第三章 多维随机变量及其分布

第四节 两个随机变量的函数的分布

一、两个随机变量和的分布

二、$M=\max(X,Y)$及$N=\min(X,Y)$的分布

- **(两个随机变量商的分布---了解)**

研究的问题：在一维随机变量中讨论了：已知随机变量 X 及它的分布，如何求其函数 $Y = g(X)$ 的分布。$f_Y(y) = F_Y'(y)$

在二维随机变量中将讨论：已知随机变量(X,Y) 及其联合分布，如何求出它们的函数 $Z=g(X,Y)$ 的分布。$f_Z(z) = F_Z'(z)$

一、离散型随机变量和及最值的分布

二、连续型随机变量和的分布（卷积公式和分布函数法）

三、连续性随机变量 $M = \max(X, Y)$ $N = \min(X, Y)$ 的分布

一、离散型随机变量和及最值的分布

例1 设两个独立的随机变量X与Y的分布律为

X	1	3
P_i	0.3	0.7

Y	2	4
P_j	0.6	0.4

求$Z=X+Y$的分布律

解：因为X,Y相互独立 $P_{ij}=P_i\,P_j$,联合分布为

$X \backslash Y$	2	4	
1	0.18	0.12	0.3
3	0.42	0.28	0.7
	0.6	0.4	

(X,Y)	(1,2)	(1,4)	(3,2)	(3,4)
$Z=X+Y$	3	5	5	7
P_{ij}	0.18	0.12	0.42	0.28

例2

$X \backslash Y$	1	2
0	0.2	0.3
1	0.4	0.1

$\Rightarrow$ $X+Y$, XY, $\max(X, Y)$ 的分布律

解

(X,Y)	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,1)$	$(1,2)$
$X+Y$	1	2	2	3
XY	0	0	1	2
$\min(X,Y)$	0	0	1	1
$\max(X,Y)$	1	2	1	2
P	0.2	0.3	0.4	0.1

$$X+Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$XY \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.5 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix}$$

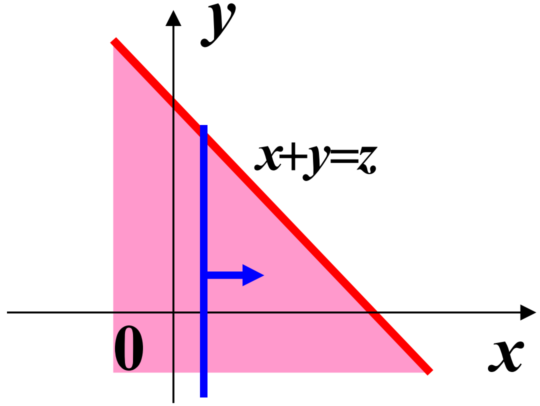
$\Rightarrow$

$$\min(X,Y) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\max(X,Y) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

二、连续性$Z=X+Y$ 的分布

1. 卷积公式法



设 (X, Y)的概率密度为 $f(x, y)$.

则 $Z=X+Y$ 的分布函数为:

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z} f_Z(z)\,dz = P(Z\le z) = P(X+Y\le z)$$

$$=\iint_{x+y\le z} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\,dy$$

固定 z 和 x，对内层积分作变量替换 $y=z-x$

交换积分次序

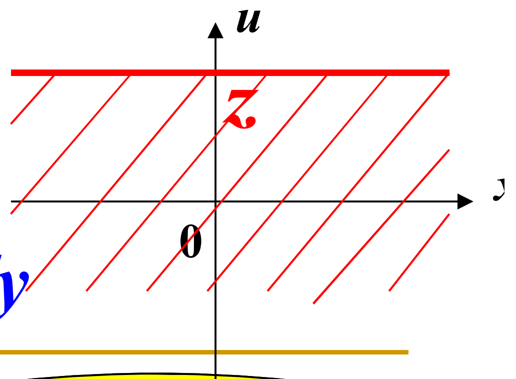
$$=\int_{-\infty}^{+\infty} dx\int_{-\infty}^{z} f(x,z-x)\,dz$$

y	$-\infty$	$z-x$
$z=y+x$	$-\infty$	z

$$=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx\right]dz$$

$$F_Z'(z)=f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx$$

由X和Y的对称性 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\,dy$



$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy$$

注： 当 X, Y 相互独立时，则由

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)\Rightarrow f(x,z-x)=f_X(x)\cdot f_Y(z-x)$$

