第一章 随机事件与概率

第四节 条件概率及事件的独立性

- 条件概率
- 乘法定理
- 全概率公式与贝叶斯公式
- 事件的独立

掌握应用事件的独立进行概率的计算。

四. 事件的独立

引例 将一颗均匀骰子连掷两次，

设：A={第一次掷出6点}，

B={第二次掷出6点}，

则 $P(B \mid A) = P(B)$

若事件A发生，对事件B 发生的概率没有影响，这时称事件A、B独立。

由乘法定理，$P(AB)=P(A)P(B|A)$

当事件A、B独立时，有：$P(AB)=P(A)\,P(B)$

定义1. 设 A, B是两个事件，如果：

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称 事件A与 B 是 相互独立 的。

定理： 设 A, B是两事件, 且$P(A)>0$, 若 A, B相互独立

则: $P(B|A) = P(B)$，反之亦然。

定义1. 设 A, B是两个事件，如果：

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称 事件A与 B 是 相互独立 的。 $P(B|A) = P(B)$

注

（1）若 A与 B 相互独立 ⟹ A与$\overline{B}$，$\overline{A}$与B，$\overline{A}$与$\overline{B}$ 也相互独立。

[证明] (只证 A与$\overline{B}$ 相互独立，其余自证)

$$\because\ P(A\overline{B}) = P(A - AB) \quad 而\ AB \subset A$$

$$= P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B)$$

$$= P(A)(1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\overline{B})$$

定义1. 设 A, B 是两个事件，如果：

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称 事件A与 B 是 相互独立 的。 $P(B|A) = P(B)$

注

（1）若 A与 B 相互独立 ⟹ A与$\overline{B}$ ，$\overline{A}$与B，$\overline{A}$与$\overline{B}$ 也相互独立。

（2）必然事件S、不可能事件 Φ 与任何事件都是相互独立的。

$$P(AS) = P(A) = P(A)P(S)$$

$$P(A\varnothing) = P(\varnothing) = P(\varnothing)P(A)$$

（3）若 $P(A) > 0, P(B) > 0$ ，则 A，B相互独立与 A，B互不相容不能同时成立。

不相容：$AB = \varnothing$ 独立：$P(AB) = P(A)P(B)$

如何判断两事件独立？

1. 根据独立的定义,判断事件A、B是否相互独立。

2. 通过计算条件概率判断是否相互独立。

例如： 从一副不含大小王的扑克牌中任取一张，记

A = {抽到 K }, B = { 抽到的牌是黑色的 }

问：事件A、B是否相互独立？

解： 由于：$P(A) = 4/52 = 1/13,$

所以：$P(AB) = 2/52 = 1/26$ ，

$P(B) = 26/52 = 1/2$

可见，$P(AB)=P(A)P(B)$

即A、B是相互独立的

如何判断两事件独立?

1. 根据独立的定义,判断事件A、B是否相互独立。
2. 通过计算条件概率判断是否相互独立。

例如: 从一副不含大小王的扑克牌中任取一张,记

$A=\{$抽到$K\}$, $B=\{$抽到的牌是黑色的$\}$

问:事件A、B是否相互独立?

解: 由于: $P(A) = 4/52 = 1/13$,

$$P(A \mid B) = 2/26 = 1/13$$

即:$P(A \mid B) = P(A)$,

说明事件A、B独立。

定义2 (两两独立) 设 A, B, C 是三个事件, 如果有:

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(BC) = P(B)P(C) \\ P(AC) = P(A)P(C) \end{cases}$$

则称 A, B, C 两两独立。

注: 若 A, B, C 两两独立,

$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ 不一定成立。

$$\because P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$$

$$= P(A)P(B)P(C|AB)$$

$\because C$ 与 A 独立, C 与 B 独立, 但 C 与 AB 不一定独立

$\therefore P(C|AB) = P(C)$ 不一定成立。

定义3. 设 A, B, C 是三个事件, 如果具有等式:

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(BC)=P(B)P(C) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

