第二章 非线性方程求根

王志明

wangzhiming@ustb.edu.cn

§2 非线性方程求根

- 求f(x)=0的根；$ax^2+bx+c=0, \quad a\neq 0$
- 对多项式方程$P_n(x)=0$，在n>=5式没有一般形式的解。
- 三四阶方程求解公式
- 三个基本问题：
  - 根的存在性；
  - 根的隔离(分成小区间)；
  - 根的精确化。

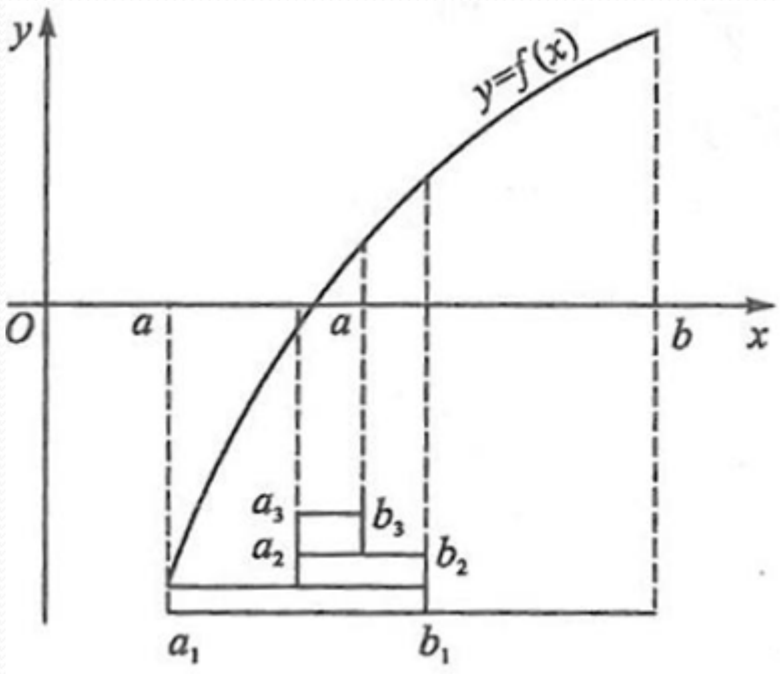
第二章 非线性方程求根

- 2.1 二分法
- 2.2 迭代法
- 2.3 牛顿迭代法与弦割法
- 2.4 非线性方组牛顿迭代求根
- 2.5 迭代法的收敛性和加速收敛方法
- 2.6 Matlab应用实例

§ 2.1 二分法

若f(x)在[a, b]上连续，

且f(a)f(b)<0



二分法示意图

(1)取$x_0=\dfrac{a+b}{2}$，计算$f(x_0)$

若$f(a)f(x_0)<0$，则根位于$[a,x_0]$

取$a_1=a,b_1=x_0$

若$f(a)f(x_0)>0$，则根位于$[x_0,b]$

取$a_1=x_0,b_1=b$

(2)取$x_1=\dfrac{a_1+b_1}{2}$，计算$f(x_1)$

……

$$[a_0,b_0]\supset[a_1,b_1]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\cdots$$

$$[a_n, b_n]\text{长度为}: b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \ldots = \frac{b-a}{2^n}$$

以 $x_n = \dfrac{b_n + a_n}{2}$ 以近似解，误差满足：

$$|\alpha - x_n| \le \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{\boxed{n+1}}}$$ ！考试考

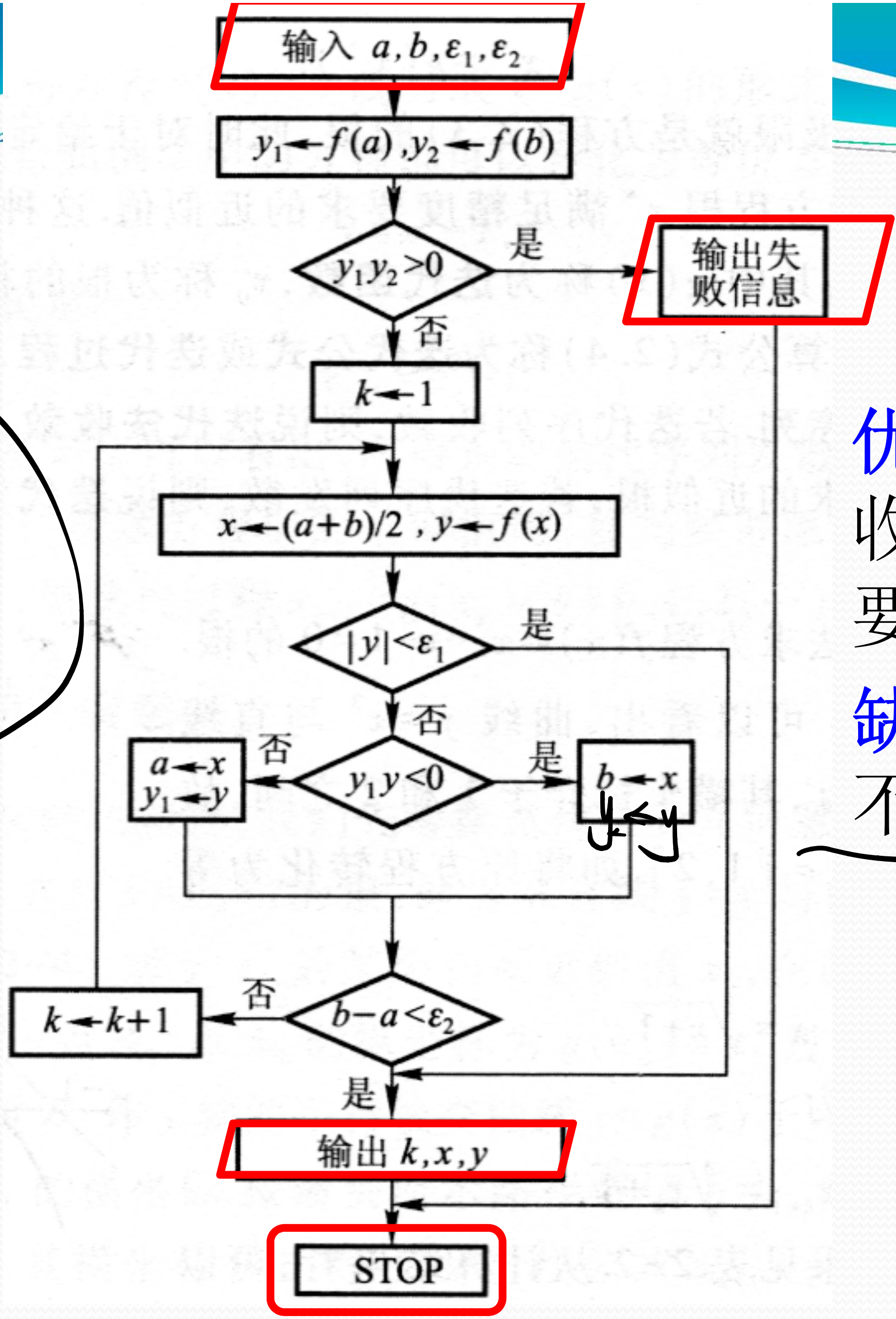
若设定误差不大于 ε

则 $|\alpha - x_n| \le \dfrac{b-a}{2^{n+1}} < \varepsilon$

$$\boxed{2^{n+1} > \frac{b-a}{\varepsilon}}$$

估计所需迭代次数：$\boxed{n+1 \ge [(\ln(b-a) - \ln\varepsilon)/\ln 2]}$

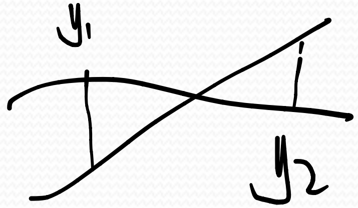
$$n \ge \log_2(b-a) - \log_2 \varepsilon - 1$$



