第一章

$P(A+B)=\frac{5}{6}$ $\quad$ $P(A\bar{B}+\bar{A}B)=\frac{2}{3}$

1. 设事件 A 和 B 中至少发生一个的概率为 $\dfrac{5}{6}$，A 和 B 中有且仅有一个发生的概率为 $\dfrac{2}{3}$，那么 A 和 B 同时发生的概率为 ___$\frac{1}{6}$___。

2.. 设事件 A 和事件 B 相互独立，发生的概率分别为 0.4 和 0.7，那么 A 与 B 的和事件发生的概率为 ___0.82___。

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=1.1-0.28$
0.82

3. 从 $1-9$ 这九个数字中任取三个，它们的乘积是偶数的概率是 ___$\frac{37}{42}$___。

4. 设 $P(A)=0.6, P(B)=0.8, P(B|A)=0.8$，则下列结论中正确的是 ___C___。

$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(AB)}{0.6}=0.8$ $\quad$ $=0.48$

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$1-\dfrac{C_5^3}{C_9^3}$

（A）事件 A,B 互不相容 （B）事件 A,B 互逆

（C）事件 A,B 互相独立 （D）$A\supset B$

$1-\dfrac{10}{3\cdot 7\cdot 2}=1-\dfrac{5}{3\cdot 7\cdot 2}$

$\dfrac{5}{42}$

5．假设事件 A 和 B 满足 $P(B|A)=1$，则 ________。

（A）事件 A 是必然事件 （B）$P(\bar{B}|A)=0$

（C）$A\subset B$ （D）$A\supset B$

6.设 A，B 为两个随机事件，$P(A)=0.7,\ P(A-B)=0.3$，则 $P(\overline{AB})=$ ____________

1.$\dfrac{1}{6}$ 2. 0.82 3.$\dfrac{37}{42}$ 4.C 5. B 6. 0.6

第二三章

1. 从 $1,2,3,4$ 中任取一个数记为 X，再从 $1,\cdots,X$ 中任取一个数记为 Y，则 $P\{Y=2\}=$ ________。

2．设 X,Y 是两个相互独立的随机变量，且 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则 $Z=X+2Y$ 服从的分布是 ________。

（A）$N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+2\sigma_2^2)$ （B）$N(\mu_1+2\mu_2,\sigma_1^2+2\sigma_2^2)$

（C）$N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+4\sigma_2^2)$ （D）$N(\mu_1+2\mu_2,\sigma_1^2+4\sigma_2^2)$

3. 设随机变量 X,Y 同分布，分布律为 $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$，且满足 $P\{XY=0\}=1$，则 $P\{X=Y\}=$ ________。

（A）0 （B）$\dfrac{1}{2}$ （C）$\dfrac{1}{4}$ （D）1

$F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$ $\quad$ $E(X)$

$=\Phi(x)+$

4. 设 X,Y 是相互独立的随机变量，其分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数是 ________。

（A） $F_z(z)=\max\{F_X(z),F_Y(z)\}$ （B） $F_z(z)=F_X(z)F_Y(z)$

（C） $F_z(z)=\max\{|F_X(z)|,|F_Y(z)|\}$ （D） $F_z(z)=F_X(z)$

5. 设 X_1,X_2 是两个相互独立的随机变量，$F_1(x),F_2(x)$ 是其分布函数，$f_1(x),f_2(x)$ 是其概率密度函数且连续，则下列必为概率密度的是________

(A) $f_1(x)f_2(x)$ **(B)** $2f_1(x)F_2(x)$ **(C)** $F_2(x)f_1(x)$ **(D)** $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

6. 相互独立的连续型随机变量 X 和 Y 的密度函数分别为 $f1(x)$ 和 $f2(x)$，分布函数分别为 $F1(x)$ 和 $F2(x)$，则下列正确的

$A.f1(x)+f2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度

$B.F1(x)+F2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数

$C.F1(x)F2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数

$D.f1(x)f2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度函数

7. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $(\sigma>0)$，$p=P(X\ge\mu+\sigma^2)$，则________

(A) p 随着 σ 的增大而增大 (B) p 随着 σ 的增大而减小

(C) p 随着 μ 的增大而增大 (D) p 随着 μ 的增大而减小

8. 设 A,B,C 是三个相互独立的随机事件，且 $0<P(C)<1$.则下列给定事件中不相互独立的是

(A) $\overline{A\cup B}$ 与 $\overline{C}$ (B) $\overline{A\cup B}$ 与 C (C) $\overline{AC}$ 与 C (D) $\overline{AB}$ 与 C

