第二章 一维随机变量及其分布

第二章 一维随机变量及其分布

第三节 随机变量的分布函数

- 随机变量的分布函数
- 离散型随机变量的分布函数

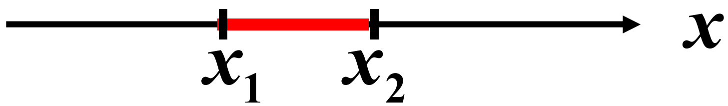
1、随机变量分布函数的定义

定义： 设 X 是一个随机变量，x为任意实数，称：

$$F(x)=P(X\le x)\quad(-\infty<x<+\infty)$$

为 X 的分布函数，也记为 $F_X(x)$。

注



对任意的实数 x_1,x_2 $(x_1<x_2)$

$$P(x_1<X\le x_2)=P(X\le x_2)-P(X\le x_1)$$
$$=F(x_2)-F(x_1)$$

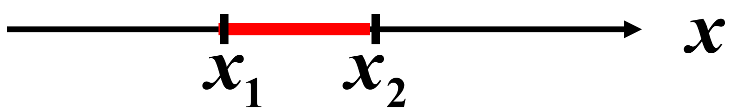
2. 性质

$$F(x)=P(X\le x)\quad(-\infty<x<+\infty)$$

性质1 $F(x)$是一个不减函数，即 $x_1\le x_2$，则：$F(x_1)\le F(x_2)$

证：$F(x_2)-F(x_1)=P(x_1<X\le x_2)\ge 0,\quad (x_1<x_2)$

即 $F(x_1)\le F(x_2)$

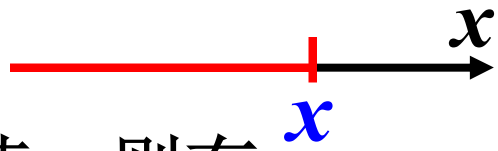


2. 性质

$F(x)=P(X\le x)\quad(-\infty<x<+\infty)$

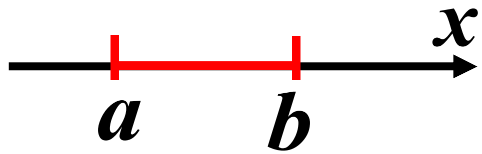
性质1 $F(x)$是一个不减函数，即 $x_1\le x_2$，则：$F(x_1)\le F(x_2)$

性质2 $0\le F(x)\le 1$ 且：$\begin{cases} F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0 \\ F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1 \end{cases}$



特别：若 X 仅在 $(a,b]$ 内取值，则有：

$$F(a)=P(X\le a)=0,\qquad F(b)=P(X\le b)=1$$



2. 性质

$$F(x)=P(X\le x)\quad(-\infty<x<+\infty)$$

性质1　$F(x)$是一个不减函数，即 $x_1\le x_2$，则：$F(x_1)\le F(x_2)$

性质2　$0\le F(x)\le 1$ 且：$\begin{cases} F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0 \\ F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1 \end{cases}$

性质3　$F(x)$是右连续函数，即 $\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0)$

证：略.

利用分布函数进行概率计算：

设分布函数 $F(x)$ 为已知，

$$i)\quad P\{X \le x\} = F(x)$$

$$ii)\quad P\{X > x\} = 1 - F(x)$$

函数的增量

$$iii)\quad P\{x_1 < X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$$

$$iv)\quad P\{X = x\} = F(x) - F(x^-)$$

特别地，$F(x)$ 在 x 处连续 $\Longrightarrow$ $P\{X = x\} = 0$

第二章 一维随机变量及其分布

第三节 随机变量的分布函数

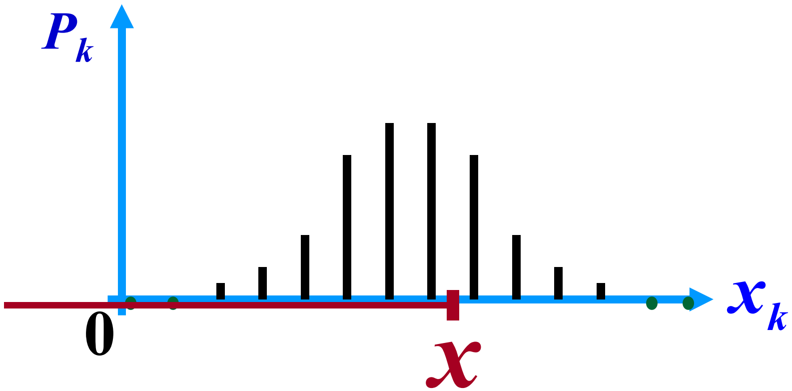
- 随机变量的分布函数
- 离散型随机变量的分布函数

二 离散型随机变量的分布函数

若离散型随机变量X的分布律为:

