习题六

5.确定下列命题是否为真：

(1) $\varnothing\subseteq\varnothing$

(2) $\varnothing\in\varnothing$

(3) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$

(4) $\varnothing\in\{\varnothing\}$

(5) $\{a,b\}\subseteq\{a,b,c,\{a,b,c\}\}$

(6) $\{a,b\}\in\{a,b,c,\{a,b\}\}$

(7) $\{a,b\}\subseteq\{a,b,\{\{a,b\}\}\}$

(8) $\{a,b\}\in\{a,b,\{\{a,b\}\}\}$

6.设 a,b,c 各不相同，判断下述等式中那个等式为真.

(1) $\{\{a,b\},c,\phi\}=\{\{a,b\},c\}$

(2) $\{a,b,a\}=\{a,b\}$

(3) $\{\{a\},\{b\}\}=\{\{a,b\}\}$

(4) $\{\varnothing,\{\varnothing\},a,b\}=\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\},a,b\}$

8.求下列集合的幂集：

(1) $\{a,b,c\}$

(2) $\{1,\{2,3\}\}$

(3) $\{\varnothing\}$

(4) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

(5) $\{\{1,2\},\{2,1,1\},\{2,1,1,2\}\}$

(6) $\{\{\varnothing,2\},\{2\}\}$

9.设 $E=\{1,2,3,4,5,6\}$， $A=\{1,4\}$， $B=\{1,2,5\}$， $C=\{2,4\}$，求下列集合：

(1) $A\boxed{?}-B$

(2) $(A\boxed{?}B)\ \boxed{?}C$

(3) $\sim(A\boxed{?}B)$

(4) $P(A)\boxed{?}P(B)$

(5) $P(A)-P(B)$

11．(1)设R为实数集，

$X=\{x\mid x\in R且-3\le x<0\}$

$Y=\{x\mid x\in R且-1\le x<5\}$

$Z=\{x\mid x\in R且x<1\}$

求 $(X\boxed{?}Y)-W$.

(2)设 $X=\{1,2,3\}$，$Y=\{2,3,4,5\}$，$W=\{2,3\}$，求 $(X\boxed{?}Y)\oplus W$.

14．化简下列集合表达式：

(1) $((A\boxed{?}B)\ \ B\boxed{?}(A\ \ \boxed{?}$

(2) $((A\boxed{?}B\ \ C\boxed{?}(B\ \boxed{?}))\ \ \boxed{?}$

(3) $(B-(A\boxed{?}C))\boxed{?}(A\boxed{?}\ \ \boxed{?}$

18．某班有25个学生，其中14人会打篮球，12人会打排球，6人会打篮球和排球，5人会打篮球和网球，还有2人会打这三种球. 已知6个会打网球的人都会打篮球或排球. 求不会打球的人数.

22．判断以下命题的真假：

(1) $a\in\{\{a\}\}$

(2) $\{a\}\in\{\{a\}\}$

(3) $x\in\{x\}-\{\{x\}\}$

(4) $\{x\}\subseteq\{x\}-\{\{x\}\}$

(5) $A-B=A\Leftrightarrow B=\varnothing$

(6) $A-B=\varnothing\Leftrightarrow A=B$

(7) $A\oplus A=A$

(8) $A-(B\boxed{?}C)=(A-B)\ \ \boxed{?}-C)$

(9) 如果 $A\boxed{?}B=B$，则 $A=E$

(10) $A=\{x\}\boxed{?}x$，则 $x\in A$ 且 $x\subseteq A$

23．化简下述集合公式

(1) $(A\boxed{?}B)\ \ \boxed{?}-B)$

(2) $(A\boxed{?}(B-A))-B$

(3) $(A-B-C)\boxed{?}((A-\boxed{?})\ \ C\boxed{?}\ ((A\boxed{?}B)-\boxed{?})\ \ (A\boxed{?}B\ \ \boxed{?}$

(4) $(A\boxed{?}B\ \ \boxed{?})\ \ \boxed{?}\ \ \boxed{?}\ \ \boxed{?}\ \ \boxed{?}A\ \ \boxed{?}\ \ \boxed{?}$

25．设 A,B,C 代表任意组合，试判断下面命题的真假，如果为真，给出证明；如果为假，给出反例.

