22117226

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 2

Jueves 5 de mayo de 2011 (mañana)

2 horas

Número de convocatoria del alumno

0	0							

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste toda la sección A en los espacios provistos.
- Sección B: conteste toda la sección B en las hojas de respuestas provistas. Escriba su número de convocatoria en cada una de las hojas de respuestas, y adjúntelas a este cuestionario de examen y a su portada empleando los cordeles provistos.
- Cuando termine el examen, indique en la casilla correspondiente de la portada el número de hojas que ha utilizado.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

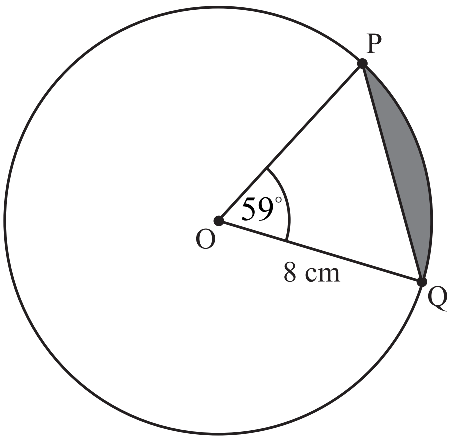
No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN A

*Conteste **todas** las preguntas en los espacios provistos. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.*

1. *[Puntuación máxima: 5]*

Los puntos P y Q se encuentran sobre una circunferencia de 8 cm de radio y centro O, de tal manera que $\text{P}\hat{\text{O}}\text{Q} = 59^\circ$.



el diagrama no está a escala

Halle el área del segmento circular sombreado, contenido entre el arco PQ y la cuerda [PQ].

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. *[Puntuación máxima: 5]*

En una serie aritmética cuyo enésimo término es u_n, se sabe que $u_4 = 7$ y $u_9 = 22$. Halle el valor mínimo de n para el cual $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n > 10\,000$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. *[Puntuación máxima: 6]*

Una paracaidista acrobática salta desde un globo aerostático estacionario, situado a una altura de 2000 m sobre el nivel del suelo. Su velocidad, $v\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, t segundos después de haber saltado, viene dada por $v = 50(1 - \mathrm{e}^{-0,2t})$.

(a) Halle su aceleración 10 segundos después de haber saltado. *[3 puntos]*

(b) ¿A qué distancia del suelo se encuentra 10 segundos después de haber saltado? *[3 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4. *[Puntuación máxima: 6]*

Considere la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen} 2\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, para $0 < \theta < 2\pi$.

(a) Compruebe que $\det \boldsymbol{A} = \cos\theta$. *[3 puntos]*

(b) Halle los valores de θ para los cuales $\det \boldsymbol{A}^2 = \operatorname{sen}\theta$. *[3 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. *[Puntuación máxima: 7]*

Dibuje aproximadamente la gráfica de $f(x) = x + \dfrac{8x}{x^2 - 9}$. Señale claramente las coordenadas de los dos máximos y de los dos mínimos. Señale claramente y dé las ecuaciones de las asíntotas verticales y de la asíntota oblicua.

6. *[Puntuación máxima: 6]*

Los pesos de los peces que hay en un lago siguen una distribución normal de media 1,3 kg y desviación típica igual a 0,2 kg.

(a) Determine la probabilidad de que un pez que acabamos de pescar en el lago pese menos de 1,4 kg. *[1 punto]*

(b) Juan pesca 6 peces. Calcule la probabilidad de que al menos 4 de estos peces pesen más de 1,4 kg. *[3 puntos]*

(c) Determine la probabilidad de que un pez que acabamos de pescar en el lago pese menos de 1 kg, sabiendo que pesa menos de 1,4 kg. *[2 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

7. *[Puntuación máxima: 5]*

Considere las funciones $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$. Las gráficas de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ se cortan en el punto $(0, 1)$ y en otro punto denominado P.

(a) Halle las coordenadas de P. *[1 punto]*

(b) Calcule el valor del ángulo agudo que forman las tangentes a las dos gráficas en el punto P. *[4 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

8. *[Puntuación máxima: 6]*

Sea un triángulo equilátero de perímetro P y área A, cuyos vértices se encuentran sobre una circunferencia de radio r. Halle una expresión para $\frac{P}{A}$, de la forma $\frac{k}{r}$, donde $k \in \mathbb{Z}^+$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

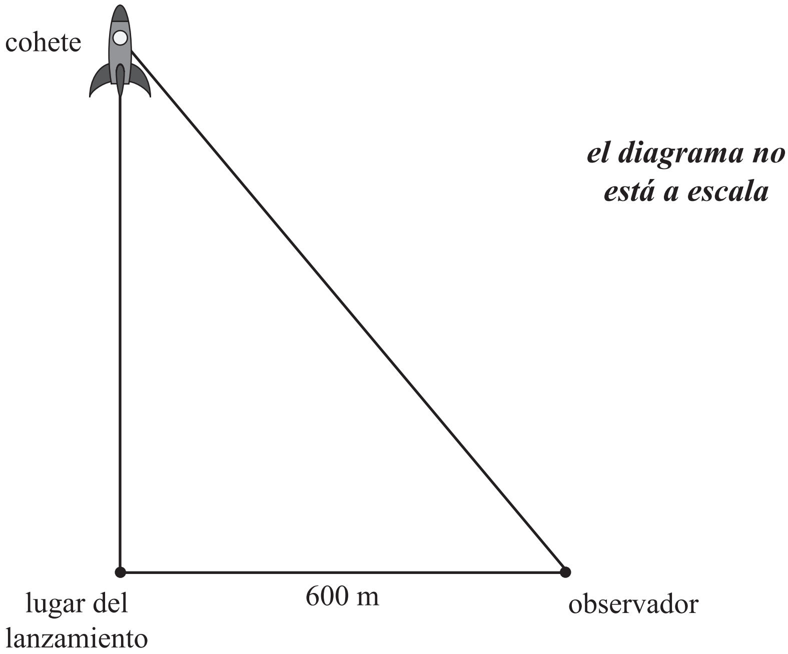
. . . .

