第二章 一维随机变量及其分布

第二节 离散型随机变量及其分布

- 离散型随机变量的分布律
- 几种常见的离散型随机变量的分布
  - (0-1)分布
  - 二项分布
  - 泊松分布

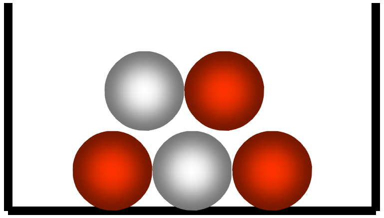
要求：熟练掌握离散型随机变量及其概率分布；熟练掌握二项分布,泊松分布及其二项分布的泊松近似

一. 离散型随机变量的分布律

引例

如图中所示，从中任取 3 个球

取到的白球数 X 是一个随机变量，



X可能取的值是 **0, 1, 2**

X取每个值的概率为：

$$P(X=0)=\frac{k}{n}=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}$$

X	0	1	2
P_k	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

$$P(X=1)=\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\frac{6}{10}$$

X的分布律

$$P(X=2)=\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$$

且：$\sum_{i=0}^{2}P(X=i)=1$

1. **定义**： 设离散型随机变量X所有可能的取值为

$$x_k \ , k = 0,1,2\cdots$$

且 $P(X=x_k)=p_k \quad k=0,1,2\cdots\cdots$

则称 $P(X=x_k)=p_k$ 为离散型 随机变量

X 的 概率分布 或 分布律.

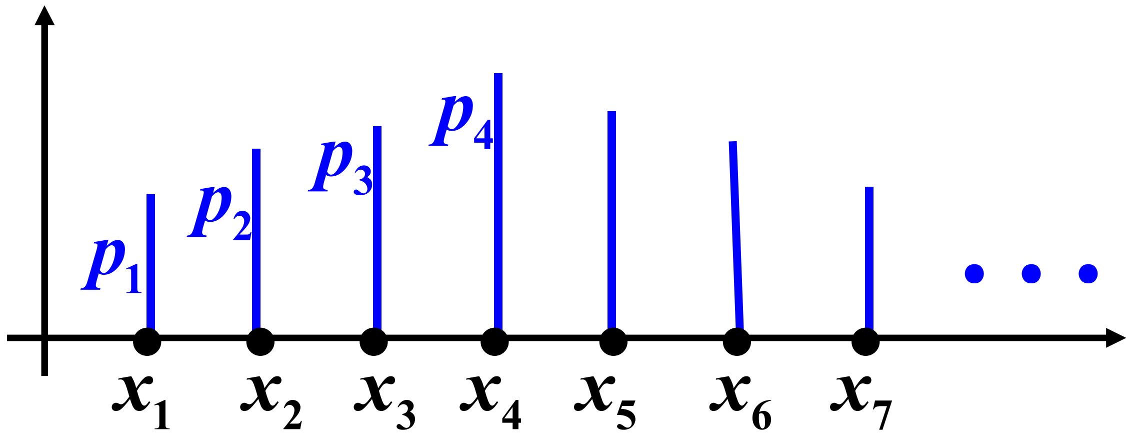
注： 分布律常以列表给出

X	x_0	x_1	$x_2 \cdots \cdots$	$x_n \cdots \cdots$
P_k	p_0	p_1	$p_2 \cdots \cdots$	$p_n \cdots \cdots$

矩阵表示

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k & \cdots \end{pmatrix}$$

图形表示



2. 性质

(1). $p_k \geq 0, \quad k = 0,1,2\cdots$ （非负性）

(2). $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ （完备性）

注 ▲ 一般：求分布律时需验证这两条性质。若成立则称得上是分布律，否则说明分布律求错.

分布律常以列表给出：

X	x_0	x_1	$x_2 \cdots \cdots$	$x_n \cdots \cdots$
P_k	p_0	p_1	$p_2 \cdots \cdots$	$p_n \cdots \cdots$

练习:设随机变量X的分布律为:

$$p\{X=k\}=b\left(\frac{2}{3}\right)^k, k=1,2,3,\cdots$$ 试确定常数b.

