第二章 一维随机变量及其分布

要求：会求一维随机变量函数的分布

一. 随机变量的函数的定义(见书)

二. 离散型随机变量的函数的分布

若 X是离散型随机变量, 则 $Y = g(X)$也是一个离散型随机变量，$Y= g(X)$的分布可直接求出.

例1. 已知 X 的概率分布为:

X	5	10
P_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

求：$Y = 2X$ 的概率分布(分布律).

解： Y的可能取值 $y_1 = 10, y_2 = 20$

X	5	10
Y	10	20
P_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

例2. 已知 X 的概率分布为:

X	0	1	2	3	4	5
P_k	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

求: $Y=(X-2)^2$ 的概率分布(分布律)

解:

X	0	1	2	3	4	5
Y	4	1	0	1	4	9
P_k	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

Y	0	1	4	9
P_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{9}$

归纳:

若X是离散型 随机变量，X的概率分布为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
P_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

则 $Y = g(X)$ 的概率分布为:

Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_n)$	$\cdots$
P_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

注意: 如果$g(x_k)$中有一些是相同的，把它们作适当并项即可.

三. 连续型随机变量的函数的分布

问题： 已知 $Y = g(X)$ 和 $f_X(x)$， 求$f_Y(y)$

分布函数法： (1) 求$F_Y(y)$

(2) $F'_Y(y) = f_Y(y)$

例3. 设 X 服从区间 (0, 2) 上的均匀分布.

求：$Y = X^2$的概率密度

解：(1) 求$F_Y(y)$　　$\because$ X非零密度函数的取值区间(0,2)

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 0<x<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$\therefore$ Y非零密度函数的取值区间为(0,4)

当$y<0$时　　$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\phi)=0$

当 $0\le y<4$ 时 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$

$$=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)dx=\int_0^{\sqrt{y}} f_X(x)dx=\frac{1}{2}\sqrt{y}$$

当 $y\ge 4$ 时　$F_Y(y)=P(Y\le y)=1$

例3. 设 X 服从区间 (0, 2) 上的均匀分布.

求：$Y = X^2$ 的概率密度

解：(1) 求 $F_Y(y)$

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{y} & 0 \le y < 4 \\ 1 & 4 \le y \end{cases}$$

(2) $f_Y(y) = F_Y'(y)$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} y^{-\frac{1}{2}} & 0 < y < 4 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

例3. 设 X 服从区间 $(0, 2)$ 上的均匀分布.

求：$Y = X^2$ 的概率密度

解:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} y^{-\frac{1}{2}} & 0 < y < 4 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

当 $y < 0$ 时 $\quad f_Y(y) = 0$

当 $0 \le y < 4$ 时 $\quad F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y)$

$$= P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)dx = \int_0^{\sqrt{y}} f_X(x)dx$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}(\sqrt{y})' = \frac{1}{4} y^{-\frac{1}{2}}$$

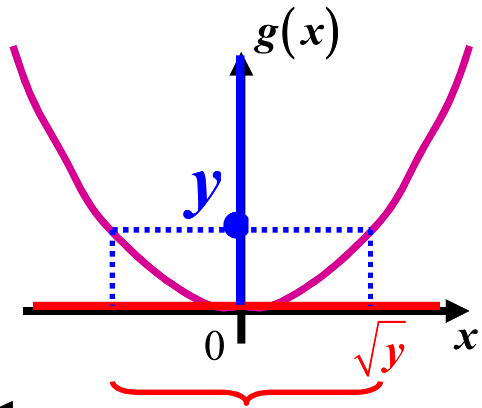
$$\left(\int_a^{g(x)} f(t)\,dt\right)' = f(g(x))\,g'(x)$$

当 $y \ge 4$ 时 $\quad f_Y(y) = 0$

例4 设 $X \sim N(0,1)$ $Y=X^2 \longrightarrow f_Y(y)$

解 $Y=X^2 \geq 0$

$y \leq 0$时， $F_Y(y)=0 \Rightarrow f_Y(y)=0$



$y>0$时， $F_Y(y)=P\{Y \leq y\}=P\{X^2 \leq y\}$

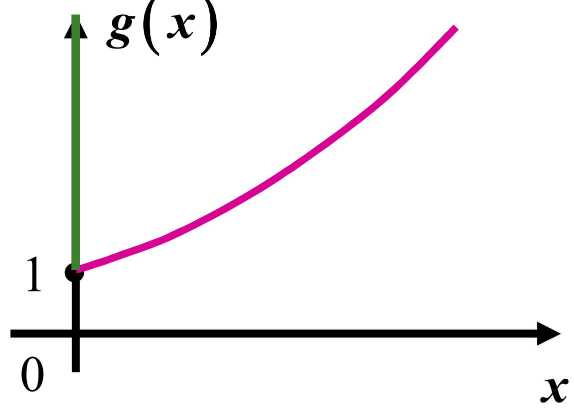
$$=P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\}=2\Phi(\sqrt{y})-1$$

