M13/5/MATHL/HP3/SPA/TZ0/SE

22137228

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – SERIES Y ECUACIONES DIFERENCIALES

Martes 21 de mayo de 2013 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de información* ***de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NM*** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[60 puntos]*.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 9]*

La serie de Taylor de $\sqrt{x}$ alrededor de $x=1$ viene dada por

$$a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 + \ldots$$

(a) Halle el valor de a_0, a_1, a_2 y a_3. *[6 puntos]*

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle el valor de $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$. *[3 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 15]*

Considere la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} + y\,\text{tg}\,x = \cos^2 x$, sabiendo que cuando $x=0$, $y=2$.

(a) Utilice el método de Euler con un paso de 0,1 para hallar un valor aproximado para y cuando $x=0{,}3$. *[5 puntos]*

(b) (i) Compruebe que el factor integrante para resolver la ecuación diferencial es $\sec x$.

(ii) A partir de lo anterior, resuelva la ecuación diferencial, expresando su respuesta en la forma $y = f(x)$. *[10 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 11]*

Considere la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} x^n$.

(a) Halle el radio de convergencia. *[4 puntos]*

(b) Halle el intervalo de convergencia. *[3 puntos]*

(c) Sabiendo que $x = -0,1$, halle la suma de la serie con una aproximación de tres cifras significativas. *[4 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 11]*

(a) Exprese $\frac{1}{r(r+2)}$ en fracciones simples. *[3 puntos]*

(b) Sea $S_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+2)}$.

(i) Compruebe que $S_n = \frac{an^2 + bn}{4(n+1)(n+2)}$, donde a y b son números enteros positivos cuyos valores se deberán determinar.

(ii) Escriba el valor de $\lim_{n \to \infty} S_n$. *[8 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 14]*

(a)

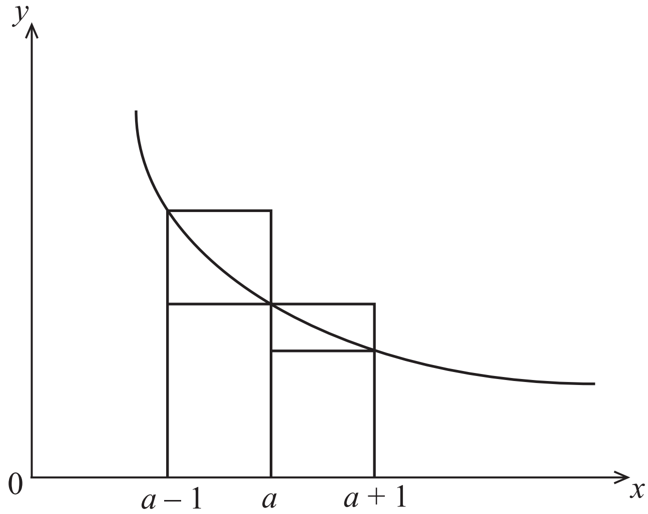

Figura 1

La figura 1 muestra una parte de la gráfica de $y = \frac{1}{x}$, junto con segmentos de recta paralelos a los ejes de coordenadas.

(i) Partiendo del área de rectángulos apropiados, compruebe que:

$$\frac{2a+1}{a(a+1)} < \ln\left(\frac{a+1}{a-1}\right) < \frac{2a-1}{a(a-1)}.$$

(ii) A partir de lo anterior, halle un límite inferior y un límite superior para $\ln(1,2)$. *[9 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 5: continuación)

(b)

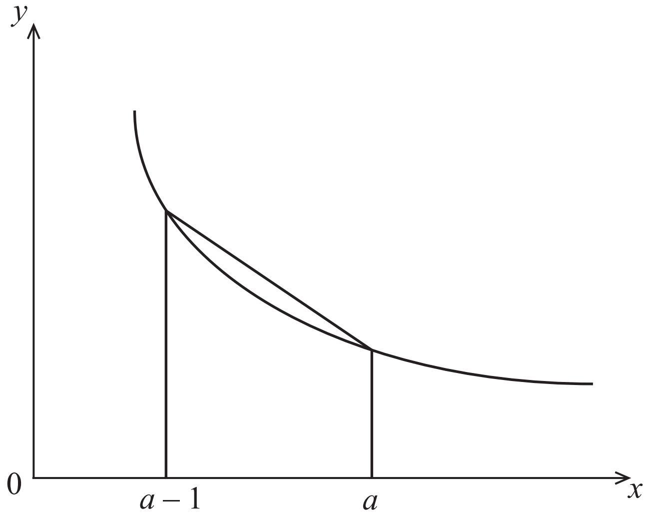

Figura 2

Se puede obtener un valor mejorado para el límite superior considerando la figura 2, que muestra de nuevo una parte de la gráfica de $y = \frac{1}{x}$.

(i) Partiendo del área de regiones apropiadas, compruebe que:

$$\ln\left(\frac{a}{a-1}\right) < \frac{2a-1}{2a(a-1)}.$$

(ii) A partir de lo anterior, halle un límite superior para $\ln(1,2)$. *[5 puntos]*