22127221

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 3 – MATHÉMATIQUES DISCRÈTES

Lundi 7 mai 2012 (après-midi)

1 heure

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du *livret d'informations pour le cours* ***de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NM*** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est *[60 points]*.

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. *[Note maximale : 15]*

(a) Utilisez l'algorithme d'Euclide pour exprimer le $\text{pgcd}(123,\ 2347)$ sous la forme $123p + 2347q$, où $p,\ q \in \mathbb{Z}$. *[8 points]*

(b) Trouvez la plus petite solution positive de $123x \equiv 1 \pmod{2347}$. *[3 points]*

(c) Trouvez la solution générale de $123z \equiv 5 \pmod{2347}$. *[3 points]*

(d) Donnez l'ensemble-solution de $123y \equiv 1 \pmod{2346}$. *[1 point]*

2. *[Note maximale : 7]*

La matrice d'adjacence des coûts pour le graphe pondéré K est donnée ci-dessous.

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	5	2	0	0	0	0
B	5	0	0	0	7	0	0
C	2	0	0	4	4	0	0
D	0	0	4	0	2	0	9
E	0	7	4	2	0	4	3
F	0	0	0	0	4	0	1
G	0	0	0	9	3	1	0

Utilisez l'algorithme de Prim, en commençant par G, pour dessiner deux arbres couvrant minimaux distincts de K.

3. *[Note maximale : 8]*

La matrice d'adjacence $\boldsymbol{M}$ d'un graphe G est donnée ci-dessous.

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) Dessinez le graphe G. *[2 points]*

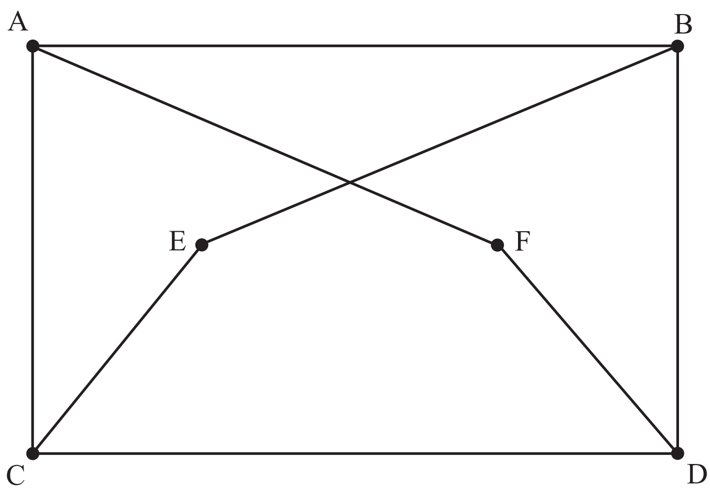
(b) Quelle information à propos de G est donnée par les éléments de la diagonale principale de $\boldsymbol{M}^2$? *[1 point]*

(c) Trouvez le nombre de chaînes de longueur 4 commençant en A et finissant en C. *[2 points]*

(d) Listez les chaînes simples de longueur 4 commençant en A et finissant en C. *[3 points]*

4. *[Note maximale : 17]*

(a) Dessinez le complément du graphe ci-dessous comme un graphe planaire.



[3 points]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 4)

(b) Un graphe simple G a v sommets et e arêtes. Le complémen G' de G a e' arêtes.

(i) Démontrez que $e \leq \frac{1}{2}v(v-1)$.

(ii) Trouvez une expression de $e+e'$ en fonction de v.

(iii) Étant donné que G' est isomorphe à G, démontrez que v est de la forme $4n$ ou $4n+1$ avec $n \in \mathbb{Z}^+$.

(iv) Démontrez qu'il existe un unique graphe simple avec 4 sommets qui est isomorphe à son complément.

(v) Démontrez que si $v \geq 11$, alors G et G' ne peuvent pas être tous les deux planaires. *[14 points]*

5. *[Note maximale : 13]*

(a) Utilisez le fait que $2003 = 6 \quad 333 + 5$ et le petit théorème de Fermat pour montrer que $2^{2003} \equiv 4 \pmod 7$. *[3 points]*

(b) Trouvez $2^{2003}(\text{mod}11)$ et $2^{2003}(\text{mod}13)$. *[3 points]*

(c) Utilisez le théorème chinois des restes, ou une autre méthode, pour évaluer $2^{2003}(\text{mod}1001)$, en remarquant que $1001 = 7 \quad 11 \quad 13$. *[7 points]*