有： $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\cdot f_Y(z-x)dx$

或 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)\cdot f_Y(y)\,dy$

称为卷积公式

记为：$f_X * f_Y$

$$\therefore\quad f_X * f_Y=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

卷积公式法 X, Y 相互独立，连续型

例3. 设 X,Y 相互独立具有相同的概率密度：

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & 其\quad 它\end{cases}\qquad f(y)=\begin{cases}1 & 0\le y\le 1\\ 0 & 其\quad 它\end{cases}$$

求：$Z=X+Y$ 的概率密度

解：由题意知

因 X,Y 相互独立，由卷积公式：

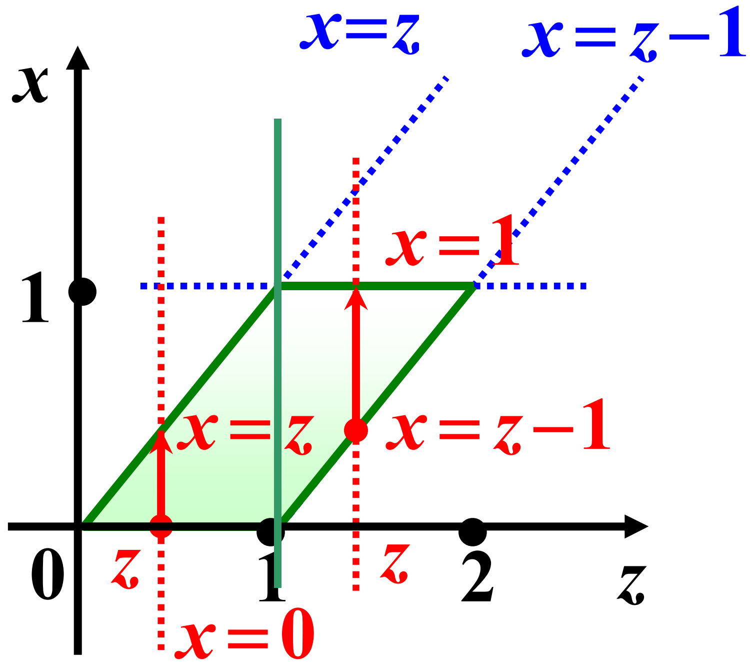
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f(z-x)dx$$

确定积分限，找出使被积函数不为 0 的区域：$0\le z\le 2$

$$\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le z-x\le 1\end{cases}\qquad \begin{cases}0\le x\le 1\\ -1\le x-z\le 0\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,dx$$

区域 $\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ -1\le x-z\le 0 \end{cases}$ 如图示:



于是得:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f(z-x)dx$$

$$=\begin{cases} \int_0^z dx = z & 0\le z<1 \\ \int_{z-1}^1 dx = 2-z & 1\le z<2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} 1 & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{其　它} \end{cases}$$

例4 设 X,Y 相互独立, 概率密度如下： 求：$f_{X+Y}(z)$

$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases} 2e^{-2y}, & y>0, \\ 0, & y\le 0. \end{cases}$$

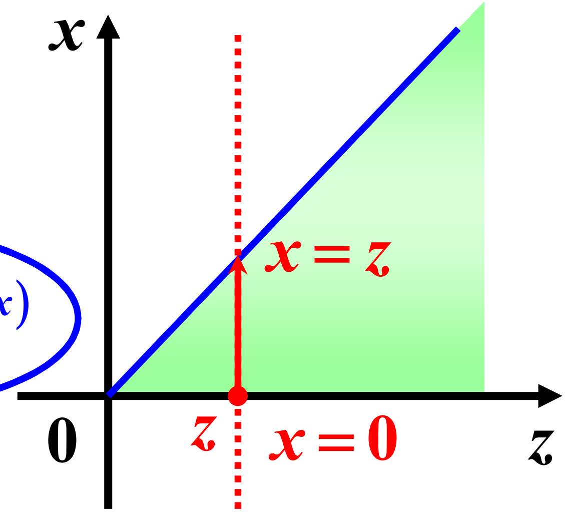
解　因X,Y相互独立，由卷积公式：

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)\,dx$$

先找使被积函数不为 0 的区域：$z>0,$

$$\begin{cases} x>0 \\ z-x>0 \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} x>0 \\ x<z \end{cases}$$

$$e^{-x}\cdot 2e^{-2(z-x)}$$



$z>0:$

$$f_{X+Y}(z)=\int_0^z 2e^{-2z+x}\,dx=2e^{-2z}\left(e^{z}-1\right)$$

$$f_{X+Y}(z)=\begin{cases} 2e^{-2z}\left(e^{z}-1\right), & z>0, \\ 0, & z\le 0. \end{cases}$$

