第四章 随机变量的数字特征

第一节 随机变量的数学期望

- 离散型随机变量的数学期望
- 连续型随机变量的数学期望
- 随机变量的函数的数学期望
- 数学期望的性质

一. 离散型随机变量的数学期望

1. 定义1 设 X 是离散型随机变量，它的分布律为:

$$P(X=x_k)=p_k,\quad k=1,2,\ldots$$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则称此级数的和为随机变量 X 的数学期望.

记为：$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$

也就是说，离散型随机变量的数学期望是一个绝对收敛的级数的和.

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k\, p_k$$

注：

▲ 若 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k\, p_k$ 不绝对收敛，则称 $E(X)$ 不存在.

▲ 推广到二维情形 (X,Y):

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_{i\cdot}=\sum_{i=1}^{\infty} x_i\Big(\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_i p_{ij}$$

例 $X \sim B(n, p)$，求 $E(X)$

$$kC_n^k = k\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!} = nC_{n-1}^{k-1}$$

解 $E(X)=\sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

$$=\sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$=np\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} p^{k}(1-p)^{(n-1)-k} = np(p+1-p)^{n-1} = np$$

特例 若 $Y \sim B(1, p)$，则 $E(Y)=p$

$$P_n(k)=P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n$$

2. 几种常见分布的数学期望

(1) (0-1) 分布 $P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k},k=0,1$

$$E(X)=1\cdot p+0\cdot(1-p)=p$$

(2) 二项分布 $X\sim B(n,p)$, $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},k=0,1,2\cdots n$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}k\cdot C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=np$$

(3) 泊松分布 $X\sim P(\lambda)$ $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $k=0,1,2,\cdots$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda$$

用定义法求时常化为级数求和

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{k!}x^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

例1 某人的一串钥匙上有 n 把钥匙，其中只有一把能打开自己家的门，他随意地试用这串钥匙中的某一把去开门， 若每把钥匙试开一次后除去。

求： 打开门时试开次数的数学期望.

解： 设试开次数为 X，则：

$$P(X=k)=1/n,\ k=1,2,\ldots,n$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{(1+n)n}{2}=\frac{n+1}{2}$$

例2. 某银行信贷部门对前来申请贷款的两个企业进行调查,对其盈利额和相应的概率作了如下估计:

甲企业:

产品	畅销	适销	滞销
盈利额 X_1 （万元）	50	30	- 20
概率	0.15	0.6	0. 25

乙企业:

产品	畅销	适销	滞销
盈利额 X_2 （万元）	60	36	- 40
概率	0.1	0.6	0. 3

问:当其它条件均相同时，信贷部门应先批准哪个企业的贷款更为稳妥?

产品	畅销	适销	滞销
盈利额X_1（万元）	50	30	- 20
概率	0.15	0.6	0. 25

产品	畅销	适销	滞销
盈利额X_2（万元）	60	36	- 40
概率	0.1	0.6	0. 3

解： 当其它条件均相同时，应考查两个企业盈利额的平均值的情况。故分别求其数学期望：

$$E(X_1)=50\times 0.15+30\times 0.6+(-20)\times 0.25 = 20.5 \text{（万元）}$$

$$E(X_2)=60\times 0.1+36\times 0.6+(-40)\times 0.3 = 15.6 \text{（万元）}$$

由此可见，甲企业的经济效益高于乙企业，所以信贷部门应先批准甲企业的贷款更为稳妥。

二. 连续型随机变量的数学期望

1. 连续型随机变量数学期望的定义

定义2 设 X 是连续型随机变量，其概率密度函数为 $f(x)$，如果积分：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$$ 绝对收敛，

则称为连续型随机变量 X 的数学期望，

记为：$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$$

即：连续型随机变量的数学期望是一个绝对收敛的积分.

注：▲ 推广到二维情形(X,Y): $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_X(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy\right)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x,y)dxdy$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f(x,y)dxdy$$

$f(x,y)$为联合概率密度

2. 几种常见分布的数学期望

(1). 均匀分布

若连续型随机变量 X 具有概率密度 $f(x)$为:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

即 $X\sim U[a,b]$

则：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x)dx=\int_a^b x\dfrac{1}{b-a}dx$

$$=\frac{a+b}{2}$$

即: $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$

(2). 指数分布

若连续型随机变量 X 具有概率密度 $f(x)$为:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 为常数

则: $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx$

$$=\frac{1}{\theta}\int_{0}^{+\infty} x\cdot e^{-\frac{x}{\theta}}dx = -\int_{0}^{+\infty} x\cdot d\,e^{-\frac{x}{\theta}} = \theta$$

由分部积分

即: $E(X)=\theta$

(3). 正态分布

若随机变量 X 的概率密度为： 即：$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty$$

则: $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$

令: $y=\dfrac{x-\mu}{\sigma}\Rightarrow$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma y+\mu)e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

结论：正态分布中密度函数的参数 μ 恰好就是随机变量X的数学期望.

$$=0+\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=\mu$$

即: $E(X)=\mu$

2. 几种常见分布的数学期望

$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$

(1). 均匀分布 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$X \sim U[a,b]$

$E(X)=\dfrac{a+b}{2}$

(2). 指数分布 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$E(X)=\theta$

(3). 正态分布 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

$E(X)=\mu$

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty$$

三. 随机变量的函数的数学期望

问题的提出:

设已知随机变量 X 的分布，且 $Y = g(X)$, 那么应该如何计算$Y = g(X)$的数学期望呢?

