

MOISÉS LÁZARO CARRIÓN

NÚMEROS REALES

- ✖ DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE LOS NÚMEROS REALES
- ✖ DESIGUALDADES E INTERVALOS
- ✖ INECUACIONES: DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO
- ✖ INECUACIONES POLINÓMICAS
- ✖ ECUACIONES E INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO
- ✖ COTAS DE UN CONJUNTO: SUPREMO E ÍNFIMO
- ✖ INECUACIONES: RACIONALES, EXPONENCIALES E IRRACIONALES
- ✖ ECUACIONES E INECUACIONES CON MÁXIMO ENTERO

MOISÉS LÁZARO CARRIÓN

NÚMEROS REALES

- ✗ DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE LOS NÚMEROS REALES**
- ✗ DESIGUALDADES E INTERVALOS**
- ✗ INECUACIONES: DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO**
- ✗ INECUACIONES POLINÓMICAS**
- ✗ ECUACIONES E INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO**
- ✗ COTAS DE UN CONJUNTO: SUPREMO E ÍNFIMO**
- ✗ INECUACIONES: RACIONALES, EXPONENCIALES E IRRACIONALES**
- ✗ ECUACIONES E INECUACIONES CON MÁXIMO ENTERO**



R **NUMEROS REALES**

FREELIBROS.ORG

MOISÉS LÁZARO CARRIÓN

Autor : Moisés Lázaro Carrión
Estudios : Lic. en Matemáticas Puras; Lic. en Educación, Maestría (Métodos Cuantitativos de la Economía U.N.M.S.M.), Maestría (Matemáticas Puras P.U.C.P.).

Experiencia Docente:

Pontificia Universidad Católica del Perú

Universidad Ricardo Palma

Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad Nacional de Ancash - Santiago Antúnez de Mayolo

Universidad Nacional del Callao

Universidad Particular San Martín de Porres

La presentación y disposición en conjunto de:

NÚMEROS REALES

Autor: Moisés Lázaro Carrión

Son propiedad de: Dis. Imp. Edit. Lib. **MOSHERA S.R.L.**

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio, sin autorización escrita de la editorial:

Decreto Legislativo : 822

Derechos reservados ©

Primera edición: Abril 2005

Reimpresión: 2012

Obra editada, impresa y distribuida por:

Distribuidora, Imprenta, Editorial, Librería

MOSHERA S.R.L.

RUC: 20101220584

Jr. Tacna 2975 - San Martín de Porres
Lima - Perú / Telefax: 567-9299

PEDIDOS AL POR MAYOR

Distribuidora - Imprenta - Editorial - Librería

MOSHERA S.R.L.

Jr. Tacna 2975 - San Martín de Porres

Telefax: 567-9299

e-mail: editorialmoshera@hotmail.com

Impreso en el Perú - Printed in Perú

*A Alan, mi
querido hijo.*

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 : LOS NÚMEROS REALES

Definición Axiomática de Números Reales	1
Axioma del Supremo. Problemas: Grupo I	3
Interpretación Geométrica de los números reales	4
Teoremas	5

CAPÍTULO 2 : DESIGUALDADES

Teoremas. Ejemplos	11
--------------------------	----

CAPÍTULO 3 : INTERVALOS

Definición de intervalos	18
Aplicaciones de los intervalos	20

CAPÍTULO 4 : VALOR ABSOLUTO

Definición de valor absoluto	21
Propiedades. Demostraciones	22

CAPÍTULO 5 : ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Polinomio de primer grado	29
Problemas	30

CAPÍTULO 6 : INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

Definición. Discriminante	32
Problema especial	33
Proposiciones 1, 2	34
Proposición 4. Corolario 4.1	35
Ecuación de segundo grado	36
Ejemplos gráficos de ecuaciones de 2 ^{do} grado	37
Métodos para resolver una inecuación cuadrática.	
Método I : Completando cuadrados	38
Método II : Regla de los signos	39

**CAPÍTULO 7 : INEQUACIONES POLINÓMICAS DE
GRADO DOS O MAYORES QUE
DOS**

Método de los puntos críticos	41
Problemas resueltos	42
Problemas propuestos	45

**CAPÍTULO 8 : ECUACIONES E INEQUACIONES
CON VALOR ABSOLUTO**

A. Ecuaciones . Ejercicios	46
B. Inequaciones. Ejercicios	49
Ejercicios	54

**CAPÍTULO 9 : COTAS DE UN CONJUNTO
SUPREMO e INFIMO**

Definiciones. Ejemplos	56
Máximo y mínimo de un conjunto	59
Técnicas para hallar el supremo e ínfimo de un conjunto	61
Máximos y mínimos de parábolas	63

**CAPÍTULO 10 : ECUACIONES E INEQUACIONES
QUE TIENEN DOS O MAS VALORES
ABSOLUTOS**

Ejemplos	74
Métodos de los puntos críticos	76

CAPÍTULO 11 : INEQUACIONES RACIONALES

Teoremas	85
Ejemplos	86

CAPÍTULO 12 : INEQUACIONES EXPONENCIALES

Definición	97
Problemas	98

Capítulo 13 : Ecuaciones e inecuaciones con máximo entero

Definición	103
Ecuaciones	104
Ejercicios	111
Inecuaciones	112
Teoremas	116
Aplicaciones	117
Teorema. Aplicaciones	121
Teoremas	123
Miscelánea	128
Problemas que se resuelven con restricciones y aplicando propiedades	134

Capítulo 1

Los Números Reales

DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE LOS NÚMEROS REALES

El sistema de los números reales, es un conjunto provisto de dos operaciones internas : Adición y Multiplicación.

NOTACIÓN : Denotamos por \mathbb{R} al conjunto de los números reales.

I. ADICIÓN ($\mathbb{R}, +, 0$)

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (a, b) & \longmapsto & a + b \end{array}$$

La adición es una operación interna totalmente definida por \mathbb{R} que "a cada par de números reales (a, b) corresponde un único número real $a + b$ llamado suma de a y b "

AXIOMAS DE LA SUMA

A - 1 $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (ASOCIATIVIDAD DE LA ADICIÓN)

A - 2 $a + b = b + a$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ (CONMUTATIVIDAD DE LA ADICIÓN)

A - 3 Existe un elemento y sólo uno, al que se denota por "0", tal que para todo $a \in \mathbb{R}$ se cumple : $a + 0 = 0 + a = a$

El cero (0) se llama NEUTRO DE LA ADICIÓN

A - 4 Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe uno y sólo un elemento al que denotamos por " $-a$ ", tal que, se cumple :

$$a + (-a) = 0 = (-a) + a$$

El elemento " $-a$ " se llama OPUESTO DE a

II. MULTIPLICACIÓN ($\mathbb{R}, \cdot, 1$)

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (a, b) & \longmapsto & a \cdot b \end{array}$$

La multiplicación es una operación interna totalmente definida en \mathbb{R} que "a cada par de números reales (a, b) corresponde un único número real $a \cdot b$ llamado producto de a y b "

AXIOMAS DE LA MULTIPLICACIÓN

M - 1 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (ASOCIATIVIDAD DE LA MULTIPLICACIÓN)

M - 2 $a \cdot b = b \cdot a$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ (CONMUTATIVIDAD DE LA MULTIPLICACIÓN)

M - 3 Existe uno y sólo un elemento , al que denotamos por "1", tal que para todo

$a \in \mathbb{R}$ se cumple : $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

El elemento "1" se llama : IDENTIDAD MULTIPLICATIVA

M - 4 Para cada $a \in \mathbb{R}$, diferente de cero , existe uno y sólo un elemento al que

denotamos por " $a^{-1} = \frac{1}{a}$ ", tal que se cumple : $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

El número real a^{-1} se llama : INVERSO DE a

III AXIOMA DISTRIBUTIVA : Distributividad de la multiplicación respecto de la adición.

