第三章 多维随机变量及其分布

第三节 相互独立的随机变量

- 随机变量相互独立的定义
- 离散型随机变量的相互独立
- 连续型随机变量的相互独立
- n个随机变量的相互独立

一. 随机变量相互独立的定义

若 $P(AB)=P(A)P(B)$ 则称事件 A, B 相互独立.

设 (X,Y) 的联合分布函数及边缘分布函数为 $F(x,y)$ 及 $F_X(x), F_Y(y)$. 若对任意的 x, y 都有:

$$P(X\le x, Y\le y)=P(X\le x)\cdot P(Y\le y)$$

即 $$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$$

则称随机变量 X 和 Y 是相互独立的.

二. 离散型随机变量的相互独立

设 (X,Y) 是离散型随机变量,

(x_i, y_j) 是 (X,Y) 所有可能的取值

若 $$P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)$$

则称随机变量 X 和 Y 相互独立。

例1. 设 X,Y 相互独立，它们的分布律分别为:

X	0	1
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Y	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

求: (X,Y) 的联合分布律.

结论： 对离散型随机变量而言，已知联合分布律可求出其相应的边缘分布律，但反之则不然。而一旦已知 X,Y 相互独立条件后，则可由边缘分布律直接求得其联合分布律。

依次可得 (X,Y) 的联合分布律为:

X \ Y	1	2	3	
0	$\frac{2}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{3}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	

X,Y (离散) 相互独立 $\quad \forall i,j,\quad p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}$

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$P\{X = x_i\}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$P\{Y = y_j\}$	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	$\cdots$	$p_{\bullet j}$	$\cdots$	1

例2 设X,Y相互独立，填表：

X \ Y	1	2	3	
1	$1/12$	$1/6$	$1/4$	$1/2$
2	$1/12$	$1/6$	$1/4$	$1/2$
	$1/6$	$1/3$	$1/2$	1

三. 连续型随机变量的相互独立

设 (X,Y) 是连续型随机变量, 如果对任意的 x, y 有:

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

则称随机变量 X 和 Y 是相互独立的。

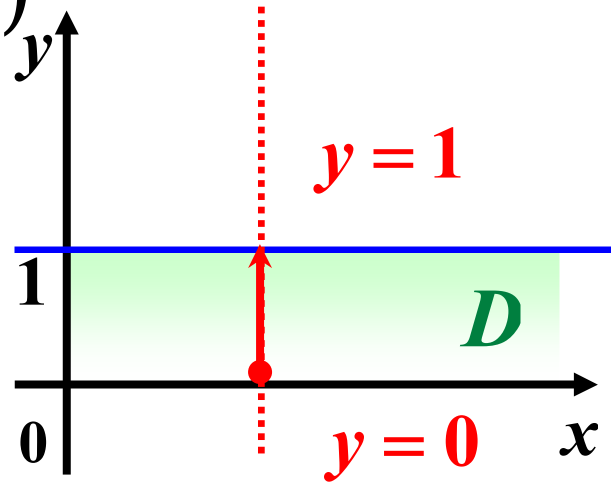
$$\boxed{\text{联合分布}} \underset{\text{独立}}{\rightleftarrows} \boxed{\text{边缘分布}}$$

例3 设 (X, Y) 的密度 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, 0<y<1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

i) X,Y是否相互独立 ii) 求 $F(x,y)$

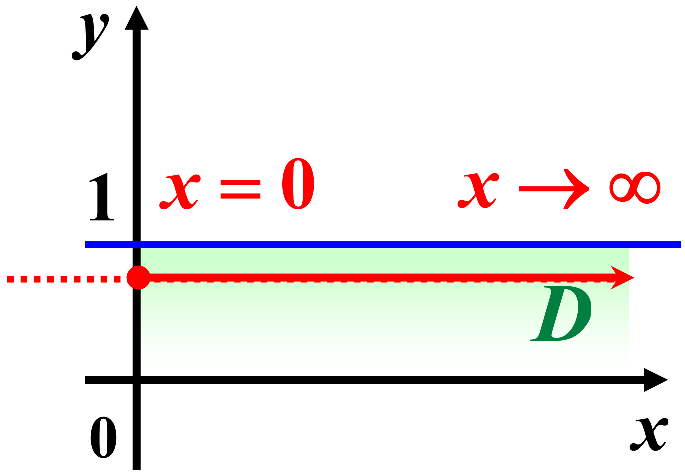
解 i) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

$$=\begin{cases} \int_0^1 e^{-x}dy=e^{-x}, & x>0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$

$$=\begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-x}dx=1, & 0<y<1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



例3 设 (X, Y) 的密度 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, 0<y<1, \\ 0, & 其他 \end{cases}$

i) X,Y是否相互独立 *ii*) 求 $F(x,y)$

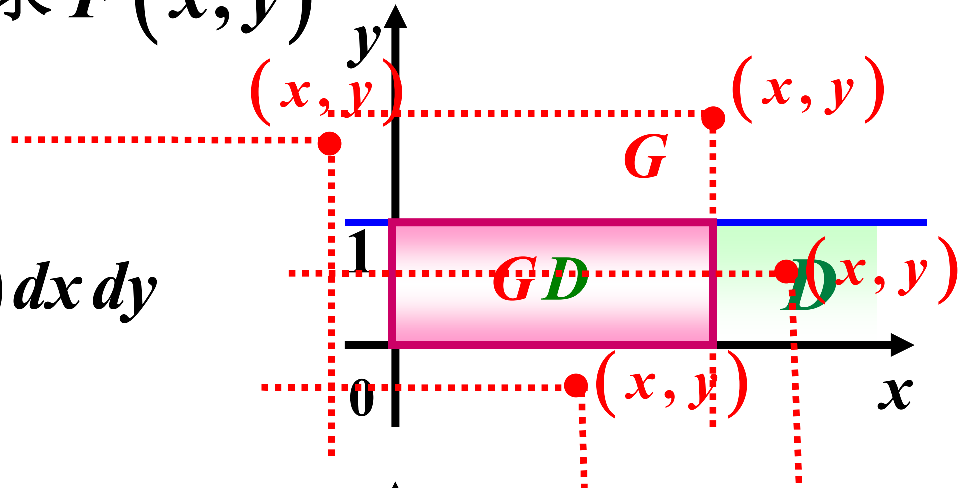
解 $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & 其他 \end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases} 1, & 0<y<1, \\ 0, & 其他 \end{cases}$

