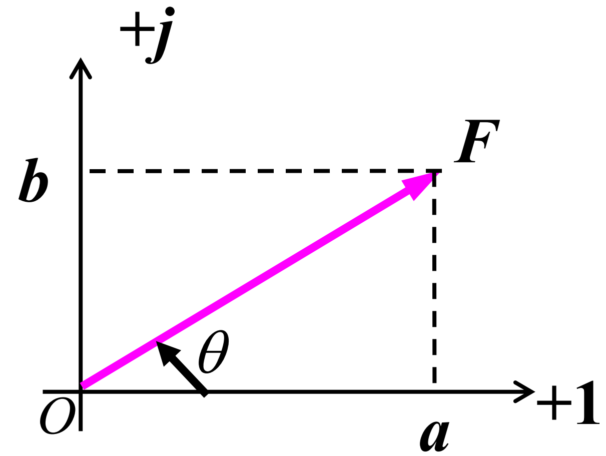
第八章 相量法

§8.1 复数

一、复数的形式

虚单位$i \to j$，$j^2 = -1$



1、代数形式

$$F = a + jb$$

用有向线段表示

模 $|F| = \sqrt{a^2 + b^2}$　　$a = |F| \cos\theta$

辐角 $\theta = \arctan\dfrac{b}{a}$　　$b = |F| \sin\theta$

2、指数形式

$$F = |F| e^{j\theta}$$

根据欧拉公式　$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

3、极坐标形式

$$F = |F| \underline{/\theta}$$

4、代数形式和极坐标形式的转换

$$3+j4 = 5\angle 53.1^\circ$$

$$-3+j4 = 5\angle -53.1^\circ$$

$$=5\angle 126.9^\circ$$

$$10\angle 30^\circ$$

$$=10(\cos 30^\circ + j\sin 30^\circ)$$

$$=8.66+j5$$

二、复数的运算

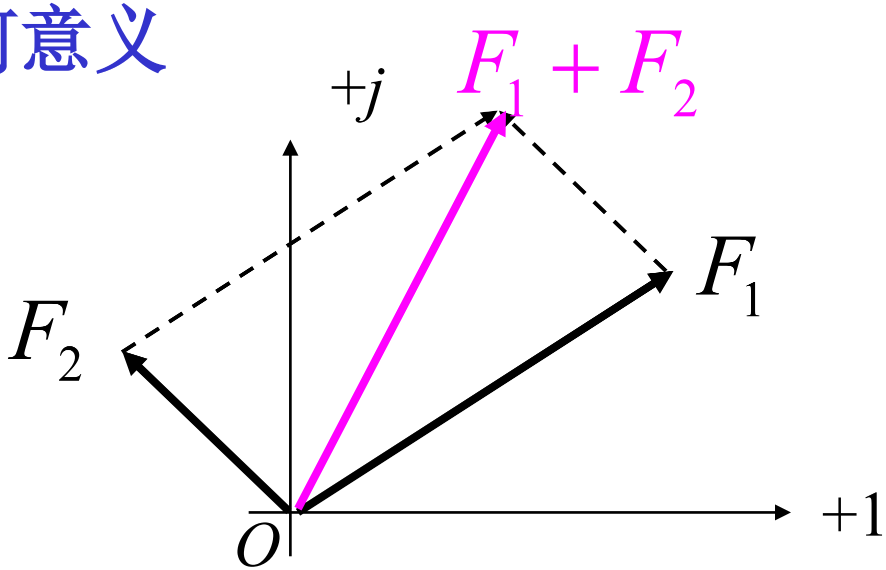
1、加法

用代数形式进行，

设 $F_1 = a_1 + jb_1 \qquad F_2 = a_2 + jb_2$

$$F_1 + F_2 = (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2)$$
$$= (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

