Chương 5. Chuỗi số và chuỗi hàm

5.1. Chuỗi số

5.1.1. Định nghĩa chuỗi hội tụ, các tính chất của chuỗi hội tụ, tiêu chuẩn Cauchy

Xét dãy số vô hạn $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, trong đó $u_n = f(n)$ với $n\in\mathbf{N}^*$. Biểu thức $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là chuỗi số (hay chuỗi), còn các số $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ được gọi là các số hạng của chuỗi; $u_n = f(n)$ được gọi là số hạng tổng quát.

Tổng n số hạng đầu tiên của chuỗi ký hiệu là S_n và được gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi: $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

Chuỗi được gọi là hội tụ, nếu tồn tại $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ (S là số hữu hạn và được gọi là tổng của chuỗi); ngược lại, nếu $\lim_{n\to\infty} S_n$ không tồn tại hoặc tiến đến ∞ thì chuỗi được gọi là phân kỳ.

Ví dụ **5.1.1.** Khảo sát tính hội tụ/phân kỳ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ với $a \neq 0$

Bài giải

Các số hạng $u_n = aq^{n-1}$ ($n\in\mathbf{N}^*$) của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$ là các số hạng của cấp số nhân có số hạng đầu là $u_1 = a \neq 0$ và công bội q.

- Nếu $|q| \neq 1$ thì $S_n = \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} = u_1 \dfrac{1-q^n}{1-q} = a\dfrac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S = \lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q} & \text{khi } |q| < 1 \\ \infty & \text{khi } |q| > 1 \end{cases}$

- Nếu $|q| = 1$ thì $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a = \begin{cases} 0 & \text{khi } n = 2k \\ a & \text{khi } n = 2k+1 \end{cases}$ khi $q = -1$, tức là giới hạn này không tồn tại; và $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a = \lim_{n\to\infty} na = \infty$ khi $q = 1$.

Tóm lại, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ với $a \neq 0$ hội tụ khi $|q| < 1$ và phân kỳ khi $|q| \geq 1$. Kết quả này được sử dụng khi cần, mà không cần phải chứng minh.

Ví dụ **5.1.2.** Chứng minh rằng, chuỗi số $\dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + \dfrac{1}{3.4.5} + \ldots$ hội tụ và tìm tổng của nó.

Bài giải

Biểu diễn số hạng tổng quát của chuỗi $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ dưới dạng tổng của các phân số đơn giản $\dfrac{A}{n} + \dfrac{B}{n+1} + \dfrac{C}{n+2}$ bằng phương pháp hệ số bất định, ta được A = 1/2, B = -1 và C = 1/2; do đó

$$u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}.$$

Nhận xét. Tổng riêng S_n của chuỗi chính là $S_n^{(m)}$ với m = 2 ở Bài tập 0.12., do đó từ kết quả của Bài tập 0.12. ta suy ra được ngay

$$S_n^{(m)} = \frac{1}{m}\left[\frac{1}{m} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}\right] \Rightarrow S_n = S_n^{(2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}$$

Điều kiện cần của chuỗi hội tụ: Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Chứng minh: Giả sử chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ, khi đó $\begin{cases} \lim_{n\to\infty} S_n = S \\ \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S \end{cases}$, mặt khác do $u_n = S_n - S_{n-1}$ nên $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$.

Điều kiện $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ là cần chứ không phải là đủ để chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ. Chẳng hạn, xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (gọi là chuỗi điều hòa), ta thấy $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, tuy nhiên chuỗi số này lại phân kỳ. Thật vậy, giả sử ngược lại, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ hội tụ, khi đó $\begin{cases} \lim_{n\to\infty} S_n = S \\ \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n =$ $\lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$, điều này mâu thuẫn với $S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Như vậy, nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ có $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ thì nó phân kỳ.

Ví dụ **5.1.3.** Khảo sát tính hội tụ/phân kỳ của chuỗi số $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \frac{4}{11} + \ldots$

Bài giải

Số hạng tổng quát của chuỗi là $u_n = \frac{n}{3n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{3 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} =$ $\frac{1}{3-0} = \frac{1}{3} \neq 0$ nên chuỗi đã cho là phân kỳ.

Các tính chất của chuỗi hội tụ

(1) Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ và có tổng là S thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ (c là hằng số) cũng hội tụ và có tổng là cS.

(2) Nếu các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ và có tổng tương ứng là S_u, S_v thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ cũng hội tụ và có tổng là $S_u + S_v$.

(3) Tính hội tụ/phân kỳ của một chuỗi số không thay đổi khi bỏ bớt đi một số hữu hạn số hạng đầu tiên của chuỗi.

