N12/5/MATHL/HP2/SPA/TZ0/XX

88127226

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 2

Número de convocatoria del alumno

0	0							

Miércoles 7 de noviembre de 2012 (mañana)

2 horas

Código del examen

8	8	1	2	–	7	2	2	6

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste todas las preguntas en las casillas provistas.
- Sección B: conteste todas las preguntas en las hojas de respuesta provistas. Escriba su número de convocatoria en cada una de las hojas de respuestas, y adjúntelas a este cuestionario de examen y a su portada empleando los cordeles provistos.
- Cuando termine el examen, indique en la casilla correspondiente de la portada el número de hojas que ha utilizado.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de información* ***de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NM*** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[120 puntos]*.

14 páginas

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN A

Conteste ***todas*** *las preguntas en las casillas provistas. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.*

1. *[Puntuación máxima: 4]*

Halle la suma de todos los múltiplos de 3 comprendidos entre 100 y 500.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. *[Puntuación máxima: 4]*

Compruebe que, para todo valor real de k, la ecuación de segundo grado $x^2 - (5-k)\,x - (k+2) = 0$ tiene dos raíces reales y distintas.

3. *[Puntuación máxima: 5]*

Considere la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \ln x & \ln(5-x) \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, donde $0 < x < 5$. Halle el valor de x para el cual $\boldsymbol{A}$ es singular.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4. *[Puntuación máxima: 6]*

Un conjunto compuesto por 15 observaciones tiene una media de 11,5 y una varianza de 9,3. Una de las observaciones tiene un valor de 22,1; se considera que dicha observación no es fiable y se elimina. Halle la media y la varianza de las 14 observaciones restantes.

5. *[Puntuación máxima: 6]*

Una barra de metal de 1 metro de longitud se corta en 10 piezas, cuyas longitudes forman una progresión geométrica. La pieza más larga tiene una longitud igual a 8 veces la longitud de la pieza más corta. Halle la longitud de la pieza más corta, redondeando al milímetro más cercano.

6. *[Puntuación máxima: 6]*

Una partícula se mueve en línea recta, de modo tal que en el instante t segundos el desplazamiento s, en metros, satisface la ecuación $s^2 + s - 2t = 0$. Halle, en función de s, una expresión para la velocidad y otra para la aceleración de la partícula.

7. *[Puntuación máxima: 8]*

Kathy juega a un juego de ordenador en el que tiene que encontrar el camino para salir de un laberinto en un tiempo dado. Se sabe que, en el primer intento, la probabilidad de éxito es igual a 0,75. En intentos sucesivos, si Kathy ha tenido éxito, la dificultad aumenta y la probabilidad de éxito es la mitad de la probabilidad en el intento anterior. Sin embargo, si no ha tenido éxito, la probabilidad de éxito sigue siendo la misma. Kathy juega tres partidas seguidas a este juego.

(a) Halle la probabilidad de que tenga éxito en todas las tres partidas. *[2 puntos]*

(b) Suponiendo que ha tenido éxito en la primera partida, halle la probabilidad de que tenga éxito en exactamente dos partidas. *[6 puntos]*

8. *[Puntuación máxima: 7]*

Utilizando la sustitución $x = \operatorname{sen} t$, halle $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

9. *[Puntuación máxima: 7]*

Halle el área de la región delimitada por las curvas $y = x^3$ y $x = y^2 - 3$.

10. *[Puntuación máxima: 7]*

Sea $\omega = \cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta$. Halle, en función de θ, el módulo y el argumento de $(1-\omega^2)^*$.

***NO** escriba soluciones en esta página.*

SECCIÓN B

*Conteste **todas** las preguntas en las hojas de respuestas provistas. Empiece una página nueva para cada respuesta.*

11. *[Puntuación máxima: 18]*

En un museo dado, el número de visitantes que llegan por minuto sigue una distribución de Poisson de media 2,2.

(a) Si el museo está abierto 6 horas al día, halle el número esperado de visitantes que acuden en 1 día. *[2 puntos]*

(b) Halle la probabilidad de que el número de visitantes que llegan a lo largo de una hora supere los 100. *[3 puntos]*

(c) Halle la probabilidad de que el número de visitantes que llegan durante cada una de las 6 horas que el museo está abierto supere los 100. *[2 puntos]*

Las edades de los visitantes que acuden al museo siguen una distribución normal de media μ y varianza σ^2. Los registros muestran que el 29 % de los visitantes tienen menos de 35 años y que el 23 % tienen al menos 55 años.

