GZH007Y 40/2

高等工程数学

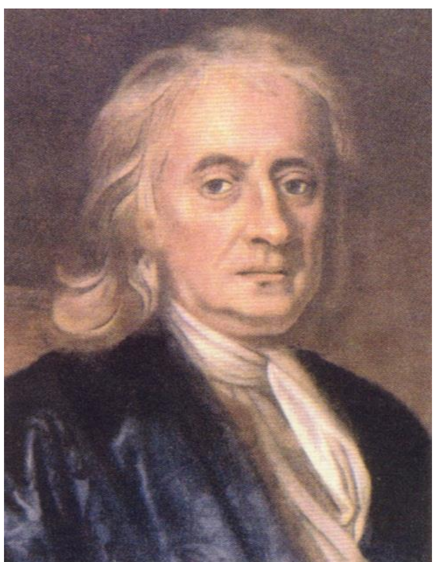
Advanced Engineering Mathematics

王 泳

中国科学院大学

2017.11.04

把简单的事情考虑得很复杂，可以发现新领域；把复杂的现象看得很简单，可以发现新定律



— 艾萨克·牛顿 (Isaac Newton 1643-1727)

英国数学家、物理学家

数值分析

数值分析就是研究各种数学问题的数值计算的方法和理论的学科

数值分析绪论

线性代数方程组的解法

插值方法

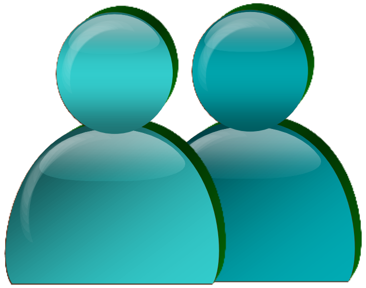
数值积分和数值微分公式

方程求根

常微分方程的数值解法

第八章：数值积分和数值微分公式

1. 插值型求积公式和代数精度
2. 牛顿—柯特斯公式
3. 复化求积公式
4. 龙贝格求积算法（略）
5. 高斯求积公式（简）
6. 数值微分公式



第八章：数值积分和数值微分公式

本章主要介绍定积分$I=\int_a^b f(x)dx$的数值积分方法。

对于积分$I=\int_a^b f(x)dx$，如果$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(x)$的原函数为$F(x)$，便有下列牛顿－莱布尼兹（Newton-Leibniz）公式：

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

但实际使用这种求积方法往往有困难，因为许多的被积函数的原函数不容易求得；另外，当$f(x)$是以表格形式给出而没有解析表达式时，就无法使用牛顿－莱布尼兹公式了。因此有必要研究积分的数值计算方法，以解决积分的近似计算问题。

■ 问题

对于函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，已知函数表，如何计算定积分

$$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$$

并估计误差。

x	0	1/8	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8	1
$f(x)$	1	0.993978	0.9896158	0.9767267	0.9588510	0.9361556	0.9088516	0.8771925	0.8414709

■ 问题

已知 $f(x)$ 的下列数值表

x	1.36	1.38	1.40	1.42
$f(x)$	4.673441	5.177437		6.581119

计算 $f'(1.4)$ 的近似值，并作误差估计。

第八章：数值积分和数值微分公式

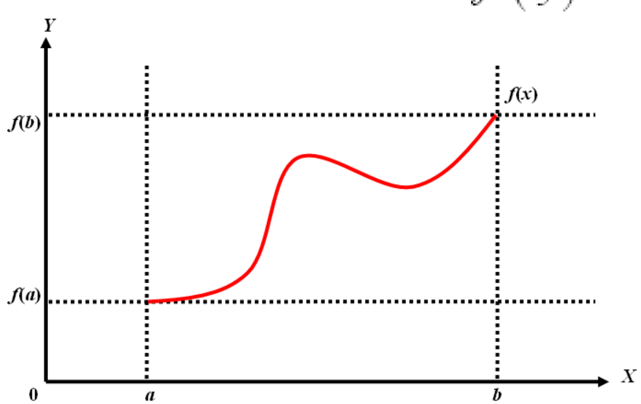
1. 插值型求积公式和代数精度
2. 牛顿—柯特斯公式
3. 复化求积公式
4. 龙贝格求积算法（略）
5. 高斯求积公式（简）
6. 数值微分公式

