Упражнение 4.1. *(2 балла) Совместное распределение для цепи Маркова задается следующим образом:*

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, ..., X_n = i_n) = \mu_{i_0} p_{i_0 i_1}(1) p_{i_1 i_2}(2) ... p_{i_{n-1} i_n}(n). \tag{4.1}$$

Как в этом случае будут выглядеть совместные распределения для произвольных моментов времени $t_1, t_2, ... t_k$ и произвольных множеств $A_1, A_2, ... A_n \in \mathcal{F}$?

Почему семейство распределений, заданное формулой 4.1, будет согласованным?

$$F_{t_1,\dots,t_k}(A_1, \dots, A_k) = \mu_{i_0} \cdot p_{i_0 i_2}(t_{\sigma(1)}) \cdot \ldots \cdot p_{i_{k-1} i_k}(t_{\sigma(k)}),$$

где σ - сортировка времени в порядке возрастания.

Проверим условия согласованности:

1) $$\nu_{t_{\sigma(1)},\dots,t_{\sigma(k)}}(A_1,\dots,A_k) = \sum_{\substack{i_1 \in A_1 \\ \dots \\ i_k \in A_k}} \mu_{i_0} p_{i_0 i_1}(t_{\sigma(1)}) \cdot \ldots \cdot p_{i_{k-1} i_k}(t_{\sigma(k)}) = \sum_{\substack{i_1 \in A_{\sigma^{-1}(1)} \\ \dots \\ i_k \in A_{\sigma^{-1}(k)}}} \mu_{i_0} p_{i_0 i_1}(t_1) \cdot \ldots \cdot p_{i_{k-1} i_k}(t_k) =$$

$$= \nu_{t_1,\dots,t_k}(A_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, A_{\sigma^{-1}(k)})$$

2) $$\nu_{t_1,\dots,t_{k+m}}(A_1,\dots,A_k,\Theta,\dots,\Theta) = \sum_{\substack{i_1 \in A_1 \\ \dots \\ i_k \in A_k \\ i_{k+1} \in \Theta \\ \dots \\ i_{k+m} \in \Theta}} \mu_{i_0} p_{i_0 i_1}(t_1) \cdot \ldots \cdot p_{i_{k-1} i_k}(t_k) \underbrace{p_{i_k i_{k+1}}(t_{k+1}) \cdot \ldots \cdot p_{i_{k+m-1} i_{k+m}}(t_{k+m})}_{\text{общий множитель}} =$$

$$= \sum_{\substack{i_{k+1} \in \Theta \\ \dots \\ i_{k+m} \in \Theta}} p_{i_k i_{k+1}}(t_{k+1}) \cdot \ldots \cdot p_{i_{k+m-1} i_{k+m}}(t_{k+m}) \cdot$$

$$\cdot \sum_{\substack{i_1 \in A_1 \\ \dots \\ i_k \in A_k}} \mu_{i_0} p_{i_0 i_1}(t_1) \cdot \ldots \cdot p_{i_{k-1} i_k}(t_k) = 1 \cdot \sum_{\substack{i_1 \in A_1 \\ \dots \\ i_k \in A_k}} \mu_{i_0} p_{i_0 i_1}(t_1) \cdot \ldots \cdot p_{i_{k-1} i_k}(t_k) = \nu_{t_1,\dots,t_k}(A_1,\dots,A_k)$$

Упражнение 4.2. *(3 балла) Пусть $G = (V, E)$ - связный неориентированный граф, по которому случайным марковским образом движется агент. Определим вероятность перехода агента из вершины u в вершину v по ребру $(u, v) \in E$ как $p_{uv} = k_u^{-1}$, где k_u - количество вершин, смежных с u. Докажите, что у данной цепи существует инвариантное распределение и найдите его.*

Пусть $\pi_i = \frac{k_i}{2|E|}$. Проверим, выполняется ли условие детального баланса:

$$\pi_i p_{ij} \overset{?}{=} \pi_j \cdot p_{ji}$$

$$\frac{k_i}{2|E|} \cdot \frac{1}{k_i} = \frac{k_j}{2|E|} \cdot \frac{1}{k_j} \quad \text{- верно}$$

Осталось показать, что $\sum_i \pi_i = 1$. Известен факт, что $2|E| = \sum_i k_i$

$$\Rightarrow \sum_i \pi_i = \sum \frac{1}{2|E|} \cdot k_i = 1$$

Упражнение 4.3. *(3 балла) Пусть марковская цепь задана следующей переходной матрицей:*

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \frac{\alpha}{N-1} & \dots & \frac{\alpha}{N-1} \\ \frac{\alpha}{N-1} & 1-\alpha & \dots & \frac{\alpha}{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\alpha}{N-1} & \dots & \frac{\alpha}{N-1} & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

Найти переходные вероятности за n шагов и инвариантное распределение для этой марковской цепи.

