

第11章 电路的频率响应



第11章 电路的频率响应

§11-1 网络函数(略)

§11-2 *RLC*串联电路的谐振(★)

§11-3 *RLC*串联电路的频率响应

§11-4 *RLC*并联谐振电路(★)



§ 11-1 网络函数（频率响应）

1. 频率响应

(1) 定义

电路或系统的工作状态跟随频率变化的现象，称为电路或系统的频率特性，又称频率响应。

(2) 研究意义

- 感抗、容抗随频率变化
- 频率超出一定范围，可能导致电路失效或损坏
- 电路和系统还可能遭受外部各种电磁干扰

§ 11-1 网络函数

2. 网络函数

(1) 定义

单一正弦激励下，**无独立电源**电路或系统响应与激励之间的关系。

如采用相量形式，网络函数的表达式为：

$$H(j\omega) \stackrel{def}{=} \frac{\dot{R}_k(j\omega)}{\dot{E}_{sj}(j\omega)}$$

§ 11-1 网络函数

$$H(j\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\dot{R}_k(j\omega)}{\dot{E}_{sj}(j\omega)}$$

$\dot{R}_k(j\omega)$ ——输出端口 k 的响应,

为电压相量 $\dot{U}_k(j\omega)$ 或电流相量 $\dot{I}_k(j\omega)$;

$\dot{E}_{sj}(j\omega)$ ——输入端口 j 的输入变量 (正弦激励) ,

为电压源相量 $\dot{U}_{sj}(j\omega)$ 或电流源相量 $\dot{I}_{sj}(j\omega)$ 。



§ 11-1 网络函数

3. 幅频特性和相频特性

网络函数是一个复数，包括模值（幅值）部分和辐角部分。

$$H(j\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\dot{R}_k(j\omega)}{\dot{E}_{sj}(j\omega)} = |H(j\omega)| \angle \varphi(j\omega)$$

$|H(j\omega)|$ — 幅频特性

输出与输入有效值之比与频率的关系。

$\phi(j\omega)$ — 相频特性

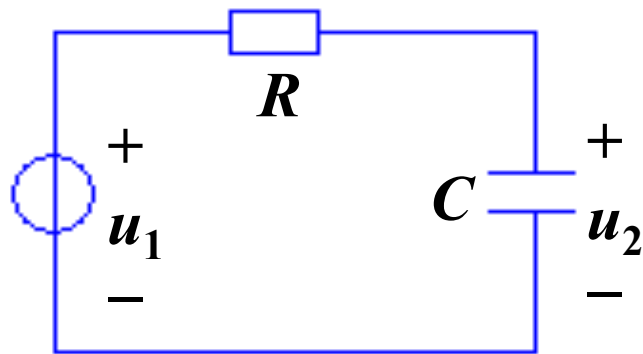
输出与输入相位差与频率的关系。

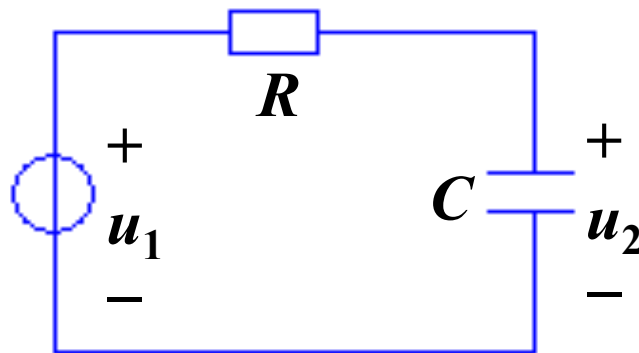
§ 11-1 网络函数

频率特性（响应）曲线——

将幅频特性和相频特性在图上用曲线定性加以描述。

例：试定性画出以电压 u_1 为输入、电压 u_2 为输出时，如下RC串联电路的频率特性曲线。





解：

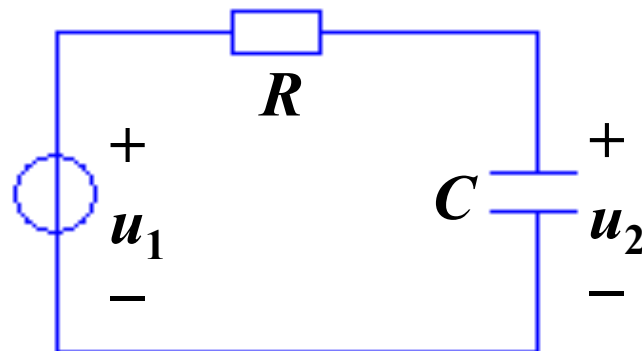
$$H(j\omega) = \frac{\dot{U}_2(j\omega)}{\dot{U}_1(j\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| \angle \varphi(j\omega)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \angle (-\arctan \omega RC)$$

其幅频特性为：

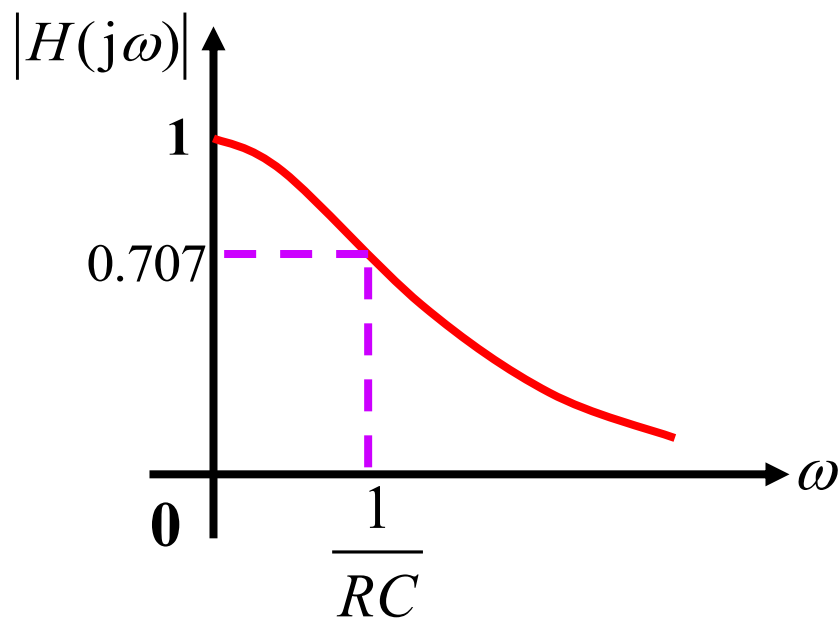
$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$



当 $\omega = 0$ 时, $H(j\omega) = 1$

$$\omega = \frac{1}{RC} \text{ 时, } H(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\omega \rightarrow \infty$ 时, $H(j\omega) = 0$

