M12/5/MATHL/HP1/FRE/TZ0/XX

22127219

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 1

Jeudi 3 mai 2012 (après-midi)

2 heures

Numéro de session du candidat

0	0							

Code de l'examen

2	2	1	2	–	7	2	1	9

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- Écrivez votre numéro de session dans la case ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Aucune calculatrice n'est autorisée pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur les feuilles de réponses prévues à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur chaque feuille de réponses que vous avez utilisée et joignez-les à cette épreuve écrite et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- À la fin de l'examen, indiquez le nombre de feuilles de réponses utilisées dans la case prévue à cet effet sur votre page de couverture.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du Livret d'informations pour le cours de ***mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NM*** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est *[120 points]*.

0120

17 pages
© International Baccalaureate Organization 2012

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

SECTION A

*Répondez à **toutes** les questions dans les espaces prévus à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.*

1. *[Note maximale : 6]*

On obtient le même reste lorsqu'on divise $2x^3+kx^2+6x+32$ et $x^4-6x^2-k^2x+9$ par $x+1$. Trouvez les valeurs possibles de k.

2. *[Note maximale : 5]*

Trouvez les valeurs de x pour lesquelles les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2\cos x \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 2\sin x \\ 1 \end{pmatrix}$ sont perpendiculaires, où $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

3. *[Note maximale : 5]*

La probabilité qu'il pleuve un jour donné est de $\frac{2}{5}$. La probabilité que l'équipe de football des « Tigers » gagne un jour où il pleut est de $\frac{2}{7}$ et la probabilité qu'elle gagne un jour où il ne pleut pas est de $\frac{4}{7}$.

(a) Dessinez un diagramme en arbre pour représenter ces événements et leurs résultats. *[1 point]*

(b) Quelle est la probabilité que l'équipe de football des « Tigers » gagne ? *[2 points]*

(c) Étant donné que l'équipe de football des « Tigers » a gagné, quelle est la probabilité qu'il ait plu ce jour–là ? *[2 points]*

4. *[Note maximale : 5]*

(a) Développez et simplifiez $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^4$. *[3 points]*

(b) Déterminez alors le terme constant dans le développement de $(2x^2+1)\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^4$. *[2 points]*

5. *[Note maximale : 5]*

Trois matrices 2×2 non singulières $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{X}$ satisfont l'équation $4\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{B}$.

(a) Trouvez $\boldsymbol{X}$ en fonction de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$. *[2 points]*

(b) Étant donné que $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{B}$, trouvez $\boldsymbol{X}$. *[3 points]*

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

6. *[Note maximale : 7]*

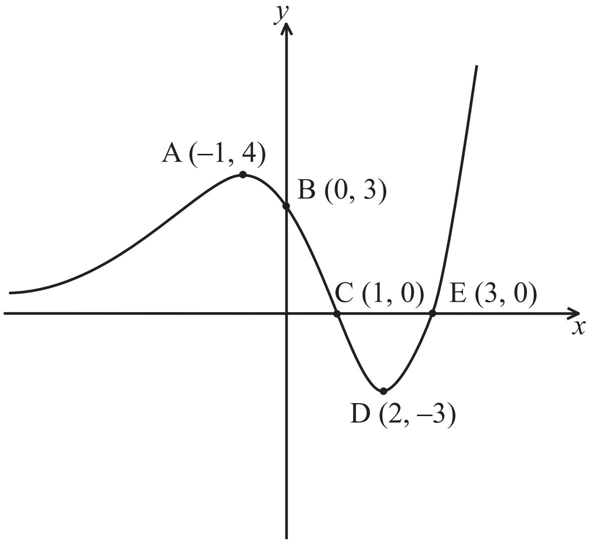
Étant donné que $(4-5\mathrm{i})m+4n=16+15\mathrm{i}$, où $\mathrm{i}^2=-1$, trouvez m et n si

(a) m et n sont des nombres réels ; *[3 points]*

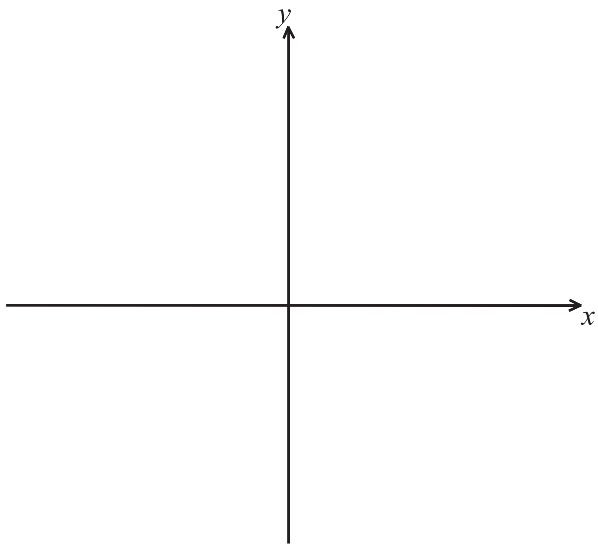
(b) m et n sont des nombres complexes conjugués. *[4 points]*

