**LDPC码的相关研究**

摘要

1963年Gallager提出了LDPC码，但是由于受到编译码复杂度的限制，并没有引起人们的足够重视，在随后的几十年里，这种码字几乎被人们遗忘了。直到20世纪90年代，它才重新被学者认识，而且人们发现了距离香农限只有0.0045dB的好码字。依据LDPC码的二分图结构设计的置信度传播译码算法使LDPC码的性能得到了很大的改善，并且和最大似然译码算法相比，译码的复杂度得到了明显的降低。现在，LDPC码已经广泛地应用在下一代通信系统中。

作为对LDPC码的初步学习，本文首先学习了差错控制编码基本概念和方法，然后具体了解了LDPC码编码和译码算法发展。在研究了LDPC码的基本定义后，又进一步了解了LDPC码生成矩阵和校验矩阵的构造方法，深入研究了LDPC码的编码译码原理和方法，最后重点研究了LDPC码在衰落信道下的性能。

关键字：LDPC码 稀疏矩阵 衰落信道

**目录**

[摘要 1](#_Toc314736866)

[绪论 3](#_Toc314736867)

[第一章 LDPC码的基本原理 6](#_Toc314736868)

[第二章 LDPC码译码原理 16](#_Toc314736869)

[第三章 LDPC码在衰落信道下的性能分析 21](#_Toc314736870)

[第四章 总结 27](#_Toc314736871)

[第五章 参考文献 28](#_Toc314736872)

绪论

**1. LDPC码的提出发展及现状**

1963年，Gallager在他的博士论文中提出了LDPC码，并且给出了一种二元规则LDPC码，被称之为Gallager码。LDPC码具有很好的汉明距离特性，是满足Shannon限的渐进好码，经过迭代后验概率译码可以获得依码字长度指数降低的误比特率，虽然LDPC码迭代译码时每个码元的复杂度独立于码长，但限于当时的计算能力，LDPC码被认为不是实用码，在很长一段时间没有受到人们的重视。此后的几十年时间里，除了Tanner等人对其进行了一些研究以外，LDPC码几乎被人们遗忘了。

1981年，Tanner在他的一篇奠基性的文中证明Gallager的译码算法译码性能与LDPC码对应二分图中的环有关，并且提出一种规范的图码表示，即把码校验矩阵建立在局部码元集合上的Tanner图。采用Tanner图构造的LDPC码，通过并行译码可以显著地降低译码复杂度。Tanner还仔细分析了和积算法(Sum-Product Algorithm)与最小和算法(Min-Sum Algorithm)两种信息传递算法，证明了基于有限无环Tanner图的最小和译码算法与和积译码算法的最优性。但Tanner图在实际当中是采用随机图构造的，其中不可避免的存在小环路现象，这些小的环路会造成译码信息的重复传递，使译码过程中的消息不满足独立性假设，影响了迭代译码算法的收敛性。

**1.1 LDPC编码算法的发展**

1993年，Turbo码的成功提出引发了众多通信学者对LDPC码的研究兴趣，Mackay、Spielman等独立重新“发明"了LDPC码，发现采用和积译码算法的规则LDPC码具有和Turbo码相似的译码性能，在长码上译码性能甚至超过了Turbo码，使人们重新认识到Gallager早期工作的内在潜力。Wiberg的基于图模型的码的研究为LDPC码的兴起奠定了坚实的基础。在对扩展码的研究中，他们证明了一个随机构造的Tanner图有很大的概率为好的扩展图，而由好的扩展图构造的线性纠错码是渐进好码，从而证明了采用随机Tanner图构造的LDPC码以很大概率是渐进好码。Luby等人将采用非规则Tanner图构造的扩展码用于删除信道，称之为Tornado码。由于采用了非规则的Tanner图，Tornado码具有更大的扩展性以及更好的收敛性，纠错能力更强。此后，采用优化度序列设计的非规则Tanner图被用于构造LDPC码，称为非规则LDPC码，与规则LDPC码相比，非规则LDPC码的性能得到显著的提高。

近年来，Richardson等人通过优化非规则图的次数结构来寻找逼近香农限的非规则LDPC码，并且利用密度进化理论来测度LDPC码的性能。Richardson等人在对LDPC码的研究中发现，译码信息的迭代传递过程中存在着译码阀值现象，即当信噪比大于译码阀值时，迭代译码可使误码率趋于零，反之无论采用多长的LDPC码，经过多少次迭代译码，总存在一定的错误概率。应用中心极限定理，Richardson等人证明了有限随机有环图的译码阀值可以逼近无环图的译码阀值。通过建立在无环图上的密度进化理论，可以精确地计算无环图上LDPC码的译码阀值，分析其译码收敛条件，从而近似估算有环Tanner图上LDPC码的性能。研究表明，译码阀值的大小与LDPC码的构造参数密切相关，采用优化度序列设计的非规则LDPC码可以有效地改善阀值，因此可以利用密度进化理论来指导LDPC码的度序列的优化设计。

