第六章

1. 设总体 X 的一个样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n,n>1,$ 在三个统计量 $X_1,\dfrac{X_1+2X_2+3X_3}{6},\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ 中，可以作为总体期望 EX 的无偏估计量的统计量的个数是 ________.

2. 设总体 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，$\mu$ 与 σ^2 均未知，X_1,X_2,X_3 是一个样本，则非统计量的是 ________。

（A）$\dfrac{1}{3}\left(X_1+X_2+X_3\right)$　　（B）$\max\left\{X_1,X_2,X_3\right\}$

（C）$\min\left\{X_1,X_2,X_3\right\}$　　（D）$\dfrac{1}{\sigma^2}\left(X_1+X_2+X_3+\mu\right)$

3. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N\left(0,2^2\right)$ 的样本，$\overline{X},S$ 分别为样本均值与样本标准差，则 ________。

（A）$n\overline{X}\sim N\left(0,1\right)$　　（B）$\overline{X}\sim N\left(0,1\right)$

（C）$\dfrac{\sqrt{n}\cdot\overline{X}}{S}\sim t\left(n-1\right)$　　（D）$\dfrac{nS^2}{4}\sim\chi^2\left(n-1\right)$

第7，8章

1. 设 X 服从区间 $\left[0,\theta\right]$（$\theta>0$）上的均匀分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自该总体的样本，则 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=$ ________。

2.设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,n>1,$ 是来自正态总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的样本，$\hat{\boldsymbol{\sigma}}=\dfrac{1}{k}\sum_{i=1}^{n-1}\left|X_{i+1}-X_i\right|$ 为总体参数 $\boldsymbol{\sigma}$ 的无偏估计量，则 $k=$ ________.

3. 在假设检验中，记 H_1 为备择假设，则称 ________ 为犯第一类错误。

（A）H_1 真时接受 H_1　　（B）H_1 不真时接受 H_1

（C）H_1 真时拒绝 H_1　　（D）H_1 不真时拒绝 H_1

4. 设对正态总体的数学期望 μ 进行假设检验，如果在显著性水平 0.05 之下接受零假设 $H_0:\mu=\mu_0$，那么在显著性水平 0.01 下，下列结论成立的是 ________。

（A）必须接受 H_0　　（B）可能接受也可能拒绝 H_0

（C）必须拒绝 H_0　　（D）不接受也不拒绝 H_0

解答题

1. 设总体X分布在闭区间$\left[0,\theta\right]$（θ未知）之上，总体的概率密度函数正比于随机变量的值。

（1）求总体的概率密度函数；
（2）求未知参数θ的矩估计量；
（3）求未知参数θ的极大似然估计量。

2. 设总体X分布在区间$\left(0,1\right)$上，其概率密度为$f\left(x\right)=\left(\theta+1\right)x^{\theta},0<x<1$，其中$\theta$是未知参数，$\theta>-1$。求：$\theta$的矩估计量和最大似然估计量。

3. 设总体X的概率密度为 $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\theta^2} & 0<x\le\theta \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

其中，$\theta>0$ 是未知参数，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自X的一组样本，

求θ的矩估计量$\hat{\theta}_M$及极大似然估计量$\hat{\theta}_L$ 。

4.在某次实验中需要测量某物体的长度。一组测量结果如下（单位：毫米）

286　285　289　284　284　287　288　283　288。

物体长度服从正态分布，其均值和方差分别记作μ和σ^2。

问题：（1）求均值μ的置信区间，置信度为0.95；（2）是否可以认为物体的长度是282毫米？显著性水平$\alpha=0.05$；（3）是否可以认为物体的长度$\mu\le 282$毫米？显著性水平$\alpha=0.05$。

已知数据：$z_{0.05}=1.65$；$t_{0.05}\left(8\right)=1.860$；$t_{0.05}\left(9\right)=1.833$；$t_{0.05}\left(10\right)=1.813$；

$z_{0.025}=1.96$；$t_{0.025}\left(8\right)=2.306$；$t_{0.025}\left(9\right)=2.262$；$t_{0.025}\left(10\right)=2.228$；$\sqrt{4.5}=2.12$。

