第八章 假设检验

第八章 假设检验

第一节 假设检验的基本概念

- 假设检验的基本思想和依据
- 假设检验的两类错误
- 假设检验的具体做法
- 假设检验的步骤

一. 假设检验的基本思想

设总体 X 的分布中含有未知参数 θ

检验假设: H_0: $\theta=\theta_0$ 其中 θ_0 是某个已知常数

抽取容量为 n 的样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$,

得到的样本值: $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

构造统计量：$g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$,

得到观测值：$g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

对假设 H_0 进行检验，判断 H_0 是否成立，

从而确定是接受 H_0 还是拒绝 H_0

二. 假设检验的两类错误

1. 第一类错误 (弃真): 如果 H_0 是正确的，但却被错误地否定了。

2. 第二类错误 (取伪): 如果 H_0 是不正确的，但却被错误地接受了。

若设 犯两类错误的概率分别为:

$$P\{\text{拒绝} H_0 \mid H_0 \text{为真}\} = \alpha$$

$$P\{\text{接受} H_0 \mid H_0 \text{不真}\} = \beta$$

则显著性水平 α 为犯第一类错误的概率。

注： 两类错误是互相关联的， 当样本容量 n 固定时， 一类错误概率的减少必导致另一类错误概率的增加。

要同时降低两类错误的概率 α, β，则需要增加样本容量 n

在实际问题中，通常的做法是：

先对犯第一类错误(弃真)的概率加以控制，再考虑使犯第二类错误(取伪)的概率尽可能的小。

引例 **饮料灌装质量抽检**

在正常情况下,饮料某车间使用灌装机生产的饮料容量服从$N(500,1)$，某天计量检验人员随机抽取10瓶，算得平均容量499.3毫升，问这天机器是否正常?

在实际问题中，往往把不轻易否定的命题作为原假设.

解：设：X——这天灌装的饮料容量

$X \sim N(\mu, 1)$ μ未知

$H_0: \mu = \mu_0 = 500$ 机器正常 称 H_0 为原假设(零假设),

$H_1: \mu \neq \mu_0$ 机器故障 称 H_1 为备择假设(对立假设).

用样本(值)回答： 接受 H_0,还是拒绝 H_0?

由偏差 $|\bar{X} - \mu_0|$ 来判断 H_0 是否成立.

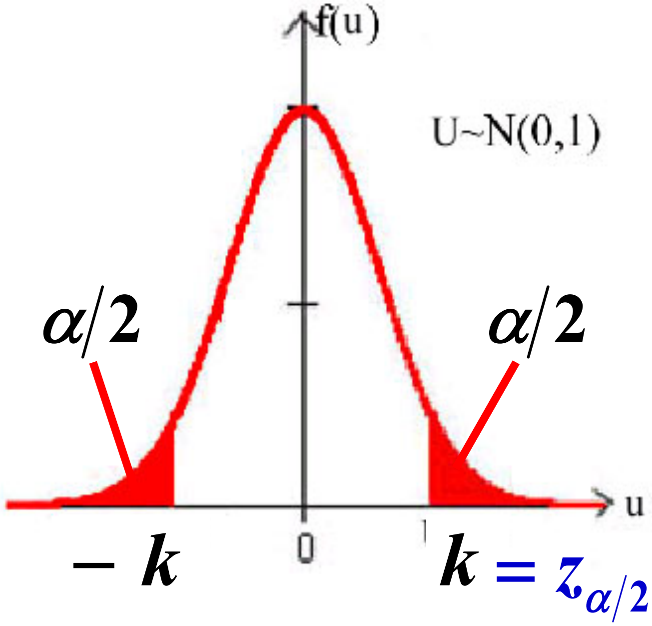
$|\bar{X} - \mu_0|$较小 ——认为 H_0 成立;

$|\bar{X} - \mu_0|$ 较大 ——认为 H_0 不成立

解决的方法：显著性水平 α 检验统计量为：

$$U=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)\ (H_0\text{成立})$$

若 $|U|=\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|>k$，则拒绝 H_0.



$$\alpha=P\{\text{拒绝}H_0|H_0\text{为真}\}$$

$$=P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|>k\right\}\quad\Rightarrow k=z_{\alpha/2}$$

故取拒绝域 C为： $|U|>z_{\alpha/2}$

即 $\left(-\infty,-z_{\frac{\alpha}{2}}\right)\cup\left(z_{\frac{\alpha}{2}},\infty\right)$

引例　　　　饮料灌装质量抽检

在正常情况下，饮料某车间使用灌装机生产的饮料容量服从$N(500,1)$，某天计量检验人员随机抽取10瓶，算得平均容量499.3毫升，问这天机器是否正常？给定 $\alpha=0.05$，