解：由分布律的性质，有

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}b\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

$$=b\cdot\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=2b=1$$

$$\Rightarrow b=\frac{1}{2}$$

例1. 设在15只同类型的零件中有两只次品，现从中抽取3只，以 X 表示取出3只中所含次品的个数.

求:X的分布律.

A_i={取出中含有i个次品}，i=1,2,3

解: X 的可能取值: 0, 1, 2.

X 的各种可能取值的概率如下:

$$P(X=0)=\frac{C_{13}^3C_2^0}{C_{15}^3}=\frac{22}{35}$$

$$P(X=2)=\frac{C_{13}^1C_2^2}{C_{15}^3}=\frac{1}{35}$$

$$P(X=1)=\frac{C_{13}^2C_2^1}{C_{15}^3}=\frac{12}{35}$$

$$P_k>0,\sum_{k=0}^{2}P_k=1$$

所以其分布律为:

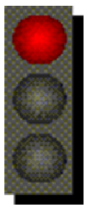
X	0	1	2
P_k	$\frac{22}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

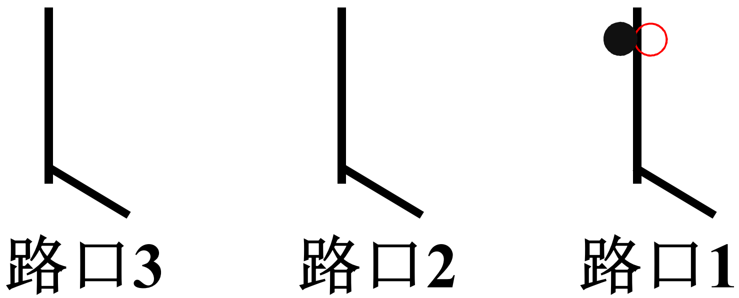
例2. 一汽车沿一街道行驶，需要通过三个均设有红绿信号灯的路口，各信号灯工作相互独立，且红绿灯显示的时间相等.以X表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数，求：X的分布律

解: 依题意，X可取值 0, 1, 2, 3

设 A_i={第i个路口遇红灯}，i=1,2,3 $P(A_i)=1/2$

$\overline{A_i}$={第i个路口遇绿灯}，i=1,2,3

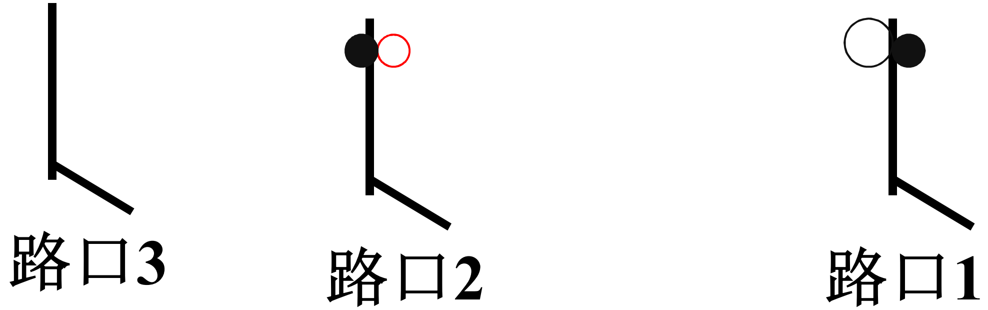




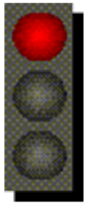
则：$P(X=0)=P(A_1)=1/2$

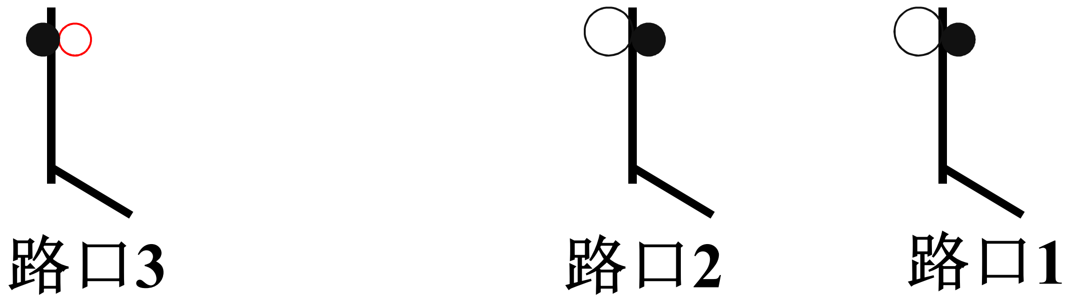
X表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数

