GZH007Y 40/2

高等工程数学

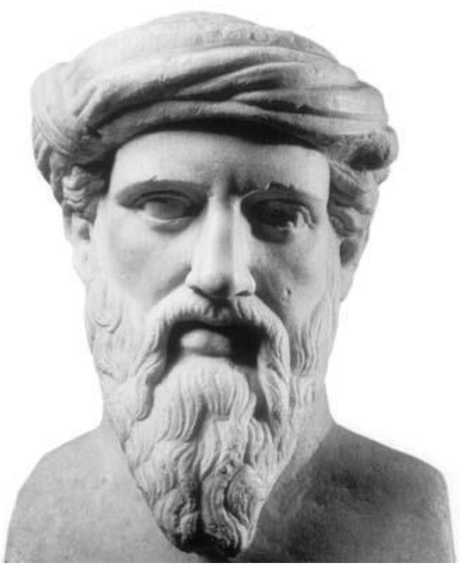
Advanced Engineering Mathematics

王 泳

中国科学院大学

2017.10.14

在数学的天地里，重要的不是我们知道什么，而是我们怎么知道什么

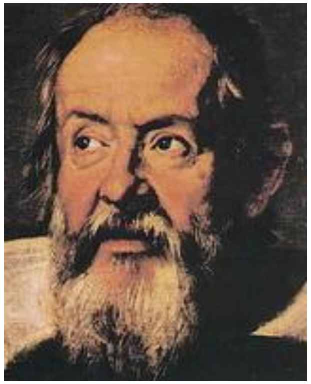


— 毕达哥拉斯 (Pythagoras 572 BC? -497 BC?)

古希腊数学家、哲学家

科学研究的三种方法

实验研究 → 理论研究 → 科学计算



伽利略

牛顿

冯·诺依曼

实际问题 → 数学模型 → 数值方法 → 计算结果分析

数值分析

数值分析就是研究各种数学问题的数值计算的方法和理论的学科

- 数值分析绪论
- 线性代数方程组的解法
- 插值方法
- 数值积分和数值微分公式
- 方程求根
- 常微分方程的数值解法

第五章：数值分析绪论

1 数学模型

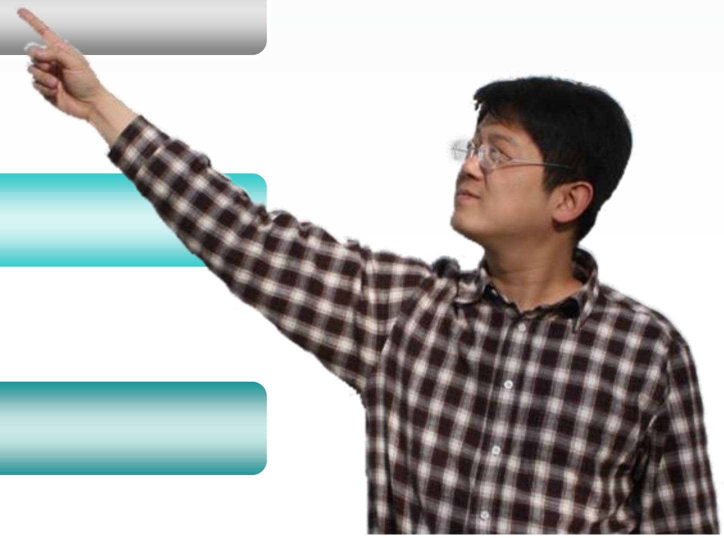
2 误差的来源

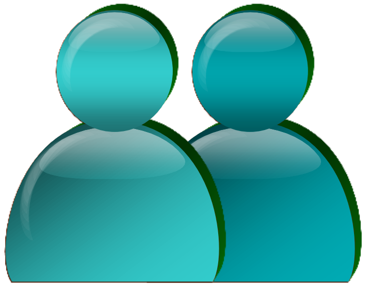
3 误差的度量

4 选用算法时应遵循的几个原则

数学模型

1. 数学模型
2. 误差的来源
3. 误差的度量
4. 选用算法时应遵循的几个原则





■ 数学模型

表达物理系统或物理过程本质特征的公式或方程

应变量 = *f*（自变量，参数，强制函数）

变化量 = 增加量 – 减少量

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m} v^2$$

时变（time-variable）计算

增加量 = 减少量

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m} v^2 = 0$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{gm}{c_d}}$$