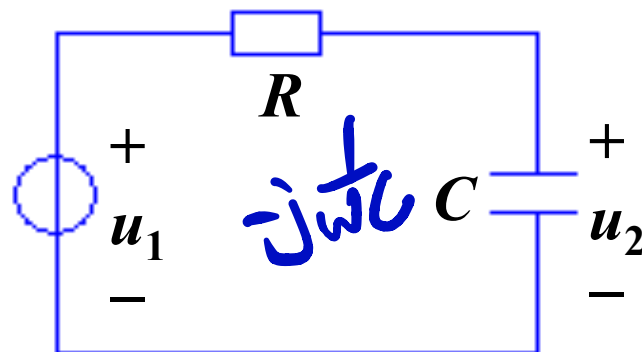


幅频特性曲线

思考：能否通过右图分析出电路的功能？

其相频特性为：

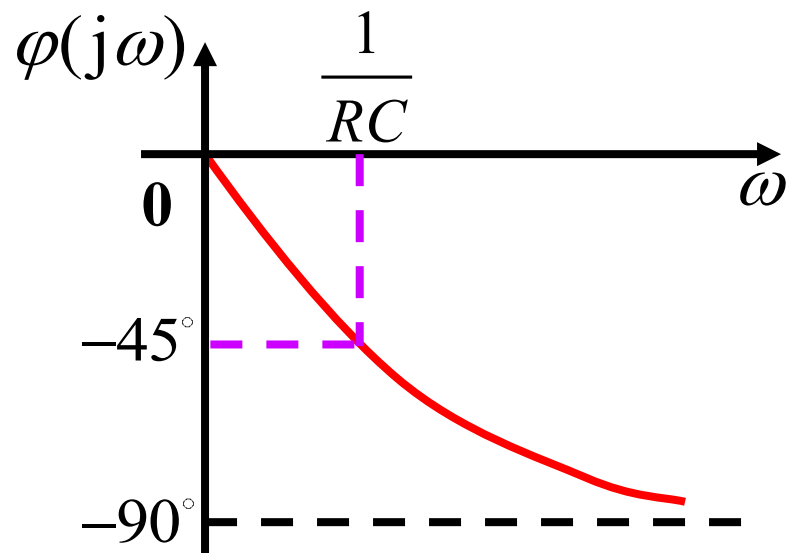
$$\varphi(j\omega) = -\arctan \omega RC$$



当 $\omega = 0$ 时, $\varphi(j\omega) = 0$

$\omega = \frac{1}{RC}$ 时, $\varphi(j\omega) = -45^\circ$

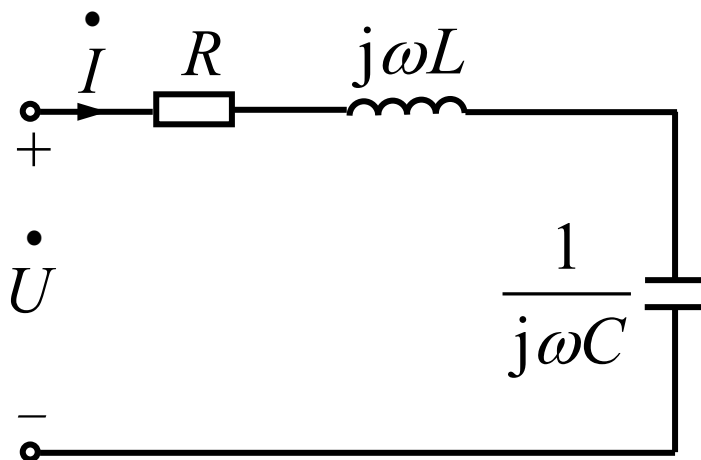
$\omega \rightarrow \infty$ 时, $\varphi(j\omega) = -90^\circ$



相频特性曲线

§ 11-2 *RLC*串联电路的谐振

1. 串联谐振的定义



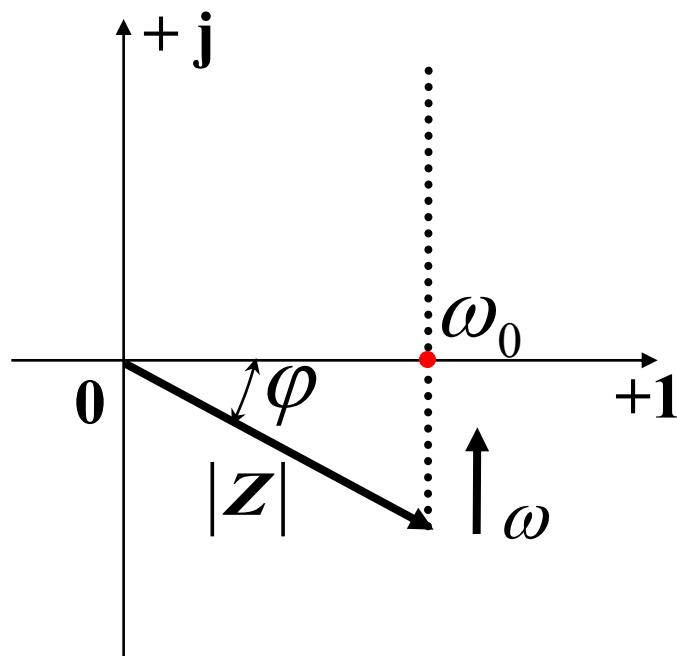
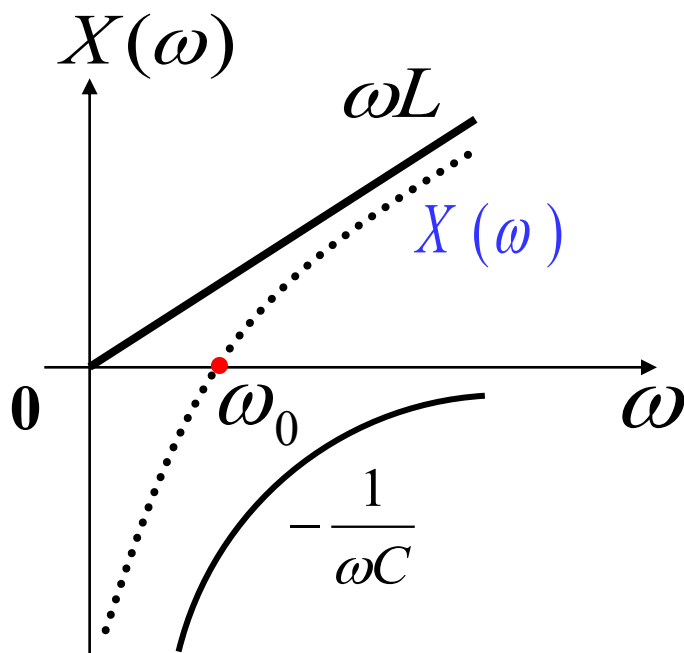
该电路的输入阻抗 $Z(j\omega)$ 为：