Начнём с π: понятно, что $p_1 = \dots = p_N$, ведь $p_1(1-\alpha) + \frac{\alpha}{N-1}(p_2 + \dots + p_N) = p_1$

чтобы π было вероятностью, пусть $\pi = \left(\frac{1}{N} \dots \frac{1}{N}\right)$

Теперь с переходными вероятностями:

$$P^1 = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \frac{\alpha}{N-1} & 1-\frac{\alpha}{N-1} \end{bmatrix}, \quad P_{11}^2 = (1-\alpha)^2 + \frac{\alpha^2}{N-1} \qquad P_{11}^n = P_{11}^{n-1} P_{11} + P_{21} \cdot P_{12}$$

$$P_{22}^2 = \frac{\alpha^2}{N-1} + \left(1 - \frac{\alpha}{N-1}\right)^2 \qquad P_{22}^n = P_{22}^{n-1} P_{22} + P_{21} \cdot P_{12}$$

$$P_{12}^2 = (1-\alpha)\cdot\alpha + \alpha\cdot\left(1-\frac{\alpha}{N-1}\right) \qquad P_{12}^n = P_{11}^{n-1}\cdot P_{12} + P_{12}^{n-1}\cdot P_{22}$$

$$P_{21}^2 = (1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{N-1}\right) + \left(\frac{\alpha}{N-1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{N-1}\right) \qquad P_{21}^n = P_{21}^{n-1}\cdot P_{11} + P_{22}^{n-1}\cdot P_{21}$$

Тогда можем записать следующие формулы:

(a) $P_{ii}^n = P_{ii}^{n-1} P_{ii} + P_{21}^{n-1}\cdot P_{21}\cdot(N-1)$, $P_{12}^n = (N-1) P_{21}^n$

(b) $P_{21} = P_{21}^{n-1} P_{22} + P_{22}^{n-1}\cdot P_{21} + P_{21}^{n-1} P_{21}(N-2)$

Докажем по индукции:

База: $P_{11}^2 = P_{11}\cdot P_{11} + P_{21}\cdot P_{21}(N-1)$ – верно

$P_{22}^2 = P_{22}\cdot P_{22} + P_{21}\cdot P_{21}(N-1)$ – верно

$$P_{21}^2 = \underbrace{P_{21}\cdot P_{11} + P_{22}\cdot P_{21}}_{\text{перемножим матрицы}} = P_{22}\cdot P_{21} + P_{21}\cdot P_{22} + P_{21}P_{21}(N-2) \Rightarrow P_{21}P_{11} = P_{21}P_{22} + P_{21}P_{21}(N-2)$$

$$\Rightarrow P_{11} = P_{22} + P_{21}(N-2)$$

$$1-\alpha = 1 - \frac{\alpha}{N-1} + \frac{\alpha}{N-1}(N-2)$$

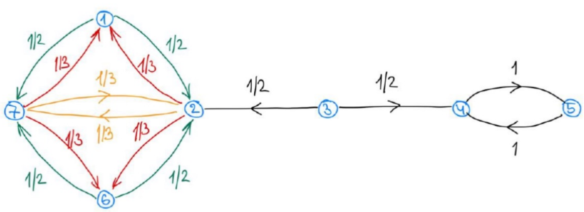
$$-\alpha = -\frac{\alpha + N\alpha - 2\alpha}{N+1} = -\frac{N\alpha - \alpha}{N-1} = -\alpha \text{ – верно}$$

$P_{11}^{n+1} = P_{11}^n P_{11} + P_{12}^n\cdot P_{21} = P_{11}^n\cdot P_{11} + P_{21}^n\cdot P_{21}\cdot(N-1)$ ✓

