第三章 多维随机变量及其分布

第一节 二维随机变量及其联合分布函数

第二节 边缘分布

第三节 相互独立的随机变量

第四节 两个随机变量的函数的分布

第三章 多维随机变量及其分布

第一节 二维随机变量及其联合分布函数

第二节 边缘分布

一、二维随机变量及分布函数

二、二维离散型随机变量及其分布

三、二维连续型随机变量及其分布

一. 二维随机变量及分布函数

二维随机变量产生的背景

在实际问题中，有很多情况下随机试验的结果需要同时用两个随机变量来描述：

例： 为了研究某一地区学龄前儿童的发育情况，对这一地区的儿童进行抽查。对于每个抽查儿童都测量和记录他(她)的身高 W 和体重 H。

样本空间 $S=\{e\}=\{$该地区抽查到的儿童$\}$

而 $W(e)$ 和 $H(e)$ 是定义在 S 上的两个随机变量

$(W(e),H(e))$ 称为二维随机变量

一. 二维随机变量及分布函数

二维随机变量产生的背景

在实际问题中，有很多情况下随机试验的结果需要同时用两个随机变量来描述：

例： 炮弹的弹着点的位置需要由它的横坐标和纵坐标来确定。

样本空间$S=\{e\}=\{$炮弹的弹着点的位置$\}$

$X(e)$ 表示弹着点位置的横坐标

$Y(e)$ 表示弹着点位置的纵坐标

则$X(e)$和$Y(e)$是定义在S上的两个随机变量

$(X(e),Y(e))$称为二维随机变量

1. 二维随机变量的定义

定义1 设 $S=\{e\}$ 是随机试验 E 的样本空间，

$X=X(e)$, $Y=Y(e)$ 是定义在 S 上的随机变量，

由它们构成的向量 (X,Y) 称为二维随机变量.

说明： X,Y 均要求定义在同一个样本空间 S 上.

因此从两方面研究 (X,Y)：

- (X,Y) —— 整体
  联合分布函数、分布律、概率密度
- X, Y —— 个体
  边缘分布函数、分布律、概率密度

例 将一枚均匀的硬币掷 3 次，令

X： 3次抛掷中正面出现的次 数；

Y： 3次抛掷中正面出现次数 与反面出现次数之差的绝对值.

X的可能取值为 0,1,2,3. Y的可能取值为 1,3.

此时(X,Y)就是一个二维随机变量

e	HHH	HHT	HTH	THH	HTT	THT	TTH	TTT
$X(e)$	3	2	2	2	1	1	1	0
$Y(e)$	3	1	1	1	1	1	1	3

(X,Y)的可能取值为：(0,3), (1,1), (2,1), (3,3)

2. 二维随机变量的分布函数的定义

$F(x)=P(X\le x)$

定义2 设 (X,Y) 是二维随机变量，对任意的实数 x, y

二元函数 $F(x,y)=P(X\le x, Y\le y)$ (积事件)

称为二维随机变量 (X, Y) 的分布函数

或 X 与 Y 的联合分布函数.