设 A_i={第i个路口遇红灯}，i=1,2,3



$$P(X=1)=P(\overline{A}_1 A_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1/4$$

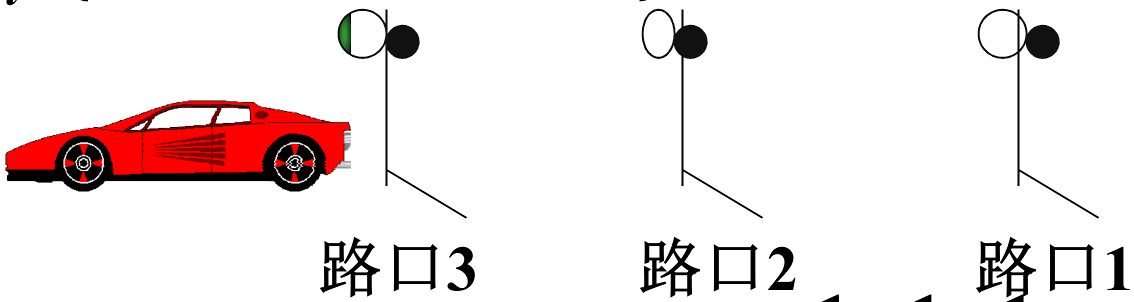




$$P(X=2)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2 A_3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1/8$$

X表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数

A_i={第i个路口遇红灯}，i=1,2,3



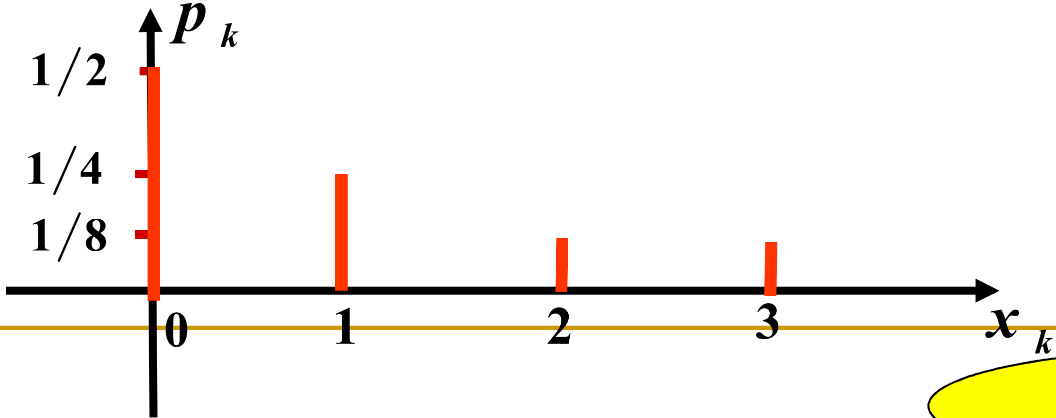
$$P(X=3)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1/8$$

于是得其分布律为：

X	0	1	2	3
P_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$\left(P_k>0,\ \sum_{k=0}^{3}P_k=1\right)$$

概率分布图：



二. 几种常见的离散型随机变量的分布

1. (0–1) 分布

贝努利试验

背景: E : 试验只有两个可能结果 $A,\ \bar{A}$

$P(A) = p \quad (0 < p < 1)$

列表:

X	0	1
P_k	$1-p$	p

检查产品的质量(正品与次品)
有奖债券是否中奖(中与不中)
对婴儿性别进行登记(男与女)
高射炮射击敌机(中与不中).

