RESUMEN

En el Cuadro 4.16 se presenta un resumen de los principales indicadores para medir la bondad económica de un proyecto de inversión o el costo de un proyecto de financiación, incluyendo las funciones de Excel utilizadas para su estimación

Cuadro 4.16

Método de evaluación	Definición	Características	Excel
Valor presente neto	Cifra relativa adicional a lo que se obtendría al invertir en oportunidades convencionales	- *i*: interés de oportunidad - Se seleccionan proyectos con *VPN* > 0 - Considera las magnitudes involucradas en los proyectos - Genera el ordenamiento correcto en el caso de alternativas mutuamente excluyentes de igual vida útil - Requiere unificar flujos para evaluar alternativas con diferente vida útil	*VNA*(*i*,rango), si los períodos son constantes VNA.NO.PER., si los períodos no son constantes
Tasa interna de retorno	Rentabilidad de los fondos que se encuentran invertidos en un proyecto. Tasa de interés que hace 0 el valor presente neto	- Se seleccionan proyectos con TIR mayor a la tasa de interés de oportunidad - Difiere de la rentabilidad de una inversión si los montos liberados no se reinvierten a la misma TIR - Requiere análisis incremental al evaluar alternativas mutuamente excluyentes de igual vida útil - Requiere análisis incremental y unificar flujos para evaluar alternativas con diferente vida útil - Puede haber proyectos con múltiples tasas internas de retorno	TIR(rango, resultado aproximado), si los períodos son constantes El resultado aproximado es un punto de partida para que Excel inicie las iteraciones; se puede cambiar en caso de error TIR.NO.PER., si los períodos no son constantes
Relación beneficio /costo	Relación entre los ingresos y los costos traídos a valor presente neto.	- Se seleccionan proyectos con relación B/C>1 - Requiere análisis incremental al evaluar alternativas mutuamente excluyentes de igual vida útil	
Costo anual equivalente	Serie uniforme equivalente a los flujos de un proyecto	- Se seleccionan proyectos con menor costo anual equivalente o mayor beneficio anual equivalente - Útil para evaluar alternativas con diferente duración	

EJERCICIOS RESUELTOS

Los siguientes nueve ejercicios resumen la mayoría de los conceptos presentados en este capítulo.

1. Considere los siguientes dos proyectos de inversión, con los flujos que se muestran en el Cuadro 4.17, el cual incluye el cálculo de los valores presentes netos y las tasas internas de retorno para cada proyecto y para la alternativa incremental.

Cuadro 4.17

Año	Proyecto A	Proyecto B	(B-A)
0	-300.000	-300.000	0
1	160.000	140.000	-20.000
2	164.800	151.200	-13.600
3	169.744	163.296	-6.448
4	174.836	176.360	1.523
5	180.081	190.468	10.387
6	185.484	205.706	20.222
7	191.048	222.162	31.114
8	196.780	239.935	43.156
9	202.683	259.130	56.447
10	208.764	279.861	71.097
TIO	25,00%		
VPN (i=0,25)	322.326	332.625	10.299
TIR	55%	53%	31%

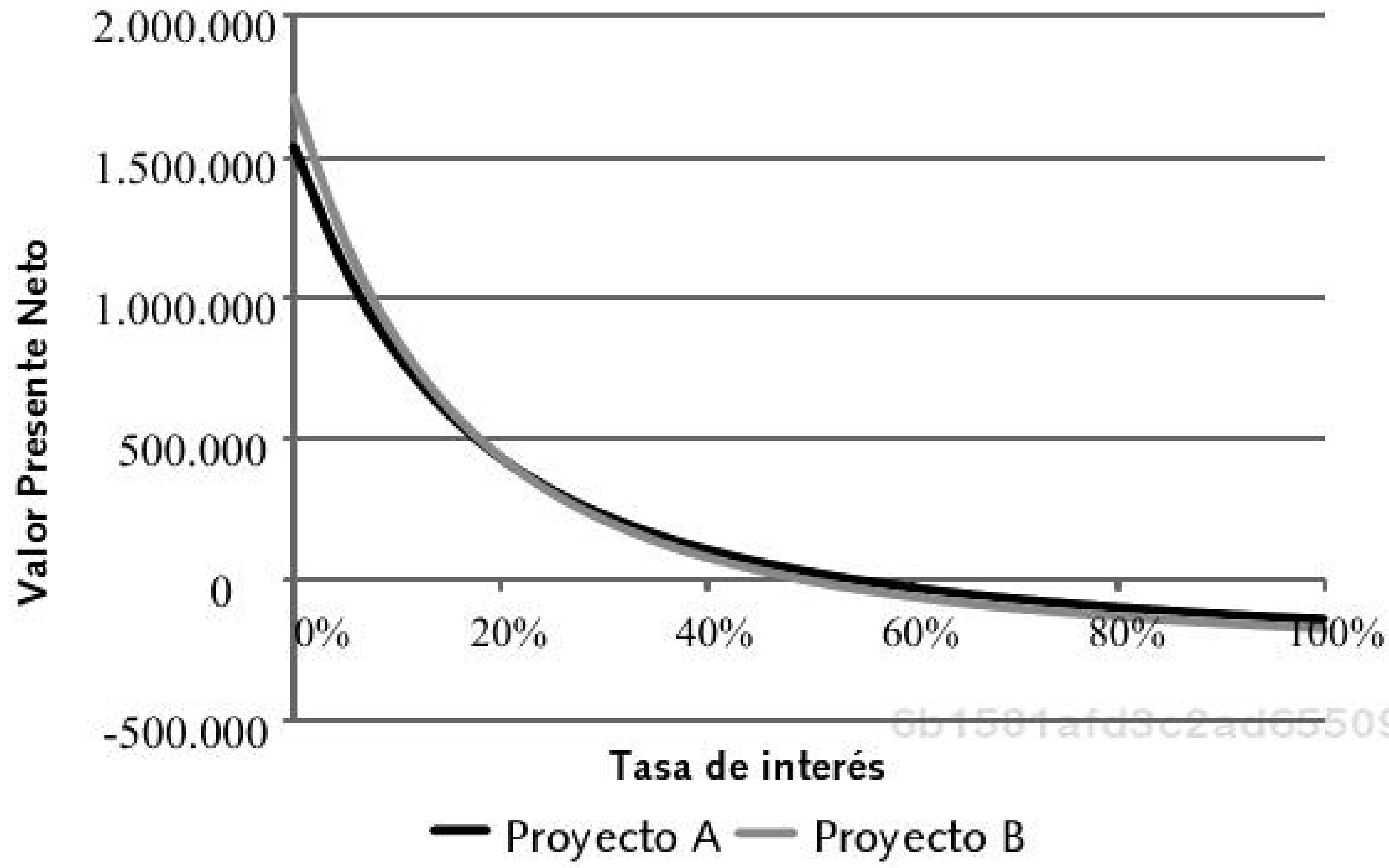
a) Graficar el valor presente neto como una función de la tasa de interés de oportunidad.

b) ¿Cuál sería su recomendación sobre el proyecto a escoger, si fueran mutuamente excluyentes y la tasa de interés de oportunidad fuera del 25%? Justifique su respuesta.

Solución:

a) Gráficas del valor presente neto para cada proyecto:

Figura 4.17



En la Figura 4.17, tomada de Excel, se muestra el comportamiento del valor presente neto para los dos proyectos A y B, donde se puede apreciar cómo el mismo disminuye con la tasa de interés de oportunidad hasta volverse negativo en ambos casos, para tasas de interés elevadas. Allí también se muestra la tasa de interés para la cual el valor presente neto de cada proyecto es igual a cero, que corresponde precisamente a la tasa interna de retorno de cada proyecto.

b) Selección entre los dos proyectos, si los mismos son mutuamente excluyentes, para una tasa de interés de oportunidad del 25%.

Se escogería el proyecto con el mayor valor presente neto, que es el proyecto B, no obstante que la tasa interna de retorno del proyecto A es mayor. Se recalca que en caso de alternativas mutuamente excluyentes el valor presente neto siempre conduce al ordenamiento correcto de alternativas; no así la tasa interna de retorno aplicada directamente.

La alternativa incremental (B-A) tiene un valor presente neto positivo, para una tasa de interés de oportunidad del 25%. La tasa interna de retorno de la alternativa incremental (31%) es superior a la tasa de interés de oportunidad, mostrando una vez más que el proyecto B se prefiere al proyecto A.

2. Un proyecto de inversión A con el flujo de fondos que se muestra en el Cuadro 4.18:

Cuadro 4.18

Año	0	1	2	3	4	5
Flujo	-10.000	3.000	4.500	5.500	6.000	7.000

a) ¿Cuál es el valor presente neto del proyecto para una tasa de interés de oportunidad del 25%? ¿Cómo interpreta la cifra obtenida?

b) ¿Cuál es la tasa interna de retorno del proyecto? ¿Cómo interpreta la cifra obtenida?

c) ¿Cuál es la rentabilidad de los 10.000 durante el horizonte de 5 años? ¿Cuál es la diferencia con el valor obtenido en b)?

Solución:

a) El valor presente neto del proyecto para la tasa de interés de oportunidad del 25% es igual a 2.847,36. Esta cifra se puede interpretar como el valor adicional que se genera por invertir en el proyecto y no en las oportunidades convencionales, con un rendimiento del 25%.

b) La tasa interna de retorno del proyecto es del 36,41%. Esta cifra se puede interpretar como la rentabilidad que el proyecto le permite generar a un peso mientras el peso se encuentre invertido en el proyecto.

c) Para calcular la rentabilidad de los 10.000, durante los 5 años, hay que tener en cuenta los flujos de fondos liberados por el proyecto y su reinversión a la tasa de interés de oportunidad del 25%, lo cual permite acumular la siguiente cifra al final de los 5 años:

$$Ac_5 = 3.000*(1+0,25)^4 + 4.500*(1+0,25)^3 + 5.500*(1+0,25)^2 + 6.000*(1+0,25)^1 + 7.000$$

$$Ac_5 = 39.207,03$$

Para encontrar la rentabilidad de los 10.000, durante los 5 años, se plantea la siguiente ecuación:

$$10.000 * (1+R)^5 = 39.207,03$$

Despejando R, se obtiene $R = 31,42\%$ como la rentabilidad anual de los 10.000 durante los 5 años, que es inferior a la tasa interna de retorno, ya que los flujos liberados por el proyecto se reinvierten a una tasa del 25% y no a la tasa interna de retorno.

3. Considere un proyecto de inversión B con el flujo de fondos que se muestra en el Cuadro 4.19:

Cuadro 4.19

Año	0	1	2	3	4	5
Flujo	-15.000	5.500	6.000	6.800	8.500	9.500

a) ¿Cuál es el valor presente neto del proyecto para una tasa de interés de oportunidad del 25%? ¿Cómo interpreta la cifra obtenida?

b) ¿Cuál es la tasa interna de retorno del proyecto? ¿Cómo interpreta la cifra obtenida?

c) Suponga que este proyecto y el del ejercicio anterior son mutuamente excluyentes, ¿Cuál de los dos proyectos escogería?

Solución:

a) El valor presente neto del proyecto para la tasa de interés de oportunidad del 25% es igual a 3.316,16. Esta cifra se puede interpretar como el valor adicional en la fecha "cero" que se genera por invertir en el proyecto y no en las oportunidades convencionales, con un rendimiento del 25%.

b) La tasa interna de retorno del proyecto es del 34,35%. Esta cifra se puede interpretar como la rentabilidad que el proyecto le permite generar a un peso mientras el peso se encuentre invertido en el proyecto.

c) El proyecto B, de este problema tiene un valor presente neto de 3.316 superior al del proyecto A del segundo problema (2.847), y por lo tanto sería el proyecto a seleccionar en el caso de que ambos fueran mutuamente excluyentes, no obstante que la tasa interna de retorno del proyecto B (34,35%) es menor que la tasa interna de retorno del proyecto A (36,41%).

4. Comparando los proyectos A y B de los dos problemas anteriores, ¿cómo podría utilizar la tasa interna de retorno para hacer la selección correcta si los dos proyectos fueran mutuamente excluyentes?

Como se trata de inversiones de tamaño diferente, se analizaría la alternativa incremental, representada por (B-A), cuyo flujo se resume en el Cuadro 4.20:

Cuadro 4.20

Año	0	1	2	3	4	5
(B-A)	-5.000	2.500	1.500	1.300	2.500	2.500

La tasa interna de retorno de este flujo incremental (B-A) es igual a 29,48%, superior a la tasa de interés de oportunidad del 25%, por lo cual se justifica invertir los 5.000 adicionales en el proyecto B y no en las oportunidades convencionales que solo rentan un 25%. Como conclusión, se prefiere el proyecto B al A, que era precisamente el ordenamiento que se había obtenido anteriormente a través del valor presente neto.

5. Un proyecto de inversión con los siguientes flujos durante su vida útil de 4 años: año 0, -3.000; año 1, 900; año 2, 1.500; año 3, 1.800; año 4, 2.500, y cuya tasa de interés de oportunidad es del 25%. ¿Cuál es la rentabilidad de los 3.000 durante los 4 años?

La tasa interna de retorno del proyecto es del 34,53%, que va a resultar superior a la rentabilidad de los 3.000, durante los 4 años, ya que los flujos de fondos liberados por el proyecto se reinvierten a la tasa de interés de oportunidad, la cual es del 25%.

Para el cálculo de la rentabilidad de los 3.000 durante los 4 años, hay que tener en cuenta los flujos de fondos liberados por el proyecto y la reinversión de esos flujos a la tasa de interés de oportunidad, lo cual permite acumular al final del cuarto año:

$$Ac_4 = 900*(1+0{,}25)^3 + 1.500*(1+0{,}25)^2 + 1.800*(1+0{,}25) + 2.500$$

$$Ac_4 = 8.851{,}56$$

Para encontrar la rentabilidad de los 3.000, durante los 4 años, se plantea la siguiente ecuación:

$$3.000 * (1+R)^4 = 8.851{,}56$$

Despejando R, se obtiene R = 31,06% como la rentabilidad anual de los 3.000 durante los 4 años, que es inferior a la tasa interna de retorno, ya que los flujos liberados por el proyecto se reinvierten a una tasa del 25% y no a la tasa interna de retorno.

6. Dos proyectos de inversión mutuamente excluyentes, con un horizonte de 5 años, muestran los flujos presentados en el Cuadro 4.21:

Cuadro 4.21

Fecha	Proyecto A	Proyecto B
0	(280)	(400)
1	70	100
2	120	162
3	150	203
4	180	258
5	210	300

Tasa de interés de oportunidad: 25%.

a) ¿Cuál de los dos proyectos seleccionaría?

b) Si únicamente existen esos dos proyectos, adicionalmente a las inversiones convencionales que determinan la tasa de interés de oportunidad, ¿cuál sería la rentabilidad promedio de los 400 millones durante los 5 años?

Solución:

a) Para la selección de uno de los dos proyectos se utiliza el valor presente neto:

El valor presente neto del proyecto A es igual a 72,14.

