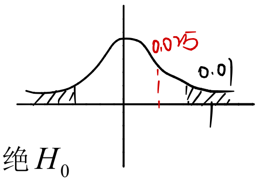
B 卷

北京科技大学 2017—2018 学年度第二学期

概率论与数理统计 试题答案及评分标准

一．选择题（每小题 3 分，共 24 分）

1． 对正态总体的数学期望 μ 进行假设检验，如果在显著性水平 0.02 之下拒绝零假设 $H_0:\mu=\mu_0$，那么在显著性水平 0.05 下，下列结论成立的是 ____B____。



（A）必须接受 H_0 （B）必须拒绝 H_0

（C）可能接受也可能拒绝 H_0 （D）不接受也不拒绝 H_0

2． 设 $X\sim N(0,\sigma_1^2),\ Y\sim N(-1,\sigma_2^2)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $P(X-Y>1)=$ ____C____。

$X-Y\sim N(1,2\sigma^2)$

$\frac{X-Y-1}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$

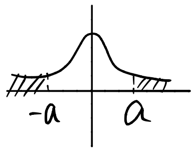
(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 与 σ_1^2，σ_2^2 有关

3． 设二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\underline{0})$，则以下说法错误的是____C____。

（A）X 与 Y 相互独立 （B）X 与 Y 不相关

（C）$D(XY)=D(X)D(Y)$ （D）$E(XY)=E(X)E(Y)$

4. 设随机变量 X 的概率密度函数是 $\varphi(x)$，且有 $\varphi(-x)=\varphi(x)$，$F(x)$ 是 X 的分布函数，则对任意的实数 a，有____D____。



（A）$F(-a)=\frac{1}{2}-\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ （B）$F(-a)=\frac{1}{2}-\int_{-\infty}^{a}\varphi(x)dx$

（C）$F(-a)=1-\int_0^{a}\varphi(x)dx$ （D）$F(-a)=1-\int_{-\infty}^{a}\varphi(x)dx$

5. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的容量为 n 的简单随机样本，已知 $E(X)=\mu$，则对于任意的 $\epsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|\geq\epsilon)=$____A____

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 不可确定

6. 设样本 $X_1,\cdots,X_n$ 来自总体 X，$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$ 均未知，则下列正确的是____B____。

（A）$\frac{1}{n\text{-}1}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是 μ 的无偏估计 （B）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是 μ 的无偏估计

~~(C)~~ $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是 σ^2 的无偏估计　　　　(D) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})$ 是 σ 的无偏估计

7. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布，则 $P(X^2+Y^2\le 1)=$ __D__。

(A) $\frac{1}{4}$　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{\pi}{8}$　　(D) $\frac{\pi}{4}$

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，其分布函数分别为 $F_1(x),\ F_2(y)$，则 $\max(X,Y)$ 的分布函数

$F_{\max}(z)=P(\max(X,Y)\le z)=$ __B__。

(A) $F_1(x)F_2(y)$　　(B) $F_1(z)F_2(z)$　　(C) $\max\{F_1(z),F_2(z)\}$　　(D) $1-\max\{F_1(z),F_2(z)\}$

选择题答案：

B 卷：1. B　2. C　3. C　4. D　5. A　6. B　7. D　8. B

0.8 浇 0.9
0.2 没浇 0.15
活

二．选择题（每小题 4 分，共 8 分）

某人外出度假时请邻居为他的一盆绿植浇水。如果没浇水的话，待他回来时发现绿植死去的概率是 0.85；如果浇水的话，待他回来时发现绿植死去的概率是 0.1。假设他有 80%的把握确定邻居会记得浇水。试求：

(1) 待他回来时，绿植还活着的概率；C

(A) 0.95　　(B) 0.85　　(C) 0.75　　(D) 0.65

0.72
0.03

(2) 如果已知他回来时发现绿植死了，那么邻居忘记浇水的概率有多大？ B

(A) 0.58　　(B) 0.68　　(C) 0.78　　(D) 0.88

选择题答案：

$$\frac{0.2\cdot 0.85}{0.8\cdot 0.1+0.2\cdot 0.85}=\frac{0.17}{0.25}\qquad 0.68$$

