第六章 作业

3. 用梯形公式和 Simpson 公式计算积分 $\int_{0.5}^{1}\sqrt{x}\mathrm{d}x$ ，取 4 位有效数字。

$$T=I_1=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]=\frac{1-0.5}{2}[\sqrt{0.5}+1]\approx\frac{1-0.5}{2}[0.7071+1]\approx 0.4268$$

$$S=I_2=\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]=\frac{1-0.5}{6}[\sqrt{0.5}+4\sqrt{0.75}+1]$$

$$\approx\frac{1-0.5}{6}[0.7071+4\cdot 0.8660+1]\approx 0.4309$$

对比准确值：

$$\int_{0.5}^{1}\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_{0.5}^{1}=\frac{2}{3}(1-0.5^{3/2})\approx 0.4310$$

4. 证明求积公式

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}(f(x_0)+f(x_1)) - \frac{h^2}{12}(f'(x_1)-f'(x_0))$$

具有 3 次代数精确度，其中 $h=x_1-x_0$。

当$f(x)=x^3$时

$$右式=\frac{x_1-x_0}{2}[f(x_1)+f(x_0)]-\frac{(x_1-x_0)^2}{12}[f'(x_1)-f'(x_0)]$$

$$=\frac{x_1-x_0}{2}[x_1^3+x_0^3]-\frac{(x_1-x_0)^2}{12}[3x_1^2-3x_0^2]$$

$$=\frac{1}{4}(x_1^2-x_0^2)[2x_1^2-2x_1x_0+2x_0^2-x_1^2+2x_1x_0-x_1^2]$$

$$=\frac{1}{4}(x_1^2-x_0^2)(x_1^2+x_0^2)=\frac{1}{4}(x_1^4-x_0^4)$$

$$左式=\int_{x_0}^{x_1} x^3 dx=\frac{1}{4}(x_1^4-x_0^4)=右式$$

5. 用梯形公式和 Simpson 公式计算积分 $\int_0^1 e^{-x}dx$ ，并估计误差。

$$T=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]=\frac{1-0}{2}[e^0+e^{-1}]\approx 0.6839$$

$$S=\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]=\frac{1-0}{6}[e^0+4e^{-0.5}+e^{-1}]\approx 0.6323$$

$$R(T)=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)\Rightarrow|R(T)|\le\frac{1}{12}e^0\approx 0.0833$$

$$R(S)=-\frac{(b-a)}{180}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta)\Rightarrow|R(S)|\le\frac{1}{180*16}e^0\approx 3.472\times10^{-4}$$

对比真实值：0.63212

6. 求 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在[0,1]上的积分 $I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$，已知

x	0	1/8	2/8	3/8	
$f(x)=\sin x / x$	1	0.9973978	0.9896158	0.9767267	
	4/8	5/8	6/8	7/8	1
	0.9588510	0.9361556	0.9088516	0.8771925	0.8414709

根据上述数据，分别用复化梯形公式和复化 Simpson 公式的算式 $I\approx T_8$ 和 S_4 求 I 的近似值。

$$T_8=\frac{1}{16}[1+0.8414709+2\times(0.9973978+...)]\approx 0.945691$$

$$S_4=\frac{1}{24}[1+0.8414709+4\times(0.9973978+...)$$
$$+2\times(0.9896158+...)]\approx 0.946083$$

7. 计算积分 $\int_0^1 e^x dx$，若用复化梯形公式，问：应将区间分成多少等分，才能使计算结果有五位有效数字？

$$1 < \int_0^1 e^x dx < e \qquad R \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)]$$

$$|R| \approx \frac{h^2}{12}(e^1 - e^0) < \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

$$h < \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{e-1}} \times 10^{-2}$$

$$k \geq \frac{1-0}{h} = \frac{100 \cdot \sqrt{e-1}}{\sqrt{6}} \approx 53.5 \qquad \text{k=54}$$

9. 设 $f(x)=x^3$ ，对 $h=0.1$ 和 $h=0.01$，用中心差商公式计算 $f'(2)$ 的近似

$$f'_{h=0.1}(2)=\frac{2.1^3-1.9^3}{2*0.1}=12.01$$

$$f'_{h=0.01}(2)=\frac{2.01^3-1.99^3}{2*0.01}=12.0001$$

对比真实值：f'(2)=12

基本要求

- 数值微分，差商近似导数的计算；
- 梯形、Simpson求积公式；
- 梯形、Simpson复合求积法；
- 龙贝格积分法和高斯求积公式的基本思想。