22127226

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 2

Número de convocatoria del alumno

0	0							

Viernes 4 de mayo de 2012 (mañana)

2 horas

Código del examen

2	2	1	2	–	7	2	2	6

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste todas las preguntas en las casillas provistas.
- Sección B: conteste todas las preguntas en las hojas de respuesta provistas. Escriba su número de convocatoria en cada una de las hojas de respuestas, y adjúntelas a este cuestionario de examen y a su portada empleando los cordeles provistos.
- Cuando termine el examen, indique en la casilla correspondiente de la portada el número de hojas que ha utilizado.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de información* ***de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NM*** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[120 puntos]*.

14 páginas

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN A

Conteste ***todas*** *las preguntas en los espacios provistos. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.*

1. *[Puntuación máxima: 7]*

La suma de los 16 primeros términos de una progresión aritmética es 212, y el quinto término es 8.

(a) Halle el primer término y la diferencia común. *[4 puntos]*

(b) Halle el menor valor de n para el cual la suma de los n primeros términos es mayor que 600. *[3 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. *[Puntuación máxima: 5]*

La variable aleatoria X tiene una distribución $\mathrm{B}(30,\ p)$. Sabiendo que $\mathrm{E}(X)=10$, halle:

(a) el valor de p; *[1 punto]*

(b) $\mathrm{P}(X=10)$; *[2 puntos]*

(c) $\mathrm{P}(X \geq 15)$. *[2 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. *[Puntuación máxima: 8]*

Considere un triángulo ABC, siendo $B\hat{A}C = 45{,}7^\circ$; $AB = 9{,}63$ cm y $BC = 7{,}5$ cm.

(a) Por medio de un diagrama, muestre por qué existen dos triángulos que cumplen con esta información. *[2 puntos]*

(b) Halle los posibles valores de AC. *[6 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 6]*

Quince niños y diez niñas están sentados en una sola fila.

(a) ¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar en una sola fila, de forma que los niños y las niñas estén en dos grupos separados? *[3 puntos]*

(b) Se escogen a dos niños y a tres niñas para que vayan al teatro. ¿De cuántas formas distintas se puede realizar esta selección? *[3 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 5]*

La variable aleatoria X tiene una distribución $\mathrm{Po}(m)$.
Sabiendo que $\mathrm{P}(X = 5) = \mathrm{P}(X = 3) + \mathrm{P}(X = 4)$, halle:

(a) el valor de m; *[3 puntos]*

(b) $\mathrm{P}(X > 2)$. *[2 puntos]*

6. *[Puntuación máxima: 8]*

(a) Dibuje aproximadamente la curva $y = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x^2+1}}$, $-4 \le x \le 4$, mostrando claramente las coordenadas de las intersecciones con el eje x, y todos los máximos y mínimos. *[4 puntos]*

(b) Escriba la pendiente de la curva en $x = 1$. *[1 punto]*

(c) Halle la ecuación de la normal a la curva en $x = 1$. *[3 puntos]*

7. *[Puntuación máxima: 5]*

La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua X viene dada por

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4}\,,\ 0 \le x \le a\,.$$

(a) Halle el valor de a. *[3 puntos]*

(b) Halle la media de X. *[2 puntos]*

8. *[Puntuación máxima: 8]*

Cada vez que una pelota bota, alcanza un 95 % de la altura lograda en el bote anterior. Inicialmente la pelota se deja caer desde una altura de 4 metros.

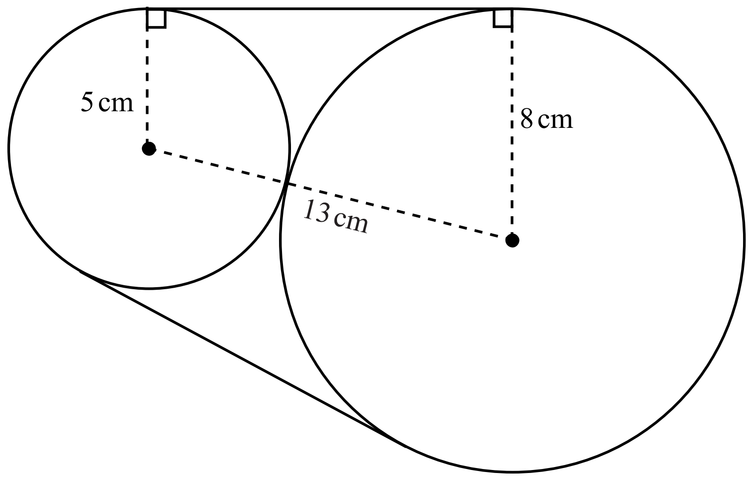
(a) ¿Qué altura alcanza la pelota después del cuarto bote? *[2 puntos]*

