第六章 数理统计的基本概念

第三节 常用的统计量及其分布

- 几个重要的分布 χ^2分布 t 分布 F分布
- 正态分布的样本均值与样本方差的分布

一. 几个重要的分布

$$D(X_i)=E(X_i^2)-E(X_i)^2$$

1. χ^2分布

定义 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$独立同 $N(0,1)$ 分布

记 $\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

称 χ^2的分布为自由度是n的 χ^2分布

记 $\chi^2\sim\chi^2(n)$

性质

$$E(\chi^2)=E(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2)$$

$$=E(X_1^2)+E(X_2^2)+\cdots+E(X_n^2)=n$$

$$E(X_i^2)=D(X_i)+E(X_i)^2=1$$

一. 几个重要的分布

$$\boxed{D(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2}$$

1. χ^2分布

$$\boxed{E(X_i^2) = D(X_i) + E(X_i)^2 = 1}$$

性质 $D\left(\chi^2\right) = D\left(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2\right)$

$$= D(X_1^2) + D(X_2^2) + \cdots + D(X_n^2) = 2n$$

$$D(X_i^2) = E(X_i^4) - \left[E(X_i^2)\right]^2 \qquad E(X_i^4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = 3$$

$$= 3 - 1 = 2$$

性质 i) $\chi^2 \sim \chi^2(n) \longrightarrow E\left(\chi^2\right) = n,\ D\left(\chi^2\right) = 2n$

ii) $\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1)$, $\chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$, χ_1^2与χ_2^2相互独立

$$\longrightarrow \chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$$

例1 设 X_1,X_2,X_3,X_4 为总体 $X\sim N\left(0,\sigma^2\right)$ 的一个样本

记 $Y=a\left(X_1-X_2\right)^2+b\left(X_3^2+X_4^2\right)$.　　看结构，找分布

求Y为满足自由度为几的卡方分布,并确定 a, b.

解 $\because X_1,X_2,X_3,X_4$ 独立同 $N\left(0,\sigma^2\right)$ 分布

$E(X_1-X_2)=E(X_1)-E(X_2)=0$

$D(X_1-X_2)=D(X_1)+D(X_2)=2\sigma^2$

$$\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}}\left(X_1-X_2\right)\sim N\left(0,1\right)$$

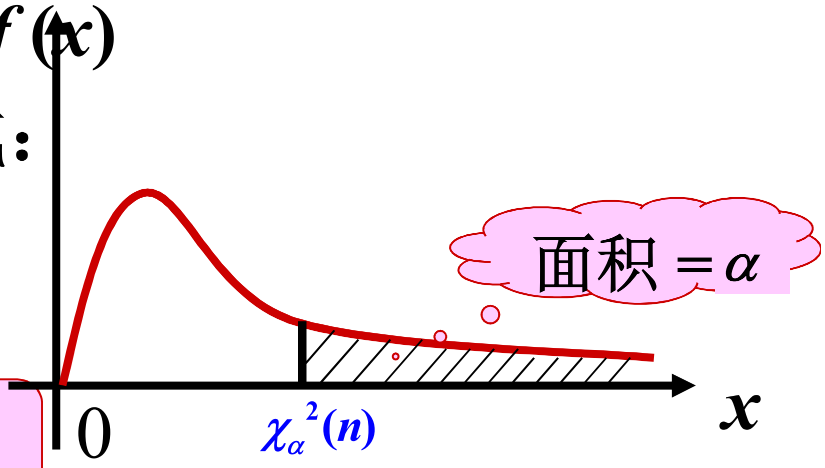
又 $\dfrac{X_3}{\sigma}\sim N\left(0,1\right)$, $\dfrac{X_4}{\sigma}\sim N\left(0,1\right)$, X_1-X_2,X_3,X_4 相互独立

$$\frac{1}{2\sigma^2}\left(X_1-X_2\right)^2+\frac{1}{\sigma^2}\left(X_3^2+X_4^2\right)\sim\chi^2\left(3\right)$$

所以 $a=\dfrac{1}{2\sigma^2}$, $b=\dfrac{1}{\sigma^2}$ 时， $Y\sim\chi^2\left(3\right)$

