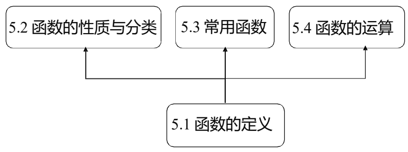
北京科技大学 University of Science and Technology Beijing

# 第五章函数

1

## 函数部分知识逻辑概图




2

## 5.1 函数的定义

函数是一种具有特殊性质的二元关系。

3

## 5.1 函数的定义

定义5.1 设$f$为二元关系，若对任意的$x\in domf$都存在唯一的$y\in ranf$使得$xfy$成立，则称f为函数。对于函数f，如果$\langle x, y\rangle\in f$，常记作$y = f(x)$，x称为自变量，y称为x在f作用下的像（或函数值）。

函数是一种特殊的二元关系，特点如下：

（1）函数的定义中强调像$y$是唯一的，称作像的唯一性。像的唯一性可以描述为：设$f(x_1) = y_1$且$f(x_2) = y_2$，如果$x_1 = x_2$，那么$y_1 = y_2$；或者如果$y_1\neq y_2$，那么，$x_1\neq x_2$。

（2）该定义并不排斥多个元素拥有相同的像的情况。即若$x_1\neq x_2$，可以有$f(x_1) = f(x_2)$。

例5.1 判断如下关系是否为函数?

$f_1 = \{\langle x_1, y_1\rangle,\langle x_2, y_1\rangle,\langle x_3, y_2\rangle\}$，$f_2 = \{\langle x_1, y_1\rangle ,\langle x_1, y_2\rangle ,\langle x_2, y_1\rangle ,\langle x_3, y_2\rangle\}$

解：$f_1$是函数，满足函数的定义。$f_2$不是函数，因为对应于$x_1$，存在$y_1$和$y_2$，使得$x_1fy_1$、$x_1fy_2$同时成立，与函数定义矛盾。

4

## 5.1 函数的定义

定义5.2 设$f$、$g$为函数，则

$$f = g \Leftrightarrow f\subseteq g \wedge g\subseteq f$$

由该定义可知，若两函数$f$和$g$相等，一定满足如下两条件：

（1）$domf = domg$

（2）$\forall x \in domf = domg$，都有$f(x) = g(x)$。

例如函数$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ 和$g(x) = x-1$是不相等的，因为$domf = \{x \mid x\in R \wedge x\neq -1\}$

而$domg = R$，$domf \neq domg$。所以$f\neq g$。

定义5.3 设A，B是集合，如果函数f满足以下条件：

（1）$domf = A$

（2）$ranf \subseteq B$

则称f为从A到B的函数，记作$f: A\to B$。

5

## 5.1 函数的定义

定义5.4 设A，B为集合，所有从A到B的函数的集合记作$B^A$，读作“B上A”，集合表示为

$$B^A = \{f \mid f: A\to B\}$$

例5.5 设$A = \{a, b, c\}$，$B=\{\alpha, \beta\}$，求$B^A$?

解：$A\times B=\{\langle a, \alpha\rangle, \langle a, \beta\rangle, \langle b, \alpha\rangle, \langle b, \beta\rangle, \langle c, \alpha\rangle, \langle c, \beta\rangle\}$，$A\times B$有$2^6$个可能的子集，但其中只有$2^3$个子集能成为从$A$到$B$的函数，分别为$f_0=\{\langle a, \alpha\rangle, \langle b, \alpha\rangle, \langle c, \alpha\rangle\}$，$f_1=\{\langle a, \alpha\rangle, \langle b, \alpha\rangle, \langle c, \beta\rangle\}$，

$f_2=\{\langle a, \alpha\rangle, \langle b, \beta\rangle, \langle c, \alpha\rangle\}$，$f_3=\{\langle a, \alpha\rangle, \langle b, \beta\rangle, \langle c, \beta\rangle\}$，

$f_4=\{\langle a, \beta\rangle, \langle b, \alpha\rangle, \langle c, \alpha\rangle\}$，$f_5=\{\langle a, \beta\rangle, \langle b, \alpha\rangle, \langle c, \beta\rangle\}$，