说明

1) $\{X\le x, Y\le y\}=\{X\le x\}\cap\{Y\le y\}$

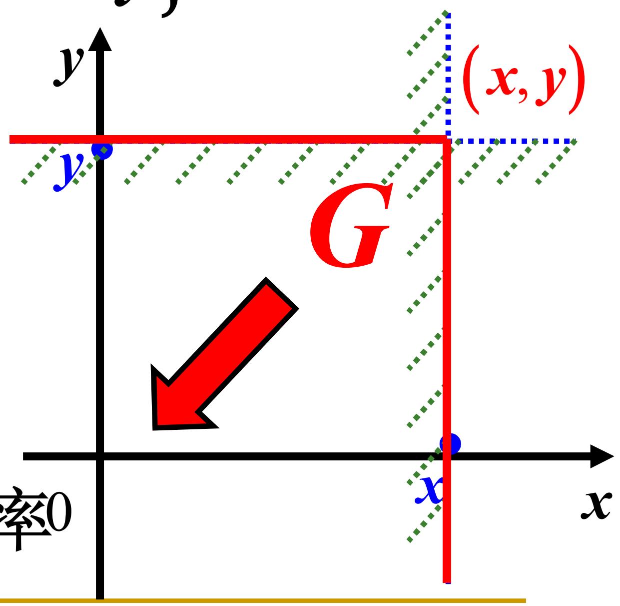
2) (X,Y) 几何意义

—— xoy 面上的随机点的坐标

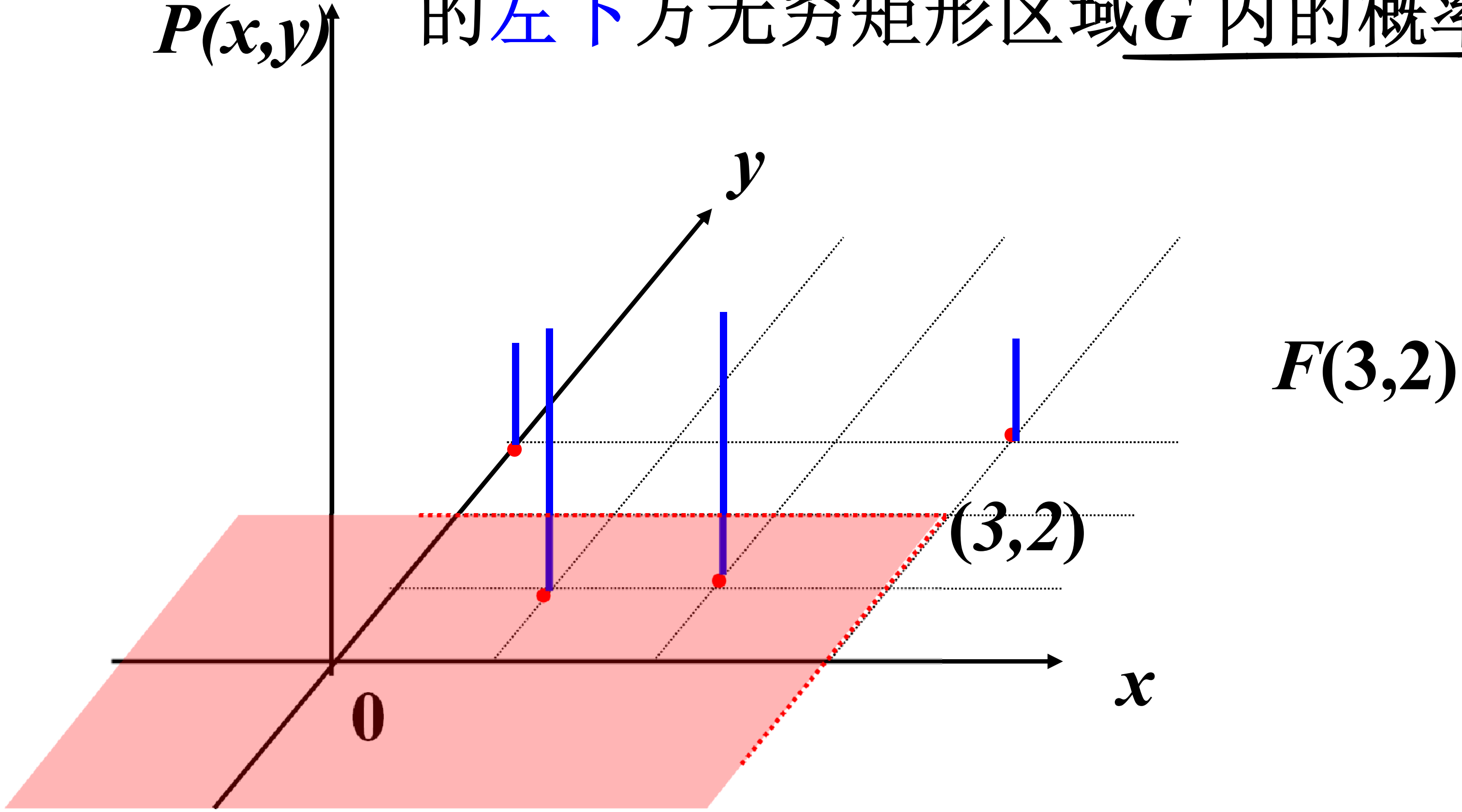
3) $F(x,y)$ 在数值上为

随机点 (X,Y) 落入以(x,y)为顶点

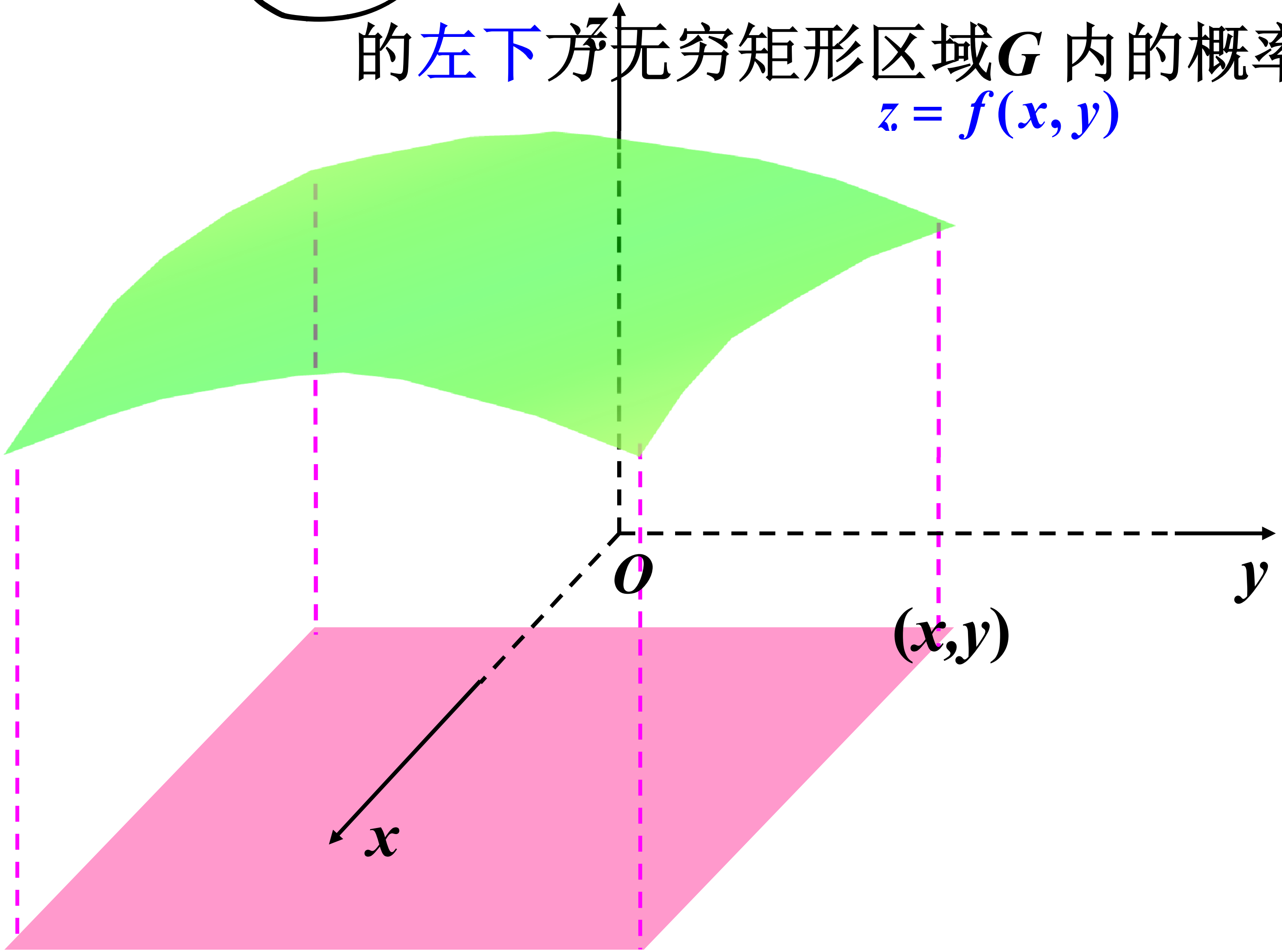
的左下方无穷矩形区域G 内的概率



3) $F(x,y)$ 在数值上为随机点 (X,Y) 落入以(x,y)为顶点的左下方无穷矩形区域G 内的概率



3) $F(x,y)$ 在数值上为随机点 (X,Y) 落入以(x,y)为顶点的左下方无穷矩形区域G 内的概率



3. 二维随机变量分布函数$F(x,y)$的性质

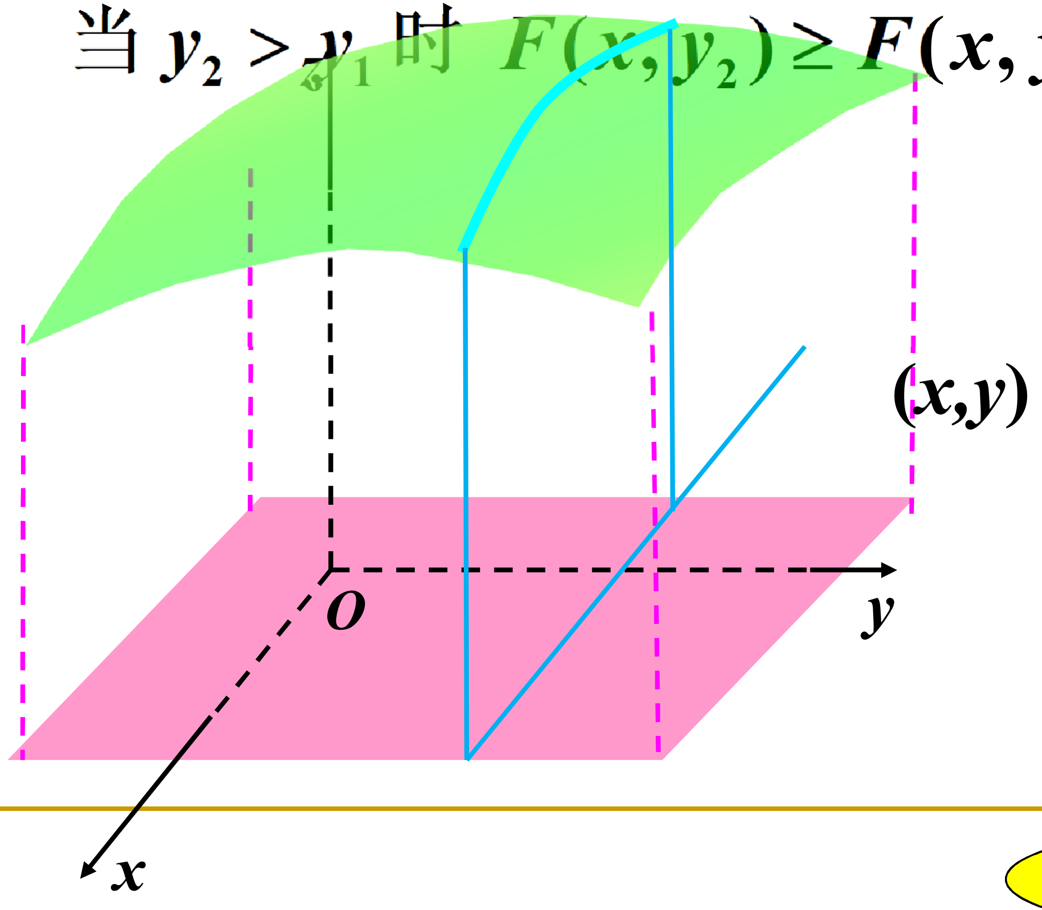
性质1 $F(x,y)$ 分别对 x 和 y 单调非减, 即:

当 $x_2 > x_1$ 时 $F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$

对固定y, x是非减的

当 $y_2 > y_1$ 时 $F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$

对固定的x, y是非减的



3. 二维随机变量分布函数$F(x,y)$的性质