则称事件 A, B, C 是相互独立的。

注:▲ 推广: 设 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 是 n 个事件, 如果

对于任意k $(1 \le k \le n)$, $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$

具有等式: $P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$

则称 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 是相互独立的。

注：▲ 相互独立与两两独立的关系：

相互独立 $\Rightarrow$ 两两独立，反之则不真

▲ n 个独立事件和事件 的概率公式：

设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，

则"$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 至少有一个发生"的概率为：

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n})$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_n)$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1) P(\overline{A}_2) \cdots P(\overline{A}_n)$$

$\overline{A}_1, \overline{A}_2, \cdots, \overline{A}_n$ 也相互独立

伯恩斯坦反例

一个均匀的正四面体，其第1面染成红色，第2面染成白色，第3面染成蓝色，而第4面同时染上红、白、蓝三种颜色. 现以 A, B, C 分别记投一次四面体出现红、白、蓝颜色朝下的事件.

问事件 **A, B, C** 两两独立吗？问事件 **A, B, C** 相互独立吗？

解： 由于在四面体中红、白、蓝分别出现两面，

因此 $P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，同理 $P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$，

$P(AB)=\frac{1}{4}$，同理$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{4}$，

则：$P(AB)=P(A)P(B)$，$P(BC)=P(B)P(C)$，$P(AC)=P(A)P(C)$，

所以事件 A, B, C 两两独立.

$P(ABC)=\frac{1}{4}$，$P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$，

故 $P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C)$.

有关公式

① 设 A、B相互独立

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$

$$P(A\cup B)=1-P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})$$

② 设 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 相互独立

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=1-P(\overline{A_1}\cdots\overline{A_n})=1-P(\overline{A_1})\cdots P(\overline{A_n})$$

又若：$P(A_i)=p,\quad i=1,2,\cdots,n \qquad P(\overline{A_i})=1-p,$

有：$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=1-(1-p)^n$$

例1. 三人**独立**地去破译一份密码，已知各人能译出的概率分别为1/3，1/3，1/2，问三人中至少有一人能将密码译出的概率是多少？

解： 将三人编号为 1, 2, 3

记 A_i={ 第 i 个人能破译出密码 } i=1, 2, 3

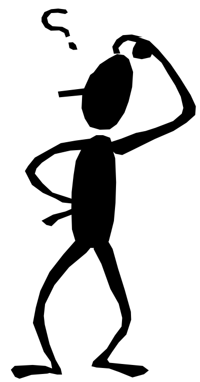
已知: $P(A_1)=1/3$, $P(A_2)=1/3$, $P(A_3)=1/2$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})$$

$$= 1 - [1 - P(A_1)][1 - P(A_2)][1 - P(A_3)]$$

$$= 1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{9} = 0.778$$



例2 甲、乙、丙三台机床独立工作,由一个操作者照管, 某段时间内它们不需要操作者照管的概率分别为 0.9, 0.8, 0.85

求:(1) 没有一台机床不需要照管的概率 $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$

(2) 至少一台机床需要照管的概率 $P(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})$

(3) 至多一台机床不需要照管的概率

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})+P(A\overline{B}\,\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\,\overline{B}C)$$

解: 设 A, B, C ={甲, 乙, 丙三台机床不需要照管}

$\overline{A}$、$\overline{B}$、$\overline{C}$={甲, 乙, 丙三台机床需要照管}

因为三台机床工作相互独立, 所以 A、B、C 独立

$$(1)\ P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})$$

$$= (1-0.9)(1-0.8)(1-0.85) = 0.003$$

$$(2)\ P(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}) = P(\overline{ABC}) = 1 - P(ABC)$$

$$= 1 - P(A)P(B)P(C)$$

$$= 1 - 0.9\times 0.8\times 0.85$$

$$= 0.388$$

甲,乙,丙三台机床不需要照管的概率分别为:

$P(A)$=0.9,

$P(B)$=0.8,

$P(C)$=0.85

(3) D={至多只有一台机床不需要照看}

$$P(D) = P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) + P(A\overline{B}\,\overline{C}) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(\overline{A}\,\overline{B}C)$$

$$= 0.003 + 0.9\times 0.2\times 0.15 + 0.1\times 0.8\times 0.15$$

$$+ 0.1\times 0.2\times 0.85 = 0.059$$

例3 设每只步枪击中飞机的概率均为0.004，

求：1) 100只步枪同时独立地射击时，击中飞机的概率

2) 为确保以0.99的概率击中飞机，至少要多少支步枪同时射击？

解：记 $A=$ {飞机被击中}

$A_i=$ {第i支步枪击中飞机}

1) $A=\bigcup_{i=1}^{100} A_i \quad P(A_i)=0.004$

由题意知 $A_1,\cdots A_{100}$ 相互独立

则：$P(A)=P(\bigcup_{i=1}^{100} A_i)=1-P(\overline{A_1}\cdots\overline{A_{100}})$

$=1-P(\overline{A_1})\cdots P(\overline{A_{100}}) \quad =1-(1-0.004)^{100}\approx 0.33$