稳态（steady-state）计算

- 守恒律（稳态计算）

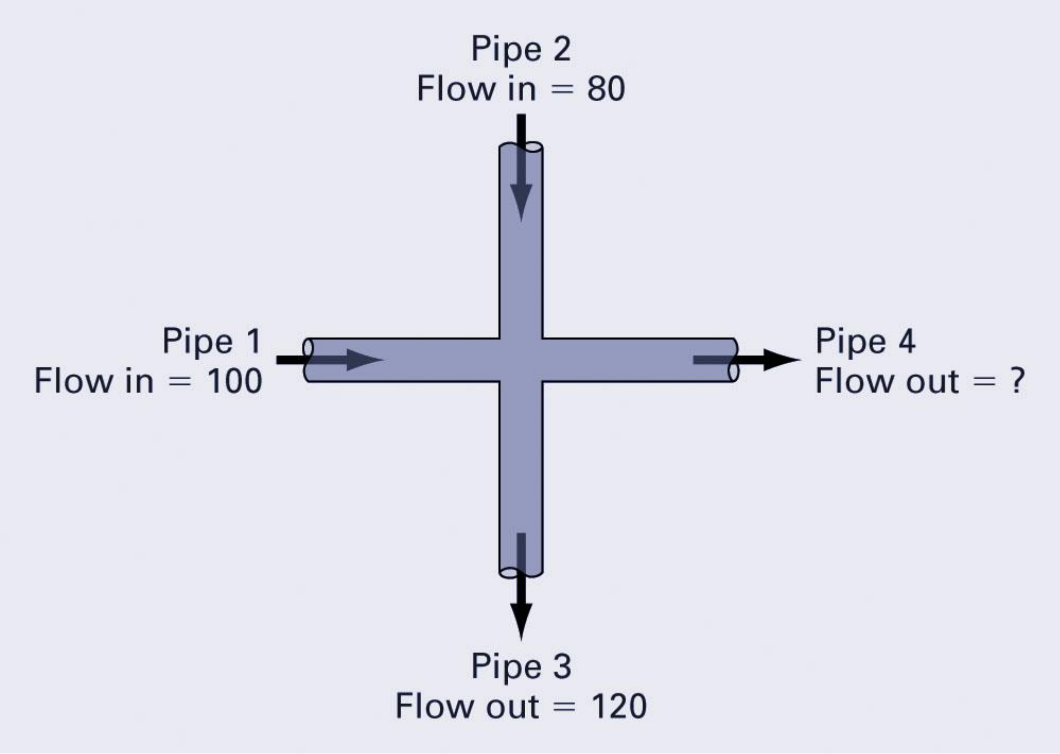
增加量 = 减少量

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m} v^2 = 0$$

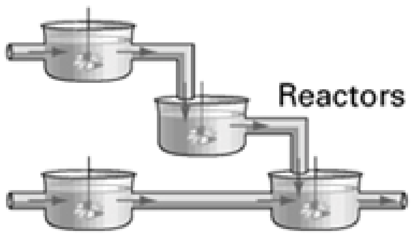
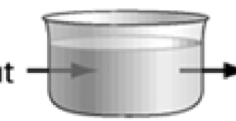
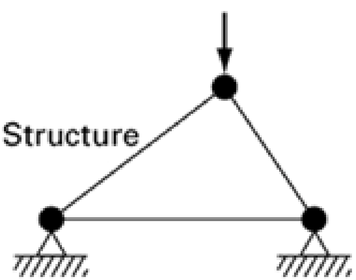
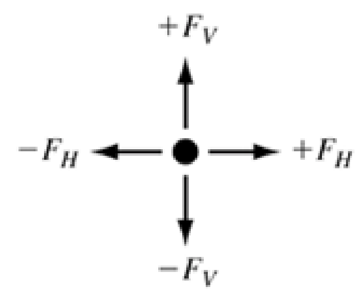
$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{gm}{c_d}}$$

牛顿第一定律

质量守恒定律

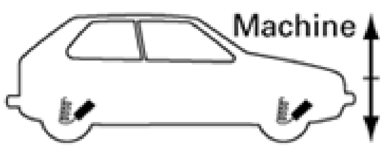
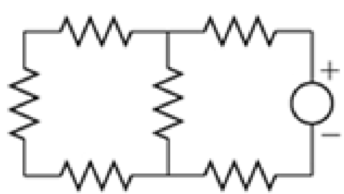


守恒律（稳态计算）

Field	Device	Organizing Principle	Mathematical Expression
Chemical engineering		Conservation of mass	Mass balance:  Over a unit of time period Δmass = inputs − outputs
Civil engineering		Conservation of momentum	Force balance:  At each node Σ horizontal forces (F_H) = 0 Σ vertical forces (F_V) = 0

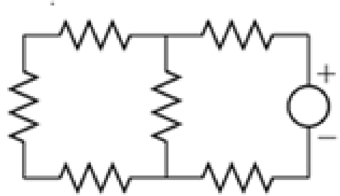
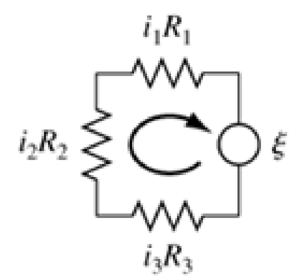
数学模型

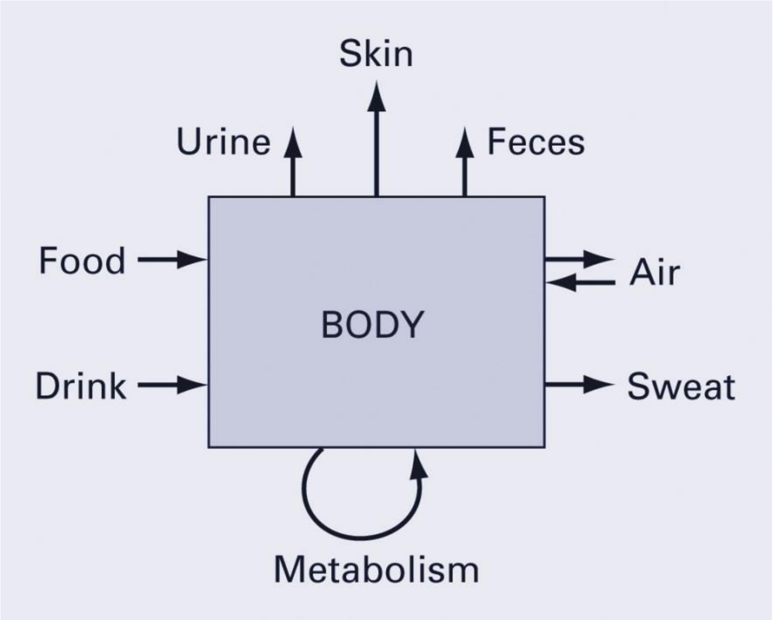
■ 守恒律（稳态计算）

Field	Device	Organizing Principle	Mathematical Expression
Mechanical engineering		Conservation of momentum	Force balance: Upward force $x = 0$ Downward force $m\frac{d^2x}{dt^2}$ = downward force − upward force
Electrical engineering	Circuit	Conservation of charge	Current balance: $+i_1$ $-i_3$ $+i_2$ For each node Σ current $(i) = 0$

