

第十三章 非正弦周期电流电路 和信号的频谱

- § 13.1 非正弦周期信号
- § 13.2 周期函数分解为傅里叶级数
- § 13.3 有效值、平均值和平均功率
- § 13.4 非正弦周期电流电路的计算

§ 13.1 非正弦周期信号

一、信号的分类

1、正弦信号

按正弦规律变化的信号

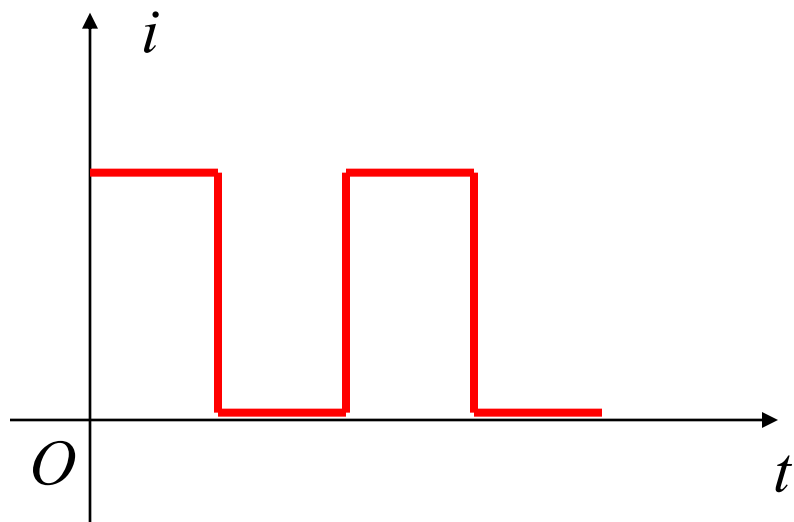
2、非正弦信号

不是按正弦规律变化的信号

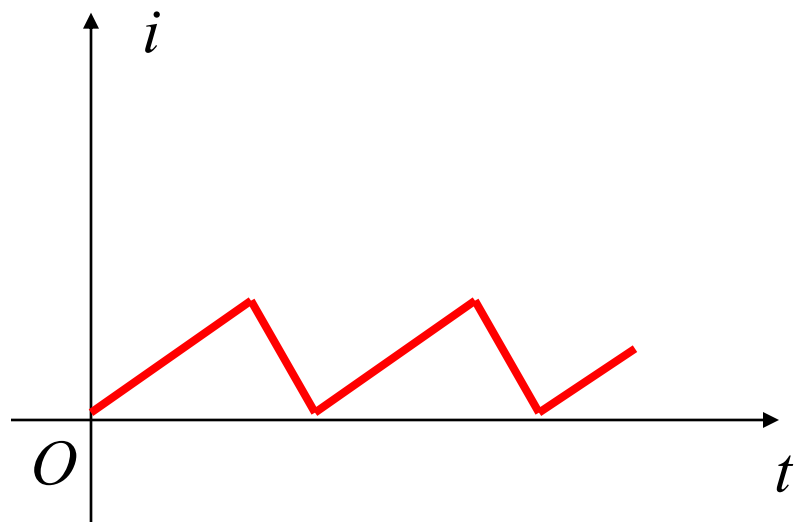
二、常见的非正弦信号

1、实验室常用的信号发生器

可以产生正弦波，方波，三角波和锯齿波；



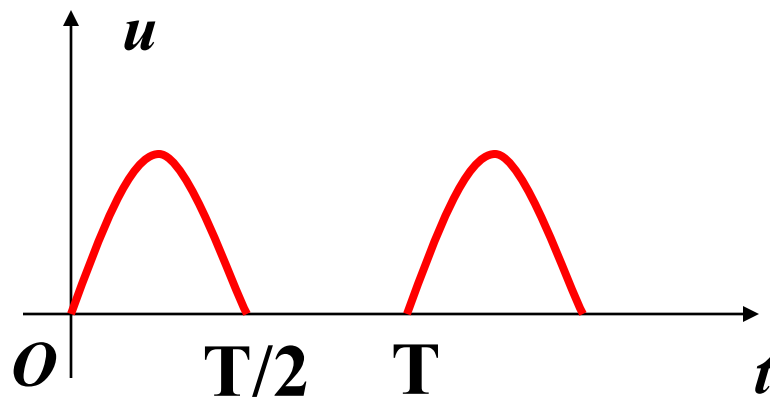
方波电流



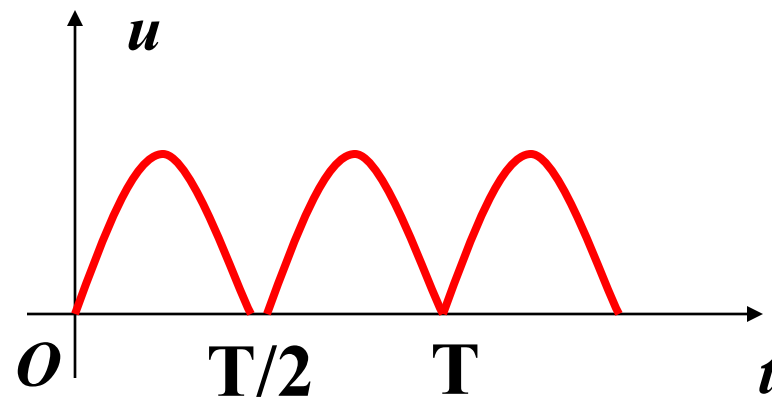
锯齿波

2、整流分半波整流和全波整流

激励是正弦电压，
电路元件是非线性元件二极管
整流电压是非正弦量。



半波整流



全波整流

三、非正弦信号的分类

1、非正弦周期信号

$$f(t) = f(t+kT)$$

$$k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

2、非正弦非周期信号

不是按正弦规律变化的非周期信号

四、谐波分析法

1. 应用**傅里叶**级数展开方法，将非正弦周期激励电压、电流或信号分解为一系列不同频率的正弦量之和(频率最低的为基波[**一次谐波**]，其他频率为**高次谐波**)；
2. 分别计算在各个正弦量**单独**作用下在电路中产生的同频率正弦电流分量和电压分量；
3. 根据**叠加定理**，把所得分量按**时域**形式叠加。

§ 13.2 非正弦周期函数分解为傅里叶级数

一、周期函数

$$f(t)=f(t+kT)$$

T 为周期函数 $f(t)$ 的周期，

$k=0, 1, 2, \dots$

如果给定的周期函数满足狄里赫利条件，它就能展开成一个收敛的**傅里叶级数**。

周期函数在一个周期内包含有限个最大值和最小值以及有限个第一类间断点。

电路中的非正弦周期量都能满足这个条件。

二、傅里叶级数的两种形式

1、第一种形式

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)]$$

ω_1 为周期函数 $f(t)$ 的角频率

2、第二种形式

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \cos(k\omega_1 t + \psi_k)$$

