22137219

MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 1

Numéro de session du candidat

0	0							

Jeudi 9 mai 2013 (après-midi)

Code de l'examen

2	2	1	3	–	7	2	1	9

2 heures

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Aucune calculatrice n'est autorisée pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d'examen et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du *livret d'informations pour le cours de* ***mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NM*** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est *[120 points]*.

0116

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

SECTION A

*Répondez à **toutes** les questions dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.*

1. *[Note maximale : 6]*

Trouvez la valeur exacte de $\int_1^2 \left((x-2)^2 + \frac{1}{x} + \sin \pi x \right) \mathrm{d}x$.

2. *[Note maximale : 5]*

Considérez les matrices $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

(a) Trouvez $\det \boldsymbol{A}$ et, à partir de là, donnez la matrice $\boldsymbol{A}^{-1}$. *[2 points]*

(b) Trouvez la matrice $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. *[3 points]*

3. *[Note maximale : 4]*

Développez $(2-3x)^5$ suivant des puissances croissantes de x, en simplifiant les coefficients.

4. *[Note maximale : 5]*

Tim et Caz achètent une boîte de 16 chocolats contenant 10 chocolats au lait et 6 chocolats noirs. Caz prend un chocolat au hasard et le mange. Par la suite, Tim prend un chocolat au hasard et le mange.

(a) Dessinez un diagramme en arbre représentant les résultats possibles en écrivant clairement sur chaque branche la probabilité correspondante. *[3 points]*

(b) Trouvez la probabilité que Tim et Caz mangent le même type de chocolat. *[2 points]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. *[Note maximale : 7]*

La courbe C est définie par $y = \dfrac{x\cos x}{x + \cos x}$, pour $x \geq 0$.

(a) Montrez que $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\cos^2 x - x^2 \sin x}{(x + \cos x)^2}$, $x \geq 0$. *[4 points]*

(b) Trouvez l'équation de la tangente à C au point $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$. *[3 points]*

6. *[Note maximale : 7]*

Une suite géométrique a pour premier terme a, pour raison r et comme somme infinie 76. Une deuxième suite géométrique a pour premier terme a, pour raison r^3 et comme somme infinie 36.

Trouvez r.

7. *[Note maximale : 7]*

Soit les nombres complexes $z_1 = 1 + 3\mathrm{i}$ et $z_2 = -1 - \mathrm{i}$.

(a) Donnez les valeurs exactes de $|z_1|$ et $\arg(z_2)$. *[2 points]*

(b) Trouvez la valeur minimum de $|z_1 + \alpha z_2|$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. *[5 points]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

8. *[Note maximale : 6]*

La courbe C est définie implicitement par l'équation $\frac{x^2}{y} - 2x = \ln y$ pour $y > 0$.

(a) Exprimez $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en fonction de x et y. *[4 points]*

(b) Trouvez la valeur de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ au point de C tel que $y = 1$ et $x > 0$. *[2 points]*

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

9. *[Note maximale : 7]*

La fonction f est définie par $f(x) = \dfrac{3^x + 1}{3^x - 3^{-x}}$, pour $x > 0$.

(a) Montrez que $f(x) > 1$ pour tout $x > 0$. *[3 points]*

(b) Résolvez l'équation $f(x) = 4$. *[4 points]*

10. *[Note maximale : 6]*

(a) Étant donné que $\arctan\left(\frac{1}{5}\right)+\arctan\left(\frac{1}{8}\right)=\arctan\left(\frac{1}{p}\right)$, où $p \in \mathbb{Z}^+$, trouvez p. *[3 points]*

(b) À partir de là, trouvez la valeur de $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\arctan\left(\frac{1}{5}\right)+\arctan\left(\frac{1}{8}\right)$. *[3 points]*

*N'écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.*

SECTION B

*Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.*

11. *[Note maximale : 21]*

Les sommets d'un triangle ABC ont comme coordonnées $A(-1, 2, 3)$, $B(4, 1, 1)$ et $C(3, -2, 2)$.

(a) (i) Trouvez les longueurs des cotés de ce triangle.

(ii) Trouvez $\cos B\hat{A}C$. *[6 points]*

(b) (i) Montrez que $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CA} = -7\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 16\boldsymbol{k}$.

(ii) À partir de là, montrez que l'aire du triangle ABC est $\frac{1}{2}\sqrt{314}$. *[5 points]*

(c) Trouvez l'équation cartésienne du plan contenant le triangle ABC. *[3 points]*

(d) Trouvez une équation vectorielle de (AB). *[2 points]*

Le point D sur (AB) est tel que $\overrightarrow{OD}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{BC}$, où O est l'origine.

(e) (i) Trouvez les coordonnées de D.

(ii) Montrez que D ne se trouve pas entre A et B. *[5 points]*

*N'écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.*

12. *[Note maximale : 21]*

La fonction f est définie par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$, sur le domaine $D = \{x : -1 \le x \le 8\}$.

(a) Exprimez $f(x)$ sous la forme $A + \dfrac{B}{x+2}$, où A et $B \in \mathbb{Z}$. *[2 points]*

(b) À partir de là, montrez que $f'(x) > 0$ sur D. *[2 points]*

(c) Indiquez l'image de f. *[2 points]*

(d) (i) Trouvez une expression pour $f^{-1}(x)$.

(ii) Esquissez la représentation graphique de $y = f(x)$, en montrant les points d'intersection avec les deux axes.

(iii) Sur la même figure, esquissez la représentation graphique de $y = f^{-1}(x)$. *[8 points]*

(e) (i) Sur une figure différente, esquissez la représentation graphique de $y = f(|x|)$ pour $x \in D$.

(ii) Trouvez toutes les solutions de l'équation $f(|x|) = -\dfrac{1}{4}$. *[7 points]*

*N'écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.*

13. *[Note maximale : 18]*

(a) (i) Exprimez chacun des nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$, $z_2 = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$ et $z_3 = -2\mathrm{i}$ sous la forme module-argument.

(ii) À partir de là, montrez que les points représentant z_1, z_2 et z_3 dans le plan complexe correspondent aux sommets d'un triangle équilatéral.

(iii) Montrez que $z_1^{3n} + z_2^{3n} = 2z_3^{3n}$, où $n \in \mathbb{N}$. *[9 points]*

(b) (i) Indiquez les solutions de l'équation $z^7 = 1$ avec $z \in \mathbb{C}$, en les exprimant sous la forme module-argument.

(ii) Si w est la solution de $z^7 = 1$ ayant le plus petit argument positif, déterminez l'argument de $1 + w$. Exprimez votre réponse en fonction de π.

(iii) Montrez que $z^2 - 2z\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 1$ est un facteur du polynôme $z^7 - 1$. Indiquez les deux autres facteurs quadratiques à coefficients réels. *[9 points]*

Veuillez **ne pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.

Veuillez **ne pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page ne seront pas corrigées.