

# Uskarphet til partikkel

Henrik Storesund<sup>a</sup>, Fredrik Knapskog<sup>a</sup>, Eirik Viksmo-Slettan<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Institutt for fysikk, Norges Teknisk-Naturvitenskapelige Universitet, N-7491 Trondheim, Norge.

---

## Oppsummering

Denne øvingen handler om hvordan uskarpheten i posisjon og impuls hos en partikkel varierer over tid, og hvordan produktet av disse forholder seg til uskarphetsrelasjonen.

---

## 1. Fri partikkel

I første oppgaven skal kun uskarpheten i posisjonen beregnes som funksjon av tid. Det gjøres både analytisk og numerisk for et fritt elektron. I fra øving 3 || oppgave 11.c er absoluttkvadratet av  $\Psi$  oppgitt

$$|\Psi(x, t)|^2 = [2\pi(\sigma^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 \sigma^2})]^{-\frac{1}{2}} \exp(\frac{(x - p_0/t)^2}{2(\sigma^2 + \hbar^2 t^2/4m^2 \sigma^2)}). \quad (1)$$

Der  $m$  er elektronmassen,  $t$  er tiden,  $\sigma$  er den romlige utstrekningen,  $\hbar$  er Plancks konstant delt på to pi,  $p_0$  er startimpulsen og  $x$  er posisjon langs x-aksen. Fra (1) utledes forventningsverdiene til  $x$  og  $x^2$

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x |\Psi(x, t)|^2 dx = \frac{p_0 t}{m}, \\ \langle x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\Psi(x, t)|^2 dx = \sigma^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 \sigma^2} + (\frac{p_0 t}{m})^2. \end{aligned}$$

Uskarpheten i posisjonen kan da beregnes analytisk

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sigma \sqrt{1 + (\frac{t}{\tau})^2}, \text{ der } \tau = \frac{2m\sigma^2}{\hbar}. \quad (2)$$

Numerisk lages en grid med punkter på x-aksen med tilhørende potensialverdier. I dette tilfellet er potensialet null i alle punktene ettersom det er en fri partikkel. Steglengden mellom punktene på x-aksen settes til én Å og videre lages en tridiagonal Hamiltonmatrikse. Fra denne lages det like mange ortonormerte egenfunksjoner,  $\psi_n$ , som det er punkter i griden.  $\Psi(x, 0)$  lages som en array der x-verdiene fra griden settes inn i

$$\Psi(x, 0) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{4}} e^{ik_0 x} e^{-(x-x_0)^2/4\sigma^2}, \text{ der } k_0 = p_0/\hbar \quad (3)$$

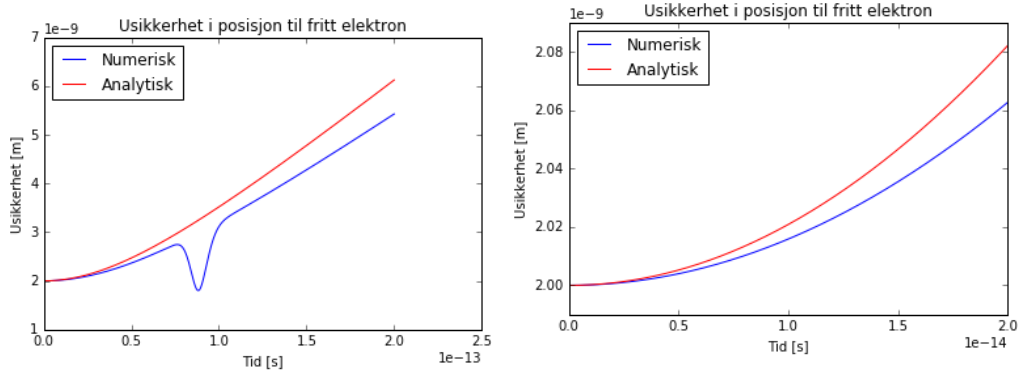
med startposisjon  $x_0$  lik 50 nm. Dermed kan egenverdiene til egenfunksjonene beregnes som indreproduktet

$$c_j = \int \psi_j^*(x) \Psi(x, 0) dx$$

Bølgepakken kan da utvikles som en lineærkombinasjon av alle de stasjonære tilstandene ved summen

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=0}^{N_{tot}-1} c_n \psi_n(x) \exp(-\frac{iE_n t}{\hbar}). \quad (4)$$

Videre kan indreproduktet mellom absoluttkvadratet av summen fra (4) og griden  $x$  brukes til å finne forventningsverdien til  $x$ , og det samme med  $x^2$ .



(a) Tidsrom fra 0 sekund til 200 femtosekunder. (b) Tidsrom fra 0 sekunder til 20 femtosekunder.