D $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: $a \cdot (b + c) = a.b + a.c$

IV AXIOMAS RELATIVOS A LA RELACIÓN DE ORDEN " $<$ " \leftarrow menor que

0.1 LEY DE LA TRICOTOMÍA

Si $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}$, entonces una y solamente una de las siguientes relaciones se cumple :

$$\boxed{a < b} \quad \vee \quad \boxed{a = b} \quad \vee \quad \boxed{b < a}$$

"a es menor que b"

"a es igual a b"

"b es menor que a"

0.2 LEY TRANSITIVA : Si $(a < b \wedge b < c) \Rightarrow (a < c)$.

0.3 Si $(a < b \wedge c \in \mathbb{R}) \Rightarrow (a + c < b + c)$

Es decir : "Si a ambos miembros de una desigualdad sumamos un número real "c" cualquiera , entonces el SENTIDO DE LA DESIGUALDAD NO CAMBIA "

0.4 Si $[a < b \wedge c > 0] \Rightarrow [a.c < b.c]$ (Consistencia de la Multiplicación)

Indica : "Si en ambos miembros de una desigualdad multiplicamos un número positivo C , entonces el sentido de la desigualdad no varía".

V AXIOMA DEL SUPREMO : Todo subconjunto no vacío de números reales acotado superiormente, tiene SUPREMO.

Es decir : Sea $S \neq \emptyset$, $S \subset \mathbb{R}$, Si S está acotado superiormente, entonces S tiene supremo.

Note : Ver Cap. 9 COTAS DE UN CONJUNTO.

VI AXIOMAS DE LA IGUALDAD : Para los números reales a, b, c se cumplen los siguientes axiomas.

I₁) **DICOTOMÍA** : al comparar dos números reales a y b , sólo una de las dos relaciones se cumple : $a = b \vee a \neq b$

I₂) **REFLEXIVIDAD** : $a = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

I₃) **SIMETRÍA** : $a = b \Rightarrow b = a$

I₄) **TRANSITIVIDAD** : Si $a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$

I₅) **UNICIDAD DE LA SUMA** : Si $a = b \Rightarrow a + c = b + c, \forall c \in \mathbb{R}$

Este axioma indica que : Si sumamos al número real "a" otro número real "c", el resultado obtenido es un número real único : $a + c$

I₆) **UNICIDAD DE LA MULTIPLICACIÓN** : Si $a = b \Rightarrow ac = bc$

Indica : Si multiplicamos al número real "a" otro número real "c", el resultado obtenido es un número real único : ac

PROBLEMAS

Grupo 1

Demostrar las siguientes proposiciones :

1. $0 = -0$

2. $1^{-1} = 1$

3. si $a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$

4. Sean a, b números reales, $a \neq b$, $b \neq 0$, entonces $(ab)^{-1} = a^{-1} b^{-1}$

5. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, demostrar que : i) $-(a + b) = -a - b$

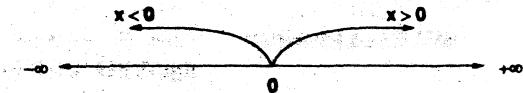
ii) $-(a - b) = b - a$

6. Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces : i) $(a - b) + (b - c) = a - c$

ii) $(a + b) - (b + c) = a - c$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS REALES**LA RECTA NÚMÉRICA :**

Los números reales se representan gráficamente por una recta, dicha recta la llamamos "RECTA REAL".



Esta idea intuitiva nos permite afirmar lo siguiente:

- 1) A cada punto de la recta le corresponde un número real.
- 2) A cada número real le corresponde un sólo punto de la recta.

Así se ha establecido una biyección entre el conjunto P de todos los puntos de la recta y el conjunto \mathbb{R} de todos los números reales.

TEOREMAS**TEOREMA 1.1**

Para todo $a \in \mathbb{R}$, se cumple $a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$

Demonstración:

1) Partiré de $a \cdot 0$

2) Supongamos que: $a \cdot 0 = b$

Entonces: $\frac{b}{a \cdot 0} = \frac{b+0}{a \cdot 0+0}$ (A-3: $a=a+0$)

$$\begin{aligned}
 &= a \cdot 0 + \overbrace{(a+(-a))}^0 \quad (\text{A-4: } 0=a+(-a)) \\
 &= (a \cdot 0+a)+(-a) \quad (\text{A-1: } a+(b+c)=(a+b)+c) \\
 &\downarrow \\
 &= (a \cdot 0+a)+(-a) \quad (\text{M-3: } a=0 \cdot 1) \\
 &= a(\cancel{0}+1)+(-a) \quad (\text{III: } ab+ac=a(b+c)) \\
 &= a\cancel{1}+(-a) \quad (\text{A-3: } 0+a=a) \\
 &= a+(-a) \quad (\text{M-3: } a\cancel{1}=a) \\
 &= 0 \quad (\text{A-4: } a+(-a)=0)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto: $a \cdot 0 = 0 \quad (\text{Igdd})$

TEOREMA 1.2 Para todo $a \in \mathbb{R}$, se cumple: $-a = (-1) \cdot a$

Demostración :

Si prueba que : $a + (-1) \cdot a = 0$, entonces $(-1) \cdot a = -a$

Veamos : Partiré de $a + (-1) \cdot a$

$$\begin{aligned} \text{Pero : } & \underbrace{a + (-1) \cdot a} \\ &= 1 \cdot a + (-1) \cdot a \quad (\text{M - 3 : } a = 1 \cdot a) \\ &= \underbrace{(1 + (-1))}_{0} \cdot a \quad (\text{III : } b \cdot a + c \cdot a = (b + c) \cdot a) \\ &= 0 \cdot a \quad (\text{A - 4 : } a + (-a) = 0) \\ &= 0 \quad (\text{TEO - 11 : } 0 \cdot a = 0) \end{aligned}$$

Luego : $a + (-1) \cdot a = 0$

Pero : ¿Qué significa que $a + (-1) \cdot a = 0$?

Si " $m + n = 0$ ", entonces n es el OPUESTO de m
ó sea que : $n = -m$

Por lo tanto, escribir : " $a + (-1) \cdot a = 0$ " Significa que :

$(-1) \cdot a$ es el OPUESTO de a

ó sea : $(-1) \cdot a = -a$.

APLICACIONES

① Si $x \in \mathbb{R}$, entonces : $-x + 2 = -(x - 2)$

② Si $x \in \mathbb{R}$, entonces : $-x - 2 = -(x + 2)$

COROLARIO 1

Si ($a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}$), entonces : $a \cdot (-b) = -(ab) = (-a)b$.

Demostración :

Partiré de $a(-b)$, para llegar a $-(ab)$

Veamos :

$$\begin{aligned} & a(-b) \\ = & a((-1)b) \quad \text{Por Teo. 1.2} \\ = & (a(-1))b \quad \text{Por M-1} \\ = & ((-1)a)b \quad \text{Por M-2} \\ = & (-1).(ab) \quad \text{Por M-1} \\ \Rightarrow & a(-b) = -(ab) \end{aligned}$$

Ahora :

Partiré de $a(-b)$ para llegar en $(-a)b$

Veamos :

$$\begin{aligned} & a(-b) \\ = & a((-1)b) \quad \text{Por Teo. 1.2} \\ = & (a(-1))b \quad \text{Por M-1} \\ = & ((-1)a)b \quad \text{Por M-2} \\ & a(-b) = (-a)b \quad \text{Por Teo. 1.2} \\ & \text{lqqd.} \end{aligned}$$

TEOREMA 1.3

Para todo $a \in \mathbb{R}$, se cumple : $-(-a) = a$

Demostración :

El opuesto de a es $-a$ porque : $a + (-a) = 0$

Del mismo modo : La proposición " $-(-a) + a = 0$ " significa que :

$$\begin{array}{c} \text{"a es el } \underbrace{\text{OPUESTO de } -a} \\ = \underbrace{-(-a)} \end{array}$$

ó sea que : " $a = -(-a)$ " (lqqd)

TEOREMA 1.4

si a y b son números reales, entonces : $(-a)(-b) = ab$.

Demostración : Partiré de " $(-a)(-b)$ " para llegar a " ab ".

