22127222

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 3 – SÉRIES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Lundi 7 mai 2012 (après-midi)

1 heure

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N’ouvrez pas cette épreuve avant d’y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l’intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du *livret d’informations pour le cours* ***de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NM*** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d’examen est *[60 points]*.

© International Baccalaureate Organization 2012

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. *[Note maximale : 6]*

Utilisez la règle de L'Hôpital pour trouver $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x\cos x}{\sin^2 x}$.

2. *[Note maximale : 21]*

Considérez l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1+x}$, où $x > -1$ et $y = 1$ lorsque $x = 0$.

(a) Utilisez la méthode d'Euler avec un pas de longueur 0,1 pour trouver une approximation de y lorsque $x = 0,5$. *[7 points]*

(b) (i) Montrez que $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y^3 - y^2}{(1+x)^2}$.

(ii) Trouvez alors la série de Maclaurin pour y, jusqu'au terme en x^2 inclusivement. *[8 points]*

(c) (i) Résolvez l'équation différentielle.

(ii) Trouvez la valeur de a pour la quelle $y \to \infty$ lorsque $x \to a$. *[6 points]*

3. *[Note maximale : 7]*

Trouvez la solution générale de l'équation différentielle $t\frac{dy}{dt} = \cos t - 2y$, où $t > 0$.

4. *[Note maximale : 15]*

La suite $\{u_n\}$ est définie par $u_n = \dfrac{3n+2}{2n-1}$, avec $n \in \mathbb{Z}^+$.

(a) Montrez que cette suite converge vers une limite L, dont vous préciserez la valeur. *[3 points]*

(b) Trouvez la plus petite valeur de l'entier N tel que $|u_n - L| < \varepsilon$, pour tout $n > N$ avec

(i) $\varepsilon = 0{,}1$;

(ii) $\varepsilon = 0{,}00001$. *[4 points]*

(c) Pour chacune des suites $\left\{\dfrac{u_n}{n}\right\}$, $\left\{\dfrac{1}{2u_n - 2}\right\}$ et $\left\{(-1)^n u_n\right\}$, déterminez si elle converge ou ne converge pas. *[6 points]*

(d) Démontrez que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(u_n - L)$ diverge. *[2 points]*

5. *[Note maximale : 11]*

(a) Trouvez l'ensemble des valeurs de k pour les quelles l'intégrale impropre $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}$ converge. *[6 points]*

(b) Montrez que la série $\displaystyle\sum_{r=2}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r\ln r}$ est convergente, mais pas absolument convergente. *[5 points]*