符号规范

优点：计算简单，收敛性可保证，只要求函数连续；

缺点：~~收敛速度慢~~，不能求重根。



例 证明方程 $e^x + 10x - 2 = 0$ 存在唯一实根 $x^* \in (0,1)$，用二分法求根，要求误差不超过 $0.5*10^{-2}$。

严格单调： $f'(x) = e^x + 10 > 0$

解存在： $f(0) = -1 < 0$，$f(1) = e + 8 > 0$

$$k+1 \geq [(\ln(1-0) - \ln(0.5 \cdot 10^{-2}))/\ln 2]$$

$$k+1 \geq \ln(200)/\ln 2 \approx 7.64$$

$$\Rightarrow k = 7$$

迭代7次

k	a_k($f(a_k)$的符号)	x_k($f(x_k)$的符号)	b_k($f(b_k)$的符号)
0	0(−)	0.5(+)	1(+)
1	0(−)	0.25(+)	0.5(+)
2	0(−)	0.125(+)	0.25(+)
3	0(−)	0.0625(−)	0.125(+)
4	0.0625(−)	0.09375(+)	0.125(+)
5	0.0625(−)	0.078125(−)	0.09375(+)
6	0.078125(−)	0.0859375(−)	0.09375(+)
7	0.0859375(−)	0.08984375(+)	0.09375(+)

例1　设 $f(x) = \sin x - x^2/4$

已知 $f(2) < 0, f(1.5) > 0$

求 $f(x) = 0$ 在区间[1.5,2]内根的近似值.

计算结果列表如下：

n	函数值符号	有根区间
	f(1.5)>0	
0	f(2)<0	(1.5,2)
1	f(1.75)>0	(1.75,2)
2	f(1.875)>0	(1.875,2)
3	f(1.9375)<0	(1.875,1.9375)
4	f(1.90625)>0	(1.90625,1.9375)
5	f(1.921875)>0	(1.921875,1.9375)

取 $\tilde{\alpha} = x_6$

$$= \frac{1}{2}(1.921875 + 1.9375)$$

$$= 1.9296875$$

误差限 $\frac{1}{2^{6}}(b-a) = \frac{1}{128} = 0.0078125$　几位有效数字？

$2^{(n+1)}$　0.05　2

§ 2.2 迭代法

§ 2.2.1 简单迭代法

- 将方程f(x)=0化为另一个与它同解的方程：

$$x = g(x)$$

- 取初值x_0代入右边得到：

$$x_1 = g(x_0)$$

- 如果迭代收敛，则结果为所求根。

例 用简单的迭代法求解：

$$f(x) = 2x^3 - x - 1 = 0$$

$$f(x)=2x^3-x-1=0$$

方法一： $x=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{2}}=g(x)$

取初值x_0=0得到迭代序列：

0.79，0.964，0.994，…

方法二：

$$x=2x^3-1=g(x)$$

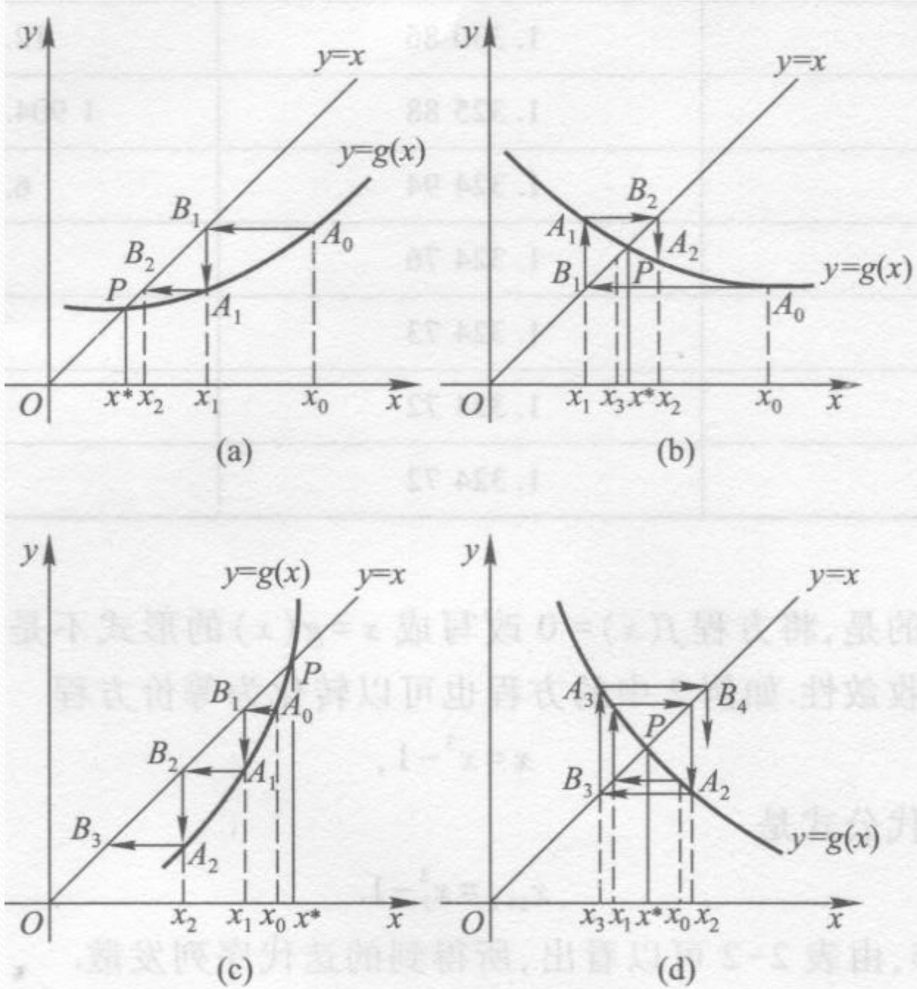
取初值x_0=0得到迭代序列：

−1，−3，−55，…

什么条件 下才收敛呢？

§2.2.2 迭代法的几何意义

- 求直线y=x与曲线y=g(x)的交点；



收敛条件是什么？

定理1 若迭代函数g(x)满足条件:

(1)存在$0 < L < 1$，对任意 $x \in [a,b]$有 $|g'(x)| \le L$

(2)当$x \in [a,b]$时，$a \le g(x) \le b$

要考!