(a) 当 $n \le 45$ 时可直接查表

(b) 当 $n > 45$ 时可用近似公式:



$$\chi_\alpha^2(n) \approx \frac{1}{2}(z_\alpha + \sqrt{2n-1})^2$$

z_α 是正态分布的上 α 分位点

例如:

$$\chi_{0.1}^2(25) = 34.382 \quad \longleftrightarrow \quad P(\chi^2(25) > 34.382) = 0.1$$

$$\chi_{0.95}^2(40) = 26.509 \quad \longleftrightarrow \quad P(\chi^2(40) > 26.509) = 0.95$$

$$\chi_{0.05}^2(50) \approx \frac{1}{2}(z_{0.05} + \sqrt{2 \times 50 - 1})^2$$

$$= \frac{1}{2}(1.645 + \sqrt{99})^2 = 67.221$$

2. t 分布

定义. 设 $X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n)$, 且 X 与 Y 相互独立，

则称统计量：$T = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$

为服从自由度为 n 的 t 分布. 记为 $T \sim t(n)$

戈塞特

1876 – 1937

$$n > 1, E(T) = 0$$

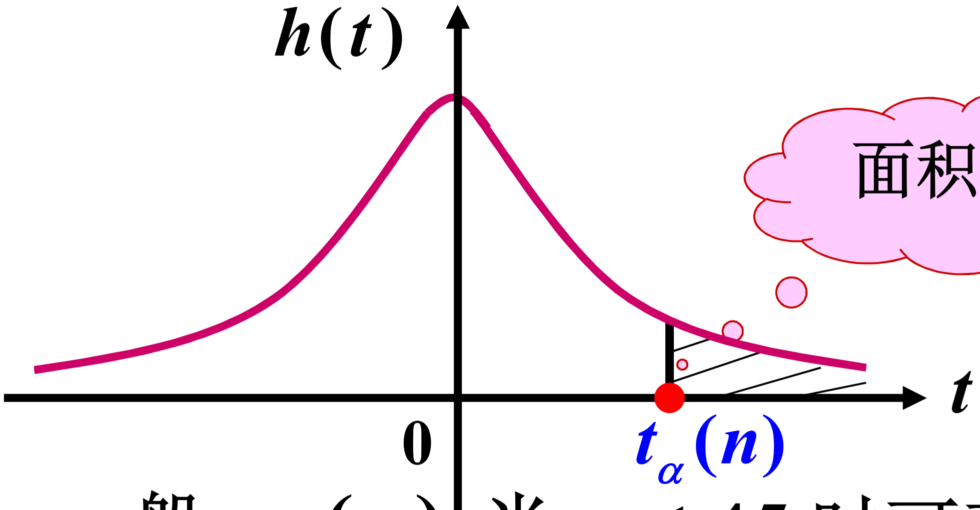
$$n > 2, D(T) = \frac{n}{n-2}$$

$t = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$

▲ t 分布的上 α 分位点：对于给定的 α，$(0<\alpha<1)$

称满足条件：$P(t > t_\alpha(n)) = \int_{t_\alpha(n)}^{\infty} h(t)\,dt = \alpha$

的点 $t_\alpha(n)$ 为 t 分布的上 α 分位点。



一般：(a) 当 $n \le 45$ 时可直接查表

(b) 当 $n > 45$ 时可用近似公式：

$$t_\alpha(n) \approx z_\alpha \quad \text{(用正态分布近似)}$$