**Figur 1:** Den blå grafen presenterer uskarpheten i posisjon hos en partikkel over tid løst numerisk, mens den røde presenterer det analytisk. Energien til det frie elektronet er satt til 1 eV og den romlige utstrekningen er satt til 2 nm.

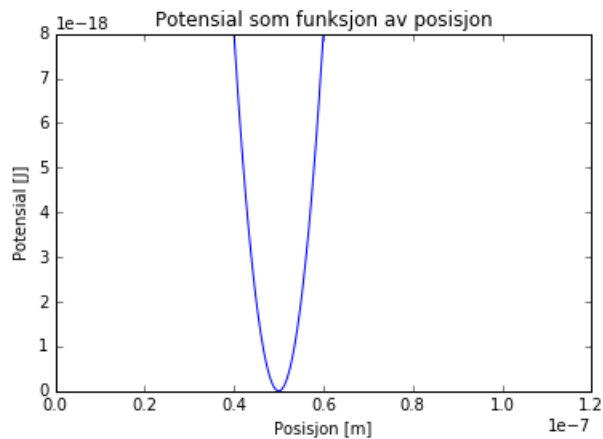
Figur 1 viser at i starten er den numeriske løsningen tilnærmet helt lik den analytiske, men så gjør den dupper hver gang elektronet treffer vegg. Den analytiske uskarpheten stiger også raskere enn den numeriske.

## 2. Partikkel ved potensial

I andre oppgaven skal det innføres et potensial. Potensialet er to plataer som er  $V_0$  store. I midten er potensialet proporsjonalt med kvadratet av posisjonen slik som figur 2 viser.

Beregningen av uskarpheten i posisjon gjøres akkurat som i første oppgaven bare at potensialet legges inn i Hamiltonmatrisen. For å beregne den midlere impulsen benyttes indreproduktet

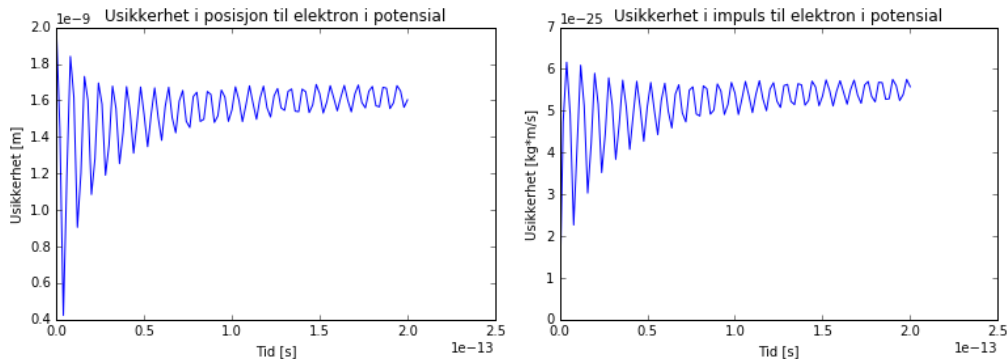
$$\langle p^n \rangle = \text{Re}(\int \Psi^* (\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x})^n \Psi dx)$$



**Figur 2:** Plottet viser potensialet som funksjon av posisjon. På hver side er det to platåer  $V_0$  store med et harmonisk potensiale i midten proporsjonalt med avstanden fra midten.

som utføres ved hjelp av innebygde funksjoner for derivasjon, komplekskonjugering og å finne realdelen av et komplekst tall. Uskarpheten i impuls beregnes som for posisjon i (2). Til slutt deles uskarpheten i impuls på steglengden.

### Uskarphet hos partikkel i potensial



(a) Uskarphet i posisjon.

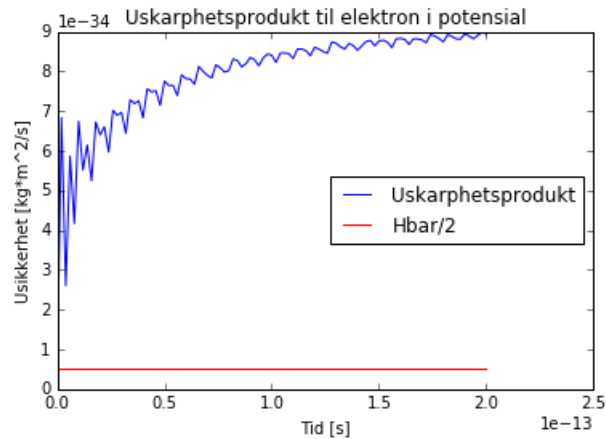
(b) Uskarphet i impuls.