则: **(1)对任意$x_0 \in [a,b]$, $x_{k+1} = g(x_k)$收敛于x^*,**

$$\boxed{(2)\ |x_k - x^*| \le \frac{1}{1-L}|x_{k+1} - x_k|}$$

$$\boxed{(3)\ |x_k - x^*| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|}$$

$$\boxed{(2^*)\ |x_k - x^*| \le \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}|}$$

wangzhiming@ustb.edu.cn

证明：存在性： (1)令 $\phi(x) = x - g(x)$

$$\phi(a) = a - g(a) \le 0, \phi(b) = b - g(b) \ge 0$$

唯一性： $|x_1^* - x_2^*| = |g(x_1^*) - g(x_2^*)|$

$$= g'(\zeta)|x_1^* - x_2^*| \le L|x_1^* - x_2^*|$$

收敛性： $|x^* - x_k| = |g(x^*) - g(x_{k-1})| = g'(\zeta_k)|x^* - x_{k-1}|$

$$\le L|x^* - x_{k-1}| \le \ldots \le L^k |x^* - x_0|$$

$L < 1, \lim\limits_{k\to\infty} |x^* - x_k| = 0$, 即 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$

$$\boxed{(2)\,|x_k - x^*| \le \frac{1}{1-L}|x_{k+1} - x_k|}$$

$$|x_{k+1} - x_k| = |(x^* - x_k) - (x^* - x_{k+1})|$$

$$\ge |x^* - x_k| - |x^* - x_{k+1}| \ge |x^* - x_k| - L|x^* - x_k|$$

$$= (1-L)|x^* - x_k|$$

$$\boxed{(3)\,|x_k - x^*| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|}$$

$$|x_k - x^*| \le \frac{1}{1-L}|x_{k+1} - x_k| \le \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}|$$

$$\le \frac{L^2}{1-L}|x_{k-1} - x_{k-2}| \le \ldots\ldots \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$$

$$f(x)=2x^3-x-1=0$$

方法一： $x=\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}=g(x)$

$$g'(x)=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{x+1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$|g'(0)|=0.2646<1 \quad |g'(1)|=0.166<1$$

方法二： $x=2x^3-1=g(x)$

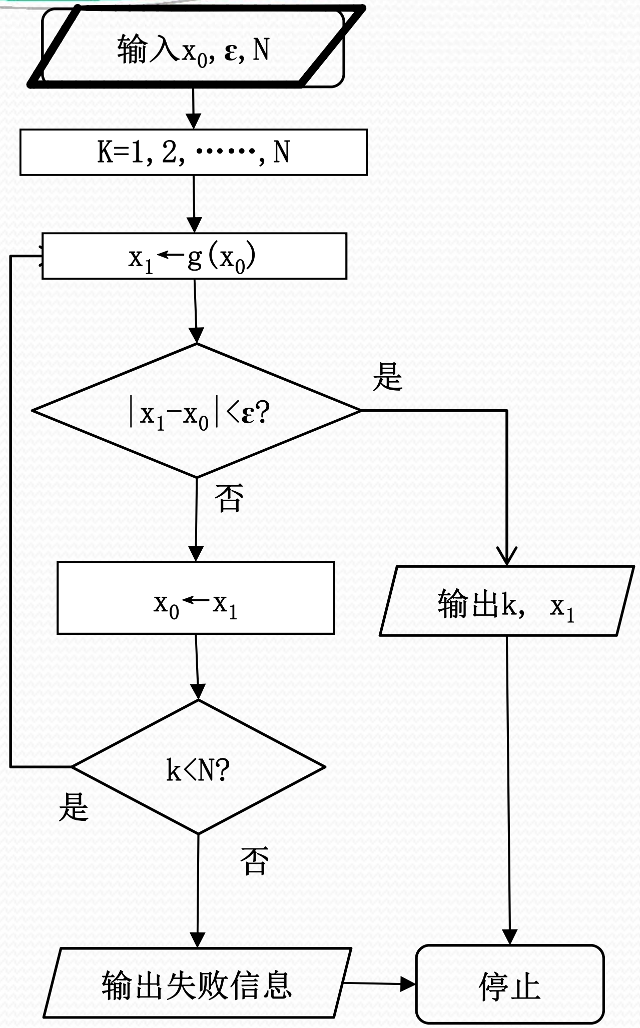
$$g'(x)=6x$$

$$|g'(0)|=0<1 \qquad |g'(1)|=6>1$$

$$f(x)=x^3-x-1=0$$

$$x=\sqrt[3]{x+1}=g(x)$$

$$g'(x)=\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}\le\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}<1$$



区间[1,2]:

$$1<g(1)\le g(x)\le g(2)<2$$

精度估计: $\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|\le 10^{-5}$

代入$x_0=1.5$, $x_1=1.35721$, L≈0.2100，得:

k=6.2809, 取k=7

定理**2** 若存在区间(c,d),使

(1)方程$x=g(x)$在区间(c,d)内有实根x^*;

(2)$g'(x)$在区间内连续且$|g'(x^*)|<1.$

则迭代法$x_{k+1}=g(x_k)$在x^*附近具有局部收敛性.

要考!

例**3** 求方程$x=e^{-x}$在$x=0.5$附近的一个根，要求精度$\delta=10^{-3}$

$$\varphi'(x) = -e^{-x}$$

当$x\in[0.4,0.6]$时，$|\varphi'(x)|<0.671<1$，收敛

K	x_k	e^{-x_k}	$\lvert x_{k+1}-x_k \rvert$
0	0.5	0.606 531	
1	0.606 531	0.545 239	0.061 292
2	0.545 239	0.579 703	0.034 464
3	0.579 703	0.560 065	0.019 638
4	0.560 065	0.571 172	0.011 107
5	0.571 172	0.564 863	0.006 309
6	0.564 863	0.568 439	0.003 576
7	0.568 439	0.566 409	0.002 030
8	0.566 409	0.567 560	0.001 151
9	0.567 560	0.566 907	0.000 653
10	0.566 907	0.567 277	0.000 370

§ 2.3 牛顿迭代法与弦割法

关键

牛顿迭代法又称为切线法。

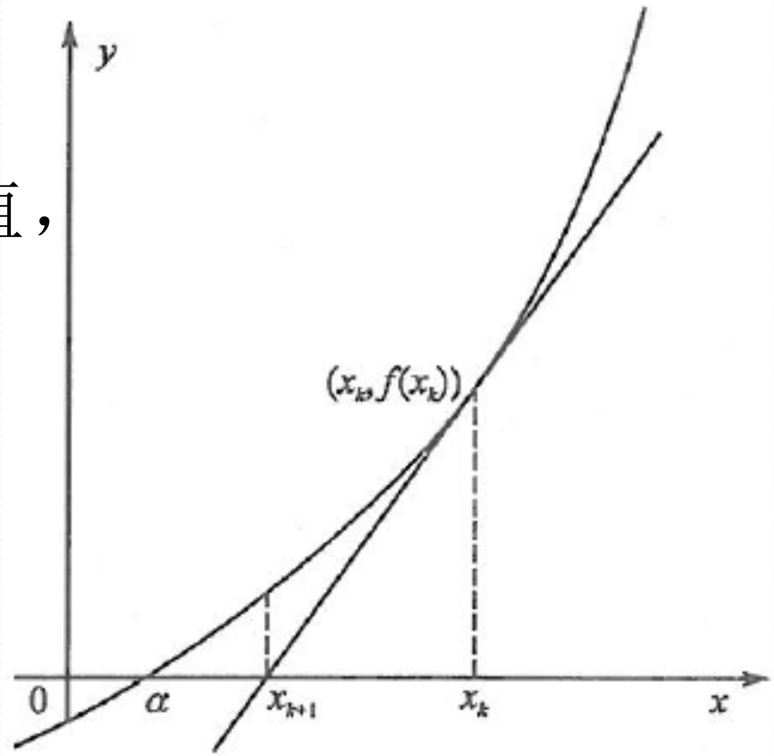
设x_k是$f(x)=0$根x^*附近的近似值，

过$(x_k, f(x_k))$作切线：

$$L_k(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)$$

令$L_k(x)=0$，得

$$\boxed{x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$



当$f'(x^*)\neq 0$时，$\varphi'(x^*)=0$，至少平方收敛。

定理3 对于方程f(x)=0，若存在区间(a,b)，使
(1)在区间(a,b)内存在方程的单根x*;
(2)f″(x)在区间内连续.
则牛顿迭代法在x*附近有局部收敛性.

