Sistemas de Coordenadas e Transformações

Problemas Tipo :

1. Dois sistemas de coordenadas A e B estão fixos relativamente a um sistema inercial base e estão relacionados pela matriz de transformação ${}^{A}_{B}T$, a qual traduz a rotação de B sobre o eixo ${}^{A}\vec{r} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ de um ângulo $\phi = 45^\circ$.
   a. Represente numericamente a matriz de transformação ${}^{A}_{B}T$ e obtenha os ângulos de Roll-Pitch-Yaw equivalentes.
   b. Qual a nova matriz de transformação que relaciona os sistemas de coordenadas A e B após se terem realizado os seguintes movimentos:
      i. Rodar o sistema de coordenadas A de um ângulo igual a $\pi/3$ sobre o eixo de rotação ${}^{A}\vec{r}$;
      ii. Deslocar o sistema de coordenadas B em 4 unidades segundo o eixo de rotação ${}^{A}\vec{r}$;
   c. Qual o deslocamento a realizar, se na sequência de movimentos da alínea anterior substituir o deslocamento realizado segundo a direção ${}^{A}\vec{r}$ por deslocamentos realizados segundo os eixos do sistema referencial A.
   d. Apresente graficamente as sequências de movimentos propostas nas alíneas b) e c).
   e. Qual a expressão que representa a localização da origem do referencial B após ter realizado os movimentos propostos em b)? Qual a nova localização?

2. Dois sistemas de coordenadas A e B estão fixos relativamente a um sistema inercial base e estão relacionados pela matriz de transformação ${}^{A}_{B}T$. O sistema de coordenadas A encontra-se localizado em $t = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}^T$ relativamente ao sistema de coordenadas B e a matriz de rotação ${}^{A}_{B}R$ é representada pelos parâmetros de Euler que se apresentam

$$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \varepsilon_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \quad \varepsilon_3 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \quad \varepsilon_4 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

a) Represente numericamente a matriz de transformação ${}^{A}_{B}T$ e obtenha os ângulos de Roll-Pitch-Yaw equivalentes.
b) Qual a nova matriz de transformação que relaciona os sistemas de coordenadas A e B após se terem realizado os seguintes movimentos:
   1. Rodar o sistema de coordenadas B de um ângulo igual a $\pi/2$ sobre o eixo de rotação ${}^{B}\vec{r} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$;
   2. Deslocar o sistema de coordenadas A em 4 unidades segundo o eixo de rotação ${}^{B}\vec{r}$;
   3. Rodar o atual sistema de coordenadas A de um ângulo igual a $-\pi/2$ sobre o eixo de rotação OY_B.
c) Apresente graficamente a sequência de movimentos proposta na alínea b).
d) Apresente uma sequência alternativa de movimentos que se traduza na mesma matriz de transformação.
e) Qual a expressão que representa a localização da origem do sistema de coordenadas B no sistema de coordenadas A após ter realizado os movimentos propostos em b)? Qual a nova localização?

3. Dois sistemas de coordenadas A e B estão fixos relativamente a um sistema inercial base. Sabendo que $\hat{X}_B = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{X}_A - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{Z}_A$, $\hat{Y}_B = \hat{Y}_A$, $\hat{Z}_B = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{X}_A + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{Z}_A$, e que ${}^{A}t_{ori_B} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, obtenha;

f) A sequência de movimento a realizar de modo a recolocar o sistema de coordenadas B coincidente com o sistema de coordenadas A, i.e., ${}^{A}_{B}T = I_{4x4}$.
g) Obtenha os valores do quaternião unitário da matriz ${}^{A}_{B}R$ ($[e_1, e_2, e_3, e_4]$), e com base nos valores obtidos calcule o eixo de rotação arbitrário ${}^{A}\vec{r}$ e correspondente ângulo de rotação ϕ.
h) Obtenha a transformação ${}^{B}_{B_N}T$ que resulta da rotação do sistema de coordenadas B sobre o eixo ${}^{A}\vec{r}$ de um ângulo ϕ igual a $\pi/3$.
i) Considere o vector, ${}^{A}V = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}^T$, expresso no sistema de coordenadas A. De que forma o vector se altera se for expresso no referencial B ? São ${}^{A}V$ e ${}^{B}V$ o mesmo vector? Comente do ponto de vista das suas magnitudes e direções. Caso sejam diferentes, de que forma se pode transformar o vector ${}^{A}V$ em ${}^{B}V$? Obtenha ${}^{B}V$ partindo do conhecimento de ${}^{A}V$.

