22117219

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 1

Mercredi 4 mai 2011 (après-midi)

2 heures

Numéro de session du candidat

0	0							

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- Écrivez votre numéro de session dans la case ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Aucune calculatrice n'est autorisée pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toute la section A dans les espaces prévus à cet effet.
- Section B : répondez à toute la section B sur les feuilles de réponses prévues à cet effet. Inscrivez votre numéro de session sur chaque livret de réponse que vous avez utilisé et joignez-les à cette épreuve écrite et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- À la fin de l'examen, indiquez le nombre de feuilles de réponse utilisées dans la case prévue à cet effet sur la couverture du livret.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

SECTION A

Répondez à ***toutes*** *les questions dans les espaces prévus à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.*

1. *[Note maximale : 6]*

La fonction quadratique $f(x) = p + qx - x^2$ a une valeur maximum de 5 pour $x = 3$.

(a) Trouvez la valeur de p et la valeur de q. *[4 points]*

(b) La représentation graphique de $f(x)$ est translatée de 3 unités parallèlement à l'axe des abscisses dans la direction positive. Déterminez l'équation de la nouvelle représentation graphique. *[2 points]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. *[Note maximale : 5]*

Considérez la matrice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ a & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Trouvez la matrice $\boldsymbol{A}^2$. *[2 points]*

(b) Si $\det \boldsymbol{A}^2 = 16$, déterminez les valeurs possibles de a. *[3 points]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. *[Note maximale : 6]*

La variable aléatoire X a une fonction de densité f où

$$f(x) = \begin{cases} kx(x+1)(2-x), & 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Esquissez la représentation graphique de cette fonction. On ne vous demande pas de trouver les coordonnées du maximum. *[1 point]*

(b) Trouvez la valeur de k. *[5 points]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4. *[Note maximale : 6]*

Les nombres complexes $z_1 = 2 - 2\mathrm{i}$ et $z_2 = 1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$ sont représentés respectivement par les points A et B sur un diagramme d'Argand. Étant donné que O est l'origine,

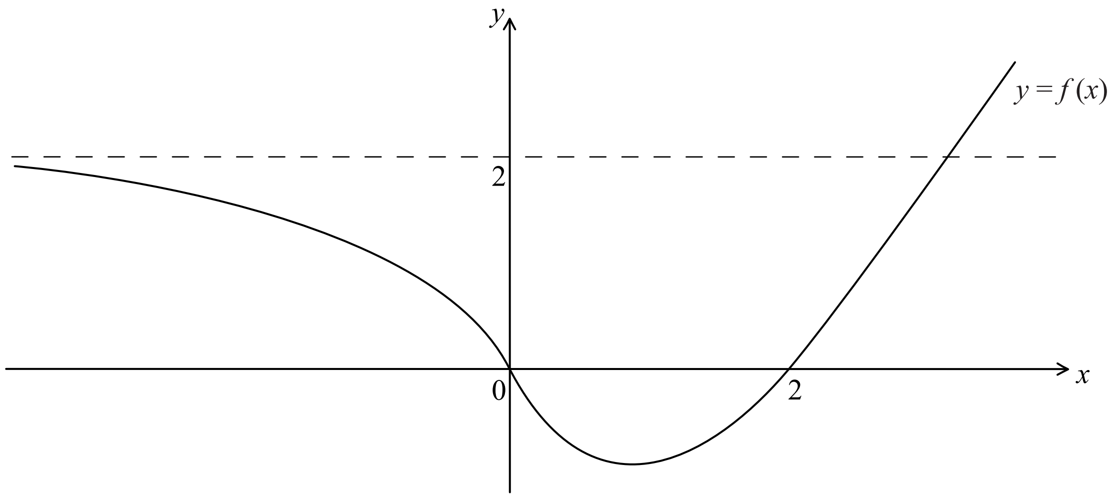
(a) trouvez AB, en donnant votre réponse sous la forme $a\sqrt{b-\sqrt{3}}$, où $a, b \in \mathbb{Z}^+$; *[3 points]*

(b) calculez $\mathrm{A\hat{O}B}$ en fonction de π. *[3 points]*

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

5. *[Note maximale : 6]*

La figure illustre la représentation graphique de $y = f(x)$. Cette représentation graphique a une asymptote horizontale en $y = 2$.

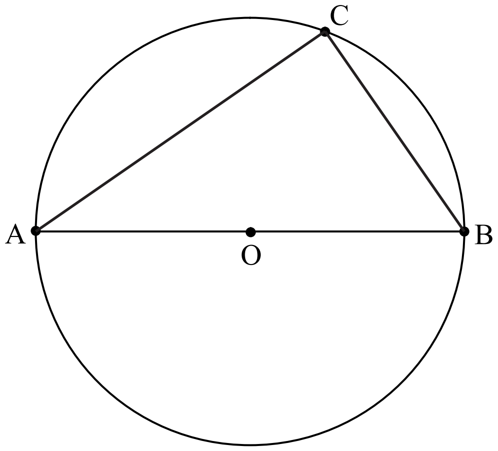


(a) Esquissez la représentation graphique de $y = \dfrac{1}{f(x)}$. *[3 points]*

(b) Esquissez la représentation graphique de $y = x\,f(x)$. *[3 points]*

6. *[Note maximale : 5]*

Dans la figure ci-dessous, [AB] est un diamètre du cercle de centre O. Le point C est sur le cercle. Soit $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$ et $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$.



