第二章 一维随机变量及其分布

第四节 连续型随机变量及其分布

- 连续型随机变量的概率密度
- 几种常见的连续型随机变量的分布

要求：熟练掌握连续型随机变量的概率密度函数、分布函数及其两者间的关系

一. 连续型随机变量的概率密度

1. 定义

设 X 的分布函数为 $F(x)$

若存在$\boxed{\text{非负可积函数}\ f(x),}$ 使 $\forall x \in R$ 有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

则称　X　　　　连续型随机变量

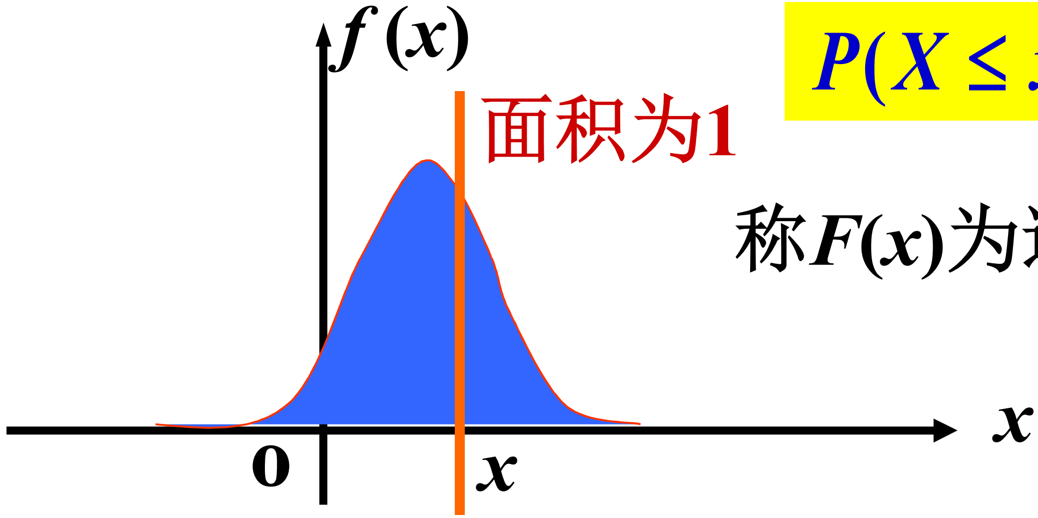
$f(x)$　　　　X的概率密度函数

2. 概率密度函数的性质

性质1 $f(x) \geq 0$

性质2 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

这两条性质是判定一个函数 $f(x)$是否为某随机变量X 的概率密度函数的充要条件.



$$P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

称$F(x)$为连续型变量的分布函数

性质3

若 $f(x)$在x 处连续，则有：$F'(x) = f(x)$

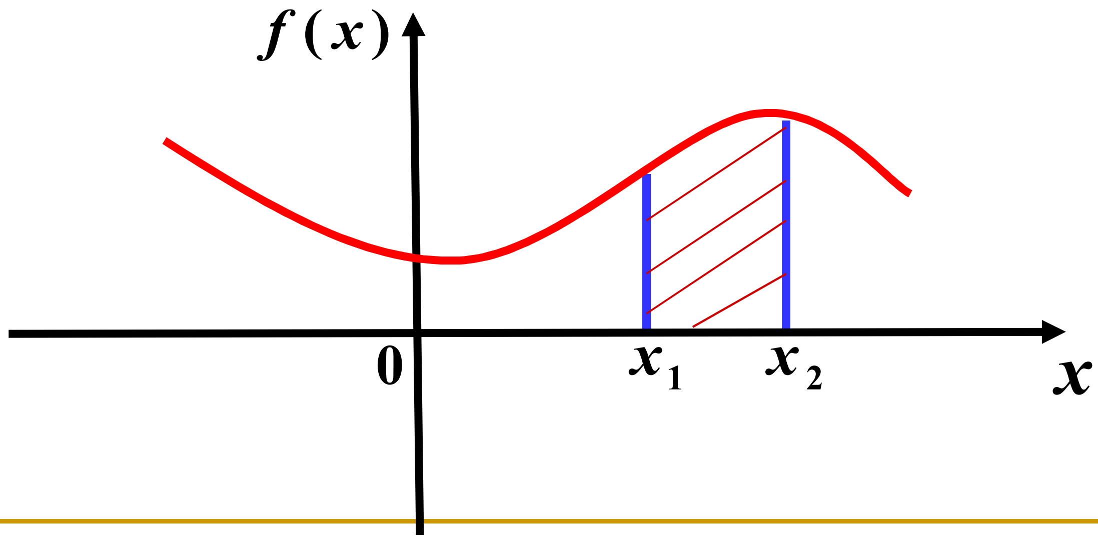
$$P(X \le x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

性质4

$$P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$$

证明：$F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} f(t)dt - \int_{-\infty}^{x_1} f(t)dt = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$

几何 意义: X落在区间 $(x_1, x_2]$的概率等于区间 $(x_1, x_2]$上曲线 $f(x)$之下的曲边梯形的面积



注意

离散型随机变量X在其可能取值点的概率不为0,

连续型随机变量X在$(-\infty,+\infty)$上任一点a的概率恒为0

$$P\{X=a\}=0$$

结论 连续型随机量X在某区间上取值的概率只与区间长度有关, 而与区间是闭, 开, 半开半闭无关, 既:

$$P(x_1 \le X < x_2) = P(x_1 < X \le x_2) = P(x_1 \le X \le x_2)$$

$$= P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1)$$

结论

$$A=\phi \;\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}\; P(A)=0$$

不一定

概率计算公式

$$P\{X \le x\} = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$P\{X > x\} = \int_{x}^{+\infty} f(x)dx$$

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

例1. 证明：函数 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}\quad(-\infty<x<+\infty)$

是一个连续型随机变量的概率密度函数.

证明：(1). 显然，$f(x)\geq 0\quad(-\infty<x<\infty)$

(2). $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}e^{x}dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}e^{-x}dx$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

例2　设函数

$$F(x)=\begin{cases}\sin x & 0\le x\le \pi \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

问：$F(x)$能否成为某个连续型随机变量 的分布函数.

分析　分布函数满足

性质1　$F(x)$是一个不减函数.

性质2　$0\le F(x)\le 1$ 且：$\begin{cases}F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0 \\ F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1\end{cases}$

性质3　$F(x)$是(右)连续的函数　即 $\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0)$

例2　设函数

$$F(x)=\begin{cases}\sin x & 0\le x\le \pi\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

问：$F(x)$能否成为某个连续型随机变量 的分布函数.

