北京科技大学 2015—2016 学年度第一学期

概率论与数理统计 试题

一. 填空题（本题每小题 3 分，共 15 分）

1. 甲乙射击一个目标，甲命中的概率是 0.6，乙命中的概率是 0.7，两人同时各射击一次，目标被命中的概率是________。

2. 若 ξ 服从 $(0,5)$ 上的均匀分布，那么方程 $4x^2+4\xi x+\xi+2=0$ 有实根的概率是________。

3. 若二维随机变量 (X,Y) 在以原点为圆心的单位圆内的概率密度为 $\frac{1}{\pi}$，其它区域都是 0，那么 $P\left\{X<\frac{1}{2}\right\}=$________。

4. 设 η_n 是 n 次独立试验中事件 A 出现的次数，p 为 A 在每次试验中出现的概率，则对任意的 $\varepsilon>0$，有

$\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\left|\frac{\eta_n}{n}-p\right|>\varepsilon\right\}=$________。

5. 若 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 都是参数 θ 的无偏估计量，且 $D\left(\hat{\theta}_1\right)<D\left(\hat{\theta}_2\right)$，这时我们通常称统计量 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$________。

二. 选择题（本题每小题 3 分，共 15 分）

1. 设事件 A,B，则 $P(A-B)=$________。

（A） $P(A)-P(B)$　　（B） $P(A)-P(AB)$

（C） $P(A)-P(B)+P(AB)$　　（D） $P(A)+P(B)-P(AB)$

2. 已知 X,Y 是相互独立的随机变量，同分布于标准正态分布。有人作出如下四个论断：

（1） $X+Y$ 服从正态分布，但是 $X-Y$ 不服从正态分布；

（2） $X+Y$ 服从标准正态分布；

（3） $X+Y$ 与 $X-Y$ 是不相关的；

（4） $X+Y$ 与 $X-Y$ 是相互独立的。

在这四个断言中，正确断言的个数是________。

（A） 1　　（B） 2　　（C） 3　　（D） 4

3. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且同分布于标准正态分布，下列随机变量中服从 χ^2-分布的是________。

（A） $X_1+X_2+\cdots+X_n$　　（B） $(X_1+X_2+\cdots+X_n)^2$

（C） $\sqrt{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}$　　（D） $X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自某总体的一个样本，下面统计量中可以作为总体均值 μ 的无偏估计量的是________。

（A） $X_1+X_2+\cdots+X_n$　　（B） $\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$

（C） $\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n-1}$　　（D） $\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-\mu$

5. 设 X,Y 是相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为 $F_X(x),F_Y(y)$，则 $Z=\max(X,Y)$ 的分布函数是________。

（A） $F_Z(z)=F_X(z)F_Y(z)$

（B） $F_Z(z)=\max\left(\left|F_X(z)\right|,\left|F_Y(z)\right|\right)$

（C） $F_Z(z)=\max\left(F_X(z),F_Y(z)\right)$

（D） $F_Z(z)=1-\max\left(F_X(z),F_Y(z)\right)$

三、（本题 10 分）

若 $X \sim N\left(1,3^2\right), Y \sim N\left(-2,4^2\right)$，且 X,Y 相互独立，问：(1) X,Y 的相关系数是多少？(2) $aX+bY$ 服从什么分布？其均值、方差分别是多少？这里 a,b 是常数，$a^2+b^2 \neq 0$。(3) a,b 满足什么条件时，随机变量 $aX+bY$ 与 $X+Y$ 是独立的？或者说明不可能相互独立？

四.（本题 12 分）

若一正方形的边长是随机变量 X，服从区间 $\left[0,1\right]$ 上的均匀分布。(1) 求面积 S 的分布密度；(2) 计算概率 $P\left\{S<\frac{1}{4}\middle|\frac{1}{8}<S<\frac{1}{2}\right\}$。

五.（本题 12 分）

设随机变量 X,Y 相互独立，且它们的概率密度函数分别为

$$f_X\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2\\ 0, & x\le 0, x\ge 2\end{cases}, \qquad f_Y\left(y\right)=\begin{cases}e^{-y}, & y\ge 0\\ 0, & y<0\end{cases},$$