Veamos : $(-a)(-b) =$

$$\begin{aligned} \text{Hacer : } (-b) &= c &= (-a)c \\ &= -(ac) && \text{Por COROLARIO 1} \\ &= -(a(-b)) \\ &= -(-(ab)) && \text{Por COROLARIO 1} \\ &= (ab) && \text{Por TEOREMA 1.3} \\ &= ab \end{aligned}$$

Definición 1 Si $(a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}) \Rightarrow a - b = a + (-b)$

↑
Diferencia de a y b

Definición 2 Si $(a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \text{ con } b \neq 0) \Rightarrow \frac{a}{b} = ab^{-1}$

↑
Cociente de a y b

TEOREMA 1.5 $(ab = 0) \iff (a = 0 \vee b = 0)$

DEMOSTRACIÓN

PARTE I (\Rightarrow)

1. Por hipótesis tenemos que $ab = 0$

2. Supongamos que $b \neq 0 \Rightarrow \exists b^{-1}$ tal que de : $ab = 0$

$$\text{obtengo : } (ab)b^{-1} = 0 \cdot b^{-1}$$

$$a(b \cdot b^{-1}) = 0$$

$$a \cdot 1 = 0 \Rightarrow a = 0$$

3. Si $a \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1}$ tal que, de $ab=0$ obtengo : $a^{-1} \cdot (ab) = a^{-1} \cdot 0$

$$\Rightarrow (a^{-1} \cdot a) b = 0$$

$$1 \cdot b = 0$$

$$\Rightarrow b = 0$$

PARTE II (\Leftarrow)

1. Por hipótesis : $a = 0 \vee b = 0$

2. De $a = 0$

Multiplicado por b

$$\Rightarrow a \cdot b = b \cdot 0$$

$$\Rightarrow a \cdot b = 0$$

3. ó de $b = 0$

Multiplico por a:

$$\Rightarrow a \cdot b = a \cdot 0$$

$$\Rightarrow a \cdot b = 0$$

(lqqd)

TEOREMA 1.6 $a(b - c) = ab - ac$

Prueba :

$$a(b - c) = a[b + (-c)] \quad \text{Def. 1}$$

$$= ab + a(-c) \quad D$$

$$= ab + [-ac] \quad \text{Corolario 1}$$

$$= ab - ac \quad \text{Def. 1}$$

Definición 3 : $\forall a \neq 0, a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ definimos :

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^n = a^{n-1} \cdot a, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

Además : $a^{-1} = (a^{-1})^n$

TEOREMA 1.7

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Prueba :

$$\begin{aligned}
 [a + b](a - b) &= a.(a - b) + b.(a - b) && D \\
 &= a.a - a.b + b.a - b.b && T_{1.6} \\
 &\triangleq a^2 - ab + ab - b^2 && \text{Def. 3 , M}_2 \\
 &= a^2 + \underbrace{[-(a.b) + ab]}_0 - b^2 && A_1 , A_4 \\
 &= (a^2 + 0) - b^2 && A_1 \\
 &= a^2 - b^2 && A_3
 \end{aligned}$$

TEOREMA 1.8

$$a^2 = b^2 \iff a = b \vee a = -b$$

Prueba : \Rightarrow

$$\text{Si } a^2 = b^2$$

$$a^2 + (-b^2) = b^2 + (-b^2)$$

$$a^2 - b^2 = 0$$

$$(a + b)(a - b) = 0$$

$$a + b = 0 \vee a - b = 0$$

$$[a + b] + (-b) = 0 + (-b) \vee a + (-b) = 0$$

$$a + \underbrace{[b + (-b)]}_0 = -b \vee [a + (-b)] + b = 0 + b \quad A_1$$

$$\vee a + \underbrace{[(-b) + b]}_0 = b \quad A_4$$

$$a + 0 = -b \vee \underbrace{0}_a = b$$

$$a = -b \vee \underbrace{a + 0}_a = b \quad A_3$$

$$a = -b \vee a = b$$

$$\Leftarrow \text{ si } a = b \vee a = -b \Rightarrow a^2 = b^2$$

Queda como ejercicio

TEOREMA 1.9

Ley de cancelación para la adición

$$a + c = b + c \Rightarrow a = b$$

Prueba :

$$a + c = b + c \quad \dots \text{hipótesis}$$

$$(a + c) + (-c) = [b + c] + (-c) \quad \text{Unicidad de la adición}$$

$$a + (c + (-c)) = b + (c + (-c)) \quad A_1$$

$$a + 0 = b + 0 \quad A_4$$

$$a = b \quad A_3$$

TEOREMA 1.10**Ley de cancelación de la multiplicación .**

$$ac = bc, c \neq 0 \Rightarrow a = b$$

Prueba :

$$ac = bc \quad \dots \text{hipótesis}$$

$$(ac)c^{-1} = (bc)c^{-1} \quad \text{Unicidad de la multiplicación}$$

$$a(c.c^{-1}) = b(c.c^{-1}) \quad M_1$$

$$a.1 = b.1 \Rightarrow a = b \quad M_4$$

TEOREMA 1.11

$$(a.b)^{-1} = a^{-1}.b^{-1}, a.b \neq 0$$

Prueba :

Bastará probar que $(a.b)(a^{-1}b^{-1}) = 1$, esto confirmaría que el inverso multiplicativo de $(a^{-1}b^{-1})$ es $(a.b)^{-1}$.

Veamos :

$$\text{Partir de : } (a.b)(a^{-1}b^{-1})$$

$$(a.b)(a^{-1}b^{-1}) = a(b.a^{-1})b^{-1} \quad M_1$$

$$= a(a^{-1}b)b^{-1} \quad M_2$$

$$= (a.a^{-1})(bb^{-1}) = 1.1 = 1 \quad M_1, M_4$$

Pero : $ab \neq 0 \Rightarrow \exists (ab)^{-1}$, tal que $(a.b)(ab)^{-1} = 1$

$$\text{Luego : } (ab)(a^{-1}b^{-1}) = (ab)(ab)^{-1}$$

$$\Rightarrow a^{-1}b^{-1} = (ab)^{-1}$$

Ley de cancelación**TEOREMA 1.12**

$$(a^{-1})^{-1} = a$$

Prueba :

$$\text{El inverso de } a \text{ es } a^{-1}/a.a^{-1} = 1, a \neq 0$$

$$\text{El inverso de } a^{-1} \text{ es } (a^{-1})^{-1}/a^{-1}(a^{-1})^{-1} = 1$$

Luego : $a \cdot a^{-1} = a^{-1}(a^{-1})^{-1}$

$$a^{-1} \cdot a = a^{-1}(a^{-1})^{-1} \Rightarrow a = (a^{-1})^{-1} \text{ Cancelación}$$

TEOREMA 1.13

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad b \neq 0, \quad d \neq 0$$

Prueba : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = a \cdot b^{-1} + c \cdot d^{-1} \quad \text{Def. 2}$

$$= (a \cdot b^{-1})(d \cdot d^{-1}) + (c \cdot d^{-1})(b \cdot b^{-1}) \quad M_3, M_4$$

$$= (a \cdot d)(b^{-1} \cdot d^{-1}) + (c \cdot b)(d^{-1} \cdot b^{-1}) \quad M_1, M_2$$

$$= (a \cdot d)(b^{-1} d^{-1}) + (b \cdot c)(b^{-1} \cdot d^{-1}) \quad M_2$$

$$= [a \cdot d + b \cdot c](b^{-1} d^{-1}) \quad M_2, D$$

$$= [a \cdot d + b \cdot c](b d)^{-1} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b d} \quad T 1.11, \text{ Def. 2}$$

TEOREMA 1.14

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad b \neq 0, \quad d \neq 0$$

Prueba : $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = (a \cdot b^{-1})(cd^{-1}) \quad \text{Def. 2}$

$$= (a \cdot c)(b^{-1} d^{-1}) \quad M_2, M_1$$

$$= (a \cdot c)(b d)^{-1} \quad T 1.11$$

$$= \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad \text{Def. 2}$$

TEOREMA 1.15

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0, \quad d \neq 0$$

Prueba : $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot b^{-1}}{c \cdot d^{-1}} = (a \cdot b^{-1})(c \cdot d^{-1})^{-1} \quad \text{Def. 2}$

$$= (a \cdot b^{-1})(c^{-1} \cdot (d^{-1})^{-1}) \quad T 1.11$$

$$= (a \cdot b^{-1})(c^{-1} \cdot d) \quad T 1.12$$

$$= (a \cdot d)(b^{-1} \cdot c^{-1}) = (a \cdot d)(b c)^{-1} \quad M_2, M_1$$

$$= \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad T 1.11, \text{ Def. 2}$$