Tiêu chuẩn Cauchy

Điều kiện cần và đủ để chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ là với $\forall \varepsilon > 0$ bé tùy ý cho trước, tìm được số nguyên dương n_0 sao cho khi $p > q \geq n_0$ thì $\left|S_p - S_q\right| = \left|\sum_{k=q+1}^{p} u_k\right| < \varepsilon$.

5.1.2. Chuỗi số dương

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ có $u_n > 0$ với $\forall n \geq 1$ được gọi là chuỗi số dương. Vì $u_{n+1} > 0 \Rightarrow S_{n+1} = S_n + u_{n+1} > S_n$ nên $\{S_n\}$ là dãy số tăng. Do đó nếu dãy số $\{S_n\}$ bị chặn trên thì $\exists \lim_{n\to\infty} S_n$, do đó chuỗi hội tụ; ngược lại dãy số $\{S_n\}$ không bị chặn thì $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, do đó chuỗi phân kỳ.

Các dấu hiệu so sánh của chuỗi số dương

(1) Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Giả sử $u_n \le v_n$ với $\forall n \ge n_0 \in \mathbf{N}^*$, khi đó nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ, còn nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ.

(2) Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$ thì hai chuỗi số này đồng thời hội tụ hoặc đồng thời phân kỳ.

(3) Giả sử hàm số f(x) là hàm số dương, liên tục và đơn điệu giảm trên $[1,+\infty)$, đồng thời $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Khi đó, tích phân suy rộng $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ và chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ với $u_n = f(n)$, đồng thời hội tụ hoặc đồng thời phân kỳ.

Ví dụ **5.1.4.** Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}.3^n}$ hội tụ vì $\frac{1}{\sqrt[3]{n}.3^n} \le \frac{1}{3^n}$ với $\forall n \ge 1$ và chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ hội tụ theo Ví dụ **5.1.1.** tương ứng với a = 1 và q = 1/3.

Ví dụ **5.1.5.** Khảo sát tính hội tụ/phân kỳ của chuỗi số $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \ldots$

Bài giải

Số hạng tổng quát của chuỗi là $u_n = \frac{1}{3n-1}$. So sánh chuỗi này với chuỗi điều hòa có số hạng tổng quát là $v_n = \frac{1}{n}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3}$. Do đó chuỗi đã cho là phân kỳ vì chuỗi điều hòa phân kỳ.

Các quy tắc khảo sát tính hội tụ của chuỗi số dương

Quy tắc **D'Alembert**. Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Nếu $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ khi D < 1, phân kỳ khi D > 1. Còn khi D = 1, không thể khẳng định được chuỗi hội tụ hay phân kỳ mà phải dùng cách khác để khảo sát.

Quy tắc **Cauchy**. Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Nếu $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ khi C < 1, phân kỳ khi C > 1. Còn khi C = 1, không thể khẳng định được chuỗi hội tụ hay phân kỳ mà phải dùng cách khác để khảo sát.

Ví dụ **5.1.6.** Khảo sát tính hội tụ/phân kỳ của các chuỗi số (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{10}}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Bài giải

(a) Áp dụng Quy tắc D'Alembert $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{10}}{(n+1)^{10}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}} = 2 = D$. Vì D > 1 nên chuỗi phân kỳ.

(b) Áp dụng Quy tắc Cauchy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} = C$. Vì C > 1 nên chuỗi phân kỳ.

Ví dụ **5.1.7.** Khảo sát tính hội tụ/phân kỳ của chuỗi số $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$

Bài giải

Số hạng tổng quát của chuỗi là $u_n = \frac{1}{n^2}$, nếu áp dụng Quy tắc D'Alembert $D = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} = 1$ thì không khẳng định được chuỗi là hội tụ hay phân kỳ.

Bây giờ ta áp dụng dấu hiệu so sánh với tích phân suy rộng: Từ $u_n = \frac{1}{n^2} = f(n)$ $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^2} = -\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{x}\Big|_1^b = 1 - \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{b} = 1 - 0 = 1$, suy ra tích phân suy rộng này hội tụ, nên chuỗi đã cho hội tụ.

5.1.3. Chuỗi số có số hạng với dấu bất kỳ

5.1.3.1. Chuỗi hội tụ tuyệt đối và hội tụ có điều kiện

Định lý. Giả sử chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ với các số hạng có dấu bất kỳ. Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ. Khi đó chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối.

Trong trường hợp, nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ mà chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kỳ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là hội tụ có điều kiện (hay bán hội tụ).

Chú ý 1. Điều kiện chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ chỉ là điều kiện đủ để chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ, chứ không phải là điều kiện cần.