$A_0/2$

称为周期函数的**恒定分量**（或直流分量）；

$A_{1m}\cos(\omega_1 t + \psi_1)$

称为**1次谐波**（或基波分量），

其周期或频率与原周期函数 $f(t)$ 相同；

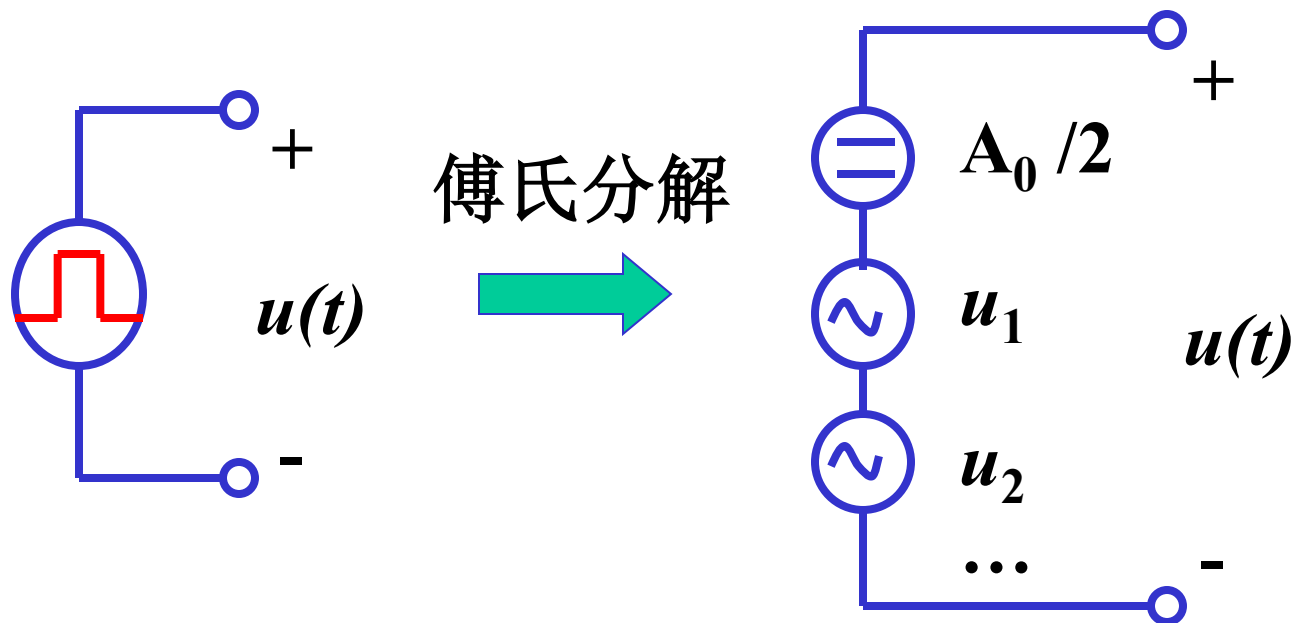
高次谐波

其他各项统称为**高次谐波**，

即2次、3次、4次、.....

注意：谐波为余弦**cos**形式

3、傅里叶分解式的数学、电气意义



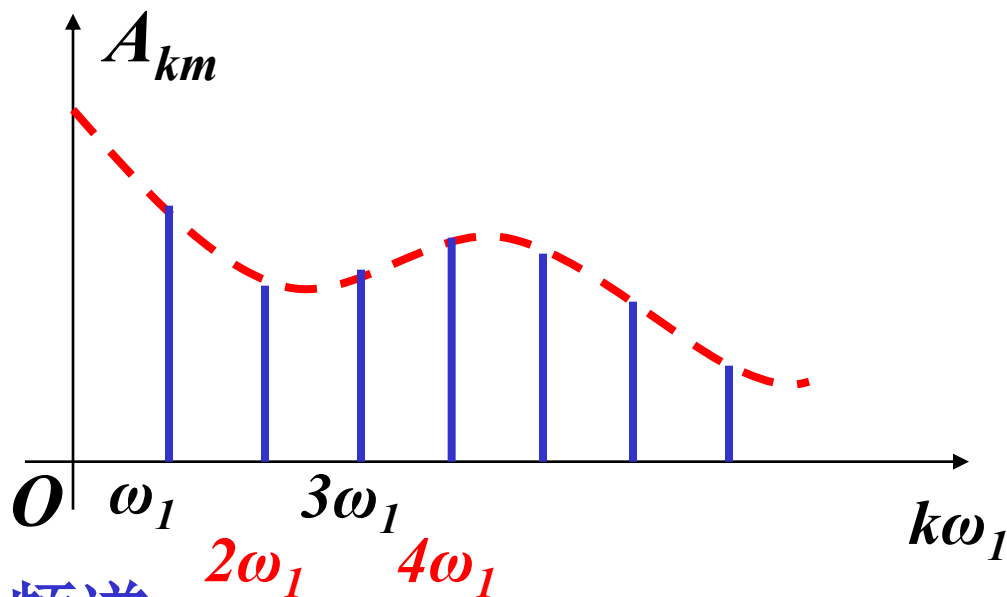
对于电路分析应用的方法是

叠加定理

三、 $f(t)$ 的频谱

1、幅度频谱

各次谐波的振幅用相应线段依次排列。



2、相位频谱

把各次谐波的初相用相应线段依次排列。

§ 13.3 有效值、平均值和平均功率

一、非正弦周期量的有效值

有效值与各次谐波有效值之间的关系

假设一非正弦周期电流 i 可以分解为傅里叶级数

$$i = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos(k\omega_1 t + \psi_k)$$

