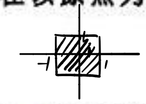
1. 甲乙射击一个目标，甲命中的概率是 0.6，乙命中的概率是 0.9，两人同时各射击一次，目标被命中的概率是 $\underline{\ 0.96\ }$。 $1-0.4\cdot 0.1=1-0.04$

2. 若 ξ 服从 $(0,4)$ 上的均匀分布，那么 $P\{\xi<2|\xi>1\}=$ $\underline{\ \frac{1}{3}\ }$。 $P\{\xi<2|\xi>1\}=\frac{P\{1<\xi<2\}}{P\{\xi>1\}}=\frac{1}{3}$

3. 若二维随机变量 (X,Y) 在以原点为中心的正方形 $[-1,1]\times[-1,1]$ 上服从均匀分布，那么 $P\left\{X<\frac{1}{2}\right\}=$ $\underline{\ \frac{3}{4}\ }$。



4. 设 η_n 是 n 次独立试验中事件 A 出现的次数， p 为 A 在每次试验中出现的概率，则对任意的 $\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\left|\frac{\eta_n}{n}-p\right|\le\varepsilon\right\}=$ $\underline{\ \cancel{np}\ 1\ }$。 $A\sim B(n,p)$

5. 标准正态分布的概率密度函数是 $\underline{\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\ }$。

6. 若随机变量 X 服从二项分布 $B(100,0.4)$，那么 X 的数学期望是 $\underline{\ 40\ }$，其方差是 $\underline{\ 24\ }$。 $X\sim B(100,0.4)$

7. 有十张彩票，其中有一张中奖，现采取抓阄的方式分配给 10 个人，前四个人都没有抓到这张彩票，那么这时第五个人抓阄的人恰好抓到这张中奖彩票的概率是 $\underline{\ \frac{1}{6}\ }$。

8. 若 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 都是参数 θ 的无偏估计量，且 $D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$，这时我们通常称统计量 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ $\underline{\ 有效\ }$。

9. n 个人随机地排成一列，其中甲和乙两个人排在一起的概率是 $\underline{\ \frac{2}{n}\ }$。

$\frac{2(n-1)!}{n!}$ 　甲 乙 　$n-2$ 个人 　$A_2^2\cdot A_{n-1}^{n-1}$

1. 若 $P(AB)=0$，则 $\underline{\ D\ }$。

(A) A,B 是互不相容的事件；　　(B) $P(A)=0$ 或者 $P(B)=0$；

(C) A,B 是对立的事件；　　(D) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$。

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

2. 已知 X,Y 是相互独立的随机变量，同分布于标准正态分布。有人作出如下四个论断：

(1) $X+Y$ 服从正态分布，但是 $X-Y$ 不服从正态分布；

(2) $X+Y$ 与 $X-Y$ 有相同的数学期望；

(3) $X+Y$ 与 $X-Y$ 有相同的方差；

(4) $X+Y$ 与 $X-Y$ 是不相关的。

在这四个断言中，正确断言的个数是 $\underline{\ B\ }$。

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

$X\sim N(0,1)$

$Y\sim N(0,1)$

$cov(X+Y,X-Y)=cov(X,X)-cov(Y,Y)$

$=0$

3. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且同分布于标准正态分布，下列随机变量中服从 χ^2 分布的是 $\underline{\ C\ }$。

(A) $X_1+X_2+\cdots+X_n$　　(B) $(X_1+X_2+\cdots+X_n)^2$

(C) $X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$　　(D) $\sqrt{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}$

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自某总体的一个样本，下面统计量中可以作为总体均值 μ 的无偏估计量的是 $\underline{\ B\ }$。

(A) $X_1+X_2+\cdots+X_n$　　(B) $\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$

(C) $\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n-1}$　　(D) $\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-\mu$

5. 设 X,Y 是相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为 $F_X(x),F_Y(y)$，则 $Z=\min(X,Y)$ 的分布函数是 $\underline{\ D\ }$。

(A) $F_Z(z)=\min(F_X(z),F_Y(z))$　　(B) $F_Z(z)=\min(|F_X(z)|,|F_Y(z)|)$

(C) $F_Z(z)=1-\min(F_X(z),F_Y(z))$　　(D) $F_Z(z)=1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z))$

(1) $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$　　$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \int_0^{\sqrt{z}}1dx=\sqrt{z}, & 0\le z<1\\ 1, & z\ge 1\end{cases}$

$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$　　$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}, & 0<z<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(2) $EZ=\int_{-\infty}^{\infty}z f_Z(z)dz=\int_0^1 z^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}dz=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{3}$

$DZ=EZ^2-(EZ)^2=\frac{1}{5}-\frac{1}{9}=\frac{4}{45}$　　$EZ^2=\int_0^1 z^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}dz=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$

