Chương 4. PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN

4.1. Nguyên hàm và tích phân không xác định

4.1.1. Định nghĩa, bảng các nguyên hàm cơ bản

Định nghĩa **4.1.1.** Cho hàm số f(x) xác định trong (a,b); ta nói rằng hàm số F(x) xác định trong (a,b) là một nguyên hàm của f(x) nếu F(x) khả vi trong (a,b) và F'(x) = f(x) hay dF(x) = f(x)dx với $\forall x \in (a,b)$.

Ví dụ **4.1.1.**

(a) Nếu hàm số f(x) = x^3 thì một nguyên hàm của nó là $F(x) = \frac{x^4}{4}$ vì $F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3 = f(x)$

(b) Nếu hàm số f(x) = 3 + cos5x thì một nguyên hàm của nó là $F(x) = 3x + \frac{\sin 5x}{5}$ vì $F'(x) = \left(3x + \frac{\sin 5x}{5}\right)' = 3 + \cos 5x = f(x)$

Định lý **4.1.1.** Giả sử hàm số F(x) khả vi trong (a,b) và F(x) là nguyên hàm của hàm số f(x) với $\forall x \in (a,b)$. Khi đó:

(1) Với mọi hằng số C thì F(x) + C cũng là nguyên hàm của hàm số f(x) với $\forall x \in (a,b)$;

(2) Ngược lại, mọi nguyên hàm của hàm số f(x) với $\forall x \in (a,b)$ đều có dạng F(x) + C.

Định nghĩa **4.1.2.** Cho hàm số f(x) xác định trong (a,b), giả sử hàm số F(x) xác định trong (a,b) là một nguyên hàm của f(x) trong (a,b) thì họ các nguyên hàm F(x) + C (C là một hằng số tùy ý) của f(x) trong (a,b) được gọi là *tích phân không xác định* của f(x) với $\forall x \in (a,b)$ và ký hiệu là $\int f(x)dx$, trong đó dx là vi phân của đối số x.

Ký hiệu $\int$ gọi là *dấu tích phân*, f(x) gọi là *hàm số lấy tích phân hoặc hàm số dưới dấu tích phân*, x gọi là *biến lấy tích phân*, f(x)dx gọi là *biểu thức dưới dấu tích phân*.

Chú ý. Khi cần sử dụng khái niệm nguyên hàm F(x) của hàm số f(x) trên [a,b] thì có nghĩa là F(x) là nguyên hàm của f(x) với $\forall x \in (a,b)$ và F'(a+0) = f(a), F'(b–0) = f(b).

Định lý **4.1.2.** Mọi hàm số f(x) xác định, liên tục trên [a,b] có nguyên hàm trên [a,b].

Các tính chất của nguyên hàm

(1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

(2) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

(3) $\int dF(x) = F(x) + C$ với C là hằng số tùy ý

(4) $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$ với A ≠ 0 là một hằng số tùy ý

(5) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(6) Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ và u = φ(x) thì $\int f(u)du = F(u) + C$ với C là hằng số tùy ý

Bảng các nguyên hàm cơ bản

(1) $\int 0dx = C$

(2) $\int 1.dx = \int dx = x + C$

(3) $\int x^\alpha dx = \begin{cases} \ln|x| + C & \text{khi} \quad \alpha = -1 \\ \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C & \text{khi} \quad \alpha \neq -1 \end{cases}$

$$(4)\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$(5)\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$(6)\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \Rightarrow \int e^x dx = e^x + C$$

$$(7)\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$(8)\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$(9)\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$(10)\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

4.1.2. Các phương pháp tính tích phân không xác định

4.1.2.1. Biến đổi tích phân về dạng các nguyên hàm cơ bản

Đây là phương pháp tính tích phân tự nhiên nhất, khi đó ta biến đổi hàm số lấy tích phân và biến lấy tích phân, tức là biến đổi biểu thức dưới dấu tích phân về dạng có thể sử dụng các nguyên hàm cơ bản.

Ví dụ **4.1.2.** Tính các tích phân

$$(a)\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)dx = 2\int x^3 dx - 5\int x^2 dx + 7\int x dx - 3\int dx =$$

$$2.\frac{1}{4}x^4 - 5.\frac{1}{3}x^3 + 7.\frac{1}{2}x^2 - 3x + C = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 3x + C$$

$$(b)\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{3}}\right)^2 dx = \int \left(x + 2x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{2}{3}}\right)dx = \int x dx + 2\int x^{\frac{1}{6}} dx + \int x^{-\frac{2}{3}} dx =$$

$$\frac{1}{2}x^2 + 2\frac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1} + \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C = \frac{1}{2}x^2 + \frac{12}{7}x\sqrt[6]{x} + 3\sqrt[3]{x} + C$$

$$(c)\int a^x b^{2x} c^{3x} dx = \int (ab^2c^3)^x dx = \frac{(ab^2c^3)^x}{\ln(ab^2c^3)} + C$$

$$(d)\int x\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{\frac{1}{2}}(2xdx) = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{\frac{1}{2}} d(1+x^2) =$$

$$\frac{1}{2}.\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}(1+x^2)\sqrt{1+x^2} + C$$

$$(e)\int (x^2 - 3x + 1)^{10}(2x-3)dx = \int (x^2 - 3x + 1)^{10}\left[(2x-3)dx\right] =$$

$$\int (x^2 - 3x + 1)^{10} d(x^2 - 3x + 1) = \frac{(x^2 - 3x + 1)^{11}}{11} + C$$

$$(f)\int \frac{\ln^4 x}{x}dx = \int (\ln x)^4\left(\frac{dx}{x}\right) = \int (\ln x)^4 d(\ln x) = \frac{1}{5}(\ln x)^5 + C = \frac{\ln^5 x}{5} + C$$

$$(g)\int e^{3\cos x}\sin x dx = \frac{1}{3}\int e^{3\cos x}(3\sin x dx) = -\frac{1}{3}\int e^{3\cos x} d(3\cos x) = -\frac{1}{3}e^{3\cos x} + C$$

$$(h)\int (\tan x + \cot x)^2 dx = \int (\tan^2 x + 2\tan x\cot x + \cot^2 x)dx = \int (\tan^2 x + 2 + \cot^2 x)dx =$$

$$\int(\tan^2 x+1+\cot^2 x+1)dx=\int(\tan^2 x+1)dx+\int(\cot^2 x+1)dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=$$
$$\tan x-\cot x+C$$

4.1.2.2. Đổi biến

Trong nhiều trường hợp, khi tính tích phân $\int f(x)dx,$ nếu để biến lấy tích phân là x thì không thấy được tích phân cần tính đó gần với dạng nào trong số các nguyên hàm cơ bản, khi đó cần tìm cách đổi sang biến mới, để hy vọng với biến mới thì tích phân cần tính có dạng gần với các nguyên hàm cơ bản. Không thể có một quy tắc cụ thể nào để thực hiện phép đổi biến thích hợp được, tuy nhiên, cũng có thể đưa ra hai dạng đổi biến thường dùng sau đây:

(1) Đặt biến cũ $x = \varphi(t)$ với $\varphi(t)$ là hàm đơn điệu, khả vi liên tục đối với biến mới t. Khi đó, công thức đổi biến là $\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]d[\varphi(t)]=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

(2) Đặt biến mới $u = \psi(x)$ với $\psi(x)$ là hàm đơn điệu, khả vi liên tục đối với biến cũ x. Khi đó, công thức đổi biến là $\int f[\psi(x)]\psi'(x)dx=\int f[\psi(x)]d[\psi(x)]=\int f(u)du$.

Sau khi tìm được nguyên hàm đối với với biến mới, cần biểu diễn kết quả trở về biến cũ.

Ví dụ **4.1.3.** Tính các tích phân

(a) $\int\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$, đặt $t=\sqrt[3]{x}\Rightarrow x=\varphi(t)=t^3\Rightarrow\begin{cases}dx=\varphi'(t)dt=3t^2dt\\ \dfrac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}=\dfrac{\sin t}{t^2}\end{cases}$

$$\Rightarrow\int\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int\frac{3t^2\sin t dt}{t^2}=3\int\sin t dt=-3\cos t+C=-3\cos\sqrt[3]{x}+C$$

(b) $\int(2x+3)^{20}dx$, có thể tính tích phân này mà không cần đổi biến, tức là chỉ cần khai triển biểu thức $(2x + 3)^{20}$ theo Công thức nhị thức Newton và lấy tích phân từng số hạng là được, tuy nhiên cách này có khối lượng tính toán lớn. Đơn giản hơn, ta có thể đổi biến mới $t = \psi(x) = 2x + 3 \Rightarrow dt = d[\psi(x)] = \psi'(x)dx = 2dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}dt$

$$\Rightarrow\int(2x+3)^{20}dx=\int t^{20}.\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int t^{20}dt=\frac{1}{2}.\frac{t^{21}}{21}+C=\frac{t^{21}}{42}+C=\frac{(2x+3)^{21}}{42}+C$$

Nhận xét. Qua ví dụ (b) ta có thể tổng quát hóa một một trường hợp đổi biến như sau: Giả sử ta cần tích tích phân $\int f(ax+b)dx$ với $a \neq 0$, mà một nguyên hàm của tích phân $\int f(x)dx$ đã biết là F(x), khi đó ta đổi biến $t = ax + b \Rightarrow dt = (ax + b)'dx = adx \Rightarrow dx=\frac{1}{a}dt$, do đó

$$\int f(ax+b)dx=\int f(t).\frac{1}{a}dt=\frac{1}{a}\int f(t)dt=\frac{1}{a}F(t)+C=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$$

Khi tính tích phân $\int f(ax+b)dx$, trong thực tế có thể không cần đổi biến ax + b = t, mà chỉ cần để ý rằng $dx=\frac{1}{a}d(ax+b)$ và như vậy $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)=F(ax+b)+C$, chẳng hạn, cần tính tích phân $\int\sin(ax+b)dx$ với $a \neq 0$, ta có

$$\int\sin(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int\sin(ax+b)d(ax+b)=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$$

(c) $\int x^2\sqrt{x^3+5}dx$, đặt $\sqrt{x^3+5}=t\Rightarrow x^3+5=t^2\Rightarrow d(x^3+5)=d(t^2)\Rightarrow(x^3+5)'dx=(t^2)'dt$

$$\Rightarrow 3x^2dx=2tdt\Rightarrow x^2dx=\frac{2}{3}tdt\Rightarrow\int x^2\sqrt{x^3+5}dx=\int\sqrt{x^3+5}(x^2dx)=\int t.\frac{2}{3}tdt=\frac{2}{3}\int t^2dt=$$

$$\frac{2}{3}.\frac{1}{3}t^3 + C = \frac{2}{9}t^3 + C = \frac{2}{9}\left(\sqrt{x^3+5}\right)^3 + C = \frac{2}{9}(x^3+5)\sqrt{x^3+5} + C$$

Nhận xét. Qua ví dụ (c) ta có thể tổng quát hóa một một trường hợp đổi biến như sau: Nếu hàm dưới dấu tích phân là tích của hai thừa số, một thừa số phụ thuộc vào hàm ψ(x) nào đó, còn thừa số kia là ψ'(x) (có thể sai khác nhau một hệ số không đổi) thì dùng phép đổi biến ψ(x).

(d) $\int \frac{(2\ln x+5)^3}{x}dx$, ta thấy đạo hàm của thừa số (2lnx + 5) là $\frac{2}{x}$ còn thừa số kia là $\frac{1}{x}$ khác với đạo hàm của thừa số (2lnx + 5) chỉ bởi hệ số 2 nên theo nhận xét trên ta đổi biến 2lnx + 5 = ψ(x) = t.

Khi đó d(2lnx + 5) = dt ⇒(2lnx + 5)'dx = dt ⇒ $\frac{2}{x}dx = dt \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}dt$, do đó

$$\int \frac{(2\ln x+5)^3}{x}dx = \int (2\ln x+5)^3\frac{dx}{x} = \int t^3.\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int t^3dt = \frac{1}{2}.\frac{t^4}{4} + C = \frac{t^4}{8} + C = \frac{(2\ln x+5)^4}{8} + C$$

(e) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$, đổi biến f(x) = t ⇒ d[f(x)] = dt hay f'(x)dx = dt, do đó

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C$$

chẳng hạn, cần tính tích phân $\int \frac{xdx}{x^2+1}$, ta thấy nếu đặt f(x) = x^2 + 1 thì $x = \frac{1}{2}f'(x)$, do đó tích phân

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C = \ln|x^2+1| + C = \ln(x^2+1) + C$$

(f) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx$, đổi biến f(x) = t ⇒ d[f(x)] = dt hay f'(x)dx = dt, do đó

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = \int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}t^{-\frac{1}{2}+1} + C = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{f(x)} + C$$

Ta vẫn nhận được kết quả như trên nếu đổi biến $\sqrt{f(x)} = t$

4.1.2.3. Tích phân từng phần

Theo tính chất của vi phân cấp 1: d(uv) = udv + vdu hay udv = d(uv) – vdu ⇒ $\int udv = \int d(uv) - \int vdu = uv - \int vdu$ với u = φ(x) và v = ψ(x) là các hàm khả vi liên tục của x. Nhờ công thức này mà việc lấy tích phân $\int udv$ được đưa về việc lấy tích phân $\int vdu$ có khả năng đơn giản hơn tích phân $\int udv$ hoặc cùng dạng với tích phân $\int udv$.

