GZH007Y 40/2

高等工程数学

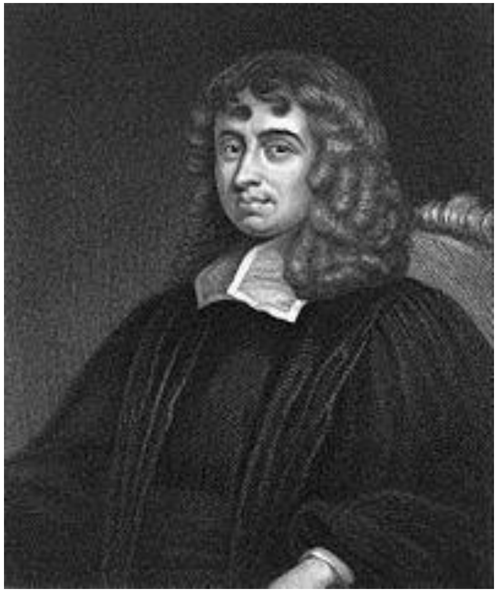
Advanced Engineering Mathematics

王 泳

中国科学院大学

2017.11.04

数学—科学不可动摇的基石，促进人类事业进步的丰富源泉



— 艾萨克·巴罗 (Isaac Barrow 1630-1677)

英国数学家

数值分析

数值分析就是研究各种数学问题的数值计算的方法和理论的学科

数值分析绪论

线性代数方程组的解法

插值方法

数值积分和数值微分公式

方程求根

常微分方程的数值解法

第九章：方程求根

1. 二分法
2. 不动点迭代法
3. 牛顿（Newton）迭代法

本章主要讨论非线性方程 $f(x)=0$ 的求根问题，

这里 $f(x)$ 可以是代数多项式，也可以是超越函数，

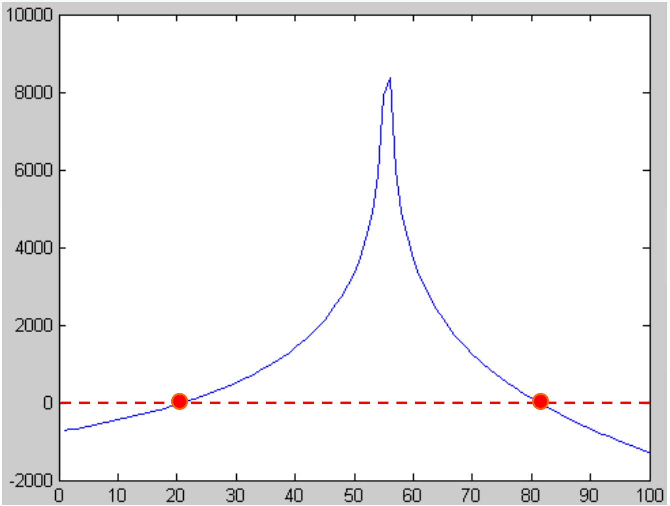
对于高于四次的代数方程，不存在通常的求根公式

来计算准确值，超越方程一般不能求出根的准确值。

- **问题** 求解 $5x^5+4x^4+3x^3+2x^2+x+1=0$

- **问题** 求解 $x=e^{-x}$

■ 火箭兵的烦恼



火箭向上的速度可以通过下面的公式计算

$$v = u\ln\frac{m_0}{m_0 - qt} - gt$$

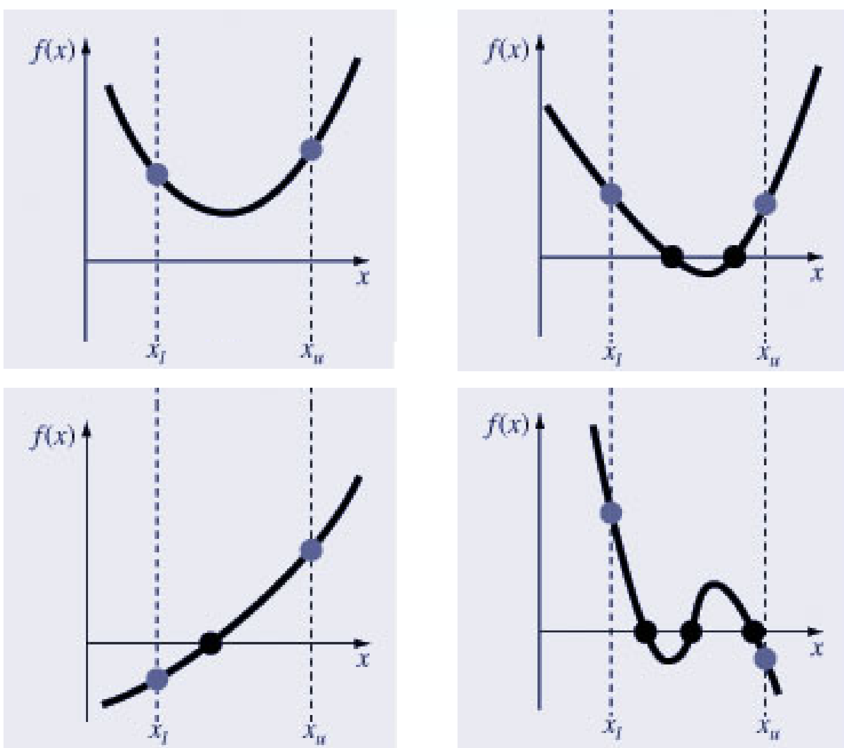
其中，$v=$ 向上的速度，$u=$ 燃料相对火箭的喷出速度，$m_0=$ 火箭在 $t=0$ 时刻的初始质量，$q=$ 燃料消耗率，$g=$ 向下的重力加速度（假定为常数取 $9.81m/s^2$）。如果 $u=2000m/s$，$m_0=150000kg$，$q=2700kg/s$，

请计算速度达到 $v=750m/s$ 的时间。

$$750 = 2000\ln\frac{150000}{150000-2700t} - 9.81t \quad \Rightarrow \quad y = 2000\ln\frac{150000}{150000-2700t} - 9.81t - 750$$