El valor presente neto del proyecto B es igual a 91,59.

Por lo tanto se escogería el proyecto B, con un mayor valor presente neto.

b) Para determinar la rentabilidad de los 400 millones de pesos, durante el período de 5 años, se selecciona el proyecto B, reinvirtiendo los flujos de fondos a la tasa de interés de oportunidad del 25%, lo cual permitiría acumular al final de los 5 años:

$$Ac_5 = 100*(1+0,25)^4 + 162*(1+0,25)^3 + 203*(1+0,25)^2 + 258*(1+0,25) + 300$$
$$Ac_5 = 1.500,23$$

Para encontrar la rentabilidad de los 400 millones, durante los 5 años, se plantea la siguiente ecuación:

$$400 * (1+R)^5 = 1.500,23$$

Despejando R, se obtiene R =30,26% como la rentabilidad anual de los 400 durante los 5 años, que es inferior a la tasa interna de retorno, ya que los flujos liberados por el proyecto se reinvierten a una tasa del 25% y no a la tasa interna de retorno.

7. Un crédito a 2 años, que paga intereses netos del 28% nominal anual, pagaderos trimestre vencido, se amortiza en dos pagos iguales, al final de cada año. Los gastos de tramitación del crédito, incluyendo constitución de hipotecas, son del 1,5%, pagaderos al comienzo del crédito. ¿Cuál es el costo efectivo del crédito antes y después de impuestos?

Período básico de análisis: trimestre, ya que los intereses se pagan trimestralmente.

En el Cuadro 4.22 se muestran los flujos de fondos antes de impuestos:

Cuadro 4.22

Trim	Desembolso	Trámites	Amortización	Intereses	Flujo neto
0	1.000	-15			985
1				-70	-70
2				-70	-70
3				-70	-70
4			-500	-70	-570
5				-35	-35
6				-35	-35
7				-35	-35
8			-500	-35	-535

La tasa interna de retorno del flujo anterior (antes de impuestos) es del 7,3239% trimestral, que anualizada da un costo del 32,67% efectivo anual, como costo del crédito antes de impuestos.

El flujo de fondos después de impuestos, al tener en cuenta el crédito tributario derivado de los gastos para la tramitación del crédito y de los pagos de intereses, que por simplicidad se consideran acumulados al final del primer y segundo año, se muestra en el Cuadro 4.23:

Cuadro 4.23

Trim.	Desembolso	Trámites	Amortización	Intereses	Crédito tributario	Flujo neto
0	1000	-15				985
1				-70		-70
2				-70		-70
3				-70		-70
4			-500	-70	103,25	-466,75
5				-35		-35
6				-35		-35
7				-35		-35
8			-500	-35	49	-486

La tasa interna de retorno del flujo anterior sería del 4,9369% trimestral, que anualizada da un costo efectivo del crédito, después de impuestos, del 21,258% efectivo anual.

Observe que al considerar el costo del crédito antes de impuestos (32,67%), multiplicado por 0,65 (1-tasa de impuestos), el costo después de impuestos sería del 21,235%.

8. A un Certificado de Depósito a Término (CDT), que paga un interés del 28% nominal anual pagadero trimestre anticipado, emitido inicialmente a 90 días, le faltan 37 días para su vencimiento. ¿Cuál es el valor de mercado actual del CDT, si la tasa de interés del mercado es del 24% efectivo anual?

El flujo de fondos del proyecto sería:

Fecha (días)	Flujo
0	$-P_0$
37	100

Entonces: $P_0 = \dfrac{100}{(1+i_d)^{37}}$

Recordando que:

$$(1+i_e) = (1+i_d)^{365}$$

$$i_d = (1+i_e)^{1/365}$$

Entonces, $P_0 = \dfrac{100}{(1+i_d)^{37/365}} = \dfrac{100}{(1+0{,}24)^{37/365}} = 97{,}843\%$

El valor actual del CDT, para una tasa de interés de mercado del 24% efectiva anual, sería del 97,843% de su valor nominal (100%).

9. Un bono a 4 años amortizable totalmente al final de los 4 años paga intereses del 22% nominal anual pagaderos semestre vencido. Le faltan 217 días para su vencimiento. La tasa de interés de mercado es del 23% efectiva anual. ¿Cuál es el valor de mercado del bono?

El flujo de fondos del bono, cuando le faltan 217 días para su vencimiento, es el siguiente:

Fecha (días)	Flujo
37	11
217	111

Para determinar el valor del bono en la fecha cero con el anterior flujo de fondos, se calcula el valor presente del flujo a una tasa de interés diaria equivalente al 23% efectivo anual que es la tasa de interés del mercado. Lo anterior se puede expresar en términos generales como:

$$P = \frac{11}{(1{,}23)^{37/365}} + \frac{11}{(1{,}23)^{217/365}}$$

$$P = 10{,}7715 + 98{,}1459 = 108{,}91$$

El valor actual del bono es del 108,91% de su valor nominal.

EJERCICIOS DE RECAPITULACIÓN O AUTOEVALUACIÓN

Problema 1

Suponga tres proyectos mutuamente excluyentes, con los montos de inversión y de flujo de caja anual que se muestran en el Cuadro 4.24. ¿Cuál sería el ordenamiento correcto de las tres alternativas de inversión, si la tasa de interés de oportunidad es del 20%?

Cuadro 4.24

		Proyectos		
	Fecha	A	B	C
	0	-2.500.000	-3.000.000	-3.500.000
	1	500.000	350.000	400.000
	2	700.000	450.000	600.000
	3	900.000	550.000	700.000
	4	1.000.000	700.000	800.000
	5	1.100.000	900.000	1.100.000
	6	1.250.000	1.200.000	1.700.000
	7	1.400.000	1.500.000	2.200.000
	8	1.550.000	1.900.000	3.000.000
	9	1.700.000	2.500.000	4.000.000
	10	1.900.000	3.000.000	5.000.000
Tasa de interés de oportunidad	20%			
Valor presente neto		1.654.079	853.133	1.946.725
Tasa interna de retorno		33,64%	25,27%	29,13%
Tasa de rentabilidad verdadera		26,25%	23,04%	25,43%

Al final del Cuadro 4.24 se muestran los resultados de los tres indicadores que se utilizan para hacer la comparación: valor presente neto al 20%, tasa interna de retorno (TIR) y tasa interna de retorno modificada (TIRM), utilizando respectivamente las funciones de Excel, VNA, TIR y TIRM. En el caso de la tasa interna de retorno modificada (TIRM), se supone que la reinversión de los flujos que libera el proyecto se hace a una tasa especificada, que para nuestro ejemplo fue la TIO del 20%. La función en Excel, tiene la siguiente forma:

TIRM = *TIRM* (rango de valores; tasa de financiamiento; tasa de reinversión)

TIRM = *TIRM* (C5:C15;18%), suponiendo que el rango de valores se encuentra en el rango C5:C15 de la hoja de Excel, no se considera tasa de financiamiento y la tasa de reinversión es del 20%.

El ordenamiento correcto para alternativas de inversión mutuamente excluyentes con la misma vida, independientemente de que los montos de inversión sean diferentes, es el que se obtiene a través de la utilización del valor presente neto, ya que supone correctamente que cualquier peso por fuera del proyecto se reinvierte a la TIO. Por lo tanto, el ordenamiento correcto de la tres alternativas de inversión es:

C > A > B

¿Cómo explicar los ordenamientos incorrectos que se producen utilizando la TIR y la TIRM? En el caso de la TIR, se estaría suponiendo incorrectamente que los pesos por fuera del proyecto se están reinvirtiendo a la TIR, lo cual en general es incorrecto.

En el caso de la TIRM, ésta no tiene en cuenta los montos diferentes de inversión, no obstante que la misma considera que la reinversión de los flujos que libera el proyecto se hace a la TIO. Para que los tres proyectos sean mutuamente excluyentes se debe disponer inicialmente de $3.500.000; si se utiliza la alternativa A, $2.500.000 se invierten inicialmente en el proyecto, que genera una rentabilidad interna igual a la TIR (mientras un peso se encuentre invertido en el proyecto). Por ello, la TIRM es del 26,25%, una combinación entre una rentabilidad interna del 33,64% y una reinversión del 20%. Sin embargo, inicialmente quedan $1.000.000 por fuera del proyecto, que invertidos al 20% hacen que la rentabilidad ponderada sea inferior a la que se obtiene a través de la alternativa C, donde los $3.500.000 se invierten totalmente en el proyecto C, con una rentabilidad interna (TIR) del 29.13% y una tasa de reinversión igual a la TIO, esto es, 20%, para obtener una tasa interna de retorno modificada del 25.43%, que ya tuvo en cuenta la inversión adicional de los $1.000.000 que hay de diferencia entre la alternativa C y la A.

Se deben comprobar los resultados anteriores a través de los montos acumulados al final de los 10 años, suponiendo que la reinversión de cualquier suma por fuera del proyecto se hace a la TIO del 20%.

Si las alternativas son mutualmente excluyentes, la comparación se tiene que hacer entre:

- \$2.500.000 invertidos inicialmente en el proyecto A y \$1.000.000 a la tasa de interés de oportunidad del 20%, durante 10 años. Los flujos que libera el proyecto A se reinvierten a la TIO.

- \$3.000.000 invertidos inicialmente en el proyecto B y \$500.000 a la tasa de interés de oportunidad del 20%, durante 10 años. Los flujos que libera el proyecto B se reinvierten a la TIO.

- \$3.500.000 invertidos inicialmente en el proyecto C. Los flujos que libera el proyecto C se reinvierten a la TIO.

Los resultados se resumen en el Cuadro 4.25, que confirma lo mostrado previamente, con el ordenamiento correcto correspondiente al del valor presente neto.

Cuadro 4.25

Proyectos				Acumulado al final del año 10		
Fecha	A	B	C	A	B	C
	-	-	-			
0	2.500.000	3.000.000	3.500.000			
1	500.000	350.000	400.000	2.579.890	1.805.923	2.063.912
2	700.000	450.000	600.000	3.009.872	1.934.918	2.579.890
3	900.000	550.000	700.000	3.224.863	1.970.749	2.508.227
4	1.000.000	700.000	800.000	2.985.984	2.090.189	2.388.787
5	1.100.000	900.000	1.100.000	2.737.152	2.239.488	2.737.152
6	1.250.000	1.200.000	1.700.000	2.592.000	2.488.320	3.525.120
7	1.400.000	1.500.000	2.200.000	2.419.200	2.592.000	3.801.600
8	1.550.000	1.900.000	3.000.000	2.232.000	2.736.000	4.320.000
9	1.700.000	2.500.000	4.000.000	2.040.000	3.000.000	4.800.000
10	1.900.000	3.000.000	5.000.000	1.900.000	3.000.000	5.000.000
Acumulado, inversión inicial:				25.720.961	23.857.587	33.724.688
Acumulado inversión restante:				6.191.736	3.095.868	0
Acumulado, inversión \$3.500.000:				31.912.697	26.953.455	33.724.688
Tasa de rentabilidad verdadera:				24,74%	22,65%	25,43%

Problema 2

Un bono emitido inicialmente a 6 años, con un cupón semestral del 5%. El 15 de septiembre del año 2009, fecha de la valoración, al bono le faltan 3 años y 143 días para su vencimiento. ¿Cuál es el valor de mercado del bono si la tasa de interés de mercado es del 14% efectivo anual?

Valor nominal del bono	=	$1.000.000
Cupón semestral	=	5,00%
Tasa de interés de mercado	=	14,00% efectivo anual
Tasa de interés de mercado	=	6,77% semestral

En el Cuadro 4.26 se muestran los cálculos necesarios para determinar el valor de mercado el 15 de septiembre del año 2009, si la tasa de interés de mercado es del 14% efectivo anual:

Cuadro 4.26

Fecha (días)	Fecha (años)	Fecha	Flujo caja	Valor presente
0	0	15/09/2009	0	0
143	0,39	5/02/2010	50.000	47.498
325	0,89	6/08/2010	50.000	44.494
508	1,39	5/02/2011	50.000	41.665
690	1,89	6/08/2011	50.000	39.030
873	2,39	5/02/2012	50.000	36.548
1.055	2,89	5/08/2012	50.000	34.237
1.238	3,39	4/02/2013	1.050.000	673.256
Suma =				916.728

El valor de mercado, a la fecha del 15 de septiembre del 2009, es de $916.728 por un bono de valor nominal o facial de $1.000.000.

Al mismo valor se puede llegar aplicando la función de valor presente no periódico (VNA.NO.PER), que calcula el valor presente de un flujo de caja que no es periódico. La forma de la función es:

Valor presente = VNA.NO.PER (C3;F6:F13;E6:E13), donde C3, corresponde a la tasa de interés de mercado, F6:F13 al rango en que se encuentran los valores y E6:E13 a las fechas en las cuales hay flujo de caja. Para nuestro ejemplo:

Valor presente = VNA.NO.PER(14%;0,50.000,...,1.050.000;15/09/2009...4/02/2013)

Valor presente = 916,728

¿Cual sería la rentabilidad de una inversión, si el bono se compra por un valor de $890.000 el 15 de septiembre del año 2009?

En el Cuadro 4.27 se muestran los valores necesarios para una respuesta a la pregunta formulada; como se trata de períodos que no son iguales, no se puede utilizar directamente la tasa interna de retorno (TIR). Una forma de resolver el problema es utilizar la función "Buscar objetivo" de Excel al flujo de caja, donde la celda objetivo es la suma de los valores presentes individuales, la cual muestra el valor final de 890.000, y la celda a variar es la que contiene la tasa de interés de mercado, cuyo valor inicial fue de 14%.

Cuadro 4.27

Fecha (días)	Fecha (años)	Fecha	Flujo caja	Valor presente
0	0	15/09/2009	-890.000	
143	0,39	5/02/2010	50.000	47.308
325	0,89	6/08/2010	50.000	44.091
508	1,39	5/02/2011	50.000	41.077
690	1,89	6/08/2011	50.000	38.283
873	2,39	5/02/2012	50.000	35.666
1.055	2,89	5/08/2012	50.000	33.241
1.238	3,39	4/02/2013	1.050.000	650.333
Suma =				890.000

Al utilizar la función "Buscar objetivo" de Excel se obtiene una tasa de interés de mercado igual al 15,17% efectivo anual.