试求：(1) $\left(X,Y\right)$ 的联合概率密度与联合分布函数；(2) $X+Y$ 大于 1 的概率；(3) $X+Y$ 的数学期望与方差。

六.（本题 12 分）

罐子中有两只白球，一只黑球，从中随机摸出一只，观察颜色后放回罐中，并同时再放入一只同一颜色的球。问：(1) 第二次摸出白球的概率是多少？(2) 连续摸出三个白球的概率是多少？(3) 若第二次摸出白球，判断第一次更有可能摸出哪种颜色的球？(4) 若首次摸出白球时的摸球次数记做 X，求 X 的分布律以及数学期望。

七.（本题 12 分）

设总体 X 的概率密度为 $f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$，$\theta>0$。今从总体中抽取 10 个个件，得到数据如下：1050，1100，1080，1200，1300，1250，1340，1060，1150，1150。(1) 试分别用矩估计法和极大似然估计法估计参数 θ 的值；(2) 上述你使用的估计量是否为无偏估计量？为什么？

八.（本题 12 分）

一批元件，从中随机抽取 25 只，测得平均寿命为 950 小时。若已知该种元件寿命服从标准差为 $\sigma=100$ 小时的正态分布。(1) 求这批元件寿命的置信区间，置信度取为 0.95；(2) 若产品寿命不低于 1000 小时为合格，为检验这批元件是否合格，需要做什么样的零假设和备择假设？检验结果如何？显著性水平为 0.05。已知：$z_{0.1}=1.28, z_{0.05}=1.64, z_{0.025}=1.96$。

答案

答案：1. 0.88　2. 0.6　3. $\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$　4. 0　5. 有效

答案：1. B　2. B　3. D　4. B　5. A

【解答】（1）由于 X,Y 相互独立，因此相关系数是 0（2 分）。

（2）$aX+bY$ 应服从正态分布（1 分），其数学期望是 $E(aX+bY)=aEX+bEY=a-2b$（1 分），

方差是 $D(aX+bY)=D(aX)+D(bY)=9a^2+16b^2$（2 分）。

（3）由于 $aX+bY$ 与 $X+Y$ 都服从正态分布，因此只需要相关系数为零就是相互独立的，这只需要它们的协方差等于零即可（2 分）。由于 $\mathrm{cov}(aX+bY,X+Y)=aDX+bDY=9a+16b$。（1 分）

因此，当 $\frac{a}{b}=-\frac{16}{9}$ 时，$aX+bY$ 与 $X+Y$ 相互独立。（1 分）

【解答】（1）由于正方形面积为 $S=X^2$，

当 $0<s\le 1$ 时，分布函数 $F_S(s)=P\{S<s\}=P\{X^2<s\}=P\{X<\sqrt{s}\}=\int_0^{\sqrt{s}}dx=\sqrt{s}$（3 分），分布密度函数 $f_S(s)=F_S{}'(s)=\frac{1}{2\sqrt{s}}$（1 分）；

当 $s\le 0$ 时，分布函数 $F_S(s)=P\{S<s\}=0$，分布密度函数 $f_S(s)=F_S{}'(s)=0$；（1 分）

当 $s>1$ 时，分布函数 $F_S(s)=P\{S<s\}=1$，分布密度函数 $f_S(s)=F_S{}'(s)=0$。（1 分）

因此，S 的概率密度函数为 $f_S(s)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{s}}, & 0<s\le 1\\ 0, & s\le 0, s>1\end{cases}$。（1 分）

（2）$P\left\{S<\frac{1}{4}\middle|\frac{1}{8}<S<\frac{1}{2}\right\}=\frac{P\left\{S<\frac{1}{4},\frac{1}{8}<S<\frac{1}{2}\right\}}{P\left\{\frac{1}{8}<S<\frac{1}{2}\right\}}=\frac{P\left\{\frac{1}{8}<S<\frac{1}{4}\right\}}{P\left\{\frac{1}{8}<S<\frac{1}{2}\right\}}=\frac{\sqrt{\frac{1}{4}}-\sqrt{\frac{1}{8}}}{\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{8}}}=\sqrt{2}-1$。（2+3 分）

【解答】（1）概率密度函数为 $f(x,y)=\frac{1}{2}e^{-y},0<x<2,y>0$（1 分），联合分布函数

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(s,t)\,dsdt=\begin{cases}\int_0^x ds\int_0^y \frac{1}{2}e^{-t}dt\\ \int_0^2 ds\int_0^y \frac{1}{2}e^{-t}dt\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}(1-e^{-y})\int_0^x ds\\ \frac{1}{2}(1-e^{-y})\int_0^2 ds\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}x(1-e^{-y}), & 0<x<2,y>0\\ 1-e^{-y}, & x\ge 2,y>0\end{cases}$$

