

**CHALMERS**

# Formelsamling i hållfasthetslära

Magnus Ekh, Peter Hansbo och Jim Brouzoulis

28 augusti 2018





# 1 Stänger

$E A$  = dragstyvhet elastisk stång

$u(x)$  = axiell förskjutning

$\epsilon(x) = du/dx =$   
deformation (axialtöjning)

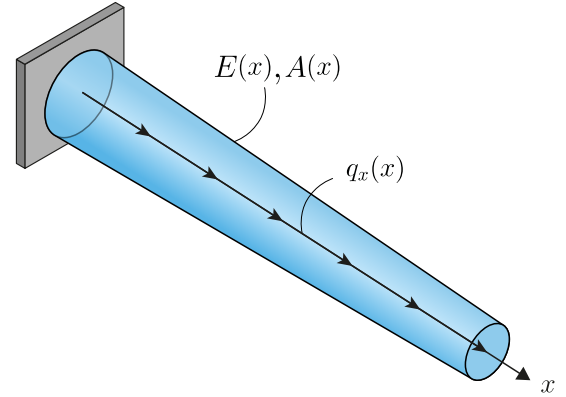
$N = E A \epsilon$  = snittnormalkraft

$q_x$  = yttre last (kraft/längd)  
Jämvikt:  $-dN/dx = q_x = K_x A$

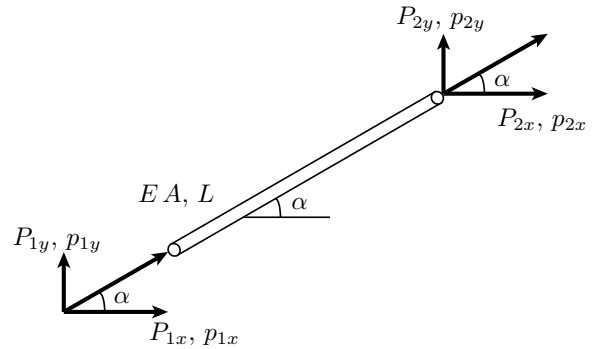
Stångens differentialekvation:

$$-\frac{d}{dx} \left[ E A \frac{du}{dx} \right] = q_x$$

Spänningen fås som:  $\sigma = N/A$



Styvhetsrelation för elastisk stång:



$$\begin{pmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{2x} \\ P_{2y} \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & \cos(\alpha) \sin(\alpha) & -\cos^2(\alpha) & -\cos(\alpha) \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) & -\cos(\alpha) \sin(\alpha) & -\sin^2(\alpha) \\ -\cos^2(\alpha) & -\cos(\alpha) \sin(\alpha) & \cos^2(\alpha) & \cos(\alpha) \sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \sin(\alpha) & -\sin^2(\alpha) & \cos(\alpha) \sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1x} \\ p_{1y} \\ p_{2x} \\ p_{2y} \end{pmatrix}$$

## 2 Axlar

$GK_v$  = vridstyvhet elastisk axel

$\varphi(x)$  = vridningsvinkeln

$v(x) = d\varphi/dx = \gamma/r =$   
deformation (förvridning)

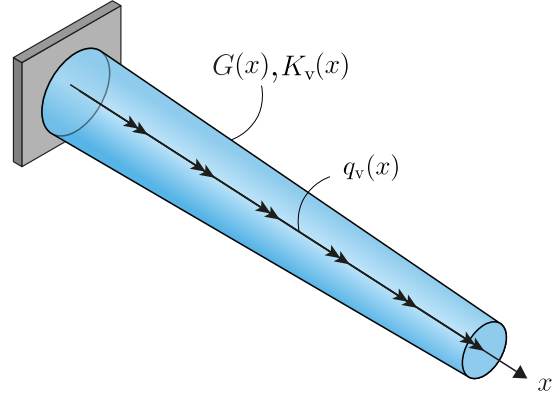
$M_v = GK_v v$  = snittvridmoment

$q_v(x)$  = yttre last (vridmoment/längd)

Jämvikt:  $-dM_v/dx = q_v(x) = f(x)$

Axelns differentialekvation:

$$-\frac{d}{dx} \left[ GK_v \frac{d\varphi}{dx} \right] = q_v$$



För ett cirkulärt tvärsnitt fås spänningen som:  $\tau(x, r) = M_v(x)r/K_v(x)$

För ett tunnväggigt cirkulärt tvärsnitt (vägg tjocklek  $t$ , medelradie  $\bar{r}$ ) fås spänningen som:  $\tau(x, r) = M_v(x)/(2\pi\bar{r}^2 t)$

För ett godtyckligt tunnväggigt slutet tvärsnitt med av medellinjen  $s$  innesluten area  $A_m$ , vägg tjocklek  $t(s)$  och minsta vägg tjocklek  $t_{\min}$ :

$$\tau_{\max} = M_v/(2 A_m t_{\min}), \quad K_v = \frac{4 A_m^2}{\oint \frac{ds}{t(s)}}$$

Snittmoment vid genomplasticerat (antag elastiskt idealplasticitet) tjockväggigt cirkulärt tvärsnitt (yttre radie  $b$ , inre radie  $a$ ):  $M_{vf} = \frac{2\pi}{3}(b^3 - a^3)\tau_s$

### 3 Balkar

$E I_y =$  böjstyvhet

$w(x) =$  transversell förskjutning

$\kappa(x) = -d^2w/dx^2 =$   
deformation (krökning)

