例 把一套**4**卷本的书随机地摆放在书架上，问：
恰好排成序（从左至右或从右至左）的概率是多少？

解：设事件**A={**把书恰好排成序**}**

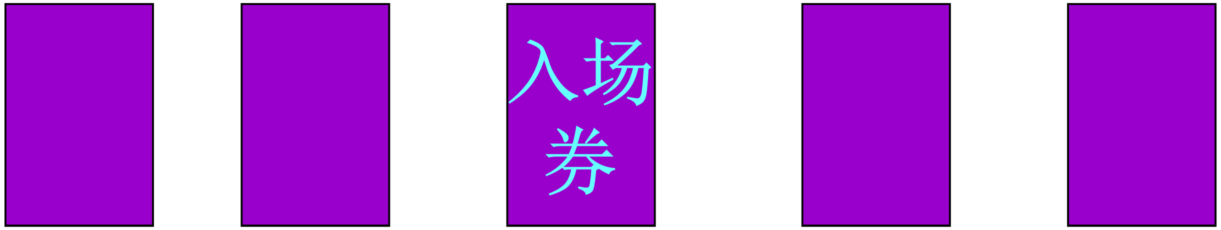
将书随机地摆放在书架上，每一种放法就是一个基本事件，共有放法**4**！种。

把书恰好排成序有两种放法。

所以，所求概率为 $p(A)=\dfrac{2}{4!}=0.0833$

抽签问题

例1. 一场精彩的足球赛将要举行,5个球迷好不容易才搞到一张入场券.大家都想去,只好用抽签的方法来解决.



5 张同样的卡片,只有一张上写有“入场券”,其余的什么也没写.将它们放在一起洗匀,让5个人依次抽取.

问：后抽的人要比先抽的人吃亏吗?

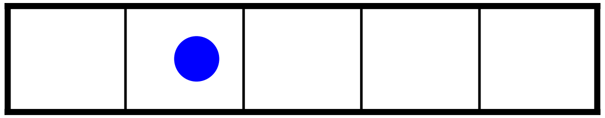
例1： **5** 张同样的卡片,只有一张上写有“入场券”，其余的 什么也没写**.**将它们放在一起洗匀,让**5**个人依次抽取**.**

问：后抽的人要比先抽的人吃亏吗**?**

解： A_i= {第 i 个人拿到入场券}

可以认为有**5**个位置，要求第i个位置是入场券

E: 将5张券放入5个位置
即对5张券做全排列



$n = 5!$ $\quad n_A = 1 \cdot 4!$

$$P(A_i) = \frac{1 \cdot 4!}{5!} = \frac{1}{5}. \quad i=1, 2, \cdots, 5$$

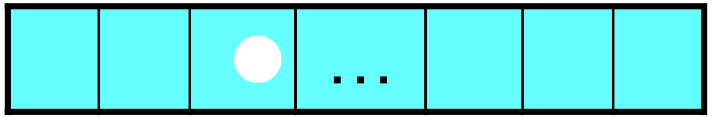
抽签问题

自己列式不会

例2 袋中有 a 只白球，b 只红球，形状相同. 从袋中将球随机地一只只摸出来，不放回 求第 i 次摸到白球的概率.

解： $A_i=$ {第 i 次摸到白球}

$a+b$个位置



法一：可以认为有$a+b$个位置，要求第i个位置是白球

E：将$a+b$ 个球放入$a+b$ 个位置

即对 $a+b$ 个球做全排列

$$n=(a+b)! \qquad n_{A_i}=a\cdot(a+b-1)!$$

$$P(A_i)=\frac{a\cdot(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}. \quad i=1,2,\cdots,a+b$$

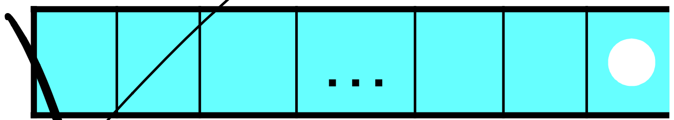
例2　袋中有 a 只白球, b 只红球, 形状相同.

