第七章 代数系统

计算机科学与技术系 洪源

二元运算及其性质

- 运算的定义
  - n 元运算（第 232 页定义 7.1 及其后的 2 条判定标准）
    - 若 |S|=m，则 S 上共可定义多少个二元运算?
    - 若 |S|=m，则 S 上共可定义多少个一元运算?

二元运算及其性质

- 运算的性质

  1 封闭

  - 设 * 是 n 元运算
  - 若对于 $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in S$， 均有 $*(x_1, x_2, \dots, x_n) \in S$
  - 则称 S 对 * 是封闭的

  2

二元运算及其性质

- 运算的性质
  - 交换律（第 232 页定义 7.2 ）
  - 结合律（第 232 页定义 7.3 ）
  - ? 幂等元，幂等律（第 233 页定义 7.4 ）
    - 例：
      - 实数集合上的普通加法不适合幂等律
      - 实数 0 是普通加法的幂等元 emmm
  - 分配律（第 233 页定义 7.5 ）
    - 例：
      - 在实数集上 × 对 + 可分配 (+) ×
      - 在实数集上 + 对 × 不可分配 (×) +
      - 在 {0, 1} 上∧对∨可分配
      - 在 {0, 1} 上∨对∧可分配

- 吸收律（第 233 页定义 7.6， 注意前提条件）
  - 例：
    - {0, 1} 上的 $\wedge$ 和 $\vee$ 满足吸收律
    - P(S) 上的 $\cap$ 和 $\cup$ 满足吸收律

消去律：

二元运算及其性质

- 运算的特异元素
  - 单位元 / 幺元，左单位元，右单位元（参见第 234 页定义 7.9）
    - 例：
      - 实数 0 是实数集合上关于普通加法的单位元
      - 实数 1 是实数集合上关于普通乘法的单位元
      - 实数 0 是实数集合上关于普通减法的右单位元
      - 实数 1 是实数集合上关于普通除法的右单位元
      - $\varnothing$ 是 $P(S)$ 上关于 $\cup$ 的单位元
    - 左右单位元的统一性及单位元的唯一性
      - 证明

二元运算及其性质

- 运算的特异元素
  - 左零元，右零元，零元（参见第 234 页定义 7.11）
    - 例：
      - 普通加法在实数集合上无零元
      - 实数 0 是实数集合上关于普通乘法的零元
      - $\varnothing$ 是 P(S) 上关于 $\cap$ 的零元
      - S 是 P(S) 实数集合上关于 $\cup$ 的零元
      - $\oplus$ 在 P(S) 上无零元
    - 左右零元的统一性
      - 证明
    - 单位元和零元的互斥性
      - 注意前提条件：集合中至少含有 2 个元素
      - 证明

二元运算及其性质

- 运算的特异元素
  - 左逆元，右逆元，逆元，可逆（参见第 234 页定义 7.10）
    - 例： （单位元）
      - 实数 0 在实数集合上关于普通乘法不可逆
      - 实数 1 是 1 关于普通乘法的逆元
      - 实数 0.5 是 2 关于普通乘法的逆元
      - 在 P(S) 上关于 $\cup$ 只有 $\varnothing$ 有逆元，即 $\varnothing$ 本身
    - 课堂练习：实数 1 是不是 1 关于普通除法的逆元？
    - 左右逆元的统一性
      - 注意前提条件：运算可结合
      - 证明

二元运算及其性质

- 运算的性质
  - 左消去律，右消去律，消去律（参见第 233 页定义 7.7）

    1 (不是零元)
    - 例：2
      - 实数集上的普通加法满足消去律
      - 实数集上的普通乘法满足消去律
    - 课堂练习：求证——
      - P(S) 上的 $\cap$ 不满足消去律
      - P(S) 上的 $\cup$ 不满足消去律
      - P(S) 上的 $\oplus$ 满足消去律

