第一章　随机事件间的关系及其运算

名称	记号	含义
包含	$A \subset B$	A发生 → B发生
相等	$A=B$	A发生 ↔ B发生
和(并)事件	$A \cup B$	A,B至少有一个发生
积(交)事件	$A \cap B$	A,B同时发生
差事件	$A-B$	A发生，B不发生
A,B互不相容(互斥)	$A \cap B = \Phi$	A,B不能同时发生
A的逆事件(对立)	$\overline{A}$	A不发生

A与$\overline{A}$必有一个发生且仅有一个发生

概率的性质

1) $P(\Phi)=0$

2) $A_1, A_2, \cdots A_n$ 两两不相容 $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

3)减法公式 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$

特别：$B\subset A \longrightarrow P(A-B)=P(A)-P(B)$

单调性：$B\subset A \longrightarrow P(B)\le P(A)$

4)对任一事件A，$P(A)\le 1$

5)对任一事件A，$P(\overline{A})=1-P(A)$

6)加法公式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

推广 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$

$-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

古典概型 $P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{包含的基本事件总数}}{S\text{包含的基本事件总数}}$

条件概率 $P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)},\quad P(B)>0$

乘法定理 $P(AB)=P(B\mid A)P(A)$

全概率公式 $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$

Bayes公式 $P(B_i\mid A)=\frac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A\mid B_j)P(B_j)},i=1,2\cdots n$

A与B相互独立 $P(AB)=P(A)P(B)$ 或 $P(B\mid A)=P(B)$

- 设事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立, 则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_n)$$

典型例题：

（1）抽样检验（有放回与不放回）

（2）抽签问题（一次抽一个不放回，第几次“中奖”的概率都是相同的——公平性）

（3）全概率与贝叶斯公式应用

例. 设有两个盒子，第一个盒子中放有2个红球及4个白球，第二个盒子中放有3个红球及3个白球。现在任取一个盒子，再从中任取一个球，问：

（1）取出红球的概率是多少？（全概率公式）

（2）若知取出的是红球，问它来自哪个盒子的可能性大？（贝叶斯公式）

（4）事件的独立性

例. 一射手向同一目标独立地进行四次射击，若至少命中一次的概率为，试求：该射手进行一次射击的命中率。

第二章 离散型随机变量

分布律： $P(X = x_k) = p_k, \quad k = 1, 2 \cdots\cdots$

常见： $X \sim (0,1) \quad X \sim B(n, p) \quad X \sim P(\lambda)$

连续型随机变量

求未知参数

概率密度： $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad f(x) \geq 0, \ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

常见： $X \sim U(a, b) \quad X \sim Exp(\theta) \quad X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$

设 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$， $i)\ P\{X \leq x\} = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$$ii)\ P\{x_1 < X \leq x_2\} = \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$$

$$iii)\ P\{|X-\mu| < x\} = 2\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - 1$$

$$iv)\ P\{X > \mu\} = P\{X < \mu\} = 0.5$$

一维随机变量的分布函数

$$F(x)=P(X\leq x)$$

作用： $P(x_1<X\leq x_2)=F(x_2)-F(x_1)$

$$P\{X>x\}=1-F(x)$$

$$P\{X=x\}=F(x)-F(x^-)$$

性质1　$F(x)$是一个单调非减函数。

性质2　$0\leq F(x)\leq 1$, $F(-\infty)=0, F(+\infty)=1$

性质3　$F(x)$是右连续的函数。

随机变量的函数的分布

典型例题：

（1）离散型：分布律 $\rightleftarrows$ 分布函数

（2）连续型：概率密度 $\rightleftarrows$ 分布函数

未知参数的确定

（3）概率计算：

$$P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

$$P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \le X \le x_2) = P(x_1 < X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

$$P(X \in L) = \sum_{x_k \in L} P(X = x_k) = \sum_{x_k \in L} p_k$$

（4）分布函数法（一般先判断$Y=g(X)$的值域）

例 设 $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$ $Y=e^X \longrightarrow f_Y(y)$

解： $\forall y,\quad F_Y(y)=P\{Y\le y\}$

$\because P(X>0)=1, \therefore Y=e^X>1$

$\therefore \forall y\le 1,\quad F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P(\Phi)=0$

$\forall y>1,\quad F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{e^X\le y\}$

