TTK4111 - OBLIG 5

FREDRIK WARØ

DATE: 22/10/2024

Alt av simuleringer og kode finnes i `https://github.com/fredrswa/TTK4111-Oblig-5`

0.1 Oppgaver

0.1.1 Oppgave 1

Systemet er gitt i ligningsettet 1.

$$\begin{aligned} M\ddot{p} &= sin(\theta)(F_1 + F_2) \\ M\ddot{h} &= cos(\theta)(F_1 + F_2) - Mg \\ J\ddot{\theta} &= l(F_2 - F_1) \end{aligned} \tag{1}$$

Pådraget er gitt ved ligning 2.

$$u_h = F_1 + F_2 - Mg, \quad u_\theta = F_1 - F_2 \tag{2}$$

(a) Hviklet gir følgende ligninger for kreftene 3.

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{2}u_h + \frac{1}{2}u_\theta + \frac{Mg}{2} \\ F_2 &= \frac{1}{2}u_h - \frac{1}{2}u_\theta + \frac{Mg}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

(b) Gitt at $|\theta| \ll 1$ og $u_h \ll 1$ kan vi anta at $sin(\theta) \approx \theta$ og $cos(\theta) \approx 1$. Dette gir oss ligningsettet 4.

$$\begin{aligned} M\ddot{p} &= \theta(F_1 + F_2) \\ M\ddot{h} &= (F_1 + F_2) - Mg \\ J\ddot{\theta} &= l(F_2 - F_1) \end{aligned} \tag{4}$$

Ligning 3 og 4 gir oss ligningsettet 5.

$$\begin{aligned} \ddot{p} &= M^{-1}\theta(u_h + Mg) = \theta g \\ \ddot{h} &= M^{-1}(u_h + Mg) - g = M^{-1}u_h \\ J\ddot{\theta} &= 2l(u_\theta) \end{aligned} \tag{5}$$

(c) Vi starter med å løse overføringsfunksjonen fra u_θ til θ.

$$s^2\hat{\theta}(s) = l\hat{u}_\theta(s) \Rightarrow \hat{\theta}(s) = \frac{l}{s^2}\hat{u}_\theta(s) \tag{6}$$

Deretter løser vi overføringsfunksjonen fra θ til p.

$$s^2\hat{p}(s) = g\hat{\theta}(s) \Rightarrow \hat{p} = \frac{g}{s^2}\hat{\theta}(s) \tag{7}$$

Som til slutt gir $G_p(s)$

$$G_p(s) = \frac{\hat{p}}{\hat{u}_\theta} = \frac{gl}{s^4} \tag{8}$$

$G_h(s)$ kommer direkte fra ligningen for $\ddot{h}$

$$\begin{gathered} s^2\hat{h}(s) = \frac{1}{M}\hat{u}_h(s) \to \hat{h}(s) = \frac{1}{s^2 M}\hat{u}_h(s) \\ G_h(s) = \frac{1}{s^2 M} \end{gathered} \tag{9}$$

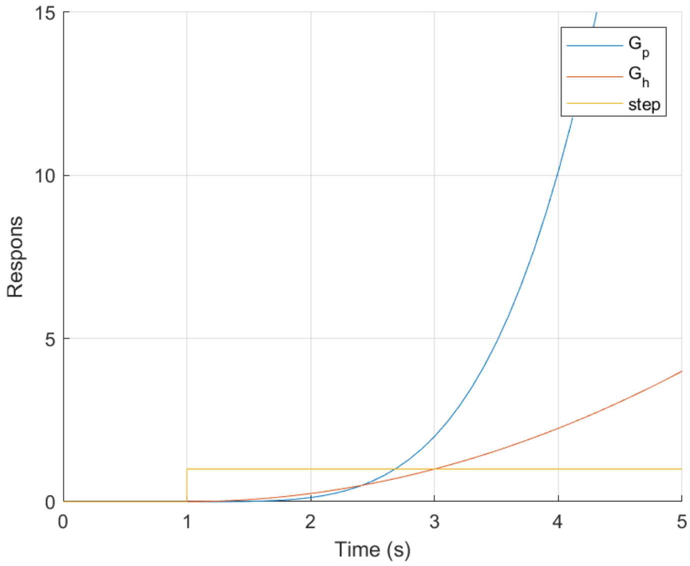
For begge overføringsfunksjonene har vi kun poler i 0, systemet er derfor marginalt stabilt. Impulsresponsen for systemet kan finnes ved den generelle formen for et system med s^n i nevner.

