22127229

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – CONJUNTOS, RELACIONES Y GRUPOS

Lunes 7 de mayo de 2012 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de información* ***de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NM*** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[60 puntos]*.

2212-7229

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 17]*

(a) Dos de las cinco condiciones que tiene que cumplir un conjunto S con respecto a la operación binaria $*$ para ser un grupo abeliano son la asociatividad y la conmutatividad. Indique las otras tres condiciones. *[2 puntos]*

(b) A continuación se muestra la tabla de Cayley para la operación binaria $\odot$ definida en el conjunto $T = \{p, q, r, s, t\}$.

$\odot$	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{p}$	s	r	t	p	q
$\boldsymbol{q}$	t	s	p	q	r
$\boldsymbol{r}$	q	t	s	r	p
$\boldsymbol{s}$	p	q	r	s	t
$\boldsymbol{t}$	r	p	q	t	s

(i) Compruebe que se cumplen exactamente tres de las condiciones necesarias para que $\{T, \odot\}$ sea un grupo abeliano, pero que ni la asociatividad ni la conmutatividad se cumplen.

(ii) Halle los subgrupos propios de T que son grupos de orden 2, y comente el resultado en el contexto del teorema de Lagrange.

(iii) Halle las soluciones de la ecuación $(p \odot x) \odot x = x \odot p$. *[15 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 8]*

Los elementos de los conjuntos P y Q se toman del conjunto universal $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. $P = \{1, 2, 3\}$ y $Q = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

(a) Sabiendo que $R = (P \cap Q')'$, enumere los elementos de R. *[3 puntos]*

(b) Para un conjunto S, sea S^* el conjunto de todos los subconjuntos de S,

(i) halle P^*;

(ii) halle $n(R^*)$. *[5 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 14]*

La relación R se define sobre el conjunto $\mathbb{N}$ de manera tal que, para $a, b \in \mathbb{N}$, aRb si y solo si $a^3 \equiv b^3 \pmod 7$.

(a) Compruebe que R es una relación de equivalencia. *[6 puntos]*

(b) Halle la clase de equivalencia a la que pertenece el 0. *[2 puntos]*

Denote como C_n a la clase de equivalencia a la que pertenece el número n.

(c) Enumere los seis primeros elementos de C_1. *[3 puntos]*

(d) Demuestre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $C_n = C_{n+7}$. *[3 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 7]*

(a) La función $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ viene dada por $g(n) = |n| - 1$ para $n \in \mathbb{Z}$. Compruebe que g no es ni sobreyectiva ni inyectiva. *[2 puntos]*

(b) El conjunto S es finito. Si la función $f: S \to S$ es inyectiva, compruebe que f es sobreyectiva. *[2 puntos]*

(c) Utilizando el conjunto $\mathbb{Z}^+$ como dominio y como recorrido, dé un ejemplo de función inyectiva que no sea sobreyectiva. *[3 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 14]*

El grupo G tiene un único elemento, h, de orden 2.

(a) (i) Compruebe que para todo $g \in G$, ghg^{-1} tiene orden 2.

(ii) Deduzca que, para todo $g \in G$, $gh = hg$. *[5 puntos]*

Considere el grupo G para la multiplicación de matrices, que consta de cuatro matrices 2×2 y contiene un único elemento, h, de orden 2, siendo $h = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) (i) Compruebe que G es cíclico.

(ii) Dado el elemento neutro $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, halle un par de matrices que representen a los dos elementos restantes de G, donde cada elemento es de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. *[9 puntos]*