列表:

X	0	1
P_k	$1-p$	p

若随机变量X只取 0 与 1 两个值,它的分布律为:

$$P(X=k)=p^k(1-p)^{(1-k)} \qquad k=0,1, \quad 0<p<1$$

则称 X 服从 (0−1)分布或两点分布.

例4. 某次射击,已知某射手的命中率为0.8.

求:射击一次命中目标次数X的分布律.

解: 它只发一弹, 要么打中, 要么打不中,
分别记为 1与 0.

分布律为:

X	0	1
P_k	0.2	0.8

2. 二项分布

(1) 贝努利概型

E ： 试验只有两个可能结果 $A, \bar{A}$

且在每次试验中A 出现的概率为$P(A)=p$ $(0<p<1)$

n重贝努利试验 ----

将试验E独立重复地进行n次

例5. 统计某地区人群生男孩的概率为 p，

生女孩的概率为 $q=1-p$，

4重贝努利概型

X --- 随机抽查4个婴儿中男孩的个数

求：X 的概率分布.

生男孩的概率为 p，生女孩的概率为 $1-p$

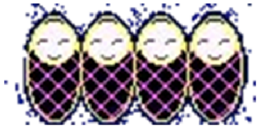
X --- 4个婴儿中男孩的个数　X可能的取值 0, 1, 2, 3, 4.

设A_i= {第i个婴儿是男孩}


男

女

$X=0$



$(1-p)^4$

$X=1$

$X=2$

$X=3$

$X=4$

$$P(X=0)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(\overline{A}_4)$$

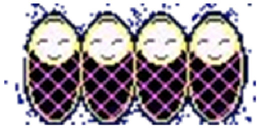
生男孩的概率为 p，生女孩的概率为 $1-p$

X --- 4个婴儿中男孩的个数　X可能的取值 0, 1, 2, 3, 4.

设A_i= {第i个婴儿是男孩}

男　女

$X=0$



$(1-p)^4$

$X=1$

$4p(1-p)^3$

$X=2$

$C_4^2 p^2(1-p)^2$

$X=3$

$C_4^3 p^3(1-p)$

$X=4$

p^4

$$P(X=1)=C_4^1 P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4})=4P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})P(\overline{A_4})$$

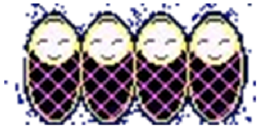
生男孩的概率为 p，生女孩的概率为 $1-p$

X --- 4个婴儿中男孩的个数　X可能的取值 0, 1, 2, 3, 4.

设A_i= {第i个婴儿是男孩}

男　女

$X=0$



$(1-p)^4$

$X=1$

$C_4^1 p(1-p)^3$

$X=2$

$C_4^2 p^2(1-p)^2$

$X=3$

$C_4^3 p^3(1-p)$

$X=4$

p^4

X的概率分布是：

$$P\{X=k\}=C_4^k\, p^k(1-p)^{4-k},\quad k=0,1,2,3,4$$

(2) 二项分布

若用X表示 n 重贝努利概型中事件A 发生的次数，它的分布 律为：

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ \ k=0,1,2,\cdots,n$$

则称 X 服从参数为 n, p $(0<p<1)$ 的二项分布。

记为：$X \sim B(n,p)$

列表：

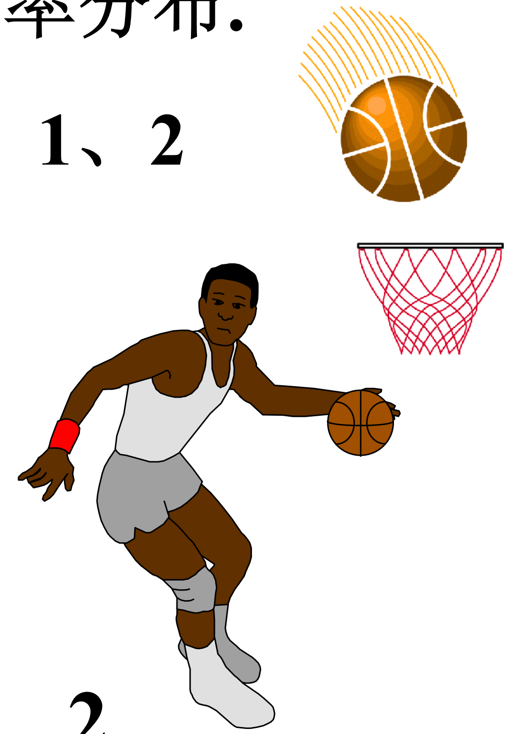
X	0	1	$2 \cdots\cdots n$
$P_n(k)$	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$P_n(2) \cdots\cdots P_n(n)$