$P_{22}^{n+1} = P_{22}^n\cdot P_{22} + P_{21}^n\cdot P_{12} = P_{22}^n\cdot P_{22} + P_{21}^n\cdot P_{21}(N-1)$ ✓

$P_{21}^{n+1} = P_{21}^n\cdot P_{11} + P_{22}^n\cdot P_{21} \overset{?}{=} P_{21}^n\cdot P_{22} + P_{22}^n\cdot P_{21} + (N-2)P_{21}^n P_{21} \Rightarrow P_{11} = P_{22} + (N-2)\cdot P_{21}$ – уже показали ✓

Упражнение 4.4. *(5 балла) Найдите асимптотическое поведение матрицы P^n для цепи Маркова, заданной следующим графом*



$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Понятно, что тут компоненты, попав куда мы не выйдем. Т.е. если мы начали из вершины 3, то мы идём либо вправо и просто крутимся по кругу, либо влево и крутимся там.
В первом случае стационарного распределения не существует, а во втором существует, потому что матрица эргодическая

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{3}(p_2 + p_4) = p_1 = p_3$$

$$\frac{1}{2}(p_1 + p_3) + \frac{1}{3} p_4 = p_2$$

$$\frac{1}{2}(p_1 + p_3) + \frac{1}{3} p_2 = p_4$$

$$\Rightarrow p_2 = p_4 \Rightarrow$$

$$p_1 + \frac{1}{3} p_4 = p_4$$

$$\frac{3}{2} p_1 = p_4$$

$$2p_1 + \frac{6}{2} p_1 = 1 \Rightarrow p_1 = \frac{1}{5} = p_3$$

$$p_2 = p_4 = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow \pi = \left(\frac{1}{5} \;\; \frac{3}{10} \;\; \frac{1}{5} \;\; \frac{3}{10}\right)$$

$$\Rightarrow P^n = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.15 & 0 & \frac{I}{2} & \frac{1-I}{2} & 0.1 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0 & I' & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & I' & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$I = [n \% 2 = 1]$$
$$I' = [n \% 2 = 0]$$

Упражнение 4.5. *(2 балла) Проверьте условие согласованности мер, задающих цепь Маркова с непрерывным временем:*

1) $$F(t_1, .., t_m; A_{t_1}, .., A_{t_m}) = \sum_{i_{t_1} \in A_{t_1}, ..., i_{t_m} \in A_{t_m}} \mu_{i0} p_{i_0 i_{t_1}}(t_1 - 0) p_{i_{t_1} i_{t_2}}(t_2 - t_1) ... p_{i_{t_{n-1}} i_{t_m}}(t_m - t_{m-1}) \tag{4.2}$$

2) *Также проверьте марковское свойство:*

$$P(X_{t_n} = j | X_{t_0} = i_0, X_{t_1} = i_1, ... X_{t_{n-1}} = i) = p_{ij}(t_n - t_{n-1}), \tag{4.3}$$

где $p_{ij}(t)$ - это элементы матрицы $P(t)$.

2) $$\mathbb{P}(X_{t_n} = j \mid X_{t_0} = i_0, ..., X_{t_{n-1}} = i) = \frac{\mathbb{P}(X_{t_n} = j, X_{t_0} = i_0, ..., X_{t_{n-1}} = i)}{\mathbb{P}(X_{t_0} = i_0, ..., X_{t_{n-1}} = i)} =$$

$$= \frac{\mu_{i_0} p_{i_0 i_1}(t_1 - t_0) \cdot ... \cdot p_{i_{n-2} i}(t_{n-1} - t_{n-2}) \cdot p_{ij}(t_n - t_{n-1})}{\mu_{i_0} p_{i_0 i_1}(t_1 - t_0) \cdot ... \cdot p_{i_{n-2} i}(t_{n-1} - t_{n-2})} = p_{ij}(t_n - t_{n-1})$$