Muốn vậy, để làm hàm u ta lấy hàm mà đạo hàm của nó đơn giản hơn, còn dv là phần còn lại của biểu thức dưới dấu tích phân mà tích phân của phần này, hoặc là đã biết hoặc có thể tìm được. Chẳng hạn, đối với các tích phân dạng $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin axdx$, $\int P(x)\cos axdx$, trong đó P(x) là đa thức thì nên đặt u = P(x) và dv tương ứng là các biểu thức e^{ax}dx, sinaxdx, cosaxdx; đối với các tích phân dạng $\int P(x)\ln xdx$, $\int P(x)\arcsin axdx$, $\int P(x)\arccos axdx$, trong đó P(x) là đa thức thì nên đặt u tương ứng bằng các hàm số lnx, arcsinx, arccosx và dv = P(x)dx.

Ví dụ **4.1.4.** Tính các tích phân

(a) $\int \ln xdx$, đặt u = lnx còn dv = dx, khi đó $du = \frac{dx}{x}$ và v = x ⇒ $\int \ln xdx = \int udv = uv - \int vdu =$

$$x\ln x - \int x.\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C = x\ln\frac{x}{e} + C$$

(b) $\int \arctan xdx$, đặt u = arctanx còn dv = dx, khi đó $du = \frac{dx}{1+x^2}$ và v = x

$$\Rightarrow \int \arctan x dx = \int u dv = uv - \int v du = x\arctan x - \int \frac{x dx}{1+x^2} =$$

$$x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

(c) $\int x\sin x dx$, đặt u = x còn dv = sinxdx, khi đó du = dx và v = –cosx

$$\Rightarrow \int x\sin x dx = \int u dv = x(-\cos x) - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \sin x + C$$

Nhận xét. Nếu chọn các biểu thức u và dv không khéo, chẳng hạn, u = sinx, dv = xdx, thì du = cosxdx, $v = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow \int x\sin x dx = \int u dv = \frac{1}{2}x^2\sin x - \frac{1}{2}\int x^2\cos x dx$ sẽ dẫn đến tích phân khác phức tạp hơn tích phân xuất phát!

(d) $\int x^2e^x dx$, chọn u = x^2, dv = e^xdx, khi đó du = 2xdx, v = e^x

$$\Rightarrow \int x^2e^x dx = \int u dv = x^2e^x - 2\int xe^x dx$$

Như vậy, ta đã hạ được bậc của x xuống một đơn vị. Để tính $\int xe^x dx$ ta lại tiếp tục sử dụng phương pháp tích phân từng phần. Đặt u = x, dv = e^xdx, khi đó du = dx, v = e^x

$$\Rightarrow \int xe^x dx = \int u dv = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

Do đó $\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2(xe^x - e^x) + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$

(e) $I = \int e^x \sin x dx$, đặt u = e^x, dv = sinxdx, khi đó du = e^xdx, v = -cosx

$$\Rightarrow I = \int e^x\sin x dx = \int u dv = e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x)dx = -e^x\cos x + \int e^x\cos x dx$$

Đến đây, chúng ta có cảm giác rằng, việc sử dụng phương pháp tích phân từng phần không đến đích được vì tích phân vừa nhận được không đơn giản hơn tích phân xuất phát. Tuy vậy, ta tiếp tục sử dụng phương pháp tích phân từng phần đối với tích phân $I = \int e^x\cos x dx$. Đặt u = e^x, dv = cosxdx, khi đó du = e^xdx, v = sinx $\Rightarrow \int e^x\cos x dx = \int u dv = e^x\sin x - \int e^x\sin x dx = e^x\sin x - I$.

Do đó I = -e^xcosx + e^xsinx – I $\Rightarrow I = \int e^x\sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$

(f) Cách tính tích phân I ở trên gợi ý cho ta việc tính đồng thời hai tích phân $\begin{cases} I = \int e^x\sin x dx \\ J = \int e^x\cos x dx \end{cases}$

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần lần lượt đối với các tích phân I, J tương tự như ở Ví dụ (e) ta được hệ 2 phương trình đối với 2 ẩn I, J là $\begin{cases} I - J = -e^x\cos x \\ I + J = e^x\sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C_1 \\ J = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C_2 \end{cases}$

Ví dụ **4.1.5.** Tìm công thức truy hồi để tính tích phân $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ với a ≠ 0 và n∈**N***

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(a^2+x^2)-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n} =$$

$$\frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x(xdx)}{(x^2+a^2)^n}$$

Đặt u = x, $dv = \frac{xdx}{(x^2+a^2)^n} \Rightarrow$ du = dx và $\int dv = \int \frac{xdx}{(x^2+a^2)^n} \Rightarrow v = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2+a^2)^n} =$

$$\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{2}\int(x^2+a^2)^{-n}d(x^2+a^2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-n+1}(x^2+a^2)^{-n+1}=-\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$\Rightarrow I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{a^2}\int udv=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{a^2}\left[uv-\int vdu\right]=$$

$$\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{a^2}\left[uv-\int vdu\right]=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{a^2}\left[-\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{2(n-1)}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right]=$$

$$\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{2a^2(n-1)}I_{n-1}=\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{a^2}\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}$$

Như vậy, ta tìm được công thức truy hồi $I_n=\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{a^2}\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}$ với $n\ge 2$ và

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\int\frac{\frac{dx}{a^2}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

Qua một số ví dụ và bài tập, chúng ta bổ sung một số tích phân thường gặp vào Bảng các nguyên hàm cơ bản để dùng khi cần.

Bảng các nguyên hàm cơ bản (bổ sung)

(11) $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$

(12) $\int\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=2\sqrt{f(x)}+C$

(13) $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$ với $a\neq 0$

(14) $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$ với $a\neq 0$

(15) $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$ với $a\neq 0$

(16) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C$ với $a\neq 0$

(17) $\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$

(18) $\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$

(19) $\int\tan x dx=-\ln|\cos x|+C$

(20) $\int\cot x dx=\ln|\sin x|+C$

4.1.3. Tính tích phân các phân thức hữu tỷ

4.1.3.1. Tính tích phân các phân thức hữu tỷ đơn giản nhất

Phân thức hữu tỷ đơn giản nhất là các phân thức thực sự có dạng sau:

(I) $\frac{A}{x-a}$

(II) $\frac{A}{(x-a)^m}$ trong đó $m\in\mathbf{N}^*\backslash\{1\}$

(III) $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ trong đó $\dfrac{p^2}{4}-q<0,$ tức là tam thức bậc hai x^2+px+q không có nghiệm thực

(IV) $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ trong đó $n\in\mathbf{N}^*\backslash\{1\}$ và $\dfrac{p^2}{4}-q<0,$ tức là tam thức bậc hai x^2+px+q không có nghiệm thực.

Trong cả bốn trường hợp trên, các số A, B, a, p, q là các số thực. Các phân thức nói trên được gọi tương ứng là các phân thức hữu tỷ đơn giản nhất loại I, II, III và IV.

Tính tích phân phân thức loại I: $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx = A\int\frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a|+C$

Tính tích phân phân thức loại II: $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^m}dx = A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^m} = A\int(x-a)^{-m}d(x-a) =$

$$\frac{A}{-m+1}(x-a)^{-m+1}+C = \frac{A}{1-m}.\frac{1}{(x-a)^{m-1}}+C$$

Tính tích phân phân thức loại III: $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$

- Bước 1. Tính tích phân $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+px+q}$

Ta biến đổi $x^2+px+q = x^2+2.\dfrac{p}{2}x+\left(\dfrac{p}{2}\right)^2+q-\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 = \left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+q-\dfrac{p^2}{4}$, vì $\dfrac{p^2}{4}-q<0$ nên có thể đặt $q-\dfrac{p^2}{4}=a^2,$ do đó $x^2+px+q=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+a^2.$

Đặt $t=x+\dfrac{p}{2}\Rightarrow dt=dx$ và $x^2+px+q=t^2+a^2 \Rightarrow \displaystyle\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a}+C$, trở về biến cũ ta được $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$

- Bước 2. Tính tích phân $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$

Ta thấy đạo hàm của mẫu số của biểu thức lấy tích phân là $(x^2+px+q)' = 2x+p$, do đó ta biến đổi tử số của biểu thức lấy tích phân thành dạng $Ax+B=\dfrac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\dfrac{Ap}{2}\right)$, khi đó

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{A}{2}I_1+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)I_2$$

Tính $I_1=\displaystyle\int\frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q}=\int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}=\ln(x^2+px+q)+C_1$ vì $x^2+px+q>0$ với $\forall x$

Tính $I_2=\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C_2$ đã được tính ở Bước 1

Do đó $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$

Ví dụ **4.1.3.1.1.** Tính các tích phân (a) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+6x+25}$, (b) $\displaystyle\int\frac{dx}{2x^2-2x+3}$

Bài giải

(a) $I=\int\frac{dx}{x^2+6x+25}$, đặt p = 6 và q = 25 $\Rightarrow\frac{p^2}{4}-q=-16<0$, áp dụng kết quả trên ta được $I=\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C=\frac{2}{\sqrt{4.25-6^2}}\arctan\frac{2x+6}{\sqrt{4.25-6^2}}+C=\frac{1}{4}\arctan\frac{x+3}{4}+C$

hoặc biến đổi trực tiếp $I=\int\frac{dx}{x^2+6x+25}=\int\frac{dx}{(x+3)^2+16}=\int\frac{d(x+3)}{(x+3)^2+4^2}=\frac{1}{4}\arctan\frac{x+3}{4}+C$

(b) $I=\int\frac{dx}{2x^2-2x+3}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+\frac{3}{2}}$, đặt p = -1 và $q=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{p^2}{4}-q=-\frac{5}{4}<0$, áp dụng kết quả trên ta được $I=\frac{1}{2}.\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C=$

$\frac{2}{\sqrt{4.\frac{3}{2}-(-1)^2}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{4.\frac{3}{2}-(-1)^2}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C$

hoặc biến đổi trực tiếp $I=\int\frac{dx}{x^2+6x+25}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)}=$

$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C$

Ví dụ **4.1.3.1.2.** Tính các tích phân (a) $\int\frac{(3x-1)dx}{x^2-4x+8}$, (b) $\int\frac{xdx}{2x^2+2x+5}$, (c) $\int\frac{(2x^3+3x)dx}{x^4+x^2+1}$

Bài giải

(a) $I=\int\frac{(3x-1)dx}{x^2-4x+8}$, đặt A = 3, B = -1, p = -4, q = 8 $\Rightarrow\frac{p^2}{4}-q=-4<0$, áp dụng kết quả trên ta được $I=\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C=$

$\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8)+\frac{2.(-1)-3.(-4)}{\sqrt{4.8-(-4)^2}}\arctan\frac{2x-4}{\sqrt{4.8-(-4)^2}}+C=\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8)+\frac{5}{2}\arctan\frac{x-2}{2}+C$

hoặc biến đổi trực tiếp $I=\int\frac{(3x-1)dx}{x^2-4x+8}=\int\frac{\frac{3}{2}(2x-4)-1+6}{x^2-4x+8}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx+$ $5\int\frac{dx}{x^2-4x+8}=\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2-4x+8)}{x^2-4x+8}+5\int\frac{d(x-2)}{(x-2)^2+2^2}=\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8)+\frac{5}{2}\arctan\frac{x-2}{2}+C$

(b) $I=\int\frac{xdx}{2x^2+2x+5}=\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{x^2+x+\frac{5}{2}}$, đặt A = 1, B = 0, p = 1, $q=\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{p^2}{4}-q=-\frac{9}{4}<0$, áp dụng kết quả trên ta được

$I=\frac{1}{2}\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{1}{2}\left[\frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right]+C_1=$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)+\frac{2.0-1.1}{\sqrt{4.\frac{5}{2}-1^2}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{4.\frac{5}{2}-1^2}}\right]+C_1=\frac{1}{4}\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{6}\arctan\frac{2x+1}{3}+C_1=$$

$$\frac{1}{4}\left[\ln\left(2x^2+2x+5\right)-\ln 2\right]-\frac{1}{6}\arctan\frac{2x+1}{3}+C_1=\frac{1}{4}\ln\left(2x^2+2x+5\right)-\frac{1}{6}\arctan\frac{2x+1}{3}+C$$

hoặc biến đổi trực tiếp $I=\int\frac{xdx}{2x^2+2x+5}=\int\frac{\frac{1}{4}(4x+2)-\frac{1}{2}}{2x^2+2x+5}dx=\frac{1}{4}\int\frac{(4x+2)dx}{2x^2+2x+5}-$

$$\frac{1}{2}\int\frac{dx}{2x^2+2x+5}=\frac{1}{4}\int\frac{d(2x^2+2x+2)}{2x^2+2x+2}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{2x^2+2x+5}=\frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+2)-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+x+\frac{5}{2}}=$$

$$\frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+2)-\frac{1}{4}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+2)-\frac{1}{4}.\frac{1}{\frac{3}{2}}\arctan\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}+C=$$

$$\frac{1}{4}\ln\left(2x^2+2x+5\right)-\frac{1}{6}\arctan\frac{2x+1}{3}+C$$

(c) $I=\int\frac{(2x^3+3x)dx}{x^4+x^2+1}$, đổi biến $t=x^2$, khi đó $dt=2xdx$ hay $xdx=\frac{1}{2}dt$

