第四章 二元关系

计算机科学与技术系 洪源

有序对与笛卡儿积

- 有序对
  - 偶对：由 2 个元素构成的二元组
    - 无序偶：(a, b)
    - 有序偶 / 有序对 / 序偶：$<a, b>$
  - 有序对（以 $<a, b>$ 为例）的性质
    - 允许 $a=b$
    - $a \neq b \Leftrightarrow <a, b> \neq <b, a>$
    - $<a, b> = <x, y> \Leftrightarrow a=x \wedge b=y$

有序对与笛卡儿积

- 笛卡儿积
  - 定义（第 121 页定义 3.16 ）
    - 示例
    - 基数的计算
  - 性质
    - 第 121 页（ 1 ） - （ 4 ）
    - $A \subseteq B \wedge C \subseteq D \Rightarrow A \times C \subseteq B \times D$

有序对与笛卡儿积

- 有序 n 元组
  - 各种排行榜
  - 递归的 2 元组（递归点是第一个元素）
  - 课堂练习：判断下列元组的元素数目，并给出元组的简化形式：
    - <<<<a, b>, c>, d>, e> 5 <a,b,c,d,e>
    - <a, <b, <c, <d, e>>>> 5 <d,e,c,b,a>
    - <<{a, b}, <a, b>>, <a, b>> <a,b,{a,b},a,b>
    - <<<a, b>, <a, b>>, <a, b>>
    - <a, <<a, b>, <c, d>>>
    - <<<a, b>, <a, b>>, {<a, b>, <a, b>}>

5

二元关系

- 从 A 到 B 的二元关系、 A 上的二元关系
  - 第 138 页定义 4.1 及示例
  - A 上的空关系（∅）、全域关系（E_A）、恒等关系（I_A）
    - 参见第 138 页定义 4.3
    - 对于给定的集合 A， E_A 和 I_A 是确定的

二元关系

- 表示法
  - R 的集合表达式
  - R 的关系矩阵
  - R 的关系图

关系的性质

- 自反性 vs 反自反性（Reflexivity vs. Anti-reflexivity）
  第 142 页定义 4.4
- 对称性 vs 反对称性（Symmetry vs. Anti-symmetry）
  教材第 143 页定义 4.5
- 传递性（Transitivity）
  教材第 144 页定义 4.6

关系的运算

- 集合运算
- 域（domR, ranR, fldR）、限制（R↾A）、像（R[A]）
  - 第 147 页定义 4.7
  - 第 148 页定义 4.8

关系的运算

- 复合运算
  - 右复合：第 151 页定义 4.10
  - 例：
    - 设 F={<a, b>, <c, d>}， G={<b, e>,<h,c>}
    - 则 F°G={<a, e>}， G°F={<h, d>}
  - 左复合 *
  - 性质
    - 不满足交换律（证明）
    - 满足结合律（证明）
        - 第 152 页定理 4.6 （1）
    - 对∪满足分配律，对∩不满足分配律，但满足一定的关系
      - 第 153 页定理 4.8 （证明）
    - 设 R 为 A 上的关系，则 $R \circ I_A = I_A \circ R = R$
      - 证明略

关系的运算

- 幂
  - 定义：第 154 页定义 4.11
  - 例：
    - 设 $A = \{a, b, c, d\}$， $R=\{<a, b>, <a, c>, <a, d>, <b, c>, <b, d>, <c, d>\}$
    - 则 $R^2 = R^1 \circ R = (R^0 \circ R) \circ R = (I_A \circ R) \circ R = \{<a, c>, <a, d>, <b, d>\}$

关系的运算

- 幂
  - 性质
    - 幂的指数运算（证明）
      - 第156页定理4.10
    - 设A是n元集， R是A上的关系，则存在不相等的自然数s和t，使得$R^s=R^t$（证明）
      - 第156页定理4.11
    - 设R为A上的关系，且存在自然数s, t (s < t) 使得$R^s=R^t$，则
      - （1）对任何自然数k， $R^{s+k}=R^{t+k}$；
      - （2）对任何自然数k, i， $R^{s+k(t-s)+i}=R^{s+i}$；
      - （3）令$S=\{r|r=R^i\}$ (i=0, 1, ..., t-1)，则对任何自然数k， $R^k\in S$.

      证明

关系的运算

- 幂
  - 求值
    - 集合：复合
    - 关系矩阵：相乘（布尔乘法）
  - 例：
    - 设 A = {a, b, c, d}， R={<a, b>, <a, c>, <a, d>, <b, c>, <b, d>, <c, d>}
    - 试求 R^0， R^1， R^2， R^3， R^4， R^5 的值

关系的运算

- 逆关系
  - 定义：第149页定义4.9
  - 性质（证明）
    - 第150页定理4.4
    - 第152页定理4.6（2）
    - $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$
    - $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
    - $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$

关系的闭包

- 定义：第 160 页定义 4.12
- 例：
  - 设
    - $A = \{a, b, c, d\}$
    - $R=\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle\}$
  - 则
    - $r(R) = R\cup\{\langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle\}$
    - $s(R) = R\cup\{\langle c, b\rangle, \langle d, c\rangle\}$
    - $t(R) = R\cup\{\langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, d\rangle\}$

关系的闭包

- 闭包的构造
  - 教材第 160 页定理 4.13
    - 自学证明（1）
    - 自行证明（2）
    - 课堂练习：证明（3）
    - 教材第 161 页推论 4.1 、 4.2
  - Warshall 算法

等价关系与划分

- 等价关系
  - 定义（第 167 页定义 4.13 ）
  - 等价类（教材第 168 页定义 4.14 ）
  - 性质（教材第 169 页定理 4.19 ）
    - 证明
  - 商集（教材第 170 页定义 4.15 ）

等价关系与划分

- 划分
  - 定义（第 170 页定义 4.16 ）
  - 划分 vs 商集
    - 商集是划分
    - 划分是（集合关于同划分块关系的）商集

偏序关系

- 偏序关系、偏序集
  - 定义（第 177 页定义 4.21 ，注意偏序关系符号的写法）
  - 小于，可比（第 178 页定义 4.22 ）
    - 注意：偏序集中元素的大小由其偏序关系决定

偏序关系

- 偏序关系
  - 哈斯图（ Hasse diagram ）
    - 覆盖和覆盖关系（第 179 页定义 4.24 ）
  - 偏序集上的特殊元素
    - 最小元，最大元，极小元，极大元（第 180 页定义 4.25 ）
    - 上界，下界，上确界，下确界（第 181 页定义 4.26 ）

偏序关系

- 全序关系（线序关系）、全序集（线序集）
  - 概念（第 179 页定义 4.23 ）
  - 良序：若全序集 <A, ≼> 中的任意非空子集均存在最小元，则称≤为良序，并称 <A, ≼> 为良序集。

偏序关系

- 半序（拟序，严格偏序）
  - 概念：若给定集合 A 上的二元关系 R 满足反自反性和可传递性，则称 R 是 A 上的半序（拟序，严格偏序）记为<。
  - 例：
    - <Z, <>
    - <P(A), ⊂>
  - 课堂练习：证明 <A, <> 满足反对称性。