



第十章 图的基本概念

计算机科学与技术系 洪源



- 无序积

- 设 A 和 B 是两个集合
- 则称 $\{\{a, b\} | a \in A \wedge b \in B\}$ 为集合 A 和 B 的无序积
- 记做 $A \& B$
- 其中的元素 $\{a, b\}$ 记做 (a, b)

- 图，无向图，有向图

- 一个图是一个有序二元组 $\langle V, E \rangle$ ，其中
 - V 是一个非空有穷集，称为顶点集，其中的元素称为顶点或结点
 - E 是 $V \& V$ 或者 $V \times V$ 的有穷多重子集，称为边集
- 若 E 是 $V \& V$ 的子集，则称该图是无向图， E 中元素称为无向边，简称边
- 若 E 是 $V \times V$ 的子集，则称该图是有向图， E 中元素称为有向边，简称边
- 例
 - 程序函数之间的调用关系
 - 城市之间的可达关系
- 注意
 - V 和 E 均为有限集
 - $V \neq \emptyset$

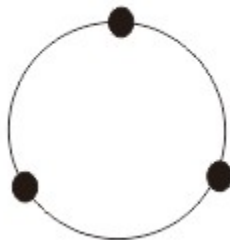
- 有向图的基图

- 将一个有向图的有向边全部改成无向边后得到的无向图



- 图解

- 用以表达一个图的具体图形称为该图的一个图解
- 例：同一个图的不同图解





- 阶
 - 顶点数称作图的阶， n 个顶点的图称作 n 阶图
- 含有 n 个顶点和 m 条边的图称为 (n, m) 图
- $(n, 0)$ 图称为 n 阶零图，记作 N_n
- N_1 称作平凡图（只有 1 个顶点，没有边）
- 空图
 - 在运算过程中可能产生 $V=\emptyset$ 的运算结果，此时称这个图为空图，记为 \emptyset



- 设 $G=\langle V,E \rangle$ 是无向图， $e_k=(v_i, v_j) \in E$ ， $e_l=(v_j, v_m) \in E$ ，则称
 - v_i 和 v_j 为 e_k 的端点
 - e_k 与 v_i (v_j) 关联
 - 若 $v_i \neq v_j$ 则称 e_k 与 v_i (v_j) 的关联次数为 1
 - 若 $v_i = v_j$ 则称 e_k 与 v_i (v_j) 的关联次数为 2，并称 e_k 是环
 - v_i 与 v_j 相邻
 - e_k 与 e_l 相邻
- 若 e_k 与 v_i 不关联，则称 e_k 与 v_i 的关联次数为 0



- 设 $G=\langle V,E \rangle$ 是有向图， $e_k=\langle v_i, v_j \rangle \in E$ ， $e_l=\langle v_j, v_m \rangle \in E$ ，则称
 - v_i 和 v_j 为 e_k 的端点，其中 v_i 是 e_k 的始点， v_j 是 e_k 的终点
 - e_k 与 v_i （ v_j ）关联
 - 若 $v_i=v_j$ 则称 e_k 是环
 - v_i 与 v_j 相邻
 - e_k 与 e_l 相邻（ e_k 的终点是 e_l 的始点）
- 不论在有向图中还是无向图中，不与任何边关联的顶点都称为孤立点

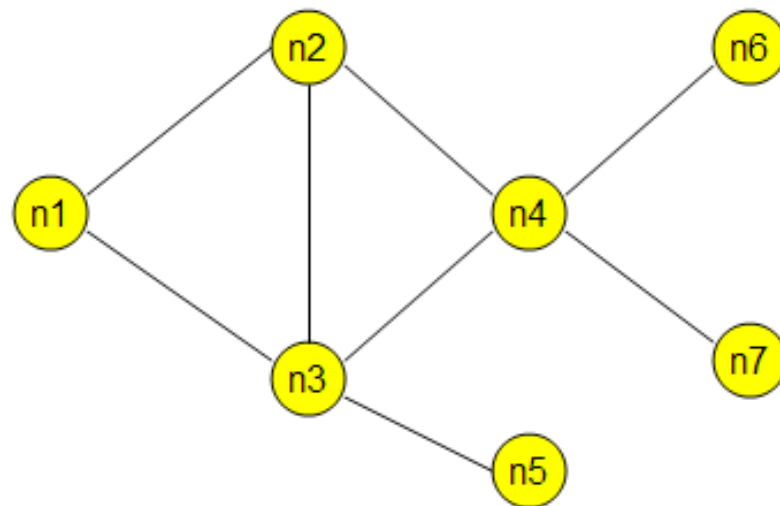
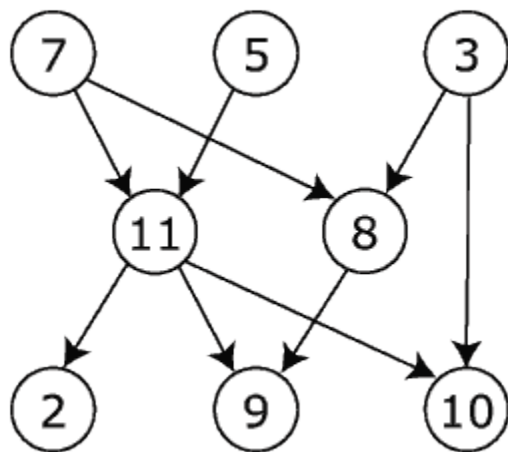


