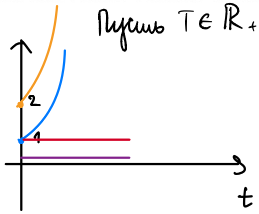
**Упражнение 1.1.** *Пусть случайные величины $U \sim Bernoulli(1/3)$ и $V \in \mathcal{U}[0,1]$ независимы, а случайный процесс задаётся как $X_t = Ue^t + V$.*

1. *Нарисуйте траектории процесса $X$.*
2. *Опишите семейство конечномерных распределений процесса $X$.*
3. *Найдите матожидание и ковариационную функцию процесса $X$.*

Пусть $T \in \mathbb{R}_+$

1)




2) $F_{X_t}(x) = \mathbb{P}(U e^t + V \leqslant x) = \frac{1}{3}\overset{=F_V(x-e^t)}{\mathbb{P}(e^t + V \leqslant x)} + \frac{2}{3}\overset{=F_V(x)}{\mathbb{P}(V \leqslant x)} =$

$= \frac{1}{3} \cdot \begin{cases} 0, & x-e^t < 0 \\ x-e^t, & x-e^t \in [0,1] \\ 1, & x-e^t > 1 \end{cases} + \frac{2}{3}\begin{cases} 0, & x<0 \\ x, & x \in [0,1] \\ 1, & x>1 \end{cases}$

3) $m(t) = \mathbb{E}[U e^t + V] = e^t\,\mathbb{E}[U] + \mathbb{E}[V] = \frac{e^t}{3} + \frac{1}{2}$

$K(t,s) = Cov(X_t, X_s) = Cov(U e^t + V, U e^s + V) = e^{t+s}\,Var[U] + (e^t + e^s)\cdot Cov(U,V) + Var[V] = \frac{2e^{t+s}}{9} + (e^t+e^s)\cdot(\underbrace{\mathbb{E}[U\cdot V] - \mathbb{E}[U]\cdot\mathbb{E}[V]}_{\overset{\shortparallel}{0} \quad U \perp\!\!\!\perp V}) + \frac{1}{12} =$

$= \frac{2e^{t+s}}{9} + \frac{1}{12}$

**Упражнение 1.2.** *Пусть $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ – процесс гауссовского белого шума с дисперсией 1 и заданы числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Процесс $(X_t)_{t\in T}$ определим как*

$$X_{t+1} = \alpha\varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t+1}.$$

*Найдите матожидание и ковариационную функцию процесса $X$. Проверьте, является ли процесс стационарным в широком смысле.*

$\mathbb{E}[X_{t+1}] = \alpha\,\mathbb{E}\,\varepsilon_t + \beta\,\mathbb{E}\,\varepsilon_{t-1} + \mathbb{E}\,\varepsilon_{t+1} = 0$

$Var[X_{t+1}] = \mathbb{E}[X_{t+1}^2] = \mathbb{E}[\alpha^2\varepsilon_t^2 + \beta^2\varepsilon_{t-1}^2 + \varepsilon_{t+1}^2 + \ldots] = \alpha^2 + \beta^2 + 1$

$K(t, t+s) = Cov(X_t, X_{t+s}) = \mathbb{E}\,X_t \cdot X_{t+s} - \underbrace{\mathbb{E}\,X_t \cdot \mathbb{E}\,X_{t+s}}_{\overset{\shortparallel}{0}}$

$s=1:\ \mathbb{E}(\alpha\varepsilon_{t-1} + \beta\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t)(\alpha\varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t+1}) = \mathbb{E}[\alpha\beta\,\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha\,\varepsilon_t^2] =$

$= \alpha\beta + \alpha$

$s=2:\ \mathbb{E}(\alpha\varepsilon_{t-1} + \beta\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t)(\alpha\varepsilon_{t+1} + \beta\varepsilon_t + \varepsilon_{t+2}) = \beta$

$s>2:\ \mathbb{E} = 0$

Ответ: является.

