88127228

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – SERIES Y ECUACIONES DIFERENCIALES

Jueves 8 de noviembre de 2012 (mañana)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de información* ***de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NM*** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[60 puntos]*.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 13]*

Una ecuación diferencial viene dada por $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}$, donde $x > 0$ e $y > 0$.

(a) Resuelva esta ecuación diferencial mediante separación de variables. Exprese su respuesta de la forma $y = f(x)$. *[3 puntos]*

(b) Resuelva la misma ecuación diferencial, pero utilizando la sustitución estándar para ecuaciones diferenciales homogéneas, $y = vx$. *[4 puntos]*

(c) Resuelva la misma ecuación diferencial utilizando un factor integrante. *[5 puntos]*

(d) Sabiendo que para $x = 2$, $y = 20$, halle el valor de y para $x = 5$. *[1 punto]*

2. *[Puntuación máxima: 12]*

Sea la ecuación diferencial $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{x+y}$, $(x+y \geq 0)$, la cual satisface las condiciones iniciales $y=1$ para $x=1$. Además, para $x=2$, sea $y=c$.

(a) Utilice el método de Euler con un paso $h=0{,}1$ para hallar una aproximación para el valor de c. Dé la respuesta redondeando a cuatro cifras decimales. *[6 puntos]*

Le dicen que si se utiliza el método de Euler con $h=0{,}05$, entonces $c \simeq 2{,}7921$; que si se utiliza con $h=0{,}01$, entonces $c \simeq 2{,}8099$; y que si se utiliza con $h=0{,}005$, entonces $c \simeq 2{,}8121$.

(b) Sitúe en un papel milimetrado los cuatro puntos (el punto que ha calculado más los tres que se le han dado), representando el valor de h en el eje horizontal y la aproximación del valor de c en el eje vertical. Utilice la escala 1 cm $= 0{,}01$ en ambos ejes. Dibuje el eje horizontal desde 0 hasta 0,12 y el eje vertical desde 2,76 hasta 2,82. *[3 puntos]*

(c) Utilizando una regla, dibuje a ojo la línea recta que mejor se ajuste a estos cuatro puntos. *[1 punto]*

(d) Utilice esta gráfica para dar la mejor estimación posible de c. Dé la respuesta redondeando a tres cifras decimales. *[2 puntos]*

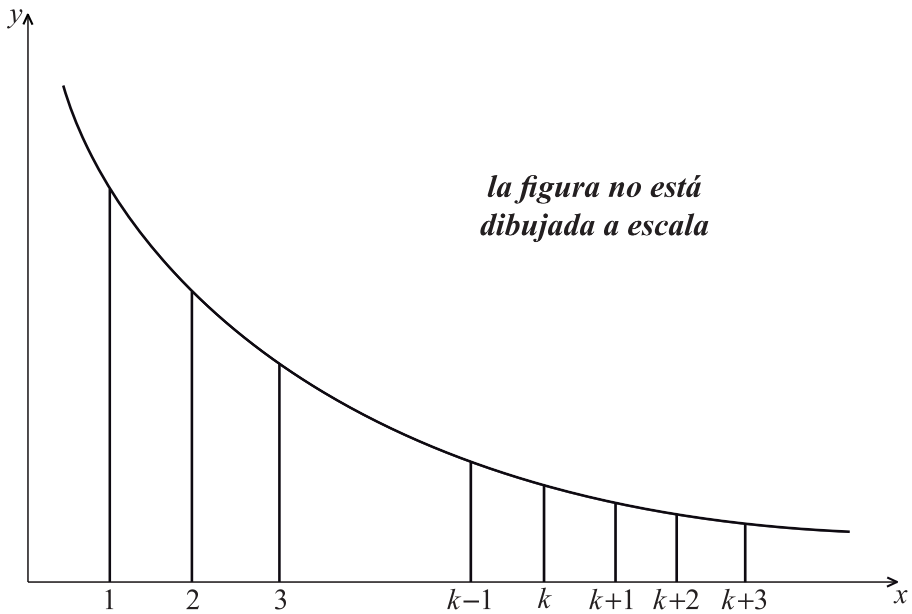
3. *[Puntuación máxima: 17]*

(a) Demuestre que $\lim_{H\to\infty}\int_a^H \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ existe y halle su valor en función de a (donde $a \in \mathbb{R}^+$). *[3 puntos]*

(b) Utilice el criterio de la integral de Cauchy para demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge. *[3 puntos]*

Sea $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = L$.

(c) La figura que aparece a continuación muestra la gráfica de $y = \frac{1}{x^2}$.



(i) En una copia de la figura anterior sombree regiones apropiadas y compruebe que $\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^2} + \int_{k+1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x < L$.

(ii) De manera similar, en otra copia de la figura anterior sombree regiones apropiadas y compruebe que $L < \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^2} + \int_{k}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$. *[6 puntos]*

(d) A partir de lo anterior, compruebe que $\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{k+1} < L < \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{k}$. *[2 puntos]*

Le dicen que $L = \frac{\pi^2}{6}$.

(e) Tomando $k = 4$, utilice el límite superior y el límite inferior de L para hallar un límite superior y un límite inferior para π. Dé el valor de los límites redondeando a tres cifras significativas. *[3 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 18]*

(a) Utilice el criterio de comparación del límite para demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge. *[5 puntos]*

(b) Exprese $\frac{1}{n(n+1)}$ en fracciones simples y, a partir de lo anterior, halle el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. *[4 puntos]*

(c) Utilizando la serie de Maclaurin para $\ln(1+x)$, compruebe que la serie de Maclaurin para $(1+x)\ln(1+x)$ es $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{n(n+1)}$. *[3 puntos]*

(d) A partir de lo anterior, halle $\lim_{x \to -1} (1+x)\ln(1+x)$. *[2 puntos]*

(e) Escriba $\lim_{x \to 0} x \ln(x)$. *[1 punto]*

(f) A partir de lo anterior, halle $\lim_{x \to 0} x^x$. *[3 puntos]*