注 ▲ 当 n=1时，二项分布即为(0–1)分布

$X \sim B(1,p)$； $X \sim (0,1)$

例6. 某篮球运动员投中篮圈概率是0.9,

求：他两次独立投篮投中次数 X 的概率分布.



解：$X \sim B(2, 0.9)$ X 可能取值为 0、1、2

$$P(X=0)=(1-0.9)(1-0.9)=0.01$$

$$P(X=1)= (1-0.9)*0.9+0.9*(1-0.9)$$

$$= 2*(0.9)(0.1) =0.18$$

$$P(X=2)=0.9*0.9=0.81$$

故其分布律为：

X	0	1	2
P_k	0.01	0.18	0.81

$$P\{X=k\}=C_2^k(0.9)^k(1-0.9)^{2-k}, \qquad k=0,1,2$$

例7. 将一枚均匀骰子抛掷 3 次，

令:X 表示 3 次中出现“4”点的次数

求: X的概率分布

解: 是3重贝努利试验

其中一次抛投出现4点的概率为 $\dfrac{1}{6}$

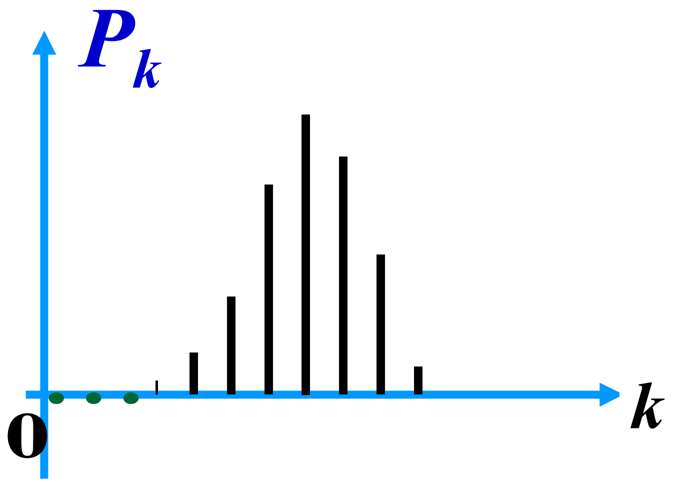
$$X \sim B(3, \frac{1}{6})$$

X的概率分布是:

$$P\{X = k\} = C_3^k (\frac{1}{6})^k (\frac{5}{6})^{3-k}, \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

➢二项分布 $X \sim B(n,p)$ 的图形特点：

$k=[(10+1)\times 0.7]=7$



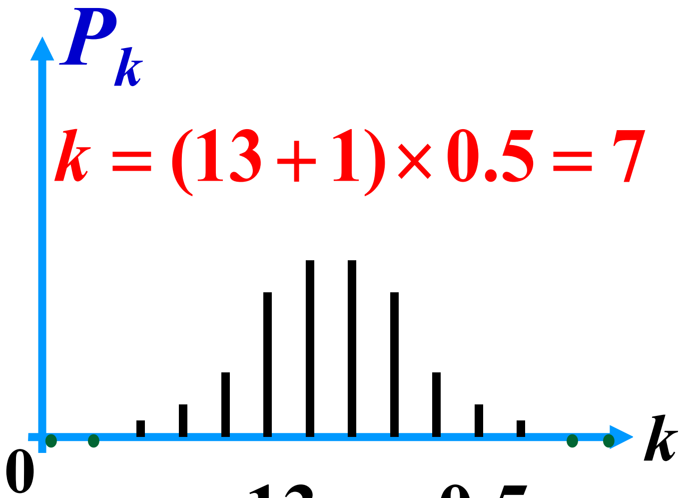
$n=10,\ p=0.7$

对于固定 n 及 p，当 k 增加时，概率 $P(X=k)$ 先是随之增加直至达到最大值，随后单调减少.