Chú ý 2. Nếu nhờ Quy tắc D'Alembert hoặc Quy tắc Cauchy mà biết được chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kỳ thì có thể khẳng định là chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ. Thật vậy, khi đó $\lim_{n\to\infty}|u_n| \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

5.1.3.2. Chuỗi đan dấu

Chuỗi đan dấu là chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ...$ trong đó $u_n > 0$ với $\forall n \geq 1$.

Dấu hiệu hội tụ của chuỗi đan dấu (Dấu hiệu Leibniz). Nếu dãy số dương $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ giảm dần và $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ hội tụ và có tổng $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n < u_1$ và $|R_n| < u_{n+1}$, trong đó $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} u_k$ là tổng riêng thứ n của chuỗi số và $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} u_k$ là phần dư thứ n của chuỗi số.

Ví dụ **5.1.8.** Khảo sát tính hội tụ/phân kỳ của chuỗi số $\frac{1}{2} - \frac{2}{2^2+1} + \frac{3}{3^2+1} - \frac{4}{4^2+1} ...$

Bài giải

Chuỗi đã cho là chuỗi đan dấu có số hạng tổng quát là $u_n = \frac{n}{n^2+1}$ và vì $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{2}{2^2+1} = \frac{1}{2+1/2}$, $u_3 = \frac{3}{3^2+1} = \frac{1}{3+1/3}$, $u_4 = \frac{4}{4^2+1} = \frac{1}{4+1/4}$, … nên $u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > \ldots$ nên điều kiện thứ nhất của Dấu hiệu Leibniz thỏa mãn. Mặt khác $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+\frac{1}{n}} = 0$ nên điều kiện thứ hai của Dấu hiệu Leibniz cũng thỏa mãn. Do đó theo Dấu hiệu Leibniz thì chuỗi hội tụ.

Ví dụ **5.1.9.** Xét chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, ta có $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots$ hay $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$ và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ hội tụ theo Dấu hiệu Leibniz, trong khi chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ là chuỗi điều hòa nên phân kỳ. Do đó, chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ là chuỗi số hội tụ có điều kiện.

5.2. Chuỗi hàm

5.2.1. Định nghĩa

Chuỗi $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, trong đó các số hạng của chuỗi là hàm số của x, được gọi là chuỗi hàm.

Tập hợp những giá trị của x mà các hàm $u_n(x)$ ($\forall n \geq 1$) xác định và chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ, được gọi là miền hội tụ của chuỗi hàm và ký hiệu là X. Mỗi giá trị của miền hội tụ X tương ứng với một giá trị xác định của giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ với $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_n(x)$ được gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi hàm. Như vậy, giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ là hàm số của x, ký hiệu là S(x) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, được gọi là tổng của chuỗi hàm.

$R_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) - S_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$, được gọi là phần dư thứ n của chuỗi hàm.

Chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ trong miền hội tụ X, được gọi là hội tụ đều trong miền X nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ bé tùy ý cho trước, mà tìm được số $n_0 \in \mathbf{N}^*$ để với $n \geq n_0$ thì $|R_n(x)| < \varepsilon$ với $\forall x \in X$.

Ví dụ **5.2.1.** Cho chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ với $u_n(x) = \frac{1}{2n-1}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^n$. Xét sự hội tụ của của chuỗi tại x = 0 và x = 1.

Bài giải. Tại x = 0 thì $u_n(0) = \frac{1}{2n-1}\left(\frac{4-0}{7.0+2}\right)^n = \frac{2^n}{2n-1}$, khi đó chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ trở thành chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2n-1}$. Ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(0)}{u_n(0)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2(n+1)-1}\bigg/\frac{2^n}{2n-1} = 2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1} =$

$2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = 2.\frac{2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = 2.\frac{2-0}{2+0} = 2 = D > 1$, theo Quy tắc D'Alembert thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2n-1}$ phân kỳ.

Tại x = 1 thì $u_n(1) = \frac{1}{2n-1}\left(\frac{4-1}{7.1+2}\right)^n = \frac{1}{3^n(2n-1)}$, khi đó chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ trở thành chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n(2n-1)}$. Ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(1)}{u_n(1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^{n+1}[2(n+1)-1]}\bigg/\frac{1}{3^n(2n-1)} = \frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1} =$

$$\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}.\frac{2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}.\frac{2-0}{2+0}=\frac{1}{3}=D<1,$$ theo Quy tắc D'Alembert thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n(2n-1)}$ hội tụ.

