega) = 0\text{dB}$ ；在高频段， ω 很大， $\omega T \gg 1$ ， $L(\omega) = -20 \lg(\omega T) \cdot 2 = -40 \lg(\omega T)\text{dB}$ 。其对数幅频特性曲线可用上述低频段和高频段的两条直线组成的折线近似表示，如图 5-18 的渐近线所示。这两条线相交处的交接频率 $\omega = 1/T$ ，称为振荡环节的无阻尼自然振荡频率。在交接频率附近，对数幅频特性与渐近线存在一定的误差，其值取决于阻尼比 ξ 的值，阻尼比越小，则误差越大，如表 5-4 所示。当 $\xi < 0.707$ 时，在对数幅频特性上出现峰值。根据表 5-5 可绘制出不同阻尼比的相频特性曲线。二阶振荡环节的伯德图如图 5-18 所示。

- 7. 迟后环节

迟后环节的频率特性为

$$G(j\omega) = e^{-j\omega\tau} \quad (5.33)$$

幅频特性和相频特性为

$$\begin{cases} A(\omega) = 1 \\ \phi(\omega) = -\omega\tau \end{cases} \quad (5.34)$$

ζ	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.25	1.66	2.5	5	10
ωT	0.086	0.348	1.48	3.728	8.094	13.98	8.094	3.728	1.48	0.348	0.086
0.1	0.08	0.325	1.36	3.305	6.345	7.96	6.345	3.305	1.36	0.325	0.08
0.2	0.071	0.292	1.179	2.681	4.439	4.439	4.439	2.681	1.179	0.292	0.071
0.3	0.044	0.17	0.627	1.137	1.137	0.00	1.137	1.137	0.627	0.17	0.044
0.5	0.001	0.00	0.08	-0.47	-1.41	-2.92	-1.41	-0.47	0.08	0.00	0.001
0.7	-0.086	-0.34	-1.29	-2.76	-4.30	-6.20	-4.30	-2.76	-1.29	-0.34	-0.086
1											

表 5-4 二阶振荡环节对数幅频特性曲线渐近线和精确曲线的误差 (dB)

ζ	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10
ωT	-1.2°	-2.4°	-7.6°	-90°	-172.4°	-177.6°	-178.8°
0.1	-1.2°	-2.4°	-7.6°	-90°	-172.4°	-177.6°	-178.8°
0.2	-2.3°	-4.8°	-14.9°	-90°	-165.1°	-175.2°	-177.7°
0.3	-3.5°	-7.1°	-21.8°	-90°	-158.2°	-172.9°	-176.5°
0.5	-5.8°	-11.8°	-33.7°	-90°	-146.3	-168.2°	-174.2°
0.7	-8.1°	-16.3°	-43.0°	-90°	-137.0°	-163.7°	-171.9°
1	-11.4°	-22.6°	-53.1°	-90°	-126.9°	-157.4°	-168.6°

表 5-5 二阶振荡环节对数相频特性曲线角度值

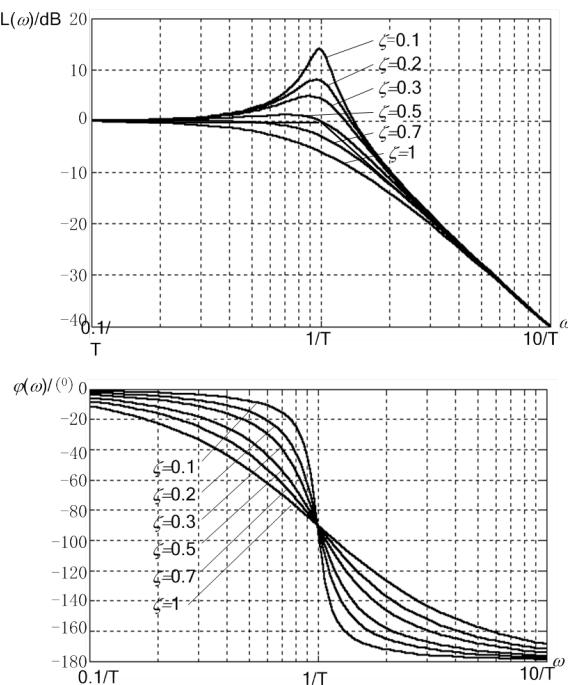


图 5-18 二阶振荡环节的伯德图

可见, 其奈氏图是一个以坐标原点为中心, 半径为 1 的圆。对数幅频特性和相频特性为

$$\begin{cases} L(\omega) = 1 \\ \phi(\omega) = -\omega\tau \end{cases} \quad (5.35)$$

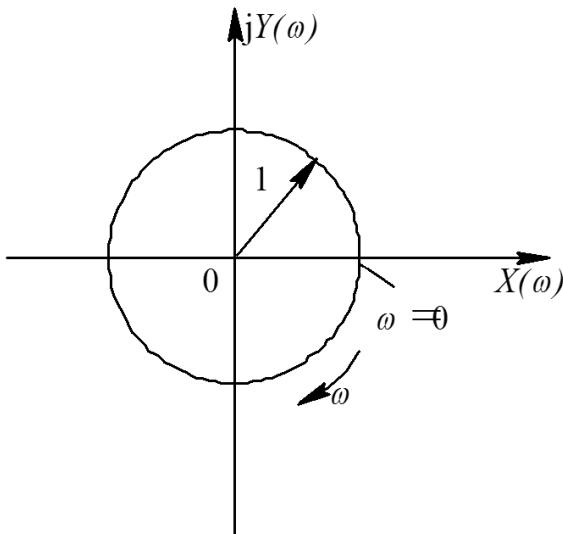


图 5-19 迟后环节的奈氏图

5.3 控制系统开环频率特性曲线的绘制

- 5.3.1 开环频率特性奈氏图的绘制

以后我们将会看到, 在绘制奈氏图时有时并不需要绘制得十分准确, 而只需要绘出奈氏图的大致形状和几个关键点的准确位置就可以了。因此, 由以上典型环节奈氏图的绘制, 大致可将奈氏图的一般作图方法归纳如下:

- 写出 $A(\omega)$ 和 $\phi(\omega)$ 的表达式;
- 分别求出 $\omega=0$ 和 $\omega = +\infty$ 时的 $G(j\omega)$;
- 求奈氏图与实轴的交点, 交点可利用 $G(j\omega)$ 的虚部 $\text{Im}[G(j\omega)] = 0$ 的关系式求出, 也可利用 $\angle G(j\omega) = n \cdot 180^\circ$ (其中 n 为整数) 求出;
- 如果有必要, 可求奈氏图与虚轴的交点, 交点可利用 $G(j\omega)$ 的实部 $\text{Re}[G(j\omega)] = 0$ 的关系式求出, 也可利用 $\angle G(j\omega) = n \cdot 90^\circ$ (其中 n 为正整数) 求出;
- 必要时画出奈氏图中间几点;
- 勾画出大致曲线。

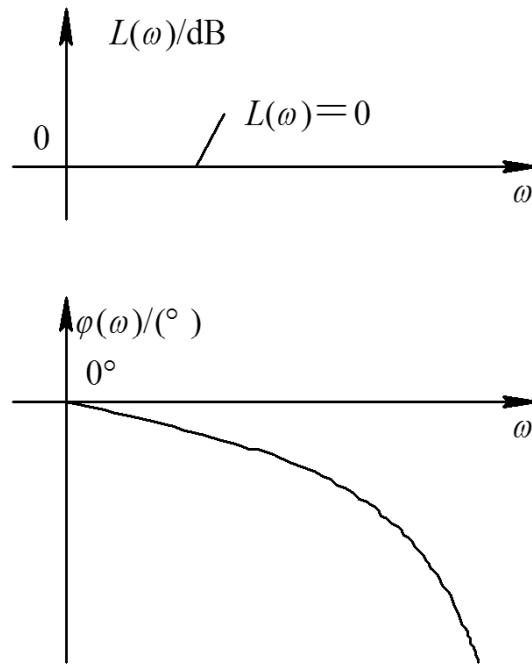


图 5-20 迟后环节的伯德图

例 5-1 试绘制下列开环传递函数的奈氏图:

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(0.1s+1)}$$

解该环节开环频率特性为

$$A(\omega) = \frac{10}{\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+0.01\omega^2}},$$

$$\phi(\omega) = -\arctan \omega - \arctan 0.1\omega$$

$\omega = 0, A(\omega) = 10, \phi(\omega) = 0^\circ$, 即奈氏图的起点为 $(10, j0)$;

$\omega = +\infty, A(\omega) = 0, \phi(\omega) = -180^\circ$, 即奈氏图的终点为 $(0, j0)$ 。显然, ω 从 0 变化到 $+\infty$, $A(\omega)$ 单调递减, 而 $\phi(\omega)$ 则从 0° 到 -180° 但不超过 -180° 。

奈氏图与实轴的交点可由 $\phi(\omega) = 0^\circ$ 得到, 即为 $(10, j0)$; 奈氏图与虚轴的交点可由 $\phi(\omega) = 270^\circ$ (即 -90°) 得到, 即

$$\arctan \omega + \arctan 0.1\omega = \arctan \frac{1.1\omega}{1-0.1\omega^2}$$

得 $1-0.1\omega_2 = 0, \omega_2 = 10$, 则

$$A(\omega) = \frac{10}{\sqrt{1+10}\sqrt{1+0.01 \times 10}} = 2.87$$

故奈氏图与虚轴的交点为 $(0, -j2.87)$ 。其奈氏图如图 5-21 所示。用 MATLAB 绘制的奈氏图如图 5-22 所示。注意，一般手绘的奈氏图，其频率范围是 $0 \rightarrow +\infty$ ，而 MATLAB 绘制奈氏图时，则是从 $-\infty \rightarrow +\infty$ 。MATLAB 绘制程序如下：

```
nyquist([10], conv([1 1], [0.1 1]))
```

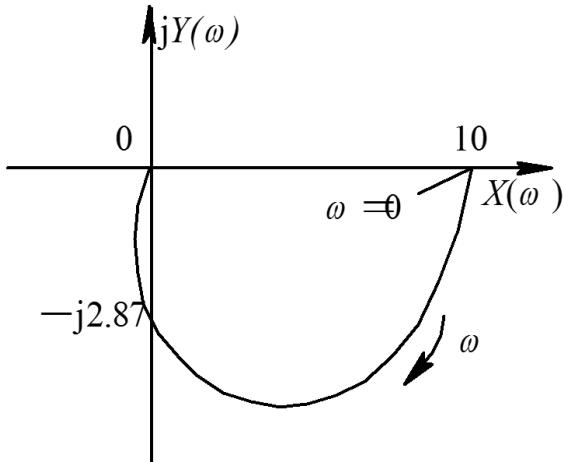


图 5-21 例 5-1 的奈氏图

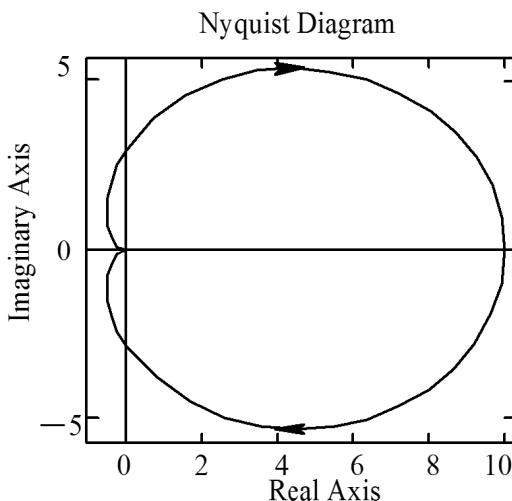


图 5-22 MATLAB 绘制例 5-1 的奈氏图

例 5-2 已知系统的开环传递函数为

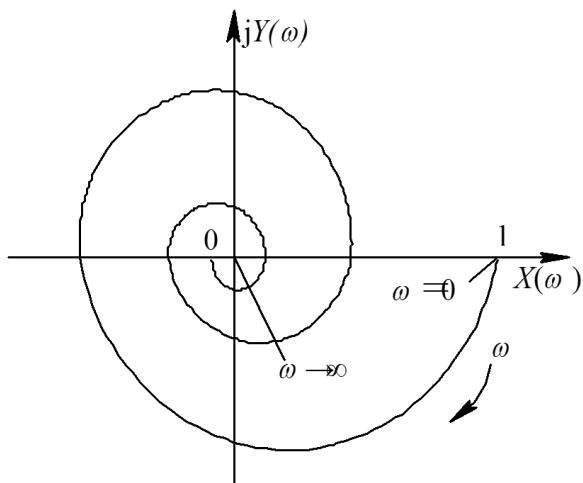
$$G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{Ts + 1}$$

试绘制其奈氏图。

解该传递函数的幅频特性和相频特性分别为

$$\begin{cases} L(\omega) = -20 \lg \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\xi\omega T)^2} \\ \phi(\omega) = -\arctan\left(\frac{2\xi\omega T}{1 - \omega^2 T^2}\right) \end{cases}$$

因此有 $\omega = 0, A(\omega) = 1, \phi(\omega) = 0^\circ$ 和 $\omega = +\infty, A(\omega) = 0, \phi(\omega) = -\infty$ 。即奈氏图的起点为 $(1, j0)$, 终点为 $(0, j0)$, 随着 ω 的增大, 曲线距离原点越来越近, 相角越来越负, 奈氏图与实轴和虚轴有无穷多个交点。系统的奈氏图如图 5-23 所示。



5-23 例 5-2 的奈氏图

例 5-3 设系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(2s+1)}$$

试绘制其奈氏图

解该传递函数的幅频特性和相频特性分别为

$$A(\omega) = \frac{1}{\omega\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+4\omega^2}}$$

$$\phi(\omega) = -90^\circ - \arctan \omega - \arctan 2\omega$$

所以有 $\omega = 0+, A(\omega) = +\infty, \phi(\omega) = -90^\circ - \Delta$ 为正的很小量, 故起点在第 III 象限; $\omega = +\infty, A(\omega) = 0, \phi(\omega) = -270^\circ + \Delta$, 故在第 II 象限趋向终点 $(0, j0)$ 。

因为相角从 -90° 变化到 -270° , 所以必有与负实轴的交点。由 $\phi(\omega) = -180^\circ$ 得

$$-90^\circ - \arctan \omega - \arctan 2\omega = -180^\circ$$

即

$$\arctan 2\omega = 90^\circ - \arctan \omega$$

上式两边取正切, 得 $2\omega = 1/\omega$, 即 $\omega = 0.707$, 此时 $A(\omega) = 0.67$ 。因此, 奈氏图与实轴的交点为 $(-0.67, j0)$ 。系统的奈氏图如图 5-24 所示。用 MATLAB 绘制 $(-1, j0)$ 点附近的奈氏图如图 5-25 所示, 其程序如下:

```
nyquist([1], conv(conv([1 0], [1 1]), [2 1]))
```

例 5-3 中系统型次即开环传递函数中积分环节个数 $\nu = 1$, 若分别取 $\nu = 2, 3$ 和 4 , 则根据积分环节的相角, 将图 5-24 曲线分别绕原点旋转 -90° , -180° 和 -270° 即可得相应的奈氏图, 如图 5-26 所示。

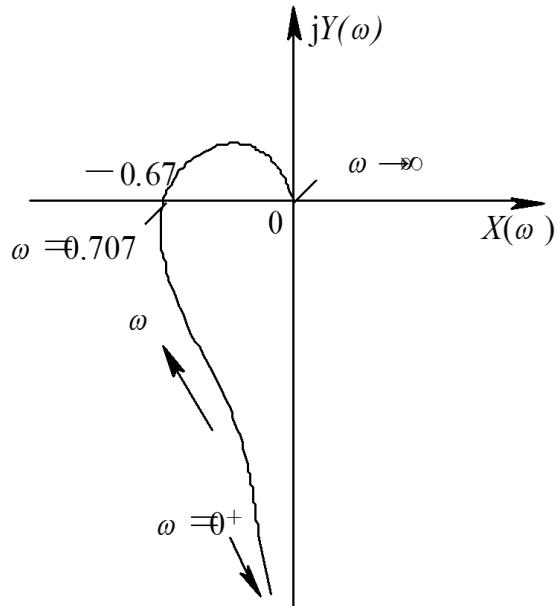


图 5-24 例 5-3 的奈氏图

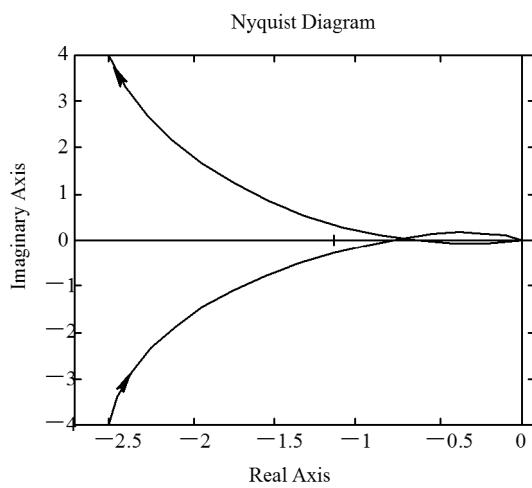
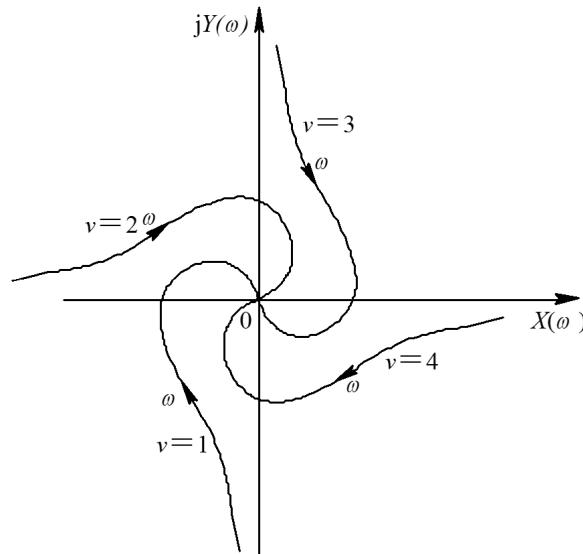


图 5-25 MATLAB 绘制例 5-3 的奈氏图

图 5-26 $v=1, 2, 3, 4$ 时的奈氏图

例 5-4 设系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(Ts + 1)}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

其中 $K=0.1$, $T=1$, $T_1=0.2$, $T_2=0.5$ 。试绘制系统的奈氏图。

解该传递函数的幅频特性和相频特性分别为

$$A(\omega) = \frac{K\sqrt{1+T^2\omega^2}}{\omega\sqrt{1+T_1^2\omega^2}\sqrt{1+T_2^2\omega^2}} = \frac{0.1\sqrt{1+\omega^2}}{\omega\sqrt{1+0.04\omega^2}\sqrt{1+0.25\omega^2}}$$

根据系统的幅频特性和相频特性有: $\omega = 0+$, $A(\omega) = +\infty$, $\phi(\omega) = -90^\circ + \Delta$, 故奈氏图起点在第 IV 象限; $\omega = +\infty$, $A(\omega) = 0$, $\phi(\omega) = -180^\circ + \Delta$, 故系统奈氏图在第 III 象限趋向终点 $(0, j0)$ 。因为相角范围为 $-90^\circ \sim -180^\circ$, 所以必有与负虚轴的交点。由 $\phi(\omega) = -90^\circ$ 得

$$-90^\circ + \arctan \omega - \arctan 0.2\omega - \arctan 0.5\omega = -90^\circ$$

即

$$\arctan \omega = \arctan 0.2\omega + \arctan 0.5\omega$$

上式两边取正切, 得 $\omega_2 = \sqrt{3}$, 即 $\omega = 1.732$, 此时 $A(\omega) = 0.0825$ 。所以, 奈氏图与虚轴的交点为 $(0, -j0.0825)$ 。系统奈氏图如图 5-27 所示

• 5.3.2 开环频率特性伯德图的绘制

控制系统一般总是由若干环节组成的, 设其开环传递函数为

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) \cdots G_n(s)$$

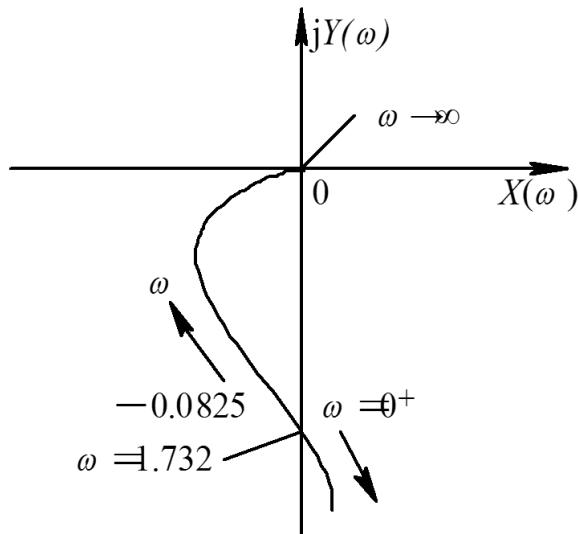


图 5-27 例 5-4 的奈氏图

系统的开环频率特性为

$$G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega) \cdots G_n(j\omega) \quad (5.36)$$

或

$$A(\omega)e^{j\phi(\omega)} = A_1(\omega)e^{j\phi_1(\omega)}A_2(\omega)e^{j\phi_2(\omega)} \cdots A_n(\omega)e^{j\phi_n(\omega)}$$

则系统的开环对数频率特性为

$$\begin{cases} L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) + \cdots + L_n(\omega) \\ \phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega) + \cdots + \phi_n(\omega) \end{cases} \quad (5.37)$$

其中, $L_i(\omega) = 20 \lg A_i(\omega)$, ($i = 1, 2, \dots, n$). 可见, 系统开环对数幅频特性和相频特性分别由各个环节的对数幅频特性和相频特性相加得到。

例 5-5 绘制开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{(1+s)(1+10s)}$$

的零型系统的伯德图。

解系统开环对数幅频特性和相频特性分别为

$$\begin{aligned} L(\omega) &= L_1(\omega) + L_2(\omega) + L_3(\omega) \\ &= 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2} - 20 \lg \sqrt{1 + 100\omega^2} \\ \phi(\omega) &= \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega) + \phi_3(\omega) \\ &= -\arctan \omega - \arctan 10\omega \end{aligned}$$

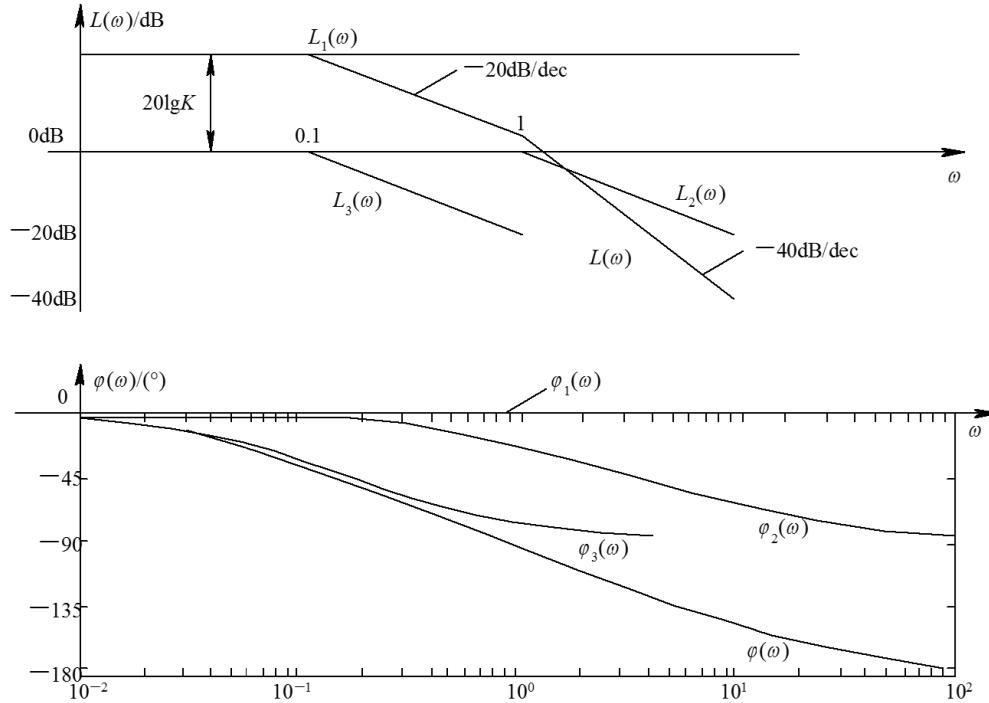


图 5-28 例 5-5 的伯德图

实际上，在熟悉了对数幅频特性的性质后，不必先一一画出各环节的特性，然后相加，而可以采用更简便的方法。由上例可见，零型系统开环对数幅频特性的低频段为 $20 \lg K$ 的水平线，随着 ω 的增加，每遇到一个交接频率，对数幅频特性就改变一次斜率。

例 5-6 设 I 型系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(1+Ts)}$$

试绘制系统的伯德图。解系统开环对数幅频特性和相频特性分别为

$$L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) + L_3(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{1+T^2\omega^2}$$

$$\phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega) + \phi_3(\omega) = -90^\circ - \arctan T\omega$$

不难看出，此系统对数幅频特性的低频段斜率为 -20 dB/dec ，它（或者其延长线）在 $\omega = 1$ 处与 $L_1(\omega) = 20 \lg K$ 的水平线相交。在交接频率 $\omega = 1/T$ 处，幅频特性的斜率由 -20 dB/dec 变为 -40 dB/dec ，系统的伯德图如图 5-29 所示。

通过以上分析，可以看出系统开环对数幅频特性有如下特点：低频段的斜率为 $-20\nu \text{ dB/dec}$ ， ν 为开环系统中所包含的串联积分环节的数目。低频段（若存在小于 1 的交接频率时则为其延长线）在 $\omega = 1$ 处的对数幅值为 $20 \lg K$ 。在典型环节的交接频率处，对数幅频特性渐近线的斜率要发生变化，变化的情况取决于典型环节的类型。如遇到 $G(s) (1+Ts)^{\pm 1}$ 的环节，交接频率处斜率改变 $\pm 20 \text{ dB/dec}$ ；如遇二阶振荡环节

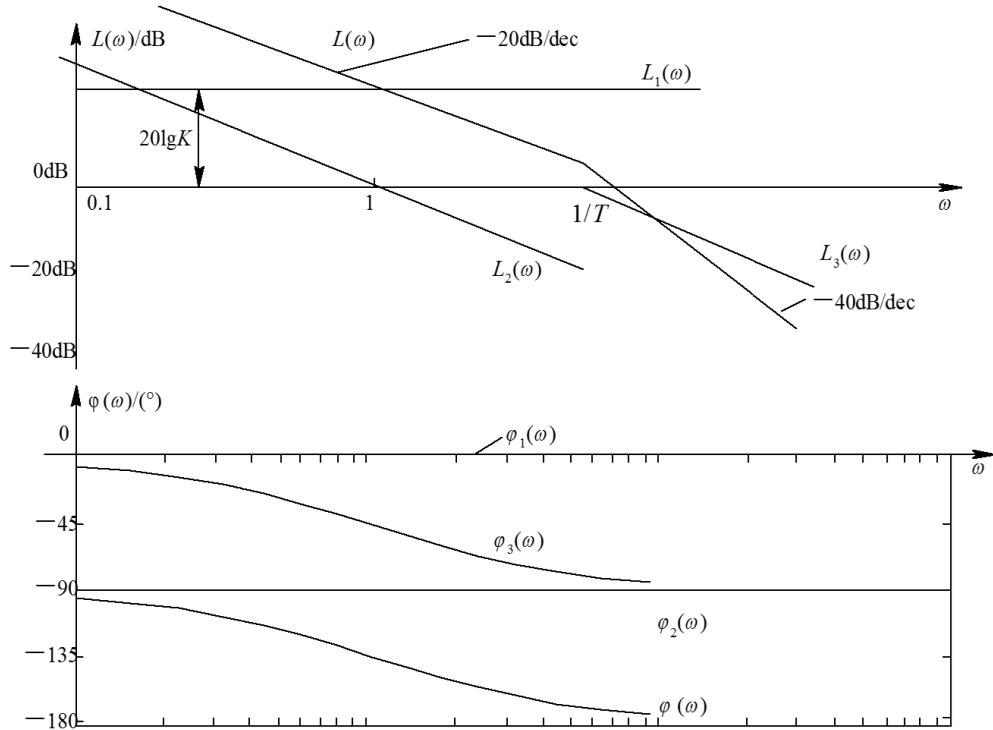


图 5-29 例 5-6 的伯德图

$G(s) = \frac{1}{1+2\xi Ts + T^2 s^2}$, 在交接频率处斜率就要改变-40dB/dec, 等等。

综上所述, 可以将绘制对数幅频特性的步骤归纳如下:

1. 将开环频率特性分解, 写成典型环节相乘的形式;
2. 求出各典型环节的交接频率, 将其从小到大排列为 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ 并标注在 ω 轴上;
3. 绘制低频渐近线 (ω_1 左边的部分), 这是一条斜率为 -20ν dB/dec 的直线, 它或它的延长线应通过 $(1, 20 \lg K)$ 点;
4. 随着 ω 的增加, 每遇到一个典型环节的交接频率, 就按上述方法改变一次斜率;
5. 必要时可利用渐近线和精确曲线的误差表, 对交接频率附近的曲线进行修正, 以求得更精确的曲线。

对数相频特性可以由各个典型环节的相频特性相加而得, 也可以利用相频特性函数 $\phi(\omega)$ 直接计算。

例 5-7 已知系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)}$$

试绘制系统的伯德图解将开环传递函数写成如下典型环节乘积形式:

$$G(s) = \frac{7.5 \left(1 + \frac{s}{3}\right)}{s \left(1 + \frac{s}{2}\right) \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 s^2 + 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} s + 1\right]}$$

可见,此系统由一个比例环节、一个积分环节、一个惯性环节、一个一阶微分环节和一个二阶振荡环节组成,且 $\omega_1 = 1.414$, $\omega_2 = 2$, $\omega_3 = 3$ 。 $20 \lg K = 20 \lg 7.5 = 17.5$ 。阻尼比 $\xi = 0.354$ 。

在确定了各个环节的交接频率和 $20 \lg K$ 的值以后,可按下列步骤绘制系统的伯德图:

1. 通过点 $(1, 17.5)$ 画一条斜率为 -20dB/dec 的直线,它就是低频段的渐近线;
2. 在 $\omega_1 = 1.414$ 处,将渐近线的斜率从 -20dB/dec 改为 -60dB/dec ,这是考虑振荡环节的作用;
3. 由于一阶惯性环节的影响,从 $\omega_2 = 2$ 起,渐近线斜率应减少 20dB/dec ,即从原来的 -60dB/dec 变为 -80dB/dec ;
4. 在 $\omega_3 = 3$ 处,渐近线的斜率改变 20dB/dec ,形成斜率为 -60dB/dec 的线段,这是由于一阶微分环节的作用;
5. 根据相频特性 $\phi(\omega)$,求出若干点的相频特性曲线角度值,如表 5-6 所示,将各点光滑连接,可以绘制系统的相频特性。开环系统的伯德图如图 5-30 所示(虚线为渐近线)。

绘制程序如下:

```
bode([10 30], conv(conv([1 0], [1 2]), [1 1 2]))
```

ωT	0.1	0.13	0.2	0.25	0.33	0.5	1	2	3	4	5	8	10
$\varphi(\omega)/(^{\circ})$	-94	-95	-98	-100	-103	-111	-143	-236	-258	-264	-267	-269	-270

表 5-6 例 5-7 系统对数相频特性曲线角度值

• 5.3.3 最小相位系统

在以上几个例子中,系统传递函数的极点和零点都位于 s 平面的左半部,这种传递函数称为最小相位传递函数;否则,称为非最小相位传递函数。具有最小相位传递函数的系统,称为最小相位系统;而具有非最小相位传递函数的系统,则称为非最小相位系统。对于幅频特性相同的系统,最小相位系统的相位迟后是最小的,而非最小相位系统的相位迟后则必定大于前者。

