22117230

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Lunes 9 de mayo de 2011 (mañana)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 11]*

Puede suponerse que los pesos de las naranjas que produce una huerta dada siguen una distribución normal, de media 205 gramos y desviación típica igual a 10 gramos.

(a) Halle la probabilidad de que una naranja, elegida al azar, pese más de 200 gramos. *[2 puntos]*

(b) Se escogen al azar cinco de estas naranjas y se meten en una bolsa. Halle la probabilidad de que el peso total de las cinco naranjas sea menor que 1 kilogramo. *[4 puntos]*

(c) En dicha huerta también se cultivan limones, cuyos pesos siguen una distribución normal, de media 75 gramos y desviación típica igual a 3 gramos. Halle la probabilidad de que una naranja, escogida al azar, pese más del triple que un limón, escogido al azar. *[5 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 10]*

La variable aleatoria discreta X presenta una distribución $\text{Geo}(p)$. Se cree que el valor de p es igual a 0,3. Para comprobar si esta suposición es o no acertada, se obtuvo una muestra aleatoria compuesta por 100 valores de X, con los siguientes resultados:

Valor de X	1	2	3	4	5	≥ 6
Frecuencia	35	18	16	11	10	10

(a) Indique las hipótesis apropiadas para comprobar si dicha suposición es o no acertada. *[1 punto]*

(b) Realice un contraste de χ^2 a un nivel de significación del 5 %. Formule una conclusión, dando las razones pertinentes. *[9 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 17]*

Diez amigos prueban una dieta que, según se afirma, permite perder peso. Cada uno de los amigos se pesa antes de comenzar la dieta y después de un mes de estar a dieta. Se obtienen los siguientes resultados:

Amigo	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**
Peso antes (kg)	68,4	70,9	74,7	65,4	59,4	69,0	73,9	62,6	68,3	58,2
Peso después (kg)	66,2	67,4	70,4	65,9	55,2	69,2	71,4	59,9	68,2	58,9

(a) Determine estimaciones sin sesgo de la media y de la varianza de la pérdida de peso que logran en un mes las personas que siguen esta dieta. *[5 puntos]*

(b) (i) Indique las hipótesis apropiadas para comprobar si esta dieta produce una pérdida de peso media.

(ii) Determine el valor de un estadístico apropiado para comprobar la validez de sus hipótesis.

(iii) Halle para su estadístico el valor crítico correspondiente al 1 % y formule una conclusión. *[6 puntos]*

(c) Uno de los amigos calcula un intervalo de confianza para la media de la pérdida de peso que logran las personas que siguen esta dieta durante un mes, y obtiene $[0{,}26;\, 3{,}36]$. Halle el nivel de confianza de este intervalo. *[6 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 10]*

La variable aleatoria X sigue una distribución de Poisson, de media μ desconocida. Se necesita comprobar la validez de las hipótesis:

$$H_0 : \mu = 3 \text{ frente a } H_1 : \mu \neq 3 .$$

Sea S la suma de 10 valores de X elegidos al azar. La región crítica se define de la siguiente forma: $(S \leq 22) \cup (S \geq 38)$.

(a) Calcule el nivel de significación de este contraste. *[5 puntos]*

(b) Sabiendo que el valor de μ es, en realidad, igual a 2,5, determine la probabilidad de que se produzca un error de Tipo II. *[5 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 12]*

(a) La variable aleatoria X sigue una distribución binomial negativa $\mathrm{NB}(3,\ p)$. Sea $f(x)$ la función que representa la probabilidad de que X tenga el valor x.

(i) Escriba una expresión para $f(x)$, y compruebe que:

$$\ln f(x) = 3\ln\left(\frac{p}{1-p}\right) + \ln(x-1) + \ln(x-2) + x\ln(1-p) - \ln 2\,.$$

(ii) Indique el dominio de f.

(iii) El dominio de f se extiende a $]2,\infty[$. Comprueba que:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \ln(1-p)\,.$$

[7 puntos]

(b) Jo tiene una moneda no equilibrada, de forma que, al tirarla, la probabilidad de que salga cara es igual a 0,35. Jo tira esta moneda repetidas veces, y saca la 3.ª cara a la Y.ª tirada. Utilice el resultado del apartado (a)(iii) para hallar el valor más probable de Y. *[5 puntos]*