



## **PROGRAMA DEL DIPLOMA**

# **MATEMÁTICAS NS CUADERNILLO DE INFORMACIÓN**

**Para uso en la docencia y durante los exámenes**

**Primeros exámenes: 2006**

**Organización del Bachillerato Internacional**

**Buenos Aires**

**Cardiff**

**Ginebra**

**Nueva York**

**Singapur**

*Programa del Diploma  
Matemáticas NS  
Cuadernillo de información*

Versión adaptada en español del documento publicado en noviembre de 2004 con el título  
*Mathematics HL – Further Mathematics SL Information Booklet*

*Organización del Bachillerato Internacional, Ginebra, CH-1218, Suiza*

*Primera edición publicada en noviembre de 2004  
Actualizada en marzo de 2010*

por la Organización del Bachillerato Internacional  
Peterson House, Malthouse Avenue, Cardiff Gate  
Cardiff, Wales GB CF23 8GL  
REINO UNIDO

Tel.: + 44 29 2054 7777  
Fax: + 44 29 2054 7778  
Sitio web: [www.ibo.org](http://www.ibo.org)

© Organización del Bachillerato Internacional, 2004

IBO agradece la autorización para reproducir en esta publicación material protegido por derechos de autor. Cuando procede, se han citado las fuentes originales y, de serle notificado, IBO enmendará cualquier error u omisión con la mayor brevedad posible.

El uso del género masculino en esta publicación no tiene un propósito discriminatorio y se justifica únicamente como medio para hacer el texto más fluido. Se pretende que el español utilizado sea comprensible por todos los hablantes de esta lengua y no refleje una variante particular o regional de la misma.

Los artículos promocionales y las publicaciones de IBO en sus lenguas oficiales y de trabajo pueden adquirirse a través del catálogo en línea, disponible en [www.ibo.org](http://www.ibo.org) al seleccionar **Publicaciones** en el menú de atajos. Las consultas sobre pedidos deben dirigirse al departamento de ventas en Cardiff.

Tel.: +44 29 2054 7746  
Fax: +44 29 2054 7779  
Correo-e: [sales@ibo.org](mailto:sales@ibo.org)

# ÍNDICE

---

Fórmulas	1
Conocimientos previos	1
Unidad 1(tronco común): Álgebra	2
Unidad 2 (tronco común): Funciones y ecuaciones	2
Unidad 3 (tronco común): Funciones circulares y trigonometría	3
Unidad 4 (tronco común): Matrices	3
Unidad 5 (tronco común): Vectores	4
Unidad 6 (tronco común): Estadística y probabilidad	5
Unidad 7 (tronco común): Análisis	7
Unidad 8 (opcional): Estadística y probabilidad	9
Unidad 9 (opcional): Conjuntos, relaciones y grupos	9
Unidad 10 (opcional): Series y ecuaciones diferenciales	10
Unidad 11 (opcional): Matemática discreta	10
Fórmulas para distribuciones (tema 8.2)	11
Distribuciones discretas	11
Distribuciones continuas	12
Tablas estadísticas	13
Área bajo la curva normal estandarizada (tema 6.11)	13
Tabla inversa de la distribución normal (tema 6.11)	14
Valores críticos de la distribución $t$ de Student (tema 8.4)	16
Valores críticos de la distribución $\chi^2$ (tema 8.6)	17

# Fórmulas

## Conocimientos previos

Área del paralelogramo:	$A = (b \times h)$ , siendo $b$ la base y $h$ la altura
Área del triángulo:	$A = \frac{1}{2}(b \times h)$ , siendo $b$ la base y $h$ la altura
Área del trapecio:	$A = \frac{1}{2}(a + b)h$ , siendo $a$ y $b$ los lados paralelos y $h$ la altura
Área del círculo:	$A = \pi r^2$ , siendo $r$ el radio
Longitud de la circunferencia:	$C = 2\pi r$ , siendo $r$ el radio
Volumen de la pirámide:	$V = \frac{1}{3}$ (área de la base x altura)
Volumen del ortoedro:	$V = l \times a \times h$ , siendo $l$ el largo, $a$ el ancho y $h$ la altura
Volumen del cilindro:	$V = \pi r^2 h$ , siendo $r$ el radio y $h$ la altura
Área lateral del cilindro:	$A = 2\pi r h$ , siendo $r$ el radio y $h$ la altura
Volumen de la esfera:	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ , siendo $r$ el radio
Volumen del cono:	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ , siendo $r$ el radio y $h$ la altura
Distancia entre dos puntos $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ :	$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
Coordenadas del punto medio de un segmento de recta que tiene por extremos $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ :	$\left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$