例5. 设 X 和 Y 是相互独立的随机变量，且

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \qquad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

求：$\mathbf{Z = X + Y}$ 的概率密度

解: 利用卷积公式

$$Z = X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-{[(z-x)-\mu_2]^2}/{2\sigma_2^2}}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(z-x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} e^{-\frac{(z-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}$$

结论: ▲ 若随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 则它们的和仍服从正态分布，即：$Z = X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

▲ 推广到 n 个相互独立正态随机变量之和，即：$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$　$i = 1, 2, 3, \cdots n$　且它们相互独立，则它们的和仍服从正态分布。即有：

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim N(\mu_1 + \mu_2 + \cdots \mu_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2)$$

▲ 更一般的有：有限个相互独立的正态随机变量的的线性组合仍然服从正态分布。

$$k_1 X_1 + k_2 X_2 + \cdots + k_n X_n$$

$$\sim N(k_1\mu_1 + k_2\mu_2 + \cdots k_n\mu_n, k_1^2\sigma_1^2 + k_2^2\sigma_2^2 + \cdots + k_n^2\sigma_n^2)$$

例6. 设 $X \sim P(\lambda_1)$, $Y \sim P(\lambda_2)$ (服从泊松分布),

且 X, Y 相互独立。

求: $Z = X + Y$ 的分布

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

解: $\because$ X 与 Y 的取值均为: 0, 1, 2, $\cdots$

$\therefore$ Z 的取值也为非负的整数k

$$P(Z=k)=P(X+Y=k)$$

$$=P(X=0, Y=k)+P(X=1, Y=k-1)$$

$$+\cdots+P(X=k, Y=0)$$

因为 X 与Y 相互独立

$$=P(X=0)P(Y=k)+P(X=1)P(Y=k-1)$$

$$+\cdots+P(X=k)P(Y=0)$$

$$=e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^k}{k!}e^{-\lambda_2}+\frac{\lambda_1}{1!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda_2}+\cdots+\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}e^{-\lambda_2}$$

$$P(Z=k)=P(X+Y=k)$$

$$=P(X=0)P(Y=k)+P(X=1)P(Y=k-1)$$

$$+\cdots+P(X=k)P(Y=0)$$

$$=e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^k}{k!}e^{-\lambda_2}+\frac{\lambda_1}{1!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda_2}+\cdots+\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}e^{-\lambda_2}$$

$$=\frac{1}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot[\lambda_2^k+\frac{k}{1!}\lambda_1\lambda_2^{k-1}+\cdots+\lambda_1^k]$$

$$=\frac{1}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot(\lambda_1+\lambda_2)^k=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

结论: 设 $X\sim P(\lambda_1)$, $Y\sim P(\lambda_2)$ 且 X, Y 相互独立,

则 $Z=X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

例7 二项分布可加性的证明

设 X 与 Y 相互独立, 且

$X \sim B(n, p)$，$Y \sim B(m, p)$, 则

$$X+Y \sim B(n+m, p)$$

证 $Z = X + Y$ 的可能取值为

$0,1,2, \ldots, n+m$

$$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k} P(X=i, Y=k-i),$$

$$P(Z=k) \overset{?}{=} C_{n+m}^{k} p^{k}(1-p)^{n+m-k}, \quad k=0,1,\cdots,n+m$$

$$P_n(k)=P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,\cdots,n$$

$$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i),$$

证明中用到

$$\boxed{\sum_{i=0}^{k}C_n^iC_m^{k-i}=C_{n+m}^k}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i),$$

$$=\sum_{i=0}^{k}C_n^i p^i(1-p)^{n-i}C_m^{k-i}p^{k-i}(1-p)^{m-k+i}$$

$$=C_{n+m}^k p^k(1-p)^{n+m-k}\quad (k=0,1,2,\ldots,\ n+m)$$

所以 $X+Y\sim B(n+m,\ p)$

由二项分布背景，不难理解$X+Y$表示做了$n+m$次试验，事件A发生的次数.