$$Z(j\omega) = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

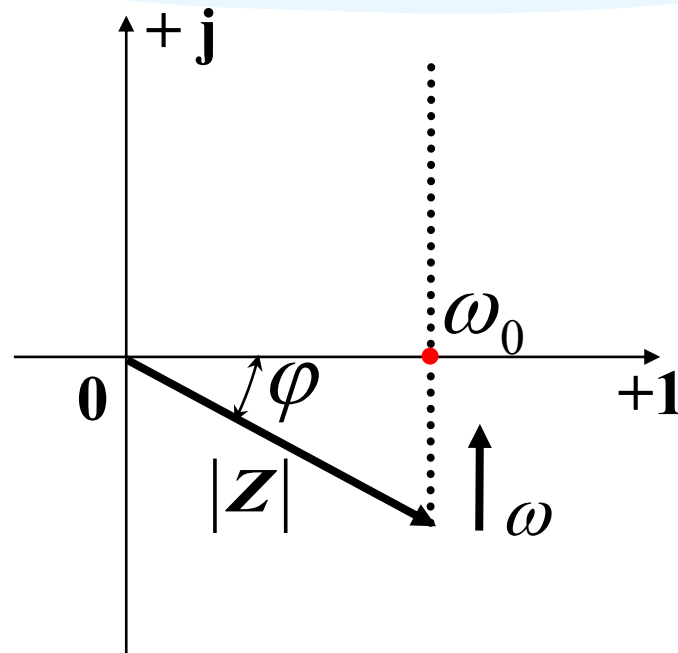
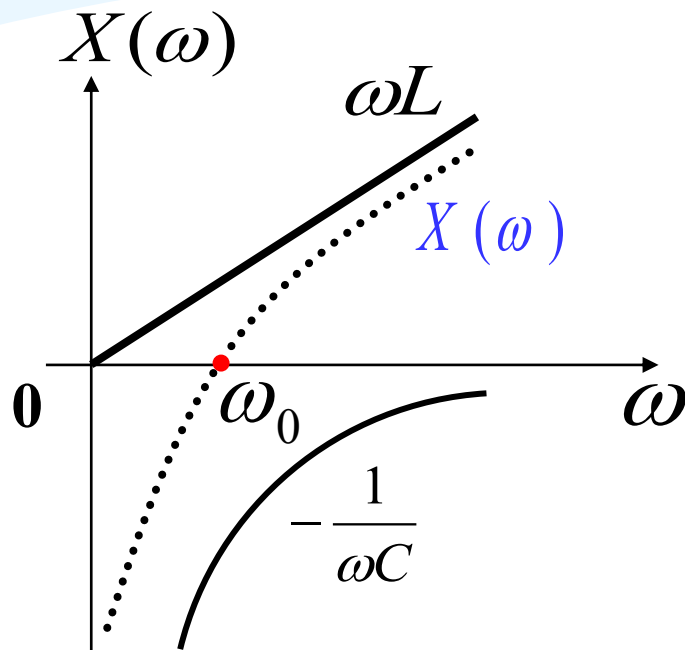
§ 11-2 *RLC*串联电路的谐振

电抗随频率变化的特性曲线如左下图所示。

在复平面上，阻抗随频率变化的图形如右下图所示。



§ 11-2 RLC 串联电路的谐振



由以上两图可以看出：当 $\omega = \omega_0$ 时，出现 $X(\omega_0) = 0$ 。这时端口上的**电压与电流同相**（**此时电路呈阻性**），工程上将电路的这种工作状况称为谐振。由于该谐振是在 RLC 串联电路中发生的，故称为**串联谐振**。

§ 11-2 *RLC*串联电路的谐振

2. 串联谐振的条件

发生的串联谐振条件为： $\text{Im}[Z(j\omega_0)] = 0$

即

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$$

发生谐振时的角频率 ω_0 和频率 f_0 分别为：

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

谐振频率又称为电路的**固有**频率，它是由电路的结构和参数决定的。

§ 11-2 *RLC*串联电路的谐振

3. 串联谐振发生时电路的特点

(1) 谐振时阻抗为最小值

$$Z(j\omega_0) = R + j(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}) = R$$

(2) 在输入电压有效值 U 不变的情况下，电流 I 和 U_R 将达到最大，即

$$I = \frac{U}{|Z(j\omega_0)|} = \frac{U}{R}$$

$$U_R = RI = U$$



§ 11-2 *RLC*串联电路的谐振

(3) 谐振时有 $\dot{U}_L + \dot{U}_C = 0$ (所以串联谐振又称为**电压谐振**) ,

但

$$\dot{U}_L = j\omega_0 L \dot{I} = j\frac{\omega_0 L}{R} \dot{U} = jQ \dot{U} \neq 0$$

$$\dot{U}_C = -j\frac{1}{\omega_0 C} \dot{I} = -j\frac{1}{\omega_0 RC} \dot{U} = -jQ \dot{U} \neq 0$$

式中, Q 称为串联谐振电路的**品质因数**, 它定义为:

$$Q = \frac{U_L(\omega_0)}{U} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{U_C(\omega_0)}{U} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

如果 $Q > 1$, 则 $U_L = U_C > U$; 当 $Q \gg 1$, $U_L = U_C \gg U$,
即在电感和电容上会出现**过电压**现象。



§ 11-2 *RLC*串联电路的谐振

(4) 有功功率： $P(\omega_0) = UI \cos \varphi = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}$

(5) 无功功率： $Q(\omega_0) = UI \sin \varphi = 0 = Q_L(\omega_0) + Q_C(\omega_0)$

但 $Q_L(\omega_0) = \omega_0 L I^2 \neq 0$ $Q_C(\omega_0) = -\frac{1}{\omega_0 C} I^2 \neq 0$

(6) 谐振时电路**不从外部吸收无功功率**，但电路内部的电感与电容之间周期性地**进行磁场能量与电场能量的交换**，这一能量的总和为：

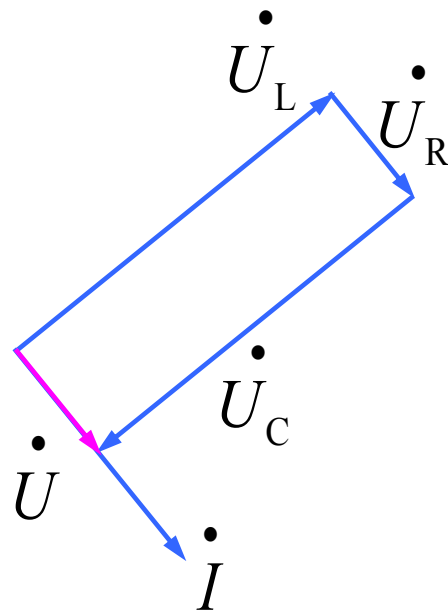
$$W(\omega_0) = \frac{1}{2} L i_L^2 + \frac{1}{2} C u_C^2 = \text{常量}$$