5. 在对成人骨密度/g/cm²的研究中，将成人中介入补充钙制剂者作为试验组，将采用传统膳食者作为对照组。其测定结果如下表所示，

分组编号	分组	样本容量	样本均值	样本标准差
第1组	传统膳食者	11	1．896	0．543
第2组	补充钙制剂者	12	2．054	0．325

若假设两组成人的骨密度都服从正态分布，（显著性水平$\alpha=0.05$）

（1）求第1组成人的平均骨密度μ的置信度为0.95的置信区间；

（2）若已知第 2 组成人的骨密度服从$N(\mu, 0.165^2)$，则可否认为$\mu = 1.51$？

可能用到的数据： $z_{0.05} = 1.65,\ z_{0.025} = 1.96,\ t_{0.05}(10) = 1.813,\ t_{0.025}(10) = 2.228$
$\sqrt{11} = 3.317,\ \sqrt{12} = 3.464$

6. 在某次实验中需要测量某物体的质量。一组测量结果如下（单位：g）

8.6 8.5 8.9 8.4 8.4 8.7 8.8 8.3 8.8。

均值和方差分别记作μ和σ^2。

问题：（1）求均值μ的置信区间，置信度为0.95；

（2）是否可以认为物体的质量是$8.2g$？显著性水平$\alpha = 0.05$；

（3）是否可以认为物体的质量$\mu \le 8.2$？显著性水平$\alpha = 0.05$。

已知数据：$z_{0.05} = 1.65$；$t_{0.05}(8) = 1.860$；$t_{0.05}(9) = 1.833$；$t_{0.05}(10) = 1.813$；

$z_{0.025} = 1.96$；$t_{0.025}(8) = 2.306$；$t_{0.025}(9) = 2.262$；$t_{0.025}(10) = 2.228$；$\sqrt{0.045} = 0.212$。

7. 某罐头厂生产的水果罐头重量和维生素 C 的含量长期以来分别服从正态分布$N(\mu_1, 0.4), N(\mu_2, \sigma_2^2)$，根据生产要求每个水果罐头的维生素 C 含量不能小于 4。现从该厂生产的一批产品中抽取 9 个罐头测得重量的样本方差为 0.64；维生素 C 含量平均为 3.4，方差为 0.81。

(1) 这批产品的重量的波动较以往是否有显著变化。(取显著性水平$\alpha = 0.1$)

(2) 是否可以认为这批产品的维生素 C 含量符合生产要求。(取显著性水平$\alpha = 0.1$)

(3) 求这批产品的平均维生素 C 含量的置信度为 0.9 的置信区间.

可能需要用到的数据：$\chi^2_{0.05}(8) = 15.507$，$\chi^2_{0.95}(8) = 2.733$，$t_{0.1}(8) = 1.3968$，

$t_{0.05}(8) = 1.8595$，

8. 证明题：

总体$X \sim U(\theta, 2\theta)$，即服从均匀分布，其中$\theta > 0$是未知参数，$X_1, \ldots, X_n$是取自该总体的

样本，$\overline{X}$为样本均值。

证明：$\hat{\theta} = \frac{2}{3}\overline{X}$是参数$\theta$的无偏估计和相合（一致）估计.

第6章参考答案1.3　2.D　3.C　　第7，8章参考答案

1.$2\overline{X}$　　2.$\dfrac{2(n-1)}{\sqrt{\pi}}$　$E(|x|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$　3. B　4.A

解答题参考答案

1. 【解】(1) 由题设 $f(x)=\begin{cases}kx, & 0\le x\le\theta\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，由于 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^{\theta}kxdx=\dfrac{k}{2}\theta^2$，

因此 $k=\dfrac{2}{\theta^2}$，概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta^2}x, & 0\le x\le\theta\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$。

(2) $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{\theta}x\cdot\dfrac{2}{\theta^2}xdx=\dfrac{2}{3}\theta$，令 $EX=\overline{X}$，$\dfrac{2}{3}\theta=\overline{X}$，

解得 $\hat{\theta}=\dfrac{3}{2}\overline{X}$。

(3) 似然函数为 $L(\theta)=\dfrac{2^n}{\theta^{2n}}\prod_{i=1}^{n}x_i, 0\le x_1,x_2,\cdots,x_n\le\theta$