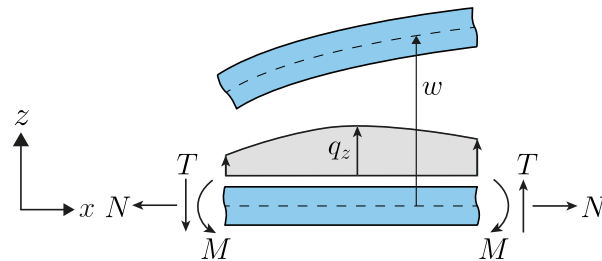
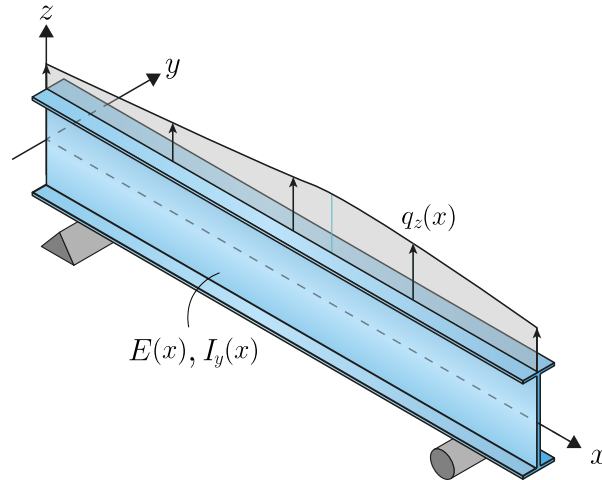
$M(x) = E I_y \kappa =$  snittböjmoment

$q(x) =$  yttre last (kraft/längd)

Jämvikt:  $dM/dx = T$ ,  $dT/dx = -q_z$

Balkens differentialekvation (elastiska  
linjens ekvation):

$$-\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \left[ EI \frac{d^2w}{dx^2} \right] = q_z$$



Naviers formel för böjnormalspänning:

$$\sigma(x, z) = \frac{N}{A} + \frac{Mz}{I_y}$$

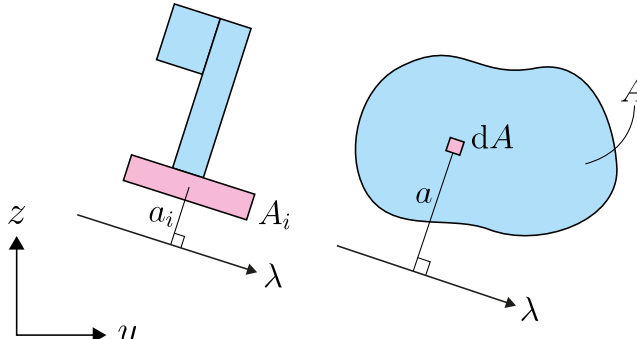
Jouravskis formel för böjskjuvspänning ( $S_y$  statiskt moment av arean  $A^*$  utanför snitt,  $b$  snittets bredd):

$$\tau(x, z) = \frac{S_y T}{I_y b}$$

## 4 Ytstorheter

Statiska momentet  $S_\lambda$  och yttröghetsmomentet  $I_\lambda$  m.a.p axeln  $\lambda$  definieras som:

$$S_\lambda = \sum_i A_i a_i = \int_A a \, dA$$

$$I_\lambda = \sum_i A_i a_i^2 = \int_A a^2 \, dA$$


Speciellt gäller att statiska moment och yttröghetsmoment m.a.p.  $y$  och  $z$ -axlarna:

$$S_y = \int_A z \, dA, \quad S_z = \int_A y \, dA, \quad I_y = \int_A z^2 \, dA, \quad I_z = \int_A y^2 \, dA$$

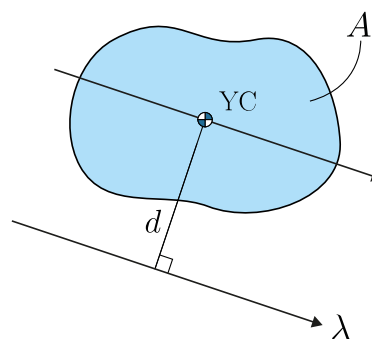
Koordinater för ytcentrum (YC):

$$\bar{y} = \frac{S_z}{A}, \quad \bar{z} = \frac{S_y}{A}$$

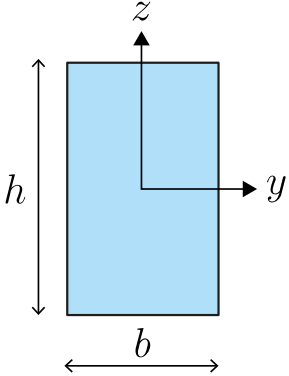
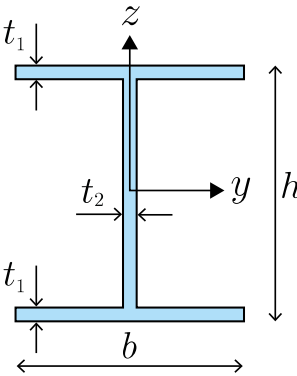
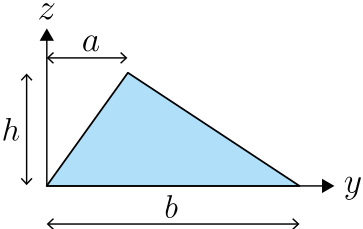
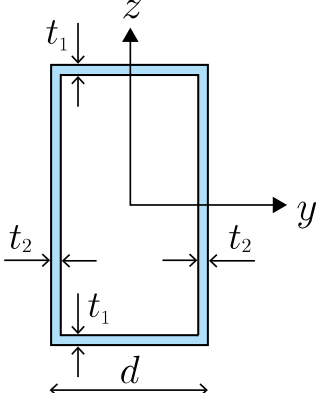
Parallelförflyttningssatsen för yttröghetsmoment (Steiners sats):