(b) ¿Cuántas veces bota la pelota antes de que ya no alcance una altura de 1 metro? *[3 puntos]*

(c) ¿Cuál es la distancia total que recorre la pelota? *[3 puntos]*

9. *[Puntuación máxima: 8]*

Dos discos, uno de 8 cm de radio y otro de 5 cm de radio, se colocan de tal forma que se estén tocando. Se ata un trozo de cuerda alrededor de los dos discos, tal y como se muestra en el siguiente diagrama.



la figura no está dibujada a escala

Calcule la longitud de cuerda que se necesita para rodear los discos.

***NO** escriba soluciones en esta página.*

SECCIÓN B

*Conteste **todas** las preguntas en las hojas de respuestas provistas. Empiece una página nueva para cada respuesta.*

10. *[Puntuación máxima: 14]*

En un puesto del mercado se venden manzanas, peras y ciruelas.

(a) Los pesos de las manzanas siguen una distribución normal de media 200 gramos y con una desviación típica de 25 gramos.

(i) Sabiendo que en el puesto hay 450 manzanas, ¿cuál es el número esperado de manzanas con un peso superior a 225 gramos?

(ii) Sabiendo que el 70 % de las manzanas pesa menos de m gramos, halle el valor de m. *[5 puntos]*

(b) Los pesos de las peras siguen una distribución normal de media $\propto$ gramos y con una desviación típica de σ gramos. Sabiendo que el 8 % de estas peras tiene un peso superior a 270 gramos y que el 15 % tiene un peso inferior a 250 gramos, halle $\propto$ y σ. *[6 puntos]*

(c) Los pesos de las ciruelas siguen una distribución normal de media 80 gramos y con una desviación típica de 4 gramos. Se cogen 5 ciruelas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellas pesen más de 82 gramos? *[3 puntos]*

***NO** escriba soluciones en esta página.*

11. *[Puntuación máxima: 24]*

(a) Halle los valores de k para los cuales el siguiente sistema de ecuaciones no tiene solución y el valor de k para el cual el sistema tiene infinitas soluciones.

$$x - 3y + z = 3$$
$$x + 5y - 2z = 1$$
$$16y - 6z = k$$

[5 puntos]

(b) Sabiendo que el sistema de ecuaciones se puede resolver, halle las soluciones en forma de ecuación vectorial de una recta, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b}$, donde las componentes de $\boldsymbol{b}$ son números enteros. *[7 puntos]*

(c) El plano ÷ es paralelo tanto a la recta del apartado (b) como a la recta $\frac{x-4}{3} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z-2}{0}$. Sabiendo que el punto $(1, 2, 0)$ pertenece a ÷ , compruebe que la ecuación cartesiana de ÷ es $16x + 24y - 11z = 64$. *[5 puntos]*

(d) El eje z corta al plano ÷ en el punto P. Halle las coordenadas de P. *[2 puntos]*

(e) Halle el ángulo entre la recta $\frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{4} = \frac{z}{2}$ y el plano ÷ . *[5 puntos]*

***NO** escriba soluciones en esta página.*

12. *[Puntuación máxima: 22]*

Una partícula se mueve en línea recta a una velocidad de v metros por segundo. En un instante cualquiera, t segundos, $0 \le t < \frac{3\pi}{4}$, la velocidad viene dada por la ecuación diferencial $\frac{dv}{dt} + v^2 + 1 = 0$. También se sabe que $v = 1$ cuando $t = 0$.

(a) Halle una expresión para v en función de t. *[7 puntos]*

(b) Dibuje aproximadamente la gráfica de v en función de t, mostrando claramente las coordenadas de todos los puntos de corte con los ejes y las ecuaciones de todas las asíntotas. *[3 puntos]*

(c) (i) Escriba el tiempo T para el cual la velocidad es igual a cero.

(ii) Halle la distancia recorrida en el intervalo $[0, T]$. *[3 puntos]*

(d) Halle una expresión para el desplazamiento s en función de t, sabiendo que $s = 0$ cuando $t = 0$. *[5 puntos]*

(e) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, compruebe que $s = \frac{1}{2}\ln\frac{2}{1+v^2}$. *[4 puntos]*

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.