Упражнение 1.1. *Пусть X_t – процесс Леви с неубывающими траекториями (такой процесс называется субординатором). Докажите, что процесс*

$$Y_t = X_t + W_{X_t}$$

является процессом Леви. Винеровский процесс W и процесс X независимы.

1. $Y_0 = X_0 + W_{X_0} = 0 + W_0 = 0$

пр. Леви $\Rightarrow = 0$

2. $Y_t - Y_s = X_t - X_s + W_{X_t} - W_{X_s} =$ // т.к. X и W нз, а их приращения также нз и стац, то и их сумма приращений будет нз и стац. // $\sim Y_{t-s}$

3. càdlàg:

$$\lim_{h\to 0+} \mathbb{P}(|Y_{t+h} - Y_t| > \varepsilon) = \lim_{h\to 0+} \mathbb{P}(|Y_h| > \varepsilon) = \text{// нер-во Чебышева //} \leq \frac{\operatorname{Var} Y_h}{\varepsilon^2} = \frac{\operatorname{Var} X_h + \operatorname{Var} \overset{|X_h|}{\overset{\shortparallel}{W_{X_h}}}}{\varepsilon^2} \xrightarrow[h\to 0+]{} 0$$

Упражнение 1.2. *(Задача на замену предыдущей) Определим процесс*

$$X_t = P_t - t,$$

где P_t – сложенный процесс Пуассона с интенсивностью прыжков λ и величинами прыжков из экспоненциального распределения $Exp(\mu)$. Найдите представление в видел тройки Леви для процесса X_t.

$$X_t^{(2)} = P_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad N_t \sim Pois(\lambda t), \quad Y_i \overset{iid}{\sim} Exp(\mu)$$

$$-t = \underset{a}{\underset{\shortparallel}{-1}} \cdot t + \underset{\sigma}{\underset{\shortparallel}{0}} \cdot W_t = X_t^{(1)}$$

$\Rightarrow$ $X_t = X_t^{(1)} + X_t^{(2)}$, $(-1, 0, \nu)$ – тройка Леви

Упражнение 1.3. *Интеграл Стратоновича определяется похожим на интеграл Ито образом для функций $f \in \mathcal{V}(0,T)$ и в некоторых случаях бывает удобнее:*

$$\int_0^T f(t\omega) \circ dW_t = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i f((t_i + t_{i+1})/2, \omega) \Delta W_{t_i},$$

где предел берётся в смысле L^2. В общем случае интеграл Ито и интеграл Стратоновича разные. Вычислите по определению

$$\int_0^T W_t \circ dW_t.$$

и сравните с интегралом Ито. Подсказка: попробуйте увидеть интеграл Ито и потом найти предел в L^2 у того, что осталось.

$t'_j = \frac{t_{j+1} + t_j}{2}$

$$\int_0^T W_t \circ dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} W_{t'_j}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) = \lim_{n\to\infty} \sum_j (W_{t'_j} - W_{t_j})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) +$$

$$+ \underbrace{\sum_j W_{t_j}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})}_{\to \int_0^T W_t \, dW_t}$$

$$\sum_j (W_{t'_j} - W_{t_j})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) = \underline{I}$$

Предположим (ага, предположим), что $I \xrightarrow{L^2} \frac{T}{2}$, т.е.

$$\mathbb{E}\left[\left(I - \frac{T}{2}\right)^2\right] \to 0$$

Заметим, что $\mathbb{E}[I] = \sum_j \mathbb{E}\left[(W_{t'_j} - W_{t_j})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})\right] = \sum_j (t'_j - t_j) =$

t'_j $-t_j$ t_j $-t_j$

$$= \sum_j \frac{t_j + t_{j+1}}{2} - t_j = \sum_j \frac{t_{j+1} - t_j}{2} = \frac{1}{2}(T - 0) = \frac{T}{2}$$

Т.е. получим, что $\mathbb{E}\left[\left(I - \frac{T}{2}\right)^2\right] = \mathrm{Var}(I)$

