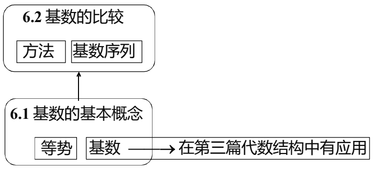
第六章 集合的基数

1

集合的基数知识逻辑概图



2

6.1 基本概念

定义6.1 设A和B是任意集合，若存在从A到B的双射，则称A与B是等势的，记为A ≈ B。若A与B不等势，则记为A ≉ B。

- 通俗地讲，集合的势是度量集合所含元素多少的量，集合的势越大，所含元素越多。

3

6.1 基本概念

可以证明，等势具有下列性质：自反性、对称性和传递性。

定理6.1 等势是任何集合族上的等价关系。

证：对任意的集合A，B，C，

（1）$A \approx A$

I_A: $A \to A$是A上的双射函数，因此$A \approx A$。等势关系满足自反性。

（2）若$A \approx B$，则$B \approx A$。

若$A \approx B$，则存在双射f: $A \to B$，则有f^{-1}: $B \to A$是双射，因而$B \approx A$。等势关系满足对称性。

（3）若$A \approx B$，$B \approx C$，则$A \approx C$。

若$A \approx B$，$B \approx C$，则存在双射f: $A \to B$，g: $B \to C$，则有$f \circ g$: $A \to C$是双射，故$A \approx C$。等势关系满足传递性。

综上可见，等势关系是个等价关系。

4

6.1 基本概念

一些等势集合的例子：

例6.1 下列集合是等势的。

（1）$N \approx Z \approx Q$

（2）$R \approx (0, 1) \approx (a, b)$，a, b$\in R$，a<b

证明见教材。

例6.2 设A为任意集合，则$P(A) \approx \{0, 1\}^A$。

证明见教材。

5

6.1 基本概念

定义6.2 设A为任意集合，如果存在自然数n，使得A ≈ {0, 1, 2,…, n−1}，则称A为有限集，否则称A为无限集。

例6.3 根据上述定义，有以下结论。

（1）A={a, b, c}为一有限集。

（2）自然数集N为无限集。

证明见教材。

6

6.1 基本概念

基数的不完全归纳的描述性定义：

定义6.3

（1）对于有限集合A，存在自然数n，使得$A \approx \{0, 1, 2,\ldots, n-1\}$，则称$n$为$A$的基数（cardinal number），记作$|A|$（或card$A$）。即

