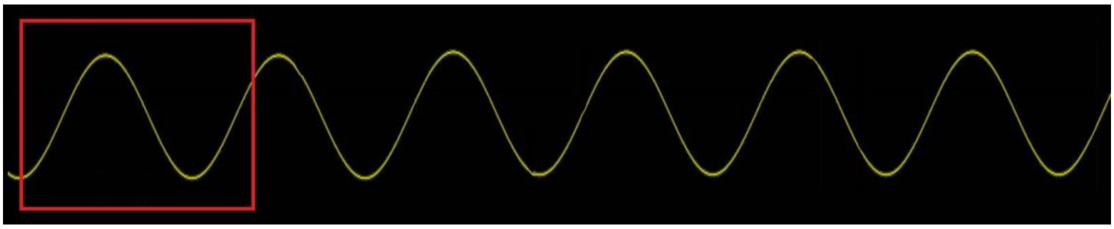
实验三《一阶电路过渡过程的研究》预习讲义

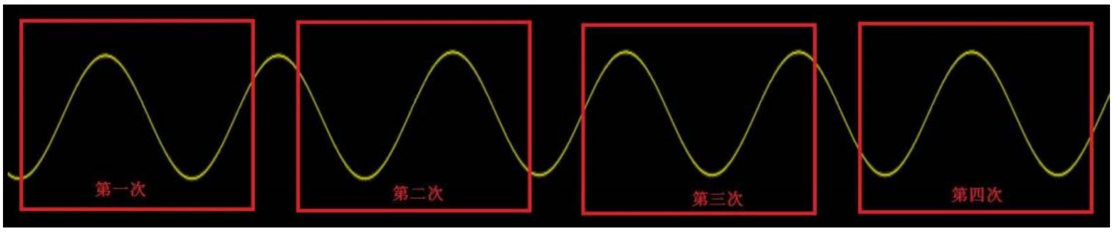
一、示波器是如何采集并显示波形的

示波器是电子工程师的眼睛，利用示波器，我们可以细致入微的观察到波形的细节，判断电路是否正常工作，这在电路设计和调试过程中起到无可替代的作用。在上节课我们已经学习了示波器的基本操作，学会了如何使用示波器来观察基本的正弦波、方波等周期性信号，并学会了读取波形参数（没学会？不要紧，本次实验一开始会出题考大家，能让大家学会的）。在这节课，我们要学习如何用示波器来观察一次性的、非周期性的信号波形。

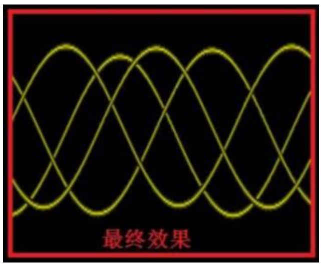
要让示波器能够捕捉到非周期性信号，就需要首先了解示波器内部是如何采集并显示波形的。下面是某信号发生器产生的正弦波，只要信号发生器一直开启没有坏掉，该正弦波就会一直产生，直到天荒地老海枯石烂人类灭绝。但是示波器屏幕的长度是有限的，只能采集其中一小部分的波形，比如只能采集下图中红框这段时间内的波形。