代数系统

- 代数系统：将集合赋予了运算
  - 代数系统 / 代数（第 234 页定义 7.8 ）
    - 例：
      - <R, +, •>
      - <{0, 1}, ¬, ∧, ∨>
      - < P(S), ~, ∩ , ∪ >
  - 代数常数 / 特异元素（第 234 页后数第 2 自然段）
    - 代数常数是人为规定的
  - 代数系统的性质——代数系统上运算的性质
  - 同类型
    - 若两个代数系统的运算个数相同，并且
    - 对应的运算元数也相同，并且
    - 代数常数的个数和种类也相同，
    - 则称两个代数系统具有相同的构成成分，
    - 也称他们是同类型的代数系统

- 子代数系统 / 子代数（第 236 页定义 7.12， 在第 3 个逗号后补充“且 A_0 和 A 具有相同的代数常数，”之后的 V 改成 V'）
- 平凡的子代数，真子代数

条件or结论

  - 例：
    - 设 S={1, 2, 3, 4, 5}， x*y = max(x, y)
    - 则在 <S, *> 中， $e_*=1$， $\theta_*=5$
    - 令 S_1={1, 2, 3}， S_2={2, 3, 4}， S_3={1, 3, 5}， S_4={1, 5}
    - 则
      - < S_1, *>， < S_2, *> 均不是 <S, *> 的子代数
      - < S, *>， < S_3, *>， < S_4, *> 均是 <S, *> 的子代数，且
        - < S_3, *>， <S_4, *> 是 < S, *> 的真子代数
        - < S, *>， < S_4, *> 均是 < S, *> 的平凡的子代数

已知 $V_1=\langle I_1,\otimes_1\rangle$, $V_2=\langle I_2,\oplus_2\rangle$ 都是代数系统，求积代数 $V_1\times V_2$

$V_1\times V_2=\langle I_1\times I_2,*\rangle=\langle\{\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle\},*\rangle$

对 $\forall\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle\in I_1\times I_2$，都有 $\langle x_1,y_1\rangle*\langle x_2,y_2\rangle=\langle x_1\otimes_1 x_2,y_1\oplus_2 y_2\rangle$

?

- 积代数（第 236 页定义 7.13）
- 因子代数 ???　为什么
  - 例：
    - 设 $V_1=\langle R,+\rangle$，　$V_2=\langle I,+\rangle$
    - 则 $V=\langle C,+\rangle$ 为 V_1 与 V_2 的积代数
  - 任意两个确定的代数系统的积代数是确定的
  - 积代数与它的因子代数是同类型的代数系统

看！

- 积代数（第 236 页定义 7.13 ）
- 因子代数
  - 积代数对因子代数性质的保持
    - 设 V_1=<A, ∘> ， v_2=<B, *> 是同类型的代数系统， $V_1 \times V_2$=<A×B, •> 是它们的积代数，
    - 如果∘和 * 都满足交换律（结合律、幂等律），那么•也满足交换律（结合律、幂等律）
    - 如果 e_1 和 e_2 （ θ_1 和 θ_2 ）分别是 ∘ 和 * 的单位元（零元），那么 $<e_1, e_2>$ （ $<\theta_1, \theta_2>$ ）也是 • 的单位元（零元）
    - 如果 x 和 y 分别是∘和 * 的可逆元素，那么 <x, y> 也是 • 的可逆元素，逆元是 $<x^{-1}, y^{-1}>$

两个同一类型的

代数系统的同态与同构

- 同态（自同态），单同态，满同态，同态像，同构（自同构）（参见第 236 页定义 7.14 删去第二行的小括号、 7.15 、 7.16 、 7.17 ， 7.15 （3） 实际上就是普通的同态）
  - 例：
    - 设 $V_1=<R, +>$ ， $V_2=< R^+, \bullet>$
    - 则 $f: R\to R^+, f(x)=e^x$ 为 V_1 到 V_2 的同态
      - 可证明 $V_1\cong V_2$
  - 代数系统之间的存在同构映射关系是等价关系 在哪提过？
  - 若 f 是从 $<A, *>$ 到 $<B, \circ>$ 的同态，则 $<f(A), \circ>$ 仍然是一个代数系统
    - 证明
  - 同态映射使代数系统的性质单向传递
    - 可交换，可结合，幂等律（容易证明）
    - 分配律，吸收律（推广同态概念后可证明）
    - 消去律（可能有例外）