性质1 $F(x,y)$ 分别对 x 和 y 单调非减, 即:

当 $x_2 > x_1$ 时 $F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$

对固定y, x是非减的

当 $y_2 > y_1$ 时 $F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$

对固定的x, y是非减的

性质2 $F(x,y)$对每个自变量x 或 y是右连续的，即:

$$\lim_{x\to x_0^+} F(x,y) = F(x_0, y)$$

$$\lim_{y\to y_0^+} F(x,y) = F(x, y_0)$$

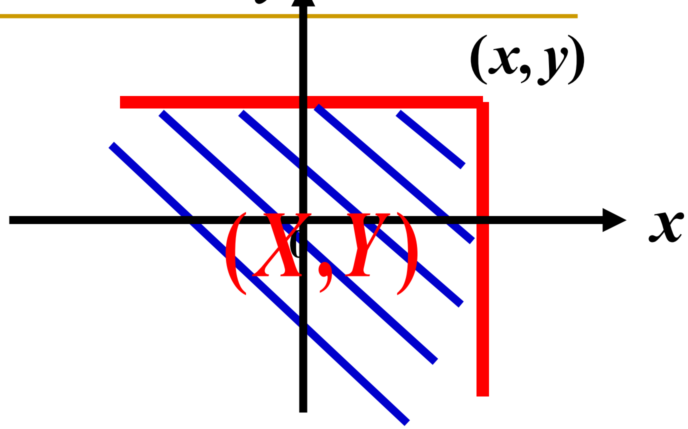
1 $F(x)$是一个不减函数。

2 $0 \leq F(x) \leq 1$,

$F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$

3 $F(x)$ 是右连续的函数

性质3 $0 \le F(x,y) \le 1$ 且：



$$F(x,-\infty)=\lim_{y\to-\infty}F(x,y)=0$$

$$F(-\infty,y)=\lim_{x\to-\infty}F(x,y)=0$$

$$F(-\infty,-\infty)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}}F(x,y)=0$$