независимость приращений

$$\mathrm{Var}(I) = \mathrm{Var}\left[\sum_j \left[(W_{t'_j} - W_{t_j})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})\right]\right] = \sum_j \mathrm{Var}\left[(W_{t'_j} - W_{t_j})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})\right] +$$

$$+ \underbrace{n(n-1)\sum \mathrm{Cov}(\quad)}_{\text{0 из. приращений}} = \sum_j \mathbb{E}\left[(W_{t'_j} - W_{t_j})^2 (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2\right] - \underbrace{\mathbb{E}\left[(W_{t'_j} - W_{t_j})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})\right]^2}_{(t'_j - t_j)^2} =$$

$$\mathbb{E}\left[(\underbrace{W_{t'_j}-W_{t_j}}_{s_j})^2(\underbrace{W_{t_{j+1}}-W_{t'_j}}_{t_j}+\underbrace{W_{t'_j}-W_{t_j}}_{s_j})^2\right] = \mathbb{E}\left[s_j^2\,(t_j^2+s_j^2+2t_js_j)\right] =$$

$$= \mathbb{E}[s_j^2\cdot t_j^2] + \mathbb{E}[s_j^4] + 2\underbrace{\mathbb{E}[t_j s_j^3]}_{=0}$$

$$\mathbb{E}[s_j^2\cdot t_j^2] = /\!/ \substack{\text{т.к}\\ s_j \perp\!\!\!\perp t_j} /\!/ = \mathbb{E}\, s_j^2\cdot\mathbb{E}\, t_j^2 = Var(s_j)\cdot Var(t_j) = (t'_j-t_j)(t_{j+1}-t'_j)$$

$$\mathbb{E}[s_j^4] = \left\| \substack{\text{4 момент}\\ \text{для гауссовской}\\ \text{с.в.}} \right\| = 3(Var(s_j))^2 = 3(t'_j-t_j)^2$$

$$= \sum_j (t'_j-t_j)(t_{j+1}-t'_j) + 3(t'_j-t_j)^2 - (t'_j-t_j)^2 = \sum_j (\ )(\ ) + 2(t'_j-t_j)^2 =$$

$$= \sum_j\left(\frac{t_j+t_{j+1}}{2}-t_j\right)\left(t_{j+1}-\frac{t_j+t_{j+1}}{2}\right) + 2\Big(\underbrace{\frac{t_j+t_{j+1}}{2}-t_j}_{=\frac{t_{j+1}-t_j}{2}}\Big)^2 = \sum_j \frac{(t_{j+1}-t_j)^2}{4} + 2\frac{(t_{j+1}-t_j)^2}{4} =$$

$$\frac{\cancel{2t_jt_{j+1}}+\cancel{2}t_{j+1}^2-\cancel{t_j^2}-\cancel{t_{j+1}^2}-\cancel{2t_jt_{j+1}}-\overset{-2t_jt_{j+1}}{\cancel{4t_jt_{j+1}}}+}{4}\ \frac{+\cancel{2}t_j^2+\cancel{2t_jt_{j+1}}}{4} =$$

$$= \frac{t_{j+1}+t_j^2-2t_jt_{j+1}}{4} = \frac{(t_{j+1}-t_j)^2}{4}$$

$$= \sum_j \frac{3}{4}(t_{j+1}-t_j)^2 \leqslant \max_j|t_{j+1}-t_j|\cdot\frac{3}{4}\sum_j t_{j+1}-t_j = \underbrace{\max_j|t_{j+1}-t_j|}_{\to 0}\cdot\frac{3}{4}T \to 0$$

$$\Rightarrow \text{т.е. } \int_0^T W_s\circ dW_s = \frac{W_T^2}{2}$$

Упражнение 1.4. *Пусть* $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *– одномерный Винеровский процесс. Вычислите*

$$\int_0^T \int_{t_1}^T \int_{t_2}^T dW_{t_3} dW_{t_2} dW_{t_1}.$$

У вас в ответе может остаться интеграл Римана.