数学模型

■ 守恒律（稳态计算）

Field	Device	Organizing Principle	Mathematical Expression
Electrical engineering	 Circuit	Conservation of energy	Voltage balance:  Around each loop Σ emf's − Σ voltage drops for resistors = 0 $\Sigma \xi - \Sigma iR = 0$



思考题　（15分）

上图描述了一天中普通人通过各种途径获取和失去的水分。1 升水是通过食物摄入的，身体的新陈代谢产生了 0.3 升水。在呼吸空气时，吸气时交换量为 0.05 升，而在呼气时的交换量为 0.4 升。身体还会通过出汗、小便、大便和通过皮肤分别失去 0.2 升、1.48 升、0.2 升和 0.35 升。为了保持稳定状态，每天必须摄入多少水？

- 空降兵的故事（时变计算）

牛顿第二定律 $F = ma$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m} v^2$$

$$v(t) = \sqrt{\frac{gm}{c_d}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}} t\right)$$

$$v(0) = 0$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$F_U = -c_d v^2$$

空气阻力引起的向下力

$$F = F_D + F_U$$

重力导致的向下力

$$F_D = mg$$

数学模型

■ 空降兵的故事（时变计算）

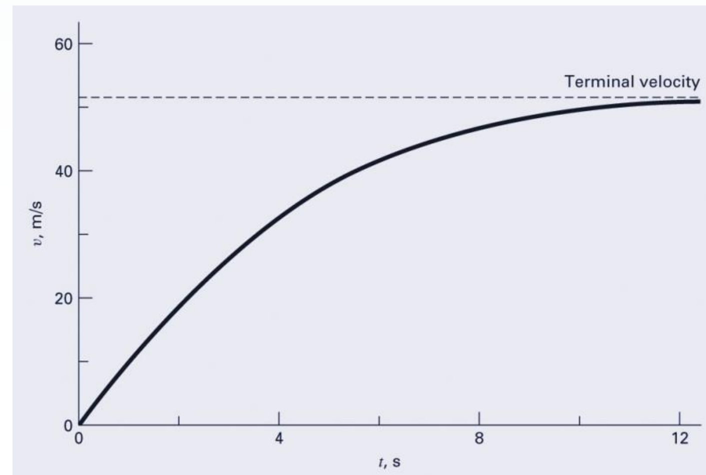
$$v(t)=\sqrt{\frac{gm}{c_d}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}}t\right)$$

$$v(0)=0$$

$$m=68.1kg$$

$$g=9.81m/s^2$$

$$c_d=0.25kg/m$$

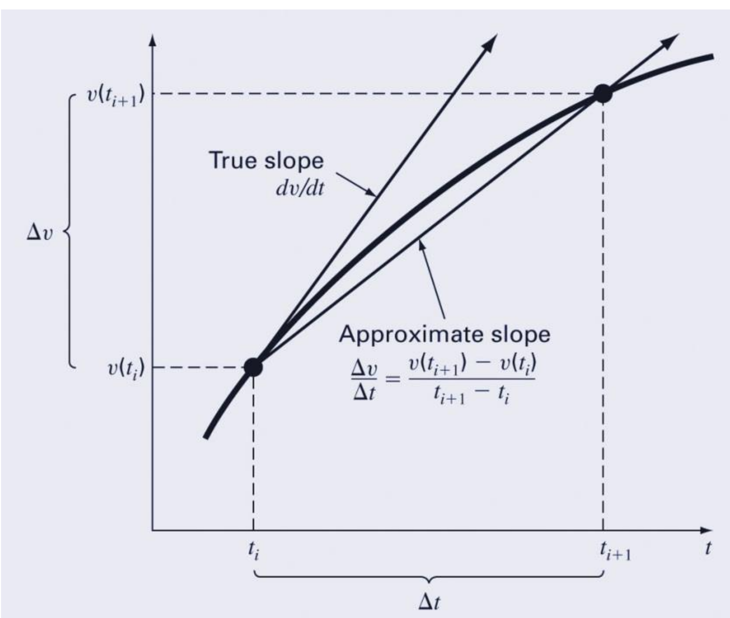


$$v(t)=\sqrt{\frac{9.81\times 68.1}{0.25}}\tanh\left(\sqrt{\frac{9.81\times 0.25}{68.1}}t\right)=51.6938\tanh(0.18977t)$$

- 空降兵的故事（时变计算）

$$\frac{dv}{dt}=g-\frac{c_d}{m}v^2$$

$$v_{i+1}=v_i+\frac{dv_i}{dt}\Delta t$$



$$\frac{v(t_{i+1})-v(t_i)}{t_{i+1}-t_i}=g-\frac{c_d}{m}v(t_i)^2$$

$$v(t_{i+1})=v(t_i)+\left[g-\frac{c_d}{m}v(t_i)^2\right](t_{i+1}-t_i)$$

$$\frac{dv}{dt}\approx\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v(t_{i+1})-v(t_i)}{t_{i+1}-t_i}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