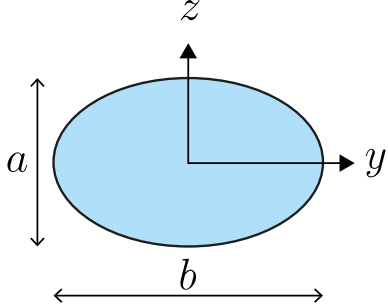
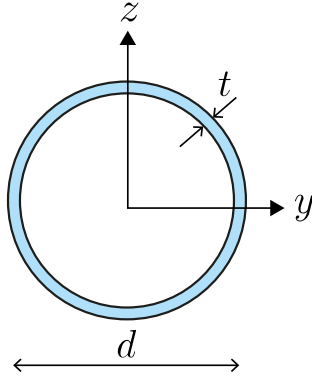
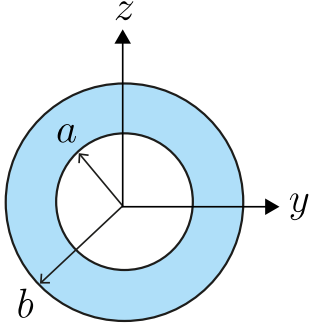
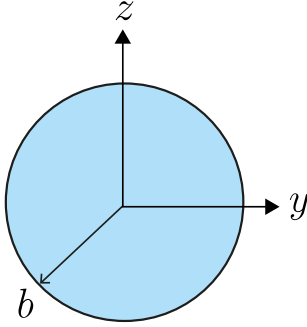
$$I_\lambda = \bar{I}_\lambda + A d^2$$

där  $\bar{I}_\lambda$  är yttröghetsmomentet m.a.p. en parallell axeln genom kroppens ytcentrum (YC).



## 5 Tabell: tvärsnittsdata

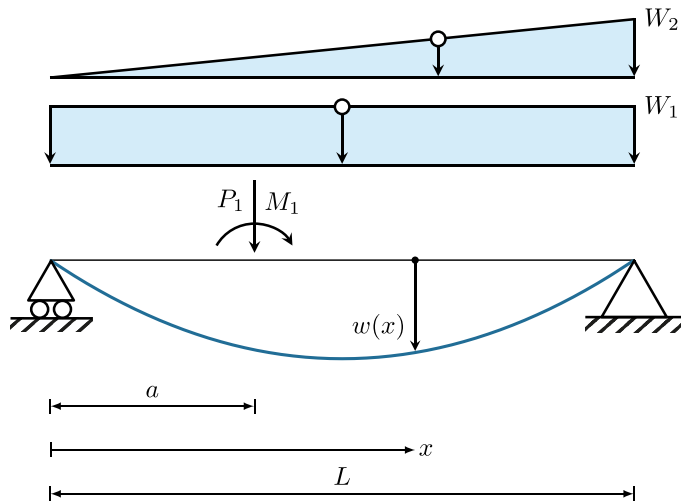
YTA	YTSTORHETER	YTA	YTSTORHETER
	$I_y = \frac{bh^3}{12}$ $I_z = \frac{hb^3}{12}$		$t_1, t_2 \ll h, b$ $I_y \approx \frac{t_2 h^3}{12} + \frac{t_1 b h^2}{2}$ $I_z \approx \frac{t_1 b^3}{6}$
	$I_y = \frac{bh^3}{12}$ $\bar{I}_y = \frac{bh^3}{36}$ $\bar{y} = \frac{a+b}{3}$ $\bar{z} = \frac{h}{3}$		$t_1, t_2 \ll h, b$ $I_y \approx \frac{t_2 h^3}{6} + \frac{t_1 b h^2}{2}$ $I_z \approx \frac{t_1 b^3}{6} + \frac{t_2 b^2 h}{2}$

YTA	YTSTORHETER	YTA	YTSTORHETER
	$A = \frac{\pi ab}{4}$ $I_y = \frac{\pi ba^3}{64}$ $I_z = \frac{\pi ab^3}{64}$		$t \ll d, \quad A \approx \pi dt$ $I_y = I_z \approx \frac{\pi d^3 t}{8}$ $K_v \approx \frac{\pi d^3 t}{4}$
	$I_y = I_z = \frac{\pi}{4}(b^4 - a^4)$ $K_v = \frac{\pi}{2}(b^4 - a^4)$		$I_y = I_z = \frac{\pi b^4}{4}$ $K_v = \frac{\pi b^4}{2}$



## 6 Elementarfall balkböjning

### 6.1 Fri uppläggnig – utböjning

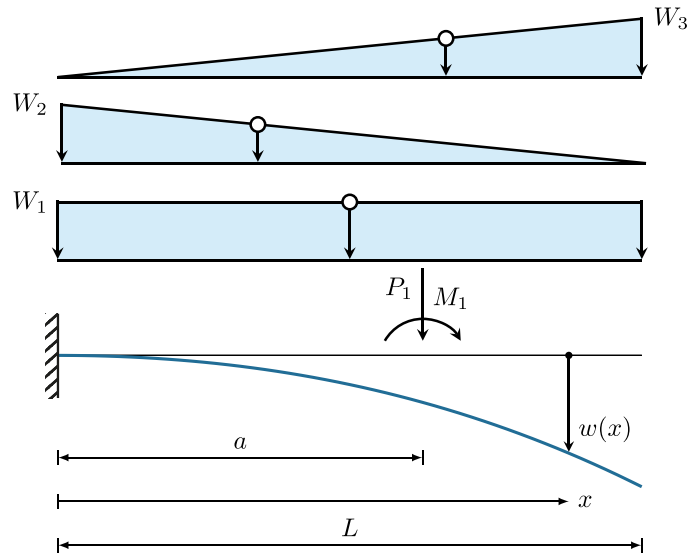


$$* = \begin{cases} \frac{L^3}{6EI} \left(1 - \frac{a}{L}\right) \left[ \left(2 - \frac{a}{L}\right) \frac{ax}{L^2} - \frac{x^3}{L^3} \right], & \text{om } 0 \leq x \leq a \\ - & \text{om } a \leq x \leq L \end{cases}$$

$$** = \begin{cases} \frac{L^2}{6EI} \left[ \left(6 \frac{a}{L} - 3 \frac{a^2}{L^2} - 2\right) \frac{x}{L} - \frac{x^3}{L^3} \right], & \text{om } 0 \leq x \leq a \\ - & \text{om } a \leq x \leq L \end{cases}$$