例3 设每只步枪击中飞机的概率均为0.004，

求：1) 100只步枪同时独立地射击时，击中飞机的概率

2) 为确保以0.99的概率击中飞机，至少要多少支步枪同时射击？

解： 2) 设 $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$

题意： $P(A)\geq 0.99 \rightarrow n\geq ?$

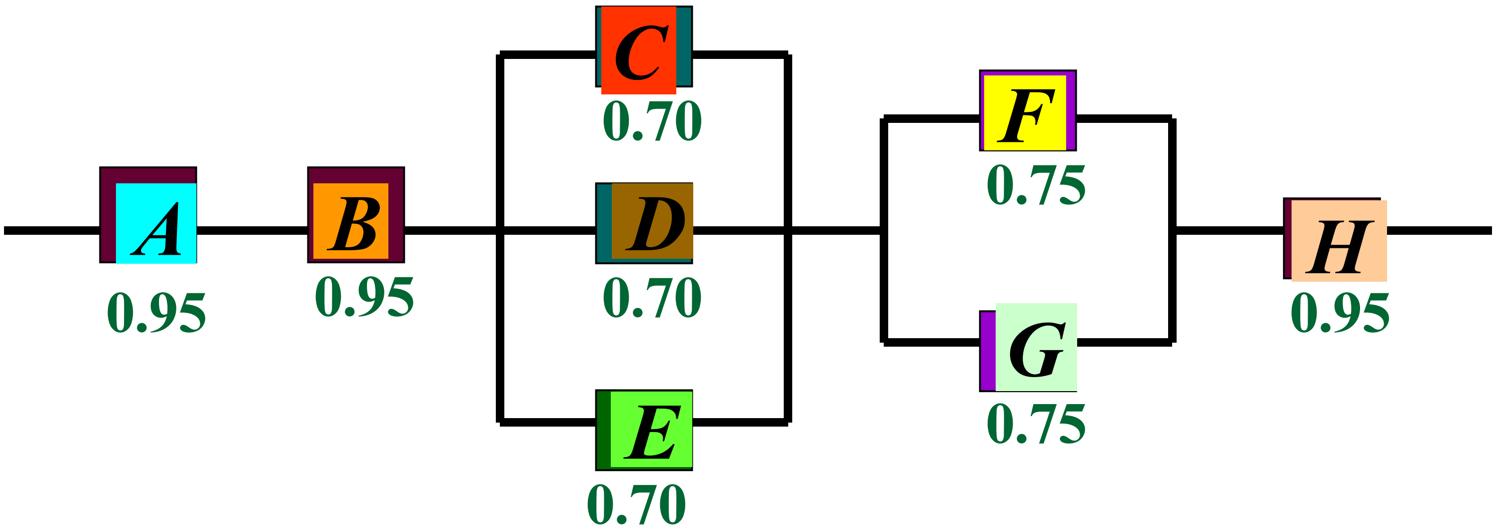
$$P(A)=1-(1-0.004)^n=1-0.996^n\geq 0.99$$