$\Rightarrow I=\int\frac{(2x^2+3)xdx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{2t+3}{t^2+t+1}dt$. Đặt $A=2$, $B=3$, $p=1$, $q=1$ $\Rightarrow \frac{p^2}{4}-q=-\frac{3}{4}<0$, áp dụng kết quả trên ta được

$$\int\frac{2t+3}{t^2+t+1}dt=\int\frac{At+B}{t^2+pt+q}dt=\frac{A}{2}\ln(t^2+pt+q)+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2t+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C_1=$$

$$\frac{2}{2}\ln(t^2+t+1)+\frac{2.3-2.1}{\sqrt{4.1-1^2}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{4.1-1^2}}+C_1=\ln(t^2+t+1)+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C_1$$

$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int\frac{2t+3}{t^2+t+1}dt=\frac{1}{2}\ln(t^2+t+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$, trở về biến cũ ta được

$$I=\frac{1}{2}\ln(x^4+x^2+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}+C$$

Tính tích phân phân thức loại IV: $J_n=\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx$

- Bước 1: Biến đổi biểu thức dưới dấu tích phân ta được

$$\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n}dx=\frac{A}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}=\frac{A}{2}I+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)J$$

- Bước 2: Tính $I=\int\frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n}=\int\frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n}=\int(x^2+px+q)^{-n}d(x^2+px+q)=$

$$\int(x^2+px+q)^{-n}d(x^2+px+q)=\frac{1}{-n+1}(x^2+px+q)^{-n+1}+C_1=\frac{1}{1-n}.\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}}+C_1$$

- Bước 3: Tính $J=\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}=\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^n}$, bây giờ nếu đặt $t=x+\frac{p}{2}$ và

$a^2=q-\frac{p^2}{4}$ thì $J=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$. Ta thấy J chính là tích phân $I_n=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ với $a\neq 0$ và $n\in$**N***, đã tính ở Ví dụ 4.1.5. và ta đã xác định được công thức truy hồi để tính tích phân này $I_n=\frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{a^2}\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}$ với $n\geq 2$ và $I_1=\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a}+C_2$. Trở về biến cũ

ta được $J=I_n=\frac{x+\frac{p}{2}}{2(n-1)\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^{n-1}}+\frac{1}{q-\frac{p^2}{4}}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}$ với $n\geq 2$ và tích phân

ban đầu là $I_1=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C_2$,

hay $J=I_n=\frac{1}{(n-1)(4q-p^2)}\cdot\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\frac{4}{4q-p^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}$ với $n\geq 2$ và tích phân ban đầu là

$I_1=\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C_2$

Do đó $J_n=\frac{A}{2(1-n)}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)I_n$,

trong đó $I_n=\frac{1}{(n-1)(4q-p^2)}\cdot\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\frac{4}{4q-p^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}$ với $n\geq 2$ và tích phân ban đầu là

$I_1=\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$

Ví dụ **4.1.3.1.3.** Tính các tích phân (a) $I_3=\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}$, (b) $J_2=\int\frac{(3x+2)dx}{(x^2+2x+10)^2}$

Bài giải

(a) Tích phân đã cho là $I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ với n = 3 và a = 1, do đó sử dụng công thức truy hồi

đã biết $I_n=\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{a^2}\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}$ với $n\geq 2$ và $I_1=\int\frac{dt}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C_1$ ta

được $I_3=\frac{x}{2.1^2.(3-1)(x^2+1^2)^{3-1}}+\frac{1}{1^2}\frac{2.3-3}{2.3-2}I_{3-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2}+\frac{3}{4}I_2$,

$I_2=\frac{x}{2.1^2(2-1)(x^2+1^2)^{2-1}}+\frac{1}{1^2}\frac{2.2-3}{2.2-2}I_{2-1}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}I_1$ và $I_1=\frac{1}{1}\arctan\frac{x}{1}+C_1=\arctan x+C_1$,

do đó $I_3=\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2}+\frac{3}{4}I_2=\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2}+\frac{3}{4}\left[\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}I_1\right]=\frac{x}{4(x^2+1)^2}+\frac{3x}{8(x^2+1)}+\frac{3}{8}I_1=$

$\frac{x}{4(x^2+1)^2}+\frac{3x}{8(x^2+1)}+\frac{3}{8}\arctan x+C$

(b) $J_2=\int\frac{(3x+2)dx}{(x^2+2x+10)^2}=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+2)+(2-3)}{(x^2+2x+10)^2}dx=\frac{3}{2}\int\frac{(2x+2)dx}{(x^2+2x+10)^2}-\int\frac{dx}{(x^2+2x+10)^2}=$

$\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+2x+10)}{(x^2+2x+10)^2}-\int\frac{dx}{\left[(x+1)^2+9\right]^2}$, đối với tích phân thứ nhất đổi biến z = x^2 + 2x + 10 ⇒ dz = (2x + 2)dx, còn đối với tích phân thứ hai đổi biến t = x + 1 ⇒ dt = dx, do đó

$$J_2=\frac{3}{2}\int\frac{dz}{z^2}-\int\frac{dt}{\left(t^2+9\right)^2}=\frac{3}{2}\int z^{-2}dz-\int\frac{dt}{\left(t^2+3^2\right)^2}=-\frac{3}{2}z^{-1}-\left[\frac{1}{2.3^2.(2-1)}\frac{t}{(t^2+3^2)^{2-1}}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{3^2}\frac{2.2-3}{2.2-2}\int\frac{dt}{t^2+3^2}\right]=-\frac{3}{2z}-\frac{t}{18(t^2+9)}-\frac{1}{18}.\frac{1}{3}\arctan\frac{t}{3}+C$$, trở về biến cũ, ta được

$$J_2=\int\frac{(3x+2)dx}{(x^2+2x+10)^2}=-\frac{3}{2(x^2+2x+10)}-\frac{x+1}{18(x^2+2x+10)}-\frac{1}{54}\arctan\frac{x+1}{3}+C$$

4.1.3.2. Tính tích phân các phân thức hữu tỷ nhờ phân tích thành các phân thức hữu tỷ đơn giản nhất

Phân thức hữu tỷ là phân thức có dạng $\frac{P(x)}{Q(x)}$, trong đó P(x) và Q(x) là các đa thức. Phân thức hữu tỷ được gọi là thực sự nếu bậc của P(x) nhỏ hơn bậc của Q(x), ngược lại, bậc của P(x) lớn hơn hoặc bằng bậc của Q(x) thì được gọi là không thực sự.

Trước khi lấy tích phân phân thức hữu tỷ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ cần thực hiện các phép biến đổi và phép tính đại số sau:

(1) Nếu $\frac{P(x)}{Q(x)}$ là phân thức hữu tỷ không thực sự thì thực hiện phép chia P(x) cho Q(x), kết quả nhận được có dạng $\frac{P(x)}{Q(x)}=M(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}$, trong đó M(x) là đa thức, còn $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ là phân thức hữu tỷ thực sự;

(2) Phân tích mẫu số của phân thức ra các thừa số tuyến tính và bậc hai: Q(x) = $(x – a)^m$...$(x^2$ + px + q$)^n$…, trong đó $\frac{p^2}{4}-q<0,$ tức là tam thức bậc hai x^2 + px + q không có nghiệm thực (hay có nghiệm liên hợp phức);

(3) Phân tích phân thức hữu tỷ thực sự ra các phân thức đơn giản nhất: $\frac{P_1(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}$

$$+...+\frac{A_{m-1}}{(x-a)^{m-1}}+\frac{A_m}{(x-a)^m}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+...+\frac{B_{n-1}x+C_{n-1}}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}+...$$

(4) Tìm các hệ số A_k, B_k và C_k bằng phương pháp hệ số bất định.

(5) Cuối cùng, việc tính tích phân tích phân của phân thức $\frac{P(x)}{Q(x)}$ được đưa về việc tính tích phân đa thức M(x) và các phân thức hữu tỷ đơn giản nhất.

Khi phân tích mẫu số Q(x) của phân thức ra các thừa số tuyến tính và bậc hai thì có 4 trường hợp:

Trường hợp 1. Q(x) chỉ có các nghiệm thực khác nhau, tức là Q(x) được phân tích ra các thừa số bậc nhất không lặp lại.

Trường hợp 2. Q(x) chỉ có các nghiệm thực, trong đó có một số là nghiệm bội, tức là Q(x) được phân tích ra các thừa số bậc nhất và một số thừa số đó được lặp lại.

Trường hợp 3. Q(x) có các nghiệm phức đơn, tức là trong khai triển của Q(x) có chứa thừa số bậc hai không lặp.

Trường hợp 4. Q(x) có các nghiệm phức bội, tức là trong khai triển của Q(x) có chứa thừa số bậc hai lặp.

Ví dụ **4.1.3.2.1.** Tính tích phân $\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx$, nghiệm của Q(x) thuộc Trường hợp 1

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-4} = \frac{(A+B+C)x^2-(6A+5B+3C)+(8A+4B+2C)}{(x-1)(x-2)(x-4)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C & =1 \\ -6A-5B-3C & =2 \\ 8A+4B+2C & =6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=-7 \\ C=5 \end{cases} \Rightarrow \int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx = 3\int \frac{dx}{x-1}dx - 7\int \frac{dx}{x-2}dx +$$

$$5\int \frac{dx}{x-4}dx = 3\ln|x-1| - 7\ln|x-2| + 5\ln|x-4| + C = \ln\left|\frac{(x-1)^3(x-4)^5}{(x-2)^7}\right| + C$$

Ví dụ **4.1.3.2.2.** Tính tích phân $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx$, nghiệm của Q(x) thuộc Trường hợp 2

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{D}{x+3} =$$

$$\frac{(A+D)x^3+(A+B-3D)x^2+(-5A+2B+C+3D)+(3A-3B+3C-D)}{(x-1)^3(x+3)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+D & =0 \\ A+B-3D & =1 \\ -5A+2B+C+3D & =0 \\ 3A-3B+3C-D & =1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=5/32 \\ B=3/8 \\ C=1/2 \\ D=-5/32 \end{cases} \Rightarrow \int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx = \frac{5}{32}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{8}\int \frac{dx}{(x-1)^2} +$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^3} - \frac{5}{32}\int \frac{dx}{x+3} = \frac{5}{32}\int \frac{d(x-1)}{x-1} + \frac{3}{8}\int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x-1)}{(x-1)^3} - \frac{5}{32}\int \frac{d(x+3)}{x+3} =$$

$$\frac{5}{32}\ln|x-1| - \frac{3}{8(x-1)} - \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{5}{32}\ln|x+3| + C = -\frac{3}{8(x-1)} - \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + C$$

Ví dụ **4.1.3.2.3.** Tính tích phân $\int \frac{dx}{x^5-x^2} = \int \frac{dx}{x^2(x-1)(x^2+x+1)}$, nghiệm của Q(x) thuộc Trường hợp 3.

$$\frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1} =$$

$$\frac{(A+C+D)x^4+(B+C-D+E)x^3+(C-E)x^2+Ax-B}{x^2(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$\begin{cases} A+C+D & =0 \\ B+C-D+E & =0 \\ C-E & =0 \\ A & =0 \\ -B & =1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=-1 \\ C=1/3 \\ D=-1/3 \\ E=1/3 \end{cases} \Rightarrow \int \frac{dx}{x^5-x^2} = -\int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx =$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1-3}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{x} + \frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

Ví dụ **4.1.3.2.4.** Tính tích phân $\int \frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}dx$, nghiệm của Q(x) thuộc Trường hợp 4

$$\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax^3+Bx^2+(A+C)x+(B+D)}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A & =1 \\ B & =0 \\ A+C & =-2 \\ B+D & =0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=0 \\ C=-3 \\ D=0 \end{cases} \Rightarrow \int \frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}dx=\int \frac{xdx}{x^2+1}-3\int \frac{xdx}{(x^2+1)^2}=$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1}-\frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{3}{2(x^2+1)}+C$$

4.1.4. Tính tích phân các hàm vô tỷ đơn giản nhất

4.1.4.1. Tính tích phân dạng $\int R\left[x,(ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}},(ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}},...\right]dx$, trong đó R là phân thức hữu tỷ đối với các biến $x,(ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}},(ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}},...$; m_k, $n_k \in \mathbf{Z}$. Phép đổi biến ax + b = t^s với s = BSCNN(n_1, n_2, …) sẽ biến đổi hàm lấy tích phân thành phân thức hữu tỷ đối với biến t.

Ví dụ **4.1.4.1.** Tính tích phân $I=\int \frac{dx}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}-(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$

Bài giải Ta thấy n_1 = 3 và n_2 = 2 nên BSCNN(n_1,n_2) = 6, do đó dùng phép thế 2x + 1 = t^6, suy ra $x=\frac{1}{2}(t^6-1)$ và dx = $3t^5$dt $\Rightarrow I=\int \frac{dx}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}-(2x+1)^{\frac{1}{2}}}=\int \frac{3t^5dt}{t^4-t^3}=3\int \frac{t^2dt}{t-1}=3\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=$

$$\frac{3}{2}t^2+3t+3\ln|t-1|+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x-1}+3\sqrt[6]{2x-1}+3\ln\left|\sqrt[6]{2x-1}-1\right|+C$$

4.1.4.2. Tính tích phân dạng $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Để tính tích phân loại này, ta tách bình phương đủ của tam thức bậc hai ax^2 + bx + c, rồi đưa về tích phân cơ bản (15) hoặc (16).

