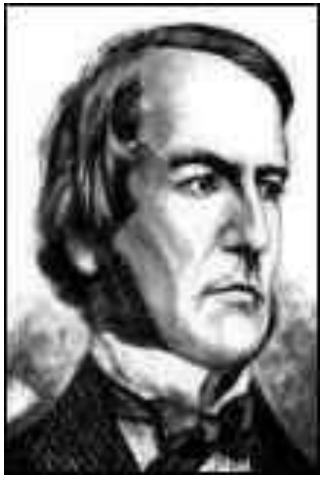
第三章 逻辑代数

布尔代数



George Boole (1815-1864)

变量取值只有“0”，“1”两种，分别称为逻辑“0”和逻辑“1”

“0”和“1”并不表示数量的大小，而是表示两种相互对立的逻辑状态

逻辑代数所表示的是逻辑关系，不是数量关系！

§ 3.1 基本定理和运算法则

3.1.1 基本运算关系

3.1.2 德摩根定律

§ 3.2 逻辑函数化简

3.2.1 用代数法化简

3.2.2 用卡诺图化简

§ 3.1基本定理和运算法则

基本运算：与、或、非

基本运算关系：

交换律 $A + B = B + A$ $\quad A \cdot B = B \cdot A$

结合律 $A + (B + C) = (A + B) + C$

$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

分配律 $A(B + C) = AB + AC$

$A+BC = (A+B)(A+C)$

$A+\underline{A(B+C)}+BC$

常量与变量的关系

自等律 $A+\mathbf{0}=$

0-1律 $A+\mathbf{1}=$

重叠律 $A+A=$

还原律 $\overline{\overline{A}}=$

互补律 $A+\overline{A}=$

吸收规则

$$A + AB = A$$ 原变量的吸收

$$A + \overline{A}B = A + B$$ 反变量的吸收

$$AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$$ 混合变量的吸收

原变量的吸收 $A + AB = A$

证明： $A + AB = A(1 + B) = A \cdot 1 = A$

例如： $AB + CD + AB\overline{D}(E + F) =$

反变量的吸收 $A + \overline{A}B = A + B$

证明： $A + \overline{A}B = A + AB + \overline{A}B$

$= A + B(A + \overline{A}) = A + B$

例如： $A + \overline{A}BC + DC =$

混合变量的吸收

$$AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$$

证明：

$$\begin{aligned} & AB + \overline{A}C + BC \\ = & AB + \overline{A}C + (A + \overline{A})BC \\ = & AB + \overline{A}C + ABC + \overline{A}BC \\ = & AB + \overline{A}C \end{aligned}$$

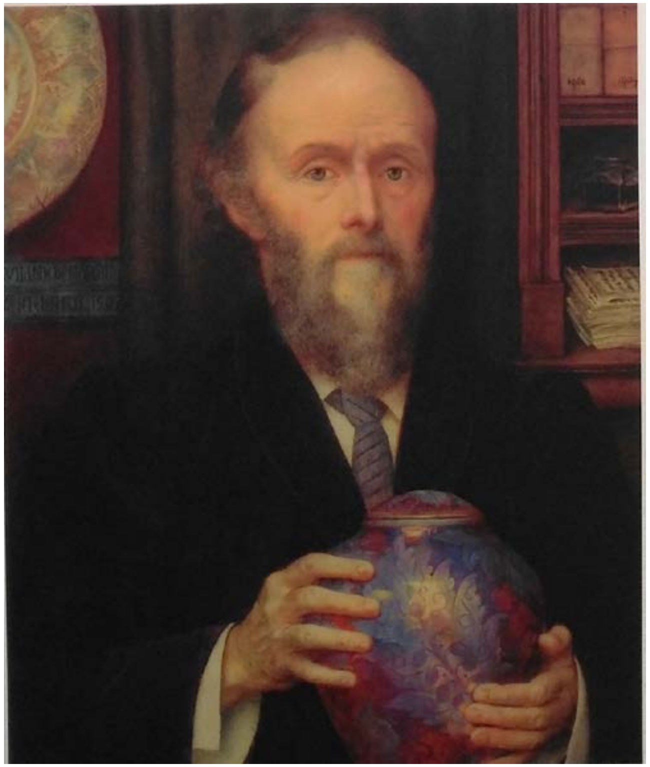
1

吸收

例：

$$AB + \overline{A}C + BCD = AB + \overline{A}C$$

德摩根定律（反演律）



$$\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

Break the bar,
Change the Sign

$$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B} \qquad \overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$$

