第一章 随机事件与概率

第四节 条件概率及事件的独立性

- 条件概率
- 乘法定理
- 全概率公式与贝叶斯公式
- 事件的独立

理解条件概率的定义；掌握并会应用乘法定理、全概率公式与贝叶斯公式求解问题；

一. 条件概率

概念的引出：

考试中单选题有4个选项，
甲在完全不会的情况下，选对的概率是多少？ $\frac{1}{4}$

乙已知某一选项肯定不对的情况下,选对的概率？ $\frac{1}{3}$

条件概率 —— 在事件B已发生的条件下,事件A发生的概率,记为 $P(A|B)$

引例一盒中混有100只新，旧乒乓球，各有红、白两色，分类如下表。从盒中随机取出一球，若取得的是一只红球，试求该红球是新球的概率。

	红	白
新	40	30
旧	20	10

解：设B--从盒中随机取到一只红球.

A--从盒中随机取到一只新球

$$n_B = 60 \qquad n_{AB} = 40$$

$$P(A \mid B) = \frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{2}{3}$$

缩小样本空间

引例一盒中混有100只新，旧乒乓球，各有红、白两色，分类如下表。从盒中随机取出一球，若取得的是一只红球，试求该红球是新球的概率。

解：设B--从盒中随机取到一只红球.

A--从盒中随机取到一只新球

	红	白
新	40	30
旧	20	10

$$\boldsymbol{P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}}\qquad P(AB)=\frac{40}{100},\ P(B)=\frac{60}{100}$$

$$P(A|B)=\frac{2}{3}$$

1. **定义**：设 A ,B是两个事件, 则称 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的

条件概率, 其中 $P(B)>0$

注：▲ 类似: $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$, $(P(A)>0)$

2. **计算**

1) 用定义计算: $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$, $P(B)>0$ $\quad S$

2) 用比值计算: $P(A|B)=\dfrac{n_{AB}}{n_B}=\dfrac{AB\text{中样本点个数}}{B\text{中样本点个数}}$ $\quad S_B$

即缩小样本空间

3. 性质

第二节中概率性质1 ~5 对条件概率都成立,常用的有:

$$(1)\ P(\Phi|B)=0$$

$$(2)\ P(A|B)=1-P(\overline{A}|B)$$

$$(3)\ P(A_1\cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$$

例1.

$$10\text{件产品}\begin{cases}7\text{件正品}\begin{cases}3\text{件一等品}\\4\text{件二等品}\end{cases}\\3\text{件次品}\end{cases}$$

现从这10件中任取一件,已知它是正品,求它是一等品的概率. $P(A|B)$

解：　设 A={取到一等品}，B={取到正品}

$k_B: 7$

$k_{AB}: 3$

$n: 10$

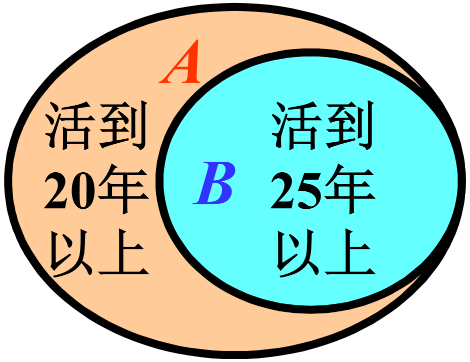
方法1：S_B　$P(A|B)=\dfrac{3}{7}$

方法2：S　$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{3/10}{7/10}=\dfrac{3}{7}$

例2 设某种动物由出生算起活到20年以上的概率为0.8，活到25年以上的概率为0.4. 问现年20岁的这种动物,它能活到25岁以上的概率是多少？

解： 设A={能活20年以上}，B={能活25年以上}

所求为 $P(B|A)$.



依题意，

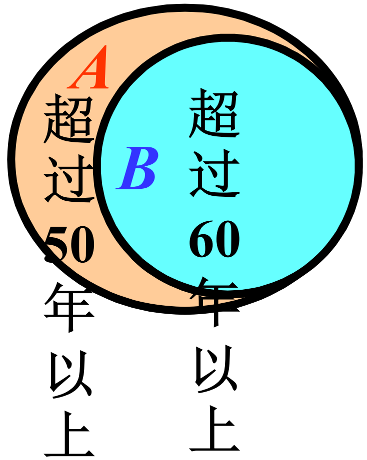
$$P(A) = 0.8,\ P(B) = 0.4$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{0.4}{0.8} = 0.5$$

