1.4 命题公式间的关系

公式间两类重要的关系：逻辑等价和逻辑蕴涵。

1.4.1 命题公式间的逻辑等价

- **定义1.12** 设A, B是两个命题公式，若对出现在A与B中的所有命题变元的任一组赋值，公式A和B的真值都相同，则称公式A与B是**逻辑等价或称逻辑相等**，记作A□B.
- **逻辑等价也称为等价的、逻辑等值的、等值的**。
- A, B构成的等价式A□B为重言式。
- 在此要注意**区别“□”与“□”**：
  - 首先，“□”是一种逻辑联结词，是一种逻辑运算，A□B的结果仍是一个命题公式。
  - 而逻辑等价“□”则是描述了两个公式A与B之间的一种逻辑关系，A□B表示“命题公式A与命题公式B是逻辑等价的”，A□B的结果不是命题公式。

1.4.1 命题公式间的逻辑等价

- 为了判断两个公式是否是逻辑等价，一般可以通过将两个公式的真值表列出，判断两个真值表是否相同来判定。

例1.29 试判断$(P\wedge Q)\vee(P\wedge \neg Q)$与P是否是逻辑等价的。

解：这两个公式的真值表如表所示。

P Q	$(P\wedge Q)\vee(P\wedge \neg Q)$	P
0 0	0	0
0 1	0	0
1 0	1	1
1 1	1	1

1.4.1 命题公式间的逻辑等价

- 最基本、最重要的逻辑等价公式：
  - 1）双重否定律

    $A \Leftrightarrow \neg\neg A$
  - 2）幂等律

    $A \Leftrightarrow A \vee A$

    $A \Leftrightarrow A \wedge A$
  - 3）交换律

    $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

    $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
  - 4）结合律

    $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

    $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

1.4.1 命题公式间的逻辑等价

- 5）分配律

  $A\vee(B\wedge C) \Leftrightarrow (A\vee B)\wedge(A\vee C)$ （∨对∧的分配律）

  $A\wedge(B\vee C) \Leftrightarrow (A\wedge B)\vee(A\wedge C)$ （∧对∨的分配律）

- 6）德摩根律

  $\neg(A\vee B) \Leftrightarrow \neg A\wedge \neg B$

  $\neg(A\wedge B) \Leftrightarrow \neg A\vee \neg B$

- 7）吸收律

  $A\vee(A\wedge B) \Leftrightarrow A$

  $A\wedge(A\vee B) \Leftrightarrow A$

- 8）零律

  $A\vee 1 \Leftrightarrow 1$

  $A\wedge 0 \Leftrightarrow 0$

1.4.1 命题公式间的逻辑等价

- 9）同一律

  A ∧ 1□A

  A ∨ 0□A

- 10）排中律

  A∨ ¬A□1

- 11）矛盾律

  A ∧ ¬A□0

- 12）蕴涵律

  A→B□ ¬A∨B

- 13）等价律

  A□B□ (A→B)∧(B→A)

1.4.1 命题公式间的逻辑等价

- 14）假言易位律

  $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$

- 15）等价否定律

  $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$

- 16）归谬律

  $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

- 由于A,B,C可以代表任意的公式，因而称这样的逻辑等价式为命题定律，每个命题定律都给出了无穷多个同类型的具体的逻辑等价式。
- 如：在蕴涵律中，取A=P，B=Q时，得逻辑等价式$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$；当取A=P∨R，B=P∧Q时，得逻辑等价式$(P \vee R) \rightarrow (P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg (P \vee R) \vee (P \wedge Q)$；这些具体的逻辑等价式都被称为原来命题定律的代入实例。

1.4.2 等价置换

- 定义1.13 如果X是命题公式A的连续的一部分，且X本身也是一个命题公式，则称X为公式A的子公式。

例1.30 公式$(\neg B \wedge C)$是公式$(\neg A \wedge (\neg B \wedge C)) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge C)$的子公式，

但$\vee (B \wedge C)$却不是公式$(\neg A \wedge (\neg B \wedge C)) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge C)$的子公式，

因为$\vee (B \wedge C)$虽是公式$(\neg A \wedge (\neg B \wedge C)) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge C)$中连续的一部分，但它自身不是公式。