解：注意到：函数 $F(x)$ 在 $[\pi/2,\pi]$上下降，即不满足性质(1).

或者：$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$

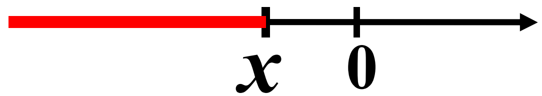
即不满足性质(2).

故：$F(x)$不是某个连续型随机变量的分布函数.

例3. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{a}e^{-\frac{x^2}{2a}} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}\qquad (a>0)$

求: (1) X的分布函数 (2) $P(0\leq X<1)$

解: (1) 由 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx$



当 $x<0$ 时 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}0\cdot dx=0$

当 $x\geq 0$ 时 $F(x)=\int_{-\infty}^{0}0\cdot dx+\int_{0}^{x}\dfrac{x}{a}e^{-\frac{x^2}{2a}}dx$

$$=[-e^{-\frac{x^2}{2a}}]\Big|_0^x=1-e^{-\frac{x^2}{2a}}$$

综合上述得: $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1-e^{-\frac{x^2}{2a}} & x\geq 0\end{cases}$

例3. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{a}e^{-\frac{x^2}{2a}} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}\quad (a>0)$

求: (1) X的分布函数 (2) $P(0\le X<1)$

解: (2). $P(0\le X<1)=F(1)-F(0)=1-e^{-\frac{1}{2a}}$

或 $=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\dfrac{x}{a}e^{-\frac{x^2}{2a}}dx$

$=[-e^{-\frac{x^2}{2a}}]\Big|_0^1=1-e^{-\frac{1}{2a}}$

综合上述得: $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1-e^{-\frac{x^2}{2a}} & x\ge 0\end{cases}$

例4 设X的分布函数为$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{2}}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

$\longrightarrow f(x)$

解

$$f(x)=\begin{cases}xe^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0,\\ 0, & x\leq 0.\end{cases}$$

二 几种常见的连续型随机变量的分布

1. 均匀分布

若连续型随机变量 X 具有概率密度 $f(x)$为：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$1^0.\ f(x)\geq 0,$

$2^0.\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$

则称 X 在区间 (a, b)上服从均匀分布。

记为：$X \sim U(a, b)$

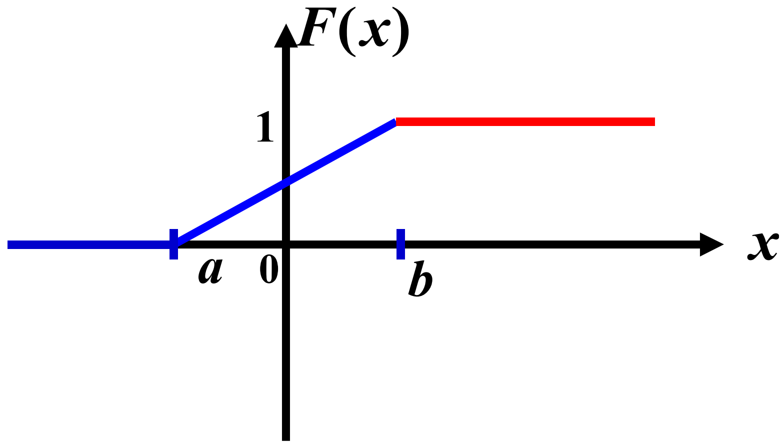
背景 在区间 $[a, b]$ 内随机掷点

X落在区间(a,b)中任意等长度的子区间的可能性是相同的

▲ 若X服从均匀分布，
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

则X的分布函数为:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x<b \\ 1 & x\ge b\end{cases}$$



$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

例4. 某公共汽车站从上午7时起，每15分钟来一班车，即 7:00，7:15，7:30, 7:45 等时刻有汽车到达此站，如果乘客到达此站时间 X 是7:00到 7:30 之间的均匀随机变量

试求：(1) 乘客候车时间少于 5 分钟的概率

(2) 乘客候车时间超过10分钟的概率

解：设以7:00为起点0，以分为单位 $X \sim U(0, 30)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{30} & 0 < x < 30 \\ 0 & \text{其 它} \end{cases}$$

$X \sim U(0, 30)$ $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{30} & 0<x<30 \\ 0 & \text{其 它} \end{cases}$$

从上午7时起，每15分钟来一班车，即7:00，7:15，7:30等时刻有汽车到达汽站

(1) 乘客候车时间少于 5 分钟的概率

乘客必须在 7:10 到 7:15 之间，或在7:25 到 7:30 之间到达车站.

所求为：$P\{10<X<15\}+P\{25<X<30\}$

$$=\int_{10}^{15}\frac{1}{30}dx+\int_{25}^{30}\frac{1}{30}dx=\frac{1}{3}$$

(2) 乘客候车时间超过10分钟的概率

乘客必须在7:00到7:05或7:15到7:20之间到达车站

$$P(0<X<5)+P(15<X<20)=\int_{0}^{5}\frac{1}{30}dx+\int_{15}^{20}\frac{1}{30}dx=\frac{1}{3}$$

2. 指数分布

若连续型随机变量 X 具有概率密度 $f(x)$ 为:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 为常数

则称 X 为服从参数 θ 的指数分布

注: ▲ 易证 $f(x)$ 满足:

$1^0.\ f(x)\geq 0$,

$2^0.\ \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx$$

$$=\begin{cases}\int_0^x\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-\int_0^x e^{-\frac{x}{\theta}}d(-\frac{x}{\theta}) & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-e^{-\frac{x}{\theta}}\Big|_0^x=1-e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

▲ X 的分布函数为:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

▲ 指数分布的性质(无记忆性)

若X服从指数分布，则: 对任意的 $s,t>0$ 有:

$$P\{X>s+t \mid X>s\}=P\{X>t\}$$

若设X是某一元件的寿命，则上式表明：元件对它已使用过 S小时没有记忆。

▲ 指数分布的性质(无记忆性)

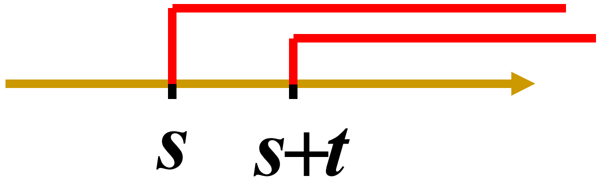
对任意的 $s,t>0$ 有:

$$P\{X>s+t \mid X>s\}=P\{X>t\}$$

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

证明:

$$P\{X>s+t|X>s\}=\frac{P\{(X>s+t)\bigcap(X>s)\}}{P\{X>s\}}$$



$$=\frac{P\{X>s+t\}}{P\{X>s\}}=\frac{1-F(s+t)}{1-F(s)}=\frac{1-(1-e^{-(s+t)/\theta})}{1-(1-e^{-s/\theta})}$$

$$=\frac{e^{-(s+t)/\theta}}{e^{-s/\theta}}=e^{-t/\theta}=1-F(t)=P\{X>t\}$$

例5. 设某计算机在毁坏前运行的总时间(单位:小时)是一个连续型随机变量X,其密度函数为:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\frac{x}{100}} & 当x\geq 0\\ 0 & 当x<0\end{cases}$$

求: (1). λ的值.

