22117229

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – CONJUNTOS, RELACIONES Y GRUPOS

Lunes 9 de mayo de 2011 (mañana)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 18]*

La operación binario multiplicación módulo 14, representado por $*$, se define sobre el conjunto $S = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.

(a) Copie y complete la siguiente tabla de operaciones.

$*$	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**
2						
4	8	2	10	4	12	6
6						
8						
10	6	12	4	10	2	8
12						

[4 puntos]

(b) (i) Compruebe que $\{S, *\}$ es un grupo.

(ii) Halle el orden de cada uno de los elementos de $\{S, *\}$.

(iii) A partir de lo anterior, compruebe que $\{S, *\}$ es cíclico y halle todos los generadores. *[11 puntos]*

(c) El conjunto T se define de la siguiente forma: $\{x * x : x \in S\}$. Compruebe que $\{T, *\}$ es un subgrupo de $\{S, *\}$. *[3 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 7]*

El conjunto universal contiene todos los números enteros positivos menores que 30. El conjunto A contiene todos los números primos menores que 30 y el conjunto B contiene todos los números enteros positivos menores que 30 que son de la forma $3 + 5n$ $(n \in \mathbb{N})$. Determine los elementos de:

(a) $A \setminus B$; *[4 puntos]*

(b) $A \Delta B$. *[3 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 10]*

La relación R se define para $a, b \in \mathbb{Z}^+$, de tal forma que aRb si y solo si $a^2 - b^2$ es divisible por 5.

(a) Compruebe que R es una relación de equivalencia. *[6 puntos]*

(b) Identifique las tres clases de equivalencia. *[4 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 11]*

La función $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ se define de la siguiente forma: $f(x, y) = \left(xy^2, \frac{x}{y}\right)$.

Compruebe que f es una aplicación biyectiva.

5. *[Puntuación máxima: 14]*

(a) Sabiendo que p, q y r son elementos de un grupo, demuestre que se puede eliminar un elemento por la izquierda; es decir: $pq = pr \Rightarrow q = r$.

Es necesario que indique, en cada uno de los pasos de la demostración, cuál es el axioma de grupo que ha utilizado. *[4 puntos]*

(b) Considere el grupo G, de orden 4, compuesto por los elementos distintos a, b y c y el elemento neutro e.

(i) Explique por qué ab no puede ser igual ni a a ni a b; en cada caso, justifique su respuesta.

(ii) Sabiendo que c es igual a su simétrico, determine las dos posibles tablas de Cayley para G.

(iii) Determine cuál de los grupos definidos por las dos tablas de Cayley obtenidas es isomorfo al grupo definido por la multiplicación de números complejos sobre el conjunto $\{1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$. Su solución debería incluir una correspondencia entre a, b, c, e y $1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}$. *[10 puntos]*