几何意义



2、减法

用代数形式进行，

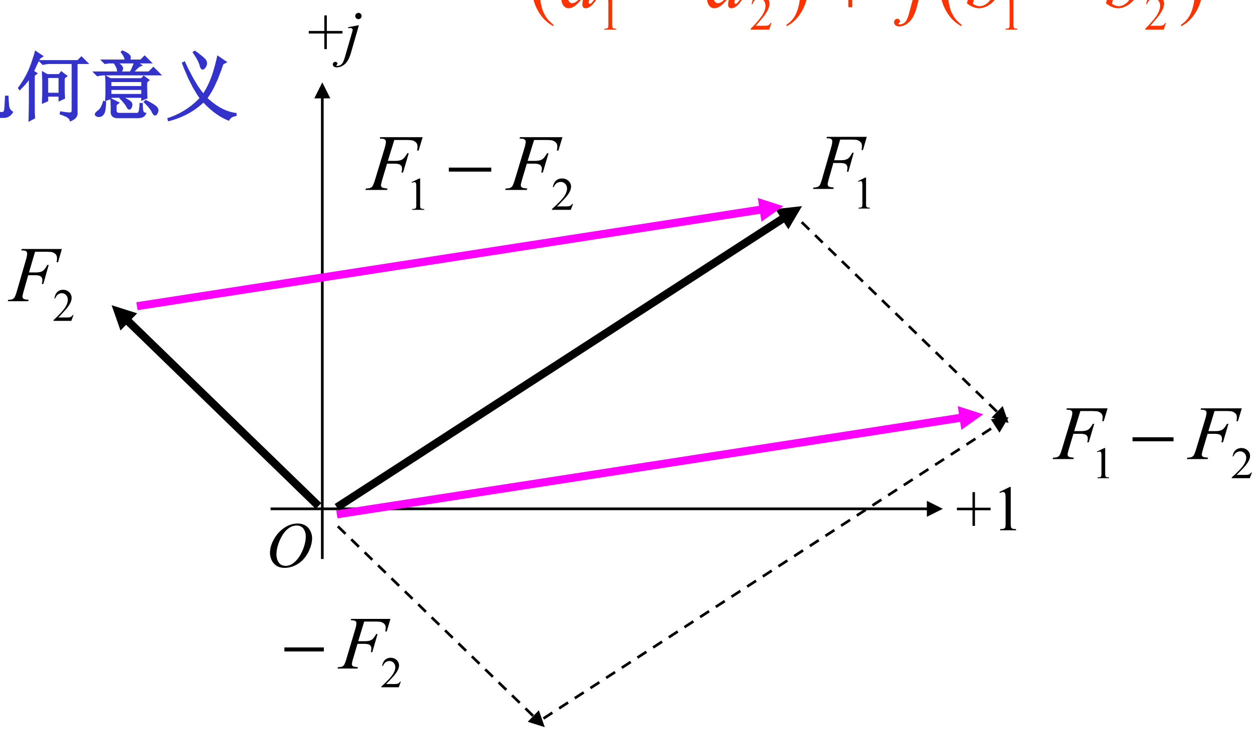
设

$$F_1 = a_1 + jb_1 \qquad F_2 = a_2 + jb_2$$

$$F_1 - F_2 = (a_1 + jb_1) - (a_2 + jb_2)$$

$$= (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$$

几何意义



3、乘法

用极坐标形式比较方便

设 $F_1 = |F_1| \angle \theta_1 \qquad F_2 = |F_2| \angle \theta_2$

$$F_1 F_2 = |F_1| \angle \theta_1 \cdot |F_2| \angle \theta_2$$

$$= |F_1||F_2| \underline{/ \theta_1 + \theta_2}$$

4、除法

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{|F_1| \angle \theta_1}{|F_2| \angle \theta_2} = \frac{|F_1|}{|F_2|} \underline{/ \theta_1 - \theta_2}$$

例：设F_1=3-j4，$F_2=10\underline{/135°}$

求：F_1+F_2 和 F_1/F_2。

解：求复数的代数和用代数形式：

$$F_2 = 10\ \underline{/135°}$$

$$=10（\cos135° + j\sin135°）$$

$$= -7.07 + j7.07$$

$$F_1 + F_2 = (3 - j\,4) + (-7.07 + j\,7.07)$$

$$= -4.07 + j3.07$$

$$= 5.1\ \underline{/143°}$$

三、旋转因子 $e^{j\theta}$

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

是一个模等于1，辐角为θ的复数 $1\underline{/\theta}$

任意复数A乘以$e^{j\theta}$

等于把复数A逆时针旋转一个角度θ，
而A的模值不变。

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = j \qquad e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j \qquad e^{j\pi} = -1$$