(2). 这台计算机在毁坏前能运行50到150小时的概率.

(3). 运行时间少于100小时的概率.

解:(1) $\because \quad 1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\frac{x}{100}}dx$

$$= -100\lambda e^{-\frac{x}{100}}\Big|_{0}^{+\infty} = 100\lambda \qquad \therefore \quad \lambda = \frac{1}{100}$$

(2) $P(50 < X < 150) = \int_{50}^{150} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}}dx$

$$= -e^{-\frac{x}{100}}\Big|_{50}^{150} = 0.384$$

(3) $P(X < 100)$

$$= \int_{0}^{100} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}}dx$$

$$= 1 - e^{-1} \approx 0.633$$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\frac{x}{100}} & \text{当 } x \geq 0 \\ 0 & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

(1) λ 的值.

(2) 50 到 150 小时

(3) 少于100小时

正态分布*

- 正态分布的定义
- 正态分布的图形特点
- 正态分布的分布函数
- 标准正态分布*
- 三倍标准差原则

(1). 正态分布的定义

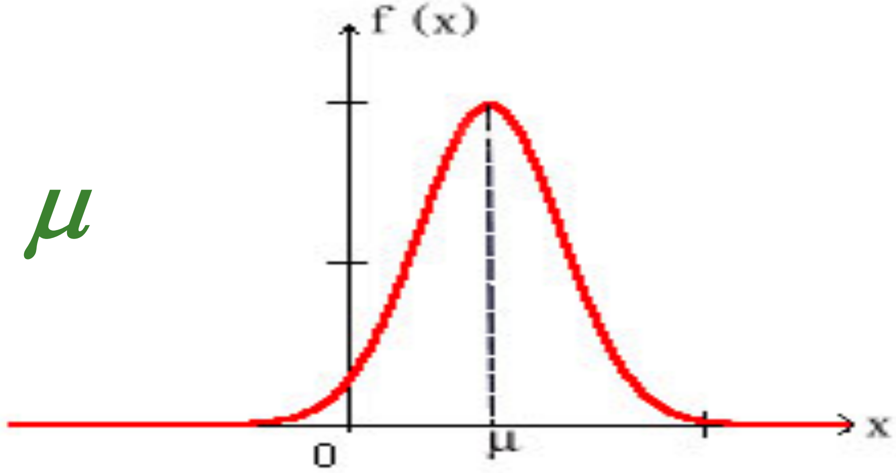
若随机变量 X 的概率密度为:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty$$

其中: μ 和 σ^2都是常数, μ 任意, $\sigma>0$,

则 称 X 服从参数为 μ 和 σ^2的正态分布.

