【传教】《微分几何入门与广义相对论》梁灿彬、周彬

本帖子是我在阅读这本书过程中的一些摘抄，做了一些稍微亲民的翻译，内容文字和讲解顺序等与原文有出入.

阅读并理解本帖内容需要至少在高中数学和物理必修或以上的水平，小白勿入.

有问题请在楼中楼或者单开帖子提问，我会尽力解说.请尽量避免无意义插楼，谢谢合作.

粒子分为两类[见 Synge(1956)]：第一类是有(静)质量的粒子，与质点同义；第二类是无(静)质量的粒子，为方便也常称为光子.……狭义相对论的原始表述存在静质量m0，静能E0，运动质量m和总能E四个概念.然而，关系式E=mc^2和E0=m0c^2表明这四个概念中只有两个独立.事实上，近代文献(科普文献除外)中通常只保留质量和能量两个概念，分别为静质量和总能.

物理中经常提到守恒量和不变量，在这里做一个区分：守恒量是指在物理过程中不变的物理量，比如能量等是守恒量而非不变量；不变量是在参考系或坐标系变换等人为变动下不变的量，比如静质量等是不变量而非守恒量.粒子的电荷量等既是守恒量也是不变量.

“事件”在物理学中的概念是实际事件的模型化，不论是否发生了什么，空间的一点和时间的一瞬的结合就叫一个事件(event).全部事件的集合就是时空(spacetime)，故每个事件也叫一个时空点.将时空这种提法准确化的数学概念是“四维流形”.大多物理学都默认一个基本出发点(基本假设)，即把时空看作四维流形并配以适当的附加结构.非相对论和狭义相对论物理学都假定时空流形是平直的，区别仅在于附加结构的不同，而广义相对论物理学则允许时空为任意四维连通流形(可以发生所谓“时空扭曲”).

狭义相对论的时空是4维闵氏时空，对应数学中的4维闵氏空间.4维闵氏时空有四个相互正交的轴，分别为txyz轴，每一个轴和其他任意轴相互正交，和其他任意两个轴确定的“平面”正交，也和其他任意三个轴确定的“空间”正交.4维闵氏时空的度规为洛伦兹度规，矩阵[-1,1,1,1](为了简化说明，矩阵的性质等暂不深究).非相对论物理学中，一般认为时空为3维，或称(3+1)维，因为其时空中存在一个绝对的时间维度，与相对论的闵氏时空相比较，这里的时间维与其它三个维度没有那么紧密的联系.这个时空称为欧式时空或者欧式空间，度规为欧式度规，矩阵[1,1,1,1].当然，欧式空间这个名词在相对论中也可以使用.比如，在相对论的3维表述中，粒子所在的某时刻空间完全可以称为欧式空间.

注意！下述部分内容在原书中采用几何单位制，光速取c=1.读者请注意区分.

(本段见图①)相对论物理学中经常使用一种时空图(spacetime diagram)，类似空间坐标系.但时空图要求必须有一个时间轴t轴，通常画成竖直向上的.一般简单问题中，粒子在三个空间方向xyz上并非都有运动，比如匀速直线运动只涉及一个空间维，平原上的汽车只涉及两个空间维，所以可以把不涉及到的运动方向在画图时省略，这样画出的时空图就剩下两个或三个轴.一个粒子的全部历史由一系列时空点组成，因此对应时空中的一条曲线，称为该粒子的世界线(world line).将世界线画在时空图上(此处使用txy图)后，由于竖直向上代表时间的流逝，水平方向代表空间，每个水平面代表某一时刻的全部空间，从时空图底部向上看，就能看到运动(演化)的全过程.

狭义相对论中的时空图有一些特殊性质需要注意.

(本段见图②)因为光速取1，所以任何粒子的速率均为小于1的.(此处使用tx图)设有一过坐标原点的粒子M的世界线，其在时空图中的斜率应当介于1到无限大之间，即相对x轴更贴近t轴.由后文式①可知，该粒子的世界线斜率与其速率互为倒数，即k=1/u，此世界线的参数方程是{t=a/u,x=a,y=0,z=0}，其中a为参数，直线的切矢方向同(1/u,1,0,0).

现在，设有一直线L的参数方程是{t=a\*u,x=a,y=0,z=0}，切矢方向同(u,1,0,0).我们将两个切矢相乘.看似算式应为(1/u)\*u+1\*1=2，但注意到洛伦兹度规矩阵为[-1,1,1,1]，所以算式应为-(1/u)\*u+1\*1=0.如此可知，两切矢在洛伦兹度规下为正交切矢，这样，我们所列出方程的两个直线在洛伦兹度规下是正交的.

注意到在任何一个惯性坐标系中，时间轴总是和x轴正交，并且，每个做惯性运动的粒子，其世界线都是自己参考系中的时间轴.那么可以知道，上述两个方程所代表的直线中，第二个直线的方程应当代表粒子M的x轴.实际上，第二条直线在txy图中可以代表这样一个面：这个平面是粒子M参考系空间中的xy平面.因为时空图压缩掉了z轴，所以图上的这个平面还可以表示粒子M在该时刻所处的空间.由此，我们可以将L记做x'，将M记做t'，这便构成了另一个惯性参考系..

设某曲线L为粒子的世界线，p,q分别为L上两相邻点，(t1,x1,y1,z1),(t2,x2,y2,z2)分别为它们在某惯性坐标系中坐标.令dt=t1-t2，对dx,dy,dz作相同处理，则粒子在p点(或说q点也可)时相对该参考系的速率定义为

u=[(dx^2+dy^2+dz^2)^(1/2)]/dt ①

(接触过微积分知识的读者应能看出式中各符号的准确含义)根据狭义相对论，描述p,q联系的重要物理量是元间隔s，元间隔可借用任一惯性系定义为

ds^2=-dt^2+dx^2+dy^2+dz^2 ②

联立①②可得

ds^2=-(1-u^2)\*dt^2③

对于任一标准钟来说，在其世界线上任意两点间读数差等于该世界线在这两点间世界线长(这就是标准钟的定义：可以给出世界线长度的钟即为标准钟)，即dτ^2=(1-u^2)\*dt^2.注意！虽然τ和t看似都定义为“时间”，但实际上并不相同.

(本段见图③)为简化讨论，我们将世界线均取直线，这对应做匀速直线运动的粒子.非匀速运动中需对变量作些处理，但基本思路相同，此处不赘述.当我们选定一惯性系后，设有两粒子世界线A,B，其中A保持静止，B始终做匀速直线运动，则线A重合于t轴，线B与t轴有一夹角.对于粒子A来说，由于dx=dy=dz恒=0 ,所以对任意两点pA1,pA2，均有τA1-τA2=tA1-tA2.由于A是本参考系中的惯性观者，所以可以直接把t轴的读数(任意粒子的t都可作如此计算)差作为该参考系的时间间隔，相应地，τ的差则是该世界线对应粒子认为自己所经历的时间间隔.对于粒子B，τB1-τB2<tB1-tB2，图上还表示为|A1A2|>|B1B2|(注意洛伦兹度规下线长与线段直观长度的关系).这种现象就是钟慢效应，即B认为自己经历的时间τ是小于参考系/粒子A所经历的时间t的.我们将τ称为固有时(proper time)，将t称为坐标时(coordinate time)，惯性系的坐标时又可称为惯性坐标时.注意！固有时在世界线外无定义，而且当两世界线相交时，两固有时可以有不同读数.同时，坐标时的定义实际上不依赖于粒子世界线，唯一的要求是该点处于本时空之内.

