

4.6. Chứng minh các công thức

$$(a) \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0 & \text{khi } m \neq n \\ \pi & \text{khi } m = n \end{cases} \quad (m, n \in \mathbf{N}^*)$$

$$(b) L_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx dx = \frac{\pi}{2^{n+1}} \quad (n \in \mathbf{N})$$

$$(c) K_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin nx dx = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k} \quad (n \in \mathbf{N}^*)$$

$$(d) I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n} x dx = (-1)^n \left[\frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{i-1}}{2i-1} \right] \quad (n \in \mathbf{N})$$

$$(e) \text{Hàm Beta } B_{m,n} = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} \quad ((m, n \in \mathbf{N}^*))$$

4.7. Tìm chu vi và diện tích của hình giới hạn bởi các đường

$$(a) x + y = 0, y = 2x - x^2$$

$$(b) y = x^2, y = x^2/2, y = 2x$$

$$(c) y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 8, x \geq 0$$

$$(d) y = x^2 + 2x - 3, y = -x^2 - 2x + 3$$

$$(e) x = -2y^2, x = 1 - 3y^2$$