ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

ESCUELA DE FORMACIÓN DE TECNÓLOGOS

INVESTIGACION DE OPERACIONES

ASIGNATURA:	Investigación de Operaciones.
PROFESOR:	Ing. Luis Ponce.
PERÍODO ACADÉMICO:	Sep. 2015 - Feb. 2016

CONSULTA Nº 2

TÍTULO:

DUALIDAD EN PROGRAMACION LINEAL

ESTUDIANTE

SANCHEZ ARTEAGA FREDY VICENTE

FECHA DE REALIZACIÓN:	15 de noviembre de 2015
FECHA DE ENTREGA:	18 de noviembre de 2015

TABLA DE CONTENIDO

I. TEMAS DE LA CONSULTA

DUALIDAD PROGRAMACION LINEAL

II. OBJETIVO.

- ⇨ Identificar el concepto de dualidad dentro de programación lineal, sus características y aplicarlos con un ejemplo práctico.

III. DESARROLLO.

Definición:

Un problema dual es formulado en base de un modelo de programación primal. Siendo que ambos problemas se encuentran relacionados en el modo de que la solución óptima de uno genera simultáneamente la solución factible del otro. [1]

Procedimiento:

La formulación de un problema dual se resume en:

1. Se formula el problema dual.
2. Se resuelve el problema primal por medio de los métodos de la gran M o Dos fases.
3. Se determina las variables duales que corresponden a las variables primales al final de desarrollo del problema.
4. Se realiza la verificación de cada una de las restricciones y función objetivo utilizando la forma dual del ejercicio.

Relaciones primal-dual:

a) Un problema dual está formado por un número de variables como tantas restricciones tenga el problema primal.
b) Un problema dual está formado por un número de restricciones como tantas variables tenga el problema primal.
c) Los coeficientes dentro de la función objetivo en el problema dual son los valores independientes de las restricciones del problema primal.
d) Los valores independientes de las restricciones del problema dual son los coeficientes dentro de la función objetivo del problema primal.
e) Tabla guía para construir problemas duales.

[1]

Reglas para construir el problema dual		
Problema de Maximización		***Problema de Minimización***
Restricciones		*Variables*
$\geq$	⟺	≤ 0
$\leq$	⟺	≥ 0
$=$	⟺	*Restricciones*
Variables		*irrestrictas*
$\geq \mathbf{0}$	⟺	$\geq$
$\leq \mathbf{0}$	⟺	$\leq$
Irrestrictas	⟺	$=$

Métodos de resolución dualidad en programación lineal

Método 1

$$\begin{pmatrix} Valor\ optimo \\ de\ la\ variable\ dual\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Coeficiente\ z\ primal\ optimo\ de\ la\ variable\ x_i \\ + \\ Coeficiente\ objetivo\ original\ de\ x_i \end{pmatrix} \ [1]$$

Método 2

$$\begin{pmatrix} Valores\ optimos \\ de\ las\ variables\ duales \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Vector\ de\ los\ coeficientes\ objetivo \\ originales\ de\ las\ variables \\ basicas\ primales\ optimas \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} Inversa\ Primal \\ optima \end{pmatrix} \ [1]$$

Resolución del Ejercicio:

$$\begin{aligned} &Maximizar\ z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\ &Sujeto\ a: \\ &\quad x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10 \\ &\quad 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ &\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

Encontrar solucion dual	
Primal	***Dual***
$\boldsymbol{Maximizar\ z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 - MR_1}$ $\boldsymbol{Sujeto\ a}$: $\boldsymbol{x_1 + 2x_2 + x_3 + S_1 = 10}$ $\boldsymbol{2x_1 - x_2 + 3x_3 + R_1 = 8}$ $\boldsymbol{x_1, x_2, x_3, S_1, R_1 \ge 0}$	$Minimizar\ w = 10y_1 + 8y_2$ $Sujeto\ a$: $y_1 + 2y_2 \ge 5$ $2y_1 - y_2 \ge 12$ $y_1 + 3y_2 \ge 4$ $y_1 \ge 0$ $y_2 \ge -M\ (y_2 \to irrestricta)$

①Convertir en desigualdades las restricciones.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + \boldsymbol{S_1} &= 10 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + \boldsymbol{R_1} &= 8 \end{aligned}$$

②Agregar un valor M a la función objetivo por cada variable artificial.

$$Maximizar\ z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 - M\boldsymbol{R_1}$$

③Identificar variables básicas y no básicas.