- **火箭兵的烦恼**

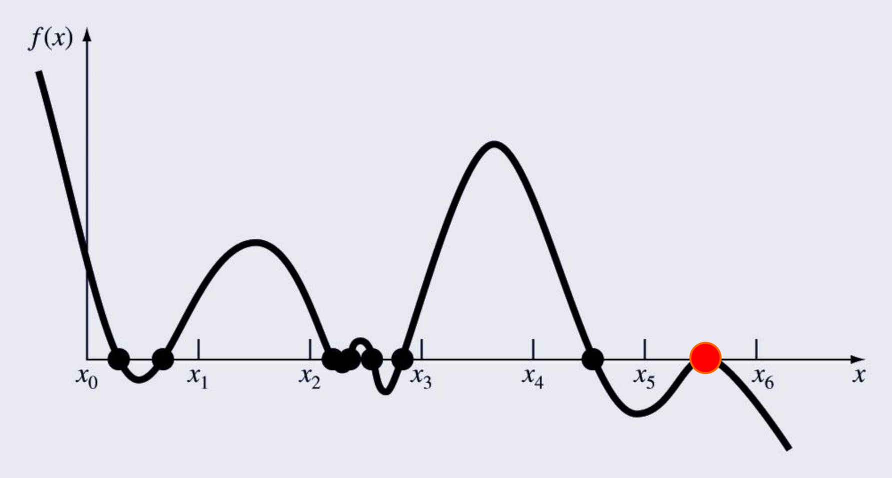
用图形法求解方程只能获得根的粗略估计值，准确性和可靠性都比较差



如果$f(x_l)$和$f(x_u)$的符号相同，那么在该区间就存在偶数个根

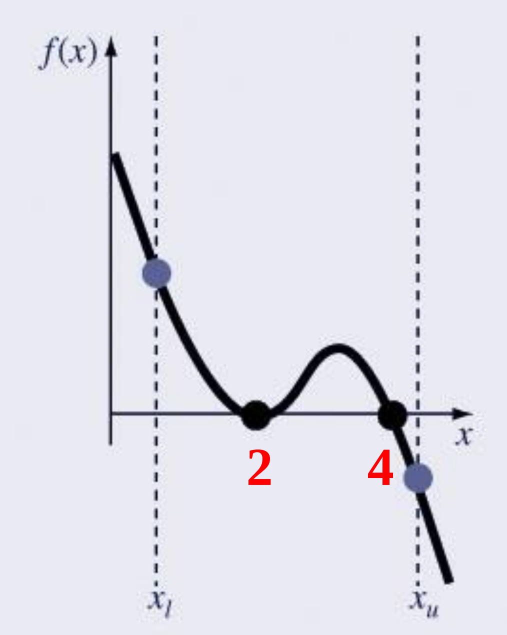
如果$f(x_l)$和$f(x_u)$的符号相反，那么在该区间就存在奇数个根

- 火箭兵的烦恼

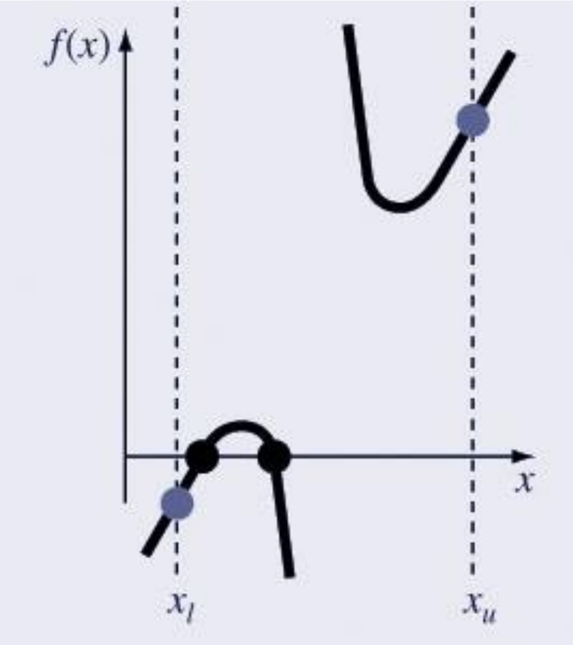


例外情况也是存在的

$$f(x) = (x-2)(x-2)(4-x)$$



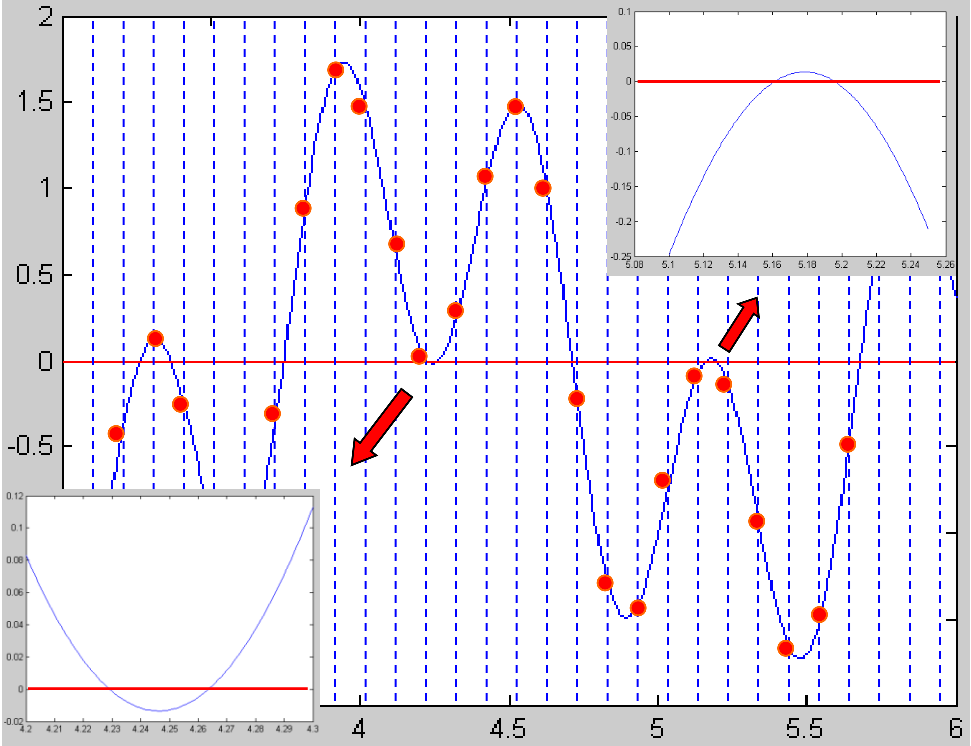

```
x=1:0.1:4.5;

y=(x-2).*(x-2).*(4-x);

plot(x,y);
```



$$f(x) = \sin(10x) + \cos(3x)$$

■ 火箭兵的烦恼

增量搜索
（Incremental search method）



```
x=3:0.01:6;

y=sin(10*x)+cos(3*x);

plot(x,y);
```

```
incsearch(@(x)
sin(10*x)+cos(3*x),3,6)
```

```
incsearch(@(x)
sin(10*x)+cos(3*x),3,6,
100)
```

增量搜索这类穷举方法不靠谱

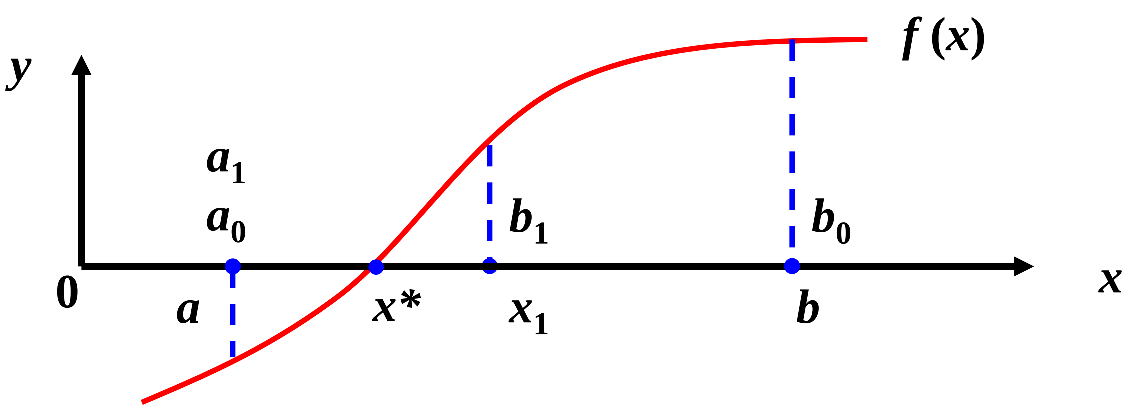
第九章：方程求根

1. 二分法
2. 不动点迭代法
3. 牛顿（Newton）迭代法

二分法

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\bullet f(b)<0$ ，根据连续函数的性质可知方程 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 内一定有实根，并称 $[a,b]$ 为方程 $f(x)=0$ 的有根区间。为明确起见，不妨假设它在 $[a,b]$ 内有唯一的实根 x^*。

记 $[a,b]=[a_0,b_0]$，计算中点 $x_1=\dfrac{a_0+b_0}{2}$ 的函数值 $f(x_1)$，这时如果 $f(a_0)\bullet f(x_1)<0$，则得新的有根区间 $[a_0,x_1]=[a_1,b_1]$，且 $b_1-a_1=\dfrac{b-a}{2}$。



再计算新的有根区间中点 $x_2=\dfrac{a_1+b_1}{2}$ 的函数值 $f(x_2)$，这时如果有 $f(a_1)\bullet f(x_2)<0$，则又得新的有根区间 $[a_1,x_2]=[a_2,b_2]$，否则得到新的有根区间 $[x_2,b_1]=[a_2,b_2]$，且 $b_2-a_2=\dfrac{b-a}{2^2}$。