例如：

$t_\alpha(n) \approx z_\alpha$

$$P(t > t_\alpha(n)) = \int_{t_\alpha(n)}^{\infty} h(t)\,dt = \alpha$$

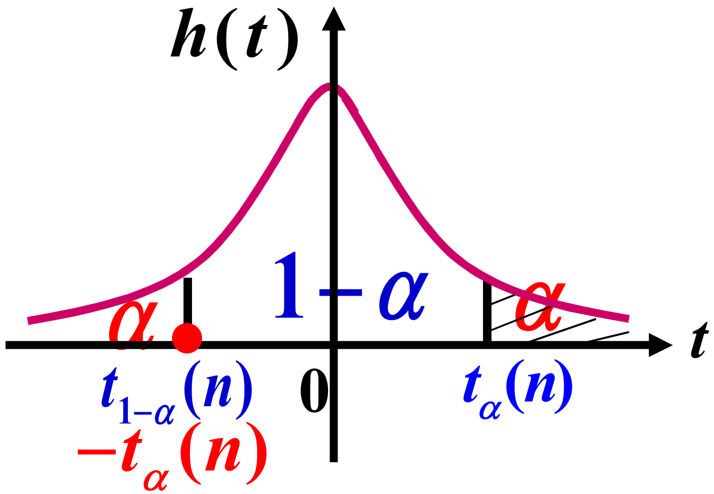
$$t_{0.05}(30) = 1.6973 \quad \Longleftrightarrow \quad P(t(30) > 1.6973) = 0.05$$

$$t_{0.01}(35) = 2.4377 \quad \Longleftrightarrow \quad P(t(35) > 2.4377) = 0.01$$

$$t_{0.05}(50) \approx z_{0.05} \Rightarrow \varphi(z_{0.05}) = 0.95 \Rightarrow z_{0.05} = 1.645$$

▲ 由上α分位点定义及$h(t)$对称性得：

$$t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$$



3. F分布

定义. 设 $X \sim \chi^2(n_1)$, $Y \sim \chi^2(n_2)$, X与Y相互独立,

则称统计量: $F = \dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$

为服从自由度 n_1 及 n_2 的 F 分布,

记作: $F \sim F(n_1, n_2)$

注: ▲ 若 $F \sim F(n_1, n_2)$, 则 $\dfrac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$

费希尔

Fisher

1890—1962

F分布: F分布是以统计学家R.A.Fisher姓氏的第一个字母命名的.

F分布的用途: 用于方差分析、协方差分析和回归分析等。

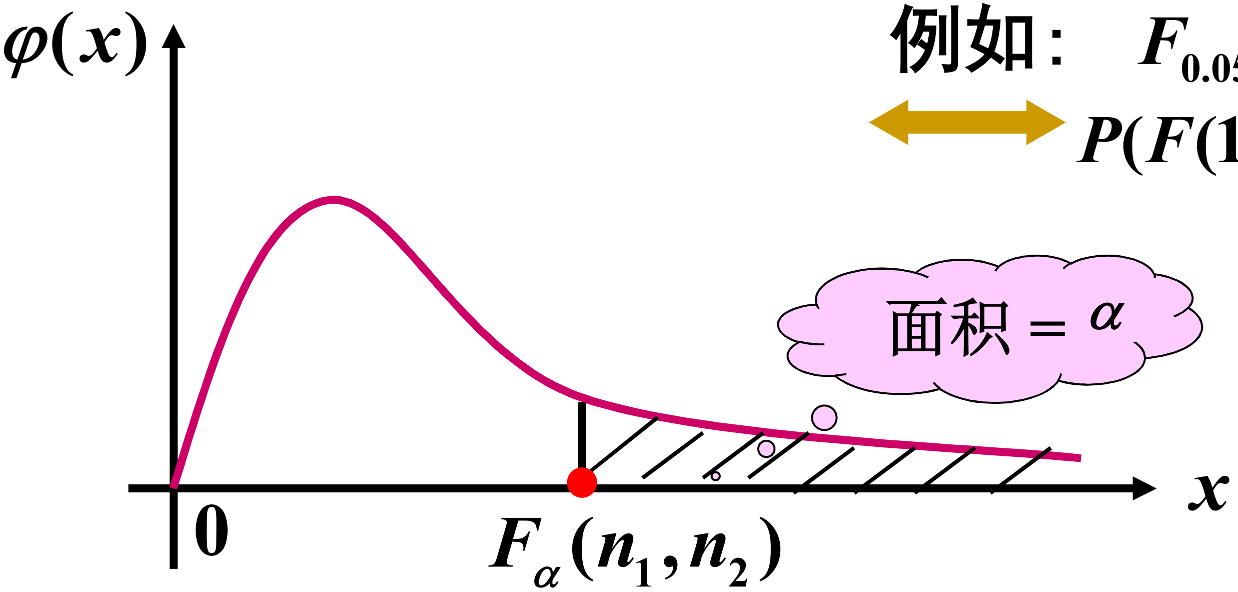
▲ F 分布的上 α 分位点：对于给定的 α $(0<\alpha<1)$ 称满足条件：

$$P(F>F_\alpha(n_1,n_2))=\int_{F_\alpha(n_1,n_2)}^{\infty}\varphi(x)\,dx=\alpha$$