$f_6=\{\langle a, \beta\rangle, \langle b, \beta\rangle, \langle c, \alpha\rangle\}$，$f_7=\{\langle a, \beta\rangle, \langle b, \beta\rangle, \langle c, \beta\rangle\}$

所以$B^A = \{f_0, f_1, ..., f_7\}$。

6

## 5.1 函数的定义

定理5.1 设$A$和$B$都为有限集，$|A| = m$，$|B| = n$，且$m, n > 0$，则从$A$到$B$共有$n^m$个不同的函数，即$|B^A|=n^m$。

当$A$或$B$中至少有一个集合是空集时，可以分成下面三种情况：

（1）$A = \varnothing$且$B = \varnothing$，则$B^A = \varnothing^\varnothing = \{\varnothing\}$。

（2）$A = \varnothing$且$B \neq \varnothing$，则$B^A = B^\varnothing = \{\varnothing\}$。

（3）$A \neq \varnothing$且$B = \varnothing$，，则$B^A = \varnothing^A = \varnothing$。

定义5.5 设函数$f: A \to B$，$A_1 \subseteq A$，$B_1 \subseteq B$，

（1）令$f(A_1) = \{f(x) \mid x \in A_1\}$，称$f(A_1)$为$A_1$在$f$下的像。特别当$A_1=A$时，称$f(A)$为函数的像。

（2）令$f^{-1}(B_1) = \{x \mid x \in A \wedge f(x) \in B_1\}$，称$f^{-1}(B_1)$为$B_1$在$f$下的完全原像。

7

## 5.1 函数的定义

定理5.2 设$f$是从$X$到$Y$的函数，$A$、$B$都是$X$的子集，则

（1）$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

（2）$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

例5.7 设$X=\{a, b, c\}$，$Y=\{1, 2, 3\}$，$f: X \to Y$为：

$$f(a) = 1，f(b) = f(c) = 2$$

令$A=\{a, b\}$，$B=\{c\}$，于是

$$A \cap B=\varnothing，f(A \cap B)=\varnothing$$

但是

$$f(A) \cap f(B)=\{1, 2\} \cap \{2\} \neq \varnothing$$

这表明$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$。

8

## 小结

（1）函数是一种具有特殊性质的二元关系，即函数值的唯一性。

（2）函数相等就是集合相等。

（3）从$A$到$B$的函数$f: A \to B$。

（4）函数的图形表示。

（5）设$A$和$B$都为有限集，$|B^A|=|B|^{|A|}$。

（6）像和完全原像。

9

## 5.2 函数的性质与分类

具有不同性质的三种特殊的函数：满射、单射和双射。

10

## 5.2 函数的性质与分类

定义5.6 设函数f: A→B，

（1）若ranf = B，则称f: A→B是满射的。

（2）若$\forall$y $\in$ ranf，都存在唯一的x$\in$A，使得f(x) = y，则称f: A→B是单射的。

（3）若f: A→B既是满射的，又是单射的，则称f: A→B是双射的（或一一映射）。

由定义易得出：

（1）若$f: A \to B$是满射的，则对于$\forall y \in B$，都存在$x \in A$，使得$f(x) = y$。

（2）若$f: A \to B$是单射的，则对于$\forall x_1, x_2 \in A$，

①若$x_1 \neq x_2$，一定有$f(x_1) \neq f(x_2)$。或者

②若$f(x_1) = f(x_2)$，一定有$x_1 = x_2$。

11

## 5.2 函数的性质与分类

定理5.3 设A和B为有限集，若A和B的元素个数相等，即| A |=| B |，从A到B的函数f是单射当且仅当它是一个满射。

例5.9 判断下面函数是否为满射，单射，双射，为什么？

（1）$f: \{1,2\} \to \{0\}$，$f(1) = f(2) = 0$。

（2）$f: N \to N$，$f(x)=2x$。

（3）$f: Z \to Z$，$f(x)=x+1$。

解：（1）$\mathrm{ran} f = \{0\}$，所以$f$是满射。$1 \neq 2$，但$f(1) = f(2)$，所以$f$不是单射。不是双射。

（2）$\mathrm{ran} f = \{2x \mid x \in N\} \subset N$,所以$f$不是满射。对于任意的$x_1, x_2 \in N$,若$f(x_1) = f(x_2)$, 即$2x_1 = 2x_2$, 则有$x_1 = x_2$。所以$f$是单射。所以$f$不是双射。