**Упражнение 1.3.** *Докажите, что в случае гауссовского процесса из стационарности в широком смысле следует стационарность в узком смысле.*

Знаем, что $\mathbb{E}$ и $\mathrm{Var} < \infty$, $\underbrace{\mathbb{E} = const}$ и $K(s,t) = \tilde{K}(t-s)$. Также знаем, что

$$\mathbb{P}(X_{t_1}\in A_1,\dots,X_{t_k}\in A_k) = \int\limits_{A_1\times\dots\times A_k} p(x_1,\dots,x_k)\,dx_1\dots dx_k \;;\; p(x_1,\dots,x_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k\det(\Sigma)}}\, e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma(x-\mu)}$$

Посмотрим на $\mathbb{P}(X_{t_1+h}\in A_1,\dots,X_{t_k+h}\in A_k) = \int\limits_{A_1\times\dots\times A_k} p'(x_{1+h},\dots,x_{k+h})\,dx_{1+h}\dots dx_{k+h}$

$\mu$ у $p$ и $p'$ равны, потому что . $\Sigma$ останется такой же, т.к. если посмотреть на функцию, которая её задаёт, то $K(t,s) = \tilde{K}(t-s) = \tilde{K}(t+h-h-s) = K(t+h, s+h)$.

$\tilde{K}(t+h-(s-h))$

А значит $p$ и $p'$ равны и имеем стационарность в узком смысле.

**Упражнение 1.4.** *Пусть $T\in\mathbb{R}$, $(X_t)_{t\in T}$ – гауссовский процесс с $m(t)=0$. Проверьте, будет ли процесс стационарным (в широком смысле), если ковариационная функция*

1. *квадратичная $K(t,s) = (ts)^2$;*
2. *функция Орнштейна-Уленбека $K(t,s) = e^{-\frac{|t-s|}{2l}}$ с параметром $l\in\mathbb{R}$.*

1) $K(t,t+u) = (t(t+u))^2 = (t^2+tu)^2 = t^4 + t^2u^2 + 2ut^3$ – нельзя представить к $\tilde{K}(u)$ – не явл.

2) $K(t,t+u) = e^{-\frac{|u|}{2l}} = \tilde{K}(u)$, $\mathrm{Var} = e^{-\frac{0}{2l}} = 1 < \infty$ – явл.

**Упражнение 1.5.** *(2.5 балла) Пусть $T\in\mathbb{R}$, $(X_t)_{t\in T}$ – гауссовский процесс с $m(t)=0$ и $K(t,s)=ts$. Докажите, что траектории процесса – это прямые, исходящие из 0.*

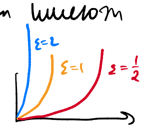
$X_t \sim \mathcal{N}(0,t^2) \Rightarrow X_t = t\cdot\varepsilon + 0$, $\varepsilon\sim\mathcal{N}(0,1)$.

$\varepsilon$ мы как бы фиксируем для каждой траектории. Т.е. $\varepsilon$ коэф. наклона.

А значит траектории – это прямые вида $\varepsilon t$ (ну и понятно, что они через 0 проходят.)

**Упражнение 1.6.** *(2.5 балла) Пусть $T\in\mathbb{R}$, $(X_t)_{t\in T}$ – гауссовский процесс с $m(t) = 0$ и $K(t,s) = f(t)f(s)$ для некоторой $s$. Объясните (и докажите), какой вид имеют траектории процесса.*

$X_t \sim \mathcal{N}(0,(f(t))^2) \Rightarrow X_t = f(t)\cdot\varepsilon \Rightarrow$ Т.е. траектории имеют вид $f(t)$, сжатой (по абсциссе) в $\varepsilon$ раз. Если $f(t) = t^2$, то