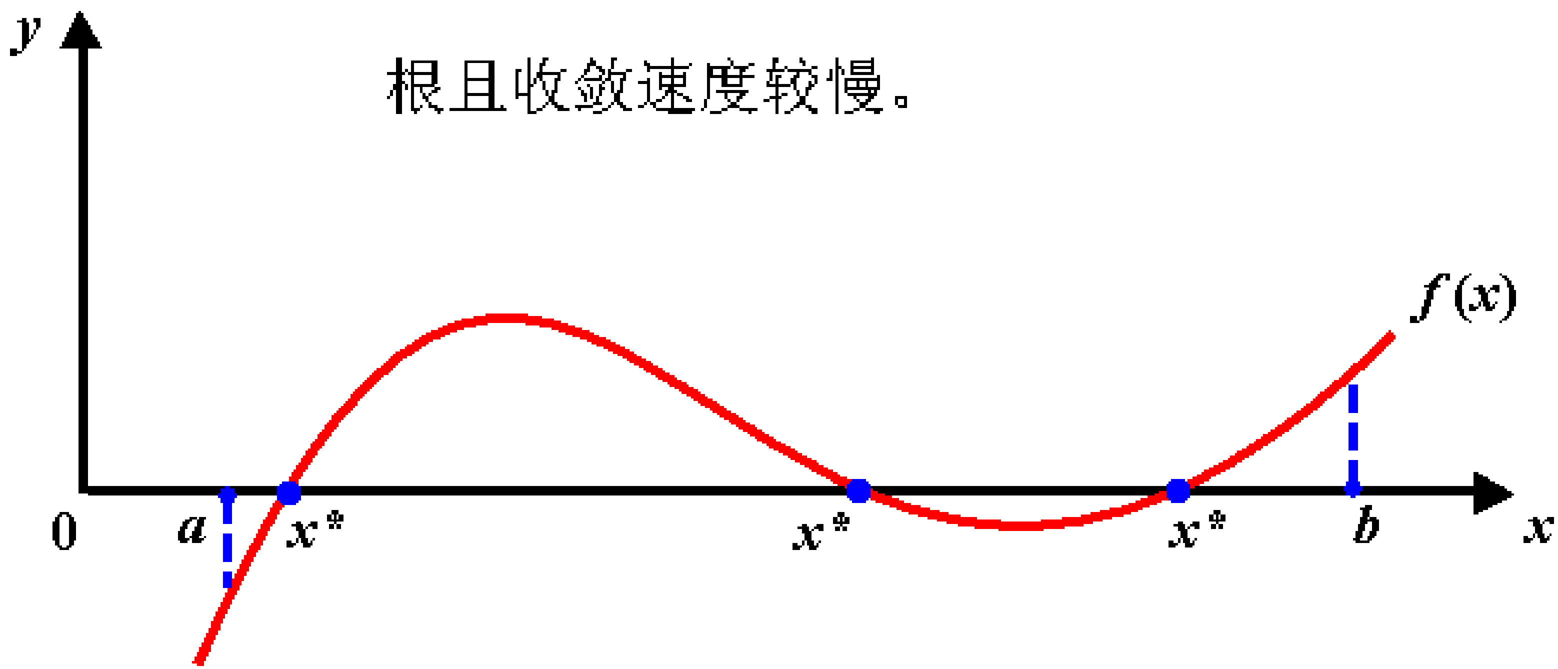
如此继续下去，第 n 次计算中点 $x_n=\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ 的函数值 $f(x_n)$ 后，可得新的有根区间 $[a_n,b_n]$，且 $b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}$。

于是在 $[a_n,b_n]$ 内任取一点，例如记为 x_{n+1}（不一定要为中点），作为方程准确根 x^* 的近似值，则有误差估计

$$|x^*-x_{n+1}|\le\frac{b-a}{2^n}\quad（若\ x_{n+1}\ 是中点，则\ |x^*-x_{n+1}|\le\frac{b-a}{2^{n+1}}）$$

可见 x_{n+1} 必收敛于 x^*。

二分法的优点是简单可靠，只要求 $f(x)$ 连续，收敛性总能得到保证，但缺点是不能用来求重根且收敛速度较慢。



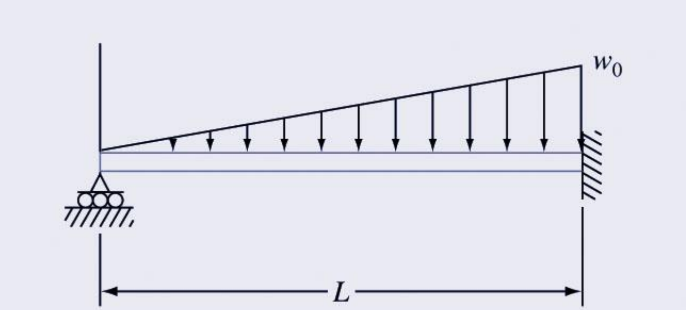
思考题 （15分）

图中所示的是一个均匀横条，其上的负载是以线性增加的方式分布的。弹性曲线的方程如下

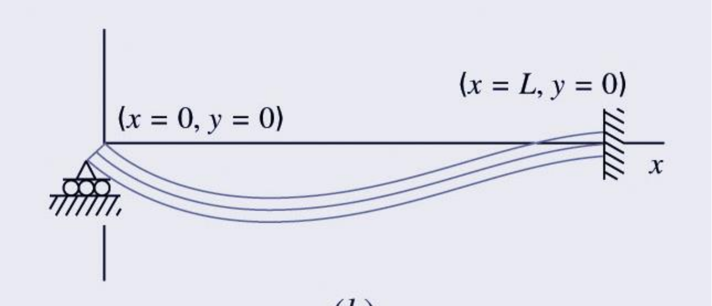
$$y=\frac{w_0}{120EIL}\left(-x^5+2L^2x^3-L^4x\right)$$

用二分法求解最大偏转点（即，$dy/dx=0$ 时的 x 值)，并求出最大偏转值。

$L=600\text{cm}$ ，$E=50000\text{kN/cm}^2$ ，$I=30000\text{cm}^4$ ，$w_0=2.5\text{kN/cm}$



(a)



(b)

1 二分法

2 不动点迭代法

3 牛顿（Newton）迭代法

■ 迭代法

迭代法是求解一元非线性方程 $f(x)=0$ （9.1）

的主要方法。其做法是将方程（9.1）改写成等价方程

$$x=\varphi(x) \tag{9.2}$$

这时，方程（9.2）成为“隐式”形式，除非 $\varphi(x)$ 是 x 的线性函数，否则不能直接算出它的根。对此，我们从某个初始值 x_0 开始，对应（9.2）式构造迭代公式

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)\quad(k=0,1,2,\cdots) \tag{9.3}$$

这就可得一序列 $\{x_k\}$。

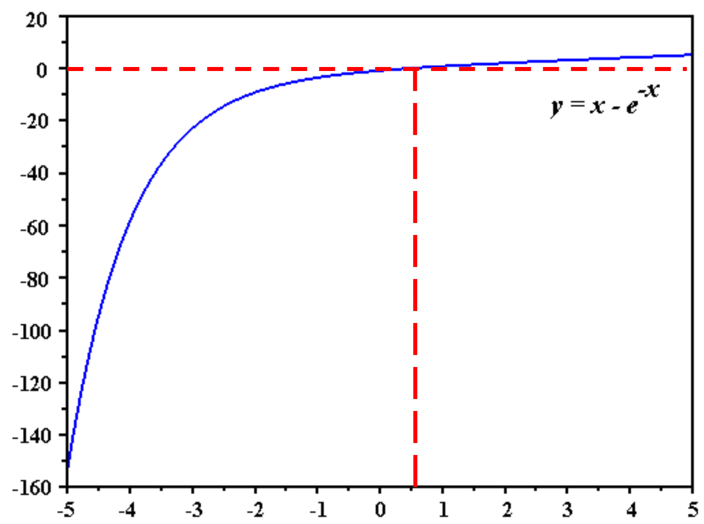
显然，如果 $\varphi(x)$ 连续，且序列 $\{x_k\}$ 收敛到 x^*，则有

$$x^*=\lim_{k\to\infty}x_{k+1}=\lim_{k\to\infty}\varphi(x_k)=\varphi\left(\lim_{k\to\infty}x_k\right)=\varphi(x^*)$$