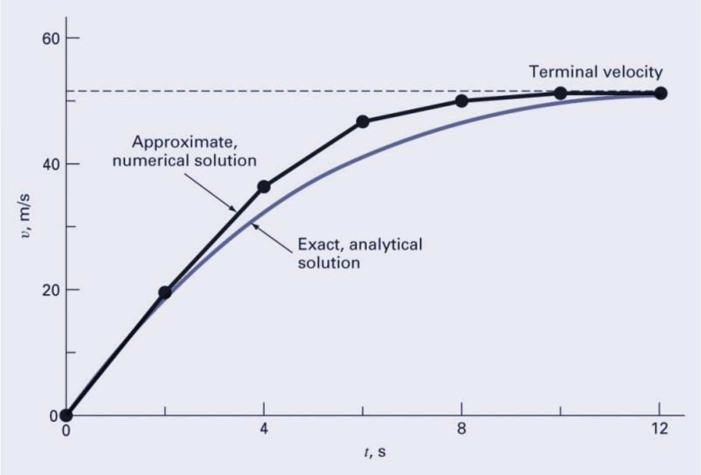
■ 空降兵的故事（时变计算）

$$m = 68.1kg$$

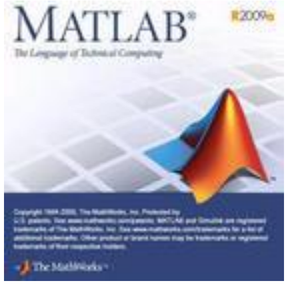
$$g = 9.81m/s^2$$

$$c_d = 0.25kg/m$$

$$\Delta t = 2s$$



$$v_{i+1} = v_i + \left(9.81 - \frac{0.25}{68.1} v_i^2\right) \times 2$$



$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + \left(g - \frac{c_d}{m} v(t_i)^2\right)(t_{i+1} - t_i)$$

思考题 （15分）

在空降兵的故事中，分别使用步长$\Delta t = 1s$和$\Delta t = 0.5s$，

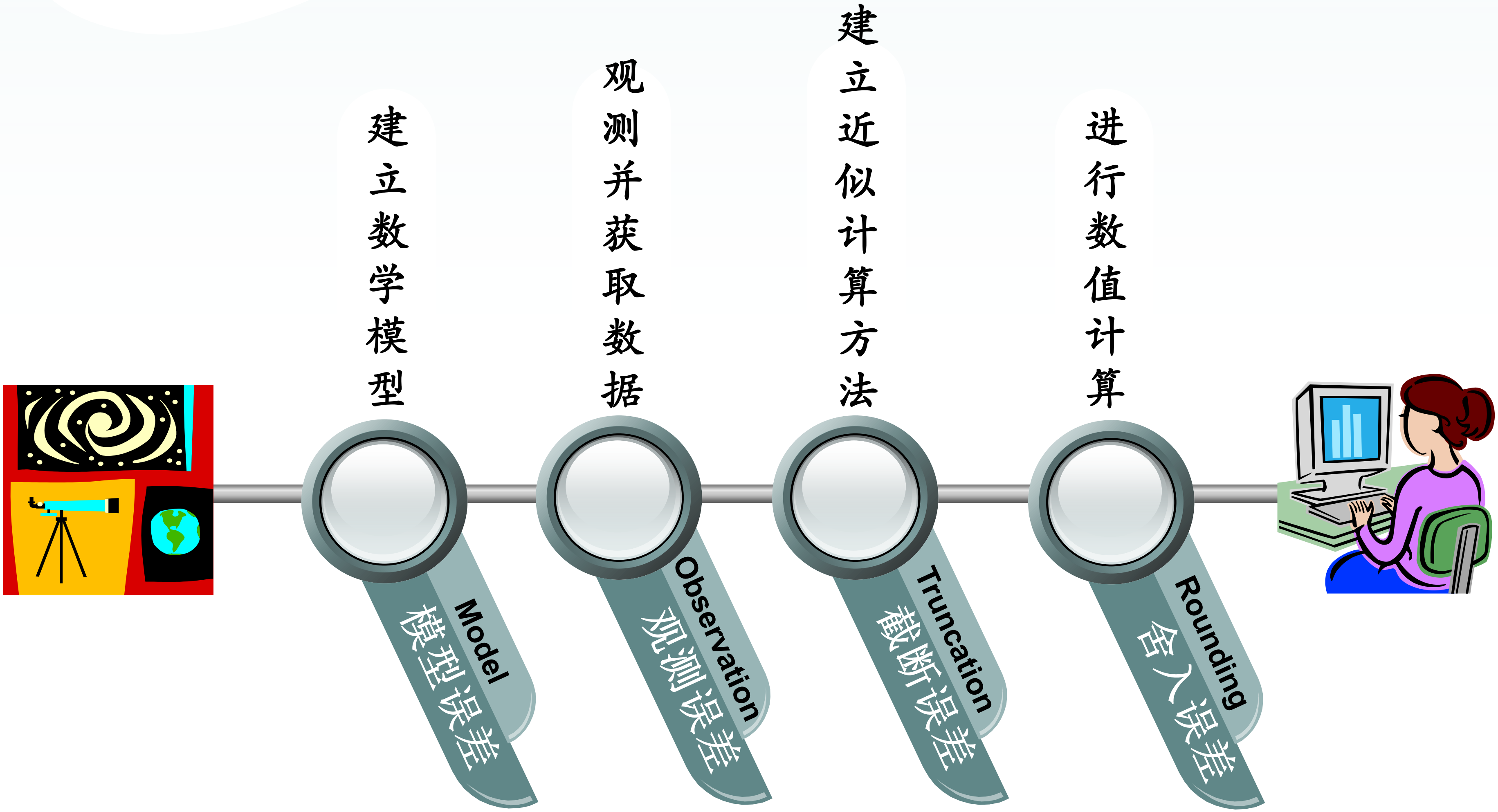
计算直到$t = 20s$的速度

基于计算结果分析计算误差的变化规律

误差的来源

1. 数学模型
2. 误差的来源
3. 误差的度量
4. 选用算法时应遵循的几个原则

误差的来源


建立数学模型
观测并获取数据
建立近似计算方法
进行数值计算
Model
模型误差
Observation
观测误差
Truncation
截断误差
Rounding
舍入误差