$$\int_0^T \int_{t_1}^T \int_{t_2}^T dW_{t_3}\, dW_{t_2}\, dW_{t_1} = \int_0^T \int_{t_1}^T (W_T - W_{t_2})\, dW_{t_2}\, dW_{t_1} = \int_0^T W_T (W_T - W_{t_1}) dW_{t_1} - \int_0^T \boxed{\int_{t_1}^T W_{t_2} dW_{t_2}} dW_{t_1} =$$

$$= W_T^3 - W_T\left(\frac{W_T^2}{2} - \frac{T}{2}\right) - \int_0^T \left(\frac{W_T^2}{2} - \frac{T}{2} - \frac{W_{t_1}^2}{2} + \frac{t_1}{2}\right) dW_{t_1} = \frac{W_T^3}{2} + W_T \frac{T}{2} - \frac{W_T^3}{2} + \frac{T}{2} W_T + \frac{1}{2}\int_0^T W_{t_1}^2 dW_{t_1} - \frac{1}{2}\int_0^T t_1 dW_{t_1} \ominus$$

$$\int_0^T t_1\, dW_{t_1} = T W_T - \int_0^T W_{t_1}\, dt_1$$

$$dW_t^3 = 0\, dt + 3W_t^2 dW_t + \frac{3\cdot 2}{2} W_t\, dt \Rightarrow W_t^3 = 3\int_0^t W_s^2 dW_s + 3\int_0^t W_s\, ds$$

$$\Rightarrow \int_0^t W_s^2 dW_s = \frac{1}{3} W_t^3 - \int_0^t W_s\, ds$$

$$\ominus\ T W_T + \frac{1}{6} W_T^3 - \frac{1}{2}\int_0^T W_{t_1} dt_1 - \frac{1}{2} T W_T + \frac{1}{2}\int_0^T W_{t_1} dt_1 = \frac{T}{2} W_T + \frac{1}{6} W_T^3$$

$$\boxed{\int_{t_1}^T W_{t_2} dW_{t_2}} = \int_0^T W_{t_2} dW_{t_2} - \int_0^{t_1} W_{t_2} dW_{t_2} = \frac{W_T^2}{2} - \frac{T}{2} - \frac{W_{t_1}^2}{2} + \frac{t_1}{2}$$

Упражнение 1.5. *В каких-то случаях интеграл Стратоновича совпадает с интегралом Ито и это связано со свойствами траекторий интегрируемого процесса. Более того, покажите, что если существуют $K > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что*

$$\mathbb{E}\left[|f_t - f_s|^4\right] \le K|t-s|^{2+\gamma},$$

то для любого выбора $t_i^* \in [t_i, t_{i+1}]$ предел (в смысле L^2)

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_i f(t_i^*, \omega)\Delta W_{t_i} = \int_0^T f(t,\omega) dW_t.$$

Хотим показать, что $\forall t_i^*$ $\mathbb{E}\left[\left(\sum_i f(t_i^*,\omega)\Delta W_{t_i} - \int_0^T f(t,\omega)\,dW_t\right)^2\right] \xrightarrow[\Delta t_i \to 0]{} 0$

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_i f(t_i^*,\omega)\Delta W_{t_i} - f(t_i,\omega)\Delta W_{t_i}\right)^2\right] \overset{\text{Jensen}}{\le} \sum_i \mathbb{E}\left[\left(f(t_i^*,\omega) - f(t_i,\omega)\right)\Delta W_{t_i}^2\right] =$$

$$= \sum_i \mathbb{E}\left[\left(f(t_i^*,\omega) - f(t_i,\omega)\right)^2\right] \cdot \underbrace{\mathbb{E}\left[\Delta W_{t_i}^2\right]}_{\Delta t_i} \le$$

$$\mathbb{E}\left[\left(f(t_i^*,\omega) - f(t_i,\omega)\right)^2\right] \overset{\text{КБШ}}{\le} \sqrt{\mathbb{E}\left[\left(f(t_i^*,\omega) - f(t_i,\omega)\right)^4\right]} \le \sqrt{k\,|t_i^* - t_i|^{2+\gamma}} \le$$

$$\le \sqrt{k\,\Delta t_i^{2+\gamma}}$$

$$\le \sum_i \sqrt{k\,\Delta t_i^{2+\gamma}} \cdot \Delta t_i \xrightarrow{\Delta t \to 0} 0$$