Ví dụ **4.1.4.2.** Tính các tích phân (a) $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$, (b) $I=\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}$

Bài giải (a) $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}=\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+4}}=\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+C$ do áp dụng tích phân cơ bản (16).

$$\text{(b) } I=\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d\left(x-\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}+C=$$

$\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(3x-2)+C$ do áp dụng tích phân cơ bản (15).

4.1.4.3. Tính tích phân dạng $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$. Để tính tích phân loại này, ta tách tử số Ax + B ra đạo hàm của tam thức bậc hai ax^2 + bx + c và phân tích tích phân này thành tổng của hai tích phân:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{A}{2a}I+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)J$$

trong đó $I = \int \frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int (ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}}d(ax^2+bx+c) = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}+1}+C =$

$2\sqrt{ax^2+bx+c}+C$ và $J = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ là dạng tích phân 4.1.4.2. đã xét ở trên.

Ví dụ **4.1.4.3.** Tính các tích phân (a) $I = \int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx$, (b) $I = \int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx$

Bài giải

(a) $I = \int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx = \int \frac{\frac{5}{4}(4x+8)-13}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx = \frac{5}{4}\int \frac{(4x+8)dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}} - 13\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}} =$

$\frac{5}{4}\int \frac{d(2x^2+8x+1)}{\sqrt{2x^2+8x+1}} - \frac{13}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}} = \frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}}\int \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2-\frac{7}{2}}} =$

$\frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}}\int \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2-\frac{7}{2}}} = \frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2-\frac{7}{2}}\right|+C =$

$\frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}\right|+C$ do áp dụng các tích phân cơ bản (12), (16).

(b) $I = \int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx = \int \frac{-\frac{3}{2}(-2x+6)+13}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx =$

$-\frac{3}{2}\int \frac{(-2x+6)dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}} + 13\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}} = -\frac{3}{2}\int \frac{d(-x^2+6x-8)}{\sqrt{-x^2+6x-8}} + 13\int \frac{d(x-3)}{\sqrt{1^2-(x-3)^2}} =$

$-3\sqrt{-x^2+6x-8}+13\arcsin\frac{x-3}{1}+C = -3\sqrt{-x^2+6x-8}+13\arcsin(x-3)+C$ do áp dụng các tích phân cơ bản (12), (15).

4.1.4.4. Tính tích phân dạng $\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Phép đổi biến $x-\alpha = \frac{1}{t}$ sẽ đưa dạng tích phân này về dạng tích phân 4.1.4.2. đã xét ở trên.

Ví dụ **4.1.4.4.** Tính các tích phân (a) $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$, (b) $I = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}$

Bài giải

(a) $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$, đặt $x = \frac{1}{t}$ hay $t = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2} \Rightarrow I = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{5}{t^2}-\frac{2}{t}+1}} =$

$I = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{5}{t^2}-\frac{2}{t}+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2t+5}} = -\int \frac{d(t-1)}{\sqrt{(t-1)^2+4}} = -\ln\left|t-1+\sqrt{(t-1)^2+4}\right|+C =$

$-\ln\left|t-1+\sqrt{t^2-2t+5}\right|+C=-\ln\left|\frac{1}{x}-1+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+5}\right|+C=-\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{5x^2-2x+1}}{x}\right|+C$ do áp dụng tích phân cơ bản (16).

(b) $I=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}$, đặt $x-1=\frac{1}{t}\Rightarrow x=1+\frac{1}{t}\Rightarrow dx=-\frac{dt}{t^2}$ và $t=\frac{1}{x-1}$, do đó

$$I=-\int\frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{-\left(1+\frac{1}{t}\right)^2+2\left(1+\frac{1}{t}\right)+3}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{4t^2-1}}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}}=-\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\right|+C=$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{x-1}+\sqrt{\left(\frac{1}{x-1}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{-x^2+2x+3}}{2(x-1)}\right|+C$$

4.1.4.5. Tính tích phân dạng $\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, trong đó $P_n(x)$ là đa thức bậc n. Tích phân này tính được nhờ đồng nhất thức $\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, trong đó $Q_{n-1}(x)$ là đa thức bậc n – 1 với hệ số bất định, còn λ là một số thực. Bây giờ lấy đạo hàm đồng nhất thức trên và quy đồng mẫu số, ta sẽ nhận được đẳng thức của hai đa thức mà từ đó có thể xác định các hệ số của đa thức $Q_{n-1}(x)$ và số λ.

Ví dụ **4.1.4.5.** Tính tích phân $I=\int\frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

Bài giải Ở đây n = 3 nên đồng nhất thức tương ứng là

$$\int\frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=(b_2x^2+b_1x+b_0)\sqrt{x^2+2x+2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

Đạo hàm hai vế đồng nhất thức này ta được

$$\frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}=(2b_2x+b_1)\sqrt{x^2+2x+2}+(b_2x^2+b_1x+b_0)\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

$$\Rightarrow x^3+2x^2+3x+4=(2b_2x+b_1)(x^2+2x+2)+(b_2x^2+b_1x+b_0)(x+1)+\lambda$$

$$\Leftrightarrow x^3+2x^2+3x+4=3b_2x^3+(5b_2+2b_1)x^2+(4b_2+3b_1+b_0)x+(2b_1+b_0+\lambda)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3b_2=1\\5b_2+2b_1=2\\4b_2+3b_1+b_0=3\\2b_1+b_0+\lambda=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b_2=1/3\\b_1=1/6\\b_0=7/6\\\lambda=5/2\end{cases}\Rightarrow I=\frac{1}{3}\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{7}{2}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=$$

$$\frac{1}{3}\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{7}{2}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}}=\frac{1}{3}\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{7}{2}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+$$

$$+\frac{5}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+1}\right|+C=\frac{1}{3}\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{7}{2}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C$$

4.1.4.6. Tính tích phân nhị thức vi phân $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, trong đó m, n, p$\in\mathbf{Q}$. Nhà toán học Tsebusep đã chứng minh, tích phân này xác định được chỉ trong 3 trường hợp sau:

(1) p$\in\mathbf{Z}$, khi đó đặt $x=t^s$ với s là BSCNN của mẫu số của các số hữu tỷ m, n; tích phân sẽ được đưa về tích phân của hàm số hữu tỷ;

(2) $\frac{m+1}{n} \in Z,$ khi đó phép đổi biến a + $bx^n = t^s$ với s là mẫu số của phân số p, sẽ biến đổi tích phân thành tích phân của hàm hữu tỷ;

(3) $\frac{m+1}{n} + p \in Z,$ khi đó, để đưa về tích phân của hàm hữu tỷ, dùng phép đổi biến $ax^{-n} + b = t^s$ với s là mẫu số của phân số p.

Ví dụ **4.1.4.6.** Tính các tích phân

$$(a)\, I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}},\ (b)\, I = \int \frac{x^3dx}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}},\ (c)\, I = \int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$$

Bài giải

(a) Viết hàm lấy tích phân dưới dạng $\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10} = x^{-\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)^{-10}$, nên p = -10 là số nguyên, $m = -\frac{1}{2}$ và $n = \frac{1}{4}$. Do đó tích phân này xác định được vì nó thuộc trường hợp đầu tiên của tích phân nhị thức vi phân, nên ta sử dụng phép đổi biến $x = t^4$ (4 là BSCNN của mẫu số của các phân số m và n). Khi đó $dx = 4t^3dt$ và $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}} = \int \frac{4t^3dt}{t^2(1+1)^{10}} = 4\int \frac{tdt}{(t+1)^{10}} =$

$4\int \frac{(t+1-1)dt}{(t+1)^{10}} = 4\int \frac{(t+1-1)dt}{(t+1)^{10}} = 4\int \frac{(t+1)dt}{(t+1)^{10}} - 4\int \frac{dt}{(t+1)^{10}} = 4\int (t+1)^{-9}dt - 4\int (t+1)^{-10}dt =$

$4\int (t+1)^{-9}d(t+1) - 4\int (t+1)^{-10}d(t+1) = -\frac{1}{8(t+1)^8} + \frac{1}{9(t+1)^9} + C$, trở về biến cũ, ta được

$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}} = -\frac{1}{2\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^8} + \frac{4}{9\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^9} + C.$

(b) Viết hàm lấy tích phân dưới dạng $\frac{x^3}{\left(a^2-x^2\right)\sqrt{a^2-x^2}} = x^3\left(a^2-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}$ nên m = 3, n = 2 và $p = -\frac{3}{2}$, suy ra $\frac{m+1}{n} = \frac{3+1}{2} = 2$ là số nguyên. Do đó tích phân này xác định được vì nó thuộc trường hợp thứ hai của tích phân nhị thức vi phân, nên ta sử dụng phép đổi biến $a^2 - x^2 = t^2$ (2 là mẫu số của phân số p). Khi đó xdx = -tdt và $x^2 = a^2 - t^2 \Rightarrow I = \int \frac{x^3dx}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}} = \int x^3\left(a^2-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx =$

$-\int \left(a^2-t^2\right)t^{-3}tdt = -\int \frac{a^2-t^2}{t^2}dt = \int dt - a^2\int \frac{dt}{t^2} = t + \frac{a^2}{t} + C = \frac{t^2+a^2}{t} + C$, trở về biến cũ, ta được

$I = \frac{2a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + C.$

(c) Viết hàm lấy tích phân dưới dạng $\frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}} = x^{-4}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ nên m = -4, n = 2 và $p = -\frac{1}{2}$, suy ra $\frac{m+1}{n} + p = \frac{-4+1}{2} - \frac{1}{2} = -2$ là số nguyên. Do đó tích phân này xác định được vì nó thuộc trường hợp thứ ba của tích phân nhị thức vi phân, nên ta sử dụng phép đổi biến $x^{-2} + 1 = t^2$ (-2 = -n và 2 là mẫu số của phân số p). Khi đó $x^{-3}dx$ = -tdt và $x^2 = \frac{1}{t^2-1} \Rightarrow I = \int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \int x^{-4}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} =$

$\int x^{-4}\left[x^2\left(x^{-2}+1\right)\right]^{-\frac{1}{2}}dx = \int x^{-2}\left(x^{-2}+1\right)^{-\frac{1}{2}}x^{-3}dx = -\int\left(t^2-1\right)t^{-1}tdt = -\int\left(t^2-1\right)dt = t-\frac{t^3}{3}+C$, trở về biến cũ, ta được $I=\sqrt{x^{-2}+1}-\frac{\sqrt{\left(x^{-2}+1\right)^3}}{3}+C=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{3x^3}+C=\frac{\left(2x^2-1\right)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}+C.$

4.1.5. Tính tích phân các hàm lượng giác

4.1.5.1. Tính tích phân dạng $\int R(\sin x,\cos x)dx$, trong đó R là phân thức hữu tỷ. Các tích phân dạng này được đưa về tích phân của phân thức hữu tỷ nhờ phép đổi biến lượng giác vạn năng $t=\tan\frac{x}{2}$, suy ra $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, x = 2arctant và $dx=\frac{2tdt}{1+t^2}$.

Cần lưu ý rằng, phép đổi biến vạn năng $t=\tan\frac{x}{2}$ trong nhiều trường hợp đưa đến việc tính toán phức tạp vì khi đó các hàm số sinx, cosx được biểu diễn qua t dưới dạng phân thức hữu tỷ chứa t^2.

Trong một số trường hợp đặc biệt, việc tìm tích phân dạng $\int R(\sin x,\cos x)dx$ có thể đơn giản hơn: (1) Nếu R(sinx,cosx) là hàm lẻ đối với sinx, tức là R(-sinx,cosx) = -R(sinx,cosx) thì dùng phép đổi biến t = cosx; (2) Nếu R(sinx,cosx) là hàm lẻ đối với cosx, tức là R(sinx,-cosx) = -R(sinx,cosx) thì dùng phép đổi biến t = sinx; (3) Nếu R(sinx,cosx) là hàm chẵn đối với sinx và cosx, tức là R(-sinx,-cosx) = R(sinx,cosx) thì dùng phép đổi biến t = tanx.

Ví dụ **4.1.5.1.** Tính các tích phân (a) $\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$, (b) $\int\frac{(\sin x+\sin^3 x)dx}{\cos 2x}$, (c) $\int\frac{\cos^3 x+\cos^5 x}{\sin^2 x+\sin^4 x}dx$, (d) $\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x}$

Bài giải

(a) Đổi biến $t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ và $dx=\frac{2tdt}{1+t^2}$.