结论：

▲ 若随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 则它们的和仍服从正态分布，

即： $Z = X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

▲ 设 $X \sim P(\lambda_1)$, $Y \sim P(\lambda_2)$ 且 X, Y 相互独立，

则 $Z = X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$

▲ 设 $X \sim B(n_1, p)$, $Y \sim B(n_2, p)$, 且独立，

则 $X + Y \sim B(n_1 + n_2, p)$

具有这种性质的随机变量称为具有可加性的随机变量。

1、卷积公式法 X, Y 相互独立，连续型

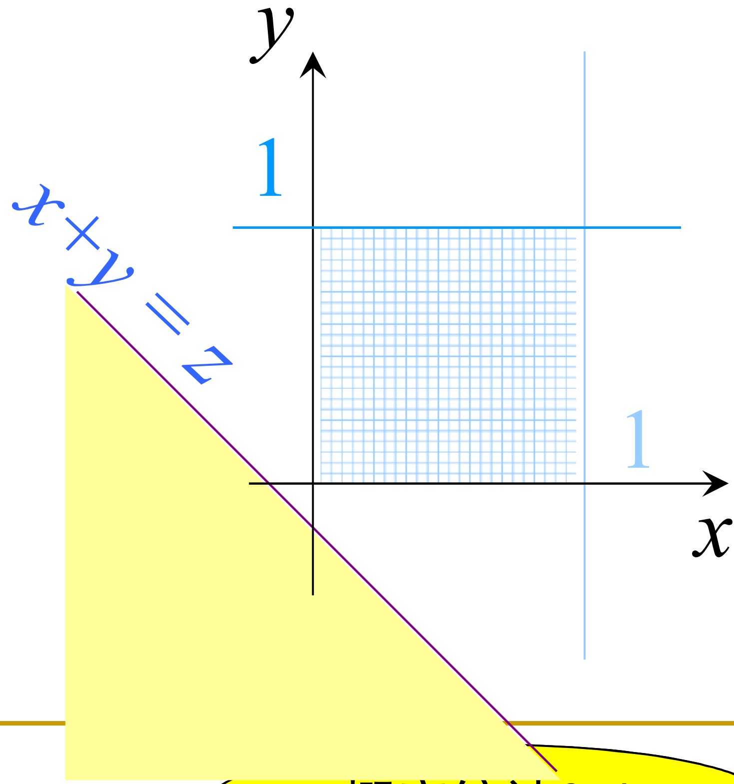
2、分布函数法 连续型

例1. 设 X,Y 相互独立具有相同的概率密度：

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其　它}\end{cases}$$

求：$Z=X+Y$ 的概率密度

解法二 从分布函数出发



$$F_Z(z)=P(X+Y\le z)$$
$$=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\,dxdy$$

当$z<0,\ F_Z(z)=0$

密度函数非零取值区间为：

$0<z<2,$

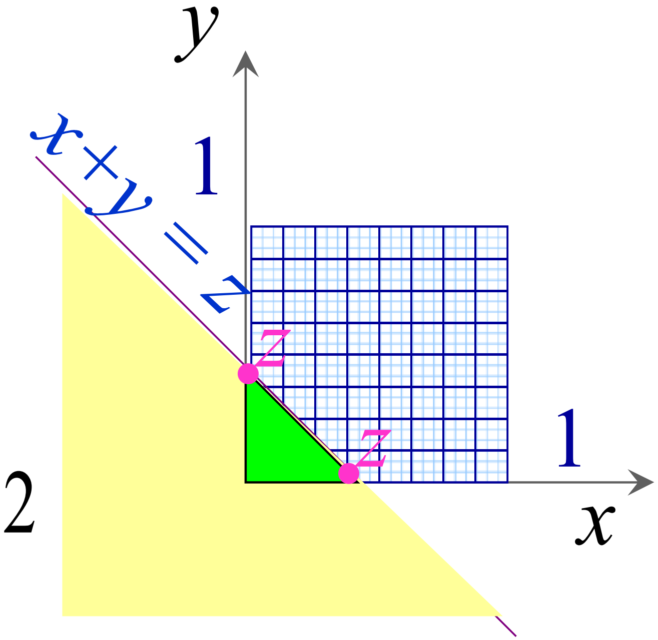
$$F_Z(z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\,dxdy$$

密度函数非零取值区间为:

$0< z < 2$,

当$0\le z<1$时,

$$F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^{z-x} 1dy=\int_0^z (z-x)dx=z^2/2$$

