$P(A+B)=\frac{5}{6}$ $= P(A)+P(B)-P(AB)$

$P(A\bar{B}+\bar{A}B)=\frac{2}{3}$ $=P(A\bar{B})+P(\bar{A}B)=P(A)-2P(AB)+P(B)$

第一章

1. 设事件 A 和 B 中至少发生一个的概率为 $\frac{5}{6}$，A 和 B 中有且仅有一个发生的概率为 $\frac{2}{3}$，那么 A 和 B 同时发生的概率为 $\underline{\quad \frac{1}{6} \quad}$。

$P(AB)$

2.. 设事件 A 和事件 B 相互独立，发生的概率分别为 0.4 和 0.7，那么 A 与 B 的和事件发生的概率为 $\underline{\quad 0.82 \quad}$。

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ $=1.1-0.28$

3. 从 $1-9$ 这九个数字中任取三个，它们的乘积是偶数的概率是 $\underline{\quad \cancel{\frac{1}{6}}\ \frac{37}{42} \quad}$。

$1-\frac{C_5^3}{C_9^3}$ $=1-\frac{10}{\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1}}$

1.10 -0.28 0.82

4. 设 $P(A)=0.6, P(B)=0.8, P(B|A)=0.8$，则下列结论中正确的是 $\underline{\quad C \quad}$。

$P(B|A)=\frac{P(AB)}{0.6}=0.8$ $=0.48$

（A）事件 A,B 互不相容　　（B）事件 A,B 互逆

（C）事件 A,B 互相独立　　（D）$A\supset B$

5. 假设事件 A 和 B 满足 $P(B|A)=1$，则 $\underline{\quad B \quad}$。

$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$

（A）事件 A 是必然事件　　（B）$P(\bar{B}|A)=0$

（C）$A\subset B$　　（D）$A\supset B$

0.3 0.7 0.4

$P(A-B)=P(A)-P(AB)$

6. 设 A，B 为两个随机事件，$P(A)=0.7,\ P(A-B)=0.3$，则 $P(\overline{AB})=\underline{\quad 0.6 \quad}$

1. $\frac{1}{6}$　2. 0.82　3. $\frac{37}{42}$　4. C　5. B　6. 0.6

第二三章

1. 从 $1,2,3,4$ 中任取一个数记为 X，再从 $1,\cdots,X$ 中任取一个数记为 Y，则 $P\{Y=2\}=\underline{\quad \frac{13}{48} \quad}$。

$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{6+4+3}{12}=\frac{13}{48}$

2. 设 X,Y 是两个相互独立的随机变量，且 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则 $Z=X+2Y$ 服从的分布是 $\underline{\quad D \quad}$。

~~（A）~~ $N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+2\sigma_2^2)$　　（B）$N(\mu_1+2\mu_2,\sigma_1^2+2\sigma_2^2)$

~~（C）~~ $N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+4\sigma_2^2)$　　（D）$N(\mu_1+2\mu_2,\sigma_1^2+4\sigma_2^2)$

3. 设随机变量 X,Y 同分布，分布律为 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$，且满足 $P\{XY=0\}=1$，则 $P\{X=Y\}=\underline{\quad A \quad}$。

$P\{XY\neq 0\}=0$

X \ Y	-1	0	1
-1	0	$\frac{1}{4}$	0
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0

（A）0　（B）$\frac{1}{2}$　（C）$\frac{1}{4}$　（D）1

4. 设 X,Y 是相互独立的随机变量，其分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数是 ___B___。

（A） $F_z(z)=\max\{F_X(z),F_Y(z)\}$　　（B） $F_z(z)=F_X(z)F_Y(z)$

（C） $F_z(z)=\max\{|F_X(z)|,|F_Y(z)|\}$　　（D） $F_z(z)=F_X(z)$

5. 设 X_1,X_2 是两个相互独立的随机变量，$F_1(x),F_2(x)$ 是其分布函数，$f_1(x),f_2(x)$ 是其概率密度函数且连续，则下列必为概率密度的是___D___

(A) $f_1(x)f_2(x)$　**(B)** $2f_1(x)F_2(x)$　**(C)** $F_2(x)f_1(x)$　**(D)** $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