Do đó $\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}=\int\frac{\frac{2tdt}{1+t^2}}{4.\frac{2t}{1+t^2}+3.\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}=2\int\frac{dt}{2t^2+8t+8}=\int\frac{dt}{(t+2)^2}=$

$\int\frac{d(t+2)}{(t+2)^2}=-\frac{1}{t+2}+C$, trở về biến cũ ta được $\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}=-\frac{1}{\tan\frac{x}{2}+2}+C.$

(b) Hàm lấy tích phân là lẻ đối với sinx vì $\frac{-\sin x+(-\sin x)^3}{\cos 2x}=-\frac{\sin x+\sin^3 x}{\cos 2x}$ nên ta dùng phép đổi biến t = cosx, suy ra $\sin^2x = 1 - t^2$, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2t^2 - 1$, dt = -sinxdx. Do đó

$$\int\frac{(\sin x+\sin^3 x)dx}{\cos 2x}=\int\frac{(1+\sin^2 x)\sin xdx}{\cos 2x}=\int\frac{(2-t^2)(-dt)}{2t^2-1}=\int\frac{t^2-2}{2t^2-1}dt=\int\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}.\frac{1}{2t^2-1}\right)dt=$$

$$\frac{1}{2}\int dt-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{2t^2-1}=\frac{t}{2}-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{\left(\sqrt{2}t-1\right)\left(\sqrt{2}t+1\right)}=\frac{t}{2}-\frac{3}{4}\left(\int\frac{dt}{\sqrt{2}t-1}-\int\frac{dt}{\sqrt{2}t+1}\right)=$$

$$\frac{t}{2}-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\left(\sqrt{2}t\right)}{\sqrt{2}t-1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\left(\sqrt{2}t\right)}{\sqrt{2}t+1}\right)=\frac{t}{2}-\frac{3}{4\sqrt{2}}\left(\int\frac{d\left(\sqrt{2}t-1\right)}{\sqrt{2}t-1}-\int\frac{d\left(\sqrt{2}t+1\right)}{\sqrt{2}t+1}\right)=$$

$\frac{t}{2}-\frac{3}{4\sqrt{2}}\left(\ln\left|\sqrt{2}t-1\right|-\ln\left|\sqrt{2}t+1\right|\right)+C=\frac{t}{2}+\frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}t+1}{\sqrt{2}t-1}\right|+C$, trở về biến cũ ta được

$$\int \frac{(\sin x+\sin^3 x)dx}{\cos 2x} = \frac{\cos x}{2} + \frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x+1}{\sqrt{2}\cos x-1}\right| + C.$$

(c) Hàm lấy tích phân là lẻ đối với cosx vì $\frac{(-\cos x)^3+(-\cos x)^5}{\sin^2 x+\sin^4 x} = -\frac{\cos^3 x+\cos^5 x}{\sin^2 x+\sin^4 x}$ nên ta dùng phép đổi biến t = sinx, suy ra $\cos^2x = 1 - \sin^2x = 1 - t^2$, cosxdx = dt. Do đó

$$\int \frac{\cos^3 x+\cos^5 x}{\sin^2 x+\sin^4 x}dx = \int \frac{\cos^2 x(1+\cos^2 x)\cos x dx}{\sin^2 x+\sin^4 x} = \int \frac{(1-t^2)(2-t^2)dt}{t^2+t^4} = \int\left(1+\frac{2}{t^2}-\frac{6}{1+t^2}\right)dt =$$

$\int dt + 2\int \frac{dt}{t^2} - 6\int \frac{dt}{1+t^2} = t + \frac{2}{t} - 6\arctan t + C,$ trở về biến cũ ta được

$$\int \frac{\cos^3 x+\cos^5 x}{\sin^2 x+\sin^4 x}dx = \sin x + \frac{2}{\sin x} - 6\arctan(\sin x) + C.$$

(d) Hàm lấy tích phân là chẵn đối với cả sinx và cosx vì

$\frac{1}{(-\sin x)^2+2(-\sin x)(-\cos x)-(-\cos x)^2} = \frac{1}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x}$ nên ta dùng phép đổi biến t = tanx, suy ra $\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, x = arctant và

$dx = \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$. Do đó $\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}+2.\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{1}{1+t^2}} =$

$\int \frac{dt}{t^2+2t-1} = \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right| + C,$ trở về biến cũ ta được

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-\sqrt{2}+\tan x}{1+\sqrt{2}+\tan x}\right| + C.$$

4.1.5.2. Tính tích phân dạng $\int \sin^m x\cos^n dx$ trong hai trường hợp (1) Ít nhất một trong các số m hoặc n là số lẻ dương, nếu n là số lẻ dương thì dùng phép đổi biến t = sinx, còn nếu m là số lẻ dương thì dùng phép đổi biến t = cosx; (2) Cả hai số m, n đều là số chẵn dương, khi đó biến đổi hàm số lấy tích phân nhờ các công thức lượng giác: $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$.

Ví dụ **4.1.5.2.** Tính các tích phân (a) $\int \sin^4 x\cos^5 x dx$, (b) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x\sqrt[3]{\cos x}}$, (c) $\int \sin^2 x\cos^2 x dx$

Bài giải

(a) Vì n là số lẻ dương nên ta dùng phép đổi biến t = sinx nên dt = d(sinx), do đó

$$\int \sin^4 x\cos^5 x dx = \int \sin^4 x.\cos^4 x(\cos x dx) = \int \sin^4 x.(1-\sin^2 x)^2 d(\sin x) = \int t^4(1-t^2)t^2 dt =$$

$\int t^4 dt - 2\int t^6 dt + \int t^8 dt = \frac{t^5}{5} - \frac{2t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C,$ trở về biến cũ ta được

$$\int \sin^4 x\cos^5 x dx = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9} + C.$$

(b) Vì m là số lẻ dương nên ta dùng phép đổi biến t = cosx nên dt = -sinxdx, do đó

$\int \frac{\sin^3 xdx}{\cos x\sqrt[3]{\cos x}} = \int \sin^2 x\cos^{-\frac{4}{3}} x(\sin xdx) = \int (1-\cos^2 x)\cos^{-\frac{4}{3}} x(\sin xdx) = -\int (1-t^2)t^{-\frac{4}{3}}dt =$

$-\int t^{-\frac{4}{3}}dt + \int t^{\frac{2}{3}}dt = 3t^{-\frac{1}{3}} + \frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}} + C = 3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{t}} + \frac{1}{5}t\sqrt[3]{t^2}\right) + C,$ trở về biến cũ ta được

$\int \frac{\sin^3 xdx}{\cos x\sqrt[3]{\cos x}} = 3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{1}{5}\cos x\sqrt[3]{\cos^2 x}\right) + C.$

(c) Cả hai số m, n đều là số chẵn dương nên ta sử dụng các công thức hạ bậc, do đó ta biến đổi hàm lấy tích phân như sau $\sin^2 x\cos^2 x = (\sin x\cos x)^2 = \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{8}(1-\cos 4x) \Rightarrow$

$\int \sin^2 x\cos^2 xdx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4xdx = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\int \cos 4xd(4x) = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C.$

4.1.5.3. Tính tích phân dạng $\int \tan^m xdx$ và $\int \cot^m xdx,$ trong đó m là số nguyên dương. Khi đó, ta dùng các công thức lượng giác $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ hoặc $\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$ để hạ liên tiếp bậc của hàm số tan hoặc cot.

Ví dụ **4.1.5.3.** Tính các tích phân (a) $\int \tan^7 dx,$ (b) $\int \cot^6 xdx$

Bài giải

(a) $\int \tan^7 dx = \int \tan^5 x.\tan^2 xdx = \int \tan^5 x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int \tan^5 x\left(\frac{dx}{\cos^2 x}\right) - \int \tan^5 xdx =$

$\int \tan^5 xd(\tan x) - \int \tan^3 x.\tan^2 xdx = \frac{\tan^6 x}{6} - \int \tan^3 x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx =$

$\frac{\tan^6 x}{6} - \int \tan^3 x\left(\frac{dx}{\cos^2 x}\right) + \int \tan^3 xdx = \frac{\tan^6 x}{6} - \int \tan^3 xd(\tan x) + \int \tan x\tan^2 xdx =$

$\frac{\tan^6 x}{6} - \frac{\tan^4 x}{4} + \int \tan x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \frac{\tan^6 x}{6} - \frac{\tan^4 x}{4} + \int \tan x\left(\frac{dx}{\cos^2 x}\right) - \int \tan xdx =$

$\frac{\tan^6 x}{6} - \frac{\tan^4 x}{4} + \int \tan xd(\tan x) - \int \tan xdx = \frac{\tan^6 x}{6} - \frac{\tan^4 x}{4} + \frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C.$

(b) $\int \cot^6 xdx = \int \cot^4 x.\cot^2 xdx = \int \cot^4 x\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = \int \cot^4 x\left(\frac{dx}{\sin^2 x}\right) - \int \cot^4 xdx =$

$-\int \cot^4 xd(\cot x) - \int \cot^2 x\cot^2 xdx = -\frac{\cot^5 x}{5} - \int \cot^2 x\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx =$

$-\frac{\cot^5 x}{5} - \int \cot^2 x\left(\frac{dx}{\sin^2 x}\right)dx + \int \cot^2 xdx = -\frac{\cot^5 x}{5} + \int \cot^2 xd(\cot x) + \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx =$

$-\frac{\cot^5 x}{5} + \frac{\cot^3 x}{3} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -\frac{\cot^5 x}{5} + \frac{\cot^3 x}{3} - \int d(\cot x) - x = -\frac{\cot^5 x}{5} + \frac{\cot^3 x}{3} - \frac{\cot^2 x}{2} - x + C.$

4.1.5.4. Tính tích phân dạng $\int \frac{\tan^m x}{\cos^n x}dx$ và $\int \frac{\cot^m x}{\sin^n x}dx,$ trong đó n là số dương chẵn. Khi đó, ta dùng các công thức lượng giác $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ hoặc $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$ để biến đổi hàm số lấy tích phân.

Ví dụ **4.1.5.4.** Tính các tích phân (a) $\int \frac{\tan^4 x}{\cos^6 x}dx,$ (b) $\int \frac{1}{\sin^4 x}dx$

Bài giải

(a) $\int \frac{\tan^4 x}{\cos^6 x}dx = \int \tan^4 x.\frac{1}{\cos^4 x}.\left(\frac{dx}{\cos^2 x}\right) = \int \tan^4 x.\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 d(\tan x) =$

$\int \tan^4 x.(1+\tan^2 x)^2 d(\tan x) = \int (\tan^4 x + 2\tan^6 x + \tan^8 x)d(\tan x) =$

$\int \tan^4 xd(\tan x) + 2\int \tan^6 xd(\tan x) + \int \tan^8 xd(\tan x) = \frac{\tan^9 x}{9} + \frac{2\tan^7 x}{7} + \frac{\tan^5 x}{5} + C.$

(b) $\int \frac{1}{\sin^4 x}dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}.\frac{1}{\sin^2 x}dx = \int (1+\cot^2 x)\left(\frac{dx}{\sin^2 x}\right) = -\int (1+\cot^2 x)d(\cot x) =$

$-\int d(\cot x) - \int \cot^2 xd(\cot x) = -\cot x - \frac{\cot^3 x}{3} + C.$

4.1.5.5. Tính tích phân dạng $I_{2n+1} = \int \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$ và $J_{2n+1} = \int \frac{dx}{\sin^{2n+1} x}$, khi đó, ta chứng minh được hai công thức truy hồi tương ứng sau đây:

$$I_{2n+1} = \int \frac{dx}{\cos^{2n+1} x} = \frac{1}{2n}.\frac{\sin x}{\cos^{2n} x} + \left(1-\frac{1}{2n}\right)I_{2n-1} \text{ với } I_1 = \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

$$J_{2n+1} = \int \frac{dx}{\sin^{2n+1} x} = -\frac{1}{2n}.\frac{\cos x}{\sin^{2n} x} + \left(1-\frac{1}{2n}\right)J_{2n-1} \text{ với } J_1 = \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

Ví dụ **4.1.5.5.** Tính tích phân $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$

Bài giải Áp dụng công thức truy hồi J_{2n+1} với $2n + 1 = 5 \Rightarrow n = 2$:

$J_5 = J_{2.2+1} = \int \frac{dx}{\sin^{2.2+1} x} = -\frac{1}{2.2}.\frac{\cos x}{\sin^{2.2} x} + \left(1-\frac{1}{2.2}\right)J_{2.2-1}$ hay $J_5 = \int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{1}{4}.\frac{\cos x}{\sin^4 x} + \left(1-\frac{1}{4}\right)J_3 =$

$-\frac{1}{4}.\frac{\cos x}{\sin^4 x} + \frac{3}{4}J_3$ với $J_3 = \int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{dx}{\sin^{2.1+1} x} = -\frac{1}{2.1}.\frac{\cos x}{\sin^{2.1} x} + \left(1-\frac{1}{2.1}\right)J_{2.1-1} = -\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2}J_1$

với $J_1 = \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C \Rightarrow \int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{3\cos x}{8\sin^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$

4.1.5.6. Tính tích phân dạng $\int \sin(mx)\cos(nx)dx$, $\int \cos(mx)\cos(nx)dx$ và $\int \sin(mx)\sin(nx)dx$. Khi đó, các công thức lượng giác: $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$, $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$, $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$ cho khả năng biểu diễn tích các hàm lượng giác dưới dạng tổng.

