22127225

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 1

Número de convocatoria del alumno

0	0							

Jueves 3 de mayo de 2012 (tarde)

Código del examen

2	2	1	2	–	7	2	2	5

2 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas en las casillas provistas.
- Sección B: conteste todas las preguntas en las hojas de respuesta provistas. Escriba su número de convocatoria en cada una de las hojas de respuestas, y adjúntelas a este cuestionario de examen y a su portada empleando los cordeles provistos.
- Cuando termine el examen, indique en la casilla correspondiente de la portada el número de hojas que ha utilizado.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de información* ***de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NM*** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[120 puntos]*.

0120

17 páginas

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN A

*Conteste **todas** las preguntas en los espacios provistos. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.*

1. *[Puntuación máxima: 6]*

Cuando se divide $2x^3 + kx^2 + 6x + 32$ y $x^4 - 6x^2 - k^2x + 9$ entre $x + 1$, en ambos casos se obtiene el mismo resto. Halle los posibles valores de k.

2. *[Puntuación máxima: 5]*

Halle los valores de x para los cuales los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 2\cos x \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 2\operatorname{sen} x \\ 1 \end{pmatrix}$ son perpendiculares, siendo $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

3. *[Puntuación máxima: 5]*

En un día dado, la probabilidad de que llueva es igual a $\frac{2}{5}$. La probabilidad de que el equipo de fútbol "Tigers" gane en un día de lluvia es $\frac{2}{7}$, mientras que la probabilidad de que gane un día que no llueve es igual a $\frac{4}{7}$.

(a) Dibuje con precisión un diagrama de árbol para representar estos sucesos y sus posibles resultados. *[1 punto]*

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo de fútbol "Tigers" gane? *[2 puntos]*

(c) Sabiendo que el equipo de fútbol "Tigers" ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que ese día haya llovido? *[2 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 5]*

(a) Desarrolle and simplifique $\left(x-\frac{2}{x}\right)^4$. *[3 puntos]*

(b) A partir de lo anterior, determine el término constante del desarrollo $(2x^2+1)\left(x-\frac{2}{x}\right)^4$. *[2 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. *[Puntuación máxima: 5]*

Tres matrices de 2×2 no singulares, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{X}$, satisfacen la ecuación $4\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{B}$.

(a) Halle $\boldsymbol{X}$ en función de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$. *[2 puntos]*

(b) Sabiendo que $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{B}$, halle $\boldsymbol{X}$. *[3 puntos]*

6. *[Puntuación máxima: 7]*

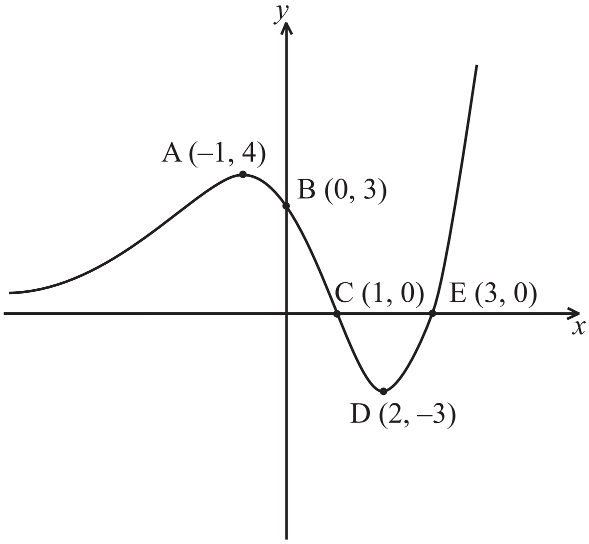
Sabiendo que $(4-5\mathrm{i})m+4n=16+15\mathrm{i}$, donde $\mathrm{i}^2=-1$, halle m y n si

(a) m y n son números reales; *[3 puntos]*

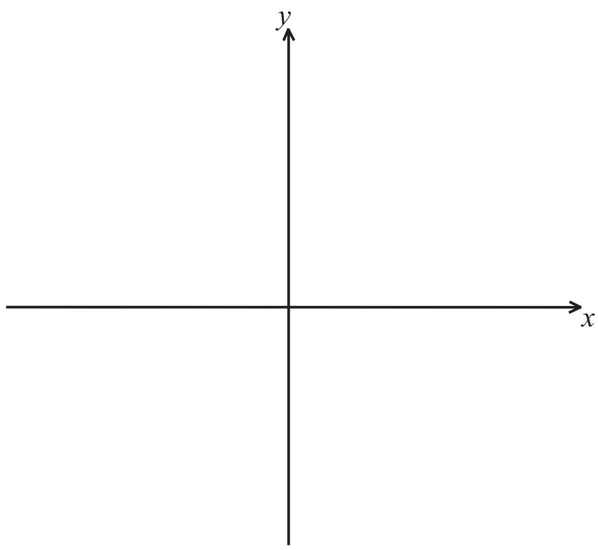
(b) m y n son números complejos conjugados. *[4 puntos]*

7. *[Puntuación máxima: 6]*

A continuación se muestra la gráfica de $y = f(x)$, donde A es un máximo local y D es un mínimo local.