	$P_1$	$M_1$	$W_1$	$W_2$
$w =$	*	**	$\frac{L^4}{24EI} \left[ \frac{x}{L} - 2 \frac{x^3}{L^3} + \frac{x^4}{L^4} \right]$	$\frac{L^4}{360EI} \left[ 7 \frac{x}{L} - 10 \frac{x^3}{L^3} + 3 \frac{x^5}{L^5} \right]$

## 6.2 Fast inspänd konsol – utböjning

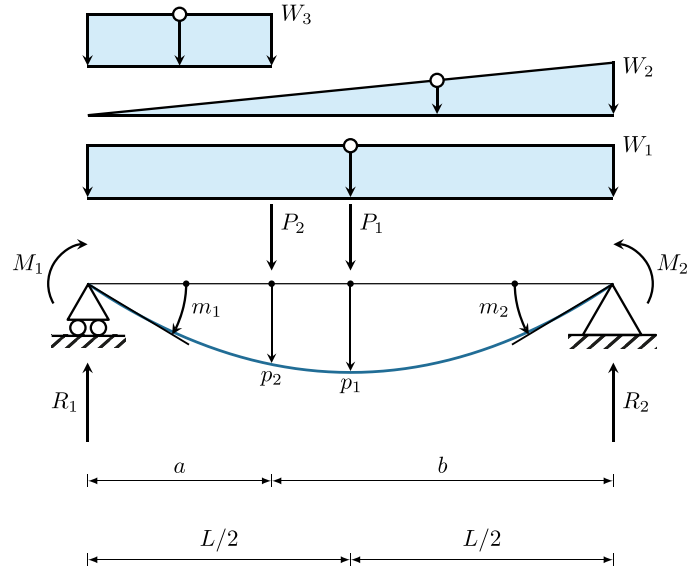


$$* = \begin{cases} \frac{x^2(3a-x)}{6EI}, & \text{om } 0 \leq x \leq a \\ \frac{L^3}{6EI} \frac{a^2}{L^2} \left[ 3 \frac{x}{L} - \frac{a}{L} \right], & \text{om } a \leq x \leq L \end{cases}$$

$$** = \begin{cases} \frac{x^2}{2EI}, & \text{om } 0 \leq x \leq a \\ \frac{L^2}{2EI} \frac{a}{L} \left[ \frac{2x}{L} - \frac{a}{L} \right], & \text{om } a \leq x \leq L \end{cases}$$

	$P_1$	$M_1$	$W_1$	$W_2$	$W_3$
$w =$	*	**	$\frac{L^4}{24EI} \left[ 6 \frac{x^2}{L^2} - 4 \frac{x^3}{L^3} + \frac{x^4}{L^4} \right]$	$\frac{L^4}{120EI} \left[ 10 \frac{x^2}{L^2} - 10 \frac{x^3}{L^3} + 5 \frac{x^4}{L^4} - \frac{x^5}{L^5} \right]$	$\frac{L^4}{120EI} \left[ 20 \frac{x^2}{L^2} - 10 \frac{x^3}{L^3} + \frac{x^5}{L^5} \right]$

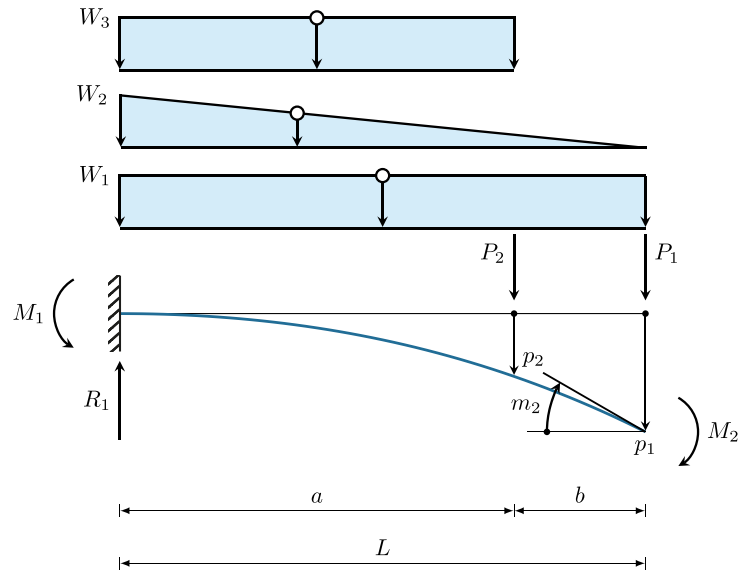
### 6.3 Fri uppläggning



$$\star = \begin{cases} \frac{a L^2}{48 EI} \left[ 3 - \frac{4 a^2}{L^2} \right], & \text{om } a \leq L/2 \\ \frac{b L^2}{48 EI} \left[ 3 - \frac{4 b^2}{L^2} \right], & \text{om } a \geq L/2 \end{cases}$$