的点 $F_\alpha(n_1,n_2)$ 为 F 分布的上 α 分位点。

例如：$F_{0.05}(15,12)=2.62$

$\Leftrightarrow P(F(15,12)>2.62)=0.05$



对于不同的 α 与 n，$F_\alpha(n_1,n_2)$有表可查

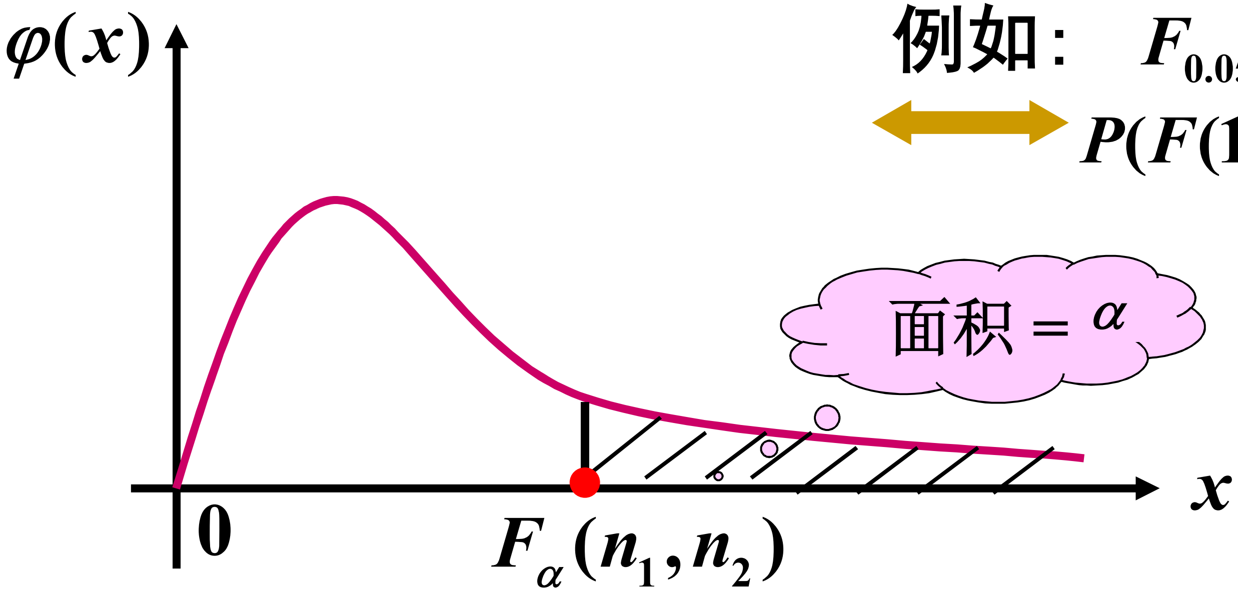
F 分布的上 α 分位的性质：$F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\dfrac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$

$$F_{0.95}(15,12)=\frac{1}{F_{0.05}(12,15)}=\frac{1}{2.48}\approx 0.04$$

$$\Longleftrightarrow\quad P(F(15,12)>0.04)=0.95$$

例如：$F_{0.05}(15,12)=2.62$

$$\Longleftrightarrow\quad P(F(15,12)>2.62)=0.05$$



χ^2分布

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$独立同 $N(0,1)$ 分布

则 $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$

t 分布

设 $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim \chi^2(n)$ ，且 X 与 Y 相互独立，