➢当 $(n+1)p$ 为整数时,概率 $P(X=k)$ 在 $k=(n+1)p$ 和 $k=(n+1)p-1$ 处达到最大值.

➢当 $(n+1)p$ 不为整数时,概率 $P(X=k)$ 在 $k=[(n+1)p]$ 达到最大值

$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数



$n=13,\ p=0.5$

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n$$

例8 已知100个产品中有5个次品，现从中有放回地取3次，每次任取1个，

求: 在所取的3个中恰有2个次品的概率. $P(X=2)$

分析: 因为这是有放回地取3次，因此这3 次试验的条件完全相同且独立，它是3重贝努利试验.

且每次试验取到次品的概率为0.05. $X \sim B(3, 0.05)$

解：设 X 为所取的3个中的次品数，

则 $X \sim B(3, 0.05)$

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

所求概率为：$P(X=2) = C_3^2 (0.05)^2 (0.95) = 0.007125$

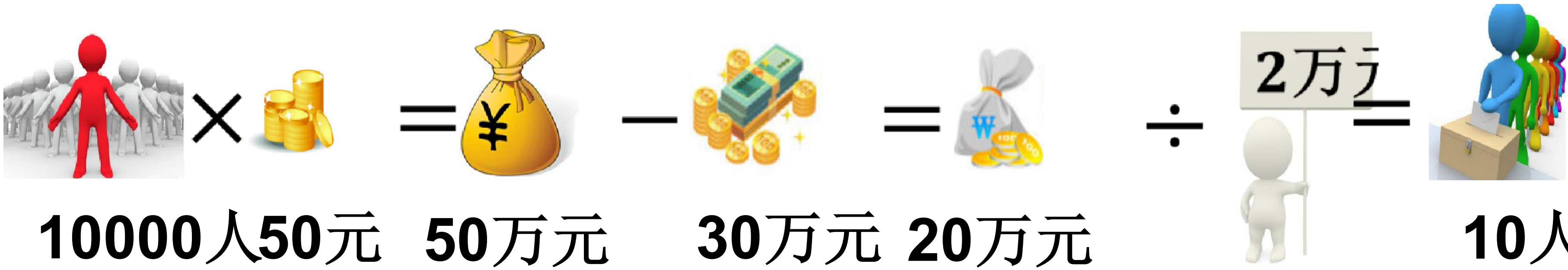
注 若将本例的有放回改为不放回，是否贝努利概型？

不是

保险问题

某保险公司拟推出在校大学生意外伤害险，每位参保人交付**50**元保费，出险时可获得**2**万元赔付；已知一年中的出险率为**0.05%**，现有**10000**名新生欲参加保险.

求保险公司因开展这项业务获利不少于**30**万元的概率.



设X——参加保险者中出险人数.

欲求 $P\{X \leq 10\}$

X的分布?

保险问题

某保险公司拟推出在校大学生意外伤害险，每位参保人交付50元保费，出险时可获得2万元赔付；已知一年中的出险率为0.05%，现有10000名新生欲参加保险.

求保险公司因开展这项业务获利不少于30万元的概率.

解：E —10000人参加保险. n=10000

A —一人出险.　　$P(A)$=0.0005

X —10000位参加保险者中出险人数.