可见当 $\theta=\max\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}$ 时，L 取得最大值，因此极大似然估计量 $\hat{\theta}=\max\{X_i\}$。

2.【解】由于 $EX=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}dx=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$，令 $\dfrac{\theta+1}{\theta+2}=\overline{X}$，解得 $\overline{\theta}=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$，所以 θ 的

矩估计量为 $\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$。

记似然函数为 $L=\prod_{k=1}^{n}(\theta+1)x_k^{\theta}=(\theta+1)^n\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^{\theta}$，则 $\ln L=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{k=1}^{n}\ln x_k$，

令 $\dfrac{d}{d\theta}\ln L=\dfrac{n}{\theta+1}+\sum_{k=1}^{n}\ln x_k=0$，解得 $\overline{\theta}=-\dfrac{n}{\sum_{k=1}^{n}\ln x_k}-1$，

所以，θ 的极大似然估计量为 $-\dfrac{n}{\sum_{k=1}^{n}\ln X_k}-1$。

3.解：(1)　$E(X)=\int_0^{\theta}x\cdot\dfrac{2x}{\theta^2}dx=\dfrac{2}{3\theta^2}x^3\Big|_0^{\theta}=\dfrac{2\theta}{3}$，$E(X)=\overline{X}$

因此得矩估计量：　$\hat{\theta}_M=\dfrac{3}{2}\overline{X}$.

（2） 作似然函数：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\varphi(x_i)=\dfrac{2^n\prod_{i=1}^{n}x_i}{\theta^{2n}}$， $\boldsymbol{0<x_1,x_2,\cdots,x_n\le\theta}$

$$\ln L(\theta)=n\ln 2+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-2n\ln\theta,$$

$$\frac{d\ln L}{d\theta}=-\frac{2n}{\theta}<0,$$

按照实际意义取极大似然估计， 故得极大似然估计值：$\boldsymbol{\hat{\theta}_L=\max_{1\le i\le n}\{x_i\}}$

极大似然估计量：$\boldsymbol{\hat{\theta}_L=\max_{1\le i\le n}\{X_i\}}$

4.解：构造$t-$统计量$t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/3}$，则$t\sim t(8)$。简单计算得到$\overline{X}=286$， $S^2=4.5$。

（1）置信度为0.95，则$t_{0.025}(8)=2.306$，置信区间为$\left(\overline{X}\pm\dfrac{S}{3}t_{0.025}(8)\right)=(284.37,287.6)$。

（2）作双边检验$H_0:\mu=282,H_1:\mu\ne282$，拒绝域为$|t|=\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/3}\right|>t_{0.025}(8)=2.306$，

本题$|t|=5.66>2.306$，因此不接受零假设H_0，不能认为物体的长度是$\mu_0=282$毫米。

（3）作单边检验$H_0:\mu\le282,H_1:\mu>282$，拒绝域为$t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/3}>t_{0.05}(8)=1.860$，

本题$t=5.66>1.860$，因此拒绝原假设H_0，认为物体的长度$\mu>282$毫米。

5.解：已知 $n_1=11$，$\bar{x}=1.896$，$s_1^*=0.543$； $n_2=12$，$\bar{y}=2.054$，$s_2^*=0.325$；

（1） 因为σ^2未知，统计量

$$\frac{\boldsymbol{\bar{X}-\mu}}{\boldsymbol{S}/\sqrt{\boldsymbol{n}}}\sim \boldsymbol{t(n-1)}$$

所以第 1 组成人的平均骨密度μ的置信度为0.95的置信区间为：

$$(\overline{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}})$$

经计算，$t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\dfrac{S}{\sqrt{n}}=2.228\cdot\dfrac{0.543}{3.317}=0.365$，

所以得第 1 组成人的平均骨密度 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为：

$$(1.896-0.365,\ 1.896+0.365)=(1.531,\ 2.261)$$

（2）检验假设　$H_0:\mu=1.51$；$H_1:\mu\neq 1.51$

因为 σ^2 已知，利用 U 检验，其拒绝域为：$\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|>z_{\alpha/2}$，

