第一章 误差

王志明
wangzhiming@ustb.edu.cn

第一 章 误差

- 1.1 误差的来源
- 1.2 绝对误差、相对误差及有效数字
- 1.3 数值计算中误差的传播
- 1.4 数值计算中应注意的问题

误差问题

计算机越来越强大，误差还是个问题吗？

例1 $y = \text{argtan}(543\ 0) - \text{argtan}(542\ 9)$

$\approx 1.5706122 \ - 1.5706121 \ = 0.0000001$

更精确的结果：**0.000000003392191**

例2 $I_n = e^{-1}\int_0^1 x^n e^x dx \qquad (n = 0,1,2,...)$

递推公式： $I_n = 1 - nI_{n-1}$

n	I_n近似值
0	0.63212056
1	0.36787944
2	0.26424112
3	0.20727664
4	0.17089344
5	0.14553280
6	0.12680320
7	0.11237760
8	0.10097920
9	0.091187200
10	0.088128000
11	0.030592000
12	0.63289600
13	-7.2276480
14	102.18707

$$I_n = e^{-1}\int_0^1 x^n e^x dx$$

$$I_0 = 1 - e^{-1}$$

$$\approx 0.63212056$$

$$0 < I_n < 1$$

例3 $$x^2-(10^9+1)x+10^9=0$$

$$x_1 = 10^9,\ x_2 = 1$$

$$\mathrm{x} = \frac{10^9 + 1 \pm \sqrt{(10^9+1)^2 - 4\times 10^9}}{2}$$

保留8位有效字近似计算：

$$x_1 \approx 10^9,\ x_2 \approx 0$$

$$x_2=\frac{2\times 10^9}{10^9+1+\sqrt{(10^9+1)^2-4\times 10^9}}\approx 1$$

§1.1 误差的来源

抽象、简化　　　　　　　数值计算

实际问题 → 数学模型 → 问题近似解

- 模型误差
- 观测误差
- 截断误差
- 舍入误差

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

§1.2 绝对误差、相对误差及有效数字

§1.2.1 绝对误差

定义：设x*为准确值x的一个近似值，则

$$\boxed{e(x^*) = x - x^*}$$

称为近似值x*的绝对误差，简称为误差。

绝对误差限：绝对误差的上界。

$$\boxed{|e(x^*)| = |x - x^*| \le \varepsilon}$$

准确值范围： $x^* - \varepsilon \le x \le x^* + \varepsilon$

§1.2.2 相对误差

定义：设x*为准确值x的一个近似值，则绝对误差与准确值之比称为近似值x*的相对误差：

$$\boxed{e_r(x^*) = \frac{e(x^*)}{x} = \frac{x - x^*}{x}}$$

近似：

$$|e_r(x^*)| \approx \left|\frac{e(x^*)}{x^*}\right|$$

相对误差限：

$$\boxed{|e_r(x^*)| = \left|\frac{e(x^*)}{x^*}\right| \le \varepsilon_r}$$

§1.2.3 有效数字

有效数字：从第一个非零数字到(小数点后)最后一位的所有数字。

定理：若x的近似值：

$$x^* = \pm 0.a_1 a_2 \cdots a_n \times 10^m \ (a_1 \neq 0)$$

有n位有效数字，则 $\frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1}$ 为其相对误差限。

反之，若x*的相对误差限满足

$$\varepsilon_r \leq \frac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{-n+1}$$

则x*至少有n位有效数字。

$n \rightarrow \varepsilon_r = \frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1}$

$\not\leftarrow$

得 $\varepsilon_r \leq \frac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{-n+1}$

wangzhiming@ustb.edu.cn

【证明】(1)　$x^* = \pm 0.a_1 a_2 \cdots a_n \times 10^m \ (a_1 \neq 0)$

$$|e(x^*)| = |x - x^*| \le \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$$

$$\left|e_r(x^*)\right| = \left|\frac{e(x^*)}{x^*}\right| \le \frac{0.5 \times 10^{m-n}}{0.a_1 a_2 \ldots a_n \times 10^m} \le \frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1}$$

(2)若：
$$\varepsilon_r \le \frac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{-n+1}$$

$$\left|e(x^*)\right| = \left|x * e_r(x^*)\right| \le 0.a_1 a_2 \ldots a_n \times 10^m \varepsilon_r \le$$

$$(a_1 + 1) \times 10^{m-1} \times \frac{1}{2(a_1 + 1)} \times 10^{-n+1} = \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$$

有n位有效数字!