正常情况下，示波器会不断的采集，假如它连续采集四次的波形分别如下图所示：

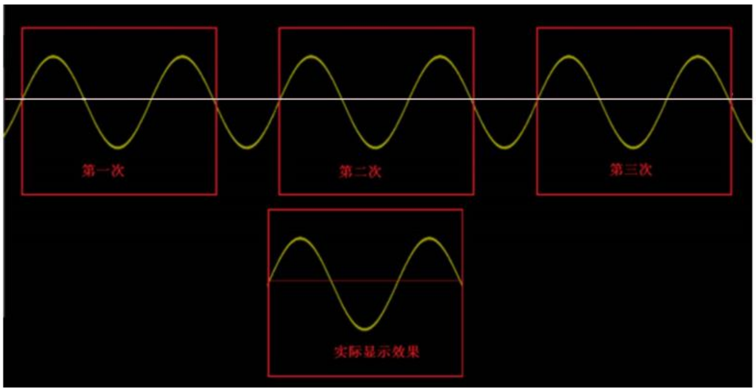


每次采集完之后都会立刻显示在屏幕上，那么这四次采集结束后屏幕显示的波形将会如下：



看到没，波形是乱的，因为示波器每次采集到的波形没有对齐，所以显示出来的相互叠加，造成了波形的混乱和不稳定。这就是不会使用示波器的小白同学经常看到的波形。

作为小白同学的你，面对这样的波形很慌是不是？不要紧，我们来看如何让示波器实现波形的对齐采集。如下图所示，如果我们不是让示波器自由的在任意时刻进行波形采集，而是设定一条穿过正弦波的水平直线（即一个固定的电压），规定示波器只有在每次正弦波向上穿过这条直线的时刻才开始采集，那么就可以保证每次采集到的波形都是对齐的，叠加在屏幕上就是稳定的波形，如下图所示：



触发电平

示波器内部都有专门的电路来检测波形是否向上穿过了这条直线（即检测波形电压有没有超过这个固定电压），这个电路就如同潜伏在暗处的职业狙击手，一旦发现目标穿过瞄准镜的十字线，就立刻眼疾手快、扣动扳机、一枪爆头，整个过程干净利落毫不拖泥带水。这个过程，我们称之为“触发”，英文名是“Trigger”，这个单词另外的意思是“枪的扳机”，所以触发电路就是示波器的扳机，那条水平直线就是示波器的瞄准镜，被称为“触发电平”，我们上节课学过，要将波形保持稳定，需要将触发电平调节在波形的最高电压与最低电压之间，就是要让波形能够穿过触发电平。波形穿过触发电平被称为“产生触发事件”或者“产生触发信号”。一旦产生了触发信号，示波器会立刻开始波形采集，直到采集完一整个屏幕的波形，才停止采集。

触发事件可以设定为波形在向上穿过触发电平时产生之外，还可以设定为向下穿过触发电平时产生，这两种设定分别被称为“上升沿触发”和“下降沿触发”，还可以设定上升沿和下降沿都触发，被称为“交替触发”。示波器有两个通道，可以设定为让通道 1 的波形来产生触发事件，也可以设定用通道 2 的波形来产生触发事件，这种选择就称为“触发源”的选择。触发源除了可以选择为通道 1 或者通道 2，还可以选择为使用外部信号等其他触发源。但是，无论触发源选择的是谁，一旦产生触发事件，示波器会对两个通道同时进行采集（除非通道关闭了）。

上面的触发事件是波形向上或者向下穿过某固定电压时产生的，这种触发类型称为“边沿触发”。除了边沿触发之外，一般的示波器还支持其他触发类型，我们在实验中会具体看到。

在上面的例子中，示波器在没有收到触发信号时就一直等着不采集，一旦出现触发信号，就采集一次并将波形显示在屏幕上，然后停止采集，屏幕上的波形保持不变，并继续等待下一次触发信号，等到下一次出现触发信号时再次采集并更新屏幕显示。这就是狙击手正常的狙击方式，因此将这种触发方式称为“正常触发”，简单的说这种方式就是“不触发不采集，每次触发每次采集”。

除了这种触发方式之外，还可以设定在没有触发事件时示波器并不是一直等着，而是不再受触发电路的控制，以一定的时间间隔定时采集波形并显示在屏幕上（就像狙击手等了半天没发现目标，就随便放枪，看碰运气能不能打到敌人，专业的狙击手当然不会这么做），而一旦有了触发信号，就再由触发信号来控制采集，示波器会在这两种状态下自动切换，这种触发方式被称为“自动触发”，简单的说这种方式就是“不触发也采集，每次触发每次采集”。

还有第三种触发方式，当没有触发事件产生时，示波器一直等着不采集，一旦出现触发信号，示波器就立刻采集一屏波形显示出来，之后示波器就歇着不再采集了，即使出现了新的触发信号也不会再次采集，屏幕上的波形也会被冻结住不再更新，这种触发方式被称为“单次触发”，简单地说是“不触发不采集，触发一次停止采集”，就像狙击手已经将目标爆头，任务已经完成，后面无论再有没有敌人出现，都不会再开枪了。