↗ это в $\mathbb{R}_+$, но суть такая же

**Упражнение 2.1.** *Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство, $(X_t)_{t \in T}$ – гауссовский процесс с индексным пространством $T = \mathbb{R}$ и принимающий значения в $\Xi = \mathbb{R}$, обладающий нулевым матожиданием и ковариационной функцией*

$$K(t,s) = e^{-\frac{|t-s|^2}{2}}.$$

*Докажите, что траектории $X$ в каждой точке $t \in T$ являются почти наверное непрерывными.*

$$\mathbb{E}\,|X_t - X_s|^{\alpha} \leq D\,|t-s|^{1+\beta}$$

$$\alpha = 2:\ \mathbb{E}\,|X_t - X_s|^2 = \underbrace{\mathbb{E}\,X_t^2}_{e^{-\frac{(t-t)^2}{2}} = 1} + \underbrace{\mathbb{E}\,X_s^2}_{1} - 2\underbrace{\mathbb{E}\,X_t X_s}_{e^{-\frac{|t-s|^2}{2}}} = 2\left(1 - e^{-\frac{|t-s|^2}{2}}\right) \leq 2(t-s)^2$$

$$e^{-\frac{|t-s|^2}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-(t-s)^2}{2}\right)^k}{k!}$$

$$= 2\left(1 - 1 + \frac{(t-s)^2}{2} + o\left((t-s)^{2k}\right)\right)$$

$\Rightarrow$ по Т. Колмогорова $(X_t)$ – процесс с непрерывными траекториями.

**Упражнение 2.2.** *Докажите, что следующие два определения $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ одномерного Винеровского процесса ($W_0 = 0$ для простоты) эквивалентны.*

1. *(Конструкция с лекции)*

   (a) *$W_0 = 0$ почти наверное;*

   (b) *$W$ – процесс с независимыми приращениями;*

   (c) *для всех $t, s \in \mathbb{R}_+$ приращение $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, |t-s|)$;*

2. *$W$ – гауссовский процесс с матожиданием $\mathbb{E}\,[W_t] = 0$ и ковариационной функцией $K(t,s) = t \wedge s$.*

1) $\Rightarrow$ 2) доказано в конспекте лекции (только там $W_0 = \tilde{x}$, а тут 0)

1) $\Leftarrow$ 2)

a) $\mathbb{E}[W_0] = 0 \Rightarrow W_0 = 0$ a.s.

в) $\mathrm{Cov}(W_t - W_{t-1}, W_{t-1} - W_{t-2}) = K(t, t-1) - K(t, t-2) - K(t-1, t-1) + K(t-1, t-2) = (t-1) - (t-2) - (t-1) + (t-2) = 0$

$$W_t \sim \mathcal{N}(0, t) \Rightarrow W_t - W_s \sim \begin{cases} \mathcal{N}(0, t-s), & t \geq s \\ \mathcal{N}(0, s-t), & s > t \end{cases} \Rightarrow W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, |t-s|)$$

**Упражнение 2.3.** *Пусть* $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *– одномерный Винеровский процесс с началом в нуле* ($W_0 = 0$ *почти наверное) и* $T \in \mathbb{R}_+$. *Процесс* $B$ *определяется как*

$$B_t = W_t - \frac{t}{T}W_T, \quad t \in [0,T]$$

*и называется Броуновским мостом. Вычислите матожидания*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \int_0^T B_t B_s dt ds\right].$$

Тут всё непрерывно, так что можем закинуть $\mathbb{E}$ вовнутрь (по Т. Фубини)

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \int_0^T B_t B_s dt ds\right] = \int_0^T \int_0^T \mathbb{E}[B_t B_s] dt ds =$$

$$\mathbb{E}[B_t B_s] = \mathrm{Cov}\left(W_t - \frac{t}{T}W_T, W_s - \frac{s}{T}W_T\right) =$$

$$= k(t,s) - \frac{s}{T}k(t,T) - \frac{t}{T}k(T,s) + \frac{t\cdot s}{T^2}k(T,T) =$$

$$= t\wedge s - \frac{st}{T} - \frac{t\cdot s}{T} + \frac{t\cdot s}{T^2}\cdot T = t\wedge s - \frac{st}{T}$$

$$= \underbrace{\int_{[0,T]^2} t\wedge s \, dt ds}_{\frac{T^3}{3}\text{ на семе считали}} - \int_{[0,T]^2} \frac{st}{T} dt ds = \frac{T^3}{3} - \frac{T^3}{4} = \frac{T^3}{12}$$

$$\int_{[0,T]^2} \frac{st}{T} dt ds = \int_0^T \frac{s}{T}\frac{T^2}{2} ds = \frac{T^2}{2T}\frac{T^2}{2} = \frac{T^3}{4}$$