可知 x^* 就是方程（9.2）的根，这时称迭代公式（9.3）是收敛的，否则称其是发散的。

上述这种迭代法，是从一个初始近似值出发计算迭代的方法，一般被称为单点迭代法，$\varphi(x)$ 被称为迭代函数，由（9.3）式产生的序列 $\{x_k\}$ 被称为迭代序列。这里，由于 $x^* = \varphi(x^*)$，这就是说 x^* 经过函数值计算后，$\varphi(x^*)$ 仍然等于 x^*，因此 x^* 被称为函数 $\varphi(x)$ 的一个不动点。显然 $\varphi(x)$ 依赖于函数 $f(x)$，用不同的方程构造迭代函数就得到不同的迭代方法。

- **例9.1** 利用迭代法求解 $x = e^{-x}$ 在 $x = 0.5$ 附近的根



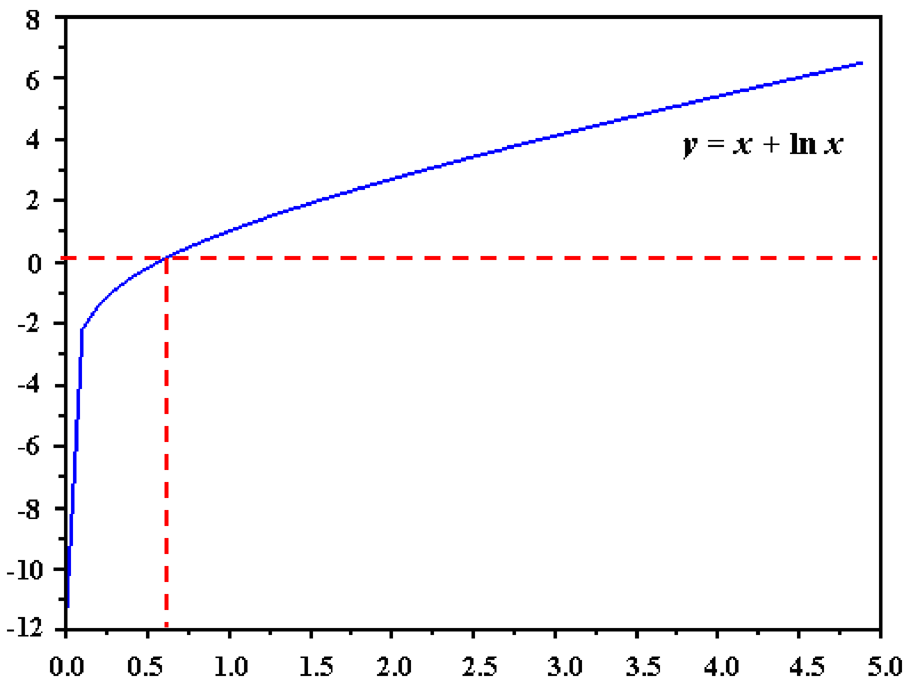
解： 首先将方程改写成迭代公式 $x_{k+1} = e^{-x_k}$ （$k = 0,1,2,\cdots$）

取初值 $x_0 = 0.5$，经 20 次迭代得到数据列于下表

k	1	2	3	4	5	6	7
x_k	0.60653	0.54524	0.57970	0.56006	0.57117	0.56486	0.56844
k	8	9	10	11	12	13	14
x_k	0.56641	0.56756	0.56691	0.56728	0.56707	0.56719	0.56712
k	15	16	17	18	19	20	
x_k	0.56716	0.56714	0.56715	0.56714	0.56714	0.56714	

从表中数据可以看出，$\{x_k\}$ 趋向于一个固定的值，这说明迭代格式收敛。

如果将方程改写为 $x=-\ln x$，由此可构造迭代格式 $x_{k+1}=-\ln x_k$（$k=0,1,2,\cdots$），仍取 $x_0=0.5$ 进行迭代，迭代 4 次得到 $x_4=-0.00371<0$，超出 $\ln x$ 的定义域，迭代不能进行，因此这个迭代格式是不适合的。