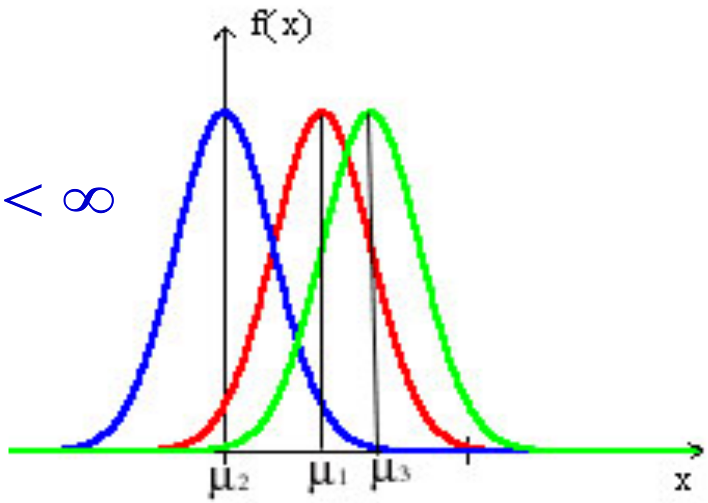
记作: $X\sim N(\mu,\sigma^2)$



其密度曲线是关于 $x=\mu$ 对称的钟形曲线。

(2) 正态分布的图形特点

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty$$



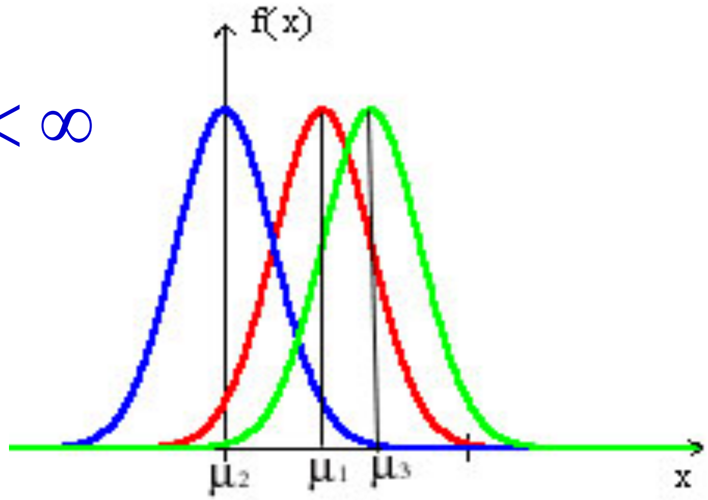
▲1 显然：$f(x)\geq 0$

▲2 $f(x)$ 以 μ 为对称轴，并在 $x=\mu$ 处达到最大值：

$$f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

当 $x=\mu\pm h\ (h>0)$时，有 $f(\mu+h)=f(\mu-h)$

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty$$



▲3 $f(x)$以 x 轴为渐近线

因为当 $x\to\pm\infty$时，$f(x)\to 0$

曲线 $f(x)$向左右伸展时，越来越贴近 x 轴，

▲4 $x=\mu\pm\sigma$为$f(x)$的两个拐点的横坐标

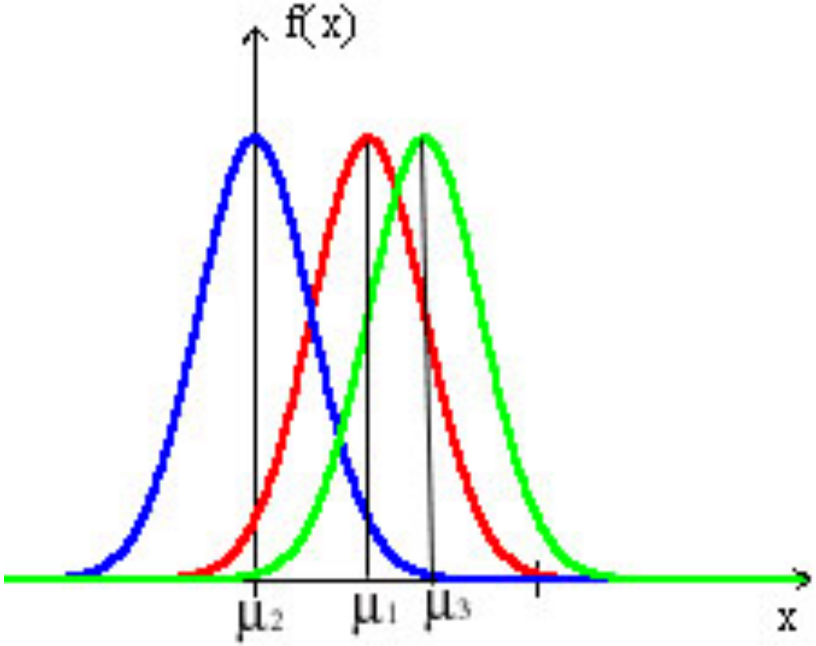
（对 $f(x)$求两阶导即可求得）

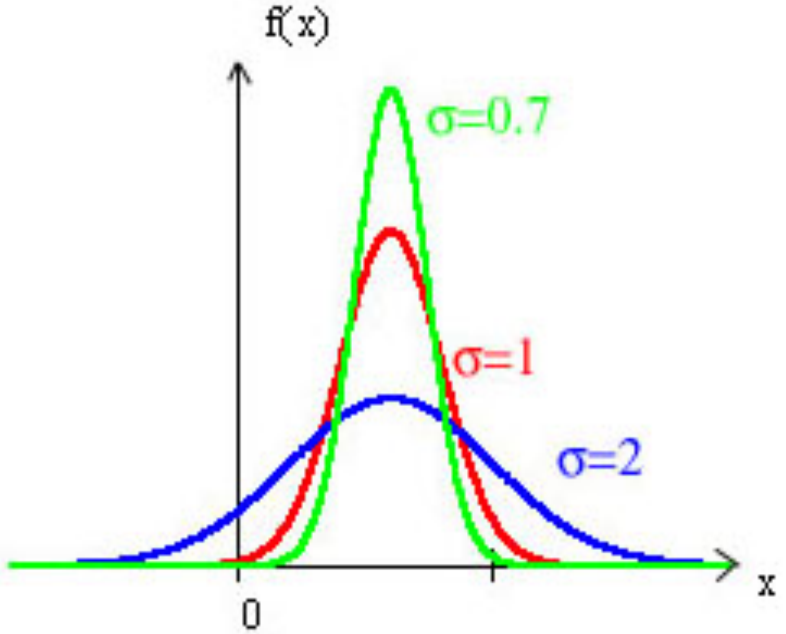
▲5 固定σ,改变μ，则图形沿x轴移动，但形状不变。

固定μ,改变σ，则图形的对称轴不变 ，但形状改变。

$$f(\mu)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

σ越小，$f(\mu)$越大。





μ决定了图形的中心位置

位置参数

σ决定了图形的陡峭程度

尺度参数

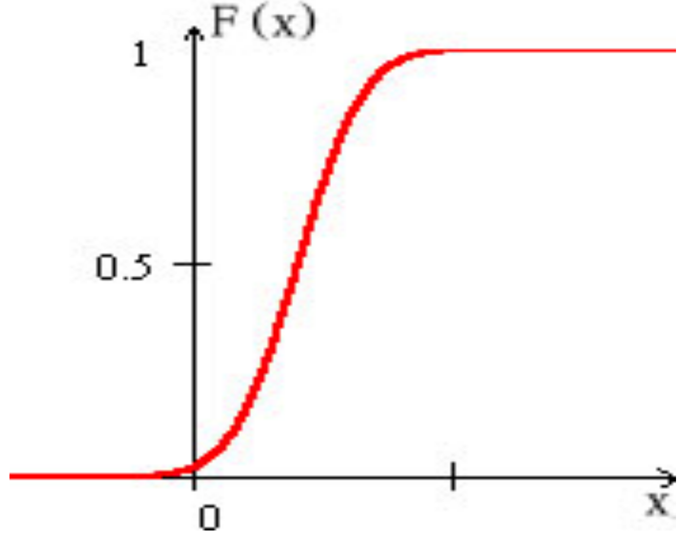
(3) 正态分布的分布函数

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$， 则X分布函数是

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt,$$

其图形为:



注: 正态分布由它的两个参数μ和σ唯一确定， 当μ和σ不同时，对应的是不同的正态分布。

下面介绍一种最重要的正态分布——标准正态分布

(4). 标准正态分布*

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

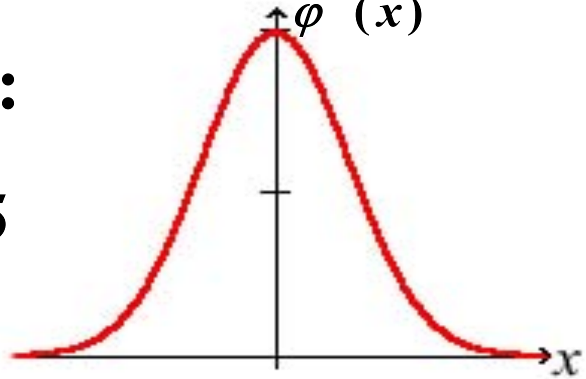
称 $\mu=0,\sigma=1$ 的正态分布为标准正态分布$N(0,1)$.

