GZH007Y 40/2

高等工程数学

Advanced Engineering Mathematics

王 泳

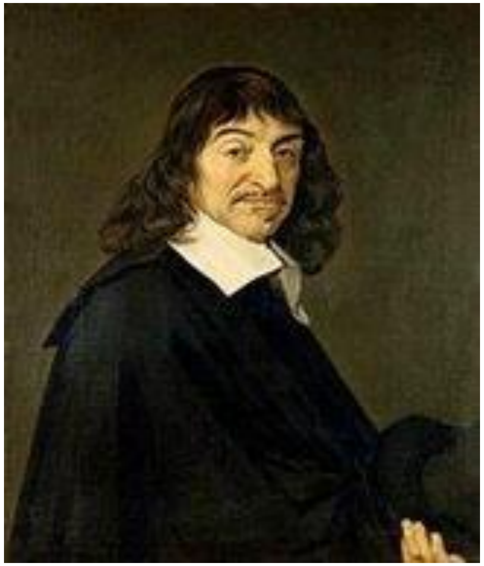
中国科学院大学

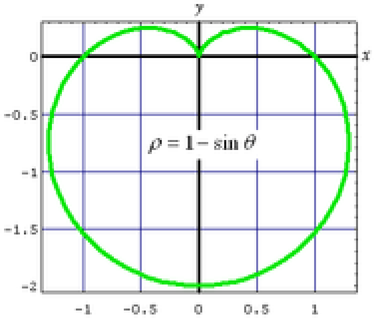
2017.09.16

异常抽象的问题，必须讨论的异常清楚

— 笛卡儿 (René Descartes 1596-1650)

法国数学家、科学家和哲学家





矩阵理论

矩阵理论在自然科学、工程技术、控制理论和社会经济学等领域的应用日趋深广，应用矩阵的理论和方法来解决工程技术和社会经济领域中的实际问题也越来越普遍。

线性空间与线性变换

- 线性空间
- 基变换与坐标变换
- 子空间与维数定理
- 线性空间的同构
- 线性变换的概念
- 线性变换的矩阵表示

内积空间

- 欧氏空间
- 正交基及子空间的正交关系
- 内积空间的同构
- 正交变换
- 复内积空间（酉空间）
- 正规矩阵

矩阵的标准形

- 矩阵的相似对角形
- 矩阵的约当标准形
- 最小多项式

矩阵函数及其应用

- 向量范数
- 矩阵范数
- 向量和矩阵的极限
- 矩阵幂级数
- 矩阵函数
- 矩阵的微分与积分
- 常用矩阵函数的性质

第二章：内积空间

1. 欧氏空间
2. 正交基及子空间的正交关系
3. 内积空间的同构
4. 正交变换
5. 复内积空间（酉空间）
6. 正规矩阵

欧氏空间

1. 欧氏空间
2. 正交基及子空间的正交关
3. 内积空间的同构
4. 正交变换
5. 复内积空间（酉空间）
6. 正规矩阵

■ 定义2.1 欧氏空间

设 V 是实数域 R 上的线性空间。如果对 V 中任意两个向量 x, y 都有一个实数（记为 (x,y)）与它们相对应并且满足下列各个条件，则实数 (x,y) 被称为向量 x，y 的内积：

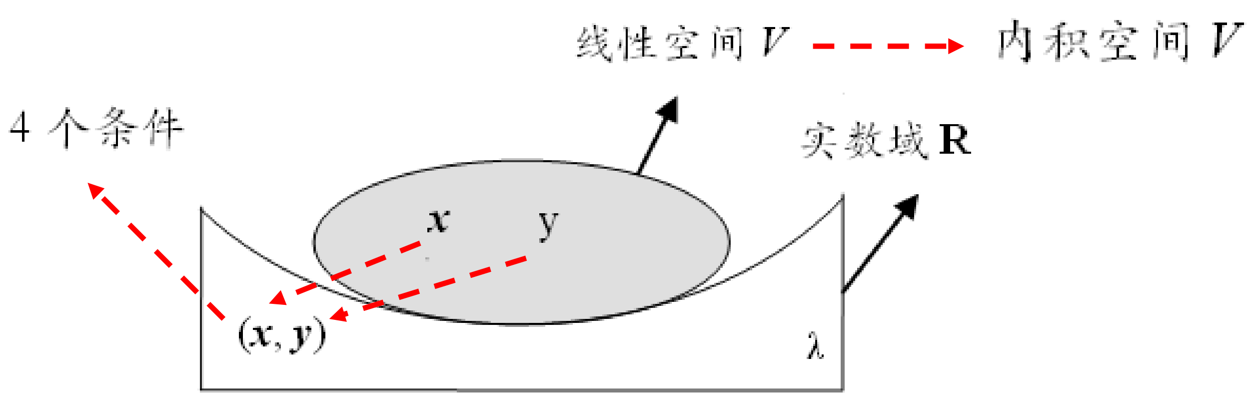
（1） $(x,y)=(y,x)$；

（2） $(\lambda x,y)=\lambda(x,y) \quad (\lambda\in\mathrm{R})$；

（3） $(x+y,z)=(x,z)+(y,z) \quad (z\in V)$；

（4） $(x,x)\geq 0$，当且仅当 $x=\theta$ 时，等号成立。

而线性空间 V 则被称为实内积空间，简称内积空间或欧氏空间。



■ 性质

从定义可以推知内积(x,y)具有下列基本性质：

（1）$(x,\lambda y)=\lambda(x,y)$；

（2）$(x,y+z)=(x,y)+(x,z)$；

（3）$(x,\theta)=(\theta,y)=0$。

思考题　（15分）

■ 例2.1

若对 n 维线性空间 $\mathbf{R}^n$ 中的任意两个向量

$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),\quad y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$$