6. 相互独立的连续型随机变量X和Y的密度函数分别为 $f1(x)$ 和 $f2(x)$，分布函数分别为 $F1(x)$ 和 $F2(x)$，则下列正确的 C

~~A.~~ $f1(x)+f2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度

~~B.~~ $F1(x)+F2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数

C. $F1(x)F2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数

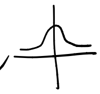
D. $f1(x)f2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度函数

$af_1(x)+bf_2(x)$ 必为概率密度

$(a\ge0, b\ge0, a+b=1)$

$aF_1(x)+bF_2(x)$ ——

$P(\frac{X-\mu}{\sigma}>\sigma)=1-P(Y\le\sigma)$ ↓



7. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，$p=P(X\ge\mu+\sigma^2)$，则___B___

(A) p 随着 σ 的增大而增大 $\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$　(B) p 随着 σ 的增大而减小

(C) p 随着 μ 的增大而增大　(D) p 随着 μ 的增大而减小

8. 设 A,B,C 是三个相互独立的随机事件，且 $0<P(C)<1$.则下列给定事件中不相互独立的是 C

(A) $\overline{A\cup B}$ 与 $\overline{C}$ 不独立　(B) $\overline{A\cup B}$ 与 C 不独立　(C) $\overline{AC}$ 与 C　(D) $\overline{AB}$ 与 C

9. 已知 X,Y,XY 的分布律见下表，则 $P(X=2Y)=$ ___$\frac{1}{4}$___

$X\backslash Y$	0	1	2	
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

X	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

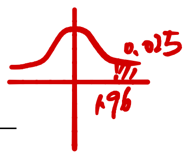
Y	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

XY	0	1	2	4
P	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{12}$

10. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(1,1)$，已知 $z_{0.025}=1.96$，则常数 $P\{X\le2.96\}=$ ___B___

A 0.95　B 0.975　C 0.025　D 0.005

$\frac{X-1}{1}\sim N(0,1)$



11. 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\frac{c}{n}\cdot k$，$k=1,2,\cdots,n$，则常数 $c=$ ___$\frac{2}{1+n}$___

X	1	2	$\cdots$	n
P	$\frac{c}{n}$	$\frac{2c}{n}$	$\cdots$	$\frac{nc}{n}$

$\frac{c}{n}\cdot\frac{(1+n)n}{2}=1$

参考答案：

1. $\frac{13}{48}$　2. D　3. A　4. B　5. D　6. C　7. B　8. C　9. $\frac{1}{4}$　**10. B**　**11.** $\frac{2}{n+1}$

解答题

1. 有甲、乙、丙三个盒子，其中分别有一个白球和两个黑球、一个黑球和两个白球、三个白球和三个黑球。掷一枚骰子，若出现 1，2，3 点则选甲盒，若出现 4 点则选乙盒，否则选丙盒。然后从所选的中盒子中任取一球。

求：（1）取出的球是白球的概率；

（2）当取出的球为白球时，此球来自甲盒的概率。

2. 某射击队共有 10 名射手，其中一级射手 2 人，二级射手 4 人，三级射手 4 人。一、二、三级射手能够通过选拔进入比赛的概率分别为 0.9, 0.6, 0.2。

(1) 求任选一名射手能够通过选拔进入比赛的概率；

(2) 对于一名通过选拔进入比赛的射手，试判断这名射手是几级射手的概率最大。

3. 设连续型随机变量 X 的分布函数是 $F\left(x\right)=\begin{cases}0 & x<-2\\ A+Bx & -2\le x\le 2\\ 1 & x>2\end{cases}$，问：

（1） A,B 各是多少？　　（2） X 的概率密度是什么？

（3）证明：随机变量 $Y=\left|X\right|$ 服从 $\left[0,2\right]$ 上的均匀分布。

（4）设随机变量 $Z=\sin\pi X$，计算 DZ。

4. 设随机向量 $\left(X,Y\right)$ 分布在正方形 $\left[0,1\right]\times\left[0,1\right]$ 上，其概率密度函数为

$$f\left(x,y\right)=Ax\left(3x+2y\right)，\ 0\le x,y\le 1。$$

（1）求 A 及概率 $P\left\{X+Y\ge 1\right\}$；　　（2）求 X,Y 的边缘分布密度函数；

（3）求条件密度函数 $f_{X|Y}\left(x\middle|y\right)$；　　（4） X 与 Y 是否独立？为什么？

5. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $\boldsymbol{f_X(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}}$， $\boldsymbol{-\infty<x<+\infty}$，试求随机变量 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$。