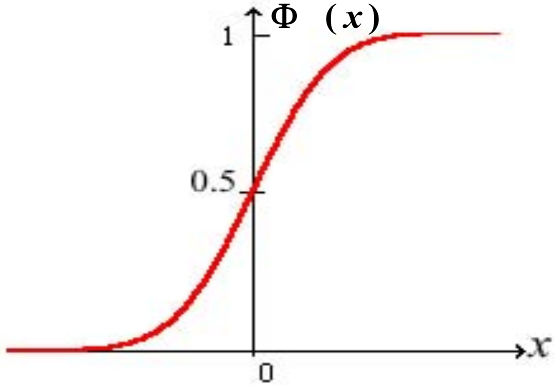
其密度函数和分布函数常用 $\varphi(x)$和 $\Phi(x)$表示:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\qquad -\infty<x<\infty$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

其图形为:



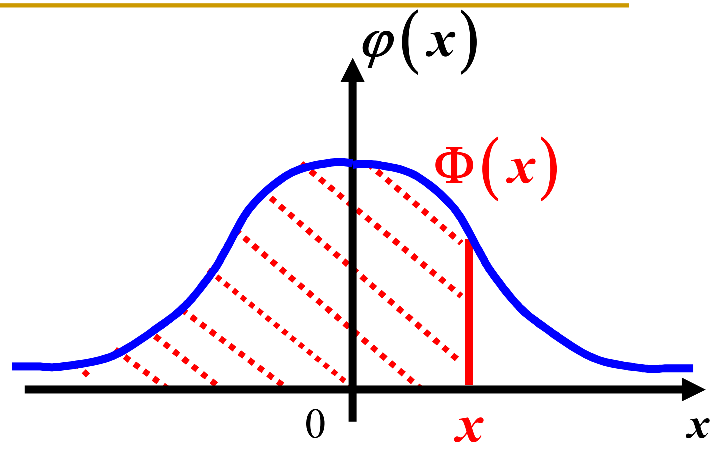


$\Phi(0)=0.5$

关于 $N(0,1)$

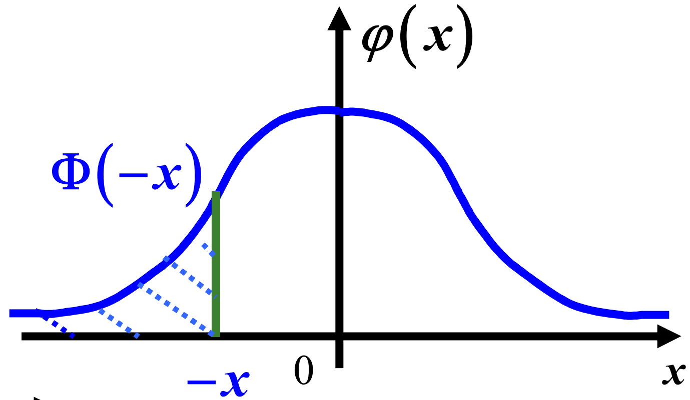
密度函数: $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

分布函数: $\Phi(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$



$i)$ $\varphi(x)$偶

$ii)$ $\forall x, \Phi(x)=1-\Phi(-x)$



$iii)$ $\Phi(0)=0.5$ $\quad \forall x>0, \Phi(x)$ 查表

$$\Phi(x)\begin{cases}\text{查表,} & 0\le x\le 3.9,\\ \approx 1, & x\ge 4,\\ =1-\Phi(-x), & x<0.\end{cases}$$

又因为

$$P\{X\le x\}=\Phi(x)$$

$$P\{x_1<X\le x_2\}=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$$

验证：$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx}=1$

或验证：$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}$

需验证 $\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)^2=2\pi$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{y^2}{2}}dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

令

$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}e^{-\frac{r^2}{2}}rdr$$

$$=2\pi\left(-e^{-\frac{r^2}{2}}\right)\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$=2\pi$$

下面验证：$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=1$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1$

则有 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\frac{dx}{\sigma}$ (因$d\dfrac{x-\mu}{\sigma}=d\dfrac{x}{\sigma}$)

令$z=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$ $=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=1$

任何一个一般的正态分布都可以通过线性变换

$\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 转化为标准正态分布.

标准正态分布的重要性

引理：若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则：$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

(一般正态分布与标准正态分布的关系)

▲ 关于正态分布表

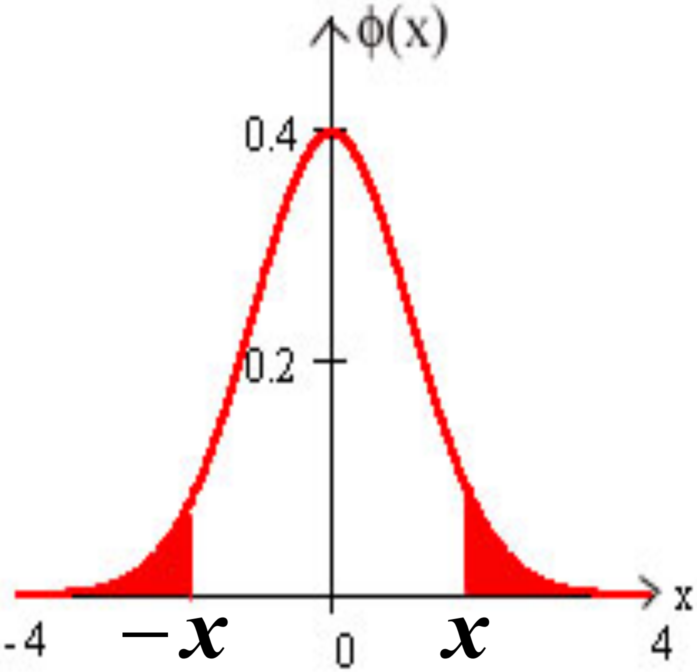
教材P321附表2为标准正态分布函数数值表，可以查表计算一般正态分布的概率问题。

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

表中给出的是 $x>0$ 时，$\Phi(x)$ 的值.

当 $-x<0$ 时有：

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$$



$$P(a<X<b)=\Phi(b)-\Phi(a)$$

注： ◆ 若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

则有：$P(a \le X \le b) = P(\dfrac{a-\mu}{\sigma} \le \dfrac{X-\mu}{\sigma} \le \dfrac{b-\mu}{\sigma})$

$$= P(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Y \le \frac{b-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

例1 设随机变量 $X \sim N(0,\ 1)$，试求：

(1) $P\{1 \le X < 2\}$; (2) $P\{-1 < X < 2\}$.