列状态表证明：

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A+B}$	$\overline{A}\cdot\overline{B}$	$\overline{A\cdot B}$	$\overline{A}+\overline{B}$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0

$$\overline{A+B+C}=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} \qquad \overline{A\cdot B\cdot C}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$$

§ 3.2 逻辑函数的化简

利用逻辑代数变换，可以用较少的逻辑门实现同样的逻辑功能

体积小,重量轻

性能可靠、稳定

成本低

公式法

卡诺图法

一、用代数法则化简逻辑函数

化简 $Y = ABC + A\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C}$

$= AC(B+\overline{B}) + A\overline{C}(B+\overline{B})$ 并项法

$= AC + A\overline{C} = A$

利用 $A+\overline{A}=1$，将两项合并为一项

化简 $Y = ABC + \overline{A}BC + A\overline{B}C$ 加项法

$= ABC + \overline{A}BC + A\overline{B}C + ABC$

$= BC + AC$

$$Y = \overline{B}C + A\overline{B}C(D+E)$$

吸收法

$$= \overline{B}C$$

$$Y = AB + \overline{A}\overline{C} + B\overline{C}$$

配项法

$$= AB + \overline{A}\overline{C} + B\overline{C}(A+\overline{A})$$

$$= \underline{AB + AB\overline{C}} + \underline{\overline{A}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}}$$

$$= AB + \overline{A}\overline{C}$$

也可直接用吸收法

练习：

$$Y = ABC + ABD + \bar{A}B\bar{C} + CD + B\bar{D}$$

$$= ABC + \bar{A}B\bar{C} + CD + B(AD + \bar{D})$$

吸收

$$= ABC + \bar{A}B\bar{C} + CD + AB + B\bar{D}$$

吸收

$$= AB + \bar{A}B\bar{C} + CD + B\bar{D}$$

吸收

$$= AB + B\bar{C} + CD + B\bar{D}$$

$$= AB + CD + B(\bar{C} + \bar{D})$$

$$= AB + CD + B\overline{CD}$$

吸收

$$= AB + CD + B \quad = B + CD$$

$$AB=AC \xrightarrow{?} B=C$$

$$A+B=A+C \xrightarrow{?} B=C$$

请注意与普通代数的区别！

单选题 1分

设置

已知某逻辑函数$AB=AC$成立， 是否可以由此推出$B=C$

A 是

B 否

提交

单选题 1分

设置

已知某逻辑函数$A+B=A+C$成立， 是否可以由此推出$B=C$

A 是

B 否

提交

二、用卡诺图化简逻辑函数

卡诺图(Karnaugh Map, 简称KMap)

与最小项对应的按一定规则排列的方格图

例

$A \backslash B$	0	1
0	$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A}\,B$
1	$A\,\overline{B}$	$A\,B$

两变量卡诺图

卡诺图和真值表的对应

真值表

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

输入变量

卡诺图

A \ B	0	1
0	1	1
1	1	0

每种输入下

对应的输出

三变量卡诺图

AB \ C	0	1
00	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}\,\overline{B}C$
01	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}BC$
11	$AB\overline{C}$	ABC
10	$A\overline{B}\,\overline{C}$	$A\overline{B}C$

四变量卡诺图

AB \ CD	00	01	11	10
00	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$	$\overline{A}\,\overline{B}CD$	$\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$
01	$\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}D$	$\overline{A}BCD$	$\overline{A}BC\overline{D}$
11	$AB\overline{C}\,\overline{D}$	$AB\overline{C}D$	$ABCD$	$ABC\overline{D}$
10	$A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	$A\overline{B}\,\overline{C}D$	$A\overline{B}CD$	$A\overline{B}C\overline{D}$