X	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	$\cdots$	x_n	$\cdots$
P_k	p_0	p_1	p_2	$\cdots$	$\cdots$	p_n	$\cdots$

则其分布函数为: $F(x)=P(X\le x)=\sum_{x_k\le x}P(X=x_k)$

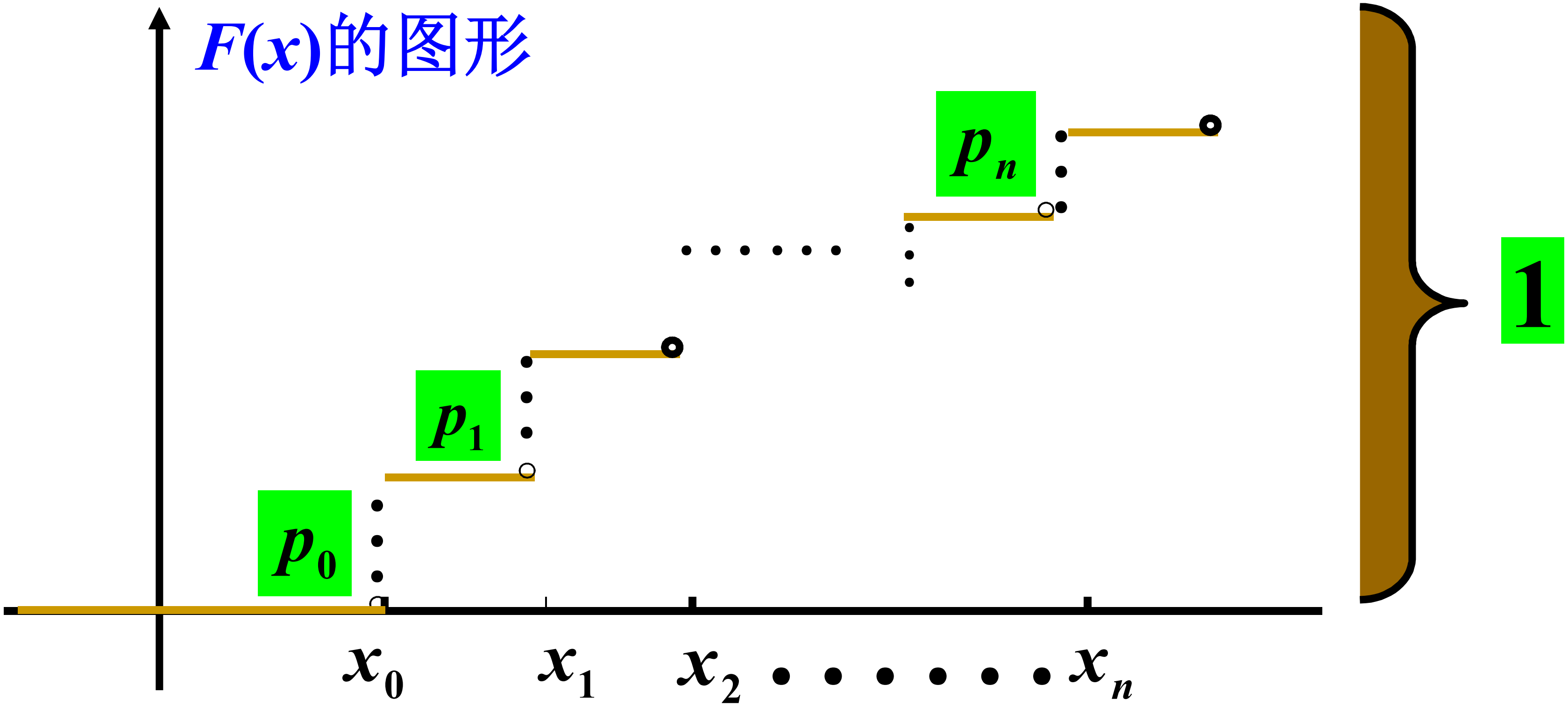


$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{x_k\le x}P(X=x_k)$$

X	x_0	x_1	$x_2\cdots$	$x_n\cdots$
P_k	p_0	p_1	$p_2\cdots$	$p_n\cdots$

$F(x)$图形是个阶梯形图形.