则：$t = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$

F分布

设 $X \sim \chi^2(n_1)$, $Y \sim \chi^2(n_2)$, X 与 Y 相互独立,

则：$F = \dfrac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1, n_2)$

例2 设X_1,X_2,X_3,X_4为总体$X\sim N(0,1)$的一个样本

求 $P\left\{(X_1-X_2)^2+(X_3+X_4)^2>9\right\}$ 找分布，看结构

解 $E(X_1-X_2)=E(X_1)-E(X_2)=0$ $D(X_1-X_2)=D(X_1)+D(X_2)=2$

$E(X_3+X_4)=0$

$D(X_3+X_4)=2$

$$\boxed{\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}\sim N(0,1);\quad \frac{X_3+X_4}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)}$$

得知 $\frac{1}{2}(X_1-X_2)^2+\frac{1}{2}(X_3+X_4)^2\sim\chi^2(2)$

所以 $P\left\{(X_1-X_2)^2+(X_3+X_4)^2>9\right\}$

$$=P\left\{\frac{1}{2}(X_1-X_2)^2+\frac{1}{2}(X_3+X_4)^2>\frac{9}{2}\right\}=P\left\{\chi^2>4.5\right\}\approx 0.1$$

即 $P\left\{\chi^2>4.5\right\}=\alpha \longleftrightarrow \chi^2_\alpha(2)=4.5$

查表**n=2** 一行知 $\chi^2_{0.1}(2)=4.605$ $\therefore\alpha\approx 0.1$

例3 设 X_1,X_2,X_3,X_4 为总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的一个样本

记 $Y_1=a\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}$, $Y_2=b\dfrac{(X_1-X_2)^2}{X_3^2+X_4^2}$ 已知它们服从上述三种分布之一

求 Y_1,Y_2 的分布，并确定 $a,b.$

$$t=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim t(n)$$

解 $\because X_1,X_2,X_3,X_4$ 独立同 $N(0,\sigma^2)$ 分布

$$E(X_1-X_2)=E(X_1)-E(X_2)=0$$

$$D(X_1-X_2)=D(X_1)+D(X_2)=2\sigma^2$$

$$\longrightarrow \frac{X_1-X_2}{\sqrt{2\sigma^2}}\triangleq W\sim N(0,1)$$

又 $\dfrac{1}{\sigma^2}(X_3^2+X_4^2)\triangleq V\sim\chi^2(2)$，$W$ 与 V 相互独立

$$\therefore \frac{W}{\sqrt{V/2}}=\frac{X_1-X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}\sim t(2)\Longrightarrow Y_1\sim t(2),\ a=1.$$

例3 设 X_1,X_2,X_3,X_4 为总体 $X\sim N\left(0,\sigma^2\right)$ 的一个样本

$$Y_2=b\frac{\left(X_1-X_2\right)^2}{X_3^2+X_4^2}$$ 求 Y_1,Y_2 的分布，并确定 $a,b.$

解 $\because X_1,X_2,X_3,X_4$ 独立同 $N\left(0,\sigma^2\right)$ 分布

$$\longrightarrow \frac{X_1-X_2}{\sqrt{2\sigma^2}}\triangleq W\sim N(0,1)$$ 得 $$\frac{1}{2\sigma^2}\left(X_1-X_2\right)^2\triangleq U\sim\chi^2(1)$$

$$V=\frac{1}{\sigma^2}\left(X_3^2+X_4^2\right)\sim\chi^2(2),$$ U 与 V 相互独立

$$F=\frac{X/n_1}{Y/n_2}\sim F(n_1,n_2)$$

$$\therefore\frac{U/1}{V/2}=\frac{\left(X_1-X_2\right)^2}{X_3^2+X_4^2}\sim F(1,2)\Longrightarrow Y_2\sim F(1,2),\quad b=1.$$

二. 正态分布的样本均值与样本方差的分布

定理1 (样本均值和样本方差的分布)

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，

$\overline{X}, S^2$ 是其样本均值和样本方差

则 (1) $\bar{X} \sim N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2$$

(2) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

(3) $\bar{X}$ 和 S^2 相互独立

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

定理2. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差，

则有：$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim ?\, t(n-1)$

$$t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$$

证明: $\because \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ $\quad \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

并且两者相互独立，由t分布的定义得：

$$\frac{\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}} = (\bar{X}-\mu)\sqrt{n}\Bigg/\sqrt{\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$$

$$= \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

例4 从正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 中，抽取了20个样本

$(X_1,X_2,\cdots,X_{20})$

(1) 求 $P\left(0.37\sigma^2\le\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(X_i-\overline{X})^2\le1.76\sigma^2\right)$