Variables Basicas	***Variables NO Basicas***
$\boldsymbol{S_1 = 10}$	$x_1 = 0$
$\boldsymbol{R_1 = 8}$	$x_2 = 0$
	$x_3 = 0$

④Despejar las variables artificiales en la función objetivo.

$$\boldsymbol{R_1} = 8 - 2x_1 + x_2 - 3x_3$$
$$z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 - M(8 - 2x_1 + x_2 - 3x_3\ )$$
$$z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 - 8M + 2Mx_1 - Mx_2 + 3Mx_3$$
$$z = (5 + 2M)x_1 + (12 - M)x_2 + (4 + 3M)x_3 - 8M$$
$$z + (-5 - 2M)x_1 + (-12 + M)x_2 + (-4 - 3M)x_3 = -8M$$

Matriz Simplex

	$\boldsymbol{Básica}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{S_1}$	$\boldsymbol{R_1}$	$\boldsymbol{Solución}$	
F1	z	$-5-2M$	$-12+M$	$-4-3M$	0	0	$-8M$	
F2	S_1	1	2	1	1	0	10	$\frac{10}{3} = 3.3$
F3	R_1	2	-1	3	0	1	8	$\frac{8}{3} = 2.6$

⇨ Convertir en 1 el elemento pivote.

$$\frac{1}{3}F3 \rightarrow F3$$

	$\boldsymbol{Básica}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{S_1}$	$\boldsymbol{R_1}$	$\boldsymbol{Solución}$
F1	z	$-5-2M$	$-12+M$	$-4-3M$	0	0	$-8M$
F2	S_1	1	2	1	1	0	10
F3	x_3	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$

⇨ Hacer ceros arriba y abajo del elemento pivote.

$$4 + 3MF3 + F1 \rightarrow F1$$

$4+3MF3$	$\frac{8+6M}{3}$	$\frac{-4-3M}{3}$	$4+3M$	0	$\frac{4+3M}{3}$	$\frac{32+24M}{3}$
$\boldsymbol{F1}$	$-5-2M$	$-12+M$	$-4-3M$	0	0	$-8M$
$\boldsymbol{F1}$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{40}{3}$	0	0	$\frac{4+3M}{3}$	$\frac{32}{3}$

$$-F3 + F2 \rightarrow F2$$

$-F3$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	-1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{3}$
$F2$	1	2	1	1	0	10
$F2$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{22}{3}$

	Básica	x_1	x_2	x_3	S_1	R_1	Solución	
F1	z	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{40}{3}$	0	0	$\frac{4+3M}{3}$	$\frac{32}{3}$	
F2	S_1	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{22}{3}$	$\frac{22}{3}*\frac{3}{7}=3.4$
F3	x_3	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{3}*-3=8$

⇨ Convertir en 1 el elemento pivote.

$$\frac{3}{7}F2 \rightarrow F2$$

	Básica	x_1	x_2	x_3	S_1	R_1	Solución
F1	z	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{40}{3}$	0	0	$\frac{4+3M}{3}$	$\frac{32}{3}$
F2	x_2	$\frac{1}{7}$	1	0	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{22}{7}$
F3	x_3	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$

⇨ Hacer ceros arriba y abajo del elemento pivote.

$$\frac{40}{3}F2 + F1 \rightarrow F1$$

$\frac{40}{3}F2$	$\frac{40}{21}$	$\frac{40}{3}$	0	$\frac{120}{21}$	$-\frac{40}{21}$	$\frac{880}{21}$
$F1$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{40}{3}$	0	0	$\frac{4+3M}{3}$	$\frac{32}{3}$
$F1$	$-\frac{3}{7}$	0	0	$\frac{120}{21}$	$\frac{-12+21M}{21}$	$\frac{368}{7}$

$$\frac{1}{3}F2 + F3 \rightarrow F3$$

$\frac{1}{3}F2$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{21}$	$\frac{22}{21}$
$F3$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
$F3$	$\frac{5}{7}$	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{26}{7}$