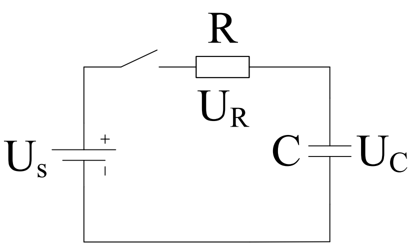
自动触发方式是最常用的模式，也是示波器的默认触发方式。在这种方式下即使触发参数设置得不对、无法产生触发信号，屏幕上仍然可以看到波形在跳动，虽然波形不稳定，但此时可以根据波形跳动的情况，来判断触发电路哪里调节得不对，然后重新调整，使波形稳定。如果在“正常触发”的方式下触发参数设置得不对，示波器就会一直傻傻的等待，屏幕上要么黑屏要么有波形但是久久不更新，让人着急心慌，不知道该怎么调整，此时就应该切换到自动触发方式。所以当我们面对一个神秘信号时，就应该选用“自动模式”，可以保证无论触发设置是否正确都有波形显示在屏幕上，尽管波形不一定稳定，但是我们可以进一步调节触发参数来将波形稳定。

对于周期性信号，只要触发电平设置得合适，自动模式和正常模式都可以将信号正常稳定的显示出来。而对于非周期信号，比如一个脉冲只出现一次就永远消失，如果采用自动触发就无法捕捉到该信号（实际上能捕捉到，但是很快会被后面的无用波形覆盖掉），此时应该采用正常或者单次模式。

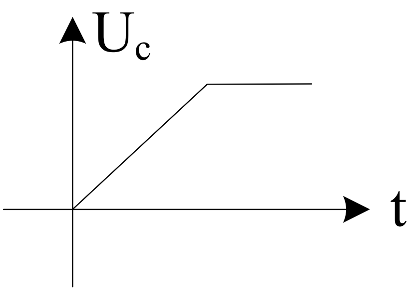
二、一阶电路

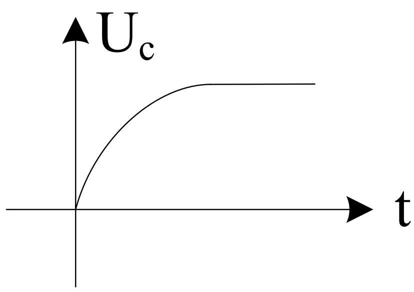
本次实验我们使用示波器来研究一阶电路的过渡过程。所谓的一阶电路，简单地说就是 RC 或者 RL 串联电路，因为只有一个储能元件 C 或者 L，对应的微分方程是一阶的，所以被称为“一阶电路”。我知道大部分同学已经忘记了，所以在这里再复习一遍。

对于一阶电路，分为零状态响应、零输入响应、全响应三种。不懂的小白同学肯定会被唬住。其实很简单，如下图所示，对于 RC 电路来说，零状态响应就是电容上的电压从为零的状态上升到最终稳定电压的充电过程。初始时电容 C 上的电压为零，在开关闭合的瞬间，电流从电源正极流出给电容 C 充电，C 上的电压从零开始上升，当上升到与电源电压一样时，充电结束，电路进入稳态。在这个电路中，一开始电容 C 上电压为 0，认为是“零状态”，所以就把 RC 电路的充电过程称为“零状态响应”，以让别人听不懂。



那么，现在的问题是，电容 C 上的电压是以什么样的规律上升的呢？是直线上升的，还是弧线上升的呢？





为了研究这个问题，首先进行下简单分析，对于电容，其电压与电流的关系是：

$$U_C = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C}\int i\,dt$$

如果电压 U 要直线上升，那么电流 i 要为恒定值，这样$\int idt = i\int \mathrm{d}t = it$，于是有

$$U_C = \frac{i}{C}t$$

但是这里回路电流 i 是常量吗？电流 i 也流过电阻 R，当电容 C 上的电压升高时，电阻 R 两端电压会减少，从而电流 i 在减少，因此电容 C 上的电压肯定不是直线上升了。为了研究电容 C 两端电压的变化规律，老老实实的求解微分方程吧，一方面有：