补充说明：

$$\left|e_r(x*)\right| = \left|\frac{e(x*)}{x\ *}\right| \le \frac{0.5\times 10^{m-n}}{0.a_1a_2\ldots a_n\times 10^m} = \frac{1}{2\times a_1.a_2\ldots a_n}\times 10^{-n+1}$$

$$\frac{1}{2(a_1+1)}\times 10^{-n+1} \le \frac{1}{2\times a_1.a_2\ldots a_n}\times 10^{-n+1} \le \frac{1}{2a_1}\times 10^{-n+1}$$

$\Downarrow$

n位有效数字

§1.3 数值计算中误差的传播

§1.3.1 基本运算误差中误差估计

给定多元函数：$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

近似值为：$y^*=f(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$

y 所产生的误差可以用Taylor展开式来估计：

$$\boxed{e(y)}=y-y^*=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-f(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$$

$$\approx df(x_1^*,\dots,x_n^*)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}f(x_1,\cdots,x_n)\cdot(x_i-x_i^*)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}f(x_1,\cdots,x_n)\cdot\boxed{e(x_i^*)}$$

相对误差：

$$\boxed{e_r(y^*)} = \frac{e(y^*)}{y} \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{e(x_i^*)}{y^*}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i^*}{y^*} \boxed{e_r(x_i^*)}$$

也可写为：

$$e_r(y^*) = \frac{e(y^*)}{y^*} \approx \frac{df(x_1^*, \ldots, x_n^*)}{f(x_1^*, \ldots, x_n^*)} = d(\ln f)$$

和、差、积、商误差公式：

$$\begin{cases} e(x_1 \pm x_2) = e(x_1) \pm e(x_2) \\ e_r(x_1 \pm x_2) = \dfrac{x_1}{x_1 \pm x_2} e_r(x_1) \pm \dfrac{x_2}{x_1 \pm x_2} e_r(x_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} e(x_1 x_2) \approx x_2 e(x_1) + x_1 e(x_2) \\ e_r(x_1 x_2) \approx e_r(x_1) + e_r(x_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} e(\dfrac{x_1}{x_2}) \approx \dfrac{1}{x_2} e(x_1) - \dfrac{x_1}{x_2^2} e(x_2) \\ e_r(\dfrac{x_1}{x_2}) \approx e_r(x_1) - e_r(x_2) \end{cases}$$

放大

可以推导出以下误差限传播关系：

$$\left|e(x_1 \pm x_2)\right| = \left|e(x_1) \pm e(x_2)\right| \le \left|e(x_1)\right| + \left|e(x_2)\right|$$

绝对误差限放大

$$\left|e_r(x_1 x_2)\right| \approx \left|e_r(x_1) + e_r(x_2)\right| \le \left|e_r(x_1)\right| + \left|e_r(x_2)\right|$$

$$\left|e_r\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\right| \approx \left|e_r(x_1) - e_r(x_2)\right| \le \left|e_r(x_1)\right| + \left|e_r(x_2)\right|$$

例：设y=x^n，求y的相对误差与x的相对误差之间的关系。

$$e_r(y)=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{x}{y}e_r(x)=nx^{n-1}\cdot\frac{x}{x^n}e_r(x)=ne_r(x)$$

或：

$$e_r(y)=nx^{n-1}\cdot\frac{x}{x^n}e_r(x)$$

$$e_r(y)=d(\ln x^n)=nd(\ln x)=ne_r(x)$$

例 4　测得圆环(图 1-3)外径 $D_1=(10\pm0.05)$ cm,内径 $D_2=(5\pm0.1)$ cm,则其面积 $S=\frac{\pi}{4}(D_1^2-D_2^2)$ 的近似值为