经计算，$\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=\left|\dfrac{2.054-1.51}{0.165/3.464}\right|=11.42>1.96$

因此拒绝 H_0，即不可认为第 2 组成人的平均骨密度骨密度为 $\mu=1.51$。

6.【解】构造 $t-$统计量 $\mathrm{T}=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/3}$，则 $\mathrm{T}\sim t(8)$。简单计算得到 $\overline{X}=8.6$，$S^2=0.045$。

（1）置信度为 0.95，则 $t_{0.025}(8)=2.306$，

置信区间为 $\left(\overline{X}\pm\dfrac{S}{3}t_{0.025}(8)\right)=\left(8.6\pm\dfrac{0.212}{3}\times 2.306\right)=(8.437,8.763)$。

（2）作双边检验 $H_0:\mu=8.2, H_1:\mu\neq 8.2$，拒绝域为 $|T|=\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/3}\right|>t_{0.025}(8)=2.306$，

本题 $|\mathrm{T}|=\left|\dfrac{8.6-8.2}{0.212/3}\right|=5.66>2.306$，因此拒绝原假设 H_0，不能认为物体的质量是 $8.2g$。

（3）作单边检验 $H_0:\mu\leq 8.2, H_1:\mu>8.2$，（1 分）拒绝域为 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/3}>t_{0.05}(8)=1.860$，

本题 $t=\dfrac{8.6-8.2}{0.212/3}=5.66>1.860$，因此拒绝原假设 H_0，认为物体的质量 $\mu>8.2$。

7【解】

(1) $H_0:\sigma_1^{\ 2}=0.4=\sigma_0^2, H_1:\sigma_1^{\ 2}\neq 0.4$

选择检验统计量为 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^{\ 2}}$

拒绝域 $C=(0,\chi^2_{0.95}(8))\cup(\chi^2_{0.05}(8),+\infty)=(0,2.733)\cup(15.507,+\infty)$

计算得 $\chi^2=\dfrac{8\times 0.64}{0.4}=12.8\notin C$，

因此可以认为这批产品的重量的波动较以往没有显著性变化.

(2) $H_0:\mu_2 \ge 4=\mu_0, H_1:\mu_2<4$

选择检验统计量为$T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$，

拒绝域为$C=(-\infty,-t_{0.1}(8))=(-\infty,-1.3968)$

计算得$t=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}=\dfrac{3.4-4}{\frac{\sqrt{0.81}}{\sqrt{9}}}=-2\in C$

因此不能认为这批产品的维生素 C 含量符合生产要求。

(3) $\alpha=0.1$，$n=9, s^2=0.81, \overline{x}=3.4$

所求置信区间为

$$(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))=(3.4-\frac{\sqrt{0.81}}{\sqrt{9}}t_{0.05}(8),3.4+\frac{\sqrt{0.81}}{\sqrt{9}}t_{0.05}(8))$$ 2 分

$=(3.4-0.3\times1.8595,3.4+0.3\times1.8595)\approx(2.84,3.96)$ 2 分

8.证明：

（**1**） 因为 $X\sim U(\theta,2\theta)$

所以有：$E(X)=\dfrac{\theta+2\theta}{2}=\dfrac{3}{2}\theta$，

而 $E(\hat{\theta})=E\left(\dfrac{2}{3}\overline{X}\right)=\dfrac{2}{3}E(\overline{X})=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3\theta}{2}=\theta$

所以 $\hat{\theta}$ 是θ的无偏估计。

（**2**）因 $D(X)=\dfrac{(2\theta-\theta)^2}{12}=\dfrac{1}{12}\theta^2$

$$D(\hat{\theta})=\frac{4}{9}D(\overline{X})=\frac{4}{9n}D(X)=\frac{4\theta^2}{9\times12n}=\frac{\theta^2}{27n}$$

且由切比雪夫不等式得： $P(\left|\hat{\theta}-\theta\right|<\varepsilon)\ge1-\dfrac{1}{\varepsilon^2}\dfrac{\theta^2}{27n}$ ， $\lim\limits_{n\to\infty}P(\left|\hat{\theta}-\theta\right|<\varepsilon)=1$

所以$\hat{\theta}$是θ的相合估计。