2.5 谓词逻辑推理理论

谓词演算推证的基本思路是将量词消去，然后用类似命题演算推证法证明。

2.5.1 谓词演算推证

- 谓词演算推证也是由三个要素组成：推理根据、推理规则和证明方法。
- 推理根据：
  - 一方面命题演算推证中命题定律和推理定律的代换实例可以作为谓词演算推证的推理依据；
  - 一方面谓词演算的基本逻辑等价式：
    - 量词否定逻辑等价式
    - 量词辖域的收缩与扩张逻辑等价式
    - 量词分配逻辑等价式
    - 具有两个量词的逻辑等价式
    - 量词与联结词的逻辑蕴涵式
    - 具有两个量词的逻辑蕴涵式

2.5.1 谓词演算推证

- 证明方法：
  - 直接证法
  - 间接证明方法
    - 反证法
    - 附加前提证法。

2.5.1 谓词演算推证

- 推理规则：
- P规则
- T规则
- CP规则
- 消去和添加量词的规则

2.5.1 谓词演算推证

- 1）US规则（全称指定规则）

$$\frac{\forall x P(x)}{\therefore P(c)}$$

这里P是谓词，而c是个体域中某个任意的个体。

- 例如，设个体域为全体偶数的集合，P(x)表示“x是整数”，则□xP(x)表示“所有的偶数都是整

么根据全称指定规则有P(6)，即“6是整数”。

- 全称指定规则在使用时要求x是P(x)中自由出现的个体变元。该规则使用时还可以有以下形式

$$\frac{\forall x P(x)}{\therefore P(y)}$$

- 注意：这里y是任意的不在P(x)中约束出现的个体变元。

2.5.1 谓词演算推证

- 2）UG规则（全称推广规则）

$$\frac{P(x)}{\therefore \forall y P(y)}$$

- 设E是指定的个体域，若对于E中的任意个体a，都有P(a)成立，才能应用该全称推广规则。
- 例如，设个体域是全体人类，P(x)表示“x是要死的”。显然，对于任意一个人a，P(a)都成立
人都是要死的。则应用全称推广规则有$\forall x P(x)$成立。
- 注意：全称推广规则在使用时要求y不在P(x)中约束出现。

2.5.1 谓词演算推证

- 3）ES规则（存在指定规则）

$$\frac{\exists x P(x)}{\therefore P(c)}$$

- 这里c是指定个体域中的某一个个体。但需注意的是，应用存在指定规则时，指定的个体c不是任意的。
- 例如，设个体域是全体整数，P(x)表示“x是偶数”，Q(x)表示“x是奇数”，显然，P(2)和Q(3)都为真，P(2
为真。这里$\exists x P(x)$和$\exists x Q(x)$都为真，但$P(2) \wedge Q(2)$为假。
- 注意：存在指定规则在使用时要求：
- （1）c是使P(c)为真的指定个体域中的某一个个体。
- （2）c不曾在P(x)中出现过。在具体的推证过程中还要求c不在以前步骤中出现过。
- （3）P(x)中除x外还有其他自由出现的个体变元时，不能用此规则。

2.5.1 谓词演算推证

- （4）EG规则（存在推广规则）

$$\frac{P(c)}{\therefore \exists x P(x)}$$

- 这里c是指定个体域中的某一个个体，该规则的成立是显然的。
- 设个体域是全体人类，P(x)表示“x是天才”，P(爱因斯坦)表示“爱因斯坦是天才”是成立的，
成立。
- 注意：存在推广规则在使用时要求取代c的x不在P(c)中出现。

2.5.2 谓词演算推证举例

例2.16 设前提为□x□yF(x, y)，下面的推证是否正确?

(1) □x□yF(x, y) P

(2) □yF(y, y) T (1) US

解：推证不正确。

取解释I：个体域为R，在I下前提被解释为□x□y(x>y)，为真；

而□yF(y, y)被解释为□y(y>y)，为假。

所以推理不正确。

错误的原因是第(2)步违反了US规则成立的条件。

2.5.2 谓词演算推证举例

例2.17 设前提为$\forall x\exists yF(x, y)$，下面的推证是否正确?