1) a) $$\nu_{t_{\sigma(1)}, ..., t_{\sigma(m)}}(A_1, ..., A_m) = \sum_{\substack{i_1 \in A_1 \\ ... \\ i_m \in A_m}} \mu_{i_0} p_{i_0 i_1}(t_{\sigma(1)} - 0) \cdot ... \cdot p_{i_{m-1} i_m}(t_{\sigma(m)} - t_{\sigma(m-1)}) = \sum_{\substack{i_1 \in A_{\sigma^{-1}(1)} \\ ... \\ i_m \in A_{\sigma^{-1}(m)}}} \mu_{i_0} p_{i_0 i_1}(t_1 - 0) \cdot ... \cdot p_{i_{m-1} i_m}(t_m - t_{m-1}) =$$

$$= \nu_{t_1, ..., t_m}(A_1, ..., A_m)$$

2) $$\nu_{t_1, ..., t_{m+k}}(A_1, ..., A_m, \Theta, ..., \Theta) = \sum_{\substack{i_1 \in A_1 \\ ... \\ i_m \in A_m \\ i_{m+1} \in \Theta \\ ... \\ i_{k+m} \in \Theta}} \mu_{i_0} p_{i_0 i_1}(t_1 - 0) \cdot ... \cdot p_{i_{m-1} i_m}(t_m - t_{m-1}) \; p_{i_m i_{m+1}}(t_{m+1} - t_m) \cdot ... \cdot p_{i_{k+m-1} i_{k+m}}(t_{k+m-1} - t_{k+m})$$

$$= \sum_{\substack{i_{m+1} \in \Theta \\ ... \\ i_{k+m} \in \Theta}} p_{i_m i_{m+1}}(t_{m+1}) \cdot ... \cdot p_{i_{k+m-1} i_{k+m}}(t_{k+m} - t_{k+m-1}) \cdot$$

$$\cdot \sum_{\substack{i_1 \in A_1 \\ ...}} \mu_{i_0} p_{i_0 i_1}(t_1) \cdot ... \cdot p_{i_{m-1} i_m}(t_m - t_{m-1}) = 1 \cdot \sum_{\substack{i_1 \in A_1 \\ ... \\ i_m \in A_m}} \mu_{i_0} p_{i_0 i_1}(t_1) \cdot ... \cdot p_{i_{m-1} i_m}(t_m - t_{m-1}) = \nu_{t_1, ..., t_m}(A_1, ..., A_m)$$

Упражнение 4.7. *(3 балла) Пусть цепь маркова задана начальным распределением μ и полугруппой стохастическмх матриц $P(t)$. Проверьте непрерывность и дифференцируемость $P(t)$ и докажите равенство $P'(t) = P(t)Q = QP(t)$.*

Непрерывность: $\lim\limits_{t \to s} P(t) = P(s) =$

$$= \| P(t) - P(s) \| = \| P(s-t) \cdot P(s) - P(s) \| \leq \| P(s) \| \cdot \| P(s-t) - I \|$$

Все выкладки на лекции были в предположение о том, что P дифф. в нуле. Отсюда следует непрерывность в нуле, а значит $\| P(s-t) - I \| \xrightarrow[s \to t]{} 0$

Дифф-мость: $P'(t) = \lim\limits_{s \to 0+} \frac{P(t+s) - P(t)}{s}$ - этот предел существует

$$P'(t) = \lim_{s \to 0+} \frac{P(t+s) - P(t)}{s} = \lim_{s \to 0+} \frac{P(t)\cdot P(s) - P(t)}{s} = P(t) \cdot \lim \frac{P(s) - I}{s} = P(t)\cdot Q$$

$$= \lim_{s \to 0+} \frac{P(s)\cdot P(t) - P(t)}{s} = \lim_{s \to 0+} \frac{P(s) - I}{s} \cdot P(t) = Q \cdot P(t)$$

Упражнение 4.9. *(4 балла) Докажите, что матрица Q вида*

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

является Q-матрицей для процесса Пуассона.

Матрица переходов в процессе Пуассона выглядит след. образом:

$$P = \begin{bmatrix} e^{-\lambda t} & \lambda t e^{-\lambda t} & \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t} & \dots \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Знаем, что $Q = \lim\limits_{t \to 0+} \frac{P(t) - I}{t}$

Посмотрим на $\lim\limits_{t \to 0+} \frac{P(t)_{ij} - I_{ij}}{t}$

$$\lim_{t \to 0+} \frac{e^{-\lambda t} - 1}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{1 - \lambda t + o(t) - 1}{t} = -\lambda = Q_{11}$$

$$\lim_{t \to 0+} \frac{\lambda t e^{-\lambda t} - 0}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{\lambda t + o(t)}{t} = \lambda = Q_{12}$$

$$\lim_{t \to 0+} \frac{\frac{(\lambda t)^k}{k!} - 0}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{o(t) - 0}{t} = 0 = Q_{1k}, \quad k > 2$$

Повторив эту процедуру для других строк, получим поэлементную сходимость.