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^n}\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \tag{10}$$

Som gir impulsen ved

$$\begin{aligned} g_p(t) &= \frac{gl}{6J}t^3 \\ g_h(t) &= \frac{1}{M}t \end{aligned} \tag{11}$$

Som stememr overens med avgjørelsen om marginal stabilitet. Dersom pådraget er null forblir systemet i likevekt rundt null. Men om det får impuls på inngangen vil de skaleres med en faktor t for $g_h(t)$ og t^3 for $g_p(t)$. Denne impulsen er også synlig i figur 1 hvor vi ser at systemet ligger i likevekt, til et inngangsignal blir gitt og da går de oppover.



Figur 1: Impulsrespons for systemet

0.1.2 Oppgave 2

(a) Grunnet leddet $s^2 + \omega_0$ i nevnerer tyder det på at $\hat{u}_\theta$ er en PD-regulator. Vi forsøker med $\hat{u}_\theta(s) = f\hat{\theta}_{ref} - k_p\hat{\theta}(s) - sk_d\hat{\theta}(s)$. Gitt $\alpha = J^{-1}l$ satt inn i ligning (4) og (6) får vi

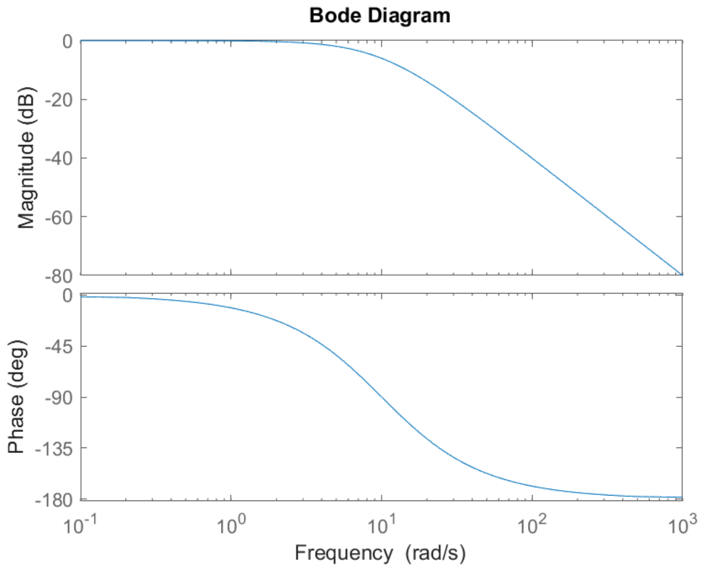
$$\begin{aligned} s^2\hat{\theta}(s) &= \alpha f\hat{\theta}_{ref} - \alpha k_p\hat{\theta}(s) - s\alpha k_d\hat{\theta}(s) \\ \hat{\theta}(s)(s^2 + \alpha k_d s + \alpha k_p) &= \alpha f\hat{\theta}_{ref} \\ \hat{\theta}(s) &= \frac{\alpha f}{s^2 + \alpha k_d s + \alpha k_p}\hat{\theta}_{ref} \end{aligned} \tag{12}$$

Ettersom $(s + \omega_0)^2 = s^2 + 2\omega_0 + \omega_0^2$ for vi disse regulatorverdiene.

$$f = \frac{\omega_0^2}{\alpha} = \frac{100}{3}, \quad k_d = \frac{2\omega_0}{\alpha} = \frac{20}{3}, \quad k_p = f = \frac{100}{3} \tag{13}$$