$\therefore X \sim B(10000,\ 0.0005)$

$$P\{X=k\}=C_{10000}^{k}(0.0005)^{k}(1-0.0005)^{10000-k},$$
$$k=0,1,2,\cdots,10000.$$

保险问题

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

$$C_{10000}^k(0.0005)^k(0.9995)^{10000-k}$$

$$X \sim B(10000, 0.0005)$$

出险人数不超过10人的概率是:

$$P(X \le 10) = P(X=0)+P(X=1)+\cdots+P(X=10)$$

$$=\sum_{k=0}^{10} C_{10000}^k(0.0005)^k(0.9995)^{10000-k}$$

用泊松分布近似 $P(X=k)\approx \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $\lambda = np$

$$\approx \sum_{k=0}^{10}\frac{5^k e^{-5}}{k!} \quad = 0.96817$$

查表

- $P(X=k)$在 $k=[(n+1)p]=5$ 达到最大值

3. 泊松分布

若随机变量X 的所有可能取值为：0, 1, 2,……

而它的分布律为：

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad k=0,1,2,\cdots$$

其中 $\lambda>0$ 是常数 .

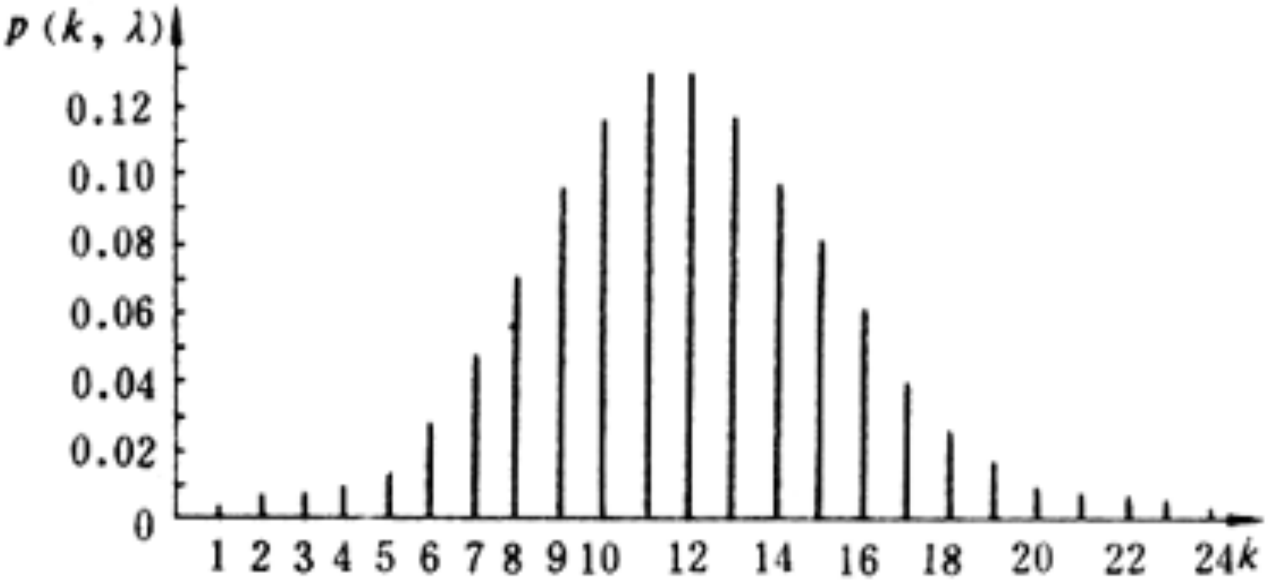
则 称 X 服从参数为λ 的 泊松分布,记为 $X \sim P(\lambda)$

注 ▲ 泊松分布满足分布律的两个条件：

$$P(X=k)\ge 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)=1$$

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad k=0,1,2,\cdots$$

▲泊松分布 $X \sim P(\lambda)$ 的图形特点：



泊松分布 $P(\lambda)$ (λ=12)

定理 泊松(Possion)

$$P_n(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

设 $X \sim B(n,p), \lambda>0$ 是一常数，且 $\lambda=np$

则对任一非负整数 k 有：$\lim\limits_{n\to\infty} P_n(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

注 一般常用 $\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ 去近似 $P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

在 $n\geq 20,\quad p\leq 0.05$ 时近似效果颇佳

$n\geq 100,\ np\leq 10$ 时近似效果更好

λ

查表 $\sum\limits_{k=m}^{\infty}\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ 或 $P(X\leq x)=\sum\limits_{k=0}^{x}\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

注 $\lambda\ (\lambda>25)$ 较大时，进一步计算将在第五章介绍中心极限定理之后再来解决

例10 一家商店采用科学管理，由该商店过去的销售记录知道，某种商品每月的销售数可以用参数 $\lambda=10$ 的泊松分布来描述，为了以95%以上的把握保证不脱销，

问：商店在月底至少应进某种商品多少件？

解： 设该商品每月的销售数为X

已知 X 服从参数 $\lambda=10$ 的泊松分布.