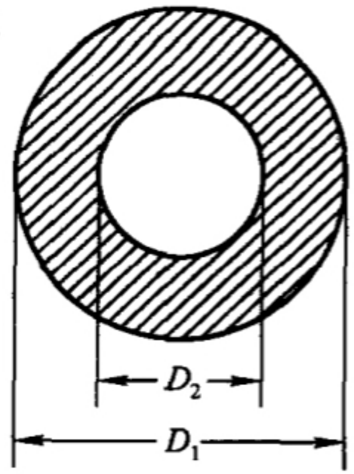

图 1-3

$$S^*=\frac{\pi}{4}[(D_1^*)^2-(D_2^*)^2]$$

$$=\frac{\pi}{4}(10^2-5^2)=\frac{75}{4}\pi\approx58.905\ \text{cm}^2.$$

由近似等式(1.8)知,S^* 的绝对误差

$$e^*(S)\approx\frac{\pi}{2}D_1^*e^*(D_1)-\frac{\pi}{2}D_2^*e^*(D_2).$$

现已知 $D_1^*=10$ cm,$D_2^*=5$ cm,$|e^*(D_1)|\leqslant0.05$ cm,$|e^*(D_2)|\leqslant0.1$ cm,故

$$|e^*(S)|\approx\left|\frac{\pi}{2}D_1^*e^*(D_1)-\frac{\pi}{2}D_2^*e^*(D_2)\right|$$

$$\leqslant\frac{\pi}{2}D_1^*|e^*(D_1)|+\frac{\pi}{2}D_2^*|e^*(D_2)|$$

$$\leqslant\frac{\pi}{2}\times10\times0.05+\frac{\pi}{2}\times5\times0.1$$

$$=0.5\pi\approx1.5708\ \text{cm}^2.$$

于是 S^* 的相对误差 $e_r^*(S)$ 满足

$$|e_r^*(S)|=\left|\frac{e^*(S)}{S^*}\right|\leqslant\frac{1.5708}{58.905}<0.027=2.7\%.$$

故若取 $S^*=58.905\ \text{cm}^2$ 作为圆环面积的近似值,则其绝对误差不超过 $1.5708\ \text{cm}^2$,相对误差小于 2.7%,此时 S^* 至少具有 1 位有效数字.

例：设运算中数据精确到两位小数，试求 x*=1.21*3.65-9.81的绝对误差限和相对误差限，估计结果有几位有效数字？

x = -5.3935

$$e(x^*) = 3.65 \times e(1.21) + 1.21 \times e(3.65) - e(9.81)$$

$$|e(x^*)| \le 3.65 \times |e(1.21)| + 1.21 \times |e(3.65)| + |e(9.81)|$$

强！

$$\le (3.65 + 1.21 + 1) \times \frac{1}{2} \times 10^{-2} = 0.0293$$

$$|e_r(x^*)| = \frac{|e(x^*)|}{|x^*|} \le \frac{0.0293}{5.3935} = 0.0054$$

只有两位有效数字！

§1.3.2 算法的数值稳定性

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5} dx \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

如何建立递推关系？前一项与后一项的关系、

$$I_n + 5I_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5} dx + 5\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x+5} dx = \int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n}$$

算法**1**：

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+5} dx = \ln 1.2$$

$$I_n = \frac{1}{n} - 5I_{n-1} \quad (n = 1,2,\ldots)$$

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}\,dx \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

$$\frac{1}{6(n+1)} < I_n < \frac{1}{5(n+1)}$$

x=1 x=0

$$0 \le x \le 1, \quad 5 \le x+5 \le 6$$

算法2：

$$I_n{}^* \approx \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6(n+1)} + \frac{1}{5(n+1)}\right]$$

$$I_{k-1} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{k} - I_k\right) \quad (k = n, n-1, \ldots, 1)$$

n	I_n(算法1)	I_n(算法2)
0	0.18232155	0.18232155
1	0.08839225	0.08839222
2	0.05803875	0.05803892
3	0.04313958	0.04313873
4	0.03430208	0.03406033
5	0.02848958	0.02846835
6	0.02421875	0.02432491
7	0.02176339	0.02123260
8	0.01618305	0.01883699
9	0.03019588	0.01692617
10	-0.05097941	0.01536914
11	0.34580612	0.01406339
12	-0.64567926	0.01301636
13	8.30540938	0.01184127
14	-41.45561831	0.01222222