注意！上段的钟慢效应有部分细节未交代，详细解说在后文中会出现.

(本段见图④)时空图中的所有曲线分成三类：类时线，类光线，类空线.这三种线的区别在于斜率取值范围的不同.类光线的长度永远是0，斜率为1，画在图上是x轴和t轴(yt或zt也是如此)的平分线；类时线的斜率始终大于1，较xyz轴更贴近t轴，在式②中使得式右端为负值，实际上在计算线长的时候已默认式右端取绝对值；类空线的斜率始终小于1，较为贴近xyz轴，式②中使得右端为正值.由于类空线的斜率小于1，若某粒子沿其运动的速率将大于光速，所以类空线不是任何粒子的世界线，而类时线代表的速率小于1，可以代表质点的世界线，类光线则只能代表光子的世界线.当然在画图的时候也存在斜率在1上下不定的曲线，这种曲线不予考虑其性质(因其线长无法计算且无实际的物理意义).

鉴于数学水平所限，这里只简单提及一下曲线的大致性质.虽然我在讲述三种曲线的时候用到了坐标系，但实际上在相对论时空中，三种曲线的定义并不依赖坐标甚至不依赖观者.相对论时空中，这三种曲线的分类是绝对的而非相对，线长也都是绝对量.

由于线长公式具有洛伦兹协变性，可知世界线上任意两点间线长在不同参考系看来有相同线长.这也例证了如下说法：相对论中并非所有物理量均为相对的.实际上，相对论中有很多量都是绝对量，与参考系的选择无关.当使用几何语言明确了有关相对与绝对的区别后，某些佯谬问题便迎刃而解.

式②在时空图中还有一个重要应用：将参考系中xyz空间中的任一点坐标带入式②，发现坐标的dt恒=0，又由于该点和坐标原点的连线为直线，式②退化为

s^2=x^2+y^2+z^2③

这正是空间中两点距离的公式(指所取点和原点的距离).所以可知，四维惯性系中的xyz空间实际上就是该时刻的欧式空间.

补充几条说明(注意！以下所有陈述在狭义相对论/平直时空中成立，有些在拓展到广义相对论/弯曲时空时仍可成立，暂不标注)：在所有观者中存在一类特殊观者，称为惯性观者(inertial observer)，他们的世界线是平行于其所在惯性系的t轴的，这些观者与其他(非惯性)观者有本质上的区别.且惯性观者之间是平权的，即不存在某惯性观者观测到的结果与其他惯性观者不同的情况(相对位置除外).

除引力外不受任何力的质点称为自由质点，其世界线必为测地线.在平直时空中(因为平直所以不存才引力，或者说引力被忽略)，测地线在直观上是直线，但不一定与t轴平行.由上，同参考系的所有惯性观者的世界线是一组平行测地线，不同参考系的惯性观者，世界线虽然不平行，但仍为测地线.

假设在平直时空中，我们取两个时空点p(0,0,0,0)和q(2,0,0,0)，这两点的直连线是测地线，线长是2.如果我们引入第三个时空点w(1,1,0,0)，那么可以构造pwq折线，其长度为0.可知，任意两个时空点之间的直连线是最长线而不是最短线，因为我们完全可以取两段类光线将他们连接起来，而这条折线的长度是0.

下面介绍一种在平直时空中的钟同步方法：大步雷达法.(本段见图⑤)

式②的退化公式式③表明，在同时面上的时空点处于该时刻的欧式空间中.为了研究物理问题方便，我们当然希望同一欧式空间中的钟是有相同读数的.实际上，在相对论中已经默认同一参考系中存在由同时时空点组成的欧式空间.该空间在图上被压缩掉一维，画出来为一个面，我们将其称为超曲面；又由于这个超曲面和系内惯性观者世界线正交，所以亦可称为正交超曲面.在平直时空中，只要空间中的全部观者在某一超曲面上的读数相等，则它们在任一平行的(即同一参考系内其他的)超曲面上的读数也将相等.因此同步操作是一劳永逸的，只要在某一时刻将所有观者钟进行同步即可.为了做到这点，我们需要用信号为系内所有观者进行沟通.

按照一般的思维进行考虑，钟同步有如下方法：观者A事先对观者B发出指令，令其在接收到A的信号时把钟调至A发出信号时的读数.实际上由于光速的限制，B在接收到A的信号时，A的钟已经比发出信号时走了一些.于是可知，这种方法不完善，由这种方法获得的“钟同步”是不准的.如果存在速率无限大的信号，则可令其在零时间内完成从观者A出发到达观者B的要求，这样即可完成钟同步，依此类推，系内的所有钟都可以使用这种方法同步.可惜相对论不允许这样的信号存在，于是有必要设计一种(至少在理论上可行的)钟同步方法.

为了叙述方便，我们将“A发出信号”——事件a1、“B接收信号”——事件b、“A回收来自B的反射信号”——事件a2这三个事件记为一个“雷达三点组”.由于光速在平直时空中的绝对相等，又由于光速最大，所以我们仍然考虑使用光信号来进行同步.可以使用如下方法：观者A事先向B发出指令，“你在身上装一面反射镜，当反射镜接收到我的信号时(事件b)将你的钟调零”，这样，A发出的光信号在到达B时立即反射并最终被A回收.A的读数零点可以这样确定：发出信号的时刻(事件a1)和收回信号的时刻(事件a2)的中间时刻即为读数零点.不难看出，AB两钟的读数零点的连线与两钟世界线均正交.按照这种方法，我们可以在选定一领头观者后使其与系内的所有观者进行同步.将系内所有按这种方法获得的读数零点连线集合起来，组成的面就是该空间的超曲面，该超曲面上的所有观者钟有相同读数.这种方法的的特点是所有信号都要由领头观者发出并回收，称为大步雷达法.

易知代表空间的超曲面上的两点之间的连线为类空线，其长度为两点对应空间点的空间距离.通过画图可以很容易看出，该类空线实际上就是a1a2中点事件和b事件的连线，其长度等于a1a2连线长度的一半.所以大步雷达法还可以起到标准尺的作用(参考标准钟的定义，标准尺的作用是可以给出类空线长度的尺).实际上月地距离就是用大步雷达法测得的.

经过上述讨论，我们应当树立起一个观念：相对论时空中存在(由参考系运动状况决定的)同时的空间.为了结合时空图时表示方便，可以将代表同时空间的超曲面称为同时面(它们都是和参考系运动状态对应的).

在牛顿力学中，时空流形被默认为四维，但其中附加的内禀结构使得牛顿力学中存在一个“绝对同时面”的概念.牛顿力学中的同时面将整个时空分为无数互相平行的层，这组同时面均正交于t轴，而相对论物理学中则有无数组同时面，每组同时面互相平行.实际上，二维时空图中的任意直类空线都确定了一组同时面，当然这组同时面是与类空线正交的类时线观者认为的同时面组.