Este valor también se hubiera podido encontrar utilizando directamente la función TIR.NO.PER, que devuelve la tasa interna de retorno para un flujo no periódico. En este caso:

Rentabilidad = TIR.NO.PER(F22:F29; E22:E29; 0,12), donde el rango F22:F29 contiene los valores del flujo de caja; el rango E22:E29 contiene las fechas en las cuales hay flujo de caja; 0,12 es un valor inicial, para que comience a iterar; se podría haber utilizado otro valor cercano:

Rentabilidad = TIR.NO.PER (- 890.000,50.000...,1.050.000;15/09/2009...4/02/2013;0,12)

Rentabilidad = 15,17%

EJERCICIOS PARA RESOLVER

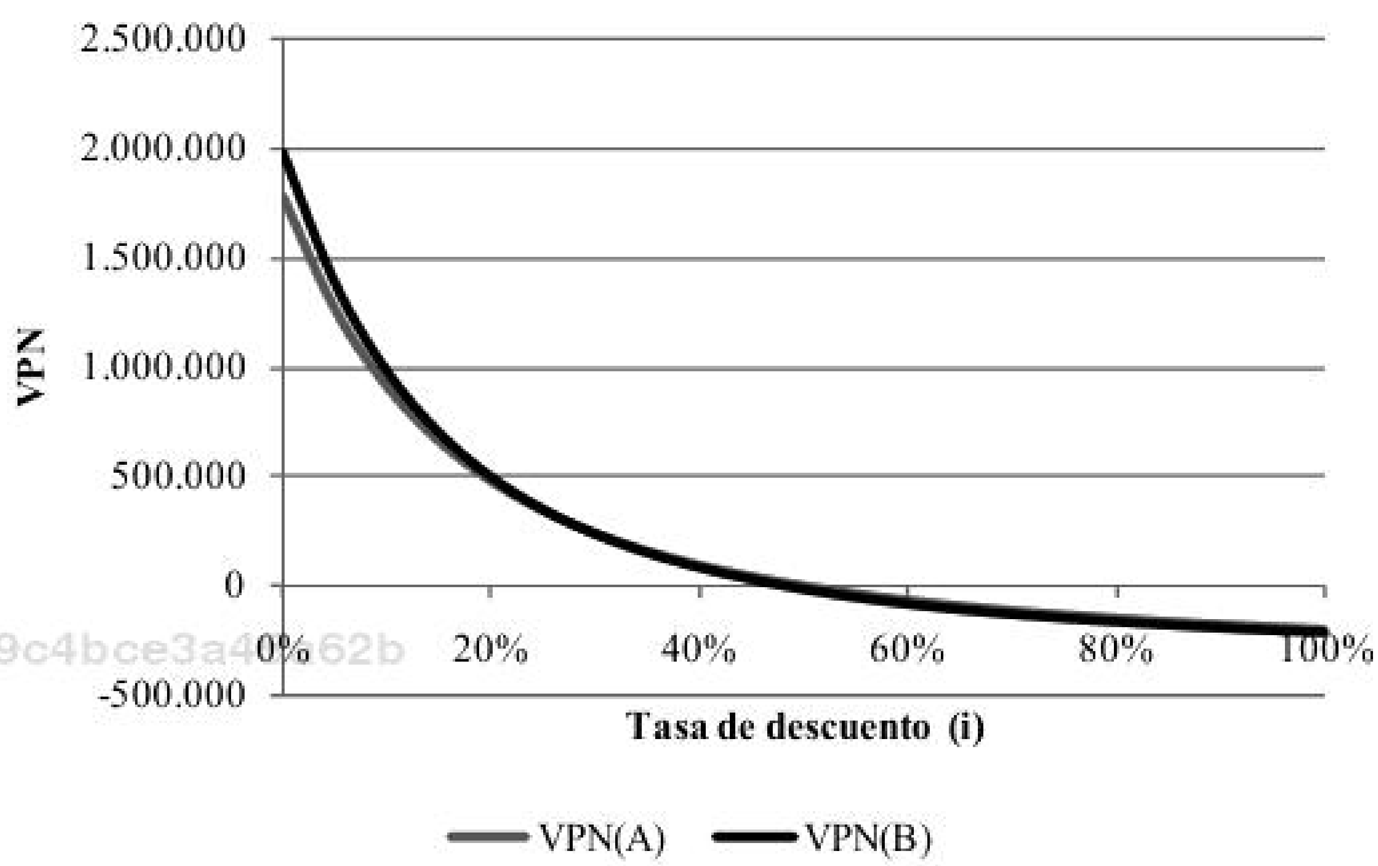
1. Considere los dos proyectos de inversión A y B, con los flujos de fondos que se muestran en el Cuadro 4.28, donde también se presenta la alternativa incremental (B-A); los dos proyectos son mutuamente excluyentes:

Cuadro 4.28

Año	Proyecto A	Proyecto B	(B-A)
0	-400.000	-400.000	0
1	190.000	165.000	-25.000
2	195.700	178.200	-17.500
3	201.571	192.456	-9.115
4	207.618	207.852	234
5	213.847	224.481	10.634
6	220.262	242.439	22.177
7	226.870	261.834	34.964
8	233.676	282.781	49.105
9	240.686	305.403	64.717
10	247.907	329.836	81.929

a) Grafique el valor presente neto de los dos proyectos.

Figura 4.18



b) Calcule el valor presente neto y la tasa interna de retorno para los dos proyectos; la tasa de interés de oportunidad es del 25%. ($339.011,99, $345.593,23).

c) ¿Cuál sería el proyecto a seleccionar, si los dos proyectos son mutuamente excluyentes? (Selección, B).

2. Para el problema anterior y utilizando la tasa interna de retorno, llegue al ordenamiento correcto de las dos alternativas de inversión.

3. Para el problema 1, ¿cuál sería la rentabilidad anual de los $400.000 durante los 10 años, si la tasa de interés de oportunidad, a la cual se reinvierten los flujos de

fondos liberados por el proyecto, es del 25% efectivo anual? (Rentabilidad del proyecto A: 32,91%, rentabilidad de B: 33,03%).

4. Considere los dos proyectos de inversión que se muestran en el Cuadro 4.29, si ambos son mutuamente excluyentes; la tasa de interés de oportunidad es del 25% efectivo anual.
   a) Calcule el valor presente neto de los dos proyectos. ($344.564,44, $403.749,70).
   b) Calcule la tasa interna de retorno de los dos proyectos. (51,27%, 46,04%).
   c) ¿Cómo se compara el ordenamiento a través del valor presente neto, con el que se obtiene a través de la tasa interna de retorno? (Contradictorio, orden por valor presente neto: B, A; orden por tasa interna de retorno: A, B).
   d) Calcular la relación beneficio - costo para los dos proyectos. (1,91, 1,80).
   e) ¿Cuál sería la selección adecuada entre los dos proyectos, si son mutuamente excluyentes? Justifique su respuesta. (B, porque tiene un mayor presente neto).

Cuadro 4.29

Año	Proyecto A	Proyecto B	(B-A)
0	-375.000	-500.000	-125.000
1	185.000	200.000	15.000
2	190.550	216.000	25.450
3	196.267	233.280	37.014
4	202.154	251.942	49.788
5	208.219	272.098	63.879
6	214.466	293.866	79.400
7	220.900	317.375	96.475
8	227.527	342.765	115.238
9	234.352	370.186	135.834
10	241.383	399.801	158.418

5. Para el problema anterior y utilizando la tasa interna de retorno, llegue al ordenamiento correcto de las dos alternativas de inversión.
6. Para el proyecto del problema 4, ¿cuál sería la rentabilidad anual de los $500.000 durante los 10 años, si la tasa de interés de oportunidad, a la cual se reinvierten los flujos de fondos liberados por el proyecto, es del 25% efectivo anual? (29,63%, 32,62%).
7. Considere los tres proyectos de inversión que se muestran en el Cuadro 4.30, con la misma vida útil a 6 años, pero con montos de inversión diferentes; la tasa de interés de oportunidad es del 25% y los tres proyectos son mutuamente excluyentes.

Cuadro 4.30

Año	0	1	2	3	4	5	6
Proyecto A	-400.000	200.000	280.000	392.000	548.800	768.320	1.075.648
Proyecto B	-600.000	250.000	350.000	490.000	686.000	960.400	1.344.560
Proyecto C	-800.000	300.000	420.000	588.000	823.200	1.152.480	1.613.472

a) ¿Cuál es el valor presente neto para cada uno de los tres proyectos? ($898.430,25, $1.123.037,81, $1.147.645,37).
b) ¿Cuál es la tasa interna de retorno para cada uno de los tres proyectos? (78,27%, 67,42%, 61,71%).
c) ¿Cuál es la relación beneficio-costo para cada uno de los tres proyectos? (3,24, 2,70, 2,43).
d) ¿Cuál sería el ordenamiento correcto de los tres proyectos? Justifique su respuesta. (C, B, A, por el criterio del valor presente neto).

8. Para los tres proyectos considerados en el problema 7, llegue al ordenamiento correcto utilizando análisis incremental y la tasa interna de retorno. (Orden por análisis incremental: C, B, A; orden por tasa interna de retorno: A, B, C).
9. Para el problema 7, ¿cuál sería la rentabilidad anual de los $800.000 durante los 6 años? (35,50%, 40,64%, 44,98%).
10. Calcule el costo efectivo de un préstamo, que es pactado a un interés del 32% nominal anual y plazo de un año, para las siguientes dos condiciones:
    a) Si los intereses se pagan:
       - Trimestre anticipado (39,58%).
       - Quincena anticipada (38,00%).
    b) ¿Cuál será si a las condiciones iniciales (trimestre anticipado) se agrega el pago de una comisión por estudio del crédito del 1%, cobrada anticipadamente? (41,32%).
11. ¿Cuál es el costo efectivo anual de un crédito ordinario con las siguientes condiciones?

    Interés: 30% nominal anual trimestre anticipado.
    Plazo: 2 años.
    Comisión de manejo: 2% pagadera anticipadamente, una sola vez.
    Amortización: la deuda se amortiza semestralmente a partir del final del cuarto trimestre y los intereses se pagan sobre saldo. (39,05%).
12. ¿Cuál es la rentabilidad de un CDT (Certificado de Depósito a Término) que paga un interés del 6% NASV, emitido a 6 meses, si se compra por un 92,50% de su valor nominal? (23,99%).
13. El propietario de un CDT que paga un interés del 6% NASV, cuyo vencimiento es dentro de 13 días le propone que usted se lo descuente (compre) por un valor igual al 99% de su valor nominal. ¿Le interesaría el negocio? ¿Qué rentabilidad efectiva obtendría? (204,07%).
14. ¿Cuánto debería ofrecer por un CDT al que le faltan 48 días para su vencimiento? El CDT fue emitido inicialmente a 90 días, con un interés del 14% nominal

anual pagadero mes vencido. El objetivo es obtener en la transacción una rentabilidad efectiva del 24% anual. (99,48%).

15. ¿Cuánto debería ofrecer por un CDT emitido en las siguientes condiciones nominales?
    Interés: 18% pagadero trimestre anticipado
    Plazo: 90 días
    Valor nominal: $1.000.000
    Al certificado le faltan 52 días para su madurez. El objetivo es obtener una rentabilidad efectiva anual del 24%. ($969.818,80).
16. ¿Cuánto se debe ofrecer por un CDT emitido en las siguientes condiciones?:
    Interés: 17% nominal anual pagadero mes vencido
    Plazo: 90 días
    Valor nominal: $10.000.000
    Actualmente le faltan 37 días para su madurez. El objetivo es obtener una rentabilidad efectiva anual del 23%. ($10.072.166,66).
17. ¿Cuál es la rentabilidad en pesos de un bono en dólares emitido a 2 años, con un interés del 7% nominal anual, pagadero trimestre vencido, el cual se compra a un 98,5% de su valor nominal? La devaluación efectiva esperada para los próximos 2 años es del 12% anual. (21,01%).
18. ¿Cuál es el costo de una financiación en dólares otorgada en las siguientes condiciones?
    Interés: "Prime" más dos puntos y medio (Prime+2,5), pagaderos trimestre vencido sobre saldo
    Amortización: semestral
    Plazo: 4 años
    Período de gracia: 1 año
    Adicionalmente se cobra un gasto administrativo del 1,5% anual sobre el saldo al comienzo del mismo período. La devaluación efectiva esperada para los próximos años es del 12% anual. (25,32%).
19. ¿Cuál es la rentabilidad de un bono en pesos, emitido a 3 años, que paga un interés del 18% nominal anual pagadero trimestre vencido, el cual se compra a un 98% de su valor nominal? (20,27%).
20. Para el problema anterior, ¿cuánto debería ofrecer por el bono, cuando le faltan 187 días para su vencimiento, si el objetivo es obtener una rentabilidad efectiva anual del 23,5%? (102,52%).
21. Una compañía de leasing lo contrató a usted para que realice los cálculos necesarios para desarrollar su "Tabla de precios" (tarifas) oficial. El objetivo de la compañía es obtener en todas sus operaciones una rentabilidad efectiva anual del 32% antes de impuestos. Se cobran las cuotas mensualmente de manera anticipada y se ofrecen contratos de arrendamiento a 24 y 36 meses con opciones de compra (valor residual) al final del contrato del 5% o 10% a libre escogencia del cliente.
    Asuma que el cliente paga el valor residual un mes después del último canon de arrendamiento.

(Cuota: mes anticipado, 24 meses, valor residual del 5% = 5,21%; cuota: mes anticipado, 24 meses, valor residual del 10% = 5,05%; cuota: mes anticipado, 36 meses, valor residual del 5% = 3,95%, y cuota: mes anticipado, 36 meses, valor residual del 10% = 3,87%).

22. Una empresa productora de carnes frías emitió bonos en las siguientes condiciones:
Fecha de emisión: 26 de octubre de 1998
Fecha de vencimiento: 26 de octubre de 2001
Valor nominal; $100.000.000
Interés: 18% nominal anual pagadero semestre anticipado
Actualmente faltan 569 días para el vencimiento. ¿En cuánto se debe comprar el bono en el mercado secundario para obtener una rentabilidad del 24% efectivo anual? ($95.099.511,12).

23. Un constructor se encuentra indeciso sobre la forma de pago que más le conviene al vender una propiedad. Las alternativas son:

    a) Pago de contado por valor de $35.000.000.
    b) Cuota inicial de $6.000.000 el 1º de abril, 12 cuotas mensuales (al final del mes) de $1.500.000 y $17.500.000 al final del mes 12.
    c) 4 cuotas de $6.000.000 pagaderas trimestre anticipado a partir del 1º de abril y $17.500.000 el 1º de abril del siguiente año.

Los pagos que se reciben se invierten a una tasa de interés efectiva anual del 20%. ¿Cuál es la mejor decisión para el constructor? (Mejor decisión: alternativa C, maximiza el valor presente neto: $37.026.391,35).

24. Un préstamo en dólares por valor de US$ 200.000 a 18 meses, con un interés nominal igual a Prime + 2, se va a amortizar totalmente al final de los 18 meses. Los intereses se cobran mensualmente; además se cobra una comisión del 1,5% al comienzo del préstamo por una sola vez. Suponga una tasa Prime nominal anual del 7,5% y una devaluación efectiva anual del 12%. ¿Cuál sería el costo del préstamo en pesos? (24,44%).