因此，“$\pm j$”和“-1”都可以看成旋转因子。

例如

一个复数乘以j，

等于把该复数逆时针旋转$\pi/2$，

一个复数除以j，

等于把该复数乘以$-j$，

等于把它顺时针旋转$\pi/2$ 。

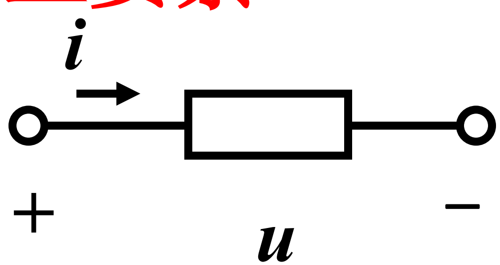
§8.2 正弦量

一、正弦量

电路中按正弦规律变化的电压或电流可以用*sine*，也可以用*cosine*。

不要两者同时混用。本书采用*cosine*。

二、正弦量的三要素

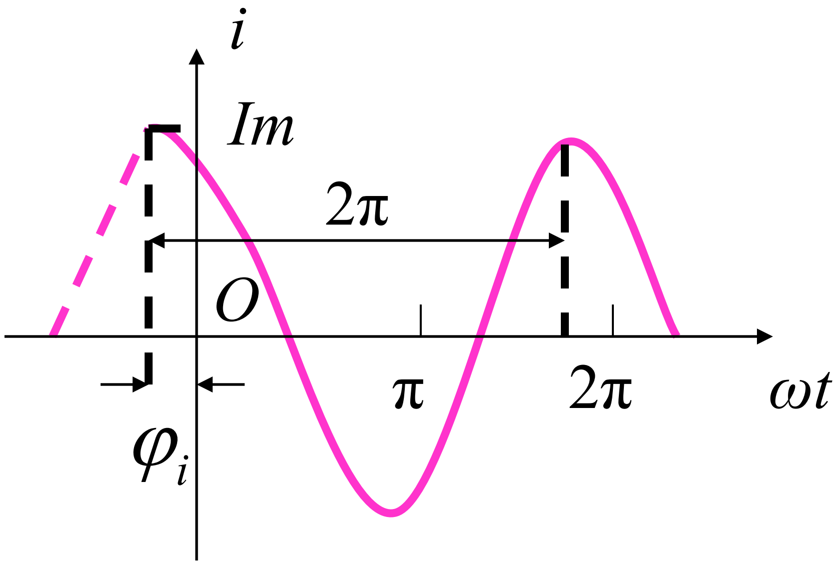


瞬时值表达式： $i = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$

1、最大值（振幅）I_m

正弦量在整个振荡过程中达到的最大值。

2、角频率ω



反映正弦量变化的快慢

单位 rad/s

$\omega T=2\pi$

$f=1/T$

$$\omega=2\pi f$$

频率f的单位为赫兹（Hz）

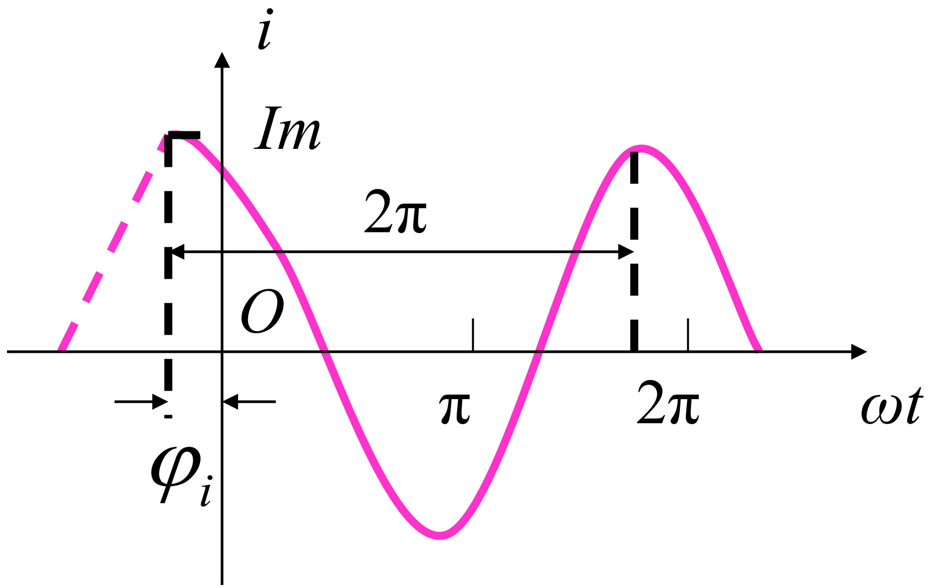
f =50Hz,

T = 0.02s

ω =314 rad/s

3、初相位（角）φ_i

主值范围内取值 $|\varphi_i| \leq 180°$



$(\omega t + \varphi_i)$ 称为正弦量的相位，或称相角。

$$\omega = \frac{d(\omega t + \varphi_i)}{dt}$$

三、正弦量的有效值

$$I \overset{def}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}$$

（RMS）

Root Mean Square

$$I \overset{def}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{Im}^2 \cos^2(\omega t+\varphi_i)dt}$$

$$\cos^2(\omega t+\varphi_i) = \frac{1+\cos[2(\omega t+\varphi_i)]}{2}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} I_m = 0.707 I_m$$

