第一章 命题逻辑（三）

计算机科学与技术系 洪源

推理的形式结构

- **推理的形式结构**
  - 什么是推理
    - 从前提出发推出结论的思维过程
    - 推理的形式结构
      - $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \vdash B$
      - $\Gamma \vdash B$
      - $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$
  - 有效的 / 正确的推理，有效的结论
    - 教材第 41 页定义 1.21
    - B 是有效的结论⇔推理是有效的 / 正确的，记为
      - $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \models B$
      - $\Gamma \models B$
      - $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$

推理的形式结构

- 推理的形式结构
  - 判断推理的有效性
    - 命题公式 $A_1, A_2, \ldots A_n$ 推出 B 的推理有效（正确）当且仅当 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ 是重言式
  - 课堂练习：判断下列推理的有效性
    - 如果 x 能被 4 整除，则 x 能被 2 整除。 x 能被 4 整除。所以 x 能被 2 整除。
    - 如果 x 能被 4 整除，则 x 能被 2 整除。 x 能被 2 整除。所以 x 能被 4 整除。
  - 常用的推理定律（永真蕴涵式）
    - 第 43 页表 1.17

自然推理系统 P

- **形式系统 (I)**
  - 推理的数学平台
  - 组成
    - Alphabets – A(I)
    - Expressions – E(I)
    - Axioms – Ax(I)
    - Rules – R(I)
  - 形式——四元组 <A(I)，E(I)，Ax(I)，R(I)>
  - I 的形式语言系统—— <E(I)，A(I)>
  - I 的形式演算系统—— <Ax(I)，R(I)>
  - 分类
    - 公理推理系统—— <A(I)，E(I)，Ax(I)，R(I)>
      - 推理从公理开始，结论有效，并且是系统中的重言式，称为系统中的**定理**
    - 自然推理系统—— <A(I)，E(I)，ø，R(I)>
      - 推理从公式开始，结论有效，但可能不是系统中的重言式

自然推理系统 P

- 自然推理系统—— P 系统
  - 字母表
    - 命题变项符号
    - 联结词符号（ ¬ ， ∧ ， ∨ ， → ， ↔ ）
    - 括号和逗号（（ ， ）， ， ）
  - 合式公式
    - 同 16 页定义 1.6 （修正否定式的定义）
  - 推理规则
    - 前提引入规则
    - 结论引入规则
    - 置换规则
    - 第 43 页表 1.17 中 I_1 - I_{10}

自然推理系统 P

- 证明
  - 定义
    - 设有前提 A_1 ， A_2 ，…… ， A_k ，结论 B 和公式序列 C_1 ， C_2 ，…… ， C_l ，
    - 如果对于每一个 i （ i = 1, 2, …, l ） ， C_i 是
      - 某个 A_j ，或者
      - 由前面公式应用推理规则得到，
    - 并且 C_l = B ，
    - **则称公式序列 C_1 ， C_2 ，…… ， C_l 是由 A_1 ， A_2 ，…… ， A_k 推出 B 的一个证明。**
  - 形式——命题公式序列
  - 目的——描述推理过程
  - 格式——序号、公式、规则
  - 推理规则
    - 推理工具
    - 是一个形式系统的一部分
    - 事先人为设定的
    - 一般是一些永真蕴涵式

自然推理系统 P

- P 系统——自然推理系统
  - 构造证明的方法
    - 直接构造法
      - 例：求证 $(p \to q) \land \neg(q \land r) \land r \Rightarrow \neg p$
        - 证明：在 P 系统中构造下面推理的证明。
          - 前提： $(p \to q), (\neg(q \land r)), r$
          - 结论： $\neg p$

自然推理系统 P

- P 系统——自然推理系统
  - 构造证明的方法
    - 附加前提法
      - 原理
        - $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \to (A \to B) \Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge A) \to B$
          - 课堂练习：证明上式
        - 证明 $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \vdash (A \to B)$ 有效
        - **即证 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge A \Rightarrow B$**
      - 例：在 P 系统中构造下面推理的证明。
          - 前提： $(p \to (q \to r)), (s \to p), q$
          - 结论： $s \to r$

自然推理系统 P

- P 系统——自然推理系统
  - 构造证明的方法
    - 归谬法
      - 原理
        - $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \to B \Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B)$
        - 证明 $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \vdash B$ 有效
        - 即证 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \to B$ 永真
        - 即证 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B$ 不可满足
        - **即证 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B \Rightarrow 0$**
      - 例：在 P 系统中构造下面推理的证明。
        - 前提： $(p \to q), (\neg(q \wedge r)), r$
        - 结论： $\neg p$