**Figur 3:** Figuren til venstre viser uskarpheten i posisjon hos et elektron i et potensial som funksjon av tid, mens figuren til høyre viser uskarpheten i impuls.  $V_0$  i potensialet er satt til 50 eV og tidsintervallet er i fra 0 sekunder til 0.2 picosekunder.

Figur 3 viser at begge uskarphetene oppfører seg som dempede svingninger. Uskarpheten i posisjon er mye mye større enn i impuls.

Til slutt plottes uskarphetsproduktet opp mot uskarphetsrelasjonen i figur 4.

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.$$

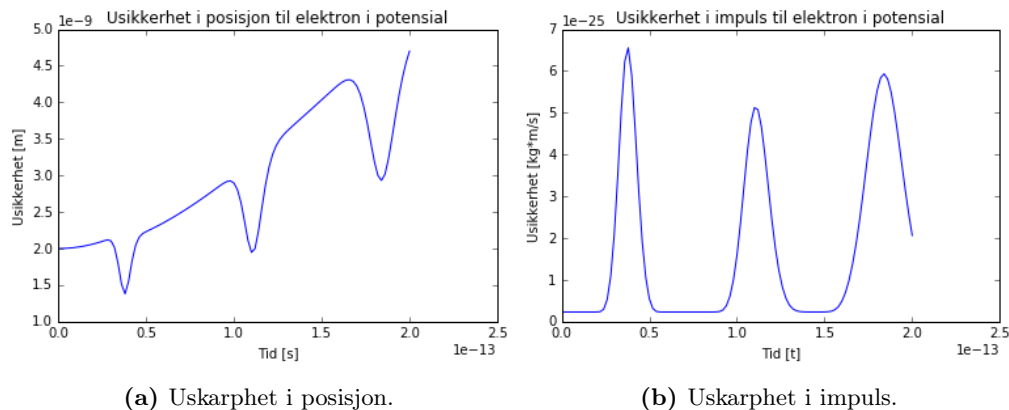


**Figur 4:** Den blå grafen presenterer uskarphetsproduktet mellom impuls og posisjon, mens den røde grafen viser  $\frac{\hbar}{2}$ .

Figur 4 viser som forventet at uskarphetsproduktet er større enn  $\hbar/2$  og oppfyller uskarphetsrelasjonen for alle  $t$ .

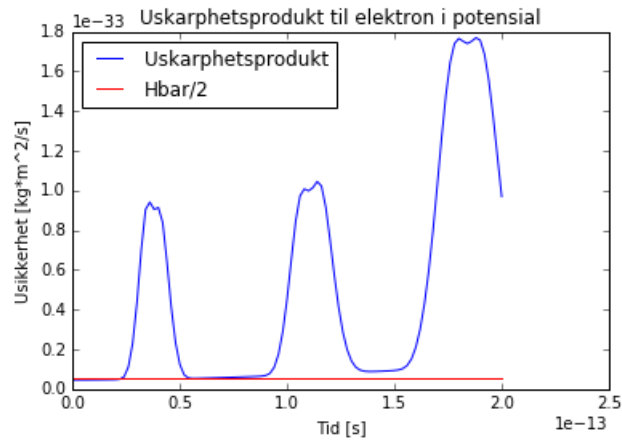
Oppgave 2 gjentas for en starttilstand forskjellig fra den forrige som gir ulike kvalitative egenskaper. Dette oppnåes ved å sette  $x_0$  lik 20 nm istedenfor 50 nm.

### Uskarphet hos partikkel i potensial



**Figur 5:** Figuren til venstre viser uskarpheten i posisjon hos et elektron i et potensial som funksjon av tid, mens figuren til høyre viser uskarpheten i impuls.  $V_0$  i potensialet er satt til 50 eV og tidsintervallet er i fra 0 sekunder til 0.2 picosekunder.

Figur 5 og 6 viser veldig annerledes fra figur 3 og 4. Uskarpheten i posisjon minner om uskarpheten i figur 1 der potensialet var lik null. Bunnpunktene til uskarpheten i posisjon henger sammen med topppunktene i uskarpheten til impuls. Det kommer av at når elektronet treffer potensialbarrieren på hver side av griden er endringen i posisjon mindre mens endringen i impuls er større. Startposisjonen har altså mye å si for hvor-



**Figur 6:** Den blå grafen presenterer uskarphetsproduktet mellom impuls og posisjon, mens den røde grafen viser  $\frac{\hbar}{2}$ .

dan usikkerheten utvikler seg over tid. Figur 6 viser at i store deler av intervallet er usikkerhetsproduktet omtrent så lite som det kan bli. Dermed blir det en mer nøyaktig beregning enn for startposisjon lik 50 nm.

### 3. Bibliography

Øving 3 Øving 3I. Øverbø. Øving i emnet TFY4215 Innføring i kvantefysikk, NTNU.