（2+2 分）。

（2）$P\{X+Y>1\}=1-P\{X+Y\le 1\}=1-\iint\limits_{x+y\le 1}f(x,y)\,dxdy$（1 分）

$=1-\int_0^1dx\int_0^{1-x}\frac{1}{2}e^{-y}dy=1-\int_0^1\frac{1}{2}(1-e^{x-1})\,dx=1-\frac{1}{2e}$。（1+1 分）

（3）$EX=\int_0^2\frac{x}{2}dx=1$，$EY=\int_0^{+\infty}ye^{-y}dy=1$（1 分），

$DX=EX^2-(EX)^2=\int_0^2\frac{x^2}{2}dx-1=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$，

$DY=EY^2-(EY)^2=\int_0^{+\infty}y^2e^{-y}dy-1=2-1=1$（1 分）。

$E(X+Y)=EX+EY=2$（1 分）；由于 X,Y 相互独立，$D(X+Y)=DX+DY=\frac{4}{3}$（1 分）。

【解答】用W_i, B_i分别表示第i次摸出白球和黑球。

（1）由全概率公式$P\{W_2\}=P\{W_1\}P\{W_2|W_1\}+P\{B_1\}P\{W_2|B_1\}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}=\frac{2}{3}$。（1+1 分）

（2）由乘法公式$P\{W_1W_2W_3\}=P\{W_1\}P\{W_2|W_1\}P\{W_3|W_1W_2\}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2}{5}$。（1+1 分）

（3）由贝叶斯公式$P\{W_1|W_2\}=\dfrac{P\{W_1\}P\{W_2|W_1\}}{P\{W_1\}P\{W_2|W_1\}+P\{B_1\}P\{W_2|B_1\}}=\dfrac{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}}=\frac{3}{4}$，

$P\{B_1|W_2\}=\dfrac{P\{B_1\}P\{W_2|B_1\}}{P\{B_1\}P\{W_2|B_1\}+P\{W_1\}P\{W_2|W_1\}}=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}}=\frac{1}{4}$，（2+1 分）

因此，第一次更有可能摸出的是白球。

（4）分布律为$P\{X=k\}=P\{B_1\cdots B_{k-1}W_k\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{2}{k+2}=\frac{4}{k(k+1)(k+2)}$，$k\ge 1$（2 分）。

$EX=\sum_{k=1}^{+\infty}k\cdot\frac{4}{k(k+1)(k+2)}=4\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=4\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=4\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{k+2}\right)=2$。（1+2 分）

【解答】（1）矩估计法，首先计算总体X的一阶矩得到$EX=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\theta$（1 分），令样本均值等于一阶矩，得到$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{10}}{10}=\theta$（1 分），因此$\theta$的矩估计量为$\hat{\theta}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_{10}}{10}$。（1 分）

极大似然估计法，似然函数为$L(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{10}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_i}{\theta}}=\frac{1}{\theta^{10}}\cdot e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{10}x_i}$（1 分），对数似然函数为$\ln L=-10\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{10}x_i$，令$\frac{d}{d\theta}\ln L=0$（1 分），解得$\theta=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i$（1 分），因此$\theta$的极大似然估计量为$\hat{\theta}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_{10}}{10}$。（1 分）

又样本均值为 1168，故此θ的矩估计值和极大似然估计值都是 1168.（1 分）

（2）由于$E\hat{\theta}=E\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_{10}}{10}\right)=\frac{1}{10}(EX_1+EX_2+\cdots+EX_{10})=\theta$，（2 分）因此上述估计都是$\theta$的无偏估计。（2 分）

【解答】（1）总体服从正态分布，方差已知为$\sigma^2=100^2$，样本容量为 25，置信度为0.95的置信区间是$\left(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025}\right)$（4 分），代入数据得到$\left(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025}\right)=\left(950\pm\frac{100}{5}\cdot1.96\right)=(910.8,989.2)$。

（2）零假设和备择假设为：$H_0:\mu\ge1000, H_1:\mu<1000$（2 分）。总体服从正态分布，方差已知为$\sigma^2=100^2$，显著性水平为$0.05$，选择检验统计量$Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$（1 分），其拒绝域为$z<-z_\alpha\le-1.64$（1 分），代入数据得到检验值为$z=\frac{950-1000}{100/\sqrt{25}}=-2.5<-1.64$（1 分）。因此拒绝零假设，认为这批元件不合格。（1 分）