三、（本题 10 分）设随机变量 X 服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布，记 $Z=X^2$。求：

（1）随机变量 Z 的分布函数以及分布密度；

（2）数学期望 EZ 及方差 DZ。

四、（本题 10 分）独立抛掷骰子 100 次，以 X_k（$1\le k\le 100$）记第 k 次抛掷得到的点数，$X=\sum_{k=1}^{100}X_k$ 表示抛掷的总点数。请解答以下问题：

（1）请写出 X_k（$1\le k\le 100$）的分布律；

（2）计算 $X_1+X_2+X_3=6$ 的概率；

（3）计算 X_k（$1\le k\le 100$）的数学期望及方差；

（4）计算 X 的数学期望及方差。

(1)

X_k	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

(2) $1+1+4$，$1+2+3$，$2+2+2$

$P(\ )=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 3+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}A_3^3+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{10}{216}=\frac{5}{108}$

(3) $EX_k=\frac{3\times 7}{6}=\frac{7}{2}$　$DX_k=EX_k^2-(EX_k)^2=\frac{1+4+9+16+25+36}{6}-\frac{49}{4}=\frac{182-147}{12}=\frac{35}{12}$

(4) $EX=E(X_1+\cdots+X_{100})=350$

$DX=100\cdot\frac{35}{12}=\frac{875}{3}$

五.（本题 12 分）若某厂生产的灯管寿命 T 服从指数分布，其分布密度函数为

$$f_T(t)=\lambda e^{-\lambda t},t\ge 0,$$

其中 λ 是未知参数。现随机抽取 10 只灯管，测得它们的寿命为（单位：小时）

1190　1178　1220　1224　1230　1200　1190　1176　1182　1210

（1）用极大似然估计法估计参数 λ 的值；

（2）用矩估计法估计参数 λ 的值。

六.（本题 12 分）设随机向量 X,Y 独立，都服从区间 $[0,2]$ 上的均匀分布。设随机变量

$$Z_1=X+Y,\boxed{Z_2=\max\{X,Y\}},Z_3=|X-Y|。$$

（1）求：$Z_i,i=1,2,3$，的分布密度函数；

（2）求：$P\{Z_1\le 2,Z_2\le 1\}$，并判断 Z_1 与 Z_2 是否相互独立。

(1) $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\Rightarrow f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 0<x<2,0<y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

① $Z=X+Y\Rightarrow Y=-X+Z$　$0<x<2$，$z-2<x<z$

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,-x+z)dx=\begin{cases}\int_0^z\frac{1}{4}dx=\frac{z}{4}, & 0<z<2\\ \int_{z-2}^{2}\frac{1}{4}dx=\frac{4-z}{4}, & 2<z<4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

② $F_Z(z)=P\{\max\{X,Y\}\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}=P\{X\le z\}\cdot P\{Y\le z\}=F_X(z)\cdot F_Y(z)=\iint\frac{1}{4}dxdy=\frac{z^2}{4}$　$0\le z\le 2$

$z\le 0$，$z>2$

$\therefore f_Z(z)=\begin{cases}\frac{z}{2}, & 0\le z<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

③ $F_Z(z)=P\{|X-Y|\le z\}=\begin{cases}0, & z\le 0\\ z-\frac{z^2}{4}, & 0<z\le 2\\ 1, & z>2\end{cases}$

七.（本题 16 分）设连续型随机变量 X 的分布函数是 $F(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ A+Bx & -1\le x\le 1\\ 1 & x>1\end{cases}$，问：

（1）A,B 各是多少？

（2）X 的分布密度是什么？

（3）求出随机变量 $Y=\sin\frac{\pi}{2}X$ 的分布密度函数。

（4）计算 DY。

(1) $A-B=0$，$A+B=1$ $\Rightarrow A=B=\frac{1}{2}$

连续型随机变量的分布函数一定是连续函数，也就是说，分布函数连续的随机变量一定是连续型随机变量

$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}x, & -1\le x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

随便怎么做？

$f(x)=\begin{cases}F'(x), & F(x)\text{在}\cdots\text{可导}\\ 0, & \cdots\text{不}\cdots\end{cases}$　$\sin^{-1}y\cdot\frac{2}{\pi}$

(3) $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<-1\\ \int_{-1}^{\frac{2}{\pi}\arcsin y}\frac{1}{2}dx, & -1\le y<1\\ 1, & y>1\end{cases}$

(4) $DY=D(\sin\frac{\pi}{2}X)=E\sin^2\frac{\pi}{2}X-(E\sin\frac{\pi}{2}X)^2$

$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\sin^2(\frac{\pi}{2}x)dx-\cancel{\left(\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}xdx\right)^2}$

$=\int_0^1\sin^2\frac{\pi}{2}xdx\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{\pi}$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\,dx\cdot\frac{2}{\pi}$