注意顺序！

卡诺图中逻辑相邻与几何相邻一致！

逻辑相邻?

$$F = \boxed{A\bar{B}\bar{C}} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \boxed{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} + ABC$$

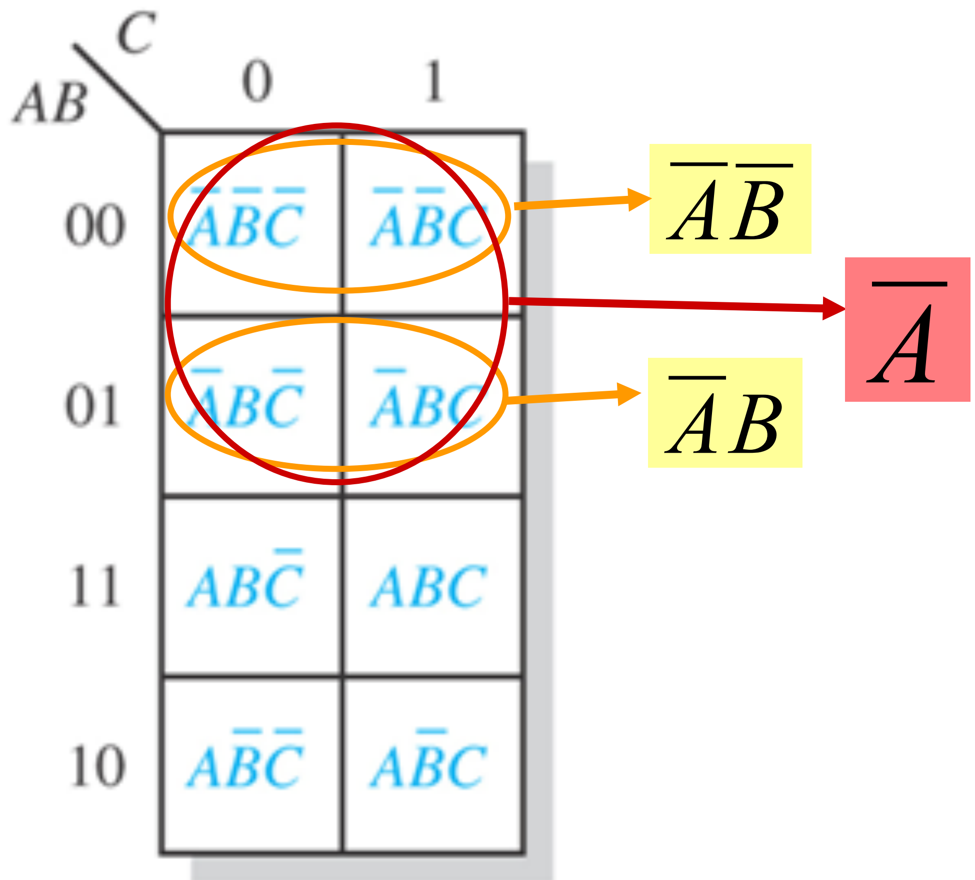
逻辑相邻

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} = \bar{B}\bar{C}$$

逻辑相邻项可以合并

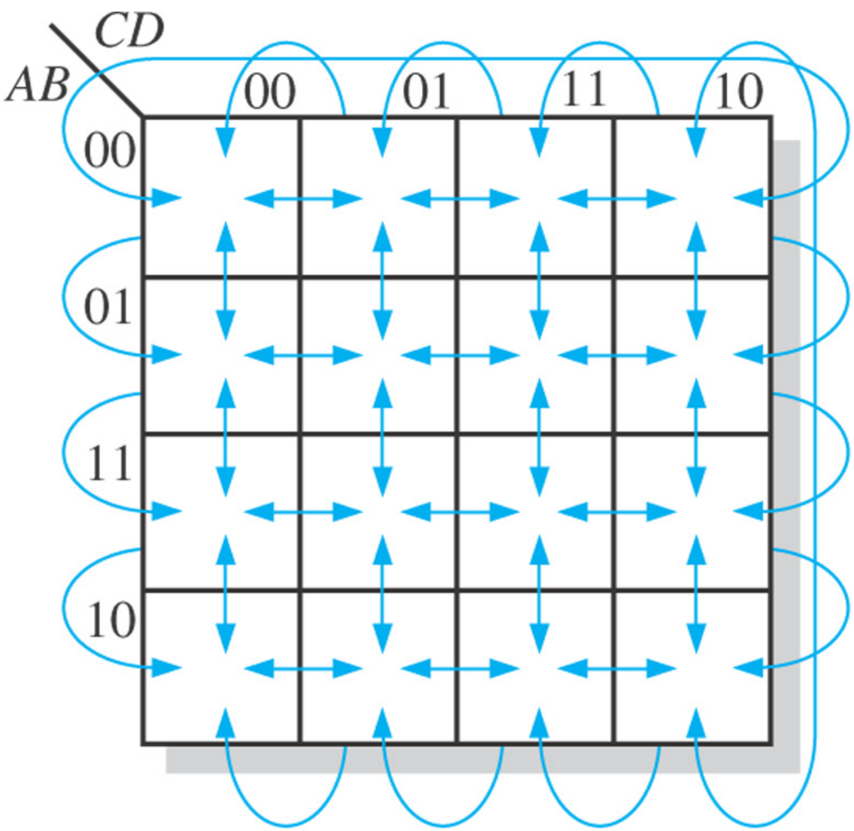
卡诺图中逻辑相邻与几何相邻一致，
因而卡诺图中的几何相邻项可以合并!

三变量卡诺图



卡诺图中逻辑相邻与几何相邻一致，
因而卡诺图中的几何相邻项可以合并!

环绕相邻



AB \ CD	00	01	11	10
00	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$	$\bar{A}\bar{B}CD$	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$
01	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}B\bar{C}D$	$\bar{A}BCD$	$\bar{A}BC\bar{D}$
11	$AB\bar{C}\bar{D}$	$AB\bar{C}D$	$ABCD$	$ABC\bar{D}$
10	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$A\bar{B}\bar{C}D$	$A\bar{B}CD$	$A\bar{B}C\bar{D}$

应用卡诺图化简逻辑函数步骤

1）画出卡诺图

2）合并相邻最小项

3）写出最简“与或”逻辑式

1）画卡诺图

a) 根据状态表画卡诺图

如：

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

A \ BC	00	01	11	10
0		1		1
1	1		1	

将输出变量为“1”的填入对应的小方格，为“0”的可不填

b)根据逻辑式画出卡诺图