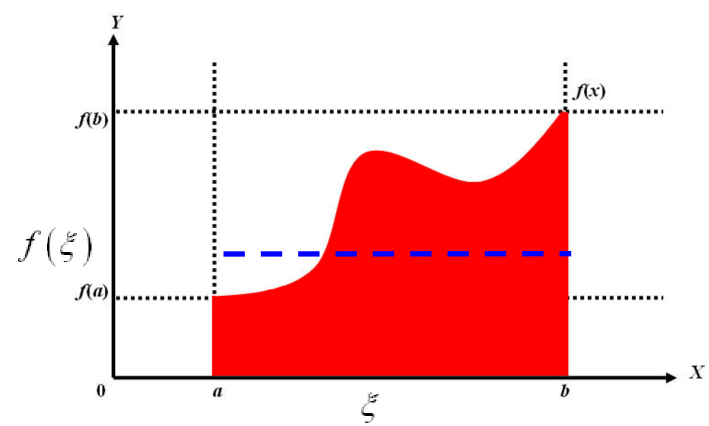
■ 数值积分的基本思想

根据积分第一中值定理，对于连续函数 $f(x)$，在 $[a,b]$ 内存在一点 ξ，成立

$$I=\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi)$$

也就是说，以底为 $b-a$ 而高为 $f(\xi)$ 的矩形面积恰好等于所求曲边梯形的面积 I。



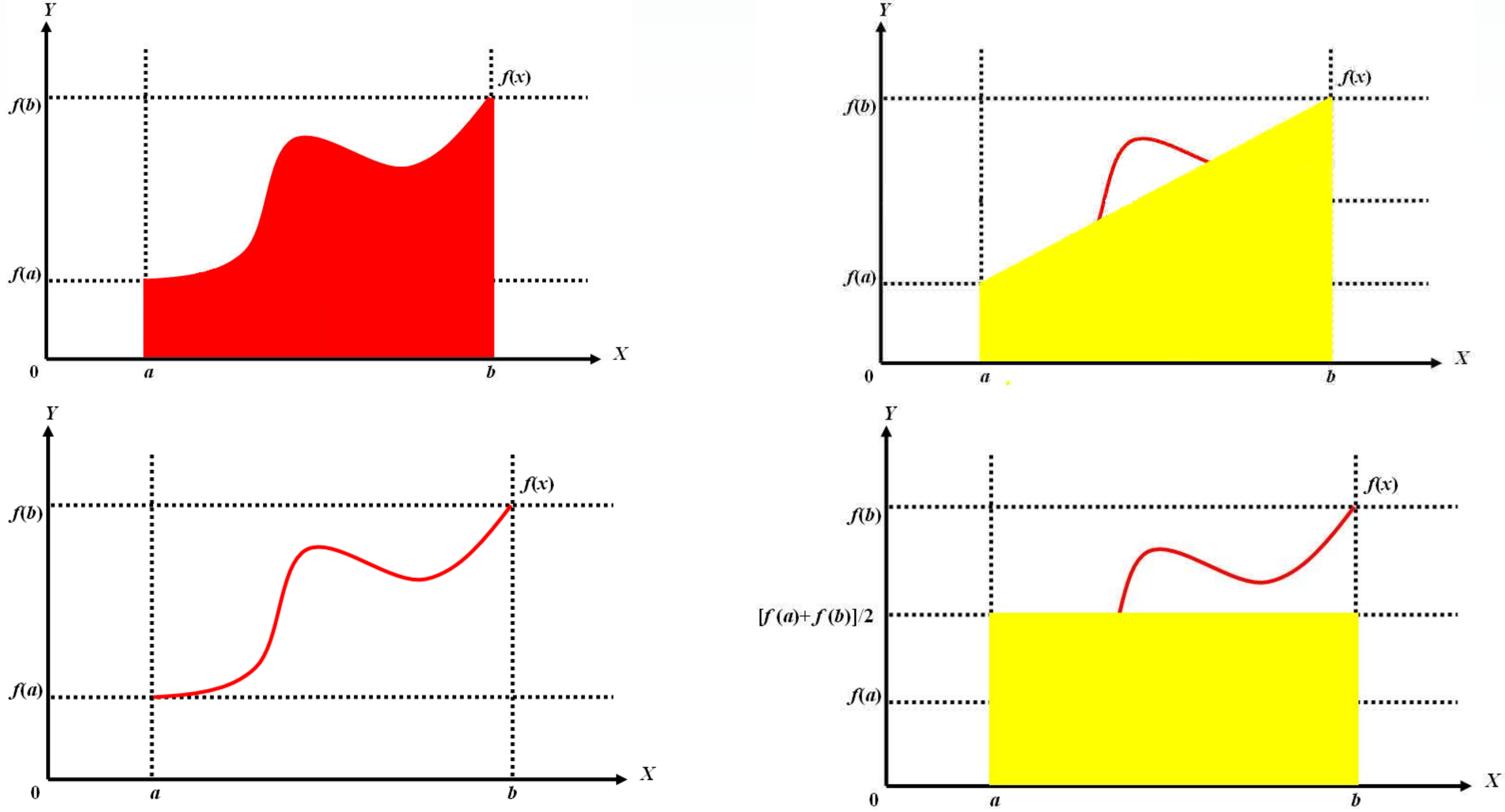


问题在于点 ξ 的具体位置一般是不知道的，因而难以准确地算出 $f(\xi)$ 的值。

我们称 $f(\xi)$ 为区间 $[a,b]$ 上的平均高度。这样，只要对平均高度 $f(\xi)$ 提供一种算法，相应地便可获得一种数值积分方法。

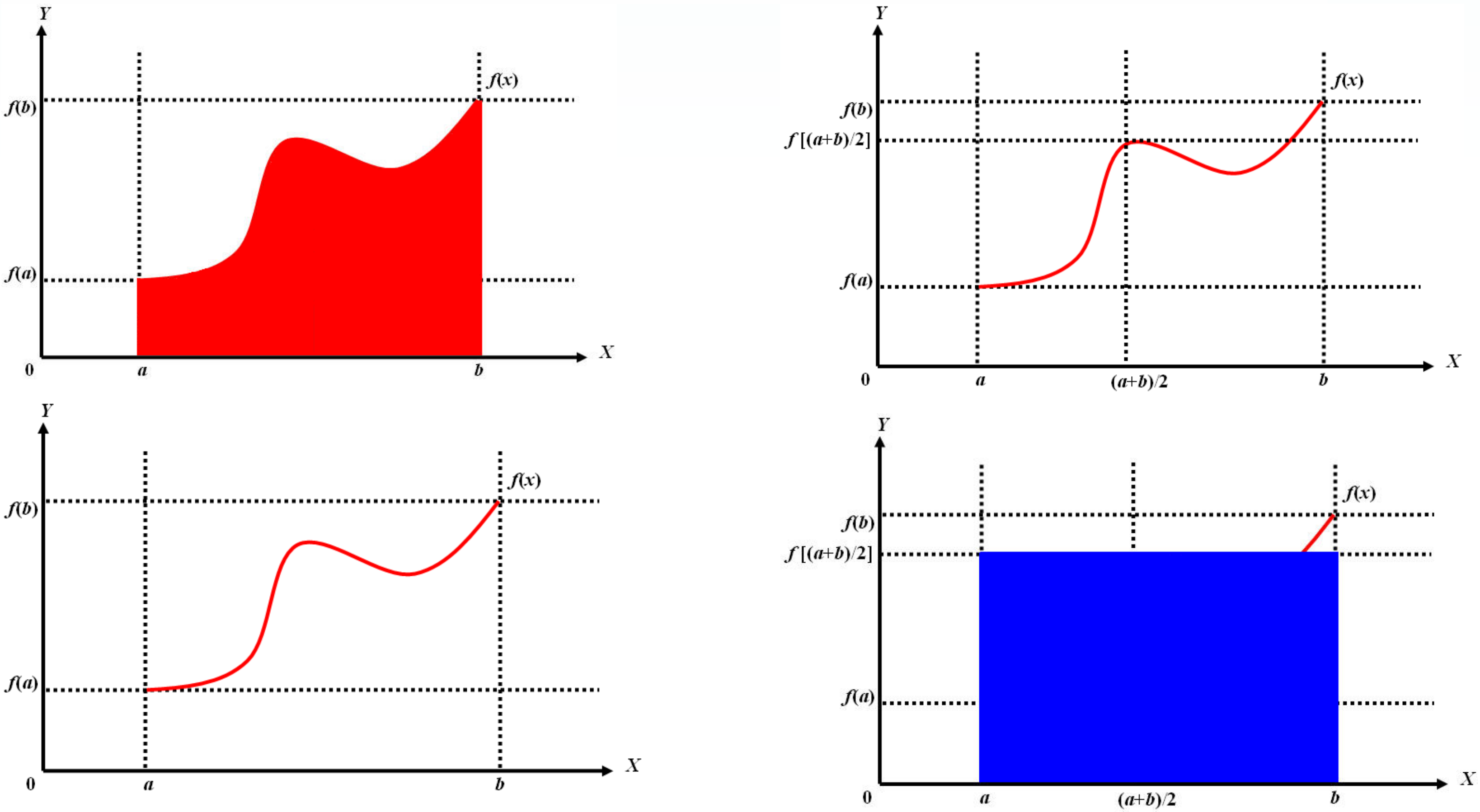
插值型求积公式和代数精度

人们所熟知的梯形公式 $$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right] \tag{8.1}$$



插值型求积公式和代数精度

以及矩形公式 $$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad (8.2)$$

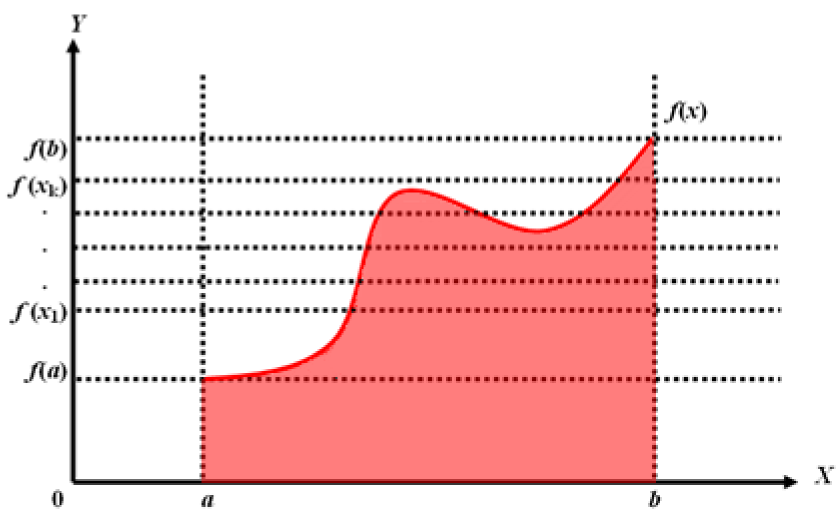


