第三章 集合

计算机科学与技术系 洪源

集合的基本概念

- 朴素集合论
  - 1874 年由德国数学家 G. Cantor 创
- 基本术语
  - 集合
  - 元素
  - 有限集（有穷集）、无限集（无穷集）（第 109 页定义 3.1）
  - 空集（∅，第 109 页定义 3.2）
  - 全集（E，第 109 页定义 3.3）
    - 全集是相对的
    - 朴素集合论不承认绝对全集（后详）

集合的基本概念

- 集合间的常见关系
  - 属于（∈） vs 不属于（∉）
    - ∈ 与 ∉ 对任一确定的集合（A）和元素（a）而言满足排中律，即（a ∈ A）∨（a ∉ A）
    - 规定：A ∉ A
      - 自吞与罗素悖论
  - 相等（＝） vs 不相等（≠）（第 110 页外延公理）
  - 包含（⊆） vs 不包含（⊈），子集（第 110 页定义 3.4 ）
    - ∅ ⊆ A， A⊆A， A ⊆E
  - 真包含（⊂） vs 不真包含（⊄），真子集（第 111 页定义 3.5 ）

集合的基本概念

- 幂集（P(A)）
  - 定义（第112页定义3.6）
    - 例：设 $A=\{a, b\}$，则 $P(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
    - 例： $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$， $P(P(\varnothing))=\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$，……
  - 幂集定理
    - 若 $|A|=n$，则 $|P(A)|=2^n$
  - 关于绝对全集
    - 康托定理 & 康托悖论

集合的运算

- 集合运算优先级三原则
  - 一类运算优先于二类运算
  - 一类运算之间由右向左顺序进行
  - 二类运算之间由括号决定先后顺序

集合的运算

- 二类运算
  - 并（∪，并集），交（∩，交集），差（–，相对补集）
    - 定义（第 114 页定义 3.9 ）
      - 不交（第 115 页定义 3.10 ）
      - 并和交：由二元向多元和无穷的推广（第 119 页定义 3.13 ）
    - 例
  - 对称差（⊕，对称差集）
    - 定义（第 115 页定义 3.12 ）
    - 例

集合的运算

- 一类运算
  - 绝对补集（～）
    - 定义（第 115 页定义 3.11）
    - 例
  - 幂集

集合的运算

- 一类运算
  - 广义并（∪）
    - 定义：设A为集合，A的元素的元素构成的集合称为A的广义并，记为∪A，形式化定义为
      - $\cup A=\{x|\exists z(z\in A\wedge x\in z)\}$
    - $\cup\varnothing=\varnothing$
    - 例
  - 广义交（∩）
    - 定义：设 **A** 为非空集合，A的所有元素的公共元素构成的集合称为A的广义交，记为∩A，形式化定义为
      - $\cap A=\{x|\forall z(z\in A\rightarrow x\in z)\}$
    - $\cap\varnothing$不存在（后详）
    - 例

集合恒等式

- 集合运算的主要算律与运算性质
  - 第 116 页定理 3.6
  - 第 118 页定理 3.7，第 119 页定理 3.8
    - $\cap\varnothing$
  - 课堂练习：求证定理 3.8(6)
    - $(A\oplus B)\oplus C = A\oplus(B\oplus C)$
- 集合恒等式的常用证明方法
  - 恒等演算
    - 利用集合算律
    - 利用命题定律
      - $A = B \Leftrightarrow \forall x(x\in A\leftrightarrow x\in B)\Leftrightarrow\forall x((x\in A\rightarrow x\in B)\wedge(x\in B\rightarrow x\in A))$
  - $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B)\wedge(B \subseteq A)$

集合恒等式

- 课堂练习：求证下列各式。
  - $A - B = A \cap \sim B$
  - $(A\text{-}B)\text{-}C = (A\text{-}B) \cap (A\text{-}C)$
  - $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

有穷集的计数

- 文氏图（Venn Diagram，第 113 页 3.1.5 第一自然段）
- 容斥原理（第 126 页定理 3.11）