TEOREMA 1.16

$$a + a = 2a \quad , \text{ en general: } a + a + a + \dots + a = na$$

n veces

Prueba : $a + a = 1.a + 1.a \quad M_3$

$$= (1 + 1).a = 2.a \quad D$$

TEOREMA 1.17

Si $a, b, x \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ entonces $ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -a^{-1}b$

Prueba :

$$a.x + b = 0$$

$$(ax + b) + (-b) = 0 + (-b) \quad \text{Unidad de la adición}$$

$$ax + (b + (-b)) = -b \quad A_1, A_3$$

$$ax + 0 = -b \quad A_4$$

$$a.x = -b \quad A_3$$

$$a^{-1}(a.x) = a^{-1}(-b) \quad \text{Unidad de la multiplicación}$$

$$(a^{-1}a)x = -a^{-1}b \quad M_1, \text{Corolario}$$

$$1.x = -a^{-1}b \quad M_4$$

$$x = -a^{-1}b \quad M_3$$

Capítulo 2

Desigualdades

TEOREMA 2.1

$$\text{Si } (a < b \wedge c < d) \Rightarrow (a + c < b + d)$$

Es decir : "Dos desigualdades del MISMO SENTIDO , se pueden sumar miembro a miembro , obteniéndose otra desigualdad del MISMO SENTIDO."

DEMOSTRACIÓN :

1) Si $(a < b \wedge c \in \mathbb{R}) \Rightarrow (a + c < b + c)$ (0.3)

2) Si $(c < d \wedge b \in \mathbb{R}) \Rightarrow (c + b < d + b)$ (0.3)

3) $b + c < b + d$ (A-2)

4) Por los pasos (1), (2) y (3) podemos deducir lo siguiente :

Si $\underbrace{[a + c < b + c]}_{\uparrow} \wedge \underbrace{[b + c < b + d]}_{\uparrow} \Rightarrow [a + c < b + d]$ (0.2)

TEOREMA 2.2

$$\text{Si } (a < b) \Rightarrow (-a > -b)$$

Es decir : "Si a una desigualdad se le multiplica por "-1" , entonces la desigualdad cambia de sentido"

Demonstración :

1) Si $(a < b \wedge c = (-a) + (-b) \text{ real}) \Rightarrow (a + \underbrace{(-a)}_c + \underbrace{(-b)}_c < b + \underbrace{(-a)}_c + \underbrace{(-b)}_c)$ (0.3)

2) Pero : Si $a + (-a) + (-b) < b + (-a) + (-b)$

3) Entonces : $(a + (-a)) + (-b) < (-a) + b + (-b)$ (A-1) , (A-2)

4) $0 + (-b) < (-a) + (b + (-b))$ (A-4) , (A-1)

5) $-b < -a + 0$ (A-3) , (A-4)

6) $-b < -a$, esta desigualdad es equivalente a
 $-a > -b$

TEOREMA 2.3

$$\text{Si } (a < b \wedge c < 0) \Rightarrow (ac > bc)$$

Es decir : "Si a ambos miembros de una desigualdad le multiplicamos por un número negativo, entonces el SENTIDO de la desigualdad CAMBIA"

Demonstración :

- 1) Si $c < 0$, entonces $-c > 0$ (Teo. 2.2)
- 2) Luego : Si $(a < b \wedge -c > 0) \Rightarrow a(-c) < b(-c)$ (O.4)
 $\Rightarrow -ac < -bc$ (Corolario 1)
 $\Rightarrow -(-ac) > -(-bc)$ (Teorema 2.1 y 1.2)
 $\Rightarrow ac > bc$

TEOREMA 2.4 Si $(a \neq 0) \Rightarrow (a^2 > 0)$

Es decir : "Todo número real diferente de cero, elevado al cuadrado, es positivo".

Aplicaciones :

- 1) Si $\{(x-1) \neq 0 \wedge x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow (x-1)^2 > 0$
ó sea $x \neq 1$
- 2) Si $\{(x+2) \neq 0 \wedge x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow (x+2)^2 > 0$
ó sea $x \neq -2$
- 3) La proposición : " $\forall x \in \mathbb{R}$, con $x \neq 3 / (x-3)^2 > 0$ " es Verdadero.
- 4) La proposición : " $\forall x \in \mathbb{R} / (x-3)^2 \geq 0$ " es Verdadero.
- 5) La proposición : " $\forall x \in \mathbb{R} / (x+3)^2 > 0$ " es falso porque falla cuando $x = -3$

TEOREMA 2.5 Si $(0 \leq a < b \wedge 0 \leq c < d) \Rightarrow (ac < bd)$

Este teorema significa que : "Dos desigualdades del mismo sentido se multiplican, sólo cuando los extremos de las desigualdades son positivos ó cero."

Esto quiere decir que :

- 1) "Si algún extremo de dos desigualdades del mismo sentido, es negativo, entonces no podemos multiplicar ambas desigualdades".
- 2) Además, el Teorema afirma que dos desigualdades de extremos positivos se pueden multiplicar, no dice que se puedan dividir.

Por lo tanto "No se dividen desigualdades"

Este Teorema se aplica en temas relativos a :

1. La demostración de la existencia del límite de una función real en lo referente a la ACOTACIÓN.
2. También en la demostración de la existencia de una sucesión y de una serie, en lo referente a la ACOTACIÓN.
3. Para hallar el rango de una función.

Ejemplos :

1. Si $0 < |x - 1| < \delta \wedge 0 < |x + 1| < 3 \Rightarrow |x - 1| |x + 1| < 3\delta$
2. Si $0 < |x - \frac{1}{2}| < \delta \wedge 0 < \frac{1}{|x|} < 6 \Rightarrow |x - \frac{1}{2}| \frac{1}{|x|} < 6\delta$
3. Si $1 < x < 2 \wedge 2 < x + 1 < 4 \Rightarrow 2 < x(x+1) < 8$
 $\Leftrightarrow 2 < x^2 + x < 8 ; f(x) = x^2 + x$
 $\forall x \in (1, 2)$

EJEMPLOS ACLARATORIOS

$$(1) \text{ Si } (2 < x < 3 \wedge 3 < x + 1 < 4) \Rightarrow (6 < x(x+1) < 12)$$

↑ Esta implicación es verdadera

$$(2) \text{ Si } (-5 < x < -3 \wedge 2 < x + 7 < 4) \Rightarrow (-10 < x(x+7) < -12)$$

↑ Esta implicación es Falsa,
porque la 1^a desigualdad tiene
extremos negativos.

$$(3) \text{ Si } (8 < x < 12 \wedge 2 < x - 6 < 6) \Rightarrow \left(4 < \frac{x}{x-6} < 2\right)$$

↑ Esta implicación es Falsa,
porque estamos dividiendo las
dos desigualdades.

TEOREMA 2.6 REGLA DE LOS SIGNOS DE LA MULTIPLICACIÓN

$$i) ab > 0 \Leftrightarrow [(a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)]$$

$$ii) ab < 0 \Leftrightarrow [(a < 0 \wedge b > 0) \vee (a > 0 \wedge b < 0)]$$

TEOREMA 2.7 Si $(a \wedge b \text{ tienen el mismo signo y } a < b) \Rightarrow \left(\frac{1}{a} > \frac{1}{b}\right)$

Este Teorema afirma que :

"Una desigualdad PODEMOS INVERTIR, sólo cuando los dos extremos son positivos ó cuando son negativos."

EN CONSECUENCIA: Si un extremo es negativo y el otro es positivo, entonces la desigualdad NO se puede invertir.