- (顶点的) 度 , 出度 , 入度—— $\deg(v)$, $\deg^-(v)$, $\deg^+(v)$
 - 参见第 314 页定义 10.3
 - 第 2、3 个逗号之间改为“某一顶点 v 与所有边的关联次数之和称为该顶点的度数”
 - 第 4、5 个逗号之间改为“顶点 v 做为终点与所有边的关联次数之和称为该顶点的入度”
 - 第 2 个句号和第 7 个逗号之间改为“顶点 v 做为始点与所有边的关联次数之和称为该顶点的出度”
- (图的) 最大度 , 最小度 , 最大入度 , 最小入度 , 最大出度 , 最小出度—— $\Delta(G)$, $\delta(G)$, $\Delta^+(G)$, $\delta^+(G)$, $\Delta^-(G)$, $\delta^-(G)$
 - 参见第 314 页定义 10.3
- 悬挂顶点 , 悬挂边 , 偶度顶点 , 奇度顶点
 - 度数为 1 的顶点称为悬挂顶点
 - 与悬挂顶点关联的边称为悬挂边
 - 度数为偶数的顶点称为偶度顶点
 - 度数为奇数的顶点称为奇度顶点



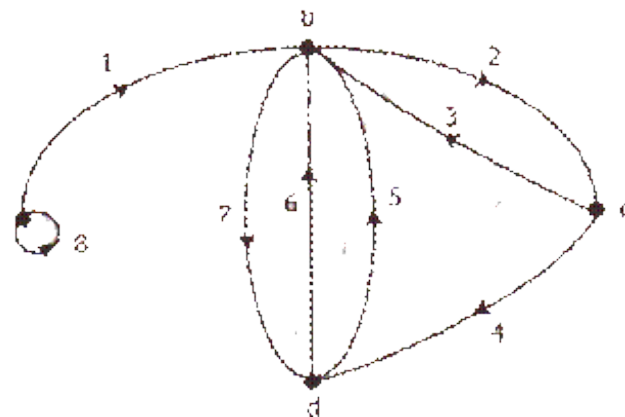
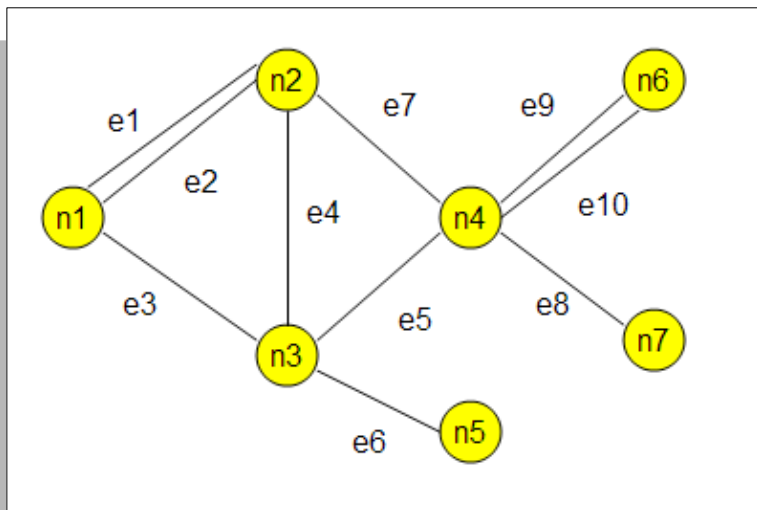
- 握手定理

- 第 314 页定理 10.1
- 第 315 页定理 10.3
- 推论：第 315 页定理 10.2





- (有向和无向的)多重图, (有向图和无向图中的)平行边, 重数, 简单图
 - 参见第 313 页 (6)
 - 有向图中的平行边指始点和终点相同的边
 - 例





- n 阶无向完全图 (n 阶完全图, K_n), n 阶有向完全图, n 阶竞赛图, k -正则图
 - 第 318 页定义 10.5 , 第 319 页定义 10.6
- 同构
 - 第 317 页定义 10.4
- 子图, 母图, 真子图, 生成子图, 顶点集导出的子图, 边集导出的子图
 - 第 320 页定义 10.7



- 补图，自补图

- 设 $G = \langle V, E \rangle$ 为无向简单图
- 令 $\bar{E} = (V \times V - E) - \{(v, v) \mid v \in V\}$
- 称 $\bar{G} = \langle V, \bar{E} \rangle$ 为 G 的补图
- 若 $\bar{G} \cong G$ ，则称 G 是自补图
- 例

- 删除（边，边集，顶点，顶点集），收缩，加新边

- $G-e, G-E', G-v, G-V', G/e, G+e$
- 删除顶点或顶点集的时候，同时要删除与被删除顶点相关联的边
- 边的收缩和加新边都可能产生环或平行边
- 例