第四章

数学期望的计算

$$E(X)=\sum_k x_k p_k$$

$$E\left(g(X)\right)=\sum_k g\left(x_k\right)p_k$$

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} x f\left(x\right)dx$$

$$E\left(g(X,Y)\right)=\sum_{i\,j} g\left(x_i,y_j\right)p_{i\,j}$$

$$E\left(g(X)\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} g\left(x\right)f\left(x\right)dx$$

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f\left(x,y\right)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X\left(x\right)dx$$

$$E\left(g(X)\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g\left(x\right)f\left(x,y\right)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X\left(x\right)dx$$

$$E\left(g(X,Y)\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g\left(x,y\right)f\left(x,y\right)dxdy$$

方差的计算 $DX = E\left(X^2\right) - \left(EX\right)^2$

X	$(0-1)$	$B(n,p)$	$\pi(\lambda)$	$U(a,b)$	$Exp(\theta)$	$N(\mu,\sigma^2)$
EX	p	np	λ	$\frac{a+b}{2}$	θ	μ
DX	$p(1-p)$	$np(1-p)$	λ	$\frac{(a-b)^2}{12}$	θ^2	σ^2

$$D(X+Y) = DX + DY + 2\operatorname{cov}(X,Y)$$

切比雪夫不等式：设$E(X)$, $D(X)$ 存在, 则 $\forall \varepsilon > 0$

$$P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} D(X)$$

等价于 $P\{|X - EX| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} DX$ 用于估计

例1 X,Y 独立同 $N\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 分布 $\longrightarrow D\left(\left|X-Y\right|\right)$

解：记 $Z=X-Y$

则 $Z\sim N(0,1)\longrightarrow E\left(\left|Z\right|\right),E\left(\left|Z\right|^2\right)$

$$E\left(\left|Z\right|\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x\right|f_Z(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x\right|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$E\left(\left|Z\right|^2\right)=E\left(Z^2\right)=DZ+\left(EZ\right)^2=1$$

$$\therefore D\left(\left|X-Y\right|\right)=D\left(\left|Z\right|\right)=E\left(\left|Z\right|^2\right)-\left(E\left|Z\right|\right)^2=1-\frac{2}{\pi}$$

例2 ① X,Y独立，$X \sim N(1,2)$, $Y \sim N(-1,1)$

$$\longrightarrow P\{2X > Y\}$$

解：$P\{2X > Y\} = P\{2X - Y > 0\} \triangleq \beta$

$$\because E(2X - Y) = 2EX - EY = 3$$

$$D(2X - Y) = 2^2 DX + DY = 9$$

$$\therefore Z = 2X - Y \sim N(3,9)$$

$$\therefore \beta = P\{Z > 0\} = 1 - \Phi\left(\frac{0-3}{3}\right)$$

$$= 1 - \Phi(-1) = \Phi(1)$$

例3 设 A 在一次试验中出现的概率为 $\frac{1}{4}$，用切比雪夫不等式估计，在100次独立重复试验中，A 出现的频率与 $\frac{1}{4}$ 之差的绝对值小于0.05的概率。

解： 记 X —— A 出现的次数，

题意：求 $P\left\{\left|\frac{X}{100}-\frac{1}{4}\right|<0.05\right\}=P\{|X-25|<5\}$

$$\because X \sim B\left(100, \frac{1}{4}\right),\quad EX=25,\quad DX=25\times\frac{3}{4}$$

$$\therefore P\{|X-25|<5\}=1-P\{|X-25|\geq 5\}$$

$$\geq 1-\frac{1}{5^2}DX=\frac{1}{4}$$

协方差 $\operatorname{cov}(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)]$

相关系数 $\rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}},$

若 $\rho_{X,Y}=0$，则 X, Y 不相关。

X,Y 不相关 $\Longleftrightarrow \operatorname{cov}(X,Y)=0 \Longleftrightarrow E(XY)=EX\cdot EY$