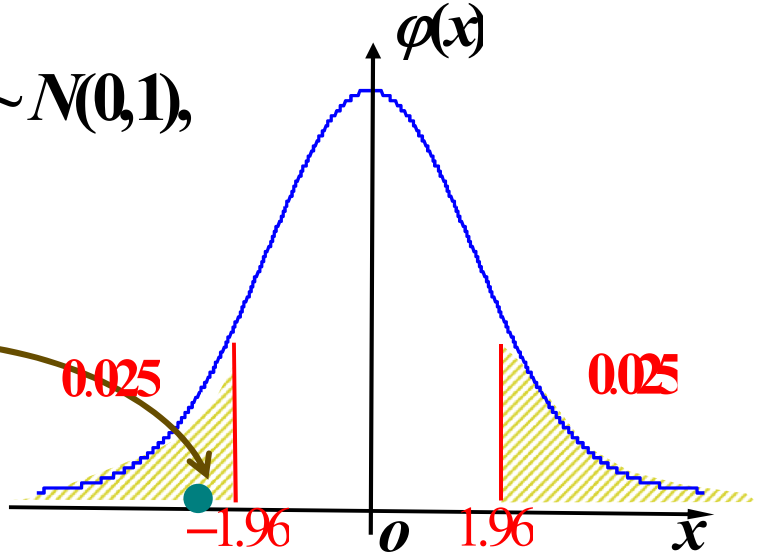
解：$H_0:\mu=\mu_0=500,\quad H_1:\mu\neq\mu_0$

检验统计量 $Z=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$　H_0真时，$Z\sim N(0,1)$，

H_0 的拒绝域

$$C:|Z|\geq z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96$$

$$Z=\frac{499.3-500}{1/\sqrt{10}}=-2.21\in C,$$



故拒绝 H_0，　即这天机器工作不正常.

例2. 设某异常区磁场强度 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 由以前观察知道 $\mu_0=56,\ \sigma_0=20$，现有一台新型号的仪器，用它对该区进行磁测，抽取了41个点，其样本均值 $\bar{x}=61.1$

问：此仪器测出的结果是否符合要求?

解：**第一步：**

提出假设：H_0： $\mu=\mu_0=56$ (符合要求)

H_1： $\mu\neq\mu_0=56$ (不符合要求)

第二步：

取检验统计量为：

$$U=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

第一步：提出假设：H_0： $\mu=\mu_0=56$ H_1： $\mu\neq\mu_0=56$

第二步：取检验统计量为： $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

第三步：给定显著性水平$\alpha=0.05$，求出拒绝域。

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|>k\right\}=\alpha \longrightarrow C:\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|>k=z_{\alpha/2}=1.96$$

查正态分布表：$k=z_{\frac{0.05}{2}}=z_{0.025}=1.96$ $(-\infty,-1.96)\cup(1.96,\infty)$

第四步：计算出统计量U的实测值：

$$u=\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{61.1-56}{20/\sqrt{41}}\right|=1.632<1.96$$

结论：这台仪器测出的结果是符合要求的。

故不拒绝H_0，即接受H_0

五. 假设检验的步骤

1. 根据实际问题要求，提出原假设H_0及备择假设H_1

2. 假设H_0为真时，确定检验统计量及其分布

3. 按 $P(\text{拒绝 } H_0 \mid H_0 \text{为真}) = \alpha$ ，求出拒绝域

4. 取样本，根据样本观察值确定接受H_0还是拒绝H_0

5. 给出结论

第八章 假设检验

第二节 单个正态总体的假设检验

- 单个正态总体均值的检验
- 单个正态总体方差的检验

设总体 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体X 的一个样本

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样本值

待作

1. σ^2 已知时，对 μ 的检验

2. σ^2 未知时，对 μ 的检验

3. 对 σ^2 的检验

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$\frac{(n-1) S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

一. 单个正态总体$N(\mu,\sigma^2)$均值μ的检验

1 σ^2已知，关于μ的检验（U 检验）

检验统计量 $U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$　　H_0真时，$U\sim N(0,1)$

H_0	H_1	C
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$ (双)	$\left(-\infty,-z_{\frac{\alpha}{2}}\right)\cup\left(z_{\frac{\alpha}{2}},+\infty\right)$
$\mu\le\mu_0$ $\mu=\mu_0$	$\mu>\mu_0$ (右)	$\left(z_\alpha,+\infty\right)$
$\mu\ge\mu_0$ $\mu=\mu_0$	$\mu<\mu_0$ (左)	$\left(-\infty,-z_\alpha\right)$

例1. 已知某钢铁厂的铁水含碳量在正常情况下服从正态分布 $N(4.55, 0.108^2)$，现又测了5 炉铁水，其含碳量分别为：4.28, 4.4, 4.42, 4.35, 4.37