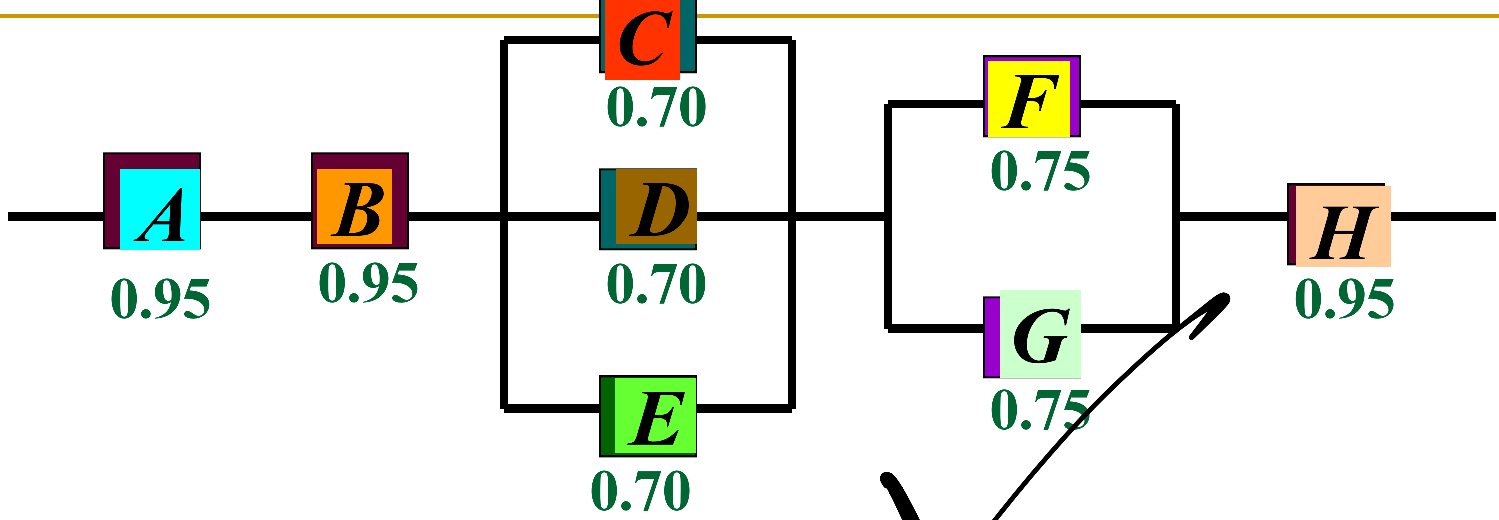
$$\longrightarrow n\geq \frac{\lg 0.01}{\lg 0.996}\approx 1148.99 \longrightarrow n\geq 1149$$

至少需要1149只步枪

例4. 下图是一个串并联电路示意图. *A*、*B*、*C*、*D*、*E*、*F*、*G*、*H* 都是电路中的元件。 它们下方的数是它们各自正常工作的概率。

求：电路正常工作的概率。





解： 设W={电路正常工作}

$$W = AB(C\cup D\cup E)(F\cup G)H$$ 由独立性有：

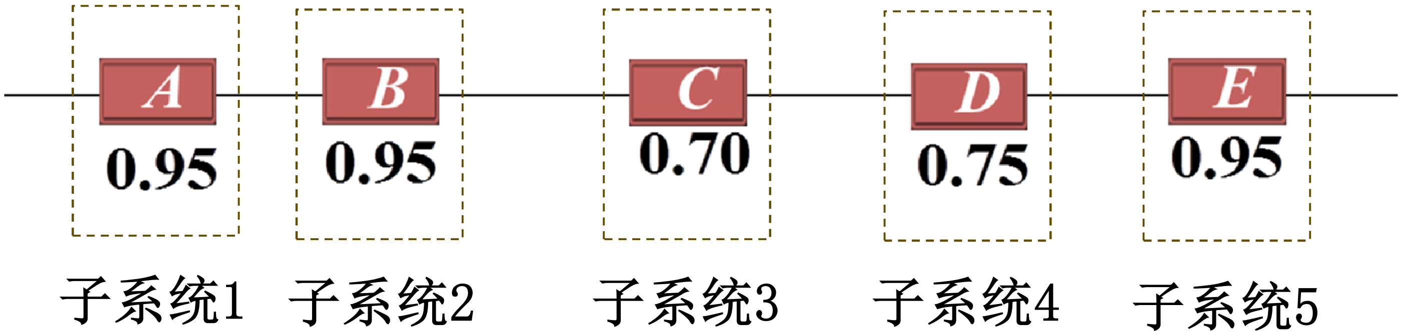
$$P(W)=P(A)P(B)P(C\cup D\cup E)P(F\cup G)P(H)$$