9. 已知 X,Y,XY 的分布律见下表，则 $P(X=2Y)=$________

X	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

XY	0	1	2	4
P	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{12}$

10. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(1,1)$，已知 $z_{0.025}=1.96$，则常数 $P\{X\le 2.96\}=$______

A 0.95 B 0.975 C 0.025 D 0.005

11. 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\frac{c}{n}\cdot k$，$k=1,2,\cdots,n$，则常数 $c=$________

参考答案：

1. $\frac{13}{48}$ 2. D 3. A 4. B 5. D 6. C 7. B 8. C 9. $\frac{1}{4}$ **10. B** **11.** $\frac{2}{n+1}$

解答题

1. 有甲、乙、丙三个盒子，其中分别有一个白球和两个黑球、一个黑球和两个白球、三个白球和三个黑球。掷一枚骰子，若出现 1，2，3 点则选甲盒，若出现 4 点则选乙盒，否则选丙盒。然后从所选的中盒子中任取一球。

求：（1）取出的球是白球的概率；

（2）当取出的球为白球时，此球来自甲盒的概率。

2. 某射击队共有 10 名射手，其中一级射手 2 人，二级射手 4 人，三级射手 4 人。一、二、三级射手能够通过选拔进入比赛的概率分别为 0.9, 0.6, 0.2。

(1) 求任选一名射手能够通过选拔进入比赛的概率；

(2) 对于一名通过选拔进入比赛的射手，试判断这名射手是几级射手的概率最大。

3. 设连续型随机变量 X 的分布函数是 $F(x)=\begin{cases} 0 & x<-2 \\ A+Bx & -2\le x\le 2 \\ 1 & x>2 \end{cases}$，问：

（1）A,B 各是多少？　（2）X 的概率密度是什么？

（3）证明：随机变量 $Y=|X|$ 服从 $[0,2]$ 上的均匀分布。

（4）设随机变量 $Z=\sin\pi X$，计算 DZ。

4. 设随机向量 (X,Y) 分布在正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 上，其概率密度函数为

$$f(x,y)=Ax(3x+2y)，\ 0\le x,y\le 1。$$

（1）求 A 及概率 $P\{X+Y\ge 1\}$；　（2）求 X,Y 的边缘分布密度函数；

（3）求条件密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$；　（4）X 与 Y 是否独立？为什么？

5. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $\boldsymbol{f_X(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}}$，$-\infty<x<+\infty$，试求随机变量 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$。

6. 已知相互独立的随机变量 X，Y 的概率密度分别为：

$$f(x)=\begin{cases} 2x, & 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}，\ g(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}，$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $\varphi(z)$。

7. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}12\,e^{-(3x+4y)}, & x>0,y>0\\ 0, & 其他\end{cases},$$

（1）求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $f_{Y|X}(y|x)$；（2）求 (X,Y) 的联合分布函数；

（3）讨论 X 与 Y 的独立性且求 $Cov(X,Y)$；（4）求 $P(0<X\le 1,\ 0<Y\le 2)$。

8.设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}a, & x^2\le y<1,0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

(1)确定常数 a 的值；(2)求 $P(0\le X\le \frac{1}{2})$；

(3)求边缘密度 $f_X(x),f_Y(y)$；(4)求条件密度 $f_{X|Y}(x|y),f_{Y|X}(y|x)$

9. 设随机变量 X,Y 相互独立，概率密度函数分别为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$ 和

$$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y\ge 0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

(1) 求 (X,Y) 的联合概率密度；(2) 求 $Z=X+2Y$ 的分布函数和概率密度；

(3) 求 $Z=X+2Y$ 的期望和方差。

10. 设二维随机变量的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2+\dfrac{xy}{3}, 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\\ 0\ , \quad 其它\end{cases}$$

求:（1）边缘概率密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$，并判断 X 和 Y 的独立性;

（2）条件概率密度函数 $f_{X|Y}(x|1)$;（3）概率 $P\{X+Y>1\}$.

11. 设 A 为随机事件，证明：$P(A)P(\overline{A})\le \frac{1}{4}$.