$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}$

八.（本题 8 分）利用概率论的方法证明恒等式：$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$。

答案

答案：1. 0.96　　2. $\frac{1}{3}$　　3. $\frac{3}{4}$　　4. 1　　5. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, x\in R$

6. 40, 24　　7. $\frac{1}{6}$　　8. 有效　　9. $\frac{2}{n}$

答案：1. D　　2. B　　3. C　　4. B　　5. D

解：X 的概率密度函数为 $f(x)=1, x\in(0,1)$（1分）。

（1）当 $0<z<1$ 时，概率密度为 $f_Z(z)=\frac{1}{2\sqrt{z}}$（3分）；其它情况概率密度为 $f_Z(z)=0$（1分）。

（2）$EZ=\int_0^1 z\cdot\frac{1}{2\sqrt{z}}dz=\frac{1}{3}$（2分），$DZ=EZ^2-(EZ)^2=\frac{4}{45}$（3分）。

解答：（1）X_k（$1\le k\le 100$）的可能取值为 1，2，3，4，5，6，且各种情况的出现是等可能的，因此 X_k 得分布律为 $P\{X_k=m\}=\frac{1}{6}$，$1\le m\le 6$（1分）。

（2）共有 10 种情况可以使得 $X_1+X_2+X_3=6$，即 (X_1,X_2,X_3) 为（4，1，1），（1，4，1），（1，1，4），（3，2，1），（3，1，2），（2，3，1），（1，3，2），（1，2，3），（2，1，3），（2，2，2），（1分）且每种情况出现的可能性都是 $\frac{1}{216}$（1分）。因此，所求概率为 $P\{X_1+X_2+X_3=6\}=\frac{10}{216}=\frac{5}{108}$（1分）。

（3）由（1）以及数学期望的定义有 $EX_k=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$（1分），$X_k$ 的二阶矩为 $EX_k^2=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{6}+4^2\cdot\frac{1}{6}+5^2\cdot\frac{1}{6}+6^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{91}{6}$（1分），因此 X_k 的方差为 $DX_k=EX_k^2-(EX_k)^2=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=\frac{35}{12}$（1分）。

（4）由数学期望的性质知道，$EX=E\left(\sum_{k=1}^{100}X_k\right)=\sum_{k=1}^{100}EX_k=100\cdot\frac{7}{2}=350$（2分）。又由于 X_k（$1\le k\le 100$）相互独立，因此 $DX=D\left(\sum_{k=1}^{100}X_k\right)=\sum_{k=1}^{100}DX_k=100\cdot\frac{35}{12}=\frac{875}{3}$（1分）。

（1）极大似然估计法。设来自总体的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$，那么似然函数为 $L=\lambda^{10}\prod_{i=1}^{10}e^{-\lambda x_i}$（2分），

取对数并对 λ 求导得到 $\frac{d}{d\lambda}\ln L=\frac{10}{\lambda}-\sum_{i=1}^{10}x_i$（1分），令导数等于零（1分），可以解得 λ 的极大似然估计量为 $\hat{\lambda}=\frac{10}{\sum_{i=1}^{10}X_i}$（2分），于是 λ 的极大似然估计值为 $\lambda=\frac{1}{1200}$（2分）.

（2）矩估计法。T 的数学期望为 $ET=\int_0^{+\infty}x\cdot\lambda e^{\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}$（1分），令 $ET=\overline{X}$（1分），则解得 λ 的矩估计量为 $\hat{\lambda}=\frac{1}{\overline{X}}$（1分），进而矩估计值为 $\hat{\lambda}=\frac{10}{\sum_{i=1}^{10}X_i}=\frac{1}{1200}$（1分）。

解答：（1）（9分）Z_1 的分布密度。因为 X 与 Y 独立，所以 X,Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 0\le x,y\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}。$$

由分布函数的定义有

$$F_{Z_1}(z)=P\{Z_1\le z\}=P\{X+Y\le z\}=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$$

$$=\begin{cases}0, & z\le 0\\ \int_0^z dx\int_0^{z-x}\frac{1}{4}dy=\frac{z^2}{8}, & 0\le z\le 2\\ 1-\int_{z-2}^2 dx\int_{z-x}^2\frac{1}{4}dy=-1+z-\frac{z^2}{8}, & 2<z\le 4\\ 1, & z\ge 4\end{cases}$$

此时概率密度函数为 $f_{Z_1}(z)=\begin{cases}\frac{z}{4}, & 0\le z\le 1\\ 1-\frac{z}{4}, & 1<z\le 2\\ 0, & 其它\end{cases}$ **（3 分）。**

