22117228

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – SERIES Y ECUACIONES DIFERENCIALES

Lunes 9 de mayo de 2011 (mañana)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 10]*

(a) Halle los tres primeros términos de la serie de Maclaurin, para $\ln(1+\mathrm{e}^x)$. *[6 puntos]*

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, determine el valor de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln(1+\mathrm{e}^x)-x-\ln 4}{x^2}$. *[4 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 8]*

Considere la ecuación diferencial $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2$, sabiendo que para $x=0$, $y=1$.

(a) Utilice el método de Euler con un paso de 0,1 para hallar un valor aproximado de y para $x=0,4$. *[7 puntos]*

(b) Escriba si el valor aproximado de y que ha obtenido es mayor o menor que el valor real de y; justifique su respuesta. *[1 punto]*

3. *[Puntuación máxima: 11]*

Resuelva la ecuación diferencial

$$x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2+3xy+2x^2$$

sabiendo que para $x=1$, $y=-1$. Dé la respuesta de la forma $y=f(x)$.

4. *[Puntuación máxima: 15]*

La integral I_n se define de la siguiente forma: $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \mathrm{e}^{-x} \,|\operatorname{sen} x|\, \mathrm{d}x$, para $n \in \mathbb{N}$.

(a) Compruebe que $I_0 = \frac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{-\pi})$. *[6 puntos]*

(b) Compruebe que $I_n = \mathrm{e}^{-n\pi} I_0$, tomando para ello $y = x - n\pi$. *[4 puntos]*

(c) A partir de lo anterior, determine el valor exacto de $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x} \,|\operatorname{sen} x|\, \mathrm{d}x$. *[5 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 16]*

La serie exponencial viene dada por: $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

(a) Halle el conjunto de valores de x para los cuales la serie es convergente. *[4 puntos]*

(b) (i) Compruebe, mediante la comparación con una serie geométrica adecuada, que

$$\mathrm{e}^x - 1 < \frac{2x}{2-x}, \text{ para } 0 < x < 2.$$

(ii) A partir de lo anterior, compruebe que $\mathrm{e} < \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^n$, para $n \in \mathbb{Z}^+$. *[6 puntos]*

(c) (i) Escriba los tres primeros términos de la serie de Maclaurin para $1-\mathrm{e}^{-x}$, y explique por qué se puede establecer que:

$$1-\mathrm{e}^{-x} > x - \frac{x^2}{2}, \text{ para } 0 < x < 2.$$

(ii) Deduzca que $\mathrm{e} > \left(\frac{2n^2}{2n^2-2n+1}\right)^n$, para $n \in \mathbb{Z}^+$. *[4 puntos]*

(d) Tomando un valor de $n = 1000$, utilice los resultados de los apartados (b) y (c) para calcular el valor de e, con una aproximación de tantas cifras decimales como sea posible. *[2 puntos]*