EJEMPLOS :

$$\textcircled{1} \quad \text{Si } (-8 < x - 2 < -3) \Rightarrow \left(-\frac{1}{8} > \frac{1}{x-2} > -\frac{1}{3} \right), \quad x \neq 2$$

↑
esta implicación es Verdadero.

$$\textcircled{2} \quad \text{Si } \left(\frac{3}{4} < x - 2 < 5 \right) \Rightarrow \left(\frac{4}{3} > \frac{1}{x-2} > \frac{1}{5} \right)$$

↑
esta implicación es Verdadero.

$$\textcircled{3} \quad \text{Si } \frac{2}{3} < \frac{4}{x-1} < 4 \Rightarrow \frac{3}{2} > \frac{x-1}{4} > \frac{1}{4} \Rightarrow 6 > x-1 > 1 \Rightarrow 2 < x < 7$$

$$\textcircled{4} \quad \text{Si } \left(\frac{5}{4} > x - 3 > -8 \right) \Rightarrow \left(\frac{4}{5} < \frac{1}{x-3} < -\frac{1}{8} \right)$$

↑
esta implicación es FALSO, porque el segundo extremo es NEGATIVO y el primero es POSITIVO.

TEOREMA 2.9

$$\text{Si } [a \geq 0 \wedge b \geq 0] \Rightarrow [a^2 > b^2 \Leftrightarrow a > b]$$

Este Teorema afirma dos cosas.

$$\textcircled{1} \quad (\Leftarrow) \quad \text{Si } [a > b \wedge (a \geq 0 \wedge b \geq 0)] \Rightarrow [a^2 > b^2]$$

$$\textcircled{2} \quad (\Rightarrow) \quad \text{Si } [a^2 > b^2 \wedge (a \geq 0 \wedge b \geq 0)] \Rightarrow [a > b]$$

EJEMPLOS Aclaratorios :

$$\textcircled{1} \quad \text{Si } (5 > 3) \Rightarrow (25 > 9) \quad \text{Es verdadero esta implicación}$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Si } (x > 2) \Rightarrow (x^2 > 4) \quad \text{Es verdadero esta implicación}$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Si } (x^2 > 4) \Rightarrow (x > 2) \quad \text{Es falso esta implicación}$$

$$\textcircled{4} \quad \text{Si } (x^2 > 4 \wedge x \geq 0) \Rightarrow (x > 2) \quad \text{Es verdadero esta implicación}$$

$$\textcircled{5} \quad \text{Si } (9 < x < 16) \Rightarrow (3 < \sqrt{4} < 4) \quad \text{Es verdadero esta implicación}$$

$$\textcircled{6} \quad \text{Si } (1 \leq x^4 < 16 \wedge x \geq 0) \Rightarrow (1 \leq x^2 \leq 4) \Rightarrow (1 \leq x \leq 2) \quad \text{es verdadero esta implicación}$$

$$\textcircled{7} \quad \text{Si } (x^2 > 9) \Rightarrow (x > 3)$$

↑
esta implicación es falsa, porque no sabemos
si $x \geq 0 \vee x < 0$

$$\textcircled{8} \quad \text{Si } (1 < x^4 < 16) \Rightarrow (1 < x < 2) \quad \text{Esta implicación es falsa.}$$

TEOREMA 2.10'

$$\text{Si } (b \geq 0 \wedge a^2 > b) \Leftrightarrow (a > \sqrt{b} \vee a < -\sqrt{b})$$

DEMOSTRACIÓN :

\Rightarrow (1) Por hipótesis tenemos que : $b \geq 0 \wedge a^2 > b$. En esta desigualdad no se sabe qué signo tiene a , puede ser $a \geq 0 \vee a < 0$

En consecuencia :

i) Si $a \geq 0$, entonces la desigualdad : $(a)^2 > b = (\sqrt{b})^2$ es equivalente

$$\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ a > \sqrt{b} \quad \text{Por Teo. 2.9} \end{array}$$

ii) Si $a < 0$, entonces $-a > 0$ y la desigualdad : $a^2 = (-a)^2 > b = (\sqrt{b})^2$

$$\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ -a > \sqrt{b} \quad \text{Por Teo. 2.9} \end{array}$$

$$\text{Multiplicado por } -1 : \Leftrightarrow a < -\sqrt{b}$$

Es decir si $\underbrace{a < 0}_{-a > 0} \wedge b \geq 0$, entonces $a^2 > b \Rightarrow a < -\sqrt{b}$

2) Luego, por i) y ii) se cumple que :

$$\text{Si } (b \geq 0 \wedge a^2 > b) \Rightarrow \underbrace{(a > \sqrt{b})}_{\text{esta desigualdad se cumple cuando } a \geq 0} \vee \underbrace{(a < -\sqrt{b})}_{\text{esta desigualdad se cumple cuando } a < 0}$$

\Leftarrow Queda como ejercicio :

TEOREMA 2.11

$$\text{Si } b > 0, \text{ entonces } [a^2 < b] \Leftrightarrow [-\sqrt{b} < a < \sqrt{b}]$$

DEMOSTRACIÓN :

\Rightarrow (1) Hipótesis : $a^2 < b$

(2) Si $b > 0$, entonces $(a \geq 0 \vee a < 0)$

En consecuencia :

i) Si $(a \geq 0 \wedge b > 0)$, entonces la desigualdad : $a^2 < b = (\sqrt{b})^2 \Leftrightarrow$

equivalente a la desigualdad : $a < \sqrt{b}$ \square

ii) Si $(a < 0 \wedge b > 0)$, entonces la desigualdad : $(-a)^2 = a^2 < b = (\sqrt{b})^2$

$-a > 0$ es equivalente a la desigualdad

$$\underbrace{-a < \sqrt{b}}$$

$$a > -\sqrt{b}$$

$$-\sqrt{b} < a \quad \square$$

3) Las desigualdades \square y \star implican que :

$$\text{Si } (-\sqrt{b} < a \wedge a < \sqrt{b}) \Rightarrow (-\sqrt{b} < a < \sqrt{b})$$

(\Leftarrow) Queda como ejercicio.

Aplicaciones :

1. Resolver : $(x-1)^2 < 4$

Solución : aplicar el Teo. 2.11

$$(x-1)^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x-1 < 2 \\ -1 < x < 3$$

2. $9x^2 - 18x + 5 < 0$

Completar cuadrados:

1º Dividir entre 9

$$x^2 - 2x + \frac{5}{9} < 0$$

2º Tomar el coeficiente de x , dividir entre dos, elevar al cuadrado y luego sumar y restar este resultado :

$$\underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} - 1 + \frac{5}{9} < 0$$

$$(x-1)^2 < \frac{4}{9}$$

$$-\frac{2}{3} < x-1 < \frac{2}{3}$$

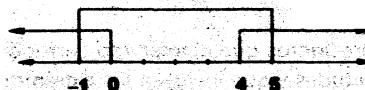
$$-\frac{2}{3} + 1 < x < \frac{2}{3} + 1$$

$$\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}$$

$$2. \quad 4 < (x-2)^2 < 9$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 > 4 \quad \wedge \quad (x-2)^2 < 9$$

$$\Rightarrow (x-2 > 2 \vee x-2 < -2) \wedge -3 < x-2 < 3 \\ (x > 4 \vee x < 0) \wedge -1 < x < 5$$



Solución : $\{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 0 \vee 4 < x < 5\}$

$$3. \quad -x < x^2 + x < -3x$$

$$\Rightarrow -x < x^2 + x \quad \wedge \quad x^2 + x < -3x$$

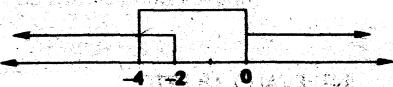
$$0 < x^2 + 2x \quad \wedge \quad x^2 + 4x < 0$$

$$1 < x^2 + 2x + 1 \quad \wedge \quad x^2 + 4x + 4 < 4$$

$$(x+1)^2 > 1 \quad \wedge \quad (x+2)^2 < 4$$

$$x+1 > 1 \vee x+1 < -1 \wedge -2 < x+2 < 2$$

$$x > 0 \vee x < -2 \quad \wedge \quad -4 < x < 0$$



Solución = $\{x \in \mathbb{R} / -4 < x < -2\}$

Capítulo 3

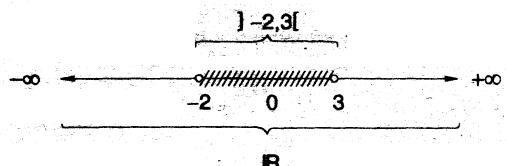
Intervalos

Los intervalos son subconjuntos de los números reales, que gráficamente son segmentos de recta o semirectas y cuyos elementos satisfacen cierta desigualdad.