6. 已知相互独立的随机变量 X，Y 的概率密度分别为：

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}，\ g(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}，$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $\varphi(z)$。

7. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}12\,e^{-(3x+4y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

（1）求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $f_{Y|X}(y|x)$；　　（2）求(X,Y)的联合分布函数；

（3）讨论 X 与 Y 的独立性且求 $Cov(X,Y)$；　　（4）求 $P(0<X\le 1,\ 0<Y\le 2)$。

8.设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}a, & x^2\le y<1, 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

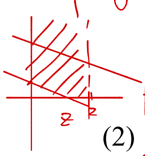
(1)确定常数a的值；　　(2)求 $P(0\le X\le \frac{1}{2})$；

(3)求边缘密度 $f_X(x), f_Y(y)$；　　(4)求条件密度 $f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$

9. 设随机变量 X,Y 相互独立，概率密度函数分别为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 和

$(1)\ f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-y}, & 0<x<2,\ y\ge 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y\ge 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$



(2) $Z=X+2Y$

$F_Z(z)=P\{X+2Y\le z\}=\begin{cases}0, & z<0\\ \int_0^z dx\int_0^{-\frac{x}{2}+\frac{z}{2}}\frac{1}{2}e^{-y}dy, & 0\le z<2\\ \int_0^2 dx\int_0^{-\frac{x}{2}+\frac{z}{2}}\frac{1}{2}e^{-y}dy, & z>2\end{cases}$

$y=-\frac{x}{2}+\frac{z}{2}$

$\int_0^2 dx \quad -e^{y}\Big|_0^{-\frac{x}{2}+\frac{z}{2}}$

$\int_0^2 -e^{\frac{x}{2}-\frac{z}{2}}+1\,dx$

$=z+2e^{-\frac{z}{2}}\int_0^2 e^{\frac{x}{2}}\,d\frac{x}{2}$

$e^{\frac{x}{2}}\Big|_0^2$

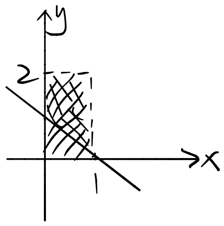
$e^{-\frac{z}{2}}-1$

(1) 求(X,Y)的联合概率密度；　　(2) 求 $Z=X+2Y$ 的分布函数和概率密度；

(3) 求 $Z=X+2Y$ 的期望和方差。

10. 设二维随机变量的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2+\dfrac{xy}{3}, 0\le x\le 1, 0\le y\le 2\\ 0\ , \quad \text{其 它}\end{cases}$$



求：（1）边缘概率密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$，并判断 X 和 Y 的独立性；不

(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

$=\begin{cases}\int_0^2 x^2+\frac{xy}{3}dy=2x^2+\frac{x}{3}\cdot 2, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^1 x^2+\frac{xy}{3}dx=\frac{1}{3}+\frac{y}{6}, & 0<y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

（2）条件概率密度函数 $f_{X|Y}(x|1)$；　　（3）概率 $P\{X+Y>1\}$.

$=\begin{cases}x^2+\frac{x}{3}, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(3) $\iint_D f(x,y)d\sigma$

$=\int_0^1 dx\int_{1-x}^2 x^2+\frac{xy}{3}\,dy$

$=\int_0^1 4+\frac{4}{9}y^3-x^2-\frac{x^4}{9}\,dx$

$=4+\frac{1}{18} \quad x^2+\frac{x}{9}y^3\Big|_x^2$

$-\frac{1}{3}-\frac{1}{45}$

$=\frac{5-30-2}{90}=\frac{-27}{90}+4=\frac{-3}{10}+4=\frac{37}{10}$

29　　59

11. 设 A 为随机事件，证明：$P(A)P(\bar{A})\le\frac{1}{4}$.