5.2.2. Tiêu chuẩn hội tụ đều của chuỗi hàm

Tiêu chuẩn Cauchy. Chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ trong miền hội tụ X, sẽ hội tụ đều trong miền X khi và chỉ khi với $\forall\varepsilon > 0$ bé tùy ý cho trước, nếu tìm được số $n_0\in$ **N*** sao cho khi $p > q \geq n_0$ thì $\left|S_p(x)-S_q(x)\right|=\left|\sum_{k=q+1}^{p}u_k(x)\right|<\varepsilon$ với $\forall x\in X$.

Tiêu chuẩn Weierstrass. Nếu các hàm số $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$, …, $u_n(x)$, … trong miền X có giá trị tuyệt đối không vượt quá các số dương a_1, a_2, a_3, …, a_n, … tương ứng, đồng thời chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ hội tụ thì chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ hội tụ đều trong miền X.

Cần lưu ý rằng, Tiêu chuẩn Weierstrass chỉ là điều kiện đủ để một chuỗi hàm hội tụ đều trên miền X.

Ví dụ **5.2.2.** Chứng minh chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ với $u_n(x)=\frac{\sin^n nx}{n\sqrt{n}}$ hội tụ tuyệt đối và đều trên **R** = $(-\infty,+\infty)$.

Bài giải. Hiển nhiên $\left|u_n(x)\right|=\left|\frac{\sin^n nx}{n\sqrt{n}}\right|\leq\frac{1}{n\sqrt{n}}=\frac{1}{n^{3/2}}=a_n$ với $\forall n \geq 1$ và với $\forall x\in$ **R**. Ta đã biết chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ với $p=\frac{3}{2}>1$ là chuỗi hội tụ, do đó chuỗi dương $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin^n nx}{n\sqrt{n}}\right|$ hội tụ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^n nx}{n\sqrt{n}}$ hội tụ, đồng thời hội tụ tuyệt đối; hơn nữa theo Tiêu chuẩn Weierstrass thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^n nx}{n\sqrt{n}}$ hội tụ đều trên **R**.

5.2.3. Tính chất của chuỗi hàm hội tụ đều

(1) Nếu mọi số hạng $u_n(x)$ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ là các hàm liên tục trong miền X, đồng thời chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ hội tụ đều trong miền X thì tổng S(x) của chuỗi hàm cũng là hàm liên tục trong miền X.

(2) Nếu mọi số hạng $u_n(x)$ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ là các hàm liên tục trong miền X, đồng thời chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ hội tụ đều trong miền X và có tổng là S(x) thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_a^b u_n(x)dx\right]=\int_a^b\left[\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right]dx$ hội tụ và có tổng là $\int_a^b S(x)dx$ với $[a,b]\subset X$, tức là $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_a^b u_n(x)dx\right]=\int_a^b\left[\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right]dx=\int_a^b S(x)dx$ với $\forall[a,b]\subset X$.

(3) Nếu các hàm số $u_n(x)$ với $\forall n \geq 1$ xác định, khả vi trong miền X nào đó và nếu chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ hội tụ đều trong miền X thì tổng của nó bằng S'(x), với S(x) là tổng của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, tức là $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]' = S'(x)$ trong miền X.

5.2.4. Chuỗi lũy thừa

5.2.4.1. Định nghĩa

Chuỗi lũy thừa là chuỗi hàm có dạng $a_0 + a_1(x-a) + ... + a_n(x-a)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, trong đó a, a_0, a_1, …, a_n, … là các số thực.

5.2.4.2. Định lý Abel (tính chất cơ bản của chuỗi lũy thừa)

Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ hội tụ tại $x = x_0$ thì nó hội tụ, đồng thời hội tụ tuyệt đối với $\forall x$ thỏa mãn bất đẳng thức $|x - a| < |x - x_0|$.

Nhận xét. Không mất tính tổng quát, ta có thể nghiên cứu chuỗi lũy thừa dạng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ sau đó thay t = x – a; hoặc ngược lại, có thể nghiên cứu chuỗi lũy thừa dạng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ sau đó thay a = 0.

Hệ quả. Mọi chuỗi lũy thừa đều có một *khoảng hội tụ* (-R, R) có tâm là điểm a: |x – a| < R hay

a – R < x < a + R, bên trong khoảng đó chuỗi lũy thừa hội tụ tuyệt đối, còn ở ngoài khoảng đó thì chuỗi phân kỳ. Tại các đầu mút của khoảng hội tụ (x = a ± R) tính chất hội tụ/hội tụ tuyệt đối/hội tụ có điều kiện/phân kỳ tùy theo chuỗi lũy thừa cụ thể, mà để khẳng định được, cần phải khảo sát trực tiếp chuỗi tương ứng với giá trị của x tại hai đầu mút của khoảng hội tụ.

