



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
ESCUELA DE FORMACIÓN DE TECNÓLOGOS

INVESTIGACION DE OPERACIONES



ASIGNATURA:
PROFESOR:
PERÍODO ACADÉMICO:

Investigación de Operaciones.
Ing. Luis Ponce.
Sep. 2015 - Feb. 2016

CONSULTA N° 2

TÍTULO:

DUALIDAD EN PROGRAMACION LINEAL

ESTUDIANTE

SANCHEZ ARTEAGA FREDY VICENTE

FECHA DE REALIZACIÓN: 15 de noviembre de 2015

FECHA DE ENTREGA: 18 de noviembre de 2015

TABLA DE CONTENIDO

<u>I. TEMAS DE LA CONSULTA.....</u>	<u>1</u>
DUALIDAD PROGRAMACION LINEAL	1
<u>II. OBJETIVO.</u>	<u>1</u>
<u>III. DESARROLLO.</u>	<u>1</u>
DEFINICIÓN:.....	1
PROCEDIMIENTO:	1
RELACIONES PRIMAL-DUAL:	1
MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DUALIDAD EN PROGRAMACIÓN LINEAL	2
MÉTODO 1	2
MÉTODO 2	2
RESOLUCIÓN DEL EJERCICIO:.....	2
APLICACIÓN MÉTODO 1 PARA RESOLUCIÓN.	6
COMPROBACIÓN EN LA FORMA DUAL:	6
<u>IV. CONCLUSIÓN.</u>	<u>7</u>
<u>V. RECOMENDACIÓN.</u>	<u>7</u>
<u>VI. BIBLIOGRAFÍA.....</u>	<u>7</u>

I. TEMAS DE LA CONSULTA

DUALIDAD PROGRAMACION LINEAL

II. OBJETIVO.

- ⇒ Identificar el concepto de dualidad dentro de programación lineal, sus características y aplicarlos con un ejemplo práctico.

III. DESARROLLO.

Definición:

Un problema dual es formulado en base de un modelo de programación primal. Siendo que ambos problemas se encuentran relacionados en el modo de que la solución óptima de uno genera simultáneamente la solución factible del otro. [1]

Procedimiento:

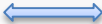

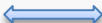


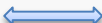
La formulación de un problema dual se resume en:

1. Se formula el problema dual.
2. Se resuelve el problema primal por medio de los métodos de la gran M o Dos fases.
3. Se determina las variables duales que corresponden a las variables primales al final de desarrollo del problema.
4. Se realiza la verificación de cada una de las restricciones y función objetivo utilizando la forma dual del ejercicio.

Relaciones primal-dual:

- a) Un problema dual está formado por un número de variables como tantas restricciones tenga el problema primal.
- b) Un problema dual está formado por un número de restricciones como tantas variables tenga el problema primal.
- c) Los coeficientes dentro de la función objetivo en el problema dual son los valores independientes de las restricciones del problema primal.
- d) Los valores independientes de las restricciones del problema dual son los coeficientes dentro de la función objetivo del problema primal.
- e) Tabla guía para construir problemas duales.

[1]

Reglas para construir el problema dual		
Problema de Maximización		Problema de Minimización
Restricciones		Variables
\geq		≤ 0
\leq		≥ 0
$=$		Restricciones irrestrictas
Variables		
≥ 0		\geq
≤ 0		\leq
Irrestrictas		$=$

Métodos de resolución dualidad en programación lineal

Método 1

$$\begin{pmatrix} \text{Valor optimo} \\ \text{de la variable dual } y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Coeficiente } z \text{ primal optimo de la variable } x_i \\ + \\ \text{Coeficiente objetivo original de } x_i \end{pmatrix} [1]$$

Método 2

$$\begin{pmatrix} \text{Valores optimos} \\ \text{de las variables duales} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Vector de los coeficientes objetivo} \\ \text{originales de las variables} \\ \text{basicas primales optimas} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \text{Inversa Primal} \\ \text{optima} \end{pmatrix} [1]$$

Resolución del Ejercicio:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

Sujeto a:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Encontrar solución dual	
Primal	Dual
Maximizar $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 - MR_1$ Sujeto a: $x_1 + 2x_2 + x_3 + S_1 = 10$ $2x_1 - x_2 + 3x_3 + R_1 = 8$ $x_1, x_2, x_3, S_1, R_1 \geq 0$	Minimizar $w = 10y_1 + 8y_2$ Sujeto a: $y_1 + 2y_2 \geq 5$ $2y_1 - y_2 \geq 12$ $y_1 + 3y_2 \geq 4$ $y_1 \geq 0$ $y_2 \geq -M \text{ (} y_2 \rightarrow \text{irrestricta)}$

① Convertir en desigualdades las restricciones.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + S_1 &= 10 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + R_1 &= 8 \end{aligned}$$

② Agregar un valor M a la función objetivo por cada variable artificial.