1.4.2 等价置换

- 定理1.1（置换规则） 设X是公式A的子公式且X □ Y，若B是在A中一处或多处出现的X代以Y所得的公式，则A □ B。

证：欲证A □ B只需证A □B是重言式即可。

对于包含在A和B中的一切命题变元的任意一个赋值，A与B的差别仅在于X出现的某些地方替换成了Y，由于X □ Y，那么对任意赋值X与Y的真值都相同，故A与B的取值也相同，从而A □B的真值为1。又由于赋值的任意性，故A □ B恒取值为1。即A □B是重言式，所以A □ B。

证毕。

- 满足定理1.1条件的置换称为等价置换（或等价代换）。

1.4.2 等价置换

- 利用已知的最基本逻辑等价式和等价置换不仅可以证明一些较为复杂的命题公式间的逻辑等价、判断公式的类型，并且进行一些实际问题的分析，此类方法称为逻辑等价演算或等值演算的方法。
- 1）利用逻辑等价演算的方法，验证公式间的逻辑等价

例1.31 证明$(P\rightarrow Q)\rightarrow R \Leftrightarrow (P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)$

证：（从左边开始）

$(P\rightarrow Q)\rightarrow R$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\rightarrow R$　　(蕴涵律)

$\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)\vee R$　　(蕴涵律)

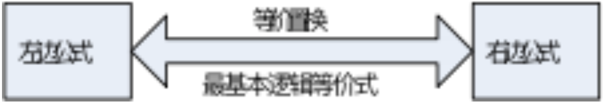
$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee R$　　(德摩根律)

$\Leftrightarrow(P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)$　　(分配律)

证毕。

1.4.2 等价置换

- 说明：由于公式之间的逻辑等价具有自反性、对称性和传递性，所以上述演算中得到的5个公式彼此之间都是逻辑等价的。
- 注记：利用逻辑等价演算验证两公式间是逻辑等价的思维形式注记图



例1.32 证明$(P\vee Q)\rightarrow R \Leftrightarrow (P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)$

证：（从右边开始）

$(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)$ (蕴涵律)

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge \neg Q)\vee R$ (分配律)

$\Leftrightarrow \neg(P\vee Q)\vee R$ (德摩根律)

$\Leftrightarrow (P\vee Q)\rightarrow R$ (蕴涵律)

证毕。

1.4.2 等价置换

- 2）判断公式类型

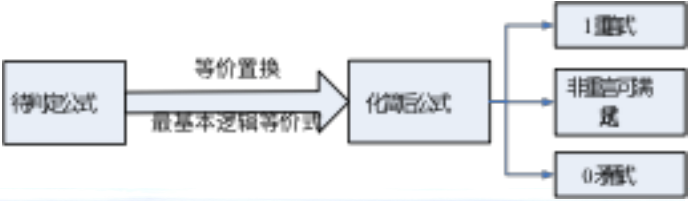
例1.33 利用逻辑等价演算，判断下列公式的类型

（1）$(P\rightarrow Q)\wedge P\rightarrow Q$

（2）$\neg(P\rightarrow(P\vee Q))\wedge R$

（3）$P\wedge(((P\vee Q)\wedge \neg P)\rightarrow Q)$

注记：利用逻辑等价演算，进行公式类型判断的基本思路是：通过等价置换将原公式化简到较简单的形式，如果和1逻辑等价，则原公式为重言式；如果和0逻辑等价，则原公式为矛盾式；如果不是以上两种形式，也可以较方便地判断公式的类型。思维形式注记图如图所示：



1.4.2 等价置换

解： （1）$(P\rightarrow Q)\wedge P\rightarrow Q$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\wedge P\rightarrow Q$　　(蕴涵律)

$\Leftrightarrow\neg((\neg P\vee Q)\wedge P)\vee Q$　　(蕴涵律)

$\Leftrightarrow(\neg(\neg P\vee Q)\vee\neg P)\vee Q$　　(德摩根律)

$\Leftrightarrow((P\wedge\neg Q)\vee\neg P)\vee Q$　　(德摩根律)

$\Leftrightarrow((P\vee\neg P)\wedge(\neg Q\vee\neg P))\vee Q$　　(分配律)

$\Leftrightarrow(1\wedge(\neg Q\vee\neg P))\vee Q$　　(排中律)

$\Leftrightarrow(\neg Q\vee\neg P)\vee Q$　　(同一律)

$\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)\vee Q$　　(交换律)

$\Leftrightarrow\neg P\vee(\neg Q\vee Q)$　　(结合律)

$\Leftrightarrow\neg P\vee 1$　　(排中律)

$\Leftrightarrow 1$　　(零律)