随机点落在这三种情形的矩形内是不可能事件，故概率趋向于零

$$F(+\infty,+\infty)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)=1$$

随机点落在这种情况的矩形内是必然事件，故概率趋于1

1 $F(x)$是一个不减函数。

2 $0 \le F(x) \le 1$，
$F(-\infty)=0, F(+\infty)=1$

3 $F(x)$ 是右连续的函数

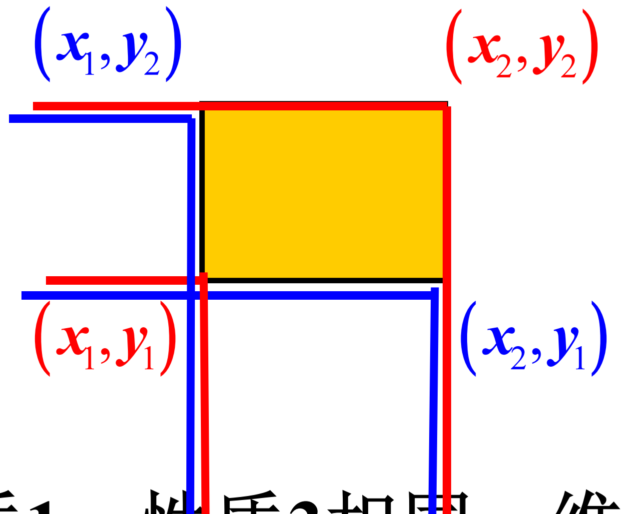
性质4 当 $x_1 \le x_2, y_1 \le y_2$ 时，有：

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \ge 0$$

$$P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\} \ge 0$$

不等式左边恰好是（X, Y）落在矩形内的概率，而概率具有非负性，故得此不等式。

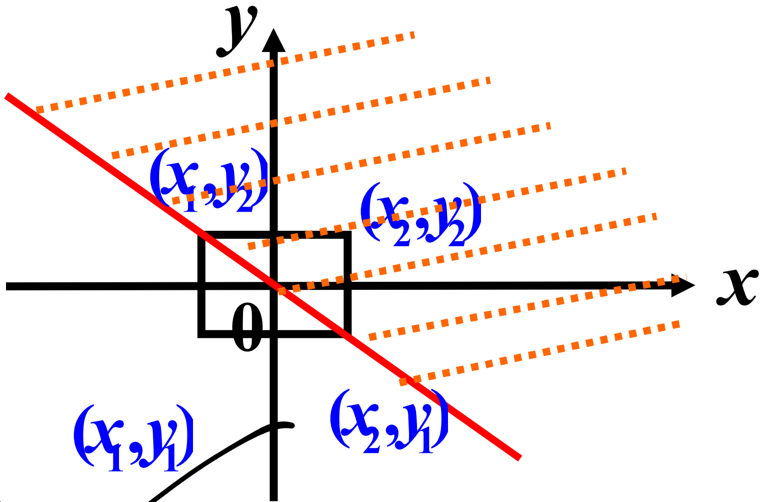
说明：



注： 性质1～性质3相同一维随机变量分布函数的性质

若性质1～性质3均满足，但性质4不满足，则不称之为联合分布函数。

例判断 $F(x,y)=\begin{cases}1 & x+y\geq 0\\ 0 & x+y<0\end{cases}$



是否二维随机变量的分布函数？

对此二元函数来验证性质4。

现找 4 个点如下：

$(x_2,y_2)=(1,\ 1)$;　　$(x_1,y_2)=(-1,1)$

$(x_2,y_1)=(1,-1)$;　　$(x_1,y_1)=(-1,-1)$

$$F(1,1)-F(-1,1)-F(1,-1)+F(-1,-1)$$

$$=1-1-1+0=-1<0$$ 即第4条性质不满足

说明： $F(x,y)$ 不是二维随机变量的分布函数，仅仅是一个二元函数。

4. 边缘分布函数

$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)$$

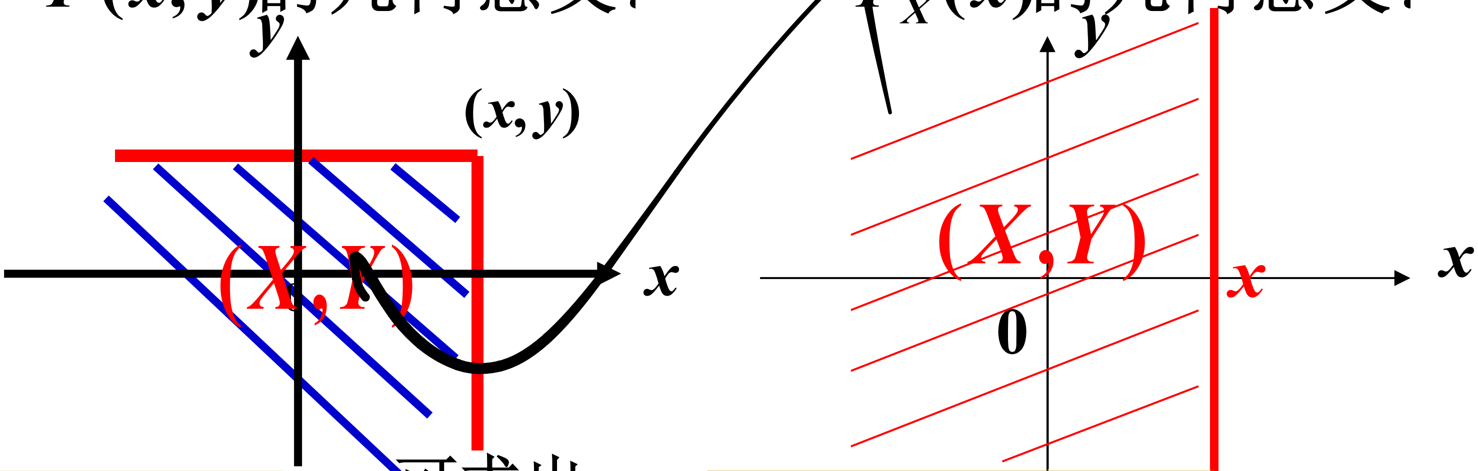
设 $F(x,y)$为 (X,Y) 的联合分布函数，则

$$F_X(x)=P(X\le x)=P(X\le x,Y<+\infty)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)$$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X<+\infty,Y\le y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)$$

分别称为二维随机变量 (X,Y)关于 X 和关于 Y 的边缘分布函数.

$F(x,y)$的几何意义： $F_X(x)$的几何意义：



$F(x,y)$ 可求出→ $F_X(x),F_Y(y)$

二. 二维离散型随机变量及其分布

1. 二维离散型随机变量的定义

如果二维随机变量(X,Y)的取值是有限对或可列无限多对，则称(X,Y)为二维离散型随机变量.

2. 二维离散型随机变量的分布律及分布函数

设(X,Y)的所有可能取的值为：(x_i, y_j)，$i, j = 1,2\cdots$

其相应的概率为：$P_{ij} = P(X=x_i, Y=y_j) \quad i,j=1,2,\cdots\cdots$

称为二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布或分布律，或称为X与Y联合分布律.

