N12/5/MATHL/HP1/SPA/TZ0/XX

88127225

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 1

Número de convocatoria del alumno

0	0							

Martes 6 de noviembre de 2012 (tarde)

2 horas

Código del examen

8	8	1	2	–	7	2	2	5

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas en las casillas provistas.
- Sección B: conteste todas las preguntas en las hojas de respuesta provistas. Escriba su número de convocatoria en cada una de las hojas de respuestas, y adjúntelas a este cuestionario de examen y a su portada empleando los cordeles provistos.
- Cuando termine el examen, indique en la casilla correspondiente de la portada el número de hojas que ha utilizado.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de información* ***de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NM*** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[120 puntos]*.

0120

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN A

*Conteste **todas** las preguntas en las casillas provistas. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.*

1. *[Puntuación máxima: 4]*

Sabiendo que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ y $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$, halle el valor de $\operatorname{sen}2\alpha$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

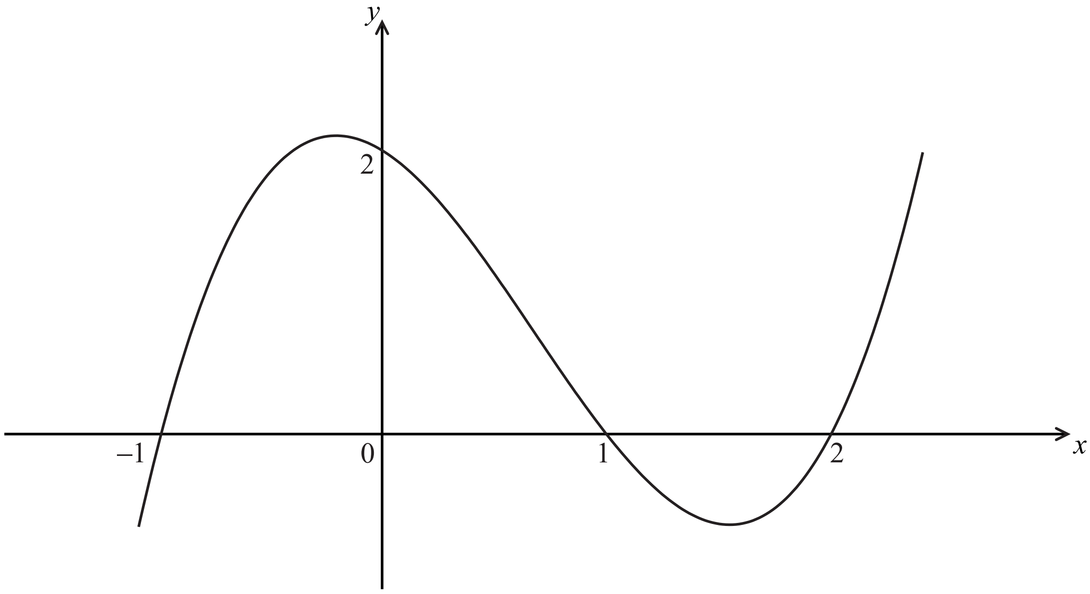
. . . .

2. *[Puntuación máxima: 4]*

Desarrolle y simplifique $\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)^4$.

3. *[Puntuación máxima: 7]*

Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, donde a, b, $c \in \mathbb{Z}$. La siguiente figura muestra la gráfica de $y = f(x)$.



(a) Utilizando la información que se muestra en la figura, halle los valores de a, b y c. *[4 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 3: continuación)

(b) Si $g(x) = 3f(x-2)$,

(i) indique las coordenadas de los puntos donde la gráfica de g corta al eje x.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

(ii) Halle la intersección con el eje y de la gráfica de g. *[3 puntos]*

. . . .