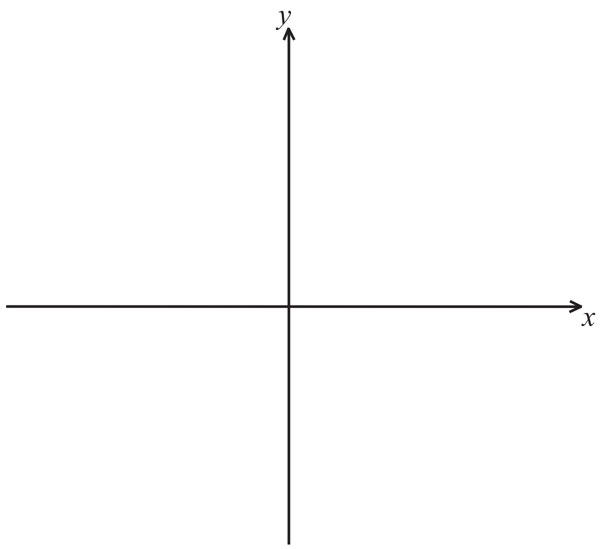
(a) Sobre los siguientes ejes de coordenadas, dibuje aproximadamente la gráfica de $y = \dfrac{1}{f(x)}$, mostrando claramente las coordenadas de las imágenes de los puntos A, B y D, rotulándolos A', B' y D' respectivamente, y las ecuaciones de todas las asíntotas verticales. *[3 puntos]*



(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 7: continuación)

(b) Sobre los siguientes ejes de coordenadas, aproximadamente la gráfica de la función derivada $y = f'(x)$, mostrando claramente las coordenadas de las imágenes de los puntos A y D, y rotulándolos A'' y D'' respectivamente. *[3 puntos]*



8. *[Puntuación máxima: 6]*

Sea $x^3 y = a \operatorname{sen} nx$. Utilizando la derivación implícita, compruebe que:

$$x^3 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 6x^2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (n^2 x^2 + 6)\, xy = 0 .$$

9. *[Puntuación máxima: 6]*

Compruebe que $\dfrac{\cos A + \operatorname{sen} A}{\cos A - \operatorname{sen} A} = \sec 2A + \operatorname{tg} 2A$.

10. *[Puntuación máxima: 9]*

La función f, definida en el dominio $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, viene dada por $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \cos x$.

(a) Indique los dos ceros de f. *[1 punto]*

. . . .

(b) Dibuje aproximadamente la gráfica de f. *[1 punto]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 10: continuación)

(c) Se denomina A a la región delimitada por la gráfica, el eje x y el eje y, mientras que se denomina B a la región delimitada por la gráfica y el eje x.
Compruebe que la razón entre el área de A y el área de B es igual a

$$\frac{e^{\pi}\left(e^{\frac{\pi}{2}}+1\right)}{e^{\pi}+1}.$$

[7 puntos]

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

***NO** escriba soluciones en esta página.*

SECCIÓN B

*Conteste **todas** las preguntas en las hojas de respuestas provistas. Empiece una página nueva para cada respuesta.*

11. *[Puntuación máxima: 18]*

Considere las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{2x^2+3}{75},\ x \geq 0$$

$$g(x) = \frac{|3x-4|}{10},\ x \in \mathbb{R}.$$

(a) Indique el recorrido de f y el de g. *[2 puntos]*

(b) Halle una expresión para la función compuesta $f \circ g(x)$, de la forma $\frac{ax^2+bx+c}{3750}$, donde a, b y $c \in \mathbb{Z}$. *[4 puntos]*

(c) (i) Halle una expresión para la función inversa $f^{-1}(x)$.