则得电流的有效值为

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt + I_2^2 + I_3^2 + \dots}$$

非正弦周期电流的有效值等于恒定分量的平方与各次谐波有效值的平方之和的平方根。

此结论可推广用于其他非正弦周期量。

二、非正弦周期量的平均值

平均值的定义

$$I_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T |i| dt$$

非正弦周期电流平均值等于此电流绝对值的平均值。

三、非正弦周期电流电路的功率

1、瞬时功率

任意一端口的瞬时功率（吸收）为

$$p=ui$$

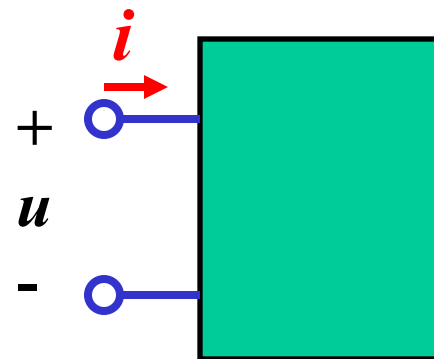
式中 u 、 i 取关联方向。

2、平均功率

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots + U_k I_k \cos \varphi_k + \dots$$

平均功率等于恒定分量构成的功率和各次谐波平均功率的代数和。

已知一端口的电压和电流，求电压和电流的有效值和一端口的平均功率。



$$u = \underline{10} + \underline{20 \cos(30t + 27^\circ)} + \underline{30 \sin(60t + 11^\circ)} + \underline{40 \sin(120t + 15^\circ)} \text{ V}$$

$$i = \underline{2} + \underline{3 \cos(30t - 33^\circ)} + \underline{4 \sin(90t + 52^\circ)} + \underline{5 \sin(120t - 15^\circ)} \text{ A}$$

解：电压的有效值

$$U \neq \sqrt{10^2 + 20^2 + 30^2 + 40^2}$$

$$U = \sqrt{10^2 + \left(\frac{20}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{30}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{40}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

电流的有效值

$$I = \sqrt{2^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$u = 10 + 20 \cos(30t + 27^\circ) + 30 \sin(60t + 11^\circ) + 40 \sin(120t + 15^\circ) \text{V}$$

$$i = 2 + 3 \cos(30t - 33^\circ) + 4 \sin(90t + 52^\circ) + 5 \sin(120t - 15^\circ) \text{A}$$

平均功率

$$P =$$

$$10 \times 2 + 20 \times 3 \cos 60^\circ + 30 \times 4 \cos(-41^\circ) + 40 \times 5 \cos 30^\circ$$

$$~~P =~~ 10 \times 2 + 20 \times 3 \cos 60^\circ + 40 \times 5 \cos 30^\circ$$

$$P = 10 \times 2 + \left(\frac{20}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \cos 60^\circ + \left(\frac{40}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right) \cos 30^\circ$$

§ 13.4 非正弦电流电路的计算

一、非正弦电流电路的计算具体步骤

1、傅氏分解

把给定的非正弦周期电源电压或电流**分解**为傅里叶级数，

高次谐波取到哪一项为止，要看所需要准确度的高低而定。

傅里叶级数应展开成**第二种**形式。

见教材P322表13-1 “常用周期函数傅里叶级数展开式”