(b) Her starter vi med samme utgangspunkt som i a, men ligning 4 gir oss nå

$$\begin{aligned} s^2\hat{\theta}(s) &= \frac{1}{Ts+1}(\omega_0^2\hat{\theta}_{ref} - 2\omega_0 s\hat{\theta}(s) - \omega_0^2\hat{\theta}(s)) \\ \hat{\theta}(s)(Ts^3 + s^2 + 2s\omega_0 + \omega_0^2) &= \omega_0^2\hat{\theta}_{ref} \\ \hat{\theta}(s)(Ts^3 + (s+\omega_0)^2) &= \omega_0^2\hat{\theta}_{ref} \\ \hat{\theta}(s) &= \frac{\omega_0^2}{Ts^3 + (s+\omega_0)^2}\hat{\theta}_{ref} \end{aligned} \tag{14}$$



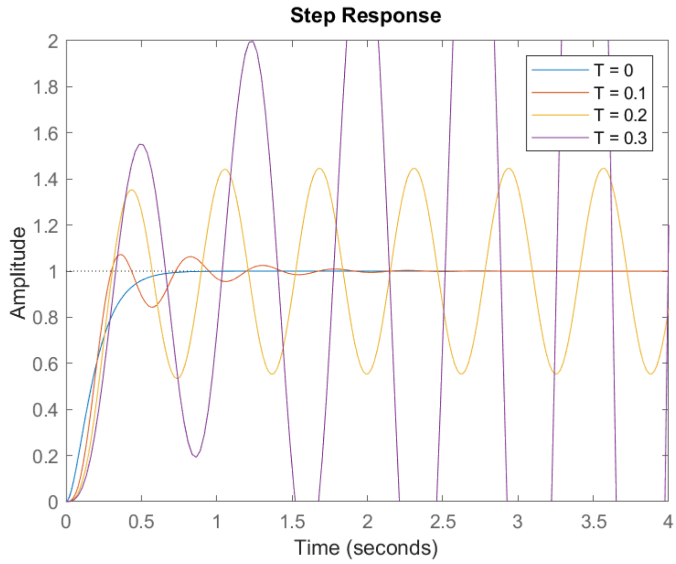
Figur 2: Bodeplot for systemet

(c) Det relevant elementet vi må ta hensyn til er at $0 \leq a_2a_1 - a_0a_3$. Dette gir oss

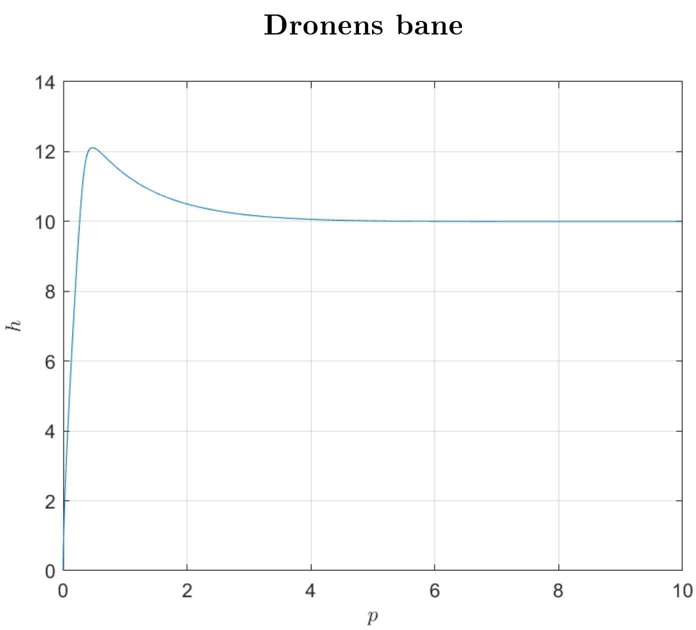
$$\begin{aligned} 2\omega_0 - \omega_0^2 T &\geq 0 \\ T &\leq \frac{2}{\omega_0} \end{aligned} \tag{15}$$

Ligning (15) viser at $T \in [0, \frac{1}{5})$ for at systemet skal være stabilt. Vi plotter derfor system responsen for økende verdier av T. Resultatet er i figur 0.1.2. Hvor vi ser at for $T < 0.2$ er systemet stabilt og går mot referansen, $T = 0.2$ oscillerer systemet og for $T > 0.2$ blir systemet ustabilt. Her kan det også bemerkes at vi får en overshot ved $T = 0.1$, noe vi ikke ser ved $T = 0$.