问：当 σ^2 没有改变时，现在生产是否正常？ $(\alpha = 0.05)$

解： 5 炉铁水含碳量 $X \sim N(\mu, 0.108^2)$

假设：$H_0: \mu = \mu_0 = 4.55$，$H_1: \mu \neq \mu_0 = 4.55$ σ^2 已知，

取统计量：$U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ $\quad P\left\{\left|\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > k\right\} = \alpha$

拒绝域：$\left(-\infty, -z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(z_{\frac{\alpha}{2}}, +\infty\right)$ 即 $(-\infty, -1.96) \cup (1.96, +\infty)$

计算观察值：

$$\bar{x} = 4.364 \qquad \left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{4.364 - 4.55}{0.108/\sqrt{5}}\right| = 3.9 > 1.96$$

拒绝 H_0，可认为现在的生产是不正常的。

例2 在正常情况下，袋装糖的重量（公斤）服从 $N\left(0.5,\ 0.015^2\right)$. 某天随机抽取9袋糖，算得平均重量为 $\bar{x}=0.511$, 问这天机器是否正常? ($\alpha=0.05$)

解　这天袋装糖的重量 $X \sim N\left(\mu,\ 0.015^2\right)$

假设： $H_0:\mu=\mu_0=0.5 \qquad H_1:\mu\neq\mu_0$

取统计量

$$U=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

拒绝域： $\left|\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > z_{\alpha/2}=1.96$

即 $(-\infty,-1.96)\cup(1.96,+\infty)$

又 $n=9,\ \bar{x}=0.511,\ \sigma=0.015,\ \mu_0=0.5$

算得 $\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=2.2>1.96$ 故拒绝 H_0

即认为这天机器工作不正常.

例3 某编织物强力指标 X 的均值 $\mu_0 = 21$ 公斤。改进工艺后生产了一批编织物，今从中取 30 件，测得 $\bar{x} = 21.55$ 公斤。假设强力X 指标服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，且已知 $\sigma = 1.2$ 公斤

问：在显著性水平 $\alpha = 0.01$ 下，新生产编织物比过去的编织物强力是否有提高？

解：提出假设： $H_0 : \mu \le 21 \quad \Leftrightarrow \quad H_1 : \mu > 21$

取统计量： $U = \dfrac{\bar{X} - 21}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ $\quad z_{0.01} = 2.33$

拒绝域： $(z_\alpha, +\infty) = (2.33, +\infty)$ 或 $\dfrac{\bar{X} - 21}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha = 2.33$

计算观察值： $u = 2.51 > 2.33$

故拒绝H_0,认为新生产编织物比过去强力有提高。

2 σ^2未知时，对 μ 的检验—— t 检验法

检验统计量 $T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$　　H_0真时，$T\sim t(n-1)$

H_0	H_1	C
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$ (双)	$\left(-\infty,-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)\cup\left(t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),+\infty\right)$
$\mu\leq\mu_0$ $\mu=\mu_0$	$\mu>\mu_0$ (右)	$\left(t_\alpha(n-1),+\infty\right)$
$\mu\geq\mu_0$ $\mu=\mu_0$	$\mu<\mu_0$ (左)	$\left(-\infty,-t_\alpha(n-1)\right)$

例4 设某次考试成绩服从正态分布．现从中抽取36位考生成绩，算得平均成绩为66.5分，标准差为15分．问能否认为这次考试的平均成绩为70分？$(\alpha=0.05)$

解　总体X——这次考试成绩

$$X \sim N(\mu,\sigma^2) \qquad \sigma^2 \text{ 未知}$$

假设：　$H_0:\ \mu=\mu_0=70$　　$H_1:\ \mu\neq\mu_0=70$

检验统计量 $T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=\dfrac{\bar{X}-70}{S/6}\sim t(n-1)=t(35)$

拒绝域 $\left|\dfrac{\bar{X}-70}{S/6}\right|>t_{\alpha/2}(35)$

例4 设某次考试成绩服从正态分布. 现从中抽取36位考生成绩，算得平均成绩为66.5分，标准差为15分. 问能否认为这次考试的平均成绩为70分？$(\alpha = 0.05)$

解

H_0的拒绝域 $\because t_{\frac{\alpha}{2}}(35) = t_{0.025}(35) = 2.0301$

$$\left|\frac{\bar{X}-70}{S/6}\right| > t_{\alpha/2}(35)=2.0301$$ 或$C = (-\infty, -2.0301) \cup (2.0301, +\infty)$

计算观察值：

又 $\bar{x} = 66.5, \quad s = 15 \longrightarrow t = \left|\frac{\bar{x}-70}{s/6}\right| = 1.4 < 2.0301 \quad \notin C$

所以接受H_0，认为这次考试的平均成绩为70分.