该公式为重言式。

1.4.2 等价置换

（2） $\neg(P\rightarrow(P\vee Q))\wedge R$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P\vee(P\vee Q))\wedge R$　　(蕴涵律)

$\Leftrightarrow (P\wedge \neg(P\vee Q))\wedge R$　　(德摩根律)

$\Leftrightarrow (P\wedge \neg P\wedge \neg Q)\wedge R$　　(德摩根律)

$\Leftrightarrow (0\wedge \neg Q)\wedge R$　　(矛盾律)

$\Leftrightarrow 0\wedge R$　　(零律)

$\Leftrightarrow 0$　　(零律)

该公式为矛盾式。

1.4.2 等价置换

（3） $P\wedge(((P\vee Q)\wedge \neg P)\rightarrow Q)$

$\Leftrightarrow P\wedge(\neg((P\vee Q)\wedge \neg P)\vee Q)$ (蕴涵律)

$\Leftrightarrow P\wedge((\neg(P\vee Q)\vee P)\vee Q)$ (德摩根律)

$\Leftrightarrow P\wedge((\neg P\wedge \neg Q)\vee P)\vee Q)$ (德摩根律)

$\Leftrightarrow (P\wedge((\neg P\wedge \neg Q)\vee P))\vee(P\wedge Q)$ (分配律)

$\Leftrightarrow P\vee(P\wedge Q)$ (吸收律)

$\Leftrightarrow P$ (吸收律)

- 因为有成真赋值和成假赋值，所以该公式为可满足式。
- 由上例可以看出，由于逻辑等价演算的目标不很明确，所以利用逻辑等价关系判断公式类型不是很方便，特别是判断非重言式的可满足式就更不方便了。

1.4.2 等价置换

- 3）实际问题分析

例1.34 在某次研讨会的中间休息时间，3名与会者根据王教授的口音对他是哪个省市的人进行了判断：

甲说王教授不是苏州人，是上海人。

乙说王教授不是上海人，是苏州人。

丙说王教授既不是上海人，也不是杭州人。

听完以上3人的判断后，王教授笑着说，他们3人中有一人说的全对，有一人说对了一半，另一人说的全不对。试用逻辑等价演算法分析王教授到底是哪里人?

- 注记：此类自然语言描述的问题要通过逻辑等价演算法分析，首先要对问题描述进行命题的符号化得到该问题对应的命题公式，然后，利用逻辑等价演算的方法对公式进行化简，最后得到结论。思维形式注记图所示：

1.4.2 等价置换

解：设 P：王教授是苏州人。Q：王教授是上海人 。R：王教授是杭州人。

P,Q,R中必有一个真命题，两个假命题，要通过逻辑演算将真命题找出来。

设甲的判断为$A1=\neg P\wedge Q$　乙的判断为$A2=P\wedge\neg Q$　丙的判断为$A3=\neg Q\wedge\neg R$

则 甲的判断全对 $B1=A1=\neg P\wedge Q$；甲的判断对一半 $B2=((\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q))$；甲的判断全错 $B3=P\wedge\neg Q$

乙的判断全对 $C1=A2=P\wedge\neg Q$；乙的判断对一半 $C2=((P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q))$；乙的判断全错 $C3=\neg P\wedge Q$

丙的判断全对 $D1=A3=\neg Q\wedge\neg R$；丙的判断对一半 $D2=(Q\wedge\neg R)\vee(\neg Q\wedge R))$；丙的判断全错 $D3=Q\wedge R$

由王教授所说

$E=(B1\wedge C2\wedge D3)\vee(B1\wedge C3\wedge D2)\vee(B2\wedge C1\wedge D3)\vee(B2\wedge C3\wedge D1)\vee(B3\vee C1\wedge D2)\vee(B3\wedge C2\wedge D1)$ 为真命题。

1.4.2 等价置换

而 $B1 \wedge C2 \wedge D3 = (\neg P \wedge Q) \wedge ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)) \wedge (Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow (((\neg P \wedge Q) \wedge (\neg P \wedge \neg Q)) \vee ((\neg P \wedge Q) \wedge (P \wedge Q))) \wedge (Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow ((\neg P \wedge Q) \wedge (P \wedge Q)) \wedge (Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow 0$

$B1 \wedge C3 \wedge D2 = (\neg P \wedge Q) \wedge (\neg P \wedge Q) \wedge ((Q \wedge \neg R) \vee (\neg Q \wedge R))$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow \neg P \wedge Q \wedge \neg R$

$B2 \wedge C1 \wedge D3 = ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)) \wedge (P \wedge \neg Q) \wedge (Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)) \wedge 0$

