第四章 随机变量的数字特征

第二节 随机变量的方差与矩

- 方差的定义
- 离散型随机变量的方差
- 连续型随机变量的方差
- 方差的性质
- 切比雪夫不等式
- 矩

一. 方差的定义

定义. 设X是一个随机变量，若$E[X-E(X)]^2$存在，则称 $D(X)=E[X-E(X)]^2$ 为 X 的方差。

注 ▲ $\sqrt{D(X)}$ 称为标准差或均方差。

记为：$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$

▲ $D(X)$ 实际上是 X 的函数 $g(X)=(X-E(X))^2$ 的数学期望。

二. 离散型随机变量的方差

$$D(X)=E[X-E(X)]^2$$

1. 定义. 设离散型随机变量X 的分布律为:

X	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	$\cdots$	x_n	$\cdots$	$\cdots$
P_k	p_0	p_1	p_2	$\cdots$	$\cdots$	p_n	$\cdots$	$\cdots$

如果级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k$ 绝对收敛，则称此级数为 X 的方差， 记为:

$$D(X)=Var(X)=\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k$$

注 如果 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k$ 不绝对收敛，则称 $D(X)$ 不存在.

2．几种常见分布的方差

$$D(X)=E[X-E(X)]^2$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-E(X))^2 p_k$$

（1） $(0-1)$ 分布 $E(X)=p$

$$P(X=k)=p^k q^{(1-k)} \quad k=0,1. \quad 0<p<1$$

X	0	1
P	q	p

$$D(X)=(0-p)^2\cdot q+(1-p)^2\cdot p=pq$$

（2） 二项分布 $X\sim B(n,p)$, $E(X)=np$

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,2\cdots n$$

$$D(X)=\sum_{k=0}^{n}(k-np)^2 C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=npq$$

（3）泊松分布 $X\sim P(\lambda)$ $E(X)=\lambda$

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad k=0,1,2,\cdots$$

$$D(X)=\sum_{k=0}^{\infty}(k-\lambda)^2\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda$$

重要公式

这是一个重要的经常使用的计算公式

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

证明：$\because \quad D(X)=E[X-E(X)]^2$

由数学期望的性质

$$=E[X^2-2XE(X)+(E(X))^2]$$

因为数学期望E(X)是数

$$=E(X^2)-E[2XE(X)]+E[(E(X))^2]$$

$$=E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2$$

$$=E(X^2)-[E(X)]^2$$

注： 这个公式给出了计算随机变量X的方差的公式，同时也给出了数学期望与方差之间的关系。

例1 设$X \sim P(\lambda)$, 求$D(X)$. $\quad$ $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

解

$$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty} k\cdot\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda$$

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{+\infty} k^2\cdot\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}(k^2-k+k)\cdot\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\cdot\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}+\sum_{k=0}^{+\infty} k\cdot\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$=\lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda=\lambda^2+\lambda$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda$$

例2. 设随机变量 X 服随机从几何分布, 其分布律为:

$$P(x=k)=p(1-p)^{k-1},\ k=1,2,\cdots$$ 其中

无穷递缩等比级数收敛求和与式

求: $D(X)$ $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

求导交换次序

解: 记 $q=(1-p)$ $p\sum_{k=1}^{\infty}(k^2-k+k)q^{k-1}$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\,pq^{k-1}=p\sum_{k=1}^{\infty}(q^k)'=p(\sum_{k=1}^{\infty}q^k)'=p(\frac{q}{1-q})'=\frac{1}{p}$$

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2pq^{k-1}=p[\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)q^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}]$$

$$=q\,p(\sum_{k=1}^{\infty}q^k)''+E(X)=q\,p(\frac{q}{1-q})''+\frac{1}{p}=q\,p\frac{2}{(1-q)^3}+\frac{1}{p}$$

$$=\frac{2}{p^2}-\frac{1}{p}$$ 故: $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}$

三. 连续型随机变量的方差

$D(X)=E[X-E(X)]^2$

1. 定义. 设连续型随机变量X 的概率密度为 $f(x)$

如果 $\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx$ 绝对收敛，

则称此积分为 X 的方差，记为：

$$D(X)=Var(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx$$

2. 几种常见分布的方差

$$D(X)=E[X-E(X)]^2$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx$$

(1). 均匀分布 $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$

设 $X\sim U[a,b]$ $\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & 其它\end{cases}$

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-\frac{a+b}{2}]^2 f(x)dx=\int_a^b[x-\frac{a+b}{2}]^2\frac{1}{b-a}dx$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-[E(X)]^2=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx-(\frac{a+b}{2})^2$$

(2). 指数分布 $E(X)=\theta$

$$D(X)=E[X-E(X)]^2$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$ 其中 $\theta>0$ 为常数