从袋中将球随机地一只只摸出来,不放回

求第 i 次摸到白球的概率.

解: $A_i=$ {第 i 次摸到白球}

前i个位置



法二: 对前i次取球进行研究,

认为有i个位置放球, 要求第i个位置放白球

E: 在 $a+b$ 个球中任取 i 个球进行排列 $n=A_{a+b}^{i}$

$$n_{A_i}=C_a^1\cdot A_{a+b-1}^{i-1} \Rightarrow P(A_i)=\frac{a\cdot A_{a+b-1}^{i-1}}{A_{a+b}^{i}}=\frac{a}{a+b}$$

注: $P(A_i)$与i无关, 尽管取球的先后次序不同, 但每次取到的白球的概率是一样的;

在放回取样的情况下, 取到白球的概率也是 $\dfrac{a}{a+b}$

例3　在0,1,2…，9这十个数中不放回地任取两个.

求取到数8的概率.

解：E: 十个数中不放回地任取两个　　n: C_{10}^2

A= {取到数8 }　　k: $C_1^1 C_9^1$

$$P(A)=\frac{C_1^1 C_9^1}{C_{10}^2}=\frac{1}{5}$$

或：$A_1=$ {第1次取到数8 }，

$A_2=$ {第2次取到数8 }，A_1，A_2互不相容

$A=A_1 \cup A_2$　　$P(A)=P(A_1)+P(A_2)$

由抽签问题知：$P(A_1)=P(A_2)=\dfrac{1}{10}$，

$$\Rightarrow P(A)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

取样问题

例4. 设有30件产品,其中有4件是次品,现从中任取3件,

求:(1) 恰有 2 件次品的概率

(2) 至少有1件次品的概率

$$30\text{件}\begin{cases}4\text{件次品}\\26\text{件正品}\end{cases}$$

解:(1) E: 30件产品从中任取3件

设A={任取3件恰有2件是次品}

n:从30件产品中任取3件的取法数: C_{30}^{3}

n_A:恰有2件次品,1件正品的取法数: $C_4^2 C_{26}^1$

从而: $P(A)=\dfrac{n_A}{n}=\dfrac{C_4^2 C_{26}^1}{C_{30}^3}=\dfrac{156}{4060}\approx 0.038$

取样问题

(2) *E*：30件产品从中任取3件

30件 $\begin{cases} \text{4件次品} \\ \text{26件正品} \end{cases}$

设 B={ 任取3件至少有1件次品}

法1： n ： C_{30}^{3}

n_B ： 任取3件至少有1件次品 ——

恰有1件，2件，3件次品三种情况，

故取法数为：$C_4^1 C_{26}^2 + C_4^2 C_{26}^1 + C_4^3 C_{26}^0$

$$P(B) = \frac{n_B}{n} = \frac{C_4^1 \cdot C_{26}^2 + C_4^2 \cdot C_{26}^1 + C_4^3 \cdot C_{26}^0}{C_{30}^3} = \frac{1460}{4060} \approx 0.36$$

取样问题

(2) E：30件产品从中任取3件

30件 $\begin{cases} 4\text{件次品} \\ 26\text{件正品} \end{cases}$

设 B={任取3件至少有1件次品}

法2： $\overline{B}$={任取3件1件次品也没有}

n： C_{30}^{3}

$n_{\overline{B}}$： 1件次品也没有的取法数为：C_{26}^{3}

$$P(\overline{B})=\frac{n_{\overline{B}}}{n}=\frac{C_{26}^{3}}{C_{30}^{3}}$$

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{C_{26}^{3}}{C_{30}^{3}}=\frac{1460}{4060}\approx 0.36$$

例5 盒中有6张面值相同的债券,其中有2张中奖债券,现从中任取两次,每次取一张,考虑两种取法:

$$6\text{张}\begin{cases}2\text{张中奖债券}\\4\text{张无奖债券}\end{cases}$$

(1) 有放回地取:

第一次取出观察后放回盒中，混合均匀后再取第二次 (放回抽样)

(2) 无放回地取:

第一次取出后不放回盒中,第二次从剩余的债券中再取一张 (不放回抽样)

求: 分别就两种抽样方式,求取到的两张都是中奖债券的概率?

