

# 第五章 函数

计算机科学与技术系 洪源

# 函数的定义与性质

- 基本概念

- › 函数——单值的二元关系（第 192 页定义 5.1）
  - 相等的函数——集合的视角（第 193 页定义 5.2）
  - 从集合  $A$  到集合  $B$  的函数（第 193 页定义 5.3）
    - 二元关系  $R$  :  $\text{dom } R \subseteq A \wedge$  不一定单值
    - 函数  $f$  :  $\text{dom } f = A \wedge$  单值（记作  $f:A \rightarrow B$ ）
- ›  $B$  上  $A$  （第 194 页定义 5.4）
  - 若  $|A|=m$  ,  $|B|=n$  , 那么  $|B^A|=?$
- › 像, 完全原像（第 194 页定义 5.5）

# 函数的定义与性质

- 一些常用函数

- › 常函数（第 200 页定义 5.7 (1)）
  - › 例：从  $\{0,1\}^n$  到  $\{0,1\}$  一共有  $2$  的  $2^n$  次幂个函数，其中有  $2$  个常函数——
- › 恒等函数（第 200 页定义 5.7 (2)）
- › 单调递增函数，严格单调递增函数，递减函数，严格单调递减函数（第 200 页定义 5.7 (3)）
- › 特征函数  $\chi_{A'}$ （第 200 页定义 5.7 (4)）
  - 特征函数是从一个集合  $A$  到真值域  $\{0, 1\}$  上的函数
  - $A$  的任何一个子集  $A'$  唯一确定一个特征函数  $\chi_{A'}$
  - 例：  $A=\{a, b, c\}$ ，  $A'=\{b, c\}$ ，  $\chi_{A'}=?$
- › 自然映射  $g:A \rightarrow A/R$ （第 200 页定义 5.7 (5)）
  - 例：若  $A=\{a, b, c\}$ ，  $R=\{<a, b>, <b, a>\} \cup I_A$ ，则  $g=?$
  - 高斯函数（第 200 页定义 5.7 (6)）

# 函数的定义与性质

- 函数的性质

- › 单射，满射，双射（第 196 页定义 5.6）

- 课堂练习：  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = 2x$  是否单射、满射、双射的？

# 函数的复合与反函数

- 函数的复合
  - › 函数的复合就是关系的（右）复合
  - › 函数的复合的性质
    - 不满足交换律
    - 满足结合律（第 202 页定理 5.4 及其推论 1 和 2）
    - 函数的性质在复合中的传递（第 204 页定理 5.5）——注意：逆命题不一定成立（参见第 205 页定理 5.6）
    - 与恒等函数的复合（第 206 页定理 5.7）

# 函数的复合与反函数

- 反函数

- › 一个函数的逆关系不一定是函数
  - 只有单射函数的逆关系才是函数
  - 只有双射函数的逆关系才是原函数的反函数
- › 反函数的性质
  - 仍然是双射函数（第 207 页定理 5.8）
  - 互逆函数的复合是恒等函数（第 208 页定理 5.9）
  - 复合的逆等于逆的**反向**复合： $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ 
    - 注意上式成立的条件—— $f$  和  $g$  都是双射函数
    - 于是只要证明等式两端均是函数，其余由定理 4.6（2）可证

# 双射函数与集合的基数

- 集合的势

- › 等势（第 216 页定义 6.1）

- 例：  $\mathbb{Z}^+ \approx \mathbb{N}$  ,  $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$

- › 等势是一种等价关系（第 216 页定理 6.1）

- › （真）优势于

- › 设  $A$  、  $B$  是集合

- › 若存在从  $A$  到  $B$  的单射函数，则称  $B$  优势于  $A$ ，记做  $A \leq \bullet B$

- › 若  $A \leq \bullet B$  且  $\neg (A \approx B)$ ，则称  $B$  真优势于  $A$ ，记做  $A < \bullet B$