22137229

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – CONJUNTOS, RELACIONES Y GRUPOS

Martes 21 de mayo de 2013 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de información* ***de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NM*** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[60 puntos]*.

2213-7229

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 10]*

La operación binaria $*$ se define sobre $\mathbb{N}$ del siguiente modo: $a * b = 1 + ab$.

Determine si $*$

(a) es cerrada; *[2 puntos]*

(b) es conmutativa; *[2 puntos]*

(c) es asociativa; *[3 puntos]*

(d) tiene un elemento neutro. *[3 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 16]*

Considere el conjunto $S = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ con respecto a la operación binaria multiplicación módulo 14, denotada como $\times_{14}$.

(a) Copie y complete la siguiente tabla de Cayley para esta operación binaria.

$\times_{14}$	**1**	**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	**13**
1	1	3	5	7	9	11	13
3	3				13	5	11
5	5				3	13	9
7	7						
9	9	13	3				
11	11	5	13				
13	13	11	9				

[4 puntos]

(b) Dé una razón que explique por qué $\{S, \times_{14}\}$ no es un grupo. *[1 punto]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 2: continuación)

(c) Compruebe que se puede formar un nuevo conjunto G eliminando uno de los elementos de S, de modo tal que $\{G, \times_{14}\}$ sea un grupo. *[5 puntos]*

(d) Determine el orden de cada uno de los elementos de $\{G, \times_{14}\}$. *[4 puntos]*

(e) Halle los subgrupos propios de $\{G, \times_{14}\}$. *[2 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 13]*

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define del siguiente modo:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{para } x \le 2 \\ x^2 - 2x + 5 & \text{para } x > 2\,. \end{cases}$$

(a) (i) Dibuje aproximadamente la gráfica de f.

(ii) Haciendo referencia a la gráfica que ha dibujado, compruebe que f es una aplicación biyectiva. *[5 puntos]*

(b) Halle $f^{-1}(x)$. *[8 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 13]*

La relación R se define sobre $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ de la siguiente manera: aRb si y solo si $a(a+1) \equiv b(b+1) \pmod 5$.

(a) Compruebe que R es una relación de equivalencia. *[6 puntos]*

(b) Compruebe que la equivalencia que define a R se puede escribir de la forma

$$(a-b)(a+b+1) \equiv 0 \pmod 5\,.$$ *[3 puntos]*

(c) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, determine las clases de equivalencia. *[4 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 8]*

H y K son subgrupos de un grupo G. Considerando los cuatro axiomas de grupo, demuestre que $H \cap K$ también es un subgrupo de G.