22127230

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Lunes 7 de mayo de 2012 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de información* ***de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NM*** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[60 puntos]*.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 14]*

Un panadero elabora barras de pan. Él afirma que las barras tienen, en promedio, un peso de 800 g. Muchos clientes creen que el peso promedio de las barras que elabora es inferior a ese valor. Un inspector de alimentos visita la panadería y pesa una muestra aleatoria compuesta por 10 barras de pan. Obtiene los siguientes resultados (en gramos):

783, 802, 804, 785, 810, 805, 789, 781, 800, 791.

Suponga que estos resultados se han tomado de una distribución normal.

(a) Determine estimaciones sin sesgo de la media y de la varianza de la distribución. *[3 puntos]*

A pesar de estos resultados, el panadero sigue insistiendo que su afirmación es correcta.

(b) Indicando hipótesis apropiadas, realice un contraste (test) para evaluar la validez de la afirmación del panadero, a un nivel de significación del 10 %. *[7 puntos]*

El inspector comunica al panadero que debe mejorar el sistema de control de calidad y rechazar todas las barras que pesen menos de 790 g. El panadero modifica los métodos de producción y declara haber reducido el número de barras de bajo peso. En una posterior visita a la panadería, el inspector analiza una muestra aleatoria de barras de pan puestas a la venta. De las 40 barras analizadas, descubre que 5 deberían haber sido rechazadas.

(c) Calcule un intervalo de confianza del 95 % para la proporción de barras puestas a la venta que deberían rechazarse. *[4 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 6]*

La variable aleatoria X sigue una distribución geométrica de parámetro p.

(a) Compruebe que $\mathrm{P}(X \le n) = 1 - (1-p)^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$. *[3 puntos]*

(b) Deduzca una expresión para $\mathrm{P}(m < X \le n)$, siendo m, $n \in \mathbb{Z}^+$ y $m < n$. *[1 punto]*

(c) Sabiendo que $p = 0,2$, halle el menor valor de n para el cual $\mathrm{P}(1 < X \le n) > 0,5$, $n \in \mathbb{Z}^+$. *[2 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 13]*

Cada semana, los directivos de un equipo de fútbol anotaron el número de lesiones sufridas por sus jugadores durante esa semana. A continuación se muestran los resultados correspondientes a un período de 52 semanas:

Número de lesiones por semana	0	1	2	3	4	5	6
Número de semanas	6	14	15	9	5	2	1

(a) Calcule la media y la varianza del número de lesiones por semana. *[2 puntos]*

(b) Explique por qué estos valores constituyen evidencia que respalda el uso de un modelo basado en la distribución de Poisson. *[1 punto]*

(c) Indicando sus hipótesis y utilizando un contraste (test) de χ^2, analice si una distribución de Poisson es un modelo adecuado para representar el número de lesiones por semana, a un nivel de significación del 5 %. *[10 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 19]*

La variable aleatoria continua X tiene una función de densidad de probabilidad f dada por:

$$f(x)=\begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 0{,}5, \\ \dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{3}x, & 0{,}5 \le x \le 2, \\ 0, & \text{resto de casos.} \end{cases}$$

(a) Dibuje aproximadamente la función f y compruebe que el primer cuartil es igual a 0,5. *[3 puntos]*

(b) (i) Determine $\mathrm{E}(X)$.

(ii) Determine $\mathrm{E}(X^2)$. *[4 puntos]*

Se realizan dos observaciones independientes de X y se suman los valores obtenidos. La variable aleatoria resultante se denomina Y.

(c) (i) Determine $\mathrm{E}(Y-2X)$.

(ii) Determine $\mathrm{Var}(Y-2X)$. *[5 puntos]*

(d) (i) Halle la función de distribución acumulada correspondiente a X.

(ii) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, halle la mediana de la distribución. *[7 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 8]*

La variable aleatoria $X \sim \mathrm{Po}(m)$. Sabiendo que $\mathrm{P}(X=k-1)=\mathrm{P}(X=k+1)$, donde k es un número entero positivo,

(a) compruebe que $m^2=k(k+1)$; *[2 puntos]*

(b) a partir de lo anterior, compruebe que la moda de X es igual a k. *[6 puntos]*