第二章 谓词逻辑（一）

计算机科学与技术系 洪源

一阶谓词逻辑命题符号化

- 要素
  - 个体词
  - 谓词
  - 量词

一阶谓词逻辑命题符号化

- 个体词
  - 个体词指的是一个被描述的对象
  - 一般用小写英文字母表示
    - 个体常项 abc…
    - 个体变项 xyz…
  - 个体域 / 论域
    - 论域能影响到命题的真值
    - 全总个体域（默认）

一阶谓词逻辑命题符号化

- 谓词
  - 刻画个体词的性质或者个体词之间的关系
  - 一般用大写英文字母 F, G, H… 表示
    - 谓词常项
    - 谓词变项
  - n 元谓词
    - 对 n（ n⩾1 ）个个体变项进行描述的谓词
    - 当 n>1 时，个体变项是有序的
    - 0 元谓词 vs 命题

一阶谓词逻辑命题符号化

- **量词**
  - 表示谓词所描述的个体变项的数量性质
    - 全称量词 $\forall$
    - 存在量词 $\exists$
  - 全称量词
    - 直观含义
      - 例如：凡人都会死。
      - 设 H(x) ： x 是人。 M(x) ： x 会死。
      - $\forall x\,(H(x) \to M(x))$
      - 量词、指导变元、辖域 / 辖区
    - 逻辑含义（有限论域）
      - 设论域 $D=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$
      - $\forall x\, P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)$

任何人都有母亲，
且母亲是唯一的

$\forall x \exists y (H(x) \to M(y,x) \wedge$

$\forall z (M(z,x) \to (y=z)))$

一阶谓词逻辑命题符号化

- 量词
  - 存在量词
    - 直观含义
      - 例如：有些人不会死。
      - 设 $H(x)$ ： x 是人。 $M(x)$ ： x 会死。
      - $\exists x\,(H(x) \wedge \neg M(x))$
      - 量词、指导变元、辖域 / 辖区
    - 逻辑含义（有限论域）
      - 设论域 $D=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$
      - $\exists x\, P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n)$
  - 多个量词连续使用
    - 相同量词构成的序列是无序的
    - 不同量词构成的序列是有序的
      - 设论域：人类。 $P(x, y)$ ： x 是 y 的子女。
      - $\forall x \exists y\, P(x, y) \Leftrightarrow \exists y \forall x\, P(x, y)$?

一阶谓词逻辑公式及其解释

- 一阶谓词逻辑的形式语言 L
  - L 的字母表
    - 个体常项符号 a, b, c...
    - 函数符号 f, g, h...
    - 谓词符号 F, G, H...
    - 个体变项符号 x, y, z...
    - 量词符号 ∀ ，∃
    - 联结词符号 ¬ ，∧ ，∨ ，→ ，↔。
    - 括号与逗号 (，) ，,

一阶谓词逻辑公式及其解释

- 一阶谓词逻辑的形式语言 L
  - L 的项
    - L 的个体常项符号和个体变项符号是项
    - 若 φ 是 L 的 n 元函数符号， $t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是 L 的 n 个项，则 $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是 L 的项
    - 当且仅当有限次地使用以上规则得到的字符串是 L 的项
  - L 的原子公式
    - 设 R 是 L 的 n 元谓词符号， $t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是 L 的 n 个项，则 $R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是 L 的原子公式

一阶谓词逻辑公式及其解释

- 一阶谓词逻辑的形式语言 L
  - L 的合式公式（第 72 页定义 2.9 ）
    - 增加：若 A 是 L 的合式公式，则（ A ）也是 L 的合式公式
  - 课堂练习：判断下列各式是否 L 的合式公式
    - f(a,a)
    - F(f(a,a),b)
    - $\exists x(F(x) \wedge \forall y(G(y) \rightarrow H(x,y)))$

一阶谓词逻辑公式及其解释

- 封闭的公式 / 闭式
  - 指导变元，辖域，自由出现，约束出现（第 72 页定义 2.10 ）
    - 指导变元和辖域选取的就近原则
  - 课堂练习：指出下列各公式中的指导变元、各量词的辖域、自由出现和约束出现的个体变项
    - $\exists x(F(x) \wedge \forall y(G(y) \rightarrow \exists y H(x,y)))$
  - 封闭的公式 / 闭式（第 73 页定义 2.11 ）
  - 课堂练习：判断下列各公式是否闭式
    - $\exists x(F(x) \wedge \forall y(G(y) \rightarrow H(x,y)))$
    - $\forall y(G(y) \rightarrow H(x,y))$

一阶谓词逻辑公式及其解释

- 公式的解释与赋值
  - 影响一个公式的真值的因素
    - 论域的取值
    - 个体常项的语义
    - 函数符号的语义
    - 谓词变项的语义
    - 自由变元的*取值*

一阶谓词逻辑公式及其解释

- 公式的解释与赋值
  - 解释
    - 设 L 是一阶谓词语言，L 的解释 I 由下面 4 部分构成
    - （1）非空个体域 D_I
    - （2）对 L 中的每一个个体常项符号 a，D_I 中有一个 $\bar{a}$ 与之对应，称 $\bar{a}$ 为 a 在 I 中的解释
    - （3）对 L 中的每一个 n 元函数符号 f，D_I 上有一个 n 元函数 $\overline{f}$ 与之对应，称 $\overline{f}$ 为 f 在 I 中的解释
    - （4）对 L 中的每一个 n 元谓词 F，D_I 上有一个 n 元谓词 $\overline{F}$ 与之对应，称 $\overline{F}$ 为 F 在 I 中的解释
  - L 的解释 I
  - A 在 I 下的解释 A’

一阶谓词逻辑公式及其解释

- 公式的解释与赋值
  - 例如
    - 公式 A ：$\exists x(F(x) \wedge \forall y(G(y) \rightarrow H(x,y)))$
    - L 的解释 I_1
      - 个体域 D_{I1}: 人。
      - $\bar{F}_{I1}(x)$: x 是中国人。
      - $\bar{G}_{I1}(x)$: x 拥有 1643 – 1661 （清顺治）年间的中国国籍。
      - $\bar{H}_{I1}(x, y)$:x 是 y 的君主。
      - **问**
        - A 在 I_1 下的解释 A'_{I1} 是什么？
        - A'_{I1} 是不是命题？
        - A'_{I1} 的真值是什么？

一阶谓词逻辑公式及其解释

- **公式的解释与赋值**
  - 公式的赋值
    - 确定自由变元取值的方案
    - 被语言的解释中的论域所限定
  - 关于一阶谓词逻辑的公式、解释和赋值有如下重要命题
    - 任何公式在确定的解释下成为命题
    - 任何闭式在确定的解释下可立即给出真值
    - 任何开式在确定的解释下经赋值可立即给出真值

一阶谓词逻辑公式及其解释

- 公式的类型
  - 定义（第 75 页定义 2.13 ）
  - 判定方法
    - 逻辑分析（有效非完备）
      - 例： $\forall xP(x) \rightarrow \exists xP(x)$
    - 构造法判定可满足式（有效非完备）
    - 代换实例法（有效非完备）
  - 代换实例法
    - 代换实例（第 75 页定义 2.14 ）
    - 代换实例定理（第 75 页定理 2.2 ）
    - 例：用代换实例法判定下列公式的类型
      - $\forall xP(x) \rightarrow (\exists x\exists yG(x, y) \rightarrow \forall xP(x))$
      - $\forall xP(x) \rightarrow \exists xP(x)$

代换实例定理是单向的