$$f(x)=0$$

$$x=g(x)$$

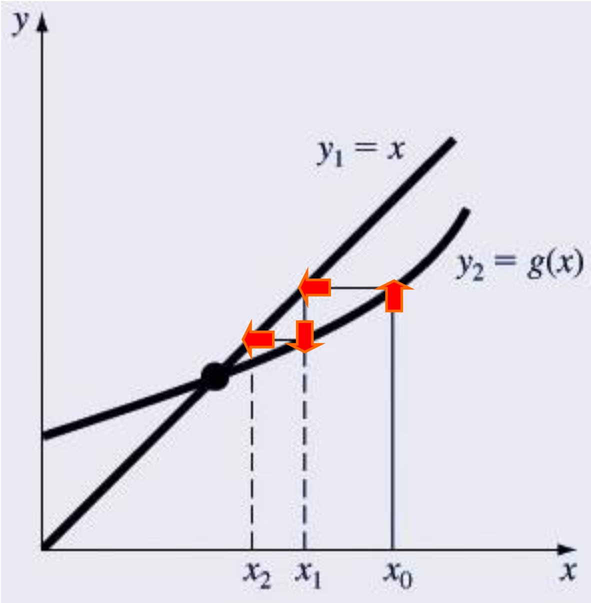
$$x_1=g(x_0)$$

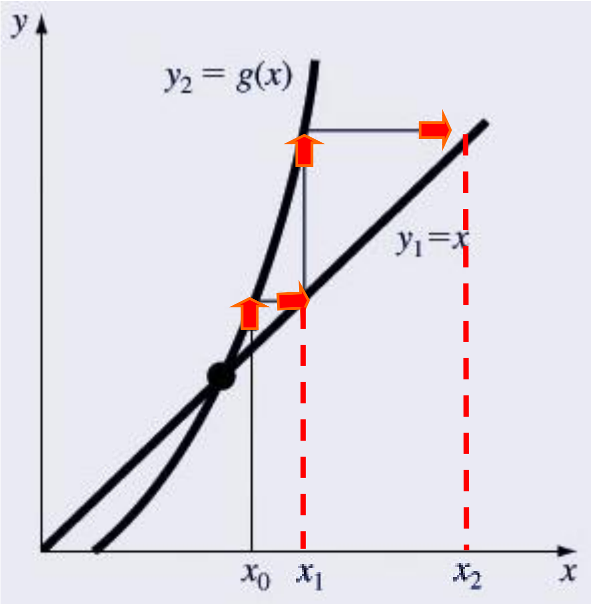
$$x_2=g(x_1)$$

$$\vdots$$

$$x_{i+1}=g(x_i)$$

收敛与发散





不动点迭代法

$$f(x)=0$$

$$x=g(x)$$

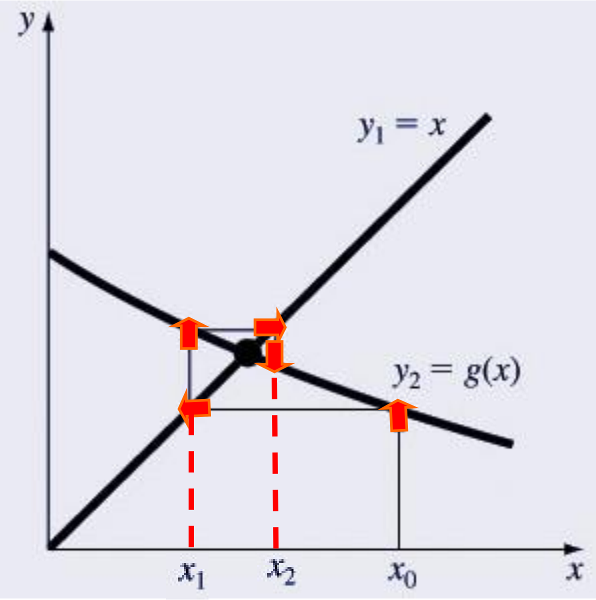
$$x_1=g(x_0)$$

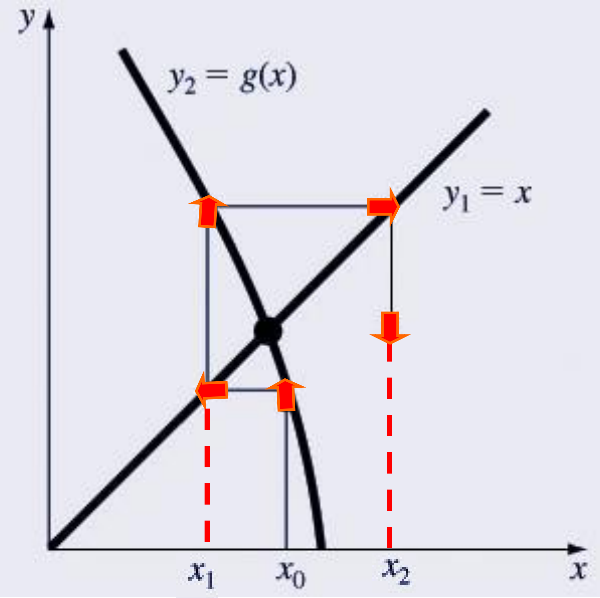
$$x_2=g(x_1)$$

$$\vdots$$

$$x_{i+1}=g(x_i)$$

收敛与发散





不动点迭代法

收敛与发散

$$f(x) = 0$$

$$x = g(x)$$

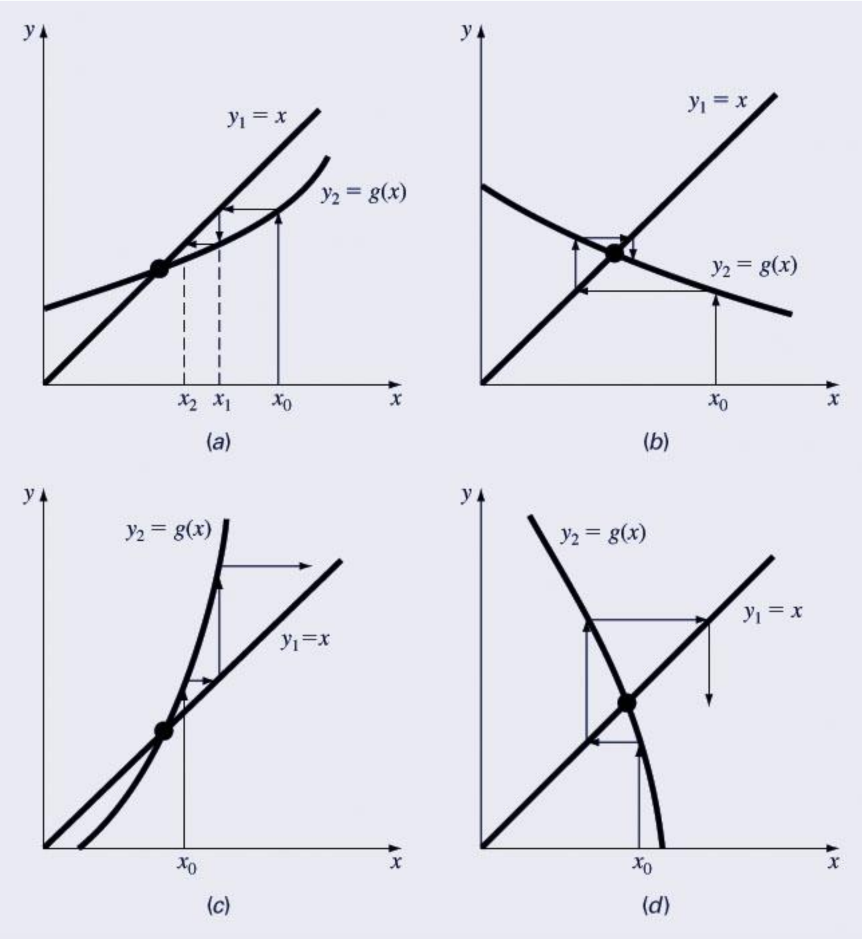
$$x_1 = g(x_0)$$

$$x_2 = g(x_1)$$

$$\vdots$$

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

$$\boxed{\begin{gathered} E_{i+1} = g'(\xi) E_i \\ |g'(\xi)| \begin{array}{cc} < & 1 \\ > & 1 \end{array} \end{gathered}}$$



不动点迭代的误差与前一次迭代的误差呈线性比例关系

$$x=\varphi(x) \qquad (9.2)$$

■ **收敛性**

■ **定理 9.1 （收敛性定理）**

设方程（9.2）中的函数 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的一阶导数，且满足条件：

（1） 当 $a\le x\le b$ 时，也有 $$a\le\varphi(x)\le b \qquad (9.4)$$

（2） 存在常数 $0<L<1$，使对任意 $x\in[a,b]$，有 $$|\varphi'(x)|\le L<1 \qquad (9.5)$$

成立，则 ① 函数 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在唯一的不动点 x^*；

② 对任意初值 $x_0\in[a,b]$，迭代公式（9.3）收敛于不动点 x^*；

③ 有误差估计式 $$|x^*-x_k|\le\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}| \qquad (9.6)$$

$$|x^*-x_k|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0| \qquad (9.7)$$

迭代算法的存在唯一性、收敛性和误差估计都被包含在该定理中.

误差估计（9.6）式说明，只要相邻两次迭代值 x_k， x_{k-1} 的差 $\left|x_k - x_{k-1}\right|$ 充分小，就可以保证迭代值足够精确，所以常用条件 $\left|x_k - x_{k-1}\right| < \varepsilon$ 来控制迭代过程是否结束，当上述条件满足时就停止迭代，且取 $x^* \approx x_k$ 为所求根的满足精度要求的近似值。不过当 $L \approx 1$ 时，这个方法就不可靠了。

$$\left|x^* - x_k\right| \le \frac{L}{1-L}\left|x_k - x_{k-1}\right| \qquad (9.6)$$

$$\left|x^* - x_k\right| \le \frac{L^k}{1-L}\left|x_1 - x_0\right| \qquad (9.7)$$

误差估计（9.7）式还可用来估计使误差达到其精度所需要迭代的次数，也就是说，若先给出计算精度 ε，要求 $\left|x^* - x_k\right| < \varepsilon$，则由（9.7）式，有

$$\left|x^* - x_k\right| \le \frac{L^k}{1-L}\left|x_1 - x_0\right| \le \varepsilon$$

就可确定迭代次数，应取

$$k \ge \frac{\ln \dfrac{\varepsilon(1-L)}{\left|x_1 - x_0\right|}}{\ln L}$$

$$\left|x^* - x_k\right| \le \frac{L}{1-L}\left|x_k - x_{k-1}\right| \qquad (9.6)$$

$$\left|x^* - x_k\right| \le \frac{L^k}{1-L}\left|x_1 - x_0\right| \qquad (9.7)$$

对于较为复杂的迭代函数，其导函数也较复杂，这就使得 L 难以取值，所以实际中并不常用此方法。实际使用迭代法时，常在根 x^* 临近范围内讨论，如果只要求对 x^* 邻域中任意的初始值 x_0 迭代序列 $\{x_k\}$ 收敛于 x^*，那么这种在根的临近范围具有的收敛性被称作局部收敛性。

■ **定理 9.2 （局部收敛性定理）**

设 x^* 是 $\varphi(x)$ 的一个不动点，$\varphi'(x)$ 在 x^* 的某个邻域上存在、连续且 $|\varphi'(x^*)|<1$，则迭代公式（9.3）局部收敛。

$$\boxed{x_{k+1}=\varphi(x_k)\quad(k=0,1,2,\cdots)\qquad(9.3)}$$

评价迭代格式的优劣，一个重要标志就是收敛速度

■ **定义 9.1**

设序列 $\{x_k\}$ 是收敛于方程 $f(x)=0$ 的根 x^* 的迭代序列，若存在常数 $p\geq 1$ 和 $c\neq 0$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|x_{k+1}-x^*|}{|x_k-x^*|^p}=c \qquad (9.8)$$

则称序列 $\{x_k\}$ 是 p 阶收敛的。当 $p=1$ 时被称为线性收敛，当 $p>1$ 时被称为超线性收敛，当 $p=2$ 时被称为平方收敛或二阶收敛。

显然，阶数 p 越大，收敛速度越快.