$=P\{X\le \ln y\}=F_X(\ln y)$

$$f_Y(y)=f_X(\ln y)\cdot\frac{1}{y}=\begin{cases} e^{-\ln y}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{y^2}, & \ln y>0\,(y>1), \\ 0, & y\le 1 \end{cases}$$

N(0,1)与分位点

$$\Phi(0)=0.5;$$

$$\Phi(x)\begin{cases}\text{查表}, & 0\le x\le 3.9,\\ \approx 1, & x\ge 4,\\ =1-\Phi(-x), & x<0;\end{cases}$$

上 α 分位点： $P\{X>z_\alpha\}=\alpha$

两个公式： $\Phi(z_\alpha)=1-\alpha$ $\quad z_{1-\alpha}=-z_\alpha$

$z_{0.025}$? $\Phi(z_{0.025})=1-0.025=0.975 \rightarrow z_{0.025}=1.96$

$z_{1-0.025}=-z_{0.025}=-1.96$

第三章

二维随机变量的分布函数

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$$

性质:

$i)$ $F(x,y)$ 分别关于 x,y 单调非减;

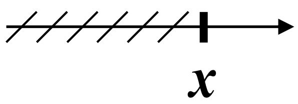
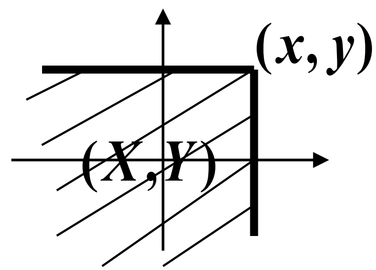
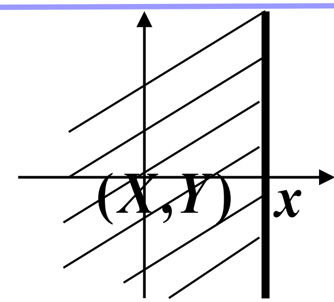
$ii)$ $F(x,-\infty)=F(-\infty,y)=F(-\infty,-\infty)=0$

$$F(+\infty,+\infty)=1$$

$iii)$ $F(x,y)$ 分别关于 x,y 右连续;

$iv)$ $\forall x_1<x_2,\ y_1<y_2,$

$$F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\ge 0$$

	一维 X	二维(X,Y)	边缘 X	关系
分布函数	$F(x)$ $=P(X\le x)$	$F(x,y)$ $=P(X\le x,Y\le y)$	$F_X(x)=P(X\le x)$ $=P(X\le x,Y<+\infty)$	$F_X(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)$
				
离散型	$F(x)=\sum\limits_{x_k\le x}p_k$	$F(x,y)=\sum\limits_{\substack{x_i\le x\\ y_j\le y}}p_{ij}$	$F_X(x)=\sum\limits_{x_i\le x}\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}$	$P\{X=x_i\}=\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}$
连续型	$F(x)$ $=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$	$F(x,y)$ $=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv$	$F_X(x)$ $f_X(x)$ $=\int_{-\infty}^{x}\underline{\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy}dx$	$f_X(x)$ $=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$
计算	$P(x_1<X\le x_2)=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx$		$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G}f(x,y)dxdy$	

边缘分布： $F_X(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)$; $F_Y(y)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x,y)$

$$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy\ ;\ f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

（注：先画出$f(x,y)$的非零区域！积分上下限可能跟另一变量有关！）

条件分布： $P(X=x_i\,|\,Y=y_j)=\dfrac{P_{ij}}{P_{\cdot j}}$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)},$$ $f_Y(y)\neq 0$ 时才有意义！

概率： $P(X\in L\,|\,Y=y)=\int\limits_{x\in L}f_{X|Y}(x\,|\,y)dx$ （视y为参数）

1. X,Y 相互独立（定义）

—— $\forall x,y\in R,\quad F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

即 $P\{X\le x, Y\le y\}=P\{X\le x\}P\{Y\le y\}$

2. X,Y 相互独立

$\Longleftrightarrow$ $\forall x_1<x_2,\ y_1<y_2,$

$$P\{x_1<X\le x_2,\ y_1<Y\le y_2\}$$

$$=P\{x_1<X\le x_2\}P\{y_1<Y\le y_2\}$$

3. X,Y(离散型)相互独立

$\Longleftrightarrow$ $\forall i,j,\quad p_{ij}=p_{i\bullet}\cdot p_{\bullet j}$

4. X,Y(连续型)相互独立

$\Longleftrightarrow$ $f(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)$ 几乎处处成立。