$F(x)$在x_k处有跳跃,其跳跃值为 p_k



例1 设 $X \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \Rightarrow F(x)$

解： $\forall x,\quad F(x) = P\{X \le x\}$

$$x < 3:\quad F(x) = P\{X \le x < 3\} = P(\Phi) = 0$$

$$3 \le x < 4:\quad F(x) = P\{X \le x < 4\} = P\{X = 3\} = 0.1$$

$$4 \le x < 5:\quad F(x) = P\{X \le x < 5\}$$

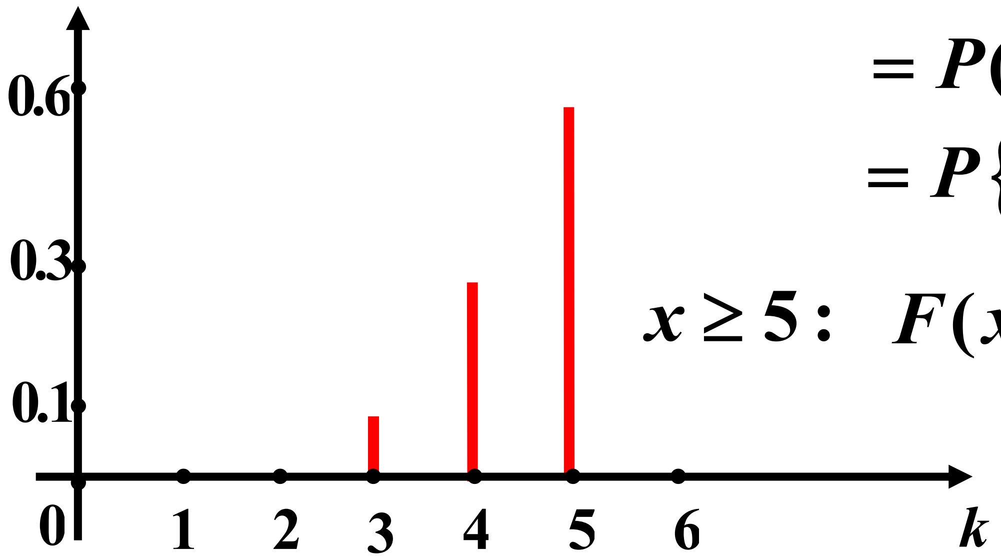
$$= P(\{X = 3\} \bigcup \{X = 4\})$$

$$= P\{X = 3\} + P\{X = 4\} = 0.4$$

$$x \ge 5:\quad F(x) = P(S) = 1$$

分布律图形

$P\{X=k\}$



$$\therefore F(x)=\begin{cases}0, & x<3,\\ 0.1, & 3\le x<4,\\ 0.4, & 4\le x<5,\\ 1, & x\ge 5.\end{cases}$$