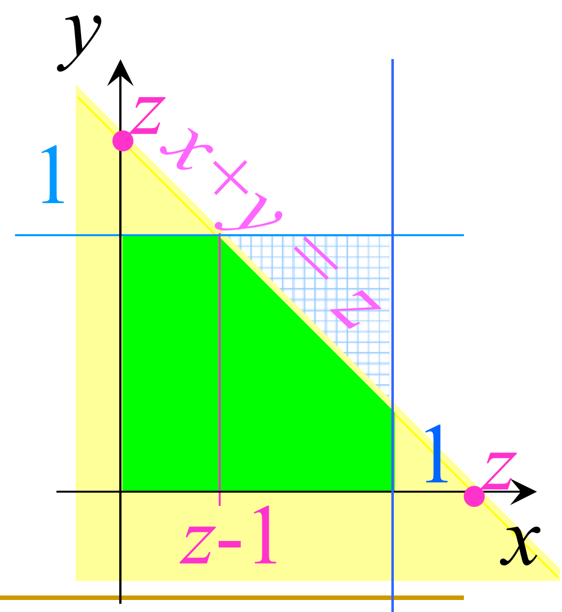


$\Rightarrow$ $f_Z(z)=z$

当$1\le z<2$时,

$$F_Z(z)=(z-1)+\int_{z-1}^1 dx\int_0^{z-x} 1dy$$

$$=z-1+\int_{z-1}^1 (z-x)dx=2z-z^2/2-1$$

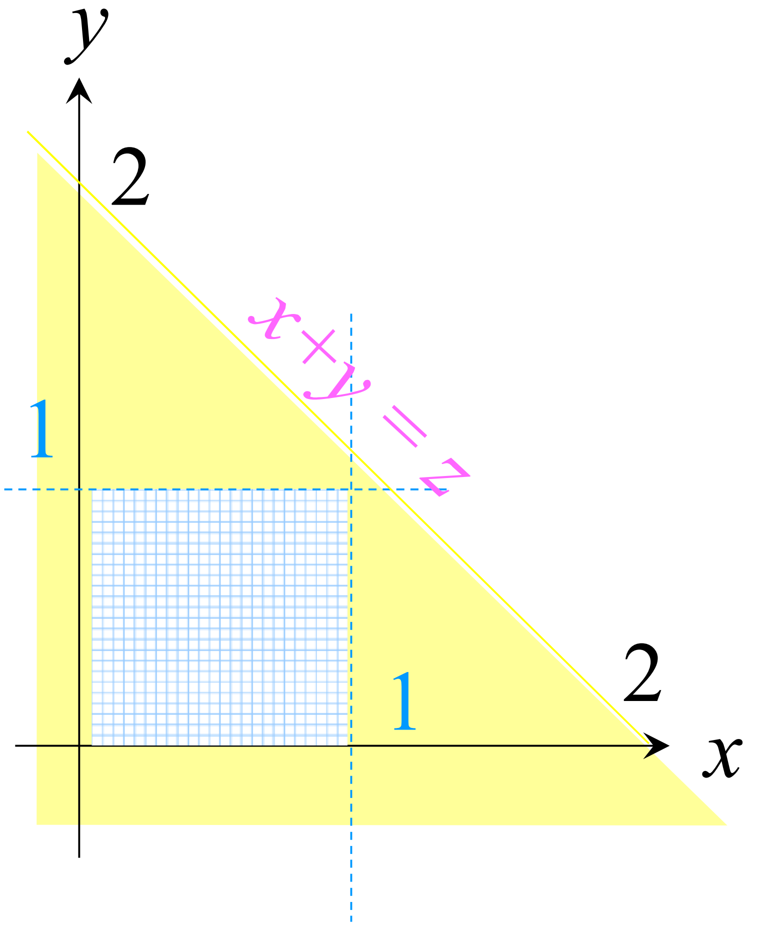


$\Rightarrow$ $f_Z(z)=2-z$

当$2 \le z$时，

$$F_Z(z)=1 \quad f_Z(z)=0$$

$$f_Z(z)=\begin{cases} z, & 0 \le z < 1 \\ 2-z, & 1 \le z < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



