22117223

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

**MATHÉMATIQUES**
**NIVEAU SUPÉRIEUR**
**ÉPREUVE 3 – ENSEMBLES, RELATIONS ET GROUPES**

Lundi 9 mai 2011 (matin)

1 heure

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.

*Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.*

**1.** *[Note maximale : 18]*

L'opération binaire multiplication modulo 14, notée $*$, est définie sur l'ensemble $S = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.

(a) Recopiez et complétez la table d'opération suivante.

| $*$ | **2** | **4** | **6** | **8** | **10** | **12** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **2** | | | | | | |
| **4** | 8 | 2 | 10 | 4 | 12 | 6 |
| **6** | | | | | | |
| **8** | | | | | | |
| **10** | 6 | 12 | 4 | 10 | 2 | 8 |
| **12** | | | | | | |

*[4 points]*

(b) (i) Montrez que $\{S, *\}$ est un groupe.

(ii) Trouvez l'ordre de chacun des éléments de $\{S, *\}$.

(iii) À partir de là, montrez que $\{S, *\}$ est cyclique et trouvez tous les générateurs. *[11 points]*

(c) L'ensemble $T$ est défini par $\{x * x : x \in S\}$. Montrez que $\{T, *\}$ est un sous-groupe de $\{S, *\}$. *[3 points]*

**2.** *[Note maximale : 7]*

L'ensemble universel contient tous les entiers positifs inférieurs à 30. L'ensemble $A$ contient tous les nombres premiers inférieurs à 30 et l'ensemble $B$ contient tous les entiers positifs de la forme $3 + 5n$ $(n \in \mathbb{N})$ qui sont inférieurs à 30. Déterminez les éléments de

(a) $A \setminus B$ ; *[4 points]*

(b) $A \Delta B$ . *[3 points]*

**3.** *[Note maximale : 10]*

Pour $a, b \in \mathbb{Z}^+$, la relation $R$ est définie par $aRb$ si et seulement si $a^2 - b^2$ est divisible par 5.

(a) Montrez que $R$ est une relation d'équivalence. *[6 points]*

(b) Identifiez les trois classes d'équivalence. *[4 points]*

**4.** *[Note maximale : 11]*

La fonction $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ est définie par $f(x, y) = \left(xy^2, \frac{x}{y}\right)$.

Montrez que $f$ est une bijection.

**5.** *[Note maximale : 14]*

(a) Étant donné que $p$, $q$ et $r$ sont des éléments d'un groupe, démontrez la règle de simplification à gauche, c'est-à-dire $pq = pr \Rightarrow q = r$.

Votre solution devra indiquer pour chaque étape de la démonstration quel est l'axiome du groupe utilisé. *[4 points]*

(b) Considérez le group $G$, d'ordre 4, qui possède les éléments distincts $a$, $b$ et $c$ et l'élément neutre $e$.

(i) En justifiant chaque cas, expliquez pourquoi $ab$ ne peut pas être égal à $a$ ou $b$.

(ii) Étant donné que $c$ est son propre symétrique, déterminez les deux tables de Cayley possibles pour $G$.

(iii) Déterminez lequel des groupes définis par vos deux tables de Cayley est isomorphe au groupe défini par l'ensemble $\{1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$ muni de la multiplication des nombres complexes. Votre solution devra indiquer une correspondance entre $a, b, c, e$ et $1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}$. *[10 points]*