其中: $P(C\cup D\cup E)=1-P(\bar{C})P(\bar{D})P(\bar{E})=0.973$

$$P(F\cup G)=1-P(\bar{F})P(\bar{G})=0.9375$$

代入得: $P(W)\approx 0.783$

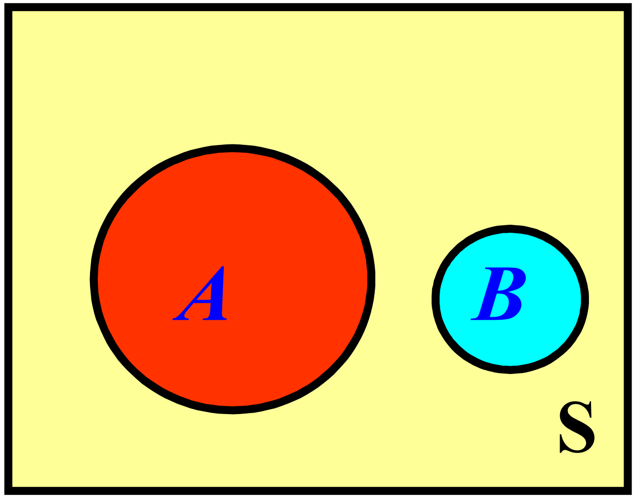
思考：　设某系统由五个子系统构成，每个子系统由某一种元件组成(如图)，　且各元件能否正常工作是相互独立的. 为了提高子系统可靠性，可以采用并联方式.
若想可靠性不低于**0.78**，如何对系统进行改造?



设计思路　对可靠性低的元件进行并联，提高其可靠性.

练习1（1）如图A，B两事件是独立的吗？

（2）能否在样本空间 S 中找两个事件,它们既相互独立又互不相容?



解 (1) 因为：$P(AB)=0$

而已知 $P(A)\neq 0$， $P(B)\neq 0$

即： $P(AB)\neq P(A)P(B)$

故 A、B不独立。

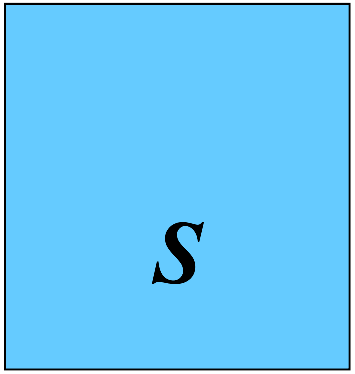
若A、B 互不相容（互斥）,且 $P(A)>0$, $P(B)>0$,
则 A 与 B 不独立。

反之，若 A与 B 独立，且 $P(A)>0$, $P(B)>0$,
则 A、B 不互斥。

练习1（1）如图A，B两事件是独立的吗？

（2）能否在样本空间 S 中找两个事件,它们既相互独立又互不相容?

（2）能。例如：S 和 Φ



因为：$\Phi S = \Phi$

所以：$P(S\Phi) = P(\Phi)\,P(S) = 0$

则：Φ 与 S 独立且互斥。

注　意

不难发现，Φ 与任何事件都相互独立且互斥。

练习2 独立与互斥的区别和联系

(1) 设A、B为互斥事件，且 $P(A)>0$, $P(B)>0$,

下面四个结论中，正确的是：

1. $P(B|A)>0$　　2. $P(A|B)=P(A)$

3. $P(A|B)=0=\frac{P(AB)}{P(B)}$　　4. $\cancel{P(AB)=P(A)P(B)}$

(2) 设A、B为独立事件，且$P(A)>0$, $P(B)>0$,

下面四个结论中，不正确的是：

1. $P(B|A)>0$　　2. $P(A|B)=P(A)$

3. $P(A|B)=0$　　4. $P(AB)=P(A)P(B)$

答案：(1) 3 ；(2) 3

小结

概率的计算

1）统计定义：$f_n(A) \xrightarrow[n\to\infty]{} 稳定值 = P(A)$

2）概率的性质：**1~5**

3）等可能概型：$P(A)=\dfrac{m}{n}$

4）条件概率：$P(B|A)=\dfrac{k}{m}=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$

独立

5）乘法定理：$P(AB)=P(B|A)P(A)=P(A)P(B)$

$$=1-P(\bar{A}\cup\bar{B})$$

6）全概率公式：$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)$

7）贝叶斯公式：$P(B_1|A)=\dfrac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}$