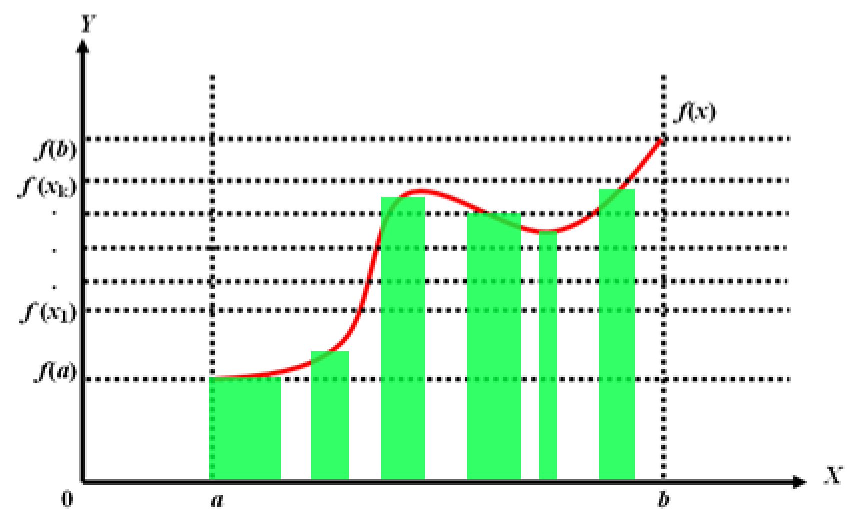
插值型求积公式和代数精度

更一般地，我们取$[a,b]$内若干个节点x_k处的高度$f(x_k)$，通过加权平均的方法近似地得出平均高度$f(\xi)$，这类求积公式的一般形式是

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \qquad (8.3)$$

其中，x_k被称为求积节点，A_k被称为求积系数，亦称伴随节点x_k的权。





插值型求积公式和代数精度

■ 插值型求积公式

构造数值求积公式的方法很多，但常用的一个方法是利用拉格朗日插值多项式来构造。即对已知被积函数在积分区间$\left[a,b\right]$上的一组节点$a\le x_0<x_1<\cdots<x_n\le b$上的函数值$f\left(x_0\right)$，$f\left(x_1\right)$，…，$f\left(x_n\right)$，可构造出$f\left(x\right)$的$n$次拉格朗日插值多项式$L_n\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}l_i\left(x\right)f\left(x_i\right)$，其中，$l_i\left(x\right)=\prod_{\substack{j=0\\j\ne i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$。