Ví dụ **4.1.5.6.** Tính các tích phân (a) $\int \sin 2x\cos 5xdx$, (b) $\int \cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}dx$

Bài giải

(a) $\int \sin 2x.\cos 5xdx = \frac{1}{2}\int [\sin 7x + \sin(-3x)]dx = \frac{1}{2}\int \sin 7xdx - \frac{1}{2}\int \sin 3xdx =$

$\frac{1}{2}.\frac{1}{7}\int \sin 7xd(7x) - \frac{1}{2}.\frac{1}{3}\int \sin 3xd(3x) = -\frac{\cos 7x}{14} + \frac{\cos 3x}{6} + C.$

(b) $\int \cos x.\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{4}dx = \frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{4}dx = \frac{1}{2}\int \cos\frac{3x}{2}.\cos\frac{x}{4}dx +$

$\frac{1}{2}\int \cos\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{4}dx = \frac{1}{4}\int\left(\cos\frac{7x}{4} + \cos\frac{5x}{4}\right)dx + \frac{1}{4}\int\left(\cos\frac{3x}{4} + \cos\frac{x}{4}\right)dx =$

$$\frac{1}{4}\int\cos\frac{7x}{4}dx+\frac{1}{4}\int\cos\frac{5x}{4}dx+\frac{1}{4}\int\cos\frac{3x}{4}dx+\frac{1}{4}\int\cos\frac{x}{4}dx=$$

$$\frac{1}{4}.\frac{4}{7}\int\cos\frac{7x}{4}d\left(\frac{7x}{4}\right)+\frac{1}{4}.\frac{4}{5}\int\cos\frac{5x}{4}d\left(\frac{5x}{4}\right)+\frac{1}{4}.\frac{4}{3}\int\cos\frac{3x}{4}d\left(\frac{3x}{4}\right)+\frac{1}{4}.4\int\cos\frac{x}{4}d\left(\frac{x}{4}\right)=$$

$$\frac{1}{7}\sin\frac{7x}{4}+\frac{1}{5}\sin\frac{5x}{4}+\frac{1}{3}\sin\frac{3x}{4}+\sin\frac{x}{4}+C.$$

4.1.5.7. Tính tích phân dạng $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2}dx$, $\int R(x,\sqrt{a^2+x^2}dx$, và $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2}dx$, trong đó R là phân thức hữu tỷ, được đưa về các tích phân của hàm hữu tỷ đối với sint và cost bằng các phép đổi biến lượng giác thích hợp;

- Đối với dạng $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ thì dùng phép đổi biến x = asinu hoặc x = acosu
- Đối với dạng $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ thì dùng phép đổi biến x = atanu hoặc x = acotu
- Đối với dạng $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ thì dùng phép đổi biến $x=\frac{a}{\cos u}$ hoặc $x=\frac{a}{\sin u}$

Ví dụ **4.1.5.7.** Tính các tích phân (a) $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx$, (b) $\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$, (c) $\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$

Bài giải

(a) Đặt x = asinu $\Rightarrow$ dx = acosudu và $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx=\int\frac{\sqrt{a^2-a^2\sin^2u}}{a\sin u}a\cos udu=$

$$a\int\frac{\cos^2u}{\sin u}du=a\int\frac{1-\sin^2u}{\sin u}du=a\int\frac{du}{\sin u}-a\int\sin udu=a\ln\left|\tan\frac{u}{2}\right|+a\cos u+C=$$

$a\ln\left|\frac{\sin u}{1+\cos u}\right|+a\cos u+C$ vì $\tan\frac{u}{2}=\frac{\sin\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}}=\frac{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}{2\cos^2\frac{u}{2}}=\frac{\sin u}{1+\cos u}$, trở về biến cũ ta được

$$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx=a\ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

(b) Đặt x = atanu $\Rightarrow dx=\frac{a}{\cos^2u}du$ và $\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}=\int\frac{\frac{a}{\cos^2u}du}{a\tan u.\sqrt{a^2+a^2\tan^2u}}=\frac{1}{a}\int\frac{du}{\sin u}=$

$\frac{1}{a}\ln\left|\tan\frac{u}{2}\right|+C=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sin u}{1+\cos u}\right|+C$, trở về biến cũ ta được $\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{x}\right|+C.$

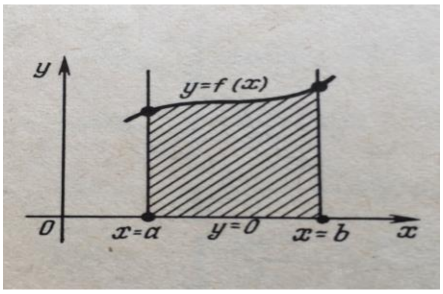
(c) Đặt $x=\frac{a}{\cos u}\Rightarrow dx=\frac{a\sin u}{\cos^2u}du$ và $\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=a^2\int\frac{du}{\cos^3u}$, bây giờ áp dụng công thức truy hồi $I_{2n+1}=\int\frac{du}{\cos^{2n+1}u}=\frac{1}{2n}.\frac{\sin u}{\cos^{2n}u}+\left(1-\frac{1}{2n}\right)I_{2n-1}$ với n = 1 và $I_1=\int\frac{du}{\cos u}=\ln\left|\tan\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$ ta được $I_3=\int\frac{du}{\cos^3u}=\frac{1}{2}.\frac{\sin u}{\cos^2u}+\left(1-\frac{1}{2}\right)I_1=\frac{1}{2}.\frac{\sin u}{\cos^2u}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$, do đó

$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=a^2I_3=\frac{a^2}{2}\left[\frac{\sin u}{\cos^2u}+\ln\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]+C$, trở về biến cũ ta được

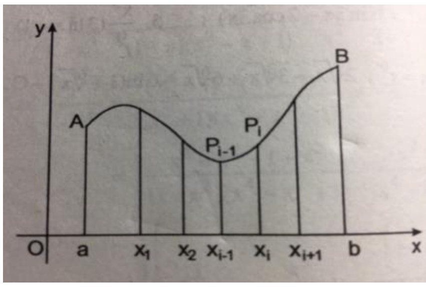
$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x}\right|+C.$$

4.2. Tích phân xác định

4.2.1. Bài toán tính diện tích hình thang cong, định nghĩa tính phân xác định



Giả sử hàm số y = f(x) xác định trên [a,b]. Xét hình thang cong AabB là hình giới hạn bởi đồ thị hàm số y = f(x), các đường thẳng x = a, x = b và y = 0 (trục hoành Ox). Làm thế nào để tính được diện tích S của hình thang cong này?



Muốn vậy, ta chia [a,b] thành n đoạn bởi các điểm $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ có độ dài của mỗi đoạn là tùy ý, trên từng đoạn $[x_{i-1},x_i]$ có độ dài $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$ chọn một điểm ξ_i tùy ý.

Bây giờ, từ các điểm x_i $(0 \le i \le n)$ ta kẻ các đường thẳng $x = x_i$, và như vậy, ta đã chia hình thang cong AabB thành n hình thang cong nhỏ $P_{i-1}x_{x-1}x_iP_i$ $(1 \le i \le n)$ có đáy Δx_i $(1 \le i \le n)$. Do đó, nếu ký hiệu diện tích của hình thang cong AabB là S và diện tích của hình thang cong nhỏ thứ i là S_i thì $S = \sum_{i=1}^{n} S_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. Về mặt hình học, ta thấy rằng: n càng lớn thì diện tích S của hình thang cong AabB tính được bằng công thức trên càng chính xác.

Định nghĩa. Tổng $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n$ được gọi là *tổng tích phân* của hàm số y = f(x) trên [a,b]. Giới hạn của tổng tích phân $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ được gọi là *tích phân xác định* của hàm số y = f(x) trên [a,b] và ký hiệu là $\int_a^b f(x)dx$. Khi đó, ta nói rằng hàm số f(x) *khả tích* trên [a,b], trong đó [a,b] là *khoảng lấy tích phân,* a là *cận dưới* và b là *cận trên* của tích phân, x là *biến số lấy tích phân,* f(x) là *hàm số lấy tích phân* và f(x)dx là *biểu thức dưới dấu tích phân.*

4.2.2. Các lớp hàm khả tích

Định lý. (1) Nếu f(x) liên tục trên [a,b] thì f(x) khả tích trên [a,b]; (2) Nếu f(x) bị chặn trên [a,b] và có một số hữu hạn điểm gián đoạn trên [a,b] thì f(x) khả tích trên [a,b]; (3) Nếu f(x) bị chặn và đơn điệu trên [a,b] thì f(x) khả tích trên [a,b].

Các nhà toán học đã chứng minh được rằng, giới hạn $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ tồn tại hữu hạn đối với các lớp hàm khả tích, không phụ thuộc vào độ dài của Δx_i và cách chọn ξ_i trên đoạn $[x_{i-1},x_i]$.

4.2.3. Các tính chất cơ bản của tích phân xác định

(1) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(2) $\int_a^a f(x)dx = 0$

(3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

(4) $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$ (C là hằng số)

(5) $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$

(6) Nếu m ≤ f(x) ≤ M trên [a,b] thì $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ trên [a,b]

4.2.4. Các quy tắc tính tích phân xác định

(1) Công thức Newton – Leibniz: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, trong đó F(x) là nguyên hàm của f(x), tức là F'(x) = f(x).

Từ công thức Newton – Leibniz suy ra rằng, tích phân $\int_a^b f(x)dx$ không phụ thuộc vào ký hiệu biến số lấy tích phân, chẳng hạn $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$ vì cả hai tích phân này đều bằng F(b) – F(a).

(2) Tích phân từng phần: $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$, trong đó u = u(x), v = v(x) là các hàm số liên tục và khả vi trên [a,b].

(3) Đổi biến: $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$, trong đó x = φ(t), φ'(t) và f[φ(t)] là các hàm số liên tục trên [α,β], a = φ(α), b = φ(β).

(4) Nếu f(x) là hàm số lẻ, tức là f(–x) = –f(x), thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$; nếu f(x) là hàm số chẵn, tức là f(–x) = f(x), thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

(5) Nếu f(x) là hàm số liên tục và tuần hoàn với chu kỳ T > 0, tức là f(x+T) = f(x), thì $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

Ví dụ **4.2.1.** Chứng minh quy tắc (4)

- Giả sử hàm số f(x) là hàm số lẻ, khi đó ta đổi biến t = –x $\Rightarrow \begin{cases} t = a & \text{khi} \quad x = -a \\ t = -a & \text{khi} \quad x = a \end{cases}$, dt = –dx và f(t) = f(–x) = –f(x), do đó

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_a^{-a} -f(t)(-dt) = \int_a^{-a} f(t)dt = \int_a^{-a} f(x)dx = -\int_{-a}^a f(x)dx \Rightarrow 2\int_{-a}^a f(x)dx = 0 \Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

- Giả sử hàm số f(x) là hàm số chẵn, khi đó ta đổi biến t = –x$\Rightarrow \begin{cases} t = a & \text{khi} \quad x = -a \\ t = 0 & \text{khi} \quad x = 0 \end{cases}$, dt = –dx và f(t) = f(–x) = f(x), do đó $\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_a^0 f(t)(-dt) = -\int_a^0 f(t)dt = \int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(x)dx$

$$\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx \cdot$$

Ví dụ **4.2.2.** Tính các tích phân (a) $I = \int_0^1 x^2dx$, (b) $I_\alpha = \int_a^b x^\alpha dx$ với $\alpha \in R$, $0 < a < b$ bằng định nghĩa và bằng quy tắc.

Bài giải. (a) Theo định nghĩa, để tính I ta lập tổng tích phân của hàm số f(x) trên [0,1]. Ở đây $f(x) = x^2$, a = 0, b = 1; ta chia đoạn [0,1] thành n phần bằng nhau, khi đó $\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$ $(1 \le i \le n)$ và $x_i = \frac{i}{n}$ $(0 \le i \le n)$. Bây giờ ta chọn $\xi_i = x_i$ $(1 \le i \le n)$, suy ra $f(\xi_i) = f(x_i) = \left(\frac{i}{n}\right)^2$ $(1 \le i \le n)$ nên

$$I = \int_0^1 x^2dx = \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 . \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6}\left(1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\left(2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6}(1+0)(2+0) = \frac{1}{3}.$$

Theo quy tắc tính tích phân xác định ta được ngay $I = \int_0^1 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$.

(b) *Tính* I_α *bằng định nghĩa.* Ở đây $f(x) = x^\alpha$, ta chia đoạn [a,b] thành n phần bởi các điểm tạo thành một cấp số nhân có số hạng đầu tiên là a và công bội q: $x_0 = a$, $x_1 = x_0q = aq$, $x_2 = x_1q = aq^2$, …, $x_i = x_{i-1}q = aq^i$, …, $x_n = x_{n-1}q = aq^n = b$, suy ra $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ và $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = aq^i - aq^{i-1} = aq^{i-1}(q-1)$ $(1 \le i \le n)$, do đó $\max\Delta x_i \to 0$ khi $q \to 1$. Bây giờ ta chọn $\xi_i = x_{i-1} = aq^{i-1}$ $(1 \le i \le n)$, suy ra $f(\xi_i) = f(x_{i-1}) = x_{i-1}^\alpha = (aq^{i-1})^\alpha = a^\alpha q^{\alpha(i-1)}$, do đó $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} a^\alpha q^{\alpha(i-1)} aq^{i-1}(q-1) =$

$$a^{\alpha+1}(q-1)\left[1+q^{\alpha+1}+(q^{\alpha+1})^2+...+(q^{\alpha+1})^{n-1}\right] = a^{\alpha+1}(q-1)\sum_{i=1}^{n} q^{(\alpha+1)(i-1)} = a^{\alpha+1}(q-1)\sum_{i=1}^{n}\left(q^{\alpha+1}\right)^{i-1} =$$

$$a^{\alpha+1}(q-1)\frac{1-\left(q^{\alpha+1}\right)^n}{1-q^{\alpha+1}} = a^{\alpha+1}(q-1)\frac{1-\left(q^n\right)^{\alpha+1}}{1-q^{\alpha+1}} = a^{\alpha+1}(q-1)\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha+1}}{1-q^{\alpha+1}} = \left(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}\right)\frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{q\to 1}\left(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}\right)\frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1} = \left(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}\right)\lim_{q\to 1}\frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1} \overset{(L')}{=} \left(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}\right)\lim_{q\to 1}\frac{1}{(\alpha+1)q^\alpha} =$$

$$\left(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}\right)\frac{1}{(\alpha+1)\lim_{q\to 1} q^\alpha} = \frac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

Tính I_α *bằng quy tắc.* $I_\alpha = \int_a^b x^\alpha dx = \left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_a^b = \frac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

Nhận xét: Khi α = 2, a = 0 và b = 1 thì $I_2 = \int_0^1 x^2dx = \frac{1^{2+1}-0^{2+1}}{2+1} = \frac{1}{3} = I$ ở (a).