$$\therefore f(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)$$

故 X,Y 相互独立。

例3 设 (X, Y) 的密度 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, 0<y<1, \\ 0, & 其他 \end{cases}$

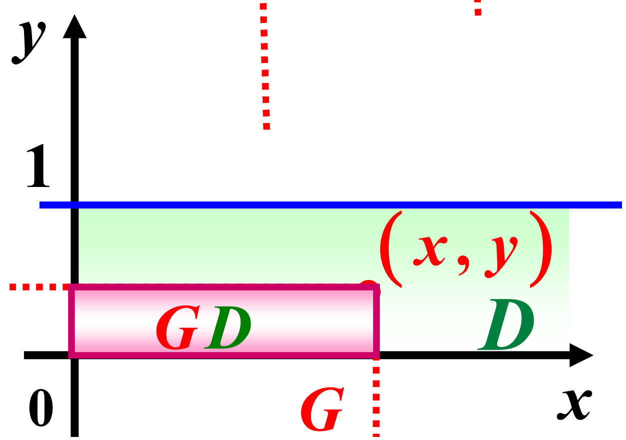
$i)$ X,Y是否相互独立 $ii)$ 求 $F(x,y)$



解 $ii)$

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\begin{cases} \int_0^1 dy\int_0^x e^{-x}dx, & x>0, y\geq 1, \\ \int_0^y dy\int_0^x e^{-x}dx, & x>0, 0<y<1, \\ 0, & 其他 \end{cases}$$



例3 设 (X, Y) 的密度 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, 0<y<1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$i)$ X,Y是否相互独立 $ii)$ 求 $F(x,y)$

解 $ii)$

$$\therefore F(x,y)=\begin{cases} 1-e^{-x}, & x>0, y\geq 1, \\ y\left(1-e^{-x}\right), & x>0, 0<y<1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

另解：因 X,Y 相互独立，

所以 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

例4 设 (X, Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-(x+y)}, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

i) X,Y是否相互独立 *ii*) 求 X,Y 取值均大于0.1 的概率

解 *i*) $$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}1-e^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$\longrightarrow F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$ 故 X,Y 相互独立。

ii) $$P\{X>0.1,\ Y>0.1\}=P\{X>0.1\}P\{\ Y>0.1\}$$
$$=\big(1-F_X(0.1)\big)\big(1-F_Y(0.1)\big)=e^{-0.2}$$

例4 设 (X, Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-(x+y)}, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

i) X,Y是否相互独立 *ii*) 求 X,Y取值均大于0.1 的概率

解 *ii*) $P\{X>0.1,\ Y>0.1\}$

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=P\{X>0.1\}P\{Y>0.1\}$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=(1-F_X(0.1))(1-F_Y(0.1))$$

$$=e^{-0.2}$$

例5. 设 (X,Y) 服从正态分布：$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

问：X 和 Y 相互独立的充分必要条件是什么?

解:因为 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ $\Rightarrow$ $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

所以 $f_X(x)\cdot f_Y(y)$

$$=(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

结论： 设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

则X和Y是相互独立 $\Leftrightarrow$ $\rho=0$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]}$$

要 $f_X(x)\cdot f_Y(y)=f(x,y)\Leftrightarrow\rho=0$

$f(x,y)$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]}$$

结论 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$

则 ① $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

② X,Y 相互独立 $\longleftrightarrow$ $\rho=0$

四. n个随机变量相互独立的概念

关于 X_i的边缘分布函数

定义1. 若对所有的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 有：

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_{X_1}(x_1)\cdot F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$$

则称 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是相互独立的。

定义2. 若对所有的 $x_1,x_2,\cdots,x_m;y_1,y_2,\cdots,y_n$有：

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_m;y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

$$=F_1(x_1,x_2,\cdots,x_m)\cdot F_2(y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

其中 F_1,F_2,F 依次为随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_m)$, $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 和$(X_1,X_2,\cdots,X_m;Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$的分布函数。则称 $(X_1,X_2,\cdots,X_m)$和 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$是相互独立的。

关于独立性的三个定理:

定理1 若连续型随机向量（$X_1, \ldots, X_n$）的概率密度函数 $f(x_1, \ldots, x_n)$可表示为 n 个函数 $g_1, \ldots, g_n$ 之积，其中g_i 只依赖于 x_i，即

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g_1(x_1) \ldots g_n(x_n)$$

则 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立，且 X_i 的边缘密度 $f_i(x_i)$ 与 $g_i(x_i)$ 只相差一个常数因子.

定理2 若 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立，而：

$Y_1 = g_1(X_1, \ldots, X_m)$， $Y_2 = g_2(X_{m+1}, \ldots, X_n)$

则 Y_1与 Y_2 相互独立.

定理3 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 和 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 相互独立

则 $X_i\ (i=1,2,\cdots,m)$ 和 $Y_j\ (j=1,2,\cdots,n)$

相互独立。又若 h, g 是连续函数，则：

$h(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 和 $g(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$

相互独立。