(1) $A\subset B\wedge B\subseteq C\Rightarrow A\subset C$

(2) $A \neq B \wedge B \neq C \Rightarrow A \neq C$
(3) $A \in B \wedge B \not\subseteq C \Rightarrow A \notin C$
(4) $(A-B)\boxed{?}(B-C)=A-C$
(5) $(A-B)\boxed{?}B=A$
(6) $(A\boxed{?}B)-A=B$
(7) $(A\boxed{?}B)-A=\varnothing$
(8) $A\boxed{?}B=A \quad \boxed{?}\Rightarrow B=C$
27．设A,B,C是任意集合，证明：
(1) $(A-B)-C=A-(B\boxed{?}C)$
(2) $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$
(3) $(A-B)-C=(A-C)-B$
40．设A,B为任意集合，证明：
(1) $P(A)\boxed{?}P(B)=P(A \quad \boxed{?}$
(2) $P(A)\boxed{?}P(B)\subseteq P(A \quad \boxed{?}$
(3) 针对(2)举一反例，说明$P(A)\boxed{?}P(B)=P(A \quad \boxed{?}$对某些集合$A$和B是不成立的.

习题七
1. 已知$A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，求$A\times P(A)$.
3．设A,B,C,D是任意集合，
(1) 求证$(A\boxed{?}B)\times(C \quad D\boxed{?}(A\times C) \quad \boxed{?}\times D)$;
(2) 下列等式中那些成立？哪些不成立？对于成立的给出证明，对于不成立的给出反例.
$(A\boxed{?}B)\times(C \quad D\boxed{?}(A\times C) \quad \boxed{?}\times D)$
$(A-B)\times(C-D)=(A\times C)-(B\times D)$
4. 判断下述命题的真假，如果为真，给出证明；如果为假，给出反例.
(1) $A\boxed{?}(B\times C)=(\boxed{?} B)\times(A \quad \boxed{?}$
(2) $A\times(B\boxed{?}C)=(A\times B) \quad \boxed{?}\times C)$
(3) 存在集合A，使得$A\subseteq A\times A$
(4) $P(A)\times P(A)=P(A\times A)$
10．给定Z^+上的关系R和S，$\forall x,y\in Z^+$，满足

$xRy \Leftrightarrow x$ 整除 y， $xSy \Leftrightarrow 5x \le y$

对于下面每个小题，确定哪些有序对属于给定的关系：

(1) 关系：$R \boxed{?} S$；有序对：<2,6>，,<3,17>，<2,1>，<0,0>

(2) 关系：$R \boxed{?} S$；有序对：<3,6>，,<1,2>，<2,12>

(3) 关系：$-R$（以全域关系为全集）；有序对：<1,5>，,<2,8>，<3,15>

13．设

$$A = \{\langle 1,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$

$$B = \{\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$$

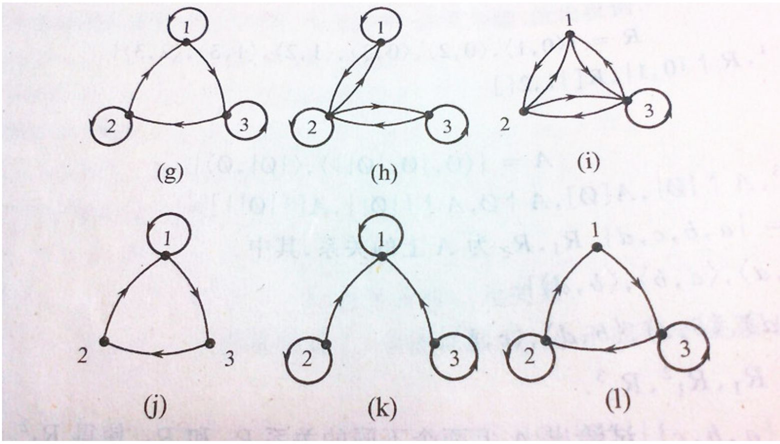
求 $A \boxed{?} B$， $A \boxed{?} B$， $domA$， $domB$， $dom(A \boxed{?} B)$， $ranA$， $ranB$， $ran(A \boxed{?} B)$， $fld(A - B)$.

20．设 R_1 和 R_2 为 A 上的关系，证明：

(1) $(R_1 \boxed{?} R_2)^{-1} = R_1^{-1} \boxed{?}^{-1}$

(2) $(R_1 \boxed{?} R_2)^{-1} = R_1^{-1} \boxed{?}^{-1}$

23．设 $A = \{1,2,3\}$.图7.11给出了12种 A 上的关系，对于每种关系写出相应的关系矩阵，并说明它所具有的性质.



