INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES (TSI-434)

MODELO DE REDES

Ing. Luis Alfredo Ponce Mgs
ESFOT-EPN
2015 B

CONTENIDOS

1. Definición modelo de redes
2. Problema de transporte
3. Problema de asignación
4. **Problema de la ruta más corta**
5. **Problema de flujo máximo**
6. **Ejercicio Adicional**

Se verán los temas 4 y 5 (1,2 y 3 se vió en la clase anterior)
Ejercicios obtenidos de [1]

4. PROBLEMA DE LA RUTA MÁS CORTA

- Considera problemas en los cuales el objetivo es determinar la ruta o camino más corto entre dos nodos en una red.

4. PROBLEMA DE LA RUTA MÁS CORTA

Ejm.

Se considera la situación que enfrenta la compañía constructora Gorman, la cual tiene varios lugares de construcción con múltiples viajes diarios de carga de personal, equipo y suplemento desde la oficina hasta los sitios de construcción. Los costos asociados con las actividades de transporte son bastante relevantes.

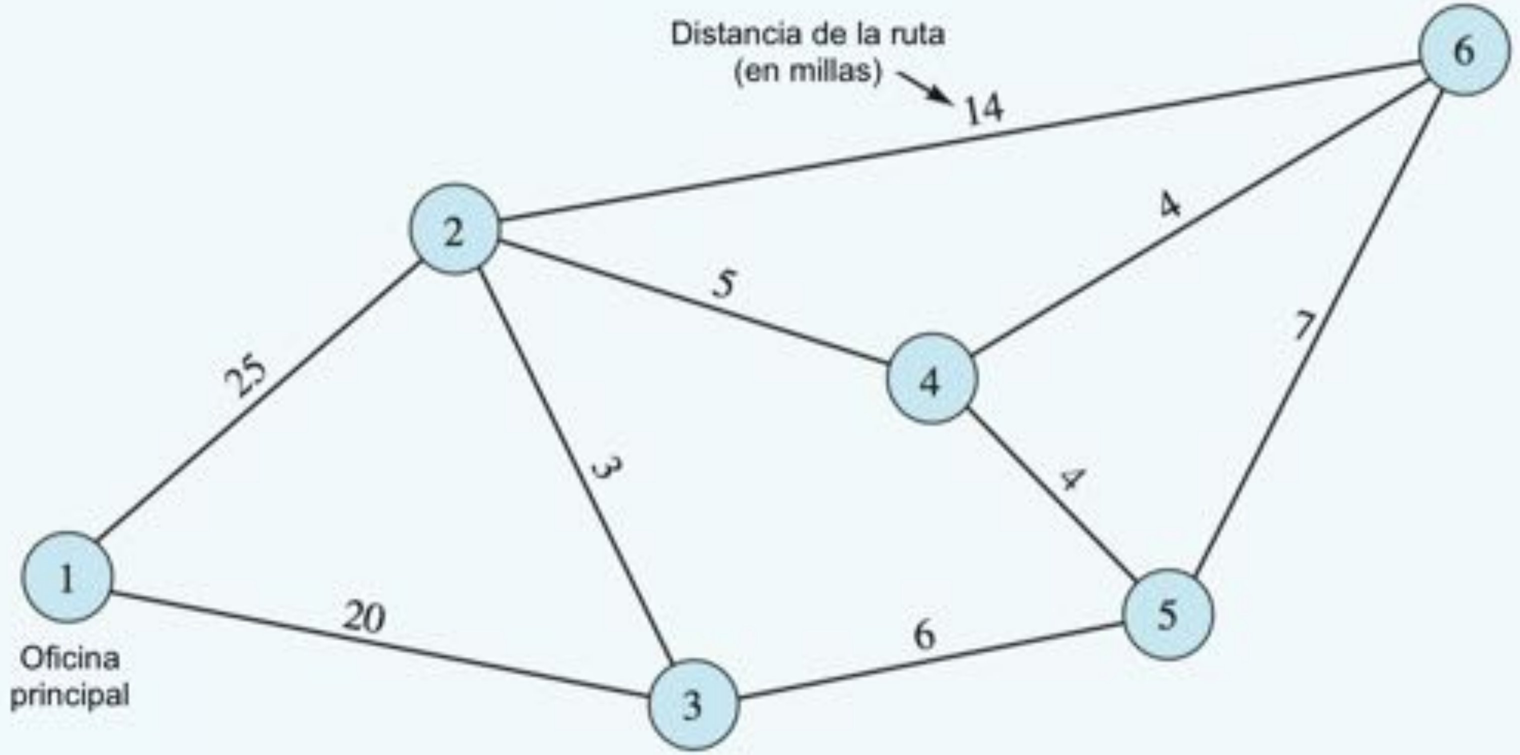
4. PROBLEMA DE LA RUTA MÁS CORTA

Ejm.