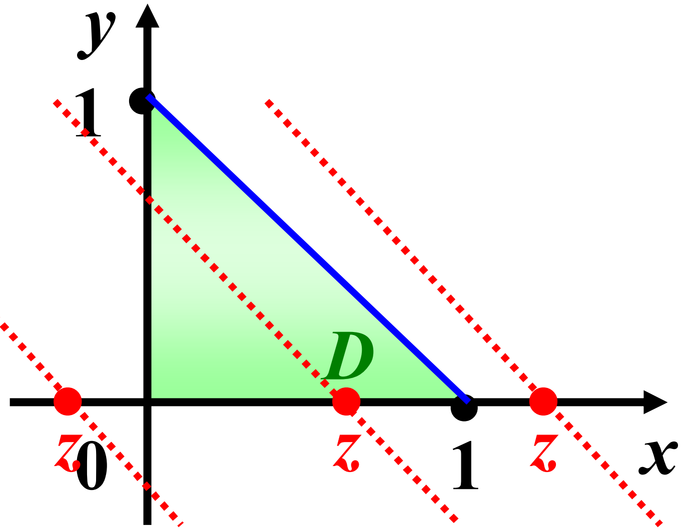
分布函数法 连续型 不知X, Y是否相互独立

不能用卷积公式！

例8 记 $D: x+y<1, x>0, y>0.$

(X, Y) 服从区域上D 的均匀分布 $\longrightarrow f_{X+Y}(z)$

解 $f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$



$$F_{X+Y}(z) = P\{X+Y\le z\}$$

$$= \iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \iint\limits_{\substack{x+y\le z\\ D}} 2\,dxdy = 2\sigma_{\substack{x+y\le z\\ D}}$$

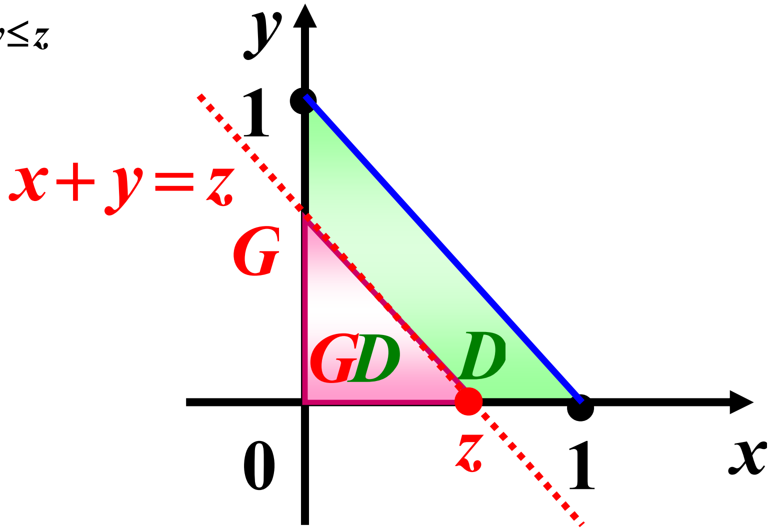
例8 记 $D: x+y<1, x>0, y>0.$

(X, Y) 服从区域上D 的均匀分布 ⟶ $f_{X+Y}(z)$

解 $F_{X+Y}(z)=P\{X+Y\le z\}$

$$=\iint\limits_{\substack{x+y\le z\\ D}} 2dxdy = 2\sigma_{\substack{x+y\le z\\ D}}$$

$$=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ z^2, & 0<z<1,\\ 1, & z\ge 1.\end{cases}$$

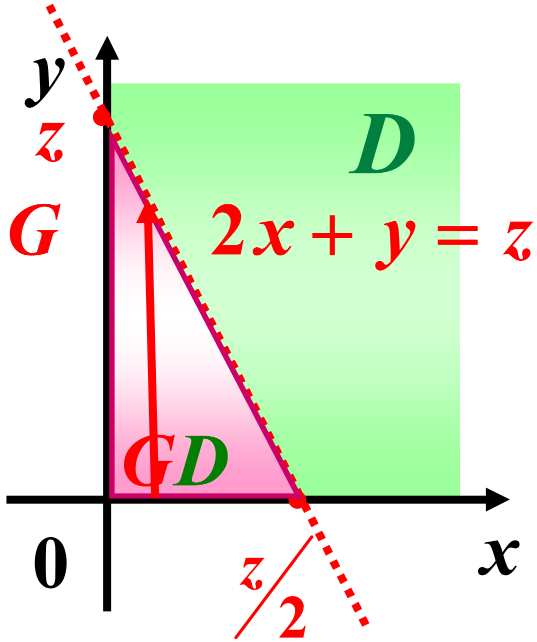


求导

$$\Rightarrow f_{X+Y}(z)=\begin{cases}2z, & 0<z<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

例9 设 (X, Y) 的密度 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$\longrightarrow f_{2X+Y}(z)$