最小项之和的形式

如:$Y=\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+ABC$

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0		1		1
1	1		1	

将逻辑式中的最小项分别用“1”填入对应的小方格

b) 根据逻辑式画出卡诺图

$$\overline{A} + A\overline{B} + AB\overline{C}$$

000	100	110
001	101	
010		
011		

与或形式

AB \ C	0	1
00	1	1
01	1	1
11		
10		

应用卡诺图化简逻辑函数

例 $Y=\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC$

解：1）画出卡诺图

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0			1	
1		1	1	1

2）合并最小项

将取值为“1”的相邻小方格圈成圈

保留一个圈内最小项的相同变量，而消去相反变量

三个圈分别为

$\overline{A}BC+ABC=BC$

$A\overline{B}C+ABC=AC$

$ABC+AB\overline{C}=AB$

3）写出简化后的与或逻辑式

$Y=BC+AC+AB$

例 $Y=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,C+\overline{A}BC+A\overline{B}\,\overline{C}$

解：

A \ BC	00	01	11	10
0	1	1	1	
1	1			

多余

写出简化逻辑式

$Y=\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}C$

化简原则：

圈的个数应最少

每个“圈”至少要包含一个未被圈过的最小项

例 $Y=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}\,\overline{B}\,C\overline{D}+A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+A\overline{B}\,C\,\overline{D}$