求导得

$$f_Y(y)=2\varphi(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{y}}\varphi(\sqrt{y})=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}$$

$$\Longrightarrow f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0, \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

例5 设 $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$ $Y=e^X$ 求 $f_Y(y)$



解 $Y=e^X$ $x>0$时，$e^x>1$，

$\forall y\le 1,\quad F_Y(y)=P\{Y\le y\}=0$

$\Rightarrow f_Y(y)=0$

$\forall y>1,\quad F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{e^X\le y\}$

$=P\{X\le \ln y\}=F_X(\ln y)$

求导得 $f_Y(y)=f_X(\ln y)\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{y^2}$

$$\therefore f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{y^2}, & y>1, \\ 0, & y\le 1. \end{cases}$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

例6. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

求：$Y=aX+b$ 的概率密度

解：当$a>0$时

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(aX+b\le y)=P(X\le\frac{y-b}{a})$$

$$=P(\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{y-a\mu-b}{a\sigma})=\Phi(\frac{y-(a\mu+b)}{a\sigma})$$

当$a<0$时

$$F_Y(y)=P(aX+b\le y)=P(X\ge\frac{y-b}{a})=1-P(X\le\frac{y-b}{a})$$

$$=1-\Phi(\frac{y-(a\mu+b)}{a\sigma})$$

综上求导

$$f_Y(y)=F_Y'(y)$$

$$=\frac{1}{|a|\sigma}\varphi(\frac{y-(a\mu+b)}{a\sigma})=\frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2(a\sigma)^2}}$$

例6. 设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

求：$Y=aX+b$ 的概率密度

解：当$a>0$时

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(aX+b\le y)=P(X\le\frac{y-b}{a})$$

$$=P(\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{y-a\mu-b}{a\sigma})=\Phi(\frac{y-(a\mu+b)}{a\sigma})$$

当$a<0$时

$$F_Y(y)=P(aX+b\le y)=P(X\ge\frac{y-b}{a})=1-P(X\le\frac{y-b}{a})$$

$$=1-\Phi(\frac{y-(a\mu+b)}{a\sigma})$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)$$

$$\boxed{\frac{1}{a\sigma}\varphi(\frac{y-(a\mu+b)}{a\sigma})}\qquad\boxed{-\frac{1}{a\sigma}\varphi(\frac{y-(a\mu+b)}{a\sigma})}$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

例6. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

求： $Y=aX+b$ 的概率密度

解：当$a>0$时

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(aX+b\le y)=P(X\le\frac{y-b}{a})$$

$$=P(\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{y-a\mu-b}{a\sigma})=\Phi(\frac{y-(a\mu+b)}{a\sigma})$$

当$a<0$时

$$F_Y(y)=P(aX+b\le y)=P(X\ge\frac{y-b}{a})=1-P(X\le\frac{y-b}{a})$$

$$=1-\Phi(\frac{y-(a\mu+b)}{a\sigma})$$

综上求导

$$f_Y(y)=F_Y'(y)$$

$$=\frac{1}{|a|\sigma}\varphi(\frac{y-(a\mu+b)}{a\sigma})=\frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2(a\sigma)^2}}$$

例6. 设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

求：$Y=aX+b$ 的概率密度

解：

$$f_Y(y)=\frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2(a\sigma)^2}}$$

得到：$Y=aX+b \sim N(a\mu+b,(a\sigma)^2)$,

结论：正态分布的线性函数仍服从正态分布。

特别：当 $a=\dfrac{1}{\sigma},b=-\dfrac{\mu}{\sigma}$ 时 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

1、（8分）设随机变量X在[2,5]上服从均匀分布，现在对X进行三次独立观测，试求至少有两次观测值大于3的概率。

解：X的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} 1/3, & 2\le x\le 5 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$$p=P\{X>3\}=\int_3^{+\infty} f(x)dx=\int_3^5 \frac{1}{3}dx+\int_5^{+\infty} 0dx=\frac{2}{3}$$

$Y=$ “三次独立观测中观测值大于3的次数”，

$$Y\sim \mathrm{B}(3,p)$$

$$P\{Y\ge 2\}=C_3^2(\frac{2}{3})^2\frac{1}{3}+C_3^3(\frac{2}{3})^3=\frac{4}{9}+\frac{8}{27}=\frac{20}{27}$$