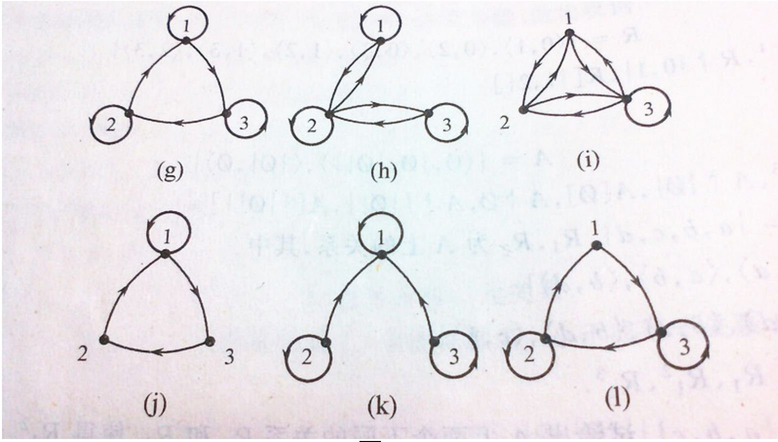


图7.11

31．设 $A=\{1,2,3,4\}$，R 是 A 上的等价关系，且 R 在 A 上所构成的等价类是 $\{1\},\{2,3,4\}$.

(1) 求 R；

(2) 求 $R\,\boxed{?}\,R^{-1}$；

(3) 求 R 的传递闭包.

33．设 $A=\{a,b,c,d\}$，A 上的等价关系

$$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle\}\boxed{?}_A$$

画出 R 的关系图，并求出 A 中各元素的等价类.

36．设 $A=\{1,2,3,4\}$，在 $A\times A$ 上定义二元关系 R，

$\forall\langle u,v\rangle,\langle x,y\rangle\in A\times A,\langle u,v\rangle R\langle x,y\rangle\Leftrightarrow u+y=x+v$

(1) 证明 R 是 $A\times A$ 上的等价关系；

(2) 确定由 R 引起的对 $A\times A$ 的划分.

37．设 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$，R 是 A 上的关系，且 $R=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle e,f\rangle\}$，设 $R^{*}=tsr(R)$，则 R^{*} 是 A 上的等价关系.

(1) 给出 R^{*} 的关系矩阵；

(2) 给出商集 A/R^{*}.

41．设 $A=\{1,2,3,4\}$，R 为 $A\times A$ 上的二元关系，$\forall\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\in A\times A$，

$\langle a,b\rangle R\langle c,d\rangle\Leftrightarrow a+b=c+d$

(1) 证明 R 为等价关系.

(2) 求 R 导出的划分.

42．设 R 是 A 上的自反和传递关系，如下定义 A 上的关系 T，使得 $\forall x,y\in A$，$\langle x,y\rangle\in T\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,x\rangle\in R$.证明 T 是 A 上的等价关系.

43．对于下列集合与整除关系画出哈斯图：

(1) $\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$

(2) $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

46．分别画出下列各偏序 $\langle A,R_{\leq}\rangle$ 的哈斯图.并找出 A 的极大元、极小元、最大元和最小元.

(1) $A=\{a,b,c,d,e\}$

$R_{\leq}=\{\langle a,d\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,e\rangle,\langle b,e\rangle,\langle c,e\rangle,\langle d,e\rangle\}\boxed{?}I_A$.

(2) $A=\{a,b,c,d,e\}$

$R_{\leq}=\{\langle c,d\rangle\}\boxed{?}I_A$

48．设 $\langle A,R\rangle$ 和 $\langle B,S\rangle$ 为偏序集，在集合 $A\times B$ 上定义关系 T 如下：

$\forall\langle a_1,b_1\rangle,\langle a_2,b_2\rangle\in A\times B$

$\langle a_1,b_1\rangle T\langle a_2,b_2\rangle\Leftrightarrow a_1Ra_2\wedge b_1Sb_2$

证明 T 为 $A\times B$ 上的偏序关系.

习题八

1．设 $f:N\to N$，且

$$f(x)=\begin{cases}1 & 若x \\ \frac{x}{2} & 若x\end{cases}$$

求 $f(0)$, $f(\{0\})$, $f(1)$, $f(\{1\})$, $f(\{0,2,4,6,\boxed{?}\})$, $f(\{4,6,8\})$, $f(\{1,3,5,7\})$

3．给定函数 f 和集合 A,B 如下：

(1) $f:R\to R, f(x)=x, A=\{8\}, B=\{4\}$

(2) $f:R\to R^+, f(x)=2^x, A=\{1\}, B=\{1,2\}$

(3) $f:N\to N\times N, f(x)=\langle x,x+1\rangle, A=\{5\}, B=\{\langle 2,3\rangle\}$

