22117224

MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 3 – STATISTIQUES ET PROBABILITÉS

Lundi 9 mai 2011 (matin)

1 heure

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. *[Note maximale : 11]*

On peut supposer que les poids des oranges produites dans une ferme sont normalement distribués avec une moyenne de 205 grammes et un écart-type de 10 grammes.

(a) Trouvez la probabilité qu'une orange choisie au hasard pèse plus de 200 grammes. *[2 points]*

(b) Cinq de ces oranges sont sélectionnées au hasard pour être placées dans un sac. Trouvez la probabilité que le poids combiné de ces cinq oranges soit inférieur à 1 kilogramme. *[4 points]*

(c) Cette ferme produit aussi des citrons dont les poids peuvent être supposés normalement distribués avec une moyenne de 75 grammes et un écart-type de 3 grammes. Trouvez la probabilité que le poids d'une orange choisie au hasard soit supérieur à trois fois le poids d'un citron choisi au hasard. *[5 points]*

2. *[Note maximale : 10]*

La distribution de la variable aléatoire discrète X est $\mathrm{Geo}(p)$. On suppose que la valeur de p est 0,3. De façon à tester cette supposition, on se procure un échantillon aléatoire de 100 valeurs de X et l'on obtient les résultats suivants.

Valeur de X	1	2	3	4	5	≥ 6
Effectifs	35	18	16	11	10	10

(a) Énoncez des hypothèses appropriées pour tester cette supposition. *[1 point]*

(b) Effectuez un test du χ^2 à un seuil de signification de 5 % et, en la justifiant, énoncez votre conclusion. *[9 points]*

3. *[Note maximale : 17]*

Dix amis essayent un régime qui prétend faire perdre du poids. Chacun a pris son poids avant de commencer le régime et après un mois de régime ; voici les résultats.

Ami	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**
Poids avant (kg)	68,4	70,9	74,7	65,4	59,4	69,0	73,9	62,6	68,3	58,2
Poids après (kg)	66,2	67,4	70,4	65,9	55,2	69,2	71,4	59,9	68,2	58,9

(a) Déterminez un estimateur sans biais de la moyenne et de la variance de la perte de poids obtenue sur un mois par les personnes suivant ce régime. *[5 points]*

(b) (i) Énoncez des hypothèses appropriées pour tester si ce régime entraîne ou n'entraîne pas une perte moyenne de poids.

(ii) Déterminez la valeur d'une statistique appropriée pour tester vos hypothèses.

(iii) Pour votre statistique, trouvez la valeur critique à 1 % et énoncez votre conclusion. *[6 points]*

(c) L'un des amis calcule un intervalle de confiance pour la perte moyenne de poids obtenue par les personnes suivant ce régime pendant un mois et il obtient $[0{,}26\ ;\ 3{,}36]$. Trouvez le niveau de confiance de cet intervalle. *[6 points]*

4. *[Note maximale : 10]*

La variable aléatoire X obéit à une distribution de Poisson de moyenne inconnue μ. On demande de tester les hypothèses

$$\mathrm{H}_0 : \mu = 3 \text{ contre } \mathrm{H}_1 : \mu \neq 3 .$$

Soit S la somme de 10 valeurs de X choisies au hasard. La région critique est définie par $(S \leq 22) \cup (S \geq 38)$.

(a) Calculez le seuil de signification de ce test. *[5 points]*

(b) Étant donné que la valeur de μ est en fait 2,5, déterminez la probabilité d'une erreur de type II. *[5 points]*

5. *[Note maximale : 12]*

(a) La variable aléatoire X obéit à la distribution binomiale négative $\mathrm{NB}(3,\ p)$. Soit $f(x)$ la probabilité que X prenne la valeur x.

(i) Donnez une expression de $f(x)$, et montrez que

$$\ln f(x) = 3\ln\left(\frac{p}{1-p}\right) + \ln(x-1) + \ln(x-2) + x\ln(1-p) - \ln 2 .$$

(ii) Énoncez le domaine de f.

(iii) Le domaine de f est étendu à $]2, \infty[$. Montrez que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \ln(1-p) .$$

[7 points]

(b) Jo a une pièce biaisée dont la probabilité de donner face lorsqu'elle est lancée est 0,35. Jo lance successivement cette pièce et la 3^{e} face apparaît au $Y^{\text{ième}}$ lancer. Utilisez le résultat de la partie (a)(iii) pour trouver la valeur la plus probable de Y. *[5 points]*