Capítulo 5

MATEMÁTICAS FINANCIERAS: RESUMEN A TRAVÉS DE PROBLEMAS AVANZADOS

Los capítulos 2, 3 y 4 muestran las principales relaciones que comprenden las bases de las finanzas y que se conocen usualmente como matemáticas financieras. Su derivación es bastante sencilla; sin embargo, su utilización requiere la familiarización con la correcta aplicación de esas relaciones, especialmente con los supuestos inherentes a cada una de las fórmulas derivadas, que solamente se adquiere con la realización de muchos ejercicios. En este capítulo y a manera de resumen de las relaciones conocidas como matemáticas financieras, se presenta un conjunto de problemas de mayor dificultad que permiten interrelacionar las diferentes expresiones derivadas paulatinamente a lo largo de los capítulos 2, 3 y 4 anteriores. El objetivo es dar una visión integral de las matemáticas financieras, independientemente del orden en el cual fueron derivadas, y preparar al lector, a manera de repaso, para los siguientes capítulos.

TASAS DE INTERÉS: NOMINALES Y EFECTIVAS

En el Capítulo 3 se dedujeron y aplicaron las relaciones que permiten encontrar el interés efectivo equivalente a un interés nominal pagadero período vencido o período anticipado, y se propusieron varios ejemplos que ilustran aplicaciones que se presentan con frecuencia. En este capítulo, a modo de ilustración, se ofrecen cuatro ejemplos que resumen lo expuesto en el Capítulo 3.

Ejemplo 5.1

Encontrar el interés que, pagadero trimestre anticipado, es equivalente a un interés del 16% nominal anual pagadero mes vencido.

El primer paso para resolver este problema es encontrar el interés efectivo correspondiente a un interés del 16% nominal anual pagadero mes vencido. Para ello, se aplica la fórmula que relaciona el interés efectivo con un interés pagado periódicamente; esto es:

$$i_e = (1 + i_p)^{\#\text{periodos}} - 1 = \left(1 + \left(\frac{0{,}16}{12}\right)\right)^{12} - 1 = (1 + (0{,}01333))^{12} - 1 = 0{,}17227$$

De igual forma se encuentra el interés periódico que, pagadero trimestre vencido, es equivalente a un interés del 17,227% efectivo anual.

$i_{tv} = (1+0,17227)(1/4) -1 = 0,040535$

Ahora se encuentra el interés trimestral, pagadero trimestre anticipado, equivalente a un interés del 4,0535%:

$$i_{ta} = \frac{i_{tv}}{(1+i_{tv})} = \frac{0,040535}{(1+0,040535)} = 0,038956$$

Por lo tanto, un interés del 15,5826%, pagadero trimestre anticipado, es equivalente a un interés del 16% nominal anual pagadero mes vencido, en la medida en que ambos tienen el mismo interés efectivo.

Ejemplo 5.2

Construir una tabla que permita encontrar equivalencias entre diferentes modalidades de pagos, para un mismo interés vencido. La tabla se debe construir para un rango de intereses que fluctúe entre el 12% y el 24% efectivo, con incrementos del 2%. Los resultados se muestran en el Cuadro 5.1 y se obtuvieron aplicando las relaciones derivadas en el Capítulo 3. A manera de ejemplo, un interés del 14,570% nominal anual pagadero trimestre anticipado es equivalente a un interés del 15,121% nominal anual pagadero trimestre vencido, ya que ambos tienen el mismo interés efectivo del 16%.

Los resultados se presentan en el Cuadro 5.1:

Cuadro 5. 1

		Tasa de interés efectiva						
Frecuencia	Frecuencia	12,000%	14,000%	16,000%	18,000%	20,000%	22,000%	24,000%
Interés nominal, pagadero período vencido								
1	AV	12,000%	14,000%	16,000%	18,000%	20,000%	22,000%	24,000%
2	SV	11,660%	13,542%	15,407%	17,256%	19,089%	20,907%	22,711%
4	TV	11,495%	13,320%	15,121%	16,899%	18,654%	20,388%	22,100%
12	MV	11,387%	13,175%	14,934%	16,666%	18,371%	20,051%	21,705%
24	QV	11,360%	13,139%	14,888%	16,609%	18,302%	19,968%	21,608%
365	DV	11,335%	13,105%	14,845%	16,555%	18,237%	19,891%	21,517%
Interés nominal, pagadero período anticipado								
365	DA	11,331%	13,100%	14,839%	16,548%	18,228%	19,880%	21,505%
24	QA	11,306%	13,067%	14,796%	16,495%	18,163%	19,803%	21,415%
12	MA	11,280%	13,032%	14,751%	16,438%	18,094%	19,721%	21,319%
4	TA	11,174%	12,891%	14,570%	16,214%	17,823%	19,399%	20,943%
2	SA	11,018%	12,683%	14,305%	15,885%	17,426%	18,929%	20,395%
1	AA	10,714%	12,281%	13,793%	15,254%	16,667%	18,033%	19,355%

Ejemplo 5.3

¿Cuál es el interés nominal anual que, pagadero mes vencido, es equivalente a un interés del 13% nominal anual trimestre vencido?

Interés solicitado: NA MV
Interés nominal dado:13,00% NA TV
Interés trimestral (vencido): 3,25%
Relación básica: $(1+ i_e) = (1+i_{pv})^{\text{Número de períodos}}$

a) Interés efectivo correspondiente a un interés del 13,00% NATV

$$(1+ i_e) = (1+i_{tv})^4$$

$$i_e = 13{,}648\%$$

b) Interés mes vencido equivalente a un interés efectivo del 13,648%

$$(1+ 0{,}13648) = (1+i_{mv})^{12}$$

$$i_{mv} = (1{,}13648)^{(1/12)} - 1 = 1{,}0718\%$$

c) Interés solicitado

NA MV = 12 * 1,0718% = 12,86%

d) Comprobación:

Ambas modalidades de interés son equivalentes, porque tienen el mismo interés efectivo:

NA TV: 13,00%; Efectivo:13,648%,
NA MV: 12,86%; Efectivo:13,648%

Ejemplo 5.4

¿Cuál es el interés nominal anual que pagadero trimestre vencido es equivalente a un interés del 11% nominal anual pagadero día vencido?

Interés solicitado: NA TV
Interés nominal dado: 11,00% NA DV
Interés diario: 0,0301% DV

Fórmula básica

Relación básica: $(1+ i_e) = (1+i_{pv})^{\text{Número de períodos}}$

a) Interés efectivo correspondiente a un interés del 11,00% NA DV

$(1+ i_e) = (1+i_{dv})^{365}$

$i_e = 11{,}626\%$

$(1+ 0{,}11626) = (1+i_{tv})^{4}$

$i_{tv} = (1{,}11626)^{(1/4)} - 1 = 2{,}7877\%$

b) Interés solicitado

NA TV = 4* 2,7877 =11,15%

c) Comprobación

Ambos son equivalentes, porque tienen el mismo interés efectivo

NA DV: 11,00%; efectivo: 11,626%

NA TV: 11,15%; efectivo: 11,626%

RELACIONES BÁSICAS Y TASAS EFECTIVAS

Las relaciones de equivalencia presentadas en los capítulos 2 y 3 constituyen las bases de las matemáticas financieras; el desarrollo moderno de las herramientas de computación, especialmente las hojas de cálculo, facilita la realización de cómputos que de otra manera serían complejos y tomarían un tiempo apreciable. La derivación de las relaciones de equivalencia se hizo en una forma independiente de la expresión de las tasas de interés en términos anuales, ya sea en términos de intereses efectivos o de intereses nominales pagaderos período vencido. En los dos problemas que se presentan a continuación se hace una integración de las principales relaciones de equivalencia y de las tasas de interés expresadas inicialmente en períodos diferentes: períodos mensuales y tasas anuales. Como se explicó las fórmulas de equivalencia se pueden aplicar a cualquier período (día, mes, año, etc.) siempre y cuando se mantenga una consistencia con la tasa de interés que se está utilizando.

Ejemplo 5.5

Un fondo de inversión reconoce un interés efectivo del 13% anual; se van a hacer 96 depósitos mensuales al fondo durante los próximos 8 años, por valor de $800.000 cada uno; el primer depósito se hace dentro de un mes y así sucesivamente hasta finalizar el año 8. ¿Cuál sería la cantidad acumulada al final de los 8 años?

Interés efectivo: 13% anual
Número de años: 8
Número de depósitos a realizar: 96
Valor de cada depósito: $800.000, vencido, al final de cada mes

a) Conversión del interés efectivo en un interés mensual

Relación básica: $(1+ i_e) = (1+i_{pv})^{\text{Número de periodos}}$

Para el caso mensual: $(1+ i_e) = (1+i_{mv})^{12}$

Por lo tanto, Interés mensual (vencido), $i_{mv} = (1+ i_e)^{(1/12)} - 1 = 1{,}0237\%$

b) Valor futuro de una serie uniforme

$F_N = \text{Depósito} * [(1+i_{mv})^N - 1]/i_{mv}$

$F_{96} = 800.000 * [(1+i_{mv})^{96} - 1]/i_{mv}$

$F_{96} = 800.000 * [(1+0{,}010237)^{96} - 1] / 0{,}010237$

$F_{96} = 800.000 * 162{,}01 = 129.605.893$

c) Utilización de la función "Valor futuro" de Excel

El mismo valor se hubiera podido encontrar utilizando la función de valor futuro de Excel.

F_{96} = - *FV* (Tasa de interés; Número de períodos; valor del pago mensual)

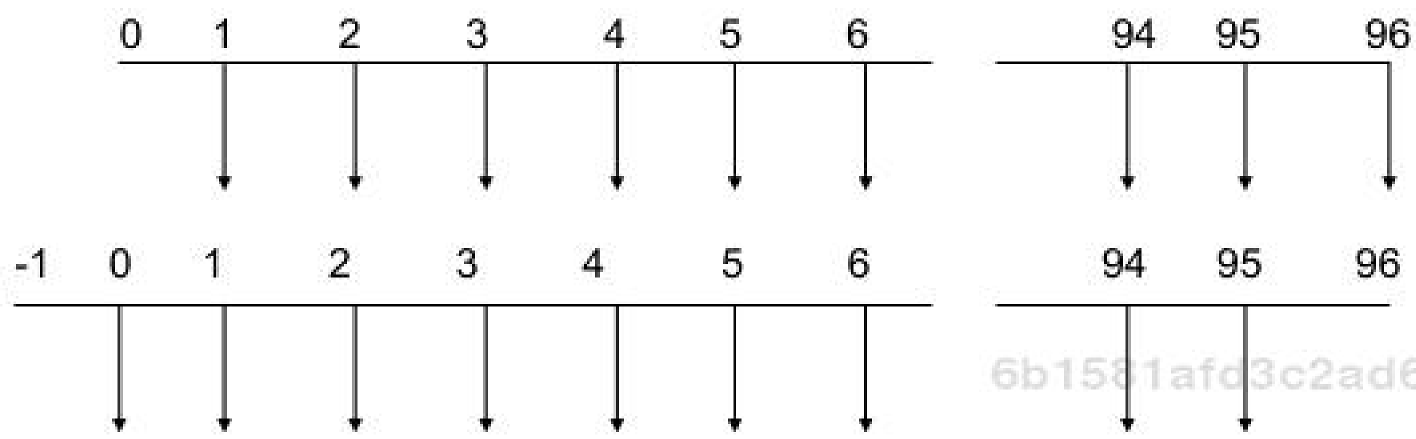
F_{96} = - *FV* (1,0237%; 96; 800.000) = 129.605.893

Ejemplo 5.6

¿Cómo cambia la respuesta a la pregunta anterior si los depósitos se hacen anticipados, esto es, el primer depósito se hace hoy (fecha cero) y así sucesivamente, y el depósito 96 que es el último, se hace al finalizar el mes 95 (comienzo del mes 96), (las demás condiciones permanecen iguales)?

En la Figura 5.1 se muestra la diferencia en los diagramas de flujos entre la situación planteada en este problema y la del problema anterior:

Figura 5.1



Si nos situamos en la fecha -1, en el diagrama de flujo correspondiente a este problema (segundo), se tienen 96 pagos iguales que acumularían al final del mes 95 la misma suma que se calculó en el problema anterior, pero en el mes 96. Por ello, para llevar al mes 96, lo único que se tendría que hacer es llevar el valor acumulado al final del mes 95 al mes 96, multiplicando por $(1+i_{mv})$.

Por lo tanto,

$$F_{96} = \left[800.000 \ * \ \frac{[(1+\text{imv})^{96} - 1]}{i_{mv}} \right] * (1+0{,}010237)$$

F_{96} = 129.605.893 * 1,010237 = 130.932.648

El mismo valor se hubiera podido encontrar utilizando la función "Valor futuro" de Excel.

F_{96} = -*FV* (tasa de interés; número de períodos; valor del pago mensual; 1)

El 1 como argumento al final del conjunto de parámetros, indica que los pagos son anticipados, que corresponde exactamente a lo propuesto en este problema.

F_{96} = -*FV* (1,0237%; 96; 800.000; 1) = 130.392.648

Este problema se puede resolver a través de otros esquemas que son equivalentes; el más extenso, llevando cada pago a valor futuro, lo cual se puede hacer en una forma muy fácil en Excel. Otra alternativa, sería llevar el primer pago a valor futuro, los 59 restantes a valor futuro al final del mes 59 utilizando la forma de una serie uniforme con 59 pagos, llevar nuevamente el valor resultante al mes 60 y sumar el valor futuro equivalente al primer pago; brevemente:

$$F_{96,1} = 800.000 * (1{+}0{,}010237)^{96} = 2.126.755$$

$$F_{96,2} = \left[800.000 * \frac{[(1+0{,}010237)^{95} - 1]}{0{,}010237}\right] * (1+0{,}010237) = 128.805.893$$

$$F_{96} = 2.126.755 + 128.805.893 = 130.932.648$$

INDICADORES DE LA BONDAD ECONÓMICA DE UN PROYECTO DE INVERSIÓN

Los dos indicadores principales para medir la bondad de una inversión, valor presente neto y tasa interna de retorno cubiertos en el Capítulo 4, tienen un amplio campo de aplicación en problemas de la vida real, ya sea para encontrar precios actuales de activos financieros, valor económico agregado por decisiones de inversión o simplemente la rentabilidad de decisiones gerenciales. En los siguientes dos ejemplos se revisa el cálculo de los indicadores, su interpretación, su aplicación, y se derivan otros indicadores de rentabilidad como la rentabilidad media o verdadera, que combina la rentabilidad interna del proyecto con la rentabilidad externa, medida esta última a través de la tasa de interés de oportunidad (TIO).