（3）$\mathrm{ran} f = Z$，所以$f$是满射。对于任意的$x_1, x_2 \in Z$，若$f(x_1) = f(x_2)$，即$x_1+1 = x_2+1$，则可得出$x_1 = x_2$。所以$f$是单射。所以$f$是双射。

12

## 小结

满射、单射和双射三种性质的定义、判断与证明。

函数的性质 { 满射 / 单射 / 双射 } → 判断与证明

13

## 5.3 常用函数

- 本节介绍几个常用函数。

14

## 5.3 常用函数

定义5.7

（1）设$f: A \to B$，若$\exists c \in B$，使得$\forall x \in A$，都有$f(x) = c$，则称$f: A \to B$是常函数。

（2）$A$上的恒等关系$I_A$是从$A$到$A$的函数，称为$A$上的恒等函数，对于所有的$x \in A$都有$I_A(x) = x$。

（3）设$<A, \leq>$，$<B, \leq>$为偏序集，$f: A \to B$，若$\forall x_1, x_2 \in A$，如果$x_1 < x_2$就有$f(x_1) \leq f(x_2)$，则称$f$为单调递增的；若$\forall x_1, x_2 \in A$，如果$x_1 < x_2$就有$f(x_1) < f(x_2)$，则称$f$为严格单调递增的。类似地也可以定义单调递减和严格单调递减的函数，它们统称为单调函数。

15

## 5.3 常用函数

（4）设$A$为集合，对于任意的$A' \subseteq A$，$A'$的特征函数定义为

$$\chi_{A'}(x) = \begin{cases} 1 & x \in A' \\ 0 & x \in A - A' \end{cases}$$

（5）设$R$是$A$上的等价关系，令

$f: A \to A/R$且$f(x)$

$= [x]$，$\forall x \in A$

称$f$是从$A$到商集$A/R$的自然映射。

16

## 小结

本节介绍了常函数、恒等函数、集合的特征函数和自然映射等常用函数的定义与性质。

常用函数 { 常函数 / 恒等函数 / 集合的特征函数 / 自然映射 / 单调递增(减)函数和严格单调递增(减)函数 }

17

## 5.4 函数的运算

- 本节介绍函数的复合运算和逆运算及其基本性质和运算规律。

18

## 5.4.1 复合运算

函数的复合就是关系的复合。

定理5.4 设$f$、$g$为函数，则$f\circ g$也是函数，且具有以下性质：

（1）$\text{dom}(f\circ g) = \{x \mid x\in \text{dom}f \wedge f(x)\in \text{dom}g\}$

（2）$\forall x \in \text{dom}(f\circ g)$，有$f\circ g(x)=g(f(x))$

例5.12 令

$f: R^+\to R$，$f(x) = \ln x$

$g: R\to R$，$g(x) = x+1$

则有，

$\text{dom}(f\circ g) = R^+$

$\forall x \in \text{dom}(f\circ g)$，$f\circ g(x)= g(f(x)) = \ln x +1$

$\text{dom}(g\circ f) = (-1,+\infty)$

$\forall x \in \text{dom}(g\circ f)$，$g\circ f(x)= f(g(x)) = \ln(x+1)$

19

## 5.4.1 复合运算

推论1 设f，g，h为函数，则$(f\circ g)\circ h$和$f\circ(g\circ h)$都是函数，且

$$(f\circ g)\circ h= f\circ(g\circ h)$$

推论2 设$f: A\to B$，$g: B\to C$，则$f\circ g: A\to C$，且对任意的$x\in A$有

$$f\circ g(x)=g(f(x))。$$

定理5.5 设$f: A\to B$，$g: B\to C$，

（1）如果$f: A\to B$，$g: B\to C$都是满射的，则$f\circ g: A\to C$也是满射。

（2）如果$f: A\to B$，$g: B\to C$都是单射的，则$f\circ g: A\to C$也是单射。

（3）如果$f: A\to B$，$g: B\to C$都是双射的，则$f\circ g: A\to C$也是双射。

定理5.5说明函数的复合运算能够保持函数的满射、单射和双射等性质。但该定理的逆命题不为真.