4. Considere um espaço de trabalho constituído por um manipulador equipado com uma garra, cuja localização da garra é definida na sua base através da transformação ${}^{0}_{G}T = {}^{0}_{6}T\,{}^{6}_{G}T$. O manipulador está colocado num espaço de trabalho, sendo a pose do robot nesse espaço definida através de ${}^{W}_{0}T$. O espaço de trabalho é monitorizado por uma câmara definida por ${}^{W}_{C}T$, sendo a pose da peça a manusear obtida no referencial da câmara e definida por ${}^{C}_{O}T$.
Obtenha:

a) A transformação ${}^{0}_{6}T$ que assegura a colocação da garra na posição de agarrar a peça;

b) A nova transformação ${}^{C}_{O}T$ após o robot ter movido a peça através de uma rotação θ segundo o seu eixo OZ.

Se após ter movido a peça, rodar a câmara de um ângulo α sobre o eixo ${}^{w}\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, qual a expressão que representa a nova localização da câmara no referencial da garra (${}^{G}_{C_N}T$)?

5. Considere a existência de dois sistemas de coordenadas A e B, inicialmente coincidentes aos quais é aplicada a seguinte sequencia de movimentos:
   - Deslocação do sistema de coordenadas B em 4 unidades segundo o eixo ${}^{A}\overline{r} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.
   - Rotação do sistema de coordenadas B de um ângulo igual a $-\pi/2$ segundo o eixo ${}^{A}\overline{r}$.
   - Rotação do sistema de coordenadas A de um ângulo igual a $-\pi/2$ segundo o eixo $\hat{Z}_B$ do referencial B atual.

   a) Obtenha a matriz de transformação que mapeia B em A, i.e., ${}^{A}_{B}T$.

   b) Represente a sequência de movimentos realizada anteriormente através da conjugação de um movimento translacional puro t combinado com uma rotação sobre um eixo arbitrário ${}^{A}\overline{r}$ de um ângulo ϕ. Obtenha os valores para ϕ, t e ${}^{A}\overline{r}$.

6. Considere a existência de dois sistemas de coordenadas A e B, inicialmente coincidentes aos quais é aplicada a seguinte sequencia de movimentos:
   1. Rotação do sistema de coordenadas B de um ângulo igual a $\pi/2$ segundo o eixo ${}^{B}\overline{r} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.
   2. Deslocação do sistema de coordenadas B em três unidades ao longo do eixo ${}^{B}\overline{r}$.
   3. Rotação do sistema de coordenadas A de um ângulo igual a $-\pi/4$ segundo o atual eixo $\hat{X}_B$.

   a) Obtenha a matriz de transformação que mapeia B em A, i.e., ${}^{A}_{B}T$.

   b) Considere agora a existência de um terceiro referencial C cuja orientação é idêntica à orientação de B e que se encontra localizado em ${}^{B}t_{orig_C} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}^T$. Obtenha a expressão que representa a origem do sistema de coordenadas C no sistema de coordenadas A, i.e., ${}^{A}p_{orig_C}$. Obtenha a matriz de transformação ${}^{A}_{C}T$.

c) Se aplicar ao sistema de coordenadas C uma rotação igual a $\pi/4$ segundo ${}^{B}\bar{r}$ centrado na origem de A, qual a nova transformação ${}^{A}_{C}T$. Considerando que os 3 sistemas de coordenadas {A,B,C}, representam, respectivamente, os sistemas de coordenadas *World*, *Robot* e *Gripper*, obtenha a transformação de movimento a realizar pelo robô para colocar a garra em condição de agarrar uma peça cuja transformação é dada por ${}^{Robot}_{Obj}T$. Qual o valor da rotação a realizar pela garra segundo o seu eixo de aproximação ($\hat{Z}_{Gripper}$) se ${}^{Robot}_{Obj}R = I_{3x3}$?

7. Dois sistemas de coordenadas A e B estão fixos relativamente a um sistema inercial base e estão relacionados pela matriz de transformação ${}^{A}_{B}T = I_{4\times4}$.
   a) Obtenha a matriz de transformação que relaciona os dois sistemas de coordenadas após se ter realizado a seguinte sequência de movimentos:
      1. Deslocação do sistema de coordenadas B em *d* unidades segundo o eixo OY_A.
      2. Rotação do sistema de coordenadas A de um ângulo α segundo o eixo OZ_B.
      3. Rotação do sistema de coordenadas B de um ângulo β segundo o eixo $OX_{A_{INICIAL}}$.
   b) Sabendo que a matriz de transformação que relaciona os dois sistemas de coordenadas, após a sequência de movimentos da alínea a), é representada por

$$ {}^{A'}_{B''}T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, $$

   obtenha os valores de (α,β,d) que conduzem à matriz apresentada.
   c) Se após a realização dos movimentos descritos em a) realizar uma nova rotação do sistema de coordenadas B actual de um ângulo γ sobre o eixo OZ_B do sistema de coordenadas obtido após o movimento 1, indique qual é a nova expressão para a sequência de transformações global.