参考答案

1.解：设　A=“选中的为甲盒”， B=“选中的为乙盒”，

C=“选中的为丙盒”， D=“取出一球为白球”，

由已知得： $P(A)=\frac{3}{6}$，$P(B)=\frac{1}{6}$，$P(C)=\frac{2}{6}$

$P(D|A)=\frac{1}{3}$，$P(D|B)=\frac{2}{3}$，$P(D|C)=\frac{3}{6}$

（1）由全概率公式　$P(D)=\frac{3}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{4}{9}$

（2）由 Bayes 公式　$P(A|D)=\dfrac{\frac{3}{6}\times\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}}=\frac{3}{8}$

2.【解】设 A_i 表示选中的射手是 i 级射手，$i=1,2,3$；B 表示射手通过选拔进入比赛

(1) 由题意知

$P(A_1)=0.2, P(A_2)=0.4, P(A_3)=0.4$

$P(B|A_1)$=0.9，$P(B|A_2)$=0.6，$P(B|A_3)$=0.2

由全概率公式, 所求概率为

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(B|A_i)P(A_i)=\frac{2}{10}\cdot0.9+\frac{4}{10}\cdot0.6+\frac{4}{10}\cdot0.2=0.5$$

(2) 由贝叶斯公式

$$P(A_1|B)=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(B|A_i)P(A_i)}=0.36$$

$$P(A_2|B)=\frac{P(B|A_2)P(A_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(B|A_i)P(A_i)}=0.48$$

$$P(A_3|B)=\frac{P(B|A_3)P(A_3)}{\sum_{i=1}^{3}P(B|A_i)P(A_i)}=0.16$$

因此，该射手为二级射手的概率最大。

3.【解】（1）由于 $\lim\limits_{x\to 2-0} F(x)=1, \lim\limits_{x\to -2+0} F(x)=0$（1 分），所以 $\begin{cases} A-2B=0 \\ A+2B=1 \end{cases}$，

解出得到 $A=\dfrac{1}{2}, B=\dfrac{1}{4}$（1 分）。于是 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-2 \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}x, & -2\le x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$

（2）概率密度函数 $f_X(x)=F'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{4}, & -2\le x\le 2 \\ 0, & 其它 \end{cases}$

（3）$y=|x|$，当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0 \Rightarrow f_Y(y)=0$。 当 $y>2$ 时，$F_Y(y)=1$，$\Rightarrow f_Y(y)=0$

当 $0\le y\le 2$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{|X|\le y\}=P\{-y\le X\le y\}=\int_{-y}^{y} f_X(x)dx=\int_{-y}^{y}\dfrac{1}{4}dx=\dfrac{y}{2}$

于是，$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}, & x\in[0,2] \\ 0, & x\notin[0,2] \end{cases}$，所以随机变量 $Y=|X|$ 服从 $[0,2]$ 上的均匀分布。

（4）由于 $X\sim U[-2,2]$，因此，$EZ=\int_{-\infty}^{+\infty}(\sin\pi x)f_X(x)dx=\int_{-2}^{2}\sin\pi x\cdot\dfrac{1}{4}dx=0$，

$$DZ=EZ^2-(EZ)^2=EZ^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(\sin\pi x)^2 f_X(x)dx=\int_{-2}^{2}\sin^2\pi x\cdot\frac{1}{4}dx=\frac{1}{2}。$$

4.【解】（1）$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{0\le x,y\le 1} Ax(3x+2y)dxdy=\dfrac{3}{2}A$，因此 $A=\dfrac{2}{3}$

$$P\{X+Y\ge 1\}=\iint\limits_{x+y\ge 1} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{\substack{0\le x,y\le 1\\ x+y\ge 1}}\frac{2}{3}x(3x+2y)dxdy=\int_0^1\frac{2}{3}xdx\int_{1-x}^{1}(3x+2y)dy=\frac{7}{9}$$

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} \int_0^1\dfrac{2}{3}x(3x+2y)dy=\dfrac{2}{3}x(3x+1), & 0\le x\le 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} \int_0^1\frac{2}{3}x(3x+2y)dx=\frac{2}{3}(y+1), & 0\le y\le 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}。$$

（3） $f_{X|Y}\left(x|y\right)=\dfrac{f\left(x,y\right)}{f_Y\left(y\right)}=\begin{cases}\dfrac{\frac{2}{3}x\left(3x+2y\right)}{\frac{2}{3}\left(y+1\right)}=\dfrac{x\left(3x+2y\right)}{1+y}, & 0\le x\le 1,0\le y\le 1\\ 0, & x\notin(0,1),0\le y\le 1\end{cases}$ ）