四、同频率正弦量相位的比较

$$u = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

首先同是余弦，相位差 $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

相位差也是在主值范围内取值

$\varphi > 0$

称u超前i；

$\varphi = 0$

称u，i同相；

$\varphi < 0$

称u落后i；

$\varphi = \pi$

称u，i 反相。

§8.3 相量法的基础

一、正弦稳态电路

在线性电路中，如果激励是正弦量，则电路中各支路的电压和电流的稳态响应将是同频正弦量。

如果电路有多个激励且都是同一频率的正弦量，则根据线性电路的叠加性质，电路全部稳态响应都将是同一频率的正弦量。

处于这种稳定状态的电路称为正弦稳态电路，又可称正弦电流电路。

二、正弦量的相量

如果复数$F=|F|e^{j\theta}$中的辐角$\theta=\omega t+\phi$，则F就是一个复指数函数。

根据欧拉公式可展开为

$$F=|F|e^{j(\omega t+\phi)}=|F|\cos(\omega t+\phi)+j|F|\sin(\omega t+\phi)$$

显然有 $\mathrm{Re}[F]=|F|\cos(\omega t+\phi)$

如以正弦电流 $i=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\phi_i)$ 为例

$$i=\mathrm{Re}[\sqrt{2}Ie^{j\phi_i}e^{j\omega t}]$$

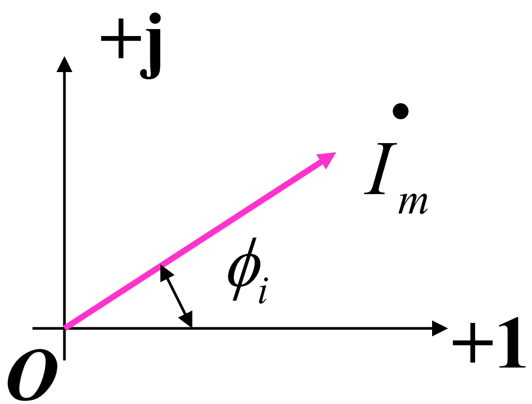
1、定义：

正弦量的有效值相量 $\dot{I}$ 定义为 $Ie^{j\varphi_i}=\underline{I/\varphi_i}$

正弦量的最大值相量

$$\dot{I}_m \text{定义为} I_m e^{j\varphi_i} = I_m \angle \varphi_i$$

2、相量图

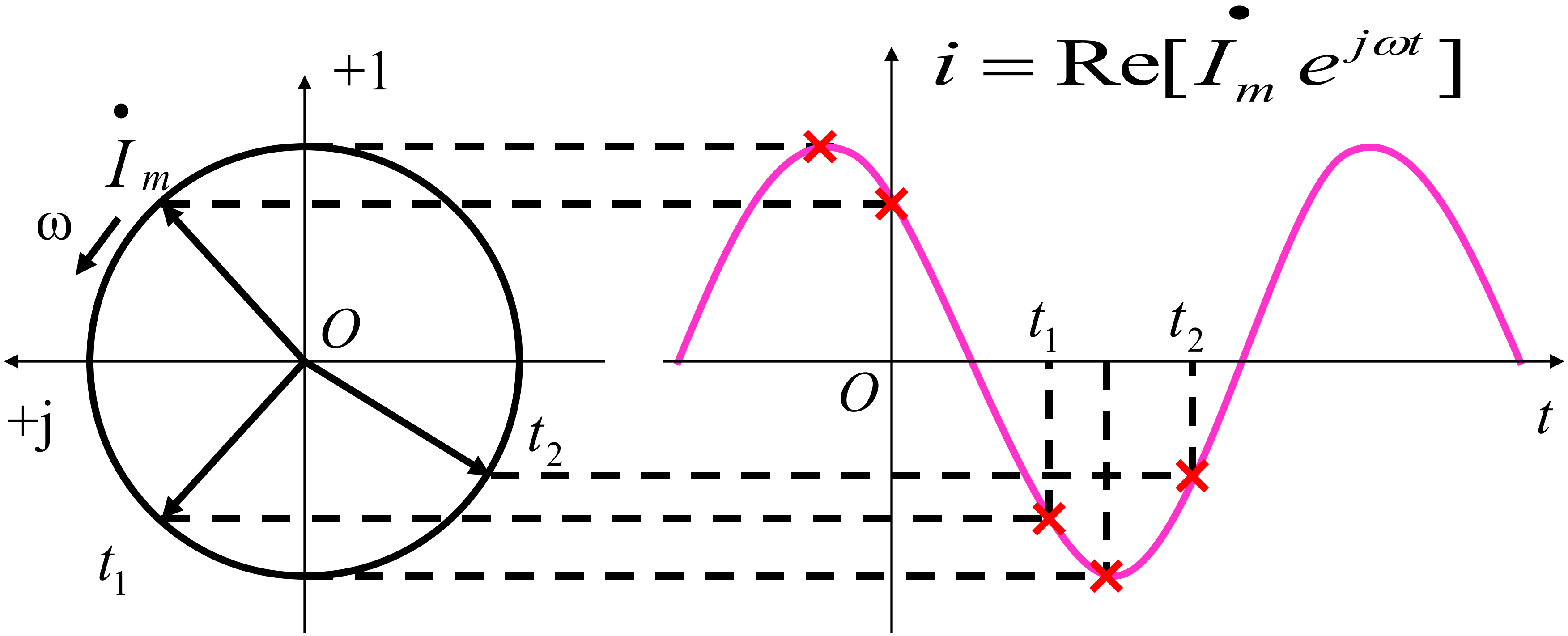


正弦量的正确表示

一个有效值为220V的正弦工频电压，初相位为30°

	符号	表达式
瞬时值表达式	u	$u = 220\sqrt{2}\cos(314t + 30°)\mathrm{V}$
有效值	U	$U = 220\ \mathrm{V}$
最大值	U_{m}	$U_{\mathrm{m}} = 311\mathrm{V}$
有效值相量	$\dot{U}$	$\dot{U} = 220\underline{/30°}\mathrm{V}$
最大值相量	$\dot{U}_m$	$\dot{U}_m = 220\sqrt{2}\underline{/30°}\mathrm{V}$

三、正弦波与旋转相量



正弦电流 i 的瞬时值等于其对应的旋转相量在实轴上的投影。

四、正弦量的运算转换为相对应的相量运算

1、同频正弦量的代数和

如设 $$i_1 = \sqrt{2} I_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$

$$i_2 = \sqrt{2} I_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

$$\vdots$$

这些正弦量的和设为正弦量 i

$$i = i_1 + i_2 + \cdots$$

$$= \mathrm{Re}[\sqrt{2}\, \dot{I}_1 e^{j\omega t}] + \mathrm{Re}[\sqrt{2}\, \dot{I}_2 e^{j\omega t}] + \cdots$$

$$= \mathrm{Re}[\sqrt{2}\, (\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \cdots) e^{j\omega t}]$$

$$i = i_1 + i_2 + \cdots$$

$$= \mathrm{Re}[\sqrt{2}\,\dot{I}_1\,e^{j\omega t}] + \mathrm{Re}[\sqrt{2}\,\dot{I}_2\,e^{j\omega t}] + \cdots$$

$$= \mathrm{Re}[\sqrt{2}\,(\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \cdots)e^{j\omega t}]$$