思考题 **（15分）**

方程 $x=1+\dfrac{1}{x^2}$ 在 $x_0=1.5$ 附近有根

求证:

该方程的迭代格式 $x_{k+1}=1+\dfrac{1}{x_k^2}$ 收敛

1 二分法

2 不动点迭代法

3 牛顿（Newton）迭代法

牛顿（Newton）迭代法

■ **问题**　求解 $x^{\sin x}-2=0$

牛顿（Newton）迭代法是求解一元非线性方程 $f(x)=0$ 的一种常用和重要的迭代法，它的基本思想是将非线性方程 $f(x)=0$ 逐步转化为线性方程来求解。

■ **牛顿法的迭代公式**

设已知方程 $f(x)=0$ 的根 x^* 的一个近似值 x_0，将 $f(x)$ 在 x_0 附近作泰勒展开

$$0=f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$$

或表示为

$$x=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\boxed{-\frac{f''(\xi)}{2f'(x_0)}(x-x_0)^2}$$

其中，设 $f'(x_0)\neq 0$， $f''(x)$ 存在、连续，而 ξ 在 x 与 x_0 之间。

牛顿（Newton）迭代法

忽略上式最后一项，则可得 x^* 的一个新的近似值

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

把 x_1 代替上式右端的 x_0，并设 $f'(x_1) \neq 0$，于是又得新的近似值

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

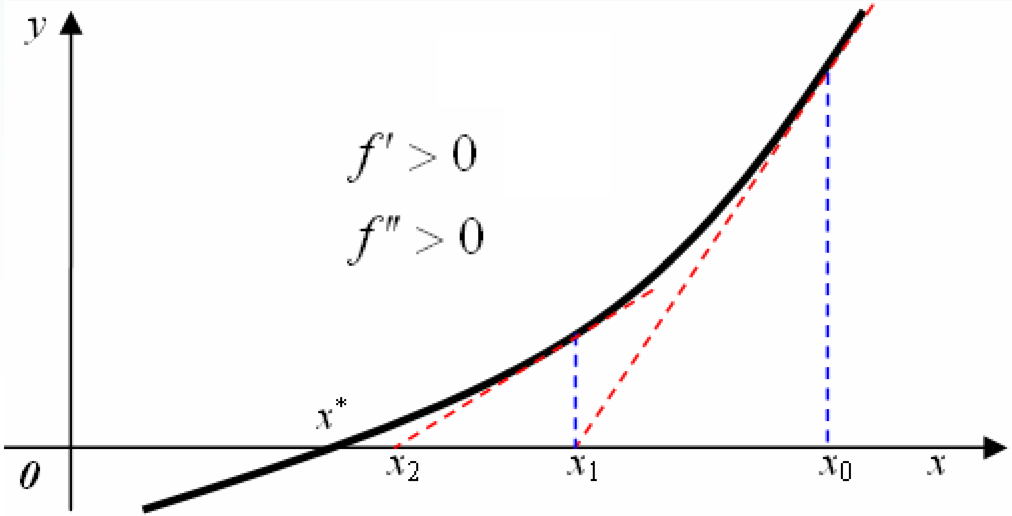
如此继续下去，可知当 $f'(x_k) \neq 0$（$k = 0, 1, 2, \cdots$），可得

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots) \qquad (9.9)$$

由此产生迭代序列 $\{x_k\}$，迭代格式（9.9）被称为牛顿迭代法。

牛顿（Newton）迭代法

右图解释了牛顿迭代法的几何意义：



牛顿迭代法就是用切线代替曲线 $y = f(x)$，求出切线与 x 轴交点的横坐标

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

作为方程的根的第 $n+1$ 次近似值。

由上图可见，只要初始值取得充分靠近 x^*，序列 $\{x_k\}$ 会很快收敛于解 x^*。因此，牛顿迭代法在单变量情况下也被称为切线法。

牛顿（Newton）迭代法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k = 0,1,2,\cdots) \qquad (9.9)$$

■ 牛顿法的收敛性

牛顿迭代法作为不动点迭代，其迭代函数为

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

而

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}$$

如果 x^* 是方程 $f(x)=0$ 的一个单根，即 $f(x^*)=0$，而 $f'(x^*)\neq 0$，则 $\varphi'(x^*)=0$。根据上节收敛性定理可知，在单根 x^* 的附近，对于任意初始值 x_0，由（9.9）式所得的迭代序列都收敛于根 x^*，而且用牛顿法求单根的收敛速度是较快的。但是，如果 x^* 是 $f(x)=0$ 的重根，则可以证明牛顿法的收敛速度较慢。

牛顿迭代法对初始值 x_0 的选取要求比较高， x_0 必须充分靠近 x^* 才能保证局部收敛

■ **定理 9.3 （局部收敛性定理）**

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上存在二阶导数，且满足条件：

（1） $f(a)\bullet f(b)<0$；

（2） $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上不等于零；

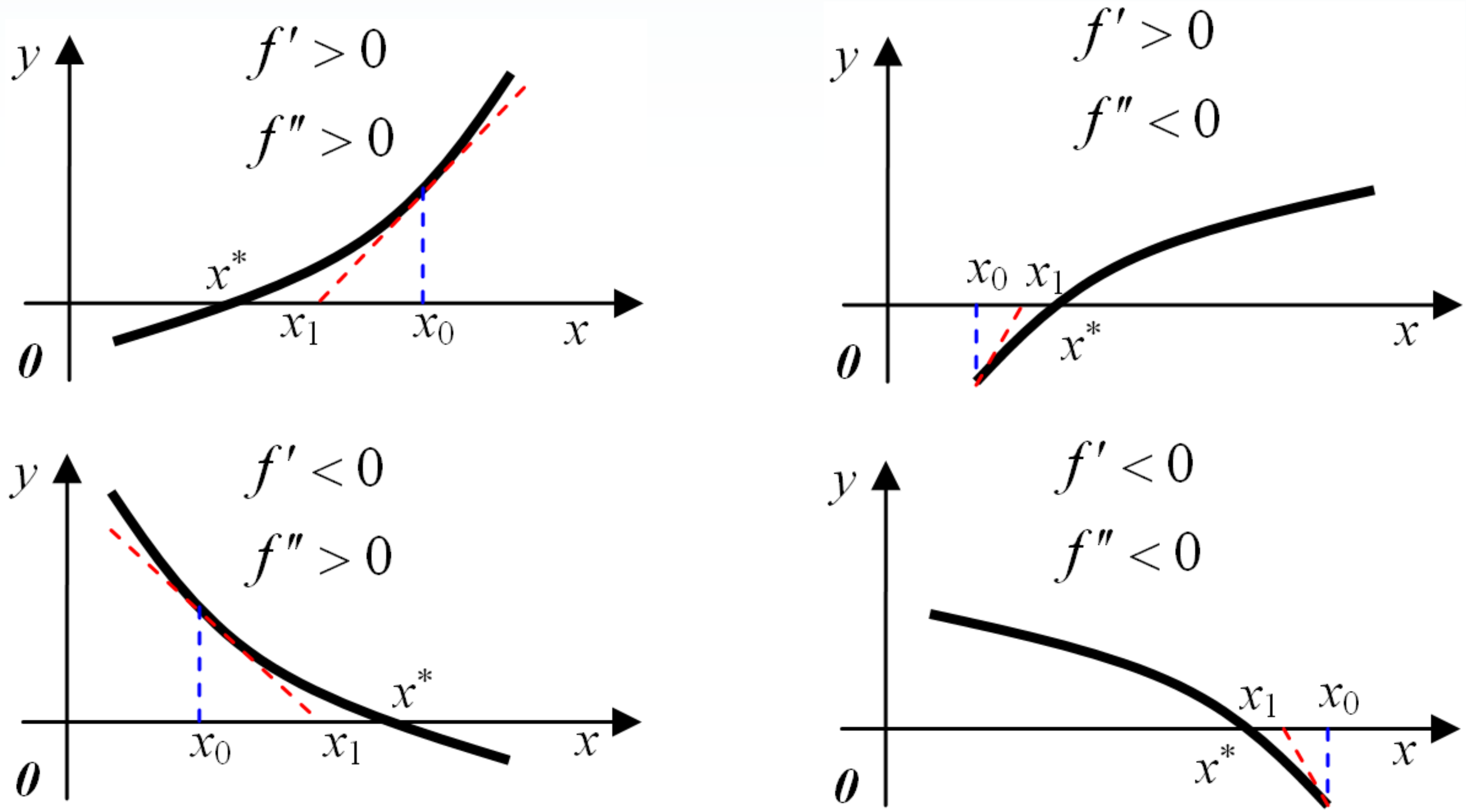
（3） $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号；