Ejemplo 5.7

Considere el siguiente proyecto de inversión, con una vida útil de 10 años y los flujos de caja libre para el proyecto que se muestran en el Cuadro 5.2:

Cuadro 5.2

Año	Proyecto A Flujos
0	-150.000.000
1	35.000.000
2	40.000.000
3	44.000.000
4	50.000.000
5	60.000.000
6	70.000.000
7	80.000.000
8	90.000.000
9	105.000.000
10	125.000.000

La tasa de interés de oportunidad del inversionista (TIO) es del 20%

a) ¿Cuál es el valor presente neto del proyecto?

b) ¿Cuál es la tasa interna de retorno?

c) ¿Cuál es la interpretación del valor presente neto que usted encontró en a)?

d) ¿Cuánto acumula al final del año 10 un inversionista a través del proyecto y de las oportunidades convencionales?

e) ¿Cuál es la rentabilidad verdadera del inversionista para su inversión de $150.000.000, a través de lo que permite el proyecto y lo que él puede hacer por fuera del proyecto?

f) ¿Por qué la diferencia entre el valor encontrado en e) y el encontrado en b)?

Solución:
En el Cuadro 5.3 se muestran los cálculos necesarios para dar respuesta a las preguntas solicitadas:

Cuadro 5.3

Año	Proyecto A Flujos	Valor presente Flujo individual		Acumulación al final del año 10	Rentabilidad verdadera
0	-150.000.000	-150.000.000			-150.000.000
1	35.000.000	29.166.667		180.592.312	0
2	40.000.000	27.777.778		171.992.678	0
3	44.000.000	25.462.963		157.659.955	0
4	50.000.000	24.112.654		149.299.200	0
5	60.000.000	24.112.654		149.299.200	0
6	70.000.000	23.442.858		145.152.000	0
7	80.000.000	22.326.532		138.240.000	0
8	90.000.000	20.931.124		129.600.000	0
9	105.000.000	20.349.703		126.000.000	0
10	125.000.000	20.188.198		125.000.000	1.472.835.346
TIO=	20.00%				
VPN(i=TIO)	87.871.131	87.871.131	$Acum_{10}$ =	1.472.835.346	
TIR =	32,18%		R_V =	25,66%	25,66%

a) El valor presente neto del proyecto es igual a $87.871.131. Para su cálculo se utilizó la función de valor presente neto (VNA en español) de Excel, utilizando como tasa de descuento la TIO del 20%.

b) La tasa interna de retorno es igual al 32,18% y corresponde a la rentabilidad interna del proyecto; para su cálculo se utilizó la función TIR de Excel.

c) La interpretación del valor presente neto encontrado en a) corresponde a un valor económico adicional en la fecha cero, que el proyecto en estudio le agregaría a la empresa, frente a las inversiones convencionales que generan una rentabilidad del 20%. Lo anterior significa que si las oportunidades convencionales generan un valor económico igual a Z, este proyecto genera Z + \$87.871.131 en términos de valor económico.

d) La penúltima columna muestra la cantidad acumulada al final del año 10, por cada flujo que libera el proyecto, reinvertido a la tasa de interés de oportunidad. A manera de ejemplo, para el flujo liberado al final del año 5:

$AC_{10} = 60.000.000 * (1+0,20)^5 = 149.299.200$

Procediendo de igual forma para cada flujo y sumando, se obtiene:

$AC_{10} = 1.472.835.346$

e) Para encontrar la rentabilidad verdadera, se debe encontrar la tasa de interés que permite acumular la cifra anterior (\$1.472.835.346), partiendo de una inversión de \$150.000.000, esto es:

$150.000.000 * (1+R_v)^{10} = 1.472.835.346$

Despejando, se obtiene:

$R_v = (1.472.835.346/150.000.000)^{(1/10)} - 1 = 25,66\%$

El mismo valor se puede obtener encontrando la tasa interna de retorno (TIR) del flujo que se muestra en la última columna, lo cual da nuevamente 25,66%.

Así mismo, el valor anterior se puede obtener aplicando directamente la función de tasa de interés modificada (TIRM) al flujo original (flujos del proyecto A); esto es:

$R_V = TIRM$(valores; tasa de financiamiento; tasa de reinversión)

$R_V = TIRM$(35.000:125.000.000; 0; 0,20) = 25,66%

f) La tasa encontrada en b) es una rentabilidad interna del proyecto; es lo que el proyecto le permite generar a 1 peso, mientras el mismo se encuentre invertido en el proyecto. La rentabilidad verdadera es un promedio entre lo que renta internamente el proyecto y lo que se puede hacer por fuera del proyecto, esto es, reinvertir los flujos liberados a la tasa de interés de oportunidad (20%).

Ejemplo 5.8

Considere los dos proyectos de inversión A y B, mutuamente excluyentes, que se muestran en el Cuadro 5.4, donde también se muestran los resultados de los cálculos para el valor presente neto calculado para una TIO del 18% y la tasa interna de retorno, cálculos que se deben verificar. Como se muestra, el ordenamiento o selección que produce el valor presente neto es diferente al ordenamiento o selección que produce la tasa interna de retorno.

a) ¿Cuál ordenamiento es el correcto? ¿Por qué?

b) ¿Cuál es la suma que permite acumular cada proyecto y las oportunidades convencionales?

c) ¿Cuál es la rentabilidad verdadera del inversionista para su inversión de $150.000.000, a través de lo que permite hacer cada proyecto y lo que él puede hacer por fuera del proyecto?

Cuadro 5.4

Año	Proyecto A Flujos	Proyecto B Flujos
0	-150.000.000	-150.000.000
1	35.000.000	20.000.000
2	40.000.000	30.000.000
3	44.000.000	35.000.000
4	50.000.000	45.000.000
5	60.000.000	50.000.000
6	70.000.000	70.000.000
7	80.000.000	95.000.000
8	90.000.000	120.000.000
9	105.000.000	170.000.000
10	125.000.000	190.000.000
TIO=	20.00%	
VPN (i=TIO)=	87.871.131	91.046.876
TIR =	32,18%	30,39%

Solución:

En el Cuadro 5.5 se muestran los cálculos necesarios para responder a las preguntas:

Cuadro 5.5

Año	Proyecto A flujos	Proyecto B flujos	Valor presente flujo individual Proyecto A	Valor presente flujo individual Proyecto B	Acumulación al final del año 10 Proyecto A	Acumulación al final del año 10 Proyecto B
0	150.000.000	-150.000.000	-150.000.000	-150.000.000		
1	35.000.000	20.000.000	29.166.667	16.666.667	180.592.312	103.195.607
2	40.000.000	30.000.000	27.777.778	20.833.333	171.992.678	128.994.509
3	44.000.000	35.000.000	25.462.963	20.254.630	157.659.955	125.411.328
4	50.000.000	45.000.000	24.112.654	21.701.389	149.299.200	134.369.280
5	60.000.000	50.000.000	24.112.654	20.093.879	149.299.200	124.416.000
6	70.000.000	70.000.000	23.442.858	23.442.858	145.152.000	145.152.000
7	80.000.000	95.000.000	22.326.532	26.512.756	138.240.000	164.160.000
8	90.000.000	120.000.000	20.931.124	27.908.165	129.600.000	172.800.000
9	105.000.000	170.000.000	20.349.703	32.947.139	126.000.000	204.000.000
10	125.000.000	190.000.000	20.188.198	30.686.061	125.000.000	190.000.000
				91.046.876		
TIO =	20,00 %					
VPN(*i*=*TIO*)	87.871.131	91.046.876	87.871.131	Acum$_{10}$ =	1.472.835.346	1.492.498.724
TIR =	32,18 %	30,39 %		R_V =	25,66%	25,83 %

a) El ordenamiento correcto es el que produce el valor presente neto, ya que tiene implícito el supuesto correcto, esto es, que los flujos que libera el proyecto se reinvierten a la tasa de interés de oportunidad (TIO). Como se verá posteriormente, este ordenamiento coincide con el de la rentabilidad verdadera o rentabilidad media.

b) En el cuadro se muestran los cálculos intermedios y el resultado final para cada proyecto:

$AC_{A,10}$ = \$1.472.835.346
$AC_{B,10}$ = \$1.492.498.724

La acumulación a través del proyecto B es mayor que la acumulación a través del proyecto A.

c) Encontrar la rentabilidad verdadera del inversionista para su inversión de \$150.000.000, para ello se resuelve en cada caso la ecuación:

$150.000.000 * (1+R_{VA})^{10} = 1.472.835.346$
$150.000.000 * (1+R_{VB})^{10} = 1.492.498.724$

Por lo tanto,

R_{VA} = 25,66%
R_{VB} = 25,83 %

AMORTIZACIÓN Y REESTRUCTURACIÓN DE CRÉDITOS

La determinación de la cuota a pagar para amortizar un crédito es un problema relativamente sencillo, que requiere un trabajo adicional bastante importante para descomponer la cuota mensual en intereses y amortización a capital. Hay que recordar que el valor total de la cuota afecta el flujo de caja de un proyecto o de una empresa; sin embargo, solamente los intereses hacen parte del estado de pérdidas y ganancias (gastos financieros) y son deducibles de impuestos. En los siguientes cinco ejemplos se ilustra el cálculo de la cuota mensual y su descomposición en intereses y amortización a capital.

Ejemplo 5.9

Suponga un crédito a 5 años, con un interés efectivo del 20% anual, y 60 pagos mensuales iguales al final de cada mes (cuota uniforme). El valor del crédito es de $60.000.000. ¿Cuál sería la cuota mensual?

Para calcular la cuota mensual se debe tener en cuenta que las 60 cuotas mensuales traídas a valor presente a una tasa mensual equivalente a un 20% efectivo anual, tienen que ser iguales al monto del crédito. En otras palabras, se trata de calcular el valor presente correspondiente a una serie uniforme de 60 pagos, que sea igual a $60.000.000, utilizando una tasa de interés mensual equivalente a una tasa efectiva anual del 20%. Esta tasa mensual es del 1,5309%. Por lo tanto:

$$60.000.000 = \text{Cuota mensual} * \frac{[(1+0{,}015309)^{60} - 1]}{[0{,}015309 * (1+0{,}015309)^{60}]}$$

60.000.000 = Cuota mensual * 39,068786

Cuota mensual = 1.535.752,84

El valor de la cuota anterior se podría haber calculado directamente utilizando la función de pago de Excel: *PAGO*(0,015309,60,60.000.000).

Ejemplo 5.10

Descomponer el valor de la cuota mensual del problema anterior entre intereses y amortización a capital.

Para la descomposición de la cuota en intereses y amortización a capital hay que construir una tabla como la que se muestra en el Cuadro 5.6, en la cual del valor de la cuota mensual se resta el monto de los intereses mensuales a pagar, sobre saldo al comienzo del período. A manera de ejemplo, al comienzo del mes 15, el saldo del crédito era de $50.444.636; si se aplica un interés del 1,5309% mensual sobre este saldo, el valor de los intereses mensuales sería de $772.281. El valor de la cuota uniforme es de $1.535.753; por lo tanto la amortización a capital durante el mes 15 corresponde a la diferencia ($1.535.753-$772.281), para un valor de $763.472; de igual forma se hace la descomposición entre intereses y amortización a capital, para cualquier mes durante la vigencia del crédito. Como se mencionó, los gastos financieros son los únicos deducibles de impuestos.

Para encontrar el valor correspondiente al pago de intereses y a la amortización de capital se podrían haber utilizado respectivamente las dos fórmulas de Excel, PAGOINT y PAGOPRIN.

PAGOINT(0,015309;15;60;60.000.000) = 772.281
PAGOPRIN(0,015309;15;60;60.000.000) = 763.472

Cuadro 5.6

Cuota	Valor Cuota	Saldo Crédito	Interés	Amortización a capital	Cuota	Valor Cuota	Saldo Crédito	Interés	Amortización a capital
1	1.535.753	59.382.815	918.568	617.185	31	1.535.753	35.747.524	562.181	973.572
2	1.535.753	58.756.182	909.119	626.633	32	1.535.753	34.759.047	547.276	988.477
3	1.535.753	58.119.955	899.526	636.227	33	1.535.753	33.755.437	532.143	1.003.610
4	1.535.753	57.473.988	889.786	645.967	34	1.535.753	32.736.462	516.778	1.018.975
5	1.535.753	56.818.131	879.896	655.857	35	1.535.753	31.701.887	501.178	1.034.575
6	1.535.753	56.152.234	869.856	665.897	36	1.535.753	30.651.473	485.339	1.050.414
7	1.535.753	55.476.142	859.661	676.092	37	1.535.753	29.584.978	469.258	1.066.495
8	1.535.753	54.789.700	849.310	686.442	38	1.535.753	28.502.155	452.930	1.082.823
9	1.535.753	54.092.748	838.801	696.952	39	1.535.753	27.402.755	436.353	1.099.400
10	1.535.753	53.385.127	828.131	707.622	40	1.535.753	26.286.524	419.522	1.116.231
11	1.535.753	52.666.672	817.298	718.455	41	1.535.753	25.153.204	402.433	1.133.320
12	1.535.753	51.937.218	806.299	729.454	42	1.535.753	24.002.533	385.082	1.150.671
13	1.535.753	51.196.596	795.131	740.622	43	1.535.753	22.834.247	367.466	1.168.287
14	1.535.753	50.444.636	783.793	751.960	44	1.535.753	21.648.074	349.580	1.186.173
15	1.535.753	49.681.164	772.281	763.472	45	1.535.753	20.443.742	331.421	1.204.332
16	1.535.753	48.906.003	760.592	775.161	46	1.535.753	19.220.972	312.983	1.222.770
17	1.535.753	48.118.976	748.725	787.028	47	1.535.753	17.979.482	294.263	1.241.490
18	1.535.753	47.319.899	736.676	799.077	48	1.535.753	16.718.985	275.256	1.260.497
19	1.535.753	46.508.588	724.443	811.310	49	1.535.753	15.439.191	255.959	1.279.794
20	1.535.753	45.684.857	712.022	823.731	50	1.535.753	14.139.804	236.366	1.299.387
21	1.535.753	44.848.516	699.411	836.342	51	1.535.753	12.820.524	216.473	1.319.280
22	1.535.753	43.999.370	686.607	849.146	52	1.535.753	11.481.047	196.275	1.339.477
23	1.535.753	43.137.224	673.607	862.146	53	1.535.753	10.121.063	175.769	1.359.984
24	1.535.753	42.261.879	660.408	875.345	54	1.535.753	8.740.258	154.948	1.380.805
25	1.535.753	41.373.133	647.007	888.746	55	1.535.753	7.338.314	133.809	1.401.944
26	1.535.753	40.470.781	633.401	902.352	56	1.535.753	5.914.907	112.346	1.423.407
27	1.535.753	39.554.615	619.586	916.167	57	1.535.753	4.469.708	90.554	1.445.199
28	1.535.753	38.624.422	605.560	930.193	58	1.535.753	3.002.384	68.429	1.467.324
29	1.535.753	37.679.989	591.319	944.433	59	1.535.753	1.512.596	45.965	1.489.788
30	1.535.753	36.721.096	576.861	958.892	60	1.535.753	0	23.157	1.512.596

Con frecuencia se presenta la necesidad de reestructurar un crédito una vez que ha transcurrido un período de tiempo desde el momento del desembolso y la deuda se ha estado sirviendo adecuadamente. La reestructuración puede consistir en cambiar una o varias condiciones de las que fueron pactadas inicialmente (p. ej., plazo, tasa de interés, modalidad de pago, modalidad de amortización).