为了降低复杂度，Chung等人提出了应用高斯逼近原理来简化译码阀值计算和收敛性的分析，从而使测度LDPC码性能的模型由多参数动态系统的密度进化理论模型简化为单一参数动态系统的高斯逼近模型。因此，实现了在较低的精度损失下迭代译码器的性能分析和非规则码度序列的优化设计。

自从2001年以来，LDPC码和通信系统中的其它物理层技术的结合正在成为一个热点，Ben Lu等人提出的基于LDPC码的STC(Space-Time Coded)OFDM系统，结合了空间分集，选择性衰落分集(Selective-Fading Diversity)等技术，以较低的计算复杂度达到了较好的系统性能。

**1.1 LDPC码译码算法的发展**

Gallager曾给出了两种LDPC码译码算法：硬判决算法和软判决算法。译码算法应用了迭代思想，Gallager是最早提出迭代译码思想的。在许多理论研究中已经证明迭代信息传递算法对于高性能但是低复杂度的编码方案是有效的。硬判决算法简单易行，但是性能较差；软判决算法性能较好，但实现复杂度太高。于是作为二者的折中，文献中提出了消息传递算法(MPA，Message Passing Algorithm)。Kschischang F R等对消息传递算法作了推广，提出了一种更加通用的和积算法(SPA，Sum-Product Algorithm)，并指出和积算法实际上包含了大量的实用译码算法(如前向／后向算法、置信传播算法BP(Belief Propagation)算法、Viterbi算法等)。Fossorior M P C研究了降低复杂度的LDPC码的迭代译码算法u 7’，提出了APP-Based和BP-Based算法。在此基础上Jinghu Chen和Fossorior M P C提出了两种改进的BP-Based算法的密度演进算法及其离散形式。

在仿真过程中，迭代译码算法以其优异的性能著称，但在理论上却很难进行准确的性能分析。自BP算法提出以来，以BP算法为基础的多种改进的迭代译相继被提出，并且性能非常接近BP算法。其中Fossorior M P C提出了基于可靠性译码与置信传播译码相结合的LDPC译码算法，获得了译码性能和译码复杂度的折中。此外，许多学者还提出了很多复杂度低但性能优异的改进译码算法，如通过降低可靠值来改善外信息精度的Offset BP based算法。

LDPC码译码可以用软判决译码也可以采用硬判决译码或二者兼有。BF(Bit Filling)算法是一种硬判决译码算法，其特点就是复杂度低，实现简单，但是性能要比软判决的BP算法差些。而WBF(Weighted Bit Filling)在纠错性能和译码复杂度之间提供了很好的均衡。它具有BF算法的实现简单的优势，同时由于在信息中包含一些可靠度信息(软信息)而得到较好的译码性能。

总而言之，LDPC码所采用的是具有迭代译码思想的译码算法。这种算法的优点有：算法可以并行实现，因此译码速度极高；译码算法的复杂度较低，其运算量不会因为码长增加而急剧增加，这是卷积码及其它分组码所不能比拟的。在复杂度和性能上可以得到很好的折中，既可以选择实现简单、性能稍差的BF算法，也可以选择实现复杂、性能优越的BP算法，也可选择趋于中间的WBF。

1. LDPC码的基本原理

LDPC码是一种可以用非常稀疏矩阵定义的线性分组码。它利用校验矩阵的稀疏性来解决长码的译码问题，可以在线性时间内译码，同时又近似于香农提出的随机编码，获得了优异的译码性能。Gallager提出的LDPC具有规则的双向图结构，其双向图中的每个变量节点都有相同的次数，每个校验节点也都有相同的次数，现在通常称为规则码。经过近几年的研究，人们在规则码的基础上做了推广，提出了非规则码及多元域上的LDPC码。对于LDPC码来说，在不考虑码长和度数分布的情况下，校验矩阵的结构是影响其性能的重要因素，反映在双向图上环的长度分布，环的大小对译码性能有重要的影响。我们需要采用一定的方法对校验矩阵进行构造，获得不存在小环的编码矩阵。LDPC具有优良的性能：其码字的典型最小距离随码长的增加线性增加，并且BSC信道下译码错误的典型概率随码长指数减少。本章首先给出了差错控制编码的一些基本概念。然后详细介绍了LDPC码的定义以及Tanner图结构，然后介绍了非规则LDPC码以及LDPC码校验矩阵的构造方法和LDPC的编码方式。