§ 11-2 *RLC*串联电路的谐振

(7) 复功率： $\bar{S} = P + j(Q_L + Q_C) = P$

(8) 串联谐振时电路的相量图：

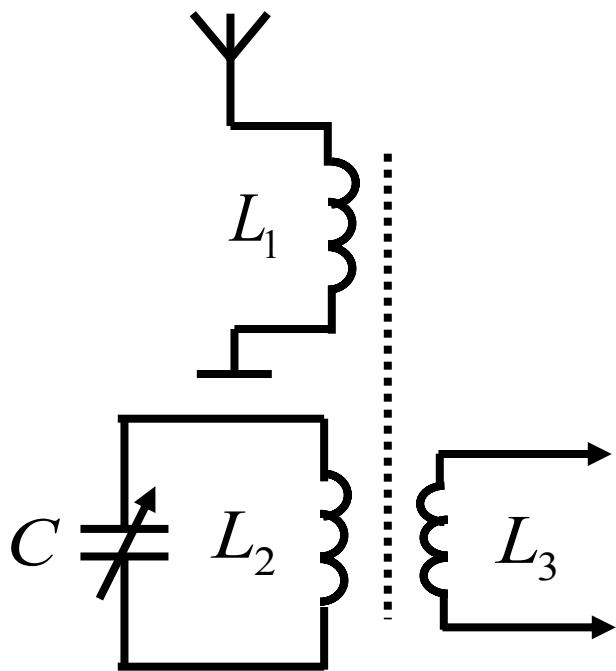


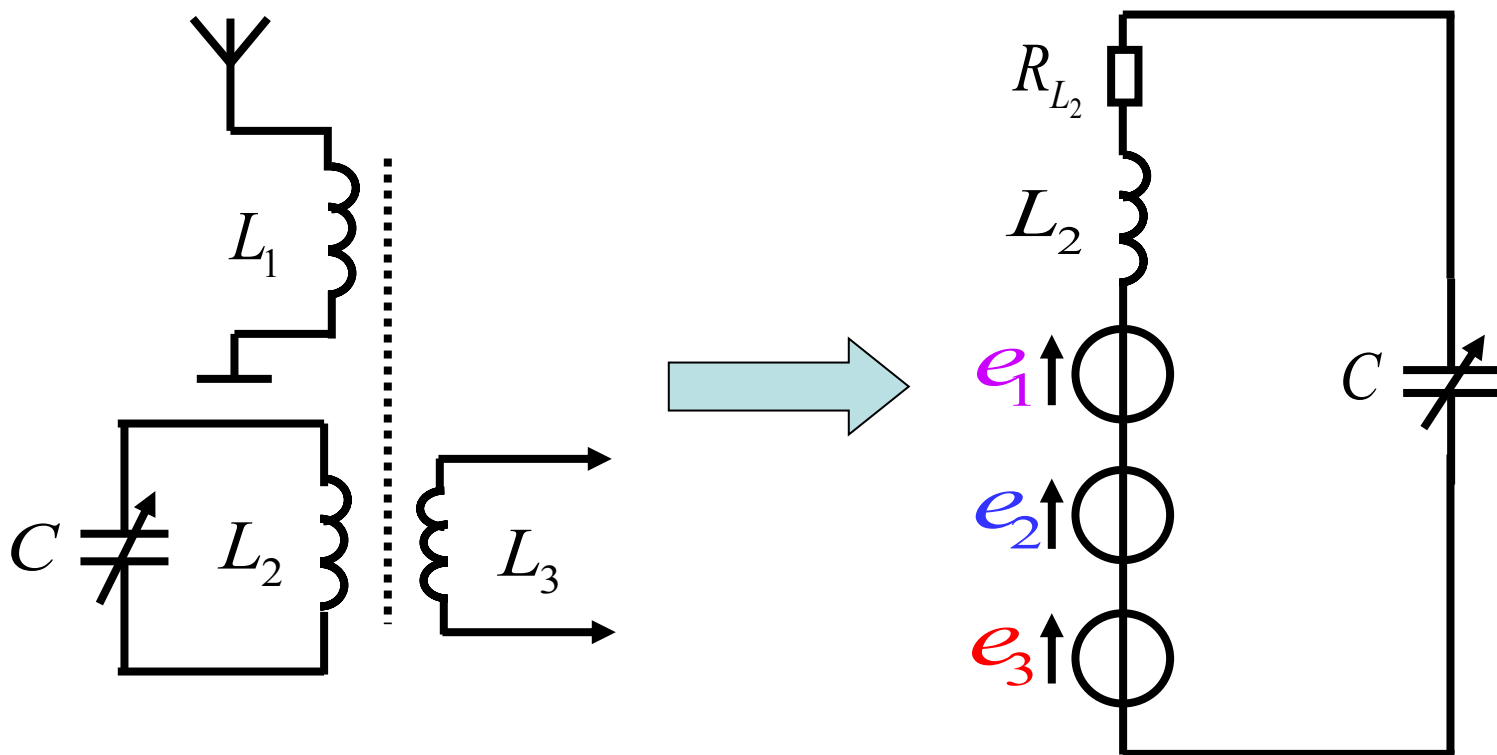
(9) 电阻 R 的大小虽然不影响串联谐振电路的固有频率，但有控制和调节谐振时各元件电流和电压幅度的作用。

