M13/5/MATHL/HP3/FRE/TZ0/SP

22137224

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 3 – STATISTIQUES ET PROBABILITÉS

Mardi 21 mai 2013 (après-midi)

1 heure

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du *livret d'informations pour le cours* ***de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NM*** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est *[60 points]*.

2213-7224

4 pages

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. *[Note maximale : 10]*

La variable aléatoire X est normalement distribuée avec une moyenne μ inconnue et une variance σ^2 inconnue. Un échantillon aléatoire de 20 observations sur X a donné les résultats suivants :

$$\sum x = 280, \sum x^2 = 3977{,}57$$

(a) Trouvez des estimations sans biais de μ et σ^2. *[3 points]*

(b) Déterminez un intervalle de confiance à 95 % pour μ. *[3 points]*

(c) On pose les hypothèses

$$\mathrm{H}_0 : \mu = 15 \text{ ; } \mathrm{H}_1 : \mu \neq 15 ,$$

trouvez la valeur p des résultats ci-dessus et indiquez votre conclusion au seuil de signification de 1 %. *[4 points]*

2. *[Note maximale : 12]*

Une équipe de hockey a disputé 60 matches la saison dernière. Le directeur pense que le nombre de buts marqués par l'équipe au cours d'un match peut être modélisé par une distribution de Poisson et il a construit le tableau suivant à partir des résultats de la saison.

Nombre de buts	0	1	2	3	4	5
Effectifs	8	9	17	14	7	5

(a) Indiquez des hypothèses appropriées pour tester le point de vue du directeur. *[1 point]*

(b) Le directeur décide de réaliser un test d'ajustement du χ^2 approprié.

(i) Construisez un tableau approprié des effectifs théoriques dont les valeurs sont données avec une précision de **quatre chiffres après la virgule**.

(ii) Déterminez la valeur du χ^2_{calc} et la valeur p correspondante.

(iii) Indiquez si votre analyse est en faveur de ce que pense le directeur ou pas. *[11 points]*

3. *[Note maximale : 9]*

On peut supposer que le nombre de pannes de machine se produisant pendant une journée dans une certaine usine suit une distribution de Poisson de moyenne μ. On sait, par l'expérience acquise, que la valeur de μ est 1,2. Dans une tentative pour réduire la valeur de μ, toutes les machines sont équipées de nouvelles unités de contrôle. Pour étudier si celles-ci réduisent ou pas la valeur de μ, on enregistre le nombre total de pannes, x, se produisant pendant une période de 30 jours après l'installation de ces nouvelles unités.

(a) Indiquez des hypothèses appropriées pour cette étude. *[1 point]*

(b) Il est décidé de définir la région critique par $x \le 25$.

(i) Calculez le seuil de signification.

(ii) En supposant que la valeur de μ a été effectivement réduite à 0,75, déterminez la probabilité d'une erreur de type II. *[8 points]*

4. *[Note maximale : 14]*

La variable aléatoire continue X a une fonction de densité f donnée par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2+2x}{10}, & \text{pour } 1\le x\le 2\\ 0, & \text{autrement.}\end{cases}$$

(a) (i) Déterminez une expression pour $F(x)$, valable pour $1\le x\le 2$, où F représente la fonction de distribution cumulative de X.

(ii) À partir de là, ou par toute autre méthode, déterminez la médiane de X. *[6 points]*

(b) (i) Indiquez le théorème central limite.

(ii) Un échantillon aléatoire de 150 observations est sélectionné à partir de la distribution de X et on note $\bar{X}$ la moyenne de l'échantillon. Utilisez le théorème central limite pour trouver, approximativement, la probabilité que $\bar{X}$ soit supérieure à 1,6. *[8 points]*

5. *[Note maximale : 15]*

Lorsque Ben tire à l'arc, il atteint la cible avec une probabilité de 0,4. Les tirs successifs sont indépendants.

(a) Trouvez la probabilité qu'il atteigne la cible

(i) exactement 4 fois au cours de ses 8 premiers tirs ;

(ii) pour la 4^{e} fois avec son 8^{e} tir. *[6 points]*

(b) Ben atteint la cible pour la 10^{e} fois avec son $X^{\text{ième}}$ tir.

(i) Déterminez l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

(ii) Donnez une expression pour $\mathrm{P}(X=x)$ et montrez que

$$\frac{\mathrm{P}(X=x)}{\mathrm{P}(X=x-1)}=\frac{3(x-1)}{5(x-10)}.$$

(iii) À partir de là, ou par toute autre méthode, trouvez la valeur de X la plus probable. *[9 points]*