第七章 参数估计

第四节 区间估计

第五节 正态总体均值与方差的区间估计

- 置信区间
- 正态总体均值的区间估计(单个总体)
- 正态总体方差的区间估计(单个总体)

正态总体的区间估计

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体X 的一个样本

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样本值

待作

1. σ^2 已知时，对 μ 的区间估计

2. σ^2 未知时，对 μ 的区间估计

3. 对σ^2的区间估计

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

一. 置信区间

设： 总体X的分布含有未知参数θ

$X_1, X_2, \cdots, X_n$是总体X的一个样本

$\alpha(0<\alpha<1)$为事先给定的正数

若： 统计量$\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$与$\overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$满足

$$P\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\}=1-\alpha$$

多次抽样而得到的众多区间中，含θ真值的区间出现的频率近似为$1-\alpha$

称： $1-\alpha$ —— 置信度

$\underline{\theta}, \overline{\theta}$ —— 置信下限，置信上限

$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ —— θ的置信度为$1-\alpha$的置信区间

随机区间，由样本值完全确定

二. 正态总体均值的区间估计

1. 单个正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 情形

问题：设 $X_1, X_2,\dots,X_n$ 是取自 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，

求：参数 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

解：(1). 当方差 σ^2 已知的情形

选 μ 的点估计(无偏估计)为 $\bar{X} \sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

统计量：$U=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$,

对于给定的置信度 $1-\alpha$，确定一个区间 $(\underline{\mu},\bar{\mu})$

使：$P(\underline{\mu}<\mu<\bar{\mu})=1-\alpha$

1. σ^2 已知时，对 μ 的区间估计

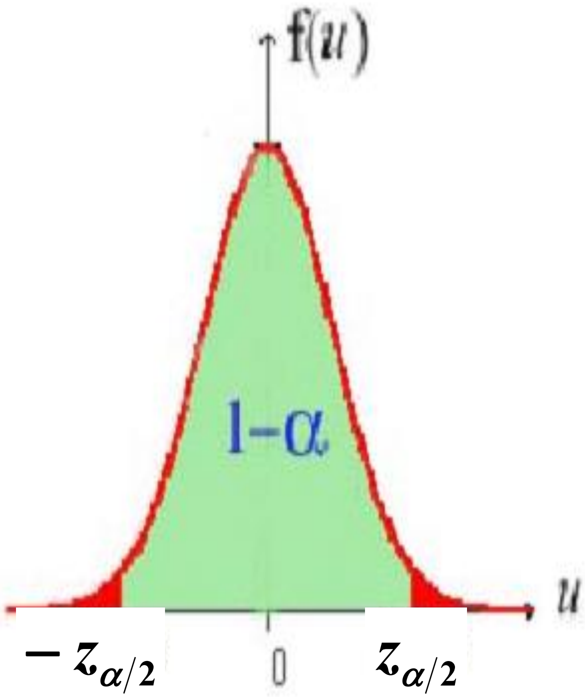
含 μ
除 μ 以外不含其它未知参数
分布确定

考虑 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

由分位点定义 → $P\left\{\left|\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < ?\right\} = 1-\alpha$

$$P\left\{-z_{\frac{\alpha}{2}} < \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$$

→ $$P\left\{\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}} < \mu < \bar{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$$



$\therefore$ μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\quad \bar{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$ 简记为 $$\left(\bar{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

例1 在总体 $X \sim N(\mu,1)$ 中抽取一容量为100的样本，算得样本均值 $\bar{x}=8$, 求 μ 的置信度为0.95的置信区间.

解 $\because \sigma^2=1$ 已知 选择: $U=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$,

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$

$$P\left\{\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}<\mu<\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$

μ 的置信区间为 $\left(\bar{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$

又 $\alpha=0.05$, $z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96$ $\bar{x}=8$, $n=100$, $\sigma=1$.

算得 μ 的置信区间为 $(7.806,\ 8.196)$.

例2.某实验室测量铝的比重 16 次,得平均值 $\bar{x}=2.705$

设总体 $X\sim N(\mu, 0.029^2)$ 求: μ 的 95% 的置信区间.

解 因σ^2 已知, 故 选择: $U=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$

$$P\left\{\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}<\mu<\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$

又 $\alpha=0.05,\quad z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96$

μ的置信区间为 $\left(\bar{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$

$\bar{x}=2.705\quad n=16,\quad \sigma=0.029$

得: $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}=\dfrac{0.029}{\sqrt{16}}\times1.96=0.014$

置信区间为:

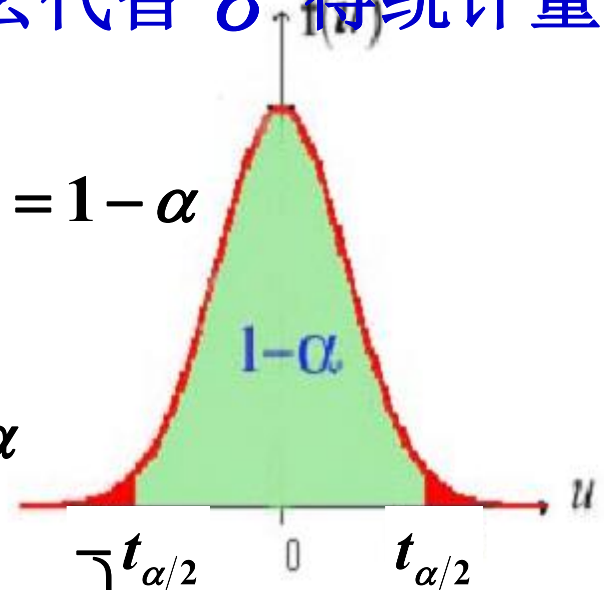
$$(2.705-0.014,\quad 2.705+0.014)=(2.691,\ 2.719)$$