而 $i = \mathrm{Re}[\sqrt{2}\,\dot{I}\,e^{j\omega t}]$

有 $\mathrm{Re}[\sqrt{2}\,\dot{I}\,e^{j\omega t}] = \mathrm{Re}[\sqrt{2}\,(\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \cdots)e^{j\omega t}]$

上式对于任何时刻 t 都成立，故有

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \cdots$$

2、正弦量的微分

设正弦电流 $i=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\phi_i)$ 对 i 求导，有

$$\frac{di}{dt}=\frac{d}{dt}\mathrm{Re}[\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}]=\mathrm{Re}\left[\frac{d}{dt}\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}\right]$$

$$\frac{di}{dt}=\mathrm{Re}[\sqrt{2}(j\omega\dot{I})e^{j\omega t}]$$

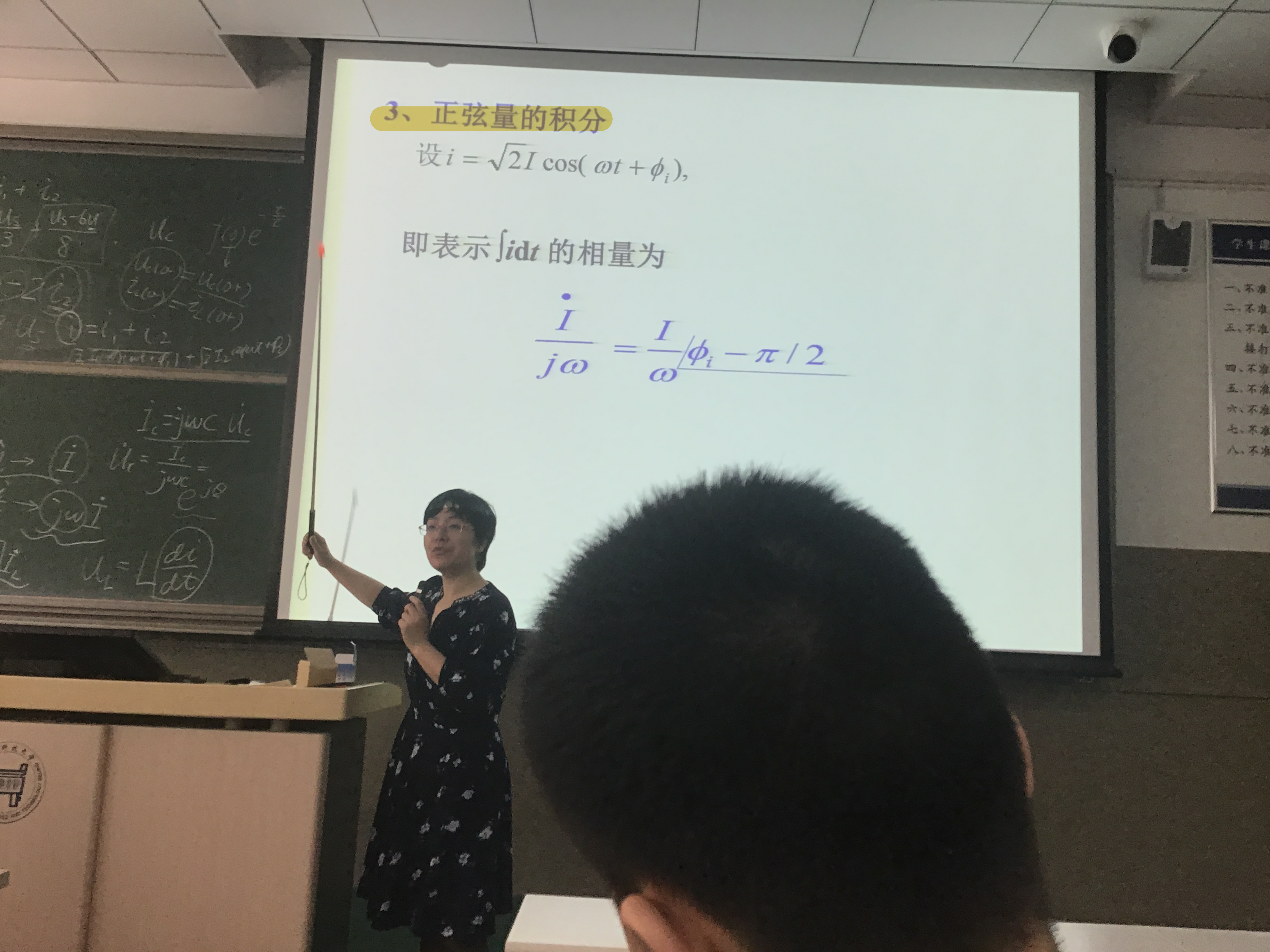
$$=\mathrm{Re}[\sqrt{2}(\omega I e^{j(\omega t+\phi_i+\pi/2)})]$$

$$=\sqrt{2}\omega I\cos(\omega t+\phi_i+\pi/2)$$

即表示 d*i*/d*t* 的相量为

求微分 即向量乘jω

$$j\omega\dot{I}=\omega I\underline{/\phi_i+\pi/2}$$


3、正弦量的积分
设 $i = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \phi_i)$,
即表示 $\int idt$ 的相量为
$\frac{\dot{I}}{j\omega} = \frac{I}{\omega}\angle\phi_i - \pi/2$