**2.1 差错控制编码**

**2.1.1 差错控制编码的思想**

差错控制编码的基本思想就是：使数字序列M经过信道编码器以后输出具有一定规律(认为的加入一定的冗余)的数字序列C，当C经过调制解调器和信道传输后，得到可能有差错的数字序列C’，而信道译码器能发现或者纠正在序列C’中出现的错误，使得根据C’得到的M’，尽可能与M相等。为了保证通信系统的传输可靠性，使得信道译码器能发现或者纠正错误，就必须在M中增加一些必要的码元，形成的数字序列C的内部将具有相关性，从而，根据这种相关性来发现和纠正传输中出现差错的数字序列C’。编码有效性和可靠性是一对矛盾。一般地，编码效率越高，则纠错码的纠错能力越弱，从而使误码率增大，因此，在有效性和可靠性之间要有一个折衷，使得在满足误码率要求的前提下，尽量提高有效性。差错控制编码定理指出，在有扰信道中，只要信息传输速率小于信道容量，就有可能实现任意可靠的信息传输。这个存在性定理告诉我们可以以接近信道容量的数据传输速率进行通信。

**2.1.2 差错控制编码的基本概念**

1. 编码码率(Code Rate)

纠错编码的最基本特性是它的编码码率。一个(n, k)编码器接收k比特输入数据，对其进行纠错编码，产生n比特输出，则编码码率为k/n。信道纠错编码的目的是添加足够的冗余信息，以便校正传输误码，因此编码码率通常小于1。编码码率一般为整数比，例如1/4、1/2、2/3、3/4和7/8等。LDPC码的编码码率也是如此。

1. 线性分组码(Linear Block Code)

许多纠错编码方案把输入数据分成组(通常称为数据帧)，每个分组独立编码，相互之间没有关联。简单的二进制矩阵运算y=xG表示线性分组码操作(x为二进制输入的信息比特矢量，G为二进制生成矩阵，y为二进制输出矢量)。矩阵运算采用模2算术x、G、y的维数分别是1k、kn、1n。输入比特k和分组长度n的典型值是8-256。编码通过线性运算牌阵乘法)把输入的k比数据块变换为输出的n比特数据块，因而称之为线性分组码。分组码有许多种其中最著名的分组码有Hamming、Golay、BCH和RS码。LDPC码是一种新的线性分组码，但它的监督矩阵H中“1”的个数比较稀少。

1. 系统码(systematic Code)

系统码是输入矢量x无变化地直接输出到输出端，而校验比特附加在输入信息比特之后。对于系统分组码，输出矢量y首先是来自输入x的k个比特，随后是(n-k)个校验比特，因此y={x c}，其中c是校验比特行矢量I(n-k)。对于非系统码(Non-Systematic Code)，y的所有输出比特是比输入比特更复杂的函数系统码是指信息m包含在码字x中，其生成矩阵是:



其中是kk的单位矩阵，P是k(n-k)的矩阵。系统码的一致校验矩阵是:



是P的转置矩阵。由一致校验矩阵很容易得到系统码的最小汉明距离，它等于Hsys中列向量的和为0的最少个数。

构造循环码的系统码步骤如下:

(1) 信息多项式m(D)

(2) 计算m(D)/g(D)的余式r(D);

(3) X(D)=m(D)+r(D)

由于多项式的除法可以用带反馈的移位寄存器来实现，因此可以用带反馈的移位寄存器来实现系统循环码。

1. 增信删余码(Puncturing)

在一些情况下，需要提高编码码率，但又不至于使解码器太复杂，这是一个增信删余的过程，称之为增信删余码。增信删余码的基本原理与分组码大致相同通过简单地删除某些特定位置的输出值而达到增信删余的目的;在接收端，再用特定的码元在这些位置上填充，然后输入解码器。

1. 汉明距离(Hamming Distance)

任何两个m比特序列之间都有汉明距离，等于不同比特(或符号)数的总和。例如，序列0110100和0101010之间的汉明距离为4，实际上等于两个序列异或(0011110)后1的个数。纠错编码技术研究的主要内容就是寻找具有大的最小汉明距离的编码，以便没有两个输出码字之间的汉明距离比那个值更靠近。最小距离越大，越容易区分两个码字，也就最有希望得到更好的编码。众所周知，只有在大的SNR下，编码的最小距离特性才至关重要。LDPC把注意力重新集中在低SNR时的性能上，更多地依赖于校验矩阵中“1’’编码的分布，而非其本身的最小自由距离。