$P(X \leq x, Y \leq y)$

则其联合分布函数为：$F(x,y) = \sum\limits_{\substack{x_i \leq x \\ y_j \leq y}} P_{ij}$

(X,Y): $(x_i, y_j), i, j = 1,2\cdots\cdots$

$$P_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) \quad i, j = 1, 2, \cdots\cdots$$

注: 联合分布律常用下列表格形式表示:

X \ Y	y_0	y_1	$\cdots$	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$\cdots$
x_0	p_{00}	p_{01}	$\cdots$	$\cdots$	p_{0j}	$\cdots$	$\cdots$
x_1	p_{10}	p_{11}	$\cdots$	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$		
x_i	p_{i0}	p_{i1}	$\cdots$	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$		

满足 (1) $p_{ij} \geq 0$, (2) $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$

联合分布函数 $F(x, y) = \sum_{\substack{x_i \leq x \\ y_j \leq y}} P_{ij}$

例1：将一枚均匀的硬币掷 3次，令

X： 3次抛掷中正面出现的次 数；

Y： 3次抛掷中正面出现次数 与反面出现次数之差的绝对值． 试求$(X, \ Y)$的联合分布律．

e	HHH	HHT	HTH	THH	HTT	THT	TTH	TTT
$X(e)$	3	2	2	2	1	1	1	0
$Y(e)$	3	1	1	1	1	1	1	3
p	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

Y \ X	0	1	2	3
1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$

Y \ X	0	1	2	3
1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$

3. 离散型随机变量的边缘

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
P	$p_{1\bullet}$	$p_{2\bullet}$	$\cdots$	$p_{i\bullet}$	$\cdots$

已知$P(X=x_i,Y=y_j)=P$

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$P\{X=x_i\}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
x_i	p_{i1}	p_{i2}				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$	
$P\{Y=y_j\}$	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	$\cdots$	$p_{\bullet j}$	$\cdots$	1

Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
P	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	$\cdots$	$p_{\bullet j}$	$\cdots$

$P_{i\bullet}=P(X=x_i)=\sum_{j=0}^{+\infty}p_{ij}$称为$X$的边缘分布律

$P_{\bullet j}=P(Y=y_j)=\sum_{i=0}^{+\infty}p_{ij}$称为$Y$的边缘分布律

例2：将一枚均匀的硬币掷 3次，令

X： 3次抛掷中正面出现的次 数；

Y： 3次抛掷中正面出现次数 与反面出现次数之差的绝对值． 求X,Y的边缘分布律

e	HHH	HHT	HTH	THH	HTT	THT	TTH	TTT
$X(e)$	3	2	2	2	1	1	1	0
$Y(e)$	3	1	1	1	1	1	1	3
p	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

Y \ X	0	1	2	3	$P\{Y=y_j\}$
1	0	3/8	3/8	0	6/8
3	1/8	0	0	1/8	2/8
$P\{X=x_i\}$	1/8	3/8	3/8	1/8	1

4. 离散型随机变量的边缘分布函数

已知$P(X=x_i,Y=y_j)=P_{ij}$为(X,Y)的联合分布律，

可求出X的边缘分布函数

$$F_X(x)=P(X\le x,Y<+\infty)\quad=F(x,+\infty)\quad=\sum_{x_i\le x}\sum_{j=1}^{\infty}P_{ij}$$

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$P\{X=x_i\}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$P\{Y=y_j\}$	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	$\cdots$	$p_{\bullet j}$	$\cdots$	1

Y的边缘分布函数

$$F_Y(y) = P(X < +\infty, Y \le y) = F(+\infty, y) = \sum_{y_j \le y} \sum_{i=1}^{\infty} P_{ij}$$

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$P\{X = x_i\}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$P\{Y = y_j\}$	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	$\cdots$	$p_{\bullet j}$	$\cdots$	1

例3. 同一品种的五个产品中，有两个正品。每次从中取一个检验质量，不放回地抽样，连续两次。

$$X_k=\begin{cases}0, & \text{第}k\text{次取到正品} \\ 1, & \text{第}k\text{次取到次品}\end{cases} \quad (k=1,2)$$

求：(X_1, X_2) 的联合分布律.

解： 由题意 X_1 的取值为：0, 1； X_2 的取值为：0, 1

$$P(X_1=0,X_2=0)=P(X_1=0)\cdot P(X_2=0\mid X_1=0)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$$

$$P(X_1=0,X_2=1)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$$

$$P(X_1=1,X_2=0)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$$

$$P(X_1=1,X_2=1)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$$

$X_1 \backslash X_2$	0	1
0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

例4 ? 什么意思

设 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$, $Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

若 $P\{XY=0\}=1$, 求 (X,Y) 的联合分布律

解

(X,Y)	$(-1,0)$	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
XY	0	-1	0	0	0	1

$$P\{XY=0\}=1 \longrightarrow P\{XY\neq 0\}=0$$

有点强，取反

$$\longrightarrow P\{(X,Y)=(-1,1)\}+P\{(X,Y)=(1,1)\}=0$$

$$\longrightarrow P\{(X,Y)=(-1,1)\}=P\{(X,Y)=(1,1)\}=0$$

例4 设 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$, $Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

若 $P\{XY=0\}=1$, 求 (X,Y) 的联合分布律

解 $P\{(X,Y)=(-1,1)\} = P\{(X,Y)=(1,1)\}=0$

为什么啊?

$X \backslash Y$	0	1	
-1	$1/4$	0	$1/4$
0	0	$1/2$	$1/2$
1	$1/4$	0	$1/4$
	$1/2$	$1/2$	1

三. 二维连续型随机变量及其分布

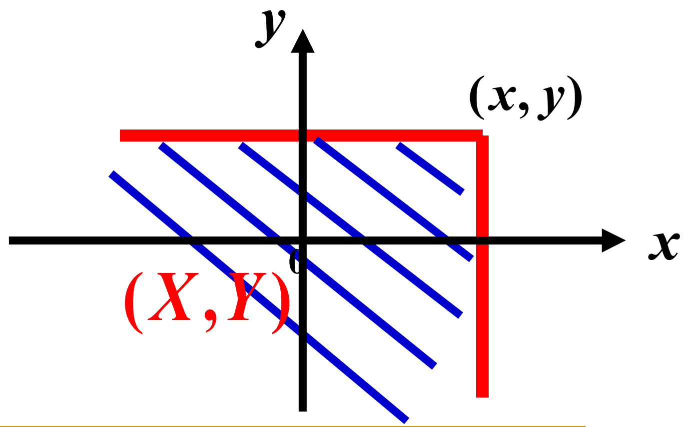
1. 二维连续型随机变量的定义及概率密度

定义 对于二维随机变量(X,Y)的分布函数$F(x,y)$，若存在非负函数$f(x,y)$，对任意的x, y有：

$$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv$$

则称(X,Y)是二维连续型随机变量，$f(x,y)$为(X,Y)的联合概率密度.