(ii) Indique el dominio y el recorrido de f^{-1}. *[4 puntos]*

Ahora el dominio de f y el de g quedan restringidos a $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

(d) Considerando los valores de f y de g en este nuevo dominio, determine cuál de las dos funciones, f y g, podría utilizarse para hallar una distribución de probabilidad para una variable aleatoria discreta X. Explique claramente las razones por las cuales ha dado esa respuesta. *[6 puntos]*

(e) Utilizando esta distribución de probabilidad, calcule la media de X. *[2 puntos]*

NO *escriba soluciones en esta página.*

12. *[Puntuación total: 29]*

Apartado A *[Puntuación máxima: 12]*

(a) Sabiendo que $(x+\mathrm{i}y)^2 = -5+12\mathrm{i}$, x, $y \in \mathbb{R}$. Compruebe que:

(i) $x^2 - y^2 = -5$;

(ii) $xy = 6$. *[2 puntos]*

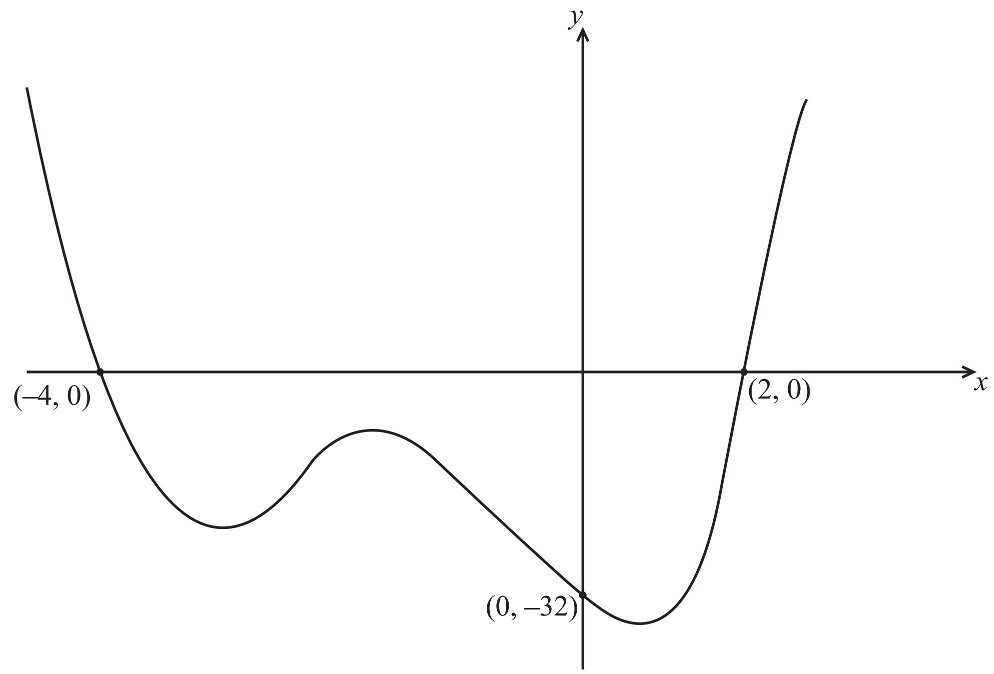
(b) A partir de lo anterior, halle las dos raíces cuadradas de $-5+12\mathrm{i}$. *[5 puntos]*

(c) Compruebe que para todo número complejo z, $(z^*)^2 = (z^2)^*$. *[3 puntos]*

(d) A partir de lo anterior, escriba las dos raíces cuadradas de $-5-12\mathrm{i}$. *[2 puntos]*

Apartado B *[Puntuación máxima: 17]*

La gráfica de una función polinómica f de grado 4 se muestra a continuación.



(a) Explique por qué, de las cuatro raíces de la ecuación $f(x) = 0$, dos son reales y dos son complejas. *[2 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

***NO** escriba soluciones en esta página.*

(Pregunta 12: continuación)

(b) La curva pasa por el punto $(-1, -18)$. Halle $f(x)$ de la forma $f(x) = (x-a)(x-b)(x^2+cx+d)$, donde a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$. *[5 puntos]*

(c) Halle las dos raíces complejas de la ecuación $f(x) = 0$, expresándolas en forma cartesiana. *[2 puntos]*

(d) Dibuje con precisión las cuatro raíces sobre el plano complejo (el plano de Argand). *[2 puntos]*

(e) Exprese cada una de las cuatro raíces de la ecuación de la forma $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. *[6 puntos]*

13. *[Puntuación máxima: 13]*

(a) Utilizando la definición de derivada, $f'(x) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$, compruebe que la derivada de $\frac{1}{2x+1}$ es $\frac{-2}{(2x+1)^2}$. *[4 puntos]*

(b) Demuestre mediante inducción matemática que la derivada n-ésima de $(2x+1)^{-1}$ es $(-1)^n \frac{2^n n!}{(2x+1)^{n+1}}$. *[9 puntos]*

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.