（4） 在 $[a,b]$ 上任意选取满足条件 $f(x_0)\bullet f''(x)>0$ 的初始近似值 x_0。

则由牛顿迭代法产生的序列 $\{x_k\}$ 收敛于方程 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上的唯一根。

牛顿（Newton）迭代法

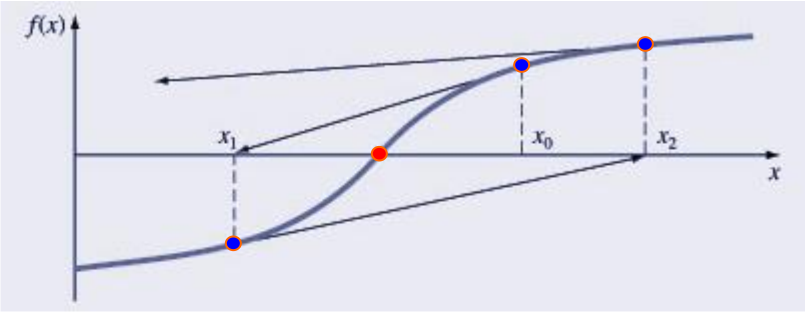
满足定理条件的情况只有四种：

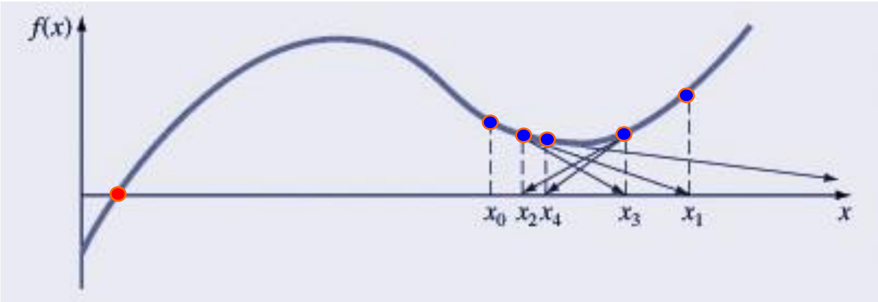


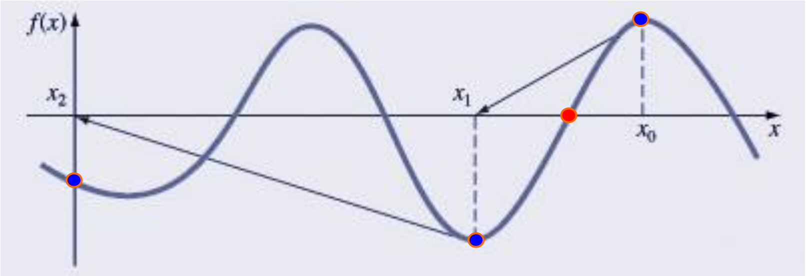
牛顿（Newton）迭代法

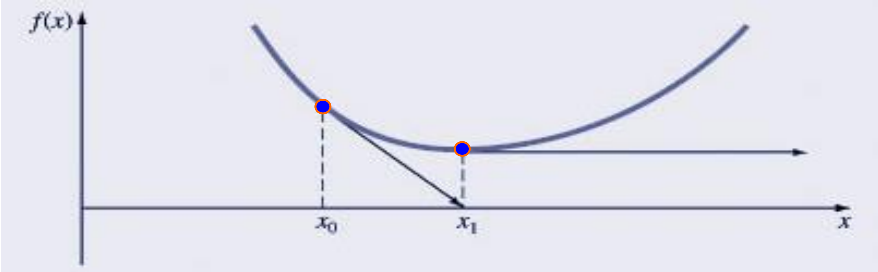
牛顿法的收敛性

对于牛顿迭代法而言，没有通用的收敛准则。其收敛性依赖于函数的性质和初始猜测值的准确度





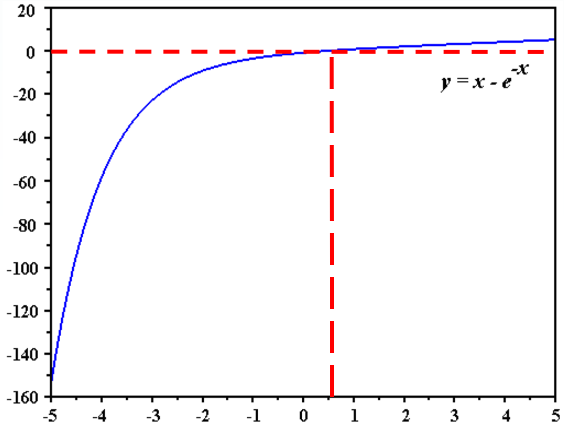




0 斜率是真正的灾难！

■ **例9.2** 用牛顿迭代法求解方程 $x = e^{-x}$ 在 $x = 0.5$ 附近的根

解：



首先将方程改写成迭代公式 $$xe^{x} - 1 = 0$$

于是 $$f(x) = xe^{x} - 1$$

相应的牛顿迭代公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - e^{-x_k}}{1 + x_k} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

取 $x_0 = 0.5$，计算结果如下：

$$x_0 = 0.5\text{，}\quad x_1 = 0.57102\text{，}\quad x_2 = 0.56716\text{，}\quad x_3 = 0.56714\text{，}\quad \cdots$$

经过 3 次迭代后得到 $x_3 = 0.56714$。与例 9. 1 中迭代法进行比较可知，牛顿法的收敛速度是相当快的。

■ 牛顿下山法

从前面讨论的牛顿法的局部收敛性可知，牛顿法的收敛性依赖于初始值的选取，如果初始值的选取离所求根 x^* 较远，则可能导致迭代过程发散。

■ 例9.3

设有方程

$$x^3 - x - 1 = 0$$

求该方程在 $x = 1.5$ 附近的根。

解：

设初始值 $x_0 = 1.5$，牛顿迭代公式是

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - x_k - 1}{3x_k^2 - 1} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{9.10}$$