Ví dụ **4.2.3.** Tìm giới hạn $\lim_{n\to\infty} S_n$ với $S_n = \frac{1}{n^5}\sum_{i=1}^{n-1} i^4$ bằng cách xây dựng tổng tích phân của hàm số thích hợp.

Bài giải. Ta thấy $\frac{1}{n}+S_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^5}\sum_{i=1}^{n-1}i^4=\frac{1}{n}+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^4.\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^4.\frac{1}{n}$ là tổng tích phân của hàm số f(x) = x^4 trên [0,1]. Thật vậy, ta chia đoạn [0,1] thành n phần bằng nhau, khi đó $\Delta x_i=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$ $(1 \le i \le n)$ và $x_i=\frac{i}{n}(0 \le i \le n)$. Bây giờ ta chọn $\xi_i = x_i$ $(1 \le i \le n)$, suy ra $f(\xi_i)=f(x_i)=\left(\frac{i}{n}\right)^4(1 \le i \le n)$ nên $\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^4.\frac{1}{n}=\frac{1}{n}+S_n$

$$\Rightarrow \lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+S_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}S_n=0+\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_n$$

Mặt khác, theo định nghĩa thì $\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_0^1 x^4dx=\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1=\frac{1}{5}$, do đó $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{5}$

4.2.5. Các ứng dụng của tích phân xác định

4.2.5.1. Tính diện tích các hình phẳng

Từ kết quả của bài toán tính diện tích hình thang cong và định nghĩa tính phân xác định ta thấy, nếu f(x) ≥ 0 thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đường y = f(x) và các đường thẳng x = a, x = b, y = 0. Trong trường hợp tổng quát thì $S=\int_a^b |f(x)|dx$.

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong y = $f_1(x)$ và y = $f_2(x)$ [$f_1(x) \ge f_2(x)$] và hai đường thẳng x = a, x = b được tính theo công thức $S=\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]dx$. Trong trường hợp tổng quát thì $S=\int_a^b |f_1(x)-f_2(x)|dx$.

Nếu đường cong được cho bởi phương trình tham số $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t)\end{cases}$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đường cong này, các đường thẳng x = a, x = b và đoạn [a,b] của trục Ox được tính bằng công thức $S=\int_{t_1}^{t_2}|\psi(t)\varphi'(t)|dt$, trong đó t_1 và t_2 được xác định từ phương trình a = $\varphi(t_1)$ và phương trình b = $\varphi(t_2)$, với $\varphi(t)$, $\psi(t)$ và $\varphi'(t)$ là các hàm liên tục trên $[t_1,t_2]$.

Nếu đường cong được cho bởi phương trình r = r(φ) trong tọa độ cực (r,φ) thì diện tích S của hình quạt cong giới hạn bởi hai tia φ = α, φ = β (α < β) và cung AB của đường cong r = r(φ), trong đó r(φ) là hàm số liên tục trên [α,β], được tính bằng công thức $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$.

Xem các ví dụ trong [1].

4.2.5.2. Tính độ dài cung của đường cong phẳng

Nếu đường cong y = f(x) liên tục trên [a,b] và đạo hàm f'(x) của nó cũng liên tục trên [a,b] thì độ dài cung tương ứng của đường cong đó được tính theo công thức $L=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$.

Nếu đường cong được cho bởi phương trình tham số $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ thì $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt$, trong đó t_1 và t_2 được xác định từ phương trình $a = \varphi(t_1)$ và phương trình $b = \varphi(t_2)$, với $\varphi(t)$, $\psi(t)$ và $\varphi'(t)$ là các hàm liên tục trên $[t_1,t_2]$.

Nếu đường cong được cho bởi phương trình $r = r(\varphi)$ trong tọa độ cực (r,φ) với $\alpha \le \varphi \le \beta$, trong đó $r(\varphi)$ là hàm số liên tục trên $[\alpha, \beta]$ thì $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + [r'(\varphi)]^2}\,d\varphi$.

Xem các ví dụ trong [1].

4.2.5.3. Tính thể tích của vật thể

Nếu diện tích của thiết diện ngang của vật thể được tạo ra do mặt phẳng vuông góc với trục Ox có thể biểu diễn như là hàm số của x dưới dạng $S = S(x)$ với $a \le x \le b$ thì thể tích của phần vật thể nằm giữa các mặt phẳng vuông góc với trục Ox là $x = a$ và $x = b$ được tính bằng công thức $V = \int_a^b S(x)dx$.

Nếu hình thang cong giới hạn bởi đường cong $y = f(x)$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = a$, $y = b$ quay quanh trục Ox thì thể tích của vật thể tròn xoay này được tính bằng công thức $V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx$.

Nếu hình giới hạn bởi các đường cong $y = f_1(x)$ và $y = f_2(x)$ $[0 \le f_1(x) \le f_2(x)]$ và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ quay xung quanh trục Ox thì thể tích của vật tròn xoay này được tính bằng công thức $V_x = \pi\int_a^b \left[f_2^2(x) - f_1^2(x)\right]dx$.

Xem các ví dụ trong [1].

4.2.5.4. Tính diện tích của mặt tròn xoay

Nếu cung của đường cong $y = f(x)$ với $a \le x \le b$ quay quanh trục Ox thì diện tích mặt tròn xoay được tính bằng công thức $S_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$.

Nếu cung của đường cong $y = f(x)$ với $a \le x \le b$ quay quanh trục Ox được cho bởi các phương trình tham số $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ với $t_1 \le t \le t_2$ thì diện tích mặt tròn xoay được tính bằng công thức $S_x = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt$.

Xem các ví dụ trong [1].

4.3. Tích phân suy rộng

4.3.1. Khái niệm và cách tính tích phân suy rộng

Trong các phần trên ta đã xây dựng khái niệm tích phân xác định trong trường hợp các cận tích phân là hữu hạn và hàm số lấy tích phân là bị chặn, trong phần này ta sẽ xét trường hợp khi mà một trong hai điều kiện trên bị vi phạm, tức là hoặc cận tích phân là vô hạn, hoặc hàm số lấy tích phân là không bị chặn.

4.3.1.1. Tích phân suy rộng loại 1 (cận tích phân là vô hạn)

Tích phân suy rộng loại 1 của hàm số f(x) [f(x) là hàm số bị chặn], từ a đến $+\infty$ được xác định bởi đẳng thức $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$. Nếu giới hạn này tồn tại và hữu hạn thì tích phân suy rộng loại

1 dạng này, được gọi là hội tụ; còn nếu giới hạn này không tồn tại hoặc bằng ∞ thì tích phân suy rộng loại 1 dạng này, được gọi là phân kỳ.

Tương tự, tích phân suy rộng loại 1 của hàm số f(x) [f(x) là hàm số bị chặn], từ -∞ đến b được xác định bởi đẳng thức $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx.$ Nếu giới hạn này tồn tại và hữu hạn thì tích phân suy rộng loại 1 dạng này, được gọi là hội tụ; còn nếu giới hạn này không tồn tại hoặc bằng ∞ thì tích phân suy rộng loại 1 dạng này, được gọi là phân kỳ.

Trường hợp, nếu tích phân suy rộng loại 1 của hàm số f(x) [f(x) là hàm số bị chặn], từ -∞ đến +∞ được xác định bởi đẳng thức $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx$ (c là một số hữu hạn). Nếu cả hai giới hạn ở vế phải đẳng thức trên tồn tại hữu hạn thì tích phân suy rộng loại 1 dạng này, được gọi là hội tụ; còn nếu có ít nhất một trong hai giới hạn ở vế phải đẳng thức trên không tồn tại hoặc bằng ∞ thì tích phân suy rộng loại 1 dạng này, được gọi là phân kỳ.

Ví dụ **4.3.1.1.** Tính các tích phân (a) $\int_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$, (b) $\int_{0}^{+\infty}\cos x dx$, (c) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$

Bài giải.

(a) $\int_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{b\to+\infty}\int_{e^2}^{b}\frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{b\to+\infty}\int_{e^2}^{b}\frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2\ln^2 x}\right)\Bigg|_{e^2}^{b} = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2\ln^2 b}\right) =$
$\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{\ln^2 b} = \frac{1}{8}-\frac{1}{2}.0 = \frac{1}{8}$, do đó tích phân suy rộng loại 1 này hội tụ.

(b) $\int_{0}^{+\infty}\cos x dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\cos x dx = \lim_{b\to+\infty}\sin x\Big|_{0}^{b} = \lim_{b\to+\infty}(\sin b - \sin 0) = \lim_{b\to+\infty}\sin b$, giới hạn này không tồn tại, do đó tích phân suy rộng loại 1 này phân kỳ.

(c) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+5} + \int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+5} + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{x^2+2x+5} =$
$\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2} + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2} = \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\arctan\frac{x+1}{2}\Bigg|_{a}^{0} + \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\arctan\frac{x+1}{2}\Bigg|_{0}^{b} =$
$\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\arctan\frac{1}{2}-\arctan\frac{b+1}{2}\right) + \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\arctan\frac{b+1}{2}-\arctan\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\arctan\frac{b+1}{2} +$
$\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\arctan\frac{b+1}{2} - \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, do đó tích phân suy rộng loại 1 này hội tụ.

4.3.1.2. Tích phân suy rộng loại 2 (hàm số lấy tích phân không bị chặn)

Tích phân suy rộng loại 2 của hàm số f(x) có $\lim_{x\to b-0} f(x) = \infty$, từ a đến b được xác định bởi đẳng thức $\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx.$ Nếu giới hạn này tồn tại hữu hạn thì tích phân suy rộng loại 2 dạng này, được gọi là hội tụ; còn nếu giới hạn này không tồn tại hoặc bằng ∞ thì tích phân suy rộng loại 2 dạng này, được gọi là phân kỳ.

Tích phân suy rộng loại 2 của hàm số f(x) có $\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty$, từ a đến b được xác định bởi đẳng thức $\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$ Nếu giới hạn này tồn tại hữu hạn thì tích phân suy rộng loại 2 dạng này, được gọi là hội tụ; còn nếu giới hạn này không tồn tại hoặc bằng ∞ thì tích phân suy rộng loại 2 dạng này, được gọi là phân kỳ.

Trường hợp, nếu tích phân suy rộng loại 2 của hàm số f(x) có $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ và $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\infty$, từ a đến b được xác định bởi đẳng thức $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)dx+\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{c}^{b-\varepsilon} f(x)dx$ $(a<c<b)$. Nếu cả hai giới hạn ở vế phải đẳng thức trên tồn tại hữu hạn thì tích phân suy rộng loại 2 dạng này, được gọi là hội tụ; còn nếu có ít nhất một trong hai giới hạn ở vế phải đẳng thức trên không tồn tại hoặc bằng ∞ thì tích phân suy rộng loại 2 dạng này, được gọi là phân kỳ.

Ví dụ **4.3.1.2.** Tính các tích phân (a) $\int_0^1 \frac{dx}{x}$, (b) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$, (c) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Bài giải.

(a) Hàm lấy tích phân không bị chặn tại điểm x = 0 $\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln x\Big|_\varepsilon^1=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln x\Big|_\varepsilon^1=$ $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\ln 1-\ln\varepsilon)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(-\ln\varepsilon)=+\infty$, do đó tích phân suy rộng loại 2 này phân kỳ.

(b) Hàm lấy tích phân $\frac{1}{\cos x}$ không bị chặn tại điểm $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\cos x}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\pi/2-\varepsilon}\frac{dx}{\cos x}=$ $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln\left[\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]\Bigg|_0^{\pi/2-\varepsilon}=\ln\left[\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\tan\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]=\ln\left(\tan\frac{\pi}{2}\right)=+\infty$, do đó tích phân suy rộng loại 2 này phân kỳ.

(c) Hàm lấy tích phân $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ không bị chặn tại tại các điểm $x=\pm 1$ $\Rightarrow \int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{0}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_{-1+\varepsilon}^{0}+\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_{0}^{1-\varepsilon}=$ $-\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\arcsin(-1+\varepsilon)+\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\arcsin(1-\varepsilon)=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi$, do đó tích phân suy rộng loại 2 này hội tụ.