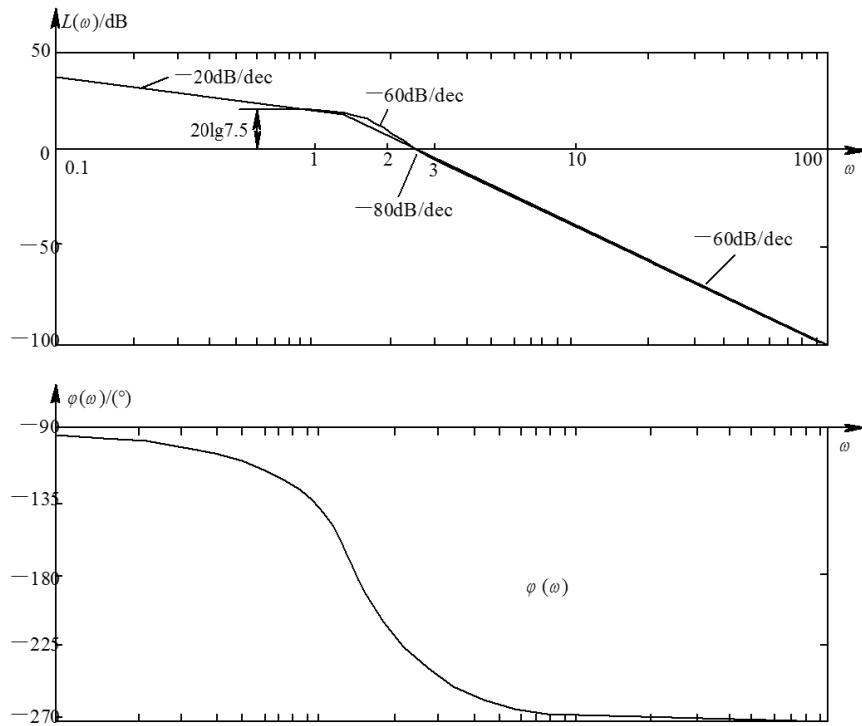


图 5-30 例 5-7 的伯德图

当单回路系统中只包含比例、积分、微分、惯性和振荡环节时，系统一定是最小相位系统。如果在系统中存在迟后环节或者不稳定的环节（包括不稳定的内环回路）时，系统就成为非最小相位系统。

对于最小相位系统，对数幅频特性与相频特性之间存在着唯一的对应关系。根据系统的对数幅频特性，可以唯一地确定相应的相频特性和传递函数，反之亦然。但是，对于非最小相位系统，就不存在上述的这种关系。实用的大多数系统为最小相位系统，为了简化工作量，对于最小相位系统的伯德图，可以只画幅频特性。

例如有一最小相位系统，其频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{1 + jT_1\omega}{1 + jT_2\omega} \quad (T_2 > T_1 > 0)$$

另有一非最小相位系统，其频率特性如下：

$$G(j\omega) = \frac{1 - jT_1\omega}{1 + jT_2\omega} \quad (T_2 > T_1 > 0)$$

从图 5-31 不难看出，这两个系统的对数幅频特性是完全相同的，而相频特性却根本不同。前一系统的相角 $\phi_1(\omega)$ 变化范围很小，而后一系统的相角 $\phi_2(\omega)$ 随着角频率 ω 的增加却从 0° 变到趋于 -180° 。绘制程序如下：

```
bode([1 1], [100 1])
hold on
```

```
bode([-1 1], [100 1])
```

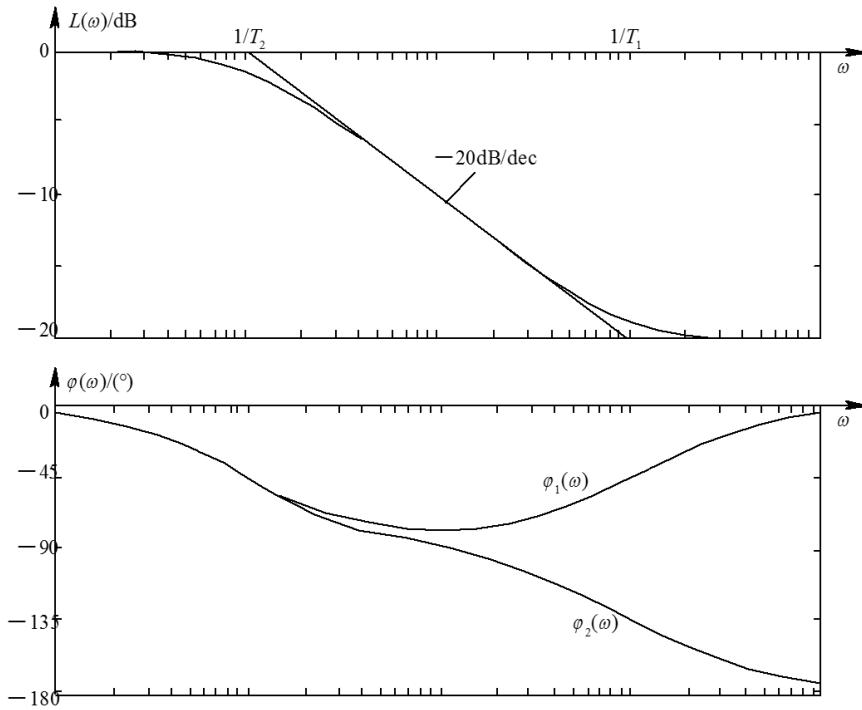


图 5-31 最小相位系统和非最小相位系统的伯德图

例 5-8 绘制开环传递函数为

$$G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{Ts + 1}$$

的伯德图。

解系统的幅频特性和相频特性分别为

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}, \quad \phi(\omega) = -\tau\omega - \arctan \omega T$$

可见, 此系统的幅频特性与惯性环节相同, 而其相频特性却比惯性环节多了一项 $-\tau\omega$ 。显然, 它的迟后相角增加很快。开环系统的伯德图如图 5-32 所示。

5.4 频域稳定性判据

- 5.4.1 映射定理

设有一复变函数为

$$F(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad (5.38)$$

s 为复变量, 以 s 复平面上的 $s = \sigma + j\omega$ 表示。 $F(s)$ 为复变函数, 记 $F(s) = U + jV$ 。

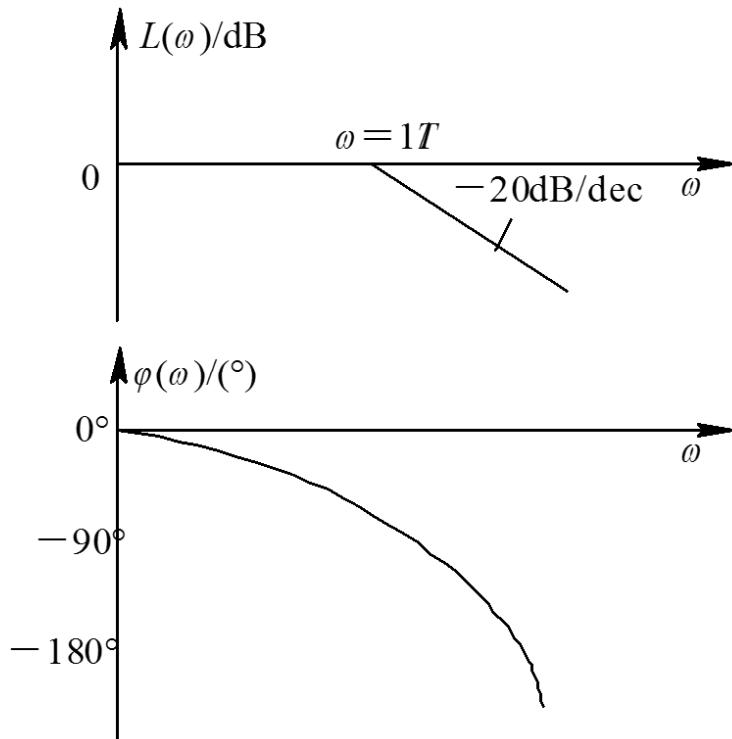


图 5-32 例 5-8 的伯德图

设对于 s 平面上除了有限奇点之外的任一点 s , 复变函数 $F(s)$ 为解析函数, 那么, 对于 s 平面上的每一解析点, 在 $F(s)$ 平面上必定有一个对应的映射点。因此, 如果在 s 平面上画一条封闭曲线, 并使其不通过 $F(s)$ 的任一奇点, 则在 $F(s)$ 平面上必有一条对应的映射曲线, 如图 5-33 所示。若在 s 平面上的封闭曲线是沿着顺时针方向运动的, 则在 $F(s)$ 平面上的映射曲线的运动方向可能是顺时针的, 也可能逆时针的, 这取决于 $F(s)$ 函数的特性。我们感兴趣的不是映射曲线的形状, 而是它包围坐标原点的次数和运动方向, 因为这两者与系统的稳定性密切相关。

根据式 (5.38), 复变函数 $F(s)$ 的相角可表示为

$$\angle F(s) = \sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s - p_j) \quad (5.39)$$

假定在 s 平面上的封闭曲线包围了 $F(s)$ 的一个零点 z_1 , 而其他零极点都位于封闭曲线之外, 则当 s 沿着 s 平面上的封闭曲线顺时针方向移动一周时, 向量 $(s - z_1)$ 的相角变化 -2π 弧度, 而其他各相量的相角变化为零。这意味着在 $F(s)$ 平面上的映射曲线沿顺时针方向围绕着原点旋转一周, 也就是向量 $F(s)$ 的相角变化了 -2π 弧度, 如图 5-34 所示。若 s 平面上的封闭曲线包围着 $F(s)$ 的 Z 个零点, 则在 $F(s)$ 平面上的映射曲线将按顺时针方向围绕着坐标原点旋转 Z 周。

用类似分析方法可以推论, 若 s 平面上的封闭曲线包围了 $F(s)$ 的 P 个极点, 则当 s 沿着 s 平面上的封闭曲线顺时针移动一周时, 在 $F(s)$ 平面上的映射曲线将按逆时针方

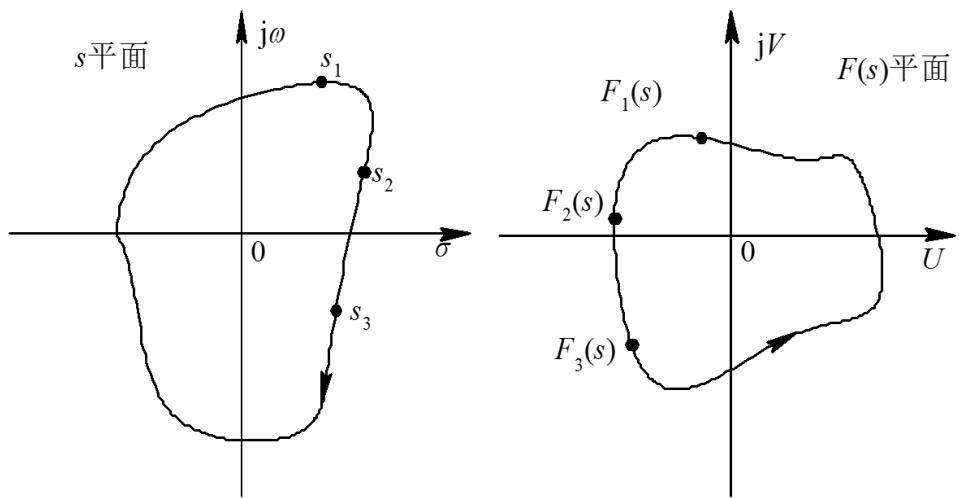


图 5-33 s 平面与 $F(s)$ 平面的映射关系

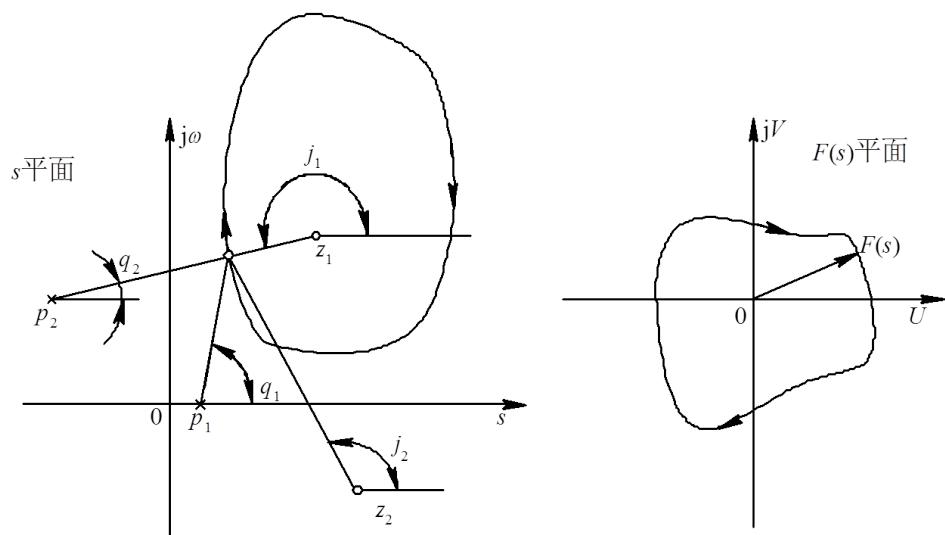


图 5-34 封闭曲线包围 z_1 时的映射情况

向围绕着原点旋转 P 周。

综上所述, 映射定理可以归纳如下:

映射定理设 s 平面上的封闭曲线包围了复变函数 $F(s)$ 的 P 个极点和 Z 个零点, 并且此曲线不经过 $F(s)$ 的任一零点和极点, 则当复变量 s 沿封闭曲线顺时针方向移动时, 在 $F(s)$ 平面上的映射曲线按逆时针方向包围坐标原点 P-Z 周。

- 5.4.2 奈奎斯特稳定判据

设系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad (m \leq n)$$

此系统的特征方程为

$$\begin{aligned} 1 + G(s)H(s) &= F(s) \\ &= 1 + \frac{K(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \\ &= \frac{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n) + K(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \\ &= \frac{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \end{aligned}$$

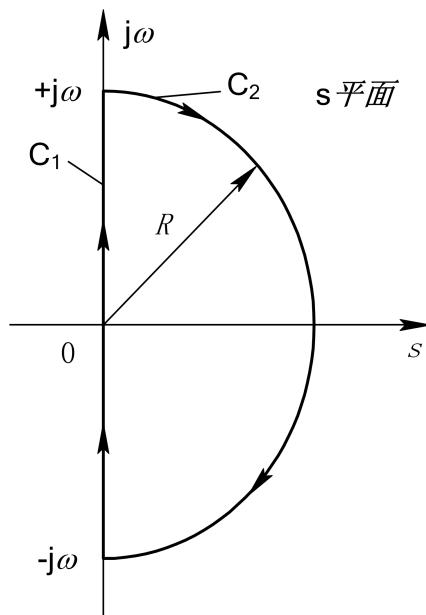


图 5-35 奈氏回线

由上式可见, 复变函数 $F(s)$ 的零点为系统特征方程的根 (闭环零点) s_1, s_2, \dots, s_n ,

而 $F(s)$ 的极点则为系统的开环极点 p_1, p_2, \dots, p_n 。闭环系统稳定的充分和必要条件是, 特征方程的根, 即 $F(s)$ 的零点, 都位于 s 平面的左半部。

为了判断闭环系统的稳定性, 需要检验 $F(s)$ 是否有位于 s 平面右半部的零点。为此可以选择一条包围整个 s 平面右半部的按顺时针方向运动的封闭曲线, 通常称为奈奎斯特回线, 简称奈氏回线, 如图 5-35 所示。

奈氏回线由两部分组成, 一部分是沿着虚轴由下向上移动的直线段 C_1 , 在此线段上 $s = j\omega$, ω 由 $-\infty$ 变到 $+\infty$; 另一部分是半径为无穷大的半圆 C_2 。如此定义的封闭曲线肯定包围了 $F(s)$ 的位于 s 平面右半部的所有零点和极点。

设复变函数 $F(s)$ 在 s 平面的右半部有 Z 个零点和 P 个极点。根据映射定理, 当 s 沿着 s 平面上的奈氏回线移动一周时, 在 $F(s)$ 平面上的映射曲线 $C_F = 1/G(s)H(s)$ 将按逆时针方向围绕坐标原点旋转 $N = P - Z$ 周。

由于闭环系统稳定的充要条件是, $F(s)$ 在 s 平面右半部无零点, 即 $Z = 0$ 。因此可得以下的稳定判据。

奈奎斯特稳定判据如果在 s 平面上, s 沿着奈氏回线顺时针方向移动一周时, 在 $F(s)$ 平面上的映射曲线 C_F 围绕坐标原点按逆时针方向旋转 $N = P$ 周, 则系统是稳定的。

根据系统闭环特征方程有

$$G(s)H(s) = F(s) - 1 \quad (5.41)$$

这意味着 $F(s)$ 的映射曲线 C_F 围绕原点运动的情况, 相当于 $G(s)H(s)$ 的封闭曲线 C_{GH} 围绕着 $(-1, j0)$ 点的运动情况, 如图 5-36 所示。

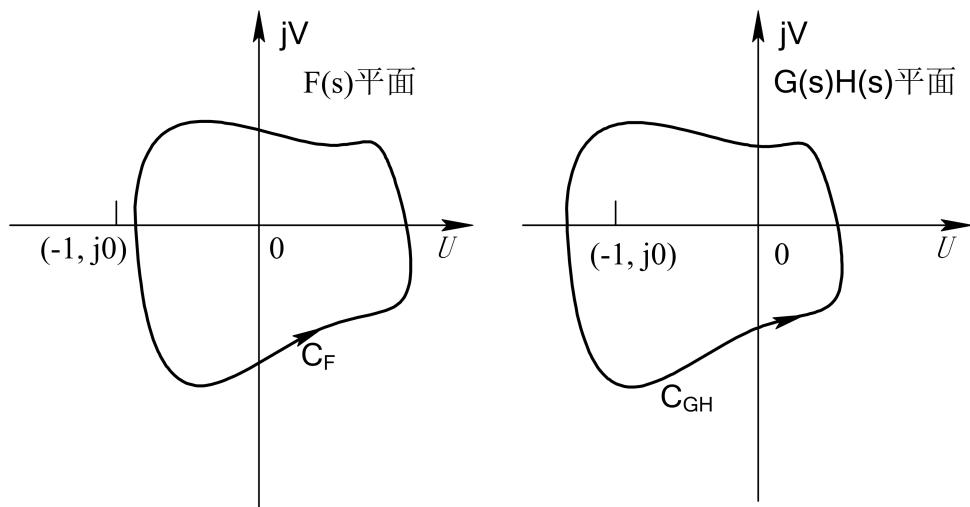


图 5-36 奈氏曲线映射在 $F(s)$ 平面和 $G(s)H(s)$ 平面上

绘制映射曲线 C_{GH} 的方法是:

令 $s = j\omega$ 代入 $G(s)H(s)$, 得到开环频率特性 $G(j\omega)H(j\omega)$, 按前面介绍的方法画出奈氏图, 再画出其对称于实轴的 ω 从 0 变到 $-\infty$ 的那部分曲线。至于映射曲线上对应于

$$s = \lim_{R \rightarrow \infty} R \cdot e^{j\theta}$$

的部分, 由于在实际物理系统中 $m > n$, 当 $n < m$ 时 $G(s)H(s)$ 趋近于零, $n > m$ 时 $G(s)H(s)$ 为实常数。因此, 只要绘制出 ω 从 $-\infty$ 变化到 $+\infty$ 的开环频率特性, 就构成了完整的映射曲线 C_{GH} 。

综上所述, 可将奈氏判据表述如下: 闭环控制系统稳定的充分和必要条件是, 当 ω 从 $-\infty$ 变化到 $+\infty$ 时, 系统的开环频率特性 $G(j\omega)H(j\omega)$ 按逆时针方向包围 $(-1, j0)$ 点 P 周, P 为位于 s 平面右半部的开环极点数目。

显然, 若开环系统稳定, 即位于 s 平面右半部的开环极点数 $P = 0$, 则闭环系统稳定的充分和必要条件是: 系统的开环频率特性 $G(j\omega)H(j\omega)$ 不包围 $(-1, j0)$ 点。

例 5-9 已知开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s + 0.5)(s + 1)(s + 2)}$$

试绘制 (1) $K=5$, (2) $K=10$ 时的奈氏图, 并判断系统的稳定性。

解: (1) 当 $K=5$ 时, 开环幅频特性和相频特性分别为

$$A(\omega) = \frac{5}{\sqrt{1 + 0.25\omega^2}\sqrt{1 + \omega^2}\sqrt{1 + 4\omega^2}}$$

$$\phi(\omega) = -\arctan 0.5\omega - \arctan \omega - \arctan 2\omega$$

从而有 $\omega = 0+$ 时, $A(\omega) = 5$, $\phi(\omega) = 0^\circ$; $\omega = +\infty$ 时, $A(\omega) = 0$, $\phi(\omega) = -270^\circ + \Delta$, 故奈氏图在第 I 象限趋向终点 $(0, j0)$ 。因为相角范围为 $0^\circ \sim 270^\circ$, 所以必有与负实轴的交点。当 $\omega = 1.8$ 时, $\phi(\omega) = -177^\circ$, $A(\omega) = 0.66$; 当 $\omega = 1.9$ 时, $\phi(\omega) = -181^\circ$, $A(\omega) = 0.59$ 。所以当 $\omega = \omega_1$, $1.8 < \omega_1 < 1.9$ 时, $\phi(\omega) = -180^\circ$, $A(\omega) = A_1$, $0.59 < A_1 < 0.66$, 因此与实轴的交点在 $(-1, j0)$ 点的右侧。奈氏图如图 5-37 所示。因为 s 平面右半部的开环极点数 $P=0$, 且奈氏曲线不包围 $(-1, j0)$ 点, 即 $N = 0$, 则 $Z = P - N = 0$, 所以系统稳定。

(2) 当 $K = 10$ 时, 奈氏图形状与 (1) 相同, 只是以坐标原点为中心, 向外“膨胀”而已。“膨胀”的倍数为 $10/5=2$, 故与实轴的交点的横坐标在 $(-0.59 \times 2, -0.66 \times 2)$ 之间, 即交点在 $(-1, j0)$ 点的左侧。因为 s 平面右半部的开环极点数 $P=0$, 且奈氏曲线顺时针包围 $(-1, j0)$ 点 2 次, 即 $N = -2$, 则 $Z = P - N = 2$, 所以系统不稳定, 有两个闭环极点在 s 平面右半部。

用 MATLAB 绘制的奈氏图如图 5-38 所示, 其程序如下:

```
nyquist([5], conv(conv([1 0.5], [1 1]), [1 2]))
```

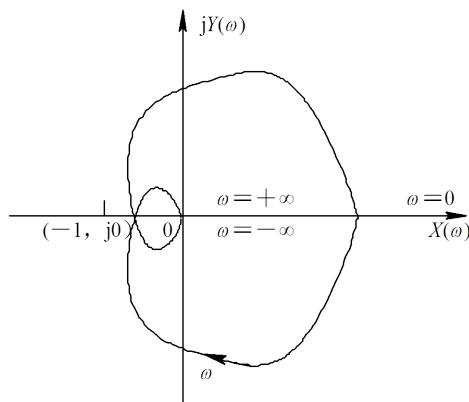


图 5-37 例 5-9 的奈氏图

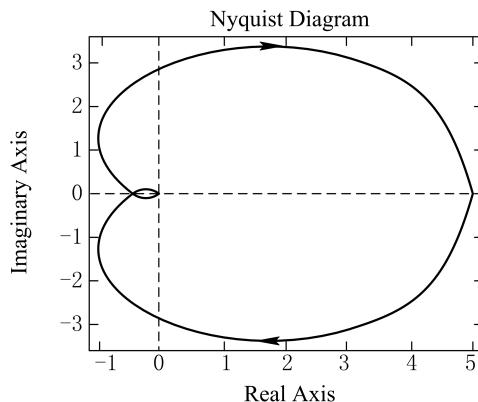


图 5-38 MATLAB 绘制例 5-9 的奈氏图

• 5.4.3 虚轴上有开环极点时的奈氏判据

虚轴上有开环极点的情况通常出现在系统中有串联积分环节的时候, 即在 s 平面的坐标原点有开环极点。这时不能直接应用图 5-35 所示的奈氏回线, 因为映射定理要求此回线不经过 $F(s)$ 的奇点。

为了在这种情况下应用奈氏判据, 可以选择图 5-39 所示的奈氏回线它与图 5-35 中奈氏回线的区别仅在于, 此回线经过以坐标原点为圆心, 以无穷小量 ϵ 为半径的, 在 s 平面右半部的小半圆, 绕过了开环极点所在的原点。当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 此小半圆的面积也趋近于零。因此, $F(s)$ 的位于 s 平面右半部的零点和极点均被此奈氏回线包围在内, 而将位于坐标原点处的开环极点划到了左半部。这样处理是为了适应奈氏判据的要求, 因为应用奈氏判据时必须首先明确位于 s 平面右半部和左半部的开环极点的数目。

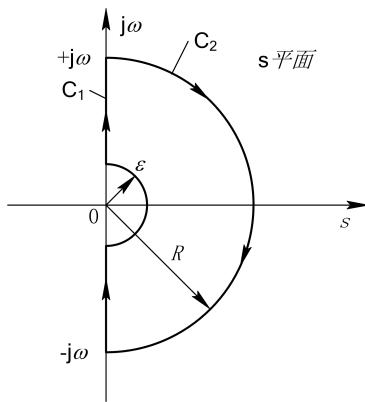


图 5-39 虚轴上有极点的奈氏回线

当 s 沿着上述小半圆移动时，有

$$s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon e^{j\theta}$$

当 ω 从 $0-$ 沿小半圆变到 $0+$ 时， s 按逆时针方向旋转了 180° ， $G(s)H(s)$ 在其平面上的映射为

$$\begin{aligned} G(s)H(s)|_{s=\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon e^{j\theta}} &= \frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdots (\tau_m s + 1)}{s^\nu (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_{n-\nu} s + 1)} \Big|_{s=\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon e^{j\theta}} \\ &= \frac{K}{\varepsilon^\nu} e^{-j\nu\theta} = \infty e^{-j\nu\theta} \end{aligned}$$

ν 为系统中串联的积分环节数目。

由以上分析可见，当 s 沿着小半圆从 $\omega = 0-$ 变化到 $\omega = 0+$ 时， θ 角从 -90° 经 0° 变化到 $+90^\circ$ ，这时在 $G(s)H(s)$ 平面上的映射曲线将沿着半径为无穷大的圆弧按顺时针方向从 $90\nu^\circ$ 经过 0° 转到 $-90\nu^\circ$ 。

例 5-10 绘制开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{10}{s^2(s+1)(s+2)}$$

的奈氏图，并判断系统的稳定性。

解：开环幅频特性和相频特性分别为

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{10}{\omega \sqrt{1 + \omega^2} \sqrt{\omega^2 + 4}} \\ \phi(\omega) &= -90^\circ - \arctan \omega - \arctan 0.5\omega \end{aligned}$$

从而有 $\omega = 0+$ 时, $A(\omega) = \infty, \phi(\omega) = -90^\circ - \Delta, \Delta$ 为正的很小量, 故起点在第一象限; $\omega = +\infty$ 时, $A(\omega) = 0, \phi(\omega) = -270^\circ + \Delta$, 故在第二象限趋向终点 $(0, j0)$ 。因为相角范围从 -90° 到 -270° , 所以必有与负实轴的交点。由 $\phi(\omega) = -180^\circ$ 得:

$$-90^\circ - \arctan \omega - \arctan 0.5\omega = -180^\circ$$

即:

$$\arctan 0.5\omega = 90^\circ - \arctan \omega$$

上式两边取正切, 得 $0.5\omega = 1/\omega$, 即 $\omega = 1.414$, 此时 $A(\omega) = 1.67$ 。因此奈氏图与实轴的交点为 $(1.67, j0)$ 。系统开环传递函数有一极点在 s 平面的原点处, 因此奈氏回线中半径为无穷小量 ϵ 的半圆弧对应的映射曲线是一个半径为无穷大的圆弧:

$$\omega : 0- \rightarrow 0+; \quad \theta : -90^\circ \rightarrow 0^\circ \rightarrow +90^\circ \quad \phi(\omega) : +90^\circ \rightarrow 0^\circ \rightarrow -90^\circ$$

奈氏图如图 5-40 所示。因为 s 平面右半部的开环极点数 $P = 0$, 且奈氏曲线顺时针包围 $(-1, j0)$ 点 2 次, 即 $N = -2$, 则 $Z = P - N = 2$, 所以系统不稳定, 有两个闭环极点在 s 平面右半部。用 MATLAB 绘制 $(-1, j0)$ 点附近的奈氏图如图 5-41 所示, 其程序如下:

```
nyquist([10], conv(conv([10], [11]), [12]));
```

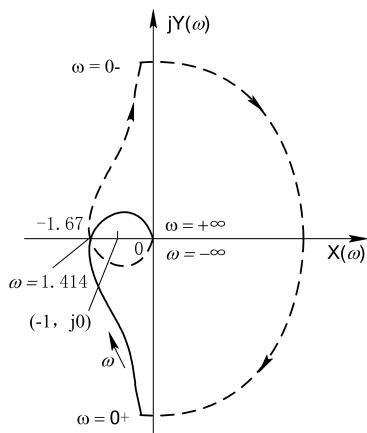


图 5-40 例 5-10 的奈氏图

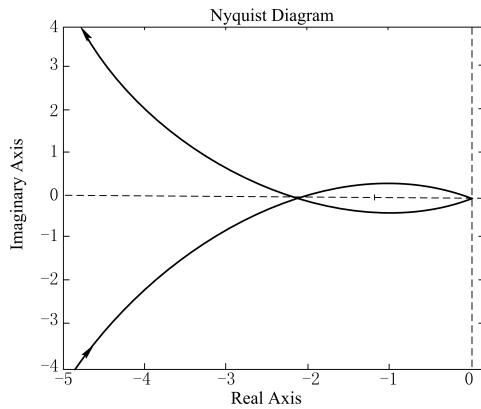


图 5-41 MATLAB 绘制例 5-10 的奈氏图

例 5-11 绘制开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{10}{s^2(s+1)(s+2)}$$

的奈氏图，并判断系统的稳定性。

解：开环幅频特性和相频特性分别为

$$A(\omega) = \frac{10}{\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{\omega^2+4}}, \phi(\omega) = -180^\circ - \arctan \omega - \arctan 0.5\omega$$

从而有 $\omega = 0+$ 时, $A(\omega) = \infty$, $\phi(\omega) = -180^\circ - \Delta$, Δ 为正的很小量, 故奈氏图起点在第 I 象限; $\omega = +\infty$ 时, $A(\omega) = 0$, $\phi(\omega) = -360^\circ + \Delta$, 故在第 IV 象限趋向终点 $(0, j0)$ 。

系统开环传递函数有 2 个极点在 s 平面的原点处, 因此奈氏回线中半径为无穷小量 ϵ 的半圆弧对应的映射曲线是一个半径为无穷大的圆弧:

$$\omega : 0_- \rightarrow 0_+ ; -90^\circ \rightarrow 0^\circ \rightarrow +90^\circ;$$

$$\phi(\omega) : +180^\circ \rightarrow 0^\circ \rightarrow -180^\circ$$

奈氏图如图 5-42 所示。因为 s 平面右半部的开环极点数 $P=0$, 且奈氏曲线顺时针包围 $(1, j0)$ 点 2 次, 即 $N=-2$, 则 $Z_P - N = 2$, 所以系统不稳定, 有两个闭环极点在 s 平面右半部。用 MATLAB 绘制 $(-1, j0)$ 点附近的奈氏图如图 5-43 所示, 其程序如下:

```
nyquist([10], conv(conv([100], [11]), [12]))
```

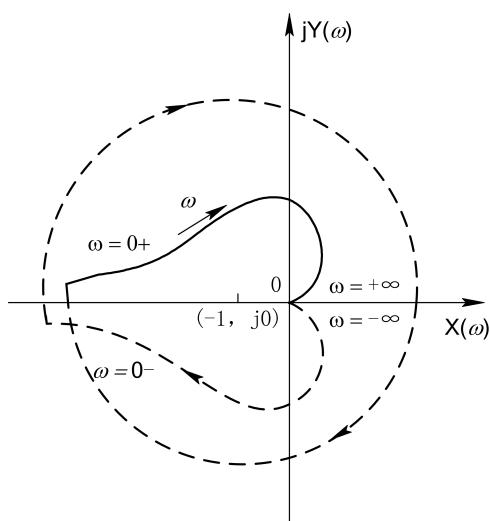


图 5-42 例 5-11 的奈氏图

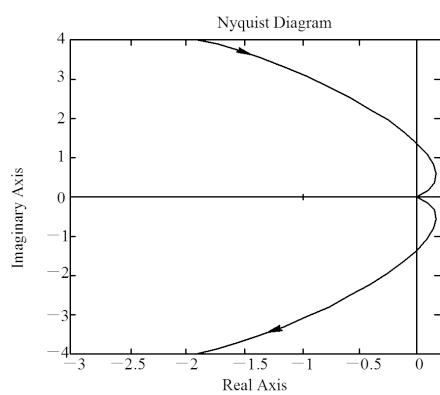


图 5-43 MATLAB 绘制例 5-11 的奈氏图

• 5.4.4 对数频率稳定判据

对数频率稳定判据实际上是奈氏判据的另一种形式，即利用开环系统的伯德图来判别系统的稳定性。系统开环频率特性的奈氏图（极坐标图）和伯德图之间有如下对应关系：

- 奈氏图上以原点为圆心的单位圆对应于伯德图对数幅频特性的 0 分贝线；
- 奈氏图上的负实轴对应于伯德图上相频特性的-180° 线。

伯德图上， $\phi(\omega)$ 从-180° 线以下增加到-180° 线以上，称为 $\phi(\omega)$ 对-180° 线的正穿越；反之，称为负穿越。