解：

(1) $P\{1 \le X < 2\} = \Phi(2) - \Phi(1)$

$= 0.9772 - 0.8413 = 0.1359$

(2) $P\{-1 \le X < 2\} = \Phi(2) - \Phi(-1)$

$= \Phi(2) - [1 - \Phi(1)]$

$= 0.9772 - 1 + 0.8413 = 0.8185$

例2 设随机变量$X \sim N(2,\ 9)$，试求：(1) $P\{1 \le X < 5\}$;
(2) $P\{|X-2| > 6\}$; (3) $P\{X > 0\}$.

解：(1) $P\{1 \le X < 5\} = P\left\{\frac{1-2}{3} \le \frac{X-2}{3} < \frac{5-2}{3}\right\}$

$$= \Phi\left(\frac{5-2}{3}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{3}\right) = \Phi(1) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) = \Phi(1) + \Phi\left(\frac{1}{3}\right) - 1$$

$$= 0.84134 + 0.62930 - 1 = 0.47064$$

(2) $P\{|X-2| > 6\} = 1 - P\{|X-2| \le 6\}$

$$= 1 - P\{-6 \le X-2 \le 6\} = 1 - P\{-4 \le X \le 8\}$$

$$= 1 - \left[\Phi\left(\frac{8-2}{3}\right) - \Phi\left(\frac{-4-2}{3}\right)\right] = 1 - [\Phi(2) - \Phi(-2)]$$

$$= 2 \times [1 - \Phi(2)] = 2 \times (1 - 0.97725) = 0.0455$$

(3) $P\{X > 0\} = 1 - P\{X \le 0\}$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{0-2}{3}\right) = 1 - \left[1 - \Phi\left(\frac{2}{3}\right)\right]$$

$$= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) = 0.7486$$

有关计算　　设 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$

$$i)\ P\{X \le x\} = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$ii)\ P\{X > x\} = 1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$iii)\ P\{x_1 < X \le x_2\} = \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$$

$$iv)\ P\{|X-\mu| < x\} = 2\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - 1$$

$$= P\left\{\frac{|X-\mu|}{\sigma} < \frac{x}{\sigma}\right\} = P\left\{-\frac{x}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x}{\sigma}\right\}$$

$$= \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{x}{\sigma}\right)$$

有关计算 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$i)\ P\{X \le x\} = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$ii)\ P\{X > x\} = 1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$iii)\ P\{x_1 < X \le x_2\} = \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$$

$$iv)\ P\{|X-\mu| < x\} = 2\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - 1$$

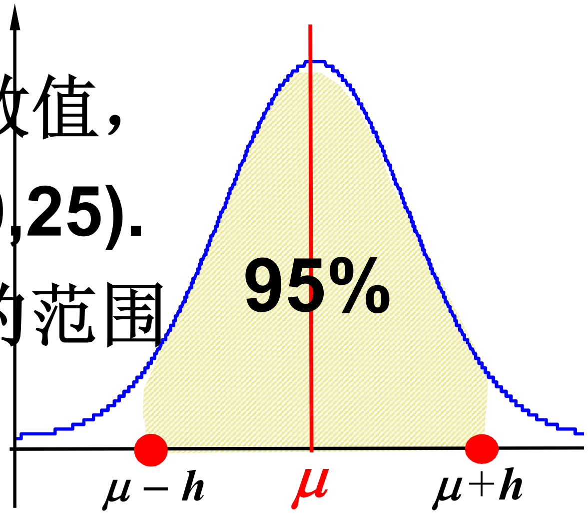
$$P\{|X-\mu| > x\} = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right)$$

$$v)\ P\{X > \mu\} = P\{X < \mu\} = 0.5$$

$$P\{|X-\mu| < 3\sigma\} = 2\Phi(3) - 1 = 0.9974$$

应用 血液指标分析

为制定血常规中性细胞比率化验指标的参数值，经统计该项指标 X 近似服从正态分布 $N(60,25)$. 医学上常以偏离正常人指标中心位置95%的范围作为参考值，此项指标参考值范围是多少？



(50.2, 69.8)

解： $P\{|X-60|<h\}=0.95 \longrightarrow h.$

$$P\{-h<X-60<h\}=P\{\frac{-h}{\sigma}<\frac{X-60}{\sigma}<\frac{h}{\sigma}\}=\Phi(\frac{h}{\sigma})-\Phi(-\frac{h}{\sigma})$$

查表 $\Phi(1.96)=0.975$ $=\Phi(\frac{h}{\sigma})-(1-\Phi(\frac{h}{\sigma}))=2\Phi(\frac{h}{\sigma})-1=0.95$

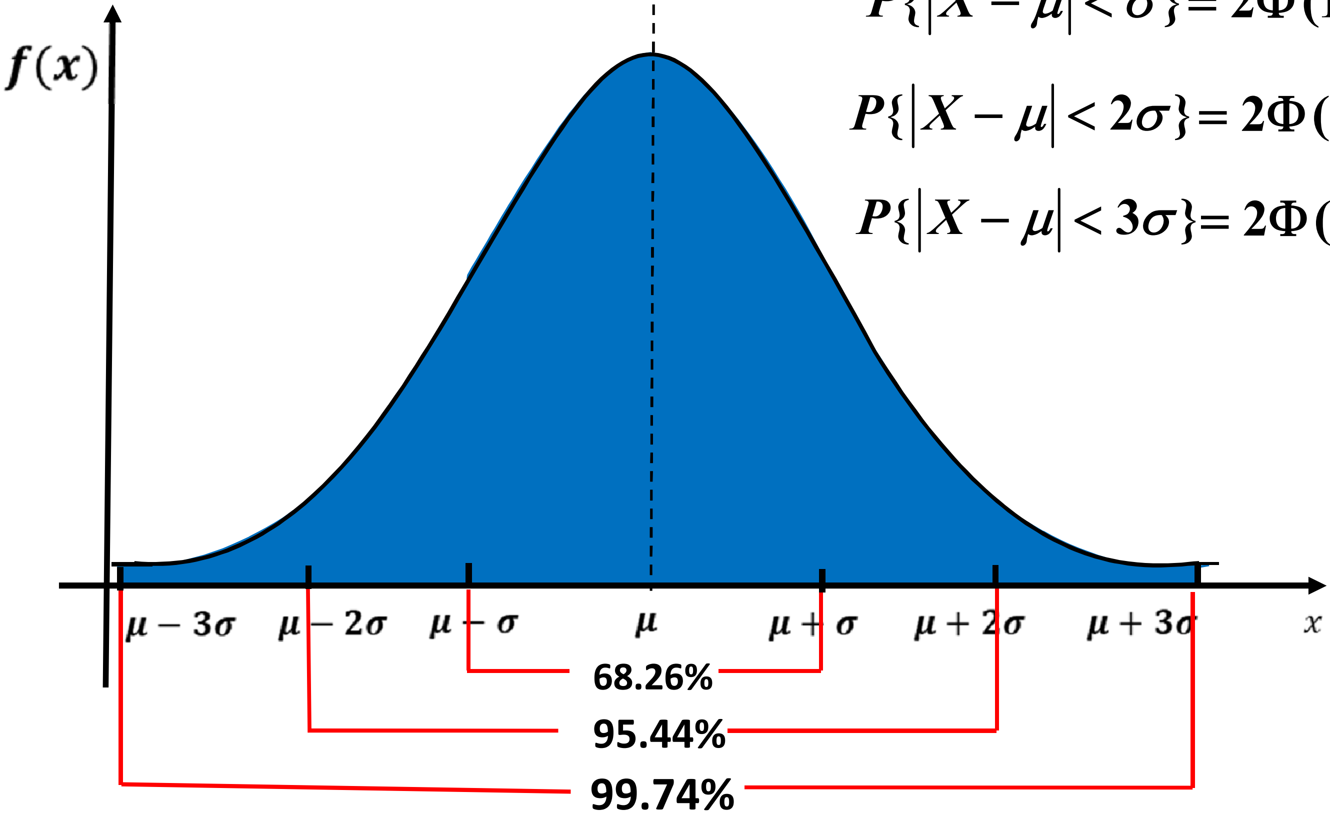
$$\Rightarrow \Phi(\frac{h}{5})=0.975 \Rightarrow \frac{h}{5}=1.96 \Rightarrow h=9.8$$

