Chương 2. **GIỚI HẠN** (Phần 2.3.)

2.3. Hàm số liên tục

2.3.1. Khái niệm hàm số liên tục và gián đoạn, phân loại điểm gián đoạn

Định nghĩa **2.3.1.1.** Hàm số f(x) xác định trong lân cận điểm $x_0 \in D(f)$, được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Nói cách khác, hàm số f(x) xác định trong lân cận điểm $x_0 \in D(f)$, được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu với $\forall\varepsilon > 0$ bé tùy ý cho trước, mà $\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ và với $\forall x \in D(f)$ sao cho $|x - x_0| < \delta$ thì $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Nếu gọi hiệu $x - x_0 = \Delta x$ là số gia của đối số và gọi hiệu $f(x) - f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \Delta f$ là số gia của của hàm số tại điểm x_0 tương ứng với số gia của Δx thì định nghĩa trên có thể được phát biểu như sau: Hàm f(x) xác định trong lân cận của điểm $x_0 \in D(f)$ được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0$.

Định lý **2.3.1.1.** Hàm số f(x) liên tục tại điểm $x_0 \in D(f)$ khi và chỉ khi hàm f(x) đồng thời thỏa mãn các điều kiện sau đây:

(1) f(x) xác định trong một lân cận nào đó của điểm x_0

(2) f(x) có giới hạn trái và giới hạn phải tại điểm x_0, bằng nhau và bằng $f(x_0)$, tức là $\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $\exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, $\exists f(x_0)$ và $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

Định nghĩa **2.3.1.2.** Giả sử hàm số f(x) xác định trong nửa lân cận bên phải (bên trái) của điểm $x_0 \in D(f)$, tức là xác định trên $[x_0, x_0+\delta)$ (tương ứng, $(x_0-\delta, x_0]$) nào đó. Khi đó, hàm số f(x) được gọi là liên tục bên phải (bên trái) điểm x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$ $\left[\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)\right]$.

Định lý **2.3.1.2.** Hàm số f(x) liên tục tại điểm $x_0 \in D(f)$ khi và chỉ khi hàm số f(x) đồng thời liên tục bên phải và liên tục bên trái điểm x_0.

Định nghĩa **2.3.1.3.** Hàm số f(x) xác định trong khoảng (a,b) được gọi là liên tục trong khoảng (a,b) nếu hàm số f(x) liên tục tại mọi điểm $x \in (a,b)$.

Ví dụ **2.3.1.1.** Bằng định nghĩa hãy chứng minh: Hàm số f(x) = sinx liên tục trên toàn miền xác định của nó là D(f) = **R**.

Giả sử $x_0 \in D(f)$ là một điểm bất kỳ, ta có $|f(x) - f(x_0)| = |\sin x - \sin x_0| = \left|2\cos\frac{x + x_0}{2}\sin\frac{x - x_0}{2}\right|$

$\le 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \le 2\left|\frac{x - x_0}{2}\right| = |x - x_0|$, do đó với $\varepsilon > 0$ bé tùy ý cho trước, ta chọn $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon$ thì khi $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Theo định nghĩa, hàm số f(x) = sinx liên tục tại điểm x_0, và vì $x_0 \in D(f)$ là một điểm bất kỳ, nên hàm số f(x) = sinx liên tục trên toàn miền xác định của nó là D(f) = **R**.

Định nghĩa **2.3.1.4.** Hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a,b] nếu f(x) xác định và liên tục trong khoảng (a,b) đồng thời liên tục bên phải điểm a và liên tục bên trái điểm b.

Ký hiệu $C_{[a,b]}$ là tập hợp tất cả các hàm số liên tục trên đoạn [a,b].

Ý nghĩa hình học: Nếu hàm số $f(x) \in C_{[a,b]}$ thì đồ thị của hàm số y = f(x) là một đường thẳng hoặc một đường cong liền nét có điểm đầu là A(a,f(a)) và điểm cuối là B(b,f(b)).

Định nghĩa **2.3.1.5.** Hàm số f(x) liên tục trên [a,b) nếu f(x) xác định và liên tục trong khoảng (a,b) đồng thời liên tục bên phải điểm a.

Định nghĩa **2.3.1.6.** Hàm số f(x) liên tục trên (a,b] nếu f(x) xác định và liên tục trong khoảng (a,b) đồng thời liên tục bên trái điểm b.

Sử dụng các tính chất về giới hạn của tổng, tích, thương và định nghĩa liên tục của hàm số, suy ra 2 định lý sau đây.

Định lý **2.3.1.3.**

(1) Giả sử các hàm số f(x) và g(x) liên tục tại điểm $x_0 \in D(f) \cap D(g)$, khi đó các hàm số f(x) + g(x), f(x).g(x), $\frac{f(x)}{g(x)}\left(g(x_0) \neq 0\right)$ liên tục tại điểm x_0.