定义内积为：

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i$$

则容易验证它满足内积定义的条件，从而 $\mathbf{R}^n$ 成为一个内积空间，仍用 $\mathbf{R}^n$ 来表示它。

例2.2

考虑 n^2 维线性空间 $\mathbf{R}^{n\times n}$。如果对任何 $A,B\in\mathbf{R}^{n\times n}$，定义

$$(A,B)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}$$

则容易验证 (A,B) 满足内积定义的各个条件，从而 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 构成一个内积空间，仍用 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 来表示它。

(A,B) 是矩阵 A 与 B 的内积，并不是它们的矩阵乘法

例2.3

$\mathbf{R}[a,b]$ 中，定义 $(f(x),g(x))=\int_a^b f(x)g(x)dx$，则可以验证 $(f(x),g(x))$ 满足内积的条件，从而 $\mathbf{R}[a,b]$ 构成内积空间，仍用 $\mathbf{R}[a,b]$ 来表示它。

■ 定理2.1

（Cauchy-Schwarz 简称 C.-S.不等式） 设 V 是内积空间，x，y 是 V 中任意两个向量，则有

$$(x,y)^2 \le (x,x)(y,y)$$

等号当且仅当 x，y 线性相关时成立。

证明：

设 t 为一个任意实数，则由内积定义的条件（4）可知内积

$$(x-ty,x-ty)\ge 0$$

即，对于任意实数 t

$$(y,y)t^2-2(x,y)t+(x,x)\ge 0$$

由此便得

$$(x,y)^2 \le (x,x)(y,y)$$

此不等式左边是个关于 t 的二次三项式，因为对于任意实数 t 它都取非负值，故其判别式

$$\Delta=\left[-2(x,y)\right]^2-4(y,y)(x,x)\le 0$$

定理2.1

（Cauchy-Schwarz 简称 C.-S.不等式） 设 V 是内积空间，x，y 是 V 中任意两个向量，则有

$$(x,y)^2 \le (x,x)(y,y)$$

等号当且仅当 x，y 线性相关时成立。

证明：

（等式成立的充分性）

如果 x，y 线性相关，不妨设 $y=\lambda x$（λ 是实数）。此时有

$$(x,y)^2=(x,\lambda x)^2=(x,\lambda x)(x,\lambda x)=\lambda(x,x)(x,\lambda x)=(x,x)(\lambda x,\lambda x)=(x,x)(y,y)$$

同样地，若 $x=\mu y$（μ 是实数），也可以证明

$$(x,y)^2=(x,x)(y,y)$$

因此，当 x，y 线性相关时，定理中的不等式成为等式。

■ 定理2.1

（Cauchy-Schwarz 简称 C.-S.不等式） 设 V 是内积空间，x，y 是 V 中任意两个向量，则有

$$(x,y)^2 \le (x,x)(y,y)$$

等号当且仅当 x，y 线性相关时成立。

证明：

（等式成立的必要性）（反证法）

如果等式 $(x,y)^2=(x,x)(y,y)$ 成立，假设 x，y 线性无关，则对任意实数 t，都有 $x-ty\neq\theta$，从而就有

$$(x-ty,x-ty)>0$$

从定理前半部分的证明中可以看出，此时判别式 $\Delta<0$，从而导致

$$(x,y)^2<(x,x)(y,y)$$

命题得证

这与 $(x,y)^2=(x,x)(y,y)$ 矛盾，假设不成立。所以 x，y 线性相关。

■ 定义2.2 向量的长度

设 x 是内积空间 V 的任一向量，则非负实数 $\sqrt{(x,x)}$ 被称为向量 x 的长度，并记为 $|x|$，亦即定义向量的长度为：

$$|x| = \sqrt{(x,x)}$$

由于向量的内积 (x,y) 是个实数，因此利用长度概念可以将 C.-S.不等式表示为：

$$|(x,y)| \le |x| \bullet |y|$$

所以，当 x，y 都不是零向量时，由此不等式可得

$$\frac{|(x,y)|}{|x| \bullet |y|} \le 1$$

即可得

$$-1 \le \frac{(x,y)}{|x| \bullet |y|} \le 1$$

由此定义两个非零向量 x，y 的夹角 φ 为

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{|x| \bullet |y|}$$

限制 φ 的取值范围为 $0 \le \varphi \le \pi$。

当 $(x,y) = 0$ 时，则称 x，y 是正交的，并记为 $x \perp y$。

- **例2.5** 若 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 是两个正交向量，则有 $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2=|\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{y}|^2$

思考题 **（15分）**

求证：如果 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_k$ 是 k 个两两正交的向量，则有

$$|\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2+\cdots+\boldsymbol{x}_k|^2=|\boldsymbol{x}_1|^2+|\boldsymbol{x}_2|^2+\cdots+|\boldsymbol{x}_k|^2$$

- **推论**

（三角不等式）对内积空间 V 的任意两个向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 都有：

（1） $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|\leq|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|$；

（2） $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\geq|\boldsymbol{x}|-|\boldsymbol{y}|$。