$$|A| = n \text{（或card}A = n\text{）}$$

（2）设A为任意集合，如果有$A \approx N$，N为自然数集，则称集合A的基数为$\aleph_0$（读作"阿列夫零"）。即

$$|A| = \aleph_0 \text{（或card}A = \aleph_0\text{）}$$

显然，自然数集、整数集、偶数集、有理数集等集合的基数均为$\aleph_0$。

7

6.1 基本概念

基数的不完全归纳的描述性定义：

定义6.3（续）

（3）设A为任意集合，如果有$A \approx R$，R为实数集，则称集合A的基数为$\aleph$（读作"阿列夫"）。即

$$|A| = \aleph \text{（或card}A = \aleph\text{）}$$

具有基数$\aleph$的集合常称为连续统（continuum）。

（4）存在着集合其基数大于$\aleph$（由6.2中定理6.5（康托定理））。

由（1）可知，有限集合的基数就是其所含元素的个数。两个有限集合A和B等势当且仅当A和B的元素个数相同。

例6.4 求证$|[0, 1]| = |(0, 1)| = \aleph$。

证明见教材。

8

6.1 基本概念

例6.5 求下列集合的基数。

（1）$T = \{x \mid x$是单词"BASEBALL"中的字母$\}$

（2）$B = \{x \mid x \in R \wedge x^2 = 9 \wedge 2x = 8\}$

（3）$C = P(A)$，$A = \{1, 3, 5, 7\}$

解：

（1）$T = \{A, B, E, L, S\}$，得$|T| = 5$。

（2）$B = \varnothing$，得$|B| = 0$。

（3）由$|A| = 4$，得$|P(A)| = 2^4 = 16$。

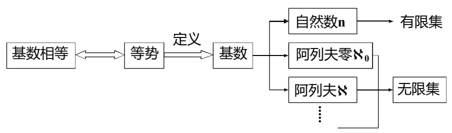
9

小结

（1）等势、集合基数、有限集、无限集等基本概念。

（2）典型的集合等势：$N \approx Z \approx Q \approx N \times N$，$R \approx (0, 1) \approx [0, 1] \approx (a, b) \approx (a, b] \approx [a, b)$，a, b$\in R$，a<b。

（3）典型集合的基数：有限集的基数是某自然数n，自然数集的基数是$\aleph_0$，实数集的基数是$\aleph$。



10

6.2 基数的比较

定义6.4 设A、B为任意集合，

（1）若有一个从A到B的双射函数，则称A，B基数相等（即定义6.1的A与B等势），记为

$$|A| = |B|$$

（2）若有一个从A到B的单射函数，则称A的基数小于等于B的基数，记为

$$|A| \leq |B|$$

（3）如果$|A| \leq |B|$且$|A| \neq |B|$，则称A的基数小于B的基数，记为

$$|A| < |B|$$

11

6.2 基数的比较

根据定义6.4，可得以下结论（证明略）：

（1）对任何自然数m，n，若$m \leq n$，则

$$|\{0, 1, 2,\ldots, m-1\}| \leq |\{0, 1, 2,\ldots, n-1\}|$$

（2）对任何自然数n，$n < \aleph_0$，即

$$|\{0, 1, 2,\ldots, n-1\}| < |\{0, 1, 2,\ldots\}|$$

（3）$\aleph_0 < \aleph$，即

$$|\{0, 1, 2,\ldots\}| < |R|$$

12

6.2 基数的比较

定理6.2 基数的≤关系为全序关系。即满足：

（1）对任意的集合A，有$|A| \le |A|$。

（2）对任意的集合A，B，如果$|A| \le |B|$，$|B| \le |A|$，则$|A| = |B|$。

（3）对任意的集合A，B，C，若$|A| \le |B|$，$|B| \le |C|$，则$|A| \le |C|$。

（4）对任意的集合A，B，以下三个式子：

$$|A| < |B|,\quad |A| = |B|,\quad |B| < |A|$$

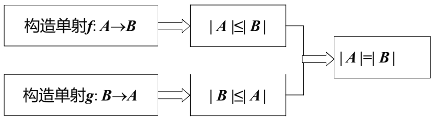
必成立其一且仅成立其一。这个性质称为基数的三歧性。

基数满足（1）~（3），说明基数的≤关系为偏序关系，满足（4）则≤为全序关系。该定理可根据定义6.4及函数的性质，这里证明略。

13

6.2 基数的比较

说明：定理6.2为证明两个集合基数相等提供了一种有效的方法。如果我们能构造一个单射$f: A \to B$，即说明$|A| \le |B|$。同时，若能构造一个单射$g: B \to A$，即说明$|B| \le |A|$。因此根据定理6.2就得到$|A| = |B|$。该方法的思维形式注记图如下：



例6.6 利用定理6.2证明例6.4中的$|[0, 1]| = |(0, 1)|$。

定理6.3 设A是有限集，则$|A| < \aleph_0 < \aleph$。

14

6.2 基数的比较

定义6.5 设A为集合，若card$A \le \aleph_0$，则称A为可数集或可列集。

显然，可数集包括有限集和可数无限集，而其它无限集称为不可数集。

关于可数集有下面的命题：

（1）可数集的任何子集都是可数集。

（2）两个可数集的并是可数集。

（3）两个可数集的笛卡儿积是可数集。

（4）可数个可数集的并仍是可数集。

15

6.2 基数的比较

引理6.1 任一无限集，必含有无限可数子集。

证：设A为任一无限集，显然$A \ne \varnothing$，在A中任取一个元素记为a_0，$A_1 = A - \{a_0\}$仍为无限集，再在A_1中任取一个元素记为a_1，$A_2 = A_1 - \{a_1\}$依然为无限集，继续下去将得到一个无限可数子集$B = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$。