$$f(x^*) \equiv 0, f'(x^*) \neq 0$$

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$|g'(x^*)| = 0 < 1$$

定理4 对于方程$f(x)=0$，若存在区间(a,b)，使

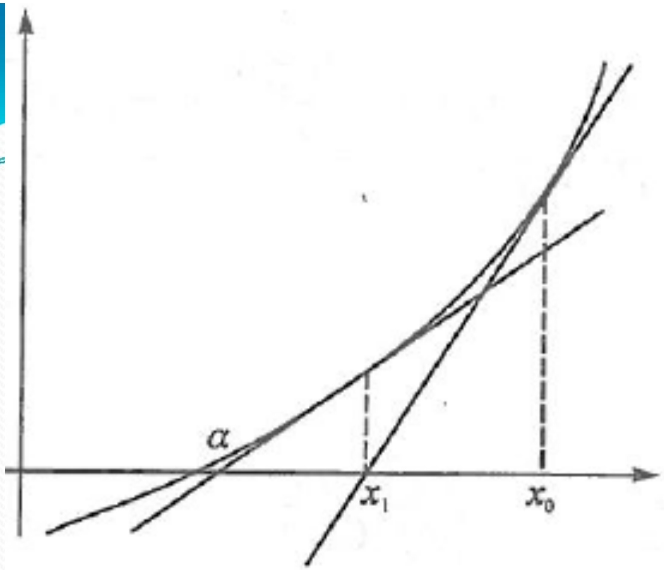
(1)$f''(x)$在区间$[a,b]$上连续;

(2)$f(a)f(b)<0$;

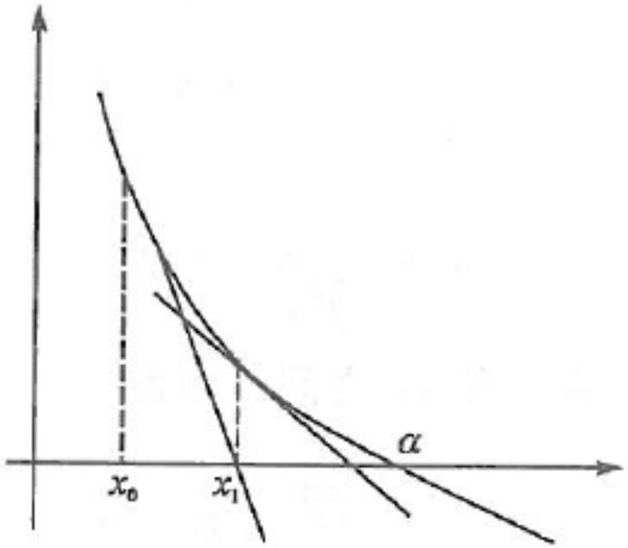
(3)对任意$x\in[a,b]$都有$f'(x)\neq 0$;

(4)$f''(x)$在$[a,b]$上保号.

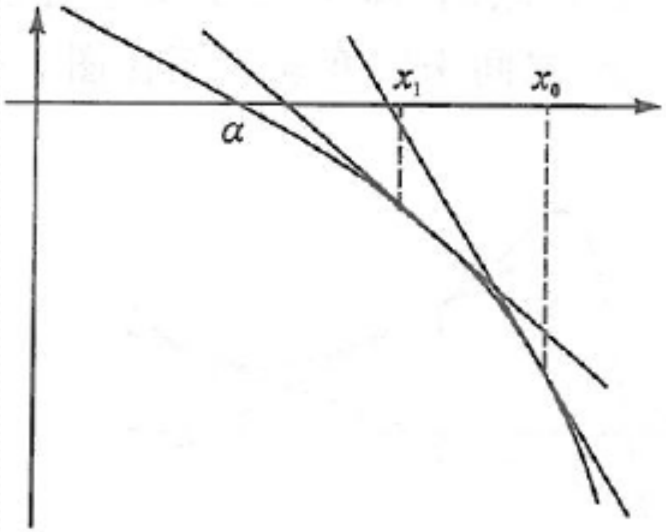
则当初值$x_0\in[a,b]$且$f(x_0)f''(x_0)>0$时，牛顿迭代法产生的迭代序列收敛于方程的唯一实根x^*.



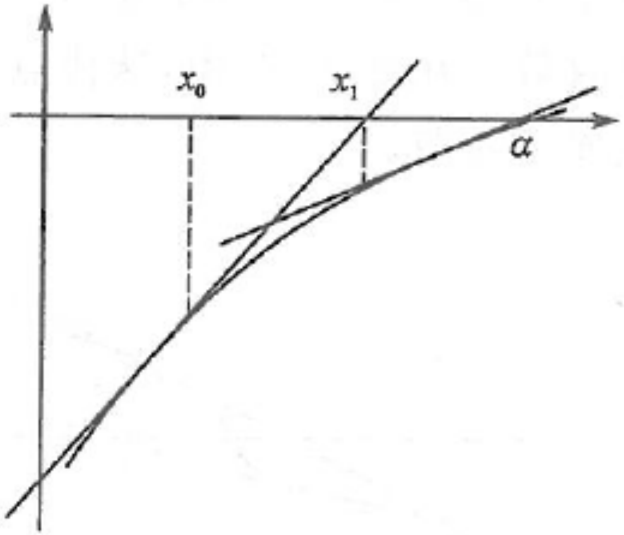
(a) $f'(x)>0, f''(x)\geqslant 0$,



(b) $f'(x)<0, f''(x)\geqslant 0$



(c) $f'(x)<0, f''(x)\leqslant 0$



(d) $f'(x)>0, f''(x)\leqslant 0$

牛顿迭代程序步骤：

(1)输入精度$\varepsilon_1,\varepsilon_2$，最大迭代次数$N$、初值$x_0$，计算$f(x_0)$、$f'(x_0)$，记$k=0$

(2)若$k \ge N$或$f'(x_k)=0$，终止并输出失败标志；

(3)计算$x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

(4)若$|x_{k+1}-x_k| < \varepsilon_1$或$f(x_{k+1}) < \varepsilon_2$，终止并输出$\alpha \approx x_{k+1}$；否则$k=k+1$，转(2)。