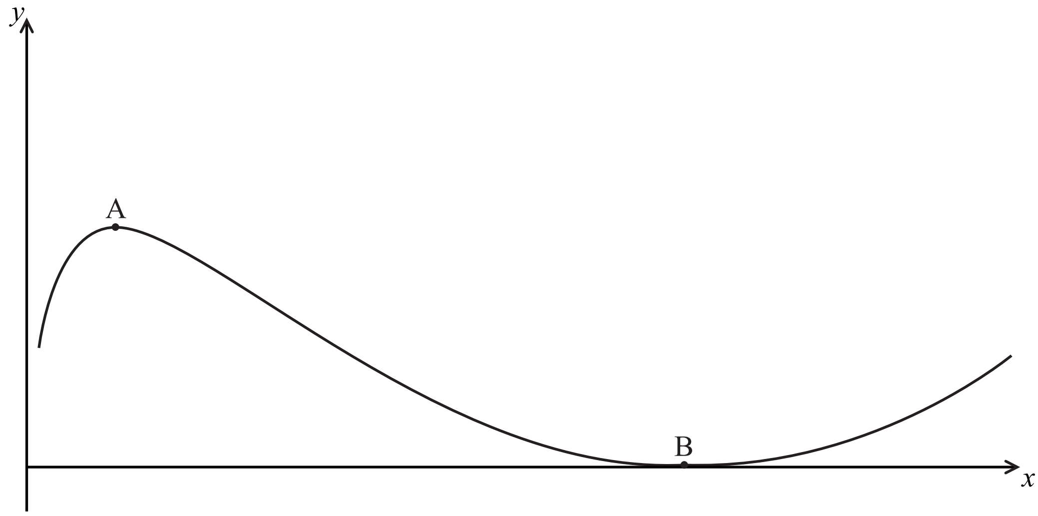
. . . .

. . . .

. . . .

4. *[Puntuación máxima: 8]*

La figura muestra la gráfica de la función $y = x(\ln x)^2$ para $x > 0$.



La función tiene un máximo local en el punto A y un mínimo local en el punto B.

(a) Halle las coordenadas de los puntos A y B. *[5 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 4: continuación)

(b) Sabiendo que la gráfica de la función tiene exactamente un punto de inflexión, halle las coordenadas de dicho punto. *[3 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 8]*

La variable aleatoria continua X tiene la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-x}, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{resto de valores.} \end{cases}$$

(a) Indique la moda de X. *[1 punto]*

. . . .

. . . .

(b) Determine el valor de a. *[3 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 5: continuación)

(c) Halle $\mathrm{E}(X)$. *[4 puntos]*

6. *[Puntuación máxima: 7]*

Considere las siguientes ecuaciones, donde a, $b \in \mathbb{R}$:

$$x + 3y + (a-1)z = 1$$
$$2x + 2y + (a-2)z = 1$$
$$3x + y + (a-3)z = b.$$

(a) Sabiendo que cada una de estas ecuaciones define un plano, compruebe que, sea cual sea el valor de a, los planos no se cortan en un único punto. *[3 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6: continuación)

(b) Halle el valor de b para el cual la intersección de los planos es una línea recta. *[4 puntos]*

7. *[Puntuación máxima: 7]*

En el triángulo PQR, $\text{PQ} = 6$, $\text{PR} = k$ y $\text{P}\hat{\text{Q}}\text{R} = 30^\circ$.

(a) Para el caso en el que $k = 4$, halle los dos posibles valores de QR. *[4 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 7: continuación)

(b) Determine para qué valores de k las condiciones del enunciado definen un triángulo único. *[3 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

8. *[Puntuación máxima: 9]*

Considere la curva definida por la ecuación $x^2 + \operatorname{sen} y - xy = 0$.