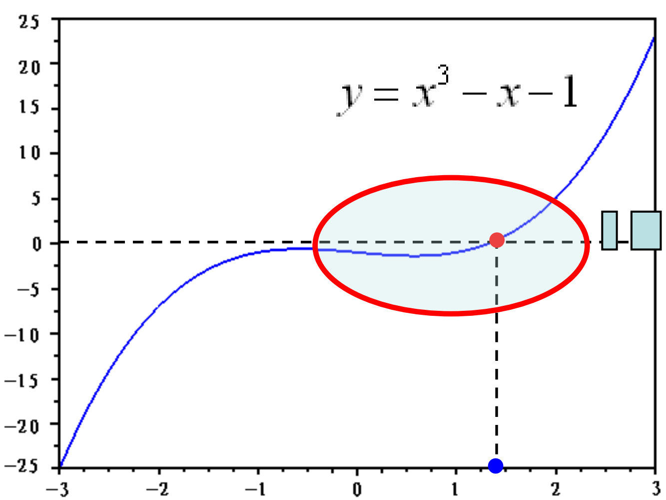
牛顿（Newton）迭代法

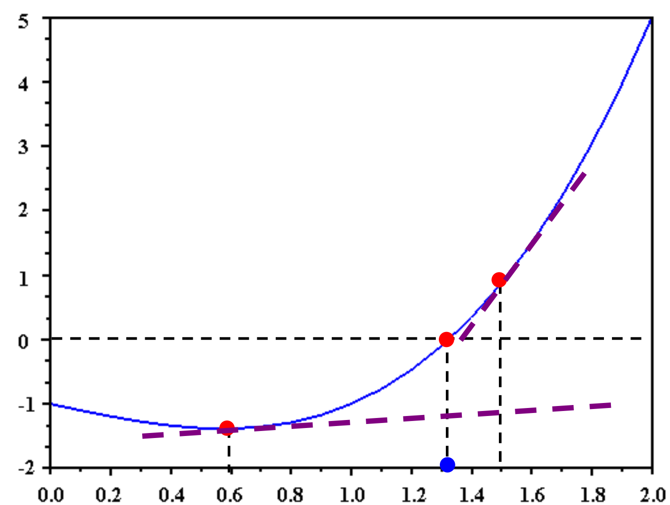
迭代结果如下

$$x_1 = 1.34783,\quad x_2 = 1.32520,\quad x_3 = 1.32472$$

其中第 3 步迭代值 x_3 已具备 6 位有效数字，迭代过程收敛。

如果选取初始值 $x_0 = 0.6$（离所求根 x^* 较远），按牛顿迭代公式（9. 10）求得的第一步迭代值是 $x_1 = 17.9$，这个结果比 x_0 更远离所求根 x^*，因此迭代过程发散。





牛顿（Newton）迭代法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k = 0,1,2,\cdots) \qquad (9.9)$$

在实际应用牛顿法时，往往很难找到一个较好的迭代初始值 x_0 来保证迭代过程收敛。通常，对于一个收敛的迭代过程来来说，在根 x^* 的附近区域内，若迭代值 x_k 越接近 x^*，则其函数值的绝对值 $|f(x_k)|$ 越小。基于这点，我们可在迭代过程中附加一项 $|f(x)|$ 函数值单调下降的条件，即

$$|f(x_k)| > |f(x_{k+1})| \qquad (9.11)$$

强制使迭代过程收敛，这种满足条件式（9.11）的算法被称作下山法。

其具体做法是，把牛顿法的迭代公式（9.9）修改为

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k = 0,1,2,\cdots) \qquad (9.12)$$

其中 $0 < \lambda \le 1$ 被称作下山因子，为保证迭代过程中下山成功，即使（9.11）式成立，必须选取适当的下山因子 λ。

牛顿（Newton）迭代法

下山因子的选取是个搜索试探过程，可先从 $\lambda=1$ 开始试探条件式（9.11）是否成立，若不成立，则将 λ 逐步分半减小，即可选取 $\lambda=1$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，…，$\frac{1}{2^n}$，…，直至找到某个使单调条件式（9.11）成立的下山因子。如果在上述过程中挑选的 λ 已非常小，但仍无法使单调条件式（9.11）成立，这时应考虑重新选取初始值 x_0，然后进行新一轮的迭代。

在例 9.3 中，取初始值经过 $x_0=0.6$，几次试算后，可找到 $\lambda=\frac{1}{32}$，且由（9.12）式可得 $x_1=1.140625$，这时 $\left|f(x_1)\right|<\left|f(x_0)\right|$（称下山成功）。显然 $x_1=1.140625$ 比 $x_0=0.6$ 更接近于根 $x^*=1.32472$，因此迭代过程收敛了。

牛顿（Newton）迭代法

思考题　（15分）

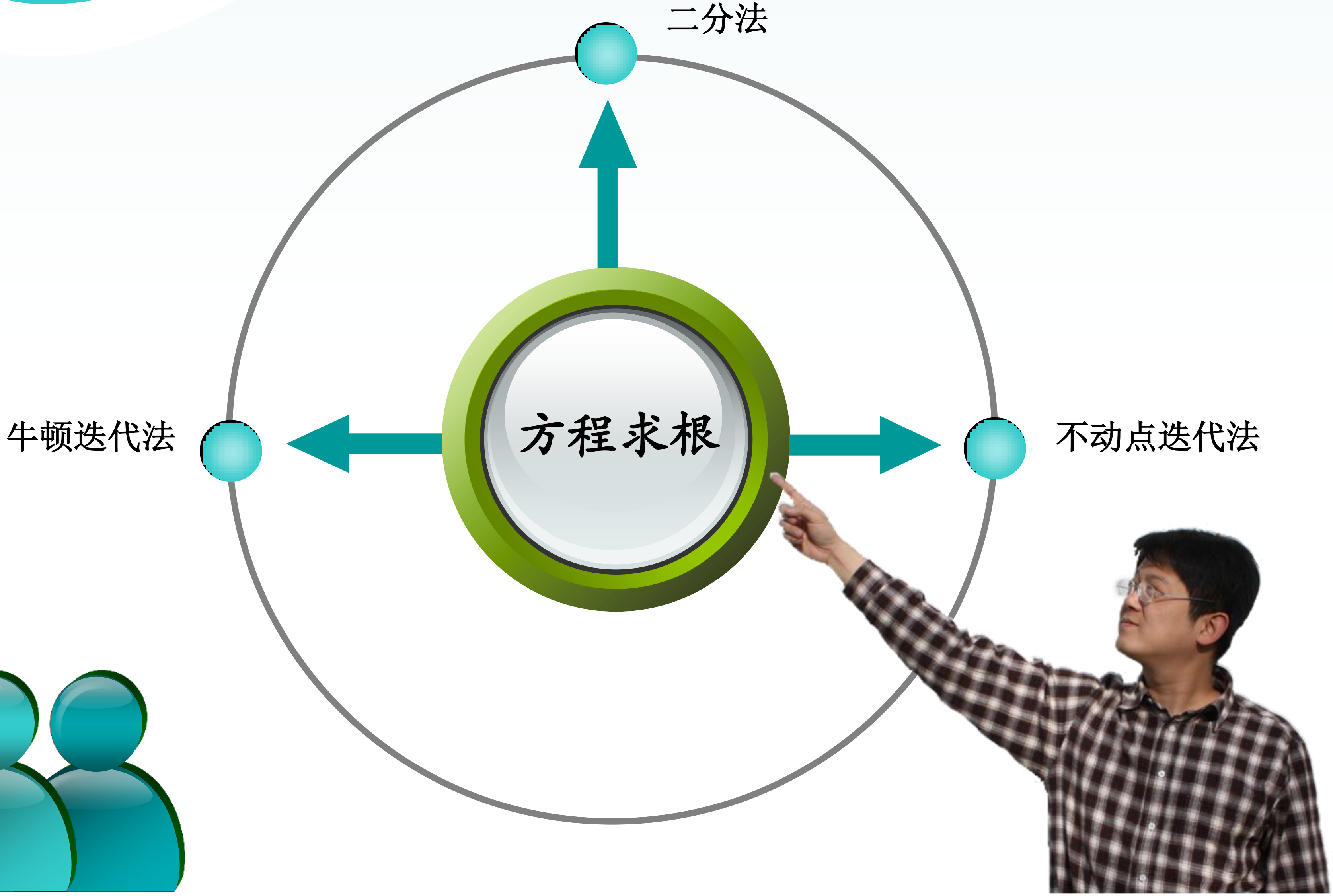
“除与平均（divide and average）” 方法是逼近任何

正数 a 的平方根的一种古老方法，可以表示为

$$x_{i+1} = \frac{x_i + a / x_i}{2}$$

证明该公式是建立在牛顿-拉弗森算法基础上的

总结



"不幸"是一所没人报考的大学，但它年年招生。能毕业的，都是强者

To be continued…

wangyong@ucas.ac.cn
http://people.ucas.ac.cn/~wangyong

Thank you !