Упражнение 4.8. *(3 балла) Найдите матрицу $P(t) = \exp(tQ)$ для следующей Q-матрицы:*

$$Q = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}$$

Диагонализуем $Q = U D U^{-1}$, потому что $\exp[UDU^{-1}] = U \begin{bmatrix} \exp(d_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \end{bmatrix} \cdot U^{-1}$

Пусть α и $\beta \neq 0$, ведь если $\alpha = \beta = 0$, то $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{\beta} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\alpha-\beta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\beta}{\alpha+\beta} \\ \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \exp(tQ) = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{\beta} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(-t(\alpha+\beta)) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\beta}{\alpha+\beta} \\ \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\left(\alpha + \beta e^{t(\alpha+\beta)}\right) e^{-t(\alpha+\beta)}}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha\left(e^{t(\alpha+\beta)} - 1\right) e^{-t(\alpha+\beta)}}{\alpha+\beta} \\ \frac{\beta\left(e^{t(\alpha+\beta)} - 1\right) e^{-t(\alpha+\beta)}}{\alpha+\beta} & \frac{\left(\alpha e^{t(\alpha+\beta)} + \beta\right) e^{-t(\alpha+\beta)}}{\alpha+\beta} \end{bmatrix}$$

Упражнение 5.1. *(13 баллов) Пусть заданы начальное распределение μ и Q-матрица Q, что означает $Q_{ii} \le 0, Q_{ij} \ge 0, \sum_j Q_{ij} = 0$. Пусть заданы также следующие независимые случайные величины:*

1. $\xi \sim \mu$
2. $\tau_i^n \sim Exp(-Q_{ii})$
3. η_i^n - *случайные величины со значениями в множестве* $\{1, 2, ...i-1, i+1, ...n\}$ *с распределением* $P(\eta_i^n = j) = -Q_{ij}/Q_{ii}$
4. $\xi^0 = \xi, \xi^n = \eta^n_{\xi^{n-1}}$
5. $\sigma^0 = 0, \sigma^n = \sigma^{n-1} + \tau^n_{\xi^{n-1}}$

Докажите, что процесс X_t, заданный следующим образом: $X_t = \xi^n$ при $\sigma^n \le t < \sigma^{n+1}$, является марковским процессом с переходными матрицами $P(t) = \exp(tQ)$ и начальным распределением μ. Для этого следайте следующее:

1. *Покажите, что μ является начальным распределением.*
2. *Покажите, что $P(X_0 = i, X_t = k, X_{t+h} = j) = P(X_0 = i, X_t = k)(Q_{kj}h + o(h))$*
3. *Покажите, что $P(X_0 = i, X_t = j, X_{t+h} = j) = P(X_0 = i, X_t = j)(1 + Q_{jj}h + o(h))$*
4. *Покажите, что $\sum_{k=1}^{r} P(X_0 = i, X_t = k, X_{t+h} = j) = P(X_0 = i, X_t = j) + h\sum_{k=1}^{r} P(X_0 = i, X_t = k)Q_{kj} + o(h)$*
5. *Покажите, что для $R_{ij}(t) = P(X_0 = i, X_t = j)$ выполнено равенство $\lim_{h\to 0+} \frac{R(t+h)-R(t)}{h} = R(t)Q$*

1) Покажем, что $X_0 = \xi^n$ при $\sigma^n \le 0 \le \sigma^{n+1}$ распределено как μ:

$\Rightarrow \sigma^n = 0 \Rightarrow \sigma = 0$ и $n = 0 \Rightarrow X_0 = \xi^0 \sim \xi \sim \mu$

2) $\mathbb{P}(X_0 = i, X_t = k, X_{t+h} = j) =$

$= \mathbb{P}(X_{t+h} = j \mid X_t = k, X_0 = i) \cdot \mathbb{P}(X_t = k, X_0 = i)$