(2) 求 $P\left(0.37\sigma^2\le\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(X_i-\mu)^2\le1.76\sigma^2\right)$

解 (1) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$, 即 $\frac{19S^2}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{20}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\sim\chi^2(19)$

$$P\left(0.37\sigma^2\le\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\le1.76\sigma^2\right)=P\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{20}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\ge7.4\right)$$

$$=P\left(7.4\le\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{20}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\le35.2\right)\quad-P\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{20}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\ge35.2\right)$$

$$\overset{\text{查表}}{=}0.99-0.01=0.98$$

例4 从正态总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 中，抽取了20个样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_{20})$

(1) 求 $P\left(0.37\sigma^2 \le \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(X_i - \overline{X})^2 \le 1.76\sigma^2\right)$

(2) 求 $P\left(0.37\sigma^2 \le \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(X_i - \mu)^2 \le 1.76\sigma^2\right)$

(2) $$\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(20)$$

$$P\left(0.37\sigma^2 \le \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(X_i - \mu)^2 \le 1.76\sigma^2\right) = P\left(7.4 \le \sum_{i=1}^{20}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \le 35.2\right)$$

$$= P\left(\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \ge 7.4\right) - P\left(\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \ge 35.2\right)$$

$$= 0.995 - 0.025 = 0.97$$

例5 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{16}$ 为总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，$\bar{X}, S^2$ 分别是样本均值和样本方差.

若 $P\{\bar{X} > \mu + kS\} = 0.05$, 求 k.

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

解 记 $T = \dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{16}} = \dfrac{\bar{X}-\mu}{S/4} \sim t(15)$

$$P\{\bar{X} > \mu + kS\} = P\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{S} > k\right\} = P\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{S/4} > 4k\right\}$$

$$= P\{T > 4k\} = 0.05$$

即 $4k = t_{0.05}(15) = 1.7531 \longrightarrow k = 0.4383$

例6 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{11}$ 为总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，

S^2 是样本方差，求 $P\left\{\dfrac{S^2}{\sigma^2} \le 1.61\right\}$, $D(S^2)$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

解 ① $\because \chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \dfrac{10S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(10)$

$$P\left\{\frac{S^2}{\sigma^2} \le 1.61\right\} = P\left\{\frac{10S^2}{\sigma^2} \le 16.1\right\} = P\left\{\chi^2(10) \le 16.1\right\}$$

$$= 1 - P\left\{\chi^2(10) > 16.1\right\}$$

因 $\chi^2_\alpha(10) = 16.1$ 查表得 $\alpha \approx 0.10$

$$\longrightarrow P\left\{\frac{S^2}{\sigma^2} \le 1.61\right\} \approx 0.90$$

例6 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{11}$ 为总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，S^2 是样本方差，求 $P\left\{\dfrac{S^2}{\sigma^2} \le 1.61\right\}$，$D(S^2)$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

解 ② $\because \chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \dfrac{10S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(10)$

$$\therefore D\left(\frac{10S^2}{\sigma^2}\right) = 20$$

$$\longrightarrow \left(\frac{10}{\sigma^2}\right)^2 D(S^2) = 20 \quad \longrightarrow D(S^2) = \frac{20}{10^2}\sigma^4 = \frac{1}{5}\sigma^4$$

例7 设 $\bar{X},\bar{Y}$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的容量均为 n 的两个独立样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 的样本均值. 若使两样本均值之差的绝对值超过 σ 的概率小于0.01, n至少为多少?

$$P\{|\bar{X}-\bar{Y}|>\sigma\}<0.01 \longrightarrow n\geq ?$$

解 $\because\ \bar{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right),\quad \bar{Y}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right),\quad \bar{X}$ 与 $\bar{Y}$ 相互独立

$$\Rightarrow \bar{X}-\bar{Y}\sim N\left(0,\frac{2\sigma^2}{n}\right)$$

$$P\{|\bar{X}-\bar{Y}|>\sigma\}=1-P\{|\bar{X}-\bar{Y}|\leq\sigma\}=1-P\{-\sigma\leq\bar{X}-\bar{Y}\leq\sigma\}$$

$$=1-\left\{\Phi\left((\sigma-0)\Big/\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}\right)-\Phi\left((-\sigma-0)\Big/\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}\right)\right\}$$

$$=2\left(1-\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)\right)<0.01 \Rightarrow n\geq 14$$