设商店在月底应进某种商品 n 件

求满足 $P(X\le n)>0.95$ 的最小的 n

销售数

进货数

求满足 $P(X\le n)>0.95$ 的最小的n.

已知 X 服从参数 $\lambda=10$ 的泊松分布.

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{10^k}{k!}e^{-10}\ge 0.95$$

查泊松分布表得:

$$\sum_{k=0}^{14}\frac{10^k}{k!}e^{-10}=0.9166 < 0.95$$

$$\sum_{k=0}^{15}\frac{10^k}{k!}e^{-10}=0.9513 > 0.95$$

于是得 $n=15$

练习1: 设随机变量X的分布律为:

$$P(X=k)=a\frac{\lambda^k}{k!},k=0,1,2,\ldots.,\lambda>0\text{为常数。}$$

试求常数a.

提示: $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x$ $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\cdots=e^x$

解: 由$\sum_{k=0}^{\infty}p_k=\sum_{k=0}^{\infty}a\frac{\lambda^k}{k!}=a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=ae^{\lambda}=1,$

得, $a=e^{-\lambda}.$

练习 2 一张考卷上有5道选择题，每道题列出4个可能答案，其中只有一个答案是正确的．某学生靠猜测能答对4道题以上的概率是多少？

解： 每答一道题相当于做一次*Bernoulli*试验，

$$A=\{\text{答对一道题}\}, \quad \text{则} \quad P(A)=\frac{1}{4}$$

则答5道题相当于做5重贝努利试验．

设X--该学生靠猜能答对的题数，则 $X\sim B\left(5,\ \frac{1}{4}\right)$

$$P\{\text{至少能答对 4道题}\}=P\{X\geq 4\}$$

$$=P\{X=4\}+P\{X=5\}=C_5^4\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{1}{64}$$

练习3 对同一目标进行300次独立射击，设每次射击时的命中率均为0.44，试求300次射击最可能命中几次？其相应的概率是多少？

解： 对目标进行300次射击相当于做300重贝努利试验

令：X 表示300射击中命中目标的次数.

则由题意 $X \sim B(300,\quad 0.44)$.

由于 $(300+1)\times 0.44 = 132.44$，它不是整数

因此，最可能射击的命中次数为132次

其相应的概率为

$$P(X=132) = C_{300}^{132} 0.44^{132} 0.56^{168} = 0.04636$$

当$(n+1)p$为整数时,概率$P(X=k)$在$k=(n+1)p$ 和 $k=(n+1)p-1$处达到最大值.

当 $(n+1)p$不为整数时,概率 $P(X=k)$在 $k=[(n+1)p]$ 达到最大值

练习4 设每次射击命中目标的概率为0.012，现射击600次，求至少命中3次目标的概率（用*Poisson*分布近似计算）

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$ $$P(X=k)\approx\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\quad \lambda=np$$

解： 设X为600次射击命中目标的次数,

则 $X\sim B(600,\ 0.012)$. 取$\lambda=600\times0.012=7.2$.

$$P\{X\ge3\}=1-P\{X<3\}$$

$$=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}-P\{X=2\}$$

$$=1-e^{-7.2}-7.2e^{-7.2}-\frac{7.2^2}{2}e^{-7.2}$$

$$=0.9745$$

练习5 X服从泊松分布，且已知$P(X=1)=P(X=2)$，

求$P(X=4)=$ $\underline{\quad \dfrac{2^4 e^{-2}}{4!} \quad}$.

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

其中 $\lambda>0$ 是常数 .

$$\frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!}=\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} \Rightarrow \lambda=\frac{\lambda^2}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda=0(\text{舍去}),\ \lambda=2$$