例5 某库房要验收大批同类物质，根据以往的经验，这批物质每件的重量服从正态分布。按规定这批物质平均每件重量应为 100 公斤，今抽取10 件，测得其均值 $\bar{x}=99.6,\quad s^2=4.044$

问：能否接受这批物质？$(\alpha=0.05)$

解：这批物质每件重量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$

假设：$H_0:\mu=\mu_0=100,\quad H_1:\mu\neq\mu_0=100$ $\because$ σ^2 未知，

取统计量：$t=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

拒绝域：$\left|\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|>t_{\alpha/2}(n-1)=2.2622$

计算观察值：$\left|\dfrac{\bar{x}-100}{s/\sqrt{10}}\right|=\left|\dfrac{99.6-100}{\sqrt{4.044/10}}\right|=0.629\quad<2.2622$

$\therefore$ 接受H_0，即可认为该库房应接受这批物质。

③ 对 σ^2 的检验 —— χ^2 检验法

检验统计量 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$　H_0 真时，$\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$

H_0	H_1	C
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ (双)	$\left(0, \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) \cup \left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), +\infty\right)$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$ (右)	$\left(\chi^2_{\alpha}(n-1),\ +\infty\right)$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$ (左)	$\left(0,\ \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right)$

例6.某厂生产的钢丝质量一贯比较稳定，今从产品中随机抽取10 根, 检查其折断力,得数据如下:578，572，570，568, 572, 570，570，572, 590, 584 . 钢丝折断力服从$N(\mu,\sigma^2)$ 问:是否可接受钢丝折断力的方差为 64 $(\alpha=0.05)$

解：**提出假设：** $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2=64,\quad H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2=64$

取检验统计量： $\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$

拒绝域： $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ 或 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$

$$\chi^2_{\alpha/2}(9)=\chi^2_{0.025}=19.023\qquad\chi^2_{1-\alpha/2}(9)=\chi^2_{0.975}=2.7$$

$$\bar{x}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=574.6,\ (n-1)s^2=\sum_{i=1}^{10}\left(x_i-\bar{x}\right)^2=464.4$$

$$\chi^2(n-1)=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{464.4}{64}=7.26\qquad\because\ 2.7<7.26<19.023$$

接受H_0，即可认为钢丝的折断力的方差为 64

例7 某厂生产的某型号电池寿命X(小时)长期以来服从$N(\mu,5000)$. 现从一批这种电池中随机抽取26只,测出其寿命的样本方差 $s^2=9200$. 能否由此认为这种电池寿命的波动性较以往有显著变化? $(\alpha=0.02)$

解 这批电池的寿命. $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

提出假设: $H_0: \sigma^2=\sigma_0^2=5000$ $\quad H_1: \sigma^2\neq\sigma_0^2$

取检验统计量: $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\dfrac{25S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)=\chi^2(25)$

拒绝域: $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ 或 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$

$\because \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(25)=\chi^2_{0.01}(25)=44.314$ $\quad \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(25)=\chi^2_{0.99}(25)=11.524$

$\chi^2(n-1)=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=46>44.314$ 所以拒绝H_0,

认为波动性较以往有显著变化.

小结

总体X，$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1 X_2,\cdots,X_n$　$x_1 x_2,\cdots,x_n$

对μ,σ^2进行假设检验　　显著性水平α，

★	原假设H_0	备择假设H_1	检验统计量	★ 拒绝域
1) μ的检验 σ^2为已知	$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\left(-\infty,-z_{\alpha/2}\right)\cup\left(z_{\alpha/2},+\infty\right)$
	$\mu\le\mu_0$	$\mu>\mu_0$		$\left(z_\alpha,+\infty\right)$
	$\mu\ge\mu_0$	$\mu<\mu_0$		$\left(-\infty,-z_\alpha\right)$
2) μ的检验 σ^2为未知	$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$\left(-\infty,-t_{\alpha/2}(n-1)\right)\cup\left(t_{\alpha/2}(n-1),+\infty\right)$
	$\mu\le\mu_0$	$\mu>\mu_0$		$\left(t_\alpha(n-1),+\infty\right)$
	$\mu\ge\mu_0$	$\mu<\mu_0$		$\left(-\infty,-t_\alpha(n-1)\right)$
3) σ^2的检验	$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\left(0,\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right)\cup\left(\chi^2_{\alpha/2}(n-1),+\infty\right)$
	$\sigma^2\le\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$		$\left(\chi^2_\alpha(n-1),\ +\infty\right)$
	$\sigma^2\ge\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$\left(0,\ \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right)$