## Unidad 1 (tronco común): Álgebra

<b>1.1</b> Término $n$ -ésimo de una sucesión aritmética:  Suma de $n$ términos de una sucesión aritmética:  Término $n$ -ésimo de una sucesión geométrica:  Suma de $n$ términos de una sucesión geométrica finita:  Suma de una sucesión geométrica infinita:	$u_n = u_1 + (n-1)d$ $S_n = \frac{n}{2}(2u_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$ $u_n = u_1 r^{n-1}$ $S_n = \frac{u_1(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{u_1(1 - r^n)}{1 - r}, \quad r \neq 1$ $S = \frac{u_1}{1 - r}, \quad  r  < 1$
<b>1.2</b> Potencias y logaritmos:	$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ $a^x = e^{x \ln a}$ $\log_a a^x = x = a^{\log_a x}$ $\log_b a = \frac{\log_e a}{\log_e b}$
<b>1.3</b> Combinaciones:  Teorema del binomio:	$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \dots + b^n$
<b>1.5</b> Números complejos:	$z = a + ib = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} = r \operatorname{cis} \theta$
<b>1.7</b> Teorema de Moivre:	$[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = r^n e^{in\theta} = r^n \operatorname{cis} n\theta$

## Unidad 2 (tronco común): Funciones y ecuaciones

<b>2.5</b> Eje de simetría de la gráfica de una función cuadrática:	$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow \text{eje de simetría } x = -\frac{b}{2a}$
<b>2.6</b> Resolución de ecuaciones de segundo grado o cuadráticas:  Discriminante:	$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad a \neq 0$ $\Delta = b^2 - 4ac$

## Unidad 3 (tronco común): Funciones circulares y trigonometría

3.1	Longitud del arco: Área del sector circular:	$l = \theta r$ , siendo $\theta$ el ángulo medido en radianes y $r$ el radio $A = \frac{1}{2} \theta r^2$ , siendo $\theta$ el ángulo medido en radianes y $r$ el radio
3.2	Identidades: Relación fundamental:	$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$ $\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1$ $1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \sec^2 \theta$ $1 + \operatorname{cotg}^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$
3.3	Fórmulas de la suma y diferencia de dos ángulos:  Fórmulas del ángulo doble:	$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A \cos B \pm \cos A \operatorname{sen} B$ $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$ $\operatorname{tg}(A \pm B) = \frac{\operatorname{tg} A \pm \operatorname{tg} B}{1 \mp \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}$  $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$ $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \theta$ $\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta}$
3.6	Teorema del coseno:  Teorema del seno:  Área del triángulo:	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C; \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$ $A = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C$ , siendo $a$ y $b$ lados adyacentes y $C$ el ángulo comprendido

## Unidad 4 (tronco común): Matrices

4.3	Determinante de una matriz de orden $2 \times 2$ :  Inversa de una matriz de orden $2 \times 2$ :  Determinante de una matriz de orden $3 \times 3$ :	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det \mathbf{A} = ad - bc$ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, ad \neq bc$ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \Rightarrow \det \mathbf{A} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$
-----	---	--