2. σ^2 未知时,对 μ 的区间估计 样本方差是σ^2的无偏估计

故用S^2去代替 σ^2得统计量

考虑 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

由分位点定义: $P\left\{\left|\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\} = 1-\alpha$



$$P\left\{-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

$$P\left\{\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \mu < \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

$\therefore \mu$ 的置信度为$1-\alpha$ 的置信区间 $\left(\bar{X} \pm \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$

例3. 确定某种溶液的溶剂含量，现任取4个样品，测得样本均值为 $\bar{x}=8.34$ $s=0.03$

现溶液中溶剂含量近似服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$

求: μ 的置信度为 95% 的置信区间

解 σ^2未知 选择: $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=1-\alpha$$

μ的置信区间为$\left(\bar{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$

$\because 1-\alpha=95\%$ 故 $\alpha=0.05,$

查 t 分布表得: $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(3)=3.1824$

从而 μ 的 95%的置信区间为:（8.2923, 8.3877）

三. 正态总体方差的区间估计

单个正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$的情形

问题： 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ, σ^2 均未知。

$X_1, X_2, \cdots X_n$ 是总体 X 的一个样本，

给定置信度 $1-\alpha$ 求:方差 σ^2 的置信区间.

解： $\because$ S^2 是 σ^2 的无偏估计，且统计量：

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

解: $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

由分位点定义:

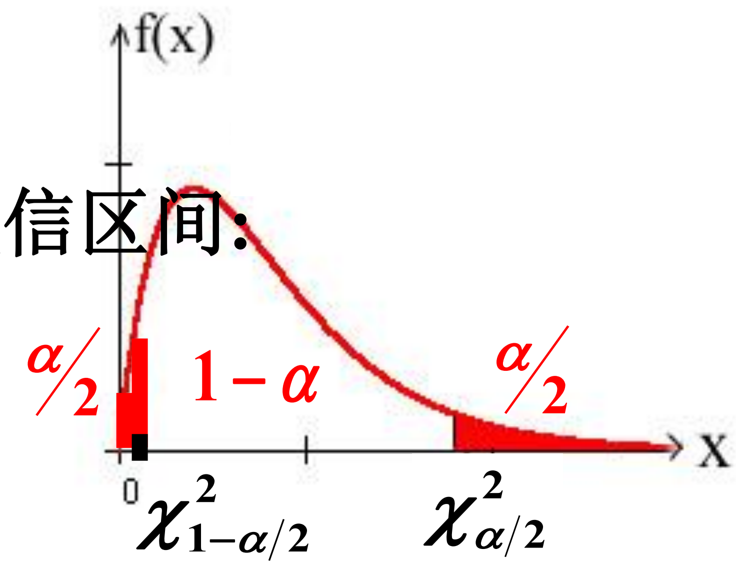
$$P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha$$

于是所求 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 置信区间为:

$$\left(\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

标准差 σ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间:

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}\cdot s}{\sqrt{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}, \frac{\sqrt{n-1}\cdot s}{\sqrt{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right)$$



例4 一自动车床加工的零件长度 $X(cm) \sim N(\mu, \sigma^2)$

现从加工后的零件中随机抽取4个，测得长度

12.6　　13.4　　12.8　　13.2

求 1)样本方差 s^2. 2)σ^2的置信度为0.95的置信区间.

解　$\bar{x} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i = 13$　　$s^2 = \frac{1}{4-1}\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{0.4}{3}$

统计量：$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

$$P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha$$

σ^2 的置信区间为 $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right)$

例4 一自动车床加工的零件长度 $X(cm)\sim N(\mu,\sigma^2)$

现从加工后的零件中随机抽取4个，测得长度

12.6　　13.4　　12.8　　13.2

求 1)样本方差 s^2. 2)σ^2的置信度为0.95的置信区间.

解 σ^2 的置信区间为 $\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

又 $\alpha=0.05$, $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.025}(3) = 9.348$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.975}(3) = 0.216$$

算得 σ^2 的置信区间为 (0.04, 1.85) .

小结

总体$X \sim F(x,\theta)$, $X_1X_2,\cdots,X_n$ / $x_1x_2,\cdots,x_n$ 对θ进行估计

★点估计	统计量$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n) \to \theta$估计量 1)矩估计法：求解：$\mu_i = A_i, i=1,2,\cdots,k$ ★2)极大似然估计法：求解：$L(\hat{\theta})=\max\limits_{\theta\in H} L(\theta)$
估计量的优良性	1)无偏性：$E(\hat{\theta})=\theta$ 2)有效性：$D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$
★区间估计	$P(\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta})=1-\alpha$ $(\underline{\theta},\overline{\theta})$是置信度为$1-\alpha$的置信区间 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 对μ,σ^2进行区间估计 1)求μ的置信区间σ^2为已知 2)求μ的置信区间σ^2为未知 3)求σ^2的置信区间

小结

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 对μ,σ^2进行区间估计置信度$1-\alpha$

	统计量	置信区间
1)求μ的置信区间，σ^2为已知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	★ $(\bar{X} \pm \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2})$
2)求μ的置信区间，σ^2为未知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	★ $(\bar{X} \pm \dfrac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1))$
3)求σ^2的置信区间	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	★ $(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)})$