2、（9分）设随机变量X在（1，2）上服从均匀分布，

试求随机变量 $Y=e^{2X}$ 的概率密度 $f(y)$

解 X的概率密度 $f(x)=\begin{cases}1, & 1<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$ $Y=e^{2X}\in(e^2,e^4)$

分布函数法：

$y\le e^2$和$y\ge e^4$时，$f_Y(y)=0$

$e^2<y<e^4$时 $F(y)=P\{Y\le y\}=P\{e^{2X}\le y\}=P\{X\le \frac{1}{2}\ln y\}$

$$=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}\ln y} f(x)dx=\int_{1}^{\frac{1}{2}\ln y} 1dx=\frac{1}{2}\ln y-1$$ 求导数

$$f(y)=F'(y)=\begin{cases}\frac{1}{2y}, & e^2<y<e^4\\ 0, & 其他\end{cases}$$

3(9分) 设随机变量X 的分布密度函数为$f(x)=ax^2, 0\le x\le 2$

，其中a是常数。随机变量 $Y=\sqrt{X}$

问：（1）试确定常数a

（2）求Y的概率密度函数。

1)由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ 所以 $\int_0^2 ax^2dx=1$ 解得：$a=\dfrac{3}{8}$

2) Y对应的非零密度函数区间为$0\le Y\le\sqrt{2}$

对 $y\in\left[0,\sqrt{2}\right]$ ， 有 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}$

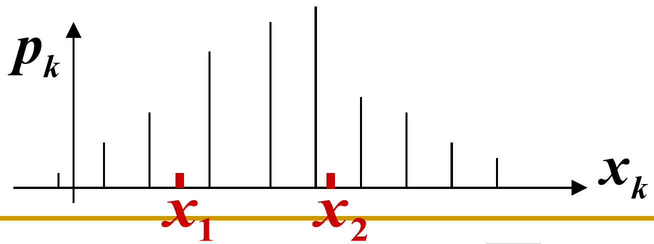
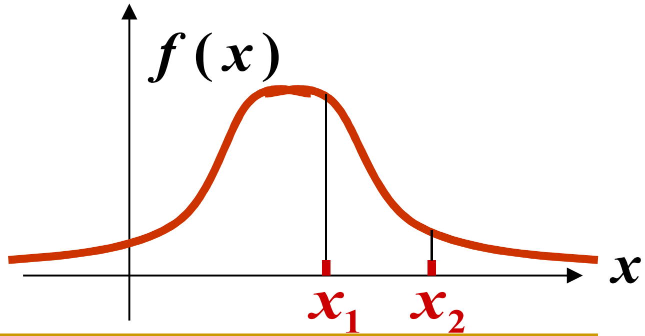
$$=P\{\sqrt{X}\le y\}=P\{X\le y^2\}=\int_0^{y^2}\frac{3}{8}x^2dx=\frac{y^6}{8}$$

所以，概率密度函数

$$f_Y(y)=\begin{cases}\left(F_Y(y)\right)_y'=\dfrac{3}{4}y^5, 0\le y\le\sqrt{2}\\ 0\quad ,\qquad 其他\end{cases}$$

总结

随机变量

	离散型随机变量	连续型随机变量
分布函数 $F(x)=P(X\le x)$ 概率的累加,不直观	$F(x)=\sum\limits_{x_k\le x} p_k$ 右连续	$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ 连续
概率分布 概率1分布情况,直观	分布律: $\sum p_k=1$ $\begin{array}{c\|cccc} X & x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ \hline p_k & p_1 & p_2 & \cdots & p_k \end{array}$ 	概率密度: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=1$ 
概率计算	$P(x_1<X\le x_2)=\sum\limits_{x_1<x_k\le x_2} p_k$ $=F(x_2)-F(x_1)$	$P(x_1<X\le x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$ $=F(x_2)-F(x_1)$

总结

随机变量

	离散型随机变量	连续型随机变量
重要分布	1） 0-1分布 $P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}$ 2）$B(n,p)$ $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ 3）$P(\lambda)$ $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	1）$U(a,b)$ $f(x)=\begin{cases}1/(b-a), & a<x<b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ 2）指数分布 $f(x)=\begin{cases}1/\theta\, e^{-x/\theta}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ 3）$N(\mu,\sigma^2)$ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
函数的分布 $Y=g(X)$	X的分布律 → Y的分布律	$f_X(x)\to f_Y(y)=F_Y'(y)$