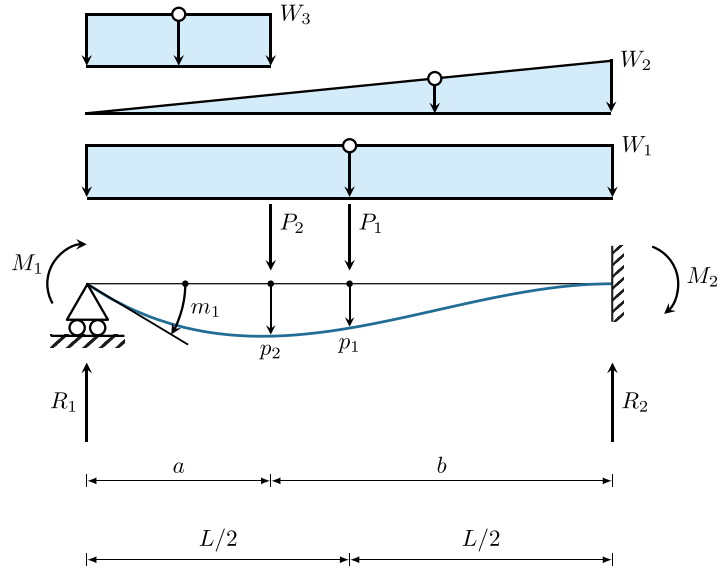
	$M_1$	$M_2$	$P_1$	$P_2$	$W_1$	$W_2$	$W_3$
$R_1 =$	$-\frac{1}{L}$	$\frac{1}{L}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{b}{L}$	$\frac{L}{2}$	$\frac{L}{6}$	$a \left[ 1 - \frac{a}{2L} \right]$
$R_2 =$	$\frac{1}{L}$	$-\frac{1}{L}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{a}{L}$	$\frac{L}{2}$	$\frac{L}{3}$	$\frac{a^2}{2L}$
$m_1 =$	$\frac{L}{3 EI}$	$\frac{L}{6 EI}$	$\frac{L^2}{16 EI}$	$\frac{b L}{6 EI} \left[ 1 - \frac{b^2}{L^2} \right]$	$\frac{L^3}{24 EI}$	$\frac{7 L^3}{360 EI}$	$\frac{a^2 L}{24 EI} \left[ 2 - \frac{a}{L} \right]^2$
$m_2 =$	$\frac{L}{6 EI}$	$\frac{L}{3 EI}$	$\frac{L^2}{16 EI}$	$\frac{a L}{6 EI} \left[ 1 - \frac{a^2}{L^2} \right]$	$\frac{L^3}{24 EI}$	$\frac{L^3}{45 EI}$	$\frac{a^2 L}{24 EI} \left[ 2 - \frac{a}{L} \right]^2$
$p_1 =$	$\frac{L^2}{16 EI}$	$\frac{L^2}{16 EI}$	$\frac{L^3}{48 EI}$	$\star$	$\frac{5 L^4}{384 EI}$	$\frac{5 L^4}{768 EI}$	$\frac{a^2 L^2}{96 EI} \left[ 3 - \frac{2 a^2}{L^2} \right]$
$p_2 =$	$\frac{b L}{6 EI} \left[ 1 - \frac{b^2}{L^2} \right]$	$\frac{a L}{6 EI} \left[ 1 - \frac{a^2}{L^2} \right]$	$\star$	$\frac{a^2 b^2}{3 EI L}$	$\frac{a L^3}{24 EI} \left[ 1 - \frac{2 a^2}{L^2} + \frac{a^3}{L^3} \right]$	$\frac{a L^3}{360 EI} \left[ 7 - \frac{10 a^2}{L^2} + \frac{3 a^4}{L^4} \right]$	$-$

## 6.4 Fast inspänd konsol



	$P_1$	$P_2$	$M_2$	$W_1$	$W_2$	$W_3$
$R_1 =$	1	1	0	$L$	$\frac{L}{2}$	$a$
$M_1 =$	$L$	$a$	1	$\frac{L^2}{2}$	$\frac{L^2}{6}$	$\frac{a^2}{2}$
$p_1 =$	$\frac{L^3}{3EI}$	$\frac{a^2 L}{2EI} \left[ 1 - \frac{a}{3L} \right]$	$\frac{L^2}{2EI}$	$\frac{L^4}{8EI}$	$\frac{L^4}{30EI}$	$\frac{a^3 L}{24EI} \left[ 4 - \frac{a}{L} \right]$
$p_2 =$	$\frac{a^2 L}{2EI} \left[ 1 - \frac{a}{3L} \right]$	$\frac{a^3}{3EI}$	$\frac{a^2}{2EI}$	$\frac{a^2 L^2}{24EI} \left[ 6 - 4\frac{a}{L} + \frac{a^2}{L^2} \right]$	$\frac{a^2 L^2}{120EI} \left[ 10 - \frac{10a}{L} + \frac{5a^2}{L^2} - \frac{a^3}{L^3} \right]$	$\frac{a^4}{8EI}$
$m_2 =$	$\frac{L^2}{2EI}$	$\frac{a^2}{2EI}$	$\frac{L}{EI}$	$\frac{L^3}{6EI}$	$\frac{L^3}{24EI}$	$\frac{a^3}{6EI}$