解：

AB \ CD	00	01	11	10
00	1			1
01				
11				
10	1			1

相邻

化简原则：

通常圈越大越好

所圈取值为“1”的相邻小方格的个数为2^n，(n=0, 1, 2…)

消去n个变量

写出简化逻辑式 $Y=\overline{B}\,\overline{D}$

注意：将相邻的最小项圈成矩形(个数应2^n)

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	0
10	1	1	1	0

AD

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	0	0
11	1	1	0	0
10	1	0	0	0

不是矩形

练习 $Y=\overline{A}+\cancel{\overline{A}\,\overline{B}}+\cancel{BC\overline{D}}+B\overline{D}$

解：

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1			1
10				

含$\overline{A}$均填“1”

圈的个数应最少

每个“圈”要最大

2^n

写出简化逻辑式 $Y=\overline{A}+B\overline{D}$

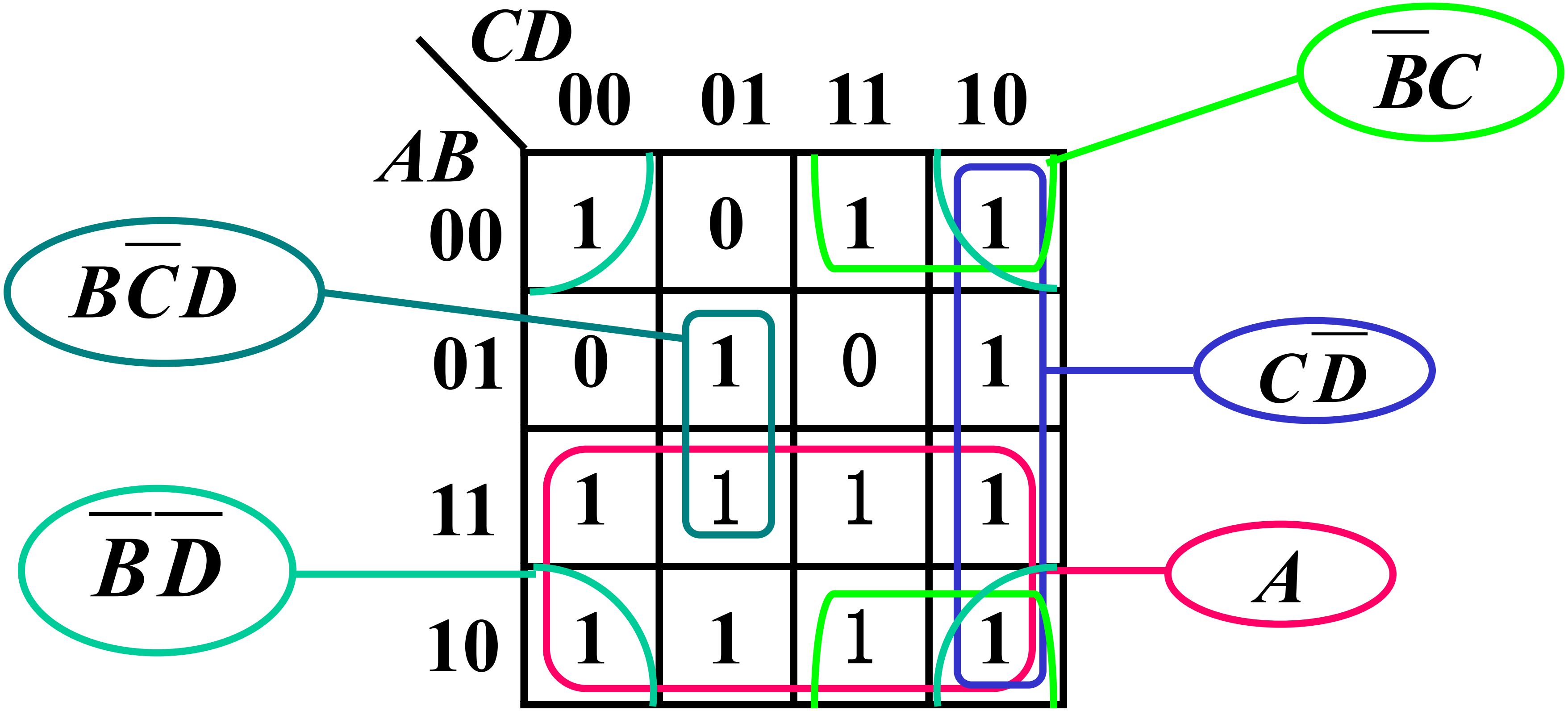
为了书写方便，可用与各单元二进制数对应的十进制来对各单元进行编号

A \ BC	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

A \ BC	00	01	11	10
0	0^{0}	1^{1}	0^{3}	1^{2}
1	1^{4}	0^{5}	1^{7}	0^{6}

$$F(A, B, C) = \Sigma(m_1, m_2, m_4, m_7)$$

例 $F(A,B,C,D)=\Sigma m(0,2,3,5,6,8,9,10,11,12,13,14,15)$



$$F = A + C\overline{D} + \overline{B}C + \overline{B}\,\overline{D} + B\overline{C}D$$

例