## Unidad 5 (tronco común): Vectores

5.1	<p>Módulo de un vector:</p> <p>Distancia entre dos puntos <math>(x_1, y_1, z_1)</math> y <math>(x_2, y_2, z_2)</math>:</p> <p>Coordenadas del punto medio de un segmento de recta que tiene por extremos <math>(x_1, y_1, z_1)</math> y <math>(x_2, y_2, z_2)</math>:</p>	$ \mathbf{v}  = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ , donde $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ $\left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$
5.2	<p>Producto escalar:</p> <p>Ángulo entre dos vectores:</p>	$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} =  \mathbf{v}   \mathbf{w}  \cos \theta$ , siendo $\theta$ el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$ donde $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ $\cos \theta = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3}{ \mathbf{v}   \mathbf{w} }$
5.3	<p>Ecuación vectorial de una recta:</p> <p>Forma paramétrica de la ecuación de una recta:</p> <p>Forma cartesiana de la ecuación de una recta:</p>	$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$ $x = x_0 + \lambda l, y = y_0 + \lambda m, z = z_0 + \lambda n$ $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$
5.5	<p>Producto vectorial (expresión mediante el determinante):</p> <p>Área del triángulo:</p>	$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$ $ \mathbf{v} \times \mathbf{w}  =  \mathbf{v}   \mathbf{w}  \sin \theta$ , siendo $\theta$ el ángulo formado por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ $A = \frac{1}{2}  \mathbf{v} \times \mathbf{w} $
5.6	<p>Ecuación vectorial de un plano:</p> <p>Ecuación de un plano (mediante el vector normal):</p> <p>Ecuación cartesiana de un plano:</p>	$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{c}$ $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$ $ax + by + cz + d = 0$

## Unidad 6 (tronco común): Estadística y probabilidad

<b>6.3</b>	<p><b>Parámetros de población</b></p> <p>Media <math>\mu</math>:</p> $\mu = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{n}$ <p>Varianza <math>\sigma^2</math>:</p> $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \mu)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i^2}{n} - \mu^2$ <p>Desviación típica <math>\sigma</math>:</p> $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \mu)^2}{n}}$ <p><b>Estadísticos muestrales</b></p> <p>Media <math>\bar{x}</math>:</p> $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{n}$ <p>Varianza <math>s_n^2</math>:</p> $s_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2$ <p>Desviación típica <math>s_n</math>:</p> $s_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}}$ <p>Estimación sin sesgo de la varianza de la población, <math>s_{n-1}^2</math>:</p> $s_{n-1}^2 = \frac{n}{n-1} s_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i^2}{n-1} - \frac{n}{n-1} \bar{x}^2$	
<b>6.5</b>	<p>Probabilidad del suceso <math>A</math>:</p> $P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$ <p>Sucesos complementarios:</p> $P(A) + P(A') = 1$	
<b>6.6</b>	<p>Sucesos compuestos:</p> $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ <p>Sucesos incompatibles o mutuamente excluyentes:</p> $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	

## Unidad 6 (tronco común): Estadística y probabilidad (continuación)

<b>6.7</b>	<p>Probabilidad condicionada:</p> $P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ <p>Sucesos independientes:</p> $P(A \cap B) = P(A) P(B)$ <p>Teorema de Bayes:</p> $P(B A) = \frac{P(B)P(A B)}{P(B)P(A B) + P(B')P(A B')}$
<b>6.9</b>	<p>Valor esperado de una variable aleatoria discreta <math>X</math>:</p> $E(X) = \mu = \sum_x x P(X = x)$ <p>Valor esperado de una variable aleatoria continua <math>X</math>:</p> $E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ <p>Varianza:</p> $\text{Var}(X) = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$ <p>Varianza de la variable aleatoria discreta <math>X</math>:</p> $\text{Var}(X) = \sum (x - \mu)^2 P(X = x) = \sum x^2 P(X = x) - \mu^2$ <p>Varianza de la variable aleatoria continua <math>X</math>:</p> $\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2$
<b>6.10</b>	<p>Distribución binomial:</p> $X \sim B(n, p) \Rightarrow P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, x = 0, 1, \dots, n$ <p>Media:</p> $E(X) = np$ <p>Varianza:</p> $\text{Var}(X) = np(1-p)$ <p>Distribución de Poisson:</p> $X \sim P_o(m) \Rightarrow P(X = x) = \frac{m^x e^{-m}}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots$ <p>Media:</p> $E(X) = m$ <p>Varianza:</p> $\text{Var}(X) = m$
<b>6.11</b>	<p>Variable normal tipificada o estandarizada:</p> $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