(a) Halle la pendiente de la tangente a la curva en el punto (π, π). *[6 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 8: continuación)

(b) A partir de lo anterior, compruebe que $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{1}{1+2\pi}$, donde θ es el ángulo agudo que forma la tangente a la curva en (π, π) y la recta $y = x$. *[3 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

9. *[Puntuación máxima: 6]*

Dos embarcaciones, A y B, se mueven de forma tal que en el instante t horas sus vectores de posición, en kilómetros, son $\boldsymbol{r}_A = (9t)\boldsymbol{i} + (3-6t)\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{r}_B = (7-4t)\boldsymbol{i} + (7t-6)\boldsymbol{j}$.

(a) Halle las coordenadas del punto común de las trayectorias de las dos embarcaciones. *[4 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 9: continuación)

(b) Compruebe que las embarcaciones no se chocan. *[2 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

***NO** escriba soluciones en esta página.*

SECCIÓN B

*Conteste **todas** las preguntas en las hojas de respuestas provistas. Empiece una página nueva para cada respuesta.*

10. *[Puntuación máxima: 19]*

Considere los números complejos

$$z_1 = 2\sqrt{3}\,\mathrm{cis}\frac{3\pi}{2} \text{ y } z_2 = -1 + \sqrt{3}\mathrm{i}\,.$$

(a) (i) Escriba z_1 en forma cartesiana.

(ii) A partir de lo anterior, determine $(z_1 + z_2)^*$ en forma cartesiana. *[3 puntos]*

(b) (i) Escriba z_2 en forma módulo-argumental.

(ii) A partir de lo anterior, resuelva la ecuación $z^3 = z_2$. *[6 puntos]*

(c) Sea $z = r\,\mathrm{cis}\,\theta$, donde $r \in \mathbb{R}^+$ y $0 \le \theta < 2\pi$. Halle todos los posibles valores de r y de θ,

(i) si $z^2 = (1 + z_2)^2$;

(ii) si $z = -\dfrac{1}{z_2}$. *[6 puntos]*

(d) Halle el menor valor positivo de n para el cual $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^n \in \mathbb{R}^+$. *[4 puntos]*

***NO** escriba soluciones en esta página.*

11. *[Puntuación máxima: 18]*

Considere la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & a-1 \\ b & b \end{pmatrix}$, $b \neq 0$.

(a) Para $a = 2$ y $b = 1$, compruebe que $(\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A})^2 = \boldsymbol{I}$. *[3 puntos]*

(b) Halle el valor de a y el valor de b en cada uno de los siguientes casos:

(i) $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$;

(ii) $\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. *[6 puntos]*

(c) Considere las rectas l_1 y l_2, definidas respectivamente por las ecuaciones $ax + (a-1)y = 0$ y $bx + by = 1$, donde $b \neq 0$.

(i) Halle, en función de a y b, las coordenadas del punto de intersección de las rectas l_1 y l_2.

(ii) Sabiendo que las rectas son perpendiculares entre sí, halle las coordenadas del punto de intersección, en función de b. *[9 puntos]*

***NO** escriba soluciones en esta página.*

12. *[Puntuación máxima: 23]*

Considere una función f, definida de la siguiente forma: $f(x) = \dfrac{x}{2-x}$ para $0 \le x \le 1$.

(a) Halle una expresión para $(f \circ f)(x)$. *[3 puntos]*

Sea $F_n(x) = \dfrac{x}{2^n - (2^n - 1)x}$, donde $0 \le x \le 1$.

(b) Utilice la inducción matemática para comprobar que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{n \text{ veces}}(x) = F_n(x).$$ *[8 puntos]*

(c) Compruebe que $F_{-n}(x)$ es una expresión para la inversa de F_n. *[6 puntos]*

(d) (i) Indique $F_n(0)$ y $F_n(1)$.

(ii) Compruebe que $F_n(x) < x$, sabiendo que $0 < x < 1$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

(iii) Para $n \in \mathbb{Z}^+$, sea A_n el área de la región delimitada por la gráfica de F_n^{-1}, el eje x y la recta $x = 1$. Halle el área B_n de la región delimitada por F_n y F_n^{-1}, en función de A_n. *[6 puntos]*