22137227

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – MATEMÁTICAS DISCRETAS

Martes 21 de mayo de 2013 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de información* ***de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NM*** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[60 puntos]*.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 15]*

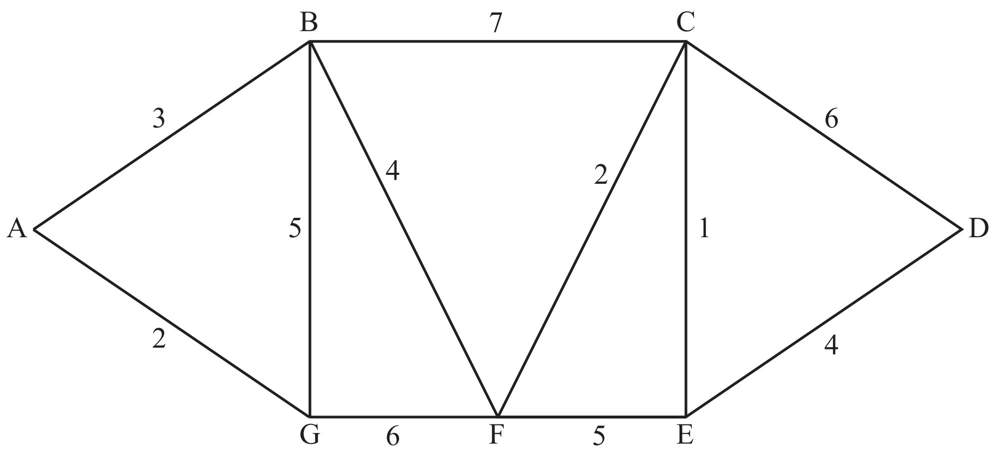
(a) Utilizando el algoritmo de Euclides, compruebe que $\text{mcd}(99, 332) = 1$. *[4 puntos]*

(b) (i) Halle la solución general de la ecuación diofántica $332x - 99y = 1$.

(ii) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle el menor número entero positivo que satisface la congruencia $17z \equiv 1(\text{mod}\,57)$. *[11 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 12]*

La figura muestra un grafo ponderado cuyos vértices son A, B, C, D, E, F, G. En la figura se indica el peso de cada arista.



(a) (i) Explique brevemente por qué el grafo contiene un sendero euleriano pero no contiene un circuito euleriano.

(ii) Escriba un sendero euleriano. *[4 puntos]*

(b) (i) Utilice el algoritmo de Dijkstra para hallar el camino que une A y D y que tiene un peso total mínimo.

(ii) Indique el peso total mínimo. *[8 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 10]*

Cuando los números se escriben en base n, se cumple que $33^2 = 1331$.

(a) Determine el valor de n. Para ello, escriba una ecuación polinómica apropiada. *[4 puntos]*

(b) Reescriba la ecuación anterior utilizando números en base 7. *[6 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 15]*

El grafo G tiene la siguiente matriz de adyacencia.

$$\begin{array}{c} \\ \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \\ \mathrm{D} \\ \mathrm{E} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{E} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) Determine el número de recorridos de longitud cinco que empiezan y terminan en E. *[3 puntos]*

(b) Compruebe que G y su complementario G' tienen el mismo número de aristas. *[3 puntos]*

(c) (i) Determine la matriz de adyacencia de G', escribiendo los vértices en el siguiente orden: B, D, A, C, E.

(ii) Deduzca que G y G' son isomorfos. *[5 puntos]*

(d) El grafo H tiene 6 vértices. Compruebe que H y H', el complementario de H, no pueden ser isomorfos. *[4 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 8]*

El número entero positivo p es un número primo impar.

(a) Compruebe que $\sum_{k=1}^{p} k^{p} \equiv 0 \pmod{p}$. *[4 puntos]*

(b) Sabiendo que $\sum_{k=1}^{p} k^{p-1} \equiv n \pmod{p}$ donde $0 \le n \le p-1$, halle el valor de n. *[4 puntos]*