## Unidad 7 (tronco común): Análisis

7.1	Derivada de $f(x)$ :	$y = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$
	Derivada de $x^n$ :	$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$
	Derivada de $\sin x$ :	$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
	Derivada de $\cos x$ :	$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$
	Derivada de $\operatorname{tg} x$ :	$f(x) = \operatorname{tg} x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$
	Derivada de $e^x$ :	$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
	Derivada de $\ln x$ :	$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
	Derivada de $\sec x$ :	$f(x) = \sec x \Rightarrow f'(x) = \sec x \operatorname{tg} x$
	Derivada de $\operatorname{cosec} x$ :	$f(x) = \operatorname{cosec} x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$
	Derivada de $\operatorname{cot} x$ :	$f(x) = \operatorname{cot} x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{cosec}^2 x$
	Derivada de $a^x$ :	$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x (\ln a)$
	Derivada de $\log_a x$ :	$f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
	Derivada de $\arcsin x$ :	$f(x) = \arcsin x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	Derivada de $\arccos x$ :	$f(x) = \arccos x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	Derivada de $\arctg x$ :	$f(x) = \arctg x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
7.2	Regla de la cadena:	$y = g(u)$ , siendo $u = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$
	Regla del producto:	$y = uv \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$
	Regla del cociente:	$y = \frac{u}{v} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$

## Unidad 7 (tronco común): Análisis (continuación)

7.4	Integrales inmediatas: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C$ $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\int \cos x dx = \sin x + C$ $\int e^x dx = e^x + C$ $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$ $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$ $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad  x  < a$	
7.5	Área bajo una curva: $A = \int_a^b y dx$ o bien $A = \int_a^b x dy$ Volumen de revolución (rotación): $V = \int_a^b \pi y^2 dx$ o bien $V = \int_a^b \pi x^2 dy$	
7.9	Integración por partes: $\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx$ o bien $\int u dv = uv - \int v du$	

## Unidad 8 (opcional): Estadística y probabilidad

<b>8.1</b> Combinaciones lineales de dos variables aleatorias independientes $X_1, X_2$ :	$E(a_1X_1 \pm a_2X_2) = a_1E(X_1) \pm a_2E(X_2)$ $\text{Var}(a_1X_1 \pm a_2X_2) = a_1^2 \text{Var}(X_1) + a_2^2 \text{Var}(X_2)$
<b>8.4</b> <b>Intervalos de confianza</b>  Media, con varianza conocida:  Media, con varianza desconocida:  Proporción:	$\bar{x} \pm z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  $\bar{x} \pm t \times \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}$  $\hat{P} \pm z \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$ , siendo $\hat{P}$ la proporción de éxitos en una muestra
<b>8.5</b> <b>Contraste de significación:</b>  Media, con varianza conocida:  Media, con varianza desconocida:	$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$  $t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{n-1} / \sqrt{n}}$
<b>8.6</b> Estadístico del test de $\chi^2$ :	$\chi_{calc}^2 = \sum \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} = \sum \frac{f_o^2}{f_e} - n$ , siendo $f_o$ las frecuencias observadas, $f_e$ las frecuencias esperadas y $n = \sum f_o$

## Unidad 9 (opcional): Conjuntos, relaciones y grupos

<b>9.1</b> Leyes de de Morgan:	$(A \cup B)' = A' \cap B'$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$
-----------------------------------	--

## Unidad 10 (opcional): Series y ecuaciones diferenciales

<b>10.5</b>	<p>Serie de Maclaurin:</p> $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots$ <p>Serie de Taylor:</p> $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots$ <p>Aproximaciones de Taylor (incluyendo el término de error <math>R_n(x)</math>):</p> $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n(x)$ <p>Forma de Lagrange:</p> $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \text{ donde } c \text{ se encuentra entre } a \text{ y } x$ <p>Forma integral:</p> $R_n(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$ <p>Otras series:</p> $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$ $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$ $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$ $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$	
<b>10.6</b>	<p>Método de Euler:</p> $y_{n+1} = y_n + h \times f(x_n, y_n); \quad x_{n+1} = x_n + h, \text{ donde } h \text{ es una constante}$ <p>Factor integrante para <math>y' + P(x)y = Q(x)</math>:</p> $e^{\int P(x)dx}$	