正态分布与3σ规则 $P\{|X-\mu|<h\}=2\Phi(\frac{h}{\sigma})-1$

$$P\{|X-\mu|<\sigma\}=2\Phi(1)-1=0.6826.$$

$$P\{|X-\mu|<2\sigma\}=2\Phi(2)-1=0.9544.$$

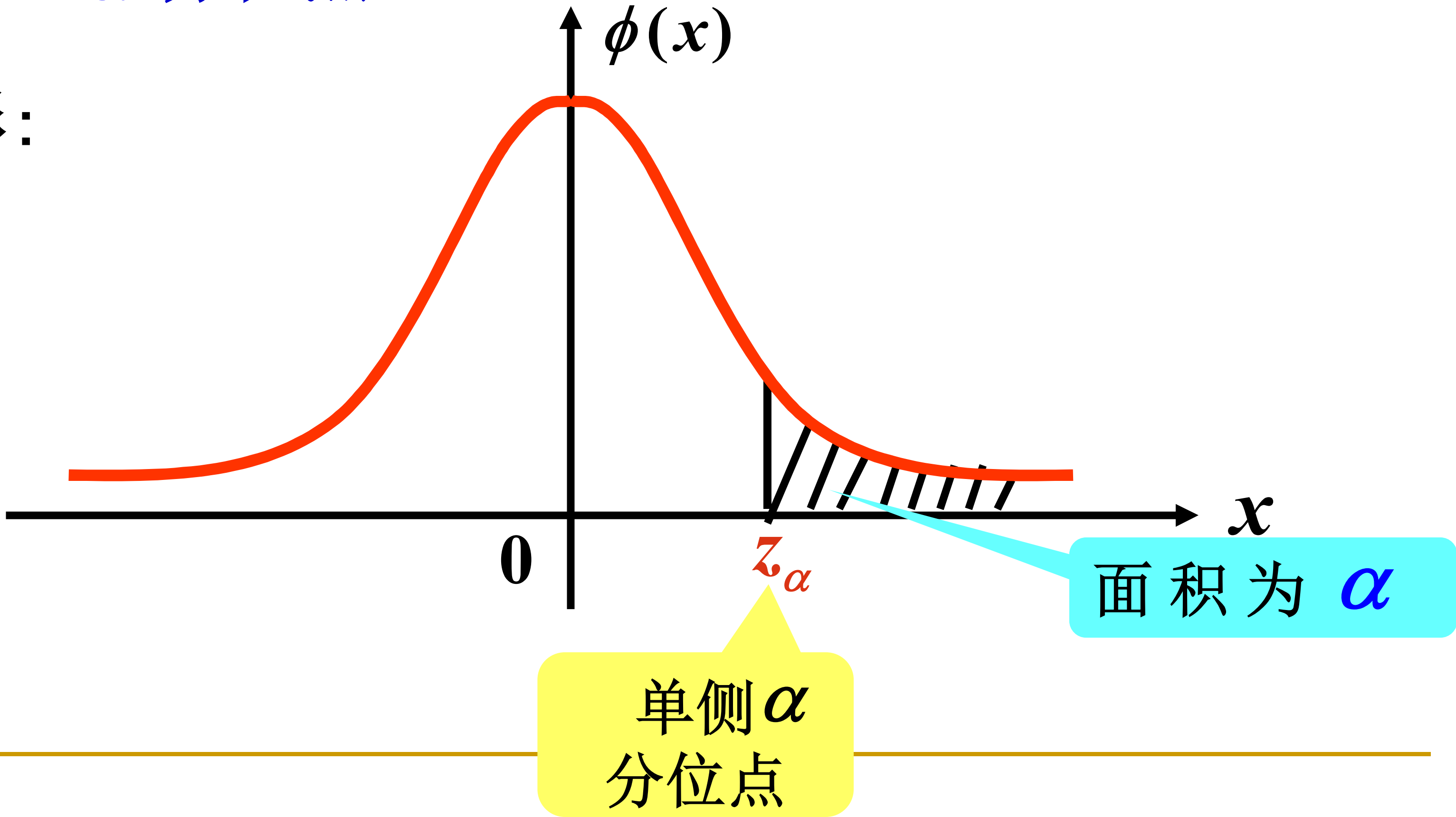
$$P\{|X-\mu|<3\sigma\}=2\Phi(3)-1=0.9974.$$



4. α分位点

1. 定义　$X \sim N(0,1)$，若 z_α满足条件 $P(X > z_\alpha) = \alpha$，$0 < \alpha < 1$，则 称点 z_α 为标准正态分布的上 α 分位点.