误差的来源

■ 模型误差

用数学模型描述实际问题，一般都要作一定的简化，由此产生的数学模型的解与实际问题的解之间会有差异，这种差异被称为**模型误差**。

■ 观测误差

数学模型中包含的某些参数或常数，如温度、长度、电压等物理参数，往往是通过仪器观测或实验获得其数值的，这样得到的观测数值与实际数值之间会有误差，这种误差被称为**观测误差**。

■ 截断误差（方法误差）

在构造数值计算方法时，我们往往用计算机上能完成的有限次的算术和逻辑运算来代替无限次的或不易计算的运算过程，这样产生的误差被称为**截断误差**。由于截断误差来自方法处理过程，故也被称为**方法误差**。

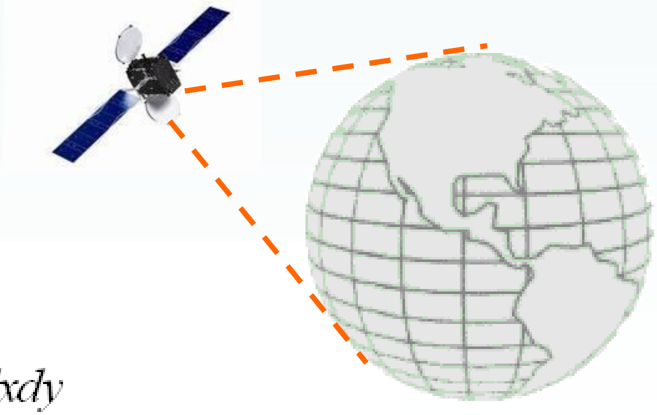
■ 例

研究 $\sin x$ 的计算，利用无穷级数 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$，当 $|x|$ 较小时取前三项作为 $\sin x$ 的计算公式。这样得到的近似值就与 $\sin x$ 本来的值有误差，这种误差就是截断误差。

■ 舍入误差

因为计算机的字长有限，所以计算机所能表示的实数的位数有限，只能对有限数字进行运算，这就使得原始数据在计算机上表示会产生误差，每一次运算又可能产生新的误差。因此通常用四舍五入的方法取其近似值，由此引起的误差被称为**舍入误差**。

误差的来源



■ **例**

考虑通信卫星对地球表面的覆盖问题，公式

$$\iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dxdy$$

只是对实际问题的一种逼近（D 为覆盖在 **X-Y** 平面的投影，**R** 为地球半径）

将地球考虑成一个球体，用球体表面积代替地球表面积是过分理想化的模型

模型误差

如果取地球半径的值为 **R**=6370km，这只是一个综合测量的结果

观测误差

数值积分的计算不可避免会产生计算误差，计算误差直接影响计算结果

截断误差

舍入误差

数值方法所研究的计算误差是截断误差和舍入误差

误差的度量

1 数学模型

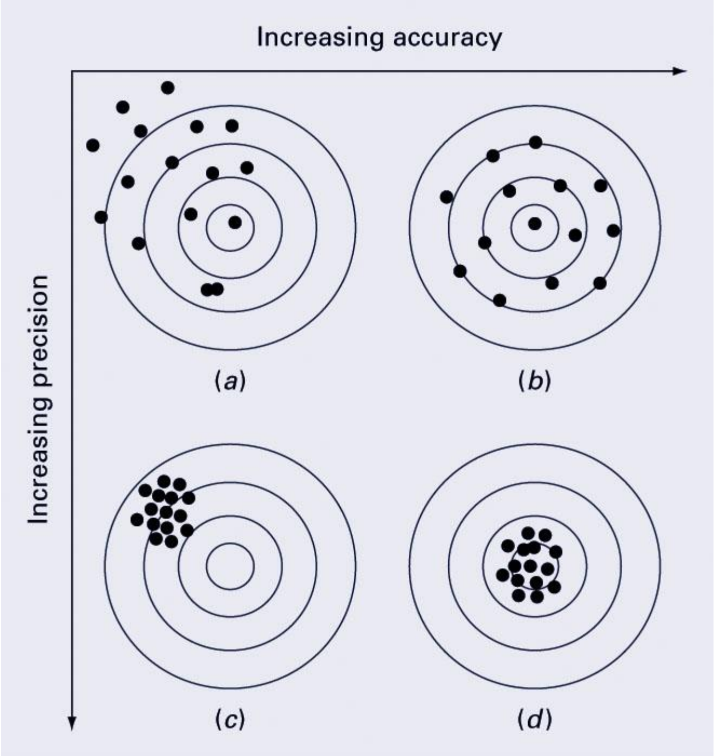
2 误差的来源

3 误差的度量

4 选用算法时应遵循的几个原

误差的度量

- 机枪手的困惑



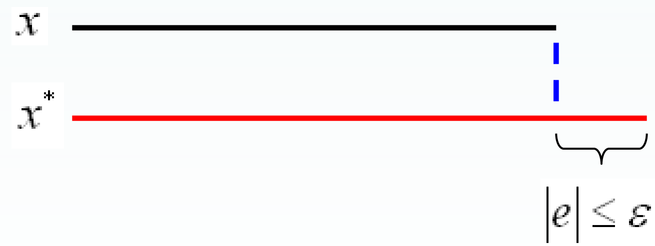
准确度（accuracy）指的是计算值或测量值与真值（true value）的吻合程度

