第五章 极限定理

第一节 大数定律

第二节 中心极限定理

本章主要讨论的两个问题：

大数定律和中心极限定理是概率论中两个重要的理论结果。

大数定律

背景 将一次试验视为对事物的一次观察(测量某数据D)

各次观察结果依次记为$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$

认为$\{X_n\}$是独立同分布的

在大量观察中，平均结果稳定于真值附近

研究在什么条件下? 在一定条件下，算术平均值具有稳定性

是一种统计规律，这种规律称为**大数定律**。

稳定性 ⟶ 依概率收敛于一实数

依概率收敛

设 $Y_1, Y_2, \cdots Y_n, \cdots$ 是随机变量序列，a 是一个常数，若对任意正数 ε，有：

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - a| < \varepsilon) = 1$$

则称序列 $Y_1, Y_2, \cdots Y_n, \cdots$ 依概率收敛于常数 a。

记为：$Y_n \xrightarrow{P} a$

注： 依概率收敛的理解:

对 $\forall \varepsilon > 0,$

当n充分大时，$Y_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 几乎是必然事件。

回顾. 切比雪夫不等式

设随机变量X具有数学期望 $E(X)=\mu$, 方差 $D(X)=\sigma^2$.

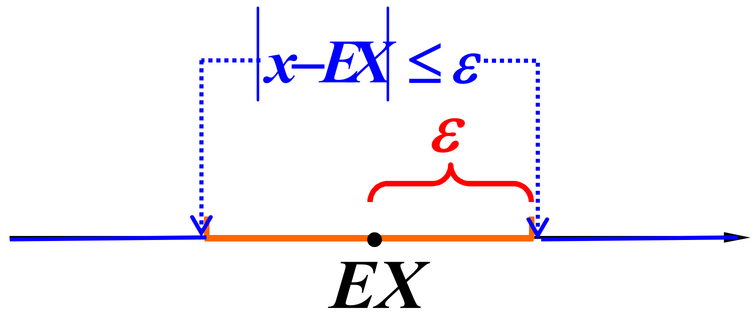
则对任意正数 $\varepsilon>0$

不等式: $P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ 成立。

称其为切比雪夫不等式

切比雪夫不等式(chebysev)的另一形式:

$$P(|X-\mu|<\varepsilon)\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$



切比雪夫大数定律特例

设 $X_1, X_2, \ldots$是相互独立的随机变量序列，它们都有相同的期望和方差，记 $E(X_i)=\mu$, $D(X_i)=\sigma^2, i=1,2,\ldots$

则对任意的 $\varepsilon>0$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-\mu\right|\le\varepsilon\}=1.$

证明 因为 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立, $E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i=\frac{1}{n}n\mu=\mu$

有 $D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i=\frac{1}{n^2}n\sigma^2=\frac{1}{n}\sigma^2$

由切比雪夫不等式，对任意的 $\varepsilon>0$,

$$0\le P\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-\mu\right|\ge\varepsilon\}\le\frac{1}{\varepsilon^2}D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)=\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{n}\sigma^2\longrightarrow 0\ (n\to\infty)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-\mu\right|\ge\varepsilon\}=0.\quad \text{即}\lim_{n\to\infty} P\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-\mu\right|\le\varepsilon\}=1.$$

切比雪夫大数定律特例

设 $X_1, X_2, \ldots$是相互独立的随机变量序列，它们都有相同的期望和方差，记

$$E(X_i)=\mu,\ D(X_i)=\sigma^2, i=1,2,\ldots$$

则对任意的 $\varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-\mu\right|\le\varepsilon\}=1.$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \mu=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i).$$

依概率收敛于u.