解 $F_{2X+Y}(z)=P\{2X+Y\le z\}$

$$=\iint\limits_{2x+y\le z} f(x,y)\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{\substack{2x+y\le z \\ D}} e^{-(x+y)}\,dxdy$$

$$=\begin{cases} \int_0^{z/2}dx\int_0^{z-2x}e^{-(x+y)}dy=e^{-z}-2e^{-\frac{z}{2}}+1, & z>0, \\ 0, & z\le 0. \end{cases}$$

例9 设 (X, Y) 的密度 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$\longrightarrow f_{2X+Y}(z)$

解

$$F_{2X+Y}(z)=\begin{cases} e^{-z}-2e^{-\frac{z}{2}}+1, & z>0, \\ 0, & z\le 0. \end{cases}$$

求导:

$$\Rightarrow \quad f_{2X+Y}(z)=\begin{cases} e^{-\frac{z}{2}}-e^{-z}, & z>0, \\ 0, & z\le 0. \end{cases}$$

三、$M=\max(X,Y)$ 及 $N=\min(X,Y)$ 的分布

设X，Y是两个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$

求：$M=\max(X,Y)$ 及 $N=\min(X,Y)$ 的分布函数

解：1. $M=\max(X,Y)$ 的分布

$$F_{\max}(z)=P(M\le z)=P(X\le z,Y\le z)$$

$$=P(X\le z)\cdot P(Y\le z)$$

由独立性

$$=F_X(z)\cdot F_Y(z)$$

$$F_{\max}(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z)$$

$$F'_{\max}(z)=f_{\max}(z)$$

2. $N = \min(X, Y)$ 分布

$$F_{\min}(z) = P(N \le z) = 1 - P(N > z)$$

$$= 1 - P(X > z, Y > z)$$

$$= 1 - P(X > z) \cdot P(Y > z)$$

$$= 1 - [1 - P(X \le z)] \cdot [1 - P(Y \le z)]$$

$$= 1 - [1 - F_X(z)] \cdot [1 - F_Y(z)]$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_X(z)] \cdot [1 - F_Y(z)]$$

$$F'_{\min}(z) = f_{\min}(z)$$

$M=\max(X,Y)$ $F_{\max}(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z)$

$N=\min(X,Y)$ $F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)]\cdot[1-F_Y(z)]$

注：▲ 推广：$X_1,X_2,\cdots X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为：$F_{X_i}(x_i),\ i=1,2\cdots n$，则：$M=\max(X_1,X_2,\cdots X_n)$ 与 $N=\min(X_1,X_2\cdots X_n)$ 的分布函数分别为：

$$F_{\max}(z)=F_{X_1}(z)\cdot F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z)$$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_{X_1}(z)]\cdot[1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)]$$

若独立同分布,则

$$F_{\max}(z)=[F(z)]^n,$$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F(z)]^n$$

例10.设系统L由两个相互独立的子系统L_1 , L_2联接而成,联接的方式分别为(1)串联, (2)并联，(3)备用(当L_1损坏时, L_2开始工作)，又设L_1 ,L_2, L的寿命分别是X, Y, Z, 已知它们的概率密度分别是:

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

分别就以上三种方式写出L的寿命 Z 的概率密度.

(1)串联 $Z=\min(X,Y)$ (2)并联 $Z=\max(X,Y)$

(3)备用 $Z=X+Y$

已知 $f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

解： $F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ $F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

$$F_X(z)=\begin{cases}1-e^{-\alpha z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}\qquad F_Y(z)=\begin{cases}1-e^{-\beta z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

(1)串联 $Z=\min(X,Y)$ $F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$

$$F_{\min}(z)=\begin{cases}1-e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

$$f_{\min}(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

已知 $f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

解： $F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ $F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

$F_X(z)=\begin{cases}1-e^{-\alpha z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$ $F_Y(z)=\begin{cases}1-e^{-\beta z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$

(2)并联 $Z=\max(X,Y)$ $F_{\max}(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z)$

$$F_{\max}(z)=\begin{cases}(1-e^{-\alpha z})(1-e^{-\beta z}), & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

$$f_{\max}(z)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha z}+\beta e^{-\beta z}-(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