7. *[Note maximale : 6]*

La représentation graphique de $y = f(x)$ apparaît ci-dessous. Le point A est un maximum relatif et le point D est un minimum relatif.



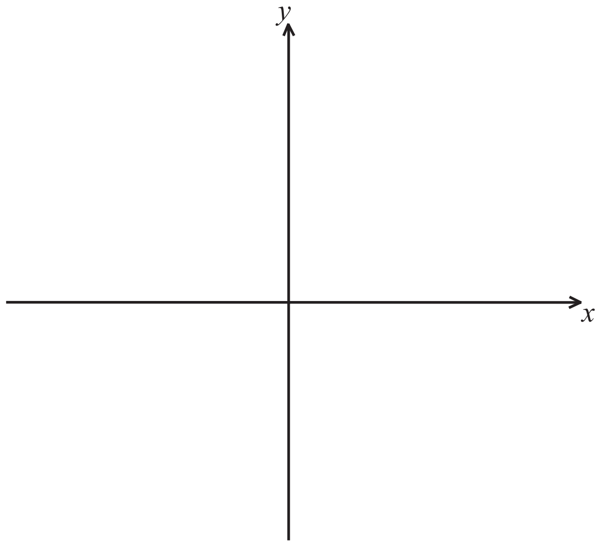
(a) Sur le système d'axes ci-dessous, esquissez la représentation graphique de $y = \frac{1}{f(x)}$, en montrant clairement les coordonnées des images des points A, B et D, les identifiant par A', B' et D' respectivement, ainsi que les équations des asymptotes verticales, le cas échéant. *[3 points]*



(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 7)

(b) Sur le système d'axes ci-dessous, esquissez la représentation graphique de la dérivée $y = f'(x)$, en montrant clairement les coordonnées des images des points A et D, les identifiant par A'' et D'' respectivement. *[3 points]*



8. *[Note maximale : 6]*

Soit $x^3 y = a \sin nx$. En utilisant la dérivation implicite, montrez que

$$x^3 \frac{d^2 y}{dx^2} + 6x^2 \frac{dy}{dx} + (n^2 x^2 + 6)\, xy = 0 .$$

9. *[Note maximale : 6]*

Montrez que $\frac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A} = \sec 2A + \tan 2A$.

10. *[Note maximale : 9]*

La fonction f est définie sur le domaine $\left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ par $f(x) = e^{-x}\cos x$.

(a) Donnez les deux zéros de f. *[1 point]*

. . . .

(b) Esquissez la courbe de f. *[1 point]*

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 10)

(c) La région délimitée par la courbe, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées est notée A et la région délimitée par la courbe et l'axe des abscisses est notée B. Montrez que le rapport de l'aire de A sur l'aire de B est

$$\frac{e^{\pi}\left(e^{\frac{\pi}{2}}+1\right)}{e^{\pi}+1}.$$

[7 points]

Veuillez **ne pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.

*N'écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.*

SECTION B

*Répondez à **toutes** les questions sur les feuilles de réponses fournies. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.*

11. *[Note maximale : 18]*

Considérez les fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{2x^2+3}{75},\ x \geq 0$$

$$g(x) = \frac{|3x-4|}{10},\ x \in \mathbb{R}.$$

(a) Donnez les images de f et de g. *[2 points]*

(b) Trouvez une expression pour la fonction composée $f \circ g(x)$ sous la forme $\dfrac{ax^2+bx+c}{3750}$, où a, b et $c \in \mathbb{Z}$. *[4 points]*

(c) (i) Trouvez une expression pour la fonction réciproque $f^{-1}(x)$.