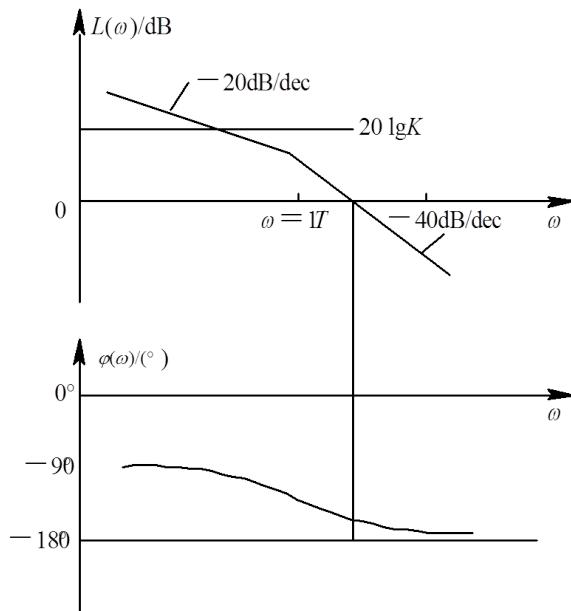


图 5-44 例 5-12 的伯德图

对数频率稳定判据可表述如下：闭环系统稳定的充分必要条件是，当 ω 由 0 变到 ∞ 时，在开环对数幅频特性 $L(\omega) \geq 0$ 的频段内，相频特性 $\phi(\omega)$ 穿越-180° 线的次数（正穿越与负穿越次数之差）为 $P/2$ 。 P 为 s 平面右半部开环极点数目。

注意，奈氏判据中， s 沿着奈氏回线顺时针方向移动一周，故 ω 由 ∞ 变到 ∞ ，所以伯德图中 ω 由 0 变到 ∞ 时，穿越次数为 $P/2$ ，而不是 P 。

对于开环稳定的系统，此时 $P=0$ ，若在 $L(\omega) \geq 0$ 的频段内，相频特性 $\phi(\omega)$ 穿越-180° 线的次数（正穿越与负穿越之差）为 0 则闭环系统稳定；否则闭环系统不稳定。

例 5-12 系统开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(TS + 1)}$$

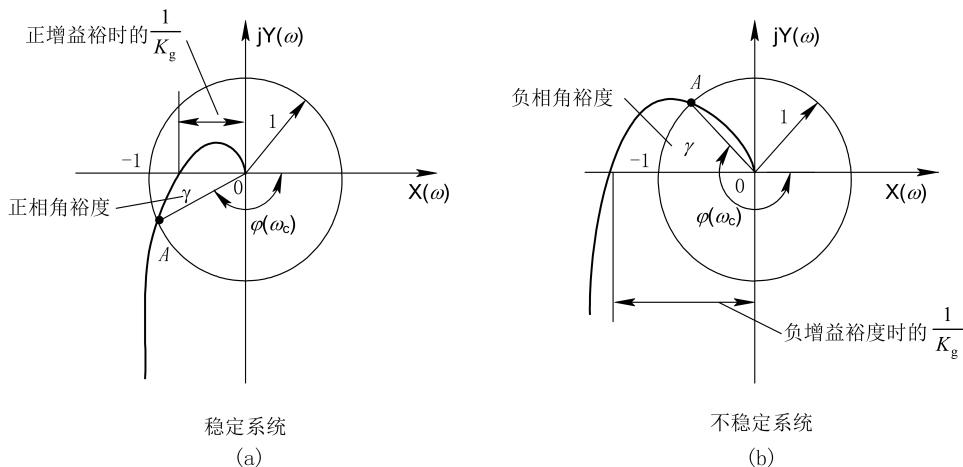
试用对数稳定判据判断其稳定性。

解：伯德图如图 5-44 所示。

此系统的开环传递函数在 s 平面右半部没有极点，即 $P=0$ ，而在 $L(\omega) \geq 0$ 的频段内，相频特性 $\phi(\omega)$ 不穿越 -180° 线，故闭环系统必然稳定。

5.5 稳定裕度

从奈氏判据可知，若系统的开环传递函数没有右半平面的极点，且闭环系统是稳定的，那么奈氏曲线 $G(j\omega)H(j\omega)$ 离 $(-1,j0)$ 点越远，则闭环系统的稳定程度越高；反之， $G(j\omega)H(j\omega)$ 离 $(-1,j0)$ 点越近，则闭环系统的稳定程度越低；如果 $G(j\omega)H(j\omega)$ 穿过 $(-1, j0)$ 点，则意味着闭环系统处于临界稳定状态。这便是通常所说的相对稳定性，它通过 $G(j\omega)H(j\omega)$ 对 $(-1,j0)$ 点的靠近程度来度量，其定量表示为相角裕度 γ 和增益裕度 K_g ，如图 5-45 所示。



./figs-ch05-2/12.png

1. 相角裕度 γ

在频率特性上对应于幅值 $A(\omega)$ 1 的角频率称为剪切频率，以 ω_c 表示，在剪切频率处，相频特性距 -180° 线的相位差 γ 叫做相角裕度。图 5-45(a) 表示的具有正相角裕度的系统不仅稳定，而且还有相当的稳定储备，它可以在 ω_c 的频率下，允许相角再增加(迟后) γ 度才达到临界稳定状态。因此相角裕度也叫相位稳定性储备。对于稳定的系统， ϕ 必在伯德图 -180° 线以上，这时称为正相角裕度，或者有正相角裕度，如图 5-45(c) 所示。对于不稳定系统， ϕ 必在 -180° 线以下，这时称为负相角裕度，如图 5-45(d) 所示。故有

$$\gamma = 180^\circ + \phi(\omega_c) \quad (5.42)$$

2. 增益裕度 K_g

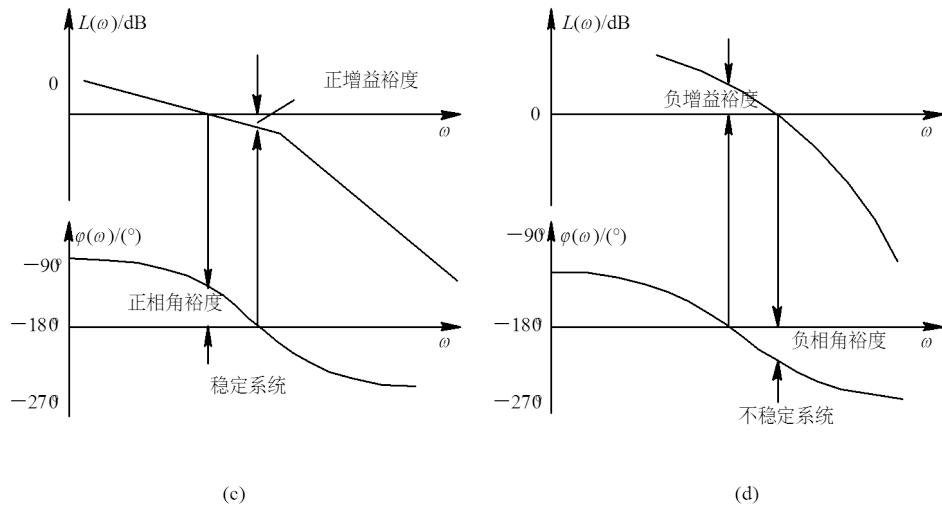


图 5-45 相角裕度和增益裕度

在相频特性等于 -180° 的频率 ω_g 处, 开环幅频特性 $A(\omega_g)$ 的倒数称为增益裕度, 记做 K_g , 即

$$K_g = \frac{1}{A(\omega_g)} \quad (5.43)$$

在伯德图上, 增益裕度改以分贝(dB)表示, $K_g = -20 \lg A(\omega_g)$ 。

此时, 对于稳定的系统, $L(\omega_g)$ 必在伯德图0dB线以下, 这时称为正增益裕度, 如图5-45(c)所示。对于不稳定系统, $L(\omega_g)$ 必在0dB线以上, 这时称为负增益裕度, 如图5-45(d)所示。以上表明, 在图5-45(c)中, 对数幅频特性还可上移 K_g , 即开环系统的增益增加 K_g 倍, 则闭环系统达到稳定的临界状态。

在奈氏图中, 奈氏曲线与负实轴的交点到原点的距离即为 $1/K_g$, 它代表在频率 ω_g 处开环频率特性的模。显然, 对于稳定系统, $1/K_g > 1$, 如图5-45(a)所示; 对于不稳定系统有 $1/K_g < 1$, 如图5-45(b)所示。

对于一个稳定的最小相位系统, 其相角裕度应为正值, 增益裕度应大于1。

严格地讲, 应当同时给出相角裕度和增益裕度, 才能确定系统的相对稳定性。但在粗略估计系统的暂态响应指标时, 有时主要对相角裕度提出要求。

保持适当的稳定裕度, 可以预防系统中元件性能变化可能带来的不利影响。为使系统有满意的稳定储备, 以及得到较满意的暂态响应, 在工程实践中, 一般希望 γ 为 $45^\circ \sim 60^\circ$, $K_g \geq 10dB$, 即 $K - g \geq 3$ 。

例 5-13 单位反馈系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_1}{s(s+1)(s+5)}$$

分别求取 $K_1 = 10$ $K_1 = 100$ 时的相角裕度和增益裕度。

解：相角裕度可通过对数幅频特性用图解法求出。 $K_1 = 10$ 时，

$$G(s) = \frac{K_1}{5s(1+s)(1+s/5)}$$

$\omega_1 = 1, \omega_2 = 5.20 \lg K = 20, \lg 2 = 6dB$ 。画出对数幅频特性曲线，如图 5-46 所示。

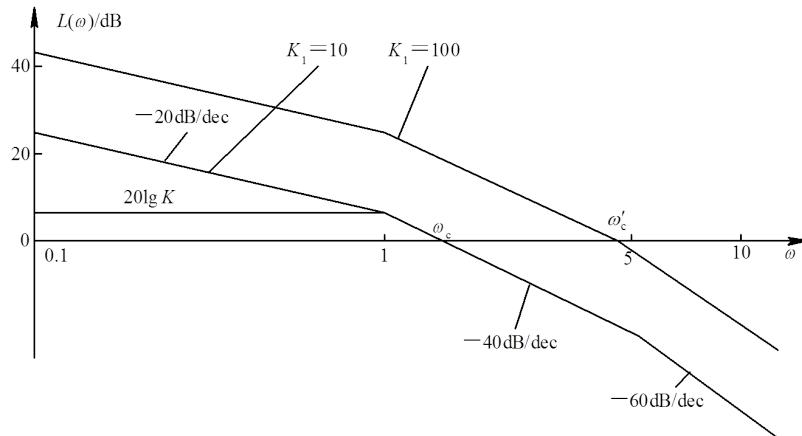


图 5-46 例 5-13 的伯德图 (幅频特性)

由图可知：

$$40 \lg \frac{\omega_c}{\omega_1} = 20 \lg K = 20 \lg 2$$

所以剪切频率 $\omega_c = \sqrt{2} = 1.414$ 。相角裕度为

$$\gamma = 180^\circ + \phi(\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \omega_c - \arctan \frac{\omega_c}{5} = 19.5^\circ$$

当 K_1 从 10 变到 100 时，幅频特性上移 $20 \lg(100/10) = 20dB$ ，如图 5-46 中虚线所示。

$$40 \lg \frac{\omega'_c}{\omega_1} = 20 \lg K' = 20 \lg 20$$

所以 $K_1 = 100$ 时对应的剪切频率为 $\omega'_c = \sqrt{20} = 4.472$ 。

相角裕度为

$$\gamma = 180^\circ + \phi(\omega'_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \omega'_c - \arctan \frac{\omega'_c}{5} = -29.2^\circ$$

欲求增益裕度，则须先求出 ω_g 。

这里给出 MATLAB 计算的值, 如图 5-47 所示, 其程序如下:

```
sys=tf([100], conv(conv([10],[11]), [15]));
margin(sys);
figure;
sys=tf([10], conv(conv([10], [11]),[15]));
margin(sys);
```

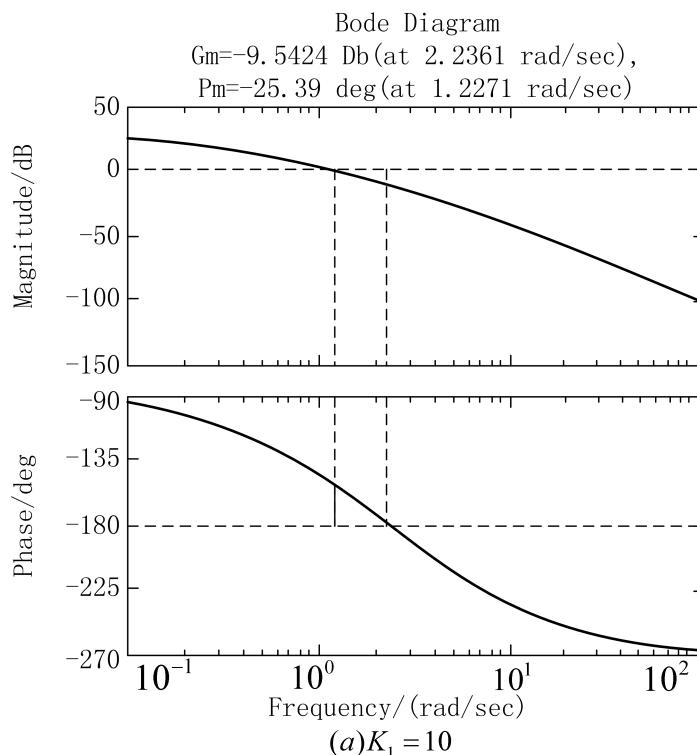


图 5-47 MATLAB 绘制的例 5-13 的伯德图

5.6 闭环系统的频域性能指标

- 5.6.1 由开环频率特性估计闭环频率特性

对于图 5-48 所示的系统, 其开环频率特性为 $G(j\omega)H(j\omega)$, 而闭环频率特性则为

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{C(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)}$$

因此, 已知开环频率特性, 就可以求出系统的闭环频率特性, 也可以绘出闭环频率特性曲线。这里介绍的是已知开环频率特性, 定性地估计闭环频率特性。

设系统为单位反馈, 即 $H(j\omega) = 1$, 则

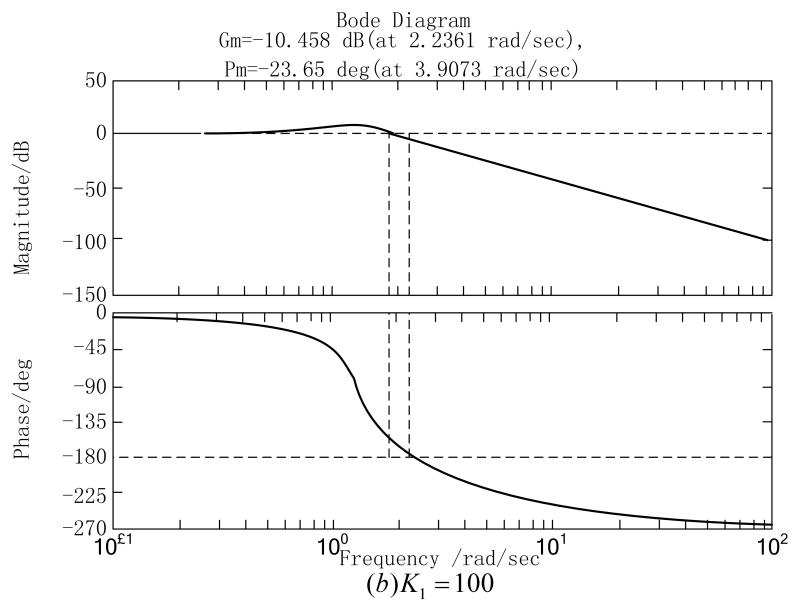


图 5-47 MATLAB 绘制的例 5-13 的伯德图

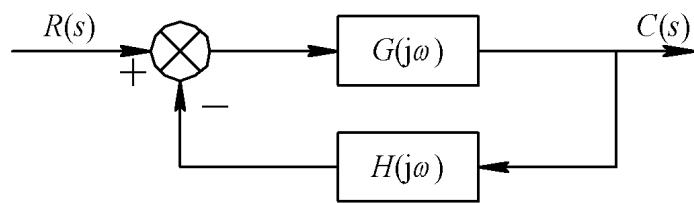


图 5-48 闭环系统

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)}$$

一般实际系统的开环频率特性具有低通滤波的性质。所以低频时 $|G(j\omega)| >> 1$, 则

$$\left| \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} \right| = \left| \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} \right| \approx 1$$

高频时 $|G(j\omega)| << 1$, 则

$$\left| \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} \right| = \left| \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} \right| \approx G(j\omega)$$

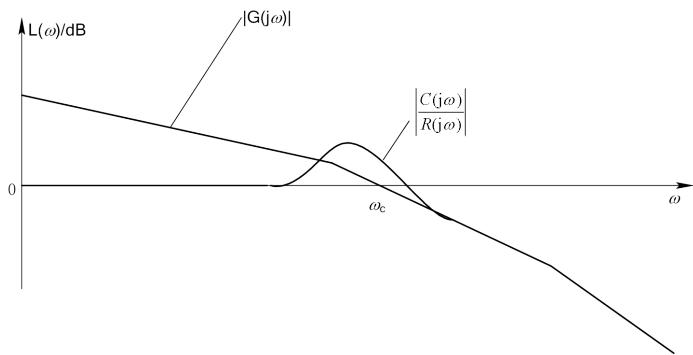


图 5-49 闭环幅频特性

例 5-13 中取 $K_1 = 10$, 则单位反馈系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+5)}$$

而闭环传递函数为

$$G_c(s) = \frac{10}{s^3 + 6s^2 + 5s + 10}$$

用 MATLAB 绘制其闭环频率特性的伯德图如图 5-50 所示, 其程序如下:

```
g1=tf([10], conv(conv([10],[11]),[15]));
g2=tf([1],[1]);
sys=feedback(g1, g2); margin(sys);
```

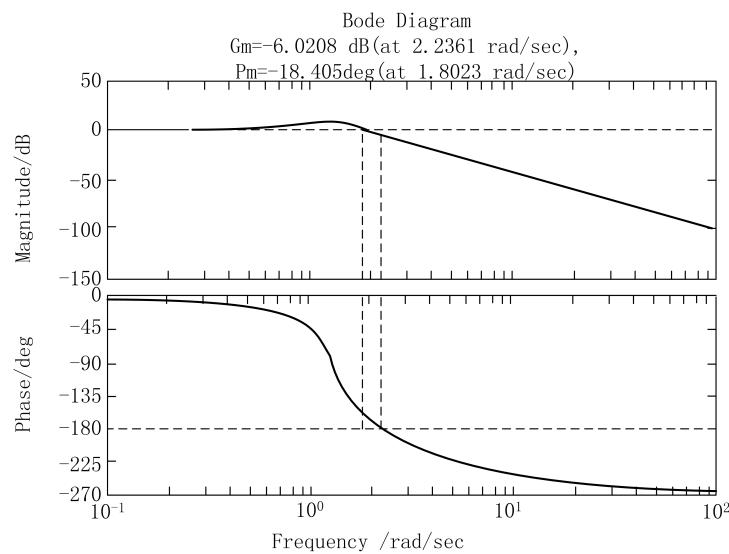


图 5-50 MATLAB 绘制的闭环频率特性伯德图

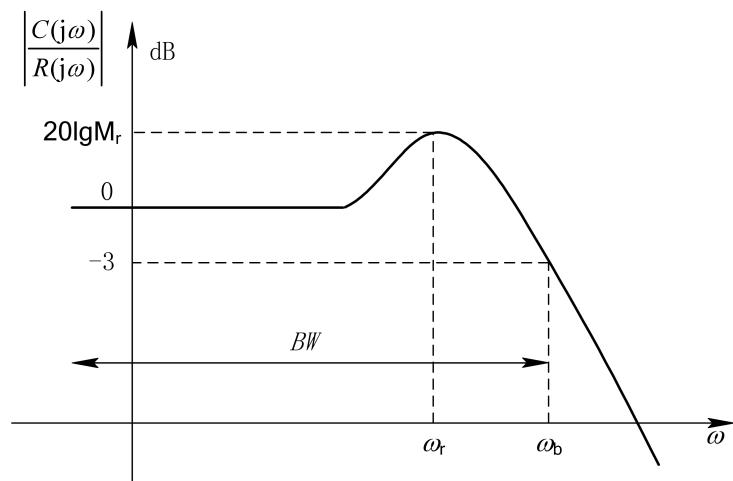


图 5-51 闭环系统频域性能指标

- 5.6.2 频域性能指标

截止频率(带宽频率) ω_b 是指对数幅频特性的幅值下降到 -3dB 时对应的频率。

带宽 BW 是指幅值不低于 $-3\text{dB}(20\lg(\sqrt{2}/2) \approx -3)$ 对应的频率范围, 也即 $0 \sim \omega_b$ 的频率范围。带宽反映了系统对噪声的滤波特性, 同时也反映了系统的响应速度。带宽愈大, 暂态响应速度愈快。反之, 带宽愈小, 只有较低频率的信号才易通过, 则时域响应往往比较缓慢。

谐振频率 ω_r 是指产生谐振峰值对应的频率, 它在一定程度上反映了系统暂态响应的速度。 ω_r 愈大, 则暂态响应愈快。对于弱阻尼系统, ω_r 与 ω_b 的值很接近。

谐振峰值 M_r 是指闭环幅频特性的最大值。它反映了系统的相对稳定性。一般而言, M_r 值愈大, 则系统阶跃响应的超调量也愈大。通常希望系统的谐振峰值在 $1.1 \sim 1.4$ 之间, 相当于二阶系统的 ξ 为 $0.4 < \xi < 0.7$ 。

对于二阶系统,

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

其幅频特性为

$$|G(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2}}$$

由 $\frac{d|G(j\omega)|}{d\omega} = 0$ 得谐振频率 ω_r 为

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (0 \leq \xi \leq 0.707) \quad (5.44)$$

则谐振峰值 M_r 为

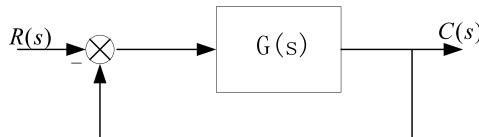
$$M_r = |G(j\omega)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (0 \leq \xi \leq 0.707) \quad (5.45)$$

由 $G(j\omega) = \sqrt{2}/2$ 得截止频率(带宽频率) ω_b 为

$$\omega_b = \omega_n \sqrt{\sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + 2} + (1 - 2\xi^2)} \quad (0 \leq \xi \leq 0.707) \quad (5.46)$$

- 5.6.3 闭环频率特性与时域性能指标

闭环频率特性主要性能指标



某闭环系统

前面讲的都是闭环控制系统的开环频率特性曲线

$$\Phi(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} = \frac{A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}}{1 + A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}} = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

闭环系统的幅频特性与相频特性为

$$M(\omega) = |\Phi(j\omega)| \quad \alpha(\omega) = \angle\Phi(j\omega)$$

闭环系统对数幅频特性为

$$20 \lg M(\omega) = 20 \lg |\Phi(j\omega)|$$

开环幅频特性

$$G(j\omega) = \frac{K(\tau_1 j\omega + 1)(\tau_2 j\omega + 1) \cdots (\tau_m j\omega + 1)}{(j\omega)^\nu (T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1) \cdots (T_{n-\nu} j\omega + 1)}$$

** 闭环幅频特性的零频值 $M(0)$ **

对单位反馈系统, 若系统为无静差系统, 在常值信号作用下, 稳态时输出等于输入, 有:

$$M(0) = \left| \frac{C(j0)}{R(j0)} \right| = 1 \quad \Phi(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)}$$

若系统为有差系统, 在常值信号作用下, 稳态时输出不等于输入, 有:

$$M(0) = \left| \frac{C(j0)}{R(j0)} \right| = \frac{K}{1 + K} < 1$$

通过零频值 $M(0)$ 是否为 1, 可判断系统是否为无静差系统。

$M(0)$ 越接近 1, 则有差系统的稳态误差越小。

- 按给定精度复现输入信号的频宽 ω_M

闭环系统的幅频特性表示稳态时输出输入的幅值比。按规定的允许误差给定 Δ 值，在 $\omega < \omega_M$ 频率范围内有

$$|M(\omega) - M(0)| \leq \Delta$$

ω_M 为按给定精度复现输入信号的频宽。

$$0 \leq \omega \leq \omega_M$$

- 带宽频率 ω_b

闭环幅频特性 $M(\omega)$ 上，对应幅值等于 $0.707M(0)$ 的频率 ω_b 称为系统的带宽频率。

$$0 \leq \omega \leq \omega_b$$

ω_b 大，表明系统能通过的信号频率很宽，反应速度快； ω_b 小，表明系统只能通过低频信号，反应速度慢，但抑制输入端高频噪声能力强。

ω_b 的确定要综合地考虑跟踪输入信号和抑制噪声的能力。

- 谐振峰值 M_r 和峰值频率 ω_r

谐振峰值 M_r 表征了系统的相对稳定性

M_r 越大，则系统的稳定性越差

$1.0 \leq M_r \leq 1.4(0 \sim 3dB)$ 时，相当于有效阻尼比在 $(0.4 \sim 0.7)$ ，系统可以获得满意的瞬态响应特性。

$M_r > 1.5$ 时，阶跃瞬态响应将出现较大的超调。

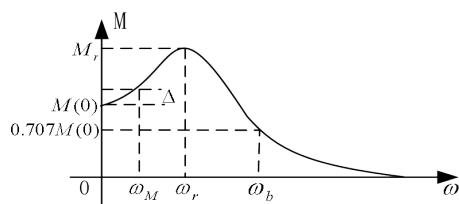


图 5-52 闭环频率特性曲线

一阶系统和二阶系统频域指标与时域指标

- 一阶系统

闭环系统为惯性环节的频率特性为 $\Phi(j\omega) = \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{1}{Tj\omega+1}$

闭环系统幅频特性、相频特性为

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} \quad \alpha(\omega) = -\arctan T\omega$$

闭环频域指标为

$$M(0) = 1 \quad M_r = 1 \quad \omega_r = 0 \quad \omega_b = \frac{1}{T}$$

阶跃响应时域指标为

$$t_s = 3T = \frac{3}{\omega_b} (\Delta = 0.05) \quad \sigma\% = 0 \quad t_r = 2.20T = 2.20/\omega_b$$

- 二阶系统

闭环系统为二阶闭环系统的闭环频率特性为

$$\Phi(j\omega) = \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{1}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}) + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}} = M(\omega)e^{j\alpha(\omega)}$$

闭环幅频特性、相频特性为

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + (2\xi\frac{\omega}{\omega_n})^2}} \quad \alpha(\omega) = -\arctan \frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$0 \leq \xi \leq 0.707$ 时，产生谐振

令 $\frac{dM}{d\omega} = 0$ 得谐振频率 $\omega_r = \omega_n\sqrt{1 - 2\xi^2}$

将 $\omega = \omega_r$ 带入 M 表达式，得谐振峰值 $M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$

$M = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时的频率值 ω_B 称截止频率。

时域指标与二阶系统参数 ξ, ω_n 有下面的关系：

$$\sigma\% = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\% \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\pi - \beta}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \quad t_s = \frac{3.5}{\xi\omega_n} (\Delta = 0.05, 0 < \xi < 0.9)$$

给出闭环频域指标 M_r, ω_r 和 ω_b 中的任何两个，可以通过解出 ξ, ω_n 计算时间域指标；同样，给出时间域指标中的任何两个，可以确定闭环频域指标。

$$M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \implies \xi = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 1/M_r^2}}{2}}$$

$$\sigma\% = \exp\left[-\pi\sqrt{\frac{M_r - \sqrt{M_r^2 - 1}}{M_r + \sqrt{M_r^2 - 1}}}\right] \times 100\%$$

- 高阶系统（开环、闭环）频域指标与时域指标

谐振峰值 M_r

$$M_r \approx \frac{1}{\sin \gamma}, \quad 35^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$$

$M_r \uparrow \rightarrow \sigma\% \uparrow$, 一般 $M_r = 1.1 \sim 1.4$ 对应 $\xi = 0.4 \sim 0.7$

超调量 $\sigma = 0.16 + 0.4(M_r - 1) \quad 1 \leq M_r \leq 1.8$

调节时间 $t_s = \frac{K\pi}{\omega_c}$

$$K = 2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2 \quad 1 \leq M_r \leq 1.8$$

- 5.6.4 开环对数幅频特性“三频段”概念

低频段

低频段取决于开环增益和开环积分环节的数目，通常指开环对数幅频特性在第一个转折频率以前的区段，低频段决定了系统的稳态精度。

中频段

中频段指开环幅相特性曲线在截止频率 ω_c 附近的区段。

高频段

高频段指开环幅相特性曲线在中频段以后的区段 $\omega > 10\omega_c$ 这部分特性是由开环传递函数小时间常数环节决定的。

在高频段 $|G(j\omega)| \ll 1$

由于高频段远离 ω_c ，且幅值很低，因此对动态特性影响不大。

由于噪声的频率较控制信号的频率高得多，
所以高频区段的幅值越低，抗干扰的能力越强。

5.7 频率特性的试验确定方法

要想用频率特性分析或设计系统，首先要求出系统的频率特性。频率特性可用以下方法求取：

- 1) 如果已知系统的微分方程，可将输入变量以正弦函数代入，求系统的输出变量的稳态解，输出变量的稳态解与输入正弦函数的复数比即为系统的频率特性。
- 2) 如果已知系统的传递函数，可将传递函数中的 s 代之以输入变量 $j\omega$ ，即得到系统的频率特性。
- 3) 可通过实验的手段来求出。

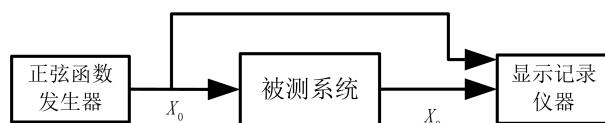


图 5-53 频率特性的实验求取

用实验法测试系统的频率特性，需要解决影响测试精度的主要因素：

- (1) 由于被测系统具有某些非线性因素或其他漂移等影响，尽管输入是正弦波信号，但输出可能含有直流分量及高次谐波；
- (2) 由于随机干扰，主要是噪声，使输出畸变。

相关分析法能从被测系统的输出信号中检出正弦波的一次谐波，同时抑制直流分量、高次谐波和噪声。

线性系统频率特性 $G(j\omega)$ 可表示为复数形式：

$$G(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)} \quad (5.47)$$

实频特性 $X(\omega)$ 、虚频特性 $Y(\omega)$ 与幅频特性 $A(\omega)$ 及相频特性 $\Phi(\omega)$ 之间有下列关系：

$$\left. \begin{array}{l} X(\omega) = A(\omega) \cos \phi(\omega) \\ Y(\omega) = A(\omega) \sin \phi(\omega) \\ A(\omega) = \sqrt{X^2(\omega) + Y^2(\omega)} \\ \phi(\omega) = \arctan[Y(\omega)/X(\omega)] \end{array} \right\} \quad (5.48)$$

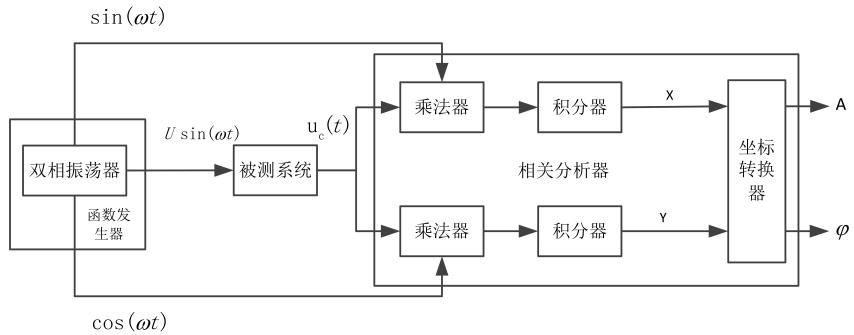


图 5-54 相关分析法测试频率特性原理示意图

在输入信号 $u_r(t) = U \sin \omega t$ 的作用下, 被测系统的输出信号为

$$\begin{aligned} u_c(t) &= A_0 + A \sin(\omega t + \phi) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \phi_n) + u(t) \\ &= A_0 + X \sin \omega t + Y \cos \omega t + \sum_{n=2}^{\infty} (X_n \sin n\omega t + Y_n \cos n\omega t) + u(t) \end{aligned} \quad (5.49)$$

式中,

A_0 ——输出信号中的直流分量;

$u(t)$ ——输出信号中的噪声分量;

$A \sin(\omega t + \phi)$ ——输出信号中的基波分量;

$A_n \sin(n\omega t + \phi)$ ——输出信号中的高次谐波分量。

若以幅值为一个单位的基准信号 $\sin \omega t$ 和 $\cos \omega t$ 分别与输出信号 $u_c(t)$ 相乘, 然后在基波的整倍数周期内积分并求平均值, 则可得到基波分量的实部和虚部, 而抑制掉其它分量, 此即相关滤波原理。