(d) Det er veldig usannsynlig at alle fenomener er tatt med i en matematisk modell. Dette er fordi det er ekstremt mange små fenomener i et system, som ofte er vanskelig å modellere eller unødvendig å modellere.



0.1.3 Oppgave 3



Figur 3: Banen dronen følger gitt referansen $(p_{ref}, h_{ref}) = (10, 10)$

(a) Fra sløyfen får vi $\theta_{ref} = K_p(s)(p_{ref} - p)$ og sammen med ligningen $\ddot{p} = g\theta_{ref}$ får vi følgende regulatorutrykk for p.

$$\begin{aligned} \ddot{p} &= g\theta_{ref} \\ s^2\hat{p}(s) &= g\hat{\theta}_{ref}(s) \\ s^2\hat{p}(s) &= gK_p(s)(p_{ref} - \hat{p}) \end{aligned} \tag{16}$$

Hvor $K_p(s)$ er en PD regulator. Vi ønsker poler i $\lambda_1 = \lambda_2 = -1/4$ som gir en nevner på formen $s^2 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{16}$. Dette gir oss følgende regulatorverdier.

$$\begin{aligned} \hat{p}(s)(s^2 + gk_ds + gk_p) &= K_p(s)p_{ref} \\ \hat{p}(s) &= \frac{K(s)_p p_{ref}}{s^2 + gk_ds + gk_p} \\ k_{pd} = \frac{1}{2g}, \quad k_{pp} &= \frac{1}{16g} \end{aligned} \tag{17}$$

(b) Regulatoren har formen $K_h(s) = k_{hp} + k_{hd}s + k_{hi}/s$. Med samme fremgangsmåte som tidligere for vi følgende system

$$\hat{h} = \frac{K_h(s)h_{ref} + \omega_0}{s^3 + s^2M^{-1}k_{hd} + sM^{-1}k_{hp} + M^{-1}k_{hi}} \tag{18}$$

Med poler i $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, må vi ha en nevner på formen $s^3 + 6s^2 + 11s + 6$. Som gir følgende regulatorverdier.

$$k_{hp} = 2 \cdot 11, \quad k_{hd} = 2 \cdot 6, \qquad k_{hi} = 2 \cdot 6 \tag{19}$$

(c) Regulatorene ble implementert i simulink og resultatene er vist i figur 3, 4 og 5. Som viser hhv. dronens bane, høyde og pitch gitt en statisk referanse på $(p_{ref}, h_{ref}) = (10, 10)$.

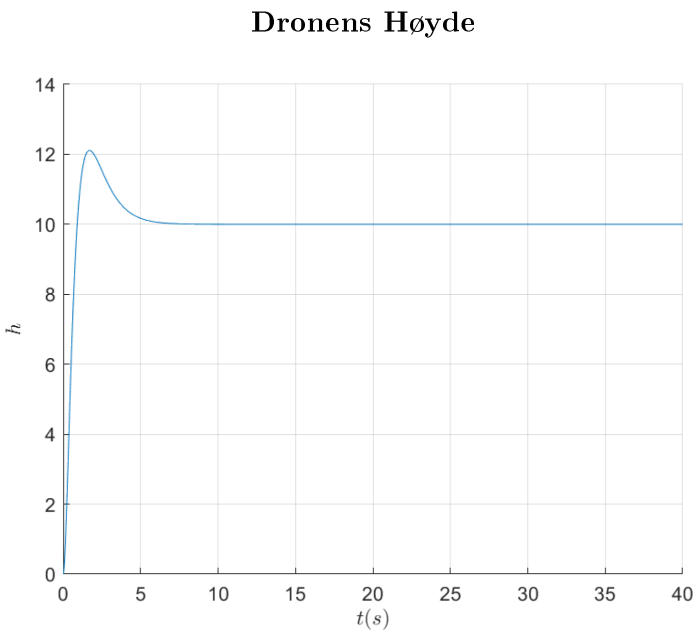
0.1.4 Oppgave 4

(a)

