22137222

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 3 – SÉRIES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Mardi 21 mai 2013 (après-midi)

1 heure

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du *livret d'informations pour le cours* ***de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NM*** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est *[60 points]*.

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. *[Note maximale : 9]*

La série de Taylor de $\sqrt{x}$ autour de $x=1$ est donnée par

$$a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 + \ldots$$

(a) Trouvez les valeurs de a_0, a_1, a_2 et a_3. *[6 points]*

(b) À partir de là, ou par toute autre méthode, trouvez la valeur de $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$. *[3 points]*

2. *[Note maximale : 15]*

Considérez l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\tan x = \cos^2 x$, étant donné que $y=2$ lorsque $x=0$.

(a) Utilisez la méthode d'Euler avec un pas de longueur 0,1 pour trouver une approximation de la valeur de y lorsque $x=0,3$. *[5 points]*

(b) (i) Montrez que le facteur d'intégration pour résoudre l'équation différentielle est $\sec x$.

(ii) À partir de là, résolvez l'équation différentielle, en donnant votre réponse sous la forme $y = f(x)$. *[10 points]*

3. *[Note maximale : 11]*

Considérez la série infinie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}x^n$.

(a) Trouvez le rayon de convergence. *[4 points]*

(b) Trouvez l'intervalle de convergence. *[3 points]*

(c) Étant donné que $x=-0,1$, trouvez la somme de la série avec une précision de trois chiffres significatifs. *[4 points]*

4. *[Note maximale : 11]*

(a) Exprimez $\dfrac{1}{r(r+2)}$ en fractions partielles. *[3 points]*

(b) Soit $S_n = \sum_{r=1}^{n} \dfrac{1}{r(r+2)}$.

(i) Montrez que $S_n = \dfrac{an^2 + bn}{4(n+1)(n+2)}$, où a et b sont des entiers positifs dont les valeurs sont à déterminer.

(ii) Donnez la valeur de $\lim_{n\to\infty} S_n$. *[8 points]*

5. *[Note maximale : 14]*

(a)

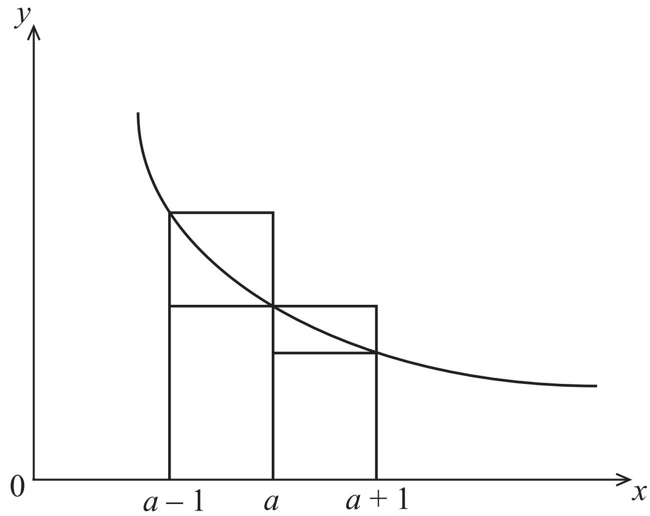

Figure 1

La figure 1 représente une partie de la courbe $y = \dfrac{1}{x}$ avec des segments de droite parallèles aux axes de coordonnées.

(i) En considérant les aires de rectangles appropriés, montrez que

$$\frac{2a+1}{a(a+1)} < \ln\left(\frac{a+1}{a-1}\right) < \frac{2a-1}{a(a-1)}.$$

(ii) À partir de là, trouvez des bornes inférieure et supérieure pour $\ln(1,2)$. *[9 points]*

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 5)

(b)

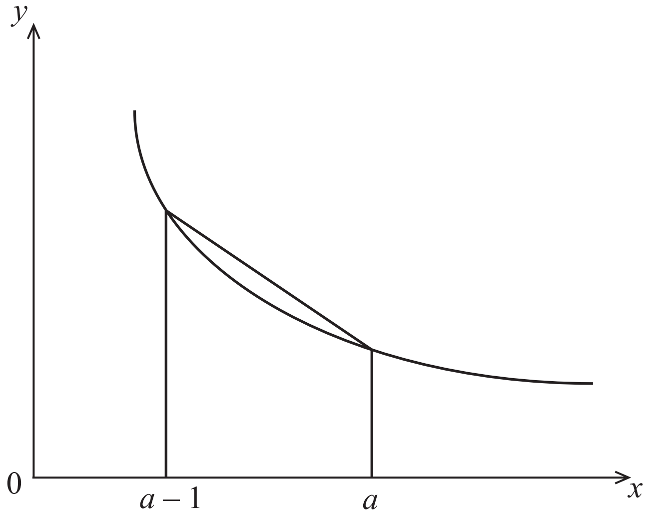

Figure 2

Une meilleure borne supérieure peut être obtenue en considérant la figure 2 qui représente de nouveau une partie de la courbe $y = \frac{1}{x}$.

(i) En considérant les aires de régions appropriées, montrez que

$$\ln\left(\frac{a}{a-1}\right) < \frac{2a-1}{2a(a-1)}.$$

(ii) À partir de là, trouvez une borne supérieure pour $\ln(1{,}2)$. *[5 points]*