(ii) Donnez le domaine et l'image de f^{-1}. *[4 points]*

Les domaines de f et de g sont maintenant réduits à $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

(d) En considérant les valeurs de f et g sur ce nouveau domaine, déterminez laquelle des fonctions f et g pourrait être utilisée pour trouver la distribution de probabilité d'une variable aléatoire discrète X, en donnant clairement vos raisons. *[6 points]*

(e) En utilisant cette distribution de probabilité, calculez l'espérance mathématique de X. *[2 points]*

*N'écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.*

12. *[Note totale : 29]*

Partie A *[Note maximale : 12]*

(a) Soit $(x+\mathrm{i}y)^2 = -5+12\mathrm{i}$, x, $y \in \mathbb{R}$. Montrez que

(i) $x^2 - y^2 = -5$;

(ii) $xy = 6$. *[2 points]*

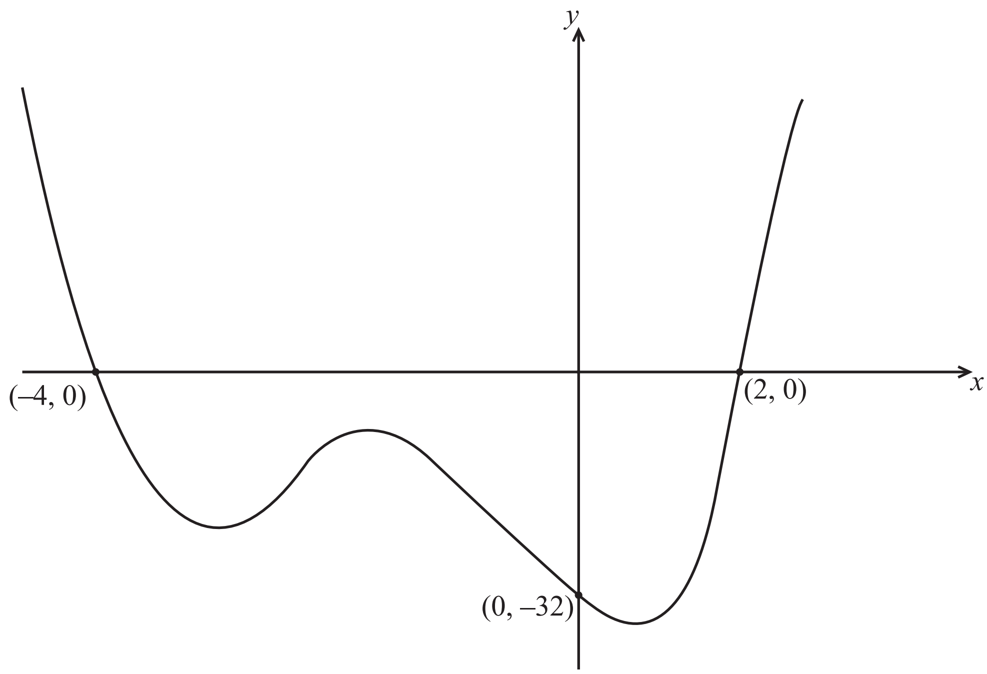
(b) Trouvez alors les deux racines carrées de $-5+12\mathrm{i}$. *[5 points]*

(c) Pour tout nombre complexe z, montrez que $(z^*)^2 = (z^2)^*$. *[3 points]*

(d) Donnez alors les deux racines carrées de $-5-12\mathrm{i}$. *[2 points]*

Partie B *[Note maximale : 17]*

La représentation graphique d'une fonction polynômiale f de degré 4 est donée ci-dessous.



(a) Expliquez pourquoi, des quatre racines de l'équation $f(x) = 0$, deux sont réelles et deux sont complexes. *[2 points]*

(Suite de la question à la page suivante)

*N'écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.*

(Suite de la question 12)

(b) La courbe passe par le point $(-1, -18)$. Trouvez $f(x)$ sous la forme $f(x) = (x-a)(x-b)(x^2+cx+d)$, où a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$. *[5 points]*

(c) Trouvez, sous forme cartésienne, les deux racines complexes de l'équation $f(x) = 0$. *[2 points]*

(d) Dessinez les quatre racines dans le plan complexe (plan d'Argand). *[2 points]*

(e) Exprimez chacune des quatre racines de l'équation sous la forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. *[6 points]*

13. *[Note maximale : 13]*

(a) En utilisant la définition formelle de la dérivée, c'est-à-dire $f'(x) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$, montrez que la dérivée de $\frac{1}{2x+1}$ est $\frac{-2}{(2x+1)^2}$. *[4 points]*

(b) Démontrez par récurrence que la $n^{\text{ième}}$ dérivée de $(2x+1)^{-1}$ est $(-1)^n \frac{2^n n!}{(2x+1)^{n+1}}$. *[9 points]*

Veuillez **ne pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.

Veuillez **ne pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.

Veuillez **ne pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.