则有
$$\int_a^b f\left(x\right)dx\approx\int_a^b L_n\left(x\right)dx=\sum_{i=0}^{n}\left[\int_a^b l_i\left(x\right)dx\right]f\left(x_i\right)$$

这样就得到了一个数值求积公式

$$I\left[f\right]=\int_a^b f\left(x\right)dx\approx\sum_{i=0}^{n}A_i f\left(x_i\right)\equiv Q\left[f\right]\qquad(8.4)$$

其中
$$A_i=\int_a^b l_i\left(x\right)dx=\int_a^b\prod_{\substack{j=0\\j\ne i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}dx\qquad(8.5)$$

插值型求积公式和代数精度

我们称求积系数由（8.5）式确定的求积公式（8.4）为插值型求积公式。

利用插值余项，可得插值型求积公式的余项是

$$R[f]=I[f]-Q[f]=\int_a^b\left[f(x)-L_n(x)\right]dx=\int_a^b\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}\left(x-x_j\right)dx \qquad (8.6)$$

利用余项公式（8.6）可以衡量数值求积公式的精确程度。例如 $f(x)\equiv 1$ 时，求积公式精确成立，从而有 $\sum_{i=0}^{n}A_i=b-a$，即插值型求积公式的系数之和等于积分区间的长度。为了研究其精确程度，常用代数精度这个概念来说明。

插值型求积公式和代数精度

■ 代数精度

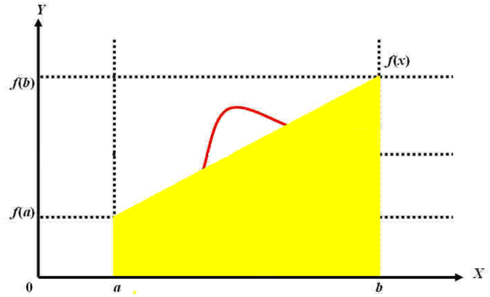
数值求积方法是近似方法，为保证精度，我们自然希望求积公式能对“尽可能多”的函数准确地成立，这就提出所谓代数精度的概念。

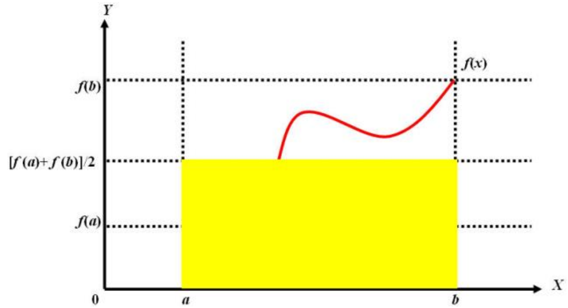
■ 定义 8.1 （代数精度）

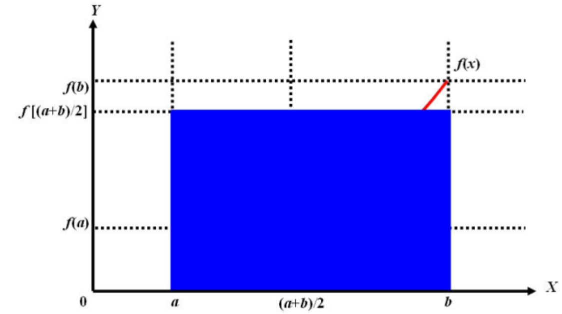
如果某个求积公式对于次数不超过 m 的多项式均能准确地成立，但对于 $m+1$ 次多项式都不能准确成立，则称该求积公式具有 m 次代数精度。

不难验证，梯形公式（8.1）和矩形公式（8.2）均有一次代数精度。

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right] \quad (8.1) \qquad \int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (8.2)$$







插值型求积公式和代数精度

从上述定义来直接判断求积公式的代数精度比较麻烦，而由多项式和定积分的性质，容易证明上述定义等价于：若依次用 $f(x)=x^0,x^1,x^2,\cdots,x^m$ 代入求积公式，均有

$$I[f]=Q[f]$$

而用 $f(x)=x^{m+1}$ 代入求积公式，有

$$I[f]\neq Q[f]$$

则求积公式具有 m 次代数精度。

由余项公式（8.6）可知，有 $n+1$ 个节点的插值型求积公式（8.4）至少具有 n 次代数精度

$$I[f]=\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{i=0}^{n}A_i f(x_i)\equiv Q[f] \qquad (8.4)$$

$$R[f]=I[f]-Q[f]=\int_a^b\left[f(x)-L_n(x)\right]dx=\int_a^b\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)dx \qquad (8.6)$$

■ **例8.1**

设有求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1)$$

试确定系数 A_0, A_1, A_2，使上述求积公式的代数精度尽量高，并指出该求积公式所具有的代数精度。

解：

令求积公式依次对 $f(x)=1, x, x^2$ 都精确成立，即系数 A_0, A_1, A_2 应满足方程组

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = \int_{-1}^{1} 1dx = 2 \\ -A_0 + A_2 = \int_{-1}^{1} xdx = 0 \\ A_0 + A_2 = \int_{-1}^{1} x^2dx = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

插值型求积公式和代数精度

解得

$$A_0=\frac{1}{3},A_1=\frac{4}{3},A_2=\frac{1}{3}$$

因此，该求积公式应为

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx\frac{1}{3}f(-1)+\frac{4}{3}f(0)+\frac{1}{3}f(1)$$