$$U_C = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C}\int idt$$

对两端求导，可得：

$$i = CU_C'$$

另一方面根据基尔霍夫电压定理有：

$$U_s = U_c + U_R = U_c + iR = U_C + RCU_C'$$

从而得到微分方程：

$$U_C + RCU_C' = U_S$$

这是个常系数非齐次微分方程，按照高等数学里的解法，要先求出对应的齐次方程$U_C + RCU_C' = 0$的通解，再求出非齐次方程的特解，然后两者相加，得到非齐次方程的通解。

我们先求齐次方程的通解，即：

$$U_C + RCU_C' = 0$$

按照高数里的解法，可以使用分离变量法，太复杂了，其实观察上面的等式，有 $U_C = -RCU_C'$，U_c和其导数U_C'只相差一个常系数$-RC$，什么函数的导数和其自身只相差一个常系数呢？貌似只有指数函数，于是我们假定U_C就是指数函数，其表达式假设为：

$$U_C = Ae^{Bt}$$

代入上面的式子，可以得到：

$$Ae^{Bt} + RCABe^{Bt} = 0$$

两边都消掉Ae^{Bt}，可以得到：

$$1 + RCB = 0$$

因此可以得到：

$$B = -\frac{1}{RC}$$

于是有：

$$U_C = Ae^{-\frac{1}{RC}t}$$

这就是齐次方程的通解，其中还有个待定系数 A 在非齐次方程的解中来确定。

根据高数里的解法，还要求出非齐次方程的一个特解才行，可以用常数变易法、待定系数法之类的，也都太复杂了，其实观察一下非齐次方程：

$$U_C + RCU_C' = U_S$$

由于知道电容 C 上的电压U_C最后肯定能充电到电源电压U_S，因此U_S就是该非齐次方程的一个特解（可以代入到上式验证），那么非齐次方程的通解就为：

$$U_C = Ae^{-\frac{1}{RC}t} + U_S$$

由于电容 C 初始时两端电压为$U_C = 0$，于是当$t = 0$时，有：

$$0 = Ae^0 + U_S = A + U_S$$

因此有：

$$A = -U_S$$

于是最终解为：

$$U_C = -U_S e^{-\frac{1}{RC}t} + U_S = U_S\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$$

为了显得这个式子更高大上更让人看不懂一点，令：

$$\tau = RC$$

那么有：

$$U_C = U_S\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right) = U_S\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)$$

其中，将$\tau = RC$命名为时间常数，以显得更加专业，不明觉厉。

我们来观察一下这个式子，在该式子中，在初始时刻时，将$t = 0$代入上式，得到：

$$U_C = U_S\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right) = U_S\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right) = U_S(1 - e^0) = 0$$

可见初始时刻电容两端电压就是为 0。

然后当$t \to \infty$时，$e^{-\frac{1}{\tau}t} \to 0$，因此$U_C \to U_S$，即电容两端的电压最终会无限接近于电源电压$U_S$。

当t从 0 到∞时，电容电压U_C的变化曲线是怎样的呢？自行绘制一下。

很显然，在 RC 电路中，R 和 C 越大，充放电速度越慢。但是如何来衡量充电速度呢？说到这里，其实时间常数这个概念还是有用的，用它就可以衡量电容充放电的速度。$\tau = RC$，当 R 或者 C 越大，时间常数越大，充放电的时间越长，这是符合我们的感性认知的。对于上面的式子，在$t = \tau$时刻，电容两端电压为：