B 卷：1. C　2. B

三．填空题（每小题 4 分，共 16 分）

1. 若随机变量 ξ 与 η 相互独立，且 $E\xi=1$，$E\eta=-1$，$D\xi=2$，$D\eta=1$，令 $\zeta_1=2\xi+3\eta$，$\zeta_2=2\xi-3\eta$，则 ζ_1 与 ζ_2 的相关系数 $\rho_{\zeta_1,\zeta_2}=$ __$-\frac{1}{17}$__。

$\mathrm{cov}(2\xi+3\eta,2\xi-3\eta)$
$=\mathrm{cov}(2\xi,2\xi)-\mathrm{cov}(3\eta,3\eta)$
$=4D\xi-9D\eta=-1$
$D\zeta_1=17$
$D\zeta_2=17$

2. 某人向同一目标独立地重复射击，设他每次射击命中目标的概率为 $p\ (0<p<1)$，则此人第 5 次射击命中且恰好是第 3 次命中的概率是__$6p^3(1-p)^2$__。

2中 2不中

$C_4^2\cdot p^2(1-p)^2$

— — — — P

$P(B|A+\bar{B})$

$= \frac{P(BA)}{P(A+\bar{B})} = \frac{P(A)\cdot P(B)}{P(A)+P(\bar{B})-P(A)P(\bar{B})} = \frac{0.4\cdot 0.3}{0.4+0.7-0.4\cdot 0.7} = \frac{12}{110-28} = \frac{12}{82} = \frac{6}{41}$

3. 已知事件 A、B 相互独立，且 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$，则 $P(B|A\cup\bar{B})=$ $\frac{6}{41}$ ______。

4. 已知 $a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}e^{-n}$，请利用中心极限定理，结合泊松分布，计算 $\lim_{n\to+\infty}a_n=$ $\cancel{n^2}$ $\frac{1}{2}$ ______。

填空题答案：

B 卷：1. $-\frac{1}{17}$ **2.** $6p^3(1-p)^2$ 或 $C_4^2p^3(1-p)^2$ **3.** $\frac{6}{41}$ **4.** $\frac{1}{2}$

四.（本题 16 分）

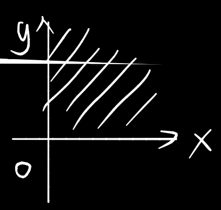
设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} xe^{-(x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，

(1) 求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$； (2) 判断 X 与 Y 是否相互独立，并说明原因；

(3) 计算 $E(2X+Y)$； (4) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$。

【解】

(1) [redacted]



(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

$=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ x\int_0^{+\infty}e^{-x}\cdot e^{-y}dy & x>0 \end{cases} = xe^{-x}\frac{\int_0^{+\infty}e^{-y}dy}{e^{-y}|_0^{+\infty}} = xe^{-x}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

$=\begin{cases} 0, & y\le 0 \\ \int_0^{+\infty}xe^{-x}dx = e^{-y} & y>0 \end{cases}$

(2) 独立 (3) $E(2X+Y)=2EX+EY$

$=2\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx+\int_0^{+\infty}e^{-y}dy$

$=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx - e^{-y}|_0^{+\infty}$

$= 4 +1 = \frac{5}{4}$

(4) $y>0$,

$f_{X|Y}=\frac{xe^{-x-y}}{e^{-y}}=xe^{-x}$

另解：
$$E(2X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(2x+y)f(x,y)dxdy$$
$$=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}2x^2e^{-x}e^{-y}dxdy+\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}xe^{-x}\cdot ye^{-y}dxdy=4+1=5$$

(4) $y>0$ 时，$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}xe^{-x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$ 3 分

五.（本题 12 分）A 卷第六题

设随机变量 X 服从区间[0,2]上的均匀分布，Y 服从区间[0,1]上的均匀分布，两者相互独立，求 $Z=X+Y$ 的概率密度函数。

[redacted]

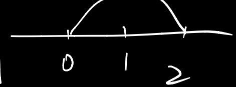
$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2,\ 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