现在我们以牛顿力学的思想，在时空中取任意一个时空点，这个点所在的同时面被认为和该时空点没有因果联系，而在同时面上方的时空则是“未来的”，下面的时空是“过去的”，全部时空的这两个部分和选定的时空点有因果关系.到了相对论中，我们可以选定时空点为顶点画出光锥(在txy图中就是两个对顶的圆锥，其任意一条母线是xy面与t轴的平分线，两个圆锥关于选定时空点所在的同时面对称)，上方的光锥内部的时空是“未来的”，下方光锥内部的时空是“过去的”，而除此之外的所有时空点(含光锥面上的所有点)与选定时空点无因果联系.可以看出，无因果联系的时空部分在相对论中比牛顿物理学中大得多.

典型效应分析：

尺缩效应：(本段见图⑥)

质点在三维语言中是空间的一个点，四维语言中是时空的一条类时线；同理，一把尺子在三维语言中是一条线，四维语言中就是由尺上各质点世界线组成的世界面.乍看在时空图中测量尺长的方法有些不明确：面上的哪条线长才是尺长？对于熟悉四维语言的人来说，尺子从来就不是一维的，它是个二维对象，这是一个绝对的对象，与参考系，坐标系及观者均无关.

为什么尺子在三维语言中却是个一维对象？因为人们习惯在自己的立场中看问题，也就是在自己的欧式空间中测量尺长，而欧式空间是随着观者不同而有所不同的，所以尺长对不同参考系的观者来说一般不等.现选定一基准坐标系，将某一尺子世界面在该坐标系下的方程表示如下(从现在开始，时空图中未涉及到的维度相关的方程将不再列出，在这些维度上的位移应默认为0)：t∈R,x∈(0,oa).显然这个尺子世界面在基准系中的长度为1.另设一运动观者，世界线参数方程为t=a/u,x=a(a为参数)，则其相对基准系速率为a，与其对应的同时面组方程之一为t=a\*u,x=a.

注意到运动观者的同时面是x'，所以其测得的尺长应为尺子世界面截得的x'上的线段ob.因为基准系认为尺子静止而运动观者认为尺子运动，则两者观测得到的尺子有不同长度，比较两尺长无非就是比较oa和ob的长度.直观看来ob>oa，似乎动尺较长！但注意到时空图使用洛伦兹度规，过点a参照点o做一校准曲线-t^2+x^2=oa^2[本例中使用到的校准曲线是人为划定的一条曲线，在洛伦兹度规下，其线上任意一点与参照点的直连线等长，尽管直观上看(即按照欧式度规来看)不等]，则发现oa=oc>ob.

为了定量计算尺缩的程度，我们用基准系中的oab三点的坐标来计算：o(0,0)，a(1,0)，b(1,u)，则可以看出ob^2=(-u^2+1)\*oa^2，开平方即得到ob=oa\*(1-u^2)^(1/2)，式子回到我们熟悉的尺缩公式.

由上述讨论我们可以得知，尺缩效应中没有什么“弹性”之类的物理机制在发生作用(根本没有东西实际发生了收缩)，其本质原因是：虽然尺子只有一把(尺子世界面只有一个)，但不同的参考系有不同的同时面，导致它们测到的是不同的一维尺，而不同的一维尺有不同的长度当然不足为怪.尺缩效应无非“盲人摸象”而已.

钟慢效应：

(本段见图⑦)与上例同样地，我们选定一基准系，其中放置两个钟A和B，AB之间距离为oa，两钟均相对基准系静止，实验前经过大步雷达对钟.另一钟C从A处运动到B，图上表示为从事件o到事件c，且C在o处也指零.现在若要观察钟慢效应，只需比较ob和oc的长度(世界线长即标准钟读数差).直观看来仍有oc>ob，但但过点b参照点o做一校准曲线，则容易看出ob=od>oc，即C钟在AB两钟所在参考系看来变慢.

钟慢的程度可以用如下方式计算：设C的世界线参数方程为t=a/u,x=a(a为参数)，容易看出c的时空坐标为(oa/u,oa)，则b坐标为(oa/u,0)，可以列出式ob^2\*(1-u^2)=oc^2，开方并移项可得oc=ob\*(1-u^2)^(1/2)，这就是我们熟悉的钟慢公式.

(本段见图⑧)因为相对论中结论的相对性，我们应当验证一下，在C钟看来AB两钟的走时情况.将上一时空图稍作修改，在其中添加上与C钟对应的两个同时面，观察此图可发现，在C钟看来AB两钟的读数零点并不同步，即在A中读数为0时B钟读数已是ab(B钟做了偷跑)，故比较BC读数时应当比较的是bd和od的长度.过点d参照点o做校准曲线交t轴于e，可以看出od=oe>oc=bd，得出的结论是相同的——AB两钟在C看来走时变慢.我们仍然可以使用AB参考系中的时空坐标来计算有关线长(线长是不变量)，得出的公式仍为oc=ob\*β(为简化文字表达，在之前文中有给出的公式中，有时会使用一些符号代替较长的表达式.读者应能自行判断).

以上讨论表明，同尺缩效应中没有任何东西发生了收缩一样，钟慢效应中也没有任何钟的走时率变慢(都坚持标准钟的走时率，即世界线长度等于读数差).

应该注意的是，不同惯性系的钟之间可以使用很多不同的比钟方式，上述方式虽然为人们所熟知，但并非是唯一的比钟方式.我们熟知的钟慢公式也只不过是上述比钟方式造成的必然结果而已.AB两钟是同一惯性系内事先经过同步的钟，如果缺少其中之一，虽然同样可以从图中明确世界线长关系，却无从得出“A觉得C钟慢”的结论，关键在于“觉得”两字无从谈起.对于图⑧，事件d不在A的世界线上，A钟对该处的C钟不能直接获得任何信息，唯一的方法只接收来自点d的光信号(或者其他信号)，而这就涉及到信号传递需要时间的问题(不是不能这样做，而是这样做时必须考虑这个问题).其实，利用B联合A得出“C钟较慢”的结论时就已经巧妙地发挥了光信号的信息传递作用，因为在把AB同步的过程中已经用到了光信号.总之，如果缺少了B钟，AC两钟就无法用上述方式比钟，或者说上述比钟方式没有意义.

(本段见图⑨)当全时空中只提供两个钟的时候也存在很有物理意义的比钟方式.取B钟所在惯性系为基准系，令AB在事件o处重合并在此同步调零，A钟相对B钟做匀速运动，图中可以清楚地看出oa=β\*ob，但B钟无法直接观测事件a，只能接收来自a处的光信号，则B在看到A读数为oa时，自身读数已经变成了oc，可知oc>ob=oa/β，即A钟在B钟看来比上一种比钟方式慢得更甚.

