22117222

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 3 – SÉRIES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Lundi 9 mai 2011 (matin)

1 heure

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.

© International Baccalaureate Organization 2011

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. *[Note maximale : 10]*

(a) Trouvez les trois premiers termes de la série de Maclaurin pour $\ln(1+e^x)$. *[6 points]*

(b) À partir de là ou par toute autre méthode, déterminez la valeur de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln(1+e^x)-x-\ln 4}{x^2}$. *[4 points]*

2. *[Note maximale : 8]*

Considérez l'équation différentielle $\dfrac{dy}{dx}=x^2+y^2$ où $y=1$ quand $x=0$.

(a) Utilisez la méthode d'Euler avec un pas de longueur 0,1 pour trouver une valeur approchée de y quand $x=0,4$. *[7 points]*

(b) Précisez, en justifiant votre réponse, si votre approximation de la valeur de y est supérieure ou inférieure à la valeur réelle de y. *[1 point]*

3. *[Note maximale : 11]*

Résolvez l'équation différentielle

$$x^2\frac{dy}{dx}=y^2+3xy+2x^2$$

étant donné que $y=-1$ quand $x=1$. Écrivez votre réponse sous la forme $y=f(x)$.

4. *[Note maximale : 15]*

L'intégrale I_n est définie par $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \mathrm{e}^{-x} |\sin x| \,\mathrm{d}x$, pour $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrez que $I_0 = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{e}^{-\pi})$. *[6 points]*

(b) En posant $y = x - n\pi$, montrez que $I_n = \mathrm{e}^{-n\pi} I_0$. *[4 points]*

(c) À partir de là, déterminez la valeur exacte de $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x} |\sin x| \,\mathrm{d}x$. *[5 points]*

5. *[Note maximale : 16]*

La série exponentielle est donnée par $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

(a) Trouvez l'ensemble des valeurs de x pour les quelles la série converge. *[4 points]*

(b) (i) Montrez, à l'aide d'une comparaison avec une série géométrique appropriée, que

$$\mathrm{e}^x - 1 < \frac{2x}{2-x}, \text{ pour } 0 < x < 2.$$

(ii) À partir de là, montrez que $\mathrm{e} < \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^n$, pour $n \in \mathbb{Z}^+$. *[6 points]*

(c) (i) Donnez les trois premiers termes de la série de Maclaurin pour $1 - \mathrm{e}^{-x}$ et expliquez pourquoi vous pouvez affirmer que

$$1 - \mathrm{e}^{-x} > x - \frac{x^2}{2}, \text{ pour } 0 < x < 2.$$

(ii) Déduisez que $\mathrm{e} > \left(\frac{2n^2}{2n^2 - 2n + 1}\right)^n$, pour $n \in \mathbb{Z}^+$. *[4 points]*

(d) En posant $n = 1000$, utilisez les résultats des parties (b) et (c) pour calculer la valeur correcte de e avec autant de décimales que possible. *[2 points]*