2、单独作用

分别求出电源电压或电流的恒定分量以及各谐波分量**单独作用**时的响应。

对各次谐波分量，求解时可以用**相量法**进行，
但要注意，感抗、容抗与**频率**有关。

1) 直流分量单独作用

电感 L 相当于 **短路**

电容 C 相当于 **开路**

求出 $U_0^{(0)}$

2) 一次谐波单独作用

相量法

$$u_s^{(1)}(t) \rightarrow \dot{U}_s^{(1)} \rightarrow \dot{U}_o^{(1)} \rightarrow u_o^{(1)}(t)$$

响应 瞬时值

$$X_L^{(1)} = \omega_1 L$$

$$X_C^{(1)} = 1/\omega_1 C$$

3) 高次谐波单独作用

$$u_s^{(k)}(t) \rightarrow \dot{U}_s^{(k)} \rightarrow \dot{U}_o^{(k)} \rightarrow u_o^{(k)}(t)$$

$$X_L^{(k)} = k\omega_1 L = k X_L^{(1)}$$

$$X_C^{(k)} = 1/k\omega_1 C = X_C^{(1)}/k$$

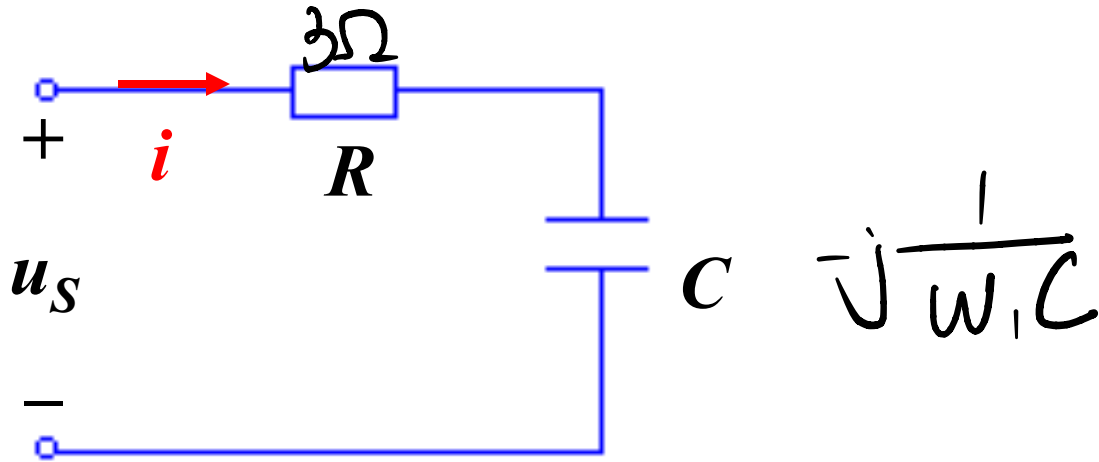
3、应用叠加定理

把上一步所计算出的结果化为**瞬时**表达式后进行相加，

把表示不同频率正弦电流的相量直接相加是没有意义的，

最终求得的响应是用**时间函数**表示的。

例:



$R=3\ \Omega$, $1/\omega_1 C=9.45\ \Omega$, 输入电源为
 $u_S=[10+141.40\cos(\omega_1 t)+47.13\cos(3\omega_1 t)$
 $+28.28\cos(5\omega_1 t)+20.20\cos(7\omega_1 t)$
 $+15.71\cos(9\omega_1 t)+\cdots]\text{V}。$