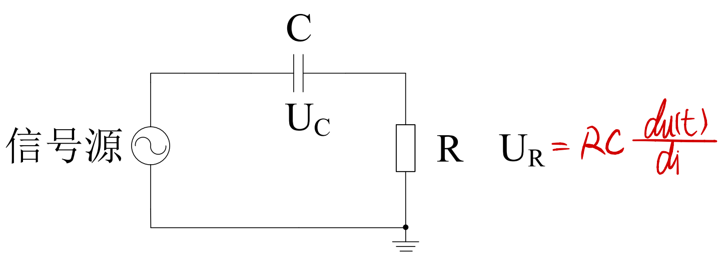
$$U_C = U_S(1 - e^{-1}) = 0.632U_S$$

可见，τ越大，电压上升到$0.632U_S$的时间就越慢。

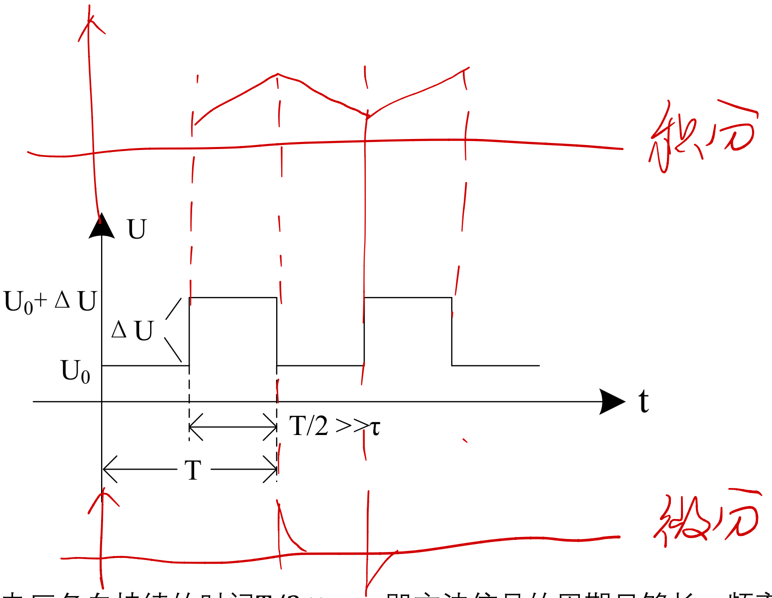
零输入响应与零状态响应相反，研究的是在没有外部电源充电的情况下电容的放电过程，自己推导一下吧，孩纸们，前面有坑在等你们。

三、微分电路 (输出电路是输入信号的微分)

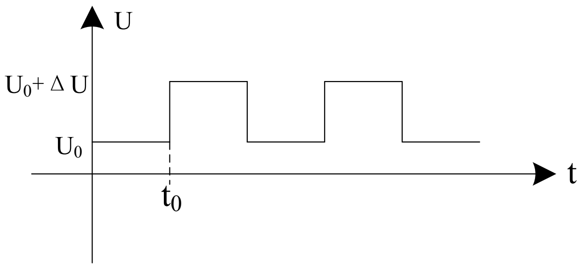
还是 RC 串联电路，如下图所示：



上面电路中信号源发出的是方波，但是不一定是正负对称的方波，里面可能掺杂有直流分量，假定其低电压为U_0，高电压为$(U_0 + \Delta U)$，占空比为 50%，周期为T，如下图所示：



假定其中高低电压各自持续的时间$T/2 \gg \tau$，即方波信号的周期足够长、频率足够慢，那么在方波的高低电压段，都会对电容进行完整的充放电。现在的问题是，电阻上的波形是怎样的？我们先来分析方波从低电压跳变到高电压这个瞬间电阻上的波形变化，以下图中的t_0为起始时刻：



在t_0之前，方波电压为U_0。我们之前说过，方波的频率足够慢，在高低电压都能够对电容进行完整的充放电，所以在t_0之前，电容已经充放电完毕，电容上的电压就等于U_0，即电容电压初始值是U_0。在t_0之后，方波电压从U_0跳变到$(U_0 + \Delta U)$，相当于用电压为$(U_0 + \Delta U)$的电源通过 R 给 C 充电，于是电容上的电压是从U_0开始上升，直到$(U_0 + \Delta U)$保持稳态。在这个过程中，电容初始状态不为零，所以不是“零状态响应”，同时又有外部电压在充电，不是电容在自由的放电，所以也不是“零输入响应”，那么就把这个过程称为“全响应”。