1. 软输入/软输出译码(Soft-input/Soft-output Decoder)

假如信道解码器的输入是解调器产生的二元矢量，对于二元调制，例如BPSK，解调器判断信号相位属于+1(比特值1)或者-1(比特值0)。如果解调器得到如此明确的0或1的二元判决，称之为硬判决解调，它不能为解码器提供额外的信息。软判决解调则是把解调器的输出量化为2m个电平，m一般是3或4。对于m比特量化，一个比特用于判决符号，m-1个比特用于信号幅度。在符号比特正确时，幅度越大，可信度越高。利用软判决解码对SNR的需求比单独硬判决大约减少2dB。大于3比特的量化，获得的额外好处将越来越少。LDPC使用的置信传播(BP)译码迭代算法就是软输入/软输出，原来的硬判决输出变为软判决输出。其关键用途是把校验节点的软输出送给与其关联的变量节点，作为它的软输入，这样进行多次迭代。这使LDPC可获得更多的编码增益。采用迭代译码，系统不需要复杂的支路计算，就可逼近香农极限性能。

**2.2 LDPC码的基本定义**

LDPC码是一种线性分组码，因此具有线性分组码的所有特性。分组码是信息序列以k个码元分组，通过编码器将每组的k个信息码元按一定的规律产生r个冗余码元(称为校验元)，输出码字长为n=k+r。任何一个(n, k)分组码，如果其信息元与校验元之间的关系是线性的，即能用一个方程组来描述的，则称为线性分组码。(n, k)线性分组码的每个码字有n-k个校验元，要从信息元中求出n-k个校验元，必须有n-k个独立的线性方程，根据求校验元的不同线性方程，就得到不同的(n, k)线性分组码。

(n, k)线性分组码的编码问题是如何根据己知的k个信息元求得n-k个校验元。由于是线性码，它们是由n-k个线性方程构成的方程组。(n, k)线性分组码的2k个码字组成n维向量空间的一个k维子空间，而线性空间可由其基底张成，因此(n, k)线性分组码的2k个码字完全可由k个独立的向量所组成的基底张成。设k个向量为：







写成矩阵形式即为：



(n, k)中的任何码字，均可由这组基底的线性组合生成。即



一般而言，(n, k)线性码有r=n-k个校验元，故必须有r个独立的线性方程，所以(n, k)线性码的校验矩阵由r行和n列组成，每一行代表一个线性方程的系数，可表示为：



由H矩阵可以建立码的r个线性方程：



简写为:

由于G中的每一行均为线性分组码的一个码字，所以可知生成矩阵和校验矩阵满足，说明由G与日的行生成的空间互为零空间。

LDPC码是一种线性分组码，它的名字来源于其校验矩阵的稀疏性，即校验矩阵中只有数最很少的元素为“1”，大部分都是“0”，Gallager最早给出了规则LDPC码的定义，采用三个参数n，p，q来定义规则LDPC码(n，p，q)，其中P是校验矩阵H中每列所包含的“1”的个数，q是H中每行所包含的“1”的个数，之所以叫规则码，就是因为H中每行所包含的“1”的个数以及每列所包含的“1”的个数分别相同，这里的q，p也称为矩阵H的行重和列重。由于p和q都很小，校验矩阵H具有很低的“密度”，因此由校验矩阵日所确定的码称为低密码校验码(Low-density Parity-Check Codes)。下图给出了一个由Gallager(12，3，4)规则LDPC码的校验矩阵



当校验矩阵H各行或者各列中的“1”的个数不相同时，就得到了非规则的LDPC码。

**2.3 LDPC码校验矩阵的构造方法**

LDPC码之所以吸引大家关注，就是它构造简单。构造LDPC码，其实就是构造它的稀疏校验矩阵。使用随机方法构造的稀疏矩阵，可以构造出任意码速率的LDPC码。只要固定各行各列的重量，让各列之间的排列随机化，就可以构造出性能不错的“好码”。性能更好的LDPC则需要进一步的研究。首先来看看最基本的几类校验矩阵的构造方法。

**2.3.1 随机构造方法**

随机构造方法主要包括以下四种：Gallager的随机构造方法，Maykay的结构LDPC码，PEG算法，Bit-filling和Extended Bit-filling算法。前两种方法，都是根据行和列的列重，随机产生日矩阵，产生的主要是规则LDPC码。

PEG算法(progressive edge-growth)是一种简单有效的随机构造Tanner图方法，其目的是为了增加Tanner图中的环数，其方式是在某准则条件下通过加边的方式随机构造LDPC码。PEG算法的具体操作过程是在给定变量节点数目、校验节点数目和变量节点分布的条件下，逐步地增加变量节点和校验节点的边，选择加边时，尽可能保持大的环，然后继续搜索下一个边，直至结束。