■ 推论

（三角不等式）对内积空间 V 的任意两个向量 x，y 都有：

（1） $|x+y|\leq|x|+|y|$；

（2） $|x-y|\geq|x|-|y|$。

证明：

因为 $$|x+y|^2=(x+y,x+y)$$
$$=(x,x)+2(x,y)+(y,y)$$
$$\leq|x|^2+2\sqrt{(x,x)(y,y)}+|y|^2$$
$$=|x|^2+2|x||y|+|y|^2$$
$$=(|x|+|y|)^2$$

由此即得 $|x+y|\leq|x|+|y|$

因为 $x=(x-y)+y$，

又应用这一结果可以得到

$$|x|=|(x-y)+y|\leq|x-y|+|y|$$

由此得到 $|x-y|\geq|x|-|y|$。

这就是推论（2）

命题得证

补充1

把定理 2.1 应用到例 2.1 欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 和例 2.3 欧氏空间 $\mathbf{R}[a,b]$ 中，可得到两个著名的不等式：

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}\bullet\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2}$$

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\bullet\int_a^b g^2(x)dx$$

补充2

若 $|\boldsymbol{x}|=1$，则称 $\boldsymbol{x}$ 为单位向量。

任一非零向量的单位化：设 $\boldsymbol{x}$ 是任一非零向量，取 $\boldsymbol{y}=\dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}$，则 $\boldsymbol{y}$ 就是与 $\boldsymbol{x}$ 线性相关的单位向量。

思考题　（15分）

对内积空间V的任意向量x_1，x_2，$\cdots$，x_n，下列结论是否正确？严格证明结论。

（1）$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$

（2）$|x_1 - x_2 - \cdots - x_n| \ge |x_1| - |x_2| - \cdots - |x_n|$

正交基及子空间的正交关系

1. 欧氏空间
2. 正交基及子空间的正交关系
3. 内积空间的同构
4. 正交变换
5. 复内积空间（酉空间）
6. 正规矩阵

■ **定义2.3.1 正交组**

内积空间中两两正交的一组非零向量，被称为正交组

■ **推论**

正交组是线性无关的

证明：

（反证法）设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 为一组正交组，假设它们线性相关，即存在不全为零的实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 使得下式成立

$$\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\lambda_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{x}_m=\boldsymbol{\theta}$$

则用 $\boldsymbol{x}_i$（$i=1,2,\cdots,m$）与此向量等式两边作内积，注意到 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 为一组正交组，所以当 $i\neq j$ 时均有 $\left(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j\right)=0$，便可得到

$$\lambda_i\left(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_i\right)=\left(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{\theta}\right)=0$$

因为 $\boldsymbol{x}_i\neq\boldsymbol{\theta}$，故 $\left(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_i\right)>0$。因此有 $\lambda_i=0$（$i=1,2,\cdots,m$），这与假设产生矛盾，即假设不成立。所以 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性无关。

命题得证

■ 定义2.3.2 正交基与标准正交基

在 n 维欧氏空间中，由正交组构成的基被称为正交基；

如果正交基中每个基向量的长度都等于单位长度，

则这组正交基便被称为标准正交基。

（公式描述）若 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的一组非零向量，且满足条件

$$\left(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j\right)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}\qquad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

则 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 为一组标准正交基。

■ **定理2.2** 任一 n 维欧氏空间 V 都存在正交基

证明：

设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 为 V 的一组基，从这组基出发，可以构造出 V 的一组正交基。

首先可以取 $e_1 = f_1$，接着作向量

$$e_2 = f_2 + a_1 e_1$$

其中系数 a_1 可由正交条件 $(e_2, e_1) = 0$ 来确定。

由于

$$(e_2, e_1) = (f_2 + a_1 e_1, e_1) = (f_2, e_1) + a_1 (e_1, e_1) = 0$$

因此可得

$$a_1 = -\frac{(f_2, e_1)}{(e_1, e_1)}$$

因为 $e_1 = f_1$ 与 f_2 线性无关，所以 $e_2 \neq 0$，且以上求得的 e_1, e_2 是正交的。

■ **定理2.2** 任一 n 维欧氏空间 V 都存在正交基

证明：

类似地，令

$$e_3 = f_3 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$$

则 e_3 必不为零向量。再由正交条件

$$(e_3, e_1) = 0\text{，}\quad (e_3, e_2) = 0$$

便可求得系数 β_1，β_2 为

$$\beta_1 = -\frac{(f_3, e_1)}{(e_1, e_1)}\text{，}\quad \beta_2 = -\frac{(f_3, e_2)}{(e_2, e_2)}$$

因而 e_3 便可确定，于是又得到正交组 e_1, e_2, e_3。按此方法做下去，若已做出正交组

$$e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}$$

则令

$$e_n = f_n + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_{n-1} e_{n-1}$$

■ **定理2.2** 任一 n 维欧氏空间 V 都存在正交基

证明：

显然 $e_n \neq 0$。再由正交条件

$$(e_n, e_1) = 0，\ (e_n, e_2) = 0，\ \cdots，\ (e_n, e_{n-1}) = 0$$

便可定出各个 λ_i 的取值

$$\lambda_i = -\frac{(f_n, e_i)}{(e_i, e_i)} \cdots\cdots \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

因此，便得到 n 维欧氏空间 V 中正交基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$。

命题得证

- **注意**

将上面求得的正交基的每个基向量都转化为单位向量，即令

$$e_i' = \frac{e_i}{|e_i|} \qquad (i=1,2,\cdots,n-1)$$

则得到一组标准正交基 $e_1', e_2', \cdots, e_n'$。因此从定理 2.2 又可得知，每个有限维内积空间都存在标准正交基。

定理 2.2 及其上述做法，不仅解决了正交基的存在问题，而且还提供了一种产生正交基的实际做法，这个做法被叫做施密特（Schmidt）正交化过程。

假设 V 是个 n 维欧氏空间，不妨设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是它的一组标准正交基。现观察 V 中任意两个向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 在这组基下内积的表达式。为此，可设

$$\boldsymbol{x}=\xi_1\boldsymbol{e}_1+\xi_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\xi_n\boldsymbol{e}_n$$

$$\boldsymbol{y}=\eta_1\boldsymbol{e}_1+\eta_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\eta_n\boldsymbol{e}_n$$

