

第三章 作业

1. 用二分法求方程 $f(x) = x^2 + x - 1 = 0$ 在区间 $[0, 1]$ 内的根, 要求误差不超过 10^{-4} , 需要二分多少次?

$$k+1 \geq [\ln(b-a) - \ln \varepsilon] / \ln 2 = [\ln 1 - \ln 10^{-4}] / \ln 2 = 4 / \ln 2 = 13.2877$$

$$k = 13$$

3. 使用二分法求方程 $x^3 - 2x - 5 = 0$ 在区间 $[2, 3]$ 内的根, 要求 $|x^{(k)} - x^*| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-5}$ 。

只估计迭代次数

$$k+1 \geq [\ln(b-a) - \ln \varepsilon] / \ln 2 = [\lg 1 - \lg(0.5 \times 10^{-5})] / \lg 2 = 17.6096$$

$$k = 17$$

$$x = 2.0945549$$

4. 用二分法求方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的正根, 要求近似根的误差限不大于 0.05

$f(1)=-1, f(2)=1$, 所以 $[1, 2]$ 中有根

$$k+1 \geq [\ln(b-a) - \ln \varepsilon] / \ln 2 = [\lg 1 - \lg(0.05)] / \lg 2 = 4.32$$

$$k = 4$$

$$x=1.59375$$

迭代次数	a(fa)	c=(a+b)/2,(fc)	b(fb)
0	1(-1)	1.5(-0.25)	2(+1)
1	1.5(-0.25)	1.75(+0.313)	2(+1)
2	1.5(-0.25)	1.625(+0.0156)	1.75(+0.31)
3	1.5(-0.25)	1.5625 (-0.1211)	1.625(+0.0156)
4	1.5625 (-0.1211)		1.625(+0.0156)

$$x = (1.5625 + 1.625)/2 = 1.5938$$

5. 设 $f(x)$ 可微, 求方程 $x = f(x)$ 根的牛顿迭代格式是什么?

$$g(x) = f(x) - x = 0$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)} = x_k - \frac{f(x_k) - x_k}{f'(x_k) - 1}$$

6. 为求方程 $x^3 - x^2 - 1 = 0$ 在 $x_0 = 1.5$ 附近的一个根, 设将方程改写成下列价形式, 并建立相应的迭代公式:

(1) $x = 1 + \frac{1}{x^2}$, 迭代公式 $x_{k+1} = 1 + \frac{1}{x_k^2}$; (2) $x^3 = 1 + x^2$, 迭代公式 x_{k+1}

$$\sqrt[3]{1 + x_k^2};$$


(3) $x^3 = \frac{1}{x-1}$, 迭代公式 $x_{k+1} = 1 / \sqrt{x^k - 1}$

试分析每种迭代公式的收敛性, 并选取一种公式求出具有四位有效数字的似根。

$$f'(x) = -2x^{-3}, |f'(1.5)| \approx 0.5926 < 1$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3}(1+x^2)^{-\frac{2}{3}}, |f'(1.5)| \approx 0.4588 < 1$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{3}{2}}, |f'(1.5)| \approx 1.4142 > 1$$



1	1.444	1.481	1.414
2	1.480	1.473	1.554
3	1.457	1.469	1.344
4	1.471	1.467	1.705
5	1.462	1.466	1.191
6	1.468	1.466	2.288

8. 给定函数 $f(x)$, 设对一切 x , $f'(x)$ 存在且 $0 < m \leq f'(x) \leq M$, 证明: 对范围 $0 < \lambda < 2/M$ 内的任意定数 λ , 迭代过程 $x_{k+1} = x_k - \lambda f(x_k)$ 均收敛 $f(x) = 0$ 的根 x^* 。

迭代函数为: $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$

只需要明 $|\varphi'(x)| < 1$

$$\varphi'(x) = 1 - \lambda f'(x) \geq 1 - \lambda M > 1 - \frac{2}{M} M > -1$$

$$\varphi'(x) = 1 - \lambda f'(x) \leq 1 - \lambda m < 1$$

13. 用弦截法求下列方程的根

计算过程及结果精确
到小数点后两位

(2) $x^3 - 3x^2 - x + 9 = 0$, 取 $x_0 = -2$, $x_1 = -1.5$ 。

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} (x_k - x_{k-1})$$

1 -1.52

2 -1.53

3 -1.53

基本要求

- 二分法计算及其迭代次数估计;
- 简单迭代法及其收敛性判断;
- 牛顿法计算;
- 简化牛顿法、弦截法、牛顿法下山法。