(4) 不独立，因为 $f_{X,Y}\left(x,y\right)\ne f_X\left(x\right)f_Y\left(y\right)$

5 解：Y 的分布函数 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{1-\sqrt[3]{X}\le y\}$

$$=P\{X\ge(1-y)^3\}=\int_{(1-y)^3}^{+\infty}f_X(x)dx=-\frac{1}{\pi}\int_{+\infty}^{(1-y)^3}\frac{1}{(1+x^2)}dx$$

所以得 $\quad f_Y(y)=F_Y'(y)=\dfrac{3(1-y)^2}{\pi[1+(1-y)^6]}$

6.解一： 由卷积公式，$\varphi(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(z-x)dx=\int_0^1 2x\,g(z-x)dx$

当 $z\le 0$ 时，$\varphi(z)=0$；

当 $0<z\le 1$ 时，$\varphi(z)=\int_0^z 2x\,e^{-(z-x)}dx=2(e^{-z}+z-1)$；

当 $z>1$ 时，$\varphi(z)=\int_0^1 2xe^{-(z-x)}dx=2e^{-z}$

即 $\quad \varphi(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ 2(e^{-z}+z-1), & 0<z\le 1\\ 2e^{-z}, & z>1\end{cases}$

解二：（X ，Y ）的联合概率密度为

$$f(x,y)=f(x)g(y)=\begin{cases}2xe^{-y}, & 0<x<1,y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$F(z)=P\{X+Y\le z\}=\iint_{x+y\le z}f(x,y)dxdy$$

当 $z\le 0$ 时，$F(z)=\iint_{x+y\le z}0dxdy=0$，$\varphi(z)=0$；

当 $0<z\le 1$ 时，$F(z)=\int_0^z dx\int_0^{z-x}2x\,e^{-y}dy=\int_0^z 2x(1-e^{-(z-x)})dx$

$$=\int_0^z 2x\,dx-e^{-z}\int_0^z 2xe^x dx=\boldsymbol{z^2-2z+2-2e^{-z}}$$

$$\varphi(z)=F'(z)=2(e^{-z}+z-1);$$

当$z>1$时，

$$F(z)=\int_0^1 dx\int_0^{z-x}2xe^{-y}dy=\int_0^1 2x(1-e^{-(z-x)})dx=\int_0^1 2xdx-2e^{-z}\int_0^1 xe^{x}dx=1-2e^{-z}$$

$\varphi(z)=F'(z)=2e^{-z}$，

即 $$\varphi(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ 2(e^{-z}+z-1), & 0<z\le 1\\ 2e^{-z}, & z>1\end{cases}$$

7.解：（1）为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

当$x\le 0$时，$f_X(x)=0$;

当$x>0$时，$f_X(x)=\int_0^{+\infty}12e^{-(3x+4y)}dy=12e^{-3x}\int_0^{+\infty}e^{-4y}dy=3e^{-3x}$

所以得： $$f_X(x)=\begin{cases}3e^{-3x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

类似可得： $$f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-4y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

从而 当$y>0$时，X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}3e^{-3x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，

当$x>0$时，Y 的条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}4e^{-4y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$。

（2）当$x\le 0$或$y\le 0$时，$F(x,y)=0$；

当$x>0,\ y>0$时， $F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)dudv$

$$=12\int_0^y\int_0^x e^{-(3u+4v)}dudv=(1-e^{-3x})(1-e^{-4y})$$

所以得：$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-3x})(1-e^{-4y}), & x>0,y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$）

（3）不难验证：$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$ ，所以X,Y是相互独立的。

因为X,Y相互独立，所以X,Y不相关，故$\rho_{XY}=0$，即得出$Cov\ (X,Y)=0$

（4）解一：$P(0<X\le 1,\ 0<Y\le 2)=F(1,2)-F(1,0)-F(0,2)+F(0,0)$

$$=(1-e^{-3})(1-e^{-8})$$

解二：$P(0<X\le 1,\ 0<Y\le 2)=\iint\limits_{\substack{0<x\le 1\\0<y\le 2}} 12e^{-(3x+4y)}dx\,dy$

$$=12\int_0^1 e^{-3x}dx\int_0^2 e^{-4y}dy=(1-e^{-3})(1-e^{-8})$$

8.【解】

(1)由$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 ady=a\int_0^1(1-x^2)dx=\frac{2}{3}a$

知$a=\frac{3}{2}$

(2) $P(0\le X\le \frac{1}{2})=\iint\limits_{0\le x\le \frac{1}{2}} f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{x^2}^1\frac{3}{2}dy=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{3}{2}(1-x^2)dx=\frac{11}{16}$