(1) $\forall x\exists yF(x, y)$ P

(2) $\exists yF(t, y)$ T (1) US

(3) $F(t, c)$ T (2) ES

(4) $\forall xF(x,c)$ T (3) UG

(5) $\exists y\forall x F(x,y)$ T (4) EG

解 推证不正确。

取与例2.16相同的解释，则$\forall x\exists yF(x,y)$为真；

而$\exists y\forall x F(x,y)$意为“存在着最小实数”，是假命题，

所以推理不正确。

之所以出现这样的错误，是第(3)步违反了ES规则成立的条件。

2.5.2 谓词演算推证举例

例2.18 **试证明□x(P(x)□Q(x))∧□x(Q(x)□R(x))□□x(P(x)□R(x))**

证：(1)□x(P(x)□Q(x)) P

(2)P(y)□Q(y) T (1) US

(3)□x(Q(x)□R(x)) P

(4)Q(y)□R(y) T (3) US

(5)P(y)□R(y) T (2)(4) I

(6)□x(P(x)□R(x)) T (5) UG

证毕。

2.5.2 谓词演算推证举例

例2.19 试证明$\square x(C(x)\square W(x)\wedge R(x))\wedge\square x(C(x)\wedge Q(x))\square\square x(Q(x)\wedge R(x))$

证：(1) $\square x(C(x)\wedge Q(x))$ P

(2) $C(a)\wedge Q(a)$ T (1) ES

(3) $\square x(C(x)\square W(x)\wedge R(x))$ P

(4) $C(a)\square W(a)\wedge R(a)$ T (3) US

(5) $C(a)$ T (2) I

(6) $W(a)\wedge R(a)$ T (4)(5) I

(7) $Q(a)$ T (2) I

(8) $R(a)$ T (6) I

(9) $Q(a)\wedge R(a)$ T (7)(8) I

(10) $\square x(Q(x)\wedge R(x))$ T (9) EG

证毕。

2.5.2 谓词演算推证举例

- **注意：**
- **在推证过程中，如既要使用规则US又要使用规则ES消去公式中的量词，而且选用的个体是 号，则必须先使用规则ES，再使用规则US。**
- **在例2.19的推理过程中(2)(3)与(4)两条就不能颠倒，若先用US规则得到C(a)□W(a)∧R(a)，则 规则时，不一定得到C(a)∧Q(a)，一般应为C(b)∧Q(b)，故无法推证下去。**

2.5.2 谓词演算推证举例

例2.20 证明苏格拉底三段论：“所有的人都是要死的，苏格拉底是人，所以苏格拉底是要

证：设$H(x)$：x是一个人，$D(x)$：x是要死的，a：苏格拉底。

则本论证形式化为：$\forall x(H(x)\rightarrow D(x))\land H(a)\rightarrow D(a)$;

(1) $\forall x(H(x)\rightarrow D(x))$	P
(2) $H(a)\rightarrow D(a)$	T (1) US
(3) $H(a)$	P
(4) $D(a)$	T (2)(3) I

证毕。

2.5.2 谓词演算推证举例

例2.21 试证明下列推论的有效性。

有些病人喜欢一切医生，但是没有一个病人喜欢骗子，因此医生都不是骗子。

证：设P(x)：x是病人，D(x)：x是医生，Q(x)：x是骗子，L(x,y)：x喜欢y。

则本论证形式化为：$\exists x(P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x, y))) \wedge \forall x(P(x)\to\forall y(L(x, y)\to \neg Q(y))) \Rightarrow \forall y(D(y)\to \neg Q(y))$

(1) $\exists x(P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x, y)))$ P

(2) $P(a)\wedge\forall y(D(y)\to L(a, y))$ T (1) ES

(3) $\forall x(P(x)\to\forall y(L(x, y)\to \neg Q(y)))$ P

(4) $P(a)\to\forall y(L(a, y)\to \neg Q(y))$ T (3) US

(5) $P(a)$ T (2) I

(6) $\forall y(L(a,y)\to \neg Q(y))$ T (4)(5) I

(7) $L(a, y)\to \neg Q(y)$ T (6) US

(8) $\forall y(D(y)\to L(a, y))$ T (2) I

(9) $D(y)\to L(a, y)$ T (8) US

(10) $D(y)\to \neg Q(y)$ T (7)(9) I

(11) $\forall y(D(y)\to \neg Q(y))$ T (10) UG

证毕。

2.5.2 谓词演算推证举例

例2.22 我国目前有三类银行在从事各种外币以及人民币的金融业务：一批国家以及地方资
的国有银行，若干家民营资本控股的私有银行以及外国资本控股的外资银行。有的银行
金大的大客户的业务(如外资银行)，有的银行兼做大客户和小客户的业务(如国有银行和
行)。已知b银行不是国有银行，但它兼做大客户和小客户的业务。证明它是一家私有银

