

第七章 作业

1. 解初值问题 $y'(x) = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ 的梯形格式 $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$ 是几阶方法?

参见p166, 式(7-9)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

$$R_{n+1} = y(x_{n+1}) - y(x_n) - \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))]$$

$$= -\frac{h^3}{12} y'''(\xi) = O(h^3) \quad (x_n < \xi < x_{n+1})$$

二阶!

2. 解初值问题 $y'(x) = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ 的向后 Euler 方法(即后退 Euler 方法) $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$ 是几阶方法?

参考p165页式(7-7)可得:

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - hf(x_{n+1}, y(x_{n+1})) \\ &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - hy'(x_{n+1}) \end{aligned}$$

将 $y(x_n)$ 在 x_{n+1} 附近展开得:

$$y(x_n) = y(x_{n+1}) - hy'(x_{n+1}) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_{n+1}) - \frac{1}{3!}h^3 y'''(x_{n+1}) + \dots$$

代入上式可得:

$$R_{n+1} = -\frac{1}{2}h^2 y''(x_{n+1}) + \frac{1}{3!}h^3 y'''(x_{n+1}) - \dots = O(h^2)$$

一阶!

5. 用改进的 Euler 方法解初值问题 $\begin{cases} y' = x^2 + x - y & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 取步长 $h =$

0.1 计算 $y(0.5)$, 并与准确解 $y = -e^{-x} + x^2 - x + 1$ 相比较。

参考p167页式(7-11)可得:

$$\begin{cases} y_p = y_n + 0.1 \cdot (x_n^2 + x_n - y_n) \\ y_q = y_n + 0.1 \cdot [(x_n + 0.1)^2 + (x_n + 0.1) - y_p] \\ y_{n+1} = (y_p + y_q) / 2 \end{cases}$$

x	改进Euler	真实值
0	0	0
0.1000	0.0055	0.0052
0.2000	0.0219	0.0213
0.3000	0.0501	0.0492
0.4000	0.0909	0.0897
0.5000	0.1450	0.1435

6. 用梯形方法解初值问题 $\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$, 证明其近似解为 $y_n = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n$, 并证

明 h 趋近于 0 时, 它收敛于原初值问题的准确解 $y = e^{-x}$ 。

参考p166页式(7-9)可得:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[-y_n - y_{n+1}]$$

$$y_{n+1} = \frac{2-h}{2+h} y_n \quad \text{代入 } \mathbf{y(0)=1}, \text{ 即得 } y_n = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n$$

利用极限公式: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^{x/h} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{2t-1}{2t+1}\right)^{tx} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t+1/2}\right)^{tx} = e^{-x}$$

基本要求

- 欧拉法；
- 改进的欧拉法；
- 龙格-库塔法及线性多步法的基本思想。