Bit-filling算法和Extend Bit-filling算法，是直接构造H矩阵的方法，主要是在某准则条件下把“1”一个一个放到校验矩阵中。具体操作是给定变量节点和校验节点的度数，在构造过程中达到使校验矩阵中环最小化的目标。初始日矩阵为空，每次随机生成列，若满足前提条件，则加入到矩阵日中去，然后接着加列，直至矩阵日生成。Extend Bit-filling算法是对Bit-filling算法的一个补充，当在操作过程中，不存在满足条件的列时，可以减少girth，从而使得操作能够继续。

在上述算法中，设计LDPC码前，需要知道变量节点和校验节点的度分布。度分布一般是通过密度演化算法或者EXIT图、高斯近似等方法得到的。一般来说随机构造的LDPC码，编码一般来说较复杂，而且不利于硬件实现。

**2.3.2 代数构造方法**

目前，对于规则LDPC码的代数构造算法已有多种研究方案，其中具有理论研究价值的有代表性的研究成果有如下几个：

(1) 基于有限几何学的LDPC码结构，这类码的特点是高码率、长分组时性能很好：而低码率、短分组长度时性能恶化。另外码率和码长的设计不够灵活，不具备与现有标准的兼容性；

(2) 均衡不完全分组设计(BIBD)来构造LDPC码，他们设计的相同之处是日矩阵采用分块矩阵法，而分块矩阵由BIBD方法构成。不同之处有两点：一是对BIBD的五个参数(b, v, k, r,)进行不同的设计，得到不同的关联矩阵族；二是由这些关联矩阵族构成H矩阵的排列和组合方式不同。这类码的特点是适合于高码率，中等长度码，码率的取值范围在0.75到0.96之间，码长在1000到8000之间取值，最好性能距离香农限0.95dB．由于5个参数都要取整数并且它们之间有配合关系，使这类码的码长和码率的设计灵性受到限制；Gallager在其博士论文中提出了一种准循环的代数结构，后来又被Tanner和Fossoner等进行了深入研究，目前这类码称之为准循环QC-LDPC码。其基本思想是：H矩阵由一组分块矩阵按一定的规则排列，这组分块矩阵由单位矩阵及其单位矩阵的一组循环移位矩阵组成。在Tanner的设计中，要求分块矩阵的维数刀是素数或素数的偶数倍，这种限制导致码长和码率的取值不灵活，码集合中码的数量较少。在Fossoner的设计中，刀的限制条件较宽，可以取素数和其它整数，但不能取2的幂这一类整数。对以取值的限制致使这两类QC-LDPC码参数的选择不灵活，如不能设计码率为0.5的码。QC-LDPC码在中、短分组长度和中、低码率时有较好的性能。

上述代数结构规则LDPC码类的共同缺陷是码率和码长的参数选择不够灵活，它们只能根据自身的设计规则首先构造日矩阵，然后由日矩阵求出码长和码率，而不能首先给定码率和码长的参数，然后根据这些参数设计H矩阵，这导致上述构造算法所确定的LDPC码类不能与现有标准兼容，实用性较差。

**2.4 LDPC码的编码方法**

**线性编码**

LDPC码的线性编码方法就是高斯消去法，产生一个下三角矩阵，然后经过初等变换得到单位矩阵形式的检验矩阵H=[P/I],进一步就可得到典型生成矩阵G=[I/] =1，从而由c=m·G得到编码码字c(其中m是待编码信息)。由于高斯消去法破坏了原有奇偶校验矩阵的稀疏性，使得编码具有较高的编码复杂度和编码时延，此时，LDPC码具有二次方的编码复杂度O()，在码长较长时复杂度更大。后来，Richardson等提出的利用准下三角校验矩阵保持各矩阵的稀疏性，并使LDPC编码仅有线性复杂度，具有较高的实用价值。

**近似下三角矩阵的编码**

为了保持矩阵的稀疏性，可以对矩阵的列作重排，这样虽然不能得到一个完全的下三角形式的矩阵，但可以获得一个近似的下三角矩阵。如下图所示，分成六个分块的稀疏矩阵。对于要发送的信息序列，依然直接作为LDPC码字的前N-M个信息位比特输出。





将校验比特分成两块，令编码码字为x=()，这里，s为编码的原始信息比特部分，的长度为g，的长度为M-g，利用上图的矩阵，然后根据定义编码的方程H=0，可以得出下式：