证：设 G(x)：x是国有银行，S(x)：x是私有银行，W(x)：x是外资银行，D(x)：x做大客户
务，X(x)：x做小客户业务。

则本论证形式化为：$\forall x(G(x) \vee S(x) \vee W(x)) \wedge \forall x(W(x) \rightarrow D(x) \wedge \neg X(x))$

$\wedge \forall x((G(x) \vee S(x)) \rightarrow (D(x) \wedge X(x))) \wedge \neg G(b) \wedge D(b) \wedge X(b) \Rightarrow S(b)$

2.5.2 谓词演算推证举例

则本论证形式化为：□x(G(x)□S(x)□W(x))，□x(W(x)□D(x) □□X(x))，□x(G(x)□S(x)□D(x)□X(x))，□G(b)，D(b)，
□S(b)

用反证法证明

(1)□S(b) P（结论的否定）

(2)□x(G(x)□S(x)□W(x)) P

(3)G(b)□S(b)□W(b) T (2) US

(4)G(b)□W(b) T (1)(3) I

(5)□G(b) P

(6)W(b) T (4)(5) I

(7)□x(W(x)□D(x) □□X(x)) P

(8)W(b)□D(b) □□X(b) T (7) US

(9)D(b) □□X(b) T (6)(8) I

(10)□X(b) T (9) I

(11)X(b) P

(12)X(b) □□X(b) T (10)(11) I

由于X(b) □□X(b) □0，所以推理正确。

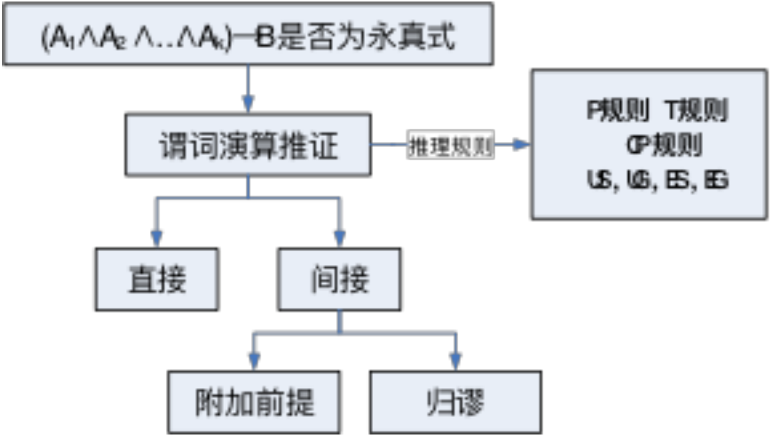
证毕。

小结

- 谓词演算推证中利用US,ES规则可将谓词演算的推证转化为命题演算的推证，再通过UG,EG转化
- 关于四条规则使用的特别提示：
- （1）当既要使用规则US又要使用规则ES消去公式中的量词，而且选用的个体是同一个符号
须先使用规则ES，再使用规则US。然后再使用命题演算中的推理规则，最后使用规则UG或
引入量词，得到所要的结论。
- （2）如一个变量是用规则ES消去量词，对该变量在添加量词时，则只能使用规则EG，而不
规则UG；如使用规则US消去量词，对该变量在添加量词时，则可使用规则EG和规则UG。
- （3）如有两个含有存在量词的公式，当用规则ES消去量词时，不能选用同样的一个常量符
两个公式中的变元，而应用不同的常量符号来取代它们。
- （4）在用规则US和规则ES消去量词时，此量词必须位于整个公式的最前端（一般化为前束
式）。