Số R bằng nửa độ dài của khoảng hội tụ của chuỗi lũy thừa được gọi là *bán kính hội tụ* của chuỗi lũy thừa. Trong trường hợp đặc biệt, bán kính hội tụ R có thể bằng 0 hoặc bằng vô hạn; nếu R = 0 thì chuỗi lũy thừa chỉ hội tụ tại điểm x = a, còn nếu R = +∞ thì chuỗi lũy thừa hội tụ trên toàn trục số thực **R**.

Tập hợp tất cả các giá trị của x mà chuỗi lũy thừa hội tụ, được gọi là *miền hội tụ* của chuỗi lũy thừa. Như vậy, khái niệm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa phù hợp với khái niệm miền hội tụ của chuỗi hàm vì chuỗi lũy thừa là một dạng của chuỗi hàm. *Để tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa, đầu tiên ta tìm bán kính hội tụ, sau đó khảo sát trực tiếp sự hội tụ của chuỗi tại hai đầu mút của khoảng hội tụ.*

5.2.4.3. Quy tắc tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa

Nếu $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho$ hoặc $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho\,(0 < \rho < +\infty)$ thì bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ được xác định như sau: $R = \begin{cases} 1/\rho & \text{khi } 0 < \rho < +\infty \\ 0 & \text{khi } \rho = +\infty \\ +\infty & \text{khi } \rho = 0 \end{cases}$

Ví dụ **5.2.3.** Khảo sát sự hội tụ của chuỗi lũy thừa $1!(x-5) + 2!(x-5)^2 + 3!(x-5)^3 + ...$

Bài giải. Đặt t = x – 5, số hạng tổng quát của chuỗi lũy thừa là $u_n(x) = n!(x-5)^n = n!t^n = a_n t^n$ với $a_n = n!$

Ta có $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = +\infty$ nên bán kính hội tụ của chuỗi là R = 0, do đó chuỗi hội tụ chỉ khi t = 0 ⇔ x – 5 = 0, tức là chuỗi hội tụ chỉ khi x = 5.

Ví dụ **5.2.4.** Khảo sát sự hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ với $a_n = \frac{1}{n!}$

Bài giải.

Ta có $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!} \Big/ \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n} = 0$ nên bán kính hội tụ của chuỗi là R = +∞, do đó chuỗi hội tụ với mọi giá trị của x∈(-∞,+∞).

Chú ý. Nếu chuỗi lũy thừa được viết dưới dạng $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ với $u_n(x) = a_n x^n$ thì theo Quy tắc D'Alembert hoặc Quy tắc Cauchy, ta có thể tìm được khoảng hội tụ theo bất đẳng thức $D = \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} < 1$ hoặc theo bất đẳng thức $C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} < 1$.

Ví dụ **5.2.5.** Khảo sát sự hội tụ của chuỗi lũy thừa $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ...$

Bài giải. Số hạng tổng quát của chuỗi lũy thừa là $u_n(x) = \frac{x^n}{n} = a_n x^n$ với $a_n = \frac{1}{n}$

Cách 1. $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \Big/ \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = 1$ nên bán kính hội tụ của chuỗi là $R = \frac{1}{\rho} = 1$, do đó chuỗi hội tụ với mọi giá trị của x thỏa mãn bất đẳng thức -1 < x < 1.

Tại x = -1, chuỗi trở thành chuỗi đan dấu $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + ...$ hội tụ theo Dấu hiệu Leibniz; còn tại x = 1, chuỗi trở thành chuỗi điều hòa $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ...$ là chuỗi phân kỳ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đang xét là -1 ≤ x < 1 hay [-1,1).

Cách 2. Ta có $D = \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right| \Big/ \left|\frac{x^n}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} |x|.\frac{n}{n+1} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = |x| \frac{1}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = |x|$. Từ đây suy ra, để chuỗi hội tụ thì D phải nhỏ hơn 1, tức là $D < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$. Do đó khoảng hội tụ của chuỗi là $-1 < x < 1$.

Tại hai đầu mút, cũng xét tương tự như ở Cách 1. Cuối cùng, tìm được miền hội tụ của chuỗi là -1 ≤ x < 1 hay [-1,1).

Ví dụ **5.2.6.** Khảo sát sự hội tụ của chuỗi lũy thừa $(x-2) + \frac{(x-2)^2}{2^2} + \frac{(x-2)^3}{3^2} + ...$

Bài giải. Số hạng tổng quát của chuỗi lũy thừa là $u_n(x) = \frac{(x-2)^n}{n^2} = a_n (x-2)^n$ với $a_n = \frac{1}{n^2}$, nếu đặt t = x – 2 thì chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ với $a_n = \frac{1}{n^2}$.