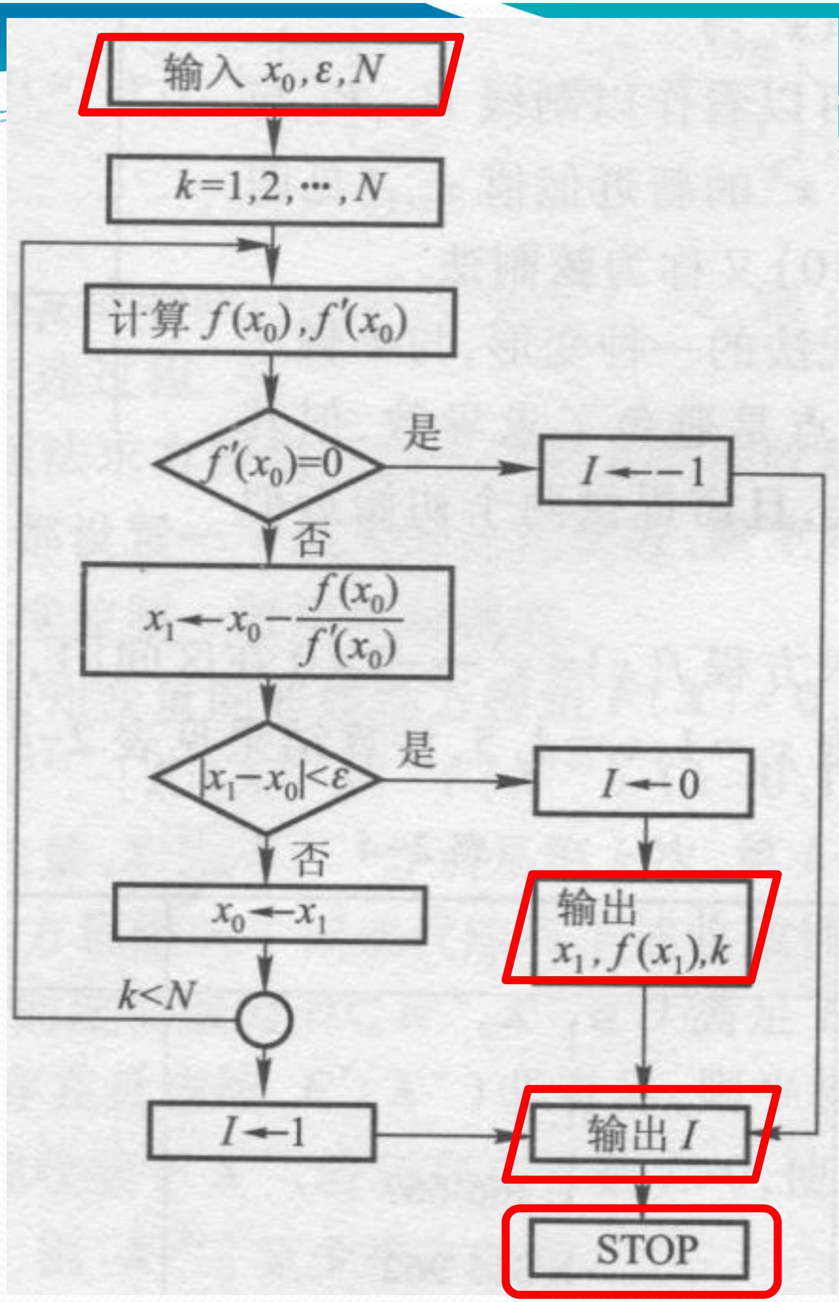


图2-8

牛顿迭代法
程序框图

例　用牛顿迭代法求 $9x^2 - \sin x - 1 = 0$ 在 [0,1] 内的一个根。

$$f(1) = 9 - \sin 1 - 1 > 0, \ f(\frac{1}{3}) = 1 - \sin \frac{1}{3} - 1 < 0$$

在[1/3,1]区间内满足：

Matlab演示

$$f'(x) = 18x - \cos x \geq 6 - 1 > 0$$

$$f''(x) = 18 + \sin x \geq 18 > 0$$

$$f(0.4) = 9 \cdot 0.4^2 - \sin 0.4 - 1 \approx 0.0506 > 0$$

k	x_k	k	x_k
0	0.4	3	0.39184690700265
1	0.39194423490290	4	0.39184690700265
2	0.39184692120359		

牛顿下山法

为了防止迭代发散，附加条件：

$$|f(x_{k+1})|<|f(x_k)|$$

引入　$0<\lambda\leq 1$

$$\boxed{x_{k+1}=x_k-\lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

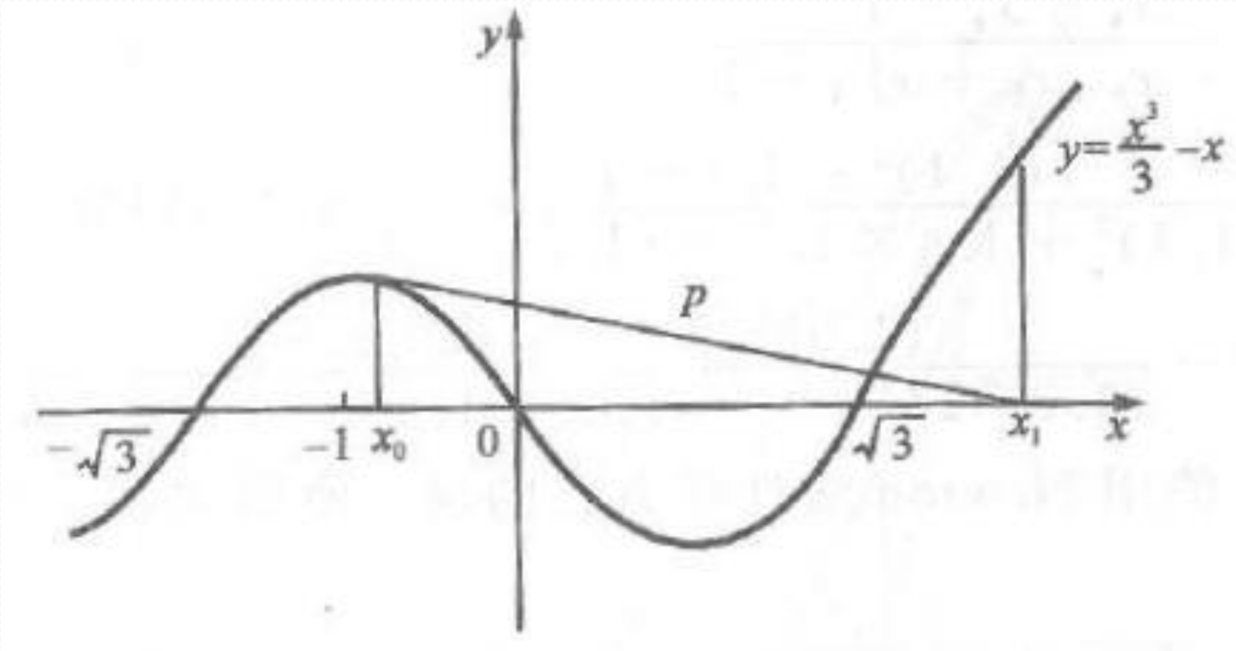
λ为下山因子，一般取不同值进行试探：

$$\lambda=1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\ldots$$

例 用牛顿下山法求解方程： $x^3/3 - x = 0$

的一个根，取

$x_0 = -0.99$, 误差 $|x_k - x_{k-1}| \le 10^{-5}$



Newton 下山法计算结果

k	λ	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
0		−0.99	0.66657	−0.01990	−33.49589
1	1	32.50598	11416.51989		
	1/2	15.75799	1288.5516		
	1/4	7.38400	126.81613		
	1/8	3.19700	7.69495		
	1/16	1.10350	−0.65559	0.21771	−3.01131
2	1	4.11481	19.10899		
	1/2	2.60916	3.31162		
	1/4	1.85633	0.27594	2.44594	0.11281
3	1	1.74352	0.02316	2.03985	0.01135
4	1	1.73217	0.00024	2.00041	0.00012
5	1	1.73205	0.00000	2.00000	0.00000
6	1	1.73205			

例 用牛顿迭代法求 $\sqrt{c}$, $c > 0$

作函数 $f(x) = x^2 - c$ 则 $f(x) = 0$ 的正根就是$\sqrt{c}$.

$$f'(x) = 2x, \quad \varphi(x) = x - \frac{x^2 - c}{2x}$$

$f(x)=x^2-c=0$

牛顿迭代公式如下：

$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - c}{2x_k} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{c}{x_k})$$