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 - MR_1$$

③ Identificar variables básicas y no básicas.

Variables Basicas	Variables NO Basicas
$S_1 = 10$	$x_1 = 0$
$R_1 = 8$	$x_2 = 0$
	$x_3 = 0$

④ Despejar las variables artificiales en la función objetivo.

$$\begin{aligned}
 R_1 &= 8 - 2x_1 + x_2 - 3x_3 \\
 z &= 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 - M(8 - 2x_1 + x_2 - 3x_3) \\
 z &= 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 - 8M + 2Mx_1 - Mx_2 + 3Mx_3 \\
 z &= (5 + 2M)x_1 + (12 - M)x_2 + (4 + 3M)x_3 - 8M \\
 z + (-5 - 2M)x_1 + (-12 + M)x_2 + (-4 - 3M)x_3 &= -8M
 \end{aligned}$$

Matriz Simplex

	<i>Básica</i>	x_1	x_2	x_3	S_1	R_1	<i>Solución</i>	
F1	z	$-5 - 2M$	$-12 + M$	$-4 - 3M$	0	0	$-8M$	
F2	S_1	1	2	1	1	0	10	$\frac{10}{3} = 3.3$
F3	R_1	2	-1	3	0	1	8	$\frac{8}{3} = 2.6$

⇒ Convertir en 1 el elemento pivote.

$$\frac{1}{3}F3 \rightarrow F3$$

	<i>Básica</i>	x_1	x_2	x_3	S_1	R_1	<i>Solución</i>
F1	z	$-5 - 2M$	$-12 + M$	$-4 - 3M$	0	0	$-8M$
F2	S_1	1	2	1	1	0	10
F3	x_3	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$

⇒ Hacer ceros arriba y abajo del elemento pivote.

$$4 + 3MF3 + F1 \rightarrow F1$$

$4 + 3MF3$	$\frac{8 + 6M}{3}$	$\frac{-4 - 3M}{3}$	$4 + 3M$	0	$\frac{4 + 3M}{3}$	$\frac{32 + 24M}{3}$
F1	$-5 - 2M$	$-12 + M$	$-4 - 3M$	0	0	$-8M$
F1	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{40}{3}$	0	0	$\frac{4 + 3M}{3}$	$\frac{32}{3}$

$$-F3 + F2 \rightarrow F2$$

$-F3$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	-1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{3}$
$F2$	1	2	1	1	0	10
$F2$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{22}{3}$

	<i>Básica</i>	x_1	x_2	x_3	S_1	R_1	<i>Solución</i>	
F1	z	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{40}{3}$	0	0	$\frac{4+3M}{3}$	$\frac{32}{3}$	
F2	S_1	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{22}{3}$	$\frac{22}{3} \cdot \frac{3}{7} = 3.4$
F3	x_3	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{3} \cdot -3 = 8$

⇒ Convertir en 1 el elemento pivote.

$$\frac{3}{7}F2 \rightarrow F2$$

	<i>Básica</i>	x_1	x_2	x_3	S_1	R_1	<i>Solución</i>
F1	z	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{40}{3}$	0	0	$\frac{4+3M}{3}$	$\frac{32}{3}$
F2	x_2	$\frac{1}{7}$	1	0	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{22}{7}$
F3	x_3	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$

⇒ Hacer ceros arriba y abajo del elemento pivote.

$$\frac{40}{3}F2 + F1 \rightarrow F1$$

$\frac{40}{3}F2$	$\frac{40}{21}$	$\frac{40}{3}$	0	$\frac{120}{21}$	$-\frac{40}{21}$	$\frac{880}{21}$
F1	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{40}{3}$	0	0	$\frac{4+3M}{3}$	$\frac{32}{3}$
F1	$-\frac{3}{7}$	0	0	$\frac{120}{21}$	$\frac{-12+21M}{21}$	$\frac{368}{7}$

$$\frac{1}{3}F2 + F3 \rightarrow F3$$

$\frac{1}{3}F2$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{21}$	$\frac{22}{21}$
F3	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
F3	$\frac{5}{7}$	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{26}{7}$

