北京科技大学2014—2015学年度第一学期

概率论与数理统计 试题

一、填空题（本题共15分，每小题3分）

1. 设事件A,B相互独立，且$P\left(A\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}B\right)=\frac{1}{4}$，则$P(A)=$________________。

2. 设z_α为标准正态分布的上α分位数，如果$z_\alpha=0.95$，那么$z_{1-\alpha}=$________________。

3. 10个人随机地围绕圆桌而坐，其中甲和乙两个人坐在一起的概率是________________。

4. 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度是$f(x,y)=\begin{cases}3x & 0<x<1,0<y<x\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，那么$X$的边缘密度是________________。

5. 设n_A是n次试验中事件A发生的次数，$p=0.7$是事件A在每次试验中发生的概率，则对于任意的$\varepsilon>0$，$\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=$______1______。

二、选择题（本题共15分，每小题3分）

1. 若$P(AB)=0$，则____________。

(A) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$；　　(B) $P(A)=0$或者$P(B)=0$；

(C) A,B是互不相容的事件；　　(D) A,B是对立的事件。

2. 设样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$来自总体X，且$EX=\mu,DX=\sigma^2$，其中μ与σ^2均未知，则下列结论正确的是____________。

(A) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$是$\sigma^2$的无偏估计；　　(B) $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i$是$\mu$的无偏估计；

(C) $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$是$\sigma^2$的无偏估计；　　(D) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)$是$\mu$的无偏估计。

3. 将一枚骰子投掷n次，X表示出现三点或四点的次数的总和，Y表示出现一、二、五、六点的次数的总和，那么X和Y的相关系数是____________。

(A) -1　　(B) 0　　(C) 0.5　　(D) 1

4. 设随机变量ξ,η相互独立，又$X=2\xi+5,Y=3\eta-8$，则下列*结论错误*的是____________。

(A) $D(X+Y)=4D(\xi)+9D(\eta)$；　　(B) $D(X-Y)=4D(\xi)-9D(\eta)$；

(C) $r_{XY}=0$；　　(D) $E(XY)=E(X)E(Y)$。

5. 检验正态总体均值μ时，在$H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu>\mu_0$，下列结论中____________是正确的（$\sigma^2$已知，显著水平$\alpha$，其中$Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$）。

(A) 拒绝域$\{Z<-z_\alpha\}$　　(B) 拒绝域$\{Z>z_{\alpha/2}\}$

(C) 拒绝域$\{Z<-z_{\alpha/2}\}$　　(D) 拒绝域$\{Z>z_\alpha\}$

三、（本题 8 分）

有两个罐子，第一个罐子中放有 2 个白球及 5 个黑球，第二个罐子中放有 3 个白球及 4 个黑球。任取一个罐子，再从中任取一个球，问：

（1）取出的这个球是白球的概率是多少？

（2）如果取出的是白球，问它来自哪只罐子？

四、（本题 10 分）

设连续型随机变量 X 的分布函数是 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ A+Bx & 0\le x\le 2\\ 1 & x>2\end{cases}$，问：

（1）A,B 各是多少？

（2）X 的概率密度函数是什么？

（3）求出随机变量 $Y=\sin\frac{\pi}{2}(X-1)$ 的概率密度函数。

五、（本题 10 分）

将两枚骰子抛掷 n 次，令 X 表示点对（1,1）、（2,2）、（3,3）、（4,4）、（5,5）、（6,6）出现的总次数。求：

（1）X 的分布律；

（2）$E\left(X^2\right)$；

（3）点对（1,1）、（2,2）、（3,3）、（4,4）、（5,5）、（6,6）至少出现一次的概率。

六、（本题 16 分）

设随机变量 X_1 和 X_2 都服从标准正态分布，X_3 和 X_4 服从同一个指数分布，其概率密度函数为

$f_3(x)=e^{-x},x>0$。如果 X_1,X_2,X_3,X_4 是相互独立的，且记随机变量 $Y_1=3X_1-4X_2$，$Y_2=4X_1+3X_2$。问：

（1）随机变量 Y_1 服从什么分布？其概率密度函数是什么？数学期望和方差各是多少？

（2）随机变量 Y_1 和 Y_2 的协方差是多少？Y_1 和 Y_2 是否相互独立？

（3）随机变量 X_1+X_3 的数学期望与方差分别是多少？

（4）X_3+X_4 的概率密度函数是什么？

七、（本题 16 分）

设总体 X 分布在区间 $(0,1)$ 上，其概率密度为 $f(x)=(\theta+1)x^{\theta},0<x<1$，其中 θ 是未知参数，$\theta>-1$。求：θ 的矩估计量和最大似然估计量。

八、（本题 10 分）

某种零件的重量服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，其中 μ,σ^2 都是未知的，从中抽取容量为 9 的一个样本，求零件重量的置信度为 95% 的置信区间。样本值为（单位：公斤）

5.0　4.9　5.3　4.8　4.8　5.1　5.2　4.7　5.2

已知数据：

$z_{0.05}=1.65$；$t_{0.05}(8)=1.860$；$t_{0.05}(9)=1.833$；$t_{0.05}(10)=1.813$；

$z_{0.025}=1.96$；$t_{0.025}(8)=2.306$；$t_{0.025}(9)=2.262$；$t_{0.025}(10)=2.228$。