Las diferentes alternativas de viaje entre las oficinas de Gorman y cada sitio de construcción se describen en la red de rutas indicadas en la siguiente figura. En donde las distancias entre nodos se expresan en millas y se encuentran sobre cada arco correspondiente. Gorman desea determinar la ruta que minimice la distancia total entre la oficina (ubicada en el nodo 1) y el sitio de construcción ubicado en el nodo 6.

4. PROBLEMA DE LA RUTA MÁS CORTA

Ejm.



Nota: 1. La distancia de cada arco no es necesariamente proporcional a la distancia real que representa.
2. Todas las rutas son de doble vía, por lo que el flujo puede ser en cualquier dirección

Imagen obtenida de [1]

4. PROBLEMA DE LA RUTA MÁS CORTA

Ejm.

Se grafica nuevamente las posibles rutas, con flechas añadidas a los arcos indicando las posibles direcciones (saliendo del nodo de origen al de destino).

4. PROBLEMA DE LA RUTA MÁS CORTA

Ejm.

Se grafica nuevamente las posibles rutas:

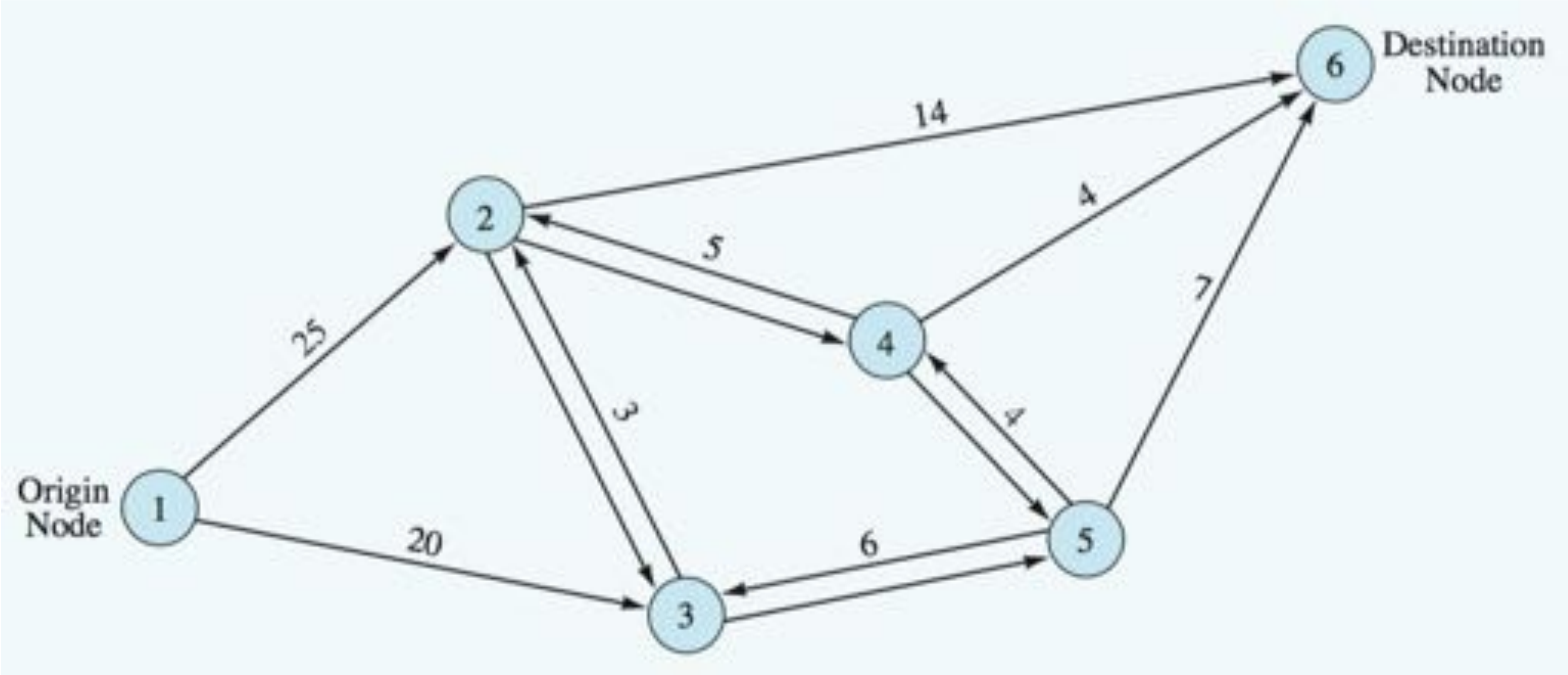


Imagen obtenida de [1]

4. PROBLEMA DE LA RUTA MÁS CORTA

Ejm.

- Para encontrar la ruta más corta entre los nodos 1 y 6, se debe interpretar que el nodo 1 y el nodo 6 tienen una oferta y una demanda de una unidad, respectivamente.
- x_{ij} denota el número de unidades que circulan o que son enviadas desde el nodo *i* hasta el nodo *j*
- Debido a que solo una unidad va a ser transportada desde el nodo 1 al 6, el valor de x_{ij} puede ser 1 o 0.

