22117221

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 3 – MATHÉMATIQUES DISCRÈTES

Lundi 9 mai 2011 (matin)

1 heure

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. *[Note maximale : 13]*

(a) Utilisez l'algorithme d'Euclide pour trouver le plus grand commun diviseur des nombres 56 et 315. *[4 points]*

(b) (i) Trouvez la solution générale de l'équation diophantienne $56x + 315y = 21$.

(ii) À partir de là ou par toute autre méthode, trouvez la plus petite solution positive de la congruence $315x \equiv 21 (\text{modulo } 56)$. *[9 points]*

2. *[Note maximale : 7]*

La matrice d'adjacence des coûts du graphe complet H est donnée ci-dessous.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
A	–	19	17	10	15
B	19	–	11	16	13
C	17	11	–	14	13
D	10	16	14	–	18
E	15	13	13	18	–

On considère le problème du voyageur de commerce associé à H.

(a) En commençant par trouver un arbre couvrant minimal du sous-graphe H obtenu en supprimant le sommet A et toutes les arêtes rejoignant A, trouvez une borne inférieure pour ce problème. *[5 points]*

(b) Trouvez le poids total du cycle ADCBEA. *[1 point]*

(c) Que pouvez-vous conclure de vos résultats? *[1 point]*

3. *[Note maximale : 12]*

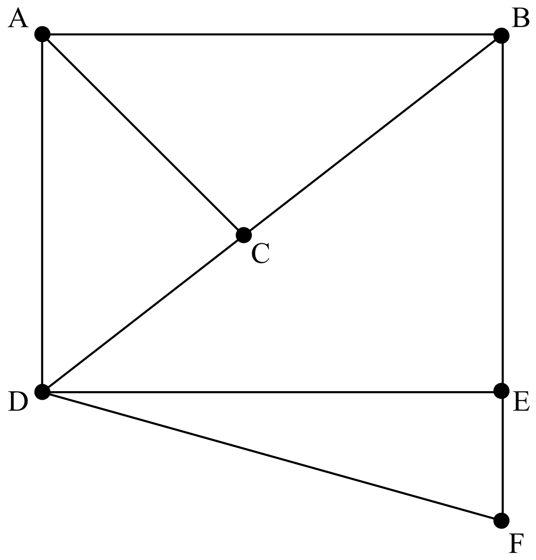
(a) Soit a, $b \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{Z}^+$, montrez que si $a \equiv 1 \pmod{c}$, alors $ab \equiv b \pmod{c}$. *[2 points]*

(b) En utilisant une démonstration par récurrence, montrez que, pour $n \in \mathbb{N}$, $9^n \equiv 1 \pmod{4}$. *[6 points]*

(c) L'entier positif M est écrit en base 9. Montrez que M est divisible par 4 si la somme de ses chiffres est divisible par 4. *[4 points]*

4. *[Note maximale : 18]*

La figure ci-dessous représente le graphe G de sommets A, B, C, D, E et F.



(a) (i) Déterminez s'il existe des cycles hamiltoniens dans G. S'il en existe, donnez-en un. Sinon, expliquez quelle caractéristique de G rend impossible l'existence d'un cycle hamiltonien.

(ii) Déterminez s'il existe des circuits eulériens dans G. S'il en existe, donnez-en un. Sinon, expliquez quelle caractéristique de G rend impossible l'existence d'un circuit eulérien. *[4 points]*

(b) (i) Donnez la matrice d'adjacence de G.

(ii) Trouvez la paire de sommets distincts qui sont joints par le plus petit nombre de chaînes de longueur 5.

(iii) Donnez quatre de ces chaînes.

(iv) Identifiez le sommet qui est joint à lui-même par le plus grand nombre de chaînes de longueur 5. *[7 points]*

(c) **Démontrez** qu'on ne peut pas ajouter plus de 3 arêtes à G tout en le gardant planaire et simple. *[4 points]*

(d) Étant donné que G' (le complément de G) est planaire, trouvez le nombre de faces dans G'. *[3 points]*

5. *[Note maximale : 10]*

(a) En expliquant complètement votre méthode, déterminez si 1189 est ou n'est pas un nombre premier. *[4 points]*

(b) (i) Énoncez le théorème fondamental de l'arithmétique.

(ii) Les entiers positifs M et N ont comme plus grand commun diviseur G et comme plus petit commun multiple L. Montrez que $GL = MN$. *[6 points]*