LABWORK #1 *Data de Entrega: 08 de Outubro 2017*

A componente laboratorial desta disciplina é realizada tirando partido da *toolbox ROBOTICS* desenvolvida pelo professor *Peter Corke*. Para tal deverá instalar a *toolbox* na sua plataforma de trabalho, a qual pode ser descarregada no endereço

http://www.petercorke.com/Robotics_Toolbox.html.

Siga as instruções descritas na página de acesso para integrar as funções da *toolbox* no seu ambiente de trabalho MATLAB.

1. EXERCÍCIO MATLAB (Aula laboratorial #1)
   a. Usando a convenção de ângulos de Eules *Z–Y–X* $(\alpha\text{–}\beta\text{–}\gamma)$, escreva um programa em MATLAB que calcule a matriz de rotação ${}^{A}_{B}R$ tendo como parâmetros de entrada os ângulos de Euler $\alpha\text{–}\beta\text{–}\gamma$. Teste a funcionalidade do programa para:
      i. $\alpha = 30^\circ, \beta = 20^\circ, \gamma = 10^\circ$
      ii. $\alpha = -35^\circ, \beta = -90^\circ, \gamma = 15^\circ$
         1. Para o caso (i) demonstre as seis restrições para matrizes ortonormadas unitárias (i.e. há 9 números numa matriz 3x3, mas apenas 3 são independentes). Demonstre também para o caso (i) que ${}^{B}_{A}R = {}^{A}_{B}R^{-1} = {}^{A}_{B}R^{T}$.
   b. Escreva um programa para calcular os ângulos de Euler $\alpha\text{–}\beta\text{–}\gamma$ tendo como parâmetros de entrada a matriz de rotação ${}^{A}_{B}R$ (problema inverso). Calcule as possíveis soluções. Demonstre esta solução inversa para os dois casos da alínea a). Utilize a validação circular para confirmar os resultados (i.e. Use o código desenvolvido em a) para obter a matriz de rotação e o código desenvolvido em b) para obter os parâmetros de entrada em a).
   c. Escreva uma função em matlab que permita obter o vector de rotação $\vec{r}$ e respectivo ângulo de rotação ϕ, partindo do conhecimento da matriz de rotação. Escreva também a função inversa, i.e, obter a matriz de rotação partindo do conhecimento de $\vec{r}$ e ϕ. Confirme a funcionalidade das respectivas funções através de validação circular.
   d. Replique o objectivo da alínea c), considerando agora o conhecimento do Quaternião Unitário. Compare o seu resultado com o obtido usando a função *Quaternion* da toolbox ROBOTICS.

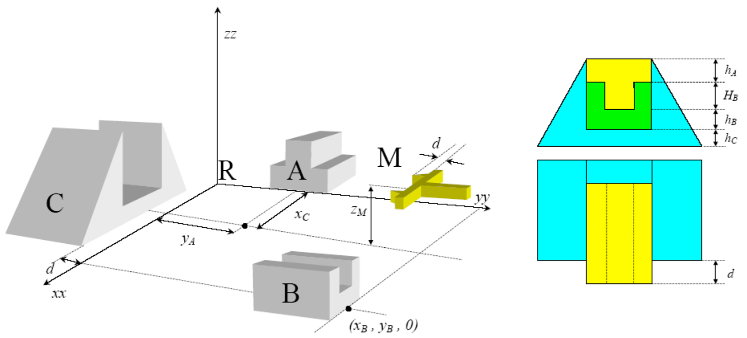
e. Confirme os resultados obtidos anteriormente usando a toolbox ROBOTICS desenvolvida para MATLAB . Use as funções *rpy2tr()*, *tr2rpy()*, *rotx()*, *roty()*, *rotz()*, *trplot() e tranimate().*