Cách 1. $\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\Big/\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = 1$ nên bán kính hội tụ của chuỗi là $R = \frac{1}{\rho} = 1$, do đó chuỗi hội tụ với mọi giá trị của t thỏa mãn bất đẳng thức -1 < t < 1 ⇔ -1 < x - 2 < 1 ⇔ 1 < x < 3 .

Tại x = 3, chuỗi trở thành $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...$ là chuỗi hội tụ vì chuỗi $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+...$ hội tụ khi p > 1; còn tại x = 1, chuỗi trở thành chuỗi đan dấu $-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}+...$ hội tụ tuyệt đối.

Vậy miền hội tụ của chuỗi là 1 ≤ x ≤ 3 hay [1,3].

Cách 2. Ta có $D = \lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} < 1 \Leftrightarrow D = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)^2}\right|\Big/\left|\frac{(x-2)^n}{n^2}\right| = \lim_{n\to\infty}|x-2|.\frac{n^2}{(n+1)^2} =$ $|x-2|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = |x-2|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} = |x-2|\frac{1}{\left(1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2} < |x-2|.1 = |x-2|$. Từ đây suy ra, để chuỗi hội tụ thì D phải nhỏ hơn 1, tức là $D<1 \Leftrightarrow |x-2|<1 \Leftrightarrow -1<x-2<1 \Leftrightarrow 1<x<3.$ Do đó khoảng hội tụ của chuỗi là $1<x<3.$

Tại hai đầu mút, cũng xét tương tự như ở Cách 1. Cuối cùng, tìm được miền hội tụ của chuỗi là 1 ≤ x ≤ 3 hay [1,3].

5.2.4.4. Tính chất của chuỗi lũy thừa

(1) Chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ đều trên mọi đoạn [a,b] nằm trong khoảng hội tụ của nó.

(2) Tổng S(x) của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ là hàm số liên tục trong khoảng hội tụ của nó.

(3) Có thể lấy tích phân từng số hạng của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ trên mọi đoạn [a,b] nằm trong khoảng hội tụ của nó: $\int_a^b\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_a^b a_n x^n dx.$

Đặc biệt, với $\forall x\in(-R,R)$ thì $\int_0^x\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ và chuỗi này cũng là chuỗi lũy thừa có khoảng hội tụ là (-R,R). Như vậy, nếu $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ thì $\int_0^x S(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$

(4) Có thể tính đạo hàm từng số hạng của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tại mọi điểm x thuộc khoảng hội tụ của nó: $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(a_n x^n\right)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ và chuỗi này cũng là chuỗi lũy thừa có khoảng hội tụ là (-R,R). Như vậy, nếu $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ thì $S'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$

Chú ý. Có thể lấy tích phân và tính đạo hàm từng số hạng của chuỗi lũy thừa vô số lần trong khoảng hội tụ của nó.

Ví dụ **5.2.7.** Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ và tính tổng S(x) của chuỗi trong miền hội tụ đó.

Bài giải. Ta viết chuỗi đã cho dưới dạng $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ với $a_n = n + 1$.

Ta có $\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)+1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1+2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{1+2.0}{1+0}=1$, do đó bán kính hội tụ của chuỗi là $R=\frac{1}{\rho}=1$, nên khoảng hội tụ của chuỗi là $-1 < x < 1$.

Tại x = -1 chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ trở thành chuỗi đan dấu $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ với $a_n = n + 1$, là chuỗi phân kỳ vì $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(n+1)=+\infty$, tức là vi phạm điều kiện cần của chuỗi hội tụ; còn tại x = 1 chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ trở thành chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ với $a_n = n + 1$ cũng là chuỗi phân kỳ vì $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(n+1)=+\infty$, tức là vi phạm điều kiện cần của chuỗi hội tụ.

Như vậy, miền hội tụ của chuỗi đã cho là $-1 < x < 1$ hay $(-1,1)$.

Để tính tổng $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ trong miền hội tụ $(-1,1)$ ta tích phân từ 0 đến x hai vế của đẳng thức trên: $\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\int_0^x t^n dt=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x^k=\lim_{n\to\infty}1.\frac{1-x^n}{1-x}=\frac{1-\lim_{n\to\infty}x^n}{1-x}=\frac{1-0}{1-x}=\frac{1}{1-x}$ vì $\lim_{n\to\infty}x^n=0$ khi $-1 < x < 1$. Do đó $S(x)=\left[\int_0^x S(t)dt\right]'=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$ trong miền hội tụ (-1,1) của chuỗi.