例3 按设计要求，某建筑物使用超过50年的概率为0.8，超过60年的概率为0.7，若该建筑已经使用了50年，求它在10年内倒塌的概率。

解：$A=$ {该建筑物使用超过50年} $P(A)=0.8$

$B=$ {该建筑物使用超过60年} $P(B)=0.7$



题意求 $P(\overline{B}|A)$

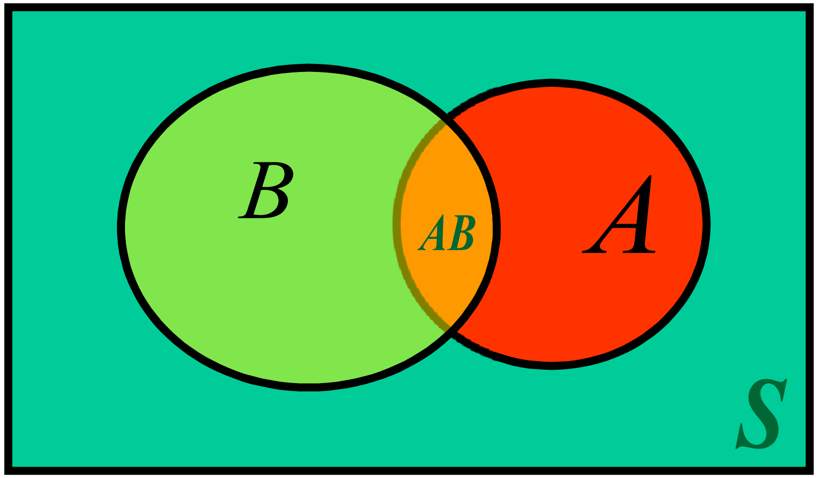
$$P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)$$

又 $$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{0.7}{0.8}=\frac{7}{8}$$

故 $$P(\overline{B}|A)=1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$$

归 纳

事件A的概率 $P(A)$、条件概率 $P(A|B)$ 及 $P(AB)$ 的区别



$$P(A)=\frac{n_A}{n}$$

$$P(AB)=\frac{n_{AB}}{n}$$

$$P(A|B)=\frac{n_{AB}}{n_B} \geq P(AB)$$

设S中样本点个数为n

A中样本点个数为n_A

B中样本点个数为n_B

AB中样本点个数为n_{AB}

二. 乘法定理

由条件概率的定义: $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$， $P(B)>0$

若已知: $P(B), P(A|B)$ ， 求 $P(AB)$?

定理1: 设 $P(B)>0$ 或 $P(A)>0$，则:

$$P(AB)=P(B)P(A|B)=P(A)P(B|A)$$

注: 乘法定理可推广到多个事件的积事件的情形:

(1) $P(ABC)=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|AB)$ $P(AB)>0$

(2) $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1A_2)\cdot$

$$\cdots\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots\cdots A_{n-1})$$

例4 波里亚罐子模型

一个罐子中包含b个白球和r个红球.随机地抽取一个球，观看颜色后放回罐中,并且再加进c个与所取出的球具有相同颜色的球.连续进行四次.

试求：

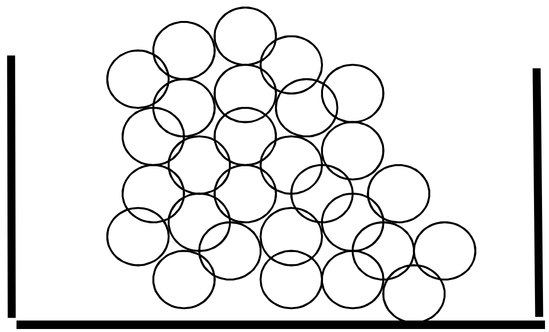
第一、二次取到白球,第三、四次取到红球的概率？

解：

设W_i={ 第i次取出的是白球 },

R_j={ 第j次取出的是红球 },

$i, j=1, 2, 3, 4$



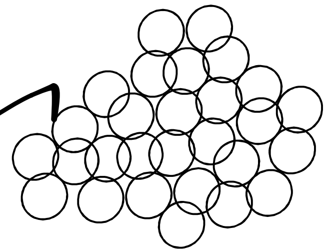
求：$P(W_1W_2R_3R_4)$

b个白球, r个红球

罐中 $\begin{cases} b\text{个白球} + c\text{个白球} + c\text{个白球} \\ r\text{个红球} + c\text{个红球} \end{cases}$

