第一章 命题逻辑 （二）

计算机科学与技术系 洪源

等值式

- 等值
  - 哑元
    - 概念
    - 示例
  - 逻辑等价 / 逻辑等值

    定义：设 A 和 B 是由相同的命题变元 $p_1,p_2, \ldots, p_n$ 生成的命题公式，若对于任意一个赋值（ $p'_1,p'_2, \ldots, p'_n$ ），A 和 B 的真值均相同，则称 A 和 B 是逻辑等价 / 逻辑等值的，记为 $A \Leftrightarrow B$。
    - 参见：第 22 页定义 1.12
  - 课堂练习：用真值表法判断 $\neg(p \vee q)$ 与 $\neg p \wedge \neg q$ 是否等值。

等值式

- 应用——等值式模式（命题定律）
  - 等值式模式：常用的重要等值式。
  - 共 16 组，见教材第 23-24 页。
  - 利用真值表法均可证为真。

补充 1

$$
\begin{aligned}
& p \leftrightarrow q \\
\Leftrightarrow\ & \neg(p \bar{\vee} q) \\
\Leftrightarrow\ & \neg p \bar{\vee} q \\
\Leftrightarrow\ & p \bar{\vee} \neg q \\
\Leftrightarrow\ & (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\
\Leftrightarrow\ & (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)
\end{aligned}
$$

补充 2

$$
\begin{aligned}
& p \bar{\vee} q \\
\Leftrightarrow\ & \neg(p \leftrightarrow q) \\
\Leftrightarrow\ & \neg p \leftrightarrow q \\
\Leftrightarrow\ & p \leftrightarrow \neg q \\
\Leftrightarrow\ & (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \\
\Leftrightarrow\ & (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)
\end{aligned}
$$

等值式

- **等值演算**
  - 等值置换规则
    - 内容：第 25 页定理 1.1
  - 等值演算
    - 由给定的公式 A ，
    - 运用等值置换规则，
    - 在命题定律（等值式模式）的支持下，
    - 在等值关系的传递性的保证下，
    - 对 A 进行一系列的等值变形
    - 得到公式 B 的过程

    - ***此时 $A \Leftrightarrow B$***

等值式

- 等值演算
  - 课堂练习：求证 $(p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r)\Leftrightarrow p\rightarrow(q\wedge r)$
  - 要求——

非常熟练地运用命题定律

析取范式与合取范式

- 对偶定理
  - 对偶式
    - 设 A 是仅用¬ ，∧， ∨联结的命题公式，
    - 若将 A 中
      - 所有∨换成∧ ，
      - 所有∧换成∨ ，
      - 所有 0 换成 1 ，
      - 所有 1 换成 0 ，
    - 则得到 A* 。
    - 此时称 A 与 A* 互为对偶式。

析取范式与合取范式

- 对偶定理
  - 引理
    - $\neg A(p_1, p_2, \ldots, p_n) \Leftrightarrow A^*(\neg p_1, \neg p_2, \ldots, \neg p_n)$
  - 对偶定理
    - $A(p_1,p_2, \ldots ,p_n) \Leftrightarrow B(p_1,p_2, \ldots ,p_n)$ 当且仅当 $A^*(p_1,p_2, \ldots ,p_n) \Leftrightarrow B^*(p_1,p_2, \ldots ,p_n)$

析取范式与合取范式

- **范式**
  - 文字、简单析取式、简单合取式（第 33 页定义 1.16 、1.17 ）
  - 析取范式、合取范式、范式（第 33 页定义 1.18 ）
  - 范式存在定理 / 范式的求取（第 34 页定理 1.7 ）
    - 消去$\bar{\vee}$、↔、→
    - 用双重否定律消去¬¬，用 De Morgan 律内移¬
    - 用分配律变换公式，得到所需范式形式
  - 课堂练习：求下列公式的析取范式和合取范式
    - $(p\rightarrow q)\ \bar{\vee}\ \neg r$
    - 注意：一个命题公式的析取 / 合取范式**不唯一**

析取范式与合取范式

- **范式**
  - 极小项 / 极大项 (第 35 页定义 1.19)
    - 课堂练习：判断下列由 p ， q ， r 生成的公式是否极小项 。
      - p
      - $p \wedge \neg q$
      - $p \wedge \neg q \wedge r$
      - $p \wedge \neg p \wedge q \wedge r$
      - $p \wedge p \wedge \neg q \wedge r$
      - $p \wedge r \wedge \neg q$
      - $\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$
    - 极小项 / 极大项的记法 (m_i / M_i)
    - 教材第 36 页定理 1.8

析取范式与合取范式

- **范式**
  - 主析取范式/主合取范式（第 36 页定义 1.20 ）
    - 主析取范式/主合取范式唯一存在定理（第 37 页定理 1.9 ）
      - 存在性（构造法）
      - 唯一性（反证法）
    - 主析取范式/主合取范式的求取方法
      - 等值演算法（定理 1.9 存在性证明）
      - 真值表法（极小项/极大项的记法原理）
    - 课堂练习：分别用等值演算法和真值表法求与 $(p\rightarrow q) \vee \neg r$ 等值的主析取范式，并用极小项记法表示。
    - 课后练习：求上式的主合取范式，并用极大项记法表示。

联结词的完备集

- 联结词完备集
  - 定义：设 S 是一个联结词集合，若任何 n（ n≥1 ）元真值函数都可以由仅含 S 中的联结词的合式公式表示，则称 S 是一个联结词完备集。
    - { ¬ ，∧， ∨， ⊽ ，→， ↔ } 是联结词完备集
  - 冗余联结词
    - 设 s 是联结词完备集，＊是 S 中的联结词。若 S-{*} 仍是联结词完备集，则称＊是 S 中的一个冗余联结词。
    - 例： S={¬ ， ∧ ， ∨ ， □ ， → ， ↔ } ，是联结词完备集。
      - □ 是 S 中的一个冗余联结词； S1=S-{⊽} 仍是联结词完备集。
      - ↔ 是 S1 中的一个冗余联结词； S2=S1-{↔} 仍是联结词完备集。
      - → 是 S2 中的一个冗余联结词； S3=S2-{→} 仍是联结词完备集。
      - ……

联结词的完备集

- **联结词完备集**
  - **极小联结词完备集**
    - 设 S 是联结词完备集，若 S 中不存在冗余联结词，则称 S 是一个极小联结词完备集。
    - 例
      - S3={¬ ，∧ ，∨} ，是联结词完备集，但不是极小联结词完备集。
      - S4={¬ ，∧} ，是极小联结词完备集。
      - S5={¬ ，∨} ，是极小联结词完备集。
      - {↑} 和 {↓} 都是联结词完备集，同时也是极小联结词完备集。