参考答案

1.**解**：设　A=“选中的为甲盒”，　B=“选中的为乙盒”，

C=“选中的为丙盒”，　D=“取出一球为白球”，

由已知得：　$P(A)=\frac{3}{6}$，$P(B)=\frac{1}{6}$，$P(C)=\frac{2}{6}$

$P(D|A)=\frac{1}{3}$，$P(D|B)=\frac{2}{3}$，$P(D|C)=\frac{3}{6}$

（1）由全概率公式　$P(D)=\frac{3}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{4}{9}$

（2）由 Bayes 公式　$P(A|D)=\dfrac{\frac{3}{6}\times\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}}=\frac{3}{8}$

2.【解】设 A_i 表示选中的射手是 i 级射手，$i=1,2,3$；B 表示射手通过选拔进入比赛

(1) 由题意知

$P(A_1)=0.2, P(A_2)=0.4, P(A_3)=0.4$

$P(B|A_1)$=0.9，$P(B|A_2)$=0.6，$P(B|A_3)$=0.2

由全概率公式, 所求概率为

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(B|A_i)P(A_i)=\frac{2}{10}\cdot0.9+\frac{4}{10}\cdot0.6+\frac{4}{10}\cdot0.2=0.5$$

(2) 由贝叶斯公式

$$P(A_1|B)=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(B|A_i)P(A_i)}=0.36$$

$$P(A_2|B)=\frac{P(B|A_2)P(A_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(B|A_i)P(A_i)}=0.48$$

$$P(A_3|B)=\frac{P(B|A_3)P(A_3)}{\sum_{i=1}^{3}P(B|A_i)P(A_i)}=0.16$$

因此，该射手为二级射手的概率最大。

3.【解】（1）由于 $\lim\limits_{x\to 2-0} F(x)=1, \lim\limits_{x\to -2+0} F(x)=0$（1 分），所以 $\begin{cases} A-2B=0 \\ A+2B=1 \end{cases}$，

解出得到 $A=\frac{1}{2}, B=\frac{1}{4}$（1 分）。于是 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-2 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}x, & -2\le x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$

（2）概率密度函数 $f_X(x)=F'(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}, & -2\le x\le 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

（3）$y=|x|$，当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0 \Rightarrow f_Y(y)=0$。当 $y>2$ 时，$F_Y(y)=1$，$\Rightarrow f_Y(y)=0$

当 $0\le y\le 2$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{|X|\le y\}=P\{-y\le X\le y\}=\int_{-y}^{y} f_X(x)dx=\int_{-y}^{y}\frac{1}{4}dx=\frac{y}{2}$

于是，$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases} \frac{1}{2}, & x\in[0,2] \\ 0, & x\notin[0,2] \end{cases}$，所以随机变量 $Y=|X|$ 服从 $[0,2]$ 上的均匀分布。

（4）由于 $X\sim U[-2,2]$，因此，$EZ=\int_{-\infty}^{+\infty}(\sin\pi x)f_X(x)dx=\int_{-2}^{2}\sin\pi x\cdot\frac{1}{4}dx=0$，

$DZ=EZ^2-(EZ)^2=EZ^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(\sin\pi x)^2 f_X(x)dx=\int_{-2}^{2}\sin^2\pi x\cdot\frac{1}{4}dx=\frac{1}{2}$。

4.【解】（1）$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{0\le x,y\le 1} Ax(3x+2y)dxdy=\frac{3}{2}A$，因此 $A=\frac{2}{3}$

$P\{X+Y\ge 1\}=\iint\limits_{x+y\ge 1} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{\substack{0\le x,y\le 1 \\ x+y\ge 1}}\frac{2}{3}x(3x+2y)dxdy=\int_0^1\frac{2}{3}xdx\int_{1-x}^{1}(3x+2y)dy=\frac{7}{9}$

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} \int_0^1\frac{2}{3}x(3x+2y)dy=\frac{2}{3}x(3x+1), & 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} \int_0^1\frac{2}{3}x(3x+2y)dx=\frac{2}{3}(y+1), & 0\le y\le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$。

（3）$f_{X|Y}\left(x|y\right)=\dfrac{f\left(x,y\right)}{f_Y\left(y\right)}=\begin{cases}\dfrac{\frac{2}{3}x\left(3x+2y\right)}{\frac{2}{3}\left(y+1\right)}=\dfrac{x\left(3x+2y\right)}{1+y}, & 0\le x\le 1,0\le y\le 1\\ 0, & x\notin(0,1),0\le y\le 1\end{cases}$）