(2) Giả sử hàm số y = φ(x) liên tục tại điểm $x_0 \in D(\varphi)$, còn hàm số u = f(y) có $D(f) \subset R(\varphi)$, liên tục tại điểm $y_0 = \varphi(x_0) \in D(f)$. Khi đó hàm hợp u = f[φ(x)] liên tục tại điểm x_0. Từ đây suy ra rằng $\lim\limits_{x \to x_0} f\left[\varphi(x)\right] = f\left[\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)\right]$.

Định lý **2.3.1.4.** Giả sử f(x), g(x) là hai hàm số liên tục trong (a,b) ([a,b], [a,b), (a,b]), khi đó các hàm số f(x) + g(x), f(x).g(x), $\frac{f(x)}{g(x)}$ (trừ ra những điểm x làm cho g(x) = 0) liên tục trong (a,b) ([a,b], [a,b), (a,b]).

Từ các định lý trên suy ra: *Các đa thức là những hàm số liên tục, phân thức hữu tỷ là hàm số liên tục (trừ ra những điểm x làm cho đa thức ở mẫu số bằng không), các hàm số lượng giác liên tục trong miền xác định của nó.*

Định nghĩa **2.3.1.7.** Hàm số f(x) không liên tục tại điểm x_0 thì được gọi là gián đoạn tại điểm x_0 và điểm x_0 được gọi là điểm gián đoạn của hàm số f(x). Như vậy, x_0 là điểm gián đoạn của hàm số f(x) trong 3 trường hợp:

(1) hoặc x_0 không thuộc miền xác định của $f(x)\left[x_0 \notin D(f)\right]$;

(2) hoặc x_0 thuộc miền xác định của $f(x)\left[x_0 \in D(f)\right]$ và tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ nhưng giới hạn này khác giá trị $f(x_0)\left[\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)\right]$;

(3) hoặc x_0 thuộc miền xác định của $f(x)\left[x_0 \in D(f)\right]$ nhưng không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Phân loại điểm gián đoạn:

(1) Điểm x_0 được gọi là điểm gián đoạn khử được của hàm số f(x), nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ nhưng hoặc f(x) không xác định tại x_0, hoặc $f(x_0) \neq L$.

Khi đó, nếu gán $f(x_0) = L$ thì f(x) trở nên liên tục tại điểm x_0, tức là gián đoạn có thể khử được.

(2) Điểm x_0 được gọi là điểm gián đoạn loại 1 của hàm số f(x), nếu f(x) có giới hạn trái và giới hạn phải tại điểm x_0, nhưng hai giá trị này khác nhau, tức là $\exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ và $\exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ nhưng $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$. Hiệu số $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ được gọi là bước nhảy của f(x) tại điểm x_0.

(3) Điểm x_0 được gọi là điểm gián đoạn loại 2 của hàm số f(x), nếu nó không thuộc hai loại trên, tức là điểm x_0 không phải là điểm gián đoạn khử được và cũng không phải là điểm gián đoạn loại 1. Nói cách khác, điểm x_0 được gọi là điểm gián đoạn loại 2 của hàm số f(x) tại điểm x_0 khi ít nhất một trong các giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ không tồn tại hữu hạn.

Ví dụ **2.3.1.2.** Khảo sát tính liên tục của các hàm số

(a) $f(x) = \frac{|2x - 3|}{2x - 3}$

Hàm số f(x) có D(f) = $\mathbf{R}\backslash\left\{\frac{3}{2}\right\}$ liên tục tại mọi điểm $x \neq \frac{3}{2}$ vì biểu thức tạo nên f(x) là hàm số sơ cấp xác định và liên tục trong miền xác định của nó.

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{|2x-3|}{2x-3} = \frac{(2x-3)\operatorname{sgn}(2x-3)}{2x-3} = \operatorname{sgn}(2x-3) = \begin{cases} 1 & \text{khi} \quad x > \frac{3}{2} \\ -1 & \text{khi} \quad x < \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to \frac{3}{2}+0} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to \frac{3}{2}-0} f(x) = -1 \end{cases}$$

do đó, tại điểm $x = \frac{3}{2}$ hàm số có gián đoạn loại 1, và có bước nhảy là $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}+0} f(x) - \lim\limits_{x \to \frac{3}{2}-0} f(x) = 1 - (-1) = 2.$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{khi} \quad x \neq 0 \\ a & \text{khi} \quad x = 0 \end{cases}$

Hàm số f(x) có D(f) = **R** liên tục tại mọi điểm x ≠ 0 vì các biểu thức tạo nên f(x) là các hàm số sơ cấp xác định và liên tục trong miền xác định tương ứng của nó. Tại điểm x = 0 ta có f(0) = a, $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1$ và $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} f(x) \neq f(0)$ nếu a ≠ 1 thì f(x) gián đoạn tại điểm x = 0, còn $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = f(0)$ nếu a = 1 thì f(x) liên tục tại điểm x = 0, khi đó hàm f(x) liên tục trên toàn miền xác định D(f) = **R** của nó. Vì vậy đối với hàm số f(x), điểm gián đoạn x = 0 là điểm gián đoạn khử được.