定理6.4 $\aleph_0$是最小的无限集基数。即对任一无限集A，有$\aleph_0 \le |A|$。

证：因为A为无限集，那么根据引理6.1，A必有一可数无限子集B，构造函数

$$f: B \to A,\quad f(x) = x$$

f为单射，因此$|B| \le |A|$，即$\aleph_0 \le |A|$。$\aleph_0$是最小的无限集基数。

16

6.2 基数的比较

下面定理表明没有最大基数，或者没有最大集合。

定理6.5（康托定理） 设A为任意集合，则$|A| < |P(A)|$。

证：（1）首先证明$|A| \le |P(A)|$，为此构造函数

$$f: A \to P(A),\quad f(x) = \{x\}$$

f是单射函数，故$|A| \le |P(A)|$。

（2）其次证明$|A| \ne |P(A)|$，我们将证明任何函数$g: A \to P(A)$都不是满射的。

对任意的函数$g: A \to P(A)$，构造如下集合B：

$$B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin g(x)\}$$

则$B \subseteq A$即$B \in P(A)$。则对任意的$x \in A$有$x \in B \Leftrightarrow x \notin g(x)$。

所以对任意的$x \in A$，都有$g(x) \ne B$，则$B \notin \mathrm{ran}\, g$. $g: A \to P(A)$不是满射的，所以不是双射的。因此有$|A| \ne |P(A)|$。

17

6.2 基数的比较

说明：将已知的基数按从小到大的顺序排列就得到：

$$0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \aleph_0, \aleph, \ldots$$

其中，

（1）$0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$恰好是全体自然数，是有穷集合的基数，也叫做有穷基数。

（2）$\aleph_0, \aleph, \ldots$是无穷集合的基数，也叫做无穷基数。

（3）$\aleph_0$是最小的无穷基数。

（4）$\aleph$后面还有更大的基数，如$|P(R)|$等，不存在最大的基数。

18

小结

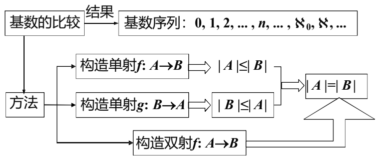
（1）基数的比较：已知的基数按从小到大的顺序排列是0, 1, 2, ... , n, ... , $\aleph_0$, $\aleph$, ...。$\aleph_0$是最小的无穷基数，不存在最大的基数。

（2）证明集合基数相等有两种方法：

① 构造一个双射函数

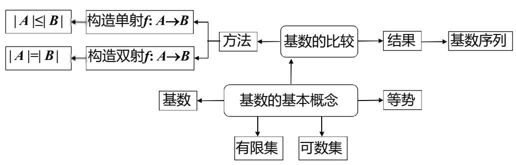
② 构造两个单射函数。

（3）可数集（或可列集）的定义。



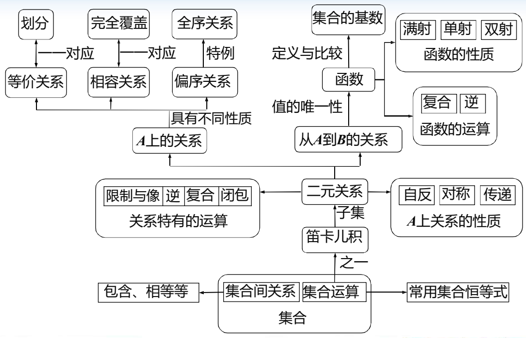
19

本章小结



20

本篇知识逻辑结构图



21