(4) 不独立，因为 $f_{X,Y}\left(x,y\right)\neq f_X\left(x\right)f_Y\left(y\right)$

5 解：Y 的分布函数 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{1-\sqrt[3]{X}\le y\}$

$$=P\{X\ge(1-y)^3\}=\int_{(1-y)^3}^{+\infty}f_X(x)dx=-\frac{1}{\pi}\int_{+\infty}^{(1-y)^3}\frac{1}{(1+x^2)}dx$$

所以得 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\dfrac{3(1-y)^2}{\pi[1+(1-y)^6]}$

6.解一： 由卷积公式，$\varphi(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(z-x)dx=\int_0^1 2x\,g(z-x)dx$

当 $z\le 0$ 时，$\varphi(z)=0$；

当 $0<z\le 1$ 时，$\varphi(z)=\int_0^z 2x\,e^{-(z-x)}dx=2(e^{-z}+z-1)$；

当 $z>1$ 时，$\varphi(z)=\int_0^1 2xe^{-(z-x)}dx=2e^{-z}$

即 $\varphi(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ 2(e^{-z}+z-1), & 0<z\le 1\\ 2e^{-z}, & z>1\end{cases}$

解二：（X，Y）的联合概率密度为

$$f(x,y)=f(x)g(y)=\begin{cases}2xe^{-y}, & 0<x<1,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$F(z)=P\{X+Y\le z\}=\iint\limits_{x+y\le z}f(x,y)dxdy$$

当 $z\le 0$ 时，$F(z)=\iint\limits_{x+y\le z}0dxdy=0$，$\varphi(z)=0$；

当 $0<z\le 1$ 时，$F(z)=\int_0^z dx\int_0^{z-x}2x\,e^{-y}dy=\int_0^z 2x(1-e^{-(z-x)})dx$

$$=\int_0^z 2x\,dx-e^{-z}\int_0^z 2xe^{x}dx=\boldsymbol{z^2-2z+2-2e^{-z}}$$

$$\varphi(z)=F'(z)=2(e^{-z}+z-1);$$

当$z>1$时，

$$F(z)=\int_0^1 dx\int_0^{z-x}2xe^{-y}dy=\int_0^1 2x(1-e^{-(z-x)})dx=\int_0^1 2xdx-2e^{-z}\int_0^1 xe^{x}dx=1-2e^{-z}$$

$\varphi(z)=F'(z)=2e^{-z}$，

$$即\quad \varphi(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ 2(e^{-z}+z-1), & 0<z\le 1\\ 2e^{-z}, & z>1\end{cases}$$

7.解：（1）为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

当$x\le 0$时，$f_X(x)=0$;

当$x>0$时，$f_X(x)=\int_0^{+\infty}12e^{-(3x+4y)}dy=12e^{-3x}\int_0^{+\infty}e^{-4y}dy=3e^{-3x}$

所以得： $f_X(x)=\begin{cases}3e^{-3x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

类似可得： $f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-4y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

从而 当$y>0$时，X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}3e^{-3x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ ，

当$x>0$时，Y 的条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}4e^{-4y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$ 。

（2）当$x\le 0$或$y\le 0$时，$F(x,y)=0$ ；

当$x>0,\ y>0$时， $F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)dudv$

$$=12\int_0^y\int_0^x e^{-(3u+4v)}dudv=(1-e^{-3x})(1-e^{-4y})$$

所以得：$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-3x})(1-e^{-4y}), & x>0,y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$ ）

（3）不难验证：$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$ ，所以X,Y是相互独立的。

因为X,Y相互独立，所以X,Y不相关，故$\rho_{XY}=0$，即得出$Cov\ (X,Y)=0$

（4）解一：$P(0<X\le 1,\ 0<Y\le 2)=F(1,2)-F(1,0)-F(0,2)+F(0,0)$

$$=(1-e^{-3})(1-e^{-8})$$

解二：$P(0<X\le 1,\ 0<Y\le 2)=\iint\limits_{\substack{0<x\le 1\\ 0<y\le 2}} 12e^{-(3x+4y)}dx\,dy$

$$=12\int_0^1 e^{-3x}dx\int_0^2 e^{-4y}dy=(1-e^{-3})(1-e^{-8})$$

8.【解】

(1)由$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 ady=a\int_0^1(1-x^2)dx=\frac{2}{3}a$