$\Leftrightarrow 0$

1.4.2 等价置换

类似可得 $B2 \wedge C3 \wedge D1$ □ 0

$B3 \wedge C1 \wedge D2$ □ $P \wedge \neg Q \wedge R$

$B3 \wedge C2 \wedge D1$ □ 0

于是，由同一律可知

E □ $(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$

但因为王教授不能既是上海人，又是杭州人，因而P,R必有一个假命题

即$P \wedge \neg Q \wedge R$ □ 0，于是

E □ $\neg P \wedge Q \wedge \neg R$

为真命题。

因而必有P,R为假命题，Q为真命题，即王教授是上海人。甲说的全对，丙说对了一半，而乙全说错了。

1.4.3 命题公式间的逻辑蕴涵

- 定义1.14 设A、B是任意公式，若A□B是重言式，则称A逻辑蕴涵B，记为A □ B。
- 在此要注意区别“□”与“□”：首先，“□”是一种逻辑联结词， A□B是命题公式，其中“□”是一种逻辑运算，A□B的结果仍是一个命题公式。而“□”则是描述了两个公式A与B之间的一种关系，“A □ B”仅仅表示公式间的一种关系，它不是公式，而“□”也不是联结词。
- 为了证明两个公式间具有逻辑蕴涵关系，即欲要证明A □ B，可以用列真值表的办法，证明A □B是重言式即可。

1.4.3 命题公式间的逻辑蕴涵

例1.35 试证P∧Q □ P。

证：列出如表所示的真值表。

P　Q	P∧Q	P∧Q □ P
0　0	0	1
0　1	0	1
1　0	0	1
1　1	1	1

公式P∧Q □P是重言式，根据定义1.14，故P∧Q □ P。

就像联结词□与□的关系一样，逻辑等价和逻辑蕴涵之间也有紧密地联系。

1.4.3 命题公式间的逻辑蕴涵

- 定理1.2 设A、B为任意两个命题公式，A □ B的充分必要条件是A □ B且B □ A。

证：先证必要性。

因为A □ B，则A □ B是重言式，又因为A □B □ (A□B)∧(B□A)，所以(A□B)和(B□A)均为重言式，因此A □ B且B □ A。

再证充分性。

因为A □ B且B □ A，故(A□B)和(B□A)均为重言式，从而(A□B) ∧(B□A)是重言式，又由于(A□B)∧(B□A) □ A □ B，故A □ B是重言式，因此A □ B。

证毕。

1.4.3 命题公式间的逻辑蕴涵

- 最基本、最重要的逻辑蕴涵公式（称为推理定律）

1）附加律

$A \Rightarrow (A \vee B)$

2）化简律

$(A \wedge B) \Rightarrow A$

3）假言推理

$(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$

4）拒取式

$(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$

5）析取三段论

$(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$

6）假言三段论

$(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$

1.4.3 命题公式间的逻辑蕴涵

7）等价三段论

$(A\square B)\wedge(B\square C)\ \square\ (A\square C)$

8）构造性二难

$(A\rightarrow B)\wedge(C\rightarrow D)\wedge(A\vee C)\ \square\ (B\vee D)$

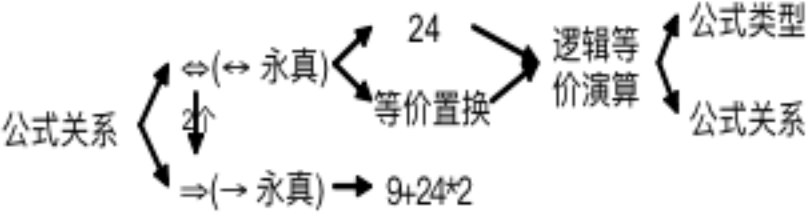
9）破坏性二难

$(A\rightarrow B)\wedge(C\rightarrow D)\wedge(\neg B\vee\neg D)\ \square\ (\neg A\vee\neg C)$

- 这9组逻辑蕴涵式（推理定律），它将成为命题逻辑推理理论中证明的根据。
- 在1.4.1中的24组逻辑等价式中的每一组都派生出两条推理定律。

小结

- 24组基本逻辑等价式，9组基本逻辑蕴涵式应熟记。
- 逻辑等价演算可以用于验证公式间的逻辑等价关系、判断公式类型等。
- 逻辑等价和逻辑蕴涵之间有紧密的联系。
- 本小节思维形式注记图：



作业

- 第4小节补充习题