§ 11-2 *RLC*串联电路的谐振

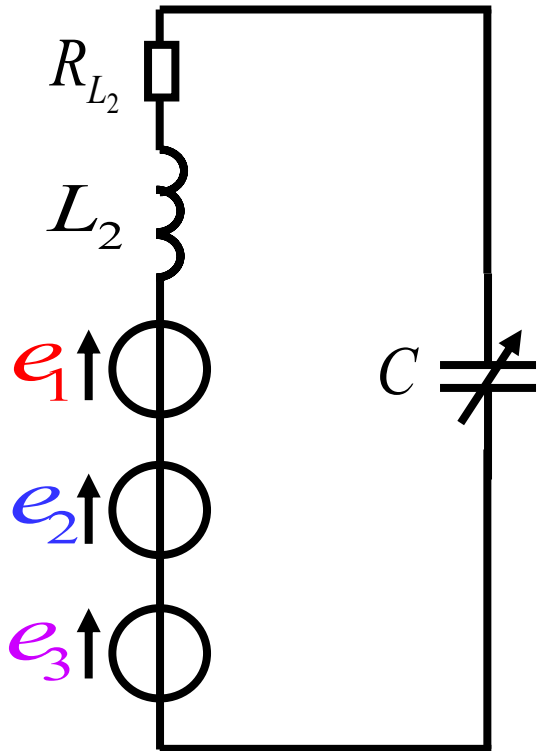
4. 串联谐振应用举例

下图所示为收音机信号接收电路，其中 L_1 为接收天线、 L_2 与可变电容 C 组成串联谐振电路、 L_3 将选择好的信号送至放大电路。





设 e_1 、 e_2 、 e_3 为来自3个不同电台（**不同频率**）的感应电动势信号；改变可变电容 C ，即可选出所需的电台节目（此频率下 L_2C 回路发生**串联谐振**，**对应于该谐振频率的电流将达到最大**，电感线圈 L_2 两端的电压也相对较高；其它频率的信号由于没有发生谐振，所以引起的电流很小）。



已知 $L_2 = 250\mu\text{H}$ 、 $R_{L_2} = 20\Omega$,
 若想收听 $f_1 = 820\text{kHz}$ 的节目 ,
 求电容 C 应调到多少 ?

解 :

$$f_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2 C}}$$

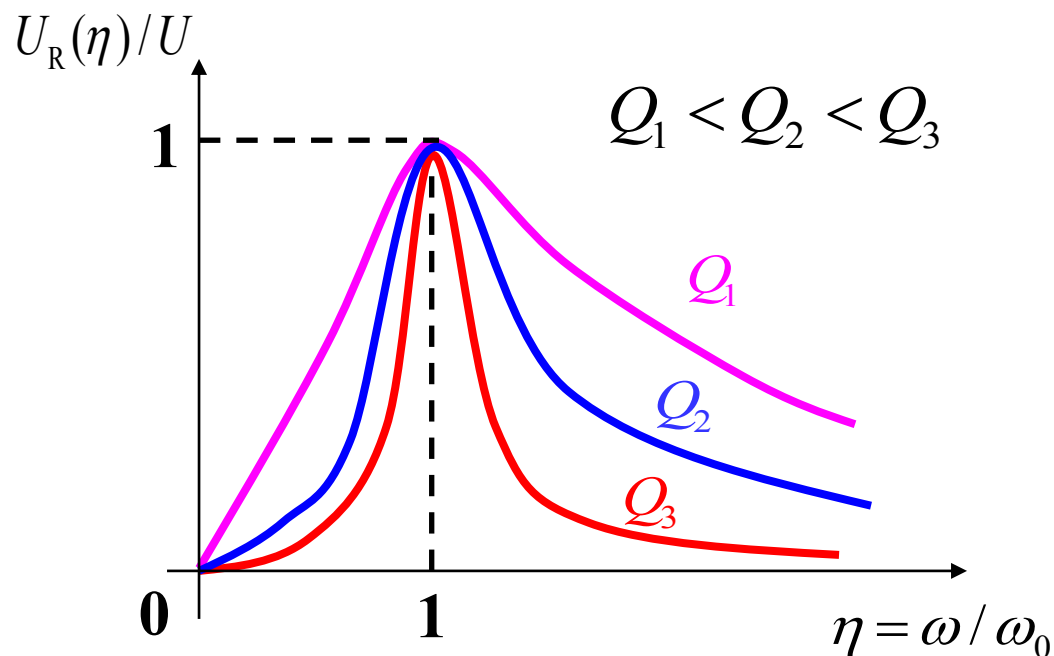
$$C = \frac{1}{(2\pi f_1)^2 L_2}$$

$$C = \frac{1}{(2\pi \times 820 \times 10^3)^2 \times 250 \times 10^{-6}} = 150\text{pF}$$