2. EXERCÍCIO MATLAB (Aula Laboratorial #2)
   a. Escreva um programa em MATLAB para calcular a matriz de transformação homogénea ${}^{A}_{B}T$ tendo como parâmetros de entrada os ângulos de EULER *Z–Y–X* (α–β–γ) e o vector de posição ${}^{A}P_{B}$. Teste para os exemplos
      i. $\alpha = 30^{\circ}, \beta = 20^{\circ}, \gamma = 10^{\circ} \quad e \quad {}^{A}P_{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{T}$.
      ii. $\alpha = 20^{\circ}, \beta = 0^{\circ}, \gamma = -10^{\circ} \quad e \quad {}^{A}P_{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}^{T}$
   b. Para $\alpha = 20^{\circ}\left(\alpha = \gamma = 0^{\circ}\right)$, ${}^{A}P_{B} = \begin{bmatrix}3 & 0 & 1\end{bmatrix}^{T}$ e ${}^{B}P = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^{T}$, use a função desenvolvida em a) para obter ${}^{A}P$. Verifique visualmente que o resultado está correto (tire partido da função *trplot()* da toolbox).. Demonstre as três interpretações da matriz de transformação homogénea.
   c. Escreva um programa em MATLAB que calcule a matriz homogénea de transformação inversa ${}^{A}_{B}T^{-1} = {}^{B}_{A}T$, usando a fórmula simbólica. Compare os resultados obtidos com os resultados obtidos usando a função do MATLAB *inv.* Demonstre que ambos os métodos devolvem resultados corretos.
   d. Defina ${}^{A}_{B}T$ como sendo o resultado obtido na alínea a) (i) e ${}^{B}_{C}T$ o resultado obtido em a) (ii).
      i. Calcule ${}^{A}_{C}T$, e apresente o Grafo de Transformações. Faça o mesmo para ${}^{C}_{A}T$.
      ii. Dadas ${}^{A}_{C}T$ e ${}^{B}_{C}T$, assuma que desconhece ${}^{A}_{B}T$, calcule-a, e compare o resultado com a resposta que conhece para ${}^{A}_{B}T$.
      iii. Dadas ${}^{A}_{C}T$ e ${}^{A}_{B}T$, assuma que desconhece ${}^{B}_{C}T$, calcule-a, e compare o resultado com a resposta que conhece para ${}^{B}_{C}T$.
   e. Confirme os seus resultados usando a toolbox ROBOTICS desenvolvida para MATLAB por Peter Corke. Use as funções *rpy2tr()* e *transl()*.

3. EXERCÍCIO MATLAB (Aula Laboratorial #2 e #3)

   Considere o ambiente de trabalho que se apresenta, onde o objectivo é usar a garra de uma manipulador colocada em **M** para executar a seguinte sequência de acções:
   1. Pegar no objecto **A**;

2. Inseri-lo no objecto **B**;
3. Encaixar o conjunto no objecto **C**;
   a) A partir da figura, convencionar os referenciais associados a **M, A, B e C**, representá-los, e indicar quais as transformações geométricas que os representam no referencial **R**.
   b) Indicar uma sequência de transformações geométricas que permita cumprir os objectivos propostos $(M \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C)$ segundo o ponto de vista do manipulador, ou, em alternativa, do ponto de vista do referencial **R**.

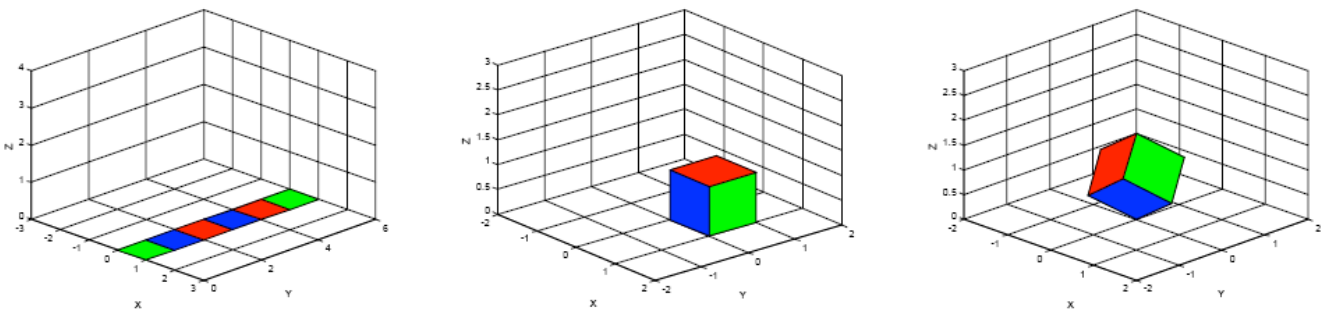


Explore as funcionalidades das funções *trinterp, ctraj* e *mtraj* da toolbox ROBOTICS na realização do problema.

4. EXERCÍCIO MATLAB (Aula laboratorial #3)

   NOTA : exercício avaliativo : A ser apresentado a funcionar na aula de 10 de Outubro

   Construa um cubo a partir de 8 quadrados adjacentes situados no plano XOY como mostra a figura a).



(a) (b) (c)

a) Considere o cubo centrado na origem do sistema de coordenadas (figura b).
b) Elabore a animação da rotação do cubo sobre o vértice situado na origem (figura c).