方法:

因为 $g(X)$也是随机变量，求其分布

就可以按定义计算 $E[\,g(X)\,]$

例4 已知 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ u & q & p \end{pmatrix}$ 求 $E\left(X^2\right)$

解 先求X^2的分布

X^2	$(-1)^2$	0^2	1^2
p	u	q	p

X^2	0	1
p	q	$p+u$

$$\longrightarrow E\left(X^2\right) = p + u$$

例5 $X \sim U(-1,2)$, $Y = g(X) = \begin{cases} 1, & X > 0, \\ 0, & X = 0, \\ -1, & X < 0. \end{cases}$ 求：$E(Y)$

解 $f_X(x) = \begin{cases} \boxed{1/3, \quad -1 < x < 2,} \\ 0, \quad 其他 \end{cases}$

$$Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \longrightarrow E(Y) = \frac{1}{3}$$

$$P\{Y=-1\} = P\{X<0\} = \int_{-\infty}^{0} f_X(x)dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{3}dx = \frac{1}{3}$$

$$P\{Y=0\} = P\{X=0\} = 0$$

$$P\{Y=1\} = \frac{2}{3}$$

三. 随机变量的函数的数学期望

问题的提出:

设已知随机变量 X 的分布，且 $Y = g(X)$, 那么应该如何计算$Y = g(X)$的数学期望呢？

方法:

因为 $g(X)$也是随机变量，求其分布

就可以按定义计算 $E[g(X)]$

问题: 是否可以不求 $g(X)$ 的分布，而只根据 X 的分布，求得 $E[g(X)]$呢？

三. 随机变量的函数的数学期望

定理. 设 $Y=g(X)$（g是连续函数）,则:

(1) X是离散型随机变量，它的分布律为:

$$p_k=P(X=x_k),\quad k=1,2,\cdots,$$

若 $\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$ 绝对收敛，则有:

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

证明:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$
Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_n)$	$\cdots$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

(2) X是连续型随机变量，它的概率密度为$f(x)$

若$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$ 绝对收敛，则有：

$$E(Y)=E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx$$

注

▲ 此定理可以推广到二维的情形：

例如：$Z=g(X,Y)$，g是连续的函数，

例4 已知 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ u & q & p \end{pmatrix}$ 求 $E\left(X^2\right)$

解　先求X^2的分布

X^2	$(-1)^2$	0^2	1^2
p	u	q	p

X^2	0	1
p	q	$p+u$

$\longrightarrow E\left(X^2\right) = p + u$

或者：　用 $E\left(X^2\right) = \sum_{k=1}^{3} \left(x_k\right)^2 p_k$

$$E\left(X^2\right) = (-1)^2 \times u + 0^2 \times q + 1^2 \times p = u + p$$

$$\boxed{E\left(g\left(X\right)\right) = \sum_k g\left(x_k\right) p_k}$$

例5 $X \sim U(-1,2)$, $Y = g(X) = \begin{cases} 1, & X > 0, \\ 0, & X = 0, \\ -1, & X < 0. \end{cases}$ 求：$E(Y)$

解 $f_X(x) = \begin{cases} 1/3, & -1 < x < 2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

法一：$Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \longrightarrow E(Y) = \dfrac{1}{3}$

$$P\{Y=-1\} = P\{X<0\} = \int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{3}$$

$$P\{Y=0\} = P\{X=0\} = 0$$

$$P\{Y=1\} = \frac{2}{3}$$

例5 $X \sim U(-1,2), Y = g(X) = \begin{cases} 1, & X > 0, \\ 0, & X = 0, \\ -1, & X < 0. \end{cases}$ 求：$E(Y)$

解 $f_X(x) = \begin{cases} \boxed{1/3, \quad -1 < x < 2,} \\ 0, \quad 其他 \end{cases}$

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \boxed{f(x)} dx$$

$$= \int_{-1}^{2} g(x) \frac{1}{3} dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (-1) \frac{1}{3} dx + \int_{0}^{2} 1 \cdot \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3}$$

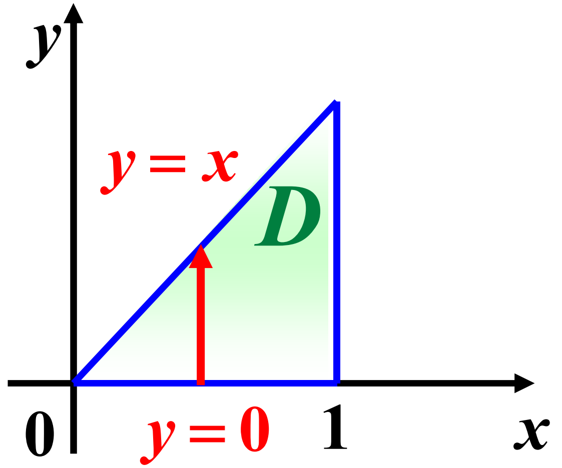
例6 设 (X, Y) 的密度为 $f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<y<x<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$