又容易验证，该求积公式对于 $f(x)=x^3$ 也精确成立，但对 $f(x)=x^4$，求积公式不能精确成立，因此，该求积公式具有三次代数精度。

思考题 （15分）

思考题 **（15分）**

设有求积公式

$$\int_0^2 f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1) + A_2 f(2)$$

试确定系数 A_0, A_1, A_2，使上述求积公式的代数精度尽量高，

并指出该求积公式所具有的代数精度。

第八章：数值积分和数值微分公式

1 插值型求积公式和代数精度

2 牛顿—柯特斯公式

3 复化求积公式

4 龙贝格求积算法（略）

5 高斯求积公式（简）

6 数值微分公式

牛顿—柯特斯公式

■ 公式的导出

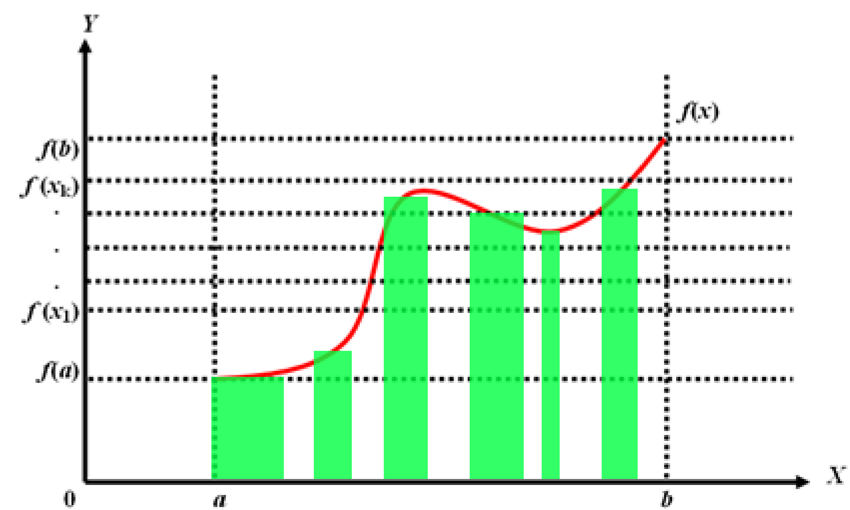
将区间 $[a,b]$ n 等分，取步长 $h=(b-a)/n$，选取等分点 $x_k=a+kh$（$k=0,1,\cdots,n$）构造出的插值型求积公式

$$I_n=(b-a)\sum_{k=0}^{n}C_k f(x_k) \qquad (8.7)$$

被称作 n 阶牛顿—柯特斯（Newton-Cotes）公式，其中 C_k 被称为柯特斯系数。

$$I[f]=\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{i=0}^{n}A_i f(x_i) \qquad (8.4)$$

$$A_i=\int_a^b l_i(x)dx=\int_a^b\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}dx \qquad (8.5)$$



牛顿—柯特斯公式

若令 $x=a+th$，则按（8. 5）式有

$$\boxed{h=(b-a)/n}$$

$$
\begin{aligned}
C_k &= \frac{1}{b-a}\int_a^b \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}dx \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}dx \\
&= \frac{h}{b-a}\int_0^n \frac{t(t-1)\cdots(t-k+1)(t-k-1)\cdots(t-n)}{k(k-1)\cdots 1(-1)(-2)\cdots(k-n)}dt \qquad (8.8) \\
&= \frac{(-1)^{n-k}}{n\bullet k!(n-k)!}\int_0^n t(t-1)\cdots(t-k+1)(t-k-1)\cdots(t-n)dt \\
&= \frac{(-1)^{n-k}}{n\bullet k!(n-k)!}\int_0^n \prod_{j=0}^{n}(t-j)dt \qquad (k=0,1,\cdots,n)
\end{aligned}
$$

显然 C_k 与积分区间 $[a,b]$ 无关。如果事先造好柯特斯系数表，再用牛顿—柯特斯公式计算定积分近似值，这样就更加方便。

牛顿—柯特斯公式

$$I_n = (b-a)\sum_{k=0}^{n} C_k f(x_k) \quad (8.7)$$

下表给出了 $n=1,2,\cdots,5$ 的牛顿—柯特斯系数。

n	C_k					
1	1/2	1/2				
2	1/6	2/3	1/6			
3	1/8	3/8	3/8	1/8		
4	7/90	16/45	2/15	16/45	7/90	
5	19/288	25/96	25/144	25/144	25/96	19/288

（1） 当 $n=1$ 时，得到梯形公式：

$$T = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right] \quad (8.9)$$

（2） 当 $n=2$ 时，得到辛普森公式（或被称为抛物线求积公式）：

$$S = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f(c)+f(b)\right], \quad c = \frac{a+b}{2} \quad (8.10)$$

（3） 当$n=4$时，$x_k=a+kh$，$k=0,1,2,3,4$，$h=\dfrac{b-a}{4}$，下式特别被称为柯特斯公式：

$$C=\frac{b-a}{90}\left[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)\right] \qquad (8.11)$$

在一系列牛顿—柯特斯公式中，高阶公式由于稳定性差而不宜采用，所以有实用价值的仅仅是几种低阶的求积公式。

第八章：数值积分和数值微分公式

1. 插值型求积公式和代数精度
2. 牛顿—柯特斯公式
3. 复化求积公式
4. 龙贝格求积算法（略）
5. 高斯求积公式（简）
6. 数值微分公式

复化求积公式

实际计算时，很少使用高阶牛顿—柯特斯公式。为了提高精度，通常可把积分区间分成若干个子区间，再在每个子区间上用低阶求积公式，这种方法被称为复化求积法。

■ 复化梯形求积公式

将区间 $[a,b]$ 划分为 n 等份，分点 $x_k = a+kh$，$h=(b-a)/n$，　$k=0,1,\cdots,n$，在每个子区间 $[x_k, x_{k+1}]$（$k=0,1,\cdots,n-1$）上采用梯形公式（8.9）可得

$$I=\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx=\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_k)+f(x_{k+1})\right]+R_n(f) \qquad (8.15)$$

