22137223

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 3 – ENSEMBLES, RELATIONS ET GROUPES

Mardi 21 mai 2013 (après-midi)

1 heure

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du *livret d'informations pour le cours* ***de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NM*** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est *[60 points]*.

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. *[Note maximale : 10]*

L'opération binaire $*$ est définie sur $\mathbb{N}$ par $a*b = 1+ab$.

Déterminez si oui ou non $*$

(a) est fermée ; *[2 points]*

(b) est commutative ; *[2 points]*

(c) est associative ; *[3 points]*

(d) a un élément neutre. *[3 points]*

2. *[Note maximale : 16]*

Considérez l'ensemble $S = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$, muni de l'opération binaire multiplication modulo 14, notée $\times_{14}$.

(a) Copiez et complétez la table de Cayley suivante pour cette opération binaire.

$\times_{14}$	**1**	**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	**13**
1	1	3	5	7	9	11	13
3	3				13	5	11
5	5				3	13	9
7	7						
9	9	13	3				
11	11	5	13				
13	13	11	9				

[4 points]

(b) Donnez une raison pour laquelle $\{S, \times_{14}\}$ n'est pas un groupe. *[1 point]*

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 2)

(c) Montrez qu'un nouvel ensemble G peut être formé en enlevant un élément de S de sorte que $\{G, \times_{14}\}$ soit un groupe. *[5 points]*

(d) Déterminez l'ordre de chaque élément de $\{G, \times_{14}\}$. *[4 points]*

(e) Trouvez les sous-groupes propres de $\{G, \times_{14}\}$. *[2 points]*

3. *[Note maximale : 13]*

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{pour } x \le 2 \\ x^2 - 2x + 5 & \text{pour } x > 2 \,. \end{cases}$$

(a) (i) Esquissez la représentation graphique de f.

(ii) En vous référant à votre représentation graphique, montrez que f est une bijection. *[5 points]*

(b) Trouvez $f^{-1}(x)$. *[8 points]*

4. *[Note maximale : 13]*

La relation R est définie sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ par aRb si et seulement si $a(a+1) \equiv b(b+1)(\bmod 5)$.

(a) Montrez que R est une relation d'équivalence. *[6 points]*

(b) Montrez que l'équivalence définissant R peut être écrite sous la forme

$$(a-b)(a+b+1) \equiv 0(\bmod 5)\,.$$ *[3 points]*

(c) À partir de là, ou par toute autre méthode, déterminez les classes d'équivalence. *[4 points]*

5. *[Note maximale : 8]*

H et K sont des sous-groupes d'un groupe G. En considérant les quatre axiomes des groupes, démontrez que $H \cap K$ est aussi un sous-groupe de G.