(c) $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{khi} \quad x < -1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{khi} \quad -1 \leq x \end{cases}$

Hàm số f(x) có D(f) = **R**\{0} liên tục tại mọi điểm x ≠ 0 vì các biểu thức tạo nên f(x) là các hàm số sơ cấp xác định và liên tục trong miền xác định tương ứng của nó. Điểm gián đoạn của hàm số có thể có tại điểm x = -1 và tại điểm x = 0.

Tại điểm x = -1 ta có $\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to -1-0} (2x+5) = 3$ và $\lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to -1+0} \frac{1}{x} = -1$ do đó, tại điểm x = -1 hàm số f(x) có gián đoạn loại 1 và có bước nhảy là $\lim\limits_{x \to -1+0} f(x) - \lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = -1 - 3 = -4.$

Điểm x = 0 là điểm gián đoạn của hàm số f(x) đã cho vì điểm này không thuộc D(f), tức là không tồn tại giá trị f(0). Điểm gián đoạn này là điểm gián đoạn loại 2 vì $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$ tức là cả hai giới hạn này không tồn tại hữu hạn.

Ví dụ **2.3.1.3.** Xác định giá trị của tham số a để các hàm số sau đây, liên tục trên miền xác định của nó

(a) Hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x}{1+x^3} & \text{khi} \quad x \neq -1 \\ a & \text{khi} \quad x = -1 \end{cases}$ có D(f) = **R** liên tục tại mọi điểm x ≠ -1 vì các biểu thức tạo nên f(x) là các hàm số sơ cấp xác định và liên tục trong miền xác định tương ứng của nó. Điểm gián đoạn của hàm số có thể có tại điểm x = -1.

Ta có $\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to -1-0} \frac{1+x}{1+x^3} = \lim\limits_{x \to -1-0} \frac{1+x}{(1+x)(1+x+x^2)} = \lim\limits_{x \to -1-0} \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1}{1-1+1^2} = 1$ và $\lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to -1+0} a = a \Rightarrow \lim\limits_{x \to -1-0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -1+0} f(x)$ khi a ≠ 1 và $\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = f(-1)$ khi a = 1. Do đó, để hàm số f(x) đã cho liên tục tại mọi điểm trong miền xác định của nó thì nó phải liên tục tại điểm x = 0, tức là giá trị của tham số a phải bằng 1 (a = 1). Vì vậy đối với hàm số f(x), điểm gián đoạn x = 0 là điểm gián đoạn khử được.

(b) Hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{khi} \quad x < 2 \\ ax^2 + bx - 3 & \text{khi} \quad 2 \le x \le 4 \\ x - a + 2b & \text{khi} \quad x > 4 \end{cases}$ có D(f) = **R** liên tục tại mọi điểm x thuộc miền **R**\{2;4} vì các biểu thức tạo nên f(x) là các hàm số sơ cấp xác định và liên tục trong miền xác định tương ứng của nó. Điểm gián đoạn của hàm số có thể có tại điểm x = 2 và tại điểm x = 4.

Tại điểm x = 2 ta có $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-0} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2-0} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2-0}(x+2) = 4$ và $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+0}(ax^2+bx-3) = 4a+2b-3$ do đó, để f(x) liên tục tại điểm x = 2 thì phải có $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = f(2)$ tức là $4 = 4a+2b-3$ hay 4a + 2b = 7.

Tại điểm x = 4 ta có $\lim\limits_{x\to 4-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 4-0}(ax^2+bx-3) = 16a+4b-3$ và $\lim\limits_{x\to 4+0} f(x) =$ $= \lim\limits_{x\to 4+0}(x-a+2b) = 4-a+2b$ do đó, để f(x) liên tục tại điểm x = 4 thì phải có $\lim\limits_{x\to 4-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 4+0} f(x) = f(4)$ tức là 16a + 4b – 3 = 4 – a + 2b hay 17a + 2b = 7.