4. PROBLEMA DE LA RUTA MÁS CORTA

Ejm.

- Si $x_{ij} = 1$, el arco desde el nodo *i* hasta el *j* está en la ruta más corta desde el nodo 1 al nodo 6; si $x_{ij} = 0$, el arco desde el nodo i hasta el nodo j no es la ruta más corta.
- Debido a que se quiere la ruta más corta entre el nodo 1 y el 6, la función objetivo del problema es:

$$min\, 25x_{12} + 20x_{13} + 3x_{23} + 3x_{32} + 5x_{24} + 5x_{42} + 14x_{26} \\ +6x_{35} + 6x_{53} + 4x_{45} + 4x_{54} + 4x_{46} + 7x_{56}$$

4. PROBLEMA DE LA RUTA MÁS CORTA

Ejm.

- Para desarrollar las restricciones del modelo primero empezamos con el nodo 1.
- Debido a que la oferta en el nodo 1 es una unidad, el flujo que sale del nodo 1 es de una unidad. Por lo tanto la restricción se debe escribir:

$$x_{12} + x_{13} = 1$$

4. PROBLEMA DE LA RUTA MÁS CORTA

Ejm.

- Para los nodos 2, 3, 4 y 5 el flujo que sale de cada nodo debe ser igual al flujo que ingresa a cada nodo, el flujo que sale menos el que entra debe ser igual a cero:

	Flujo de salida		Flujo de entrada
Nodo 2	$x_{23} + x_{24} + x_{26}$	$=$	$x_{12} + x_{32} + x_{42}$
Nodo 3	$x_{32} + x_{35}$	$=$	$x_{13} + x_{23} + x_{53}$
Nodo 4	$x_{42} + x_{45} + x_{46}$	$=$	$x_{24} + x_{54}$
Nodo 4	$x_{53} + x_{54} + x_{56}$	$=$	$x_{35} + x_{45}$

4. PROBLEMA DE LA RUTA MÁS CORTA

Ejm.

- Debido a que el nodo 6 es el nodo de destino con la demanda igual a la unidad, el flujo hacia ese nodo debe ser de 1:

$$x_{26} + x_{46} + x_{56} = 1$$

4. PROBLEMA DE LA RUTA MÁS CORTA

Ejm.