精确度（precision）指的是计算值或测量值相互之间的一致程度

不准确度（inaccuracy）也称为偏差（bias）定义为相对真值的系统性偏差

不精确度（imprecision）也称为不确定度（uncertainty）指的是数据点散步的幅度

- 机枪手的困惑



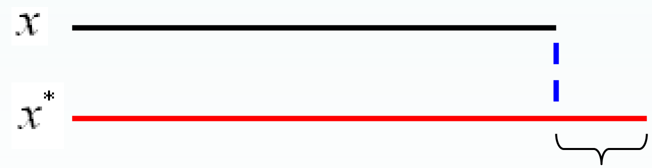
绝对误差 $|$真实值 $-$ 近似值$|$

因为准确值往往是未知的，因此要直接确定 e 一般是困难的，所以通常只能根据实际情况估计 $|e|$ 的一个上界 ε，即 $|e| \le \varepsilon$，称 ε 为 x^* 的绝对误差限。若某实际问题中得出了绝对误差限 ε，则记 $x = x^* \pm \varepsilon$。

$\varepsilon = 1$ 米，误差严重吗

误差的度量

■ 机枪手的困惑



$$|e| \le \varepsilon$$

相对误差 $\left|((\text{真实值} - \text{近似值}) / \text{真实值}) \times 100\%\right|$

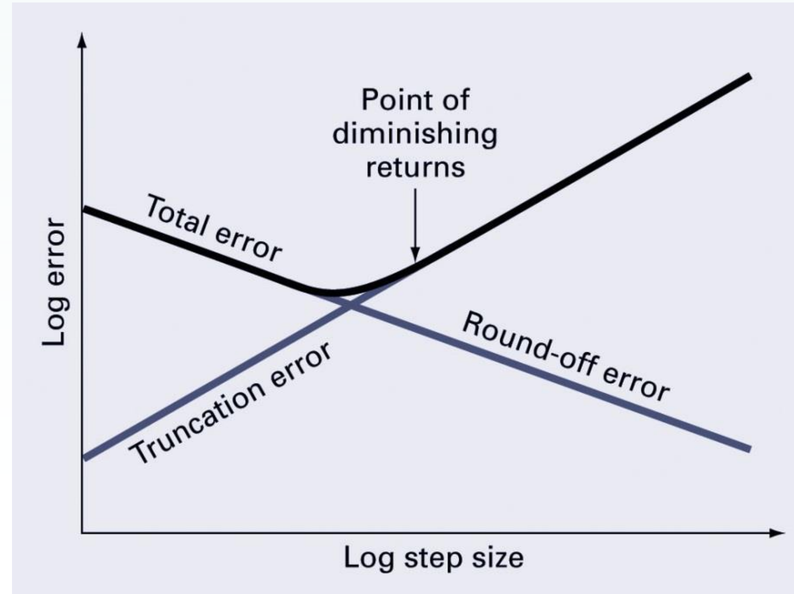
$$|e_r| = \left|\frac{e}{x^*}\right| \le \varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{x^*}$$

类似地，相对误差的绝对值的上界被称为 x^* 的相对误差限，并记为 ε_r，即 $|e_r| \le \varepsilon_r$，且在实际应用中常取 $\varepsilon_r = \dfrac{\varepsilon}{x^*}$。例如某物体的重量为 $(15 \pm 0.1)\mathrm{kg}$，则由此可知物体重量的绝对误差限为 $0.1\mathrm{kg}$，相对误差限为 $\dfrac{0.1}{15}$。

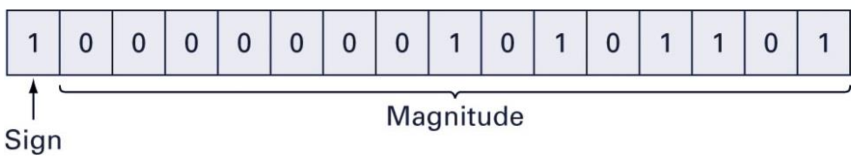
数值方法的一个挑战是在不知道关于真值信息的情况下确定误差的估计值

$$\left|((\text{当前近似值} - \text{前一近似值}) / \text{当前近似值}) \times 100\%\right|$$

■ 机枪手的困惑



舍入误差

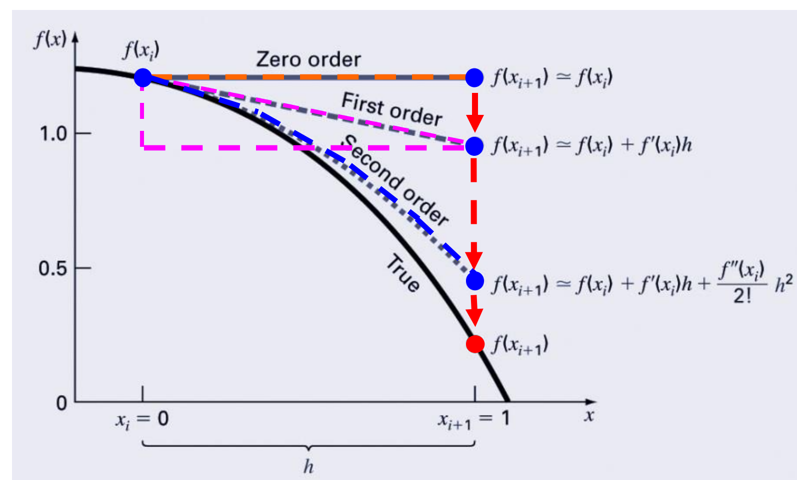


截断误差

$$f\left(x_{i+1}\right)=f\left(x_i\right)+f'\left(x_i\right)h+\frac{f''\left(x_i\right)}{2!}h^2+\frac{f^{(3)}\left(x_i\right)}{3!}h^3$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}\left(x_i\right)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}\left(\xi\right)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