Ejemplo 5.11

En el crédito del problema anterior, una vez que han transcurrido 26 meses desde el desembolso, y se han hecho 26 pagos, se solicita una reestructuración del crédito, para ampliar su plazo por cinco años más a partir de la finalización del mes 26 y disminuir la tasa de interés al 16% efectivo anual. ¿Cuál debería ser el monto de la cuota a pagar, si se mantiene el sistema de una cuota uniforme o constante, durante la vigencia del crédito?

La tasa de interés del 16% efectiva anual es equivalente a una tasa de interés del 1,2445% mes vencido. El saldo del crédito al finalizar el mes 26, después de 26 pagos mensuales, es de $40.470.781, tal y como se puede observar en la tabla que se construyó para el problema anterior. Hay que recordar que todo pago tiene dos componentes, uno de interés y otro de amortización a capital.

Por lo tanto, el valor del crédito, o sea el saldo por amortizar a la finalización del mes 26, una vez se ha hecho el correspondiente pago, es de $40.470.781, que sería el monto a amortizar durante la vigencia del crédito reestructurado, esto es durante 5 años o 60 meses. Aplicando nuevamente la relación básica para encontrar el valor presente de una cuota mensual uniforme o constante durante 60 meses, a una tasa de interés mensual del 1,2445%, se obtiene el valor de la nueva cuota a pagar:

$$40.470.781 = \text{Nueva cuota mensual} * \frac{[(1+0{,}012445)^{60} - 1]}{[0{,}012445 * (1+0{,}012445)^{60}]}$$

Despejando, se obtiene el valor de la nueva cuota a pagar:

Nueva cuota a pagar: $961.399,05

Ejemplo 5.12

Un crédito por valor de $100.000.000 a 7 años, se va a pagar mensualmente, en pagos iguales, al final de cada mes, durante la vigencia del crédito (cuota constante). La tasa de interés del crédito es del 21% nominal anual, trimestre vencido. ¿Cuál es el valor de la cuota mensual?

Monto del crédito: $100.000.000
Tasa de interés: 21% NA TV
Plazo: 7 años
Plazo: 84 meses

Tasa efectiva del crédito: 22,71%
Tasa mensual: 1,720%

Valor de la cuota anual:

$$100.000.000 = \text{Cuota}^* \; \frac{[(1+i_{mv})^{84} - 1]}{[i_{mv} * (1+i_{mv})^{84}]}$$

100.000.000 = Cuota * 44,26

Valor de la cuota mensual: $2.259.490

Utilizando la función "Pago" de Excel:

Valor de la cuota = *PAGO*(1,720%;84;100.000.000) = $2.259.490

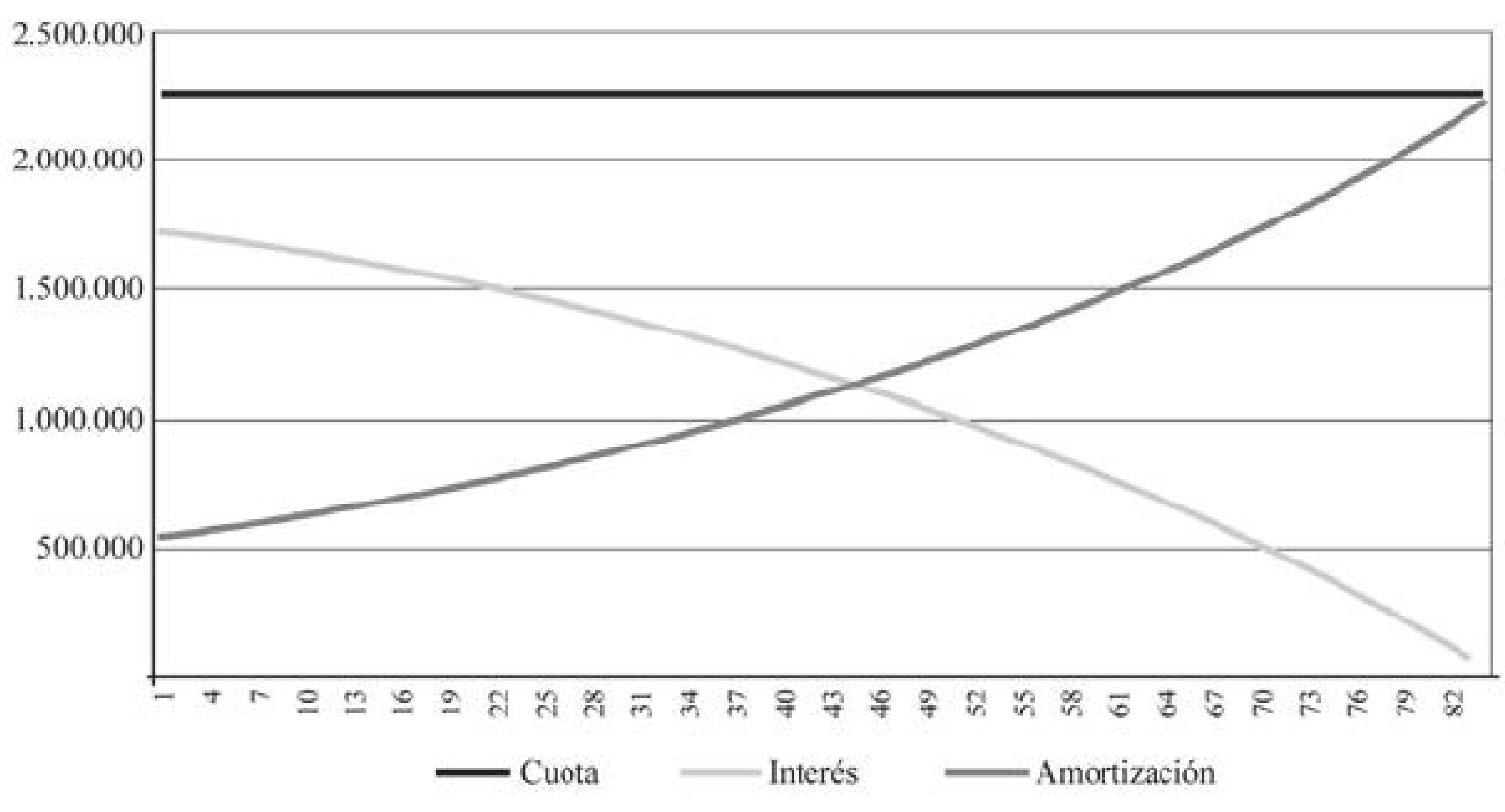
Ejemplo 5.13

¿Cómo se descompone la cuota número 50 del problema 5.12, entre amortización a capital y pago de interés?

En el Cuadro 5.7 se muestra parcialmente un procedimiento para descomponer la cuota pagada en pago de interés y amortización a capital; para el caso de la cuota del mes 50, el valor de la cuota ($2.259.490) se descompone en pago de intereses ($1.015.684) y amortización a capital ($1.243.806).

En la Figura 5.2 se muestra la cuota, y su descomposición mes a mes, durante la vida del crédito:

Figura 5.2
Descomposición de la cuota



La descomposición de cualquier cuota entre intereses y amortización a capital se puede realizar utilizando las dos funciones de Excel:

PAGOINT(tasa; período solicitado; número de períodos; monto)
PAGOINT(1,720%; 50; 84; 100.000.000) = $1.015.684

PAGOPRIN(tasa; período solicitado; número de períodos; monto)
PAGOPRIN(1,720%; 50; 84; 100.000.000) = $1.243.805

Cuadro 5.7

Año	Saldo comienzo mes	Cuota	Interés	Amortización
1	100.000.000	2.259.490	1.720.238	539.252
2	99.460.748	2.259.490	1.710.962	548.528
3	98.912.220	2.259.490	1.701.526	557.964
4	98.354.256	2.259.490	1.691.927	567.562
5	97.786.694	2.259.490	1.682.164	577.326
6	97.209.368	2.259.490	1.672.233	587.257
7	96.622.111	2.259.490	1.662.130	597.359
8	96.024.752	2.259.490	1.651.854	607.635
9	95.417.117	2.259.490	1.641.402	618.088
10	94.799.028	2.259.490	1.630.769	628.721
37	73.422.219	2.259.490	1.263.037	996.453
38	72.425.766	2.259.490	1.245.896	1.013.594
39	71.412.172	2.259.490	1.228.459	1.031.030
40	70.381.142	2.259.490	1.210.723	1.048.766
41	69.332.375	2.259.490	1.192.682	1.066.808
42	68.265.568	2.259.490	1.174.330	1.085.159
43	67.180.408	2.259.490	1.155.663	1.103.827
44	66.076.581	2.259.490	1.136.675	1.122.815
45	64.953.766	2.259.490	1.117.359	1.142.130
46	63.811.636	2.259.490	1.097.712	1.161.778
47	62.649.858	2.259.490	1.077.727	1.181.763
48	61.468.095	2.259.490	1.057.398	1.202.092
49	60.266.003	2.259.490	1.036.719	1.222.771
50	59.043.232	2.259.490	1.015.684	1.243.806
81	8.662.254	2.259.490	149.011	2.110.478
82	6.551.775	2.259.490	112.706	2.146.784
83	4.404.992	2.259.490	75.776	2.183.713
84	2.221.278	2.259.490	38.211	2.221.278

NÚMERO DE PERÍODOS NECESARIOS PARA LOGRAR UN OBJETIVO ESPECÍFICO

En algunos casos es necesario estimar el número de períodos para lograr un objetivo específico, bajo ciertas circunstancias, por ejemplo cuando un inversionista quiere conocer el tiempo que le lleva recuperar una inversión teniendo en cuenta el valor del dinero en el tiempo, o cuando se quiere acumular una cantidad haciendo depósitos en algún fondo para cubrir un gasto futuro, tal como el pago de una pensión o la matrícula de un estudiante. En los siguientes dos ejemplos usted se enfrentará a determinar los períodos de tiempo necesarios para alcanzar un objetivo específico.

Ejemplo 5.14

Considere el flujo de caja del ejemplo 5.7 de este capítulo y estime el número de años que se requieren para recuperar la inversión, teniendo en cuenta el valor del dinero en el tiempo.

En el Cuadro 5.8 se muestran los cálculos necesarios para dar respuesta a la pregunta formulada:

Cuadro 5.8

Año	Proyecto A flujos	Valor presente flujo individual	Valor presente acumulado
0	-150.000.000	-150.000.000	-150.000.000
1	35.000.000	29.166.667	-120.833.333
2	40.000.000	27.777.778	-93.055.556
3	44.000.000	25.462.963	-67.592.593
4	50.000.000	24.112.654	-43.479.938
5	60.000.000	24.112.654	-19.367.284
6	70.000.000	23.442.858	4.075.574
7	80.000.000	22.326.532	26.402.106
8	90.000.000	20.931.124	47.333.230
9	105.000.000	20.349.703	67.682.933
10	125.000.000	20.188.198	87.871.131
TIO=	20,00%	Número de años=	5,826
VPN (i=TIO)	87.871.131	Número de meses=	69,91
TIR =	32,18%		

En la última columna se muestra el valor presente acumulado hasta ese momento, el cual se vuelve positivo en algún punto entre los años 5 y 6. Si se hace una aproximación en línea recta, el tiempo necesario para recuperar la inversión sería de 5,826 años o su equivalente de 69,91 meses.

Ejemplo 5.15

Considere una situación en la cual se quiere acumular una suma de $120.000.000, haciendo depósitos mensuales iguales (serie uniforme), durante N meses. El valor de cada uno de los N depósitos será igual a $800.000. Se quiere averiguar el número de meses necesarios para acumular los $120.000.000. La tasa de interés anual es del 20% efectivo que corresponde a una tasa mensual vencida del 1,5309%.

Nuevamente se parte de la fórmula del valor futuro de una serie mensual uniforme, donde cada pago mensual es igual a $800.000.

$$120.000,000 = 800.000 * \frac{[(1+0,015309)^N - 1]}{[0,015309]}$$

Despejando N en la ecuación anterior se obtiene:

$$1 + (VF/Cuota)*i = (1+i)^N$$

$$N = \frac{\mathrm{Ln}[1+(\frac{VF}{Cuota})*i]}{\mathrm{Ln}[1+i]}$$

$$N = \frac{1,1928}{0,015193} = 78,5$$

Si se hicieran 78 depósitos, el valor acumulado sería de $118.668.148
Si se hicieran 79 depósitos, el valor acumulado sería de $121.284.839

Otra forma de encontrar la misma respuesta sería a través de Excel, utilizando la función "Buscar objetivo", para resolver la ecuación:

$$120.000.000 = \frac{800.000 * [(1+0.015309)^N - 1]}{[0.015309]}$$

Se calcula la función financiera de valor futuro (VF), para una cuota mensual de 800.000, con un interés mensual de 1,5309% y un número de períodos cualquiera, por ejemplo 70. Esto es,

VF(0,015309;70;800.000) = 99.108.005

A manera de ejemplo, en una hoja de cálculo en Excel (Cuadro 5.9):

Cuadro 5.9

	Columna A	Columna B
45	Valor futuro	99.108.005
46	Cuota mensual	800.000
47		
48	Tasa de interés	20,00%
49		1,5309%
50		
51	Plazo	70

En la celda B45 se introduce la función de valor futuro, relacionada con las otras celdas, esto es, VF(B49,B51,B46), y aparece el número 99,108,005, que corresponde al valor futuro para las condiciones especificadas. Inmediatamente se busca en Herramientas, la función "Buscar objetivo", donde la celda objetivo es la celda B45, con un valor objetivo de 120.000.000, para variar el contenido de la celda B51, esto es el número de meses. Una vez que hacemos lo anterior y aceptamos, la hoja de cálculo nos devuelve el valor de 78,5 en la celda B51 y la celda B45 queda con el valor de 120.000.000.

La utilización de la función "Buscar objetivo" de Excel puede ser útil en problemas con una estructura matemática más compleja, que no permitan encontrar una expresión cerrada, como la que se acaba de encontrar en este ejemplo.

GRADIENTES CON CRECIMIENTO CONSTANTE, A PERPETUIDAD O CON UNA DURACIÓN FINITA

El gradiente con crecimiento constante tiene múltiples aplicaciones en la vida real tal y como se mostrará en los siguientes ejemplos.

El planteamiento general del problema es el mismo del gradiente infinito con crecimiento constante g. Esto es, un flujo que para el primer año es igual a F_1, para el segundo año sería igual a:

$F_2 = F_1 * (1+g)$

Para el tercer año, $F_3 = F_2 * (1+g) = F_1 * (1+g)^2$

Para el cuarto año, $F_4 = F_3 * (1+g) = F_1 * (1+g)^3$

Para el enésimo año, $F_N = F_{N-1} * (1+g) = F_1 * (1+g)^{(N-1)}$

Cuando se trata de un gradiente con crecimiento constante a perpetuidad, en el Capítulo 2 de este libro se demostró que el valor presente es igual a:

$$P = \frac{D_1}{(TIO - g)}$$

Cuando el número de períodos durante el cual se da el crecimiento constante g es finito e igual a N, la relación anterior se modifica a:

$$P = \left(\frac{D_1}{(k - g)}\right) * \left(1 - \left(\frac{(1+g)}{(1+k)}\right)^N\right)$$

Ejemplo 5.16

Suponga un flujo de caja con un crecimiento constante, pero finito. El flujo del primer año es de 1.850, y de ahí en adelante crece a una tasa constante g igual a 10%. La tasa de interés de oportunidad es del 18%. ¿Cuál es el valor presente si se trata de un flujo finito a 40 años?