El problema de PL final queda de la siguiente manera:

$$\text{Min } 25x_{12} + 20x_{13} + 3x_{23} + 3x_{32} + 5x_{24} + 5x_{42} + 14x_{26} + 6x_{35} + 6x_{53} + 4x_{45} + 4x_{54} + 4x_{46} + 7x_{56}$$

s.t.

$$\begin{aligned}
x_{12} + x_{13} &= 1\\
-x_{12} + x_{23} - x_{32} + x_{24} - x_{42} + x_{26} &= 0\\
- x_{13} - x_{23} + x_{32} + x_{35} - x_{53} &= 0\\
- x_{24} + x_{42} + x_{45} - x_{54} + x_{46} &= 0\\
- x_{35} + x_{53} - x_{45} + x_{54} + x_{56} &= 0\\
x_{26} + x_{46} + x_{56} &= 1
\end{aligned}$$

$x_{ij} \geq 0$ for all i and j

Imagen obtenida de [1]

4. PROBLEMA DE LA RUTA MÁS CORTA

Ejm.
RESOLUCIÓN:

Optimal Objective Value = 32.00000

Variable	Value	Reduced Cost
X12	0.00000	2.00000
X13	1.00000	0.00000
X23	0.00000	6.00000
X32	1.00000	0.00000
X24	1.00000	0.00000
X42	0.00000	10.00000
X26	0.00000	5.00000
X35	0.00000	0.00000
X53	0.00000	12.00000
X45	0.00000	7.00000
X54	0.00000	1.00000
X46	1.00000	0.00000
X56	0.00000	0.00000

Imagen obtenida de [1]

4. PROBLEMA DE LA RUTA MÁS CORTA

MODELAMIENTO GENERAL:

Se usa la siguiente notación para representar cualquier de ruta más corta:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \; si \; el \; arco \; desde \; i \; hasta \; j \; está \; en \; la \; ruta \; más \; corta \\ 0 \; caso \; contrario \end{cases}$$

$$c_{ij} = distancia, tiempo \; o \; costo \; asociado \; con \; el \; arco \; desde \; i \; hasta \; j$$

4. PROBLEMA DE LA RUTA MÁS CORTA

MODELAMIENTO GENERAL:

- El problema se modela de la siguiente manera: [2]

$$Min \sum_{todos\ los\ arcos} c_{ij}x_{ij}$$

4. PROBLEMA DE LA RUTA MÁS CORTA

MODELAMIENTO GENERAL:

- El problema se modela de la siguiente manera: [2]

Sujeto a:

$$\sum_{arcos\ de\ salida} x_{ij} = 1 \quad nodo\ de\ origen\ i$$

$$\sum_{arcos\ de\ salida} x_{ij} = \sum_{arcos\ de\ entrada} x_{ij}$$

$$\sum_{arcos\ de\ entrada} x_{ij} = 1\ nodo\ de\ destino\ j$$

5. PROBLEMA DE MÁXIMO FLUJO

- El objetivo en un problema de máximo flujo es el de determinar la cantidad máxima de flujo (vehículos, mensajes, fluidos, etc) que pueden entrar y salir de una red dado un determinado periodo de tiempo.
- Busca transmitir el flujo a través de todos los arcos de la red de la manera más eficiente posible.
- La cantidad de flujo está limitada a la restricción de capacidad de los diferentes arcos en la red.

5. PROBLEMA DE MÁXIMO FLUJO

- Por ejemplo, en una autopista el límite está dado por la capacidad de vehículos, o en un sistema de distribución de petróleo está dado por el tamaño de las tuberías.
- El límite máximo de flujo en cada arco se denomina *capacidad de flujo* del arco.
- Aunque no se especifica la capacidad de los nodos, se asume que el flujo que entra a cada nodo es igual al que sale.

5. PROBLEMA DE MÁXIMO FLUJO

Ejm.

Considere la autopista inter-estatal norte-sur que atraviesa Cincinnati. El flujo de vehículos de norte a sur alcanza niveles de 15,000 vehículos en horas pico. Debido a un programa de mantenimiento de verano de la autopista, el cual requiere el cierre temporal de la misma, se ha propuesto una ruta alternativa a través de Cincinnati. La ruta alternativa incluye otras autopistas así como calles de la ciudad.

5. PROBLEMA DE MÁXIMO FLUJO

Ejm.

Debido a las diferencias de límites de velocidad y patrones de tráfico, las capacidades de flujo varían por cada calle.

La red propuesta se presenta en la siguiente gráfica, la dirección de los flujos para cada arco está indicada así como la capacidad del mismo.

5. PROBLEMA DE MÁXIMO FLUJO

Ejm.