设输入信号正弦波的频率为 f , 周期为 T , 则 $\omega = 2\pi f / T$, 取整数倍数周期 NT 求相关值, 则有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{NT} \int_0^{NT} u_c(t) \sin \omega t dt &= \frac{1}{NT} \cdot \frac{1}{\omega} \int_0^{2N\pi} u_c(t) \sin \omega t d(\omega t) \\
&= \frac{1}{NT\omega} \left[\int_0^{2N\pi} A_0 \sin \omega t d(\omega t) + \int_0^{2N\pi} (X \sin \omega t + Y \cos \omega t) \sin \omega t d(\omega t) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} (X_n \sin n\omega t + Y_n \cos n\omega t) \sin \omega t d(\omega t) + \omega \int_0^{NT} u(t) \sin \omega t dt \right]
\end{aligned}$$

考虑到

$$\int_0^{2N\pi} \sin \omega t d(\omega t) = 0$$

$$\int_0^{2N\pi} \cos n\omega t \sin \omega t d(\omega t) = 0$$

$$\int_0^{2N\pi} \sin n\omega t \sin \omega t d(\omega t) = 0, \quad n \neq 1$$

并且从相关理论知, 一个信号与另一随机信号之间的相关值, 将随所取积分时间的增加而降低, 即有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT} \int_0^{NT} u_c(t) \sin \omega t dt = 0$$

故当 N 值取得较大时, 式 (5.50) 可以写作

$$\frac{1}{NT} \int_0^{NT} u_c(t) \sin \omega t dt = \frac{1}{NT\omega} \int_0^{2NT} X \sin^2 \omega t d(\omega t) = \frac{X}{2}$$

或者写成

$$\phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega) + \phi_3(\omega) = -90^\circ - \arctan T\omega$$

同理可求得

$$Y(\omega) = \frac{2}{NT} \int_0^{NT} u_c(t) \cos \omega t dt$$

因此, 计算相关值后, 除了可将测试时输出信号中夹杂的直流分量、高次谐波分量都滤掉, 噪声的影响也因 NT 取得足够大而忽略不计外, 还能根据式 (5.51)、(5.52) 很方便地求得被测系统频率特性的实部和虚部。为得到一定的测试精度, 通常取 N 5。由实验测出系统的频率特性后, 进而可以求出系统的传递函数, 下面举例说明。

例 5-14 图 5-54 实线是某系统用实验测出的频率特性伯德图, 试求系统的传递函数。

解由幅频特性低频段可见, 该系统为 0 型系统, 且 $K = 1$ 。用折线(见图中虚线)作为渐近线逼近幅频特性曲线, 其高频段为 $-40dB/dec$, 两个交接频率为 $\omega_1 = 1(rad/s), \omega_2 = 2.4(rad/s)$ 。由此可知, 该系统为二阶系统, 且

$$T_1 = \frac{1}{\omega_1} = 1s, T_2 = \frac{1}{\omega_2} = 0.417s$$

对于最小相位系统, 二阶系统的相频特性不会小于 -180° , 但该系统在高频段已小于 -180° , 且呈现不断下降的趋势, 故可断定该系统是非最小相位系统, 存在迟后环节, 系统的频率特性有如下形式:

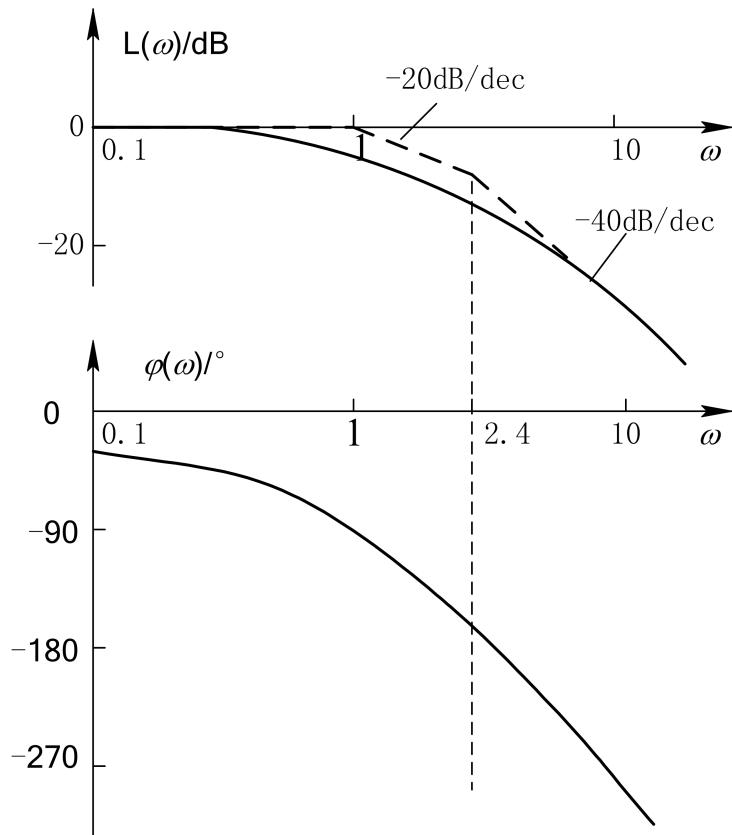


图 5-55 由实验测出的频率特性

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\tau\omega}}{(j\omega + 1)(0.417j\omega + 1)}$$

由图可见, $\phi(1) = 85^\circ$, 故

$$\phi(1) = -\tau_1 \cdot 1 \cdot 180^\circ/\pi - \arctan 1 - \arctan 0.417 = -85^\circ$$

解得 $\tau_1 = 0.303$

另由图可见, $\phi(2.4) = -155^\circ$, 故

$$\phi(2.4) = -\tau_2 \cdot 2.4 \cdot 180^\circ / \pi - \arctan 2.4 - \arctan 1 = -155^\circ$$

解得 $\tau_2 = 0.310$ 。

取 $\tau = (\tau_1 + \tau_2)/2 = 0.307$ 所以

$$G(j\omega) = \frac{e^{-0.307j\omega}}{(j\omega + 1)(0.417j\omega + 1)}$$

即传递函数为

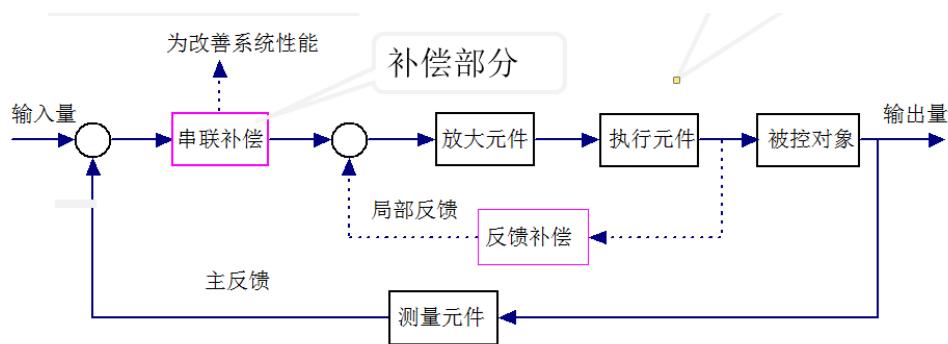
$$G(s) = \frac{e^{-0.307s}}{(s + 1)(0.417s + 1)}$$

第六章控制系统的补偿与综合

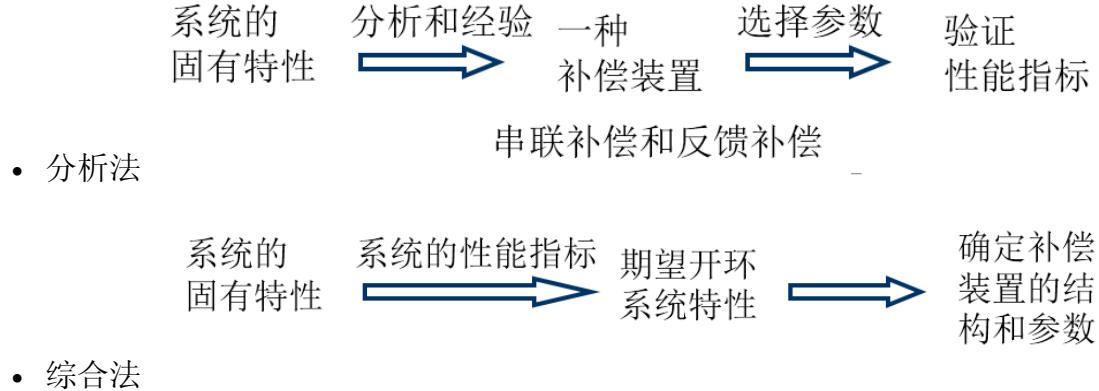
- ☛ 6.1 引言
- ☛ 6.2 频率响应法串联补偿（校正）
- ☛ 6.3 根轨迹法设计串联补偿（自学）
- ☛ 6.4 PID 控制（调节）器的设计
- ☛ 6.5 反馈补偿
- ☛ 6.1 引言

- 系统分析：控制系统结构和参数 \Rightarrow 控制系统性能指标
- 系统设计：控制系统性能指标 \Rightarrow 控制系统结构和参数
- 1、控制对象
 - 尽可能地建立控制对象准确的数学模型。
 - 最初设计阶段，可以对控制对象的数学模型进行适合的，合理的简化。
- 2、性能指标
 - 稳态误差指标位置误差系数 K_p 速度误差系数 K_v 加速度误差系数 K_a
 - 时域指标 t_r t_p t_s σ
 - 频域指标闭环频域指标： $M(o)$, M_r , ω_r , ω_b 开环频域指标： ω_c , γ , ω_g , K_g
- 3、系统的补偿调节、控制

控制系统的固有部分，其特性为已知



- 补偿：就是在系统中加入一些其参数可以根据需要而改变的机构或装置，使系统整个特性发生变化，从而满足给定的各项性能指标。
- 工程实践中常用的补偿方法：串联补偿、反馈补偿和复合补偿。
- 4、系统补偿装置的设计方法



6.2 频率响应法串联补偿（校正）

频率法对系统进行校正的基本思路(根轨迹增加开环零极点)是：通过所加校正装置，改变系统开环频率特性的形状，即要求校正后系统的开环频率特性具有如下特点：

- 低频段的增益以满足稳态精度的要求；
- 中频段的幅频特性的斜率为-20dB/dec，并具有较宽的频带，这一要求是为了系统具有满意的动态性能；
- 高频段要求幅值迅速衰减，以较少噪声的影响。

一般而言，当控制系统的开环增益增大到满足其静态性能所要求的数值时，系统有可能不稳定，或者即使能稳定，其动态性能一般也不会理想。在这种情况下，需在系统的前向通路中增加超前补偿装置，以实现在开环增益不变的前提下，系统的动态性能亦能满足设计的要求。

- 6.2.1 串联超前补偿

1、超前补偿装置

设该网络输入信号源的内阻为零，输出端的负载阻抗为无穷大，则超前补偿网络的传递函数为：

$$\begin{aligned} \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = G_c(s) &= \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{1/R_1+sC}} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1}{1+R_1Cs}} \\ &= \frac{R_2(1+R_1Cs)}{R_2 + R_1 + R_1R_2Cs} = \frac{R_2(1+R_1Cs)/(R_1 + R_2)}{R_2 + R_1 + R_1R_2Cs)/(R_1 + R_2)} \end{aligned}$$

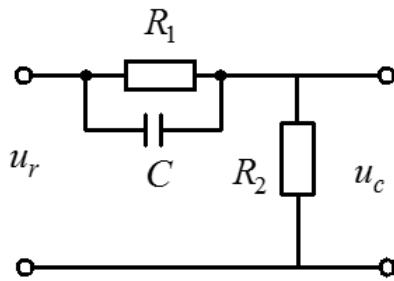


图6.1 RC超前补偿网络

超前补偿装置

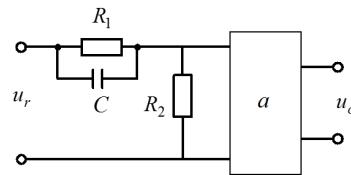


图 6.2 带有隔离放大器的无源超前校正网络

说明：（1）采用无源超前网络进行串联校正时，整个系统的开环增益要下降 α 倍。

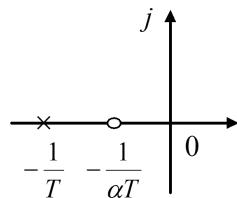
$$G'_c(s) = \frac{1}{a} \frac{1 + aTs}{1 + Ts}$$

- 时间常数: $T = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}$
- 分度系数: $a = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$
- $aT = R_1 C$

图 6.2 带有隔离放大器的无源超前校正网络

此需要提高放大器增益加以补偿。此时的传递函数: $G_c(s) = aG'_c(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts}$

(2) 超前网络的零极点分布（系统增加开环零极点影响系统性能）



$$G_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts}$$

由于 $a > 1$, 故超前网络的负实零点总是位于负实极点之右, 两者之间的距离由常数 a 决定。

可知改变 a 和 T (即电路的参数 R_1, R_2, C) 的数值, 超前网络的零极点可在 s 平面的负实轴任意移动。超前网络的零极点可在 s 平面的负实轴任意移动。

(3) $G_c(s)$ 的幅频和相频特性

$$G_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts}$$

$$20 \lg |G_C(\omega j)| = 20 \lg \sqrt{1 + (\alpha T \omega)^2} - 20 \lg \sqrt{1 + (T \omega)^2}$$

$$\varphi_c(\omega) = \arctan aT\omega - \arctan T\omega = \arctan \frac{(a-1)T\omega}{1 + aT^2\omega^2}$$

画出对数频率特性如图 6.3 所示。显然, 超前网络对频率在 $\frac{1}{aT}$ 至 $\frac{1}{T}$ 之间的输入信号有明显的微分作用, 在该频率范围内输出信号相角比输入信号相角超前, 超前网络的名称由此而得。

$$T_1 = \alpha T > T_2 = T$$

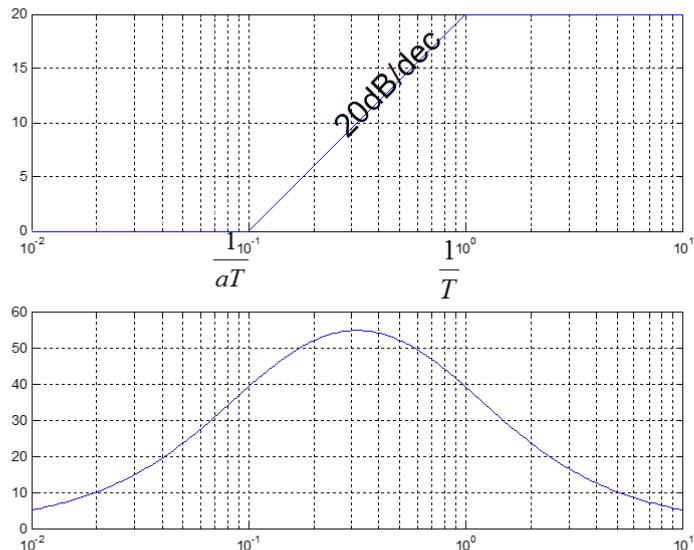
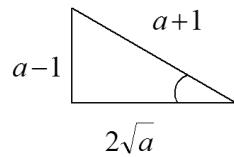


图6.3 超前补偿网络对数极坐标图

$$\phi_c(\omega) = \arctan aT\omega - \arctan T\omega = \arctan \frac{(a-1)T\omega}{1+a(T\omega)^2} \quad (6.2.4)$$

最大超前角频率: $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$, 求导并令其为零在最大超前角频率处 ω_m 具有最大超前角 ϕ_m

$$\phi_m = \arctan \frac{a-1}{2\sqrt{a}} = \arcsin \frac{a-1}{a+1}$$



$$a = \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$$

ϕ_m 正好处于频率 $\frac{1}{aT}$ 与 $\frac{1}{T}$ 的几何中心

$\frac{1}{aT}$ 与 $\frac{1}{T}$ 的几何中心为

$$\frac{1}{2}(\lg \frac{1}{aT} + \lg \frac{1}{T}) = \frac{1}{2} \lg \frac{1}{aT^2} = \frac{1}{2} \lg \omega_m^2 = \lg \omega_m$$

即几何中心为 ϕ_m

例 6-1 设一单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{100K}{S(0.04S+1)}$ 试设计一超前补偿装置, 使校正后系统的静态速度误差系数 $K_v = 100\text{sec}^{-1}$, 相位裕度 $\gamma \geq 45^\circ$, 幅值裕度 K_g 不小于 10dB。

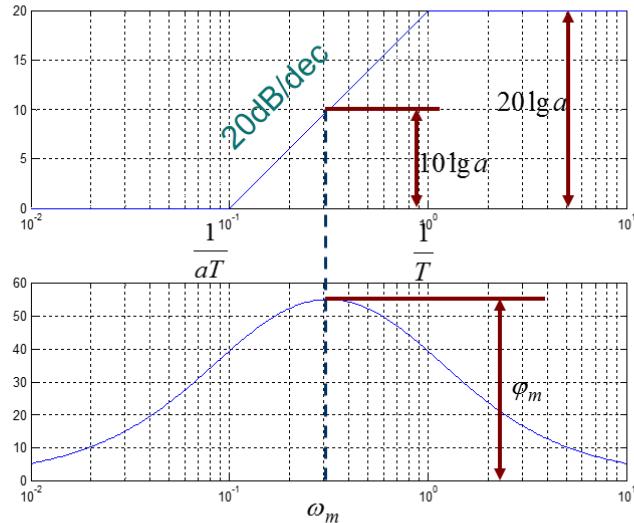
解: - 根据对静态速度误差系数的要求, 确定系统的开环增益 K。

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} S \frac{100K}{S(0.04S+1)} = 100K = 100, \quad K = 1$$

$$G(j\omega) = \frac{100}{j\omega(0.04j\omega+1)} = \frac{100}{\omega\sqrt{(0.04\omega)^2+1}} e^{(-90^\circ - \arctan 0.04\omega)j}$$

- 绘制未补偿系统的伯德图, 如图红线所示。由图可知未补偿系统的截止频率和相位裕度为

$$a = 10, T = 1$$



$$L_c(\omega_m) = 20 \lg \sqrt{1 + (aT\omega_m)^2} - 20 \lg \sqrt{1 + (T\omega_m)^2} = 20 \lg \sqrt{\frac{1 + (aT\omega_m)^2}{1 + (T\omega_m)^2}}$$

$$T^2 \omega_m^2 = \frac{1}{a}$$

$$L_c(\omega_m) = 20 \lg \sqrt{a} = 10 \lg a$$

$$\varphi_m = \arctg \frac{a-1}{2\sqrt{a}} = \arcsin \frac{a-1}{a+1} \quad a \uparrow \rightarrow \varphi_m \uparrow$$

但 a 不能取得太大(为了保证较高的信噪比), a 一般不超过20
这种超前校正网络的最大相位超前角一般不大于 65°

如果需要大于 65° 的相位超前角, 则要在两个超前网络相串联来实现, 并在所串联的两个网络之间加一隔离放大器, 以消除它们之间的负载效应。

2、串联超前补偿

用频率法对系统进行串联超前补偿的一般步骤可归纳为：

①根据稳态误差的要求，确定开环增益K。

②确定开环增益K后，画出未补偿系统的伯德图，

计算未补偿系统的相角裕度 γ'

③由给定的相位裕量值 γ

计算超前校正装置提供的相位超前量 φ_m

$$\varphi_m = \gamma - \gamma' + \varepsilon \leftarrow \text{补偿}$$

↑ ↑
给定的 校正前

ε 是用于补偿因超前补偿装置的引入，使系统截止频率增大而引起的相角滞后量。

ε 值通常是这样估计的：如果未补偿系统的开环对数幅频特性在截止频率处的斜率为-40dB/dec，一般取 $\varepsilon = 5^\circ \sim 10^\circ$ 如果为-60dB/dec则取 $\varepsilon = 15^\circ \sim 20^\circ$

④根据所确定的最大相位超前角 φ_m

$$\text{按 } a = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} \quad \text{算出 } a \text{ 的值。}$$

⑤计算补偿装置在 ω_m 处的幅值 $10\lg a$

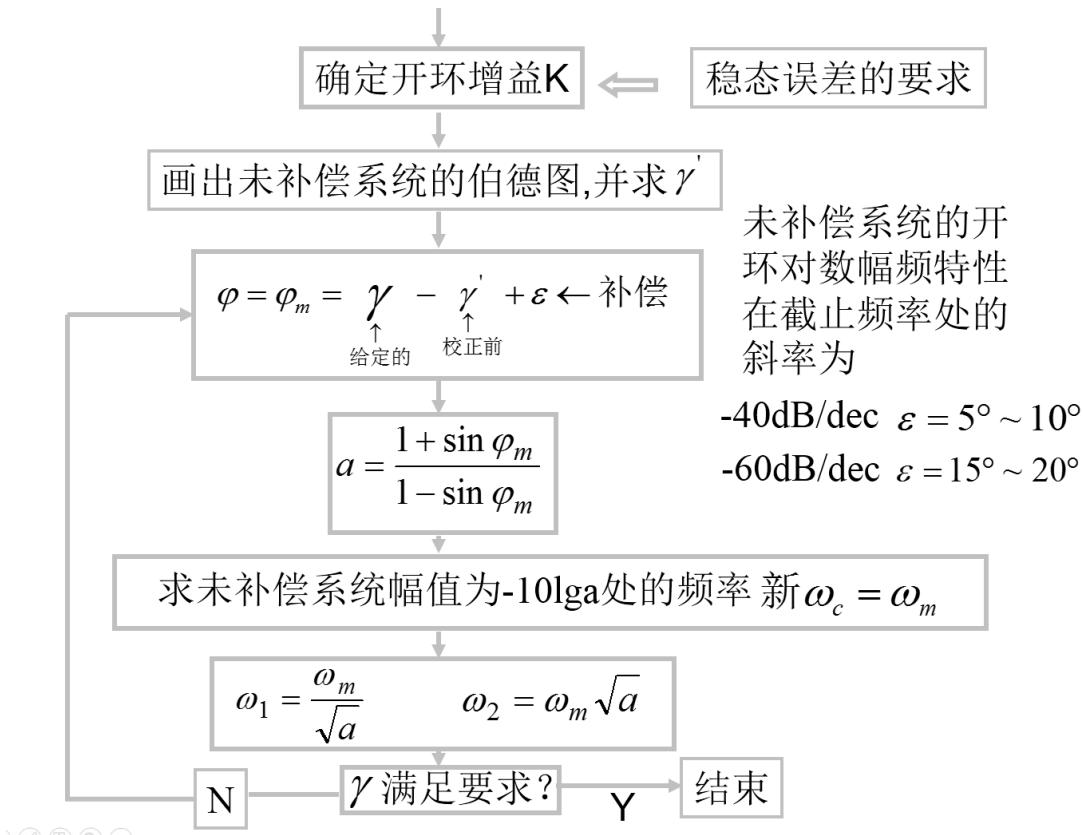
由未补偿系统的对数幅频特性曲线，求得其幅值为 $-10\lg a$ 处的频率，该频率 ω_m 就是校正后系统的开环截止频率 ω_c 。

$$\text{即 } \omega_c = \omega_m$$

⑥确定补偿网络的转折频率 ω_1 和 ω_2

$$\omega_1 = \frac{\omega_m}{\sqrt{a}} \quad \omega_2 = \omega_m \sqrt{a}$$

⑦画出补偿后系统的伯德图，并计算相位裕度是否满足要求？如果不满足，则需增大 ε 值，从第③步开始重新进行计算。



$$\omega'_c = 50 \text{ rad/sec}, \quad \gamma' = 25^\circ$$

也可辅助计算：

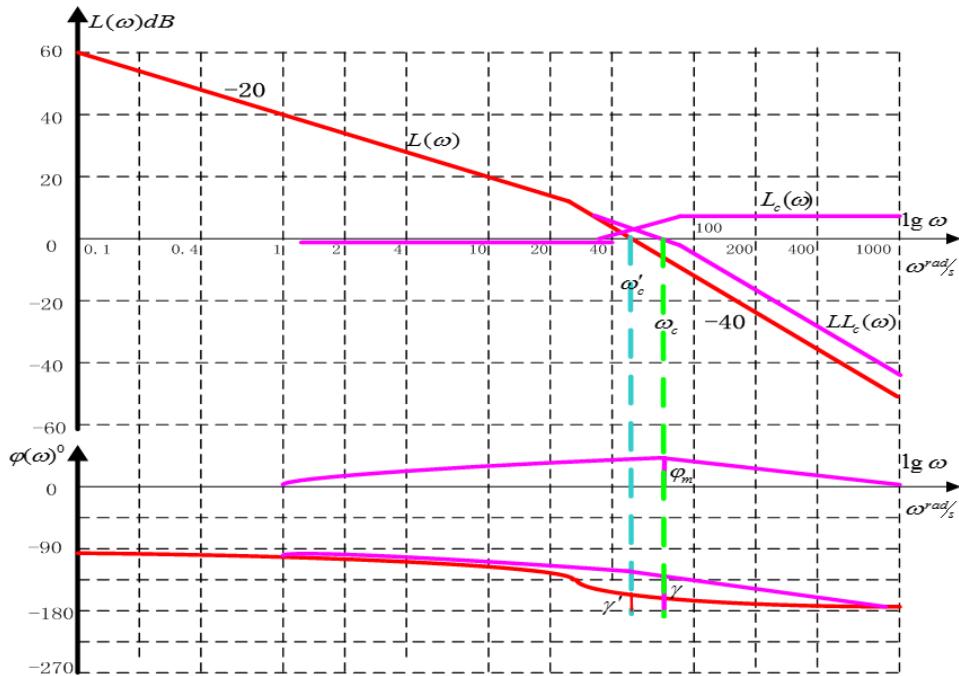
$$\frac{100}{\omega \sqrt{(0.04\omega)^2 + 0}} = 1$$

$$\omega'_c = 50 \text{ rad/s}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma' &= 180^\circ + \phi(\omega'_c) \\
 &= 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.04 \cdot 50 = 90^\circ - 63.4^\circ = 26.5^\circ
 \end{aligned}$$

- 根据相位裕度的要求确定超前补偿网络的相位超前角

$$\phi_m = \gamma - \gamma' + \varepsilon = 45^\circ - 25^\circ + 5^\circ = 25^\circ$$



- 计算 α 值

$$a = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m} = \frac{1 + \sin 25^\circ}{1 - \sin 25^\circ} = 2.46$$

- 超前补偿装置在 ω_m 处的幅值为：

$$L(\omega_m) = 10 \lg a = 10 \lg 2.46 = 3.9 \text{dB}$$

据此，在未补偿系统的开环对数幅值为 -3.9dB 时对应的频率 $\omega_m = \omega_c = 60 \text{rad/sec}$

也可辅助计算

$$20 \lg \frac{100}{\omega \sqrt{0 + (0.04\omega)^2}} = -3.9 \text{dB}, \quad \omega_c = 62 \text{rad/sec}$$

$$\omega_m = \omega_c = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{T\sqrt{2.46}} = 60 \text{rad/sec} \Rightarrow T = 0.0106 \text{sec}$$

基于上述分析，可知串联超前补偿有如下特点：

- 这种补偿主要对未补偿系统中频段进行补偿，使补偿后中频段幅值的斜率为 -20dB/dec ，且有足够的相位裕量。

⑥计算超前补偿网络的转折频率

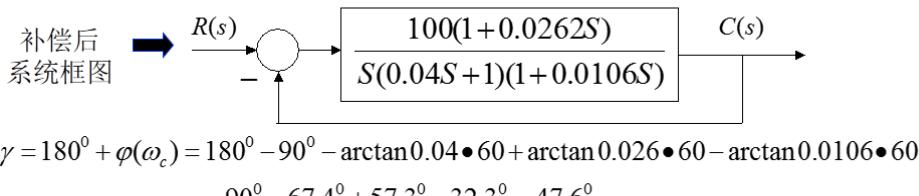
$$\omega_1 = \frac{\omega_m}{\sqrt{a}} = \frac{60}{\sqrt{2.46}} = 38.25 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \omega_m \sqrt{a} = 60 \cdot \sqrt{2.46} = 94.1 \text{ rad/s}$$

$$G_c(s) = \frac{1+0.0262S}{1+0.0106S}$$

⑦补偿后系统的框图如下图所示，其开环传递函数为

$$G_c(s)G(s) = \frac{100(1+0.0262S)}{S(0.04S+1)(1+0.0106S)}$$



$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.04 \cdot 60 + \arctan 0.026 \cdot 60 - \arctan 0.0106 \cdot 60 \\ = 90^\circ - 67.4^\circ + 57.3^\circ - 32.3^\circ = 47.6^\circ$$

对应的伯德图中粉红线所示。由该图可见，补偿后系统的相位裕度 $\gamma = 48^\circ > 45^\circ$ 幅值裕度 $K_g = \infty \text{ dB}$ 满足系统设计要求。

- 超前补偿会使系统瞬态响应的速度变快。由例 6-1 知，补偿后系统的截止频率由未补偿前的 6.3 增大到 9。这表明补偿后，系统的频带变宽，瞬态响应速度变快；但系统抗高频噪声的能力变差。对此，在校正装置设计时必须注意。
- 超前补偿一般虽能较有效地改善动态性能，但未补偿系统的相频特性在截止频率附近急剧下降时，若用单级超前补偿网络去校正，收效不大。因为补偿后系统的截至频率向高频段移动。在新的截止频率处，由于未补偿系统的相角滞后量过大，因而用单级的超前补偿网络难于获得较大的相位裕量。

练习：设一单位反馈系统的开环传递函数 $G(s) = \frac{4K}{S(S+2)} = \frac{2K}{S(0.5S+1)}$ 试设计一超前补偿装置，使补偿后系统的静态速度误差系数 $K_v = 20 \text{ sec}^{-1}$ ，相位裕度 $\gamma \geq 50^\circ$ ，幅值裕度 K_g 不小于 10dB。

解：- 根据对静态速度误差系数的要求，确定系统的开环增益 K。

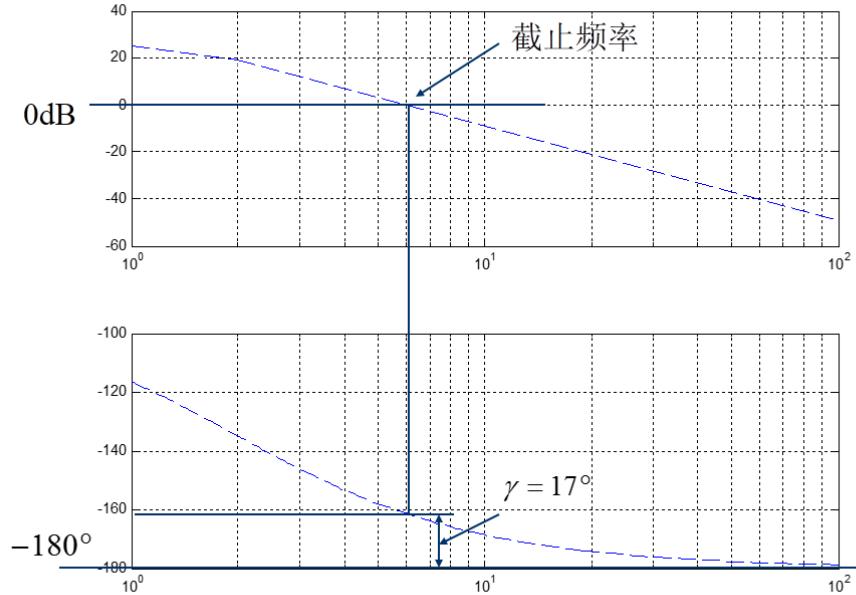
$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} S \frac{2K}{S(0.5S+1)} = 2K = 20 \quad K = 10$$

当 $K=10$ 时，未补偿系统的开环频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{20}{j\omega(0.5j\omega + 1)} = \frac{20}{\omega\sqrt{(0.5\omega)^2 + 1}} e^{(-90^\circ - \arctan 0.5\omega)j}$$

- 绘制未补偿系统的伯德图，如图 6-16 中的蓝线所示。由该图可知未补偿系统的相位裕度为 $\gamma' = 17^\circ$

也可计算: $\frac{20}{\omega \sqrt{(0.5\omega)^2 + 1}} = 1 \Rightarrow \omega = 6.17 \Rightarrow \gamma' = 17.96^\circ$



- 根据相位裕度的要求确定超前补偿网络的相位超前角

$$\phi = \gamma - \gamma' + \varepsilon = 50^\circ - 17^\circ + 5^\circ = 38^\circ$$

- 计算 α 值

$$a = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m} = \frac{1 + \sin 38^\circ}{1 - \sin 38^\circ} = 4.2$$

- 超前补偿装置在 ω_m 处的幅值为:

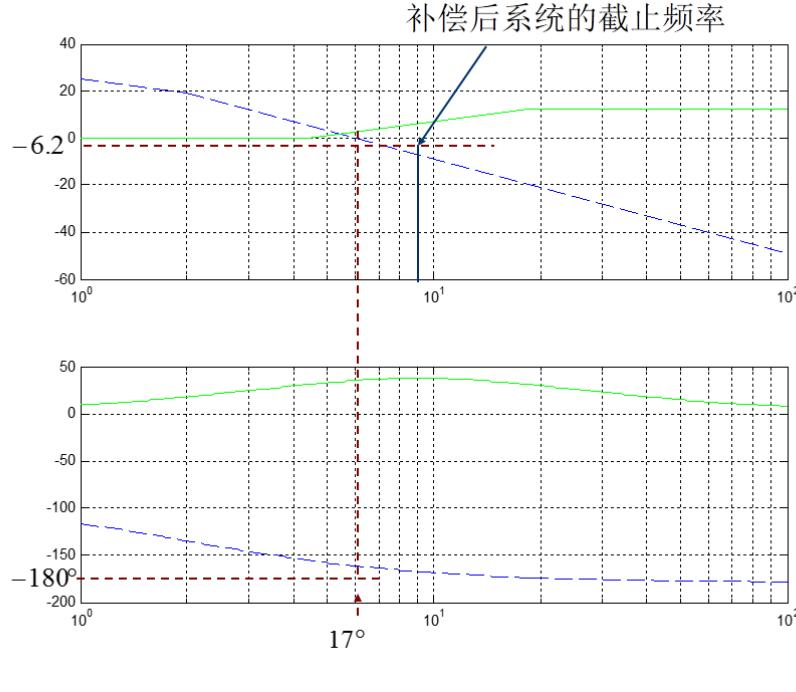
$$10 \lg a = 10 \lg 4.2 = 6.2 \text{ dB}$$

据此, 在未补偿系统的开环对数幅值为 -6.2 dB 时对应的频率 $\omega = \omega_m = 9 \text{ rad/sec}$, 这一频率就是补偿后系统的截止频率 ω_c

也可计算

$$20 \lg 20 - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4}} = -6.2 \quad \omega_c = 8.93$$

$$\omega_m = \omega_c = \frac{1}{T\sqrt{a}} = 9 \Rightarrow T = 0.054$$



补偿后的波特图

- 6.2.2 串联滞后补偿

1. 滞后补偿网络

如果信号源的内部阻抗为零，负载阻抗为无穷大，则滞后网络的传递函数为

$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = G_c(s) = \frac{R_2 + \frac{1}{sC}}{R_2 + R_1 + \frac{1}{sC}} = \frac{R_2 Cs + 1}{(R_1 + R_2)Cs + 1} = \frac{\frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2} R_2 Cs + 1}{(R_1 + R_2)Cs + 1}, \text{ 分度系数 } \beta = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$$

时间常数 $T = (R_1 + R_2)C$, $\beta T = R_2 C$, 所以 $G_c(s) = \frac{1 + \beta Ts}{1 + Ts}$

$$\beta = 0.1, T = 1$$

(1) 同超前网络，滞后网络在 $\omega < \frac{1}{T}$ 时，对信号没有衰减作用； $\frac{1}{T} < \omega < \frac{1}{\beta T}$ 时，对信号有积分作用，呈滞后特性； $\omega > \frac{1}{\beta T}$ 时，对信号衰减作用为 $20 \lg \beta$ ； β 越小，这种衰减作用越强。

(2) 同超前网络，最大滞后角，发生在与的几何中点，称为最大滞后角频率，计算公式为

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\beta}} \quad \varphi_m = \arcsin \frac{1-\beta}{1+\beta}$$

(3) 采用无源滞后网络进行串联补偿时。主要利用其高频幅值衰减的特性，以降低系统的开环截止频率，提高系统的相角裕度。

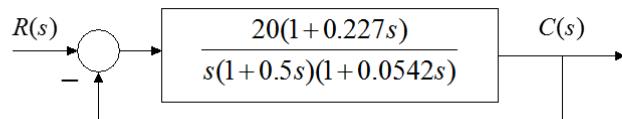
⑥计算超前补偿网络的转折频率

$$\omega_1 = \frac{\omega_m}{\sqrt{a}} = \frac{9}{\sqrt{4.2}} = 4.4 \quad \omega_2 = \omega_m \sqrt{a} = 9\sqrt{4.2} = 18.4$$

$$G_c(s) = \frac{1+0.227s}{1+0.054s}$$

⑦补偿后系统的框图如下图所示，其开环传递函数为

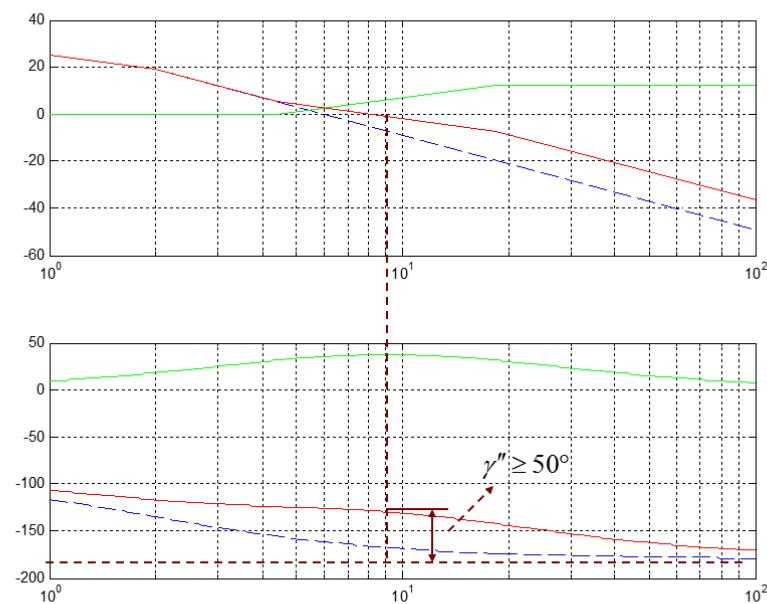
$$G_c(s)G_o(s) = \frac{4.2 \times 40(s + 4.4)}{(s + 18.2)s(s + 2)} = \frac{20(1 + 0.227s)}{s(1 + 0.5s)(1 + 0.0542s)}$$



图例1 校正后系统框图

对应的伯特图中红线所示。由该图可见，补偿后系统的相位裕度为 $\gamma \geq 50^\circ$ ，幅值裕度为 $20\lg h = \infty dB$

均已满足系统设计要求。



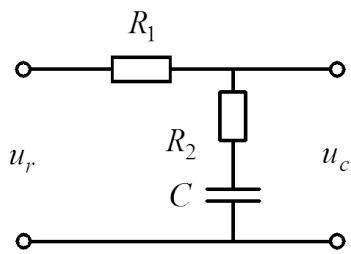


图6.6 RC滞后补偿网络

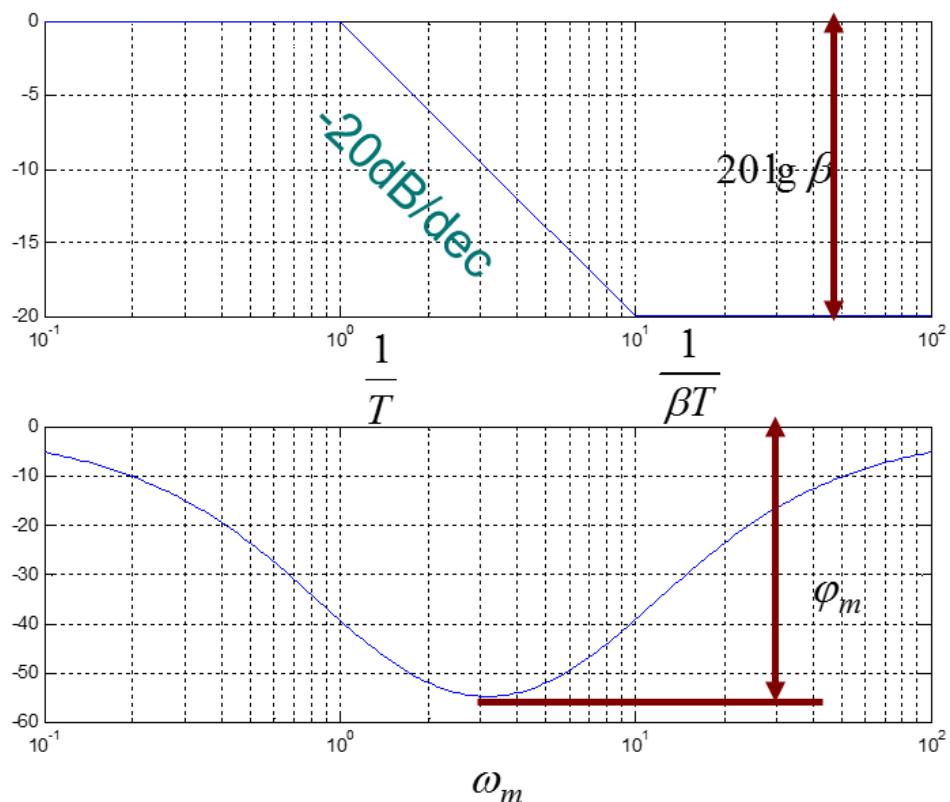


图6.7 滞后补偿网络对数坐标特性

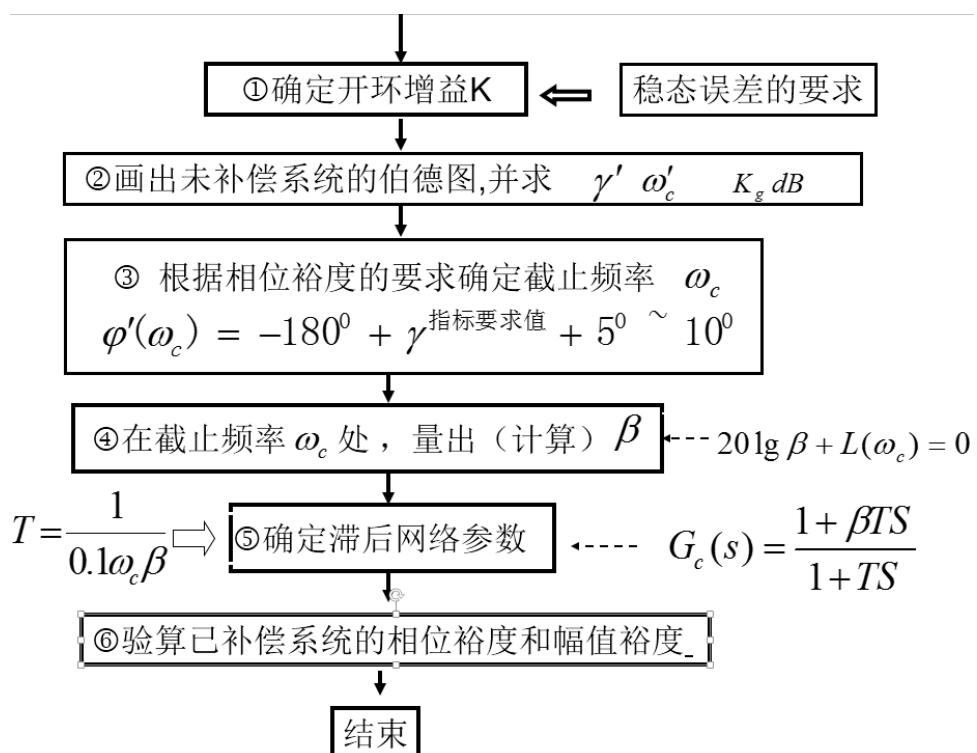
2. 串联滞后补偿

由于滞后补偿网络具有低通滤波器的特性，因而当它与系统的不可变部分串联相连时，会使系统开环频率特性的中频和高频段增益降低，截止频率 ω_c 能使系统获得足够大的相位裕度，但不影响频率特性的低频段。由此可见，滞后补偿在一定的条件下，也能使系统同时满足动态和静态的要求（根轨迹增加开环零极点）。

不难看出，滞后补偿的不足之处是：补偿后系统的截止频率会减小，瞬态响应的速度要变慢；在截止频率会产生一定的相角滞后量。为了使这个滞后角尽可能地小，理论上总希望 $G_c(s)$ 两个转折频率 ω_1, ω_2 比 ω_c 越小越好，但考虑物理实现上的可行性，一般取： $\omega_2 = \frac{1}{\beta T} = (0.25 \sim 0.1)\omega_c$

- 1) 在系统响应速度要求不高而抑制噪声电平性能要求较高的情况下，可考虑采用串联滞后补偿。
- 2) 保持原有的已满足要求的动态性能不变，而用以提高系统的开环增益，减小系统的稳态误差。

如果所研究的系统为单位反馈最小相位系统，则应用频率法设计串联滞后补偿网络的步骤如下：



例 6-2 设一单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{100K}{s(0.04s+1)}$ 试设计一滞后补偿装置，使补偿后系统的静态速度误差系数 $K_v = 1001/s$ ，相对裕度 $\gamma \geq 45^\circ$ ，幅值裕度 K_g

不小于 $10dB$ 。

解：(1) 根据对静态速度误差系数的要求，确定系统的开环增益 K 。

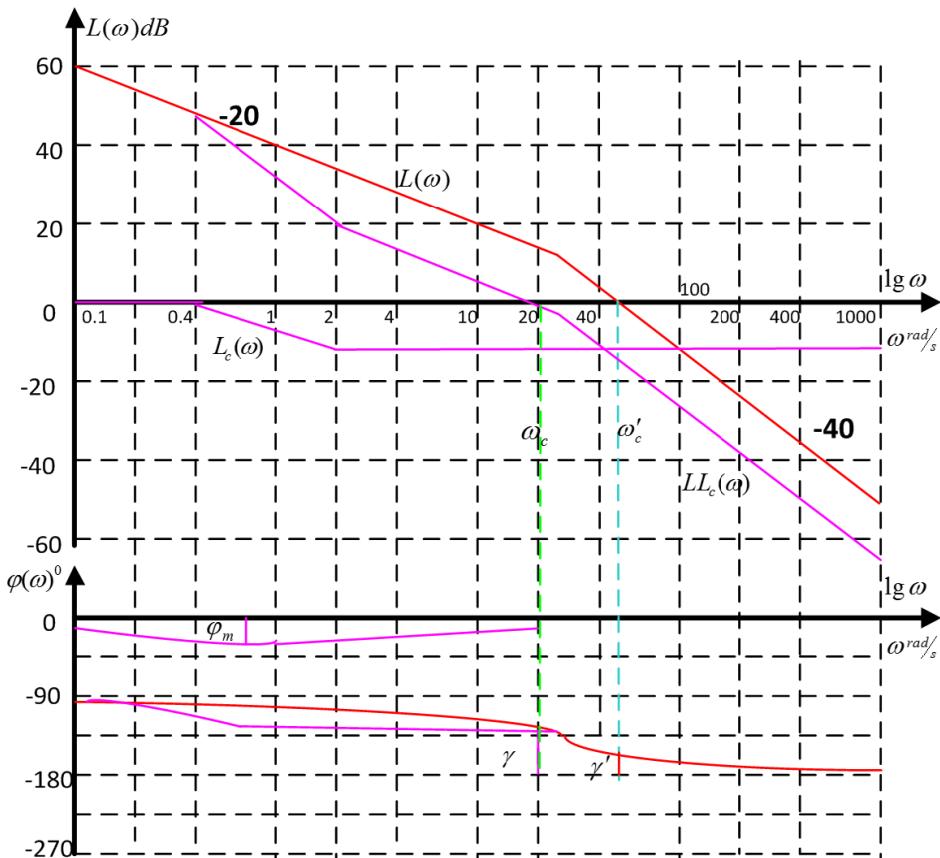
$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} S \frac{100K}{S(0.04S+1)=100K=100} \quad K = 1$$

$$G(j\omega) = \frac{100}{j\omega(0.04j\omega + 1)} = \frac{100}{\omega\sqrt{(0.04\omega)^2 + 1}} e^{(-90^\circ - \arctan 0.04\omega)j}$$

(2) 绘制未补偿系统的伯德图，如图红线所示。由图可知未补偿系统的截止频率和相位裕度为 $\omega'_c = 50rad/s$, $\gamma' = 25^\circ$

$$* \text{ 也可辅助计算: } \frac{100}{\omega\sqrt{(0.04\omega)^2 + 1}} = 1, \omega'_c = 50rad/s$$

$$\gamma' = 180^\circ + \phi(\omega'_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.04 \times 50 = 90^\circ - 63.4^\circ - 26.5^\circ$$



(3) 根据相位裕度的要求确定截止频率 ω_c

$$\angle G(j\omega_c) = -180^\circ + \gamma + \varepsilon = -180^\circ + 45^\circ + 5^\circ = -130^\circ$$

由未补偿系统 Bode 图上，查出 130° 的频率为： $\omega_c = 20rad/s$

$$\text{也可辅助计算: } -90^\circ - \arctan 0.04\omega_c = -130^\circ, \omega_c = 21rad/s$$

(4) 在未补偿系统开环对数幅频特性曲线，量出： $20\lg|G(j\omega)| = 20\lg|G(j20)| = 14dB$

也可辅助计算: $20\lg|G(j\omega)| = 20\lg|\frac{100}{20\sqrt{(0.04\times20)^2+0}}| = 15.92dB$ $20\lg\beta = -20\lg|G(j20)| = -14dB$, $\beta = 0.2$

(5) 计算滞后网络参数 $\frac{1}{\beta T} = 0.1\omega_c = 2rad/s$, $\beta T = \frac{1}{0.01\omega_c} = 0.5S$, $\frac{1}{T} = \frac{1}{2.5} = 0.4rad/s$, $T = \frac{1}{0.1\omega_c\beta} = \frac{1}{2\times0.2} = 2.5S$ 。

则滞后网络的传递参数

$$G_c(s) = \frac{1 + 0.5S}{1 + 2.5S}$$

(6) 补偿后系统的框图如下图所示, 其开环传递函数为: $G_c(s)G(s) = \frac{100(1+0.5S)}{S(0.04S+1)(1+2.5S)}$

补偿后框图

计算:

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - arctan0.04 \times 20 + arctan0.5 \times 20 - arctan2.5 \times 20 = 90^\circ - 38.6^\circ + 84.3^\circ - 88.8^\circ = 46.9^\circ$$

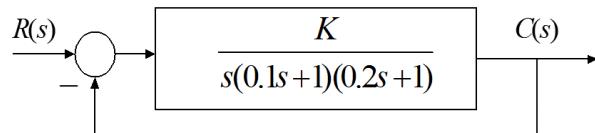
对应的伯德图中粉红线所示。由该图可见, 补偿后系统的相位裕度 $\gamma = 48 > 45$ 为幅值裕度 $K_g = \infty dB$ 满足系统设计要求。

小结: 串联超前补偿和串联滞后补偿方法的适用范围和特点

- 1) 超前补偿是利用超前网络的相角超前特性对系统进行补偿, 而滞后补偿则是利用滞后网络的幅值在高频、中频衰减特性。
- 2) 用频率法进行超前补偿, 旨在提高开环对数幅频渐进线在截止频率处的斜率 ($-40dB/dec$ 提高到 $-20dB/dec$), 和相位裕度, 并增大系统的频带宽度。频带的变宽意味着校正后的系统响应变快, 调整时间缩短。
- 3) 对同一系统超前补偿系统的频带宽度一般总大于滞后补偿系统, 因此, 如果要求补偿后的系统具有宽的频带和良好的瞬态响应, 则采用超前补偿; 当噪声电平较高时, 显然频带越宽的系统抗噪声干扰的能力也越差, 对于这种情况, 宜对系统采用滞后补偿。
- 4) 超前补偿需要增加一个附加的放大器, 以补偿超前补偿网络对系统增益的衰减。
- 5) 滞后补偿虽然能改善系统的静态精度, 但它促使系统的频带变窄, 瞬态响应速度变慢。如果要求补偿后的系统既有快速的瞬态响应, 又有高的静态精度, 则应采用滞后-超前补偿。

有些应用方面，采用滞后补偿可能得出时间常数大到不能实现的结果。

练习：设控制系统如下图所示。若要求校正后的稳态速度误差系数等于 $301/s$ ，相角裕度 40° ，幅值裕度不小于 $10dB$ ，截止频率不小于 $2.3rad/s$ ，试设计串联滞后补偿装置。



某控制系统

解：（1）首先确定开环增益 $K, K_\nu = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = K = 30$

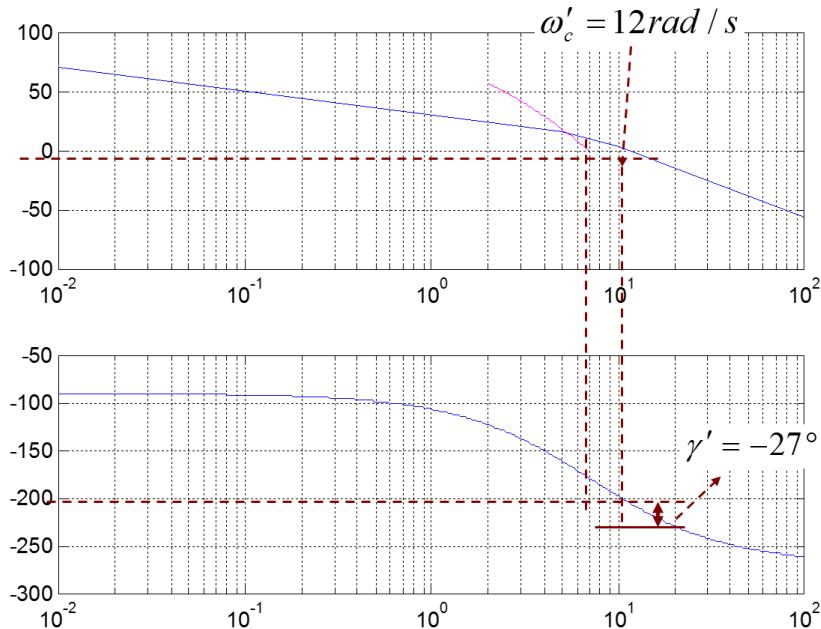
（2）未补偿系统开环传递函数应取 $G(s) = \frac{30}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$

画出未补偿系统的对数幅频渐近特性曲线

$$G(j\omega) = \frac{30}{j\omega(0.1j\omega+1)(0.2j\omega+1)} = \frac{30}{\omega\sqrt{(0.1\omega)^2+1}\sqrt{(0.2\omega)^2+1}} e^{(-90^\circ - \arctan 0.1\omega - \arctan 0.2\omega)j}$$

$$\omega_0 = 1rad/s, 20\lg K = 20\lg 30 = 30dB$$

由图可得 $\omega'_c = 12rad/sec, \gamma' = -27^\circ$



也可辅助计算出： $\phi(\omega_g) = -180^\circ \rightarrow \omega_g = 7.707 rad/sec, \omega'_c = 12rad/s$

$$|G(j\omega)| = \frac{30}{j\omega(0.1j\omega+0)(0.2j\omega+0)} = 1, \omega'_c = \sqrt[3]{1500} = 11.5 rad/sec$$

$$\gamma' = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \omega_c \times 1 - \arctan \omega_c \times 0.2 = 90^\circ - 50.19^\circ - 67.38^\circ = -27.6^\circ$$

说明未补偿系统不稳定，且截止频率远大于要求值。在这种情况下，采用串联超前补偿是无效的。可以证明，当 $\gamma'' = 30^\circ$

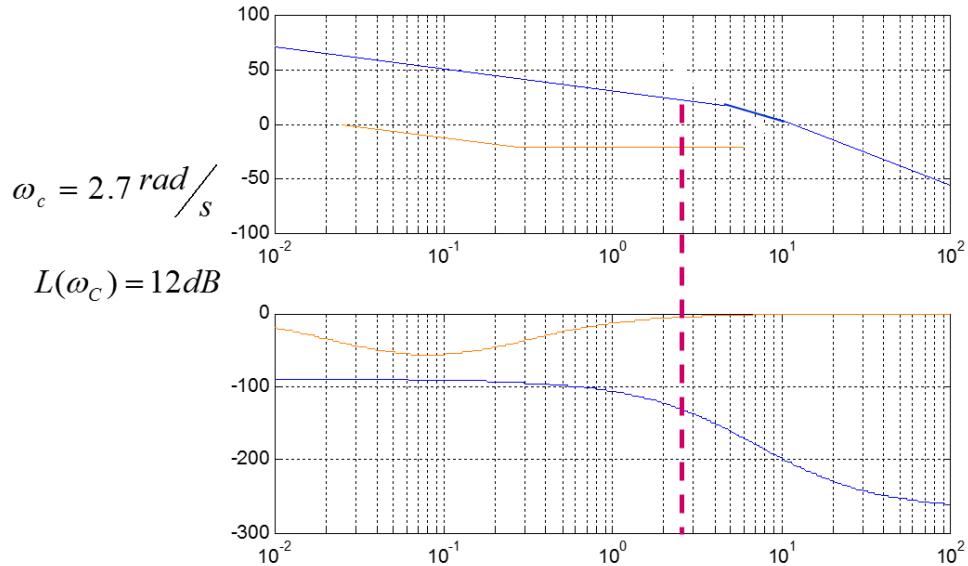
$$\varphi_m = \gamma'' - \gamma + \epsilon = 30^\circ - (-27.6^\circ) + 20^\circ = 77.6^\circ;$$

$$a = \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m} = 84.73^\circ$$

而且截止频率也向右移动。

考虑到，本例题对系统截止频率值要求不大，故选用串联滞后补偿，可以满足需要的性能指标。

$$(3) \text{ 计算: } \phi'(\omega_c) = -180^\circ + \gamma^{\text{指标要求值}} + 6^\circ = -180^\circ + 40^\circ + 6^\circ = -133^\circ$$



由 $\gamma(\omega_c)$ 与 ω_c 的曲线（玫瑰红色），可查得 $\omega_c = 2.7 \text{ rad/s}$ 时 $\gamma(2.7) = 46.5^\circ$ 可满足要求。由于指标要求 $\omega_c \neq 2.3 \text{ rad/s}$ 故 ω_c 值可在 $2.3 \text{ rad/s} \sim 2.7 \text{ rad/s}$ 范围内任取。

考虑到取值较大时，已补偿系统响应速度较快；滞后网络时间常数 T 值较小，便于实现。故选取： $\omega_c = 2.7 \text{ rad/sec}$ 在图上查出 $L(\omega_c) = 12 \text{ dB}$ （计算得 37）

也可计算

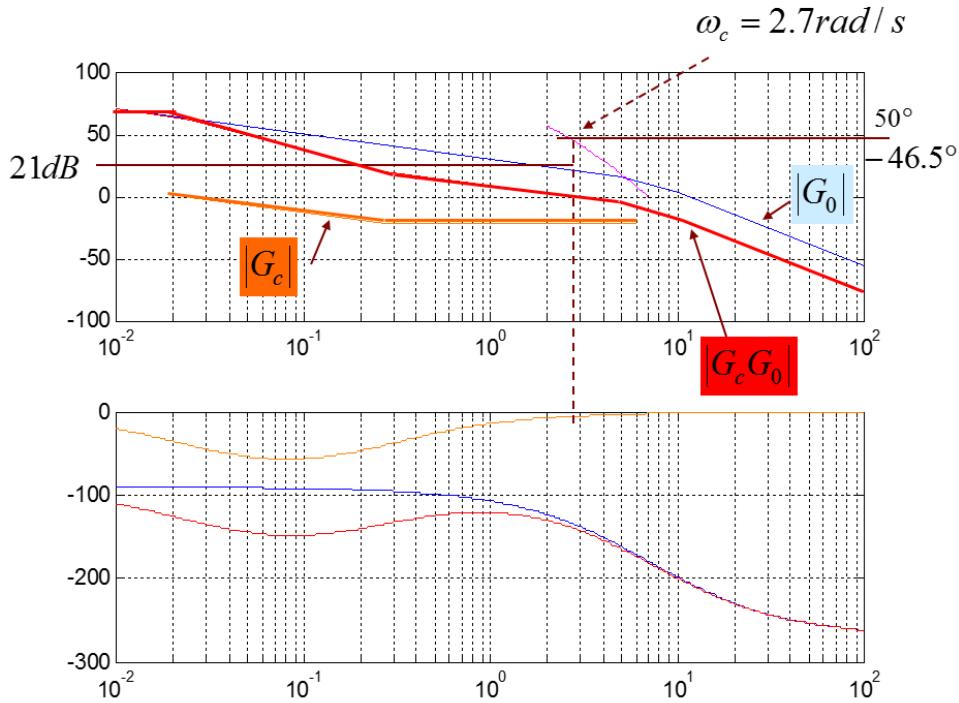
$$20 \lg \frac{30}{\omega \sqrt{(0.1\omega)^2 + 0} \sqrt{(0.2\omega)^2 + 0}} = 20 \lg 4 = 12 \text{ dB}, \omega_c = \sqrt[3]{\frac{1500}{4}} = 7.2 \text{ rad/s}$$

(4) (5) 计算滞后网络参数（近似计算）

$$20 \lg \beta + L(\omega_c) = 0, \beta = 0.09, T = \frac{1}{0.1\omega_c\beta}, \beta T = \frac{1}{0.1\omega_c}$$

则滞后网络的传递函数

$$G_c(s) = \frac{1 + \beta T}{1 + Ts} = \frac{1 + 3.7s}{1 + 41s}$$



(6) 验算指标 (相位裕度和幅值裕度)

$$G_c(s)G(s) = \frac{30(1 + 3.7s)}{s(0.1s + 1)(1 + 0.2s)(1 + 41s)}$$

$\gamma = \gamma(\omega_c) + \varphi(\omega_c) = 46.5^\circ - 5.2^\circ = 41.3^\circ > 40^\circ$ 满足要求

未补偿前的相位穿越频率 ω_g $\varphi(\omega_g) = -180^\circ$

$\omega_g = 7.07\text{rad/s}$, $-20\lg|G(j\omega)| = -20\lg\frac{1}{7 \times 0.1 \times 7 \times 0.2 \times 7} = 16\text{dB}$

补偿后的相位穿越频率 $\omega'_g = 6.8\text{rad/s}$ 幅值裕度

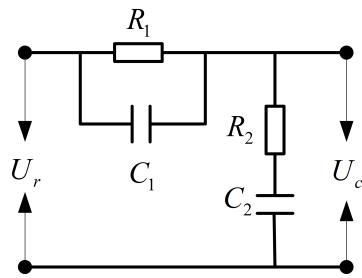
$K_g = -20\lg|G_c(j\omega'_g)G_o(j\omega'_g)| = 10.5\text{dB} > 10\text{dB}$ 满足要求

- 6.2.3 串联滞后-超前补偿

1. 滞后-超前补偿

如果信号源的内部阻抗为零, 负载阻抗为无穷大, 则如图网络的传递函数为

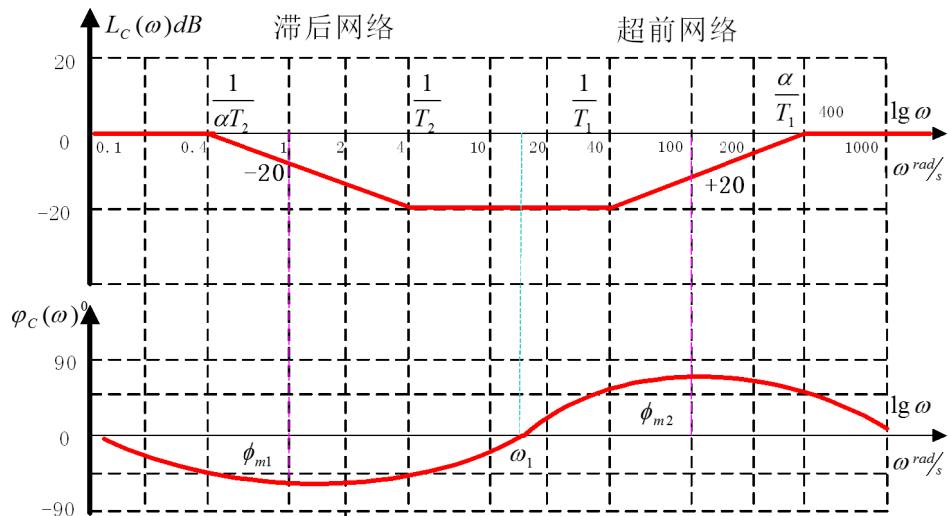
$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = G_c(s) = \frac{\frac{R_2 + \frac{1}{sC_2}}{\frac{1}{R_1} + sC_1 + R_2 + \frac{1}{sC_2}}}{\frac{1}{R_1} + sC_1} = \frac{(R_1C_1s + 1)(R_2C_2s + 1)}{R_1R_2C_1C_2s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2)s + 1} = \frac{(\frac{T_1}{\alpha}s + 1)(\frac{T_2}{\alpha}s + 1)}{(\frac{T_1}{\alpha}s + 1)(\alpha T_2 s + 1)}$$



滞后-超前补偿网络

令: $T_1 = R_1 C_1, T_2 = R_2 C_2, \alpha > 1$

$$R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2 = \frac{T_1}{\alpha} + \alpha T_2$$



$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}, \phi_{m1} = \sin^{-1} \frac{1-\beta}{1+\beta}, \beta = \frac{1}{\alpha}, \phi_{m2} = \sin^{-1} \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