20

## 5.4.1 复合运算

定理5.6设$f: A\to B$，$g: B\to C$，

（1）如果$f\circ g: A\to C$是满射，则$g: B\to C$一定是满射。

（2）如果$f\circ g: A\to C$是单射，则$f: A\to B$一定是单射。

（3）如果$f\circ g: A\to C$是双射，则$g: B\to C$一定是满射，$f: A\to B$一定是单射。

例5.14 已知$A = \{x_1, x_2, x_3\}$，$B = \{y_1, y_2, y_3\}$，$C = \{z_1, z_2\}$。令

$$f = \{<x_1, y_1>, <x_2, y_2>, <x_3, y_2>\}$$

$$g = \{<y_1, z_1>, <y_2, z_2>, <y_3, z_2>\}$$

则有

$$f\circ g = \{<x_1, z_1>, <x_2, z_2>, <x_3, z_2>\}$$

可以看出$g: B\to C$和$f\circ g: A\to C$都是满射的，但$f: A\to B$不是满射。满足定理5.6（1）。

21

## 5.4.1 复合运算

定理5.7 设$f: A\to B$，则有

$$f = f\circ I_B = I_A\circ f$$

定理5.7说明了恒等函数在函数的复合运算中的特殊性质。特别有

$$\forall f \in A^A，f\circ I_A = I_A\circ f = f$$

22

## 5.4.2 逆运算

任何关系都存在逆关系，作为满足一定条件的二元关系，函数的逆关系不一定都是函数。例如令

$$f = \{<a, 1>, <b, 0>, <c, 1>\}$$

可求得

$$f^{-1} = \{<0, b>, <1, a>, <1, c>\},$$

显然$f$是函数，但$f$的逆关系$f^{-1}$不是函数。

23

## 5.4.2 逆运算

定理5.8 设$f: A\to B$是双射的，则$f^{-1}$是函数，并且是从B到A的双射函数。称双射函数$f: A\to B$是可逆的，并称$f^{-1}$为f的反函数。

证：（1）先证$f^{-1}$是从$B$到$A$的函数$f^{-1} : B\to A$，且$f^{-1}$是满射的。

由关系的逆运算的性质（定理4.4）得

$\text{dom}\, f^{-1} = \text{ran} f = B$

$\text{ran}\, f^{-1} = \text{dom} f = A$

$f^{-1}$是从$B$到$A$的关系。

对任意的$x \in \text{dom}\, f^{-1}$，若同时存在$y_1,y_2$

$<x, y_1>\in f^{-1} \wedge <x, y_2>\in f^{-1}$

$\Leftrightarrow <y_1, x>\in f \wedge <y_2, x>\in f$（关系逆运算的定义）

$\Rightarrow y_1 = y_2$（$f$是单射的）

所以$f^{-1} : B\to A$是函数。

又由于$\text{ran}\, f^{-1} = A$，所以$f^{-1} : B\to A$是满射的。

24

## 5.4.2 逆运算

（2）再证$f^{-1}: B\to A$是单射的。

对任意的$x_1, x_2 \in \mathrm{dom}\, f^{-1}$，若有

$f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2) = y$

$\Leftrightarrow <x_1, y> \in f^{-1} \wedge <x_2, y> \in f^{-1}$

$\Leftrightarrow <y, x_1> \in f \wedge <y, x_2> \in f$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ （$f$是函数）