例： 已知 $i_1 = 10\sqrt{2}\cos(314t + \pi/3)\text{A}$

$i_2 = 22\sqrt{2}\cos(314t - 5\pi/6)\text{A}$

同频正弦量

代数和

求：$i_1 + i_2$

解：设 $i = i_1 + i_2 = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \psi_i)$

其相量为 $\dot{I} = I\angle\psi_i$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 10\angle 60^\circ + 22\angle -150^\circ$$

$$= (5 + j8.66) + (-19.05 - j11)$$

$$= -14.05 - j2.34$$

$$= 14.24\angle -170.54^\circ \text{ A}$$

$$\Rightarrow i = 14.24\sqrt{2}\cos(314t - 170.54^\circ)\text{A}$$

最后结果

大姐你都不知算错多少回!

§8.4 电路定律的相量形式

一、基尔霍夫定律

所以可以用相量法将KCL和KVL转换为相量形式。

1、基尔霍夫电流定律

对电路中任一点，根据KCL有 $\Sigma i = 0$

其相量形式为 $\Sigma \dot{I} = 0$

2、基尔霍夫电压定律

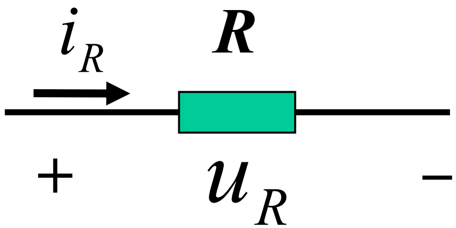
对电路任一回路，根据KVL有 $\Sigma u = 0$

其相量形式为 $\Sigma \dot{U} = 0$

二、电阻、电感和电容元件的VCR相量形式

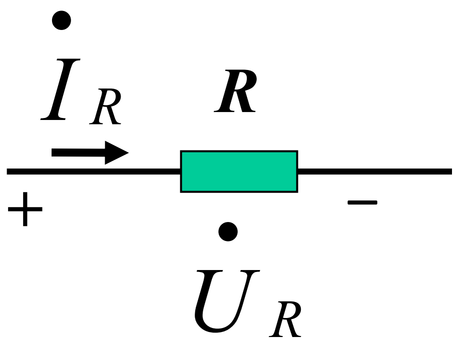
1、电阻元件