$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - c}{2x_k}$

简化的牛顿迭代公式

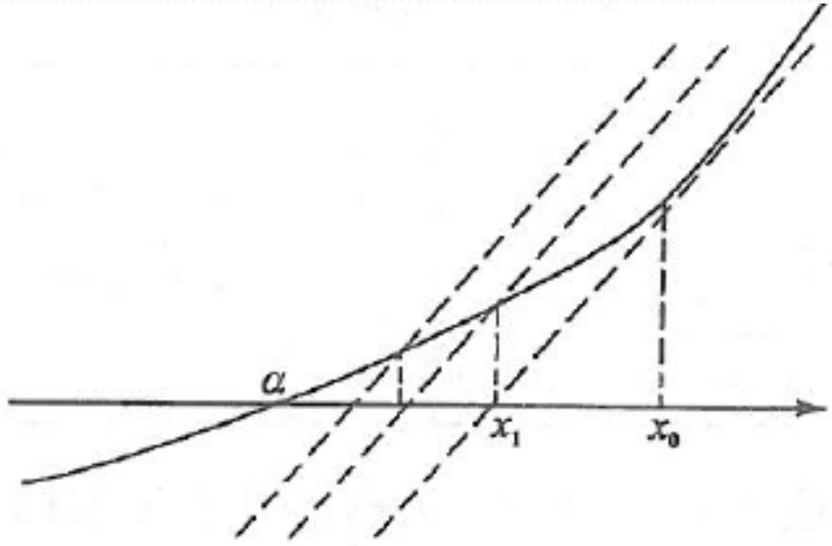
应用牛顿迭代公式, 每一步需要计算 $\boldsymbol{f'(x_n)}$.

为了避免计算导数值，将

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$$

修改为：

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_0)}$$



可进一步简化为：$x_{k+1}=x_k-f(x_k)/c$

迭代公式为：$\boxed{\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{c}}$

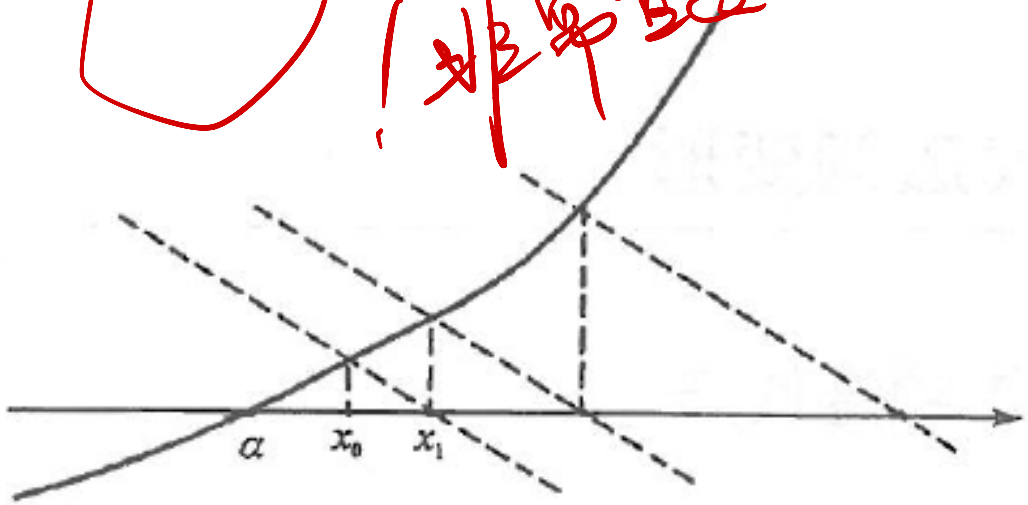
根据收敛条件$|\varphi'(x)|\le L<1$可得：

!非常重要

$$\varphi'(x)=1-\frac{f'(x)}{c}$$

$$0<\frac{f'(x)}{c}<2$$

异号时可能发散！



$1+e^{x}$

例 用简化牛顿迭代法求$x-e^{-x}=0$的根，

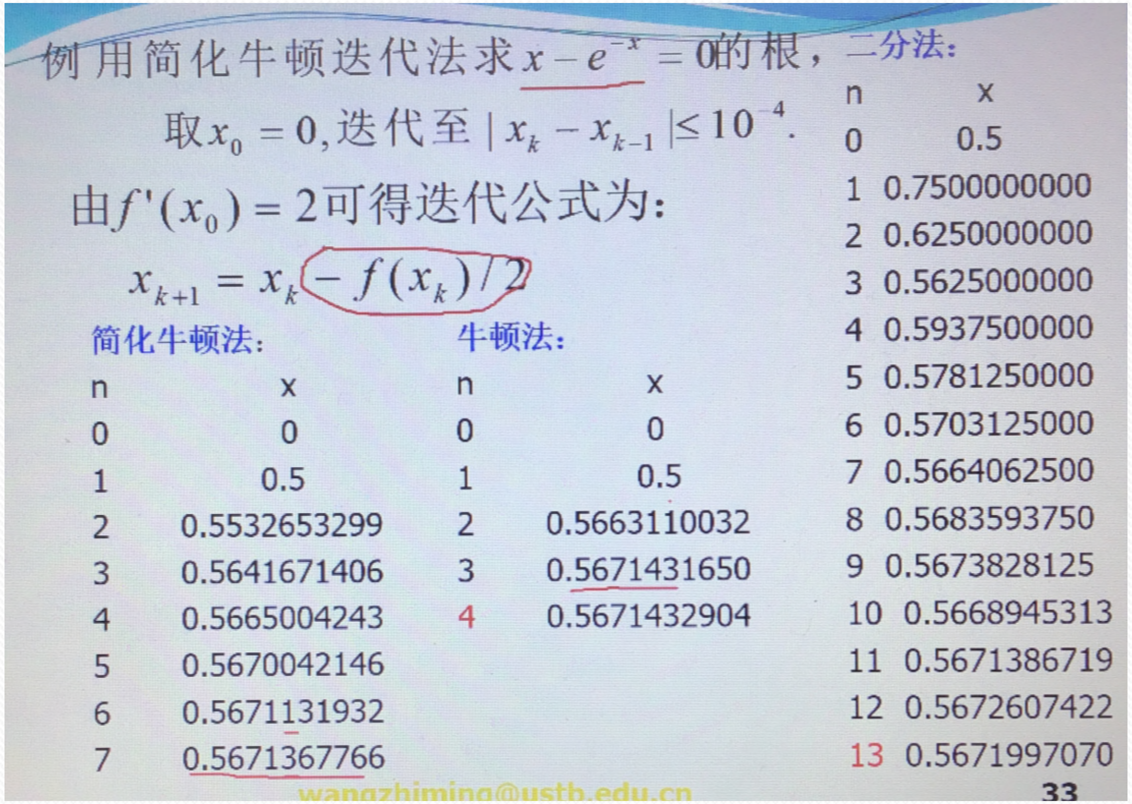
取$x_0=0$, 迭代至$|x_k-x_{k-1}|\le 10^{-4}$.

0 1

− +

由$f'(x_0)=2$可得迭代公式为:

$$x_{k+1}=x_k-f(x_k)/2$$



例 用简化牛顿迭代法求$x-e^{-x}=0$的根，

取$x_0=0$, 迭代至$|x_k-x_{k-1}|\le 10^{-4}$.