$\Longleftrightarrow D(X+Y)=DX+DY$

结论1 X,Y 相互独立 $\Longrightarrow$ X, Y 不相关。反之不然！

结论2 当(X,Y)服从二维正态分布时，

X,Y相互独立 $\Longleftrightarrow$ X, Y 不相关。

第五章

贝努利大数定律

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 独立同 $(0-1)$ 分布，

则 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} p \quad (n \to \infty)$

切比雪夫大数定律特例

设 1) $\{X_n\}$ 为独立随机变量序列；

2) $\forall k$, $E(X_k) = \mu$, $D(X_k) = \sigma^2$

则 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \mu \quad (n \to \infty)$

辛钦大数定律

设 1) $\{X_n\}$ 独立同分布；

2) $\forall k$, $E(X_k) = \mu$

则 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \mu \quad (n \to \infty)$

林德伯格—勒维中心极限定理

条件：1) $\{X_n\}$独立同分布；

2) $\forall k,\ E(X_k)=\mu,\ D(X_k)=\sigma^2,\ 0<\sigma^2<\infty$

应用 $\sum_{k=1}^{n} X_k \overset{\text{近似}}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2)$ 或 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \overset{\text{近似}}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理

条件：$X \sim B(n,p)$,

应用 $\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1)$

或：$X \overset{\text{近似}}{\sim} N(np, np(1-p))$

n较大时

例1 对某天文数据D进行n次独立观测,结果依次记为

$X_1, X_2, \cdots, X_n$(光年)。设 $EX_i = D,\ DX_i = 4,\ i = 1, 2, \cdots, n.$

现用 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 作为对D的估计. 若使对D的估计精

度在 ± 0.25 光年之间的概率大于0.98, n至少为多少?

解: 题意: $P\left\{\left|\bar{X} - D\right| \le 0.25\right\} \ge 0.98 \longrightarrow n \ge ?$

$\because X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布, $E\bar{X} = D,\ D\bar{X} = \frac{4}{n}$

由中心极限定理知 $\bar{X} \overset{\text{近似}}{\sim} N\left(D, \frac{4}{n}\right)$

例1 题意：$P\left\{\left|\bar{X}-D\right|\le 0.25\right\}\ge 0.98 \longrightarrow n\ge ?$

解： $\bar{X} \underset{\smile}{\overset{近似}{\sim}} N\left(D, \dfrac{4}{n}\right)$

$$\therefore P\left\{\left|\bar{X}-D\right|\le 0.25\right\} \approx 2\Phi\left(\frac{0.25}{\sqrt{4/n}}\right)-1\ge 0.98$$

查表

$\cdots\cdots \longrightarrow n\ge 348$

所以至少要做348次独立观测。

例2 设测量误差$X \sim N\left(0, 10^2\right)$,现进行100次独立测量.

求误差之绝对值超过19.6的次数不小于3的概率。

解： 记Y —— 误差绝对值超过19.6的次数,

题意: 求 $P\{Y \geq 3\}$

易知 $Y \sim B(100, p)$

而 $p = P\{|X| > 19.6\} = 2\left(1 - \Phi\left(\dfrac{19.6}{10}\right)\right)$

$$= 2(1 - \Phi(1.96)) = 0.05$$

$\therefore Y \sim B(100,\ 0.05)$ 用中心极限定理近似为正态分布去做

例2 设测量误差$X \sim N\left(0, 10^2\right)$,现进行100次独立测量.求误差之绝对值超过19.6的次数不小于3的概率。

解: 题意: 求 $P\{Y \geq 3\}$

$$Y \sim B(100,\ 0.05) \quad \text{又 } EY = 5,\ \ DY = 4.75$$

由中心极限定理知, $Y \overset{\text{近似}}{\sim} N(5,\ 4.75)$

$$\therefore P\{Y \geq 3\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{3-5}{\sqrt{4.75}}\right) = 1 - \Phi(-0.92)$$

$$= \Phi(0.92) = 0.8212$$