## Unidad 11 (opcional): Matemática discreta

<b>11.6</b>	<p>Relación de Euler:</p> $v - e + f = 2, \text{ siendo } v \text{ el número de vértices, } e \text{ el número de aristas y } f \text{ el número de caras}$ <p>Grafos planarios:</p> $e \leq 3v - 6$ $e \leq 2v - 4$	
-------------	--	--

## Fórmulas para distribuciones (tema 8.2)

### Distribuciones discretas

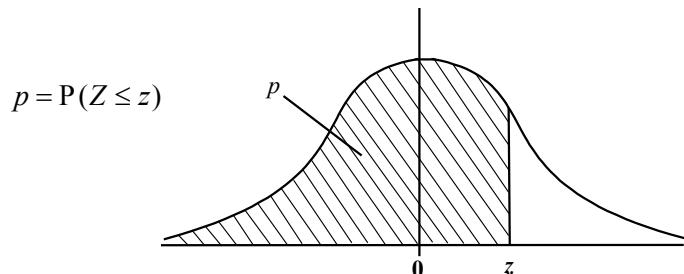
Distribución:	Notación:	Función general de probabilidad:	Media:	Varianza:
Bernoulli	$X \sim B(1, p)$	$p^x(1-p)^{1-x}$ para $x = 0, 1$	$p$	$p(1-p)$
Binomial	$X \sim B(n, p)$	$\binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}$ para $x = 0, 1, \dots, n$	$np$	$np(1-p)$
Hipergeométrica	$X \sim Hyp(n, M, N)$	$\frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ para $x = 0, 1, \dots, n$	$np$ siendo $p = \frac{M}{N}$	$np(1-p) \left( \frac{N-n}{N-1} \right)$ siendo $p = \frac{M}{N}$
Poisson	$X \sim P_o(m)$	$\frac{m^x e^{-m}}{x!}$ para $x = 0, 1, \dots$	$m$	$m$
Geométrica	$X \sim Geo(p)$	$p q^{x-1}$ para $x = 1, 2, \dots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Binomial negativa	$X \sim NB(r, p)$	$\binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}$ para $x = r, r+1, \dots$	$\frac{r}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$
Uniforme discreta	$X \sim DU(n)$	$\frac{1}{n}$ para $x = 1, \dots, n$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2 - 1}{12}$

## Distribuciones continuas

Distribución:	Notación:	Función densidad de probabilidad:	Media:	Varianza:
Uniforme	$X \sim U(a,b)$	$\frac{1}{(b-a)}, \quad a \leq x \leq b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponencial	$X \sim Exp(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normal	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$	$\mu$	$\sigma^2$

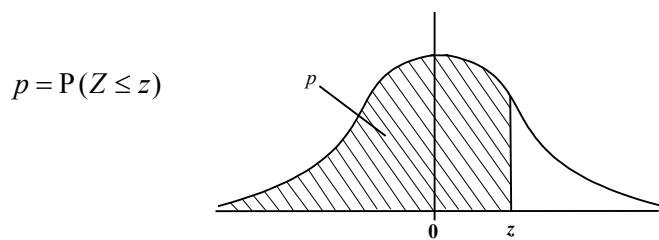
## Tablas estadísticas

### Área bajo la curva normal estandarizada (tema 6.11)



$z$	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8079	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9773	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9892	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

