第一章绪论

- 有效位数概念；
- 误差基本概念；
- 误差传递计算。

- 误差
  - 来源：模型、观测、截断、舍入；
  - 绝对误差、相对误差及有效数字。
- 误差的传播

$$e(y)=\sum\frac{\partial f}{\partial x_i}e(x_i)\quad e_r(y)=\sum\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{x_i}{f}e_r(x_i)$$

$$\left|e(x_1\pm x_2)\right|=\left|e(x_1)\pm e(x_2)\right|\le\left|e(x_1)\right|+\left|e(x_2)\right|$$

$$\left|e_r(x_1x_2)\right|\approx\left|e_r(x_1)+e_r(x_2)\right|\le\left|e_r(x_1)\right|+\left|e_r(x_2)\right|$$

$$\left|e_r(\frac{x_1}{x_2})\right|\approx\left|e_r(x_1)-e_r(x_2)\right|\le\left|e_r(x_1)\right|+\left|e_r(x_2)\right|$$

- 数值计算中应注意的问题。

第二章 非线性方程求根

- 二分法计算及其迭代次数估计；
- 简单迭代法及其收敛性判断；
- 牛顿法计算；
- 简化牛顿法、弦割法、牛顿法下山法；
- 收敛阶的判断。

- 二分法 $$2^{n+1} > (b-a)/\varepsilon$$
- 简单迭代法 $$x=\varphi(x), \quad |\varphi'(x)|<1$$
- 牛顿迭代法 $$x_{k+1}=x_k - f(x_k)/f'(x_k)$$
- 弦割法 $$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1})$$
- 牛顿下山法 $$x_{k+1}=x_k-\lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
- 收敛的阶、艾特肯加速法。

第三章 线性方程组的解法

- 高斯消元法、高斯列主元消元法；
- 矩阵的杜利特尔分解；
- 向量范数和矩阵范数的计算；
- 雅克比、高斯-赛德尔迭代矩阵的计算、收敛性判断；
- 矩阵条件数的计算。

- 高斯消元法
  - 高斯列主元消元法
  - 高斯全主元消元法
- 杜利特尔三角分解法

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

$$\begin{cases} u_{1j} = a_{1j}, & j = 1,2,\ldots,n \\ l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{u_{11}}, & i = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{kj} = a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km} u_{mj}, & j = k,\ldots,n \\ l_{ik} = \dfrac{a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} u_{mk}}{u_{kk}}, & i = k+1,\ldots,n \end{cases}$$

向量范数和矩阵范数

$$\| \mathbf{X} \|_p = (\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p)^{\frac{1}{p}} \qquad \left\| \mathbf{A} \right\| = \max_{\left\| \mathbf{X} \right\| = 1} \left\| \mathbf{AX} \right\|$$

$$\left\| \mathbf{A} \right\|_1 = \max_{1 \le \mathrm{j} \le n} \left[\sum_{i=1}^{n} \left| a_{ij} \right| \right] \qquad \left\| \mathbf{A} \right\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$$

$$\left\| \mathbf{A} \right\|_\infty = \max_{1 \le \mathrm{i} \le n} \left[\sum_{j=1}^{n} \left| a_{ij} \right| \right]$$

迭代法 $\mathbf{AX}=\mathbf{b}$ $\mathbf{A}=\mathbf{D}-\mathbf{L}-\mathbf{U}$

- 雅克比迭代

$$\mathbf{X}=\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{X}+\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

- 高斯-赛德尔迭代

$$\mathbf{X}=(\mathbf{D}-\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}\mathbf{X}+(\mathbf{D}-\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}$$

收敛性

迭代$\mathbf{X}^{(k+1)}=\mathbf{B}\mathbf{X}^{(k)}+\mathbf{f}$收敛的充要条件： $\rho(\mathbf{B})<1$。

充分条件1: $\|\mathbf{B}\|<1$

充分条件2：**A**为严格对角占优。

条件数： $cond(\mathbf{A})=\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|$

第四章 插值与拟合

- 拉格朗日插值法计算；
- 一次和二次分段拉格朗日插值法计算；
- 差商的计算、牛顿插值法计算；
- 埃尔米特插值法计算；
- 最小二乘法数据拟合的法方程组方法。

- 插值法概念
  - 插值多项式存在的唯一性
- 拉格朗日插值法

$$y(x)=\sum_{j=0}^{n} f(x_j) l_j(x)$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} p_{n+1}(x)$$

$$l_j(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_n)}$$

牛顿插值法

$$f[x_i, x_k] = \frac{f_k - f_i}{x_k - x_i} (k \neq i)$$

$$R_n(x) = f[x, x_0, \ldots, x_n] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-2}, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}}$$

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

$$N_n(x_0 + th) = f_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta^k f_0}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (t - j)$$

$$N_n(x_0 + th) = f_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{\nabla^k f_n}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (t + j)$$

- 埃尔米特插值基本概念
- 数据拟合的最小二乘法

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\sum_{i=0}^{m}\omega_i\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)\quad (f,\varphi_k)=\sum_{i=0}^{m}\omega_i y_i\varphi_k(x_i)$$

$$\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n)\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(f,\varphi_0)\\ (f,\varphi_1)\\ \vdots\\ (f,\varphi_n)\end{pmatrix}$$

第五章 数值微分与积分

- 数值微分，差商近似导数的计算；
- 梯形、Simpson求积公式；
- 梯形、Simpson复合求积法；
- 龙贝格积分法和高斯求积公式的基本思想。

- 数值微分

中心差商：
$$\boxed{f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}}$$

中点加速：
$$G_1(h) = \frac{4}{3}G(\frac{h}{2}) - \frac{1}{3}G(h)$$

- 牛顿-科茨求积公式

梯形公式：
$$\boxed{T = I_1 = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]}$$

Simpson公式：
$$\boxed{S = I_2 = \frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]}$$

复合求积法

复合梯形：

$$T_n = \frac{b-a}{2n}[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+f(b)]$$

复合**Simpson**：

$$S_n = \frac{b-a}{6n}[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1/2})+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+f(b)]$$

- 龙贝格求积法 $T_m^{(k)} = \frac{4^m}{4^m-1}T_{m-1}^{(k+1)} - \frac{1}{4^m-1}T_{m-1}^{(k)}$

- 高斯求积公式：n+1个插值点达到2n+1次代数精度时。

第六章 常微分方程的数值解法

- 欧拉法、改进欧拉法的计算；
- 收敛阶的判断；
- 龙格-库塔法的基本原理；
- 求解一阶方程组与高阶方程的基本思路。

- 欧拉(Euler)法

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_0 = y(a) \end{cases}$$

- 改进的欧拉法

$$\begin{cases} \tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})] \end{cases}$$

龙格-库塔法

根据**Taylor**展开确定系数：

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\sum_{k=1}^{m} \alpha_k K_k \\ K_1 = f(x_i, y_i) \\ K_j = f(x_i + \lambda_j h, y_i + h\sum_{k=1}^{j-1} \mu_{jk} K_k) \end{cases}$$

根据精度自动调节步长：

$$\Delta = \left| y_{i+1}^{(h/2)} - y_{i+1}^{(h)} \right|$$

考试相关

- 时间：2019年4月27日，15:20-17:20
- 地点：计174、计175、计176：逸夫楼105
  信安17、物联17、理实17：逸夫楼104
  计15、计16、信安15、信安16：逸夫楼102
- 题型：选择、填空、计算；
- 考试方式：闭卷；
- 其他：可携带计算器。