定义，如果矩阵非奇异，则可得

进而得到：

因为这六个分块矩阵是通过对原有稀疏矩阵的列作重排获得的，所以这些分块阵仍然满足稀疏性，可以进一步分析出求解的运算量分别为o(n+)和o(n)。由此可以看出，要进一步简化LDPC码的编码运算量，我们需要在重排的校验矩阵的时候时使得g尽量的小，运算量就可以控制在线性复杂度附近。

**2.5 本章总结**

本章主要是介绍了LDPC的定义，校验矩阵的构造方法以及LDPC编码方式等。这而所介绍的都是典型的校验矩阵的构造方法和通用的编码方式，还有其他的一些构造方法和编码方式。

1. LDPC码译码原理

LDPC码的译码方法有很多种，根据对接收信号处理方式的不同，主要分为两大类，一是硬判决译码算法，二是软判决译码算法。如果在译码过程中传送的消息是比特值，称之为硬判决译码：如果在译码过程中传送的消息是与后验概率相关，称之为软判决译码。好的译码算法能最大限度地发挥码字的纠错能力。在码长较长的情况下，译码算法的复杂度决定了该码字的可实现性。LDPC码之所以得到广泛关注不仅仅在于其优异的纠错性能，还在于其较低的译码复杂度，高速并行可译码性以及硬件可实现性。在码长较长时，相距很远的信息比特参与同一校验方程中，使得连续突发性的错误对译码的影响不大，因此码本身就具有抗突发错误的特性，从而无需在编码器中引入交织器，而且不会产生编码时延。

LDPC码常用的一类译码算法，主要是基于Tanner图结构的消息传递算法(Message Passing Algorithms)。消息传递算法是一种迭代译码算法(Iterative Decoding Algorithms)，在此算法的迭代过程中，各个节点的置信消息需要在变量节点和校验节点之问互相传递。算法的性能随着量化阶数的增加而提高，同时复杂度也随之增加。当在译码中采用两阶量化时，这种算法就是Gallager提出的硬判决译码算法，该算法具有最低的译码复杂度，但是其性能也是最差的。如果在译码中采用无穷阶量化，即连续性的算法时，算法成为BP(Belief Propagation)算法，译码复杂度相对较高，但是性能也是最好的。

**3.1 硬判决译码算法**

**比特翻转算法**

Gallager在他的博士论文中提出了两种译码算法：硬判决译码算法和概率译码算法。硬判决算法仅适合于BSC信道，也称之为比特翻转译码算法(Bit Flipping Algorithms)。在硬判决译码中，译码器首先计算所有比特不满足校验方程的个数，对不满足校验方程数最大的任意一位进行翻转或者并行反转校验方程不满足数最大的所有位，即原来的0变为1或原来的1变为0。对得到一个新的码字重新对其计算校验奉承，这～过程一直持续到校验方程全部满足为止。设码字向量x经过BSC信道接收的硬判决值为z，s为伴随式向量，比特反转译码算法可简单描述为：

1. 首先计算方程：s=z，统计码字中每位比特互不满足校验方程的个

数。

1. 找出不满足校验方程数最多的比特，如不满足的个数大于某设定值，

将其翻转，得到新的向量z’

1. 判断条件：由向量z’代替：，重新计算方程s=z，如果s=0则正确

译码输出。否则，重复1-3步，反复迭代，直到迭代至最大迭代次数。

**3.2 置信传播算法**

**概率BP算法**

首先，图3-1为某一比特位d的校验集合的树形结构图。最底层的根节点表示比特d，从d出发的每一条边表示包含d的一个校验方程，而第一层中的某一条线上的节点表示这一校验方程中除d以外的其他比特，依此类推形成第二层第三层。假设d和e节点发生错误，那么在第一次译码中，第二层中的正确节点会纠正e的错误，进而在下一次译码中d也会被纠正。从而可以看出：由于这个树形的结构，不与d直接联系的比较也可以帮助纠正d的错误，在下面将要介绍的概率迭代译码方法中，这种外信息会被更系统地用来进行译码。



图 3-1

以下将要详细给出Gallager的概率译码方法。将节点d和上图中第一层的节点看作一个集合。这个集合有很多种组合，每种组合都应该满足所有的校验方程，假设发送端发送每种组合的概率都是一样的，接收端收到的字符与信道有关。我们把收到的符号集记作{y}，传送的比特满足包含d的所有校验方程这一事件记作S，比特d=1关于{y}和s的条件概率为。 然后有下面的定理：