(a) Trouvez une expression de $\overrightarrow{CB}$ et de $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$. *[2 points]*

(b) À partir de là, démontrez que $\mathrm{A\hat{C}B}$ est un angle droit. *[3 points]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

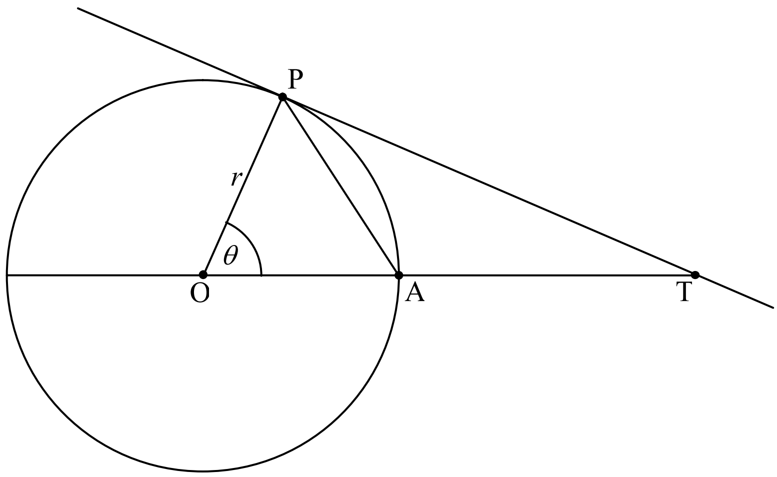
. . . .

. . . .

. . . .

7. *[Note maximale : 5]*

La figure représente une tangente, (TP), à un cercle de centre O et de rayon r. La mesure de l'angle $\hat{\text{POA}}$ est θ radians.



(a) Trouvez l'aire du triangle AOP en fonction de r et θ. *[1 point]*

(b) Trouvez l'aire du triangle POT en fonction de r et θ. *[2 points]*

(c) En utilisant vos résultats de la partie (a) et de la partie (b) montrez que $\sin\theta < \theta < \tan\theta$. *[2 points]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

8. *[Note maximale : 6]*

Une fonction est définie par $h(x) = 2\mathrm{e}^x - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$, $x \in \mathbb{R}$. Trouvez une expression de $h^{-1}(x)$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

9. *[Note maximale : 7]*

Un lot de 15 lecteurs de DVD en contient 4 qui sont défectueux. Les lecteurs de DVD sont sélectionnés au hasard, un par un, et examinés. Ceux qui ont été vérifiés ne sont pas replacés.

(a) Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement 3 lecteurs de DVD défectueux parmi les 8 premiers lecteurs de DVD examinés ? *[4 points]*

(b) Quelle est la probabilité que le 9^{e} lecteur de DVD examiné soit le 4^{e} lecteur défectueux trouvé ? *[3 points]*

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

10. *[Note maximale : 8]*

Une suite arithmétique a pour premier terme a et pour raison d, $d \neq 0$. Les 3e, 4e et 7e termes de la suite arithmétique sont les trois premiers termes d'une suite géométrique.

(a) Montrez que $a = -\frac{3}{2}d$. *[3 points]*

(b) Montrez que le 4e terme de la suite géométrique est le 16e terme de la suite arithmétique. *[5 points]*

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

*N'écrivez **PAS** vos solutions sur cette page. Ce qui est écrit sur cette page ne sera **PAS** pris en compte pour la notation.*

SECTION B

*Répondez à **toutes** les questions sur les feuilles de réponses fournies. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.*

11. *[Note maximale : 15]*

La courbe C a pour équation $y = \frac{1}{8}(9 + 8x^2 - x^4)$.

(a) Trouvez les coordonnées des points sur C en lesquels $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$. *[4 points]*

(b) La tangente à C au point $\mathrm{P}(1\,;2)$ coupe l'axe des abscisses au point T. Déterminez les coordonnées de T. *[4 points]*

(c) La normale à C au point P coupe l'axe des ordonnées au point N. Trouvez l'aire du triangle PTN. *[7 points]*

12. *[Note maximale : 20]*

(a) Factorisez $z^3 + 1$ en un facteur du premier degré et un facteur du second degré. *[2 points]*

Soit $\gamma = \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

(b) (i) Montrez que γ est l'une des racines cubiques de -1.

(ii) Montrez que $\gamma^2 = \gamma - 1$.

(iii) À partir de là, trouvez la valeur de $(1 - \gamma)^6$. *[9 points]*

La matrice $\boldsymbol{A}$ est définie par $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}$.

(c) Montrez que $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$, où $\boldsymbol{0}$ est la matrice nulle. *[4 points]*

(d) Déduisez que

(i) $\boldsymbol{A}^3 = -\boldsymbol{I}$;

(ii) $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$. *[5 points]*

*N'écrivez **PAS** vos solutions sur cette page. Ce qui est écrit sur cette page ne sera **PAS** pris en compte pour la notation.*

13. *[Note maximale : 25]*

(a) (i) Esquissez les représentations graphiques de $y = \sin x$ et de $y = \sin 2x$, sur le même repère, pour $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

(ii) Trouvez les abscisses des points d'intersection des représentations graphiques dans le domaine $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

(iii) Trouvez l'aire de la région limitée par les représentations graphiques. *[9 points]*

(b) Trouvez la valeur de $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{4-x}}\,\mathrm{d}x$ en utilisant le changement de variable $x = 4\sin^2\theta$. *[8 points]*

(c) La fonction croissante f vérifie $f(0) = 0$ et $f(a) = b$, où $a > 0$ et $b > 0$.

(i) En se référant à une esquisse, montrez que $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = ab - \int_0^b f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x$.

(ii) **À partir de là**, trouvez la valeur de $\int_0^2 \arcsin\left(\frac{x}{4}\right)\mathrm{d}x$. *[8 points]*