$\mathbb{P}(X_{t+h} = j \mid X_t = k) = \mathbb{P}(\xi^n = j, \sigma^n \le t+h \le \sigma^{n+1} \mid \xi^{n-1} = k, \sigma^{n-1} \le t \le \sigma^n) =$

$= \mathbb{P}(\xi^n = j \mid \xi^{n-1} = k) \cdot \mathbb{P}(\sigma^n \le t+h \le \sigma^{n+1} \mid \sigma^{n-1} \le t \le \sigma^n) =$

// $\sigma^n - \sigma^{n-1} \le h \le \sigma^{n+1} - \sigma^n \Rightarrow \tau_k^n \le h \le \tau_j^{n+1}$ //

$= \mathbb{P}(\eta_k^n = j) \cdot \mathbb{P}(\tau_k^n \le h \mid h \le \tau_j^{n+1}) = \mathbb{P}(\eta_k^n = j) \cdot \mathbb{P}(\tau_k^n \le h) =$

$= -\frac{Q_{kj}}{Q_{kk}}(1 - e^{Q_{kk} \cdot h}) = -\frac{Q_{kj}}{Q_{kk}}(1 - 1 - Q_{kk} h + o(h)) = Q_{kj} \cdot h + o(h)$

3) $\mathbb{P}(X_{t+h} = j \mid X_t = j) =$ // т.е. за время h не произошло перехода // $=$

$= \mathbb{P}(\tau_j^{n+1} \ge h) = e^{Q_{jj} \cdot h} = 1 + Q_{jj} h + o(h)$

4) $\sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(X_0 = i, X_t = k, X_{t+h} = j) = \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(X_{t+h} = j \mid X_t = k) \cdot \mathbb{P}(X_t = k, X_0 = i) = (1 + Q_{jj} \cdot h + o(h)) \cdot \mathbb{P}(X_t = j, X_0 = i) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}} Q_{kj} \cdot h \cdot \mathbb{P}(X_t = k, X_0 = i) =$

$= \mathbb{P}(X_t = j, X_0 = i) + \sum_{k=1}^{r} Q_{kj} \cdot h \cdot \mathbb{P}(X_t = k, X_0 = i) + o(h)$

5) $\lim_{h\to 0+} \frac{R_{ij}(t+h) - R_{ij}(t)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{P(X_0 = i, X_{t+h} = j) - R_{ij}(t)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(X_0 = i, X_t = k, X_{t+h} = j) - R_{ij}(t)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{R_{ij}(t) + h\sum_{k=1}^{r} Q_{ik} \cdot R_{kj}(t) + o(h) - R_{ij}(t)}{h} =$

$= \sum_{k=1}^{r} R_{ik}(t) \cdot Q_{kj} = R(t) \cdot Q$

6. *Покажите, что для $R_{ij}(t) = P(X_0 = i, X_t = j)$ выполнено равенство $\lim_{h\to 0+} \frac{R(t)-R(t-h)}{h} = R(t)Q$*

$\lim_{h\to 0+} \frac{R_{ij}(t) - R_{ij}(t-h)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{R_{ij}(t) - \mathbb{P}(X_0 = i, X_{t-h} = j)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{R_{ij}(t) - \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(X_0 = i, X_{t-h} = j, X_t = k)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{R_{ij}(t) - R_{ij}(t) + h\sum Q_{kj} R_{ik}(t) + o(h)}{h}$

$= R(t) \cdot Q$

7. *Покажите, что $\frac{dR(t)}{dt} = R(t)Q$ при $t \ge 0$*

Совмещаем 5 и 6 и получаем это.

8. *Покажите, что $R_{ij}(t) = \cancel{P(X_0 = i, X_t = j)}$* $\mu_i \cdot P_{ij}(t)$

$R'(t) = R(t)Q \Rightarrow R(t) = \underbrace{R(0)}_{\mu} \cdot \underbrace{\exp(tQ)}_{P(t)} \Rightarrow P_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_t = j \mid X_0 = i)$

9. *Покажите, что $P(X_{t_0} = i_0, ...X_{t_k} = i_k) = \mu_{i_0} P i_0 i_1(t_1)...P_{i_{k-1}i_k}(t_k - t_{k-1})$*