2. 滞后—超前补偿网络的作用

串联超前网络补偿的作用可以加快控制系统对输入信号的反应速度，提高系统的相对稳定性，但对稳态性能改善不大，且使系统抗干扰能力有所降低。串联滞后网络补偿作用相反，它可以在基本上不影响系统动态性能的前提下，较大地提高系统的开环放大系数，从而使系统的稳态性能有明显的提高，缺点是系统频宽降低（上升时间变慢、调节时间变长），使系统对控制信号快速反应速度减慢。串联滞后—超前网络补偿兼有两种补偿的优点。串联滞后—超前网络补偿的主要设计仍然是稳态精度和相位裕度（相角裕量、相位裕量）。

$$\phi_{m1} = \sin^{-1} \frac{1-\beta}{1+\beta}, \beta = \frac{1}{\alpha_1}, \phi_{m2} = \sin^{-1} \frac{\alpha_2-1}{\alpha_2+1}$$

- 6.2.4 按二阶最佳参考模型设计串联补偿装置

例 6.3 设一单位反馈系统的开环传递函数为 $G_0(s) = \frac{200}{s(0.1s+1)}$

设计指标: $\gamma \geq 45^\circ, \omega_c \geq 50\text{rad/sec}$, 试确定串联补偿装置。

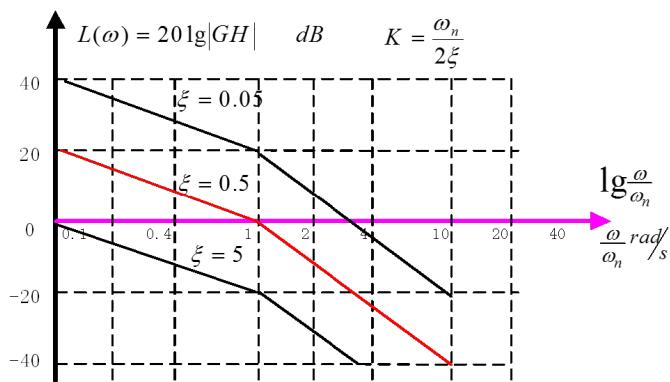
解: (1) $20 \lg 200 = 46\text{dB}$, 利用 I 系统: $\omega = K_v$ (2) 绘制未补偿系统的伯德图, 如图红线所示。由计算可知截止频率和相位裕度为 $|G_0(j\omega)| = |\frac{200}{j\omega(0.1\omega+1)}| = 1$

$$\omega' \approx 44.7\text{rad/s} \quad \gamma' = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.1 \cdot 447 = 13^\circ$$

$$\omega_c = \frac{\omega_n}{2\cdot 0.707} = 50\text{rad/s}, \omega_n = 70.7\text{rad/s}, \omega_1 = 2\xi\omega_n = 100\text{rad/s}$$

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)} = \frac{\frac{\omega_n^2}{2\xi}}{s(\frac{s}{2\xi\omega_n}+1)} = \frac{50}{s(0.01s+1)}$$

$$\xi = 0.707, -20\text{dB/dec} \text{ 穿 } 0 \text{ 分贝线}, \omega_c = K = \frac{\omega_n}{2\xi}, \text{ 二阶最佳模型}$$



性能指标: $\omega_c = \frac{\omega_n}{2\cdot 0.707} = 0.707\omega_n, \gamma = 63^\circ, \omega_b = \omega_n, M_r = 1, \omega_r = 0, \sigma\% = 4.3\%, t_s =$

$$\frac{3}{\omega_n}$$

$$G_c(s) = \frac{G(s)}{G_0(s)} = \frac{\frac{50}{s(0.01s+1)}}{\frac{200}{s(0.1s+1)}} = \frac{0.25(0.1s+1)}{(0.01s+1)} \text{ 超前补偿}$$

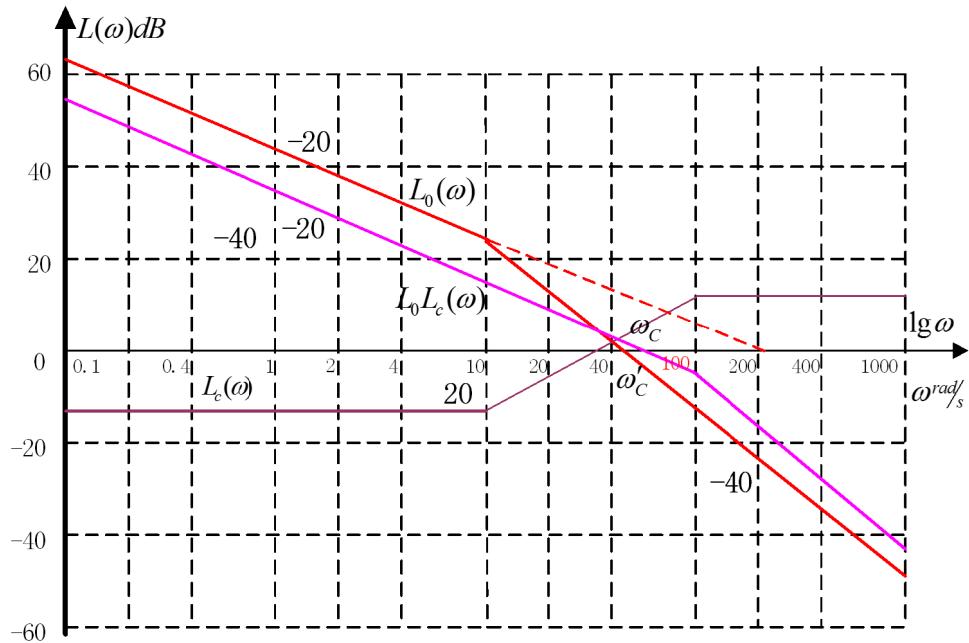
- 6.2.5 按期望开环对数频率特性设计串联补偿装置

在上一章 5.10.3 节讨论了如何根据给定的系统性能指标确定预期的开环对数频率特性, 这一节讨论预期 (期望) 的开环对数频率特性确定串联补偿装置以满足系统设计要求, 该方法在工程上获得了广泛的应用。

设计指标: 稳态精度 (误差系数)、幅值裕度、相位裕度 (超调量) 和调节时间 (截止频率)。

设计步骤:

- (1) 根据稳态误差的要求, 确定开环增益 K。
- (2) 画出未补偿系统的伯德图, 计算未补偿系统的相角裕度。



- (3) 根据设计要求，确定期望的开环对数频率特性。
- (4) 由期望的开环对数幅频特性折线减去未补偿开环对数幅频特性折线，两者之差是串联补偿装置的对数幅频特性折线，进而写出其传递函数（分别写出用除法得出）。
- (5) 验证补偿后系统是否满足设计性能要求，满足停止，不满足继续。

例 6.4 设单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K}{s(0.12s+1)(0.02s+1)}$

试设计满足下列指标的串联补偿装置：

(1) $K_v \geq 701/s$ (2) $t_s \leq 0.1s$ (3) $\sigma\% \leq 30\%$

解 (1) 根据 I 型系统和速度误差系统要求取 $K = 70$

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{70}{j\omega(0.12j\omega + 1)(0.02j\omega + 1)} \\ &= \frac{70}{\omega\sqrt{(0.12\omega)^2 + 1}\sqrt{(0.02\omega)^2 + 1}} e^{(-90^\circ - \arctan 0.12\omega - \arctan 0.02\omega)j} \end{aligned}$$

(2) 绘制未补偿系统的伯德图，如图红线所示。由图可知未校正系统的截止频率和相位裕度为 $\omega'_c = 24rad/s, \gamma' = -7^\circ$

对数相频特性图略 $20\lg 70 = 37dB$

也可辅助计算： $\frac{70}{\omega\sqrt{(0.12\omega)^2 + 0}} = 1 \quad \omega'_c = 24rad/s$

$$\gamma' = 180^\circ + \varphi(\omega'_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.12 \cdot 24 - \arctan 0.02 \cdot 24 = 90^\circ - 71^\circ - 26^\circ = -7^\circ$$

(3) 绘制期望的开环对数幅频特性。

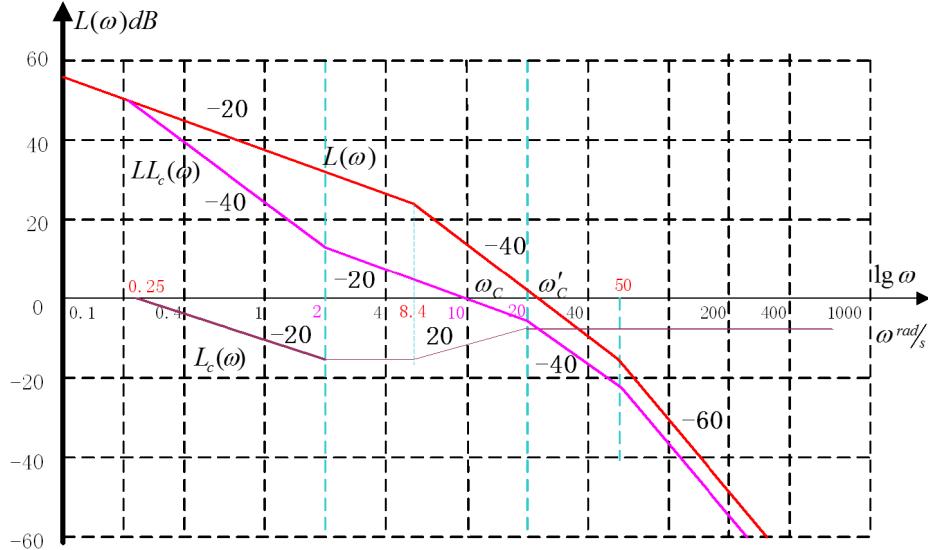
超调量 $0.3 = 0.16 + 0.4(M_r - 1), \Rightarrow M_r = 1.35$

$$K = 2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2$$

$$\text{调节时间 } 0.1 = \frac{K\pi}{\omega_c} \Rightarrow \omega_c = 8.0 \text{ rad/s}, \text{ 取 } \omega_c = 10 \text{ rad/s}$$

$$T_1 = \frac{1}{\omega_2} > \frac{1}{\omega_c} \frac{M_r}{M_r-1} \quad \frac{1}{\omega_2} > \frac{1}{10} \cdot \frac{1.35}{1.35-1} = \frac{1}{2.6}, \quad \omega_2 = 2 \text{ rad/s}$$

$$T_2 = \frac{1}{\omega_3} > \frac{1}{\omega_c} \frac{M_r}{M_r+1} \quad \frac{1}{\omega_3} < \frac{1}{10} \cdot \frac{1.35}{1.35+1} = \frac{1}{17.4}, \quad \omega_3 = 20 \text{ rad/s}$$



$$G_m(s) = \frac{70(\frac{s}{2} + 1)}{s(\frac{1}{\omega_1}s + 1)(\frac{1}{20}s + 1)(\frac{1}{50}s + 1)}$$

$$\omega_c = 10 \text{ rad/s} \quad |G_m(j10)| = \left| \frac{70(\frac{j10}{2} + 1)}{j10(\frac{1}{\omega_c}j10 + 1)(0 + 1)(0 + 1)} \right|$$

$$\text{求交点 } \omega_1 = \frac{20}{70} = 0.28 \approx 0.25 \text{ rad/s}$$

$$\text{期望系统 } G_m(s) = \frac{70(\frac{s}{2} + 1)}{s(\frac{s}{0.25} + 1)(\frac{s}{20} + 1)(\frac{s}{50} + 1)} = G(s)G_c(s)$$

$$\text{未补偿系统 } G(s) = \frac{70}{s(0.12s + 1)(0.02s + 1)} = \frac{70}{s(\frac{s}{8.4} + 1)(\frac{s}{50} + 1)}$$

$$\text{串联 (滞后-超前) 补偿网络传递函数 } G_c(s) = \frac{(\frac{s}{2} + 1)(\frac{s}{8.4} + 1)}{(\frac{s}{0.25} + 1)(\frac{s}{20} + 1)}$$

经检验，已补偿系统相位裕度 $\gamma = 46^\circ$ ，幅值裕度 $k_g = 17 \text{ dB}$ ，调节时间 $t_s = 0.07S$ ，超调量 $\sigma\% = 28.7\%$ ，满足设计要求。

探讨直接使用串联滞后-超前补偿装置来进行设计

设计步骤：

- (1) 根据稳态误差的要求，确定开环增益 K。
- (2) 画出未补偿系统的伯德图，计算未补偿系统的相角裕度和截止频率。
- (3) 根据设计要求，确定期望相角裕度和截止频率。

$$M_r = \frac{1}{\sin \gamma}, 30^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$$

超调量

$$\sigma = 0.16 + 0.4(M_r - 1), 1 \leq M_r \leq 1.8$$

$$\text{调节时间 } t_s = \frac{K\pi}{\omega_c} \quad K = 2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2$$

$$\text{超调量 } 0.3 = 0.16 + 0.4\left(\frac{1}{\sin\gamma} - 1\right) \Rightarrow \frac{1}{\sin\gamma} = 1.35 \Rightarrow \gamma = 46^\circ$$

$$K = 2 + 1.5\left(\frac{1}{\sin\gamma} - 1\right) + 2.5\left(\frac{1}{\sin\gamma} - 1\right)^2$$

$$\text{调节时间 } 0.1 = \frac{K\pi}{\omega_c} \quad \omega_c = 8.9 \text{ rad/s}, \text{ 取 } \omega_c = 10 \text{ rad/s}$$

$$(4) \text{ 超前补偿网络 } \varphi_m = \gamma(\omega_c) - \gamma'(\omega_c) + 5^\circ \sim 10^\circ$$

$$\text{所以 } a = \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m} \quad \frac{1}{T} = \frac{\omega_c}{\sqrt{\alpha}}$$

$$\omega_c = \omega_m \quad \frac{\alpha}{T} = \omega_c \sqrt{\alpha} \quad G_{c1}(s) = \frac{\alpha T + 1}{T S + 1}$$

$$(5) \text{ 在 } \omega_c = 10 \text{ rad/s 处计算 (量出) } 20\lg|G(j\omega_c)|, 20\lg\beta = -20\lg|G(j\omega_c)| - \frac{1}{2} \cdot 20\lg\alpha,$$

求出 β 滞后补偿网络传递函数:

$$G_{c2}(S) = \frac{\left(\frac{S}{0.1 \sim 0.2S} + 1\right)}{\left(\frac{S}{0.1 \sim 0.2\beta\omega_c} + 1\right)}$$

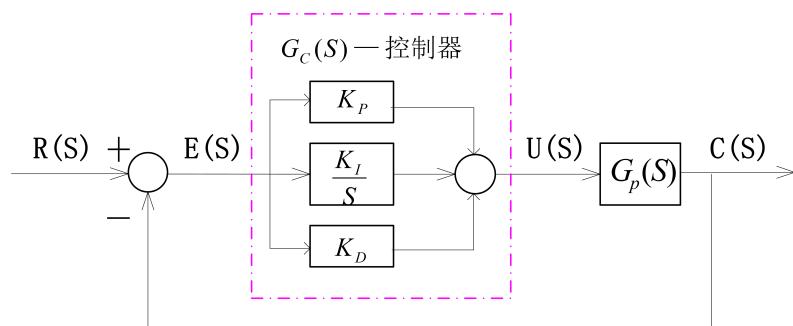
注意: 0.1 对应 5° , 0.2 对应 10° , 产生滞后角量。

(6) 验证补偿后系统是否满足设计性能要求, 满足停止, 不满足继续。

$$G_C(s) = G_{c1}(s)G_{c2}(s)$$

6.4 PID 控制（调节）器的设计

- 6.4.1 PID（比例—积分—微分）控制器的基本结构



K_P : 比例增益 K_I : 积分增益 K_D : 微分增益

PID 控制器的传递函数: $G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_1}{s} + K_D s$

PID 控制器的输入输出关系: $u(t) = K_p e(t) + K_1 \int_0^t e(t) dt + K_D \frac{de(t)}{dt}$

1) K_P : $e_{ss} \downarrow t_r \downarrow \sigma\% \uparrow$

2) $\frac{K_I}{S}$: $e_{ss} \downarrow \sigma\% \uparrow$

3) $K_D S$: $\sigma\% \downarrow t_s \downarrow$

控制（调节）器的几种基本形式：

1) PID (功能: 滞后-超前网络) 控制器: $G_C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$

2) P (功能: 提高增益) 控制器: $G_C(s) = K_P$

3) PI (功能: 滞后网络) 控制器: $G_C(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$

4) PD (功能: 超前网络) 控制器: $G_C(s) = K_P + K_D s$

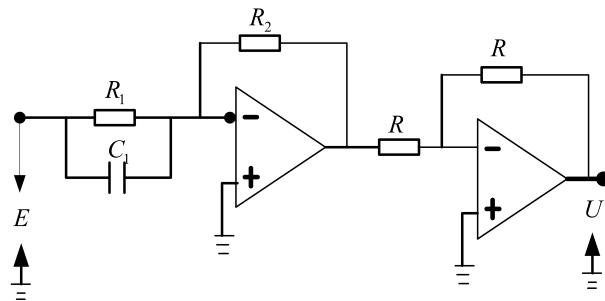
- 6.4.2 PD (比例微分) 控制器

PD 控制器:

$$G_C(s) = K_P + K_D s = K_P(1 + T_d s) = K_P\left(1 + \frac{s}{\omega_d}\right)$$

PD 有源校正网络

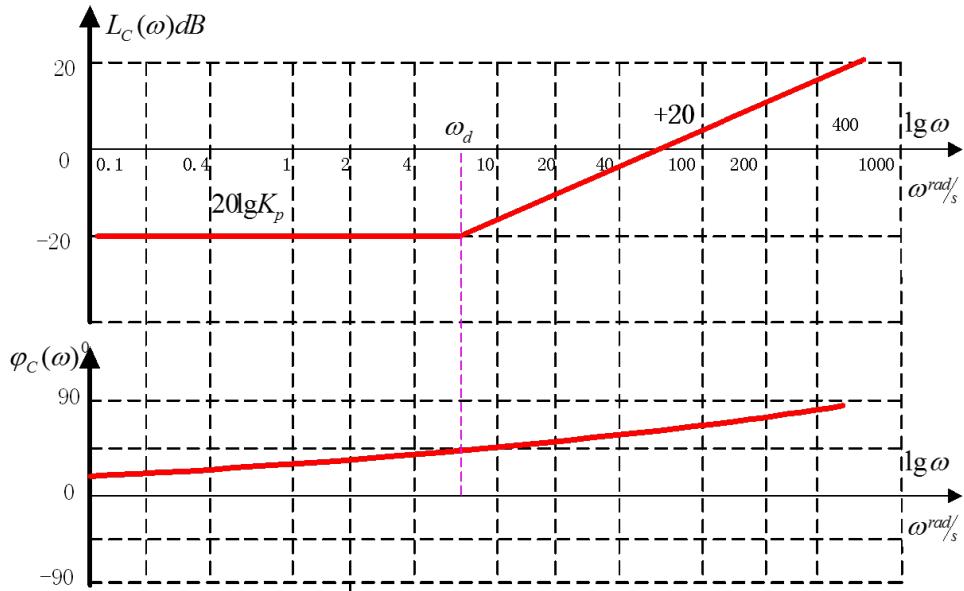
$$G_C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{R_2}{R_1}(1 + R_1 C_1 s)$$



比例-微分控制器

PD 控制器的伯德图

- 相位超前



- 超前网络

PD 控制器影响系统:

- (1) 降低系统的超调量 (2) 降低系统的上升时间、调节时间
- (3) 增加系统频宽 (4) 增加系统相位裕度、幅值裕度
- (5) 降低系统抗高频干扰能力 (6) 改善系统稳态精度不大

例 6.9 设一单位反馈系统的开环传递函数为

$$G_p(s) = \frac{2718 \cdot 10^6}{s(s^2 + 3408.3s + 1204000)}$$

设计 PD 控制器使闭环系统的性能指标满足:

- (1) 在单位斜坡输入下稳态误差: $e \leq 0.00443$
- (2) 最大超调量: $\sigma\% \leq 5\%$

解:

- (1) 根据对静态速度误差系数的要求, 确定系统的开环增益 K 。

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_P(s) = 2257.1, e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0.000443, \text{ 满足要求}$$

闭环主导极点: $\xi = 0.156, \sigma\% = 78.88\%$

- (2) 补偿后系统:

$$G_c(s)G_p(s) = \frac{2718 \cdot 10^6(K_p + K_Ds)}{s(s^2 + 3408.3s + 1204000)}$$

- (3) 补偿后系统, 利用参数(广义)根轨迹法设计

利用 *MATLAB* 仿真（根轨迹设计、时域验证）：在 $\xi = (0.707)$ 附近搜寻参数 $K_D = (0.00157), 0.002$ 。 $\sigma\% = 11.37\%$ （未达到 5%）， $t_r = 0.0008\text{sec}$ ， $t_s = 0.00255\text{sec}$

(4) 补偿后系统, 利用频率域法设计

利用 *MATLAB* 仿真（伯德图）： $K_D = 0.002$, $\gamma = 58.4^\circ$, $K_g = \infty\text{dB}$, $M_r = 1.07$

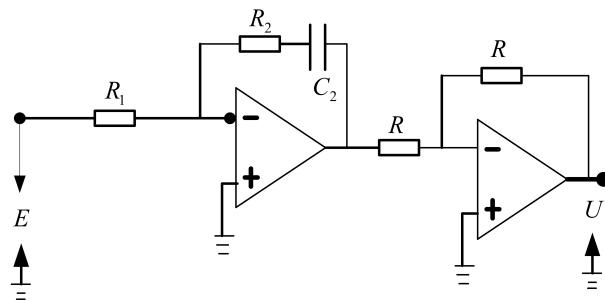
- 6.4.3 PI（比例积分）控制器

PI 控制器：

$$G_C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_I \left(1 + \frac{K_P}{K_I} s\right)}{s} = \frac{K_I \left(1 + \frac{1}{\omega_I} s\right)}{s}$$

PI 有源校正网络

$$G_C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{R_1 C_2 s}$$



比例-积分控制器

PI 控制器

- 相位滞后

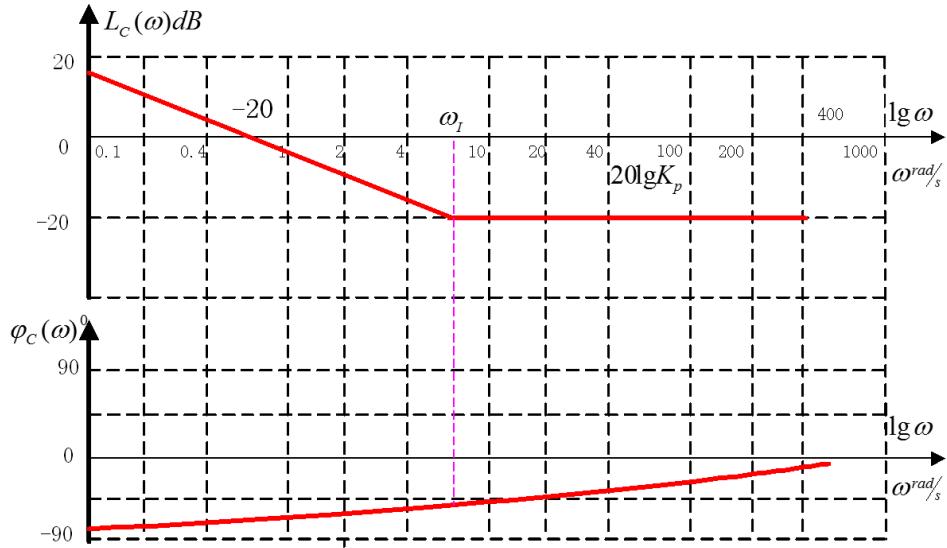
- 滞后网络

PI 控制器影响系统：

- (1) 降低系统的超调量 (2) 增加系统的上升时间、调节时间
- (3) 减少系统频宽 (4) 增加系统相位裕度、幅值裕度
- (5) 增强系统抗高频干扰能力 (6) 提高系统稳态精度

例 6.10 设一单位反馈系统的开环传递函数为

$$G_p(s) = \frac{815 \cdot 10^3}{s(s + 361.2)}$$



设计 PD 控制器使闭环系统的性能指标满足:

(1) 在单位斜坡输入下稳态误差: $e_{ss} \leq 0.02$

(2) 最大超调量: $\sigma\% \leq 5\%$

解 (1) 根据对静态速度误差系数的要求, 确定系统的开环增益 K。

$K_\alpha = \lim_{s \rightarrow 0} S^2 G_P(S) = 0, e_{ss} = \frac{1}{K_\alpha} = \infty$, 不满足要求

(2) 补偿后系统: $G_c(s)G_p(s) = \frac{815 \cdot 10^3 K_P(s+K_I/K_P)}{s(s+361.2)}$, 取 $K_P = 0.08$ 闭环主导极点

$K_\alpha = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_P(s) = \frac{K_I}{0.000443}, e_{ss} = \frac{0.000443}{K_I} < 0.2, K_I > 0.022$

$G_c(s)G_p(s) = \frac{815 \cdot 10^3 K_P(s+K_I/K_P)}{s(s+361.2)}$, 取 $K_I/K_P = 10$

(3) 补偿后系统, 利用参数(广义)根轨迹法设计

利用 MATLAB 仿真(根轨迹设计、时域验证): 在 $\xi = (0.707)$ 附近搜寻参数

$K_D = 0.08, K_I = 0.8$ 。 $\sigma\% = 9.93\%$ (未达到 5%)

$K_P = 0.08, K_I = 0.04$ 。 $\sigma = 4.61\% < 5\%$, 满足设计要求

(4) 补偿后系统, 利用频率域法设计

利用 MATLAB 仿真(伯德图): $\varphi_m = 65^\circ + 5^\circ = 70^\circ, \omega_c = 170 \text{ rad/s}, 20\lg K_P = -21.5 \text{ dB}$, 解得: $K_P = 0.084$, 取 $K_P = 0.08, K_I = 0.08, 0.04 > 0.022, \gamma = 65.15^\circ, \gamma = 65.75^\circ$

• 6.4.4 PID (比例-积分-微分) 控制器

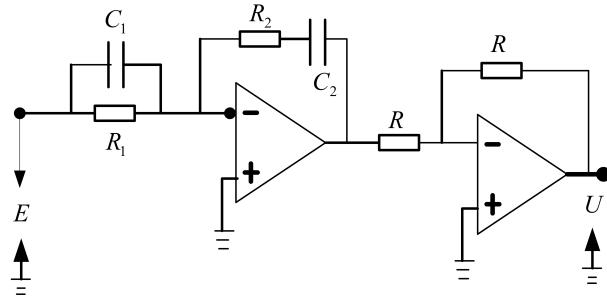
PID 控制器: $G_C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = K_P(1 + \frac{K_I}{K_P s} + \frac{K_D}{K_P} s)$

PD-PI 控制器: $G_C(s) = (1 + K_D s)(K_P_2 + \frac{K_{I2}}{s}), K_P = K_P_2 + K_D K_{I2}, K_D = K_{D1} K_P_2$

$$, K_I = K_{I2}$$

PID 有源校正网络

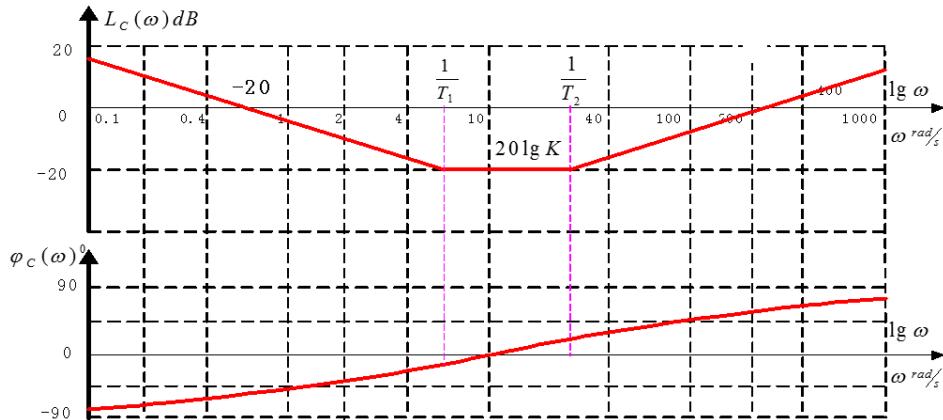
$$G_C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2} \right) + \frac{1}{R_1 C_2 s} + R_2 C_1 s$$



比例-积分-微分控制器

$$G_C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{T_1 s}$$

$$T_1 = R_2 C_2, T_2 = R_1 C_1, K = \frac{R_2}{R_1}$$



PID 控制器 (调节器) 影响系统:

动态性能和稳态性能都能得到改善

- 降低系统的超调量
- 降低系统的上升时间、调节时间
- 增加系统频宽
- 增加系统相位裕度、幅值裕度

- 增加系统高频干扰
- 改善系统稳态精度

例 6.11 设一单位反馈系统的开环传递函数为

$$G_P(s) = \frac{2718 \cdot 10^6}{s(s^2 + 3408.3s + 1204000)}$$

设计 PD 控制器使闭环系统的性能指标满足：

- (1) 在单位加速度输入下稳态误差: $e_{ss} \leq 0.2$
- (2) 最大超调量: $\sigma\% \leq 5\%$

单独采用 PI 或 PD 控制器无法校正（补偿）系统的设计要求
采用 PID 控制器校正（补偿）系统

$$G_C(s) = (1+K_{D1}s)(K_{P2} + \frac{K_{I2}}{s}) = \frac{K_{D1}K_{P2} \left(\frac{1}{K_{D1}} + s \right) \left(s + \frac{K_{I2}}{K_{P2}} \right)}{s} = \frac{0.002 \cdot K_{P2} \left(\frac{1}{0.002} + s \right) (s + 15)}{s}$$

$$G(s) = G_p(s)G_c(s) = \frac{2718 \cdot 10^6}{s(s^2 + 3408.3s + 1204000)} G_c(s) = \frac{5.436 \cdot 10^6 K_{P2}(s + 500)(s + 15)}{s^2(s + 400.2)(s + 3008)}$$

$$K_{P2} = 0.3, \quad K_{D1} = 0.002, \quad K_{I2} = 15K_{P2} = 4.5$$

$$\text{PID 控制器: } G_C(S) = \frac{U(S)}{E(S)} = K_P + \frac{K_I}{S} + K_D S = 0.309 + \frac{4.5}{S} + 0.006 S$$

(3) 补偿后系统, 利用时域法设计

利用 MATLAB 仿真 (时域): 在 $\xi = (0.707)$ 附近搜寻参数 $K_{P2} = 0.2 \sim 0.4$, $\sigma\% = 5\%$, 满足动态性能设计要求

验证稳态精度要求:

$$K_a = \frac{5436000 \cdot 500 \cdot 15}{400 \cdot 26 \cdot 3008}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \frac{400 \cdot 26 \cdot 3008}{5436000 \cdot 500 \cdot 15} < 0.2$$

增大各个参数对系统性能指标的影响

PID 参数	上升时间	超调量	调节时间	稳态误差	稳定性
K_p	缩短	上升	少量变化	降低	变差
K_i	缩短	上升	延长	消除	变差
K_d	少量变化	降低	缩短	理论上无影响 K_d 较小时有提升	

6.5 反馈补偿

- 6.5.1 反馈补偿的功能

采用反馈补偿与串联补偿具有同样的补偿效果，此外更具有突出的优点：

- (1) 反馈补偿可以扩展系统的频带宽度，加快响应速度。
- (2) 反馈补偿可以减弱被反馈包围部分环节由于参数变化、非线性特性以及各种干扰对控制系统性能的不利影响。
- (3) 反馈补偿可以消除系统不可变部分中不希望的特性，即取代不希望特性部分。
- (4) 反馈补偿控制系统具有低通滤波作用（减少高频干扰）。

- 6.5.2 常用的反馈补偿形式

反馈补偿常用的反馈量：

控制对象的位置、速度和加速度；

执行机构的位置和速度，复杂系统中间变量。

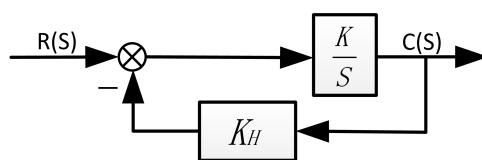
伺服系统和调速系统中的角度、转速、加速度、电枢电流等。

串联补偿装置多采用有源或无源 RC 网络，而反馈补偿多采用传感器：电位计、角度编码器、垂直陀螺、速度陀螺，测速发电机以及各种加速度传感器等。

1. 利用反馈补偿改变局部结构参数

- (1) 位置反馈或称比例反馈，这种反馈补偿可以减少被包围环节的时间常数，能扩展频带，提高系统的快速性；能改变积分环节的性质，增加系统的稳定性。

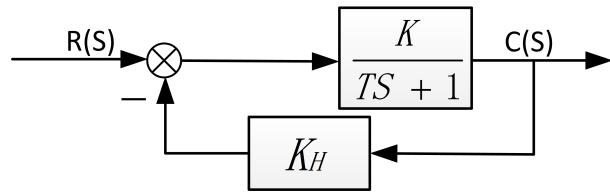
$$G(S) = \frac{\frac{K}{S}}{1 + \frac{K}{S} \cdot K_H} = \frac{\frac{1}{K_H}}{\frac{1}{KK_H}S + 1} = \frac{K_1}{TS + 1}$$



