88127229

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – CONJUNTOS, RELACIONES Y GRUPOS

Jueves 8 de noviembre de 2012 (mañana)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de información* ***de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NM*** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[60 puntos]*.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 19]*

Todas las relaciones de esta pregunta se definen sobre $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(a) Decida, proporcionando una demostración o un contraejemplo, si $xRy \Leftrightarrow x + y > 7$ es:

(i) reflexiva;

(ii) simétrica;

(iii) transitiva. *[4 puntos]*

(b) Decida, proporcionando una demostración o un contraejemplo, si $xRy \Leftrightarrow -2 < x - y < 2$ es:

(i) reflexiva;

(ii) simétrica;

(iii) transitiva. *[4 puntos]*

(c) Decida, proporcionando una demostración o un contraejemplo, si $xRy \Leftrightarrow xy > 0$ es:

(i) reflexiva;

(ii) simétrica;

(iii) transitiva. *[4 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 1: continuación)

(d) Decida, proporcionando una demostración o un contraejemplo, si $xRy \Leftrightarrow \frac{x}{y} \in \mathbb{Z}$ es:

(i) reflexiva;

(ii) simétrica;

(iii) transitiva. *[4 puntos]*

(e) Una de las relaciones de los apartados (a), (b), (c) y (d) es una relación de equivalencia. Para dicha relación, indique cuáles son las clases de equivalencia. *[3 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 9]*

Sea $\boldsymbol{A}$ el conjunto de matrices de 2×1 definido de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{A} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Se define la siguiente función f de $\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{A}$: $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(a) Evalúe $f\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$. *[1 punto]*

(b) Demuestre que f es una aplicación inyectiva. *[2 puntos]*

(c) Demuestre que f es una aplicación sobreyectiva. *[2 puntos]*

(d) Halle $f^{-1}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$. *[2 puntos]*

Otra función g de $\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{A}$ se define del siguiente modo: $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(e) ¿Es g una aplicación biyectiva? Justifique su respuesta. *[2 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 15]*

Sea $A = \{a, b\}$.

(a) Escriba los cuatro subconjuntos de A. *[1 punto]*

Sea $P(A)$ el conjunto de todos estos subconjuntos. La operación binaria diferencia simétrica, Δ, se define así sobre $P(A)$: $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$, donde $X, Y \in P(A)$.

(b) Construya la tabla de Cayley para $P(A)$ con respecto a Δ. *[3 puntos]*

(c) Demuestre que $\{P(A), \Delta\}$ es un grupo. Puede dar por supuesto que Δ es asociativa. *[3 puntos]*

Sea $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ y sea $+_4$ la suma módulo 4.

(d) ¿Son $\{P(A), \Delta\}$ y $\{\mathbb{Z}_4, +_4\}$ isomorfos? Justifique su respuesta. *[2 puntos]*

Sea S un conjunto no vacío cualquiera. Sea $P(S)$ el conjunto de todos los subconjuntos de S. Para los siguientes apartados, puede dar por supuesto que Δ, $\cup$ y $\cap$ son asociativas.

(e) (i) Indique el elemento neutro de $\{P(S), \Delta\}$.

(ii) Escriba X^{-1} para $X \in P(S)$.

(iii) A partir de lo anterior, demuestre que $\{P(S), \Delta\}$ es un grupo. *[4 puntos]*

(f) Explique por qué $\{P(S), \cup\}$ no es un grupo. *[1 punto]*

(g) Explique por qué $\{P(S), \cap\}$ no es un grupo. *[1 punto]*

4. *[Puntuación máxima: 17]*

Sea c una constante real positiva. Sea G el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid -c < x < c\}$. La operación binaria $*$ se define sobre el conjunto G del siguiente modo: $x * y = \dfrac{x+y}{1+\dfrac{xy}{c^2}}$.

(a) Simplifique $\dfrac{c}{2} * \dfrac{3c}{4}$. *[2 puntos]*

(b) Indique el elemento neutro de G con respecto a $*$. *[1 punto]*

(c) Dado $x \in G$, halle una expresión para x^{-1} (el elemento simétrico de x con respecto a $*$). *[1 punto]*

(d) Compruebe que la operación binaria $*$ es conmutativa sobre G. *[2 puntos]*

(e) Compruebe que la operación binaria $*$ es asociativa sobre G. *[4 puntos]*

(f) (i) Si x, $y \in G$, explique por qué $(c-x)(c-y) > 0$.

(ii) A partir de lo anterior, compruebe que $x + y < c + \dfrac{xy}{c}$. *[2 puntos]*

También le dicen que $-c - \dfrac{xy}{c} < x + y$.

(g) Compruebe que G es cerrado con respecto a $*$. *[2 puntos]*

(h) Explique por qué $\{G, *\}$ es un grupo abeliano. *[2 puntos]*

(i) Indique qué le sucede al grupo $\{G, *\}$ cuando $c \to \infty$. *[1 punto]*