于是，利用内积性质及其标准正交基的定义，可得

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\xi_1\boldsymbol{e}_1+\xi_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\xi_n\boldsymbol{e}_n,\eta_1\boldsymbol{e}_1+\eta_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\eta_n\boldsymbol{e}_n)=\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\cdots+\xi_n\eta_n$$

由此可见，在标准正交基下，欧氏空间（有限维实内积空间）向量内积可由坐标的一个简单表达式来描述。

■ **推论** 从一组标准正交基到另一组标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵

证明：

设 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 及 $e_1', e_2', \cdots, e_n'$ 是 n 维欧氏空间 V 的两组标准正交基，从前一组基到后一组基的过渡矩阵设为 A 。即

$$(e_1', e_2', \cdots, e_n') = (e_1, e_2, \cdots, e_n) A \tag{2.1}$$

将式（2.1）转置得

（A^T 是 A 的转置矩阵）

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ \vdots \\ e_n' \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

利用形式矩阵乘法，将（2.2）式两边分别右乘（2.1）式两边，得

$$\begin{bmatrix} (e_1', e_1') & \cdots & (e_1', e_n') \\ \vdots & & \vdots \\ (e_n', e_1') & \cdots & (e_n', e_n') \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} (e_1, e_1) & \cdots & (e_1, e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (e_n, e_1) & \cdots & (e_n, e_n) \end{bmatrix} A \tag{2.3}$$

- **推论** 从一组标准正交基到另一组标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵

证明：

由于

$$\left(e_i',e_j'\right)=\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases},\quad \left(e_i,e_j\right)=\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases}$$

所以（2.3）式简化为 $$A^T A=E$$

即过渡矩阵设 A 为正交矩阵。

命题得证

内积空间的同构

1 欧氏空间

2 正交基及子空间的正交关系

3 内积空间的同构

4 正交变换

5 复内积空间（酉空间）

6 正规矩阵

■ 定义2.6 内积空间的同构

两个内积空间 V 与 V' 被称为同构的，如果二者之间存在一个一一对应 σ，并且对任何 $x, y \in V$，$\lambda \in \mathbf{R}$，下列条件都满足：

（1）$\sigma(x+y)=\sigma(x)+\sigma(y)$；

（2）$\sigma(\lambda x)=\lambda\sigma(x)$；

（3）$\boxed{(\sigma(x),\sigma(y))=(x,y)}$；

这也就是说，两个内积空间如果是同构的，首先作为线性空间它们是同构的，其次，在这个同构之下，向量内积也是保持不变的。

■ 推论

同构的两个内积空间有相同的维数

（结合内积空间同构的定义与定理 1.8 的推论）

■ **定理2.5** 所有 n 维内积空间都是同构的

证明：

设 V 是 n 维内积空间，又 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是它的一组标准正交基，则任一 $x \in V$ 可表示为

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n$$

现定义一个 V 到 $\mathbf{R}^n$ 的映射 σ

$$\sigma(x) = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n$$

则易知 σ 是个一一对应，且可以验证定义 2.6 中的条件（1）及（2）都是满足的。下面证明条件（3）也满足。

再取 V 中另一向量 $y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \cdots + \eta_n e_n$，则由 σ 的定义可得

$$\sigma(y) = (\eta_1, \mu_2, \cdots, \eta_n) \in \mathbf{R}^n$$

根据 $\mathbf{R}^n$ 中向量内积定义，则有

$$(\sigma(x), \sigma(y)) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \cdots + \xi_n\eta_n$$

■ **定理2.5** 所有 n 维内积空间都是同构的

证明：

而 V 中向量 x，y 的内积 (x, y) 在一组标准正交基下的表示式为

$$(x, y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \cdots + \xi_n\eta_n$$

因此，有 $(\sigma(x), \sigma(y)) = (x, y)$。

综上所述，即知 V 与 $\mathbf{R}^n$ 同构。又不难证明内积空间的同构是等价关系，因此所有 n 维内积空间都是同构的。

命题得证

正交变换

1. 欧氏空间
2. 正交基及子空间的正交关系
3. 内积空间的同构
4. 正交变换
5. 复内积空间（酉空间）
6. 正规矩阵

定义2.7 正交变换

设T是内积空间V的线性变换，若T能保持V中向量内积不变，即对任何$x, y \in V$，都有

$$(Tx, Ty) = (x, y)$$

则线性变换T被称为V的正交变换。

定理2.6

设T是有限维欧氏空间V的一个线性变换，则下列各个命题彼此等价：

（1）T是正交变换；

（2）T保持向量的长度不变，即对任一$x \in V$，都有$|Tx| = |x|$；

（3）若$e_1, e_2, \cdots, e_n$是V的一组标准正交基，则$Te_1, Te_2, \cdots, Te_n$也是V的一组标准正交基；

（4）T在V的任一标准正交基下的矩阵都是正交矩阵。

■ **定理2.6** 设T是有限维欧氏空间V的一个线性变换，则下列各个命题彼此等价：

（1）T是正交变换；

（2）T保持向量的长度不变，即对任一$\boldsymbol{x} \in V$，都有$|T\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}|$；