	$Básica$	x_1	x_2	x_3	S_1	R_1	$Solución$	
F1	z	$-\frac{3}{7}$	0	0	$\frac{120}{21}$	$\frac{-12+21M}{21}$	$\frac{368}{7}$	
F2	x_2	$\frac{1}{7}$	1	0	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{22}{7}$	$\frac{22}{7}*7=22$
F3	x_3	$\frac{5}{7}$	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{26}{7}$	$\frac{26}{7}*\frac{7}{5}=5.2$

⇨ Convertir en 1 el elemento pivote.

$$\frac{7}{5}F3 \rightarrow F3$$

	$Básica$	x_1	x_2	x_3	S_1	R_1	$Solución$
F1	z	$-\frac{3}{7}$	0	0	$\frac{120}{21}$	$\frac{-12+21M}{21}$	$\frac{368}{7}$
F2	x_2	$\frac{1}{7}$	1	0	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{22}{7}$
F3	x_1	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{26}{5}$

⇨ Hacer ceros arriba y abajo del elemento pivote.

$$\frac{3}{7}F3 + F1 \rightarrow F1$$

$\frac{3}{7}F3$	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{78}{35}$
$\boldsymbol{F1}$	$-\frac{3}{7}$	0	0	$\frac{120}{21}$	$\frac{-12+21M}{21}$	$\frac{368}{7}$
$\boldsymbol{F1}$	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{29}{5}$	$\frac{-2+5M}{5}$	$\frac{274}{5}$

$$-\frac{1}{7}F3 + F2 \rightarrow F2$$

$-\frac{1}{7}\boldsymbol{F3}$	$-\frac{1}{7}$	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{35}$	$-\frac{2}{35}$	$-\frac{26}{35}$
$\boldsymbol{F2}$	$\frac{1}{7}$	1	0	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{22}{7}$
$\boldsymbol{F2}$	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{12}{5}$

Matriz final.

	$Básica$	x_1	x_2	x_3	S_1	R_1	$Solución$
F1	z	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{29}{5}$	$\frac{-2+5M}{5}$	$\frac{274}{5}$
F2	x_2	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{12}{5}$
F3	x_1	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{26}{5}$

Solución:

$$z = \frac{274}{5}$$
$$x_2 = \frac{12}{5}$$
$$x_1 = \frac{26}{5}$$

Aplicación método 1 para resolución.

Al resolver el problema por el método M se resuelve que las variables originales iniciales S_1 y R_1 corresponden a las variables duales y_1 y y_2 respectivamente. Así que , determinamos la solución dual óptima:

$Variables$ ***basicas primales iniciales***	S_1	R_1
Coeficientes de la ecuacion z	$\frac{29}{5}$	$\frac{-2+5M}{5} = -\frac{2}{5} + M$
Coeficiente objetivo original	0	$-M$
Variables Duales	y_1	y_2
Valores optimos.	$\frac{29}{5} + 0 = \frac{29}{5}$	$-\frac{2}{5} + M + (-M) = -\frac{2}{5}$

Comprobación en la forma DUAL:

☑ $10 * \frac{29}{5} + 8 * \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{274}{5}$

☑ $\frac{29}{5} + 2 * \left(-\frac{2}{5}\right) \geq 5$

☑ $2 * \frac{29}{5} - \left(-\frac{2}{5}\right) \geq 12$

☑ $\frac{29}{5} + 3 * \left(-\frac{2}{5}\right) \geq 4$

Valores objetivo primal-dual. Para cualquier par de soluciones primales y duales factibles

$$\begin{pmatrix} Valor\ objetivo\ \ en\ el \\ problema\ de\ maximizacion \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} Valor\ objetivo\ \ en\ el \\ problema\ de\ minimizacion \end{pmatrix}\ [1]$$

IV. CONCLUSIÓN.

- Este método o forma de resolver problemas de programación lineal son efectivos de utilizar cuando tengo muchas restricciones y pocas variables de decisión haciendo que el número de restricciones sea el número de variables de decisión.
- Al realizar el dual de una forma dual nos da come resultado el original (primal).

V. RECOMENDACIÓN.

- Los problemas de dualidad es factible utilizar el método de la gran M para realizar el cambio de variables al final.

VI. BIBLIOGRAFÍA.

[1] Taha, Hamdy A., Investigacion de Operaciones, Novena ed., G. L. Ballesteros, Ed., Mexico: Pearson Educacion, 2012, pp. 137 -141.