Упражнение 2.1. *Пусть*

$$X_t = tW_t + \int_0^t W_s dW_s.$$

Найдите представление в виде процесса Ито для

$$Y_t = cos(X_t)t.$$

В финальном ответе можно не подставлять X_t и dX_t, но их нужно вычислить до конца, то есть, до уровня подстановки dt, dW_t.

$$g(t,x) = \cos(x)\cdot t \Rightarrow dY_t = \cos(X_t)\,dt - t\sin(X_t)\,dX_t - \frac{t}{2}\cos(X_t)(dX_t)^2 \circleddash$$

$$dX_t = W_t dt + (t + W_t)\,dW_t$$

$$(dX_t)^2 = \underbrace{W_t^2 (dt)^2}_{=0} + \underbrace{(t+W_t)^2 (dW_t)^2}_{(t+W_t)^2\,dt} + \underbrace{2W_t(t+W_t)\,dW_t\,dt}_{=0}$$

$$\circleddash \left(\cos(X_t) - \frac{t}{2}\cos(X_t)\cdot(t+W_t)^2\right)dt - t\sin(X_t)\,dX_t$$

$$\Rightarrow Y = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{Y_0}} + \int_0^t \left[\cos(X_s) - \frac{s}{2}\cos(X_s)(s+W_s)^2\right]ds - \int_0^t s\cdot\sin(X_s)\,dX_s$$

Упражнение 2.2. *Найдите плотность распределения случайной величины*

$$\int_0^t W_s^2 dW_s + \int_0^t W_s ds.$$

$$\int_0^t W_s^2\,dW_s + \int_0^t W_s\,ds = \frac{1}{3} W_t^3$$

Знаем, что если $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$, то $X^3 \sim p(x) = \mathcal{N}(\sqrt[3]{x}, 0, \sigma^2)\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{3}} W_t \sim \mathcal{N}\left(0, t\,\frac{1}{3^{2/3}}\right) \Rightarrow \frac{1}{3} W_t^3 \sim p(x) = \mathcal{N}\left(\sqrt[3]{x}, 0, t\cdot\frac{1}{3^{2/3}}\right)\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Упражнение 2.3. *Проверьте, является ли процесс*

$$X_t = (W_t + t)e^{-W_t - \frac{t}{2}}$$

мартингалом относительно фильтрации $(\mathcal{F})$, *порождённой Винеровским процессом* W.

$$dX_t = e^{-W_t - \frac{t}{2}}\left(1 - \frac{1}{2}(W_t + t)\right)dt + e^{-W_t-\frac{t}{2}}(1 - W_t - t)\,dW_t + \frac{1}{2}\cdot e^{-W_t - \frac{t}{2}}\cdot(W_t + t - 2)\,dt =$$

$$= e^{-W_t - \frac{t}{2}}\underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}W_t - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}W_t + \frac{1}{2}t - 1\right)}_{=0} + e^{-W_t - \frac{t}{2}}(1 - W_t - t)\,dW_t$$

$$\Rightarrow X_t = \int_0^t e^{-W_s - \frac{s}{2}}(1 - W_s - s)\,dW_s$$ – мартингал

Покажем, что $X_t \in L_1$: $\mathbb{E}|X_t| \le \mathbb{E}\left[(|W_t| + t)e^{-W_t - \frac{t}{2}}\right] \le \mathbb{E}\left[(|W_t| + t)e^{-W_t}\right] = \mathbb{E}\left[|W_t| e^{-W_t}\right] + t\,\mathbb{E}\left[e^{-W_t}\right]$