证明：

（1）$\Rightarrow$（2） 取$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$，根据正交变换的定义立即可得。

■ **定理2.6** 设T是有限维欧氏空间V的一个线性变换，则下列各个命题彼此等价：

（2）T保持向量的长度不变，即对任一$\boldsymbol{x}\in V$，都有$|T\boldsymbol{x}|=|\boldsymbol{x}|$；

（3）若$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$是$V$的一组标准正交基，则$T\boldsymbol{e}_1,T\boldsymbol{e}_2,\cdots,T\boldsymbol{e}_n$也是$V$的一组标准正交基；

证明：

（2）$\Rightarrow$（3） 由（2）可知，对任一$\boldsymbol{x}\in V$，都有$|T\boldsymbol{x}|=|\boldsymbol{x}|$，即$(T\boldsymbol{x},T\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$，所以取$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j$（$i=1,2,\cdots,n$），可得

$$\left(T\left(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j\right),T\left(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j\right)\right)=\left(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j\right)$$

化简得
$$\left(T\boldsymbol{e}_i,T\boldsymbol{e}_i\right)+2\left(T\boldsymbol{e}_i,T\boldsymbol{e}_j\right)+\left(T\boldsymbol{e}_j,T\boldsymbol{e}_j\right)=\left(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_i\right)+2\left(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j\right)+\left(\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_j\right) \quad (2.5)$$

由于$\left(T\boldsymbol{e}_i,T\boldsymbol{e}_i\right)=\left(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_i\right)=1$，将其带入（2.5）式即得

$$\left(T\boldsymbol{e}_i,T\boldsymbol{e}_j\right)=\left(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j\right)=0 \quad (i\neq j)$$

即$T\boldsymbol{e}_1,T\boldsymbol{e}_2,\cdots,T\boldsymbol{e}_n$也是$V$的一组标准正交基。

■ **定理2.6** 设T是有限维欧氏空间V的一个线性变换，则下列各个命题彼此等价：

（3）若$e_1,e_2,\cdots,e_n$是V的一组标准正交基，则$Te_1,Te_2,\cdots,Te_n$也是V的一组标准正交基；

（4）T在V的任一标准正交基下的矩阵都是正交矩阵。

证明：

（3）$\Rightarrow$（4） 设$e_1,e_2,\cdots,e_n$是V的标准正交基，由（3）可知$Te_1,Te_2,\cdots,Te_n$也是V的标准正交基，根据标准正交基的过渡矩阵为正交矩阵的性质（定理 2.2 的性质）立即得证。

■ **定理2.6** 设T是有限维欧氏空间V的一个线性变换，则下列各个命题彼此等价：

（1）T是正交变换；

（4）T在V的任一标准正交基下的矩阵都是正交矩阵。

证明：

（4）$\Rightarrow$（1） 取定V的标准正交基$e_1,e_2,\cdots,e_n$，则

$$(Te_1,Te_2,\cdots,Te_n)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)A$$

A正交，即$A^TA=E$。

任取 $x=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\cdots+\xi_ne_n$，$y=\eta_1e_1+\eta_2e_2+\cdots+\eta_ne_n$

则根据 1.6 节得 $Tx=(e_1,e_2,\cdots,e_n)A\xi$，$Ty=(e_1,e_2,\cdots,e_n)A\eta$

$$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T,\quad \eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)^T$$

所以 $$(Tx,Ty)=(A\xi)^T(A\eta)=\xi^TA^TA\eta=\xi^T\eta=(x,y)$$

即T是正交变换。

命题得证

■ **例2.6** 设 T 是欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 的线性变换，$T(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\xi_2,\xi_3,\xi_1)$ 对任一 $(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in\mathbf{R}^3$ 成立，试证明 T 是正交变换。

证明：

设 $\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in\mathbf{R}^3$，由定理 2.6 可知，只需证明 $|T\boldsymbol{x}|=|\boldsymbol{x}|$。

由于

$$
\begin{aligned}
(T\boldsymbol{x},T\boldsymbol{x}) &= ((\xi_2,\xi_3,\xi_1),(\xi_2,\xi_3,\xi_1)) \\
&= \xi_2^2+\xi_3^2+\xi_1^2 \\
&= (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

由此即得 $|T\boldsymbol{x}|=|\boldsymbol{x}|$。

命题得证

■ **例2.7**

（1）设T是内积空间V的一个线性变换，试证明T是正交变换的充要条件是：

T保持任意两向量$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$的距离不变，即$|T\boldsymbol{x}-T\boldsymbol{y}|=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$

（2）问：内积空间的保持距离不变的变换是否一定是线性变换？

证明：

（1）（必要性）设T是正交变换，则T保持向量的长度不变，从而

$$|T\boldsymbol{x}-T\boldsymbol{y}|=|T(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$$

（充分性）设对任意两向量$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$有

$$|T\boldsymbol{x}-T\boldsymbol{y}|=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$$

则取$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\theta}$便有$|T\boldsymbol{x}|=|\boldsymbol{x}|$。即$T$保持向量的长度不变，故$T$是正交变换。

■ 例2.6

（1）设 T 是内积空间 V 的一个线性变换，试证明 T 是正交变换的充要条件是：

T 保持任意两向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 的距离不变，即 $|T\boldsymbol{x}-T\boldsymbol{y}|=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$

