22127224

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 3 – STATISTIQUES ET PROBABILITÉS

Lundi 7 mai 2012 (après-midi)

1 heure

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du *livret d'informations pour le cours* ***de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NM*** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est *[60 points]*.

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. *[Note maximale : 14]*

Un boulanger prétend que le poids moyen de chaque pain qu'il produit est de 800 g. Beaucoup de ses clients pensent que le poids moyen de ses pains est inférieur à cela. Un inspecteur alimentaire vient à la boulangerie et pèse un échantillon aléatoire de 10 pains. Voici les résultats en grammes :

783, 802, 804, 785, 810, 805, 789, 781, 800, 791.

On suppose que ces résultats proviennent d'une distribution normale.

(a) Déterminez des estimations sans biais de la moyenne et de la variance de cette distribution. *[3 points]*

En dépit de ces résultats le boulanger insiste que ce qu'il affirme est correct.

(b) En formulant des hypothèses appropriées, testez l'affirmation du boulanger au seuil de signification de 10 % . *[7 points]*

L'inspecteur informe le boulanger qu'il doit améliorer son contrôle de la qualité et rejeter tous les pains qui pèsent moins de 790 g. Le boulanger change ses méthodes de production et affirme qu'il a réduit le nombre de pains trop légers. Au cours d'une visite ultérieure à la boulangerie l'inspecteur examine un échantillon aléatoire de pains mis en vente. Des 40 pains testés, 5 auraient dû être rejetés.

(c) Calculez un intervalle de confiance de 95 % pour la proportion des pains mis en vente qui devraient être rejetés. *[4 points]*

2. *[Note maximale : 6]*

La variable aléatoire X suit une distribution géométrique de paramètre p.

(a) Montrez que $\mathrm{P}(X \le n) = 1-(1-p)^n,\ n \in \mathbb{Z}^+$. *[3 points]*

(b) Déduisez-en une expression de $\mathrm{P}(m < X \le n),\ m,\ n \in \mathbb{Z}^+$ et $m < n$. *[1 point]*

(c) Étant donné que $p = 0{,}2$, trouvez la plus petite valeur de n pour laquelle $\mathrm{P}(1 < X \le n) > 0{,}5,\ n \in \mathbb{Z}^+$. *[2 points]*

3. *[Note maximale : 13]*

Chaque semaine la direction d'un club de football a enregistré le nombre de blessures subies par les joueurs du club pendant la semaine. Voici les résultats obtenus sur une période de 52 semaines :

Nombre de blessures par semaine	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de semaines	6	14	15	9	5	2	1

(a) Calculez la moyenne et la variance du nombre de blessures par semaine. *[2 points]*

(b) Expliquez pourquoi ces valeurs fournissent des arguments en faveur de l'utilisation d'un modèle de distribution de Poisson. *[1 point]*

(c) En formulant vos hypothèses, testez si une distribution de Poisson est un modèle approprié pour le nombre de blessures par semaine en utilisant un test du χ^2 avec un seuil de signification de 5 %. *[10 points]*

4. *[Note maximale : 19]*

La variable aléatoire continue X a une fonction de densité f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 0,5, \\ \dfrac{4}{3} - \dfrac{2}{3}x, & 0,5 \le x \le 2, \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases}$$

(a) Esquissez la fonction f et montrez que le premier quartile est 0,5. *[3 points]*

(b) (i) Déterminez $\mathrm{E}(X)$.

(ii) Déterminez $\mathrm{E}(X^2)$. *[4 points]*

Deux observations indépendantes de X sont faites et l'on additionne ces valeurs. La variable aléatoire ainsi obtenue est notée Y.

(c) (i) Déterminez $\mathrm{E}(Y-2X)$.

(ii) Déterminez $\mathrm{Var}(Y-2X)$. *[5 points]*

(d) (i) Trouvez la fonction de distribution de X.

(ii) À partir du résultat précédent, ou par tout autre méthode, trouvez la médiane de la distribution. *[7 points]*

5. *[Note maximale : 8]*

La variable aléatoire $X \sim \mathrm{Po}(m)$. Étant donné que $\mathrm{P}(X=k-1)=\mathrm{P}(X=k+1)$, où k est un entier positif,

(a) montrez que $m^2 = k(k+1)$; *[2 points]*

(b) montrez alors que le mode de X est k. *[6 points]*