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx$$

$$=\int_{0}^{+\infty}(x-\theta)^2\cdot\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\theta^2$$

(3). 正态分布 设：$X \sim N(\mu,\sigma^2)$

$$D(X)=E[X-E(X)]^2=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx$$

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty$$

$$E(X)=\mu$$

则: $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx$

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma^2 z^2\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{z^2}{2}}\sigma dz=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}z^2 e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left[-ze^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right]=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}=\sigma^2$$

四. 方差的性质 $D(X)=E[X-E(X)]^2=E(X^2)-[E(X)]^2$

1. 若 c是常数，则：$D(c)=0$

2. 若 c 是常数,X 是随机变量,则：$D(cX)=c^2D(X)$

证明：$D(cX)=E[(cX)^2]-[E(cX)]^2$

$$=E(c^2X^2)-[cE(X)]^2$$

$$=c^2E(X^2)-c^2[E(X)]^2$$

$$=c^2[E(X^2)-(E(X))^2]=c^2D(X)$$

3. 若X,Y是相互独立的随机变量，则：

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$$

证明：$D(X+Y)=E[(X+Y)-E(X+Y)]^2$

由方差定义

$$D(X+Y)=E[(X+Y)-E(X+Y)]^2$$

$$=E\{[X-E(X)]+[Y-E(Y)]\}^2$$

刻画两个随机变量之间相互关系

$$=E[X-E(X)]^2+E[Y-E(Y)]^2$$

$$+2\boxed{E\{[X-E(X)][(Y-E(Y)]\}}$$

协方差

$$=D(X)+D(Y)$$

$$+2E[X-E(X)]\cdot E[Y-E(Y)]$$

因为X,Y相互独立，所以$X-E(X)$与$Y-E(Y)$也相互独立

$$=D(X)+D(Y)$$

$$+\underline{2[E(X)-E(X)]\cdot[E(Y)-E(Y)]}$$

$$=D(X)+D(Y)$$

注：此性质可推广到任意有限多个相互独立的随机变量之和的情形。

4. $D(X)=0$的充分必要条件是：$P(X=c)=1$

可用切比雪夫不等式证明，略。

方差的性质

1． $D(c)=0$

2. $D(cX)=c^2D(X)$

3. 若X,Y相互独立，则：

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$$

4. $D(X)=0 \Longleftrightarrow P(X=c)=1$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

期望的性质

$$E(c)=c$$

$$E(cX)=cE(X)$$

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

X,Y独立，则

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

例3 设$X \sim B(n, p)$，求$D(X)$.

解 引入随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第} i \text{次试验事件} A \text{发生} \\ 0, & \text{第} i \text{次试验事件} \bar{A} \text{发生} \end{cases}$$

$$D(X_i) = p(1-p) \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

故 $$\boldsymbol{D(X) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = np(1-p) = npq}$$

例4 X,Y 独立, $X \sim N(1,2), Y \sim N(-1,1) \longrightarrow P\{2X > Y\}$

解 $P\{2X > Y\} = P\{2X - Y > 0\}$

2X-Y 服从什么分布?

$\because E(2X-Y) = 2E(X) - E(Y) = 3$

$D(2X-Y) = 2^2 D(X) + D(Y) = 9$

$\therefore Z = 2X - Y \sim N(3,9)$

$\therefore P(2X-Y>0) = 1 - P\{2X - Y \le 0\} = 1 - P(\frac{Z\text{-}3}{3} \le \frac{0\text{-}3}{3})$

$= 1 - \Phi\left(\frac{0-3}{3}\right) = 1 - \Phi(-1) = 1 - (1 - \Phi(1)) = \Phi(1)$

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2),\ Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ $\quad X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \quad i = 1,2,3,\cdots n$ $k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_nX_n$ $\sim N(k_1\mu_1 + k_2\mu_2 + \cdots k_n\mu_n, k_1^2\sigma_1^2 + k_2^2\sigma_2^2 + \cdots + k_n^2\sigma_n^2)$

例5 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 独立同 $N\left(2,(0.05)^2\right)$ 分布

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_9$$

若使 $P\{|X-18|<a\} \geq 0.99$，a 至少为多少？

解 易知 $X \sim N\left(18,(0.15)^2\right)$

$$P\{|X-18|<a\} = P\left\{-\frac{a}{0.15} < \frac{X-18}{0.15} < \frac{a}{0.15}\right\}$$

$$= 2\Phi\left(\frac{a}{0.15}\right) - 1 \geq 0.99$$

$$\longrightarrow \Phi\left(\frac{a}{0.15}\right) \geq 0.995 \longrightarrow a \geq 0.387$$