积分环节变为惯性环节，这意味着降低了大回路的稳态精度，但改善系统的稳定性。

$$G(S) = \frac{C(S)}{R(S)} = \frac{\frac{K}{1+KK_H}}{\frac{T}{KK_H+1}S + 1}$$

仍为惯性环节，增益和时间常数变小。但改善系统的稳定性。

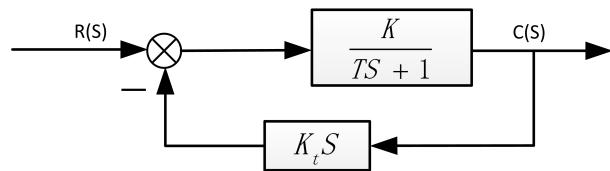


$$G(S) = \frac{\frac{K}{1+KK_H}}{\frac{T^2}{KK_H+1}S^2 + \frac{2T\xi}{KK_H+1}S + 1}$$

仍为振荡环节，增益和时间常数变小，阻尼系数也变小。

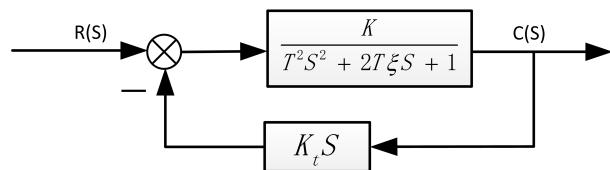
(2) 速度反馈或称微分反馈，这种反馈补偿可以在不改变被包围环节性质的条件下，增加时间常数，也可以改变阻尼比；能改善系统的相对稳定性。

$$G(S) = \frac{K}{(T + KK_t)S + 1}$$



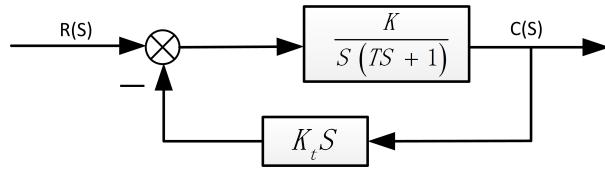
仍惯性环节，时间常数增大，增益不变。

$$G(S) = \frac{K}{T^2S^2 + (2T\xi + KK_t)S + 1}$$



仍为振荡环节，增益和时间常数不变，阻尼系数增加，从而超调量变小。

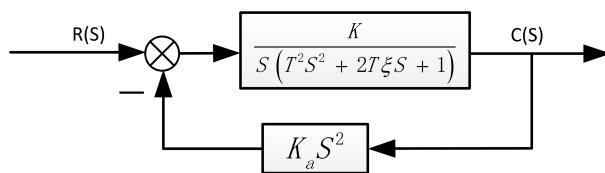
$$G(s) = \frac{K}{1 + KK_t} \cdot \frac{1}{s(\frac{T}{1+KK_t}s + 1)}$$



仍含有积分环节和惯性环节，增益和时间常数变小。

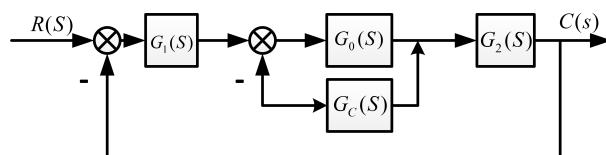
(3) 加速度反馈，这种反馈补偿可以在不改变被包围环节性质的条件下，改变阻尼比，能改善系统的相对稳定性。

$$G(s) = \frac{K}{S[T^2S^2 + (2T\xi + KK_a)S + 1]}$$



仍含有积分环节和增益不变，阻尼系数变小，超调量变小。

2. 利用反馈补偿取代局部结构



反馈补偿部分传递函数

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)G_c(s)}$$

条件（受补偿频段）： $|G_0(j\omega)G_c(j\omega)| \gg 1$, 2~10 倍以上

$$G(j\omega) = \frac{G_0(j\omega)}{1 + G_0(j\omega)G_c(j\omega)} \approx \frac{G_0(j\omega)}{G_0(j\omega)G_c(j\omega)} \approx \frac{1}{G_c(j\omega)} = G_0(j\omega)$$

条件（高频段）： $|G_0(j\omega)G_c(j\omega)| \ll 1$ $G(j\omega) \approx G_0(j\omega)$

3. 降低参数变化敏感度

$$G(S) = \frac{\frac{K}{1+KK_H}}{\frac{T}{KK_H+1}S + 1} = \frac{K_1}{T_1S + 1}$$

增益的改变量：

$$\frac{\partial K_1}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K} \frac{K}{1+KK_H} = \frac{1+KK_H - KK_H}{(1+KK_H)^2} = \frac{1}{(1+KK_H)^2}$$

$$\Delta K_1 = \frac{\Delta K}{(1+KK_H)^2}, \quad \frac{\Delta K_1}{K_1} = \frac{1}{1+KK_H} \cdot \frac{\Delta K}{K}$$

参数 K 变化量 ΔK 敏感性降低 $\frac{1}{1+KK_H}$ 倍

- 6.5.3 反馈补偿举例

采用反馈补偿的系统，必然是多回路控制系统，反馈补偿的设计（综合）远比串联补偿的设计复杂。根据反馈补偿的功能和反馈具体形式，可以通过试凑法选择反馈补偿装置的结构和参数。

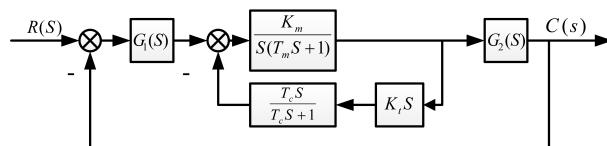
由于串联补偿设计比反馈补偿设计容易，因此，在某种情况，如果预选定反馈补偿装置的结构，可以把反馈补偿设计变换为串联补偿（滞一超）设计，根据性能指标要求。确定等效串联补偿装置的参数，然后再确定反馈补偿装置的参数。

例 6-2 设控制对象的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)} = \frac{400}{s(0.025s + 1)} = \frac{400}{s(\frac{1}{40}s + 1)}$ 试设计一反馈补偿装置的结构和参数，使补偿后系统的性能要求：

调节时间： $t_s \leq 0.2s$

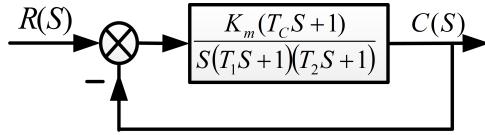
相位裕度： $\gamma \geq 50^\circ$

解：采用反馈形式是速度反馈后接超前相位网络。



$$G_1(s) = G_2(s) = 1, \quad H_C(s) = K_f s \cdot \frac{T_c s}{T_c s + 1}$$

$$G(S) = \frac{\frac{K_m}{S(T_m S + 1)}}{1 + \frac{K_m T_c K_t S^2}{S(T_m S + 1)(T_c S + 1)}} = \frac{K_m (T_c S + 1)}{S[T_m T_c S^2 + (T_m + T_c + K_m T_c K_t) S + 1]}$$



$$T_2 = \frac{T_m T_c}{T_1} \quad T_1 = -T_2 + T_c + T_m + K_t K_m T_c$$

$$G(S) = \frac{K_m (T_c S + 1)}{S[T_m T_c S^2 + (T_m + T_c + K_m K_t T_c) S + 1]} = \frac{K_m (T_c S + 1)}{S(T_1 S + 1)(T_2 S + 1)}$$

设计的主要思路是：根据设计指标确定预期开环传递函数 $T_1 T_2 T_C$ ，然后确定参数 K_t 。

1) 绘制未补偿系统的伯德图，如图红线所示。由图可知未补偿系统的截止频率和计算相位裕度为：

$$\omega'_c = 126 \text{ rad/sec, 计算获得: } \gamma' = 17.5^\circ$$

2) 绘制期望的开环对数幅频特性。

$$\gamma \geq 50^\circ \quad M_r = \frac{1}{\sin \gamma} = 1.3, \quad 35^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$$

$$\text{超调量 (未要求)} \quad \sigma = 0.16 + 0.4(M_r - 1)$$

$$\text{调节时间 (P175)} \quad t_s = \frac{K\pi}{\omega_c} \quad K = 2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2$$

$$0.2 = \frac{K\pi}{\omega_c} \Rightarrow \omega_c = 37.8 \text{ rad/sec, 取 } \omega_c = 42 \text{ rad/sec}$$

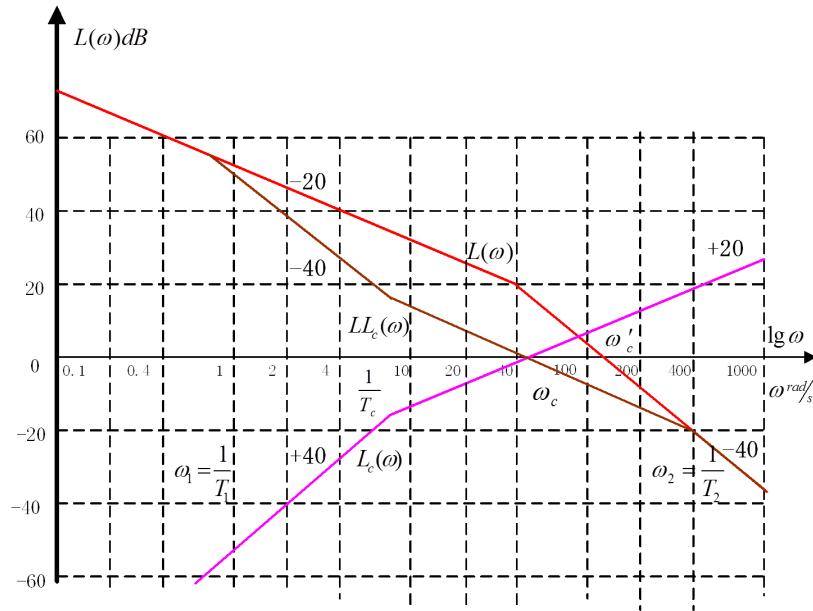
$$T_1 = \frac{1}{\omega_2} > \frac{1}{\omega_c} \frac{M_r}{M_r - 1} = \frac{1}{42} \cdot \frac{1.3}{1.3 - 1} = 0.1 \text{ sec}^{-1} = 10 \text{ rad/sec}$$

$$T_2 = \frac{1}{\omega_3} < \frac{1}{\omega_c} \frac{M_r}{M_r + 1} = \frac{1}{42} \cdot \frac{1.3}{1.3 + 1} = 0.013 \text{ sec}^{-1} = 74 \text{ rad/sec}$$

$G(s)$ 中 $G_c(s) = \frac{T_c S + 1}{T_1 S + 1}$ 是一个滞后网络，可以按经验公式。

$$\text{取 } \frac{1}{T_c} \frac{\omega_c}{5} = 8.4 \text{ rad/sec, } T_c = 0.119 \text{ s}$$

在 ω 轴上，过 $\omega = 42 \text{ rad/sec}$ 点做一 20 dB/dec 斜线，在斜线上，过对应 $\omega = \frac{1}{T_c} = 8.4 \text{ rad/sec}$ 的点，做一 40 dB/dec 斜线，交于未补偿系统于一点，该点相应的频率为 $\omega_1 = \frac{1}{T_1} = 0.84 \text{ rad/sec}$ 于是 $T_1 = 1.19 \text{ s}$ ，确定高频区的频率特性。



$T_2 = \frac{T_m T_c}{T_1} = \frac{0.025 \cdot 0.119}{1.19} = 0.0025s$, $\omega_2 = \frac{1}{T_2} = 400 \text{ rad/sec}$, $\omega_2 = 9.5 \cdot \omega_c$ 满足预期特性要求。

$$\frac{K_m T_c \omega_c}{\omega_c T_1 \omega_c} = 1 \quad T_1 = \frac{K_m T_c}{\omega_c} = 1.13s \quad \frac{K_m}{\frac{1}{T_2} T_m \frac{1}{T_2}} = \frac{\omega_c}{T_2} \quad T_2 = \frac{T_m \omega_c}{K_m}$$

补偿后期望的开环对数幅频特性如图所示，计算机仿真算出：

$t_s \leq 0.2s$, $\gamma = 74^\circ$, $\sigma\% = 11\%$ 满足设计要求。

$$G_m(s) = \frac{400(\frac{s}{8.4} + 1)}{S(\frac{s}{0.84} + 1)(\frac{s}{400} + 1)} = G(s) \cdot G_c(s) \approx \frac{1}{H_c(s)}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ + \phi(\omega_c) \\ &= 180^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{1}{0.84} \bullet 42 + \arctan \frac{1}{8.4} \bullet 42 - \arctan \frac{1}{400} \bullet 400 \\ &= 90^\circ - 88^\circ + 78^\circ - 5^\circ = 75^\circ \end{aligned}$$

$$T_1 = -T_2 + T_c + T_m + K_t K_m T_c$$

$$K_t = \frac{1}{K_m} \left(\frac{T_2 + T_1 - T_m}{T_c} - 1 \right) = 0.022s$$

$$H_C(s) = K_t S \bullet \frac{T_c S}{T_c S + 1} \quad K_t = \frac{1}{\omega_c} = \frac{1}{42} = 0.023 \text{ sec}$$

$$|H_C(j\omega)| = \left| K_t j\omega \bullet \frac{T_c j\omega}{T_c j\omega + 1} \right| \approx \left| K_t j\omega \bullet \frac{T_c j\omega}{T_c j\omega} \right| = 1$$

$$G_m(s) = \frac{400(\frac{S}{8.4}+1)}{S(\frac{S}{0.84}+1)(\frac{S}{400}+1)} \quad G(s) = \frac{400}{S(\frac{1}{40}S+1)}$$

等效：串联滞后—超前补偿网络传递函数 $G_c(s) = \frac{G_m(s)}{G(s)} = \frac{(\frac{S}{8.4}+1)(\frac{S}{40}+1)}{(\frac{S}{0.84}+1)(\frac{S}{400}+1)}$

第七章状态空间描述法

7.1 线性系统的状态空间描述法

- 一、问题的提出

1. 控制系统的两种基本描述方法:

- 输入—输出描述法——经典控制理论
- 状态空间描述法——现代控制理论

2. 经典控制理论的特点:

- 优点: 对单入—单出系统的分析和综合特别有效。
- 缺点: 内部的信息无法描述, 仅适于单入—单出系统。

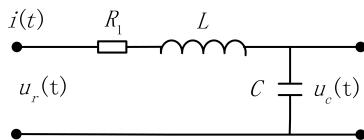
3. 现代控制理论

- 适应控制工程的高性能发展需要, 于 60 年代提出。
- 可处理时变、非线性、多输入—多输出问题。
- 应用方面的理论分支: 最优控制、系统辨识, 自适应控制.....

- 二、状态和状态空间

1. 先看一个例子:

例 7.1 试建立图示电路的数学模型。



$$L \frac{di(t)}{dt} + u_c(t) + Ri(t) = u_r(t)$$

$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}$$

$$\begin{cases} \frac{du_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}i(t) \\ \frac{di(t)}{dt} = -\frac{1}{L}u_c - \frac{R}{L}i(t) + \frac{1}{L}u_r(t) \end{cases}$$

在已知 $u_r(t)$ 的情况下, 只要知道 $u_c(t)$ 和 $i(t)$ 的变化特性, 则其他变量的变化均可知道。故 $u_c(t)$ 和 $i(t)$ 称为“状态变量”。

$$x_1(t) = u_c(t), x_2(t) = i(t)$$

及

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \dot{x}_i (i = 1, 2)$$

则有

2. 状态与状态变量的定义

控制系统的状态为完全描述系统的一个最小变量组, 该组中的每个变量称为状态变量。如上例中,

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

为系统的状态, $x_i(t)$, ($i = 1, 2$) 为状态变量。

3. 状态向量:

4. 状态空间:

定义: 所有状态构成的一个实数域上的(线性)向量空间称为状态空间。

5. 方程:

状态变量的一阶导数与状态变量、输入量的关系表达式称为状态方程(见上例);系统输出量 $y(t)$ 与状态变量、输入量的关系的表达式称为输出方程。

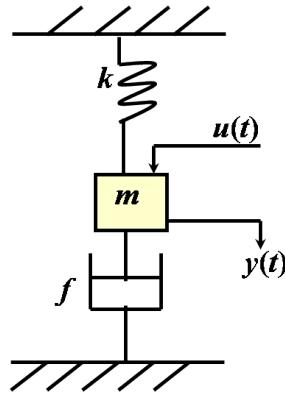
• 三. 状态变量的选取

1. 状态变量的选取是非唯一的。

2. 选取方法

- 1) 可选取初始条件对应的变量或与其相关的变量作为系统的状态变量。
- 2) 可选取独立储能（或储信息）元件的特征变量或与其相关的变量作为控制系统的状态变量。（如电感电流 i 、电容电压 u_c 、质量 m 、速度 v 等。）

例 7.2 图示弹簧——质量——阻尼器系统，外作用力 $u(t)$ 为该系统的输入量，质量的位移 $y(t)$ 为输出量，试列写该系统的状态方程和输出方程。



$$m \frac{d^2y(t)}{dt^2} + f \frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = u(t)$$

$$x_1(t) = y(t) \quad x_2(t) = \dot{y}(t)$$

$$\dot{x}_1 = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y}(t) = -\frac{1}{m}[ky(t) + f\dot{y}(t)] + \frac{1}{m}u(t)$$

$$= -\frac{K}{m}x_1(t) - \frac{f}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

例 7.3 已知系统微分方程组为

$$\begin{aligned} u_r &= R_1 i_1 + \frac{1}{c_1} \int (i_1 - i_2) dt \\ \frac{1}{c_1} \int (i_1 - i_2) dt &= R_2 i_2 + \frac{1}{c_2} \int i_2 dt \\ u_c &= \frac{1}{c_2} \int i_2 dt + u_r \end{aligned}$$

其中， u_r 为输入， u_c 为输出， R_1 、 C_1 、 R_2 、 C_2 为常数。试列写系统状态方程和输出方程。

解：选 $x_1 = \int i_1 dt$, $x_2 = \int i_2 dt$

$$\begin{aligned}
 u_r &= R_1 i_1 + \frac{1}{c_1} \int (i_1 - i_2) dt \implies u_r = R_1 \dot{x}_1 + \frac{1}{c_1} (x_1 - x_2) \\
 \frac{1}{c_1} \int (i_1 - i_2) dt &= R_2 i_2 + \frac{1}{c_2} \int i_2 dt \implies \frac{1}{c_1} (x_1 - x_2) = R_2 \dot{x}_2 + \frac{1}{c_2} x_2 \\
 u_c &= \frac{1}{c_2} \int i_2 dt + u_r \implies u_c = \frac{1}{c_2} x_2 + u_r
 \end{aligned}$$

写成向量—矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/R_1 C_1 & 1/R_1 C_1 \\ 1/R_2 C_1 & -1/R_2 C_1 - 1/R_2 C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/R_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1/C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + u$$

• 四. 状态空间表达式

1. 单输入单输出线性定常连续系统

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 u \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 u \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n u \end{array} \right\}$$

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n + d u$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

2. 一般线性系统状态空间表达式 (p 输入 q 输出)

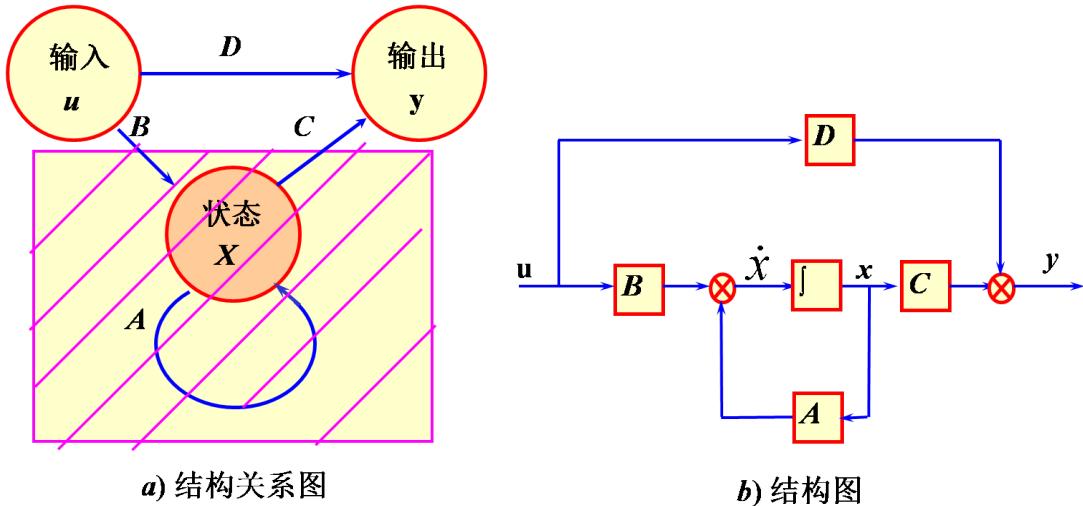
$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

$$y = C(t)x + D(t)u$$

3. 线性定常系统状态空间表达式

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$



- 五. 线性定常系统状态空间表达式的建立

- 方法: 机理分析法、实验法

- 线性定常单变量系统 (单输入—单输出系统)

- 由微分方程建立

$$\begin{aligned} & y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{n-2} + \cdots + a_1y^{(1)} + a_0y \\ & = b_{m-1}u^{m-1} + \cdots + b_1u^{(1)} + b_0u \end{aligned}$$

(a). 在输入量中不含有导数项时:

$$x_1 = y, x_2 = y^{(1)}, \dots, x_n = y^{(n-1)}$$

则 $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n, \dot{x}_n = -a_0x_1 - a_1$

写成向量—矩阵形式 (或系统动态结构图):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

例 7.4 已知系统微分方程为

$$\ddot{y} + 3\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 3u$$

列写系统的状态空间表达式。

解：选 $x_1 = y, x_2 = \dot{y}, x_3 = \ddot{y}$

(b). 输入量中含有导数项时：

(2) 由传递函数建立——即实现

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- 可控规范型实现

A) $b_n = 0$

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{y(s)}{z(s)} \cdot \frac{z(s)}{u(s)}$$

$$\frac{z(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1s + a_0}$$

$$\frac{y(s)}{z(s)} = b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1s + b_0$$

$$z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_1\dot{z} + a_0z = u$$

$$y = b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \cdots + b_1\dot{z} + b_0z$$

B) $b_n \neq 0$

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_ns^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

$$= b_n + \frac{f_{n-1}s^{n-1} + f_{n-2}s^{n-2} + \cdots + f_1s + f_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

$$= b_n + \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$f_{n-1} = (b_{n-1} - a_{n-1}b_n), \quad f_{n-2} = (b_{n-2} - a_{n-2}b_n)$$

$$f_1 = (b_1 - a_1b_n), \quad f_0 = (b_0 - a_0b_n)$$

$$y(s) = b_n u(s) + \frac{N(s)}{D(s)} u(s)$$

例 7.5 已知系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{s^2 + 8s + 15}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8}$$

试求其能控规范型实现，并画出系统状态图。

解：由 $b_n = b_3 = 0$ ，对照标准型，可得实现为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 15 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

例 7.6 已知系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{s^3 + 8s^2 + 8s + 15}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8}$$

试求其能控规范型实现，并画出系统状态图。

解：由 $b_n = b_3 \neq 0$, 对照标准型

$$G(s) = \frac{s^3 + 8s^2 + 8s + 15}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8} = 1 + \frac{s^2 - 6s + 7}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 7 & -6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + u$$

- 能观测规范型实现

与能控规范型关系：

$$A^* = A^T, B^* = C^T, C^* = B^T$$

例 7.7 已知系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{s^2 + 8s + 15}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8}$$

试求其能观测规范型实现，并画出系统状态图。

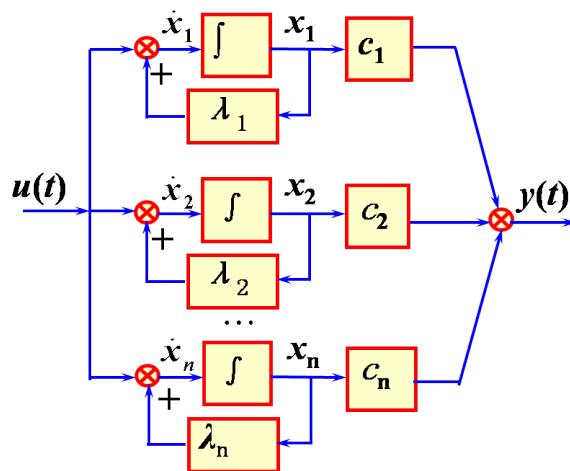
- 对角线规范实现

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{c_1}{s - \lambda_1} + \frac{c_2}{s - \lambda_2} + \cdots + \frac{c_n}{s - \lambda_n} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - \lambda_i}$$

取 $x_i(s) = \frac{1}{s - \lambda_i} u(s)$ ，则 $y(s) = \sum_{i=1}^n c_i x_i$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

结构图



例 7.8 求 $G(s) = \frac{s^2 + 8s + 15}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8}$ 的对角线规范型实现，并画出系统状态图。

解：

$$G(s) = \frac{s^2 + 8s + 15}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$

$$= \frac{8}{3} \frac{1}{s+1} - \frac{3}{2} \frac{1}{s+2} - \frac{1}{6} \frac{1}{s+4}$$

则对角线规范型实现为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

- 约当规范型实现—特征方程有重根时

$$G(s) = \frac{c_{11}}{(s - \lambda_1)^3} + \frac{c_{12}}{(s - \lambda_1)^2} + \frac{c_{13}}{(s - \lambda_1)} + \frac{c_4}{s - \lambda_4} + \cdots + \frac{c_n}{s - \lambda_n}$$

令

$$x_{13}(s) = \frac{1}{(s - \lambda_1)} u(s)$$

$$x_{12}(s) = \frac{1}{(s - \lambda_1)^2} u(s) = \frac{1}{(s - \lambda_1)} x_{13}(s)$$

$$x_{11}(s) = \frac{1}{(s - \lambda_1)^3} u(s) = \frac{1}{(s - \lambda_1)} x_{12}(s)$$

则

$$\dot{x}_{11} = \lambda_1 x_{11} + x_{12}$$

$$\dot{x}_{12} = \lambda_1 x_{12} + x_{13}$$

$$\dot{x}_{13} = \lambda_1 x_{13} + u$$

$$\dot{x}_4 = \lambda_4 x_4 + u$$

⋮

$$\dot{x}_n = \lambda_n x_n + u$$

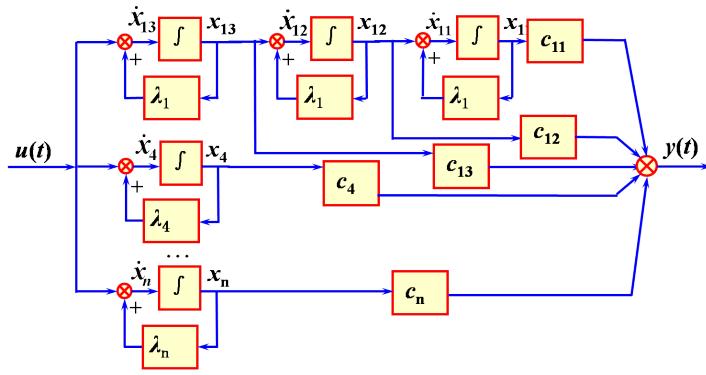
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \\ \dot{x}_{13} \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_4 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}$$

当 $G(s)$ 有重极点时, 设 $-p_i$ 中有 k 重极点

$$\begin{aligned} \frac{y(s)}{u(s)} = G(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s+p_1)^k (s+p_{k+1}) \cdots (s+p_n)} \\ &= \frac{c_1}{(s+p_1)^k} + \frac{c_2}{(s+p_1)^{k-1}} + \cdots + \frac{c_k}{s+p_1} + \frac{c_{k+1}}{s+p_{k+1}} + \cdots + \frac{c_n}{s+p_n} \end{aligned}$$

$$c_j = \lim_{s \rightarrow -p_j} \frac{1}{(j-1)!} \left[\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} (s+p_1)^k G(s) \right], \quad j = 1, \dots, k$$



$$c_i = \lim_{s \rightarrow -p_i} (s + p_i) G(s), \quad i = k+1, \dots, n$$

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

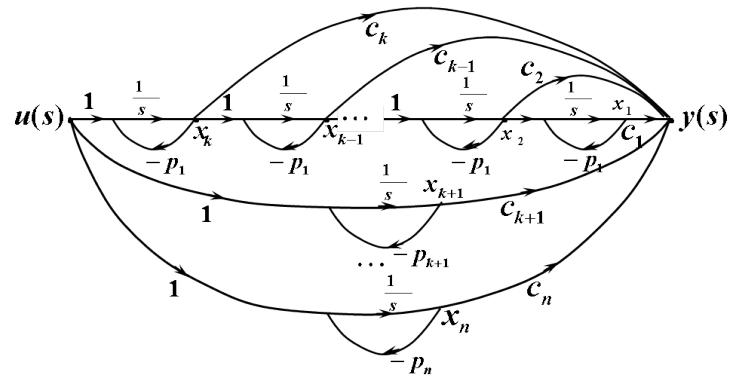
$$G_1(s) = \frac{c_1}{(s+p_1)^k} + \frac{c_2}{(s+p_1)^{k-1}} + \dots + \frac{c_k}{s+p_1}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_{k-1} \\ \dot{x}_k \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -p_1 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & -p_1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -p_1 \\ \vdots & & & & & -p_{k+1} \\ \vdots & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ x_k \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ x_k \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-1} & c_k & c_{k+1} & \cdots & c_n \end{bmatrix} x$$

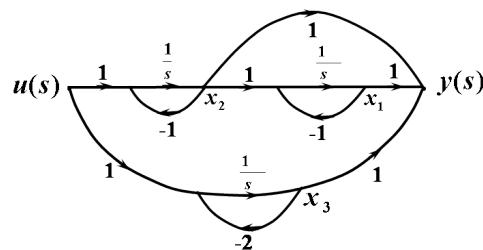
例 7.9

$$G(s) = \frac{2s^2 + 6s + 5}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2} = \frac{2s^2 + 6s + 5}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$



(3) 状态空间表达式的线性变换

a. 思路:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u \\ \bar{y} = \bar{c}\bar{x} + \bar{d}u = y \end{array} \right\}$$

b. 变换前后系数矩阵关系: $\because x = p\bar{x}$, $\dot{x} = p\dot{\bar{x}}$,

代入原状态方程, 有

$$\left. \begin{array}{l} p\dot{\bar{x}} = Ap\bar{x} + bu \\ y = cp\bar{x} + du \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \dot{\bar{x}} = p^{-1}Ap\bar{x} + p^{-1}bu \\ y = cp\bar{x} + du \end{array} \right\}$$

例 7.10 试将状态方程

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

变换为对角线规范型。

解:

1) 求特征值:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ 6 & \lambda + 11 & -6 \\ 6 & 11 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$$

$$= (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$$

2) 求特征向量和变换矩阵 P

$\lambda = -1$ 对应的 p_1

$$AP_1 = \lambda_1 P_1,$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_{11} \\ -p_{12} \\ -p_{13} \end{bmatrix} \quad p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} \quad p^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5/2 & -2 \\ -3 & -4 & 3 \\ 3 & 3/2 & -1 \end{bmatrix}$$

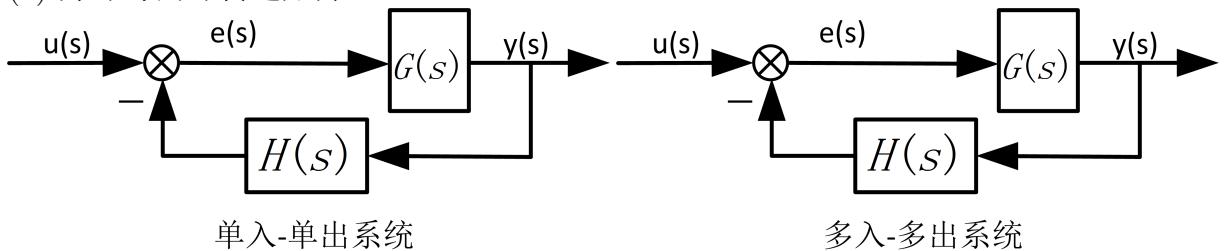
$$\Lambda = \bar{A} = p^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \bar{b} = p^{-1}b = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. 线性定常多输入—多输出系统

(1) 传递函数矩阵与状态系数矩阵间的关系

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

(2) 开环与闭环传递矩阵



(3) 传递矩阵的对角化

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ \vdots \\ y_q(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & g_{qp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ \vdots \\ u_p(s) \end{bmatrix}$$