算法1的误差传播：

$$e_n = I_n - I_n^* = -5(I_{n-1} - I_{n-1}^*) = -5e_{n-1}$$

$$e_n = (-5)^n e_0$$

算法2的误差传播：

$$e_{k-1} = -\frac{1}{5} e_k \qquad e_0 = (-\frac{1}{5})^n e_n$$

- 不同的算法，效果大不相同；
- 计算过程中误差不会增长的算法具有**数据稳定性**。

§1.4 数值计算中应注意的问题

1. 避免两个相近的数相减

$$e_r(x-y)=\frac{e(x)-e(y)}{x-\mathrm{y}}$$

$$\mathrm{x}=\sqrt{1+10^{-7}}-1\approx 1.00000005-1\approx 5\times 10^{-8}$$

中间结果保留**9**位有效数字，最终结果只有**1**位有效数字**!**

$$\mathrm{x}=\frac{10^{-7}}{\sqrt{1+10^{-7}}+1}\approx 4.99999988\times 10^{-8}$$

$$x = 1 - \cos 2^\circ \approx 1 - 0.9994 = 6 \times 10^{-4}$$

$$|x - x^*| = |\cos 2^\circ - 0.9994| \le \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

初值有**4**位有效数字，最终结果只有**1**位有效数字!

$$x = 1 - \cos 2^\circ = 2\sin^2 1^\circ \approx 2 \times 0.0175^2 = 6.125 \times 10^{-4}$$

$$|e(x^*)| = |4 \sin 1^\circ \cdot e(\sin 1^\circ)|$$

$$\le 4 * 0.0175 \times \frac{1}{2} \times 10^{-4} \le \frac{1}{2} \times 10^{-5}$$

至少有**2**位有效数字!

2. 避免大数吃小数

$$x^2-(10^9+1)x+10^9=0$$

$$\mathrm{x} = \frac{10^9+1 \pm \sqrt{(10^9+1)^2-4\times 10^9}}{2}$$

$$x_1 = 10^9,\ x_2 \approx 0$$

$$x_2 = \frac{2\times 10^9}{10^9+1+\sqrt{(10^9+1)^2-4\times 10^9}} \approx 1$$

3. 避免除数绝对值远小于被除数绝对值

$$\mathrm{e}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ye(x)-xe(y)}{y^2}$$

$$|y| << |x|$$

4. 简化计算，减少运算量，提高效率

$$\ln(1+x)=\ln 1+x-\frac{1}{2}x^{2}+\frac{1}{3}x^{3}-\frac{1}{4}x^{4}+\ldots$$

$$\ln 2=\ln(1+x)\big|_{x=1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\ldots$$

截断误差 $\frac{1}{n+1}$，误差小于 10^{-5}，需要 10^{5} 次运算！

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2x\left(1+\frac{1}{3}x^{2}+\frac{1}{5}x^{4}+\ldots+\frac{x^{2n\cancel{+1}}}{2n+1}+\ldots\right)$$

$$\ln 2=\ln\left.\frac{1+x}{1-x}\right|_{x=1/3}=\frac{2}{3}\left[1+\frac{1}{3\times 9}+\frac{1}{5\times 9^{2}}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)\times 9^{n}}+\ldots\right]$$

取前**5**项近似所产生的误差：

$$e=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{11\times 9^{5}}+\frac{1}{13\times 9^{6}}+\frac{1}{15\times 9^{7}}+\ldots\right]<\frac{2}{3}\times\frac{1}{11\times 9^{5}}\left[1+\frac{1}{9}+\frac{1}{9^{2}}+\ldots\right]$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{11\times 9^{5}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{12\times 11\times 9^{4}}<10^{-5}$$

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

- 直接计算：n(n+1)/2次乘法，n次加法；
- 秦九韶算法： n次乘法，n次加法。

$$P_n(x) = a_0 + x\{a_1 + x[\ldots x(a_{n-2} + x(a_{n-1}x + a_n))]\}$$

5. 选择数值稳定性好的算法

- 进行收敛性分析；
- 误差不增长的算法是稳定的。

本章小结

- 数值计算方法研究什么？
  - 利用计算机近似求解数学问题；
- 误差
  - 来源：模型、观测、截断、舍入；
  - 绝对误差、相对误差及有效数字。
- 误差的传播

$$e(y)=\sum\frac{\partial f}{\partial x_i}e(x_i)\qquad e_r(y)=\sum\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{x_i}{f}e_r(x_i)$$

- 数值计算中应注意的问题。

课 后 作 业

- 第一章习题的2、4、5。(2计算过程，4、5有原因说明)
- 补充题：分别用3.142, 3.141, 22/7近似π时，各有几位有效数字？

- 注意：
  - 计入平时成绩，不可补交；
  - 课程中心递交：**cc.ustb.edu.cn；**
  - 不要抄题目，写清题号，直接作答即可，作完成拍照上传。

转正

添加图片 ~~(附件)~~

1024*512