（2）问：内积空间的保持距离不变的变换是否一定是线性变换？

证明：

思考题　（15分）

（2）不一定。

设 $\boldsymbol{x}_0$ 为 V 中某一固定非零向量，又令

$$T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}_0 \quad （对任意\ \boldsymbol{x}\in V）$$

则 T 是 V 的一个变换，并保持任意两个向量的距离不变：

$$|T\boldsymbol{x}-T\boldsymbol{y}|=|(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}_0)-(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}_0)|=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$$

命题得证

但是，$\boxed{T\ 显然不是线性变换。}$

复内积空间（酉空间）

1 欧氏空间

2 正交基及子空间的正交关系

3 内积空间的同构

4 正交变换

5 复内积空间（酉空间）

6 正规矩阵

复内积空间（酉空间）

复内积空间是实内积空间的推广，许多概念、结论及证明方法与实内积空间中所讲到的相类似

■ **定义2.8 复内积空间（酉空间）**

设 V 是复数域 C 上的线性空间。如果对 V 中任意两个向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 都有一个复数（记为 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$）与它们相对应并且满足下列各个条件，则复数 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 被称为向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 的内积：

（1）$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\overline{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}$；

（2）$(\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \quad (\lambda\in \mathrm{C})$；

（3）$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \quad (\boldsymbol{z}\in V)$；

（4）$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\geq 0$，当且仅当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\theta}$ 时，等号成立。

而线性空间 V 则被称为复内积空间，或酉空间。$\overline{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}$ 表示 $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ 的共轭复数。

推论

从定义可以推知酉空间中内积(x,y)具有下列基本性质：

（1）$(x,\lambda y)=\overline{\lambda}(x,y)$；

（2）$(x,y+z)=(x,y)+(x,z)$；

（3）$(x,\theta)=(\theta,y)=0$。

在这个例子中，若定义$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\overline{\xi_i}\eta_i$，

则内积定义的条件（2）就不满足了，

C^n也就不是一个酉空间了

例2.8

若对n维线性空间C^n中的任意两个向量

$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)，\quad y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$$

定义内积为：

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\overline{\eta_i}$$

则容易验证它满足内积定义的条件，从而C^n成为一个酉空间，仍用R^n来表示它。

酉空间 C^n 的上述内积定义又可以简写为

$$(x, y) = xy^{\mathrm{H}}$$

这里的 x，y 均为行向量，y^{H} 表示 y 的共轭转置。又当 x，y 为列向量时，则有 $(x, y) = y^{\mathrm{H}}x$ 。

在酉空间中，向量 x 的长度也定义为

$$|x| = \sqrt{(x, x)}$$

虽然，当 $(x, y) = 0$ 时也称向量 x，y 为正交的，但在酉空间中不再定义向量间的夹角，这是因为向量的内积一般是复数。又若当 $x, y \in \mathrm{C}^n$ 时（见例 2.7），则有

$$|x| = \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \cdots + |\xi_n|^2}\text{，}\quad |y| = \sqrt{|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2 + \cdots + |\eta_n|^2}$$

复内积空间（酉空间）

在实内积空间中得到的 Cauchy-Schwarz（简称 C.-S.）不等式（$\left|(x,y)\right| \le |x| \bullet |y|$）在酉空间中仍然成立，而且等号也是当且仅当 x，y 线性相关时成立。

应用上述 C.-S.不等式，还可以证明：在酉空间中，不等式 $|x+y| \le |x|+|y|$ 也成立。

在酉空间中也可以定义正交基和标准正交基，正交组线性无关，从正交组出发去构造 n 维酉空间的一组正交基的正交化过程（施密特（Schmidt）正交化过程）仍然成立。

容易证明，在 n 维酉空间 V 中，在标准正交基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 下任意两个向量

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n$$

$$y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \cdots + \eta_n e_n$$

的内积 (x, y) 可表示成：

$$(x, y) = \xi_1 \overline{\eta_1} + \xi_2 \overline{\eta_2} + \cdots + \xi_n \overline{\eta_n}$$

将正交变换的概念推广到酉空间，便有：

定义2.9 酉变换

若T是酉空间V的线性变换，且对任何$x, y \in V$，都有

$$(Tx, Ty) = (x, y)$$

则线性变换T被称为V的酉变换。

定义2.10 酉矩阵

若$A \in \mathrm{C}^{n\times n}$，且$A^{\mathrm{H}}A = AA^{\mathrm{H}} = E$，则$A$被称为酉矩阵。这里$A^{\mathrm{H}}$是$A$的共轭转置。

当A为实矩阵时，酉矩阵A也就是正交矩阵。

■ 定理2.7

设T是n维酉空间V的一个线性变换，则下列各个命题彼此等价：

（1）T是酉变换；

（2）T保持向量的长度不变，即对任一$\boldsymbol{x}\in V$，都有$|T\boldsymbol{x}|=|\boldsymbol{x}|$；

（3）若$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$是$V$的一组标准正交基，则$T\boldsymbol{e}_1,T\boldsymbol{e}_2,\cdots,T\boldsymbol{e}_n$也是$V$的一组标准正交基；

（4）T在V的任一标准正交基下的矩阵都是酉矩阵。

■ 推论

酉矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有下列基本性质：

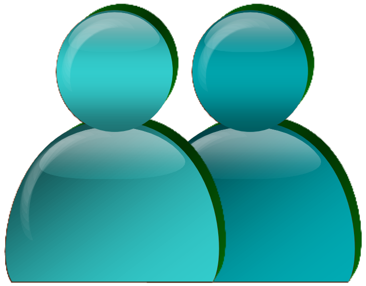
（1） $\boldsymbol{A}$ 的行列式的模等于 1；

（2） $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$，$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\right)^{-1}$；