设 W_i={ 第 i 次取出的是白球 },

R_j={ 第 j 次取出的是红球 },



取球观察后加进 c 个与所取球同色的球

由乘法定理:

$$P(W_1W_2R_3R_4)$$

$$= P(W_1)\,P(W_2|W_1)\,P(R_3|W_1W_2)\,P(R_4|W_1W_2R_3)$$

$$= \frac{b}{b+r}\cdot\frac{b+c}{b+r+c}\cdot\frac{r}{b+r+2c}\cdot\frac{r+c}{b+r+3c}$$

例5. 箱子中装有10瓶形状相同的名酒,其中部优名酒7瓶,国优名酒3瓶,今有三人从箱子中随机的取酒,每人只拿2瓶.

$$10\text{瓶名酒}\begin{cases}\text{部优}7\text{瓶}\\ \text{国优}3\text{瓶}\end{cases}$$

问:恰好第一个人拿到两瓶部优名酒,

第二个人拿到部优、国优名酒各一瓶,

第三个人拿到两瓶国优名酒的可能性有多大?

$$\frac{C_7^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_5^1 C_3^1}{C_8^2}\cdot\frac{C_2^2}{C_6^2}$$

解: 设A={第一个人拿到两瓶部优名酒}

B={第二个人拿到部优、国优名酒各一瓶}

C={第三个人拿到两瓶国优名酒}

显然,所求事件的概率为:$P(ABC)$

$$P(ABC)=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|AB)$$

$$P(A)=\frac{C_7^2}{C_{10}^2}=0.437$$

10瓶名酒 $\begin{cases}\text{部优7瓶}\\ \text{国优3瓶}\end{cases}$

$$P(B|A)=\frac{C_5^1\cdot C_3^1}{C_8^2}=0.536$$

8瓶名酒 $\begin{cases}\text{部优5瓶}\\ \text{国优3瓶}\end{cases}$

$$P(C|AB)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=0.067$$

6瓶名酒 $\begin{cases}\text{部优4瓶}\\ \text{国优2瓶}\end{cases}$

故： $P(ABC)=0.467\times 0.536\times 0.067=0.017$

10瓶名酒 $\begin{cases}\text{部优7瓶}\\ \text{国优3瓶}\end{cases}$

A={第一个人拿到2瓶部优名酒}

B={第二个人拿到部优、国优名酒各1瓶}

C={第三个人拿到2瓶国优名酒}

例6.

设某光学仪器厂制造的透镜,

第一次落下时打破的概率为 $\frac{1}{2} = P(A_1)$

若第一次落下时未打破,第二次落下打破的概率 $\frac{7}{10} = P(A_2|\overline{A}_1)$

若前两次落下未打破,第三次落下打破的概率为 $\frac{9}{10} = P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)$

试求： 透镜落下三次未打破的概率。$P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{10}$

解： 设 $A_i = \{$透镜第 i 次落下打破 $\}$, $i = 1, 2, 3$

$B = \{$透镜落下三次而未打破 $\}$

因为：$B = \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3$，所以有：

$$P(B) = P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2|\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_3|\overline{A}_1 \overline{A}_2)$$

$$= (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{7}{10})(1 - \frac{9}{10}) = \frac{3}{200}$$

例7 为了防止意外,矿井内同时装有A 与B两种报警设备，已知设备 A 单独使用时有效的概率为0.92，设备 B 单独使用时有效的概率为0.93，在设备 A 失效的条件下，设备B 有效的概率为 0.85， 求发生意外时至少有一个报警设备有效的概率.

解 设事件 A, B 分别表示设备A, B 有效

已知 $P(A)=0.92$ $P(B)=0.93$ $P(B|\overline{A})=0.85$

求 $P(A\cup B)$

由 $P(B|\overline{A})=\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\dfrac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}\Rightarrow P(AB)=0.862$

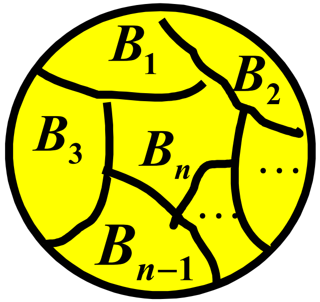
故 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$=0.92+0.93-0.862=0.988$

三. 全概率公式和贝叶斯公式

全概率公式主要用于计算比较复杂的事件的概率：若一个事件的概率不容易计算，则可将它拆成若干个互斥事件的概率和.