Như vậy, để hàm số f(x) đã cho liên tục trên toàn miền xác định của nó là D(f) = **R** thì giá trị của các tham số a, b phải là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 4a+2b=7 \\ 17a+2b=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 3{,}5 \end{cases}$

2.3.2. Các tính chất của hàm số liên tục trên một đoạn

Định lý **2.3.2.1.** Giả sử $f(x) \in C_{[a,b]}$ thì

(1) f(x) bị chặn trên [a,b], tức là ∃M > 0 mà |f(x)| < M với ∀x∈[a,b];

(2) f(x) đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên [a,b], tức là ∃x_1, x_2 mà $f(x_1) = \min\limits_{[a,b]} f(x)$, $f(x_2) = \max\limits_{[a,b]} f(x)$;

(3) f(x) nhận mọi giá trị trung gian giữa giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của nó trên [a,b], tức là, nếu $m = \min\limits_{[a,b]} f(x)$ và $M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$ thì với ∀μ mà m ≤ μ ≤ M, ∃x_0∈[a,b] sao cho $f(x_0) = \mu$.

Hệ quả. Giả sử hàm số $f(x) \in C_{[a,b]}$; giả sử α, β∈[a,b] (α < β) và f(α).f(β) < 0 thì tồn tại một số c∈(α,β) sao cho f(c) = 0.

2.3.3. Tính liên tục của các hàm số sơ cấp

Các hàm số sau đây được gọi là các *hàm số sơ cấp cơ bản*: Hàm số lũy thừa ($f(x) = x^\alpha$, α∈**R**); hàm số mũ ($f(x) = a^x$, 0 < a ≠ 1); hàm số logarit ($f(x) = \log_a x$, 0 < a ≠ 1); các hàm số lượng giác (f(x) = sinx, f(x) = cosx; f(x) = tanx; f(x) = cotx) và các hàm số lượng giác ngược (f(x) = arcsinx, f(x) = arccosx; f(x) = arctanx; f(x) = arccotx).

Hàm số sơ cấp là hàm số được tạo thành bởi một số hữu hạn phép tính số học (cộng, trừ, nhân, chia), các phép lấy hàm số hợp đối với các hàm số sơ cấp cơ bản và các hằng số.

Trong các hàm số sơ cấp, người ta đặc biệt chú ý đến hai loại hàm số: *đa thức* và *phân thức hữu tỷ*, vì khi tính giá trị của các hàm số này, chỉ cần thực hiện các phép tính số học đối với biến.

Định lý **2.3.3.1.** Hàm số sơ cấp liên tục trong miền xác định của nó.

Bài tập

2.22. Dùng định nghĩa hàm số liên tục tại một điểm, chứng minh rằng các hàm số dưới đây, liên tục tại điểm $x_0 \in D(f)$

(a) $f(x) = x^2 + \sqrt{5-x}$ tại $x_0 = 4$ (b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x^3 - 1}$ tại $x_0 = 2$

2.23. Xác định giá trị của tham số a để các hàm số dưới đây, liên tục trên miền xác định của nó

(a) $f(x) = \begin{cases} 2e^x & \text{khi} \quad x < 0 \\ a + 2x & \text{khi} \quad x \ge 0 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos 3x}{x^2} & \text{khi} \quad x \ne 0 \\ a & \text{khi} \quad x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x & \text{khi} \quad x < 2 \\ x^3 - ax & \text{khi} \quad x \ge 2 \end{cases}$ (d) $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{khi} \quad x \le 0 \\ a(x-1) & \text{khi} \quad x > 0 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{2+x} - 1}{x+1} & \text{khi} \quad x < -1 \\ ax^2 + b & \text{khi} \quad -1 \le x \le 0 \\ \dfrac{e^{3x} - 1}{x} & \text{khi} \quad 0 < x \end{cases}$ (f) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{khi} \quad x \le 1 \\ ax + b & \text{khi} \quad 1 < x \le 2 \\ \dfrac{4}{x} & \text{khi} \quad 2 < x \end{cases}$

2.24. Xác định giá trị của tham số a để các hàm số dưới đây

(a) $f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{khi} \quad x \in [0,1] \\ x^2 + 2 & \text{khi} \quad x \in [1,2] \end{cases}$ liên tục trên đoạn [0,2]

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin x} & \text{khi} \quad x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right], x \ne 0, x \ne \pi \\ a & \text{khi} \quad x = 0 \\ b & \text{khi} \quad x = \pi \end{cases}$ liên tục trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$

2.25. Xác định f(2) để hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ liên tục tại x = 2.

2.26. Khảo sát sự liên tục, gián đoạn và phân loại điểm gián đoạn của các hàm số

(a) $f(x) = x + \dfrac{x+2}{|x+2|}$ (b) $f(x) = \dfrac{2|x-1|}{x^2 - x^3}$

(c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 2x - 3}$ (d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{|x-2|}$

(e) $f(x) = \operatorname{sgn}^2(x)$ (f) $f(x) = \lfloor x \rfloor$

(g) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x - 1} & \text{khi} \quad x \ne 1 \\ 1 & \text{khi} \quad x = 1 \end{cases}$ (h) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{khi} \quad x \le 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{khi} \quad 1 < x < 3 \\ \sqrt{x-3} & \text{khi} \quad x \ge 3 \end{cases}$