二维均匀分布

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

D —— 平面区域，σ —— D的面积，$\sigma\neq 0$

二维指数分布（了解）

$$f(x,y)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}, & x>0, y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$(\lambda>0)$

结论

$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$

则 ① $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

② X,Y 相互独立 $\Longleftrightarrow$ $\rho=0$

结论 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，

$$X_i \sim N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$\Rightarrow c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_n X_n$$

$$\sim N\left(c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \cdots + c_n\mu_n,\ c_1^2\sigma_1^2 + c_2^2\sigma_2^2 + \cdots + c_n^2\sigma_n^2\right)$$

$c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为任意实数。

$$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right), \quad Y = aX + b$$

$$\Rightarrow Y \sim N\left(a\mu + b,\ a^2\sigma^2\right)$$

一、$Z=X+Y$ 的分布

若X,Y相互独立，有如下卷积公式：

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

正态分布、泊松分布、卡方分布具有可加性！

二、分布函数法（已知联合密度函数$f(x,y)$）

例. 先求 $\forall z>0,\ F_{X^2+Y^2}(z)=P\{X^2+Y^2\le z\}$

再对z求导得 $f_{X^2+Y^2}(z)$

三、最大项最小项的分布（独立同分布）

$$F_{\max}(z)=(F(z))^n \qquad F_{\min}(z)=1-(1-F(z))^n$$

卷积公式法 X, Y 相互独立，连续型

例1. 设 X,Y 相互独立具有相同的概率密度：

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & 其\quad 它\end{cases}\qquad f(y)=\begin{cases}1 & 0\le y\le 1\\ 0 & 其\quad 它\end{cases}$$

求：$Z=X+Y$ 的概率密度

解：由题意知

因 X,Y 相互独立，由卷积公式：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f(z-x)dx$$

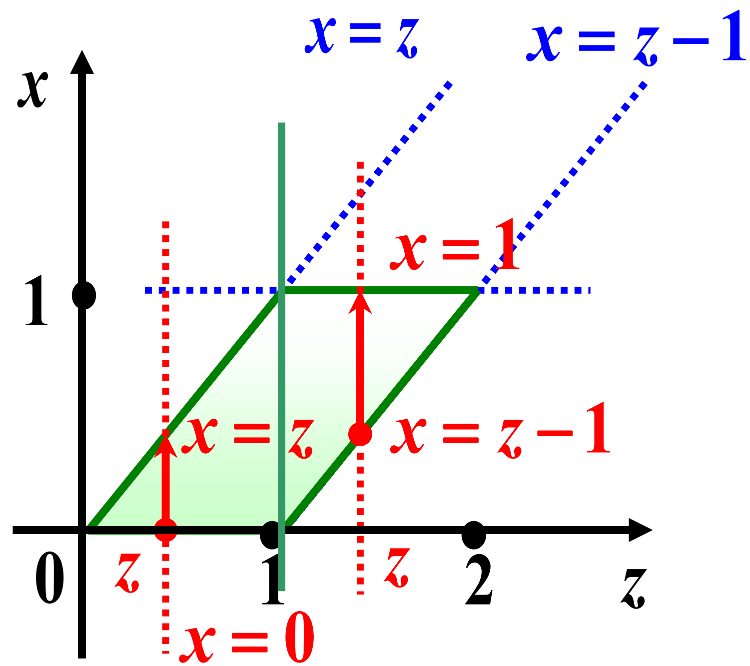
确定 z 的非零取值区间，$0\le z\le 2$

找出对应的积分限，被积函数不为 0 的区域：

$$\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le z-x\le 1\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,dx$$

区域 $\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le z-x\le 1 \end{cases}$ 如图示:



于是得:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f(z-x)dx$$

$$=\begin{cases} \int_0^z dx = z & 0\le z<1 \\ \int_{z-1}^1 dx = 2-z & 1\le z<2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} 1 & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{其 它} \end{cases}$$