$$P(X\le x)=F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$$



2. 概率密度的性质

性质1 $f(x,y)\geq 0$

性质2 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

1 $f(x)\geq 0$

2 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

3 $F'(x) = f(x)$

4 $P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

2. 概率密度的性质

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$$

性质3 若 $f(x,y)$ 在点 (x, y) 处连续，则：

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

性质4 设 G 是 XOY 平面上的一个区域，则点(X,Y)落在G内的概率为:

$$P\{(X,Y)\in G\} = \iint_G f(x,y)\;dx\,dy$$

这个公式非常重要！

1 $f(x)\ge 0$

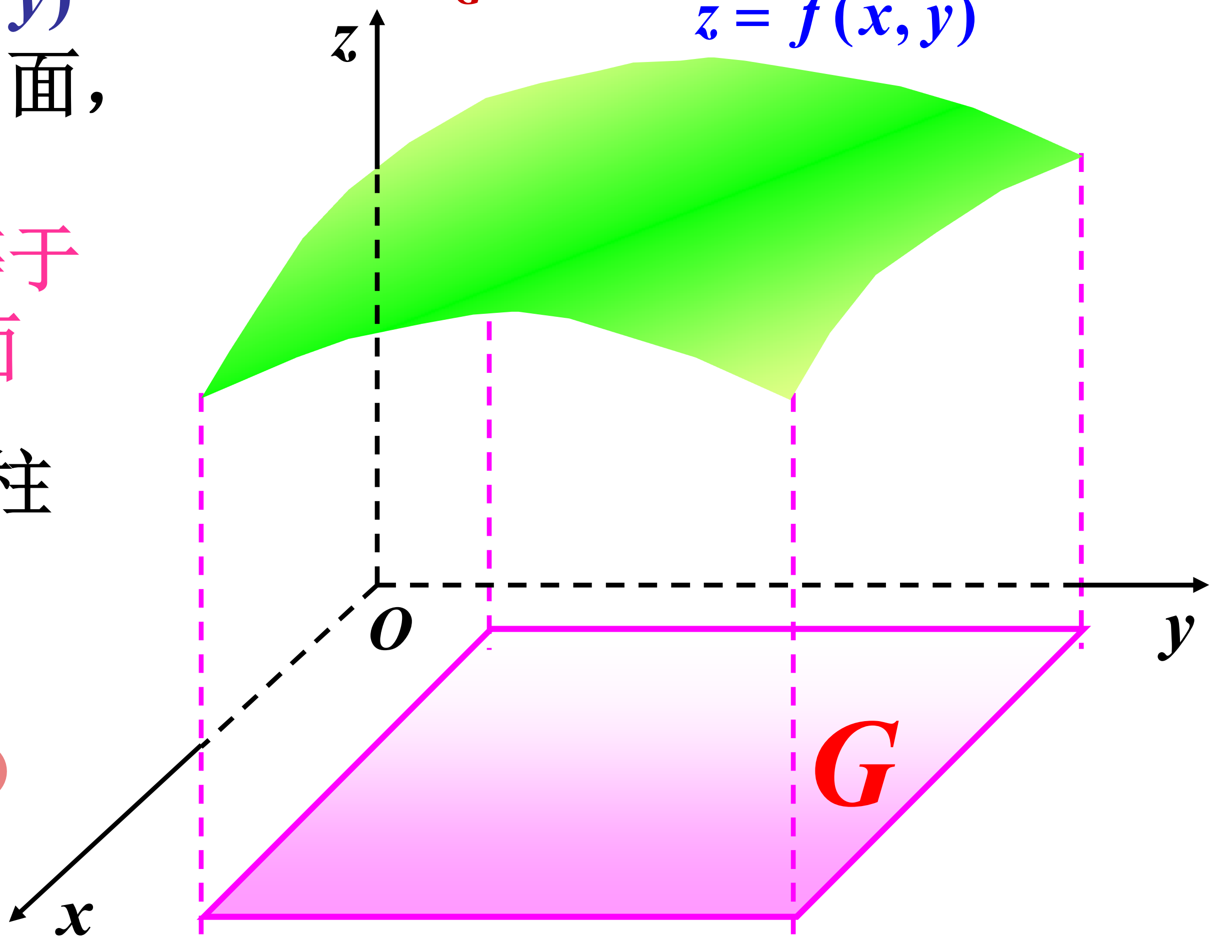
2 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

3 $F'(x) = f(x)$

4 $P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

设 G 是 XOY 平面上的一个区域，则点(X,Y)落在G内的概率为: $P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)dxdy.$

在几何上 $z=f(x,y)$ 表示空间的一个曲面，上式即表示 $P\{(X,Y)\in G\}$的值等于以 G 为底，以曲面 $z=f(x,y)$为顶的柱体体积.



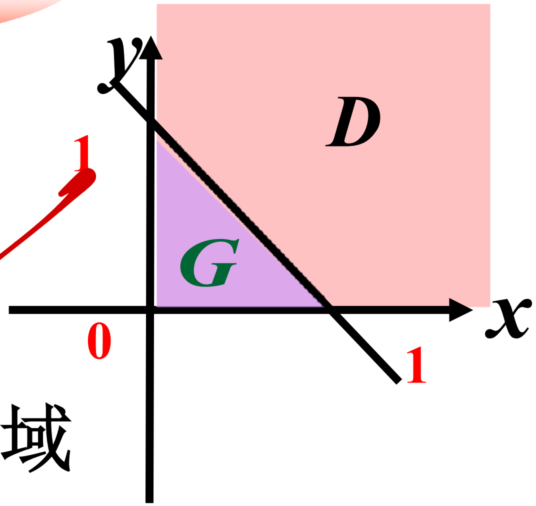
注: 当G 时矩形区域时，概率还可用$F(x, y)$计算

例5. 设 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & x>0, y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

求: (1) 分布函数 $F(x,y)$

(2) (X,Y)落在G内的概率

G: $x+y=1$及 x 轴、y轴所围区域



解: (1) 因为 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy$

则当 $x<0, y<0$ 时 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} 0 \ dx = 0$