知$a=\frac{3}{2}$

(2) $P(0\le X\le \frac{1}{2})=\iint\limits_{0\le x\le \frac{1}{2}} f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{x^2}^1\frac{3}{2}dy=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{3}{2}(1-x^2)dx=\frac{11}{16}$

(3) $0<x<1$时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_{x^2}^1\frac{3}{2}dy=\frac{3}{2}(1-x^2)$

$x\le 0$或$x\ge 1$时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=0$

因此$f_X(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-x^2), & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$0<y<1$时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_0^{\sqrt{y}}\frac{3}{2}dx=\frac{3}{2}\sqrt{y}$

$y\le 0$或$y\ge 1$时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=0$

因此$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{2}\sqrt{y}, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

(4) $0<y<1$时，$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{y}}, & 0<x<\sqrt{y}\\ 0, & 其他\end{cases}$；

$0<x<1$时，$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{1-x^2}, & x^2<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

9.【解】(1) 由于 X,Y 相互独立, 联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-y}, & 0<x<2\text{且}y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(2) 记 $Z=X+2Y$，$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+2Y\le z)$

当 $z\le 0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $0<z<2$ 时，$F_Z(z)=P(X+2Y\le z)=\int_0^z dx\int_0^{\frac{z-x}{2}}\frac{1}{2}e^{-y}dy=\frac{1}{2}(z-2+2e^{-\frac{z}{2}})$

当 $z\ge 2$ 时，$F_Z(z)=P(X+2Y\le z)=\int_0^2 dx\int_0^{\frac{z-x}{2}}\frac{1}{2}e^{-y}dy=1-e^{1-\frac{z}{2}}+e^{-\frac{z}{2}}$

于是 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ \frac{1}{2}(z-2+2e^{-\frac{z}{2}}), & 0<z<2\\ 1-e^{1-\frac{z}{2}}+e^{-\frac{z}{2}}, & z\ge 2\end{cases}$

因此 $f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ \frac{1}{2}(1-e^{-\frac{z}{2}}), & 0<z<2\\ \frac{1}{2}(e^{1-\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}), & z\ge 2\end{cases}$

(3) 由于 $EX=1,EY=\int_0^{+\infty}ye^{-y}dy=1$ 可知 $E(X+2Y)=EX+2EY=3$

$EX^2=\frac{4}{3},DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{3}$

$EY^2=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f_Y(y)dy=\int_0^{+\infty}y^2e^{-y}dy=2,DY=EY^2-(EY)^2=1$

又由 X,Y 相互独立得 $D(X+2Y)=DX+4DY=\frac{13}{3}$

10.解：(1) $0\le x\le 1$时，$f_X(x)=\int_0^2\left(x^2+\frac{xy}{3}\right)dy=2x^2+\frac{2x}{3}$，其余为零；

$0\le y\le 2$时，$f_Y(y)=\int_0^1\left(x^2+\frac{xy}{3}\right)dx=\frac{1}{3}+\frac{y}{6}$，其余为零；

显然$f\left(x,y\right)\ne f_X\left(x\right)f_Y\left(y\right)$，所以$X$和$Y$的不独立；

(2) $f_{X|Y}\left(x|1\right)=\frac{f\left(x,1\right)}{f_Y\left(1\right)}=\begin{cases}2x^2+\frac{2x}{3}, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其 它}\end{cases}$

(3) $P\left\{X+Y>1\right\}=\int_0^1dx\int_{1-x}^2\left(x^2+\frac{xy}{3}\right)dy=\int_0^1\left(\frac{5}{6}x^3+\frac{4x^2}{3}+\frac{x}{2}\right)dx=\frac{65}{72}$

11. 设A为随机事件，证明：$P\left(A\right)P\left(\overline{A}\right)\le\frac{1}{4}$.

证明：设$p=P\left(A\right)$，记$f\left(p\right)=P\left(A\right)P\left(\overline{A}\right)=p\left(1-p\right)$，则$f\left(p\right)$在$\left[0,1\right]$上连续，能取到最大值.

而$f\left(p\right)$只有一个驻点$p=\frac{1}{2}$，故$\max f\left(p\right)=\max\left\{f\left(0\right),f\left(0.5\right),f\left(1\right)\right\}=\frac{1}{4}$，所以$P\left(A\right)P\left(\overline{A}\right)\le\frac{1}{4}$.