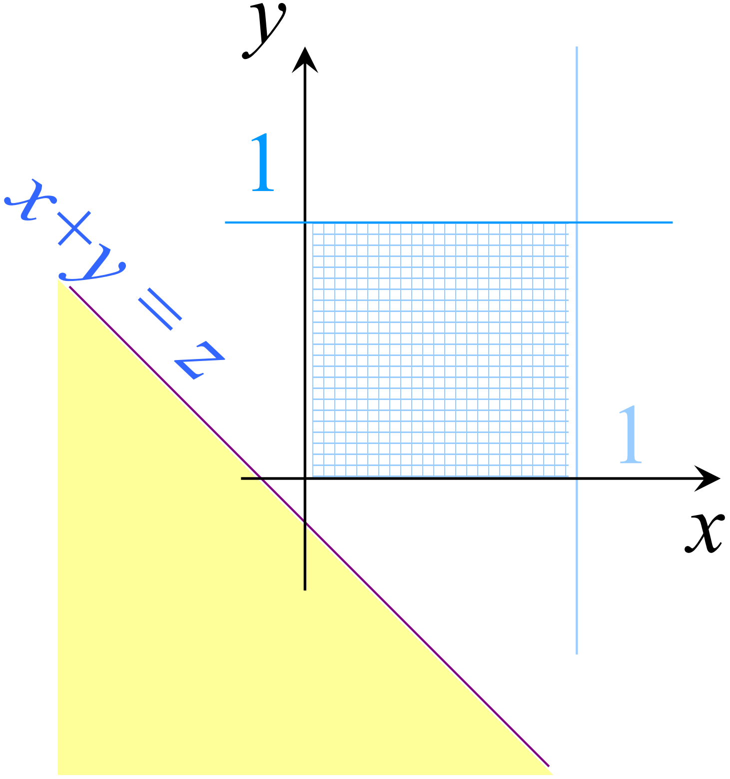
1、卷积公式法 X, Y 相互独立，连续型

2、分布函数法 连续型

例1. 设 X,Y 相互独立具有相同的概率密度：

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其　它}\end{cases}$$

求：$Z=X+Y$ 的概率密度



解法二 从分布函数出发

$$F_Z(z)=P(X+Y\le z)$$

$$=\iint_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$$

当 $z<0$, $F_Z(z)=0$

密度函数非零取值区间为：

$0<z<2$，

$$F_Z(z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\,dxdy$$

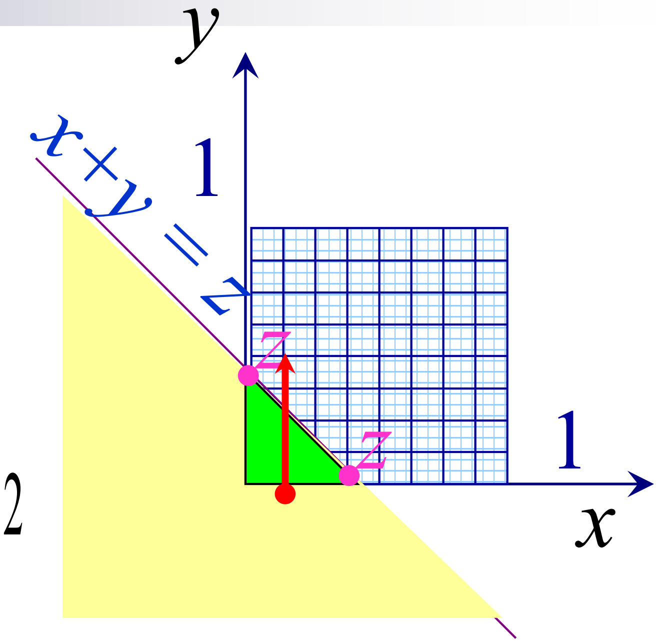
密度函数非零取值区间为:

$0< z < 2$,

当$0 \le z < 1$ 时,

$$F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^{z-x} 1dy=\int_0^z (z-x)dx = z^2/2$$

$$\Rightarrow \quad f_Z(z)=z$$

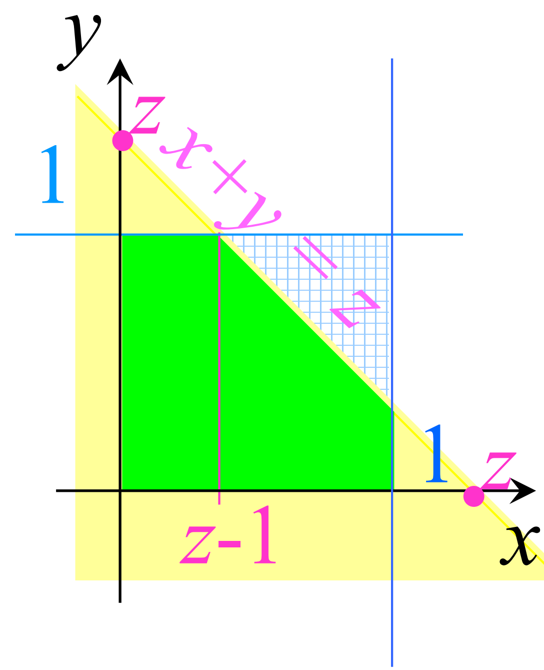


当$1\le z<2$ 时,

$$F_Z(z)=(z-1)+\int_{z-1}^1 dx\int_0^{z-x} 1dy$$

$$=z-1+\int_{z-1}^1 (z-x)dx = 2z - z^2/2 - 1$$

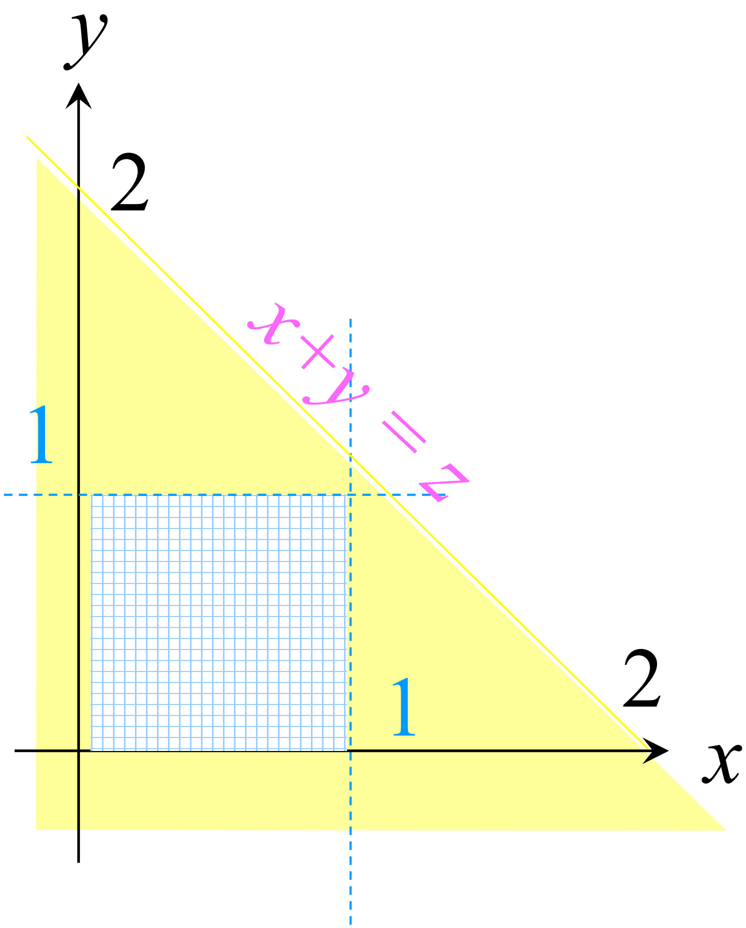
$$\Rightarrow \quad f_Z(z)=2-z$$



当$2 \le z$时，

$F_Z(z) = 1 \quad f_Z(z) = 0$

$$f_Z(z) = \begin{cases} z, & 0 \le z < 1 \\ 2 - z, & 1 \le z < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



例2

$X \backslash Y$	1	2
0	0.2	0.3
1	0.4	0.1

$\Rightarrow$ $X+Y$, XY, $\max(X, Y)$ 的分布律。

解:

(X,Y)	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,1)$	$(1,2)$
$X+Y$	1	2	2	3
XY	0	0	1	2
$\max(X,Y)$	1	2	1	2
P	0.2	0.3	0.4	0.1

$\Rightarrow$

$$X+Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$XY \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.5 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$\max(X,Y) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$