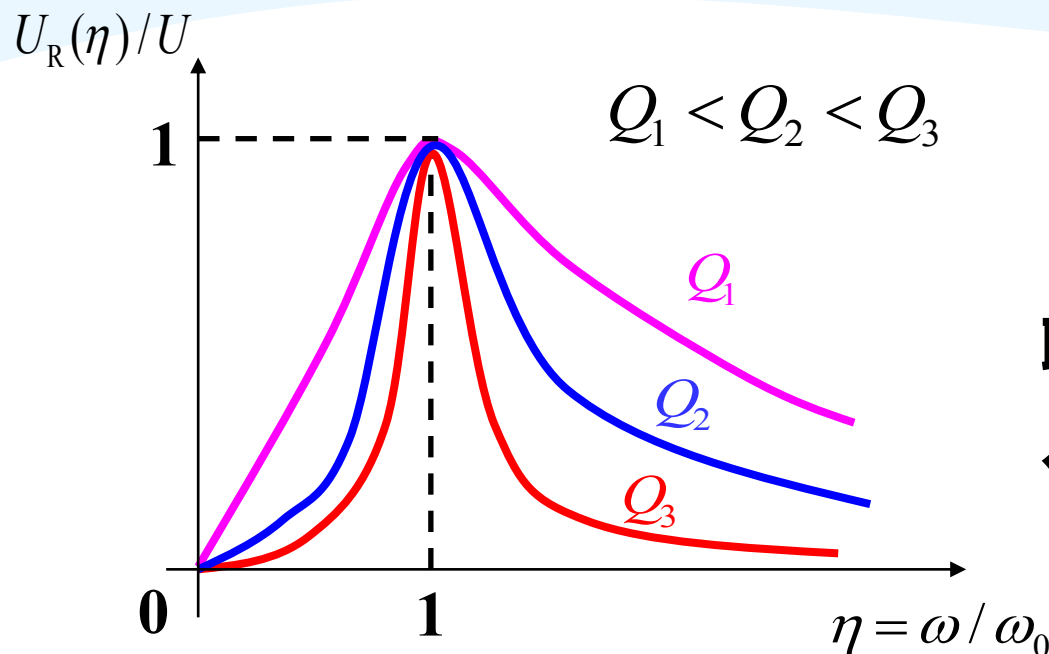
§ 11-3 *RLC*串联电路的频率响应

2. 电路的选择性

串联谐振电路对偏离谐振点的输出具有抑制能力，即只有在谐振点附近的频域内，才有较大的输出幅度，电路的这种性能称为**选择性**。



§ 11-3 *RLC*串联电路的频率响应



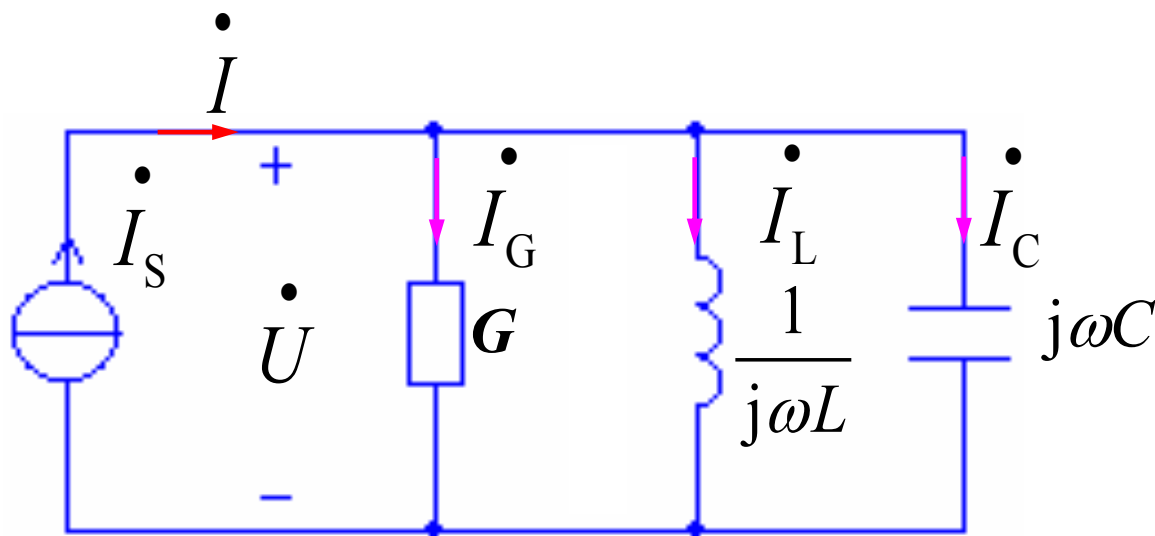
电路选择性的优劣
取决于对**非谐振频率**输入信号的**抑制能力**。

Q 值大，曲线在谐振点附近的形状尖锐，当输入频率稍微偏离谐振频率时，输出就会急剧下降，说明电路对非谐振频率的输入具有较强的抑制能力，**选择性能好**。

反之， **Q 值小**，在谐振频率附近曲线顶部形状平缓，**选择性能相对差些**。

§ 11-4 *RLC*并联谐振电路

1. 并联谐振的定义



如果端口上的**电压与电流同相**，则称电路发生了谐振。由于是在 GLC 并联电路中发生的，故称为并联谐振。

§ 11-4 *RLC*并联谐振电路

2. 并联谐振的条件

该电路的输入导纳 $Y(j\omega)$ 为： $Y(j\omega) = G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})$

并联谐振的条件为： $\text{Im}[Y(j\omega_0)] = 0$

因为 $Y(j\omega_0) = G + j(\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L})$,

因此可解得谐振时的角频率 ω_0 和频率 f_0 分别如下：

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

该频率称为电路的**固有**频率，是由电路的结构和参数决定的。

§ 11-4 *RLC*并联谐振电路

3. 并联谐振发生时电路的特点

(1) 谐振时输入导纳为最小值

$$Y(j\omega_0) = G + j(\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L}) = G$$

或者说输入阻抗最大, $Z(j\omega_0) = \frac{1}{G} = R$ 。

(2) 谐振时端电压、电导电流将达到最大, 即

$$U(\omega_0) = I_S |Z(j\omega_0)| = I_S R$$

$$I_G = U(\omega_0) \cdot G = I_S R \cdot G = I_S$$



§ 11-4 *RLC*并联谐振电路

(3) 谐振时有 $\dot{I}_L + \dot{I}_C = 0$ (所以并联谐振又称为**电流谐振**) ,

但
$$\dot{I}_L(\omega_0) = -j \frac{1}{\omega_0 L} \dot{U} = -j \frac{1}{\omega_0 L G} \dot{I}_S = -j Q \dot{I}_S \neq 0$$

$$\dot{I}_C(\omega_0) = j \omega_0 C \dot{U} = j \frac{\omega_0 C}{G} \dot{I}_S = j Q \dot{I}_S \neq 0$$

上式中, Q 称为并联谐振电路的品质因数。

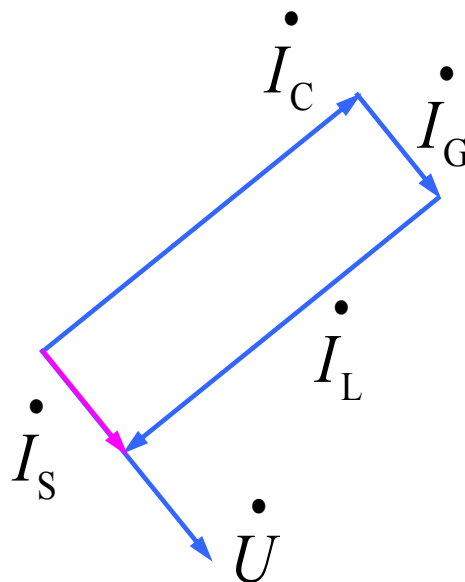
$$Q = \frac{I_L(\omega_0)}{I_S} = \frac{I_C(\omega_0)}{I_S} = \frac{1}{\omega_0 L G} = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{G} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