Así por ejemplo, tendremos :

- a) El intervalo abierto de extremos -2 y 3 , que se denota por $] -2, 3 [$, es el conjunto de números reales x , tal que $-2 < x < 3$.

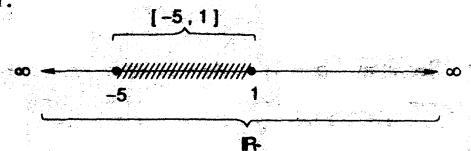
Gráficamente será :



Como podemos apreciar, el intervalo abierto $] -2, 3 [$ es un segmento de recta de longitud 5 unidades.

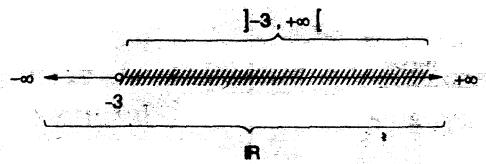
- b) El intervalo cerrado de extremos -5 y 1 , que se denota por $[-5, 1]$, es el conjunto de números reales x , tal que $-5 \leq x \leq 1$.

Gráfico :



Apreciamos que el intervalo cerrado $[-5, 1]$, también es un segmento de longitud 6 unidades y que incluyen los extremos -5 y 1 .

- c) El intervalo $] -3, +\infty [$ es el conjunto de los números reales x , tal que $x > -3$. Gráficamente es la semirecta de -3 sin tocarlo hasta $+\infty$.

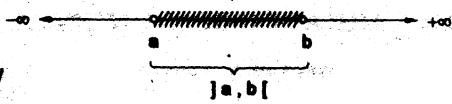


Ahora, hagamos las definiciones correspondientes :

- 3.1 **INTERVALO ABIERTO.** Dados dos números reales a y b con $a < b$, definimos el intervalo abierto $] a, b [$ del siguiente modo.

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$

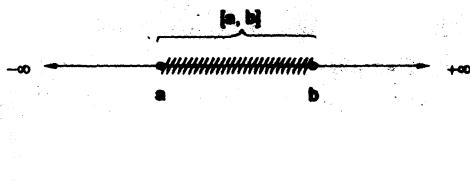
se lee: "Conjunto de $x \in \mathbb{R}$, tal que x es menor que b " y " x es mayor que a "



3.2 INTERVALO CERRADO. Dados dos números reales a y b con $a \leq b$ definimos el intervalo cerrado $[a, b]$ del modo siguiente:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$

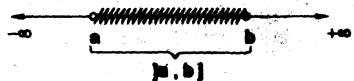
se lee: "conjunto de $x \in \mathbb{R}$, tal que, x es menor o igual al número b " y " x es mayor o igual al número a "



3.3 INTERVALOS SEMIABIERTOS (o SEMICERRADOS)

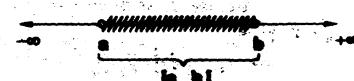
$$3.3.1]a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$$

Intervalo abierto por la izquierda



$$3.3.2 [a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$$

Intervalo abierto por la derecha



3.4 INTERVALOS EN LA RECTA EXTENDIDA $\mathbb{R}^* = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$$3.4.1]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$$



$$3.4.2 [a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$$



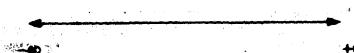
$$3.4.3]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$$



$$3.4.4]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$$



$$3.4.5]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$



3.5 APLICACIÓN DE LOS INTERVALOS

Los intervalos serán sumamente útiles:

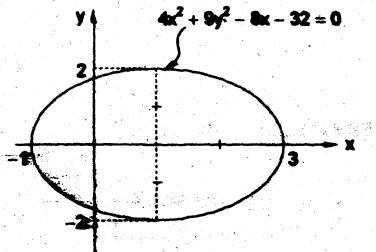
- ## 1. Para expresar el conjunto solución de INECUACIONES.

Ejemplo :

El conjunto solución de la inecuación : $2 + 3x - x^2 \geq 0$
es el intervalo cerrado : $x \in [1, 2]$

- ## 2. Para expresar el dominio y rango de una relación y de una función de \mathbb{R} en \mathbb{R} .

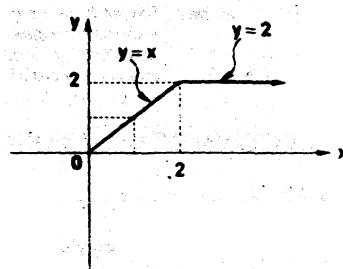
Ejemplo :



El dominio de ésta clípeos es:

$$x \in [-1, 3]$$

El rango es : y $\in [-2, 2]$



$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 2 \\ 2, & x \geq 2 \end{cases}$$

El dominio de la función $f(x)$ es :

$$x \in [0, +\infty]$$

El rango de $f(x)$ es $x \in [0, 2]$

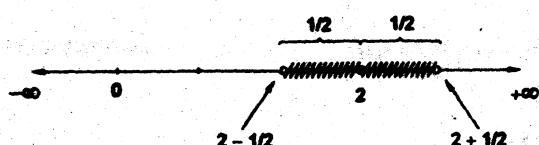
- ### **3. Para expresar la "VECINDAD DE UN PUNTO X."**

Ejemplo :

$$\frac{V_1(2)}{2} = \{x \in \mathbb{R}, |x - 2| < V_2\} \leftarrow$$

$$= x \in [3/2, 5\pi]$$

Es la VECINDAD del centro en 2
y radio $\frac{1}{2}$.



- #### 4. Peng "ACOTATE"

Ejemplo : si $x \in [-2, 3] \Rightarrow -8 < 1 - 3x < 7$

COTA SUPERIOR (Sobrepiso)

Capítulo 4

Valor Absoluto

4.1 DEFINICIÓN.- El valor absoluto de un número real "a" denotado por $|a|$ se define por la regla.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Se lee: "El valor absoluto de a", es igual, "al mismo número a, si a es positivo o cero" o "igual a su opuesto -a, si a es negativo".

Ejemplos Aclaratorios :

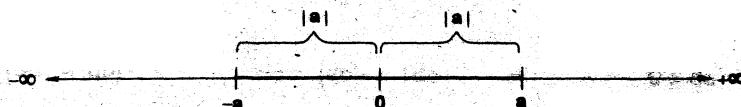
1. $| -4 | = -(-4) = 4$; porque $-4 < 0$. Pues el opuesto de -4 es $-(-4)$

2. $| 2 | = 2$, porque $2 > 0$

3. $| 0 | = 0$

4.2 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL.

El valor absoluto de un número real a (denotado por $|a|$) indica, gráficamente, "La longitud del origen al número a " o "del origen al número $-a$ ".



4.3 PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LOS NÚMEROS REALES.

i) $|a| \geq 0, \forall a \in \mathbb{R} \wedge |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

ii) $|ab| = |a| |b|, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$

iii) $|-a| = |a|$, de aquí se deduce que $|b - a| = |a - b|$

Ejemplos : $|3 - 2x| = |2x - 3|$, $|-x - 3| = |x + 3|$

iv) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (DESIGUALDAD TRIANGULAR)

DEMOSTRACIONES

DEMOSTRACIÓN DE i)

1. si $a > 0 \Rightarrow |a| = a$ (definición de valor absoluto).