小结

- 本小节内容思维形式注记图



作业

- 2.5补充习题

北京
University of S

2.6 常见题型解析

- 1)一阶逻辑中命题符号化
- （1）在命题符号化的过程中，要先看是否指明了个体域，若没有事先指明个体域，则个体
个体域。这时要对每个个体变元的变化范围，用特性谓词加以限制；
- （2）选择适当的量词——全称量词或存在量词，而且，对于全称量词一般特性谓词须作蕴
件；对于存在量词一般特性谓词应作合取项；
- （3）不同个体域内，命题符号化形式可能不同也可能相同，真值可能不同也可能相同；
- （4）由于语言习惯，汉语中常将一些词省略，在翻译时必须补充上，否则语义不通；
- （5）在选择谓词时应注意所述命题是刻画客体的性质，还是反映客体与客体的关系，前者
词，后者用多元谓词。

2.6 常见题型解析

- 2）给定解释，解释给定的公式，并求出公式真值
- 1）首先要区分公式是闭式还是非闭式，如果是闭式则一定是命题，有确定的真假值，如果
  则有可能是命题．也有可能不是命题，要视具体情况具体分析；
- （2）公式的真值与个体域有关，在不同的个体域下其真值可能不同；
- （3）在求真值时，应首先将公式进行解释，如果是有限个体域，则可以具体表示出来，然
  值。

2.6 常见题型解析

- 3）判定公式的类型
  - (1)找到相对应的命题公式，将所判公式作为其代换实例。如果命题公式是重言式(矛盾式)，式亦为逻辑有效式（不可满足式）；
  - (2)用推证方法进行判断；
  - (3)如果估计该公式既不是逻辑有效的也不是不可满足的，则分别给出两种解释I1、I2，使其同。

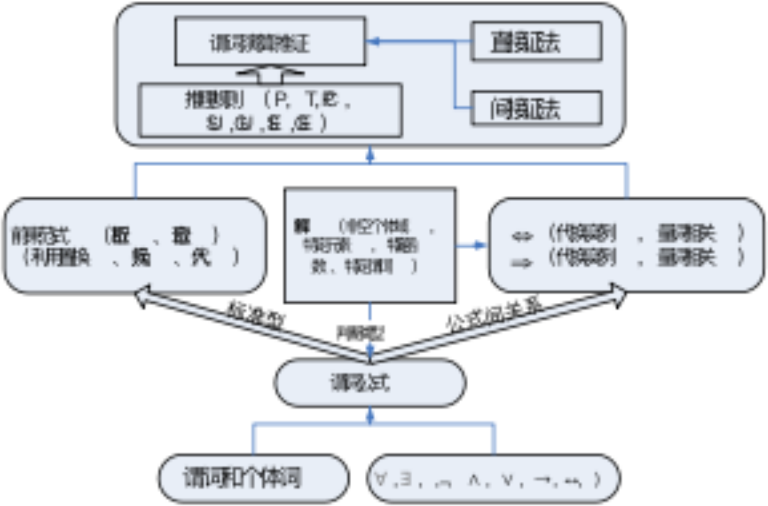
2.6 常见题型解析

- 4）证明公式间的逻辑等价关系
- 利用基本的逻辑等价式，通过逻辑等价演算进行证明。
- 要**熟记命题逻辑的基本逻辑等价式和谓词逻辑中有关量词的若干逻辑等价式**。
- 5）在有限个体域内消去公式中的量词
- 针对有限元素的个体域，利用消去量词逻辑等价式将公式中的量词消去一般方法有：
  - （1）直接消去量词；
  - （2）先缩小量词辖域再消去量词。

2.6 常见题型解析

- 6）求给定公式的前束范式
  - (1)如果存在相重的约束变元或自由变元，必须进行换名或代入．使每个变元仅存一种状态；
  - (2)正确使用谓词公式的各种逻辑等价关系。
- 7）谓词演算推证
  - 在谓词演算推证过程中，必须注意遵守所使用的各项推理规则的限制条件。
  - 当既需要消去存在量词又需要消去全称量词的时候，一般应先消去存在量词，后消去全称量
  - 当结论是蕴涵式时，可考虑使用附加前提证明法。
  - 当前提较少并且都为蕴涵式或析取式时，会感到无处下手，这时往往用归谬法，将结论的否
  附加前提引入，以增加可用的前提。

本章知识逻辑结构图



本篇知识逻辑结构图