$t\,\mathbb{E}\left[e^{-W_t}\right] = \Big/\!\!\Big/\ \mathbb{E}\left[e^{tZ}\right] = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}\ \Big/\!\!\Big/ = t\,e^{\frac{t}{2}}$

$$\mathbb{E}\left[|W_t| e^{-W_t}\right] \underset{\text{КБШ}}{\le} \sqrt{\mathbb{E}\left[W_t^2\right]\mathbb{E}\left[e^{-2W_t}\right]} = \sqrt{t\cdot e^{2t}} \qquad \Rightarrow X_t \in L_1$$

Упражнение 2.4. *Будет ли процесс* X_t^2, *где* X_t *определён как процесс Ито*

$$dX_t = v(t,\omega)dW_t,$$

мартингалом относительно фильтрации $(\mathcal{F})$, *порождённой Винеровским процессом* W? *Покажите, что процесс*

$$M_t = X_t^2 - \int_0^t |v(s,\omega)|^2 ds \qquad v = f$$

будет мартингалом при условии ограниченной v.

Посмотрим на $Y_t = X_t^2$: $dY_t = 2X_t dX_t + (dX_t)^2 = 2X_t f(t,\omega)\,dW_t + f(t,\omega)^2\,dt$

$\Rightarrow dM_t = dY_t - |f(t,\omega)|^2 dt = 2X_t f(t,\omega)\,dW_t$ – зависит только от dW_t $\Rightarrow$ мартингал.

но надо проверить, что $M_t \in L_1$:

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s,\omega)\,dW_s \Rightarrow X_t^2 = X_0^2 + \left(\int_0^t f(s,\omega)\,dW_s\right)^2 + 2X_0\int_0^t f(s,\omega)\,dW_s$$

Проверим, что $M_t \in L_1$: $\mathbb{E}\left[X_0^2\right]$ – const

$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t f(s,\omega)\,dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t f(s,\omega)^2\,ds\right] < \infty$, т.к. $f \in \mathcal{V}(0,t)$

$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t f(s,\omega)\,dW_s\right|\right] \le \sqrt{\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t f(s,\omega)\,dW_s\right)^2\right]} < \infty$

$\mathbb{E}\left[\left|\int |f(s,\omega)|^2 ds\right|\right] < \infty$ в силу огр. f.

Упражнение 2.5. *Докажите, что для интеграла Ито верно*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \int_0^S f(t,\omega)f(s,\omega)dW_s dW_t\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge S} f(s,\omega)^2 dt\right]$$

$T>S$

Пусть φ — простая огр. ф-ция $\in \mathcal{V}(0, S\vee T)$. Докажем для них, чтобы перейти к f вспомним, что $\varphi \xrightarrow{L_2} f$.

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \varphi(t,\omega)\,dW_t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^T \varphi(t,\omega)\varphi(s,\omega)\,dW_s\,dW_t\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^S \varphi(t,\omega)\varphi(s,\omega)\,dW_s\,dW_t\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T\int_S^T\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \varphi^2(t,\omega)\,dW_t\right]$$

Теперь покажем, что $\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_S^T\right] = \mathbb{E}\left[\int_S^T \varphi^2(t,\omega)\,dW_t\right]$. Тогда получим, что искомый матож. $= \mathbb{E}\left[\int_0^S \varphi^2(t,\omega)\,dW_\tau\right]$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_S^T \varphi(t,\omega)\varphi(s,\omega)\,dW_s\,dW_t\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=k}^{n-1} \varphi(t_i,\omega)\varphi(t_j,\omega)\,\Delta W_{t_i}\,\Delta W_{t_j}\right] = \left\| \begin{array}{l} i=j:\ \mathbb{E} = \mathbb{E}\,\varphi^2(t_j,\omega)\cdot\Delta t_j \\ i\neq j:\ 0 \end{array} \right\| =$$

$$= \mathbb{E}\sum_{j=k}^{n-1} \varphi^2(t_i,\omega)\,\Delta t_j = \mathbb{E}\left[\int_S^T \varphi^2(t,\omega)\,dt\right].$$

Далее получаем точь-в-точь к с изометрией для любых f.