答案

填空题答案：

1. $\frac{1}{2}$　**2.** -0.95　**3.** $\frac{2}{9}$　**4.** $f_X(x)=\frac{3}{2}x^2, 0<x<1$　**5.** 1

选择题答案：1. A　2. C　3. A　4. B　5. D

【解】以A_i**表示取出第**$i(i=1,2)$**个罐子，**A**表示最后取出的是白球（1分）。**

（1）$P(A)=P(A|A_1)P(A_1)+P(A|A_2)P(A_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}+\frac{3}{7}\right)=\frac{5}{14}$（**2分**）。

（2）$P(A_1|A)=\frac{P(A|A_1)P(A_1)}{P(A|A_1)P(A_1)+P(A|A_2)P(A_2)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}}=\frac{2}{5}$（**3分**）

$P(A_2|A)=\frac{P(A|A_2)P(A_2)}{P(A|A_1)P(A_1)+P(A|A_2)P(A_2)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}}=\frac{3}{5}$（**1分**）

所以，60%来自第二个罐子，40%来自第一个罐子（1分）。

【解】（1）由于$\lim_{x\to 2-0}F(x)=1, \lim_{x\to 0+0}F(x)=0$（**2分**），**所以**$\begin{cases} A=0 \\ A+2B=1 \end{cases}$，**解出得到**$A=0, B=\frac{1}{2}$

（1分）。

（2）在$0<x<2$**时，**$F(x)=\frac{x}{2}$，**所以概率密度函数**$f(x)=F'(x)=\frac{1}{2}$（**1分**）。

在$x\le 0$**和**$x\ge 2$**时，**$f(x)=F'(x)=0$（**1分**）。

（3）当$y<-1$**或者**$y>1$**时，**$f_Y(y)=0$（**1分**）。

当$-1\le y\le 1$**时，**$F(y)=P\{Y\le y\}=P\left\{\sin\frac{\pi}{2}(X-1)\le y\right\}=P\left\{\frac{\pi}{2}(X-1)\le \arcsin y\right\}$

$=P\left\{X\le\frac{2}{\pi}\arcsin y+1\right\}=\frac{1}{\pi}\arcsin y+\frac{1}{2}$（**3分**），**于是，**$f(y)=F'(y)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$（**1分**）。

【解】在一次试验中我们有$P\{X=1\}=\frac{1}{6}, P\{X=0\}=\frac{5}{6}$（**1分**）。

（1）显然这是一个n**重贝努利试验，**X**服从二项分布，其分布律是**$P\{X=k\}=C_n^k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$，

$k=0,1,2,\cdots,n$（**2分**）。

（2）X**服从二项分布**$B\left(n,\frac{1}{6}\right)$，**因此，**$EX=\frac{n}{6}, DX=\frac{5n}{36}$（**2分**），**于是**$EX^2=DX+(EX)^2=\frac{n(n+5)}{36}$

（2分）。

（3）$P\{X\ge 1\}=1-P\{X=0\}=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$（**3分**）。

【解】(1) Y_1服从正态分布（1分），$EY_1=0, DY_1=25$（2分），$f_{Y_1}=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x}{50}}$，$-\infty<x<+\infty$（1分）。

(2) $\operatorname{cov}(Y_1,Y_2)=E(Y_1-EY_1)(Y_2-EY_2)=EY_1Y_2-EY_1EY_2$（1分），而

$EY_1Y_2=E(12X_1^2-7X_1X_2-12X_2^2)=0$，因此得到协方差是0（2分）。于是，$Y_1,Y_2$相互独立（1分）。

(3) $EX_3=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=1$，$EX_3^2=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=2$，所以，$DX_3=1$（1分）。于是，

$E(X_1+X_3)=EX_1+EX_3=1$（1分），$D(X_1+X_3)=DX_1+DX_3=1+1=2$（2分）。

(4) 记$Y=X_3+X_4$，Y的分布函数为$F(y)$，显然当$y\le 0$时，$F(y)=0$（1分）。当$y>0$时，

$F(y)=P\{Y\le y\}=P\{X_3+X_4\le y\}=\iint\limits_{\substack{u+v\le y\\ u,v>0}} e^{-u}\cdot e^{-v}dudv=1-e^{-y}-ye^{-y}$（2分），于是，$f(y)=ye^{-y}$（1分）。

【解】由于$EX=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}dx=\frac{\theta+1}{\theta+2}$（2分），令$\frac{\theta+1}{\theta+2}=\overline{X}$（2分），解得$\overline{\theta}=\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$，所以$\theta$的矩估计量为$\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$（2分）。

记似然函数为$L=\prod_{k=1}^{n}(\theta+1)x_k^{\theta}=(\theta+1)^n\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^{\theta}$（2分），则$\ln L=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{k=1}^{n}\ln x_k$（2分），令$\frac{d}{d\theta}\ln L=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{k=1}^{n}\ln x_k=0$（2分），解得$\overline{\theta}=-\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\ln x_k}-1$（2分），所以，$\theta$的极大似然估计量为

$-\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\ln X_k}-1$（2分）。

【解】构造统计量$t=\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{3}}\sim t(8)$（3+2分），$\alpha=0.05$，$t_{0.025}(8)=2.306$，$\overline{X}=5$，$S^2=0.36$（2分），

置信度为95%的置信区间为$\left(\overline{X}\pm\frac{S}{3}t_{0.025}(8)\right)=(4.539,5.461)$（3分）。