2. Pero $a > 0 \Rightarrow |a| = a > 0 \Rightarrow |a| > 0$

3. si $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$ (definición de valor absoluto)

4. como $a < 0 \Rightarrow -a > 0$, luego $|a| = -a > 0 \Rightarrow |a| > 0$

5. si $a = 0 \Rightarrow |a| = 0$. Por otro lado si $|a| = 0 \Rightarrow a = 0$

DEMOSTRACIÓN DE ii) Aplicando la definición de Valor Absoluto , el Teo. 2.6 y la transitividad para la igualdad, deducimos lo siguiente :

$$1. (\text{si } a > 0 \wedge b > 0) \Rightarrow (|a| = a \wedge |b| = b) \Rightarrow |a||b| = ab$$



$$ab > 0$$



$$(|ab| = ab) \rightarrow ab = |ab| = |a||b|$$



2. Aplicando nuevamente la definición de Valor Absoluto, el Teo. 2.6 y la transitividad en la igualdad , obtenemos :

$$(\text{si } a < 0 \wedge b < 0) \Rightarrow (|a| = -a \wedge |b| = -b) \Rightarrow |a||b| = (-a)(-b)$$



$$ab > 0$$



$$|ab| = ab$$



$$ab = |ab| = |a||b|$$

3. Del mismo modo :

$$(\text{si } a < 0 \wedge b > 0) \Rightarrow (|a| = -a \wedge |b| = b) \Rightarrow (|a||b| = (-a)b = -(ab))$$



$$ab < 0$$



$$|ab| = -(ab)$$



$$-(ab) = |ab| = |a||b|$$

4. Similarmente :

$$(\text{si } a > 0 \wedge b < 0) \Rightarrow (|a| = a \wedge |b| = -b) \Rightarrow (|a||b| = a(-b) = -(ab))$$



$$ab < 0$$



$$|ab| = -(ab)$$



$$(ab) = |ab| = |a||b|$$

DEMOSTRACIÓN DE iii)

$$1. \text{ si } a = 0 \Rightarrow |a| = 0 \rightarrow |a| = |-a|$$



$$-a = 0$$



$$|-a| = 0$$



$$|a| = |-a|$$

$$2. \text{ si } a > 0 \Rightarrow |a| = a \rightarrow a = |a| = |-a|$$



$$-a < 0$$



$$|-a| = -(-a) = a$$



$$a = |a| = |-a|$$

$$\begin{array}{l} \text{3. si } a < 0 \Rightarrow |a| = -a \\ \quad \downarrow \\ \quad -a > 0 \Rightarrow |-a| = -a \end{array} \quad \boxed{|a| = -a} \rightarrow -a = |a| = |-a|$$

OTRA MANERA DE DEMOSTRAR *iii)* es aplicando directamente la propiedad *ii)*

Veamos :

$$|-a| = |(-1)a| = |-1||a| = 1.|a| = |a|$$

DEMOSTRACIÓN *iv)*

Si damos por demostrado las proposiciones : $-|a| \leq a \leq |a| \forall a \in \mathbb{R}$ y $|a| < b$, tenemos :

1. si $-|a| \leq a \leq |a| \wedge -|b| \leq b \leq |b| \forall a, b \in \mathbb{R}$ y sumando miembro a miembro las dos desigualdades tenemos $-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$

2. $\Rightarrow -(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b| \Leftrightarrow |a + b| \leq |a| + |b|$

OTRA MANERA DE DEMOSTRAR ES :

$$\begin{aligned} 1. \text{ Sea } |a+b|^2 &= |(a+b)^2| \\ &= (a+b)^2, \text{ porque } (a+b)^2 > 0, \text{ si } a+b \neq 0 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &\leq a^2 + 2|ab| + b^2, \text{ pues } ab \leq |ab| \\ &= a^2 + 2|a||b| + b^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2, \text{ pues } a^2 = |a|^2, b^2 = |b|^2 \\ &= (|a| + |b|)^2 \end{aligned}$$

$$3. \Rightarrow |a+b|^2 \leq (|a| + |b|)^2$$

$$4. \Rightarrow |a+b| \leq |a| + |b|, \text{ aplicando Teo. 2.9.}$$

4.4 PROPOSICIONES

$$i) |a|^2 = a^2$$

$$ii) \text{ si } b \geq 0, \text{ entonces } |a| = b \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$$

$$iii) |a| = |b| \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$$

$$\text{iv)} \sqrt{a^2} = |a|$$

$$\text{v)} \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0$$

DEMOSTRACIONES

DEMOSTRACIÓN DE i) $|a|^2 = a^2$

1. si $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a \Rightarrow |a|^2 = a^2$
2. si $a < 0 \Rightarrow |a| = -a \Rightarrow |a|^2 = (-a)^2 = a^2$

DEMOSTRACIÓN DE ii)

1. Por hipótesis, tenemos que: $|a| = b$, con $b \geq 0$
2. si $(|a| = b \wedge b \geq 0) \Rightarrow |a|^2 = b^2$
3. $\Rightarrow a^2 = b^2$
4. $\Rightarrow a = b \vee a = -b$ (Por Teo. 1.6)
5. Por tanto si $b \geq 0$, $|a| = b \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$

DEMOSTRACIÓN DE iii)

1. Por hipótesis $|a| = |b|$
 2. $\Rightarrow |a|^2 = |b|^2$
 3. $\Rightarrow a^2 = b^2$
 4. $\Rightarrow a = b \vee a = -b$
 5. Por tanto:
- $$|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$$

DEMOSTRACIÓN DE iv)

1. Se sabe que $a^2 = |a|^2$
2. Como : $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$
3. Además : $|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$
4. Por 1, 2 y 3 entonces : $\sqrt{a^2} = \sqrt{|a|^2} = |a|$

DEMOSTRACIÓN DE v)

1. Partiremos de $|a| = |a \cdot 1| = |a(bb^{-1})|$, pues $b \neq 0$ y $bb^{-1} = 1$
2. $\Rightarrow |a| = |a(b^{-1}b)|$, por M - 2
3. $\Rightarrow |a| = |(ab^{-1})b|$, por M - 1
4. $\Rightarrow |a| = \left| \left(a \frac{1}{b} \right) b \right|$, por M - 4

$$= \left| \frac{a}{b} b \right| = \left| \frac{a}{b} \right| |b| , \text{ por } 4.3 \text{ ii)}$$

$$|a| = \left| \frac{a}{b} \right| |b|$$

$$\begin{aligned} 5. \Rightarrow |a| (|b|)^{-1} &= \left| \frac{a}{b} \right| |b| (|b|)^{-1} \\ |a| \cdot \frac{1}{|b|} &= \left| \frac{a}{b} \right| \cdot 1 \end{aligned}$$

$$6. \Rightarrow \frac{|a|}{|b|} = \left| \frac{a}{b} \right|$$

OTRA MANERA DE DEMOSTRAR :

$$1. \text{ Supongamos que } t = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$$

$$\begin{aligned} 2. \Rightarrow t = ab^{-1} &\Rightarrow tb = a(b^{-1}b) \\ &\Rightarrow tb = a \\ &\Rightarrow |tb| = |a| \\ &\Rightarrow |t| |b| = |a| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \text{ Pero } t = \frac{a}{b} &\Rightarrow \left| \frac{a}{b} \right| |b| = |a| \\ &\Rightarrow \left| \frac{a}{b} \right| \underbrace{|b| (|b|)^{-1}}_1 = |a| (|b|)^{-1} \\ &\Rightarrow \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \end{aligned}$$

4.5 PROPOSICIONES

- i) si $b > 0$, $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$
- ii) si $b \geq 0$, $|a| \geq b \Leftrightarrow a \geq b \vee a \leq -b$
- iii) $||a| - |b|| \leq |a - b| < |a| + |b|$

DEMOSTRACIONES

DEMOSTRACIÓN DE i)

1. (si $b > 0 \wedge |a| < b \Leftrightarrow |a| |a| < b \cdot b$ por Teo. - 2.5
2. $\Leftrightarrow |a|^2 < b^2$

$$3. \quad \Leftrightarrow a^2 < b^2$$

$$4. \quad \Leftrightarrow -\sqrt{b^2} < a < \sqrt{b^2} \text{ por Teo. - 2.11}$$

$$5. \quad \Leftrightarrow -b < a < b$$

$$6. \text{ Por tanto: } |a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$$

OTRA MANERA DE DEMOSTRAR es usando tan sólo la definición de valor absoluto.

Veamos :

1. Por hipótesis se tiene que $b > 0 \wedge |a| < b$

$$2. \text{ si } a \geq 0 \Rightarrow |a| = a, \text{ luego } a = |a| < b \Rightarrow a < b$$

$$3. \text{ si } a < 0 \Rightarrow |a| = -a, \text{ luego } -a = |a| < b \Rightarrow -a < b \rightarrow -b < a < b$$

$$\Rightarrow a > -b$$

$$\Leftrightarrow -b < a$$

DEMOSTRACIÓN DE ii)

1. Por hipótesis se tiene : $b \geq 0 \wedge |a| > b$

$$2. \text{ De } |a| > b \Leftrightarrow |a| |a| > b.b$$

$$\Leftrightarrow |a|^2 > b^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 > b^2$$

$$3. \text{ Aplicar Teo. 2.10} \Leftrightarrow a > \sqrt{b^2} \vee a < -\sqrt{b^2}$$

$$\Leftrightarrow a > b \vee a < -b$$

$$4. \text{ Por tanto: } |a| > b \Leftrightarrow a > b \vee a < -b$$

También se puede demostrar, aplicando la definición de valor absoluto.

