22127223

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 3 – ENSEMBLES, RELATIONS ET GROUPES

Lundi 7 mai 2012 (après-midi)

1 heure

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du *livret d'informations pour le cours* ***de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NM*** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est *[60 points]*.

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. *[Note maximale : 17]*

(a) L'associativité et la commutativité sont deux des cinq propriétés qu'un ensemble S muni d'une opération binaire $*$ doit satisfaire pour être un groupe abélien ; donnez les trois autres propriétés. *[2 points]*

(b) La table de Cayley de l'opération binaire $\odot$ définie sur l'ensemble $T = \{p, q, r, s, t\}$ est donnée ci-dessous.

$\odot$	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{p}$	s	r	t	p	q
$\boldsymbol{q}$	t	s	p	q	r
$\boldsymbol{r}$	q	t	s	r	p
$\boldsymbol{s}$	p	q	r	s	t
$\boldsymbol{t}$	r	p	q	t	s

(i) Montrez qu'exactement trois des propriétés pour que $\{T, \odot\}$ soit un groupe abélien sont satisfaites mais que ni l'associativité ni la commutativité ne sont satisfaites.

(ii) Trouvez les sous-ensembles propres de T qui sont des groupes d'ordre 2, et commentez votre réponse dans le contexte du théorème de Lagrange.

(iii) Trouvez les solutions de l'équation $(p \odot x) \odot x = x \odot p$. *[15 points]*

2. *[Note maximale : 8]*

Les éléments des ensembles P et Q sont pris dans l'ensemble universel $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. $P = \{1, 2, 3\}$ et $Q = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

(a) Étant donné que $R = (P \cap Q')'$, listez les éléments de R. *[3 points]*

(b) Pour un ensemble S, nous définissons S^* comme l'ensemble de tous les sous-ensembles de S,

(i) trouvez P^* ;

(ii) trouvez $n(R^*)$. *[5 points]*

3. *[Note maximale : 14]*

La relation R est définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ de la manière suivante : pour $a, b \in \mathbb{N}$, aRb si et seulement si $a^3 \equiv b^3 \pmod 7$.

(a) Montrez que R est une relation d'équivalence. *[6 points]*

(b) Trouvez la classe d'équivalence qui contient 0. *[2 points]*

Soit C_n la classe d'équivalence qui contient n.

(c) Listez les six premiers éléments de C_1. *[3 points]*

(d) Démontrez que $C_n = C_{n+7}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. *[3 points]*

4. *[Note maximale : 7]*

(a) La fonction $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est définie par $g(n) = |n| - 1$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Montrez que g n'est ni surjective ni injective. *[2 points]*

(b) L'ensemble S est fini. Montrez que si la fonction $f : S \to S$ est injective alors elle est surjective. *[2 points]*

(c) En utilisant l'ensemble $\mathbb{Z}^+$, en tant que domaine et image, donnez un exemple de fonction injective qui n'est pas surjective. *[3 points]*

5. *[Note maximale : 14]*

Le groupe G a un élément unique, h, d'ordre 2.

(a) (i) Montrez que pour tout $g \in G$, ghg^{-1} est d'ordre 2.

(ii) Déduisez-en que $gh = hg$ pour tout $g \in G$. *[5 points]*

Considérez le groupe G constitué de quatre matrices 2×2, muni de la multiplication des matrices et contenant un élément unique, h, d'ordre 2, où $h = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) (i) Montrez que G est cyclique.

(ii) Étant donné l'élément neutre $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, déterminez une paire de matrices qui représentent les deux autres éléments de G, où chaque élément est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, a, b, c, $d \in \mathbb{C}$. *[9 points]*