瞬时值表达式

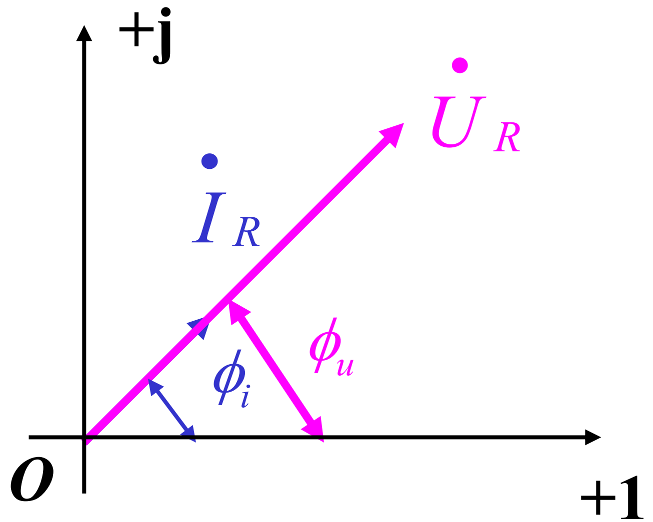


$$u_R = Ri_R$$ 小写表交流

相量形式



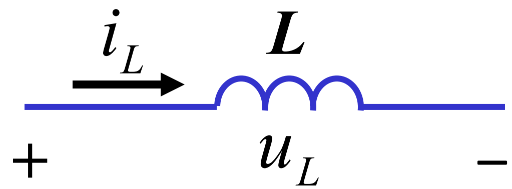
$$\dot{U}_R = R\dot{I}_R$$



相量图

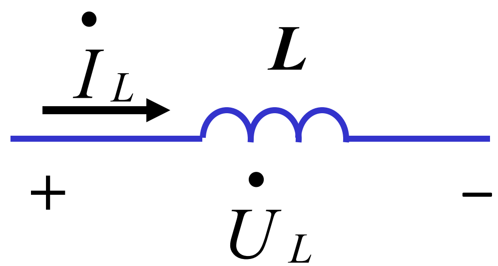
2、电感元件

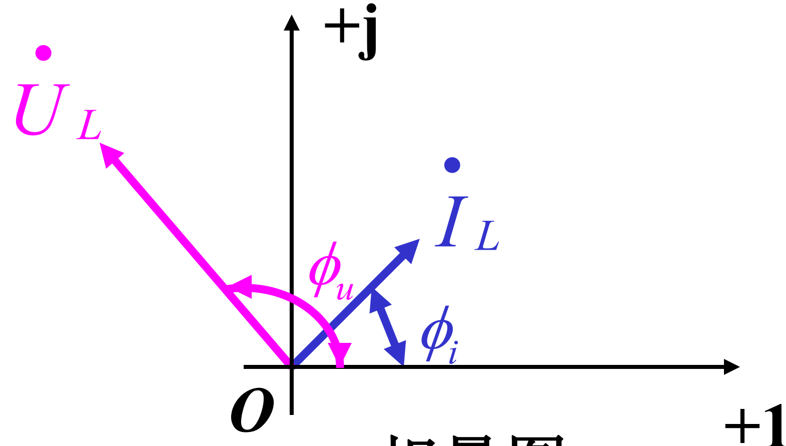
瞬时值表达式



$$u_L = L\frac{di}{dt}$$

相量形式



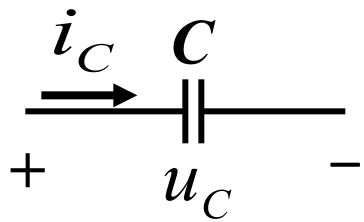


相量图

$$\dot{U}_L = j\omega L\,\dot{I}_L$$

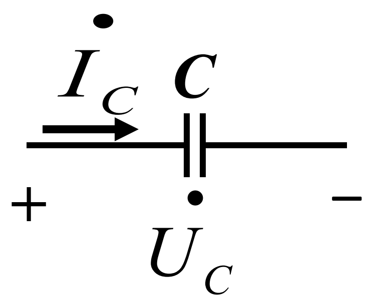
3、电容元件

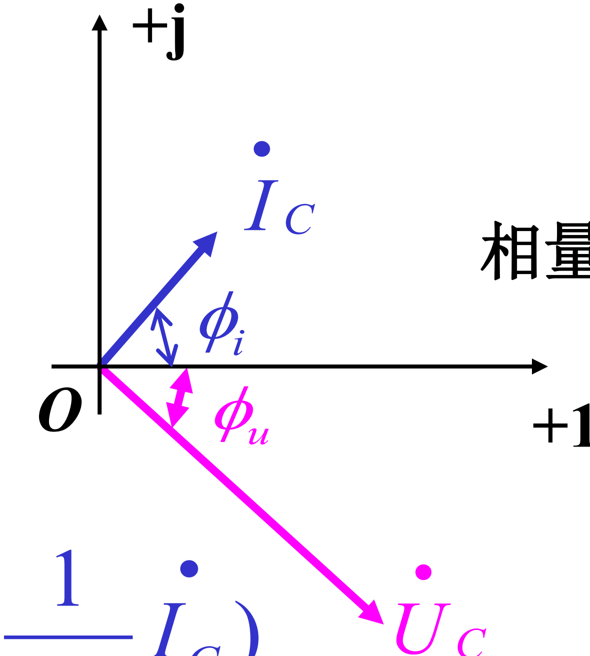
瞬时值表达式



$$i_C = C\frac{du_C}{dt}$$

相量形式

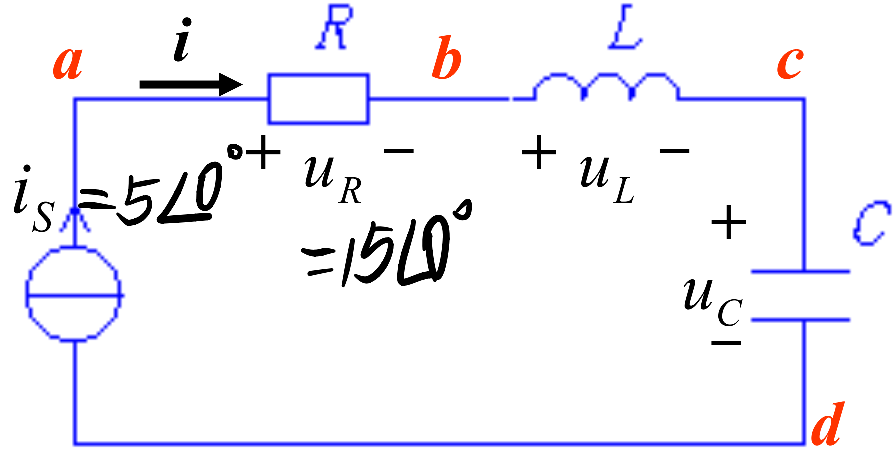




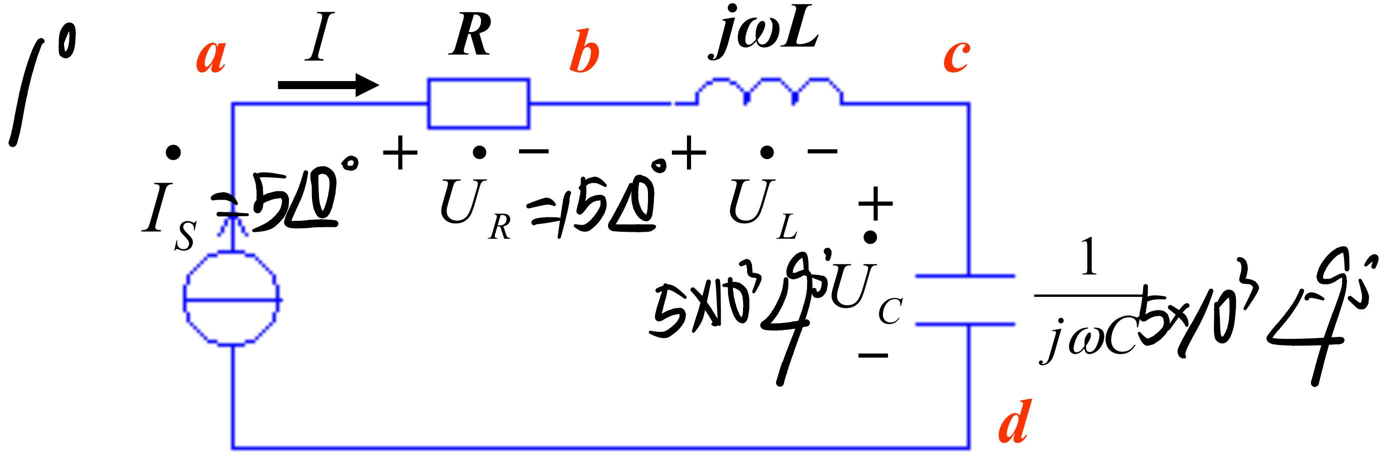
相量图

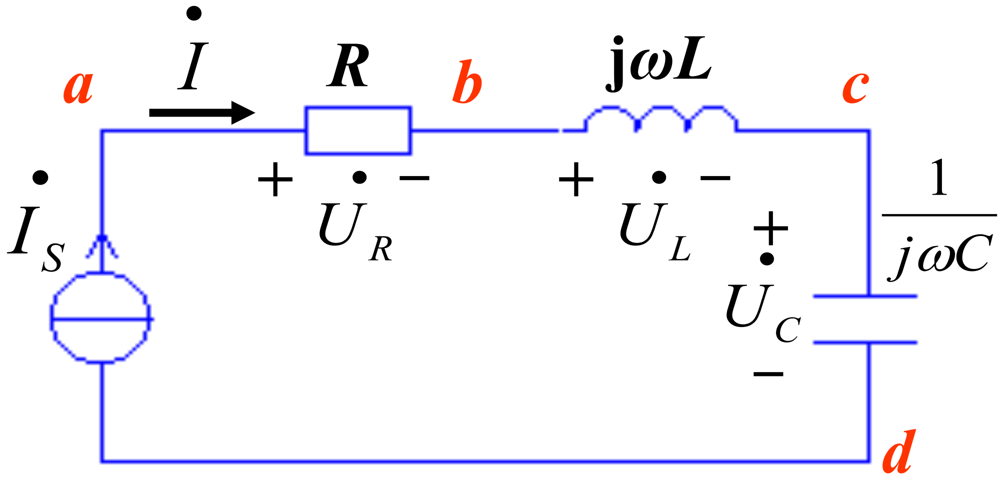
$$\dot{I}_C = j\omega C\dot{U}_C \;(或\,\dot{U}_C = -j\frac{1}{\omega C}\dot{I}_C)$$

例：正弦电流源的电流，其有效值I_S=5A，角频率ω=10^3rad/s，R=3Ω，L=1H，C=1μF。求电压u_{ad}和u_{bd}。



解：画出所示电路相对应的相量形式表示的电路图