1. 样本空间的划分



定义：设S为试验E的样本空间，

$B_1, B_2, \cdots B_n$是E的一组事件，

若：(1) $B_iB_j = \Phi \quad i \neq j, \quad i, j = 1,2,\cdots\cdots n$

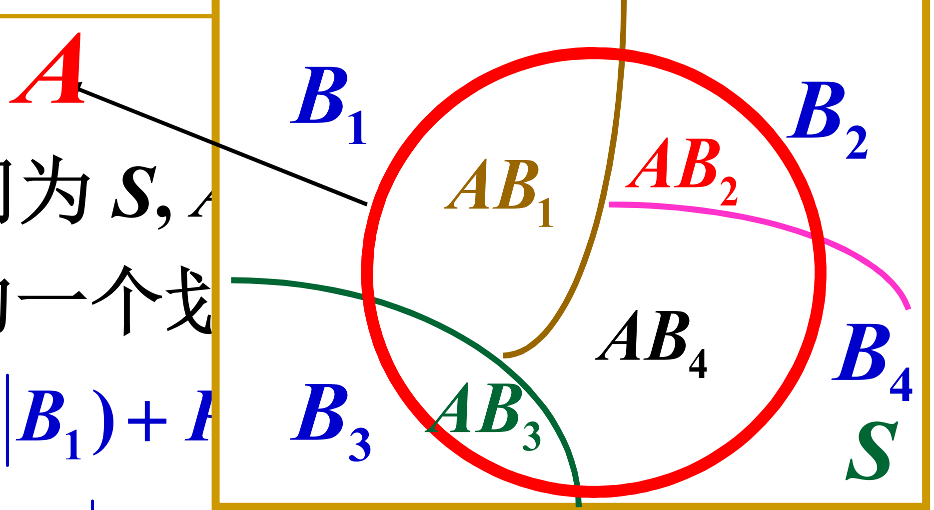
(2) $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = S$

则称 $B_1, B_2, \cdots B_n$ 是样本空间S的一个划分，或是一个互斥事件完备组。

2. 全概率公式

定理2 设试验E的样本空间为 S, A

$B_1, B_2, \cdots, B_n$为S 的一个戈

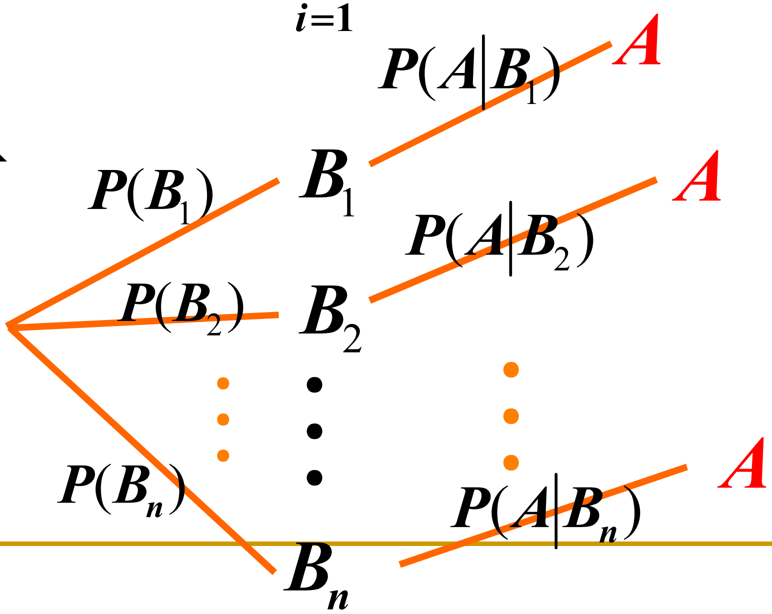


则：$P(A) = P(B_1)\cdot P(A|B_1) + P$

$$+ P(B_n)\cdot P(A|B_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P(A|B_i)$$

概率树



例 有三个箱子，分别编号为1,2,3，

1号箱装有1个红球4个白球；

2号箱装有2个红球3个白球；

3号箱装有3个红球2个白球；

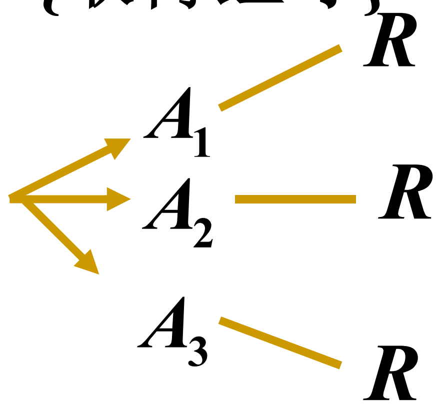
某人从三箱中任取一箱，从中任意摸出一球，

求：取得红球的概率.