(本段见图⑩)我们甚至可以举出这样的比钟方式，它将导致“动钟较快”！令B钟向A钟匀速靠拢，并使两钟在b处指零，在时空图中过a参照b作校准曲线，发现曲线与B钟世界线交于点d，即ab=db<cb(对于校准曲线与B钟世界线交点d是否会处在x轴以下的疑问，注意到校准曲线的渐近线斜率为±1，不需实际写出各线的方程即可看出d点应该处在c的上方)，这代表a处的A钟通过光信号看到的B钟读数比自己的读数负值更负，A钟发现B钟比自己更快.这个看似荒谬的结论实际上无可非议，它不过是上述比钟方式的特定结果.因此，讨论比钟的问题是需要事先明确方案的每一细节，为此最好画时空图.

双子佯谬：

图中甲的世界线与t轴重合，表示甲呆在家中不动；乙的世界线为曲线/折线，它是非测地线表明其做非惯性运动.已知两人分手时年龄相等，问重逢时年龄还是否相等？若不等，孰大孰小？这无非是比较甲乙二人在“分手”“重逢”两个事件之间的世界线长度大小，因为世界线长代表固有时，也就是本人的时间流动(年龄增长).之前我们证明过闵氏时空中测地线为两点之间连线最长者，很容易得出“重逢时甲的年龄大于乙的”结论.

以上就是双子效应的实质内容.问题本来就如此简单，但是人们在相对论发展的过程中对有关问题缺乏深刻认识，双子效应在一段时间之内竟被视为悖论(paradox)，对此的争论竟迟至1957~1958年又掀高峰(虽然若干有识之士已经对此问题有清晰理解)，有关文章竟发表在《Nature》《Science》《Discovery》等重要刊物上.争论双方以物理学家McCrea和物理学家兼哲学家Dingle为代表人物.Dingle认为，相对论中一切都是相对的，因此双子重逢时应有相同年龄；McCrea针锋相对指出，相对论并不认为一切都是相对的，甲没有加速度而乙有，正是这一区别导致了重逢时年龄不同.随着研究的深入，特别是几何语言的引进，国际相对论界对双子效应已经有了如上段所述的共识.应该特别强调的是，许多人顾名思义地以为相对论中一切都是相对的，这是一种极为有害的误解.

双子效应已经在1971年被实验所证实，当然不是对人而是对铯原子钟.

下面回答几个有关双子效应的疑问：

问①：钟慢效应的结论对双方是平等的，你所举的钟慢效应前两图中得出的结论就是AB和C互相认为对方比自己慢，为什么双子效应对甲乙两人的结论就不平等？

答①：因为两种效应的前提不同.在钟慢效应中，ABC三钟都做惯性运动，由于惯性系平权，结论自然对双方平等，但在双子效应中乙不做惯性运动(世界线非测地线)，否则分手之后不会重逢.这个前提本身就确立了双方的不平等地位，结论自然是一边倒的.

问②：双子效应的结论有这样的表述“做加速运动的兄弟较为年轻”，但加速度是相对的，甲乙互相认为对方又加速度，这样乙是否应当认为甲更年轻？

答②：加速度有三维加速度(3加速)与四维加速度(4加速)之分，前者是相对的而后者是绝对的(与观者、参考系、坐标系等人为选择的因素无关).而惯性运动和非惯性运动的概念也都是绝对的：粒子做惯性运动，当且仅当其世界线为测地线(仍与人为因素无关).当把“加速运动”作为“非惯性运动”的同义词时，应当把“加速”理解为4加速.因此问②中的表述应当改为“有4加速的兄弟较为年轻”.无论什么观者看甲都不会说甲有4加速，因此不再出现问题.物理学家早已形成习惯，在3维语言中提到加速度而不指明相对的参考系时，都默认相对惯性系.在这种默契下，“做加速运动的兄弟较为年轻”和“电荷当且仅当在加速运动时产生辐射”等说法就都是正确的.

问③：常听说双子效应属于广义相对论范畴，只用狭义相对论讲不清楚，是吗？

答③：不是的，本段在一开始的时候就已经使用狭义相对论进行了清晰的讲述.认为双子效应涉及广义论的一个原因是：有些人为了计算乙的固有时而选择了乙自己为观者的参考系，这个参考系是非惯性系，而他们以为只要涉及到非惯性系就属于广义论范畴.物理学家对此的回答是：乙的固有时就是其世界线长，这是个与参考系无关的量，根本没必要自找麻烦地用非惯性系计算；退一万步说，就算有人愿意用非惯性系来计算，这同样与广义论无关.应当明确广义论与狭义论的划界标准：起初人们爱用参考系来划界，认为只要涉及非惯性系就涉及广义论，后来认识到用绝对的(与人为因素无关的)时空几何来划界会自然(而且优雅)得多.现在国际物理学界的统一标准是：凡以闵氏时空为背景时空的物理问题都属于狭义论范畴，而广义论的时空必然是存在弯曲的.讨论任何问题时，一个非常重要但却往往被人忽视的步骤是事先约定背景时空，双子效应的背景时空默认为闵氏时空，因此属于狭义论范畴而非广义论(除非约定时空不是平直的，这等价于引力场不可忽略).不幸的是有些人甚至走得更远，他们在用几何语言分析问题时发现乙参考系的一个特征量(克氏符)非零，便认为加速运动可以造成时空弯曲，其实闵氏度规在非惯性系的克氏符非零很正常(当然惯性系中的克氏符必然为零).另一个类似的热门问题是“爱因斯坦转盘”，也常被误认为涉及广义论，其实在讨论该问题时也已经默认整个现象发生在闵氏时空中，因此也属于狭义论范畴.几何语言分析这个问题是十分简洁的，但它比双子效应复杂.后文会有解释.

车库佯谬：

现有静长均为l的汽车和车库，汽车匀速向车库中驶入.在司机看来，动库变短，车放不下，司库看来，动车变短，放下有余.司机的想法对吗？司库的想法对吗？用时空图可以明确地表示出这种物理情形.

现在假设车库并无后墙，其“后墙”只是一条画在地上的直线.图中oa为车静长，ob为司机看到的库长；oc为库静长，od为司库看到的车长.很容易看出，司库的想法是对的，司机的想法也是对的(都以自己的参考系为参考)，关键是同时的相对性导致结论的相对性，正如尺缩效应中不允许问“到底哪一把尺子较长”一样(尺子都是同一把尺子/同一个尺子世界面)，车库佯谬中也不允许问这样的问题“到底放得下还是放不下”，结论的相对性导致这种绝对化的问题没有意义.

车库有坚硬后墙的情形则要麻烦一些，基本原则是(假设后墙和车本身都是绝对刚性的)：车头撞墙(因而停止前进)的信息传递到车尾需要时间，只有当车尾获悉此信息之后才能停止前进，因此汽车将被压缩到的确在库中装下有余的程度(谁看都装得下).有兴趣的读者不妨画出这种情形的时空图，试着求一下车被压缩后的新长.

鉴于狭义相对论中动量、能量和质量概念的重要性和微妙性，有必要在此明确一遍其定义过程.