求电流 i 和电阻吸收的平均功率 P 。

$R=3\ \Omega$, $1/\omega_1 C=9.45\ \Omega$, 输入电源为

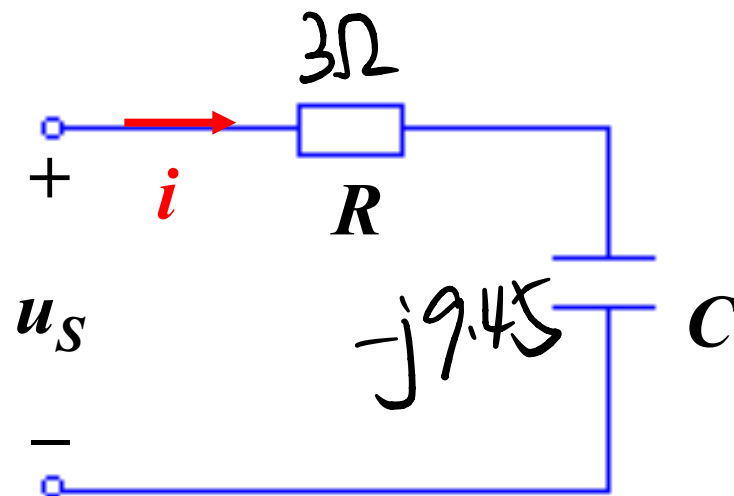
$$u_S=[10+141.40\cos(\omega_1 t)+47.13\cos(3\omega_1 t)\\+28.28\cos(5\omega_1 t)+20.20\cos(7\omega_1 t)\\+15.71\cos(9\omega_1 t)+\cdots]\text{V}。$$

解:

$k=0$, 直流分量 $U_0=10\text{V}$,

$$I_0=0$$

$$P_0=0$$

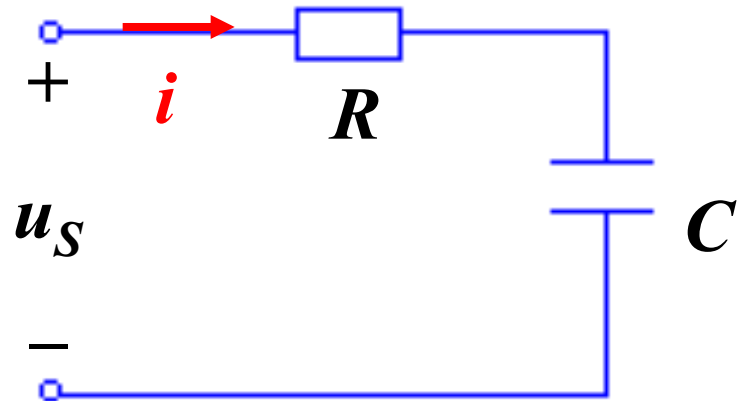


各次谐波是正弦量，采用的方法是

相量法

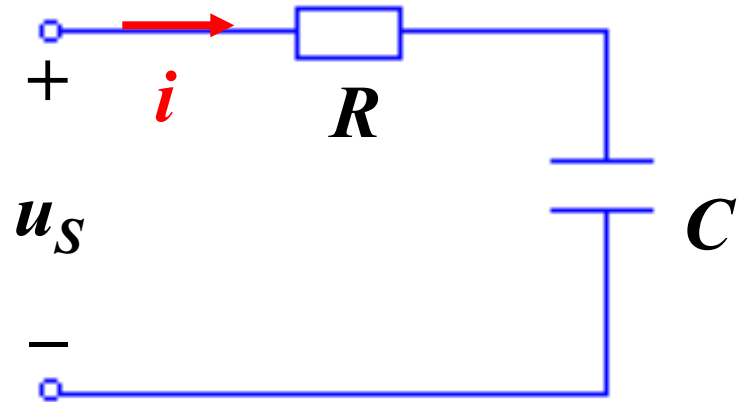
电流相量的一般表达式

$$\dot{I}_{m(k)} = \frac{\dot{U}_{Sm(k)}}{R - j \frac{1}{k\omega_1 c}}$$



$R=3\ \Omega$, $1/\omega_1 C=9.45\ \Omega$, 输入电源为

$$u_S = [10 + 141.40\cos(\omega_1 t) + 47.13\cos(3\omega_1 t) + 28.28\cos(5\omega_1 t) + 20.20\cos(7\omega_1 t) + 15.71\cos(9\omega_1 t) + \dots]$$



$k=1$, $\dot{U}_{Sm(1)} = 141.4\angle 0^\circ$

$$\dot{I}_{m(1)} = \frac{141.4\angle 0^\circ}{3-j9.45}$$

$$= 14.26\angle 72.39^\circ \text{ A}$$

$$P_{(1)} = \frac{1}{2} I_{m(1)}^2 R = 305.02 \text{ W}$$

$$\begin{aligned} k=0, i=0 \\ k=1, i=\frac{141.4}{3-j9.45} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k=3, i=\frac{47.13}{3-j9.45} \\ k=5, i=\frac{28.28}{3-j9.45} \end{aligned}$$