解： 记 A_i= {从i号箱取球}, i=1, 2, 3； R = {取得红球}

即：$R = A_1R \cup A_2R \cup A_3R$

且： A_1R、A_2R、A_3R两两互斥

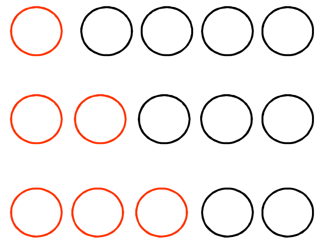


$$P(R)=P(A_1R)+P(A_2R)+P(A_3R)$$

$$= P(A_1)P(R|A_1) + P(A_2)P(R|A_2) + P(A_3)P(R|A_3)$$

记 A_i= {从i号箱取球}, i=1, 2, 3;

R = {取得红球}



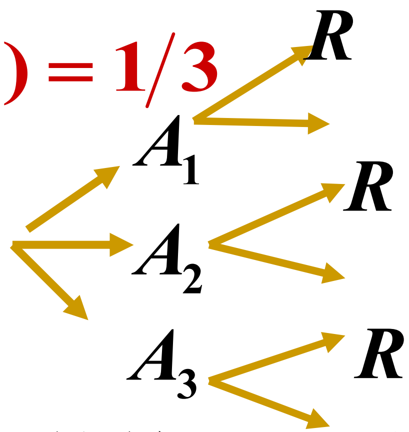
$$P(R)=P(A_1R)+P(A_2R)+P(A_3R)$$

$$= P(A_1)P(R|A_1)+P(A_2)P(R|A_2)+P(A_3)P(R|A_3)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}$$

$$= \frac{6}{15}$$

$P(A_i)=1/3$



将此例中所用的方法推广到一般的情形，就得到在概率计算中常用的 全概率公式.

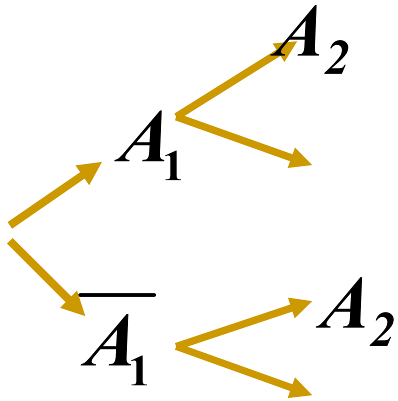
例8 袋中有3个白球，7个红球从中任取一球，不放回，求第二次取出白球的概率.

解：$A_2=$ {第二次取到白球}

法一：由抽签问题知 $P(A_2)=\dfrac{3}{10}$

法二：用全概率公式

$A_i=$ {第i次取到的白球} $(i=1,2)$



则 $S=A_1\cup\overline{A_1}$ 又因为 $A_2=A_1A_2\cup\overline{A_1}A_2$

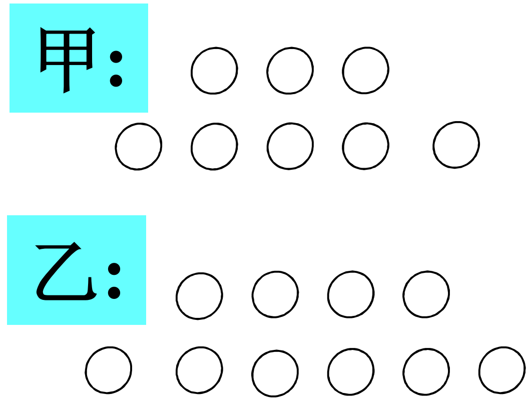
$$P(A_2)=P(A_1A_2)+P(\overline{A_1}A_2)$$

$$=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)+P(\overline{A_1})\cdot P(A_2|\overline{A_1})$$

$$=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}+\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{3}{10}$$

例9. 设甲袋中有3个白球,5个红球, 乙袋中有4个白球,6个红球， 现从甲袋中任取一个球放入 乙袋中, 再从乙袋中任取一球。

求：从乙袋中取得白球的概率。



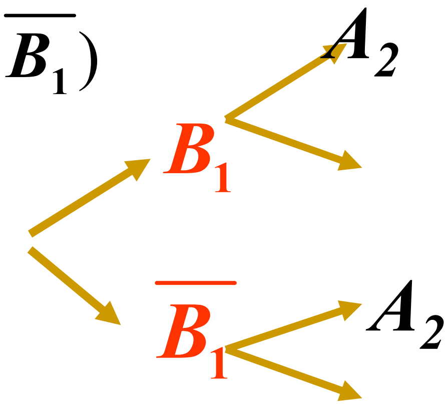
解: 设A_2={从乙袋中取得白球}

B_1 = {从甲袋中任取一球是白 球}

$$P(A_2)=P(B_1)\cdot P(A_2|B_1)+P(\overline{B_1})\cdot P(A_2|\overline{B_1})$$

$$=\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{11}+\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{11}$$

$$=\frac{35}{88}=0.398$$



3. 贝叶斯公式(逆概公式)