定理1: 只表示比特d=1关于位置d上接受符号的条件概率，己表示包含d的第f个校验方程中第，位的条件概率，每个比特间是统计独立的，就有



公式 3-1

要证明这个定理，首先来看一个引理。

引理1：一个m长的二进制序列，其中第l位是l的概率用表示，那么整个序列中包含偶数个1个概率为：



公式 3-2

那么整个序列中奇数个1的概率为：



公式 3-3

由条件概率的定义可知



公式 3-4

当时，包含d的一个方程中其他比特有偶数个1，则整个校验方程模2和为零，也就是说此序列满足这个校验方程。由于各个比特间是统计独立的，所以包含d的所有校验方程都满足的概率是每个校验方程满足概率的乘积，表示为：



公式 3-5

同理，时，有



公式 3-6

将式(3-5)和式(3-6)代入式(3-4)中，就可以得到定理1。显然通过这个定理计算某一比特d关于两层或更多层的条件概率是很困难的，但我们可以通过迭代的方式利用第一层的结果来结算多层的节点概率。首先我们利用式(3-3)计算图(3-1)中第一层节点关于第二层节点的概率，计算中每个节点只考虑，-1个与之相关的校验方程，不包括这些节点与d组成的校验方程，得到的概率就可以继续被式(3-3)1来利用计算d节点的条件概率了。如果图3-1中的每层节点都满足统计独立的译码过程，码字中的每一位通过式(3-3)计算j个条件概率，每一次计算忽略一个校验方程而使用其他j-1个校验方程。然后通过式(3-3)进行第二次的概率计算，比如说计算d的概率，这时用到其他位的概率是第一次计算得到的j个概率中忽略了包含d的校验方程的那一个概率，这个过程可以继续进行下去。经过多次迭代，如果译码成功，码字中每一位是1的概率应该趋于0或1。此即为概率BP算法的LDPC码的译码原理。

**3.3 本章总结**

本章主要介绍了两种LDPC码的译码原理，当然还有很多其他的方法，不过大多数都是基于BP算法的改进。

1. LDPC码在衰落信道下的性能分析

**4.1多径衰落信道概述**

在无线通信中，由于电波的反射、散射和绕射等，使得发射机和接收机之间存在多条传播路径，并且每条路径的传播时延和衰耗因子都是时变的，这样就造成了接收信号的衰落。多径衰落是移动通信信道的主要特点。一般地，人们根据发送信号的周期、信号带宽,与多径时延扩展L和多普勒扩展(Doppler spread)的相互关系，将多径衰落分为如下四类：(信道相干时间，相干带宽

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  | 平慢衰落 | 平快衰落 |
|  | 频率选择性慢衰落 | 频率选择性快衰落 |

表 4-1 移动多径衰落的类型

多普勒扩展(即信道相干时间)反映了信道冲激响应在时域上的相关性，它控制着信道的衰落速率。对于慢衰落信道，通常认为信道增益在整个发送符号周期内是恒定的。多径时延扩展(即相干带宽)描述了信道冲激响应在频域上的相关性，对于平衰落(flat fading)信道，发送信号的各频率分量具有相同的增益，信号波形不失真，无码间串扰。

对于频率选择性衰落信道，因为接收信号具有码间串扰，所以送入信道译码

器之前需要经过信道均衡处理，消除码间串扰。这样，经过信道均衡，我们认为

译码器的输入信号特性类似于平衰落信道的信号，可以采用与平衰落信道同样的仿真模型与方法。在本章的叙述中，我们只讨论平衰落信道。

**4.2 平衰落信道模型**

对于多径信道，发射信号要经过多条不同的路径才能到达接收端。我们假设

发送信号为单一频率的正弦波，即

(式 4-1)

多径信道一共有n条路径，各条路径具有时变衰耗和时变传输时延且各条路径到达接收端的信号相互独立，则接收端接收到的合成波为

=

(式 4-2)

式中，为从第f条路径到达接收端的信号幅度，为第i条路径的传输时延。

传输时延可以转换为相位的形式，即

(式 4-3)

则可变换为

=

(式 4-4)

其中，

(式 4-5)

(式 4-6)

下面给出平衰落信道的常用模型：一种是充分交织(fully interleaved)的平慢衰

落信道模型，也称为独立衰落信道模型；另一种是相关衰落信道模型。

1. 独立衰落信道模型

对于充分交织(fully interleaved)的平慢衰落信道，衰落幅度之间相互独立，所以式(4-5)的和式(4-6)式的都是相互独立的随机变量之和，根据概率论中心极限定理，大量独立随机变量之和的分布趋于正态分布。因此，当n足够大时，和都趋于正态分布。通常情况下和的均值为零，方差相等。式(4-4)可以表示为包络和相位的形式，即

(式 4-7)

(式 4-8)

(式 4-9)