相对性原理要求一切物理定律在不同惯性系中有相同形式.惯性系间的坐标变换在牛顿力学中是伽利略变换，在狭相中是洛伦兹变换，因此，相对性原理在牛顿力学中要求物理定律的数学表达式在伽利略变换下不变(即具有伽利略协变性)，在狭相中则要求表达式在洛伦兹变换下不变(即具有洛伦兹协变性).这是一个很强的“管定律的定律”，凡不具备洛伦兹协变性的物理定律在纳入狭相前都必须被修改，以使其具有洛伦兹协变性.动量守恒律就是典型一例.在牛顿力学中，质点的动量→p(注:今后凡矢量都以在字母前加注→箭头来表示)定义为其质量与速度的乘积，即→p=m\*→u，力则定义为质点的动量时变率，即→f=d→p/dt，两者结合即得→f=m\*d→u/dt=m\*→a.可见，→f=m\*→a虽被称为牛顿第二定律，其实只是力的定义式，它只有与每一具体的物理场合下力的表达式相结合才给出真正的物理定律(如弹簧体系下与→f=-k\*→x结合得d→p/dt=-k\*→x，这才是本质上的胡克定律).

现在从相对性原理的角度审查动量守恒律，在这里为简化讨论而使用两等质量小球发生完全非弹性正碰的情况.以→p1和→f1分别代表球1的动量和碰撞中受力(这一力来自球2)，则→f1=d→p1/dt，类似地有→f2=d→p2/dt.牛顿第三定律保证→f1=-→f2，于是d(→p1+→p2)/dt=0，即碰撞过程中动量守恒.可见动量守恒律是力的定义同牛顿第三定律结合的产物.如果从另一惯性系观测同一碰撞过程，则根据伽利略变换的公式仍可推出动量守恒表达式，所以动量守恒律具有伽利略协变性而满足相对性原理.然而若在狭相中仍使用动量的牛顿定义→p=m\*→u(牛顿力学认为质量守恒，因此此处m为一常数)，则下例足以说明动量守恒律不具洛伦兹协变性:设在参考系A中两球碰前速度等值反向(总动量为0)，由对称性可知碰后两球粘合体速度为0，这表明动量守恒在A系中成立；设在参考系B中碰前球2静止，则AB两系的相对速度即碰前球1和B系的相对速度→v，由相对论速度变换公式可得球1在B系的速率为(此处暂不令c=1而使表达式中仍含c):

u=(v+v)/[1+(v/c)^2]=2v/[1+(v/c)^2]④

因两球质量均为m，则B系中测得两球总动量在碰撞前后分别为mu+0=2mv/[1+(v/c)^2]，2mv(后者中体现了牛顿质量守恒律)，可见A中成立的动量守恒律在B中不成立，因而不是定律.这时候有两种做法：一是放弃动量守恒律，二是修改动量守恒律以使其具有洛伦兹协变性.鉴于守恒律对物理学的重要性，优先考虑第二条.不妨这样猜想：在物体由静止开始加速的过程中，物体的质量会逐渐增大，这样物体在恒力下的加速度将会越来越小，速度就有望永远达不到光速.这是一种出于物理理论自恰性的考虑.于是想到这样的修改方案：动量仍定义为质量乘以速度，只不过此时质量m是速率u的函数，记作mu(暂时称为运动质量).现在沿这一思路重新审查B系中的碰撞过程.既然碰前球2静止而球1以速率u运动，两者的质量就应分别为m0(暂时称为静质量)和mu，因此碰撞前后总动量分别为mu\*u+0=2mu\*v/[1+(v/c)^2]，Mv\*v，其中Mv代表碰后两球复合体的质量，默认Mv=mu+m0即碰撞前后总质量不变(这是很自然的默认，其含义将在后文阐明)，则碰后总动量可写作(mu+m0)\*v.对比此时的碰撞前后动量表达式可知，为使动量守恒律对B系成立，必须且只需使mu=m0\*{[1+(v/c)^2]/[1-(v/c)^2]}，将此表达式会同式④化简即可得出

mu=m0\*[1-(u/c)^2]^(-1/2)⑤

可见只有承认mu随速率u按式⑤变化才能保证B系中的动量守恒.所以狭相中质点的动量应定义为→p=mu\*→u，其中mu由式⑤给出.通常记

γ=[1-(u/c)^2]^(-1/2)

故动量也可表为

→p=γ\*m0\*→u⑥

有了动量的定义就可对力定义.狭相中仍把力→f定义为动量时变率，即

→f=d→p/dt⑦

相对性原理要求式⑦有洛伦兹协变性，依此可导出力在惯性系之间的变换式(此处略).

现在开始推导质点的能量定义.先仿照牛顿力学按以下两条标准定义质点的动能Ek：Ⅰ质点静止(u=0)时动能Ek=0；Ⅱ动能时变率等于力的功率→f\*→u，由此得dEk/dt=→f\*→u=(d→p/dt)\*→u=→u\*d(mu\*→u)/dt=mu\*→u\*(d→u/dt)+→u\*→u\*(dmu/dt)=mu\*u(du/dt)+u^2\*(dmu/dt)，其中dmu/dt可联立式⑤改写为dmu/dt=[mu\*u/(c^2-u^2)]\*(du/dt)，代回上式有dEk/dt=(c^2-u^2)\*(dmu/dt)+u^2\*(dmu/dt)=c^2\*(dmu/dt).注意到u=0时mu=m0及Ek=0，对上式积分便得到速率为u时的动能表达式：Ek(u)=mu\*c^2-m0\*c^2.爱因斯坦大胆地将上式中mu\*c^2解释为质点在速率u时的总能(E=m\*c^2，此处m是mu的简写)，于是m0\*c^2就是质点静止时的能量(E0=m0\*c^2，即质点静能)，而动能则是总能与静能之差.E=m\*c^2表明能量E和运动质量mu成正比(称为质能相当性).几何单位制中c=1，故E=m，即能量等于质量，而E0=m0则表明物体即使在静止时也有等于静质量的能量.这是一份不可思议的巨大能量.

牛顿力学既有质量守恒又有能量守恒，狭义相对论的情况如何？首先，按E=m\*c^2定义的能量满足能量守恒，这应看做理论假设，但这也取得了迄今为止所有实验的支持.至于质量守恒，则要看你谈的是运动质量m还是静质量m0.因为E=m\*c^2，所以能量E守恒就等价于m运动质量守恒，两者互不独立[但切勿以为这和牛顿力学中的质量守恒同义.前者是一个物理量“动质量”的守恒，后者则反映牛顿力学的如下信念：物质(matter)是永恒不灭的.今天看来这一信念并不正确，因物质(实物)可被转化为辐射，如正反物质发生湮灭以及核裂变放能，当然这些过程都是符合狭义相对论所认同的能量守恒的.]至于静质量m0，则应强调它不符合守恒律(例如一静止核子分裂成两部分运动碎片的例子，算式比较简单，读者可自己证明).

经过上面的讨论可知，在狭义相对论中，关于能量、动量、静质量和运动质量总共只有两个守恒律，即动量守恒和能量守恒.在前面的计算中曾默认有Mv=mu+m0，现在可以看到此式代表能量守恒.可见在证明动量表达式的洛伦兹协变性时需默认能量守恒(当然这一默认并无不妥).如本帖开头所说，只保留静质量(以后均写作m，单独提及质量二字时均指静质量)和总能(以后均写作E)两概念的做法其实很自然而不失科学性.经历了狭义相对论发展初期的一些曲折后，爱因斯坦在1948年的一次私人通信中曾写到：“为运动物体引入质量M=m[1-(v/c)^2]^(-1/2)的概念并无益处，……除了‘静质量’m外最好不要引入其他质量概念.”

