M12/5/MATHL/HP3/SPA/TZ0/SE

22127228

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – SERIES Y ECUACIONES DIFERENCIALES

Lunes 7 de mayo de 2012 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de información* ***de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NM*** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[60 puntos]*.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 6]*

Utilice la regla de L'Hôpital para hallar $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$.

2. *[Puntuación máxima: 21]*

Considere la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{1+x}$, donde $x > -1$, e $y = 1$ para $x = 0$.

(a) Utilice el método de Euler con un paso de 0,1 para hallar el valor aproximado de y para $x = 0,5$. *[7 puntos]*

(b) (i) Compruebe que $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2y^3-y^2}{(1+x)^2}$.

(ii) A partir de lo anterior, halle la serie de Maclaurin para y, hasta el término en x^2 inclusive. *[8 puntos]*

(c) (i) Resuelva la ecuación diferencial.

(ii) Halle el valor de a para el cual $y \to \infty$ cuando $x \to a$. *[6 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 7]*

Halle la solución general de la ecuación diferencial $t\frac{dy}{dt} = \cos t - 2y$, para $t > 0$.

4. *[Puntuación máxima: 15]*

La progresión $\{u_n\}$ está definida de la siguiente forma: $u_n = \dfrac{3n+2}{2n-1}$, para $n \in \mathbb{Z}^+$.

(a) Compruebe que la progresión converge hacia un límite L, e indique el valor de dicho límite. *[3 puntos]*

(b) Halle el menor número entero N para el cual $|u_n - L| < \varepsilon$, para todo $n > N$, siendo

(i) $\varepsilon = 0.1$;

(ii) $\varepsilon = 0.00001$. *[4 puntos]*

(c) Para cada una de las progresiones $\left\{\dfrac{u_n}{n}\right\}$, $\left\{\dfrac{1}{2u_n - 2}\right\}$ y $\left\{(-1)^n u_n\right\}$, determine si la progresión converge o no converge. *[6 puntos]*

(d) Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - L)$ diverge. *[2 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 11]*

(a) Halle el conjunto de valores de k para los cuales la integral impropia $\int_2^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}$ converge. *[6 puntos]*

(b) Compruebe que la serie $\sum_{r=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^r}{r \ln r}$ es convergente pero no absolutamente convergente. *[5 puntos]*