解：E：6张面值相同的债券中任取两张

$$6\text{张}\begin{cases}2\text{张中奖债券}\\4\text{张无奖债券}\end{cases}$$

(1) 有放回地抽取：设A={取到的两张都是中奖债券}

n：第一次取是从盒中 6 张中任取一张，第二次再从盒中取，仍是从 6 张中任取一张，

故从6张债券中任取2张的取法数：$6\times6=36$ (种)

k：中奖债券有 2 张，第一次取有 2 张可供抽取,第二次取仍有 2 张可供抽取，

故取到的2张都是中奖债券的取法数：$2\times2=4$ (种)

从而：$P(A)=\dfrac{k}{n}=\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}=0.111$

（2）E：6张面值相同的债券中任取两张

6张 $\begin{cases}2\text{张中奖债券}\\4\text{张无奖债券}\end{cases}$

不放回地抽取：

设A={取到的两张都是中奖债券}

n：从6张债券中任取2张的取法数：$6\times5=30$

k：取到的2张都是中奖债券的取法数：$2\times1=2$

从而：$P(A)=\dfrac{k}{n}=\dfrac{2}{30}=\dfrac{1}{15}=0.067$

注：▲"不放回地抽取两次，每次取一张" 相当于"一次抽取两张".

故本题，$P(A)=\dfrac{C_2^2}{C_6^2}=\dfrac{1}{15}=0.067$

例6 袋中有a只白球，b只红球，从袋中按不放回与放回两种方式取m个球（$m \le a+b$），求其中恰有k个（$k \le a, k \le m$）白球的概率

解 （1）不放回情形

E_1: 球编号，一次取m个球,记下颜色

$$n = C_{a+b}^{m}$$

记事件B为m个球中有k个白球，则

$$n_B = C_a^k C_b^{m-k}$$

因此

$$\boxed{P(B) = \frac{C_a^k C_b^{m-k}}{C_{a+b}^{m}} \qquad k \le a, k \le m}$$

例6 袋中有a只白球，b只红球，从袋中按不放回与放回两种方式取m个球（$m \le a+b$)，求其中恰有k个（$k \le a, k \le m$）白球的概率

解 ~~（1）不放回情形~~此法不符合本人脑回路

E: 球编号，任取一球，重复m次

$$n = A_{(a+b)}^{m} = (a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-m+1)$$

记事件B为m个球中有k个白球，则

$$n_B = m!\,C_a^k C_b^{m-k}$$

则 $$P(B) = \frac{m!\,C_a^k C_b^{m-k}}{A_{a+b}^m} \quad k \le a, k \le m$$

（2）放回情形

m只（恰有k只白） ← a只白 b只红

E_2: 球编号, 任取一球, 记下颜色, 放回去,重复 m 次

$$n=(a+b)^m$$

记 事件B 为取出的 m 个球中有 k 个白球, 则

$$n_B=C_m^k a^k b^{m-k}$$

$$P(B)=\frac{C_m^k a^k b^{m-k}}{(a+b)^m}=C_m^k\left(\frac{a}{a+b}\right)^k\left(\frac{b}{a+b}\right)^{m-k}$$ 记 $p=\dfrac{a}{a+b}$