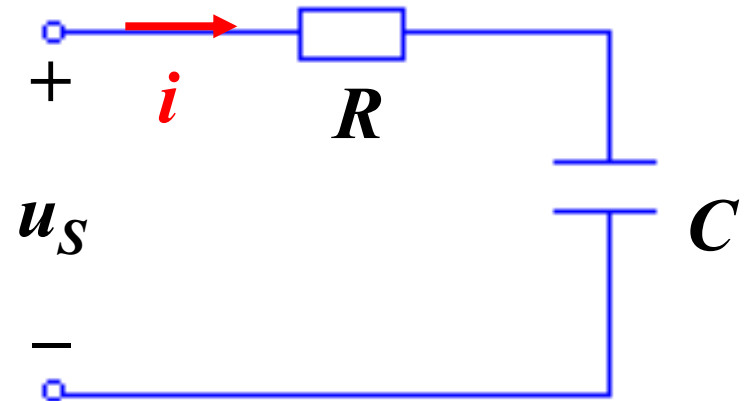
$R=3\ \Omega$, $1/\omega_1 C=9.45\ \Omega$, 输入电源为

$$u_S=[10+141.40\cos(\omega_1 t)+47.13\cos(3\omega_1 t)+28.28\cos(5\omega_1 t)+20.20\cos(7\omega_1 t)+15.71\cos(9\omega_1 t)+\cdots]$$

$$k=3, \quad \dot{U}_{Sm(3)} = 47.13\angle 0^\circ$$

$$\dot{I}_{m(3)} = \frac{47.13\angle 0^\circ}{3-j9.45}$$

$$=10.83\angle 46.4^\circ \text{ A}$$



$$P_{(3)} = \frac{1}{2} I_{m(3)}^2 R = 175.93 \text{ W}$$

同理求得:

$$\dot{I}_{m(5)} = 7.98 \angle 32.21^\circ \text{ A} \quad P_{(5)} = 95.52 \text{ W}$$

$$\dot{I}_{m(7)} = 6.14 \angle 24.23^\circ \text{ A} \quad P_{(7)} = 56.55 \text{ W}$$

$$\dot{I}_{m(9)} = 4.94 \angle 19.29^\circ \text{ A} \quad P_{(9)} = 36.60 \text{ W}$$

$$\dot{I}_m \neq \dot{I}_{m(1)} + \dot{I}_{m(3)} + \dot{I}_{m(5)} + \dot{I}_{m(7)} + \dot{I}_{m(9)} + \dots$$

最后结果应该按时域形式叠加!

$$\dot{I}_{m(1)} = 14.26 \underline{/72.39^\circ}$$

$$\dot{I}_{m(7)} = 6.14 \underline{/24.23^\circ}$$

$$\dot{I}_{m(3)} = 10.83 \underline{/46.4^\circ}$$

$$\dot{I}_{m(9)} = 4.94 \underline{/19.29^\circ}$$

$$\dot{I}_{m(5)} = 7.98 \underline{/32.21^\circ}$$

$$i = [14.26\cos(\omega_1 t + 72.39^\circ) + 10.83\cos(3\omega_1 t + 46.4^\circ) + 7.98\cos(5\omega_1 t + 32.21^\circ) + 6.14\cos(7\omega_1 t + 24.23^\circ) + 4.94\cos(9\omega_1 t + 19.29^\circ) + \cdots] \text{A}$$



计算非正弦周期交流电路应注意的问题

1. 最后结果只能是瞬时值叠加。

不同频率正弦量不能用相量相加。

$$\dot{U} \neq U_0 + \dot{U}_{\omega_1} + \dot{U}_{\omega_3} + \dot{U}_{\omega_5} + \dots$$

2. 不同频率对应的 X_C 、 X_L 不同。

第13章结束