记

$$T_n=\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_k)+f(x_{k+1})\right]=\frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right] \qquad (8.16)$$

则（8.16）式被称为复化梯形公式

$$S=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f(c)+f(b)\right],\quad c=\frac{a+b}{2}\qquad（8.10）$$

■ 复化辛普森求积公式

将区间 $[a,b]$ 划分为 n 等份，在每个区间 $[x_k,x_{k+1}]$ 上采用辛普森公式（8.10），若记

$x_{k+\frac{1}{2}}=x_k+\frac{1}{2}h$，则得

$$I=\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx=\frac{h}{6}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_k)+4f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)+f(x_{k+1})\right]+R_n(f)\qquad（8.18）$$

记

$$S_n=\frac{h}{6}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_k)+4f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)+f(x_{k+1})\right]\qquad（8.19）$$

$$=\frac{h}{6}\left[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1}f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]$$

则称（8.19）式为复化辛普森求积公式

■ 例8.2

对于函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，给出 $n=8$ 的函数表，试用复化梯形公式（8.16）及复化辛普森求积公式（8.19）计算积分

$$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$$

并估计误差。

x	0	1/8	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8	1
$f(x)$	1	0.993978	0.9896158	0.9767267	0.9588510	0.9361556	0.9088516	0.8771925	0.8414709

复化求积公式

$$T_n = \frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+f(b)\right] \qquad (8.16)$$

$$S_n = \frac{h}{6}\left[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+f(b)\right] \qquad (8.19)$$

解：

将积分区间$[0,1]$划分为 8 等份，应用复化梯形法求得

$$T_8 = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}f(0)+f\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{5}{8}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)+\frac{1}{2}f(1)\right]$$
$$\approx 0.9456911$$

而如果将$[0,1]$划分为 4 等份，应用复化辛普森法有

$$S_4 = \frac{1}{4\times 6}\left\{f(0)+4\left[f\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f\left(\frac{5}{8}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)\right]+2\left[f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right]+f(1)\right\}$$
$$\approx 0.9460832$$

复化求积公式

比较上面两个结果T_8与S_4，它们都需要提供 9 个点上的函数值，计算量基本相同，然而精度却差别很大，与积分的准确值$I=0.9460831$比较，复化梯形法的结果$T_8=0.9456911$只有两位有效数字，而复化辛普森的结果$S_4=0.9460832$却有六位有效数字。

第八章：数值积分和数值微分公式

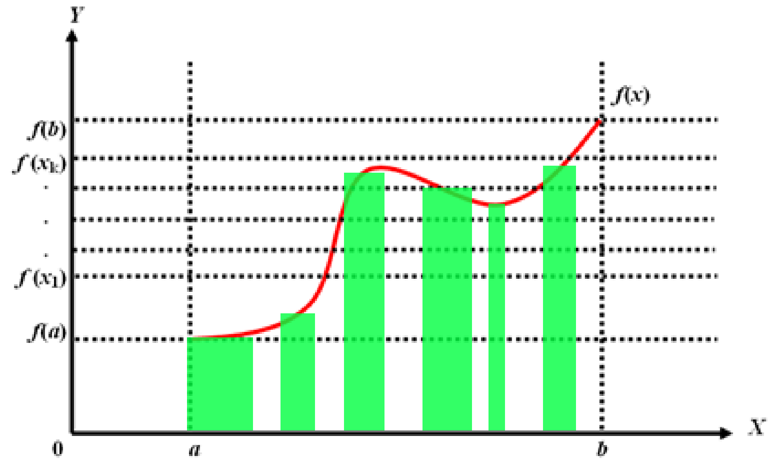
1. 插值型求积公式和代数精度
2. 牛顿—柯特斯公式
3. 复化求积公式
4. 龙贝格求积算法（略）
5. 高斯求积公式（简）
6. 数值微分公式

■ 高斯求积公式

对于求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

它含有 $2n+2$ 个待定参数 x_k， A_k（$k=0,1,\cdots,n$），当 x_k 为等距节点时得到的插值型求积公式其代数精度至少为 n 次，如果适当选取 x_k（$k=0,1,\cdots,n$），有可能使求积公式具有 $2n+1$ 次代数精度，这类求积公式被称为高斯求积公式。



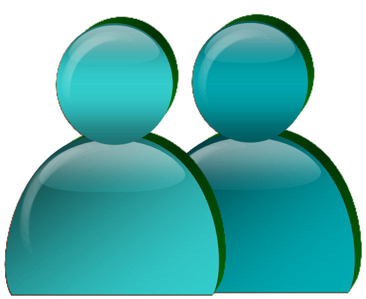
高斯点

高斯—勒让德求积公式

高斯—勒让德节点系数表

第八章：数值积分和数值微分公式

1. 插值型求积公式和代数精度
2. 牛顿—柯特斯公式
3. 复化求积公式
4. 龙贝格求积算法（略）
5. 高斯求积公式（简）
6. 数值微分公式



■ 基于泰勒（Taylor）公式的数值微分公式

（1） $f'(x)\approx\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$，向前差商，截断误差为 $-\dfrac{f''(\xi)}{2}h$；

（2） $f'(x)\approx\dfrac{f(x)-f(x-h)}{h}$，向后差商，截断误差为 $-\dfrac{f''(\xi)}{2}h$；

（3） $f'(x)\approx\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$，中心差商，截断误差为 $-\dfrac{f'''(\xi)}{6}h^2$；