如果 $Q > 1$, 则 $I_L = I_C > I_S$; 当 $Q \gg 1$, $I_L = I_C \gg I_S$,

即在电感和电容中会出现**过电流**现象。

§ 11-4 *RLC* 并联谐振电路

(8) 并联谐振时电路的相量图

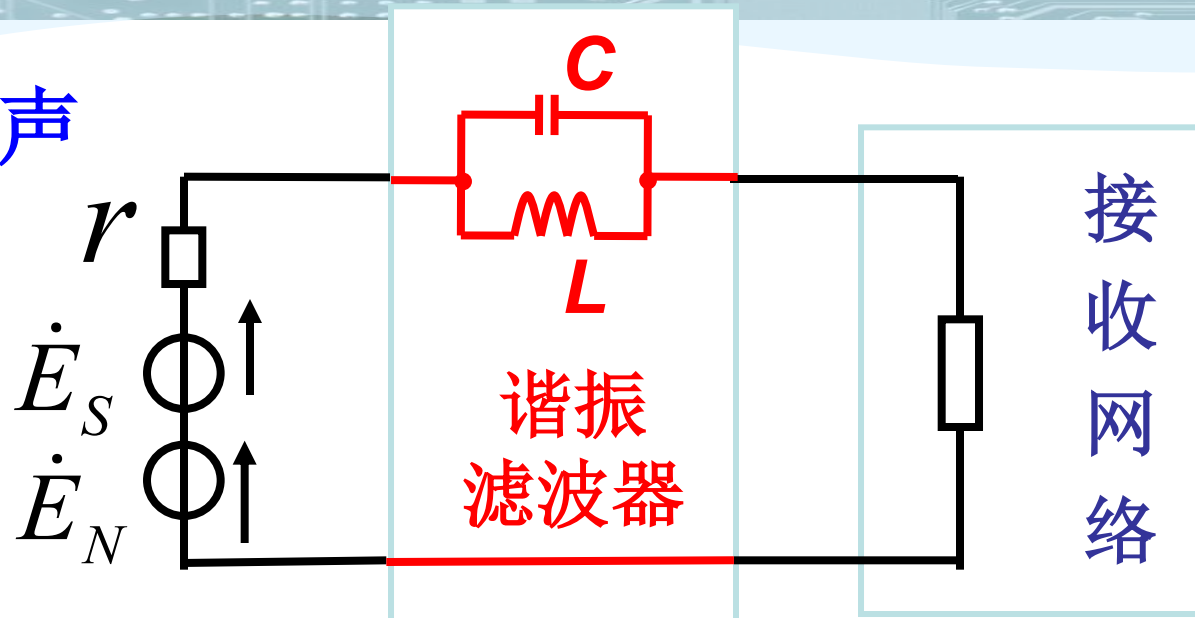


(9) 电导 G 的大小虽然不影响并联谐振电路的固有频率，
但有控制和调节谐振时各元件电流和电压幅度的作用。

谐振滤波器

利用谐振进行选频、滤波。

消除噪声



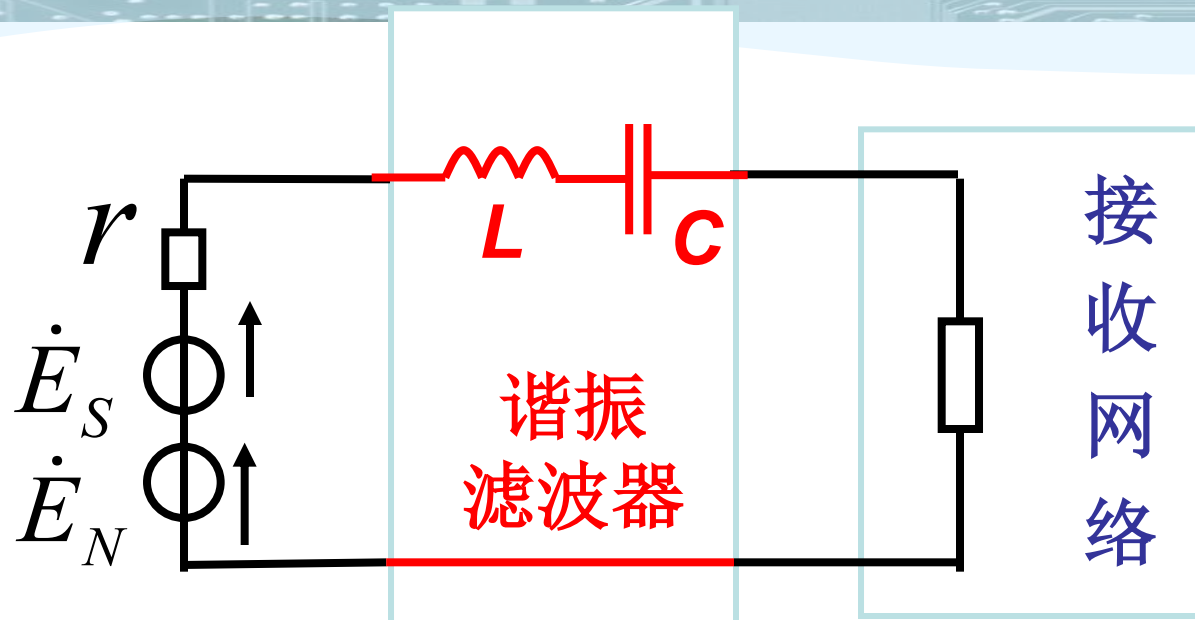
已知:

$$\begin{cases} \dot{E}_S(\omega_s) \text{ --- 信号源} \\ \dot{E}_N(\omega_N) \text{ --- 噪声源} \end{cases}$$

令滤波器工作在噪声频率下，即可消除噪声。

$$f_0 = f_N = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

提取信号



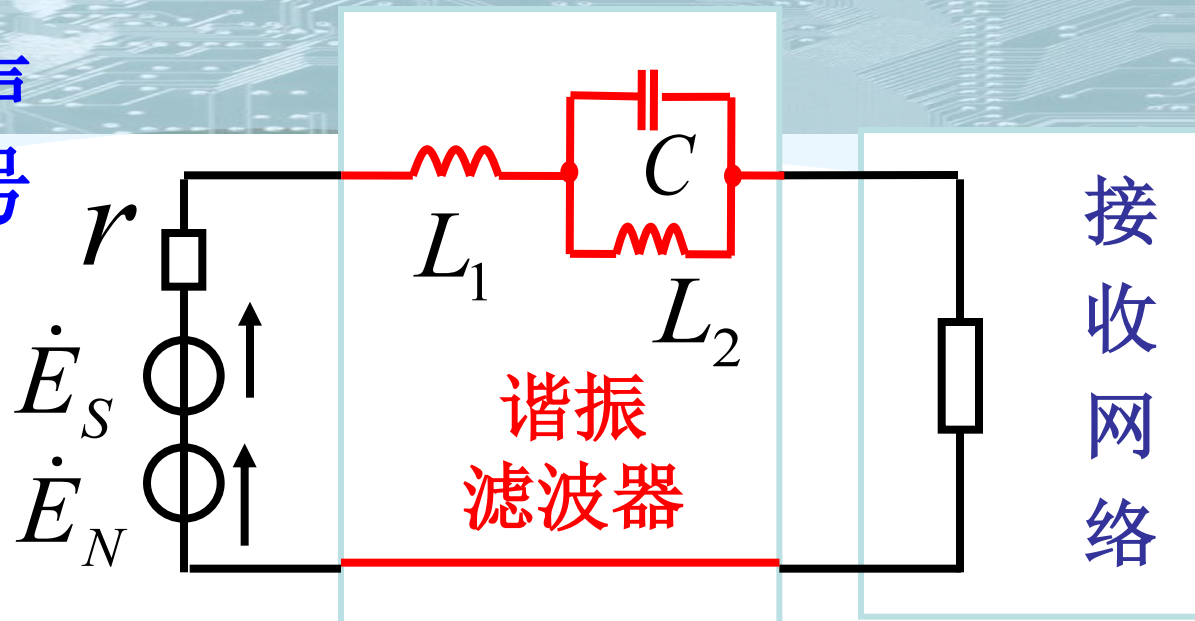
已知:

$\begin{cases} \dot{E}_S(\omega_s) \text{---信号源} \\ \dot{E}_N(\omega_N) \text{---噪声源} \end{cases}$

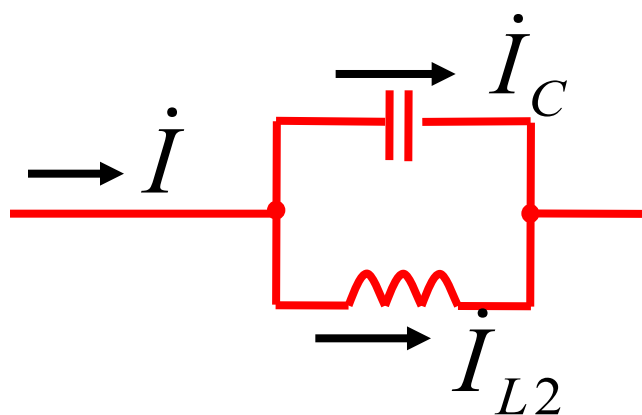
令滤波器工作在 f_s 频率下，
信号即可顺利地到达接收网络。

$$f_0 = f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

消除噪声
提取信号



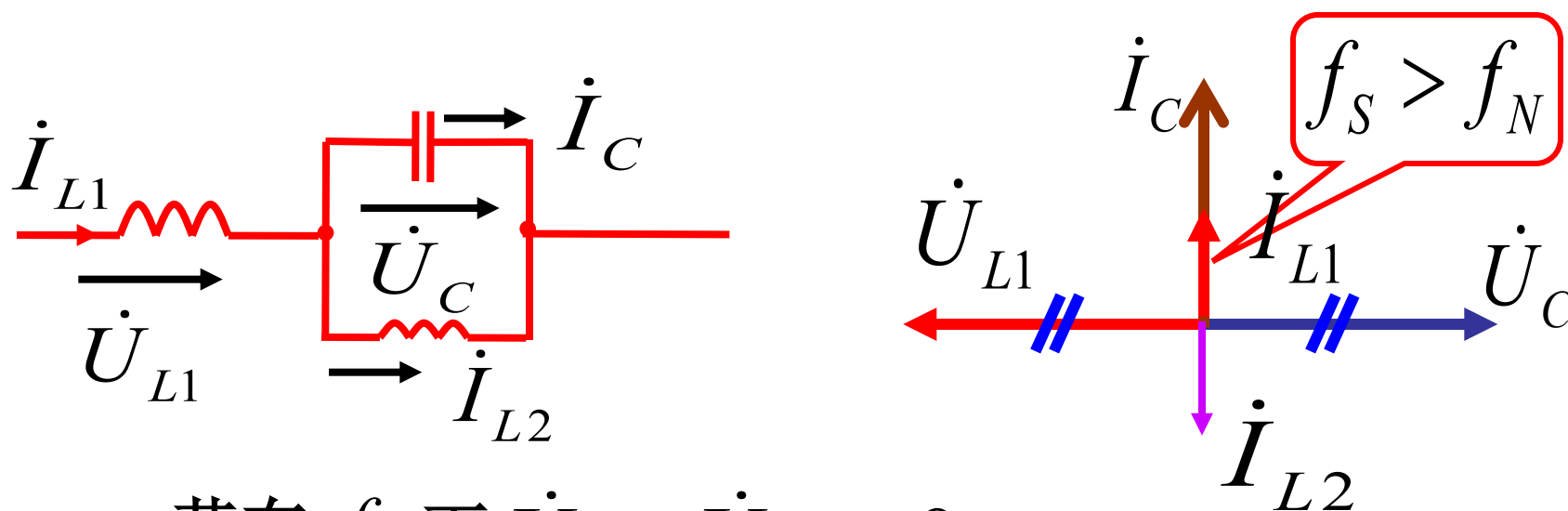
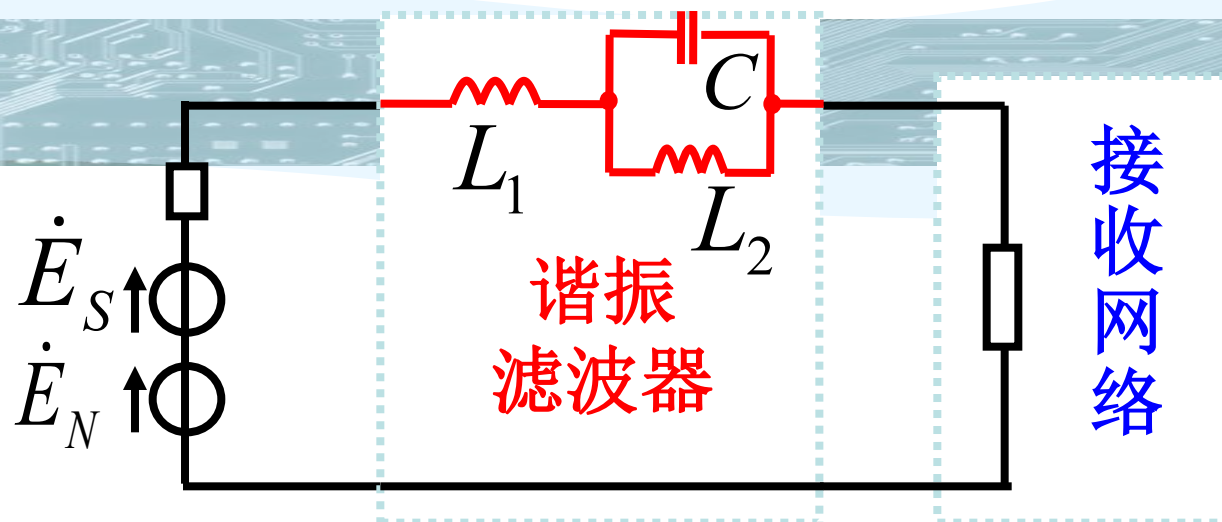
分析（一）：抑制噪声



$$\text{令: } f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2 C}} = f_N$$

\dot{E}_N 信号被滤掉了

分析（二）： 提取信号



若在 f_S 下 $\dot{U}_C + \dot{U}_{L1} = 0$
则信号全部降落在接收网络上。

本章重点内容小结

1. 频率特性的定义
2. 网络函数的定义和分类
3. 幅频特性和相频特性的定性画法
4. *RLC*串联电路谐振的定义和特点
5. *RLC*并联电路谐振的定义和特点



本章作业

11-6谐振频率

11-7 串联谐振

11-9 串联谐振 Q 值，不用求通带宽