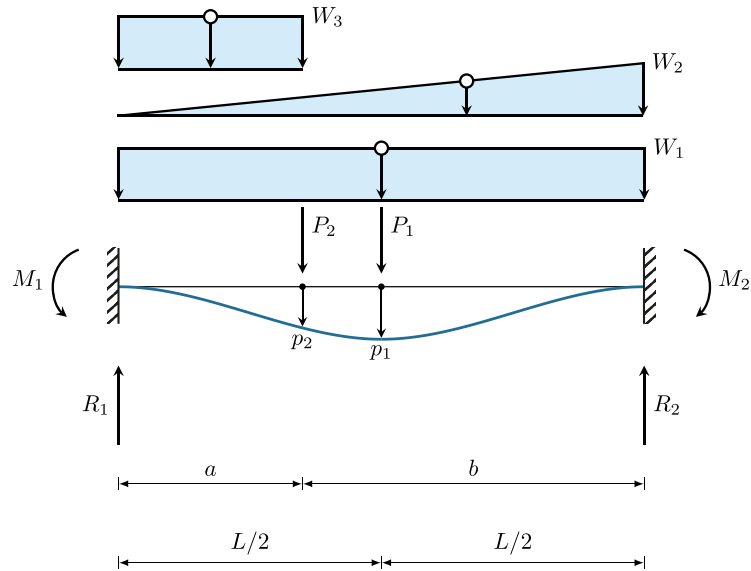
## 6.5 Fast inspänd på ena sidan



$$\star\star = \begin{cases} \frac{a L^2}{96 EI} \left[ 3 - \frac{5 a^2}{L^2} \right], & \text{om } a \leq L/2 \\ \frac{b^2 L}{96 EI} \left[ 9 - \frac{11 b}{L} \right], & \text{om } a \geq L/2 \end{cases}$$

	$M_1$	$P_1$	$P_2$	$W_1$	$W_2$	$W_3$
$R_1 =$	$-\frac{3}{2L}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{b^2}{2L^2} \left[ 3 - \frac{b}{L} \right]$	$\frac{3L}{8}$	$\frac{L}{10}$	$\frac{a}{8} \left[ 8 - \frac{6a}{L} + \frac{a^3}{L^3} \right]$
$R_2 =$	$\frac{3}{2L}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{a}{2L} \left[ 3 - \frac{a^2}{L^2} \right]$	$\frac{5L}{8}$	$\frac{2L}{5}$	$\frac{a^2}{8L} \left[ 6 - \frac{a^2}{L^2} \right]$
$M_2 =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3L}{16}$	$\frac{a}{2} \left[ 1 - \frac{a^2}{L^2} \right]$	$\frac{L^2}{8}$	$\frac{L^2}{15}$	$\frac{a^2}{8} \left[ 2 - \frac{a^2}{L^2} \right]$
$m_1 =$	$\frac{L}{4EI}$	$\frac{L^2}{32EI}$	$\frac{a b^2}{4EIL}$	$\frac{L^3}{48EI}$	$\frac{L^3}{120EI}$	$\frac{a^2 L}{48EI} \left[ 6 - 8 \frac{a}{L} + \frac{3a^2}{L^2} \right]$
$p_1 =$	$\frac{L^2}{32EI}$	$\frac{7L^3}{768EI}$	$\star\star$	$\frac{L^4}{192EI}$	$\frac{3L^4}{1280EI}$	—
$p_2 =$	$\frac{a b^2}{4EIL}$	$\star\star$	$\frac{a^2 b^3}{12EIL^2} \left[ 4 - \frac{b}{L} \right]$	$\frac{a L^3}{48EI} \left[ 1 - \frac{3a^2}{L^2} + \frac{2a^3}{L^3} \right]$	$\frac{a L^3}{120EI} \left[ 1 - \frac{2a^2}{L^2} + \frac{a^4}{L^4} \right]$	—

## 6.6 Tvåsidig fast inspänning



$$*** = \begin{cases} \frac{a^2 L}{48 EI} \left[ 3 - \frac{4a}{L} \right], & \text{om } a \leq L/2 \\ \frac{b^2 L}{48 EI} \left[ 3 - \frac{4b}{L} \right], & \text{om } a \geq L/2 \end{cases}$$

	$P_1$	$P_2$	$W_1$	$W_2$	$W_3$
$R_1 =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{b^2}{L^2} \left[ 1 + \frac{2a}{L} \right]$	$\frac{L}{2}$	$\frac{3L}{20}$	$a \left[ 1 - \frac{a^2}{L^2} + \frac{a^3}{2L^3} \right]$
$R_2 =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{a^2}{L^2} \left[ 1 + \frac{2b}{L} \right]$	$\frac{L}{2}$	$\frac{7L}{20}$	$a \left[ \frac{a^2}{L^2} - \frac{a^3}{2L^3} \right]$
$M_1 =$	$\frac{L}{8}$	$\frac{ab^2}{L^2}$	$\frac{L^2}{12}$	$\frac{L^2}{30}$	$\frac{a^2}{12} \left[ 6 - \frac{8a}{L} + \frac{3a^2}{L^2} \right]$
$M_2 =$	$\frac{L}{8}$	$\frac{a^2 b}{L^2}$	$\frac{L^2}{12}$	$\frac{L^2}{20}$	$\frac{a^3}{12L} \left[ 4 - \frac{3a}{L} \right]$
$p_1 =$	$\frac{L^3}{192 EI}$	***	$\frac{L^4}{384 EI}$	$\frac{L^4}{768 EI}$	—
$p_2 =$	***	$\frac{a^3 b^3}{3 EI L^3}$	$\frac{a^2 L^2}{24 EI} \left[ 1 - \frac{a}{L} \right]^2$	$\frac{a L^3}{120 EI} \left[ \frac{2a}{L} - \frac{3a^2}{L^2} + \frac{a^4}{L^4} \right]$	—