(4) 传递矩阵的实现

- 单输入—多输出时的实现

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_1(s) \\ \vdots \\ g_q(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 + \hat{g}_1(s) \\ \vdots \\ d_q + \hat{g}_q(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{g}_1(s) \\ \vdots \\ \hat{g}_q(s) \end{bmatrix} = d + \hat{G}(s)$$

$$\hat{G}(s) = \begin{bmatrix} N_1(s)/D(s) \\ N_2(s)/D(s) \\ \vdots \\ N_q(s)/D(s) \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} \beta_{1,n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_{11}s + \beta_{10} \\ \beta_{2,n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_{21}s + \beta_{20} \\ \cdots \\ \beta_{q,n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_{q1}s + \beta_{q0} \end{bmatrix}}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

可控规范型

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = Ax + bu$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{10} & \cdots & \beta_{1,n-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \beta_{q0} & \cdots & \beta_{q,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_q \end{bmatrix} u = Cx + du$$

例 7.11 试求下列单输入—双输出系统传递函数矩阵的可控标准形实现。

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{s+4}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$\text{解: } G(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{3}{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{s^2+3s+2} \begin{bmatrix} s+3 \\ 3(s+2) \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = Cx + Du = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

- 多输入—单输出时的实现

解题思路:

a. 求对应的单入多出系统 $G_T(s)$ 的实现;

b. 利用对偶关系求 $G(s)$ 的实现。

例 7.12 线性定常系统传递函数矩阵如下, 求系统的可控标准形实现。

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2(s+3)}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+4}{s+3} \end{bmatrix}$$

解: a. 先求对应的单输入—双输出系统的实现

$$G^T(s) = \begin{bmatrix} \frac{2(s+3)}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{s+4}{s+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2(s+3)}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} 2(s+3)^2 \\ (s+1)(s+2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \begin{bmatrix} 2s^2 + 12s + 18 \\ s^2 + 3s + 2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = Cx + Du = \begin{bmatrix} 18 & 12 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

b. 再转换为双输入—单输出系统的实现

$$\therefore \bar{A} = A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = C^T = \begin{bmatrix} 18 & 2 \\ 12 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{D} = D^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

故原系统的实现为:

$$\dot{x} = \bar{A}x + \bar{B}u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18 & 2 \\ 12 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \bar{C}x + \bar{D}u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

- 方法的验证

$$\begin{aligned}
G(s) &= \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 & 6 \\ -1 & s & 11 \\ 0 & -1 & s+6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 18 & 2 \\ 12 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\text{adj} \begin{bmatrix} s & 0 & 6 \\ -1 & s & 11 \\ 0 & -1 & s+6 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} s & 0 & 6 \\ -1 & s & 11 \\ 0 & -1 & s+6 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 18 & 2 \\ 12 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} s^2 + 6s + 11 & -6 & -6s \\ s+6 & s(s+6) & -(11s+6) \\ 1 & s & s^2 \end{bmatrix}}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \begin{bmatrix} 18 & 2 \\ 12 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 & 2 \\ 12 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} 2(s+3)^2 & (s+1)(s+2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2(s+3)}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2(s+3)}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+4}{s+3} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

对比原题所给传递函数，可见结果一致。

7.2 状态方程求解

- 线性定常连续系统

1. 齐次状态方程的解 ($\dot{x} = Ax \leftarrow$ 自由运动)

(1) 幂级数法

设解为: $x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_k t^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$

$$\dot{x}(t) = b_1 + 2b_2 t + \dots + k b_k t^{k-1} + \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k b_k t^{k-1} \underline{\dot{x}} = \underline{\underline{Ax}} A(b_0 + b_1 t + \dots + b_k t^k + \dots)$$

$$b_1 = A b_0 \quad b_2 = \frac{1}{2} A^2 b_0 \quad \dots \quad b_k = \frac{1}{k!} A^k \cdot b_0$$

$$x(t) = b_0 + A b_0 t + \frac{1}{2} A^2 b_0 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} A^k b_0 t^k + \dots$$

$$= (I + At + \frac{1}{2} A^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \dots) b_0$$

$$\underline{x(0)} = b_0 (\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k) x(0)$$

即 $x(t) = e^{At} x(0)$

[定义 $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k$, 称为矩阵指数, 状态转移矩阵]

拉氏变换法

由 $\dot{x} = Ax$ 两边取拉氏变换, 得

$$sX(s) - X(0) = AX(s)$$

$$(sI - A)X(s) = X(0)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} \cdot X(0)$$

两边取拉氏反变换

$$(x(t) = L^{-1}[X(s)] = L^{-1}[(sI - A)^{-1} X(0)])$$

$$= L^{-1}[(sI - A)^{-1}]X(0)$$

比较前式, 有 $e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$

状态转移矩阵的运算性质

$$\Phi(t) = e^{At} = I + At + (\frac{1}{2})A^2 t^2 + \dots + (1/k!)A^k t^k + \dots$$

(1) $\Phi(0) = I$ — 初始状态

$$(2) \dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) = \Phi(t)A, \quad \dot{\Phi}(0) = A$$

$$(3) \Phi(t_1 + t_2) = \Phi(t_1)\Phi(\pm t_2) \\ = \Phi(\pm t_2)\Phi(t_1) \text{——线性关系}$$

$$(4) \Phi^{-1}(t) = \Phi(-t), \quad \Phi^{-1}(-t) = \Phi(t) \text{——可塑性}$$

$$(5) x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) \\ \because x(t_0) = \Phi(t_0)x(0), \\ \text{则 } x(t) = \Phi(t)x(0) = \Phi(t)[\Phi^{-1}(t_0)x(t_0)] \\ = \Phi(t)\Phi(-t_0)x(t_0) = \Phi(t - t_0)x(t_0)$$

$$(6) \Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = e^{(t_2-t_1)A}e^{t_1-t_0}A \text{——可分阶段转移}$$

$$(7) [\Phi(t)]^k = \Phi(kt)$$

$$(8) e^{(A+B)t} = e^{At}\dot{e}^{Bt} = e^{Bt}\dot{e}^{At} \quad (AB = BA)$$

$$(9) \text{引入非奇异变换 } x = p\bar{x} \text{ 后, } \Phi(t) = p^{-1}e^{At}p$$

(10) 两种常见的状态转移矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}_{m \times m}, \Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & te^{\lambda t} \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

例 7.13 设有一控制系统, 其状态方程为 $\dot{x} = Ax$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

在 $t_0 = 0$ 时, 状态变量的初值为 $[x_1(0) \ x_2(0) \ x_3(0)]$, 试求该方程的解。

解：

$$\begin{aligned}
 (sI - A) &= \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 2 & s+3 \end{bmatrix} \\
 (sI - A)^{-1} &= \frac{\text{adj}(sI - A)}{|sI - A|} = \frac{\begin{bmatrix} (s+2)(s+1) & s+3 & 1 \\ 0 & s(s+3) & s \\ 0 & -2s & s^2 \end{bmatrix}}{s(s+1)(s+2)} \\
 &= \begin{bmatrix} 1/s & (s+3)/s(s+1)(s+2) & 1/s(s+1)(s+2) \\ 0 & (s+3)/(s+1)(s+2) & 1/(s+1)(s+2) \\ 0 & -2/(s+1)(s+2) & s/(s+1)(s+2) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1/s & \frac{1.5}{s} + \frac{-2}{s+1} + \frac{0.5}{s+2} & \frac{0.5}{s} + \frac{-1}{s+1} + \frac{0.5}{s+2} \\ 0 & \frac{2}{s+1} + \frac{-1}{s+2} & \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+2} \\ 0 & \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+2} & \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \end{bmatrix} \\
 \Phi(t) &= e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}] \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1.5 - 2e^{-t} + 0.5e^{-2t} & 0.5 - e^{-t} + 0.5e^{-2t} \\ 0 & 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \Phi(t)x(0) = \Phi(t) \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1(0) + (1.5 - 2e^{-t} + 0.5e^{-2t})x_2(0) + (0.5 - e^{-t} + 0.5e^{-2t})x_3(0) \\ (2e^{-t} - e^{-2t})x_2(0) + (e^{-t} - e^{-2t})x_3(0) \\ (-2e^{-t} + 2e^{-2t})x_2(0) + (-e^{-t} + 2e^{-2t})x_3(0) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

例 7.14 设系统状态方程为 $\dot{x} = Ax$ 。

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ 时, } x(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}; \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ 时, } x(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解: 设 } \Phi(t) &= \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) - \Phi_{12}(t) \\ \Phi_{21}(t) - \Phi_{22}(t) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\Phi_{11}(t) - \Phi_{12}(t) \\ 2\Phi_{21}(t) - \Phi_{22}(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

解方程组得,

$$\phi_{11}(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}, \phi_{12}(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}$$

$$\phi_{21}(t) = -e^{-t} + e^{-2t}, \phi_{22}(t) = -e^{-t} + 2e^{-2t}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -e^{-t} + e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A &= \dot{\Phi}(t)|_{t=0} \\
&= \left. \begin{bmatrix} -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -2e^{-t} + 4e^{-2t} \\ e^{-t} - 2e^{-2t} & e^{-t} - 4e^{-2t} \end{bmatrix} \right|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

例 7.15 设系统运动方程为 $\ddot{y} + (a+b)\dot{y} + aby = \dot{u} + cu$, 式中 a、b、c 均为实数, 试

求:

求系统状态空间表达式。

求系统状态转移矩阵。

解:

(1)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+c}{s^2+(a+b)s+ab}$$

$$= \frac{s+c}{(s+a)(s+b)}$$

$$= \frac{c-a}{b-a} \cdot \frac{1}{s+a} + \frac{c-b}{a-b} \cdot \frac{1}{s+b}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} \frac{c-a}{b-a} & \frac{c-b}{a-b} \end{bmatrix} x \end{array} \right.$$

(2)

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= L^{-1}[(sI - A)^{-1}] = L^{-1}\left[\begin{array}{cc} s+a & 0 \\ 0 & s+b \end{array}\right]^{-1} \\ &= L^{-1}\left[\begin{array}{cc} \frac{1}{s+a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+b} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} e^{-at} & 0 \\ 0 & e^{-bt} \end{array}\right] \end{aligned}$$

2. 非齐次状态方程 $x = Ax + Bu$ 的解

(1) 直接法 (积分法)

$$\because \frac{d}{dt}(e^{-At}x) = -Ae^{-At}x + e^{-At}\dot{x} = e^{-At}(\dot{x} - AX) = e^{-At}Bu$$

$$\therefore \int_0^t \frac{d}{d\tau}(e^{-A\tau}x)d\tau = e^{-At}x(t) - x(0) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

(2) 拉氏变换法

$$sx(s) - x(0) = Ax(s) + Bu(s)$$

$$(sI - A)x(s) = x(0) + Bu(s)$$

$$x(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}Bu(s)$$

则 $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}x(0)] + \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}Bu(s)]$

(由 $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$ 可得)

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

例 7.16 在上例中, 当输入函数 $u(t)=1(t)$ 时, 求系统状态方程的解。

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-at} & 0 \\ 0 & e^{-bt} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

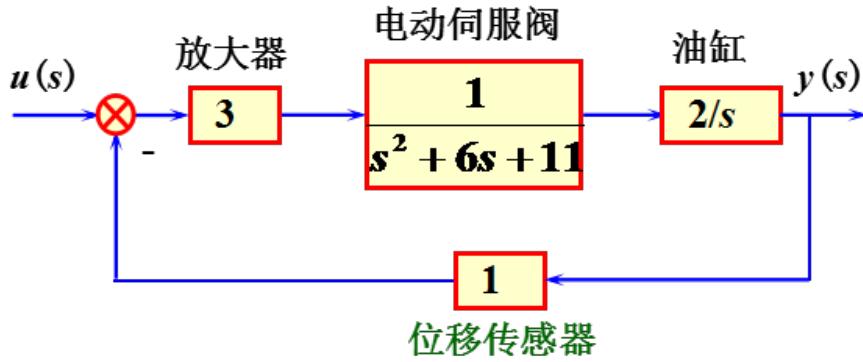
$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-at} & 0 \\ 0 & e^{-bt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-a(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-b(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-at}x_1(0) \\ e^{-bt}x_2(0) \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-a(t-\tau)} \\ e^{-b(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{a}(1 - e^{-at}) + e^{-at}x_1(0) \\ \frac{1}{b}(1 - e^{-bt}) + e^{-bt}x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{c-a}{b-a} & \frac{c-b}{a-b} \end{bmatrix} x(t)$$

例 7.17 设有一电液位置伺服系统，已知系统方块图如下所示。试用状态空间法对系统进行分析。



解：由图

$$G(s)H(s) = \frac{6}{s(s^2 + 6s + 11)}$$

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{3}{s+1} + \frac{-6}{s+2} + \frac{3}{s+3}$$

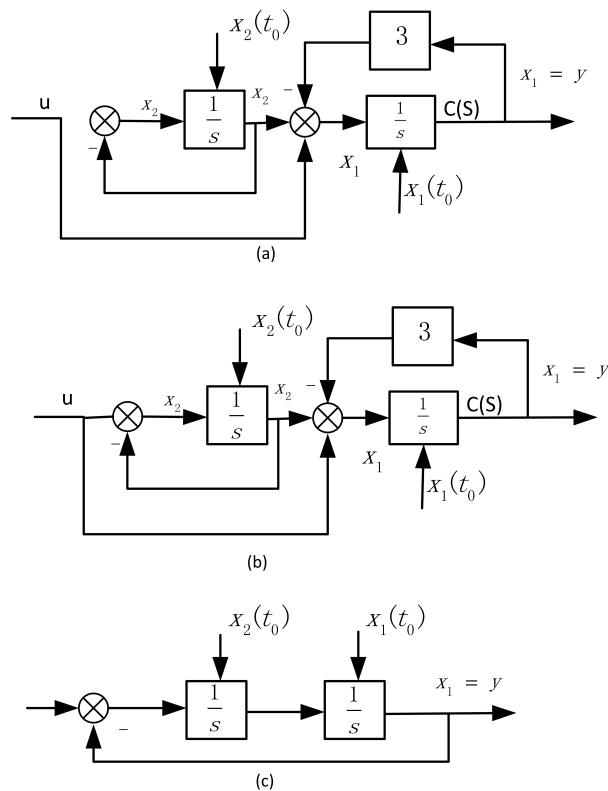
$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
\Phi(t) &= L^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \\
x(t) &= \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \\
&= \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2(t-\tau)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} d\tau \\
&= \int_0^t \begin{bmatrix} 3e^{-(t-\tau)} \\ -6e^{-2(t-\tau)} \\ 3e^{-3(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} 3 - 3e^{-t} \\ -3 + 3e^{-2t} \\ 1 - e^{-3t} \end{bmatrix} \\
y &= Cx = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 - 3e^{-t} \\ -3 + 3e^{-2t} \\ 1 - e^{-3t} \end{bmatrix} = 1 - 3e^{-t} + 3e^{-2t} - e^{-3t}
\end{aligned}$$

7.3 可控性与可观测性

- 一、可控与可观测的概念、意义
- 二、定义

设线性定常连续系统的状态空间表达式为：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$



可控与可观测的概念

1. 可控性定义

如果存在一个控制 $u(t)$, 能在有限时间间隔 $[t_o, t_f]$ 内, 使系统从其一初态 $x(t_o)$ 转移到任意指定的终态 $x(t_f)$, 则称此状态 $x(t_o)$ 是完全可控的, 简称系统可(能)控。(只要有一个状态变量不可控, 则系统不可控)。

2. 可观测性定义

系统在稳定输入 $u(t)$ 作用下, 对任意初始时刻 t_o , 若能在有限时间间隔 $[t_o, t_f]$ 之内, 根据从 t_o 到 t_f 对系统输出 $y(t)$ 的观测值和输入 $u(t)$, 唯一地确定系统在 t_o 时刻的状态 $x(t_o)$, 则称系统是状态完全可观测的, 简称系统可(能)可观测。(只要有一个状态变量不能(可)可观测, 则系统不可可观测)。

- 三、可控性与可观测性判据

- 可控性判据

可控规范型:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

判据一: 线性定常连续系统状态完全可控的充要条件是
可控性判别阵:

$$Q_C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

必须满秩。即 $\text{rank}(Q_C) = n$ (n 为系统维数)

例 7.18 设系统状态方程为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

试判别其状态的可控性。

解:

$$Q_C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(Q_C) = 2 = n$$

例 7.19 已知三阶二输入系统状态方程, 试判别其状态的可控性。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

解：

$$Q_C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

判据二：设线性定常系统具有互异的特征值，则系统可控的充要条件是，系统经非奇异变换后的对角线规范型方程：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda_n & & \end{bmatrix} \bar{x} + \bar{B}u$$

中， \bar{B} 阵不包含元素全为零的行。

例 7.20 试确定如下几个经非奇异变换后的对角线规范型系统的可控性。

1)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} u$$

2)

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} u$$

3)

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

4)

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

判据三：约当规范型

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & J_n \end{bmatrix} \bar{x} + \bar{B}u$$

中，与每个约当小块 $J_i (i=1,2,\dots,k)$ 的最后一行相对应的阵 \bar{B} 中的所有那些行，其元素不全为零。（若两个约当块有相同的特征值，此结论不成立。）

例 7.21 试判断下列已经非奇异变换为约当规范型的系统的可控性。

1)

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

2)

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

2. 可观测性判据

可观测规范型:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

判据一: 线性定常连续系统状态完全能观测的充分必要条件为 可观测性矩阵:

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} (= Q_c^T |_{B \rightarrow C})$$

必须满秩, 即 $\text{rank}(Q_o) = n$ (n 为系统维数)

例 7.22 已知系统的 A, C 阵如下, 试判断其可观性。

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

解:

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$$

例 9.23 试判别如下系统的可观测性。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

解：

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

判据二：设线性定常连续系统具有不相等的特征值，则其状态可观测的充要条件是系统经非奇异变换后的对角线规范型：

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \bar{x} \\ y = \bar{C} \bar{x} \end{array} \right.$$

的矩阵 \bar{C} 中不包含元素全为零的列。

例 7.24 试判别以下系统的状态可观测性。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

判据三：约当规范型

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_n \end{bmatrix} \bar{x} + \bar{B}u$$

中，与每个约当块 $J_i(i = 1, 2, 3, \dots, k)$ 首行相对应的矩阵 \bar{c} 中的那些列，其元素不全为零。(如果两个约当块有相同的特征值，此结论不成立)。

例 7.25 试判断下列系统的状态可观测性。

$$1) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \\ & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$2) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

• 四、能控能观性与传递函数的关系

1. 单输入单输出系统

- 1) 可控可观测的充要条件: 由动态方程导出的传递函数不存在零极点对消 (即传递函数可约)。
- 2) 可控的充要条件: $(sI - A)^{-1}b$ 不存在零极点对消。
- 3) 可观测的充要条件: $C(sI - A)^{-1}b$ 不存在零极点对消。

例 7.26 判断以下系统的状态可控性与可观测性。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u, y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

例 7.27 系统传递函数如下, 判断其可控性与可观测性。

$$G(s) = \frac{s^2 + 9s + 8}{s^2 + 6s + 5}$$

解:

$G(s) = \frac{(s+1)(s+8)}{(s+1)(s+5)}$, 故不满足可控可观测的条件。

由 $G(s) = 1 + \frac{3s+3}{s^2+6s+5}$, 有

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + u \end{array} \right.$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 5 & s+6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+5)} \begin{bmatrix} s+6 & 1 \\ -5 & s \end{bmatrix}$$

因 $(sI - A)^{-1}b = \frac{1}{(s+1)(s+5)} \begin{bmatrix} s+6 & 1 \\ -5 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+5)} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}$, 故可控。

而 $c(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+5)} \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+6 & 1 \\ -5 & s \end{bmatrix} = \frac{3}{(s+1)(s+5)} \begin{bmatrix} (s+1) & (s+1) \end{bmatrix}$, 则
 $= \frac{3(s+1)}{(s+1)(s+5)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$

系统不可观测。

例 7.28 用两种方法验证：系统（1）的状态可控性；系统（2）的状态可观测性。

$$(1) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$(2) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

2. 多输入多输出系统

- 1) 可控的充要条件： $(sI - A)^{-1}B$ 的 n 行线性无关。
- 2) 可观测的充要条件： $C(sI - A)^{-1}$ 的 n 列线性无关。

• 五、对偶原理

设系统 $S_1(A_1, B_1, C_1)$ 与系统 $S_2(A_2, B_2, C_2)$ 互为对偶系统，则：

$$A_2 = A_1^T, B_2 = C_1^T, C_2 = B_1^T$$

若系统 $S_1(A_1, B_1, C_1)$ 可控，则系统 $S_2(A_2, B_2, C_2)$ 可观测；

若系统 $S_1(A_1, B_1, C_1)$ 可观测，则系统 $S_2(A_2, B_2, C_2)$ 可控；

证明： $Q_{1c} = [B_1 A_1 B_1 A_1^2 B_1 \dots A_1^{n-1} B_1]$

$$Q_{2o} = Q_{1c}^T = [B_1 A_1 B_1 A_1^2 B_1 \dots A_1^{n-1} B_1]^T$$

$$= \begin{bmatrix} B_1^T \\ B_1^T A_1^T \\ B_1^T (A_1^2)^T \\ \dots \\ B_1^T (A_1^{n-1})^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 A_2 \\ C_2 A_2^2 \\ \dots \\ C_2 A_2^{n-1} \end{bmatrix}$$

例 7.30 判断以下系统及其的状态可控性与可观测性。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} u$$

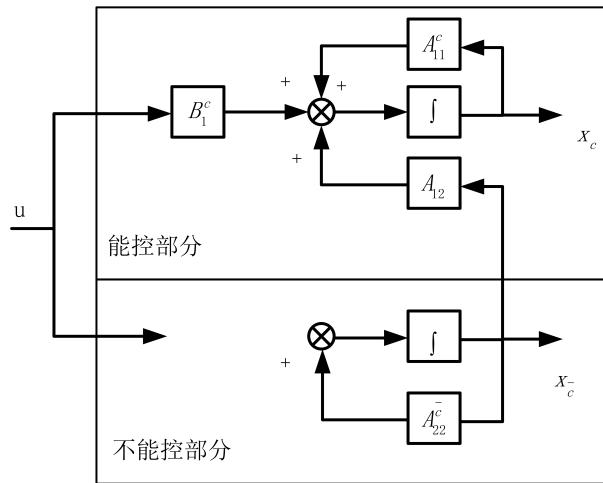
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- 六、线性系统的规范分解

线性系统可分解为四种系统:

| | 能控 | 能观测 | |:-:|:-:|:——:| | 1 | √ | √ | | 2 | √ | × | | 3 | × | √ | | 4 | × | × |

1. 能控性规范分解



能控性规范分解

定理: n 阶系统 A, B, C , $\text{rank}(Q_C) = k < n$, 则通过非奇异变换 $x = T_C \bar{x}$
可导出原系统按能控性规范分解的新系统 A_C, B_C, C_C , 有

$$(1) \dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^c & A_{12} \\ 0 & A_{22}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1^c \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [C_1^c \quad C_2^c] \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix}$$

x_c 是 k 维能控状态分量, $x_{\bar{c}}$ 为 $(n-k)$ 维不能控分量, (A_{11}^c, B_1^c, C_1^c) 为能控子系统。

$$(2) \quad \text{rank}(\left[B_1^c, A_{11}^c B_1^c, \dots, (A_{11}^c)^{k-1} B_1^c \right]) = k$$

$$(3) \quad G_c(s) = C(sI - A)^{-1}B = C_1^c(sI - A_{11}^c)^{-1}B_1^c$$

T_C 的求法:

i) 从 Q_C 中任选 k ($\text{rank}(Q_C) = k$) 个线性无关的列向量, 它为 T_C 的前 k 列: V_1, V_2, \dots, V_k ;

ii) 在 R^n 中再选 $n-k$ 个列向量, 记为 V_{k+1}, \dots, V_n , 需使得:

$$T_C = [V_1, \dots, V_k, V_{k+1}, \dots, V_n]$$

为非奇异。

(注意: V_{k+1}, \dots, V_n 不能连续在 Q_C 中选取。)

例 7.31 设线性定常系统如下, 判断其能控性; 若不完全能控, 试将该系统按能控性进行分解。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} x$$

解: 系统能控性判别阵

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(Q_c) = 2 < n = 3$$

所以系统是不安全能控的。

$$T_{c1} = B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T_{c2} = AB = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T_{c3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{即 } T_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 T_{c3} 是任意的, 只要能保证 T_c 非奇异即可。

变换后的系统的状态空间表达式

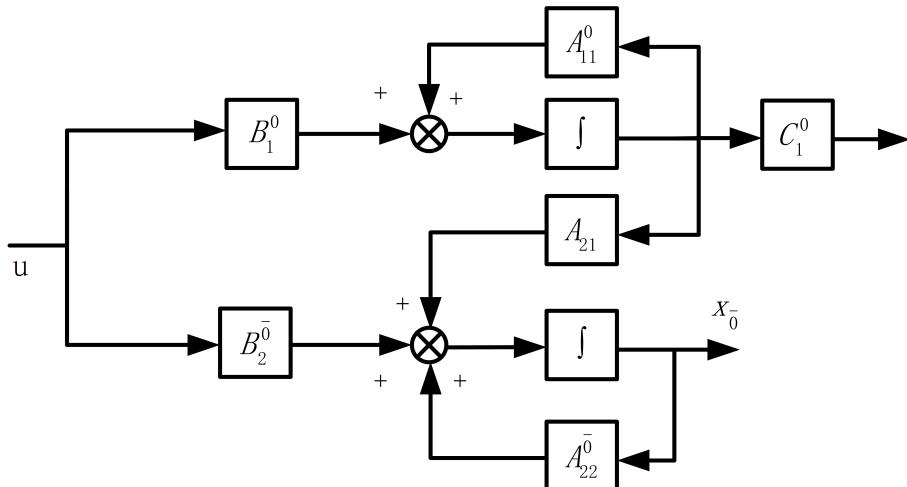
$$\dot{\bar{x}} = T_c^{-1}AT_c\bar{x} + T_c^{-1}Bu$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\
\text{即 } &\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\
y &= CT_c \bar{x} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

能控子系统为：

$$\dot{x}_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x_c + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} x_{\bar{c}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y_c = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x_c$$

2. 能观测性规范分解



能观测性规范分解

定理: n 阶系统 A, B, C , $\text{rank}(Q_o) = r < n$, 通过非奇异变换, 可将原系统变换为按能观测规范分解的新系统 (A_0, B_0, C_0) , 有

$$(1) \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_o \\ \dot{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^o & 0 \\ A_{21} & A_{22}^{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o \\ x_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1^o \\ B_2^{\bar{o}} \end{bmatrix} u$$

$$y = [C_1^o \ 0] \begin{bmatrix} x_o \\ x_{\bar{o}} \end{bmatrix}$$

x_o 为 r 维能观测状态分量; $x_{\bar{o}}$ 是 $(n-r)$ 维不能观测的状态分量。 A_{11}^o, B_1^o, C_1^o 能观测子系统。

$$(2) \text{rank}\left(\begin{bmatrix} C_1^o \\ C_1^o A_{11}^o \\ C_1^o (A_{11}^o)^{r-1} \end{bmatrix}\right) = r$$

$$(3) G_o(s) = C(sI - A)^{-1}B = C_1^o(sI - A_{11}^o)^{-1}B_1^o$$

T_0^{-1} 的求法:

i) 从 Q_o 中任选 $r(\text{rank}(W_o) = r)$ 个线性无关的行向量, 作为 T_o^{-1} 的前 r 个行向量。

ii) 在 R^n 中再选 $(n-r)$ 个行向量, 构成 T_o^{-1} , 并使 T_o^{-1} 为非奇异。

例 7.32 设线性定常系统如下, 判断其能观测性; 若不完全能观测, 试将该系统按能观测性进行分解。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} x$$

解系统能观测性判别阵

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(W_o) = 2 < n$$

所以系统是不完全能观测的。

$$T_{o1}^{-1} = C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$T_{o2}^{-1} = CA = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$T_{o3}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{即 } T_o^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_o = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 T_{o3}^{-1} 是任意的，只要能保证 T_o^{-1} 非奇异即可。

变换后的系统的状态空间表达式

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= T_o^{-1}AT_o\hat{x} + T_o^{-1}Bu \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

$$\text{即 } \begin{bmatrix} \dot{x}_o \\ \dot{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o \\ x_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = CT_o\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o \\ x_{\bar{o}} \end{bmatrix}$$

$$\text{能观测子系统为 } \dot{x}_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x_o + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u, \quad y_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_o$$

3. 线性系统的规范分解

引理系统 (A, B, C) 完全能控且完全能观测的充要条件是：

$$\text{rank}(Q_o, Q_c) = n$$

$$Q_o = qn \times n, \quad Q_c = n \times np$$

证明能控的充要条件： $\text{rank}(Q_C) = n$

能观的充要条件： $\text{rank}(Q_o) = n$

又由 Sylvester 不等式：

$$\text{rank}A + \text{rank}B - n \leq \text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}A, \text{rank}B\}$$

其中， $A \in F^{m \times n}, B \in F^{n \times q}$

因此，系统完全能控且完全能观测，则必有

$$\text{rank}(Q_o, Q_c) = n$$

定理完全能控、不完全能观测的 n 阶系统 (A, B, C)

$$\text{rank}Q_c = k < n, \quad \text{rank}(Q_o, Q_c) = r < k,$$

则可通过非奇异变换 $x = T_{co}\tilde{x}$, 将原系统 (A, B, C) 变换为按能控性和能观测性规范分解的系统 A_{co}, B_{co}, C_{co} 有：

(1)

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{co} \\ \dot{x}_{c\bar{o}} \\ \dot{x}_{\bar{c}o} \\ \dot{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{co} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22}^{co} & A_{23} & A_{24} \\ & & A_{33}^{co} & 0 \\ 0 & & A_{43} & A_{44}^{co} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1^{co} \\ B_2^{co} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [C_1^{co} \quad 0 \quad C_3^{co} \quad 0] \tilde{x}$$

$$x_{co} \quad x_{c\bar{o}} \quad x_{\bar{c}o} \quad x_{\bar{c}\bar{o}}$$

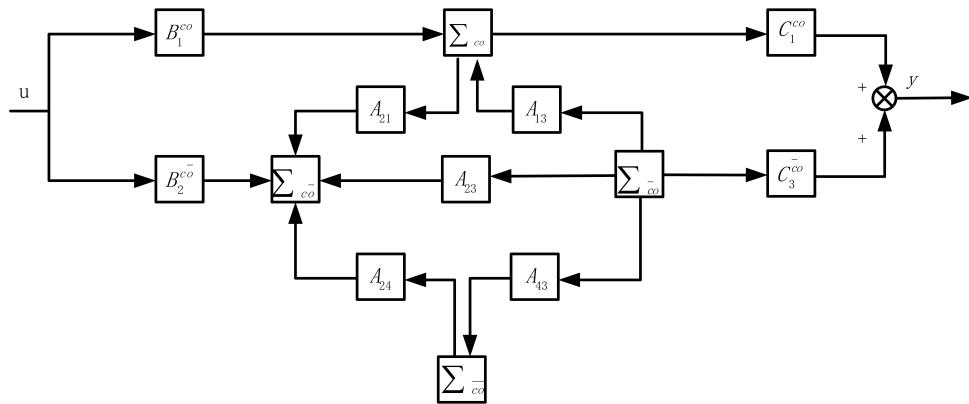
✓ ✓ × ×
 ✓ ✓ × ×

$A_1^{co}, B_1^{co}, C_1^{co}$ 为能控且能观测子系统。

$$(2) G_{co}(s) = C(sI - A)^{-1}B = C_1^{co}(sI - A_1^{co})^{-1}B_1^{co}$$

按能控性和能观测性进行规范分解的步骤

可只须经过一次变换对系统同时按能控性和能观测性进行结构分解，但变换阵的构造



线性系统的规范分解

需要涉及较多的线性空间概念。下面介绍一种逐步分解的方法。

- (1) 先将系统按能控性分解；
- (2) 将不能控的子系统按能观测性分解；
- (3) 将能控的子系统按能观测性分解；
- (4) 综合以上三次变换，导出系统同时按能控性和能观测性进行结构分解的表达式。

例 7.33 已知系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} x$$

是状态不完全能控和不完全能观测的，试将该系统按能控性和能观测性进行结构分解。

解：前例已将该系统按能控性分解

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix}$$

不能控子空间是能观测的，无需再进行分解。将能控子空间按能观测性进行分解。

$$\dot{x}_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x_c + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} x_{\bar{c}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{aligned}
y_c &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x_c \\
T_o^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \dot{x}_{co} \\ \dot{x}_{c\bar{o}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} x_{\bar{c}} + \\
\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\
\text{即 } \begin{bmatrix} \dot{x}_{co} \\ \dot{x}_{c\bar{o}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} x_{\bar{c}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\
y_c &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

综合以上两次变换结果，系统按能控性和能观测性分解为

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_{co} \\ \dot{x}_{c\bar{o}} \\ \dot{x}_{\bar{c}o} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{\bar{c}o} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{\bar{c}o} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$