	<i>Básica</i>	x_1	x_2	x_3	S_1	R_1	<i>Solución</i>	
F1	z	$-\frac{3}{7}$	0	0	$\frac{120}{21}$	$\frac{-12 + 21M}{21}$	$\frac{368}{7}$	
F2	x_2	$\frac{1}{7}$	1	0	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{22}{7}$	$\frac{22}{7} * 7 = 22$
F3	x_3	$\frac{5}{7}$	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{26}{7}$	$\frac{26}{7} * \frac{7}{5} = 5.2$

⇒ Convertir en 1 el elemento pivote.

$$\frac{7}{5} F3 \rightarrow F3$$

	<i>Básica</i>	x_1	x_2	x_3	S_1	R_1	<i>Solución</i>
F1	z	$-\frac{3}{7}$	0	0	$\frac{120}{21}$	$\frac{-12 + 21M}{21}$	$\frac{368}{7}$
F2	x_2	$\frac{1}{7}$	1	0	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{22}{7}$
F3	x_1	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{26}{5}$

⇒ Hacer ceros arriba y abajo del elemento pivote.

$$\frac{3}{7} F3 + F1 \rightarrow F1$$

$\frac{3}{7} F3$	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{78}{35}$
F1	$-\frac{3}{7}$	0	0	$\frac{120}{21}$	$\frac{-12 + 21M}{21}$	$\frac{368}{7}$
F1	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{29}{5}$	$\frac{-2 + 5M}{5}$	$\frac{274}{5}$

$$-\frac{1}{7} F3 + F2 \rightarrow F2$$

$-\frac{1}{7} F3$	$-\frac{1}{7}$	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{35}$	$-\frac{2}{35}$	$-\frac{26}{35}$
F2	$\frac{1}{7}$	1	0	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{22}{7}$
F2	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{12}{5}$

Matriz final.

	Básica	x_1	x_2	x_3	S_1	R_1	Solución
F1	z	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{29}{5}$	$\frac{-2+5M}{5}$	$\frac{274}{5}$
F2	x_2	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{12}{5}$
F3	x_1	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{26}{5}$

Solución:

$$z = \frac{274}{5}$$

$$x_2 = \frac{12}{5}$$

$$x_1 = \frac{26}{5}$$

Aplicación método 1 para resolución.

Al resolver el problema por el método M se resuelve que las variables originales iniciales S_1 y R_1 corresponden a las variables duales y_1 y y_2 respectivamente. Así que, determinamos la solución dual óptima:

<i>Variables básicas primales iniciales</i>	S_1	R_1
<i>Coefficientes de la ecuación z</i>	$\frac{29}{5}$	$\frac{-2+5M}{5} = -\frac{2}{5} + M$
<i>Coefficiente objetivo original</i>	0	$-M$
<i>Variables Duales</i>	y_1	y_2
<i>Valores óptimos.</i>	$\frac{29}{5} + 0 = \frac{29}{5}$	$-\frac{2}{5} + M + (-M) = -\frac{2}{5}$

Comprobación en la forma DUAL:

$$\boxed{\checkmark} 10 * \frac{29}{5} + 8 * \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{274}{5}$$

$$\boxed{\checkmark} \frac{29}{5} + 2 * \left(-\frac{2}{5}\right) \geq 5$$

$$\boxed{\checkmark} \quad 2 * \frac{29}{5} - \left(-\frac{2}{5}\right) \geq 12$$

$$\boxed{\checkmark} \quad \frac{29}{5} + 3 * \left(-\frac{2}{5}\right) \geq 4$$

Valores objetivo primal-dual. Para cualquier par de soluciones primales y duales factibles

$$\left(\begin{array}{c} \text{Valor objetivo en el} \\ \text{problema de maximizacion} \end{array} \right) \leq \left(\begin{array}{c} \text{Valor objetivo en el} \\ \text{problema de minimizacion} \end{array} \right) [1]$$

IV. CONCLUSIÓN.

- ⇒ Este método o forma de resolver problemas de programación lineal son efectivos de utilizar cuando tengo muchas restricciones y pocas variables de decisión haciendo que el número de restricciones sea el número de variables de decisión.
- ⇒ Al realizar el dual de una forma dual nos da como resultado el original (primal).

V. RECOMENDACIÓN.

- * Los problemas de dualidad es factible utilizar el método de la gran M para realizar el cambio de variables al final.

VI. BIBLIOGRAFÍA.

- [1] Taha, Hamdy A., Investigación de Operaciones, Novena ed., G. L. Ballesteros, Ed., Mexico: Pearson Educacion, 2012, pp. 137 -141.