4.3.2. Dấu hiệu hội tụ (*tiêu chuẩn so sánh*) đối với tích phân suy rộng

4.3.2.1. Dấu hiệu hội tụ đối với tích phân suy rộng loại 1

Giả sử f(x), g(x) là hai hàm số không âm và khả tích trên $[a,+\infty)$, khi đó nếu tồn tại số c > a sao cho $f(x)\le g(x)$ với mọi $x\in[c,+\infty)$ thì

(1) Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ, nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ

(2) Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k$ với $0<k<+\infty$ thì các tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Hệ quả.

Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ, nếu $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

Trường hợp hàm số f(x) có dấu tùy ý, ta có: Nếu tích phân $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ hội tụ thì tích phân $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ hội tụ; khi đó, ta nói rằng tích phân $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối. Còn nếu tích phân $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ hội tụ nhưng tích phân $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ phân kỳ thì ta nói rằng tích phân $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ hội tụ không tuyệt đối.

Ví dụ **4.3.2.1.** (a) Chứng minh rằng tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ hội tụ khi $p > 1$, phân kỳ khi $p \le 1$;

(b) Khảo sát tính hội tụ của tích phân $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx$

Bài giải. (a) Theo định nghĩa $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty}\int_a^{b}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty}\int_a^{b}x^{-p}dx = \lim_{b\to+\infty}\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_a^b = \frac{1}{1-p}\lim_{b\to+\infty}b^{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p}$

- Nếu $p > 1$ thì $\lim_{b\to+\infty}b^{1-p} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{b^{p-1}} = 0 \Rightarrow \int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \frac{a^{1-p}}{p-1}$, tức là tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ hội tụ

- Nếu $p \le 1$ thì $\lim_{b\to+\infty}b^{1-p} = +\infty$ tức là tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ phân kỳ.

Kết quả này được sử dụng (mà không cần phải chứng minh lại) khi khảo sát tính hội tụ của tích phân suy rộng loại 1.

(b) Nếu đặt $x = \sqrt{t}$ thì $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt + \int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt\right) = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)$

- Tích phân $I_1 = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ là tích phân bình thường vì hàm số lấy tích phân là hàm bị chặn. Thật vậy, tại cận tích phân t = 0 hàm số lấy tích phân có khả năng không bị chặn thì $\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{\sqrt{t}} = \lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}.\sqrt{t} = \lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}.\lim_{t\to0}\sqrt{t} = 1.0 = 0$.

- Tích phân $I_2 = \int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = \lim_{b\to+\infty}\int_{\pi/2}^{b}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = -\lim_{b\to+\infty}\int_{\pi/2}^{b}\frac{d(\cos t)}{\sqrt{t}} = -\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\right|_{\pi/2}^{b} - \lim_{b\to+\infty}\int_{\pi/2}^{b}\frac{\cos t}{t^{3/2}}dt =$
$0 - \lim_{b\to+\infty}\int_{\pi/2}^{b}\frac{\cos t}{t^{3/2}}dt = -\lim_{b\to+\infty}\int_{\pi/2}^{b}\frac{\cos t}{t^{3/2}}dt = -\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{3/2}}dt$. Ta thấy $\frac{\cos t}{t^{3/2}} \le \frac{1}{t^{3/2}}$ mà tích phân $\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{dt}{t^{3/2}}$ đã biết là hội tụ theo (a) nên tích phân $\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{3/2}}dt$ hội tụ theo dấu hiệu hội tụ đối với tích phân suy rộng loại 1, suy ra $I_2 = -\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{3/2}}dt$ hội tụ.

- Như vậy, tích phân $I_2 = \int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ hội tụ, suy ra tích phân $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx$ hội tụ.

Ví dụ **4.3.2.2.** Khảo sát tính hội tụ của tích phân suy rộng $\int_1^{+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)dx$

Bài giải. Ký hiệu $f(x) = 1 - \cos\frac{1}{x}$ và $g(x) = \frac{1}{x^2}$, ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} =$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sin^2\frac{1}{2x}}{\frac{4}{4x^2}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin^2\frac{1}{2x}}{\frac{1}{4x^2}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\lim_{\frac{1}{2x}\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}}\right)^2 = \frac{1}{2}.1^2 = \frac{1}{2}$$

Do đó, theo hệ quả trên thì tích phân $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)dx$ hội tụ vì tích phân $\int_1^{+\infty} g(x)dx = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ đã biết là hội tụ.

4.3.2.2. Dấu hiệu hội tụ (tiêu chuẩn so sánh) đối với tích phân suy rộng loại 2

Giả sử f(x), g(x) là hai hàm số không âm và khả tích trên (a,b], cả hai hàm này đồng thời không bị chặn tại x = a (điểm x = a được gọi là điểm bất thường hoặc là điểm gián đoạn). Giả sử $f(x) \le g(x)$ với mọi $x \in (a,c]$ ($a < c < b$) thì

(1) Nếu $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ, nếu $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ

(2) Nếu $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = k$ với $0 < k < +\infty$ thì các tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ và $\int_a^b g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Hệ quả.

Nếu $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ và $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ, nếu $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ và $\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

Trường hợp hàm số f(x) có dấu tùy ý, ta có: Nếu tích phân $\int_a^b |f(x)|dx$ hội tụ thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ; khi đó, ta nói rằng tích phân $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối. Còn nếu tích phân $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ nhưng tích phân $\int_a^b |f(x)|dx$ phân kỳ thì ta nói rằng tích phân $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ không tuyệt đối.

Ví dụ **4.3.2.3.** (a) Chứng minh rằng các tích phân suy rộng $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}, \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ với $a < b$ hội tụ khi $p < 1$, phân kỳ khi $p \ge 1$. (b) Khảo sát tính hội tụ của tích phân $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$

Bài giải. (a) Theo định nghĩa $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon}\frac{dx}{(b-x)^p} = \frac{1}{1-p}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(b-x)^{1-p}\Big|_a^{b-\varepsilon} =$

$$\frac{1}{p-1}\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1-p} + \frac{(b-a)^{1-p}}{p-1}$$

Nếu p < 1 thì $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1-p} = 0$, còn khi p > 1 thì $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1-p} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^{p-1}} = +\infty$ và cuối cùng nếu p = 1 thì $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon}\frac{dx}{b-x} = -\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln(b-x)\Big|_a^{b-\varepsilon} = +\infty$. Do đó, khi p < 1 tích phân suy rộng $\int\limits_a^b\frac{dx}{(b-x)^p}$ hội tụ, còn khi p ≥ 1 thì tích phân suy rộng $\int\limits_a^b\frac{dx}{(b-x)^p}$ phân kỳ.

Đối với tích phân $\int\limits_a^b\frac{dx}{(x-a)^p}$ chứng minh tương tự.

Các kết quả này được sử dụng (mà không cần phải chứng minh lại) khi khảo sát tính hội tụ của tích phân suy rộng loại 2.

(b) Hàm số lấy tích phân là không bị chặn khi $x \to 1$. Ta viết hàm số lấy tích phân dưới dạng sau $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}}.\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}.\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{1}}.\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = \frac{1}{(1-x)^{1/3}} = g(x)$. Áp dụng kết quả ở (a) ta thấy tích phân suy rộng $\int\limits_0^1\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$ hội tụ vì tích phân suy rộng $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$ hội tụ.

Ví dụ **4.3.2.4.** Khảo sát tính hội tụ của tích phân $\int\limits_0^1\frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Bài giải.

Tích phân $\int\limits_0^1\frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ là tích phân suy rộng loại 2 vì hàm lấy tích phân không bị chặn tại x = 1.

Ta thấy $\left|\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-x^2}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}}.\frac{1}{\sqrt{1-x}} \le \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ trên [0,1]. Vì tích phân $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \int\limits_0^1\frac{dx}{(1-x)^{1/2}}$ là tích phân hội tụ nên tích phân $\int\limits_0^1\left|\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-x^2}}\right|dx$ hội tụ, suy ra tích phân $\int\limits_0^1\frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ hội tụ tuyệt đối.

BÀI TẬP

4.1. Tính các tích phân

(a) $\int e^{3x}3^x dx$ (b) $\int \tan^2 x dx$ (c) $\int (2\tan x + 3\cot x)^2 dx$

(d) $\int x\sqrt[3]{ax^2+b}dx$ với $a \ne 0$ (e) $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$ (f) $\int \cos(\sin x)\cos x dx$

(g) $\int e^{ax+b}dx$ (h) $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$ $(a \ne 0)$ (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a \ne 0)$

(k) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$ $(a \ne 0)$ (l) $\int \frac{dx}{\sin x}$ (m) $\int \frac{dx}{\cos x}$

(n) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$ (o) $\int \frac{x dx}{x^4+2x^2+5}$ (p) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ $(a \ne 0)$

(q) $\begin{cases} I = \int \sin(\ln x)dx \\ J = \int \cos(\ln x)dx \end{cases}$ (r) $\begin{cases} I = \int e^{ax}\sin bx dx \\ J = \int e^{ax}\cos bx dx \end{cases}$ $(a^2 + b^2 > 0)$

(s) $\begin{cases} I = \int \dfrac{\sin x dx}{a\cos x + b\sin x} \\ J = \int \dfrac{\cos x dx}{a\cos x + b\sin x} \end{cases}$ $(a^2 + b^2 > 0)$

4.2. Tính các tích phân

(a) $\int \dfrac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6}dx$, (b) $\int \dfrac{xdx}{x^4+6x^2+5}$, (c) $\int \dfrac{x^2dx}{(x-1)^5}$

(d) $\int \dfrac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx$, (e) $\int \dfrac{7x-9}{x^3-2x^2-x+2}dx$ (f) $\int \dfrac{7x+5}{-x^3-x^2-x+3}dx$

4.3. Chứng minh rằng, nếu f(x) là hàm liên tục trên [0,1] thì

(a) $\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx$

(b) $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$, áp dụng để tính $I = \int_0^{\pi/2} \dfrac{\cos^3 xdx}{\cos x + \sin x}dx$ và $J = \int_0^{\pi/2} \dfrac{\sin^3 xdx}{\cos x + \sin x}dx$

4.4. Tính các tích phân

(a) $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \dfrac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$ (b) $\int_{-1}^{1} \dfrac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}dx$ (c) $\int_{-3}^{3} \dfrac{x^2 \sin 2x}{x^2+1}dx$

(d) $\int_{-1}^{1} x\arctan x dx$ (e) $\int_0^{\pi/4} \dfrac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$ (f) $\int_0^1 e^{x+e^x}dx$

4.5. Tính các tích phân

(a) $\int_{1/e}^{e} |\ln x| dx$ (b) $\int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3)dx$

4.6. Chứng minh các công thức

4.7. Tìm diện tích của hình giới hạn bởi các đường

(a) $x + y = 0$, $y = 2x - x^2$ (b) $y = x^2$, $y = x^2/2$, $y = 2x$

(c) $y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 8$, $x \geq 0$ (d) $y = x^2 + 2x - 3$, $y = -x^2 - 2x + 3$

(e) $x = -2y^2$, $x = 1 - 3y^2$

4.8. Tìm độ dài cung của đường cong

(a) $y^2 = x^3$ từ $x = 0$ đến $x = 1$ $(y \geq 0)$ (b) $\begin{cases} x = \cos^5 t \\ y = \sin^5 t \end{cases}$ từ $t_1 = 0$ đến $t_2 = \dfrac{\pi}{2}$

(c) $r = a\sin^3 \dfrac{\varphi}{3}$ từ $\varphi_1 = 0$ đến $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$ (d) $r = a\cos^3 \dfrac{\varphi}{3}$ từ $\varphi_1 = 0$ đến $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$

4.9. Tính thể tích của vật thể tròn xoay

(a) Hình phẳng $\{y = 2x - x^2, y = 0\}$ quay quanh trục Ox

(b) Hình phẳng $\{y^2 + x - 4 = 0, x = 0\}$ quay quanh trục Oy

(c) Hình phẳng $\{y = x^2, y = 4\}$ quay quanh đường thẳng $x = -2$

4.10. Tính diện tích của mặt tròn xoay bởi hình phẳng $x^2 + (y-2)^2 = 1$ quay quanh trục Ox.

4.11. Tính các tích phân suy rộng loại 1

(a) $\int_{-\infty}^{-1} \dfrac{dx}{x^2}$ (b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^2}$ (c) $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ (d) $\int_0^{+\infty} x\sin x dx$

(e) $\int_2^{+\infty} \dfrac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}$ (f) $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ (g) $\int_{-\infty}^{0} \dfrac{xdx}{x^4+2x^2+5}$ (h) $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\arctan x}{1+x^2}dx$

4.12. Tính các tích phân suy rộng loại 2

(a) $\int_0^2 \frac{x^5 dx}{\sqrt{4-x^2}}$ (b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ (c) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ (d) $\int_0^1 x \ln^2 x dx$

(e) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$ (f) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ (g) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$ (h) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$

4.13. Khảo sát tính hội tụ của các tích phân suy rộng

(a) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{10}}$ (b) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ (c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ (d) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$

(e) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx$ (f) $\int_1^{+\infty} \sin\frac{1}{x} dx$ (g) $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$

(h) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2-1}$ (i) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$ (k) $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ (l) $\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}}$ $(n \in \mathbf{N})$