Si se tratara de un flujo infinito, en las condiciones de crecimiento y de tasa de interés especificados, el valor presente sería:

$$P_{\text{infinito}} = \frac{1.850}{(0{,}18 - 0{,}10)} = 23.125$$

En la medida en que se trata de un flujo finito a 40 años, el factor de corrección sería:

$$\text{Factor de corrección} = \left(1 - \left(\frac{(1+g)}{(1+k)}\right)^{m}\right) = \left(1 - \left(\frac{(1+0{,}10)}{(1+0{,}18)}\right)^{40}\right) = 0{,}9397$$

$$\text{Por lo tanto, } P_{40} = \left(\frac{1.850}{(0{,}18 - 0{,}10)}\right) * \left(1 - \left(\frac{(1+0{,}10)}{(1+0{,}18)}\right)^{40}\right)$$

$$P_{40} = 23.125 * 0{,}9397 = 21.730$$

En el Cuadro 5.10 se muestran los resultados para una serie finita, hasta 40 años, en las condiciones de tasa de interés de oportunidad y crecimiento definidas previamente.

Cuadro 5.10

Año	F_J	$\frac{F_J}{(1+TIO)^J}$	Valor presente	Año	F_J	$\frac{F_J}{(1+TIO)^J}$	Valor Presente
1	1.850	1.568	1.568	21	12.446	385	17.831
2	2.035	1.462	3.029	22	13.690	359	18.190
3	2.239	1.362	4.392	23	15.060	335	18.524
4	2.462	1.270	5.662	24	16.565	312	18.836
5	2.709	1.184	6.846	25	18.222	291	19.127
6	2.979	1.104	7.949	26	20.044	271	19.398
7	3.277	1.029	8.978	27	22.049	253	19.651
8	3.605	959	9.937	28	24.253	236	19.886
9	3.966	894	10.831	29	26.679	220	20.106
10	4.362	833	11.665	30	29.347	205	20.310
11	4.798	777	12.442	31	32.281	191	20.501
12	5.278	724	13.166	32	35.510	178	20.679
13	5.806	675	13.841	33	39.060	166	20.845
14	6.387	629	14.471	34	42.967	155	21.000
15	7.025	587	15.057	35	47.263	144	21.144
16	7.728	547	15.604	36	51.990	134	21.278
17	8.501	510	16.114	37	57.188	125	21.403
18	9.351	475	16.590	38	62.907	117	21.520
19	10.286	443	17.033	39	69.198	109	21.629
20	11.314	413	17.446	40	76.118	101	21.730

Ejemplo 5.17

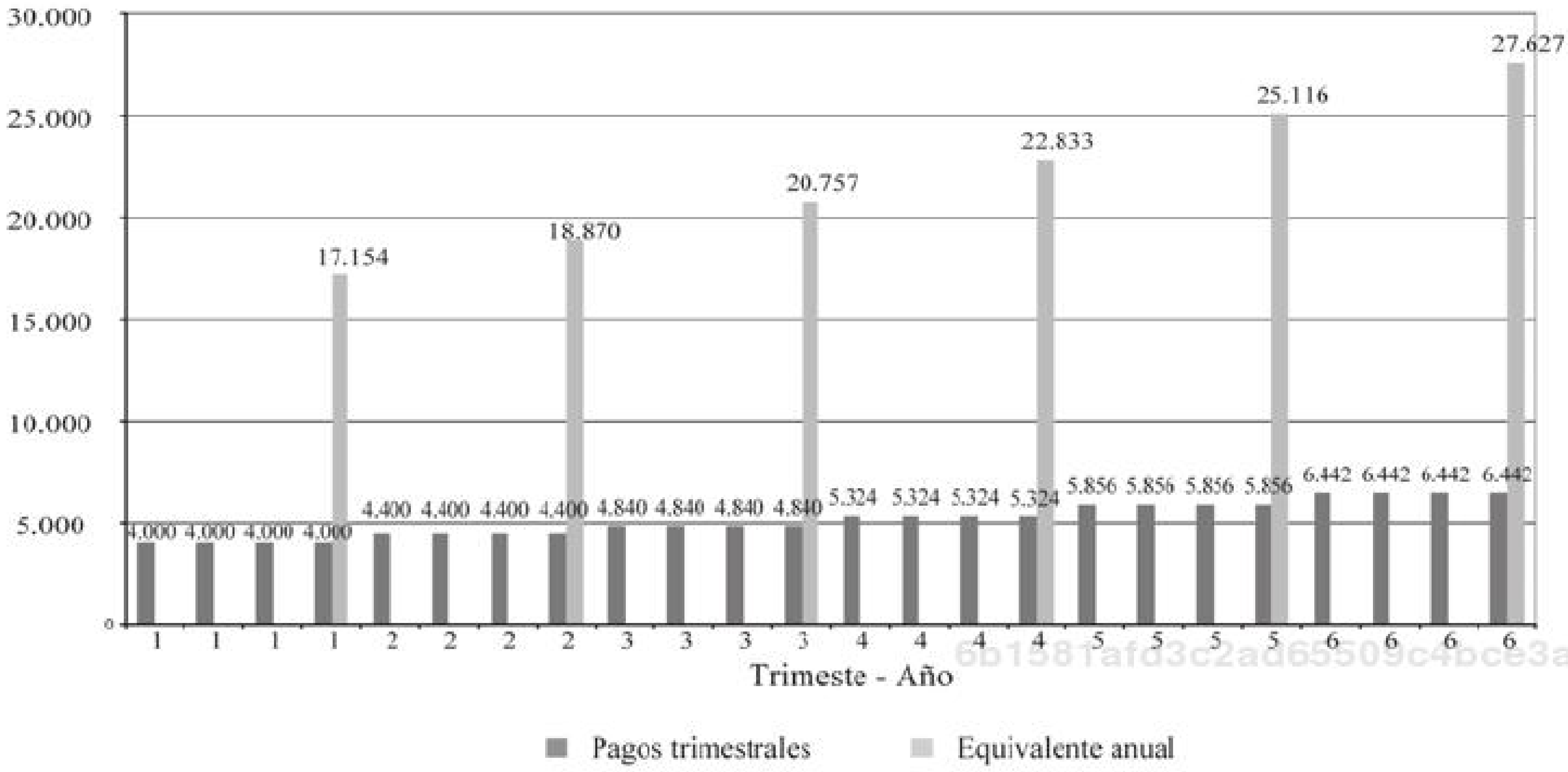
Estamos al finalizar el año 2009 y se quiere valorar el precio de una acción, que va a pagar dividendos para el año 2010 de $16.000 por acción. El pago de dividendo se va a hacer en cuatro contados trimestrales iguales, al finalizar los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre. La tasa de interés de oportunidad del inversionista es del 20% efectivo anual. ¿Cuál es el valor de mercado de la acción, bajo el siguiente escenario: los dividendos crecen de un año al siguiente en un 10%; sin embargo, el dividendo de cada año se paga en cuatro contados iguales al final de los meses especificados?

En el Cuadro 5.11 y en la Figura 5.3 se muestra la secuencia de pagos esperados para los próximos 6 años y para cada año el equivalente anual al final del año. En otras palabras, el flujo de pagos trimestrales iguales durante un año se puede transformar en un flujo de pagos anuales que crecen a una tasa constante g igual al 10%, que corresponde al crecimiento supuesto de un año al siguiente.

Cuadro 5.11

Año	Trimestre	Pago trimestral	Equivalente anual	Crecimiento anual
1	1	4.000		
1	2	4.000		
1	3	4.000		
1	4	4.000	17.154	
2	1	4.400		
2	2	4.400		
2	3	4.400		
2	4	4.400	18.870	10,00%
3	1	4.840		
3	2	4.840		
3	3	4.840		
3	4	4.840	20.757	10,00%
4	1	5.324		
4	2	5.324		
4	3	5.324		
4	4	5.324	22.833	10,00%
5	1	5.856		
5	2	5.856		
5	3	5.856		
5	4	5.856	25.116	10,00%
6	1	6.442		
6	2	6.442		
6	3	6.442		
6	4	6.442	27.627	10,00%

Figura 5.3



Para el año 1, el dividendo anual que se paga se representa por D_1; por lo tanto, el dividendo trimestral sería igual a $D_1/4$; se trata de cuatro pagos trimestrales iguales. Si el interés efectivo anual es igual a i, el interés trimestral vencido equivalente sería igual a i_{tv}; para estas condiciones generales, el flujo acumulado al final del primer año o flujo equivalente al final del primer año, sería igual a:

$$F_1 = \left(\frac{D_1}{4}\right) * \left(\frac{(1+i_{tv})^4 - 1}{i_{tv}}\right)$$

Para el año 2, el dividendo anual que se paga se representa por D_2; por tanto, el dividendo trimestral sería igual a $D_2/4$. Sin embargo, D_2 es igual a $D_1 * (1+g)$, donde g es la tasa de crecimiento del dividendo entre años. Se trata de cuatro pagos trimestrales iguales. Si el interés efectivo anual es igual a i, el interés trimestral vencido equivalente sería igual a i_{tv}; para estas condiciones generales, el flujo acumulado al final del segundo año o flujo equivalente al final del segundo año sería igual a:

$$F_2 = (D_1/4) * (1+g) * \left(\frac{(1+i_{tv})^4 - 1}{i_{tv}}\right)$$

De igual forma, el flujo equivalente anual al final del tercer año sería igual a:

$$F_3 = (D_1/4) * (1+g)^2 * \left(\frac{(1+i_{tv})^4 - 1}{i_{tv}}\right)$$

En general, el flujo equivalente anual al final del j-ésimo año sería igual a:

$$F_J = (D_1/4) * (1+g)^{J-1} * \left(\frac{(1+i_{tv})^4 - 1}{i_{tv}} \right), \text{ para todo } J,\ J = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, \text{ infinito}$$

Como se puede observar, se trata de un flujo infinito anual que crece a una tasa constante g, con un valor para el primer año igual a 17.154,45; para el problema particular que se está resolviendo,

$$F_1 = (D_1/4) * \left(\frac{(1+i_{tv})^4 - 1}{i_{tv}} \right)$$

Por lo tanto, el valor de la acción en la fecha cero es igual al valor presente de un flujo que crece a una tasa constante g igual al 10%, con una tasa de interés efectiva anual del 20%.

$$\text{Precio de la acción} = P_0 = \frac{F_1}{(i - g)} = \frac{17.154{,}45}{(0{,}20 - 0{,}10)} = 171.544{,}46$$

Ejemplo 5.18

¿Cuál es el valor de una acción que para el primer año paga un dividendo de \$1.500.000, al año a partir de la fecha actual (fecha cero)? Los dividendos crecen anualmente con una tasa de crecimiento del 4% en términos reales. La inflación esperada es del 5%. La tasa de interés de oportunidad del inversionista es del 18% efectivo anual.

Dividendo, primer año: \$1.500.000

Tasa de crecimiento: 4% en términos reales

Inflación: 5%

Cálculo del crecimiento en términos nominales

Fórmula a utilizar: $(1+i_N) = (1+i_R)*(1+\text{inflación})$

$i_N = (1+0{,}04)*(1+0{,}05)-1 = 0{,}092$

Tasa de crecimiento en términos nominales: 9,200%

Tasa de interés de oportunidad del inversionista = 18,00%

$$\text{Valor de la acción, horizonte infinito} = \frac{D_1}{(1-g)} = \frac{1.500.000}{(0,18-0,092)} =$$

El valor de la acción en las condiciones especificadas sería de $17.045.455

Ejemplo 5.19

Suponga el mismo ejemplo 5.18, pero en donde usted tiene una obligación de vender la acción al final del año 10 por valor de $20.000.000, después de haber recibido el dividendo de ese año. La tasa de interés de oportunidad del inversionista es del 18%.

Valor presente crecimiento infinito = 17.045.455

Valor presente crecimiento finito = 17.045.455 * *FC*

$$\text{Valor presente crecimiento finito} = 17.045.455 * \left(1-\left(\frac{(1+0,092)}{(1+0,18)}\right)\right)^{10}$$

Valor presente crecimiento finito = 17.045.455 * 0,539 = 9.192.829

El valor presente de los $20.000.000 (recompra) al final de los 10 años, a una tasa de descuento del 18% (TIO), es igual a $3.821.289. La suma de los dos valores daría $13.014.118, que correspondería al precio de la acción en las condiciones señaladas. Al mismo resultado se podría haber llegado si se toma en cuenta el flujo de ingresos esperados de la acción, de acuerdo con las condiciones especificadas, tal y como se muestra en el cuadro adjunto (columna derecha, Cuadro 5.12). El valor presente de ese flujo, descontado a la TIO del 18%, es igual a $13.014.118; para ello se utiliza la función de valor presente neto (VNA en español) o se trae a valor presente cada flujo individualmente (Cuadro 5.12).

Cuadro 5.12

Año	Dividendos	Venta	Flujo total
0			
1	1.500.000		1.500.000
2	1.638.000		1.638.000
3	1.788.696		1.788.696
4	1.953.256		1.953.256
5	2.132.956		2.132.956
6	2.329.188		2.329.188
7	2.543.473		2.543.473
8	2.777.472		2.777.472
9	3.033.000		3.033.000
10	3.312.036	20.000.000	23.312.036

Ejemplo 5.20

Para el problema anterior, ¿cuánto le deberían dar por la acción al final del año 10, para que resultara indiferente, frente al valor que tiene la acción si no la tiene que vender al final del año 10, esto es el valor encontrado en el ejemplo 5.18?

Para encontrar el valor de recompra que lleve al mismo resultado de la acción bajo el escenario de crecimiento infinito ($17.045.455), se aplica la función "Buscar objetivo" al Cuadro 5.12, y se varía la celda que contiene el valor de recompra, para dar el monto especificado. El resultado obtenido para el valor de recompra es de $41.099.354, tal y como se muestra en el Cuadro 5.13.

Cuadro 5.13

Año	Dividendos	Venta	Flujo
0			
1	1.500.000		1.500.000
2	1.638.000		1.638.000
3	1.788.696		1.788.696
4	1.953.256		1.953.256
5	2.132.956		2.132.956
6	2.329.188		2.329.188
7	2.543.473		2.543.473
8	2.777.472		2.777.472
9	3.033.000		3.033.000
10	3.312.036	41.099.354	44.411.390
VNA =	$ 17.045.455.00		

Ejemplo 5.21

Al finalizar el año 2009 se requiere hacer 80 pagos trimestrales, durante los 20 años siguientes. Los cuatro pagos trimestrales que se hacen durante un año son iguales y van a crecer de un año al siguiente a una tasa constante g igual al 10% (p. ej., el crecimiento podría ser igual a la inflación esperada más unos puntos por encima de ella). Cada pago trimestral se hará al finalizar los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.