Ví dụ **5.2.8.** Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ và tính tổng S(x) của chuỗi trong miền hội tụ đó.

Bài giải. Ta viết chuỗi đã cho dưới dạng $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ với $a_n=\frac{1}{n}$.

Ta có $\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\Big/\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{1}{1+0}=1$, do đó bán kính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ là $R=\frac{1}{\rho}=1$, nên khoảng hội tụ của chuỗi là $-1 < x < 1$.

Tại $x = -1$: Chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ trở thành chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ theo Dấu hiệu Leibniz, còn tại x = 1: Chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ trở thành chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ là chuỗi phân kỳ.

Như vậy, miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ là $-1 \le x < 1$ hay $[-1,1)$.

Để tính tổng $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ trong miền hội tụ [-1,1) ta đạo hàm hai vế của đẳng thức trên: $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}x^k=\lim_{n\to\infty}1.\frac{1-x^n}{1-x}=\frac{1-\lim_{n\to\infty}x^n}{1-x}=\frac{1-0}{1-x}=\frac{1}{1-x}$ vì $\lim_{n\to\infty}x^n=0$ khi $-1\le x<1$.

$$\Rightarrow S(x)=\int_0^x S'(t)dt=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln|1-t|\Big|_0^x=-\ln(1-x)=\ln\frac{1}{1-x}$$ trong miền hội tụ [-1,1) của chuỗi.

5.2.4.5. Khai triển hàm số thành chuỗi lũy thừa

Mọi hàm số f(x) khả vi vô hạn lần trong khoảng $|x-a|<R\Leftrightarrow a-R<x<a+R$ đều có thể khai triển được thành chuỗi lũy thừa vô hạn dạng Taylor $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ trong khoảng này và hội tụ tới nó. Khi a = 0, chuỗi nhận được là chuỗi Mac Laurin $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Ví dụ **5.2.9.** Khai triển hàm $f(x)=\sin^2x$ thành chuỗi lũy thừa theo x.

Bài giải. Ta thấy $f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x\Rightarrow f^{(n)}(x)=2^{n-1}\sin\left[2x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right]$ với $n\ge 1$.

$$\Rightarrow f^{(n)}(0)=2^{n-1}\sin\left[2.0+(n-1)\frac{\pi}{2}\right]=2^{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{2}=\begin{cases}(-1)^{k-1}2^{2k-1} & \text{khi}\quad n=2k\\ 0 & \text{khi}\quad n=2k-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\sin^2x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\frac{2}{2!}x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\frac{2^5}{6!}x^6-\frac{2^7}{8!}x^8+\dots\ (-\infty<x<+\infty)$$

Nhận xét. Qua ví dụ trên ta thấy, việc sử dụng trực tiếp công thức Taylor để khai triển một hàm số thành chuỗi lũy thừa, thì việc tính toán khá cồng kềnh. Trong nhiều trường hợp, người ta thường sử dụng các khai triển dạng công thức Mac Laurin của một số hàm sơ cấp cơ bản sau đây để khai triển một hàm số thành chuỗi lũy thừa:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots\ (-\infty<x<+\infty)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\dots\ (-\infty<x<+\infty)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\dots\ (-\infty<x<+\infty)$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)}+\dots\ (-1\le x\le 1)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\dots\ (-1<x\le 1)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\dots+x^n+\dots\ (-1<x<1)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\dots$$ có khoảng hội tụ

$$\begin{cases}-1<x<1 & \text{khi}\quad \alpha\le -1\\ -1<x\le 1 & \text{khi}\quad -1<\alpha<0\\ -1\le x\le 1 & \text{khi}\quad \alpha\ge 0\end{cases}$$

Chẳng hạn, như ở Ví dụ 5.2.9 ngay ở trên, chúng ta có thể thực hiện như sau:

Biến đổi $f(x)=\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$ và thay cos2x bằng khai triển chuỗi lũy thừa của hàm số

$$\cos t=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}...+(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!}+...\ (-\infty<x<+\infty) \text{ với } t=2x$$

$$\cos 2x=1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}...+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+...$$

Sau đó thay khai triển trên vào biểu thức $f(x)=\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$ thì cũng nhận được kết quả giống như kết quả đã nhận được ở trên là

$$f(x)=\sin^2 x=\frac{2}{2!}x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\frac{2^5}{6!}x^6-\frac{2^7}{8!}x^8+...(-\infty<x<+\infty)$$

Ví dụ **5.2.10.** Khai triển các hàm $f(x) = (1-x)^{\alpha}$ thành chuỗi lũy thừa theo x.

Bài giải.