例1 某工厂有三条流水线生产同一种产品，三条流水线的产量分别占该产品总产量的46%, 33%, 21%,且三条流水线生产产品的次品率分别是 0.015，0.025，0.035 .

现任取一件产品是次品，来自哪条流水线的可能性最大?

解 设A ={取出的一件是次品}

B_i ={取出的次品来自第i条流水线} $i = 1,2,3$

求：
$$P(B_i|A)=\frac{P(B_iA)}{P(A)}=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\underbrace{\sum_{j=1}^{3}P(B_j)P(A|B_j)}_{\text{全概率公式}}}$$

将这里得到的公式一般化，就得到：贝叶斯公式

定理3. 设试验 E 的样本空间为 S, A为 E 的事件,

$B_1, B_2 \cdots B_n$为S的一个划分, 且 $P(A)>0$, $P(B_i)>0$

则 $$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)},\quad i=1,2,\cdots,n$$

称为贝叶斯 (**Bayes**) 公式

证明:

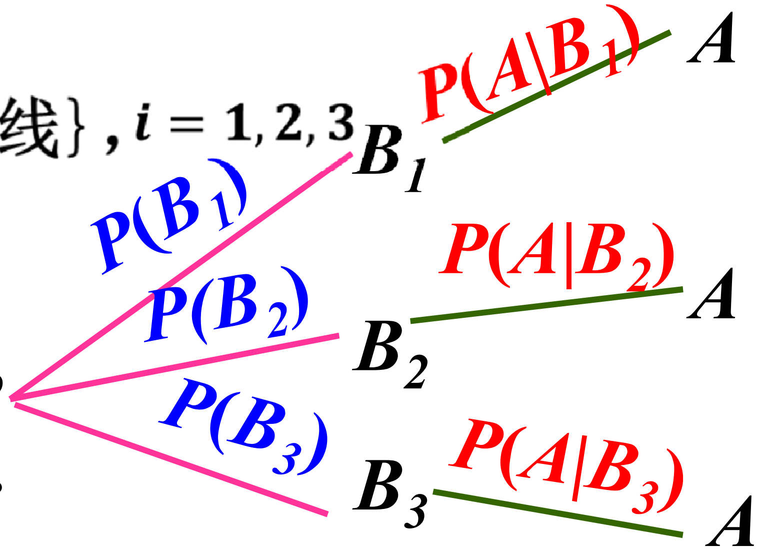
$$P(B_i|A)=\frac{P(B_iA)}{P(A)}=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)},\quad i=1,2,\cdots,n$$

3. 贝叶斯公式(逆概公式)

例1 某工厂有三条流水线生产同一种产品，三条流水线的产量分别占该产品总产量的46%, 33%, 21%,且三条流水线生产产品的次品率分别是 0.015, 0.025, 0.035 . 现任取一件产品是次品，来自哪条流水线的可能性最大?

解 设A ={取出的一件是次品}

B_i ={取出的次品来自第i条流水线}, $i=1,2,3$



$$P(B_1)=0.46,\qquad P(A\mid B_1)=0.015,$$
$$P(B_2)=0.33,\qquad P(A\mid B_2)=0.025,$$
$$P(B_3)=0.21,\qquad P(A\mid B_3)=0.035.$$

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)$$

3. 贝叶斯公式(逆概公式)

例1 某工厂有三条流水线生产同一种产品, 三条流水线的产量分别占该产品总产量的46%, 33%, 21%,且三条流水线生产产品的次品率分别是 0.015, 0.025, 0.035 .
现任取一件产品是次品, 来自哪条流水线的可能性最大?

解 由贝叶斯公式有:

$$P(B_1|A)=\frac{P(AB_1)}{P(A)}=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)}=0.306$$

0.367

同理 $P(B_2|A)=0.367$, $P(B_3|A)=0.327$,

该次品来自第二条流水线的可能性最大.

故投资改造第二条流水线.