所以$f^{-1}$是单射的。

由（1）、（2）得$f^{-1}: B\to A$是双射的。

证毕。

25

## 5.4.2 逆运算

定理5.9 对任何双射函数$f: A\to B$及其反函数$f^{-1}: B\to A$，它们的复合函数都是恒等函数，且满足

$$f\circ f^{-1} = I_A，f^{-1}\circ f = I_B$$

证：由定理5.4的推论2得$f^{-1}\circ f: B\to B$，$f\circ f^{-1}: A\to A$ 对任意的$<x, y>$，

$<x, y> \in f\circ f^{-1}$

$\Rightarrow \exists u(<x, u> \in f \wedge <u, y> \in f^{-1})$

$\Rightarrow \exists u(<x, u> \in f \wedge <y, u> \in f)$

$\Rightarrow x = y \wedge x, y \in A$ （$f$是单射）

$\Rightarrow <x, y> \in I_A$

所以$f\circ f^{-1} \subseteq I_A$。

26

## 5.4.2 逆运算

对任意的$<x, y>$，

$<x, y> \in I_A$

$\Rightarrow x = y \wedge x, y \in A$

$\Rightarrow \exists u(<x, u> \in f \wedge <y, u> \in f)$ （$f: A\to B$）

$\Rightarrow \exists u(<x, u> \in f \wedge <u, y> \in f^{-1})$

$\Rightarrow <x, y> \in f\circ f^{-1}$

所以$I_A \subseteq f\circ f^{-1}$。所以有$f\circ f^{-1} = I_A$。同理可证$f^{-1}\circ f = I_B$

证毕。

27

## 5.4.2 逆运算

定理5.10 设$f: A\to B$，$g: B\to A$，则$f^{-1} = g$当且仅当$f\circ g = I_A$且$g\circ f = I_B$。

证：必要条件：

已知$g = f^{-1}$，这就是说$f$是可逆的，则有

$f\circ g = f\circ f^{-1} = I_A$

$g\circ f = f^{-1}\circ f = I_B$

充分条件：

已知$f\circ g = I_A$且$g\circ f = I_B$，由于$I_A$和$I_B$均为双射，由定理5.6知，$f$和$g$都是双射的。因此，$f$和$g$都是可逆的，均有反函数存在，于是

$g = I_B\circ g = (f^{-1}\circ f)\circ g = f^{-1}\circ(f\circ g) = f^{-1}\circ I_A = f^{-1}$

证毕。

28

## 小结

本节介绍函数在复合运算和逆运算中所特有的性质：

（1）函数的复合仍然是函数，但函数的逆不一定是函数，只有双射函数的逆才是函数，并且是双射的。

（2）函数的复合运算能够保持函数的满射、单射和双射等性质。

（3）反函数的定义与性质。

- 函数的运算
  - 复合
    - 函数的复合仍然是函数
    - $\forall x\in \mathrm{dom}(f\circ g), f\circ g(x)=g(f(x))$
    - 函数的复合运算能够保持函数的满射、单射和双射等性质
  - 逆
    - 函数的逆关系不一定都是函数
    - 只有双射函数$f$是可逆的，称$f^{-1}$为反函数，也是双射的
    - 对双射函数$f: A\to B$有$f\circ f^{-1}=I_A$，$f^{-1}\circ f=I_B$。

29

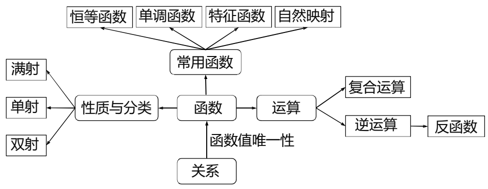
## 作业

补充习题5

30

## 本章小结

在函数的定义中给出了一个关系*R*成为函数所必须满足的条件，介绍了一些如恒等函数、常函数、特征函数等常用函数。本章重点介绍了函数的运算、性质与分类。




31

## 常见题型

1）根据集合表示或图形表示等判断某个关系是否是函数。

2）证明函数间的关系如相等、包含等。

3）求函数的像和完全原像。

4）证明或判断函数的性质，即是否是满射的、单射的或双射的。

5）函数的复合运算和逆运算。

32

## 证明方法

1. 证明 $f:A\to B$是满射的方法:　任取 $y\in B$,　找到 $x$ (即给出$x$的表示)或者证明存在$x\in A$，使得$f(x)=y$.

2. 证明 $f:A\to B$是单射的方法

方法一　$\forall x_1,x_2\in A$,

| $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow$ | … | $\Rightarrow x_1=x_2$ |
|---|---|---|
| 推理前提 | 推理过程 | 推理结论 |

方法二　$\forall x_1,x_2\in A$,

| $x_1\neq x_2\Rightarrow$ | … | $\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ |
|---|---|---|
| 推理前提 | 推理过程 | 推理结论 |

33

## 证明方法

3.　证明 $f:A\to B$不是满射的方法：找到 $y\in B$, $y\notin ranf$

4.　证明 $f:A\to B$不是单射的方法：找到 $x_1,x_2\in A$, $x_1\neq x_2$, 且 $f(x_1)=f(x_2)$

34