由于数学水平所限，在此无法定量地又准确地为大家介绍广义相对论，以下只能为大家提一些思路，并在正式引入广相之前介绍部分基本概念.

当时当地观测、瞬时观者：

设想你自己是观者.你能直接观测发生在你身上的事件.如果事件发生在你身外，你当然也可以听见或看见(即用声光信号进行观测，这属于间接观测)，但间接观测都会涉及到信号传递需要时间的问题(如前文钟慢效应部分所说，若不考虑这一问题将会带来很多无法接受的结果)，讨论起来较为复杂.在实用方面，天文观测都属于间接观测，而间接观测的结果和直接观测结果可能有所不同(取决于观者和信号源的运动状态).理论上最简单明确又最基本的观测是直接观测，即对发生在观者世界线上的事件的观测，亦称当时当地观测(local measurement).而参考系由无处不在的观者组成，发生在其他观者身上的事件由该观者观测便是.你在观测发生在你世界线上p点的事件时，重要的往往不是你的整条世界线而是你在该点的运动状态(严格来说是四维速度)，这时便不需要给出你的世界线如何如何，而只需给出这一世界线在p点处的切矢(4速的定义就是世界线切矢).于是可提炼一个更为抽象的概念，称为瞬时观者(instantaneous observer)，它由两个要素——p点及p点的一个指向未来的类时单位矢量构成.

(惯性)观者、(惯性)参考系、(惯性)坐标系概念的明确：

进行物理观测的人叫观察者，物理学中将其概念模型化，即看成质点，简称观者(observer).为了观测，观者的手中应有一个标准钟和空间三维标架，这使得观者具有了时间感和空间方向感.为了对全时空(或其中一个开子集)的各处进行直接观测，需要处处设置观者(“流动哨”)，这种无处不在的观者们就构成一个参考系.准确地说，无数观者的集合叫一个参考系(reference frame)，若它满足以下条件：时空(或其中的一个开子集)中的任一点有且仅有这一集合内的唯一观者世界线经过.这一抽象定义就是我们常用的参考系定义的准确化和广义化.而按这个定义来说，系内的观者世界线便可以不平行，即距离可以随时间而变，甚至相对走时速度也可不同.为了在一定范围内简化讨论，我们可以取这样一类观者：处于惯性运动状态的观者称为惯性观者(inertial observer).惯性观者是最特殊而又最简单的一类观者，它们的世界线是类时测地线，每一惯性观者对应于洛伦兹坐标系中的一条t坐标线.因此，该系的全体t坐标线组成的参考系便称为惯性参考系，而该坐标系便称为该参考系内的一个惯性坐标系.在不必认真区分参考系和坐标系时，惯性参考系和惯性坐标系又统称惯性系.坐标系给它所从属于的参考系内的每一点赋予了确定数值组成的时空坐标.

在坐标系的概念形成后，为了研究方便，有时我们需要进行坐标变换，为此需要明确各种基本坐标变换(全部的坐标变换方式包括各种基本变换及它们的复合变换).同一参考系内的基本坐标变换有两种：平移和空间转动.其中平移又可分为时间平移(“统一调表”)和空间平移(“齐步走”)，空间转动则相当于把所有观者的三维空间标架统一转动一定角度(“全体向左转”).这些变换均不改变空间距离和时间长度(因为被测线段的起止点均未改变).不同参考系间的基本变换有一种，数学上称伪转动，就是我们熟知的洛伦兹变换.变换前后的两坐标系空间方向对应同向，空间坐标原点在坐标时t=t'=0处重合，而它们的t坐标线不同.这种变换可能会改变空间距离和时间长度(因被测线段的起止点发生变化.前述尺缩钟慢效应即是典例).可见同一惯性参考系内有无数不同的惯性坐标系，而由伪转动/洛伦兹变换联系起来的两坐标系必然属于不同参考系.这可以加深对参考系和坐标系概念的理解.

4速、4动量、物质场、能动张量：

质点世界线是一条以固有时τ为参数的参数曲线，在此基础上质点的四维速度(4速，4-velocity)定义为质点世界线(以固有时τ为参数)的切矢.质点4动量(4-momentum)的定义和3动量的定义在数学表达式上有一定的相似性，即“动量=质量\*速度”，前者的严格表达式为“4动量=m\*4速”.4速可借瞬时观者做3+1分解，其中空间分量是质点相对瞬时观者3速的γ倍；相应地，4动量也可借瞬时观者做3+1分解，其中空间分量是质点相对瞬时观者的3动量，时间分量是质点相对瞬时观者的能量.

质点的4动量把两个不同的概念——质点的能量和动量——有机地统一为一个物理量.4速和4动量均与观者无关(世界线的客观存在并不依赖于坐标系甚至参考系)，是绝对的物理量，但如何做3+1分解却与观者有关，分解是相对的.如果没有观者进行实际观测，4速和4动量均客观存在，但3速、4动量和能量则没有意义.现在可进一步理解近代文献只保留(静)质量m和能量E两个概念的原因：它们是不同类型的物理量.质点的质量m是不变量，从一个侧面反映质点的內禀性质，而能量E则还依赖于观者，所以它不是不变量.瞬时静止观者(4速和质点相等的瞬时观者)测得的能量就是质点静能，虽然和质量等值，但仍不是同类型的量.

在讨论连续介质(固液气流、等离子流等)时，我们注意的不是个别粒子的行为而是宏观的统计平均效应，关心的不是个别粒子的质量和动量而是空间每点(每一宏观小区域)的能量密度、动量密度、能流密度等.可见连续介质在很多方面类似于电磁场，于是两者可统称为物质场.设宏观小体积V内的静质量为m，相对某惯性系的速度为→u，则其3动量为→p=(E/c^2)\*→u，以V除以全式可得：3动量密度=(1/c^2)\*能量密度\*→u=(1/c^2)\*能流密度.电磁场的上述物理量定义可在电动力学教科书中找到.

正如质点的能量和3动量统一组成4动量这一矢量一样，电磁场的这些密度量统一组成一个张量，称为能动张量(energy-momentum tensor)，这是一个4维闵氏时空中的张量场，各种三维密度无非是它的(观者依赖的)不同分量.事实上所有物质场都有自己的能动张量.它有如下性质：Ⅰ任何封闭的(与外界无相互作用的)物质场的能动张量时变率为0，这可以体现能量、3动量和角动量守恒律；Ⅱ借瞬时观者可将其分解出能量密度、3动量密度(包括其在空间各方向上的分量)、能流密度(同样包括分量)、应力张量(stress tensor)的各分量(应力的概念与流体力学和弹性力学有关，限于数学水平在此不深究)；Ⅲ能动张量是绝对的，而各种密度量则是相对的.