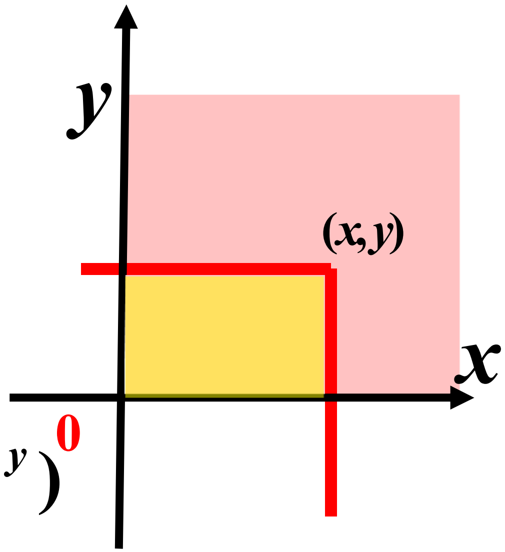
当 $x<0, y>0$ 时 $F(x,y)=0$

当 $x>0, y<0$ 时 $F(x,y)=0$

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$$

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & x>0, y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

当 $x>0, y>0$ 时



$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\, dx\, dy$$

$$=\int_{0}^{x}\int_{0}^{y} e^{-(x+y)}dxdy$$

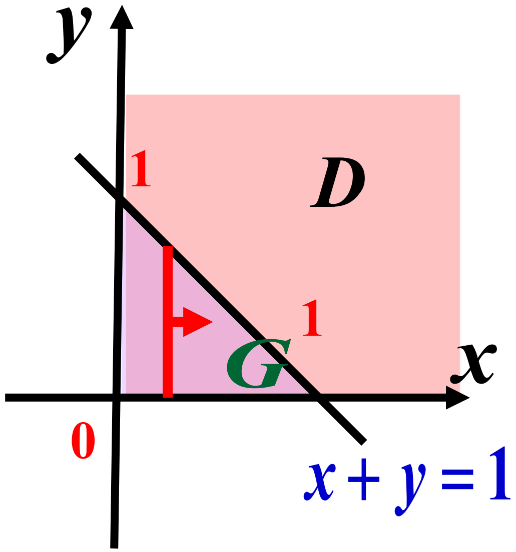
$$=\int_{0}^{x} e^{-x}dx\int_{0}^{y} e^{-y}dy=(1-e^{-x})(1-e^{-y})$$

$$F(x,y)=\begin{cases} (1-e^{-x})(1-e^{-y}) & x>0, y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(2)求$P\{(X,Y)\in G\}$

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & x>0,y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

G: $x+y=1$及 x 轴、y轴所围区域



$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)dxdy$$

$$=\iint_{GD} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} e^{-(x+y)}dy$$

$$=1-2e^{-1}\approx 0.2642$$

例 6　设二维随机变量$(X,\ Y)$的密度函数为

$$f(x,\ y)=\begin{cases} ce^{-(3x+4y)} & x>0,\ y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 求常数c；　　(2) 求$(X,\ Y)$的联合分布函数；

(3) 求$P\{0<X<1,\ 0<Y<2\}$.

解：(1) 由密度函数的性质，得

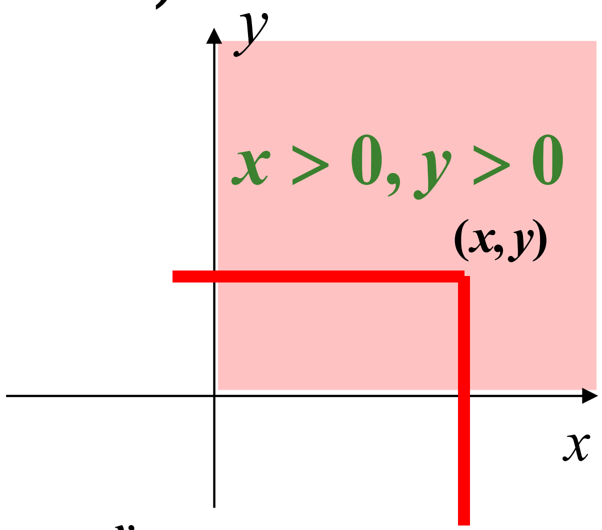
$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)dxdy = c\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} e^{-(3x+4y)}dxdy$$

$$=c\int_{0}^{+\infty} e^{-3x}dx\cdot\int_{0}^{+\infty} e^{-4y}\,dy = \frac{c}{12}$$　所以，$c=12$.

(2) $F(x, \quad y)$

$$f(x, \quad y)=\begin{cases} ce^{-(3x+4y)} & x>0, \quad y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$= P\{X \le x, \quad Y \le y\} = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u, \quad v)dvdu$$



当$x \le 0$或$y \le 0$时，$F(x, \quad y)=0$；

当 $x > 0$ 且 $y > 0$ 时，

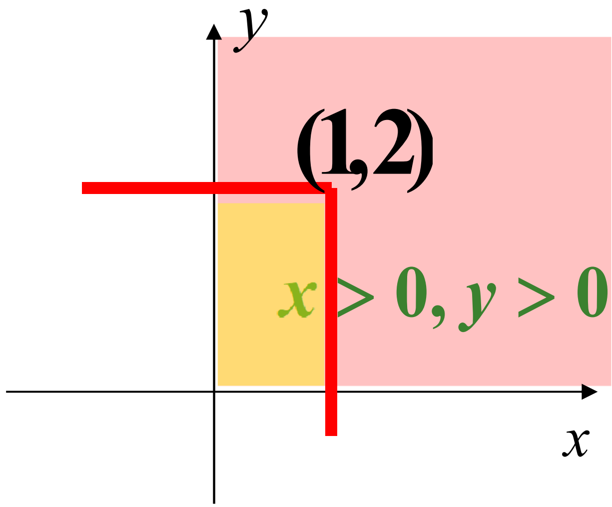
$$F(x, \quad y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u, \quad v)dvdu$$

$$=12\int_{0}^{x} du \int_{0}^{y} e^{-(3u+4v)}dv = 12\int_{0}^{x} e^{-3u}du \cdot \int_{0}^{y} e^{-4v}\,dv$$

$$=\left(1-e^{-3x}\right)\left(1-e^{-4y}\right)$$

所以，$F(x,\ y)=\begin{cases}\left(1-e^{-3x}\right)\left(1-e^{-4y}\right) & x>0,\ y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

(3) $P\{0<X<1,\quad 0<Y<2\}$



$$=\iint\limits_{0<x<1,\quad 0<y<2} f(x,\ y)\,dxdy$$

$$=12\int_0^1 dx\int_0^2 e^{-(3x+4y)}dy$$

$$=12\int_0^1 e^{-3x}dx\cdot\int_0^2 e^{-4y}\,dy \quad =\left(1-e^{-3}\right)\left(1-e^{-8}\right)$$