（4） $f''(x)\approx\dfrac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$，二阶中心差商，截断误差为 $-\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{12}h^2$。

■ 基于插值的数值微分公式

在插值问题中，只要已知 $f(x)$ 在 $n+1$ 个互异节点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 上的函数值 $f_i = f(x_i)$（$i = 0,1,\cdots,n$），并且假定 $f^{(n+1)}(x)$ 存在，则可作拉格朗日插值多项式 $L_n(x)$，使得

$$f(x) = L_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} w_{n+1}(x) \quad \xi \in [a,b]$$

其中 $w_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$

现对上式两边求一次导数，则有

$$f'(x) = L_n'(x) + \frac{1}{(n+1)!}\left[f^{(n+1)}(\xi(x))' w_{n+1}(x) + f^{(n+1)}(\xi(x)) w_{n+1}'(x) \right]$$

$$\boxed{f'(x)=L_n'(x)+\frac{1}{(n+1)!}\left[f^{(n+1)}(\xi(x))'w_{n+1}(x)+f^{(n+1)}(\xi(x))w_{n+1}'(x)\right]}$$

注意到 $w_{n+1}(x_k)=0$， $w_{n+1}'(x_k)=\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)$，（$k=0,1,\cdots,n$）。于是有

$$f'(x_k)=L_n'(x_k)+\frac{f^{(n+1)}(\xi(x_k))}{(n+1)!}\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)\qquad (k=0,1,\cdots,n)$$

现在用 $L_n'(x_k)$ 来近似代替 $f'(x_k)$，即可构造数值微分公式，并可估计其截断误差。实际应用中通常使用二、三、五个节点的情形，相应地有两点、三点和五点公式，且均取等距节点 $x_{k+1}-x_k=h$（$k=0,1,\cdots,n$）。

现对二个节点，即 $n=1$，由

$$L_1'(x)=\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)'f_0+\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)'f_1=-\frac{f_0}{h}+\frac{f_1}{h}=\frac{1}{h}(f_1-f_0)$$

于是可得两点公式及其截断误差：

$$f'(x_0)\approx\frac{1}{h}(f_1-f_0)\text{，截断误差}-\frac{f''(\xi)}{2}h \qquad (1)$$

$$f'(x_1)\approx\frac{1}{h}(f_1-f_0)\text{，截断误差}-\frac{f''(\xi)}{2}h \qquad (2)$$

其实，它们分别与向前、向后差商公式相同。

对三个节点，即 $n=2$，由

$$L_2'(x)=\left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\right]' f_0+\left[\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\right]' f_1+\left[\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\right]' f_2$$

$$=\frac{2x-x_1-x_2}{2h^2}f_0+\frac{2x-x_0-x_2}{-h^2}f_1+\frac{2x-x_0-x_1}{2h^2}f_2$$

代入 $x=x_0$，整理可得

$$L_2'(x_0)=\frac{2x_0-x_1-x_2}{2h^2}f_0+\frac{2x_0-x_0-x_2}{-h^2}f_1+\frac{2x_0-x_0-x_1}{2h^2}f_2$$

$$=\frac{1}{2h}(-3f_0+4f_1-f_2)$$

同理，代入$x=x_1$，$x=x_2$并同样作整理，最后可得三点公式及其截断误差：

$$f'(x_0)\approx\frac{1}{2h}(-3f_0+4f_1-f_2)，\quad 截断误差\ \frac{f'''(\xi)}{3}h^2 \qquad (1)$$

$$f'(x_1)\approx\frac{1}{2h}(-f_0+f_2)，\quad 截断误差\ -\frac{f'''(\xi)}{6}h^2 \qquad (2)$$

$$f'(x_2)\approx\frac{1}{2h}(f_0-4f_1+3f_2)\quad 截断误差\ \frac{f'''(\xi)}{3}h^2 \qquad (3)$$

其中，公式（2）也被称为中点公式，相对比较简单，但精度却略高。它与中心差商公式本质上是一致的。

类似地，对五个节点 x_0， x_1， x_2， x_3， x_4 及对应的函数值 f_0， f_1， f_2， f_3， f_4，可导出五点公式及其截断误差：

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{12h}(-25f_0 + 48f_1 - 36f_2 + 16f_3 - 3f_4)，\text{截断误差} \frac{f^{(5)}(\xi)}{3}h^4 \qquad (1)$$

$$f'(x_1) \approx \frac{1}{12h}(-3f_0 - 10f_1 + 18f_2 - 6f_3 + f_4)，\qquad \text{截断误差} -\frac{f^{(5)}(\xi)}{20}h^4 \qquad (2)$$

$$f'(x_2) \approx \frac{1}{12h}(f_0 - 8f_1 + 8f_3 - f_4)，\qquad \text{截断误差} -\frac{f^{(5)}(\xi)}{30}h^4 \qquad (3)$$

$$f'(x_3) \approx \frac{1}{12h}(-f_0 + 6f_1 - 18f_2 + 10f_3 + 3f_4)，\qquad \text{截断误差} -\frac{f^{(5)}(\xi)}{20}h^4 \qquad (4)$$

$$f'(x_4) \approx \frac{1}{12h}(3f_0 - 16f_1 + 36f_2 - 48f_3 + 25f_4)，\qquad \text{截断误差} \frac{f^{(5)}(\xi)}{5}h^4 \qquad (5)$$

$$f'(x_1) \approx \frac{1}{2h}(-f_0 + f_2), \qquad \text{截断误差} -\frac{f'''(\xi)}{6}h^2 \qquad (2)$$