（3） $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是酉矩阵，两个 n 阶酉矩阵的乘积也是酉矩阵；

（4） $\boldsymbol{A}$ 的每个列（行）向量（看作酉空间 $\mathbf{C}^n$ 的向量，下同）是单位向量；不同的两个列（行）向量是酉正交的（在 $\mathbf{C}^n$ 的内积定义下正交）。

1. 欧氏空间
2. 正交基及子空间的正交关系
3. 内积空间的同构
4. 正交变换
5. 复内积空间（酉空间）
6. 正规矩阵



■ 定义 厄米特矩阵

若 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n \times n}$，且 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}$（即 $\overline{a}_{ji} = a_{ij}$ 对所有 $i, j = 1, 2, \cdots, n$ 成立），则 $\boldsymbol{A}$ 被称为厄米特矩阵。它是实对称矩阵的一种推广。

由 $\overline{a}_{ii} = a_{ii}$（$i = 1, 2, \cdots, n$）得知厄米特矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上的元素全是实数

■ 定义2.11 正规矩阵

设 $A \in \mathrm{C}^{n \times n}$，且 $A^{\mathrm{H}}A = AA^{\mathrm{H}}$，则 A 被称为正规矩阵。这里 A^{H} 是 A 的共轭转置。

对角形矩阵、实对称矩阵（$A^T = A$）、实反对称矩阵（$A^T = -A$）、厄米特矩阵（$A^{\mathrm{H}} = A$）、反厄米特矩阵（$A^{\mathrm{H}} = -A$）、正交矩阵（$A^T A = AA^T = E$）以及酉矩阵（$A^{\mathrm{H}}A = AA^{\mathrm{H}} = E$）等都是正规矩阵。同时，还存在其它特殊的正规矩阵，例如

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

■ 定理2.8

矩阵 $A \in \mathrm{C}^{n \times n}$ 为正规矩阵的充要条件是：存在酉矩阵 Q，使得 A 酉相似于对角形矩阵，即

$$Q^{\mathrm{H}}AQ = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

这里 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的特征值。

■ 推论 1

设 A 是 n 阶正规矩阵，其特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

（1） A 是厄米特（Hermite）矩阵的充要条件是 A 的特征值全为实数;

（2） A 是反厄米特矩阵的充要条件是 A 的特征值为零或纯虚数;

（3） A 是酉矩阵的充要条件是 A 的每个特征值 λ_i 的模 $|\lambda_i|=1$。

证明:

（1）因为 A 是正规矩阵，由定理 2.8 可知，存在酉矩阵 Q，使得

$$Q^{\mathrm{H}}AQ=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix} \tag{2.13}$$

对（2.13）式两边取共轭转置即得

$$Q^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}Q=\begin{bmatrix}\bar{\lambda}_1 & & & \\ & \bar{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\lambda}_n\end{bmatrix} \tag{2.14}$$

（必要性）若 A 是厄米特矩阵，即 $A^{\mathrm{H}}=A$，则（2.14）式成为

$$Q^{\mathrm{H}}AQ=\begin{bmatrix}\bar{\lambda}_1 & & & \\ & \bar{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\lambda}_n\end{bmatrix} \tag{2.15}$$

比较（2.13）式与（2.15）式，即得 $\lambda_i=\bar{\lambda}_i$（$i=1,2,\cdots,n$）。因此，$A$ 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 全为实数。

正规矩阵

（充分性）若正规矩阵 A 的特征值全为实数，则有 $\lambda_i=\overline{\lambda}_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，这时，由于（2.13）式与（2.14）式的右边相等，所以左边也相等：

$$Q^{\mathrm{H}}AQ=Q^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}Q$$

由于酉矩阵 Q 是可逆的，且 $Q^{\mathrm{H}}=Q^{-1}$，故由上式易得 $A=A^{\mathrm{H}}$，即 A 为厄米特矩阵。

（2）仿照（1）的证明方法便可证得。 - - - - - - - - →

思考题　（15分）

（3）因为 A 是正规矩阵，故上面的（2.13）式与（2.14）式成立，将（2.14）式右乘到（2.13）式即得：

$$\left(Q^{\mathrm{H}}AQ\right)\cdot\left(Q^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}Q\right)=\begin{bmatrix}\lambda_1\overline{\lambda}_1 & & & \\ & \lambda_2\overline{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\overline{\lambda}_n\end{bmatrix}$$

因为 $QQ^{\mathrm{H}}=Q^{\mathrm{H}}Q=E$，故有

$$Q^{\mathrm{H}}AA^{\mathrm{H}}Q=\begin{bmatrix}\lambda_1\bar{\lambda}_1 & & & \\ & \lambda_2\bar{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\bar{\lambda}_n\end{bmatrix} \tag{2.16}$$

（必要性）如果 A 是酉矩阵，则 $AA^{\mathrm{H}}=E$，故（2.16）式变为

$$E=\begin{bmatrix}\lambda_1\bar{\lambda}_1 & & & \\ & \lambda_2\bar{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\bar{\lambda}_n\end{bmatrix} \tag{2.17}$$

于是，$\lambda_i\bar{\lambda}_i=|\lambda_i|^2=1$，即 $|\lambda_i|=1$（$i=1,2,\cdots,n$）。