$$\boxed{P(B)=C_m^k p^k(1-p)^{m-k}}$$

称二项分布

质点入盒问题

例7　将n个不同编号的球随机放入$N(N\geq n)$个盒子中，每球以相同的概率放入盒子，　盒子容量不限，

$A_1 =$ {某指定的n个盒子中各有一球}

$A_2 =$ {每个盒子中至多放一只球}

$A_3 =$ {至少有两球在同一个盒子中(若有球的情况下)}

求$P(A_i)$，$i=1,2,3$

解：$n = N^n$

$k_1 = n! \Rightarrow P(A_1) = \dfrac{n!}{N^n}$

例**7** E: n个不同编号的球随机放入$N(N\geq n)$个盒子中

$A_1=$ {某指定的n个盒子中各有一球}

$A_2=$ {每个盒子中至多放一只球}

$A_3=$ {至少有两球在同一个盒子中(若有球的情况下)}

解: $n=N^n$

$$k_2=N\times(N-1)\times\cdots\times[N-(n-1)]=A_N^n$$

$$\Rightarrow P(A_2)=\frac{A_N^n}{N^n}$$

因为 $\overline{A_3}=A_2$

故 $P(A_3)=1-P(\overline{A_3})=1-P(A_2)=1-\dfrac{A_N^n}{N^n}$

同上，感觉小球入盒中"每盒至多一球"不是很熟

例8 有 r 个人，设每个人的生日是365天的任何一天是等可能的，

试求：至少有两人同生日的概率.

解：令 A={至少有两人同生日}

则 $\overline{A}$={ r 个人的生日都不同}

n : r个人生日的排列总数：$365 \cdot 365 \cdots 365 = (365)^r$

k : r个人生日都不同的排列数：$365 \cdot 364 \cdots (365-r+1)$ $= A_{365}^r$

$$P(\overline{A}) = \frac{A_{365}^r}{(365)^r}$$

则有：$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{A_{365}^r}{(365)^r}$

例8 有 r 个人,设每个人的生日是365天的任何一天是等可能的,

试求：至少有两人同生日的概率.

解：令 A={至少有两人同生日}

则 $\overline{A}$={ r 个人的生日都不同}

本题中的人可被视为”球”，365天为365只“盒子”

至少有两球在同一个盒子中的概率

$$P(\overline{A}) = \frac{A_{365}^{r}}{(365)^{r}}$$

则有: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{A_{365}^{r}}{(365)^{r}}$

小概率事件——

若$P(A) \le 0.05$, 则称A为小概率事件.

小概率原理——（即实际推断原理）

一次试验中小概率事件一般是不会发生的. 若在一次试验中居然发生了, 则可怀疑该事件并非小概率事件.

此等问题就是掌握不好 (50件次)

例9 某厂家称一批数量为1000件的产品的次品率为5%。现从该批产品中有放回地抽取了30件,经检验发现有次品5件，问该厂家是否谎报了次品率?

解： 假设这批产品的次品率为5%，那么1000件产品中有次品为50件。

E: 1000件的产品,有放回地抽取了30件 $n=(1000)^{30}$

A={抽取的30件中有5件次品} $k=C_{30}^{5}(50)^{5}(950)^{25}$

$$p(A)=C_{30}^{5}\frac{50^{5}\,950^{25}}{1000^{30}}=C_{30}^{5}(\frac{50}{1000})^{5}(1-\frac{50}{1000})^{25}\approx 0.0124$$

还行

例9 某厂家称一批数量为1000件的产品的次品率为5%。现从该批产品中不放回地抽取了30件,经检验发现有次品5件，问该厂家是否谎报了次品率？

解： 假设这批产品的次品率为5%，那么1000件产品中有次品为50件。

E: 1000件的产品,不放回地抽取了30件 $n = C_{1000}^{30}$

A={抽取的30件中有5件次品} $k = C_{50}^{5} C_{950}^{25}$

$$p(A) = \frac{C_{50}^{5} C_{950}^{25}}{C_{1000}^{30}} \approx 0.0113$$

人们在长期的实践中总结出“概率很小的事件在一次实验中几乎是不发生的”（实际推断原理）.现在概率很小的事件在一次实验中竟然发生了，从而推断厂家谎报了次品率