**Упражнение 2.4.** *Пусть* $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *– одномерный Винеровский процесс(модификация) такой, что в каждой точке траектории почти наверное непрерывны. Используя усиленный закон больших чисел:*

$$\frac{W_t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \quad \textit{почти наверное,} \; -$$

*докажите, что* $(tW_{1/t})_{t\in\mathbb{R}_+}$ *– тоже Винеровский процесс с траекториями, которые в каждой точке почти наверное непрерывны.*

Проверим определение (1)

1) $t' = \frac{1}{t} \Rightarrow \underbrace{tW_{1/t}}_{X_t} = \frac{W_{t'}}{t'} \xrightarrow[t'\to\infty]{} 0$ a.s.

$// t \to 0 //$

$\Rightarrow X_0 = 0$ a.s.

$t_0 > t_1 > t_2$

2) $\mathrm{Cov}(X_t - X_{t-1}, X_{t-1} - X_{t-2}) = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-1}) - \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-2}) - \mathrm{Cov}(X_{t-1}, X_{t-1}) + \mathrm{Cov}(X_{t-1}, X_{t-2}) =$

$= t_0 t_1 \; k\left(\frac{1}{t_0}, \frac{1}{t_1}\right) - t_0 t_2 \; k\left(\frac{1}{t_0}, \frac{1}{t_2}\right) - t_1^2 \; k\left(\frac{1}{t_1}, \frac{1}{t_1}\right) + t_1 \cdot t_2 \; k\left(\frac{1}{t_1}, \frac{1}{t_2}\right) = t_0 t_1 \frac{1}{t_1} - t_0 t_2 \cdot \frac{1}{t_2} - t_1^2 \cdot \frac{1}{t_1} + t_1 t_2 \cdot \frac{1}{t_2} =$

$= 0$

3) $X_t = t W_{1/t} \sim \mathcal{N}(0, t)$

$X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, |t-s|)$

4) т.к. $W_{\frac{1}{t}}$ непрерывен, то и $t W_{\frac{1}{t}}$ непрерывен.

**Упражнение 2.5.** *Пусть* $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ *– одномерный Винеровский процесс,* $c \in \mathbb{R}$*. Докажите, что* $\sqrt{c} W_{t/c}$ *– Винеровский процесс.*

a) $X_0 = \sqrt{c}\, W_0 = 0$ a.s.

в) $t_0 > t_1 > t_2$

$\mathrm{Cov}\left(X_{t_0} - X_{t_1}, X_{t_1} - X_{t_2}\right) = c \cdot \left( K\left(\frac{t_0}{c}, \frac{t_1}{c}\right) - K\left(\frac{t_0}{c}, \frac{t_2}{c}\right) - K\left(\frac{t_1}{c}, \frac{t_1}{c}\right) + K\left(\frac{t_1}{c}, \frac{t_2}{c}\right)\right) =$

$= c \cdot \left( \frac{t_1}{c} - \frac{t_2}{c} - \frac{t_1}{c} + \frac{t_2}{c}\right) = 0$ // если $c > 0$

$= c \cdot \left( \frac{t_0}{c} - \frac{t_0}{c} - \frac{t_1}{c} + \frac{t_1}{c}\right) = 0$ // если $c < 0$.

c) $X_t = \sqrt{c}\, W_{\frac{t}{c}} \sim \mathcal{N}\left(0, (\sqrt{c})^2 \cdot \frac{t}{c}\right) = \mathcal{N}(0, t)$

$\Rightarrow X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, |t-s|)$