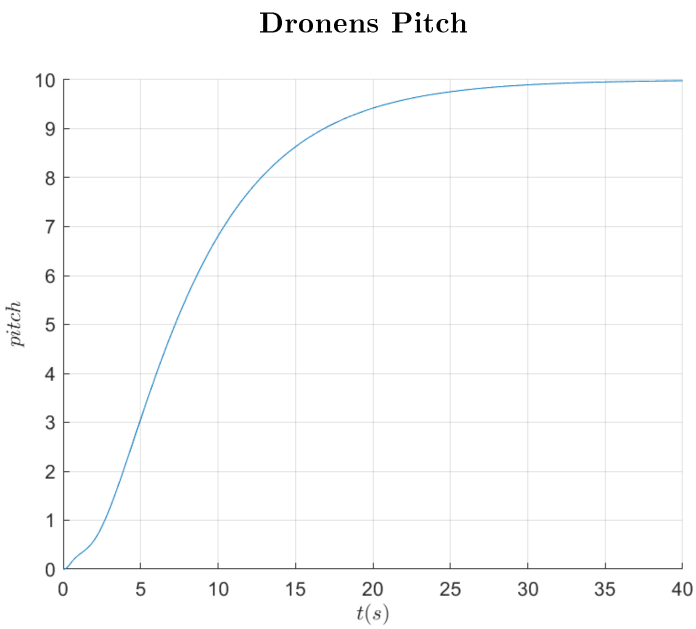
$$\begin{aligned} x_1 = \theta, \quad x_2 &= \dot{\theta} \\ \dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2, \quad \dot{x}_2 &= \ddot{\theta} = J^{-1}lu_\theta \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ J^{-1}l \end{bmatrix} u_\theta \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u_\theta \end{aligned} \tag{20}$$

(b) Målematrisene for systemet med bruk av akselerometer og gyroskop er hhv. $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ og $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$. Som gir følgende observerbarhetsmatriser.

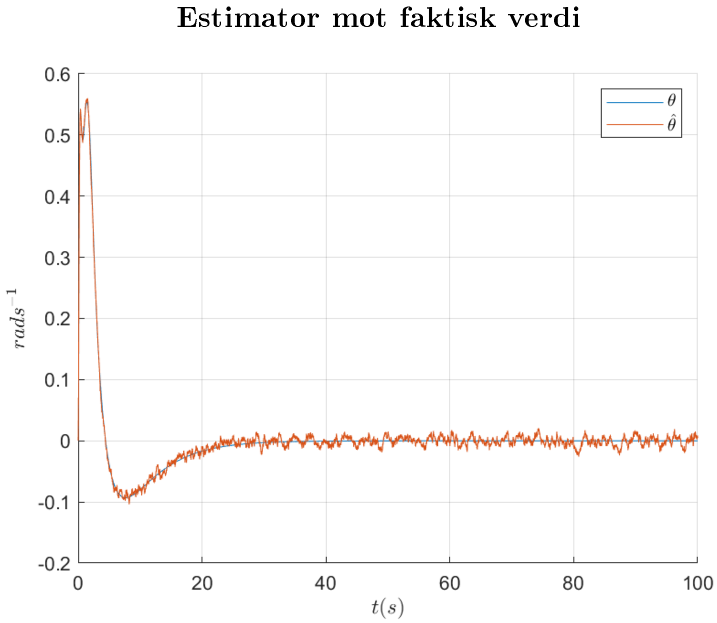
$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{akselerometer} &= \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathcal{O}_{gyroskop} &= \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{21}$$



Figur 4: Høyderespons med gitt regulator



Figur 5: Pitch respons med gitt regulator



Figur 6: Med $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$.