(4) $f:N\to N, f(x)=2x+1, A=\{2,3\}, B=\{1,3\}$

(5) $f: Z \to N, f(x)=|x|, A=\{-1,2\}, B=\{1\}$

(6) $f: S \to S, S=[0,1], f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}, A=(0,1), B=\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$

(7) $f: S \to R, S=[0,+\infty), f(x)=\frac{1}{x+1}, A=\left\{0,\frac{1}{2}\right\}, B=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

4．判断下列函数中哪些是满射的？哪些是单射的？哪些是双射的？

(1) $f: N \to N, f(x)=x^2+2$

(2) $f: N \to N, f(x)=(x)\bmod 3$, x除 3

(3) $f: N \to N, f(x)=\begin{cases}1 若x \\ 0 若x\end{cases}$

(4) $f: N \to \{0,1\}, f(x)=\begin{cases}1 若x \\ 0 若x\end{cases}$

(5) $f: N-\{0\} \to R, f(x)=\lg x$

(6) $f: R \to R, f(x)=x^2-2x-15$

5．设X={a，b，c，d}，Y={1，2，3}，f={<a，1>，<b，2>，<c，3>，}判断以下命题的真假：

(1) f 是从X到Y的二元关系，但不是从X到Y的函数；

(2) f 是从X到Y的函数，但不是满射，也不是单射；

(3) f 是从X到Y的满射，但不是单射；

(4) f 是从X到Y的双射.

6．对于给定的A，B和 f，判断 f 是否为从A到B的函数 $f: A \to B$. 如果是，说明 f 是否为单射、满射、双射的

(1) $A=Z, B=N, f(x)=x^2+1$

(2) $A=N, B=Q, f(x)=1/x$

(3) $A=Z\times N, B=Q, f(\langle x, y\rangle)=x/(\ +$

(4) $A=\{1,2,3\}, B=\{p,q,r\}, f=\{\langle 1,q\rangle,\langle 2,q\rangle,\langle 3,q\rangle\}$

(5) $A=B=N, f(x)=2^x$

(6) $A=B=R\times R, f(\langle x, y\rangle)=\langle y+1, x+1\rangle$

(7) $A=Z\times Z, B=Z, f(\langle x, y\rangle)=x^2+2y^2$

(8) $A=B=R, f(x)=1/\sqrt{x+1}$

(9) $A=N\times N\times N, B=N, f(\langle x,y,z\rangle)=x+y-z$

7.设A={a,b,c,d}，B={0,1,2}

(1)给出一个函数 $f:A\to B$ 使得 f 不是单射的也不是满射的；

(2)给出一个函数 $f:A\to B$ 使得 f 不是单射的但是满射的；

(3)能够给出一个函数 $f:A\to B$，使得 f 是单射但不是满射的吗?

(4)设 $|A|=m$，$|B|=n$，分别说明存在单射、满射、双射函数 $f:A\to B$ 的条件.

15.设A={1，2，3，4}，A_1={1，2}，A_2={1}，$A_3=\varnothing$，求 A_1，A_2，A_3 和A的特征函数 χ_{A_1}，χ_{A_2}，χ_{A_3} 和 χ_A .

19.设 $f:R\to R, f(x)=x^2-2$

$g:R\to R, g(x)=x+4$

$h:R\to R, h(x)=x^3-1$

(1) 求 $g\circ f, f\circ g$.

(2) 问 $g\circ f$ 和 $f\circ g$ 是否为单射、满射、双射的?

(3) f,g,h 中那些函数有反函数? 如果有，求出这些反函数

20.设f,g是从N到N的函数，且

$$f(x)=\begin{cases} x+1, x=0,1,2,3 \\ 0, x=4 \\ x, x\geq 5 \end{cases}, \quad g(x)=\begin{cases} \frac{x}{2}, x\text{为} \\ 3, \quad x \end{cases}$$

(1) 求 $f\circ g$.

(2) 说明 $f\circ g$ 是否为单射、满射、双射的.

22.设 $f:Z\to Z, f(x)=(x)\bmod n.$ 在Z上定义等价关系R，$\forall x,y\in Z$

$\langle x,y\rangle\in R \Leftrightarrow f(x)=f(y)$

(1)计算 $f(Z)$.

(2)确定商集 Z/R .

26.设 $f:A\to B, g:B\to C$, 且 $f\circ g:A\to C$ 是双射的，证明：

(1) $f:A\to B$ 是单射的.

(2) $g:B\to C$ 是满射的.