M12/5/MATHL/HP3/SPA/TZ0/DM

22127227

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – MATEMÁTICAS DISCRETAS

Lunes 7 de mayo de 2012 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de información* ***de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NM*** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[60 puntos]*.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 15]*

(a) Utilice el algoritmo de Euclides para expresar $\text{mcd}(123, 2347)$ de la forma $123p + 2347q$, donde p, $q \in \mathbb{Z}$. *[8 puntos]*

(b) Halle la menor solución positiva de $123x \equiv 1 (\text{mod } 2347)$. *[3 puntos]*

(c) Halle la solución general de $123z \equiv 5 (\text{mod } 2347)$. *[3 puntos]*

(d) Indique el conjunto de soluciones de $123y \equiv 1 (\text{mod } 2346)$. *[1 punto]*

2. *[Puntuación máxima: 7]*

A continuación se muestra la matriz de adyacencia de costos correspondiente al grafo ponderado K.

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	5	2	0	0	0	0
B	5	0	0	0	7	0	0
C	2	0	0	4	4	0	0
D	0	0	4	0	2	0	9
E	0	7	4	2	0	4	3
F	0	0	0	0	4	0	1
G	0	0	0	9	3	1	0

Utilice el algoritmo de Prim, comenzando en G, para dibujar con precisión dos árboles generadores minimales distintos para K.

3. *[Puntuación máxima: 8]*

El grafo G tiene la siguiente matriz de adyacencia $\boldsymbol{M}$:

$$\begin{array}{c} \\ \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \\ \mathrm{D} \\ \mathrm{E} \\ \mathrm{F} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{E} & \mathrm{F} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) Dibuje con precisión el grafo G. *[2 puntos]*

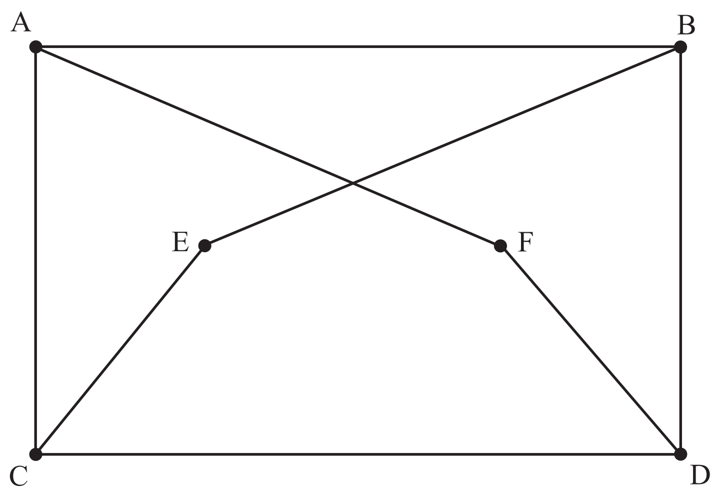
(b) ¿Qué información sobre G contienen los elementos de la diagonal de $\boldsymbol{M}^2$? *[1 punto]*

(c) Halle el número de recorridos de longitud 4 que comienzan en A y terminan en C. *[2 puntos]*

(d) Enumere los senderos de longitud 4 que comienzan en A y terminan en C. *[3 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 17]*

(a) Dibuje el complementario del siguiente grafo como un grafo planario.



[3 puntos]

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 4: continuación)

(b) Un grafo simple G tiene v vértices y e aristas. G', el complementario de G, tiene e' aristas.

(i) Demuestre que $e \leq \frac{1}{2}v(v-1)$.

(ii) Halle una expresión para $e+e'$ en función de v.

(iii) Sabiendo que G' y G son isomorfos, demuestre que v es de la forma $4n$ o $4n+1$, con $n \in \mathbb{Z}^+$.

(iv) Demuestre que existe un único grafo simple de 4 vértices que es isomorfo a su complementario.

(v) Demuestre que si $v \geq 11$, entonces no es posible que G y G' sean ambos planarios. *[14 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 13]*

(a) Utilice el resultado $2003 = 6 \quad 333 + 5$ y el pequeño teorema de Fermat para comprobar que $2^{2003} \equiv 4 \pmod 7$. *[3 puntos]*

(b) Halle $2^{2003} (\text{mod} 11)$ y $2^{2003} (\text{mod} 13)$. *[3 puntos]*

(c) Utilice el teorema chino del resto, u otro método alternativo, para calcular 2^{2003}(mod1001), teniendo en cuenta que $1001 = 7 \quad 11 \quad 13$. *[7 puntos]*