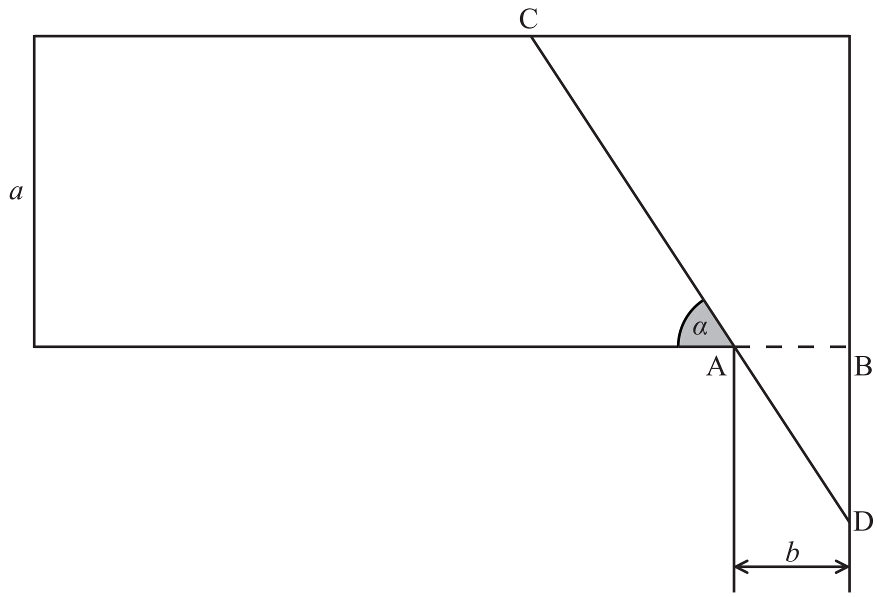
(d) Halle el valor de μ y el de σ. *[6 puntos]*

(e) Un día dado acuden al museo 100 visitantes de menos de 35 años. Estime el número de visitantes de menos de 50 años que acudieron al museo ese día. *[5 puntos]*

***NO** escriba soluciones en esta página.*

12. *[Puntuación máxima: 18]*

La figura muestra el plano de una galería de arte que mide a metros de ancho. [AB] representa la entrada, que conecta con un pasillo de salida de b metros de ancho. Para poder sacar un cuadro de la galería de arte, se mide la distancia CD (simbolizada por L) para varios valores de α, tal y como se representa en la figura.



(a) Si α es el ángulo que forma [CD] con la pared, compruebe que $L = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} + \frac{b}{\cos\alpha}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. *[3 puntos]*

(b) Si $a = 5$ y $b = 1$, halle la longitud máxima que puede tener un cuadro para que se pueda sacar por esta entrada. *[4 puntos]*

Sean $a = 3k$ y $b = k$.

(c) Halle $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\alpha}$. *[3 puntos]*

(d) Halle, en función de k, la longitud máxima que puede tener un cuadro para que se pueda sacar de la galería por esta entrada. *[6 puntos]*

(e) Halle el valor mínimo de k que permite sacar por esta entrada un cuadro de 8 metros de largo. *[2 puntos]*

***NO** escriba soluciones en esta página.*

13. *[Puntuación máxima: 24]*

Considere los planos $\pi_1 : x - 2y - 3z = 2$ y $\pi_2 : 2x - y - z = k$.

(a) Halle el ángulo que forman los planos π_1 y π_2. *[4 puntos]*

(b) Los planos π_1 y π_2 se cortan en la recta L_1. Compruebe que la ecuación vectorial de L_1 es $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2-3k \\ 2k-2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$. *[5 puntos]*

(c) La recta L_2 tiene por ecuación cartesiana $5 - x = y + 3 = 2 - 2z$. Las rectas L_1 y L_2 se cortan en el punto X. Halle las coordenadas de X. *[5 puntos]*

(d) Determine una ecuación cartesiana del plano π_3, que contiene a ambas rectas L_1 y L_2. *[5 puntos]*

(e) Sea Y un punto perteneciente a L_1 y sea Z un punto perteneciente a L_2, de modo tal que XY sea perpendicular a YZ y el área del triángulo XYZ sea igual a 3. Halle el perímetro del triángulo XYZ. *[5 puntos]*

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en
esta página no serán corregidas.