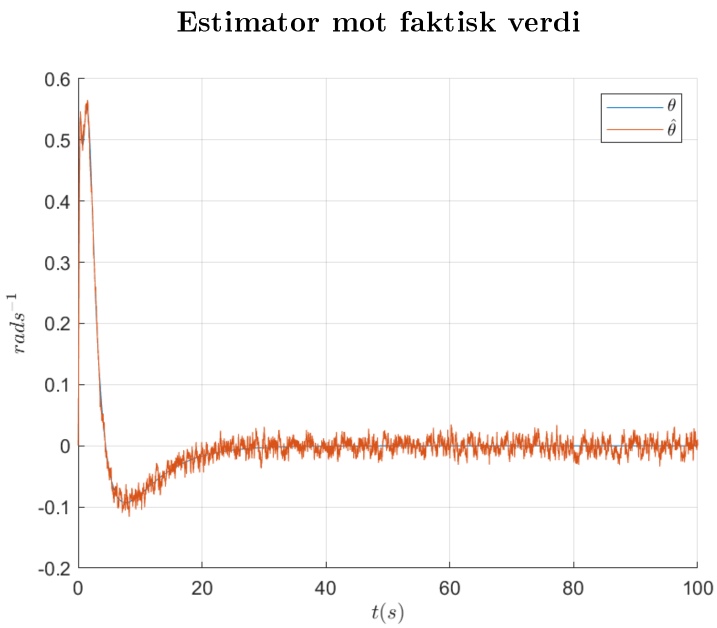
Her ser vi at kun akselereometeret gir full rang i observerbarhetsmatrisen.
(c) For å tune observerforsterkningen kan vi se på feilen til systemet, definert som $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$. Den finner vi ved å gjøre følgende

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u_\theta \\
\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u_\theta + \mathbf{l}(y - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) \\
\dot{\mathbf{e}} &= \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{l}\mathbf{C}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \\
\dot{\mathbf{e}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{C})\mathbf{e} \\
\dot{\mathbf{e}} &= \begin{bmatrix} -l_1 & 1 \\ -l_2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{e}
\end{aligned} \tag{22}$$

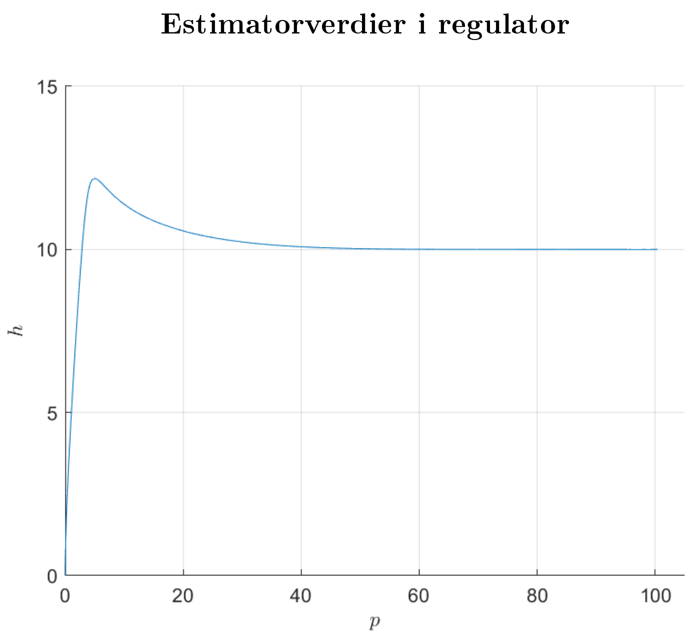
Den karakteristiske ligninger for systemet er gitt ved $\lambda^2 + l_1\lambda + l_2 = 0$. Dette gir oss l som funksjon av polene til systemet.

$$l_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2), \quad l_2 = \lambda_1\lambda_2 \tag{23}$$

(d) Figur 6 og 7 viser estimatorverdiene sammenlignet med de faktiske verdiene med ulike poler. Valg av l vektes mellom hvor raskt systemet skal konvergere og hvor mye støy som skal ignoreres. Vi ser fra figurene at høye verdier for l bevarer mye støy i estimatoren.
(e) Figur 8 viser at dronen fremdeles klarer å følge en gitt referanse selv med estimatorverdier ført inn i regulatoren. Her er referansene satt til $(p_{ref}, h_{ref}) = (100, 10)$.



Figur 7: Med $\lambda_1 = \lambda_2 = -5$.



Figur 8: Med $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -5$.