88127230

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Jueves 8 de noviembre de 2012 (mañana)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de información* ***de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NM*** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[60 puntos]*.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 16]*

Anna tiene una caja que contiene 10 galletas. Hay 4 galletas de chocolate y 6 galletas sencillas. Anna coge al azar una galleta de la caja y se la come. Va repitiendo este proceso hasta que se ha comido un total de 5 galletas.

Sea A el número de galletas de chocolate que come Anna.

(a) Indique la distribución de A. *[1 punto]*

(b) Halle $\mathrm{P}(A=3)$. *[2 puntos]*

(c) Halle $\mathrm{P}(A=5)$. *[1 punto]*

Bill también tiene una caja que contiene 10 galletas. Hay 4 galletas de chocolate y 6 galletas sencillas. Bill coge al azar una galleta de su caja, la mira y la vuelve a dejar en la caja. Repite este proceso hasta haber mirado un total de 5 galletas. Sea B el número de galletas de chocolate que Bill coge y mira.

(d) Indique la distribución de B. *[1 punto]*

(e) Halle $\mathrm{P}(B=3)$. *[2 puntos]*

(f) Halle $\mathrm{P}(B=5)$. *[2 puntos]*

Sea $D=B-A$.

(g) Calcule $\mathrm{E}(D)$. *[2 puntos]*

(h) Calcule $\mathrm{Var}(D)$, y justifique la validez del método que ha empleado. *[5 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 11]*

Las n variables aleatorias independientes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ siguen todas la distribución $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

(a) Halle la media y la varianza de

(i) $X_1 + X_2$;

(ii) $3X_1$;

(iii) $X_1 + X_2 - X_3$;

(iv) $\overline{X} = \dfrac{(X_1 + X_2 + \quad + X_n)}{n}$. *[8 puntos]*

(b) Halle $\mathrm{E}(X_1^2)$ en función de μ y de σ . *[3 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 19]*

(a) La variable aleatoria X representa la altura de una ola en una playa para surf determinada. Se sabe que X sigue una distribución normal de media desconocida μ (metros) y varianza conocida $\sigma^2 = \frac{1}{4}$ (metros^2). Sally desea contrastar la afirmación que aparece en una guía de surf, donde se dice que $\mu = 3$, frente a la alternativa de que $\mu < 3$. Mide la altura de 36 olas y calcula la media muestral $\bar{x}$. A continuación utiliza este valor para contrastar la afirmación, a un nivel del 5 %.

(i) Halle una desigualdad simple, de la forma $\bar{x} < A$, donde A es un número que hay que determinar con una aproximación de 4 cifras significativas, de modo tal que Sally rechace la hipótesis nula de que $\mu = 3$ si y solo si se cumple esta desigualdad.

(ii) Defina un error de Tipo I.

(iii) Defina un error de Tipo II.

(iv) Escriba la probabilidad de que Sally cometa un error de Tipo I.

(v) El verdadero valor de μ es 2,75. Calcule la probabilidad de que Sally cometa un error de Tipo II. *[11 puntos]*

(b) La variable aleatoria Y representa la altura de una ola en otra playa para surf. Se sabe que Y sigue una distribución normal de media desconocida μ (metros) y varianza también desconocida σ^2 (metros^2). David desea contrastar la afirmación que aparece en una guía de surf, donde se dice que $\mu = 3$, frente a la alternativa de que $\mu < 3$. Va a realizar esta prueba a un nivel también del 5 %. Mide la altura de 36 olas y obtiene que la media muestral es $\bar{y} = 2{,}860$ y que la estimación sin sesgo de la varianza de la población es $s_{n-1}^2 = 0{,}25$.

(i) Indique el nombre del contraste que David debería realizar.

(ii) Indique la conclusión del contraste que realiza David. Justifique la respuesta dando el valor del parámetro p.

(iii) Utilizando los resultados obtenidos por David, calcule el intervalo de confianza del 90 % para μ; dé las respuestas redondeando a 4 cifras significativas. *[8 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 14]*

Jenny y su padre juegan a menudo a un juego de mesa. Para poder empezar Jenny tiene que sacar un "seis" con un dado normal de seis caras. Sea X la variable aleatoria que representa el número de veces que Jenny tiene que tirar el dado en total hasta que saca su primer "seis".

(a) Suponiendo que el dado esté equilibrado, escriba la distribución de X, incluyendo el valor del (de los) parámetro(s). *[1 punto]*

(b) Escriba $\mathrm{E}(X)$ para la distribución del apartado (a). *[1 punto]*

Jenny ha jugado a ese juego con su padre 216 veces. La siguiente tabla muestra los valores registrados de X.

Valor de X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	≥ 11
Frecuencia	40	34	26	24	16	14	12	10	6	4	30

(c) Utilice estos datos para contrastar, a un nivel de significación del 10 %, la afirmación de que la probabilidad de que el dado caiga en "seis" es igual a $\frac{1}{6}$. Justifique su conclusión. *[8 puntos]*

Para poder empezar a jugar, el padre de Jenny tiene que sacar dos "seises" utilizando un dado de seis caras normal y equilibrado. Sea Y la variable aleatoria que representa el número de veces que el padre de Jenny tiene que tirar el dado hasta que saca su segundo "seis".

(d) Escriba la distribución de Y, incluyendo el valor del (de los) parámetro(s). *[1 punto]*

(e) Halle el valor de y para el cual $\mathrm{P}(Y = y) = \frac{1}{36}$. *[1 punto]*

(f) Halle $\mathrm{P}(Y \leq 6)$. *[2 puntos]*