22117220

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 2

Jeudi 5 mai 2011 (matin)

2 heures

Numéro de session du candidat

0	0							

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- Écrivez votre numéro de session dans la case ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toute la section A dans les espaces prévus à cet effet.
- Section B : répondez à toute la section B sur les feuilles de réponses prévues à cet effet. Inscrivez votre numéro de session sur chaque livret de réponse que vous avez utilisé et joignez-les à cette épreuve écrite et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- À la fin de l'examen, indiquez le nombre de feuilles de réponse utilisées dans la case prévue à cet effet sur la couverture du livret.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.

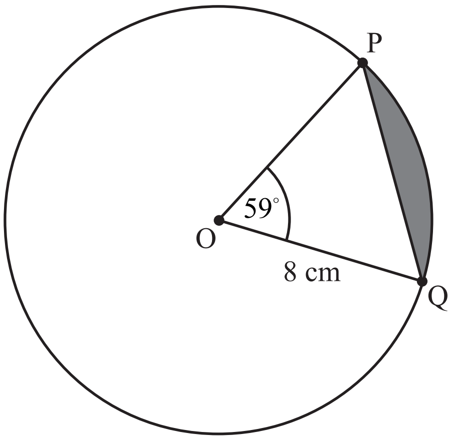
Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

SECTION A

*Répondez à **toutes** les questions dans les espaces prévus à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.*

1. *[Note maximale : 5]*

Les points P et Q sont sur un cercle de centre O et de rayon 8 cm tels que $\hat{POQ} = 59^\circ$.



la figure n'est pas à l'échelle

Trouvez l'aire du segment grisé du cercle compris entre l'arc PQ et la corde [PQ].

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. *[Note maximale : 5]*

Dans la série arithmétique de $n^{\text{ième}}$ terme u_n, il est donné que $u_4 = 7$ et $u_9 = 22$. Trouvez la valeur minimale de n telle que $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n > 10\,000$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. *[Note maximale : 6]*

Une parachutiste saute d'un ballon stationnaire d'une hauteur de 2000 m au-dessus du sol. Sa vitesse $(v\ \mathrm{m\,s^{-1}})$, t secondes après le début du saut, est donnée par $v = 50(1 - \mathrm{e}^{-0,2t})$.

(a) Trouvez son accélération 10 secondes après le début du saut. *[3 points]*

(b) À quelle hauteur au-dessus du sol est-elle 10 secondes après le début du saut ? *[3 points]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4. *[Note maximale : 6]*

Considérez la matrice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin\theta \\ -\sin 2\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, avec $0 < \theta < 2\pi$.

(a) Montrez que $\det \boldsymbol{A} = \cos\theta$. *[3 points]*

(b) Trouvez les valeurs de θ pour les quelles $\det \boldsymbol{A}^2 = \sin\theta$. *[3 points]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. *[Note maximale : 7]*

Esquissez la représentation graphique de $f(x) = x + \frac{8x}{x^2 - 9}$. Marquez clairement les coordonnées des deux points maximums et des deux points minimums. Marquez clairement les asymptotes verticales et l'asymptote oblique et énoncez leurs équations.

6. *[Note maximale : 6]*

Les poissons d'un lac ont des poids normalement distribués avec une moyenne de 1,3 kg et un écart type de 0,2 kg.

(a) Déterminez la probabilité qu'un poisson attrapé pèse moins de 1,4 kg. *[1 point]*

(b) John attrape 6 poissons. Calculez la probabilité qu'au moins 4 de ces poissons pèsent plus de 1,4 kg. *[3 points]*

(c) Déterminez la probabilité qu'un poisson attrapé pèse moins de 1 kg, étant donné qu'il pèse moins de 1,4 kg. *[2 points]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

7. *[Note maximale : 5]*

Considérez les fonctions $f(x) = x^3 + 1$ et $g(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$. Les représentations graphiques de $y = f(x)$ et $y = g(x)$ se coupent au point $(0\,;\,1)$ et en un autre point, P.

(a) Trouvez les coordonnées de P. *[1 point]*

(b) Calculez la mesure de l'angle aigu entre les tangentes aux deux représentations graphiques au point P. *[4 points]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

8. *[Note maximale : 6]*

Les sommets d'un triangle équilatéral de périmètre P et d'aire A sont sur un cercle de rayon r. Trouvez une expression de $\frac{P}{A}$ sous la forme $\frac{k}{r}$, où $k \in \mathbb{Z}^+$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

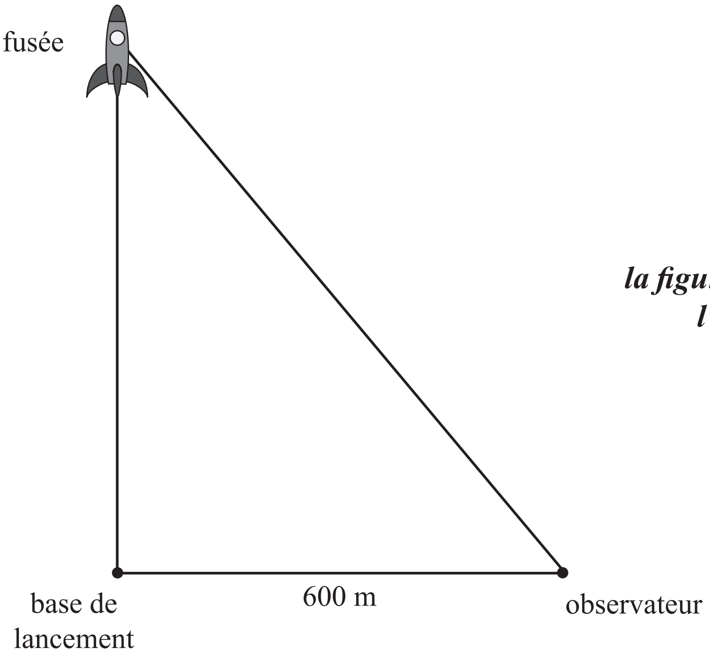
. . . .