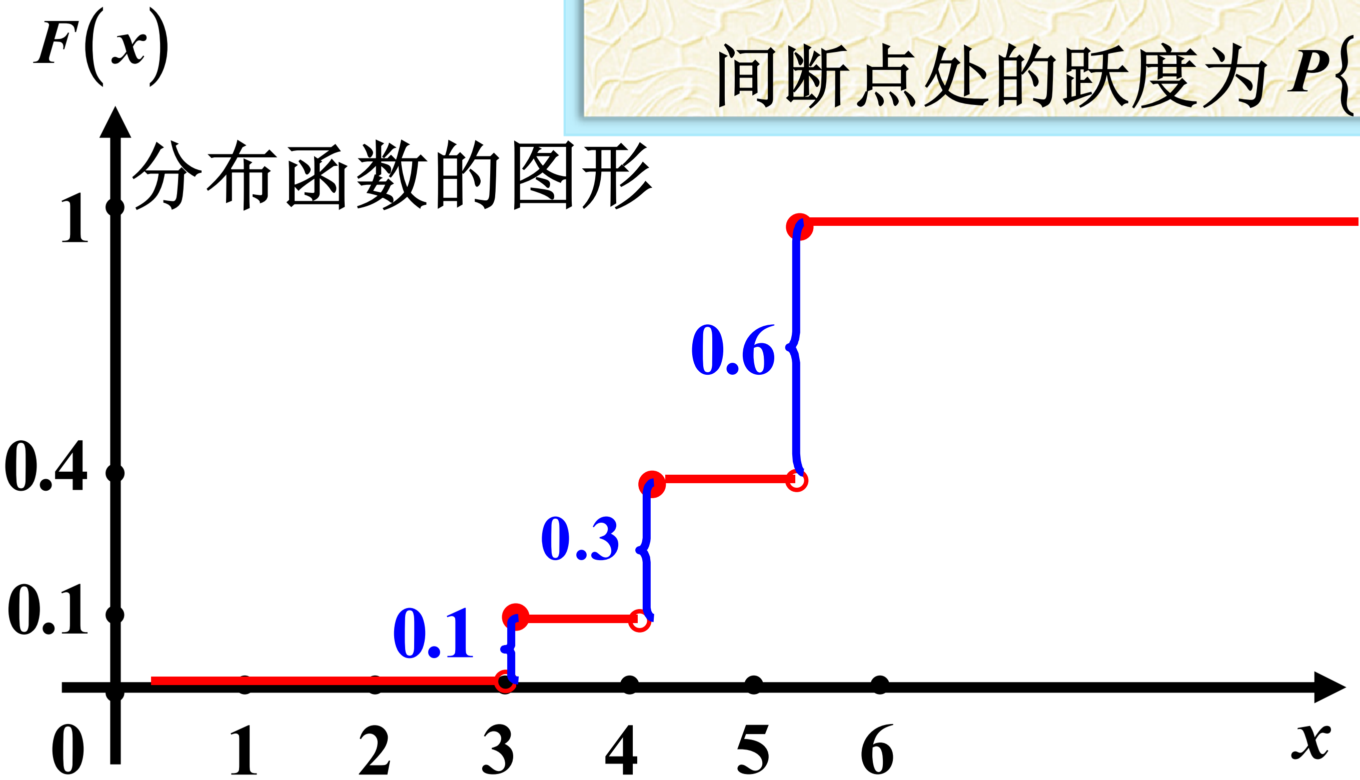
离散型随机变量分布函数的性质：

i) 非连续函数；

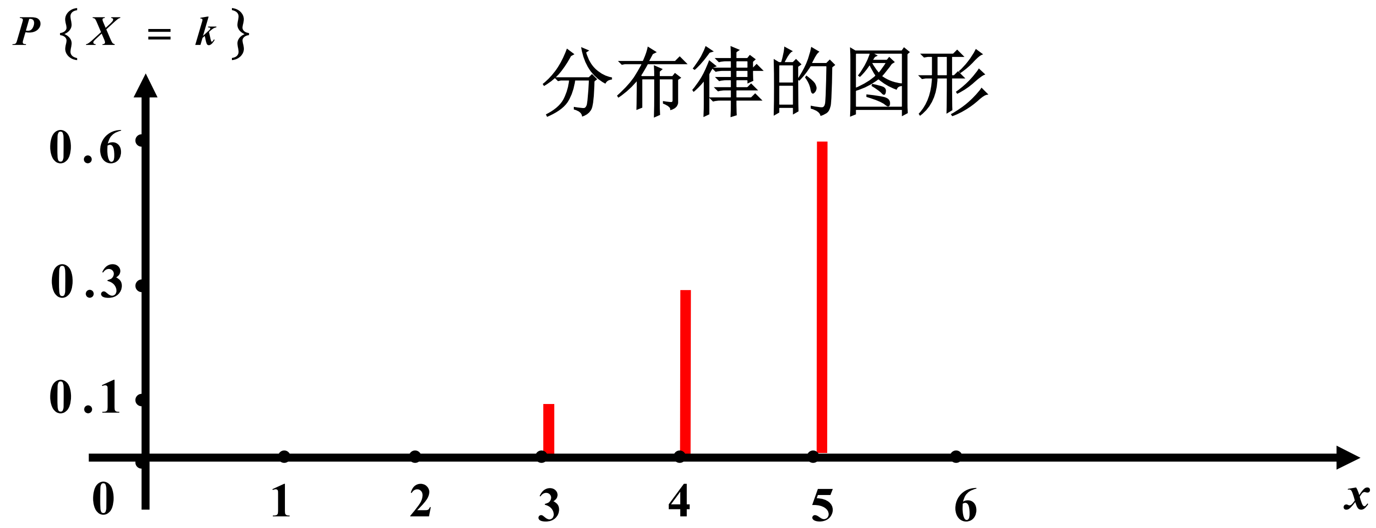
ii) 右连续的阶梯跳跃函数；

iii) 间断点为X的可能取值点 x_k；

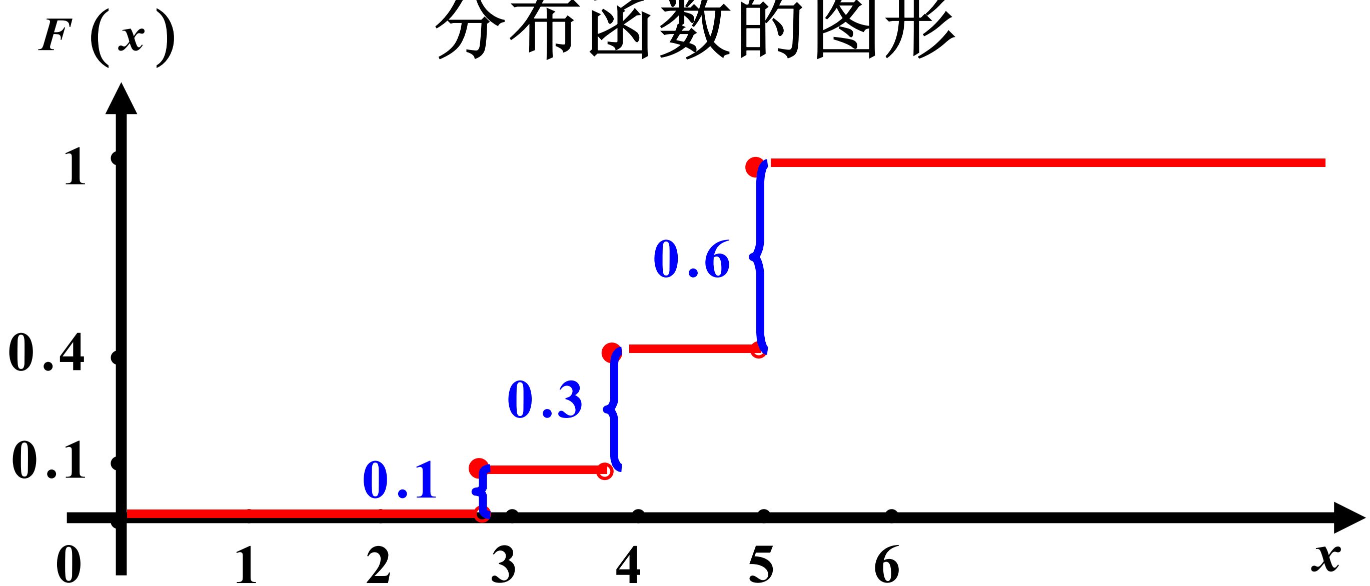
间断点处的跃度为 $P\{X=x_k\}=p_k$；



分布律的图形



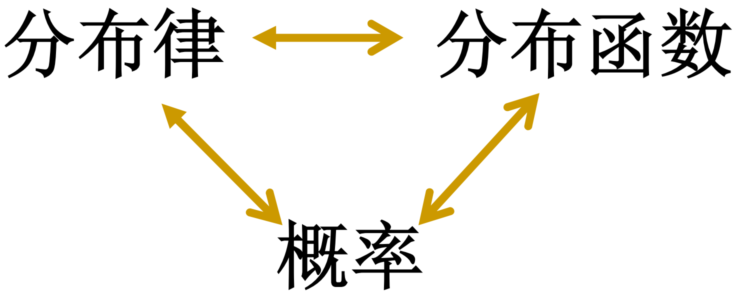
分布函数的图形



离散型随机变量的概率分布及有关计算

典型问题：

1.计算分布律；
2.计算分布函数；
3.确定分布律（函数）中的待定参数；
4.利用分布律（函数）计算有关概率。



例2 设分布函数 $F(x)=\begin{cases} A+Be^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$