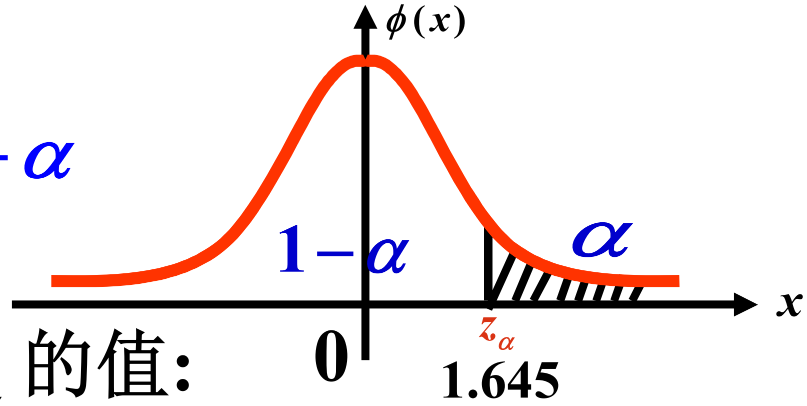
2. 图形：



注:

▲ $\Phi(z_\alpha) = \int_{-\infty}^{z_\alpha} \phi(x)dx = 1-\alpha$

（附表2上）



▲ 从正态分布表上如何求z_α的值:

比如: $z_{0.05} = ?$

$\Phi(1.645) = 1-0.05$ $\therefore z_{0.05} = 1.645$

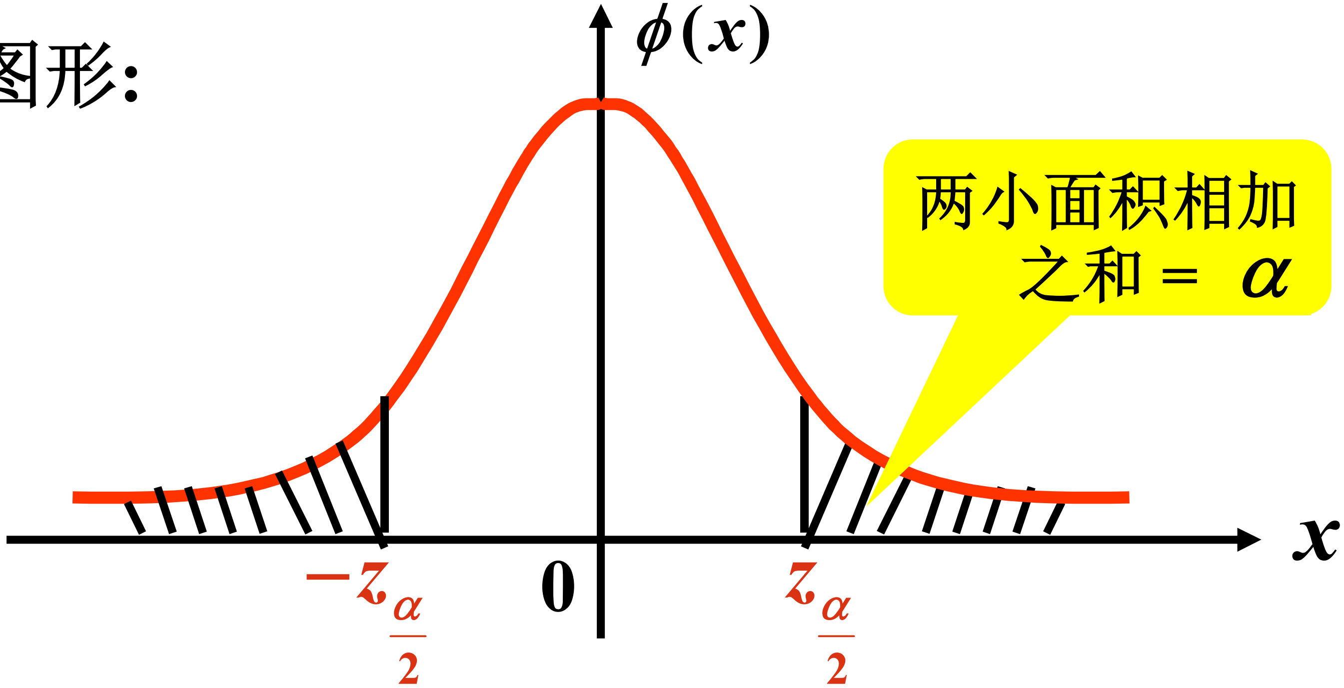
$z_{0.025}$? $\Phi(\boxed{1.96}) = 1-0.025$

$\longrightarrow z_{0.025} = 1.96$

双侧 α 分为点:

若 $P(|X| > Z_{\alpha/2}) = \alpha$ 则称 $z_{\alpha/2}$ 为标准正态分布的双侧 α 分位点.

图形:

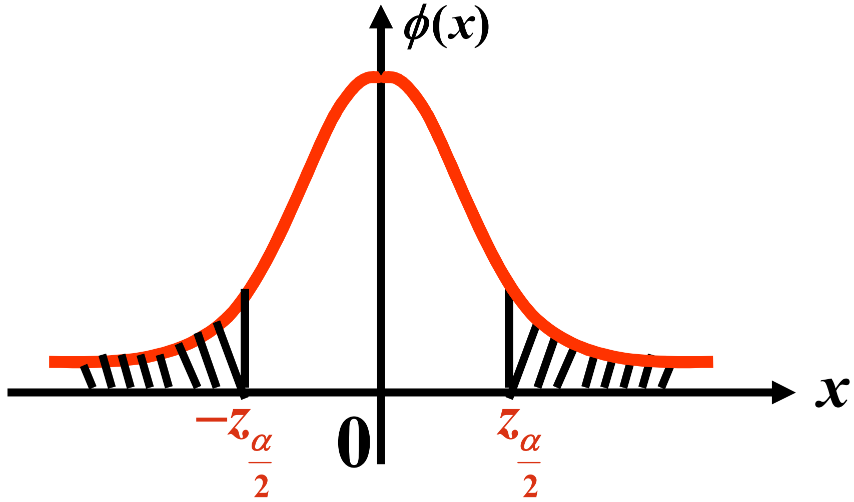


比如: $\Phi(z_{\alpha/2}) = \Phi(z_{\frac{0.05}{2}})$

$$= 1 - \frac{0.05}{2} = 0.975$$

$$= \Phi(1.96)$$

$$\therefore z_{\frac{0.05}{2}} = 1.96$$



即 $P(|X| > 1.96) = 0.05$, 表明 $x > 1.96, x < -1.96$ 的两小块面积之和(概率)为0.05, 而每一小块面积(概率)为0.025.

注意: 在后续的统计学中还将介绍 $\chi^2(n)$分布, t 分布, F分布的上 α 分位点的概念