. . . .

. . . .

9. *[Note maximale : 6]*

Une fusée s'élève verticalement à une vitesse de $300\ \text{m s}^{-1}$ quand elle se trouve 800 m directement au-dessus de la base de lancement. Calculez le taux de variation instantané de la distance entre la fusée et un observateur, qui est à 600 m de la base de lancement et à la même altitude que la base de lancement.



la figure n'est pas à l'échelle

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

10. *[Note maximale : 8]*

Le point P de coordonnées $(p\,,\,q)$, est sur la représentation graphique de $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$, $a > 0$. La tangente à la courbe en P coupe les axes en $(0\,;\,m)$ et $(n\,;\,0)$. Montrez que $m + n = a$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

*N'écrivez **PAS** vos solutions sur cette page. Ce qui est écrit sur cette page ne sera **PAS** pris en compte pour la notation.*

SECTION B

*Répondez à **toutes** les questions sur les feuilles de réponses fournies. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.*

11. *[Note maximale : 17]*

Les points $\mathrm{P}(-1\,;\,2\,;\,-3)$, $\mathrm{Q}(-2\,;\,1\,;\,0)$, $\mathrm{R}(0\,;\,5\,;\,1)$ et S forment un parallélogramme, où S est diagonalement opposé à Q.

(a) Trouvez les coordonnées de S. *[2 points]*

(b) Soit le produit vectoriel $\vec{\mathrm{PQ}} \times \vec{\mathrm{PS}} = \begin{pmatrix} -13 \\ 7 \\ m \end{pmatrix}$. Trouvez la valeur de m. *[2 points]*

(c) À partir de là, calculez l'aire du parallélogramme PQRS. *[2 points]*

(d) Trouvez l'équation cartésienne du plan, Π_1, contenant le parallélogramme PQRS. *[3 points]*

(e) Donnez l'équation vectorielle de la droite passant par l'origine $(0\,;\,0\,;\,0)$ qui est perpendiculaire au plan Π_1. *[1 point]*

(f) À partir de là, trouvez le point du plan qui est le plus près de l'origine. *[3 points]*

(g) Un deuxième plan, Π_2, a comme équation $x - 2y + z = 3$. Calculez l'angle entre les deux plans. *[4 points]*

*N’écrivez **PAS** vos solutions sur cette page. Ce qui est écrit sur cette page ne sera **PAS** pris en compte pour la notation.*

12. *[Note maximale : 18]*

Le nombre d’accidents qui se produisent dans une grande usine peut être modélisé avec une distribution de Poisson avec une moyenne de 0,5 accident par mois.

(a) Trouvez la probabilité qu’aucun accident ne se produise pendant un mois donné. *[1 point]*

(b) Trouvez la probabilité qu’aucun accident ne se produise pendant une période de six mois donnée. *[2 points]*

(c) Trouvez, en mois entiers, la durée pour laquelle la probabilité qu’au moins un accident se produise est supérieure à 0,99. *[6 points]*

(d) Dans le but d’encourager la sécurité, l’usine verse une somme de 1000$ dans un fond de solidarité ouvrière si aucun accident ne se produit pendant un mois donné, une somme de 500$ si un ou deux accidents se produisent et aucune somme si plus de deux accidents se produisent pendant le mois.

(i) Calculez la somme espérée que l’usine versera dans le fond chaque mois.

(ii) Trouvez la probabilité que dans une période de trois mois donnée l’usine verse exactement une somme de 2000$ dans le fond. *[9 points]*

*N'écrivez **PAS** vos solutions sur cette page. Ce qui est écrit sur cette page ne sera **PAS** pris en compte pour la notation.*

13. *[Note totale : 25]*

Partie A *[Note maximale : 8]*

Démontrez par récurrence que, pour $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}.$$

Partie B *[Note maximale : 17]*

(a) En utilisant une intégration par parties, montrez que

$$\int e^{2x}\sin x\,dx=\frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x-\cos x)+C.$$ *[6 points]*

(b) Résolvez l'équation différentielle $\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-y^2}\,e^{2x}\sin x$, étant donné que $y=0$ quand $x=0$, en écrivant votre réponse sous la forme $y=f(x)$. *[5 points]*

(c) (i) Esquissez, pour $0 \le x \le 1,5$, la représentation graphique de $y=f(x)$, trouvée dans la partie (b). Déterminez les coordonnées du point P, le premier point d'intersection avec l'axe des abscisses positives, et marquez-le sur votre esquisse.

(ii) La région limitée par la représentation graphique de $y=f(x)$ et l'axe des abscisses, entre l'origine et P, engendre un solide de révolution par une rotation de 360° autour de l'axe des abscisses. Calculez le volume de ce solide. *[6 points]*