## Tabla inversa de la distribución normal (tema 6.11)

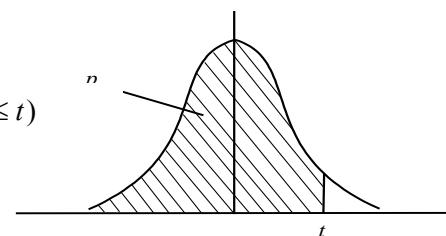


$p$	0	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009
0,50	0,0000	0,0025	0,0050	0,0075	0,0100	0,0125	0,0150	0,0176	0,0201	0,0226
0,51	0,0251	0,0276	0,0301	0,0326	0,0351	0,0376	0,0401	0,0426	0,0451	0,0476
0,52	0,0502	0,0527	0,0552	0,0577	0,0602	0,0627	0,0652	0,0677	0,0702	0,0728
0,53	0,0753	0,0778	0,0803	0,0828	0,0853	0,0878	0,0904	0,0929	0,0954	0,0979
0,54	0,1004	0,1030	0,1055	0,1080	0,1105	0,1130	0,1156	0,1181	0,1206	0,1231
0,55	0,1257	0,1282	0,1307	0,1332	0,1358	0,1383	0,1408	0,1434	0,1459	0,1484
0,56	0,1510	0,1535	0,1560	0,1586	0,1611	0,1637	0,1662	0,1687	0,1713	0,1738
0,57	0,1764	0,1789	0,1815	0,1840	0,1866	0,1891	0,1917	0,1942	0,1968	0,1993
0,58	0,2019	0,2045	0,2070	0,2096	0,2121	0,2147	0,2173	0,2198	0,2224	0,2250
0,59	0,2275	0,2301	0,2327	0,2353	0,2379	0,2404	0,2430	0,2456	0,2482	0,2508
0,60	0,2534	0,2559	0,2585	0,2611	0,2637	0,2663	0,2689	0,2715	0,2741	0,2767
0,61	0,2793	0,2819	0,2845	0,2872	0,2898	0,2924	0,2950	0,2976	0,3002	0,3029
0,62	0,3055	0,3081	0,3107	0,3134	0,3160	0,3186	0,3213	0,3239	0,3266	0,3292
0,63	0,3319	0,3345	0,3372	0,3398	0,3425	0,3451	0,3478	0,3505	0,3531	0,3558
0,64	0,3585	0,3611	0,3638	0,3665	0,3692	0,3719	0,3745	0,3772	0,3799	0,3826
0,65	0,3853	0,3880	0,3907	0,3934	0,3961	0,3989	0,4016	0,4043	0,4070	0,4097
0,66	0,4125	0,4152	0,4179	0,4207	0,4234	0,4262	0,4289	0,4316	0,4344	0,4372
0,67	0,4399	0,4427	0,4454	0,4482	0,4510	0,4538	0,4565	0,4593	0,4621	0,4649
0,68	0,4677	0,4705	0,4733	0,4761	0,4789	0,4817	0,4845	0,4874	0,4902	0,4930
0,69	0,4959	0,4987	0,5015	0,5044	0,5072	0,5101	0,5129	0,5158	0,5187	0,5215
0,70	0,5244	0,5273	0,5302	0,5331	0,5359	0,5388	0,5417	0,5446	0,5476	0,5505
0,71	0,5534	0,5563	0,5592	0,5622	0,5651	0,5681	0,5710	0,5740	0,5769	0,5799
0,72	0,5828	0,5858	0,5888	0,5918	0,5948	0,5978	0,6008	0,6038	0,6068	0,6098
0,73	0,6128	0,6158	0,6189	0,6219	0,6250	0,6280	0,6311	0,6341	0,6372	0,6403
0,74	0,6434	0,6464	0,6495	0,6526	0,6557	0,6588	0,6620	0,6651	0,6682	0,6714
0,75	0,6745	0,6776	0,6808	0,6840	0,6871	0,6903	0,6935	0,6967	0,6999	0,7031