由随机过程的理论可知，衰落信号是一个窄带随机过程，它的包络的一维分布服从瑞利分布，相位的一维分布服从均匀分布。

1. 相关衰落信道模型

当最大多普勒频移不是远小于信号带宽时，衰落幅度V是最大多普勒频

移和发送信号持续时间的乘积的函数。(5-5)式和(5-6)式变为

(式 4-10)

(式 4-11)

其中，

(式 4-12)

是最大多普勒角频率，，，独立同分布，且在1,2,…,M上都服从上的均匀分布。

**4.3 LDPC码在平衰落信道下的性能**

在AWGN信道下，对于STIMI(9216,4608)，选择的Normalized MSA或选择的Normalized MSA时，译码性能最接近精确的SPA的译码性能；同样对于LDPC码(9216,6912)，选择的Normalized MSA或选择的Normalized MSA时，也能使译码性能最接近精确的SPA的译码性能。

下面，我们采用计算机仿真的方法来研究STIMI标准中LDPC的抗衰落性能，仿真所采用的信道模型是独立衰落和相关衰落信道，采用BPSK调制方式，最大迭代次数为50次。LDPC码(9216,4608)采用的Normalized MSA和的Normalized MSA；LDPC码(9216，6912)采用的Normalized MSA和的Normalized MSA。并与AWGN信道的精确的SPA的性能进行了比较。



图 4-1 STIMI(9216,4608)在独立衰落和相关信道下的性能



图 4-2 STIMI(9216,6912)在独立衰落和相关衰落信道下的性能

首先考虑LDPC码在衰落信道上的性能。图4-1中的(9216,4608)规则码，对

于误比特率，衰落信道中比AWGN信道情况信噪比损失了大约为2.2dB；而

图4-22中(9216,6912)规则码，对于误比特率，瑞利衰落信道中比AWGN信道情况信噪比损失了大约为4dB。可以看到，随着码率的增大，瑞利衰落信道的性能

损失越大。

再考虑LDPC码在独立衰落信道和相关衰落信道上的性能的对比。仿真中未加信道交织器。可以看到，LDPC码在相关衰落信道中也有很好的性能，与独立信道中的性能相比，对于误比特率，当时，信噪比损失大约只有0.2 dB；当时，信噪比损失也大约为0.2dB。这说明，LDPC码对相关衰落信道的衰落速度不是很敏感，即随着的减小，LDPC码性能损失并非很快。这主要是由于LDPC稀疏结构的校验矩阵具备内在的交织效应的特性决定的。

**4.4 本章总结**

本章首先对多径衰落信道进行了简要的概括，接着详细介绍了两种常用的平衰落信道模型-独立衰落信道模型和相关衰落信道模型，最后对LDPC码在独立和相关衰落信道下进行了性能仿真，并得出了两个结论：

1. STIMI标准下的低码率LDPC码比高码率LDPC码具有更强的抗多径衰落能力；
2. LDPC码对相关衰落信道的衰落速度不是很敏感。LDPC码稀疏结构的校验矩阵使其具备了内在的交织特性，可以在一定程度上很好地抵抗衰落。
3. 总结

经过本学期信息论与编码课程的学习，了解和掌握了许多关于信息与编码的基础知识，这里要感谢雷菁老师和林嘉宇老师的悉心指导，让我学到了许多新的知识和方法。

在掌握了线性分组码的基础知识后，对LDPC码这种线性分组码进行了初步的学习和研究，首先了解了LDPC码的产生发展和基本定义，随后学习了LDPC码校验矩阵的生成方法和LDPC码近似下三角的编码原理和方法以及两种译码方法，最后分析了在多径衰落情况下的LDPC码的性能。

在阅读文献和资料后，掌握了许多了和LDPC码相关的知识，但是仍然存在着大量的疑问，这还需要以后不断深入的学习相关方面的内容，以求不断提高。

1. 参考文献

[1] 樊昌信，詹道庸，徐炳祥等. 通信原理(第四版). 国防工业出版社.1995

[2] 王新梅，肖国镇. 纠错码-原理与方法(修订版). 西安电子科技大学出版社. 2001

[3] 王育民，梁传甲.信息与编码理论.西北电讯工程学院.1986

[4] R.G.Gallager Information Theory and Reliable communication. New York Wiley,1968

[5] 怀钰 LDPC码编译码算法的研究 中国科学技术大学硕士论文 2004

[6] 刘文明 LDPC码编译码研究与应用 华中科技大学博士论文 2006

[7] Tang Lei, Yang Fengfan Performance of simple-encoding irregular LDPC code based on sparse generator matrix College of Information Science and Technology 2006

[8] 张丽丽 LDPC码构造及其应用研究 杭州电子科技大学硕士论文 2011