Z_2**的分布密度。由分布函数的定义有**

$$F_{Z_2}(z)=P\{\max\{X,Y\}\le z\}=P\{X,Y\le z\}=\begin{cases}0, & z\le 0\\ \iint\limits_{\substack{\max\{x,y\}\le z\\ 0\le x,y\le 2}}\frac{1}{4}dxdy=\iint\limits_{0\le x,y\le z}\frac{1}{4}dxdy=\frac{z^2}{4}, & 0\le z\le 2\\ 1, & z>2\end{cases}.$$

此时概率密度函数为 $f_{Z_2}(z)=\begin{cases}\frac{z}{2}, & 0\le z\le 2\\ 0, & 其它\end{cases}$ **（3 分）。**

Z_3**的分布密度。由分布函数的定义有**

$$F_{Z_3}(z)=P\{|X-Y|\le z\}=\begin{cases}0, & z\le 0\\ \iint\limits_{\substack{|x-y|\le z\\ 0\le x,y\le 2}}\frac{1}{4}dxdy=\iint\limits_{\substack{x-z\le y\le x+z\\ 0\le x,y\le 2}}\frac{1}{4}dxdy=z-\frac{z^2}{4}, & 0<z\le 2\\ 1, & z>2\end{cases}.$$

此时概率密度函数为 $f_{Z_3}(z)=\begin{cases}1-\frac{z}{2}, & 0\le z\le 2\\ 0, & 其它\end{cases}$ **（3 分）。**

(2)（3 分） $P\{Z_1\le 2,Z_2\le 1\}=P\{X+Y\le 2,\max\{X,Y\}\le 1\}=\iint\limits_{\substack{x+y\le 2\\ 0\le x,y\le 1}} f(x,y)dxdy=\frac{1}{4}$ **（1 分）。由于**

$P\{Z_1\le 2\}P\{Z_2\le 1\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}\ne\frac{1}{4}$ **（1 分），因此** Z_1 **与** Z_2 **不独立（1 分）。**

方法二：因若 $\max\{X,Y\}\le\frac{1}{2}$ **则** $X+Y\le 1$ **（1 分），故而**

$P\left\{Z_1\le 1,Z_2\le\frac{1}{2}\right\}=P\left\{X+Y\le 1,\max\{X,Y\}\le\frac{1}{2}\right\}=P\left\{\max\{X,Y\}\le\frac{1}{2}\right\}=F_{Z_2}(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$ **（1 分）.**

【解】(1) 由于 $\lim_{x\to 1-0} F(x)=1, \lim_{x\to -1+0} F(x)=0$ (1+1 分)，所以 $\begin{cases} A-B=0 \\ A+B=1 \end{cases}$ (1 分)，解出得到

$A=B=\dfrac{1}{2}$ (1分)。

(2) 在 $-1<x<1$ 时，$F(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{2}$，所以概率密度函数 $f(x)=F'(x)=\dfrac{1}{2}$ (1分)。

在 $x\le -1$ 和 $x\ge 1$ 时，$f(x)=F'(x)=0$ (1分)。

(3) 当 $y<-1$ 时，$F_Y(y)=0$，因此 $f_Y(y)=0$。

当 $y>1$ 时，$F_Y(y)=1$，因此 $f_Y(y)=0$。(1分)。

当 $-1\le y\le 1$ 时，$F(y)=P\{Y\le y\}=P\left\{\sin\dfrac{\pi}{2}X\le y\right\}=P\left\{\dfrac{\pi}{2}X\le \arcsin y\right\}$

$=P\left\{X\le \dfrac{2}{\pi}\arcsin y\right\}=\dfrac{1}{\pi}\arcsin y+\dfrac{1}{2}$ (4分)，于是，$f(y)=F'(y)=\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ (1分)

(4) 显然，$EY=0$ (1分)，因此，$DY=EY^2=\int_{-1}^{1} y^2\cdot\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy=\dfrac{1}{2}$ (3分)。

【解答】设一袋中有 n 只红球，n 只黑球，随机抽取 n 只球的取法数为 C_{2n}^n (2 分)，取到 l 只红球，

$n-l$ 只黑球的取法数分别是 C_n^l，C_n^{n-l}，因此恰好取到 l 只红球的概率是 $\dfrac{C_n^l C_n^{n-l}}{C_{2n}^n}=\dfrac{\left(C_n^l\right)^2}{C_{2n}^n}$ (2 分)。

用 A_i, B_i，$0\le i\le n$，分别表示恰好取到 i 只红球和黑球，由全概率公式得到

$\sum_{0\le i\le n} P\{B_{n-i}|A_i\}P\{A_i\}=1$ (2 分)，即 $\sum_{0\le i\le n}\dfrac{\left(C_n^i\right)^2}{C_{2n}^n}=1$，变形就是

$\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\left(C_n^2\right)^2+\cdots+\left(C_n^n\right)^2=C_{2n}^n$ (2分)。