## Tabla inversa de la distribución normal (tema 6.11, continuación)

$p$	0	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009
0,76	0,7063	0,7095	0,7128	0,7160	0,7192	0,7225	0,7257	0,7290	0,7323	0,7356
0,77	0,7389	0,7421	0,7455	0,7488	0,7521	0,7554	0,7588	0,7621	0,7655	0,7688
0,78	0,7722	0,7756	0,7790	0,7824	0,7858	0,7892	0,7926	0,7961	0,7995	0,8030
0,79	0,8064	0,8099	0,8134	0,8169	0,8204	0,8239	0,8274	0,8310	0,8345	0,8381
0,80	0,8416	0,8452	0,8488	0,8524	0,8560	0,8596	0,8633	0,8669	0,8706	0,8742
0,81	0,8779	0,8816	0,8853	0,8890	0,8927	0,8965	0,9002	0,9040	0,9078	0,9116
0,82	0,9154	0,9192	0,9230	0,9269	0,9307	0,9346	0,9385	0,9424	0,9463	0,9502
0,83	0,9542	0,9581	0,9621	0,9661	0,9701	0,9741	0,9782	0,9822	0,9863	0,9904
0,84	0,9945	0,9986	1,0027	1,0069	1,0110	1,0152	1,0194	1,0237	1,0279	1,0322
0,85	1,0364	1,0407	1,0451	1,0494	1,0537	1,0581	1,0625	1,0669	1,0714	1,0758
0,86	1,0803	1,0848	1,0894	1,0939	1,0985	1,1031	1,1077	1,1123	1,1170	1,1217
0,87	1,1264	1,1311	1,1359	1,1407	1,1455	1,1504	1,1552	1,1601	1,1651	1,1700
0,88	1,1750	1,1800	1,1850	1,1901	1,1952	1,2004	1,2055	1,2107	1,2160	1,2212
0,89	1,2265	1,2319	1,2372	1,2426	1,2481	1,2536	1,2591	1,2646	1,2702	1,2759
0,90	1,2816	1,2873	1,2930	1,2988	1,3047	1,3106	1,3165	1,3225	1,3285	1,3346
0,91	1,3408	1,3469	1,3532	1,3595	1,3658	1,3722	1,3787	1,3852	1,3917	1,3984
0,92	1,4051	1,4118	1,4187	1,4255	1,4325	1,4395	1,4466	1,4538	1,4611	1,4684
0,93	1,4758	1,4833	1,4909	1,4985	1,5063	1,5141	1,5220	1,5301	1,5382	1,5464
0,94	1,5548	1,5632	1,5718	1,5805	1,5893	1,5982	1,6073	1,6164	1,6258	1,6352
0,95	1,6449	1,6546	1,6646	1,6747	1,6849	1,6954	1,7060	1,7169	1,7279	1,7392
0,96	1,7507	1,7624	1,7744	1,7866	1,7991	1,8119	1,8250	1,8384	1,8522	1,8663
0,97	1,8808	1,8957	1,9110	1,9268	1,9431	1,9600	1,9774	1,9954	2,0141	2,0335
0,98	2,0538	2,0749	2,0969	2,1201	2,1444	2,1701	2,1973	2,2262	2,2571	2,2904
0,99	2,3264	2,3656	2,4089	2,4573	2,5121	2,5758	2,6521	2,7478	2,8782	3,0902

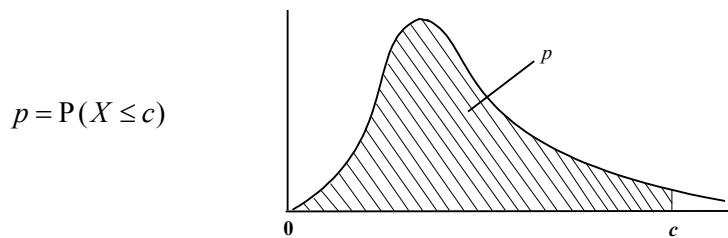
## Valores críticos de la distribución $t$ de Student (tema 8.4)



$p$	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,9995
$\nu = 1$	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,599
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,768
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
***	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

$\nu$  = número de grados de libertad

## Valores críticos de la distribución $\chi^2$ (tema 8.6)



$p$	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
$\nu = 1$	0,00004	0,0002	0,001	0,004	0,016	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	9,236	11,070	12,833	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,042	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582
20	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997
21	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401
22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796
23	9,260	10,196	11,689	13,091	14,848	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181
24	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	33,196	36,415	39,364	42,980	45,559
25	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928
26	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290
27	11,808	12,879	14,573	16,151	18,114	36,741	40,113	43,195	46,963	49,645
28	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993
29	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336
30	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672
40	20,707	22,164	24,433	26,509	29,051	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766
50	27,991	29,707	32,357	34,764	37,689	63,167	67,505	71,420	76,154	79,490
60	35,534	37,485	40,482	43,188	46,459	74,397	79,082	83,298	88,379	91,952
70	43,275	45,442	48,758	51,739	55,329	85,527	90,531	95,023	100,425	104,215
80	51,172	53,540	57,153	60,391	64,278	96,578	101,879	106,629	112,329	116,321
90	59,196	61,754	65,647	69,126	73,291	107,565	113,145	118,136	124,116	128,299
100	67,328	70,065	74,222	77,929	82,358	118,498	124,342	129,561	135,807	140,169

$\nu$  = número de grados de libertad