(3) $0<x<1$时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{x^2}^1\frac{3}{2}dy=\frac{3}{2}(1-x^2)$

$x\le 0$或$x\ge 1$时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=0$

因此$f_X(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-x^2), & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$0<y<1$时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^{\sqrt{y}}\frac{3}{2}dx=\frac{3}{2}\sqrt{y}$

$y\le 0$或$y\ge 1$时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=0$

因此$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{2}\sqrt{y}, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

(4) $0<y<1$时，$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{y}}, & 0<x<\sqrt{y}\\ 0, & 其他\end{cases}$；

$0<x<1$时，$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{1-x^2}, & x^2<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

9.【解】(1) 由于 X,Y 相互独立, 联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-y}, & 0<x<2\text{且}y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(2) 记 $Z=X+2Y$ ， $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+2Y\le z)$

当 $z\le 0$ 时， $F_Z(z)=0$ ；

当 $0<z<2$ 时， $F_Z(z)=P(X+2Y\le z)=\int_0^z dx\int_0^{\frac{z-x}{2}}\frac{1}{2}e^{-y}dy=\frac{1}{2}(z-2+2e^{-\frac{z}{2}})$

当 $z\ge 2$ 时， $F_Z(z)=P(X+2Y\le z)=\int_0^2 dx\int_0^{\frac{z-x}{2}}\frac{1}{2}e^{-y}dy=1-e^{1-\frac{z}{2}}+e^{-\frac{z}{2}}$

于是 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ \frac{1}{2}(z-2+2e^{-\frac{z}{2}}), & 0<z<2\\ 1-e^{1-\frac{z}{2}}+e^{-\frac{z}{2}}, & z\ge 2\end{cases}$

因此 $f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ \frac{1}{2}(1-e^{-\frac{z}{2}}), & 0<z<2\\ \frac{1}{2}(e^{1-\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}), & z\ge 2\end{cases}$

(3) 由于 $EX=1,EY=\int_0^{+\infty}ye^{-y}dy=1$ 可知 $E(X+2Y)=EX+2EY=3$

$EX^2=\frac{4}{3},DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{3}$

$EY^2=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f_Y(y)dy=\int_0^{+\infty}y^2e^{-y}dy=2,DY=EY^2-(EY)^2=1$

又由 X,Y 相互独立得 $D(X+2Y)=DX+4DY=\frac{13}{3}$

10.解：（1） $0\le x\le 1$ 时， $f_X(x)=\int_0^2\left(x^2+\frac{xy}{3}\right)dy=2x^2+\frac{2x}{3}$ ，其余为零；

$0\le y\le 2$ 时， $f_Y(y)=\int_0^1\left(x^2+\frac{xy}{3}\right)dx=\frac{1}{3}+\frac{y}{6}$ ，其余为零；

显然 $f\left(x,y\right)\ne f_X\left(x\right)f_Y\left(y\right)$ ，所以 X 和 Y 的不独立；

（2） $f_{X|Y}\left(x|1\right)=\frac{f\left(x,1\right)}{f_Y\left(1\right)}=\begin{cases}2x^2+\frac{2x}{3}, & 0\le x\le 1\\ 0 & ，其\ 它\end{cases}$

（3） $P\left\{X+Y>1\right\}=\int_0^1dx\int_{1-x}^2\left(x^2+\frac{xy}{3}\right)dy=\int_0^1\left(\frac{5}{6}x^3+\frac{4x^2}{3}+\frac{x}{2}\right)dx=\frac{65}{72}$

11. 设 A 为随机事件，证明： $P\left(A\right)P\left(\overline{A}\right)\le\frac{1}{4}$ **.**

证明： 设 $p=P\left(A\right)$ ，记 $f\left(p\right)=P\left(A\right)P\left(\overline{A}\right)=p\left(1-p\right)$ ，则 $f\left(p\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上连续，能取到最大值.

而 $f\left(p\right)$ 只有一个驻点 $p=\frac{1}{2}$, 故 $\max f\left(p\right)=\max\left\{f\left(0\right), f\left(0.5\right), f\left(1\right)\right\}=\frac{1}{4}$, 所以 $P\left(A\right)P\left(\overline{A}\right)\le\frac{1}{4}$.