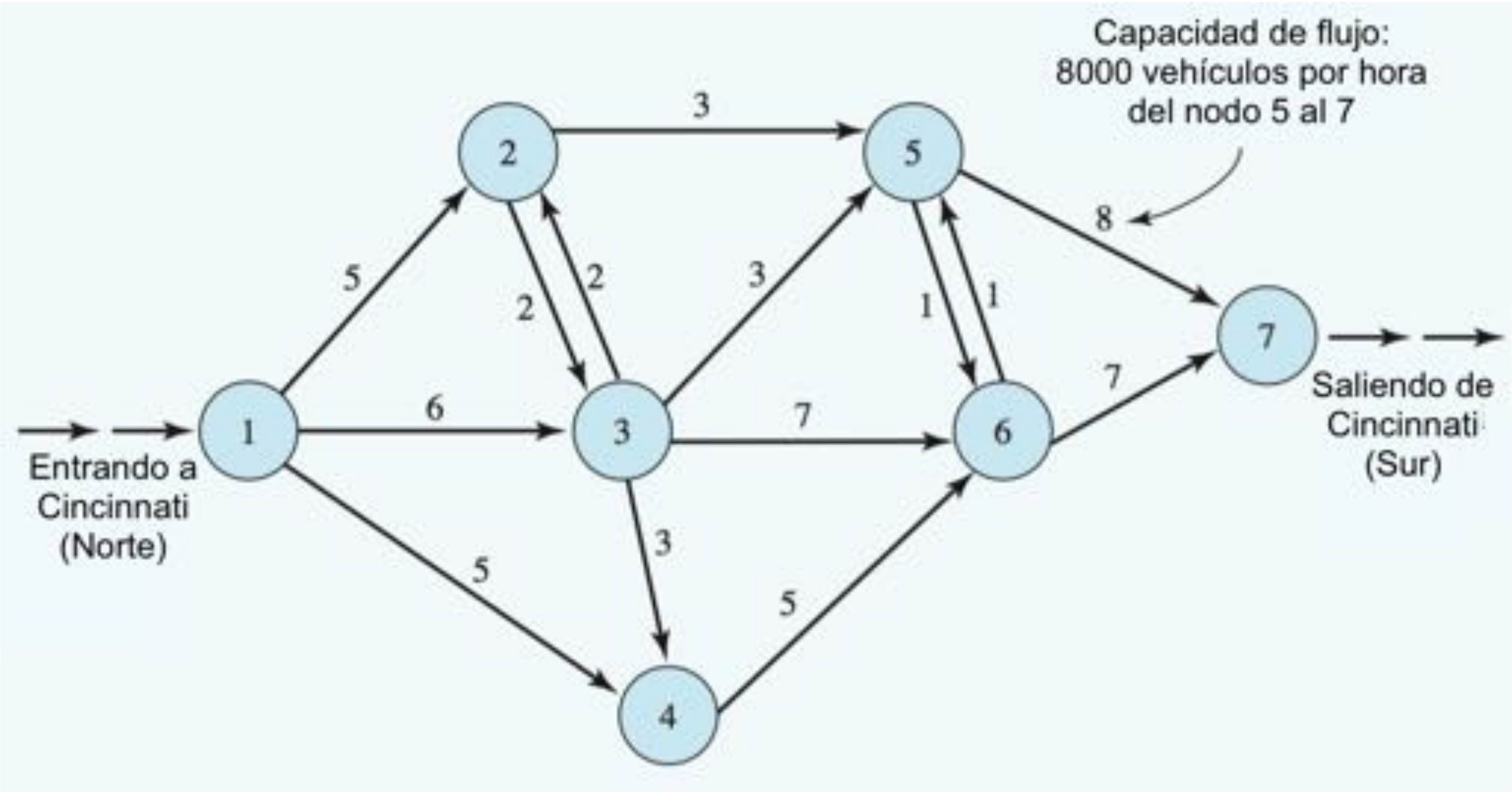


Imagen obtenida de [1]

5. PROBLEMA DE MÁXIMO FLUJO

Ejm.

- Para resolver este tipo de problemas primero se debe añadir un arco del nodo 7 de regreso hacia el nodo 1, el cual representa el flujo total en el sistema de la red.