Thay x bởi –x vào khai triển đã biết $(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+...$ ta nhận được $(1-x)^{\alpha}=1-\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+...$

5.2.5. Chuỗi Fourier (*Tự đọc trong học liệu bắt buộc* [1]).

BÀI TẬP

5.1. Khảo sát tính hội tụ/phân kỳ của các chuỗi số

(a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+...$

(b) $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\left(\frac{4}{9}\right)^4+...$

(c) $\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{4}{11}\right)^3+\left(\frac{5}{15}\right)^4+...$

(d) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...$

(e) $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...$

(f) $\frac{1}{1.3.5}+\frac{1}{3.5.7}+\frac{1}{5.7.9}+...$

(g) $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+...$

(h) $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3\sqrt{3}}+\frac{4}{9}+\frac{5}{9\sqrt{3}}+...$

(i) $0{,}6+0{,}51+0{,}501+0{,}5001+...$

(k) $\frac{10}{1!}+\frac{10^2}{2!}+\frac{10^3}{3!}+...$

(l) $1{,}1-1{,}01+1{,}001-1{,}0001+...$

(m) $1-1+1-1+...$

5.2. Khảo sát tính hội tụ/phân kỳ của các chuỗi số

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n+1}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4.2^n-3}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(2^n+1)^2}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ với $p<1$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-1}$ với $m>1$

5.3. Áp dụng dấu hiệu so sánh (1) của chuỗi số dương để xét sự hội tụ của các chuỗi số

(a) $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 5}+...$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n+1}$

5.4. Áp dụng dấu hiệu so sánh (2) của chuỗi số dương để xét sự hội tụ của các chuỗi số

(a) $\frac{2+1}{5+1}+\frac{2^2+1}{5^2+1}+\frac{2^3+1}{5^3+1}+...$

(b) $\frac{1}{2.1-1}+\frac{\sqrt{2}}{2.2-1}+\frac{\sqrt{3}}{2.3-1}+\frac{\sqrt{4}}{2.4-1}+...$

5.5. Áp dụng dấu hiệu so sánh (3) của chuỗi số dương để xét sự hội tụ của các chuỗi số

(a) $\frac{1}{9\ln 9}+\frac{1}{19\ln 19}+\frac{1}{29\ln 29}+...$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ với $p>1$

5.6. Áp dụng Quy tắc D'Alembert hoặc Quy tắc Cauchy để xét sự hội tụ của các chuỗi số

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n$ (b) $3+2{,}1^2+2{,}01^3+2{,}001^4+...$

(c) $\frac{10}{11}+\left(\frac{10}{11}\right)^2.2^5+\left(\frac{10}{11}\right)^3.3^5+\left(\frac{10}{11}\right)^4.4^5+...$ (d) $\frac{11}{10}+\left(\frac{11}{10}\right)^2.\frac{1}{2^5}+\left(\frac{11}{10}\right)^3.\frac{1}{3^5}+\left(\frac{11}{10}\right)^4.\frac{1}{4^5}+...$

5.7. Nghiên cứu sự hội tụ và xác lập đặc tính của sự hội tụ (hội tụ tuyệt đối, hội tụ có điều kiện) của các chuỗi đan dấu sau

(a) $\frac{1}{2}-\frac{4}{5}+\frac{7}{8}-\frac{10}{11}+...$ (b) $1{,}1-1{,}02+1{,}003-1{,}0004+...$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2+n+1}$

5.8. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}$.

5.9. Nghiên cứu sự hội tụ của các chuỗi:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ (b) $2x^5+\frac{4x^{10}}{3}+\frac{8x^{15}}{5}+\frac{16x^{20}}{7}+...$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n(x-2)^{2n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}$

5.10. Tìm tổng của các chuỗi:

(a) $\frac{1}{a}+\frac{2x}{a^2}+\frac{3x^2}{a^3}+\frac{4x^3}{a^4}+...$ với $a>0$ (b) $\frac{x^2}{2a}+\frac{x^3}{3a^2}+\frac{x^4}{4a^3}+...$ với $a>0$

(c) $\frac{1.2}{a^2}+\frac{2.3x}{a^3}+\frac{3.4x^2}{a^4}+...$ với $a>0$ (d) $-2x+4x^3-6x^5+8x^7-...$

5.11. Khai triển hàm f(x) thành chuỗi lũy thừa

(a) $f(x)=e^{-x^2}$ theo lũy thừa của x (b) f(x) = lnx theo lũy thừa của (x – 1)

(c) $f(x)=\frac{1}{x}$ theo lũy thừa của (x – 2) (d) f(x) = ln(x + a) với a > 0, theo lũy thừa của x