无论怎么称呼它，都同样需要解微分方程，现在的方程变为：

$$U_C + RCU_C' = U_0 + \Delta U$$

同样的解得齐次方程的通解为：

$$U_C = Ae^{-\frac{1}{RC}t}$$

而非齐次方程特解就是电容 C 上的最终的充电电压 $(U_0 + \Delta U)$，于是其通解为：

$$U_C = Ae^{-\frac{1}{RC}t} + (U_0 + \Delta U)$$

将$t = 0, U_c = U_0$代入上式：

$$A + (U_0 + \Delta U) = U_0$$

因此有：

$$A = -\Delta U$$

因此U_C的表达式为：

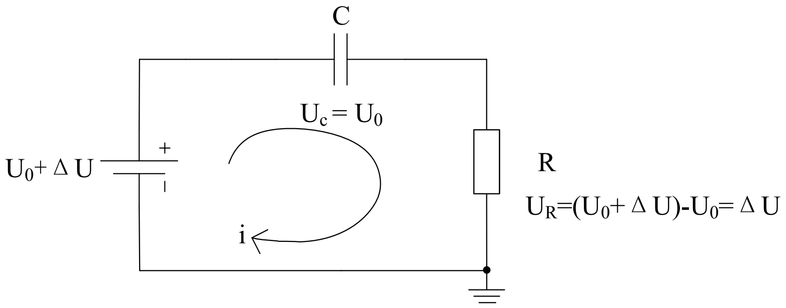
$$U_C = -\Delta U e^{-\frac{1}{RC}t} + (U_0 + \Delta U)$$

而我们现在想知道的是电阻 R 上的波形，根据上面的式子可以得到：

$$U_R = (U_0 + \Delta U) - U_C = \Delta U e^{-\frac{1}{RC}t}$$

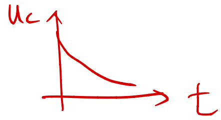
现在大家自己绘制一下该电压变化的波形。

将$t = 0$代入上式可以得到，在$t = 0$的起始时刻电阻上的电压为ΔU。我们再来从定性的角度分析一下，如下图所示，在起始时刻，方波电压为U_0，电容 C 已经处于稳态，电压也为U_0。然后方波电压从U_0跳变到$(U_0 + \Delta U)$，由于电容 C 上的电压不能突变，仍然保持为U_0，因此电阻上的电压就为$U_R = (U_0 + \Delta U) - U_0 = \Delta U$了，即电阻上此刻的电压值为方波高低电压段的电压差，与理论求解值一致。此时电阻中会产生电流，该电流对电容进行充电，使电容上的电压开始上升，直到等于电源电压$(U_0 + \Delta U)$，此时电路中的电流降为零，电阻上的电压也降为零了。



由于方波电压在跳变时（无论是上跳还是下跳），电阻上的电压瞬时值为方波电压跳变的差值，之后便以指数规律下降到零，在后面方波电压不变的时间内输出电压为零，因此该电路能够提取出方波的电压瞬间跳变值，所以把这个电路称为"微分电路"，主要用途就是将方波跳变转化为脉冲给电路其他部分使用。

现在大家自行分析一下，当方波从高电压$(U_0 + \Delta U)$跳变到低电压U_0时电阻上的电压表达式，并绘制出波形。

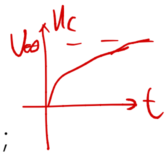


τ表示Uc从初始值下降到max的36.8%的t

预习思考题：

$U_c = U(0_+) e^{-\frac{t}{RC}}$

1. 推导 RC 电路零输入响应中电容电压的表达式，并绘制其波形；
2. 绘制 RC 电路零状态响应的电容电压波形；$U_c(t) = U(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$
3. 绘制微分电路中方波电压从低到高以及从高到低跳变时的输出电压波形；
4. 电容单位中，F、uF、nF、pF 之间的数量关系是多少。



τ为Uc从初始值上升到稳态值的63.2%的t

10^{-6} 10^{-9} 10^{-12}

$$U_c(t) = 3(1 - e^{-\frac{100\times10^{-3}}{10000\times0.01\times10^{-6}}})$$

$2\times10^{-5} =$