例6 X,Y独立同 $N\left(0,\frac{1}{2}\right)$分布 $\longrightarrow D\left(|X-Y|\right)$

$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$

$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

$Z=X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

解 记 $Z=X-Y$

则 $Z\sim N(0,1) \longrightarrow E(|Z|),E\left(|Z|^2\right)$

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

$D(|Z|)=E\left(|Z|^2\right)-\left(E(|Z|)\right)^2$

$$E\left(|Z|\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f_Z(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}d\left(\frac{x^2}{2}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$E\left(|Z|^2\right)=E\left(Z^2\right)=D(Z)+\left[E\left(Z\right)\right]^2=1$$

$$\therefore D\left(|X-Y|\right)=D\left(|Z|\right)=E\left(|Z|^2\right)-\left(E(|Z|)\right)^2=1-\frac{2}{\pi}$$

五. 切比雪夫不等式

设随机变量X具有数学期望 $E(X)=\mu,$

方差 $D(X)=\sigma^2.$

则对任意正数 $\varepsilon>0$

不等式：$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ 成立。

称其为切比雪夫不等式

切比雪夫不等式(chebysev)的另一形式:

$$P(|X-\mu|<\varepsilon)\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

例7 已知正常男性成人血液中，每一毫升白细胞数平均是7300，均方差是700．利用切比雪夫不等式估计每毫升白细胞数在5200 ~ 9400之间的概率．

$$P(|X-\mu|<\varepsilon)\ge 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

解： 设每毫升白细胞数为 X

依题意，$E(X)=7300,\quad D(X)=700^2$

现求：$\quad P(5200\le X\le 9400)=?$

$$P(5200-7300\le X-7300\le 9400-7300)$$

$$=P(-2100\le X-E(X)\le 2100)$$

$$=P(|X-E(X)|\le 2100)\quad \ge 1-\frac{700^2}{2100^2}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

每毫升白细胞数在5200 ~ 9400之间的概率不小于8/9．

六. 矩

矩是随机变量的更为广泛的一种数字特征，前面介绍的数学期望及方差都是某种矩.

定义: 设 X 和 Y 是随机变量

(1). 若 $E(X^k)$ 存在，则称它为 X 的 k 阶原点矩，简称 k 阶矩。$k=1,2,\cdots$

(2). 若 $E\{[X-E(X)]^k\}$ 存在，$k=1,2,\cdots$ 则称它为 X 的 k 阶中心矩。

(3). 若 $E(X^kY^l)$ 存在，$k,l=1,2,\cdots$ 则称它为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合矩。

(1). 若$E(X^k)$存在，则称它为X的k阶原点矩，

(2). 若$E\{[X-E(X)]^k\}$存在，$k=1,2,\cdots$
则称它为X的k阶中心矩。

(3). 若$E(X^kY^l)$存在，$k,l=1,2,\cdots$ 则称它为
X和Y的$k+l$阶混合矩。

(4). 若$E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\}$存在，$k,l=1,2,\cdots$
则称它为X和Y的$k+l$阶混合中心矩。

注：$E(X)$是随机变量X的一阶原点矩；

$D(X)$是随机变量X的二阶中心矩；

$\operatorname{cov}(X,Y)$是X和Y的二阶混合中心矩。

复习

随机变量的数字特征

	离散型随机变量	连续型随机变量
X	$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$	$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$
$D(X)$ $=E[X-E(X)]^2$	$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-E(X))^2 p_k$	$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2 f(x)dx$
$Y=g(X)$ g连续	$E(Y)=E[g(X)]$ $=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$	$E(Y)=E[g(X)]$ $=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$
$Z=g(X,Y)$ g连续	$E(Z)=E[g(X,Y)]$ $=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}$	$E(Z)=E[g(X,Y)]$ $=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$
$E(X)$性质	$E(c)=c$ $\quad E(cX)=cE(X)$ $\quad E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ X,Y独立 $\quad E(XY)=E(X)E(Y)$	

总结

几种常见分布的数学期望和方差

	概率分布		$E(X)$	$D(X)$
离散型	(0–1)分布	$X \sim B(1, p)$	p	pq
	二项分布	$X \sim B(n, p)$	np	npq
	泊松分布	$X \sim P(\lambda)$	λ	λ
连续型	均匀分布	$X \sim U(a, b)$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
	指数分布	$X \sim Exp(\theta)$	θ	θ^2
	正态分布	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	μ	σ^2

小结

随机变量的数字特征

$E(X)$性质	$E(c)=c \quad E(cX)=cE(X) \quad E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ X,Y独立 $\quad E(XY)=E(X)E(Y)$
$D(X)$性质	$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2 \quad D(c)=0 \quad D(cX)=c^2D(X)$ X,Y独立, $D(X+Y)=D(X)+D(Y) \quad D(X)=0 \Leftrightarrow P(X=c)=1$