“抹匀”思想(统计平均思想)在经典物理学中的应用：

注意此处的经典物理学并非指牛顿力学，而是指不考虑量子效应的相对论物理学.研究连续介质时会遇到一个“理想与现实的差距”的问题：实际组成流体的微观粒子的运动是无规则的、杂乱无章的，它们具有近乎无限多的运动状态参数.如理想气体(ideal gas，理想流体的一例)中，由于频繁碰撞，各气体分子的世界线多处相交，分子的4速在碰撞时突变，所以各分子的世界线其实拧成一团乱麻.为了将这样的混乱体系理想化、简单化，我们在构造理想流体模型时就需要采取“抹匀”手法，即对微观粒子的运动做统计平均处理，这样我们才能得到明确的、描述整个流体(或其微观足够大的一部分)的张量场等物理量，由此又提炼出共动观者(comoving observer，4速和流体介质4速相等的瞬时观者)等概念.

注意我们上述中的“微观足够大”这一说法，它在不同的物理学分支中有不同的含义和表述：如定义物质密度时认为物质宏观上连续分布，宇宙学原理认为每一时刻的宇宙空间在大尺度(例如3\*10^8光年，也称宇观尺度)下均匀等实例.体系大多需同时满足“一定尺度下体现出各向同性”的要求才可做“抹匀”处理，目的就是在简化问题的同时不失科学性.

将实际的“光波”简化为光线(无论三维还是四维)的做法称为几何光学(geometric optics)方法，这一做法的条件是光子世界线为直线，这在实际中当然是无法达到的要求.好在许多具有实用意义的电磁波都可以近似看做这样的光线.这样模型化的条件是所考虑的空间尺度很大于波长，突出了光的粒子性一面，使得用光子描述光的做法成为可能.其实这一描述也是量子电动力学的理论基础.

广义相对论的诞生：

相对性原理要求物理规律在所有惯性坐标系中具有相同数学表达式，用于狭义相对论就要求物理规律的数学表达式具有洛伦兹协变性.这是一个管定律的定律.因此，在建立狭义相对论物理学时，应该重新审查已有的物理定律，凡符合这个要求的就仍被视为定律，凡不符合这个要求的就要改造，直至符合要求才作为物理定律纳入狭义相对论物理学框架中.首先我们来审查麦氏电磁理论.麦氏方程天生就有洛伦兹协变性(改写为四维形式可以更加明确这一点)，因而可以不加改造地纳入狭义相对论物理学中.这其实并不奇怪，因为狭义相对论出现的重要原因之一就是麦氏理论与经典时空观有矛盾.再来审查牛顿运动定律，以动量守恒为例.正如前文所指出的，牛顿的动量定义→p=m\*→u使动量守恒不具有洛伦兹协变性，因而必须修改.只要把动量改定义为式⑥的→p=γ\*m\*→u，问题便迎刃而解，然后动量守恒就可作为定律而被纳入狭义相对论物理学.第三我们来审查牛顿引力论.牛顿引力论的基本方程是反映引力势和质量密度关系的泊松方程(这里不列出)，它有伽利略协变性而无洛伦兹协变性.从另一角度来看，该方程的一种形式的解表明某时空点的引力势仅由该时刻空间各处的质量密度决定，这意味着引力场以无限速度传播，显然与狭义相对论相悖.以上两点原因均表明牛顿引力论必须修改.牛顿的万有引力定律形式上和静电库仑定律很相似，既然麦克斯韦可以把库仑静电学推广改造为如此漂亮的麦氏电磁理论，看来也不难把牛顿引力论改造为狭相框架内的引力理论.但实际情况却远非如此简单.关键在，于万有引力定律和库仑定律虽很相似，却存在“符号差别”：电荷有两种，同吸异斥；质量则只正不负，同性却只吸不斥.仿照电磁理论，可以构建一个狭相框架内的引力理论，根据这个理论，引力场在变化时将出现类似电磁波的引力波，而且也以光速传播.不幸的是，由于上述符号差别，由引力波带走的能量竟是负的.这意味着系统在辐射引力波时自身能量增加，从而辐射强度变大，由此又会获得更多的能量.如此循环，必然导致物理理论上不可接受的后果.虽然可以通过修改理论克服这一困难，但又会出现新的困难.其实，狭相框架内的引力理论远非一个，但每个都有其自身问题.虽然无法绝对否定在狭相框架内建立满意的引力理论的可能性，爱因斯坦却独辟蹊径，于1915年成功地创建了革命化的、独立于狭义相对论的崭新引力理论——广义相对论.有趣的是，后人在克服狭相框架内的某种引力理论的困难的努力中，几经修改后得到的竟然也是和广义相对论完全一致的理论！

有两个重要原因促使爱因斯坦创立广义相对论，它们是引力的“普适性(universality)”和马赫原理，在此只介绍前者.牛顿引力的“普适性”包含两层含义：Ⅰ任何物体在引力场中都受引力(电中性的物体在静电场中不受电力，故电力无普适性)；Ⅱ引力场中的任何两个物体，不管其质量和组分如何，只要初始状态(质心的位置和其在该点的速度)相同，而且除引力外不受力，以后每一时刻的位置和速度就必然一样.这一结论已被许多越来越精确的实验所证实，它可以表述为：任意两个质点在引力场中同一点具有相同的引力加速度.这虽是司空见惯的结论，但为什么会这样？静电场中的两个电荷就不这样，它们在静电场中获得的加速度还取决于荷质比.在对引力做类似讨论时，不妨也把“荷“与”质”加以区分.质点的“荷”是其物质含量的量度，决定它在引力场中受多大的力，可称为引力质量，记作mG；质点的“质”则是其惯性的量度，决定它在力的作用下有怎样的加速度，可称为惯性质量，记作mI，不难导出质点在引力场中的引力加速度为→a=(mG/mI)\*→g，其中→g是该点的引力场强.若不同质点具有不同的引力荷质比mG/mI，它们在引力场中同一点就不能有相同的引力加速度.然而无数的、一个比一个精确的实验表明比值mG/mI对任何质点都相同，通过调整引力常量G还可使比值为1而简写为mG=mI.通常把这一事实称为等效原理.这是一个极其非同寻常的实验事实，应该引起深思.引力的“荷“与”质”本是两个完全不同的概念，它们为什么相等？牛顿引力论不能回答这个问题.在牛顿引力论中，这是作为实验事实(牛顿理论体系的一个公理)而被承认的.难道mG=mI仅是一种巧合吗？难道就没有更深刻的原因隐藏在这个事实的背后吗？难道一定不存在一个更优美的理论，其中mG=mI是可用推理证明的吗？对等效原理的思考，加上马赫原理的启发，促使爱因斯坦创立了他的广义相对论.

