22137220

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 2

Numéro de session du candidat

0	0							

Vendredi 10 mai 2013 (matin)

Code de l'examen

2	2	1	3	–	7	2	2	0

2 heures

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d'examen et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du *livret d'informations pour le cours de* ***mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NM*** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est *[120 points]*.

15 pages
© International Baccalaureate Organization 2013

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

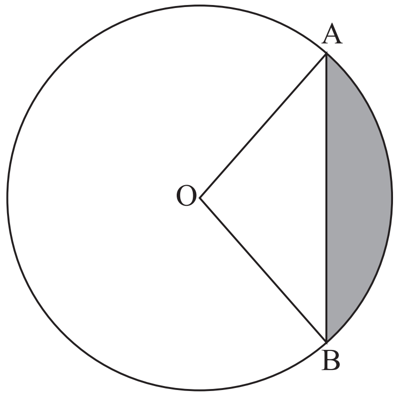
SECTION A

Répondez à ***toutes*** *les questions dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.*

1. *[Note maximale : 5]*

Un cercle de rayon 4 cm, de centre O, est coupé par une corde [AB] de longueur 6 cm.

la figure n'est pas à l'échelle



(a) Trouvez $\mathrm{A\hat{O}B}$, en exprimant votre réponse en radians avec quatre chiffres significatifs. *[2 points]*

(b) Déterminez l'aire de la région grisée. *[3 points]*

2. *[Note maximale : 5]*

Considérez le système d’équations

$$\begin{aligned} 0,1x - 1,7y + 0,9z &= -4,4 \\ -2,4x + 0,3y + 3,2z &= 1,2 \\ 2,5x + 0,6y - 3,7z &= 0,8\,. \end{aligned}$$

(a) Exprimez ce système d’équations sous forme matricielle. *[2 points]*

(b) Trouvez la solution de ce système d’équations. *[3 points]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. *[Note maximale : 5]*

On considère que la durée de vie des chats Manx est normalement distribuée avec une moyenne de 13,5 années et une variance de 9,5 années^2.

(a) Calculez l'intervalle des durées de vie des chats Manx dont la durée de vie est à moins d'un écart-type de la moyenne. *[2 points]*

(b) Estimez le nombre de chats Manx dans une population de 10 000 individus qui auront une durée de vie inférieure à 10 ans. Donnez votre réponse à l'entier le plus proche. *[3 points]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4. *[Note maximale : 6]*

(a) Trouvez $\int x \sec^2 x \, \mathrm{d}x$. *[4 points]*

(b) Déterminez la valeur de m telle que $\int_0^m x \sec^2 x \, \mathrm{d}x = 0{,}5$, avec $m > 0$. *[2 points]*

5. *[Note maximale : 6]*

La suite arithmétique $\{u_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ a comme premier terme $u_1 = 1,6$ et comme raison $d = 1,5$. La suite géométrique $\{v_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ a comme premier terme $v_1 = 3$ et comme raison $r = 1,2$.

(a) Trouvez une expression pour $u_n - v_n$ en fonction de n. *[2 points]*

(b) Déterminez l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles $u_n > v_n$. *[3 points]*

(c) Déterminez la plus grande valeur de $u_n - v_n$. Donnez votre réponse avec quatre chiffres significatifs. *[1 point]*

6. *[Note maximale : 6]*

(a) Résolvez l'équation $3\cos^2 x - 8\cos x + 4 = 0$, où $0 \le x \le 180°$, en exprimant votre/vos réponse(s) au degré le plus proche. *[3 points]*

(b) Trouvez les valeurs exactes de $\sec x$ vérifiant l'équation $3\sec^4 x - 8\sec^2 x + 4 = 0$. *[3 points]*

7. *[Note maximale : 7]*

La longueur X, en mètres, d'une espèce de poisson a comme fonction de densité :

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, \text{ si } 0 \le x \le 0,5 \\ 0,5a\,(1-x), \text{ si } 0,5 \le x \le 1 \\ 0, \text{ sinon}. \end{cases}$$

(a) Montrez que $a = 9,6$. *[3 points]*

(b) Esquissez la représentation graphique de la distribution. *[2 points]*

(c) Trouvez $\mathrm{P}(X < 0,6)$. *[2 points]*

8. *[Note maximale : 7]*

Utilisez la méthode des démonstrations par récurrence pour prouver que $5^{2n} - 24n - 1$ est divisible par 576 pour $n \in \mathbb{Z}^+$.

9. *[Note maximale : 7]*

Une petite entreprise de location de voitures dispose de deux voitures. Chaque voiture peut être louée pour une journée complète à la fois. Le prix de la location est de 60 USD par voiture par jour. Le nombre de demandes de location pour une journée complète peut être modélisé par une distribution de Poisson de moyenne 1,2.

(a) Trouvez la probabilité qu'au cours d'un week-end particulier trois demandes soient reçues le samedi et aucune ne soit reçue le dimanche. *[2 points]*

Sur un week-end de deux jours, on sait qu'un total de trois demandes sont reçues.

(b) Trouvez le revenu total de location espéré pour ce week-end. *[5 points]*

10. *[Note maximale : 6]*

L'accélération d'une voiture est $\frac{1}{40}(60-v)\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, lorsque sa vitesse est $v\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. Étant donné que la voiture part d'une position arrêtée, trouvez la vitesse de la voiture après 30 secondes.