## 7 Huvudspänningar/huvudtöjningar

Huvudspänningar  $\sigma$  och huvudspänningsriktningar  $\mathbf{n}$  från:

$$\begin{aligned} (\mathbf{S} - \sigma \mathbf{I})\mathbf{n} &= \mathbf{0} \quad \Rightarrow \\ \det(\mathbf{S} - \sigma \mathbf{I}) &= 0 \end{aligned}$$

där  $\mathbf{S}$  är spänningsmatrisen

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Huvudtöjningar  $\epsilon$  och huvudtöjningsriktningar  $\mathbf{n}$  från:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\epsilon} - \epsilon \mathbf{I})\mathbf{n} &= \mathbf{0} \quad \Rightarrow \\ \det(\boldsymbol{\epsilon} - \epsilon \mathbf{I}) &= 0 \end{aligned}$$

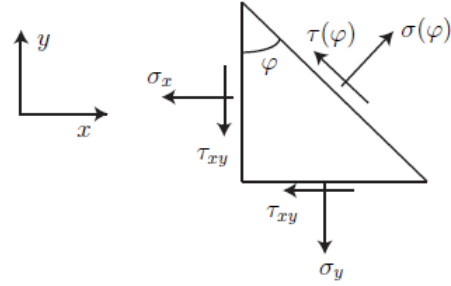
där  $\boldsymbol{\epsilon}$  är töjningsmatrisen

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \epsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \epsilon_z \end{pmatrix}$$

## 8 Spännings- och töjningstillstånd i ett plan

I  $xy$ -planet varierar normal och skjuvspänningar enligt:

$$\begin{cases} \sigma(\varphi) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\varphi) + \tau_{xy} \sin(2\varphi) \\ \tau(\varphi) = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\varphi) + \tau_{xy} \cos(2\varphi) \end{cases}$$



Analogt för töjningar:

$$\begin{cases} \epsilon(\varphi) = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos(2\varphi) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2\varphi) \\ \gamma(\varphi) = -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin(2\varphi) + \gamma_{xy} \cos(2\varphi) \end{cases}$$

Speciellt för  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  fås huvudspänningarna  $\sigma_3 = \sigma_z$  och

$$\begin{cases} \sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm R \\ \sin(2\psi_1) = \frac{\tau_{xy}}{R} \\ \cos(2\psi_1) = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R} \end{cases}$$

där  $\varphi = \psi_1$  är riktning till  $\sigma_1$  och

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Speciellt för  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$  fås huvudtöjningarna  $\epsilon_3 = \epsilon_z$  och

$$\begin{cases} \epsilon_{1,2} = \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) \pm R_\epsilon \\ \sin(2\psi_1) = \frac{\gamma_{xy}}{2R_\epsilon} \\ \cos(2\psi_1) = \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2R_\epsilon} \end{cases}$$

där  $\varphi = \psi_1$  är riktning till  $\epsilon_1$  och

$$R_\epsilon = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \gamma_{xy}^2/4}$$

## 9 Ångpanneformlerna

För ett tunnväggigt cylindriskt tryckkärl gäller

$$\begin{cases} \sigma_r \approx 0 \\ \sigma_\varphi = \frac{p a}{h} \\ \sigma_z = \frac{p a}{2 h} \end{cases} \quad \begin{array}{l} p \text{ är inre övertryck} \\ a \text{ är medelradien} \\ h \text{ är godstjockleken} \end{array}$$

För ett tunnväggigt sfäriskt tryckkärl gäller

$$\begin{cases} \sigma_r \approx 0 \\ \sigma_\varphi = \sigma_\theta = \frac{p a}{2 h} \end{cases} \quad \begin{array}{l} p \text{ är inre övertryck} \\ a \text{ är medelradien} \\ h \text{ är godstjockleken} \end{array}$$

## 10 Hookes generaliserade lag för linjärt isotropt material

Hookes generaliserade lag på flexibilitetsform:

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)) + \alpha \Delta T, & \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu (\sigma_z + \sigma_x)) + \alpha \Delta T, & \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \epsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)) + \alpha \Delta T, & \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx} \end{cases}$$

med  $G = E/(2(1 + \nu))$ , vilket också kan skrivas på styvhetsform som

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1 + \nu} \left( \epsilon_x + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \right) - \frac{E \alpha \Delta T}{1 - 2\nu}, & \tau_{xy} = G \gamma_{xy} \\ \sigma_y = \frac{E}{1 + \nu} \left( \epsilon_y + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \right) - \frac{E \alpha \Delta T}{1 - 2\nu}, & \tau_{yz} = G \gamma_{yz} \\ \sigma_z = \frac{E}{1 + \nu} \left( \epsilon_z + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \right) - \frac{E \alpha \Delta T}{1 - 2\nu}, & \tau_{zx} = G \gamma_{zx} \end{cases}$$

Plan spänning ( $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ),  
normalspänningar:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\nu \epsilon_x + \epsilon_y) \end{cases}$$

Plan töjning ( $\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ),  
normaltöjningar:

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{1 - \nu^2}{E} (\sigma_x - \nu/(1 - \nu) \sigma_y) \\ \epsilon_y = \frac{1 - \nu^2}{E} (-\nu/(1 - \nu) \sigma_x + \sigma_y) \end{cases}$$



## 11 Effektivspänningar

von Mises:

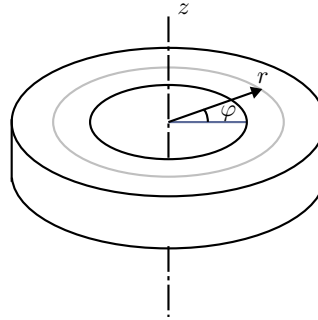
$$\begin{aligned}\sigma_e^{\text{vM}} &= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{yz}^2 + 3\tau_{zx}^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}\end{aligned}$$

Tresca:

$$\sigma_e^{\text{T}} = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|)$$

## 12 Differentialekvationen för tjockväggigt rör – plan cirkulär skiva

Elastisk axisymmetrisk skiva utsatt för plan spänning ( $\sigma_z = \tau_{rz} = \tau_{\varphi z} = 0$ ) samt enbart belastning i  $r$ -led:



$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (u_r r) \right) + \frac{1 - \nu^2}{E} K_r = 0$$

Allmän lösning:

$$u_r = A_1 r + A_2 / r - 1/r \int r \int \frac{(1 - \nu^2) K_r}{E} dr dr$$

där  $A_1$  och  $A_2$  bestäms från randvillkor.