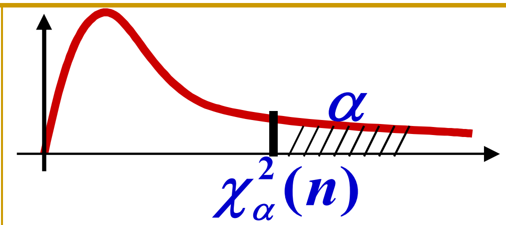
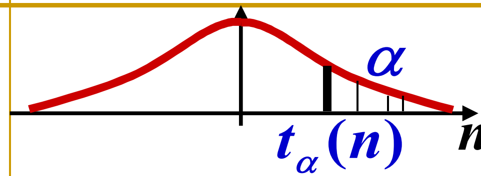
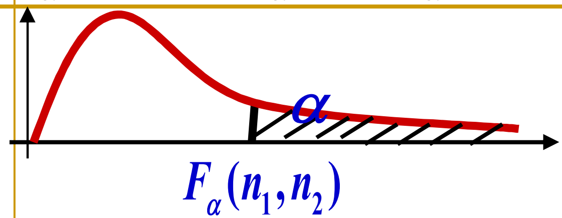
第六章 数理统计的基本概念

第一节 总体与随机样本

第二节 统计量及其分布

第三节 常用的重要统计量及其分布

复习 常用统计量及抽样分布

χ^2分布	$X_i \sim N(0,1)\ \ i=1,2,\cdots,n$ 独立 ★$\chi^2=\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$ $E(\chi^2)=n \qquad D(\chi^2)=2n$	 $n>45$ $\chi^2_\alpha(n)\approx 1/2(z_\alpha+\sqrt{2n-1})^2$
t分布	$X \sim N(0,1),\ Y \sim \chi^2(n),$ 独立 ★$t=\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$	 $n>45$ $t_\alpha(n)=-t_{1-\alpha}(n),\ t_\alpha(n)\approx z_\alpha$
F分布	$U \sim \chi^2(n_1), V \sim \chi^2(n_2),$ 独立 ★$F=\frac{U/n_1}{V/n_2} \sim F(n_1,n_2)$ $1/F \sim F(n_2,n_1)$	 $F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=1/F_\alpha(n_2,n_1)$
$X \sim N(\mu,\sigma^2)$ $X_1,X_2,\cdots,X_n$ $\overline{X},S^2$	★$Th1\quad \overline{X} \sim N(\mu,\sigma^2/n),$ $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$ 独立 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \qquad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$	$Th2$ ★$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

几个常用的统计量

名称	统计量	观察值
样本均值	$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$	$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$
样本方差	$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$	$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2$
样本标准差	$S=\sqrt{S^2}$	$s=\sqrt{s^2}$
样本 k 阶(原点)矩	$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$	$a_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^k$
样本k阶中心矩	$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^k$	$b_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^k$

性质 设总体 X 的期望、方差、 k 阶矩均存在

记 $E(X)=\mu,\ D(X)=\sigma^2,\ E\left(X^k\right)=\mu_k$

则 1) $A_1=\bar{X},\quad \sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)=0$

2) 在形如 $\sum_{i=1}^{n}(X_i-c)^2$ 的函数中， $\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$ 为最小

3) $E\left(\bar{X}\right)=\mu,\quad D(\bar{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$

4) $E\left(S^2\right)=\sigma^2,\ B_2=A_2-A_1^2$

定理2

5) $E\left(A_k\right)=\mu_k,\ A_k\xrightarrow{P}\mu_k\left(n\to\infty\right)$

定理3

定理1 （1）总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 则样本均值 $\bar{X}\sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$

（2）分布未知，则 n 较大时， $\bar{X}\underset{近似}{\sim}N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$