已知 $f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

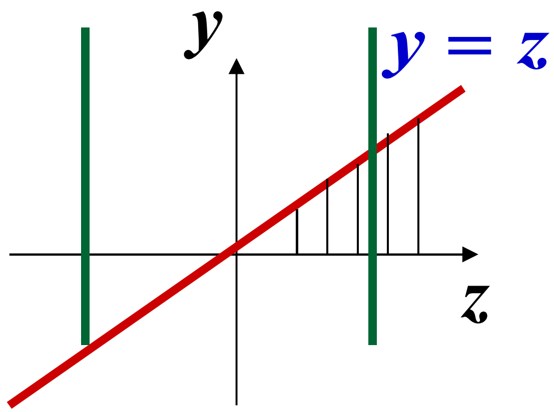
解: (3)备用 $Z=X+Y$ $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

当$y>0$, $z-y>0$时，

当$z>y>0$时，

$$=\begin{cases}\int_0^z \alpha e^{-\alpha(z-y)}\beta e^{-\beta y}dy \\ =\dfrac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}(e^{-\beta z}-e^{-\alpha z}) & z>0 \\ 0 & z\le 0\end{cases}$$



要记住的结论:

▲ 若随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 则它们的和仍服从正态分布，即：$Z = X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

▲ 推广：$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ $\quad i = 1, 2, 3, \cdots n$ 则

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim N(\mu_1 + \mu_2 + \cdots \mu_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2)$$

▲ 更一般的有：有限个相互独立的正态随机变量的的线性组合仍然服从正态分布。

$$k_1 X_1 + k_2 X_2 + \cdots + k_n X_n$$

$$\sim N(k_1\mu_1 + k_2\mu_2 + \cdots k_n\mu_n, k_1^2\sigma_1^2 + k_2^2\sigma_2^2 + \cdots + k_n^2\sigma_n^2)$$

$$\boxed{X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right), \quad Y = aX + b \longrightarrow Y \sim N\left(a\mu + b,\ a^2\sigma^2\right)}$$

要记住的结论:

设 $X \sim P(\lambda_1)$, $Y \sim P(\lambda_2)$ 且 X, Y 相互独立,

则 $Z = X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$

推广到 n 个相互独立泊松随机变量之和，即：

$$X_i \sim P(\lambda_i) \quad i = 1, 2, 3, \cdots n \quad \text{则}$$

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim P(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_n)$$

- 设 $X \sim B(n_1, p)$, $Y \sim B(n_2, p)$, 且独立,

  则 $X + Y \sim B(n_1 + n_2, p)$

小结

二维随机变量(X,Y)

		(X,Y)离散型	(X,Y)连续型
(X,Y) 整体	联合分布函数 $F(x,y)$	联合分布律 $P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}$	联合概率密度 $f(x,y)$
(X,Y) 个体	边缘分布函数 $F_X(x)=\lim\limits_{y\to\infty}F(x,y)$ $F_Y(y)=\lim\limits_{x\to\infty}F(x,y)$	边缘分布律 $P(X=x_i)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\cdot}$ $P(Y=y_j)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_{ij}=p_{\cdot j}$ 条件分布律 $P(Y=y_j\mid X=x_i)=\dfrac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(X=x_i)}$	边缘概率密度 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$ $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$ 条件概率密度 $f_{X\mid Y}(x\mid y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$
X与Y 独立	对$\forall x,y$ $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$	$P(X=x_i,Y=y_j)$ $=P(X=x_i)P(Y=y_j)$	$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$
概率计算		$P\{(X,Y)\in G\}=\sum\limits_{(x_i,y_j)\in G}p_{ij}$	$P\{(X,Y)\in G\}$ $=\iint\limits_G f(x,y)dxdy$

小结

第四节 两个随机变量的函数的分布

独立

$Z=g(X,Y)$ 已知 $f(X,Y)$ → $f_Z(z)=?$ 方法：$f_Z(z)=F'_Z(z)$

1) $Z=X+Y$ $\quad f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$

2) $Z=\dfrac{X}{Y}$ $\quad f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f(yz,y)\,dy$

3) $Z=\max\{X,Y\}$ $\quad X,Y$独立 $\quad F_Z(z)=F_X(z)F_Y(z)$

$Z=\min\{X,Y\}$ $\quad X,Y$独立 $\quad F_Z(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立，$F_{X_i}(x)=F(x)$

$M=\max(X_1,X_2,\cdots X_n)$ 与 $N=\min(X_1,X_2\cdots X_n)$

$$F_{\max}(z)=F_{X_1}(z)\cdot F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z)=[F(z)]^n$$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_{X_1}(z)]\cdot[1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)]=1-[1-F(z)]^n$$