切比雪夫大数定律特例

设 $X_1, X_2, \ldots$ 是相互独立的随机变量序列，它们都有相同的期望和方差，记

$$E(X_i)=\mu,\ D(X_i)=\sigma^2, i=1,2,\ldots$$

则：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{P} \mu.$$

频率稳定性

伯努利大数定律

设 $X_1, X_2, \ldots$ 是相互独立的随机变量序列，它们都服从参数 p 的0-1 分布，且

$$E(X_i)=p,$$

$$D(X_i)=p(1-p), i=1,2,\ldots,$$

则：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{P} p.$$

事件A在n次试验中出现的频率

事件A在一次试验中出现的概率

切比雪夫大数定律特例

设 $X_1, X_2, \ldots$ 是相互独立的随机变量序列，它们都有相同的期望和方差，记

$E(X_i)=\mu,\ D(X_i)=\sigma^2,\ i=1,2$

则：

$n \quad i=1$

伯努利大数定律

设 $X_1, X_2, \ldots$ 是相互独立的随机变量序列，它们都服从参数 p 的0-1 分布，

且 $E(X_i)=p,$

$n \quad i=1$

样本的算术平均值去代替或估计其期望值提供了理论上的依据。

辛钦大数定律

设 $X_1, X_2, \cdots X_n \cdots$ 相互独立,并服从同一分布，

且具有数学期望：$E(X_k)=\mu \qquad (k=1,2\cdots)$

则：$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \mu$$

贝努利大数定律

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 独立同 $b(1,p)$ 分布

则 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} p \quad (n \to \infty)$

切比雪夫大数定律特例

设 1) $\{X_n\}$ 为独立随机序列

2) 对任意k $E(X_k) = \mu,\ D(X_k) = \sigma^2$

则 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \mu \quad (n \to \infty)$

辛钦大数定律

设 1) $\{X_n\}$独立同分布

2) $\forall i,\ E(X_i) = \mu$

则 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \mu \quad (n \to \infty)$

例 设 $\{X_n\}$ 为独立随机序列

且 $X_n \sim \begin{pmatrix} -2^n & 0 & 2^n \\ 2^{-(2n+1)} & 1-2^{-2n} & 2^{-(2n+1)} \end{pmatrix}$

证明 $\{X_n\}$ 服从大数定律

证明：因为 1) $\{X_n\}$ 为独立随机序列

2) $\forall n,\ E(X_n)=0,\ D(X_n)=1$

由切比雪夫大数定律特例知：

$\{X_n\}$ 服从大数定律

第五章 极限定理

第一节 大数定律

第二节 中心极限定理

中心极限定理的客观背景

引例1：

一个城市的用电量是一个随机变量:

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k \underset{n\text{很大}}{\overset{\text{近似}}{\sim}} N(\mu, \sigma^2)$$

(1) 每家每户的用电量 X_k 相互独立;

(2) 每家每户的用电量 X_k 对城市用电量总和 X 的影响都很小.

则由中心极限定理：当n很大时，X 近似服从正态分布.

中心极限定理的客观背景

引例2：

一台机床已经调试良好，操作正常。但由于机床的微小震动、工具的微小变形、原材料质量上的微小差异、工作操作上的微小偏差等等数不清的随机因素，它们每一个因素在总的影响中所起的作用都很微小。而综合起来在产品质量上就形成一定的误差，这一误差近似服从正态分布。

产品质量的误差 $X=\sum_{k=1}^{n} X_k \overset{\text{近似}}{\underset{n\text{很大}}{\sim}} N(\mu,\sigma^2)$

一、林德贝尔格—勒维定理 (独立同分布的中心极限定理)

设 1) $\{X_n\}$独立同分布.

2) $\forall i,\ E(X_i)=\mu,\ D(X_i)=\sigma^2, 0<\sigma^2<\infty.$

则$\forall x\in R$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\le x\} = \Phi(x).$

这时 $E\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)=n\mu,\ D\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)=n\sigma^2.$

定理的应用形式 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \overset{\text{近似}}{\sim} \mathrm{N}(0,1)$; 或: $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{近似}}{\sim} \mathrm{N}(n\mu, n\sigma^2).$

一、林德贝尔格—勒维定理 (独立同分布的中心极限定理)

注： 定理 表达了正态分布在概率论中的特殊地位：

尽管 $X_1, X_2 \cdots X_n \cdots$ 分布是任意的，

很难求出$X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ 的分布的确切形式，

但当n很大时，它却近似服从正态分布。

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \underset{n很大}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2)$$

二、棣莫佛-拉普拉斯定理

设 $\eta_n \sim B(n,p),\ n=1,2,\cdots\ (0<p<1)$

这时 $E\eta_n = np,\ D\eta_n = np(1-p).$

则 $\forall x \in R$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\} = \Phi(x).$

应用形式　若 $X \sim B(n,p)$，n 充分大时近似地有

$$\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1),\quad \text{或}\quad X \overset{\text{近似}}{\sim} N(np, np(1-p)).$$

定理表明： 正态分布是二项分布的极限分布，当n充分大时可以用正态分布来近似计算二项分布的概率。

说明 中心极限定理的使用场合

独立和……… $\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N\left(n\mu, n\sigma^2\right)$

算术平均值……… $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

二项分布……… $X \overset{\text{近似}}{\sim} N\left(np, np(1-p)\right)$

n 较大

例1 系统由100个相互独立起作用的部件组成，每个部件的损坏率为0.1。系统要正常工作，至少有85个部件正常工作，求系统正常工作的概率。

解：设X是损坏的部件数，则 $X \sim B(100,0.1)$。

则整个系统能正常工作当且仅当 $X \le 15.$

由隶莫佛-拉普拉斯定理有

$$P\{X \le 15\} = P\left\{\frac{X-100\times 0.1}{\sqrt{100\times 0.1\times 0.9}} \le \frac{15-100\times 0.1}{\sqrt{100\times 0.1\times 0.9}}\right\}$$

$$\approx \Phi\left(\frac{15-100\times 0.1}{\sqrt{100\times 0.1\times 0.9}}\right) = \Phi\left(\frac{5}{3}\right) = 0.952.$$

二项分布………… $X \overset{\text{近似}}{\sim} N\left(np, np(1-p)\right)$

例2 一生产线生产的产品成箱包装，每箱的重量是随机的。假设每箱平均重50千克，标准差为5千克。若用最大载重量为5吨的汽车承运，试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱，才能保障不超载的概率大于0.977。