由$f'(x_0)=2$可得迭代公式为:

$$x_{k+1}=x_k-f(x_k)/2$$

简化牛顿法:

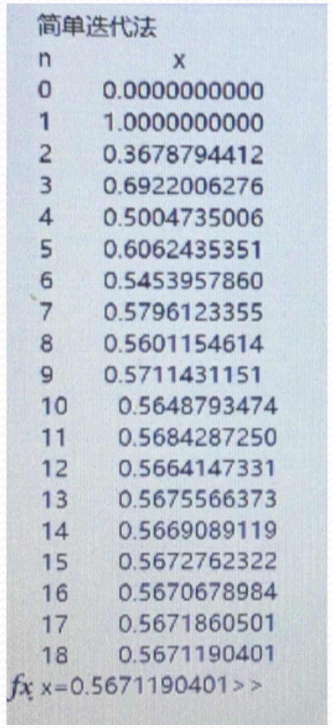
n	x
0	0
1	0.5
2	0.5532653299
3	0.5641671406
4	0.5665004243
5	0.5670042146
6	0.5671131932
7	0.5671367766

牛顿法:

n	x
0	0
1	0.5
2	0.5663110032
3	0.5671431650
4	0.5671432904

二分法:

n	x
0	0.5
1	0.7500000000
2	0.6250000000
3	0.5625000000
4	0.5937500000
5	0.5781250000
6	0.5703125000
7	0.5664062500
8	0.5683593750
9	0.5673828125
10	0.5668945313
11	0.5671386719
12	0.5672607422
13	0.5671997070



简单迭代法

n	x
0	0.0000000000
1	1.0000000000
2	0.3678794412
3	0.6922006276
4	0.5004735006
5	0.6062435351
6	0.5453957860
7	0.5796123355
8	0.5601154614
9	0.5711431151
10	0.5648793474
11	0.5684287250
12	0.5664147331
13	0.5675566373
14	0.5669089119
15	0.5672762322
16	0.5670678984
17	0.5671860501
18	0.5671190401

fx x=0.5671190401>>

§2.3.3 弦割法

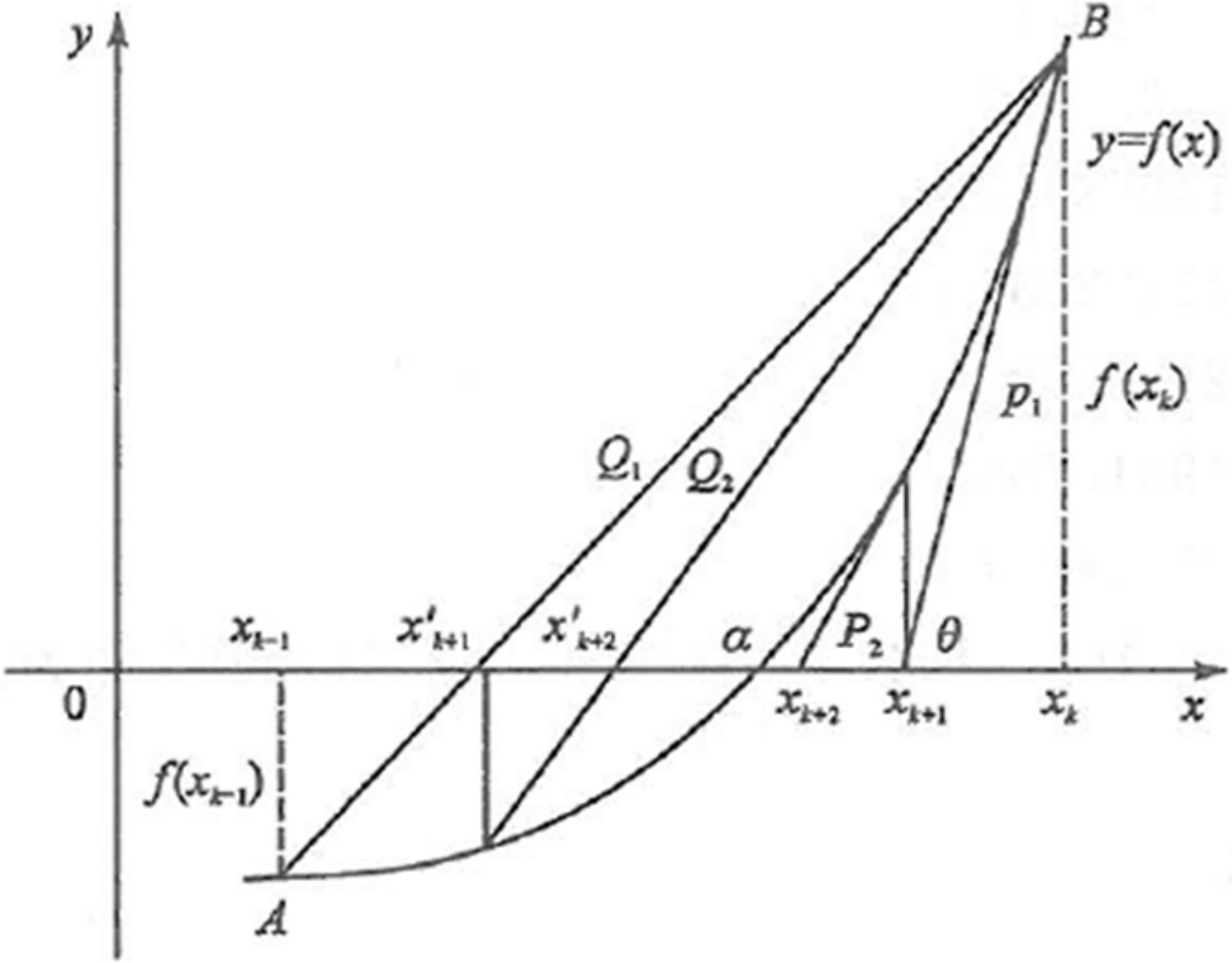
为了避免计算导数值，用下式近似导数：

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

迭代公式为：

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})}$$

以直代曲，需要两点函数值开始迭代。



牛顿法与弦截法的几何意义

几何意义:

过点$(x_0, f(x_0))$与$(x_1, f(x_1))$作直线

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1)$$

令: $y = 0$, 得: $$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0)$$

记: $$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0).$$

一般形式: $$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})}$$

例5 分别用牛顿法和截弦法求解方程在x=1.5附近根：

$$x^3 - x - 1 = 0$$

$|x_k - x_{k-1}| < 10^{-6}$

(1)牛顿法： $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \dfrac{x_k^3 - x_k - 1}{3x_k^2 - 1}$

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 - x_0 - 1}{3x_0^2 - 1} = 1.5 - \frac{(1.5)^3 - 1.5 - 1}{3(1.5)^2 - 1} \approx 1.34783$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - x_1 - 1}{3x_1^2 - 1} \approx 1.32520$$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 - x_2 - 1}{3x_2^2 - 1} \approx 1.32472$$

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3^3 - x_3 - 1}{3x_3^2 - 1} \approx 1.32472$$

(2)弦割法：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$$

$$= x_k - \frac{x_k^3 - x_k - 1}{x_k^2 - x_{k-1} \cdot x_k + x_{k-1}^2 - 1}$$

取 $x_0 = 1.5$， $x_1 = 1.4$ 选得离 X^* 越近，越快 Matlab演示

$$x_2 = 1.4 - \frac{(1.4)^3 - 1.4 - 1}{(1.4)^2 + 1.4 \times 1.5 + (1.5)^2 - 1} \approx 1.33522$$

$$x_3 = 1.33522 - \frac{(1.33522)^3 - 1.33522 - 1}{(1.33522)^2 + 1.33522 \times 1.4 + (1.4)^2 - 1} \approx 1.32541$$

k	牛顿法	f(x)	弦割法	f(x)
0	1	−1	1	−1
1	1.5000000000	0.8750000000	1.5	0.875
2	1.3478260870	0.1006821731	1.2666666667	-0.2343703704
3	1.3252003990	0.0020583619	1.3159616733	-0.0370383005
4	1.3247181740	0.0000009244	1.3252141140	0.0021169048
5	1.3247179572	0.0000000000	1.3247138858	-0.0000173631
6			1.3247179554	-0.0000000080
7			1.3247179572	0.0000000000