I_S=5A，角频率ω=10^3rad/s，
R=3Ω，L=1H，C=1μF

设电路的电流相量为参考相量 即令 $\dot{I}=\dot{I}_S=5\underline{/0^\circ}$

$\dot{U}_R=R\dot{I}$ $=\mathbf{15}\ \underline{/\mathbf{0}}\ ^\circ$ **V** $\qquad$ $\dot{U}_L=j\omega L\dot{I}$ $=\mathbf{5000}\ \underline{/\ \mathbf{90}}^\circ$ **V**

$\dot{U}_C=-j\dfrac{1}{\omega C}\dot{I}$ $=\mathbf{5000}\ \underline{/\ \mathbf{-\ 90}}\ ^\circ$ **V**

$\dot{U}_{bd}=\dot{U}_L+\dot{U}_C$ $=\mathbf{0}$ $\qquad\Rightarrow u_{bd}=0$

$\dot{U}_{ad}=\dot{U}_R+\dot{U}_{bd}=15\underline{/0^\circ}$ $\qquad u_{ad}=15\sqrt{2}\cos(10^3t)$ V

完美收官

相量法的三个基本公式

$$\dot{U}_R = R\dot{I}_R$$

$$\dot{U}_L = j\omega L\dot{I}_L$$

$$\dot{U}_C = -j\frac{1}{\omega C}\dot{I}_C$$

以上公式是在电压、电流关联参考方向的条件下得到的；

如果为非关联参考方向，则以上各式要变号。

以上公式 既包含电压和电流的大小关系，

又包含电压和电流的相位关系。

第8章作业 P217

8-4 复数四则计算
8-5 复数四则计算
8-9 三相电压之和
8-10 电压表读数
8-15 串并联
8-16 结点法