解： 设最多可装 n 箱，保障不超载的概率大于0.977。

第 i 箱重量为 X_i 千克，$i=1,\cdots,n.$

则 $EX_i = 50, \quad DX_i = 25, \quad i=1,\cdots,n$

且 $P\{\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 5000\} > 0.977$

由中心极限定理有

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x\} = \Phi(x)$$

$$\mu = 50, \quad \sigma = 5$$

$$P\{\sum_{i=1}^{n} X_i \le 5000\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 50n}{5\sqrt{n}} \le \frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}\right\}$$

$$\approx \Phi(\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}) = \Phi(\frac{1000-10n}{\sqrt{n}}) > 0.977$$

则 $\frac{1000-10n}{\sqrt{n}} > 2$, $100n^2 - 20000n + 1000^2 > 4n$,

解得 $n > 102.02$或$n < 98.02$, 由题意知 $n = 98$.

因此最多可装 98 箱，保障不超载的概率大于0.977。

例3 计算机进行加法计算时，把每个加数取为最接近它的整数来计算。设所有的取数误差是相互独立的随机变量，并且都在区间[-0.5, 0.5] 上服从均匀分布。

求：(1) 现有1200个数相加,误差总和的绝对值小于10的概率。$P\left(\left|\sum_{k=1}^{1200} X_k\right| < 10\right)$

(2) 应有多少个数相加时可使误差总和的绝对值小于10 的概率大于0. 9 $P\left(\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| < 10\right) > 0.9$

解：设 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 为各个加数的取数误差

则这是一列独立同分布的随机变量，其所有加数的误差总和为：$\sum_{k=1}^{n} X_k$

独立和………… $\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{近似}{\sim} N\left(n\mu, n\sigma^2\right)$

例3. 设所有的取数误差相互独立，都在 [-0.5, 0.5] 上服从均匀分布。

求: $P\left(\left|\sum_{k=1}^{1200} X_k\right| < 10\right)$ $P\left(\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| < 10\right) > 0.9$

解: $\therefore E(X_k) = \dfrac{-0.5+0.5}{2} = 0,\quad D(X_k) = \dfrac{[0.5-(-0.5)]^2}{12} = \dfrac{1}{12}$

从而: $\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = 0,\quad \sqrt{\sum_{k=1}^{n} D(X_k)} = \sqrt{\dfrac{n}{12}} = 10$

$$\because \quad P\left(\left|\sum_{k=1}^{1200} X_k\right| < 10\right) = P\left(-10 < \sum_{k=1}^{1200} X_k < 10\right)$$

$$= P\left(\frac{-10-0}{10} < \frac{\sum_{k=1}^{1200} X_k - 0}{10} < \frac{10-0}{10}\right) = P\left(-1 < \frac{\sum_{k=1}^{1200} X_k}{10} < 1\right)$$

$$\approx \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 2\times 0.8453 - 1 = 0.6826$$

独立和………… $\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N\left(n\mu, n\sigma^2\right)$

$$P\left(\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| < 10\right) > 0.9$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - E(\sum_{k=1}^{n} X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^{n} X_k)}} \underset{n\text{很大}}{\sim} N(0,1)$$

解：误差总和为：$\sum_{k=1}^{n} X_k$

$$\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = 0, \quad \sqrt{\sum_{k=1}^{n} D(X_k)} = \sqrt{\frac{n}{12}}$$

$$0.9 < P\left(\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| < 10\right) = P(-10 < \sum_{k=1}^{n} X_k < 1$$

$$= P\left(\frac{-10-0}{\sqrt{n/12}} < \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - 0}{\sqrt{n/12}} < \frac{10-0}{\sqrt{n/12}}\right) = P\left(-20\sqrt{\frac{3}{n}} < \right)$$

$$= 2\Phi\left(20\sqrt{\frac{3}{n}}\right) - 1 \longrightarrow \Phi\left(20\sqrt{\frac{3}{n}}\right) > 0.95 \approx \Phi(1.65)$$

$$20\sqrt{\frac{3}{n}} > 1.65 \longrightarrow n < 3\times\left(\frac{20}{1.65}\right)^2$$ 解得：$n \approx 441$

结论：441个数相加时可使误差总和的绝对值小于10 的概率大于0.9

小结　大数定律及中心极限定理

定理1 (贝努利)	$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立 $\sim (0-1)$分布(参数p)	$\dfrac{n_A}{n} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} p$
定理2 (切比雪夫)	$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立 $E(X_k) = \mu \quad D(X_k) = \sigma^2$	$\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \mu$
定理3 (辛钦)	$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立 $E(X_k) = \mu$ 同分布	$\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \mu$
定理1 (棣莫弗)	$\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_n \cdots$ 相互独立，$\eta_n \sim B(n, p)$	$\dfrac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \overset{近似}{\sim} N(0,1)$ ★
定理2 (独立同分布)	$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立 同分布 $E(X_k) = \mu \; D(X_k) = \sigma^2$	$\dfrac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \overset{近似}{\sim} N(0,1)$ ★