Чуть позже придумал ещё один способ:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^S\int_0^T\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^S f(s,\omega)\,dW_s \cdot \underbrace{\int_0^T f(t,\omega)\,dW_t}_{\int_0^S + \int_S^T}\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^S f(s,\omega)\,dW_s\right)^2 + \underbrace{\int_S^T \cdot \int_0^S}_{\text{не пересек} \Rightarrow \text{НЗ}}\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[\int_0^S f(s,\omega)^2\,dt\right], \text{ т.к. } \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t,\omega)\,dW_t\right] = 0$$

2.6 будет чуть ниже

Упражнение 2.7. *(Бонус, 2.5 балла)Пусть $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ – одномерный Винеровский процесс, а $f \in \mathcal{V}(0,T)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[0,T]$. Найдите конечномерные распределения (плотность, если есть) процесса*

$$Y_t = \int_0^t f(s)dW_s,$$

определённого на $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. У вас в ответах может остаться интеграл Римана. Обратите внимание(!), что интеграл Ито – предел в L^2, а не по распределению.

Сначала поймём, почему $Y_t \sim \mathcal{N}$? Т.к. Y_t это L_2 предел $\sum\limits_i f(t_i,\omega)(\underbrace{W_{t_{i+1}}-W_{t_i}}_{\sim\mathcal{N}})$, то и $Y_t \sim \mathcal{N}$, ведь L_2 предел нормальных с.в. – это нормальная с.в.

Чтобы доказать это, докажем более общее утв.:

Утв.: $X_1, X_2, \ldots \sim \mathcal{N}(0,\sigma_i^2)$. Тогда $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X_\infty \iff X_n \xrightarrow{L_2} X_\infty$, $X_\infty \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$, где $\sigma^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n^2$

$\Leftarrow$ Знаем, что $X_n \xrightarrow{L_2} X_\infty \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X_\infty$

$\Rightarrow$ Из $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X_\infty$ имеем $\varphi_{X_n}(t) \to \varphi_{X_\infty}(t)$, т.е. $\mathbb{E}\, e^{itX_n} \to \mathbb{E}\, e^{itX_\infty}$

$$\mathbb{E}\, e^{itX_n} = e^{t^2\frac{\sigma_n^2}{2}} \xrightarrow[\sigma_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma^2]{} e^{t^2\frac{\sigma^2}{2}} \Rightarrow X_\infty \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$$

$\Rightarrow \sup\limits_n \sigma_n^2 < \infty$

Теперь надо показать, что X_n^2 равномерно интегрируемые. За 3 курса у нас этого ни разу не было, поэтому я не шарю за это.

Но вроде как, если $\mathbb{E}[|X_n|^2] < \infty$, то X_n^2 – равном. интегр. Ну а $\mathbb{E}[|X_n|^2] = \sigma_n^2 \leq \sup\limits_n \sigma_n^2 < \infty$

$\Rightarrow$ т.к. $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X_\infty$, X_n^2 равном. инт., то $X_n \xrightarrow{L_2} X_\infty$.

Ну и из этого следует более слабая теорема, которая нам как раз и нужна: $X_n \xrightarrow{d} X_\infty \iff X_n \xrightarrow{L_2} X_\infty$, $\sigma^2 \to \sigma_n^2$, где $X_n \sim \mathcal{N}(0,\sigma_n^2)$, $X_\infty \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$

$$\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}\left[\int_0^t f(s)\,dW_s\right] = 0$$

$$\mathrm{Var}[Y_t] = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t f(s)\,dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t f(s)^2\,ds\right] = \int_0^t f(s)^2\,ds$$

$$\Rightarrow Y_t \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^t f(s)^2\,ds\right)$$

2.6. $Y_t = \int_0^t e^{-s}\,dW_s$

$$\int_0^t e^{-2s}\,ds = -\frac{1}{2}e^{-2t} \Rightarrow Y_t \sim \mathcal{N}\left(0, -\frac{1}{2}e^{-2t}\right)$$