（充分性）若 A 的每个特征值 λ_i 的模 $|\lambda_i|=1$，则由（2.16）式变得

$$Q^{H}AA^{H}Q=E$$

考虑到酉矩阵 Q 是可逆的，且 $Q^{H}=Q^{-1}$，从而得到 $AA^{H}=E$，因此可知 A 是酉矩阵。

命题得证

■ 推论 2

厄米特矩阵 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 的任意两个不同的特征值 λ，μ 所对应的特征向量 $x, y \in \mathbf{C}^n$ 是正交的。

证明：

因为 $A^{\mathrm{H}} = A$，所以由

$$Ax = \lambda x, \quad Ay = \mu y \quad (x, y \neq \theta)$$

的后一式取共轭转置得

$$y^{\mathrm{H}} A = \mu y^{\mathrm{H}}$$

上式两边右乘以 x 即得

$$y^{\mathrm{H}} A x = \mu y^{\mathrm{H}} x$$

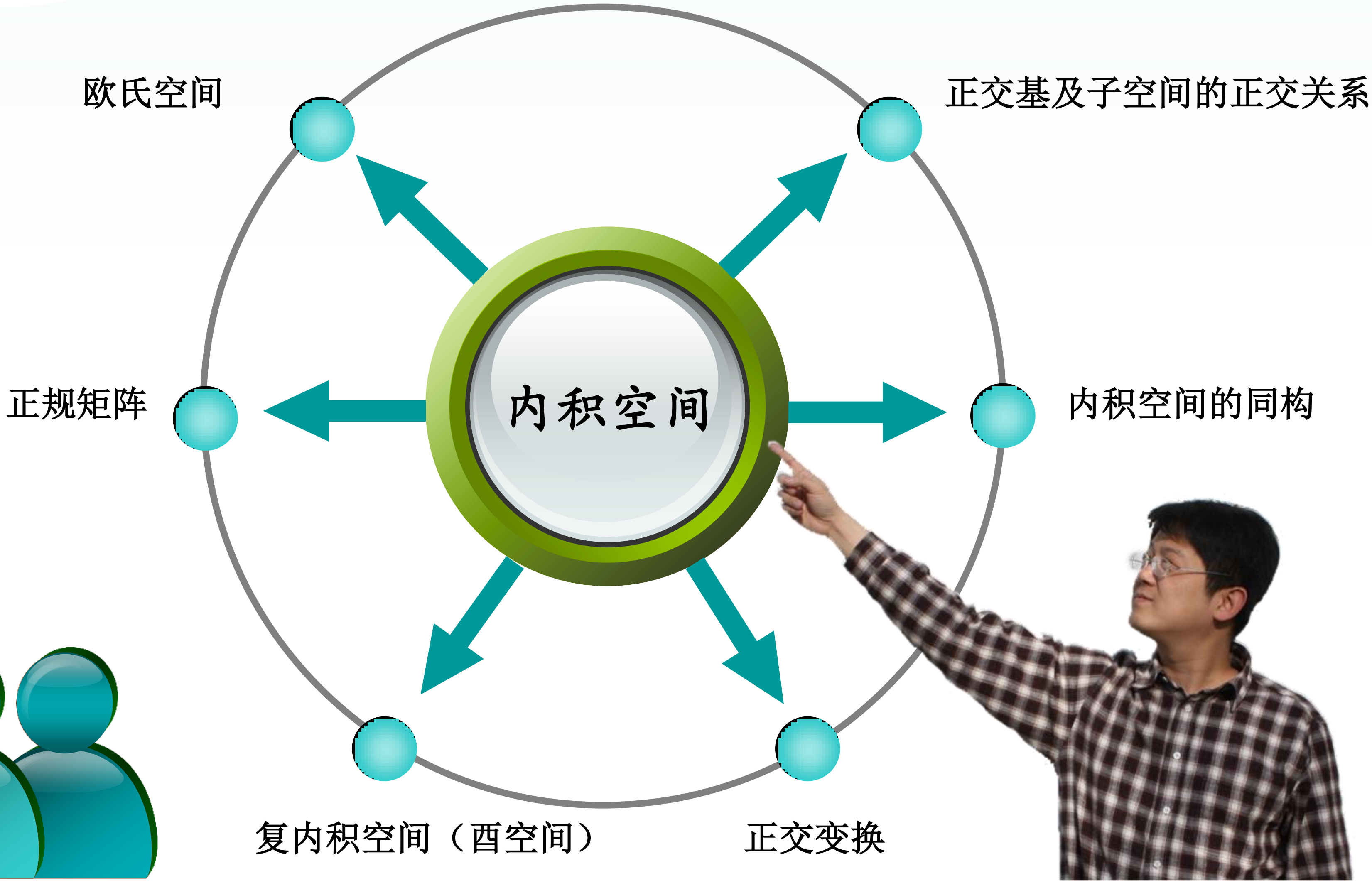
但 $y^{\mathrm{H}} A x = y^{\mathrm{H}}(\lambda x) = \lambda y^{\mathrm{H}} x$，故由上式便得

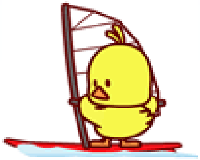
$$\lambda y^{\mathrm{H}} x = \mu y^{\mathrm{H}} x \Rightarrow (\lambda - \mu) y^{\mathrm{H}} x = 0$$

但 $\lambda \neq \mu$，所以 $y^{\mathrm{H}} x = 0$，因此 x，y 正交。

命题得证

总结





要是没有人生的航向，来自任何方向的风都不是顺风

To be continued…

wangyong@ucas.ac.cn
http://people.ucas.ac.cn/~wangyong

Thank you !