3. 连续型随机变量的边缘概率密度

已知连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度$f(x,y)$

及联合分布函数$F(x,y)$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$F_X(x)=P(X\le x)=P(X\le x, Y\le +\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy$$

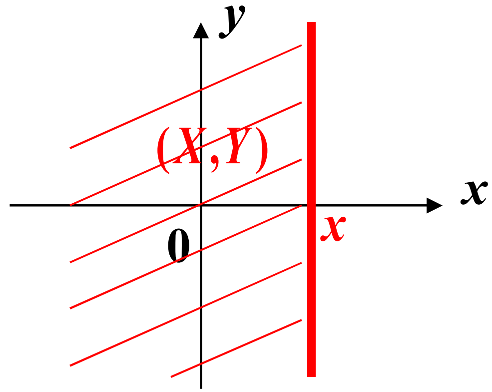
$$=\int_{-\infty}^{x}\{\underline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy}\}dx=\int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$$

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$称为$X$的边缘概率密度

类似:

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

称为Y的边缘概率密度



例7 设(X, Y)的密度为 $f(x,y)=\begin{cases} Ax, & 0<y<x<1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ G

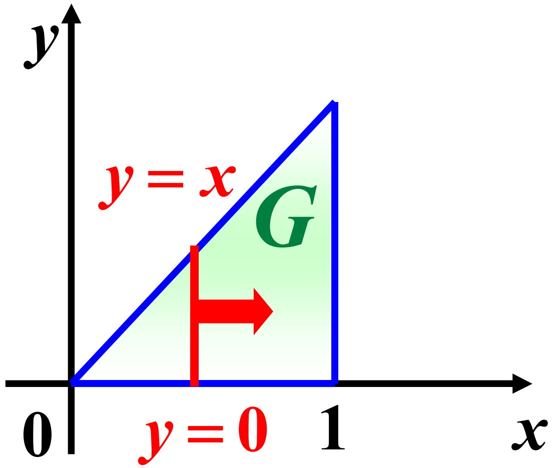
求： *i*) A

ii) $P\{X+Y<1\}$. *iii*) $f_X(x), f_Y(y)$

解 *i*) $\because \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy$

$$=\iint_G Axdxdy = \int_0^1 dx\int_0^x Axdy$$

$$=\frac{A}{3}=1 \longrightarrow A=3$$



$$\therefore f(x,y)=\begin{cases} 3x, & 0<y<x<1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

例7 $f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ $\quad P\{X+Y<1\}$

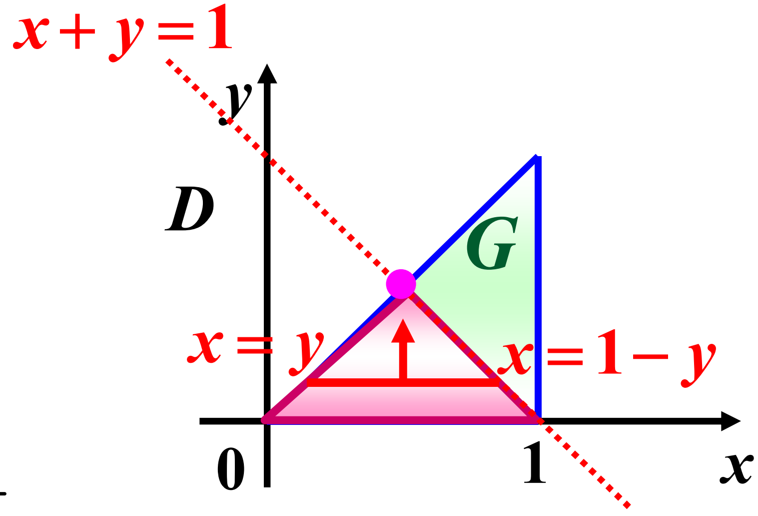
解 $ii)\ \{X+Y<1\}=\{(X,Y)\in D\},\ D=\{(x,y)|x+y<1\}$

$$P\{X+Y<1\}$$

$$=\iint_{GD} f(x,y)dxdy$$

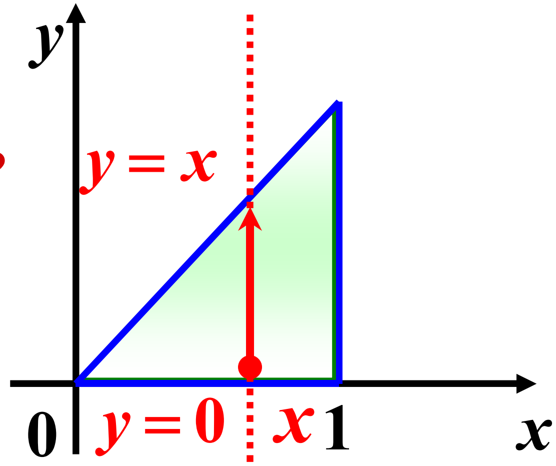
$$=\iint_{GD} 3xdxdy$$

$$=\int_0^{1/2}dy\int_y^{1-y}3xdx \quad =\frac{3}{8}$$



例7 $f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

求：$iii)\ f_X(x),\ f_Y(y)$

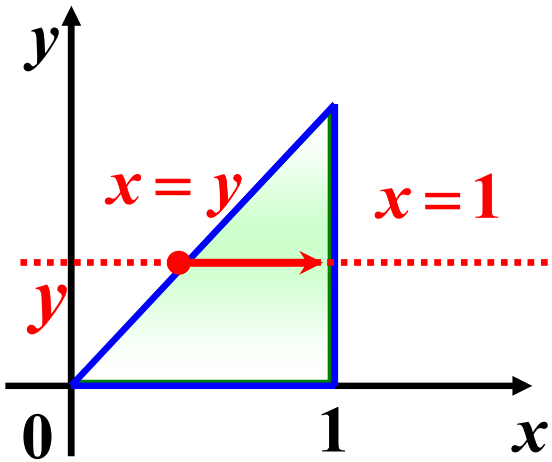


解 $iii)\ f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

$$=\begin{cases}\int_0^x 3x\,dy = 3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\int_y^1 3x\,dx=\frac{3}{2}\left(1-y^2\right), & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



即

$$f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}\left(1-y^2\right), & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$