① $z=X+Y \Rightarrow Y=-X+z$ $0<x<2$ $0<-x+z<1$ $z-1<x<z$

② $f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,-x+z)dx$



$$=\begin{cases}\int_0^z\frac{1}{2}dx=\frac{z}{2}, & 0<z<1\\ \int_{z-1}^{z}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}, & 1<z<2\\ \int_{z-1}^{2}\frac{1}{2}dx=\frac{3-z}{2} & 2<z<3\\ 0, & 其他\end{cases}$$

[redacted]

当 $2\le z<3$ 时，$F_Z(z)=P(X+Y\le z)=\int_0^{z-1}dx\int_0^1\frac{1}{2}dy+\int_{z-1}^{2}dx\int_0^{z-x}\frac{1}{2}dy=\frac{3}{2}z-\frac{z^2}{4}-\frac{5}{4}$ 2 分

求导可得，$f_Z(z)=\begin{cases} 0, & z\le 0 \text{ 或 } z\ge 3 \\ \dfrac{z}{2}, & 0<z<1 \\ \dfrac{1}{2}, & 1\le z<2 \\ \dfrac{3-z}{2}, & 2\le z<3 \end{cases}$ 2 分

六.（本题 12 分）A 卷第五题

设总体 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x>\theta \\ 0, & x\le\theta \end{cases}$，其中 $\theta>0$ 为未知参数，$X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，$x_1,\cdots,x_n$ 是样本值，试求：

(1) θ 的矩估计量；

$\int_\theta^{+\infty} xe^{-(x-\theta)}dx$

(2) θ 的极大似然估计量。

令 $x-\theta=t$ $\int_0^{+\infty}(t+\theta)e^{-t}dt$

【解】

(1) $E(X)=\int_\theta^{+\infty} xe^{-(x-\theta)}dx=\theta+1$ 2 分

$=\int_0^{+\infty}te^{-t}dt+\theta\int_0^{+\infty}e^{-t}dt$

令 $E(X)=\bar{X}$， 2 分

解出矩估计量为 $\hat{\theta}=\bar{X}-1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-1$ 2 分

(2) 似然函数为 $L(\theta)=\begin{cases} \prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\theta)}=e^{n(\theta-\bar{x})}, & \theta\le\min\{x_1,\cdots,x_n\} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$， 2 分

由于 $L(\theta)$ 关于 θ 单增，故而极大似然估计值为 $\hat{\theta}=\min\{x_1,\cdots,x_n\}$。 2 分

从而极大似然估计量为 $\hat{\theta}=\min\{X_1,\cdots,X_n\}$. 2 分

七.（本题 12 分）

大规模调查表明，正常成年女子的双耳在 4kHZ 频率时的纯音气导听阈值平均为 12dB。为研究某工厂纺织机噪声对纺织女工听力是否有影响，现从该厂随机调查了 16 名工龄 2 年以上的纺织女工，测得其听阈值（dB）的平均值为 16.5，样本标准差为 4.8。

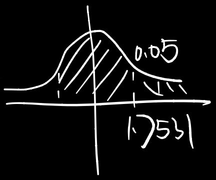
(1) 求该厂工龄 2 年以上纺织女工听阈值的置信度为 0.9 的置信区间。

(2) 是否可以认为这些纺织女工的听力正常？(显著性水平 $\alpha = 0.05$)

可能用到的数据：$t_{0.1}(15) = 1.3406$，$t_{0.1}(16) = 1.3368$，$t_{0.05}(15) = 1.7531$，$t_{0.05}(16) = 1.7459$，

$t_{0.025}(15) = 2.1315$，$t_{0.025}(16) = 2.1199$

[redacted]



$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

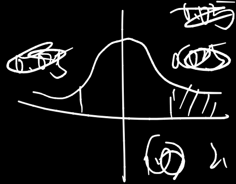
$\frac{16.5-\mu}{4.8/4} \sim t(15)$

$\left|\frac{16.5-\mu}{1.2}\right| < 1.7531$

① $H_0 \geq 12$　$H_1: \mu \neq 12$

② $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(15)$

0.05



$\frac{16.5-12}{1.2} = 3.\cdots$

拒绝