牛顿法快于弦割法！

§2.4 非线性方程组牛顿迭代法求根

- 对非线性方程组：$\mathbf{F(X)=0} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$

牛顿迭代法：

(1)给定初值x^0, y^0;

$$(2)\begin{cases} f(x,y) \approx f(x^0,y^0) + \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x^0,y^0)}(x-x^0) + \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x^0,y^0)}(y-y^0) = 0 \\ g(x,y) \approx g(x^0,y^0) + \left.\dfrac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x^0,y^0)}(x-x^0) + \left.\dfrac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x^0,y^0)}(y-y^0) = 0 \end{cases}$$

(3)解出x, y.

$$\begin{bmatrix} f(x^0, y^0) \\ g(x^0, y^0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x^0 \\ y - y^0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

令：

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F}' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$$

雅可比矩阵

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - \left[\mathbf{F}'(\mathbf{X}^{(k)})\right]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)})$$

终止迭代条件： $|x-x^0|+|y-y^0|<\varepsilon$

$$\max(|x-x^0|,|y-y^0|)<\varepsilon$$

定理5 设$F(X)$的定义域为$D\subset R^n$, $X^*\in D$满足$F(X^*)=0$, 在X^*的开邻域$S_0\subset D$上$F'(X)$存在且连续, $F'(X)$非奇异, 则牛顿法生成的序列$\{X^{(k)}\}$在闭域$S\subset S_0$上超线性收敛于X^*, 若还存在常数$L>0$, 使$\|F'(X)-F'(X^*)\|\le L\|X-X^*\|, \forall X\in S$, 则$\{X^{(k)}\}$至少平方收敛.

≠0

范数

§ 2.5 迭代法的收敛性与加速收敛方法

判断是否收敛后，收敛速度如何度量？

设序列$\{x_k\}$收敛于x^*.若存在常数p(p ≥ 1)和c(c>0), 使

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\left|x^*-x_{k+1}\right|}{\left|x^*-x_k\right|^p}=c$$

则称序列$\{x_k\}$是p阶收敛.

$p=1$为线性收敛， $p>1$为超线性收敛，

$p=2$为平方收敛。

定理6 设x*是方程$x=g(x)$的根，$g(x)$, $g'(x)$, ……, $g^{(p)}(x)$在x*附近连续，且

$$g'(x^*) = g''(x^*) = \ldots = g^{(p-1)}(x^*) = 0$$

$$g^{(p)}(x^*) \neq 0$$

则迭代法$x_{k+1}=g(x_k)$在x*附近为p阶收敛.

根据泰勒展开式判断收敛速度：

$$x_{k+1} = g(x_k) = g(x^*) + g'(x^*)(x_k - x^*) + \frac{g''(x^*)}{2!}(x_k - x^*)^2$$

$$+\ldots + \frac{g^{(p-1)}(x^*)}{(p-1)!}(x_k - x^*)^{p-1} + \frac{g^{(p)}(\xi)}{p!}(x_k - x^*)^p$$

则 $x_{k+1} - g(x^*) = x_{k+1} - x^* = \dfrac{g^{(p)}(\xi)}{p!}(x_k - x^*)^p$

即 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|g^{(p)}(\xi)|}{p!} = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|g^{(p)}(x^*)|}{p!}$

p阶收敛!

例6 分析简单迭代法与牛顿迭代法的收敛速度.

简单迭代法

$$x^*-x_{k+1}=g(x^*)-g(x_k)=g'(\zeta_k)(x_k-x^*)$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|x_{k+1}-x^*|}{|x_k-x^*|}=\lim_{k\to\infty}|g'(\zeta_k)|=|g'(x^*)|$$

当$g'(x^*)\neq 0$时简单迭代法是线性收敛的.

牛顿迭代法(单根)

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$g'(x)=1-\frac{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$\because f(x^*)=0 \quad \therefore g'(x^*)=0$ 平方收敛!

牛顿迭代法(复根)

$$f(x)=(x-x^*)^m q(x),(q(x^*)\neq 0)$$

不降努力

$$g'(x^*)=\lim_{x\to x^*} g'(x)=\lim_{x\to x^*}\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=1-\frac{1}{m}\neq 0$$

线性收敛!

改写方程为：$F(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}=\dfrac{(x-x^*)q(x)}{m\cdot q(x)+q'(x)(x-x^*)}$

则x*为单根，具有二阶收敛速度.

艾特肯(Aitken)加速法：

设序列$\{x_k\}$收敛于x^*，且$\lim_{k\to\infty}\frac{x^*-x_{k+1}}{x^*-x_k}=c\ (0<|c|<1)$，由

$$\frac{x^*-x_{k+1}}{x^*-x_k}\approx\frac{x^*-x_{k+2}}{x^*-x_{k+1}}$$

解得：$x^*\approx x_k-\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{x_{k+2}-2x_{k+1}+x_k}$ 线性收敛

$$\boxed{\begin{aligned}&(1)\ y_k=g(x_k)\\&(2)\ z_k=g(y_k)\\&(3)\ x_{k+1}\approx x_k-\frac{(y_k-x_k)^2}{z_k-2y_k+x_k}\end{aligned}}$$

很重要！

wangzhiming@ustb.edu.cn

例7 用迭代法求方程f(x)=x-2^{-x}=0在区间[0,1]内根的近似值，精确到：$|x_{k+1}-x_k|<10^{-4}$

简单迭代法 $x_{k+1}=2^{-x_k}$ 收敛

牛顿迭代法 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k-2^{-x_k}}{1+2^{-x_k}\ln 2}$

艾特肯加速法 $(1)\,y_k=2^{-x_k}$

$(2)\,z_k=2^{-y_k}$

$(3)\,x_{k+1}\approx x_k-\dfrac{(y_k-x_k)^2}{z_k-2y_k+x_k}$

Matlab演示

§2.6 Matlab应用实例

- 用牛顿法求解下列方程：

$$e^{5x} - \sin x + x^3 - 20 = 0$$

控制精度eps=10^{-10}，最大迭代次数M=40。分别取初始值x=1和x=0进行计算。

```
clear;clc;close all;
k = 0;
M = 40;
x = 0;
eps = 10^-10;
while(k<M)
    c1 = f(x);
    c2 = f1(x);
    if c1==0 || c2==0
        break;
    end
    x1 = x-c1/c2;
    res = abs(x1-x);
    k = k+1;
    x = x1;
    ss = sprintf('%d      %12.10f',k,x);
    disp(ss);
    if res<eps
        break;
    end
end
```

Matlab演示

```
function z = f(x)
z = exp(5*x)-sin(x)+x^3-20;

function z=f1(x)
z = 5*exp(5*x)-cos(x)+3*x^2;
```

本章小结

1. 二分法 $\boxed{2^{n+1} > (b-a)/\varepsilon}$
2. 简单迭代法 $\boxed{x = \varphi(x), \quad |\varphi'(x)| < 1}$
3. 牛顿迭代法 $\boxed{x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)}$
4. 弦割法 $\boxed{x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})}$
5. 牛顿下山法 $\boxed{x_{k+1} = x_k - \lambda \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$
6. 收敛的阶、艾特肯加速法。

课后作业

第二章习题的2、3、5、6、8、9。

注：

(1) 第3题仅估计次数，不计算结果！

(2)第8题计算过程保留到小数点后4位，收敛条件改为$|x_k-x_{k-1}|<10^{-4}$.