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	0	1
1	1	1	1

101状态未给出，是无关项（Don’t Care）

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	1	X	1	1

Y=A

A

认为是1

化简时可以将无关项当作1或0，目的是得到最简结果

Other tips

例

AB \ CD	00	01	11	10
00		1		
01		1	1	1
11	1	1	1	
10			1	

圈完全部的卡诺圈后要检查一下有没有冗余!

例

A \ BC	00	01	11	10
0		1	1	1
1	1	1		1

$$Y = A\overline{B} + \overline{A}C + B\overline{C}$$

A \ BC	00	01	11	10
0		1	1	1
1	1	1		1

$$Y = \overline{B}C + \overline{A}B + A\overline{C}$$

化简结果不唯一!

例

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1	0	0	1
10	1	1	1	1

$$Y = \overline{ABD}$$

ABD

有时可通过合并卡诺图中的0，先得到 $\overline{Y}$ ，求反得Y，可能更快

练习:

$$Y = ABC + ABD + \overline{A}B\overline{C} + CD + B\overline{D}$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	1	0

$$\mathrm{Y} = B + CD$$

讨论：逻辑关系的表达

1. 真值表(逻辑状态表)
2. 逻辑表达式
3. 卡诺图
4. 逻辑电路图
5. 波形图

1. 逻辑状态表(真值表)：

将逻辑函数的输入、输出变量所有可能的逻辑状态及对应的输出以表格形式一一对应地列出

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

n个变量可以有2^n个组合

一般按二进制的顺序列出

2. 卡诺图:

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	1	0

3. 逻辑表达式：

将逻辑函数的输入、输出关系写成与、或、非等逻辑运算的组合式

如： $Y = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$

"最小项之和"的形式

如： $Y = AB + BC$

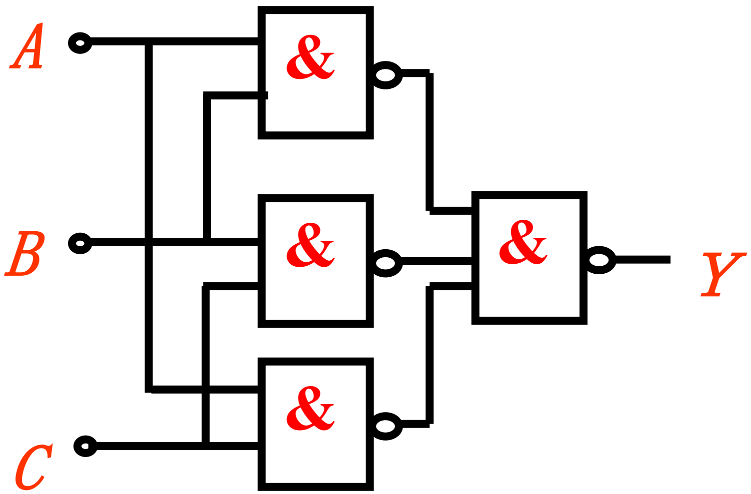
最简"与或"形式

如： $Y = \overline{\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AC}}$

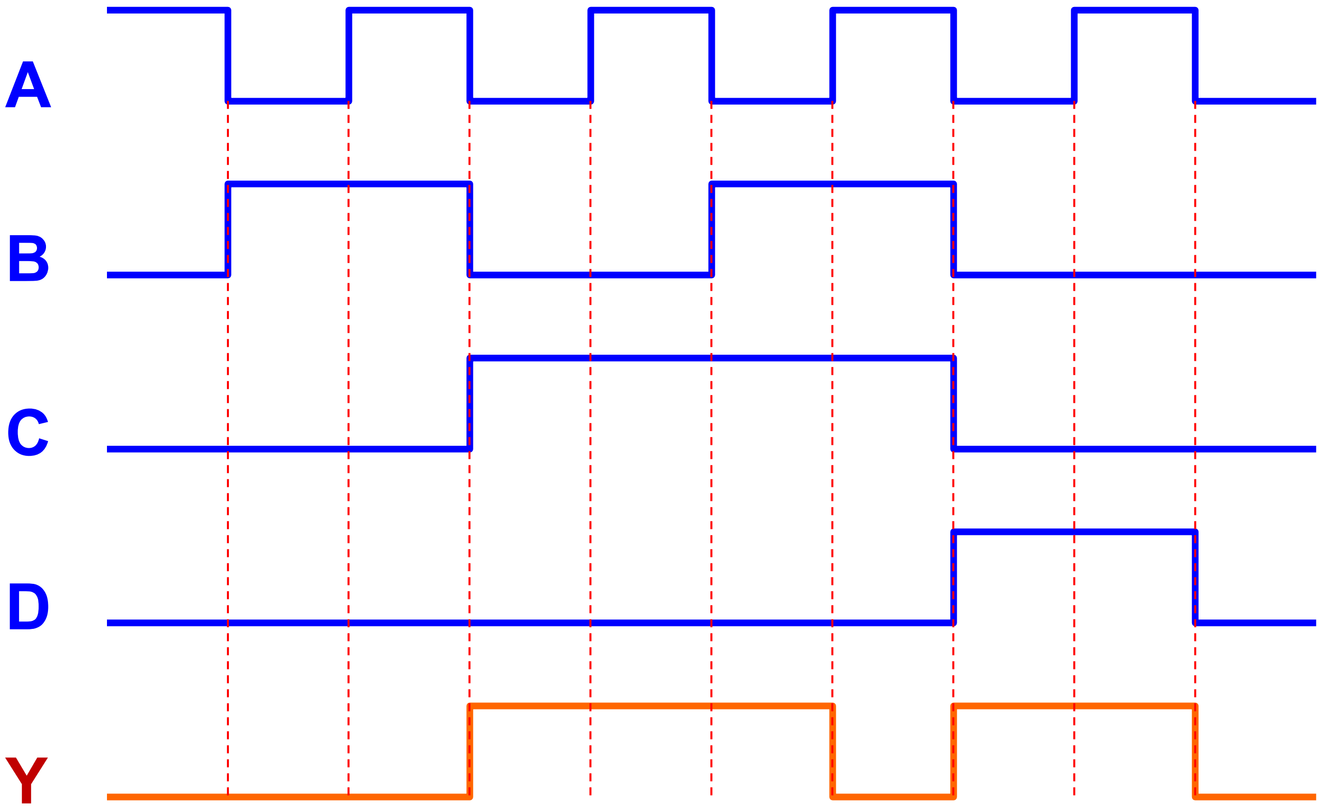
最简"与非"形式

4. 逻辑图

将逻辑函数用逻辑符号和连线表示出来



5.波形图:



第三章 逻辑代数作业

3.2(a), 3.3(c),3.4,3.5(b)(d),3.6(b)