$\mathbb{P}(X_{t_0} = i_0) \cdot \mathbb{P}(X_{t_1} = i_1 \mid X_{t_0} = i_0) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(X_{t_k} = i_k \mid X_{t_{k-1}} = i_{k-1}) = \mu_{i_0} P_{i_0 i_1}(t_1) ... P_{i_{k-1} i_k}(t_k - t_{k-1})$

Упражнение 5.2. *(2 балла) Докажите, что если σ, τ - моменты остановки фильтрации $\mathcal{F}_t$, то и $\sigma \vee \tau$ - момент остановки.*

$$\{\sigma \vee \tau \leq t\} = \{\sigma \leq t\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

Упражнение 5.3. *(2 балла) Пусть X_n - процесс, согласованный с фильтрацией $\mathcal{F}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $M > 0, \tau(\omega) = \min(n : |X_n(\omega)| \geq M)$. Докажите, что τ - момент остановки фильтрации $\mathcal{F}_n$.*

$$\{\tau \leq n\} = \underbrace{\{|X_n| \geqslant M\}}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{|X_i| < M \quad i < n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n$$

Упражнение 5.4. *(3 балла) Докажите, что следующие процессы являются мартингалами:*

1. $Y_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$, *где* $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *- независимые случайные величины с нулевым математическим ожиданием;*
2. $(W_t)_{\mathbf{R}_+}$, *Винеровский процесс;*
3. $X_n = \mathbf{E}[X|\mathcal{F}_n]$, *где X - интегрируемая случайная величина, $\{F_n\}$ - фильтрация.*

1) $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}$

a) $\mathbb{E}|Y_n| \leq \mathbb{E}|X_1| + \ldots + \mathbb{E}|X_n|$, каждый у этих моментов существует $< \infty$

в) $$\mathbb{E}[Y_t | \mathcal{F}_s] = \underbrace{\mathbb{E}[Y_s | \mathcal{F}_s]}_{Y_s} + \underbrace{\mathbb{E}[X_{s+1} + \ldots + X_t | \mathcal{F}_s]}_{\overset{\shortparallel}{0}} = Y_s$$

2) Докажем для $W_0 = 0$. $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$

a) $\mathbb{E}|W_t| \leq \sqrt{\mathbb{E} W_t^2} = \sqrt{t}$

в) $$\mathbb{E}[W_t | \mathcal{F}_s] = \underbrace{\mathbb{E}[W_s | \mathcal{F}_s]}_{W_s} + \underbrace{\mathbb{E}[W_t - W_s | \mathcal{F}_s]}_{\overset{\shortparallel}{\mathbb{E}[W_t - W_s] = 0}} = W_s$$

3) $\mathbb{E}|X_n| = \mathbb{E}\big[|\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]|\big] \leq \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[|X| | \mathcal{F}_n]\big] = \mathbb{E}[|X|] < \infty$ (т.к. X интегрируемая)

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_t] | \mathcal{F}_s\big] = \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_s] = X_s$$

$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \Rightarrow$

Упражнение 5.5. *(5 баллов) Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ - независимые случайные величины, их распределение - стандартное нормальное, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $X_n = \exp(S_n - n/2)$. Пусть $\mathcal{F}_n^X$ - σ-алгебра, порожденная случайными величинами $X_1, \ldots, X_n$. Докажите, что $(X_n, \mathcal{F}_n^X)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ - мартингал.*

$$1)\ \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum \xi_i - \frac{n}{2}\right)\right] = \mathbb{E}e^{\xi_1} \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}e^{\xi_n} \cdot e^{-\frac{n}{2}} = \left\| \mathbb{E}e^{X} = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \right\| =$$

$$= e^{\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{n}{2}} = 1$$

$$2)\ \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\left[e^{\xi_1} \cdot \ldots \cdot e^{\xi_t} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \middle| \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[X_s \cdot e^{\xi_{s+1}} \cdot \ldots \cdot e^{\xi_t} \cdot e^{-\frac{(t-s)}{2}} \middle| \mathcal{F}_s\right] =$$

$$= X_s \underbrace{\mathbb{E}\left[e^{\xi_{s+1}} \cdot \ldots \cdot e^{\xi_t} \cdot e^{-\frac{(t-s)}{2}} \middle| \mathcal{F}_s\right]}_{\mathbb{E}[\ldots] = e^{\frac{1+\ldots+1}{2} - \frac{(t-s)}{2}} = 1} = X_s$$