. . . .

. . . .

9. *[Puntuación máxima: 6]*

Un cohete está ascendiendo en vertical a una velocidad de $300\ \text{m s}^{-1}$ cuando se encuentra a una altura de 800 m directamente encima del lugar del lanzamiento. Calcule la razón de cambio de la distancia que hay entre el cohete y un observador situado a 600 m del lugar del lanzamiento, y en el mismo nivel horizontal que el lugar del lanzamiento.



. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

10. *[Puntuación máxima: 8]*

El punto P, de coordenadas (p, q), pertenece a la gráfica de $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$, $a > 0$. La tangente a la curva en P corta a los ejes en $(0, m)$ y $(n, 0)$. Compruebe que $m + n = a$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

***NO** escriba soluciones en esta página. Cualquier trabajo escrito en esta página **NO** será corregido.*

SECCIÓN B

*Conteste **todas** las preguntas en las hojas de respuestas provistas. Empiece una página nueva para cada respuesta.*

11. *[Puntuación máxima: 17]*

Los puntos $P(-1, 2, -3)$, $Q(-2, 1, 0)$, $R(0, 5, 1)$ y S forman un paralelogramo, siendo S diagonalmente opuesto a Q.

(a) Halle las coordenadas de S. *[2 puntos]*

(b) El producto vectorial $\vec{PQ} \times \vec{PS} = \begin{pmatrix} -13 \\ 7 \\ m \end{pmatrix}$. Halle el valor de m. *[2 puntos]*

(c) A partir de lo anterior, calcule el área del paralelogramo PQRS. *[2 puntos]*

(d) Halle la ecuación cartesiana del plano Π_1, que contiene al paralelogramo PQRS. *[3 puntos]*

(e) Escriba la ecuación vectorial de la recta que pasa por el origen $(0, 0, 0)$ y que es perpendicular al plano Π_1. *[1 punto]*

(f) A partir de lo anterior, halle el punto del plano que está más cerca del origen. *[3 puntos]*

(g) Un segundo plano, Π_2, tiene por ecuación $x - 2y + z = 3$. Calcule el ángulo entre los dos planos. *[4 puntos]*

NO *escriba soluciones en esta página. Cualquier trabajo escrito en esta página* ***NO*** *será corregido.*

12. *[Puntuación máxima: 18]*

El número de accidentes que se producen en una fábrica dada sigue una distribución de Poisson, con una media igual a 0,5 accidentes al mes.

(a) Halle la probabilidad de que, en un mes dado, no se produzca ningún accidente. *[1 punto]*

(b) Halle la probabilidad de que no se produzca ningún accidente a lo largo de un periodo dado de 6 meses. *[2 puntos]*

(c) Halle la duración del periodo (en meses completos), para el cual la probabilidad de que ocurra al menos 1 accidente es mayor que 0,99. *[6 puntos]*

(d) Para fomentar la seguridad, la fábrica ingresa en un fondo para los trabajadores una prima de 1000$ si no se producen accidentes en un mes dado, una prima de 500$ si se producen 1 o 2 accidentes, y no ingresa ninguna prima si en el mes se producen más de 2 accidentes.

(i) Calcule la cantidad esperada que gastará la empresa cada mes en primas.

(ii) Halle la probabilidad de que, a lo largo de un periodo dado de 3 meses, la empresa gaste exactamente 2000$ en primas. *[9 puntos]*

***NO** escriba soluciones en esta página. Cualquier trabajo escrito en esta página **NO** será corregido.*

13. *[Puntuación total: 25]*

Parte A *[Puntuación máxima: 8]*

Demuestre utilizando la inducción matemática que, para $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}.$$

Parte B *[Puntuación máxima: 17]*

(a) Utilizando la integración por partes, compruebe que:

$$\int e^{2x}\operatorname{sen} x \, dx = \frac{1}{5}e^{2x}(2\operatorname{sen} x - \cos x) + C.$$ *[6 puntos]*

(b) Resuelva la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}\, e^{2x}\operatorname{sen} x$, sabiendo que para $x = 0$, $y = 0$. Escriba su respuesta de la forma $y = f(x)$. *[5 puntos]*

(c) (i) Dibuje aproximadamente la gráfica de la función $y = f(x)$ hallada en el apartado (b), para $0 \le x \le 1{,}5$. Determine las coordenadas del punto P, el primer punto de intersección con el semieje x positivo, y señale dicho punto en su dibujo.

(ii) La región delimitada por la gráfica de f y el eje x, entre el origen y P, se rota 360° alrededor del eje x, formándose así un sólido de revolución. Calcule el volumen de este sólido. *[6 puntos]*