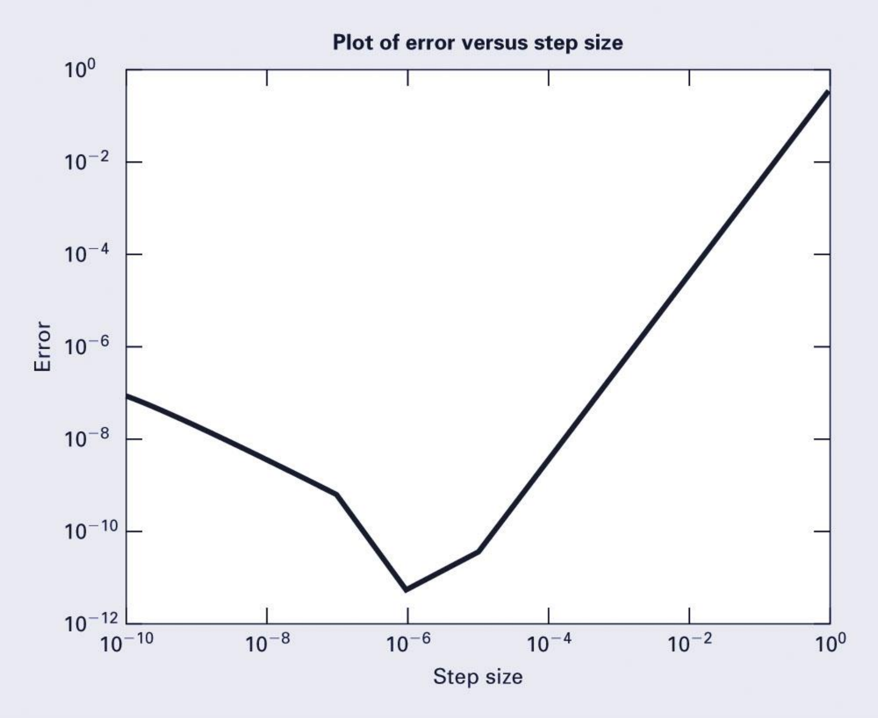
$$h=x_{i+1}-x_i$$



任何光滑函数都可以用多项式逼近

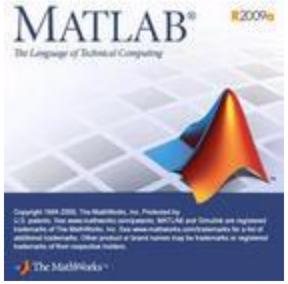
- **例** 估计下面函数在 $x=0.5$ 处的一阶导数，即 $f'(0.5)$

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$



$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$$

$$h: 10^0 \to 10^{-10}$$



选用算法时应遵循的几个原则

1. 数学模型
2. 误差的来源
3. 误差的度量
4. 选用算法时应遵循的几个原则

选用算法时应遵循的几个原则

1. 要尽量简化计算步骤以减少运算次数

减少运算次数，既可以提高解题速度，又有可能使计算中的舍入误差积累减少

■ **例** 计算多项式 $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的值

若采用逐项计算然后相加的算法

$$\begin{cases} S_0=a_0 \\ S_k=a_kx^k \quad (k=1,2,\cdots,n) \\ P_n(x)=S_0+S_1+\cdots+S_n \end{cases}$$

所需要的乘法次数为 $1+2+\cdots+(n-1)+n=\dfrac{1}{2}n(1+n)$ 加法次数为 n

若采用秦九韶算法

$$\begin{cases} S_n=a_n \\ S_k=xS_{k+1}+a_k \quad (k=n-1,n-2,\cdots,2,1,0) \\ P_n(x)=S_0 \end{cases}$$

则只需要 n 次乘法和 n 次加法，就可以算出 $P_n(x)$ 的值.

选用算法时应遵循的几个原则

$$x_1x_2=\frac{c}{a}=-0.01 \Rightarrow x_1=-\frac{0.01}{-10^4}=10^{-6}$$

2. 要防止大数“吃掉”小数

大数“吃掉”小数是指计算机在计算过程中，较小的数加不到较大的数中。这种现象有时会产生严重的后果。

■ **例** 在10位十进制数的限制下，求解一元二次方程 $x^2+10^4x-0.01=0$

并且使用求根公式 $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

按照加法运算的对阶规则，应有

$$b^2-4ac=10^8+0.04=0.1\times10^9+0.00000000004\times10^9$$

由于假设计算机只能存放10位十进制数，所以上式中的0.00000000004×10^9被当作零，因而

$$b^2-4ac=10^8$$

于是，得到 $$x_1=0,\quad x_2=-10^4$$

在求得的根中，$x_2=-10^4$是合理的，可接受的，但$x_1=0$是不可接受的

选用算法时应遵循的几个原则

3．相近两数应避免相减

数值计算中，两个相近的数作减法时有效数字会损失

■ 例 求 $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ 的值

当 $x=1000$ 时，取四位有效数字计算得 $\sqrt{x+1}\approx 31.64$, $\sqrt{x}\approx 31.62$

两者相减得 $y\approx 0.02$

这个结果只有一位有效数字，损失了三位有效数字。从而绝对误差和相对误差都便得很大，严重影响计算结果的精度，必须尽量避免出现这种运算。遇到这种运算使，最好是改变计算公式，防止这种情况的出现。

例如，把公式 $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ 变成 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