Töjningar:

$$\epsilon_r(r) = \frac{du_r(r)}{dr}, \quad \epsilon_\varphi(r) = \frac{u_r(r)}{r}$$

Spänningar för  $K_r = 0$ :

$$\sigma_r(r) = A - \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_\varphi(r) = A + \frac{B}{r^2} \quad \text{där } A = \frac{E}{1 - \nu} A_1 \quad \text{och} \quad B = \frac{E}{1 + \nu} A_2$$

Om istället den axisymmetriska skivan är utsatt för plan töjning översätts  $E$  och  $\nu$  enligt:

$$\begin{aligned}\text{plan spänning: } E &\rightarrow \text{plan töjning: } \frac{E}{1 - \nu^2} \\ \text{plan spänning: } \nu &\rightarrow \text{plan töjning: } \frac{\nu}{1 - \nu}\end{aligned}$$

## 13 Instabilitet

Balkens differentialekvation med hänsyn till konstant tryckande normalkraft  $P$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + P \frac{d^2 w}{dx^2} = q$$

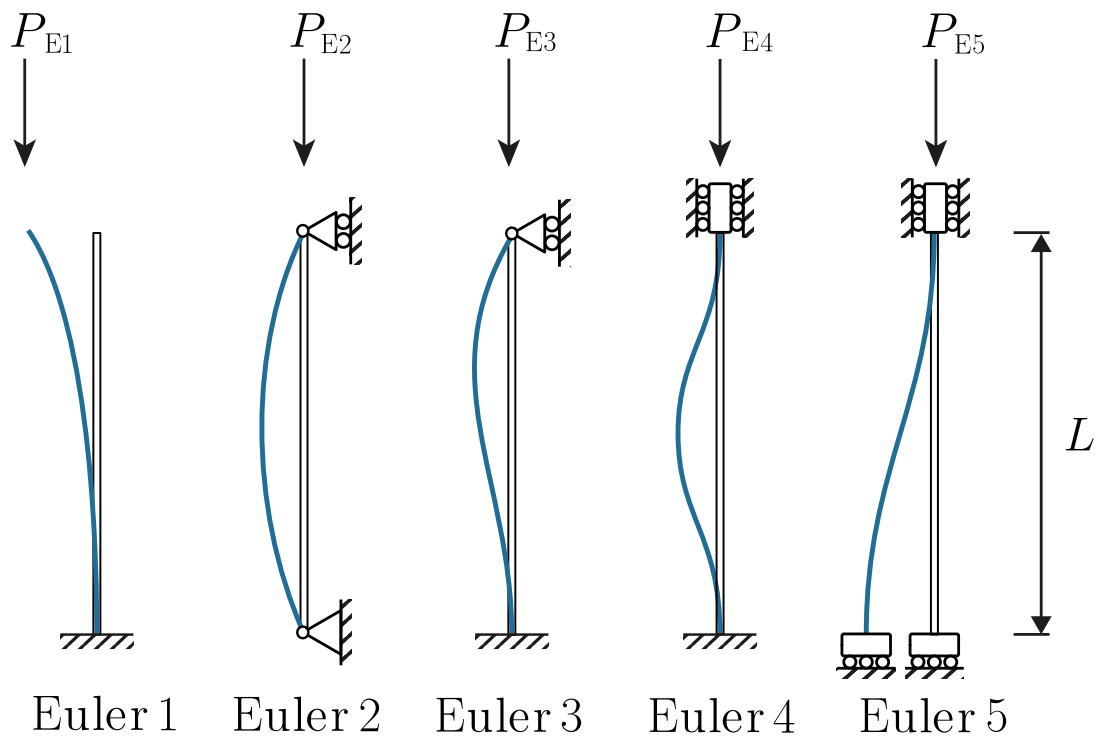
För konstant  $EI$  och  $q = 0$  har ekvationen den allmänna lösningen:

$$w(x) = C_1 nx + C_2 + C_3 \cos(nx) + C_4 \sin(nx)$$

med  $n^2 = P/EI$  och integrationskonstanterna  $C_1 - C_4$ .

Eulers knäckfall:

$$P_{E1} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad P_{E2} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad P_{E3} = \frac{2.05\pi^2 EI}{L^2} \quad P_{E4} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \quad P_{E5} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$



## 14 Spänningskoncentrationer

Linjärt isotropt elastiskt material:

$$\sigma_{\max} = K_t \sigma_{\text{nom}}$$

där  $K_t$  är spänningskoncentrationsfaktorn.

- För cirkulärt hål, enaxlig belastning (plant spännings- och plant deformationstillstånd):

$$\sigma_{\varphi}(\varphi) = [1 - 2 \cos(2\varphi)] \sigma_{\infty}$$

- Cirkulärt hål, tvåaxlig belastning: (plant spännings- och plant deformationstillstånd):

$$\sigma_{\varphi, \max} = 2 \sigma_{\infty}$$

### Referenser

Gere and Timoshenko, Mechanics of materials, 3rd edition, 1991.

Samuelsson och Wiberg, Byggnadsmekanik - Hållfasthetslära, Studentlitteratur, Lund, 1988.

Sundström (red.), Handbok och formelsamling i hållfasthetslära, KTH, 1999.