*N'écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.*

SECTION B

*Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.*

11. *[Note maximale : 19]*

(a) (i) Exprimez, en utilisant la notation sigma, la somme des n premiers entiers impairs positifs.

(ii) Montrez que la somme décrite ci-dessus est n^2.

(iii) Déduisez-en la valeur de la différence entre la somme des 47 premiers entiers impairs positifs et la somme des 14 premiers entiers impairs positifs. *[4 points]*

(b) Un certain nombre de points distincts sont marqués sur la circonférence d'un cercle formant ainsi un polygone. Les diagonales sont dessinées en joignant toutes les paires de points non-adjacents.

(i) Dans le cas où 5 points sont marqués, représentez sur une figure toutes les diagonales.

(ii) Dans le cas où n points sont marqués, montrez que le nombre de diagonales est $\frac{n(n-3)}{2}$, où $n > 2$.

(iii) Étant donné qu'il y a plus d'un million de diagonales, déterminez le nombre minimal de points pour lequel cela est possible. *[7 points]*

(c) La variable aléatoire $X \sim B(n, p)$ a pour moyenne 4 et pour variance 3.

(i) Déterminez n et p.

(ii) Trouvez la probabilité que l'on obtienne comme résultat 1 ou 3 au cours d'une seule expérience. *[8 points]*

*N'écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.*

12. *[Note maximale : 22]*

Considérez l'équation différentielle $y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos 2x$.

(a) (i) Montrez que la fonction $y = \cos x + \sin x$ satisfait l'équation différentielle.

(ii) Trouvez la solution générale de l'équation différentielle. Exprimez votre solution sous la forme $y = f(x)$, faisant intervenir une constante d'intégration.

(iii) Pour quelle valeur de la constante d'intégration votre solution coïncide-t-elle avec la fonction donnée en (i)? *[10 points]*

(b) Une solution différente de l'équation différentielle, telle que $y = 2$ lorsque $x = \dfrac{\pi}{4}$ définit une courbe C.

(i) Déterminez l'équation de C sous la forme $y = g(x)$ et indiquez l'image de la fonction g.

Une région R du plan xy est délimitée par C, l'axe des abscisses x et les droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$.

(ii) Trouvez l'aire de R.

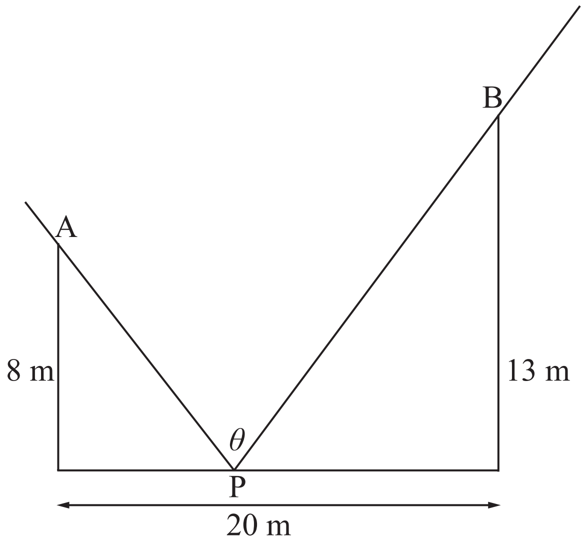
(iii) Trouvez le volume engendré par une rotation de 2π radians autour de l'axe des abscisses x de la partie de R qui se trouve au-dessus de la droite $y = 1$. *[12 points]*

*N'écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.*

13. *[Note maximale : 19]*

Une rue droite de 20 mètres de largeur est bordée le long de ses cotés parallèles par deux murs verticaux, l'un de 13 mètres de haut et l'autre de 8 mètres de haut. L'intensité de la lumière au point P au niveau du sol sur la rue est proportionnelle à l'angle θ, où $\theta = \text{A}\hat{\text{P}}\text{B}$, comme le montre la figure.

la figure n'est pas à l'échelle



(a) Trouvez une expression pour θ en fonction de x, où x est la distance de P à la base du mur de 8 mètres de haut. *[2 points]*

(b) (i) Calculez la valeur de θ quand $x = 0$.

(ii) Calculez la valeur de θ quand $x = 20$. *[2 points]*

(c) Esquissez la courbe représentant θ, pour $0 \leq x \leq 20$. *[2 points]*

(d) Montrez que $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \dfrac{5(744 - 64x - x^2)}{(x^2 + 64)(x^2 - 40x + 569)}$. *[6 points]*

(e) En utilisant le résultat de la partie (d), ou par toute autre méthode, déterminez la valeur de x correspondant au maximum d'intensité de la lumière en P. Donnez votre réponse avec quatre chiffres significatifs. *[3 points]*

(f) Le point P se déplace en traversant la rue à la vitesse de $0{,}5\ \text{m}\,\text{s}^{-1}$. Déterminez le taux de variation de θ par rapport au temps lorsque P se trouve au point milieu de la rue. *[4 points]*

Veuillez **ne pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.

Veuillez **ne pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.