习题九

2.设A={0, 1}，S=A^A,

(1)试列出S中的所有函数；

(2)给出S上合成运算的运算表。

4.判断下列集合对所给的二元运算是否封闭。

(1)整数集合Z和普通减法运算； √

(2)非零整数集合Z*和普通除法运算； X

(3)全体n´n实矩阵集合M_n(R)和矩阵加法、矩阵乘法运算，其中n³2； √

(4)全体n´n实可逆矩阵集合和矩阵加法、矩阵乘法运算，其中n³2； √

(5)正实数集合R^+和°运算，其中°运算定义为"a, bÎR^+, a°b=ab-a-b； X

(6)nÎZ^+, nZ = {nZ|zÎZ}, nZ关于普通的加法和乘法；

(7)A和°运算，其中A={a_1, a_2, …, a_n}，n³2，°运算定义为"a, bÎA，a°b=b； √

(8)S关于普通的加法和乘法，S={2x-1|xÎZ^+}； √

(9)S关于普通的加法和乘法，S={0, 1}； X

(10)S关于普通的加法和乘法，S={x|x=2^n, nÎZ^+}. X

7.设*为Z^+上的二元运算，"x, yÎZ^+, x*y=min(x, y)，即x, y当中较小的数，

(1)求4*6，7*3； =4 =3

(2)*在Z^+上是否满足交换律、结合律和幂等律? √ √ √

(3)求*运算的单位元、零元及Z^+中所有可逆元素的逆元。

x*e=min(x, e)=x

x*θ=min(x,θ)=θ ⇒θ=1

x*y=min(x,y)=1 ⇒y=1

8.设s=Q´Q，Q为有理数集，*为s上的二元运算，"$<a,b>,<x,y>$Îs, $<a,b>*<x,y>=<ax, ay+b>$,

(1)*运算在s上是否满足交换律、结合律和幂等律?

(2)*运算在s上是否存在单位元、零元？如存在请指出具体取值。

(3)求出s中所有可逆元素的逆元。

9．设R为实数集，定义以下6个函数f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6，对于"x, yÎR有

$f_1(<x,y>)=x+y$,

$f_2(<x,y>)=x-y$,

$f_3(<x,y>)=xy$,

$f_4(<x,y>)=max(x,y)$,

$f_5(<x,y>)=min(x,y)$,

$f_6(<x,y>)=|x-y|$,

(1)指出哪些函数是R上的二元运算；

 (2)其中哪些R上的二元运算满足交换律、结合律和幂等律?
 (3)求所有R上的二元运算的单位元、零元和所有可逆元素的逆元。
 11．设S={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}，问下面定义的运算能否与S构成代数系统<S, *>？如果能则判断*运算在是否满足交换律、结合律，并求出*运算的单位元、零元。
 (1)x*y=gcd(x,y)，gcd(x,y)是x与y的最大公约数；
 (2)x*y=lcm(x,y)，lcm(x,y)是x与y的最小公倍数；
 (3)x*y=不小于x和y的最小整数；
 (4)x*y=素数p的个数，x £ p £ y.

12．设S={f|f是[a, b]上的连续函数}，其中a, bÎR，问S关于下面每个运算是否构成代数系统<S, *>？如果能，则判断*运算是否满足交换律、结合律，并指出其单位元和零元。

(1)函数加法，即对于"xÎ[a, b]，(f+g)(x) = f(x)+g(x)

(2)函数减法，即对于"xÎ[a, b]，(f-g)(x) = f(x)-g(x)

(3)函数乘法，即对于"xÎ[a, b]，(f˝g)(x) = f(x)´g(x)

(4)函数除法，即对于"xÎ[a, b]，(f/g)(x) = f(x)/g(x)

 15．设V = <Z, +, *>，其中+和*分别代表普通加法和乘法，确定下面每个给定的集合是否能与+和*构成V的子代数，并说明原因。

 (1) S = {2n|nÎZ};

 (2) S = {2n+1|nÎZ};

 (3) S = {-1, 0, 1}.

习题十

5.设V=<{a, b}, *>是半群，且a*a=b，求证

(1)a*b=b*a;

(2)b*b=b.

9．设Z为整数集合，在Z上定义二元运算*如下：

"x, yÎZ, x*y=x+y-2

问Z关于*能否构成群？为什么？

15. 设G为群，且对于"xÎG，有x^2=e，求证G是交换群。

18．求证偶数阶群必含2阶元。

21．设G是群，a是G中给定的元素，a的正规化子N(a)表示G中与a可交换的元素构成的集合，即N(a)={x|xÎGÙxa=ax}，求证N(a)是G的子群。

22．设H是G的子群，xÎG，令xHx^{-1}={xhx^{-1}|hÎH}，求证xHx^{-1}是G的子群（称为H的共轭子群）。

24．设H和K分别是群G的r、s阶子群，若r和s互素，　求证HÇK={e}.

27．设G_1为循环群，f是G_1到G_2的同态，求证$f(G_1)$也是循环群。

28．设$G=\langle a \rangle$是15阶循环群，

(1)求出G的所有生成元；

(2)求出G的所有子群。