mG=mI的事实等价于初始位置和速度相同的、除引力外不受力的任何物体在引力场中都“齐步走”，这种毫无个性的集体行为强烈暗示着引力是整个时空背景的内禀性质，与其他力有本质区别.物理学是研究物理客体运动(演化)规律的学问.物理客体好比演员.正如演员的表演不能没有舞台一样，物理客体的演化也必须在某种舞台(或背景)上进行的，这个舞台就是时空.在广相创立之前，人们默认相对论的背景时空是闵氏时空.闵氏时空是如此简单，以致人们往往不注意(忘记)它的存在.引力场中的“齐步走”现象引起了爱因斯坦对时空背景的注意.假如你看演出时发现某个演员的头顶突然下降了20cm，你会认为他蹲下了；然而假如台上所有演员的头顶及桌面、椅面都同时下降一致高度20cm，那么最大的可能性是舞台台面下降所致.类似地，在引力作用下的“齐步走”现象分明强烈地暗示着引力本身是一种纯时空效应.不妨这样猜测：引力可忽略时，时空是平直的；引力不可忽略时(例如必须考虑地球或太阳的引力场时)，时空变得弯曲，弯曲情况取决于产生引力场的物质分布.根据这一猜测，引力非常不同于其他力，它特殊到这样一个程度，以至在四维语言中它不再是力而是时空的弯曲！于是，除引力外不受力的质点应称为自由质点(已经自由到不能再自由的程度).注意到闵氏时空中自由质点世界线必为测地线的结论，自然进一步假定弯曲时空中自由质点世界线也为测地线(自由质点是最简单的质点，测地线是最简单的世界线，自由质点世界线是测地线的这一假定非常符合美学原则).引力的存在不表现为质点受到一个称为“引力”的四维力，而表现为时空的弯曲，它通过改变测地线来改变自由质点的运动方式.以上就是广义相对论最基本的假定.根据这一假定，可以把mG=mI作为逻辑结论来推出.(现在到了关键的、也可以说是水到渠成的一步.)设两个自由质点具有相同的初始位置和初始速度，即它们的世界线在相交且在交点处切矢相等由于自由质点的世界线为测地线，而测地线由初始条件(测地线出发点及其在该点的切矢)唯一决定，这两条世界线必然重合.翻译为物理语言，就是引力场中两个初始状态相同的自由质点在以后的各时刻状态必然相同，而这正是mG=mI的等价表述.可见，一旦认识到引力的实质是时空弯曲，mG=mI这一长期无法解释的实验事实就是十分自然的结论.广相就这样以其特有的优雅方式首次把引力解释为四维时空的几何效应(首次统一了引力与几何)，这一成功的关键就在于补上时间这一维，而直至目前单凭三维空间还无法把引力解释为几何效应.黎曼早在28岁(1854年)时就提出了内禀曲率的概念和计算方法，并在逝世(年仅40岁)前的一段时间内致力于寻求把电力和引力统一起来的某种理论.这一努力未获得成功的重要原因之一在于他专注于空间及其曲率而没有注意时空及其曲率.直至1905年狭相问世后，时间和空间才被同等看待；1908年Minkowski才明确提出时空这一绝对概念；再过不久，“引力的实质是时空曲率”这一划时代认识才伴随着爱因斯坦对广义相对论嗯构思而逐渐建立起来.把引力实质归结为时空弯曲的认识是人类智慧的一个伟大胜利.

以上讨论说明，广相是独立于狭相框架的物理理论，狭相框架中容不下广相，容不下体现为时空曲率的引力.

用现代语言来描述，广义相对论的最基本假设可归纳为以下三点(此处为简洁而形象地说明采取诸多归纳方式中的一种，这些归纳之间其实相互等价)：

Ⅰ三维空间中的引力实质是四维时空的弯曲.当引力存在时，时空背景不再是闵氏时空，而是某种弯曲时空，度规场也不再是闵氏度规的平直度规场，而是某种弯曲的洛伦兹度规场.这一假设大胆地把物理上的引力认定为纯粹的时空几何效应.据此，除引力外不受力的质点称为自由质点.

Ⅱ自由质点的世界线是它所在的弯曲时空的测地线.在假设Ⅰ的基础上，假设Ⅱ的提出是相当自然的.当引力不存在时，时空背景是闵氏时空，自由质点的运动方程是测地线方程，该方程右边含有一个与闵氏度规相适配的导数算符(左边为0代表质点所受四维力为0).当引力存在时，一个自然的假设是将该算符改为与弯曲度规相适配的导数算符，由此得出的运动方程恰是该弯曲度规下的测地线方程，可见自由质点的世界线为测地线.当质点所受四维力不为0时上述推理过程仍成立.这正是广相独立于狭相的一个体现.在广相中，引力不表现为一个四维力出现在方程的左边，它对质点运动的影响体现在把时空变得弯曲并要求质点沿弯曲了的测地线运动.或者说，引力对运动方程的影响就在于替换那个与度规适配的导数算符.

Ⅲ时空弯曲情况受物质分布影响，关系由爱因斯坦方程描述.在承认爱氏方程后假设Ⅱ不再是独立假设.

可以证明，当引力场足够弱，质点速度足够低时，牛顿力学的计算结果与广相的近似一致，可见牛顿力学可看做广相的弱场低速近似.然而应该说明，虽然结果近似，但两者看问题的观点却有明显区别.同是自由落体运动，牛顿力学认为落体受引力而获得加速度，属于非惯性运动，但按照广相，落体不受四维力，是自由质点，三维空间中落体的运动其实是四维时空测地线被引力场源弯曲了的结果.

广义相对论认为一切物理现象都是物理客体在弯曲时空中的演化.因此，为了用广相的观点研究物理，首先要找出各种物理客体在给定弯曲时空背景上的演化方程.由于实际生活中甚至是实验室中引力场太弱，广相和牛顿力学的差别很难体现出来，通过实验或观察来归纳出弯曲时空中物理定律的做法几乎不可行.因此，只能根据某些基本原则用假设的方法“猜出”这些物理定律，其正确性则有待于它们推出的各种结论的自洽性及其与实验(如果可能的话)结果的一致性来验证.当然这种猜测是有相当根据的，一个重要的根据就是广义协变性原理(principle of general covariance).爱因斯坦在创立广相时曾提出过这样的广义协变性原理（于1917年被证明有致命漏洞）：物理定律的数学表达式在任意坐标变换下形式不变.但后来发现这种表述对物理定律并无约束力，就连牛顿方程都可以通过非实质性的改写满足这一约束.这一问题引起了有关学者(包括爱因斯坦在内)的热烈讨论，从而出现了关于广义协变性原理的各种表述.此处介绍一种既能抓住实质又便于应用的表述：只有时空度规及其派生量才允许以背景几何量的身份出现在物理定律表达式中.可以看出，广义协变性原理的实质是要在物理定律表达式中排除一切与时空内禀几何无关的人为因素.

在以上讨论的基础上便可得到提出弯曲时空中物理定律必须服从的两个原则：Ⅰ广义协变性原理；Ⅱ在时空度规等于平直度规时应能回到狭相内的物理定律.这两个判据是必要而不一定充分的.虽然这并不能唯一决定弯曲时空的物理定律，但以它们为指导，加上物理和美学的考虑，在很多情况下可以自然地得出物理定律.广相和狭相的差别无非是背景时空的差别，因此狭相中用四维语言描述物理客体的方法可以自然推广到广相.

为了得出各种物理量服从的定律，在多数情况下只需要把狭相相应定律表达式中的平直度规及普通导数算符换成弯曲度规及其对应导数算符.这可被称为“最小替换法则”.但有时最小替换法则也可能推出不同的物理定律(比如含2阶或高阶导数算符的式子在变换时需要注意算符对易性等问题，限于数学水平不赘述).

等效原理的推广内涵：