求：A, B；

解： 由分布函数的性质可知，

$$F(+\infty)=1 \rightarrow A=1$$

由$F(x)$在$x=0$的右连续性可知，

$$F(0^+)=F(0) \rightarrow A+B=0$$

$$\therefore A=1,\ B=-1.$$

例3 设 X 可能取 -1, 0 , 1, 且 $F(x)=\begin{cases} 0 & x<-1 \\ 0.2 & -1\le x<0 \\ 0.5 & 0\le x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$

求 $i)$ 分布律 $ii)$ $P\left\{-\frac{1}{2}\le X<1\right\}$

解: $i)$ $P\{X=-1\}=F(-1)-F(-1^{-})=0.2$

$P\{X=0\}=F(0)-F(0^{-})=0.5-0.2=0.3$

$P\{X=1\}=0.5$

写出分布律

X	-1	0	1
P_k	0.2	0.3	0.5

例3 设 X 可能取 -1, 0 , 1, 且 $F(x)=\begin{cases} 0 & x<-1 \\ 0.2 & -1\le x<0 \\ 0.5 & 0\le x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$

求 $i)$ 分布律 $ii)$ $P\left\{-\frac{1}{2}\le X<1\right\}$

解:

X	-1	0	1
P_k	0.2	0.3	0.5

$ii)$ $P\left\{-\frac{1}{2}\le X<1\right\}$

$$=P\left\{-\frac{1}{2}<X\le 1\right\}+\underbrace{P\left\{X=-\frac{1}{2}\right\}}_{=0}-P\{X=1\}$$

$$=F(1)-F\left(-\frac{1}{2}\right)-P\{X=1\}$$

$$=1-0.2-0.5=0.3$$

$$F(x)=P(X\le x)$$

例4：某班同学在计算一组离散型随机变量的分布函数时，得到下列一些结果,说明这些结果是否正确。

$$1)F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1/2, & 0\le x\le 1 \\ 3/4, & 1<x<2 \\ 1, & x\ge 2 \end{cases} \qquad 2)F(x)=\begin{cases} -1, & x<0 \\ 1/2, & 0\le x<1 \\ 3/4, & 1\le x<2 \\ 1, & x\ge 2 \end{cases}$$

$$F(1^{+})\neq F(1)$$

都不正确

练习. 设离散型随机变量X的分布律为:

X	0	1	2
P_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

求: (1) X的分布函数$F(x)$

(2) $P(X \le \frac{1}{2})$, $P(1 < X \le \frac{3}{2})$, $P(1 \le X \le \frac{3}{2})$

(2).用分布函数计算概率：

X	0	1	2
P_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

$$P(X \le \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$$

$$P(1 < X \le \frac{3}{2}) = F(\frac{3}{2}) - F(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$P(1 \le X \le \frac{3}{2}) = P(1 < X \le \frac{3}{2}) + P(X = 1)$$

$$= 0 + P(X = 1) = \frac{1}{6}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/3, & 0 \le x < 1 \\ 1/2, & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

$$\{1 \le X \le \frac{3}{2}\} = \{1 < X \le \frac{3}{2}\} \cup \{X = 1\}$$

$$\boxed{F(x) = P(X \le x)}$$

$$\boxed{P\{x_1 < X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1)}$$

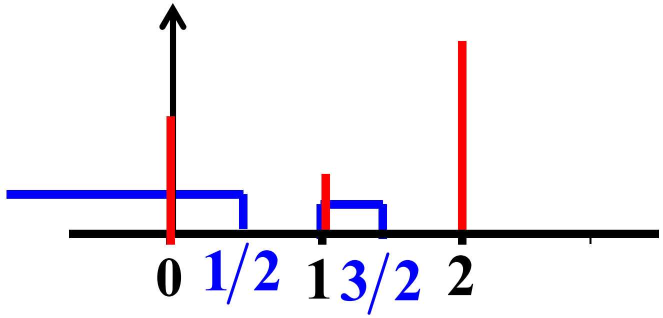
(2). 用分布律计算概率：

X	0	1	2
P_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

$$P(X \le \frac{1}{2}) = P(X = 0) = \frac{1}{3}$$

$$P(1 < X \le \frac{3}{2}) = 0$$

$$P(1 \le X \le \frac{3}{2}) = P(X = 1) = \frac{1}{6}$$



注释： 分布律 ⟶ 分布函数

分布律 ⟶ 概率；分布函数 ⟶ 概率

概率