■ **例8.6**

利用 $f(x)=\mathrm{tg}x$ 的下列数值表

x	1.36	1.38	1.40	1.42
$f(x)$	4.673441	5.177437	5.797884	6.581119

计算 $f'(1.4)$ 的近似值，并作误差估计。

解：

考虑到只掌握四个离散点的值（$h=0.02$），故采用精度略高的中点公式（也即中心差商公式）进行计算

$$f'(1.4) \approx \frac{-\mathrm{tg}1.38+\mathrm{tg}1.42}{2\times 0.02} = \frac{-5.177437+6.581119}{0.04} = 35.09205$$

关于截断误差 $R=-\frac{f'''(\xi)}{6}h^2$，由

$$f'(x)=(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\mathrm{tg}^2 x$$

$$f''(x)=2\mathrm{tg}x(\mathrm{tg}x)'=2\left(\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}^3 x\right)$$

$$f'''(x)=2\left[\left(1+\mathrm{tg}^2 x\right)+3\mathrm{tg}^2 x\left(1+\mathrm{tg}^2 x\right)\right]=2\left(1+\mathrm{tg}^2 x\right)\left(1+3\mathrm{tg}^2 x\right)$$

有

$$|R|\le\frac{0.02^2}{6}\times 2\left(1+\mathrm{tg}^2 1.42\right)\left(1+3\mathrm{tg}^2 1.42\right)=0.773574$$

与实际值 $f'(1.4)=1+\mathrm{tg}^2 1.4=34.615458$ 比较，实际误差约-0.476592。

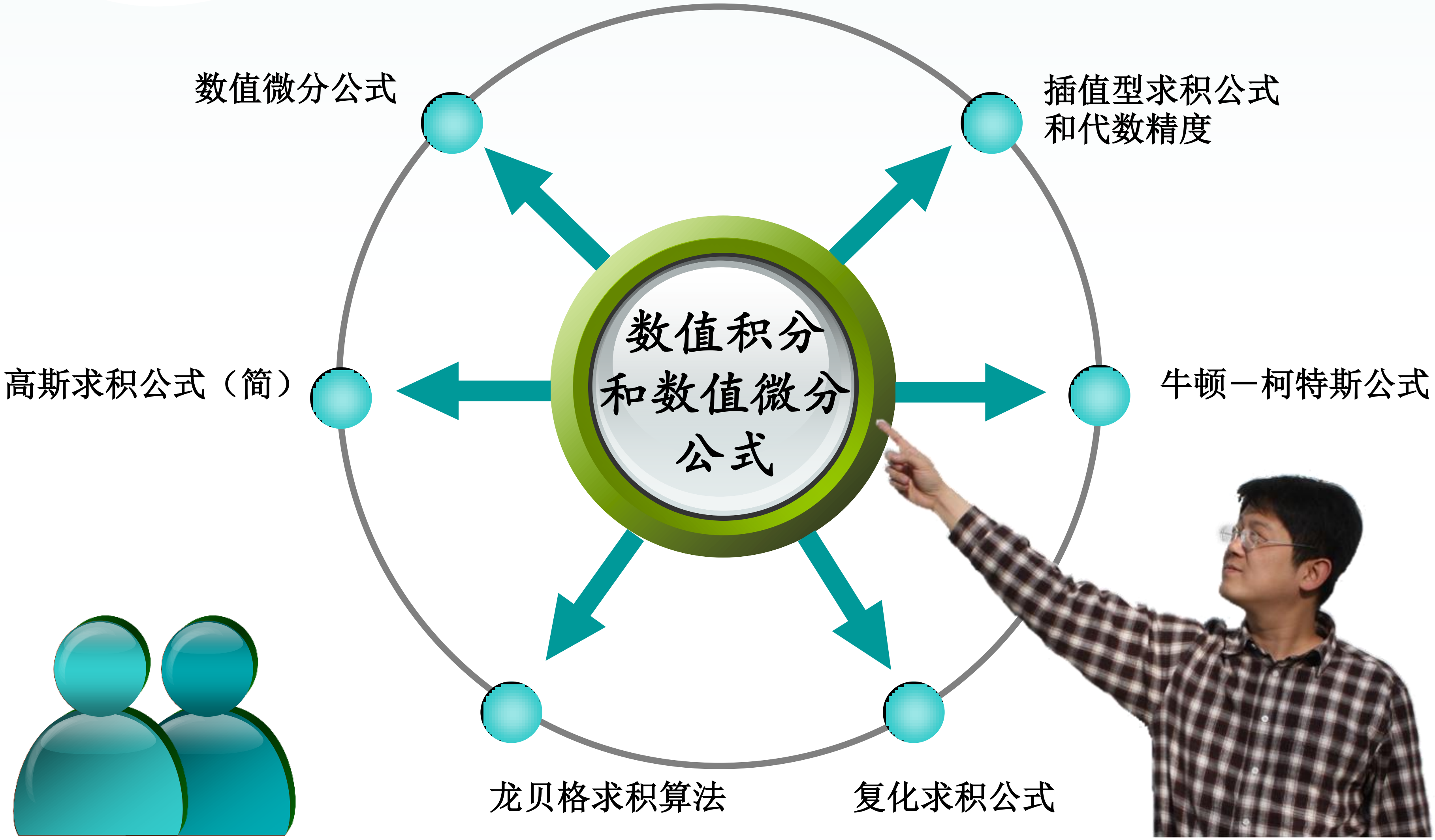
思考题 （15分）

利用 $f(x)=\mathrm{tg}x$ 的下列数值表

x	1.36	1.38	1.40	1.42
$f(x)$	4.673441	5.177437	5.797884	6.581119

计算 $f'(1.38)$ 的近似值，并作误差估计。

总结


数值积分和数值微分公式
数值微分公式
插值型求积公式和代数精度
高斯求积公式（简）
牛顿—柯特斯公式
龙贝格求积算法
复化求积公式

大悲时认清自己，大落时看清朋友

To be continued…

wangyong@ucas.ac.cn
http://people.ucas.ac.cn/~wangyong

Thank you !