求：$E(X), E(Y), E\left(X^2\right), E\left(Y^2\right), E\left(XY\right)$

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy$

$=\iint\limits_D 3x^2dxdy$

$=3\int_0^1 dx\int_0^x x^2dy \quad =\dfrac{3}{4}$



$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

或 先求出 $f_X\left(x\right)=\begin{cases}\int_0^x 3xdy=3x^2, & 0<x<1,\\ 0 & 其他\end{cases}$

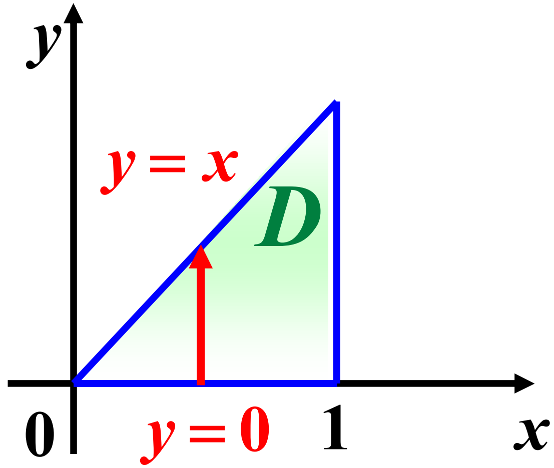
$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X\left(x\right)dx=3\int_0^1 x^3dx=\dfrac{3}{4}$

例6 设 (X, Y) 的密度为 $f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<y<x<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$

求：$E(X), E(Y), E(X^2), E(Y^2), E(XY)$

解 $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y f(x,y)\,dxdy=\iint_D 3xy\,dxdy$

$$=\frac{3}{8}$$



$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,y)\,dxdy$$

$$=\iint_D 3x^3\,dxdy=\frac{3}{5}$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x,y)\,dxdy=\iint_D 3xy^2\,dxdy=\frac{1}{5}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x,y)\,dxdy=\iint_D 3x^2y\,dxdy=\frac{3}{10}$$

例7 设国际市场对我国某出口商品的年需求量是一个随机变量 X(单位:吨),它在 $[2000, 4000]$ 上服从均匀分布.设每售出此商品一吨,可为国家挣外汇3万元,若售不出，则每吨需花费仓储费1万元.

问：需组织多少货源,才能使国家的收益最大?

解： 随机变量 X 的概率密度为:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2000} & 2000\le x\le 4000\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

设组织y 吨的货源收益为Y,

则有：$$Y=g(X)=\begin{cases}3y & x\ge y\\ 3x-(y-x)\cdot 1 & x<y\end{cases}$$

所以：

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

$$Y=g(X)=\begin{cases}3y & x\ge y\\ 3x-(y-x)\cdot 1 & x<y\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}\boxed{\dfrac{1}{2000}\quad 2000\le x\le 4000}\\ 0 \quad 其它\end{cases}$$

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\boxed{f(x)}dx$$

$$=\frac{1}{2000}\int_{2000}^{4000} g(x)\,dx=\frac{1}{2000}\left[\int_{2000}^{y}(4x-y)\,dx+\int_{y}^{4000}3y\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{1000}[-y^2+7000y-4000000]$$

求$E(Y)$最大

$$\frac{dE(Y)}{dy}=\frac{1}{1000}(-2y+7000)=0 \Longrightarrow y=3500$$

$$\frac{dE(Y)}{dy}=\frac{1}{1000}(-2y+7000)=0 \Longrightarrow y=3500$$

显然， $\frac{d^2E(Y)}{dy^2}=-\frac{2}{1000}<0$

故 y=3500 时, $E(Y)$最大, $E(Y)$= 8250万元

结论：应组织3500(吨)货源才能使国家的收益最大.

四. 数学期望的性质

X	c
p	1

1. 设 c 是常数，则：$E(c)=c$

2. 设 c 是常数, X 是随机变量, 则 $E(cX)=cE(X)$

3. X,Y 是两个随机变量，则：

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

注：这一性质可推广到任意有限个随机变量之和的情形.

4. X,Y 是两个相互独立的随机变量，则：

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

注：这一性质可推广到任意有限个相互独立的随机变量之积的情形.

例8. 求二项分布的数学期望 $Y \sim B(n, p)$

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立,且均服从 $(0-1)$ 分布

求: $E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$

解: 设: $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$,

由题意,每一个随机变量 X_i 服从: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$.

$$E(X_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

则由数学期望的性质有:

$$E(Y) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

所以得: $E(Y) = p + p + \cdots + p = np$