按此式求得 $y\approx 0.01581$，则 y 有四位有效数字。可见，改变计算公式，可以避免两相近数相减引起的有效数字的损失，而得到较准确的结果。

选用算法时应遵循的几个原则

4. 绝对值太小的数不宜作除数

在用计算机作运算时，绝对值太小的数作除数会导致计算机计算溢出停机。而且当绝对值很小的除数稍有一点误差时，对计算结果影响很大。

■ 例 $$\frac{2.7182}{0.001} = \underline{2718.2}$$

如果分母变为 0.0011，也就是分母只有 0.0001 的变化时

$$\frac{2.7182}{0.0011} \approx \underline{2471.1}$$

计算结果起了很大变化。因此，在计算中必须避免绝对值很小的数作除数。

选用算法时应遵循的几个原则

思考题　（15分）

（1）计算多项式 $y=x^3-7x^2+8x-0.35$ 在 $x=1.37$ 处的值。使用带截断的 3 位数字的算术运算，计算相应的百分比相对误差。

（2）重复（1），但将 y 表示为 $y=\left[\left(x-7\right)x+8\right]x-0.35$，计算相应的百分比相对误差并与（1）的结果进行比较。

选用算法时应遵循的几个原则

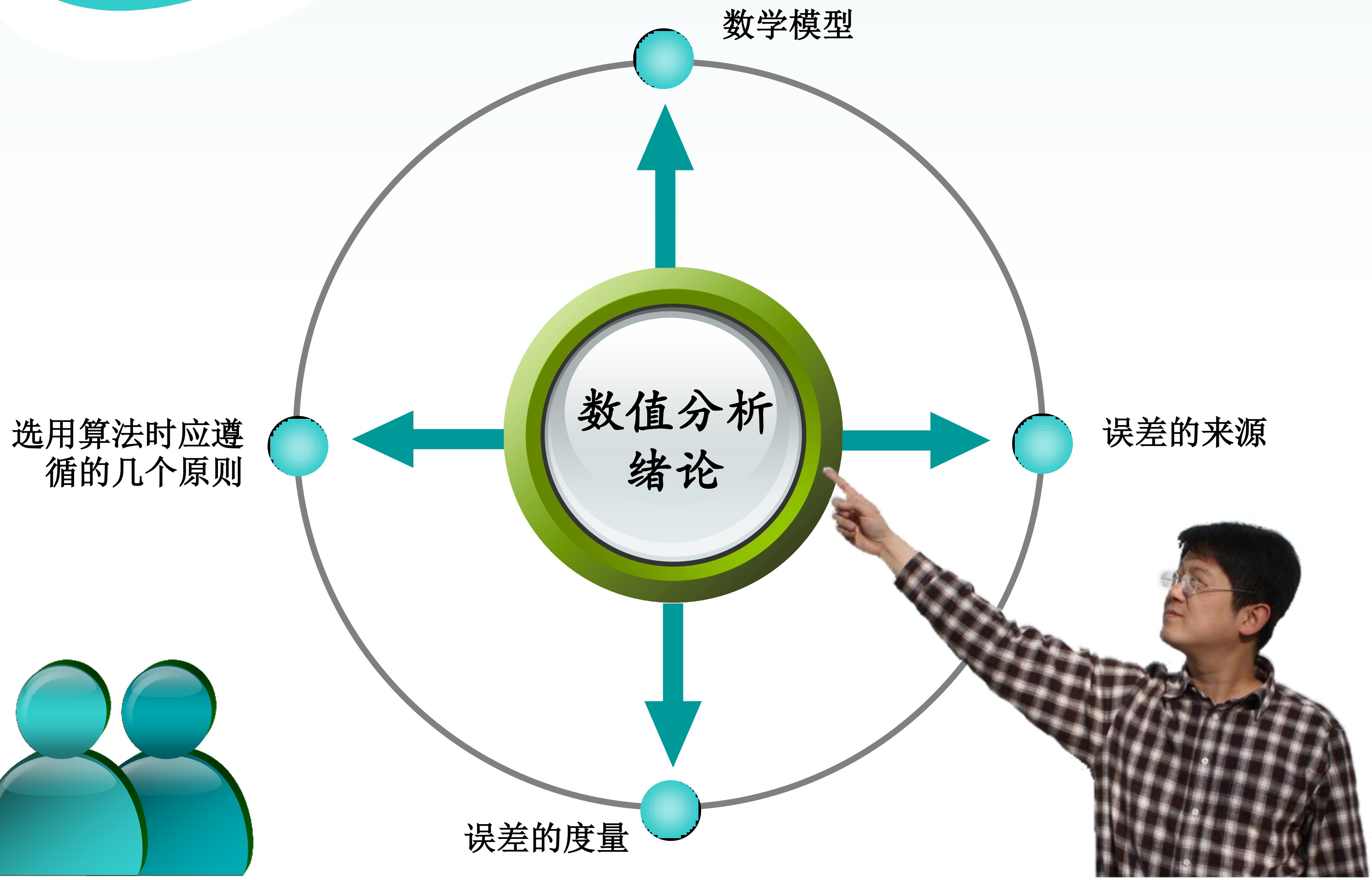
思考题 （15分）

证明：

如果 $f(x)=ax^2+bx+c$，那么对于 x 的所有取值，下式都成立

$$\begin{cases} f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \dfrac{f''(x_i)}{2!}h^2 \\ h = x_{i+1} - x_i \end{cases}$$

总结



可以改变去改变，不能改变去改善，

不能改善去宽容，不能宽容就放弃

To be continued…

wangyong@ucas.ac.cn
http://people.ucas.ac.cn/~wangyong

Thank you !