La tasa de interés de oportunidad del inversionista es del 20% efectivo anual. A usted le proponen reemplazar la secuencia de pagos anteriormente descrita por un solo pago al final de diciembre de 2009, equivalente en valor presente utilizando las condiciones especificadas, y le dan un descuento del 10%. ¿Cuál sería el valor del pago a realizar? El valor del pago para el primer año es de 160 millones de pesos; por lo tanto, el pago para cada uno de los cuatro trimestres del año sería de 40 millones de pesos.

Siguiendo la lógica del problema anterior, se calcularía el valor presente de un flujo de pagos anuales equivalentes al final de cada año que crecen a una tasa constante g igual al 10%, durante 20 años. El valor del flujo para el primer año sería igual a:

$$F_1 = \left(\frac{160\ 000.000}{4}\right) * \left(\frac{((1+i_{tv})^4 - 1)}{i_{tv}}\right) = 40.000.000 \ * \left(\frac{((1+i_{tv})^4 - 1)}{i_{tv}}\right)$$

Si se tratara de un flujo infinito de pagos anuales que crecen a una tasa constante del 10% anual, el valor presente sería:

$VP = F_1/(i\text{-}g) = 171.544.464/(0{,}20\text{-}0{,}10) = 1.715.444.640$

Sin embargo, se trata de un flujo finito a 20 años. Aplicando el factor de corrección correspondiente derivado previamente, se obtendría:

$$\text{Factor de corrección para 20 años} = \left(1 - \left(\frac{(1+g)}{(1+k)}\right)^N\right) = \left(1 - \left(\frac{(1+0{,}10)}{(1+0{,}20)}\right)^{20}\right) = 0{,}8245$$

Por lo tanto, el valor presente sería igual a 1.715.444.640*0,8245 =1.414.417.613

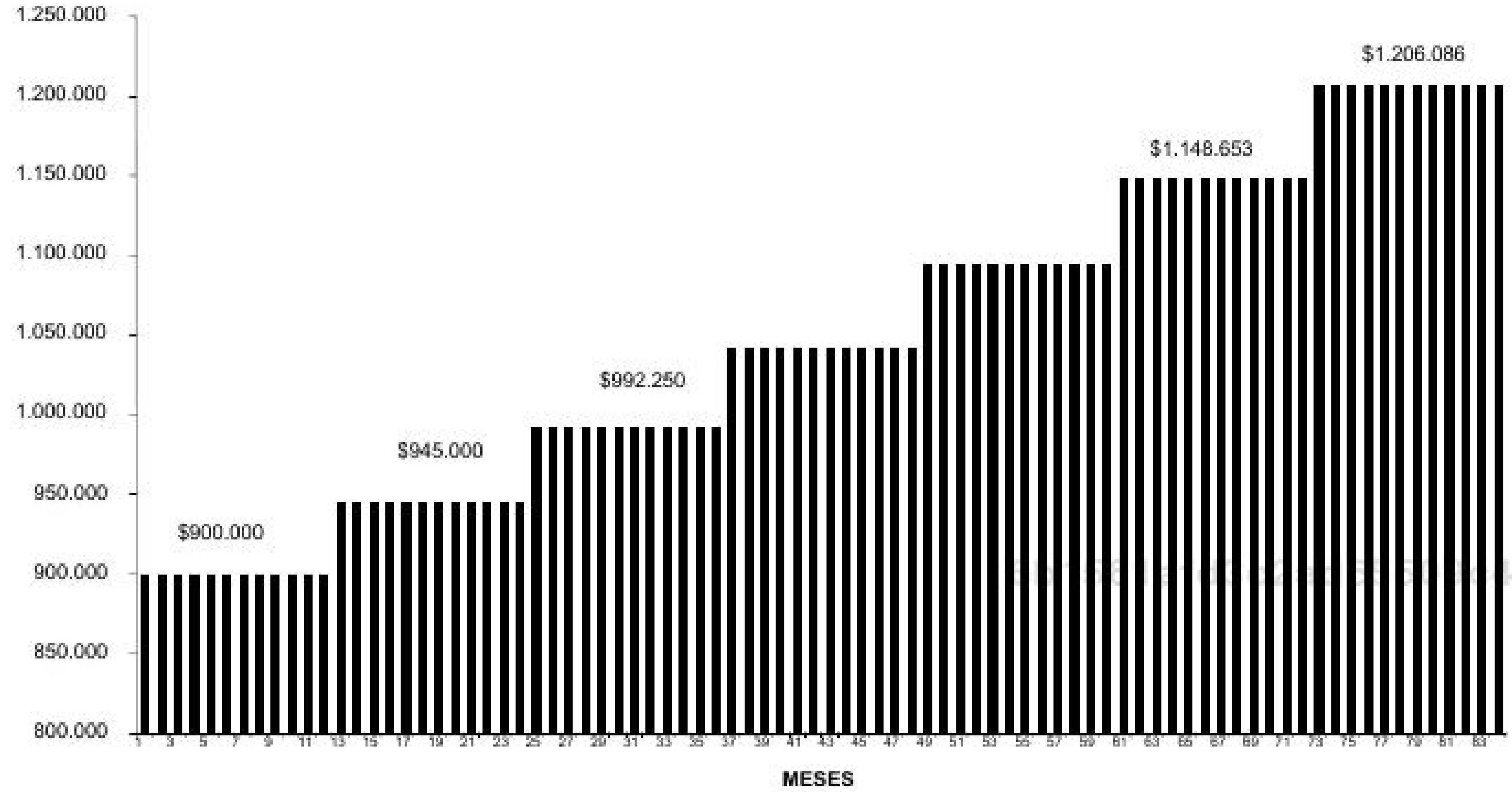
Con un descuento del 10%, el valor a pagar sería de $1.272.975.852.

Ejemplo 5.22

Un fondo de inversión reconoce un interés efectivo del 12% anual, y se van a hacer 84 depósitos mensuales al fondo durante los próximos 7 años. El primer depósito se hace dentro de un mes y así sucesivamente hasta finalizar el año 7; los 12 depósitos que se hacen cada año son iguales; sin embargo, incrementan de un año al siguiente con la inflación esperada que es del 5%. ¿Cuál sería la cantidad acumulada al final de los 7 años, si cada uno de los 12 depósitos que se hacen durante el primer año tiene un valor de $900.000?

En la Figura 5.4 se muestra el diagrama de depósitos mensuales que se hacen de inversión:

Figura 5.4
Comportamiento de los depósitos



El interés mensual equivalente (i_{mv}) a un interés efectivo del 12% es del 0,9489%.

$i_{mv} = (1+0,12)^{(1/12)} - 1 = 0,009489$

Los 84 depósitos mensuales se pueden reemplazar por 7 depósitos anuales, que se incrementan con la inflación, a través de la siguiente expresión:

$$F_1 = 900.000 * \frac{[(1+i_{mv})^{12} - 1]}{i_{mv}} = 900.000 * 12,646 = 11.381.848$$

$$F_2 = 900.000 * (1+g) * \frac{[(1+i_{mv})^{12} - 1]}{i_{mv}} = 900.000 * (1+0,05) * 12,646$$

F_2 = 11.381.848 *(1+0,05) = 11.950.941, y así sucesivamente.

Por lo tanto, los siete flujos anuales equivalentes (Cuadro 5.14) son:

Cuadro 5.14

Equivalencia		
Año	Equivalente	Crecimiento
1	11.381.848	
2	11.950.941	5,00%
3	12.548.488	5,00%
4	13.175.912	5,00%
5	13.834.708	5,00%
6	14.526.443	5,00%
7	15.252.765	5,00%

Ahora se tiene un gradiente anual finito a 7 años equivalente a los 84 depósitos mensuales, con un primer valor de $11.381.848 y una tasa de crecimiento anual del 5%; para esta situación, el valor presente es:

$$P = \frac{11.381.848}{(0,12 - 0,05)} * FC$$

$$FC = \left(1 - \left(\frac{(1 + 0,05)}{(1 + 0,12)}\right)^7\right) = 0,363499$$

$$P = \frac{11.381.848}{(0,12 - 0,05)} * 0,363499 = 59.104.186$$

Todos los pasos que se realizaron hasta el momento se pueden resumir en la siguiente expresión:

$$P = \frac{\left(900.000 * \frac{(1 + i_{mv})^{12} - 1)}{i_{mv}}\right)}{(i - g)} * FC$$

$$P = \frac{\left[\frac{900.000 \ ((1 + 0,009849)^{12} - 1)}{0,009849}\right]}{(0,12 - 0,05)} * 0,036499$$

El valor futuro solicitado sería igual a

$$F_{84} = 59.104.186 * (1+0,12)^7 = 130.660.525$$

SOLUCIÓN ANALÍTICA *VERSUS* SOLUCIÓN EXHAUSTIVA

Los siguientes dos problemas muestran situaciones de alguna complejidad, que aunque se pueden resolver analíticamente, como se hace en cada uno de ellos, se pueden a su vez resolver más fácilmente si se hace una solución exhaustiva en Excel, proyectando el flujo correspondiente y calculando un valor presente o un valor futuro.

Ejemplo 5.23

Un crédito por valor de $300 millones, con un plazo de 5 años, se va a amortizar en 60 cuotas mensuales tales que las 12 cuotas de cada año permanecen constantes o iguales. Sin embargo, las cuotas aumentan de un año al siguiente en un 2% en térmiiguales. Sin embargo, las cuotas aumentan de un año al siguiente en un 2% en términos reales, con una inflación anual del 5%. La tasa de interés del crédito es una equivalente al 21% nominal anual pagadero trimestre vencido. Determinar el valor de la cuota durante el primer año.

a) Solución analítica (utilización de fórmulas)

Monto del crédito = \$300.000.000

Tasa de interés: 21% NA TV

Plazo del crédito (años) = 5 años
Plazo del crédito (meses) = 60 meses

Cuota uniforme durante el año:

Incremento de la cuota anual: 2% real
Inflación proyectada: 5%
Incremento de la cuota anual: 7,1% nominal
Tasa de interés efectiva, crédito: 22,71% efectivo
Tasa de interés del crédito mensual: 1,72%

$$300.000.000 = \left(\text{Cuota}_1 * \left(\frac{[(1+i_m)^{12} - 1]}{i_m} \right) * \frac{(1+g_a)}{(i_a - g_a)} \right) * FC$$

$$FC = \left(1 - \left(\frac{(1+g_a)}{(1+i_a)} \right)^5 \right) = 0{,}494$$

$300.000.000 = \text{Cuota}_1 \cdot 13{,}203 * 6{,}405 * 0{,}494$
$300.000.000 = \text{Cuota}_1 \cdot 41{,}74$
$\text{Cuota}_1 = 7.187.090$

b) Solución exhaustiva

En el Cuadro 5.15 se muestra parcialmente el flujo de caja del crédito mes a mes, omitiendo, para facilitar, la presentación de los valores comprendidos entre los meses 19 y 46. Se parte de un valor supuesto de la cuota para el primer año (p. ej., \$6.000.000) y se calcula el flujo en las condiciones especificadas, tal y como aparece en la segunda columna (cuota supuesta) del Cuadro 5.15.

El valor presente de ese flujo es inferior a los \$300.000.000 que corresponden al monto del crédito; si se aumenta la cuota del primer año aumentará el valor presente, por lo cual la solución se podría encontrar por prueba y error.

Esto se hace más fácilmente si se utiliza la función "Buscar objetivo" de Excel, donde la celda objetivo es el valor presente neto (VNA) a la tasa de interés mensual del crédito (1,7202%), el objetivo a alcanzar es el monto de $300.000.000 (desembolso del crédito) y la celda a modificar es el valor de la cuota en el año 1; automáticamente se obtiene la columna de la derecha (cuota real), para la cual el valor presente neto es igual al monto del crédito:

Cuadro 5.15

VNA(i) =	250.449.059 Cuota supuesta	300.000.000 Cuota real
0		
1	6.000.000	7.187.090
2	6.000.000	7.187.090
3	6.000.000	7.187.090
4	6.000.000	7.187.090
5	6.000.000	7.187.090
6	6.000.000	7.187.090
7	6.000.000	7.187.090
8	6.000.000	7.187.090
9	6.000.000	7.187.090
10	6.000.000	7.187.090
11	6.000.000	7.187.090
12	6.000.000	7.187.090
13	6.426.000	7.697.374
14	6.426.000	7.697.374
15	6.426.000	7.697.374
16	6.426.000	7.697.374
17	6.426.000	7.697.374
18	6.426.000	7.697.374
19	6.426.000	7.697.374
46	7.370.885	8.829.203
47	7.370.885	8.829.203
48	7.370.885	8.829.203
49	7.894.218	9.456.077
50	7.894.218	9.456.077
51	7.894.218	9.456.077
52	7.894.218	9.456.077
53	7.894.218	9.456.077
54	7.894.218	9.456.077
55	7.894.218	9.456.077
56	7.894.218	9.456.077
57	7.894.218	9.456.077
58	7.894.218	9.456.077
59	7.894.218	9.456.077
60	7.894.218	9.456.077

Ejemplo 5.24

El problema del ejemplo 5.22, resuelto en forma exhaustiva.

En el Cuadro 5.16 se presenta parcialmente el flujo de caja de los depósitos que se hacen al fondo de inversión, al final de cada mes, escondiendo los depósitos entre los meses 24 y 70. Para estimar el valor acumulado al final de los 7 años o de los 84 meses, con una tasa de interés del 12% efectivo, equivalente a una tasa del 0,9489% mensual, se aplica la función de valor presente neto, VNA, al flujo de depósitos, lo cual da un valor presente en la fecha cero de $59.104.186. Para llevar el valor presente anterior a un valor futuro en el mes 84, se utiliza la fórmula convencional para llevar un valor presente a valor futuro; esto es:

$F_{84} = 59.104.186 * (1+0,009489)^{84} = 130.660.525$

Cuadro 5.16

	Real
Mes	Depósito
0	
1	900.000
2	900.000
3	900.000
4	900.000
5	900.000
6	900.000
7	900.000
8	900.000
9	900.000
10	900.000
11	900.000
12	900.000
13	945.000
14	945.000
15	945.000
16	945.000
17	945.000
18	945.000
19	945.000
20	945.000
21	945.000
22	945.000
23	945.000
24	945.000
70	1.148.653
71	1.148.653
72	1.148.653
73	1.206.086
74	1.206.086
75	1.206.086
76	1.206.086
77	1.206.086
78	1.206.086
79	1.206.086
80	1.206.086
81	1.206.086
82	1.206.086
83	1.206.086
84	1.206.086