Veamos :

1. se tiene que : $|a| > b$ con $b \geq 0$

$$2. \text{ si } a \geq 0 \Rightarrow |a| = a \Rightarrow a = |a| > b \Rightarrow a > b$$

$$3. \text{ si } a < 0 \Rightarrow |a| = -a \Rightarrow -a = |a| > b \Rightarrow -a > b \Rightarrow a > b \vee a < -b$$

$$4. \text{ Por tanto: } |a| > b \Leftrightarrow a > b \vee a < -b, \text{ siempre que } b \geq 0.$$

DEMOSTRACIÓN DE iii)

La demostración comprende dos partes ;

$$\text{La 1}^{\text{ra}}) \quad ||a| - |b|| \leq |a - b| \text{ y } 2^{\text{da}}) \quad |a - b| \leq |a| + |b|$$

Veamos :

Voy a probar la 2^{da} parte, porque es la más sencilla :

- se tiene que : $|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |-b|$

- Pero $|-b| = |b| \Rightarrow |a - b| \leq |a| + |b|$

Ahora demostraré la 1^{ra} parte :

si logro comprobar que : $-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|$

o lo que es lo mismo : $-|a - b| \leq |a| - |b| \wedge |a| - |b| \leq |a - b|$

A

B

habré probado la proposición :

Veamos la parte B :

- se tiene que : $|a| = |a + (-b + b)|$

- $|a| = |(a - b) + b|$

- Pero : $|(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$, por desigualdad triangular.

- Luego : $|a| \leq |a - b| + |b|$

- $\Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b| \dots\dots\dots B$

Ahora veamos la parte A :

6. Del mismo modo que 1 tenemos.

$$\begin{aligned} |b| &= |b + (-a + a)| \\ &= |(b - a) + a| \\ &\leq |b - a| + |a| \quad (\text{por desigualdad triangular}) \end{aligned}$$

- $|b| - |a| \leq |b - a|$

- Multiplicamos ambos miembros por (-1) y sustituir $|b - a| = |a - b|$, obtenemos :

- $|a| - |b| \geq -|a - b| \dots\dots\dots A$

- Por 5 y 9 obtenemos : $-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|$

- $\Leftrightarrow ||a| - |b|| \leq |a - b|$ Pues $-t \leq u \leq t \Rightarrow |u| \leq t$.

4.6 PROPOSICIONES : $-|a| \leq a \leq |a|$, $\forall a \in \mathbb{R}$

DEMOSTRACIÓN

Esta proposición tiene dos partes :

Parte 1: $-|a| \leq a \Leftrightarrow |a| \geq -a$

Parte 2: $a \leq |a|$

Veamos :

PARTE 1 : $a \geq -|a|$

1. Tener en cuenta que $|a| \geq 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$

2. si $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a \geq 0$

3. si $(|a| \geq 0 \wedge a \geq 0)$ y sumando miembro a miembro :

4. $\Rightarrow |a| + a \geq 0 + 0$

5. Sumar $(-a)$ $\Rightarrow |a| \geq -a$

6. Multiplicar por $-1 \Rightarrow -|a| \leq a$

Parte 2 : $a \leq |a|$

7. si $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$

↓

8. $-a > 0$

9. Por 7. y 8. : $|a| = -a > 0$

10. si $(|a| \geq 0 \wedge -a > 0) \Rightarrow (|a| + (-a) \geq 0 + 0)$

$\Rightarrow |a| - a \geq 0$

$\Rightarrow |a| \geq a$

11. $\Leftrightarrow a \leq |a|$

Conclusión : Por 6 y 1, obtenemos que :

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

Capítulo 5

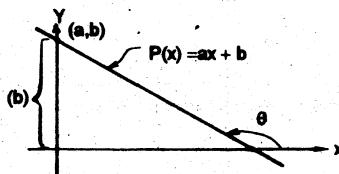
Inequaciones de 1º Grado con una Incógnita

Sea $P(x) = ax + b$ un polinomio en x de PRIMER GRADO, si $a \neq 0$

Donde : x es una variable independiente (x variable muda)
 $P(x)$ es la variable dependiente ($P(x)$ depende de x)
 a y b son los parámetros.

Geométricamente el polinomio $P(x) = ax + b$ representa una recta,

Donde : $\begin{cases} a = \text{es la pendiente de la recta} \\ b = \text{es el intercepto con el eje Y.} \end{cases}$



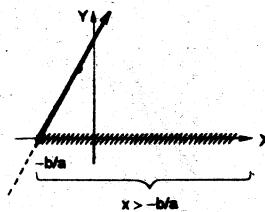
θ = es el ángulo de inclinación de la recta
(que se forma entre el eje X y la recta en sentido antihorario)

$a = \operatorname{tg} \theta$ es la pendiente de la recta.

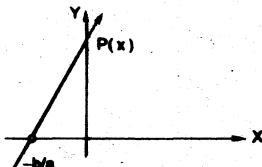
Por el AXIOMA DE LA TRICOTOMÍA y teniendo en cuenta :

que $P(x) = ax + b$, $a \neq 0$

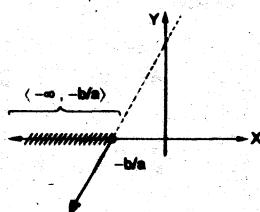
$$\begin{aligned} ax + b &> 0 \\ \Rightarrow x &> -b/a \\ \Rightarrow x &\in]-b/a, +\infty[\end{aligned}$$



$$\Rightarrow ax + b = 0 \quad x = -b/a$$



$$\begin{aligned} ax + b &< 0 \\ \Rightarrow x &< -b/a \\ \Rightarrow x &\in]-\infty, -b/a[\end{aligned}$$



Interpretación Gráfica :
Para los x con $x > -b/a$ el gráfico de la recta $P(x)$ está por encima del eje X.
Esto es el significado de $P(x) > 0$.

Interpretación Geométrica :
La raíz real $x = -b/a$ es la intersección de la recta $P(x)$ con el eje X.

Interpretación Geométrica :
Para todos los $x \in \mathbb{R}$, tal que $x < -b/a$ el gráfico de la recta se encuentra debajo del eje X. Esto es el significado de $P(x) < 0$.

PROBLEMAS

① Sea el polinomio $P(x) = -2x + 4$

Resolver : a) $-2x + 4 \geq 0$

b) $-2x + 4 \leq 0$

SOLUCIÓN :

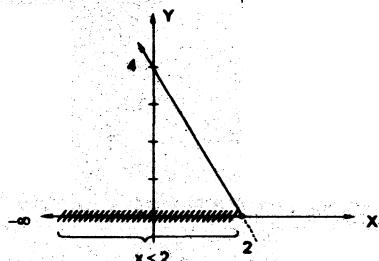
a) $-2x + 4 \geq 0$

$$\Rightarrow -2x \geq -4$$

$$\Rightarrow 2x \leq 4$$

$$\Rightarrow x \leq 2$$

$$\Rightarrow x \in]-\infty, 2]$$



Para todo $x \leq 2$, el gráfico de la recta está por encima del eje X, e inclusive toca, en el punto $x = 2$, al eje X.

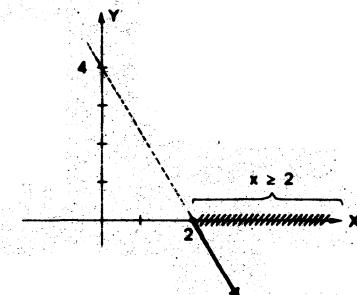
b) $-2x + 4 \leq 0$

$$\Rightarrow -2x \leq -4$$

$$\Rightarrow 2x \geq 4$$

$$\Rightarrow x \geq 2$$

$$\Rightarrow x \in [2, +\infty[$$



Para todo $x \geq 2$, el gráfico de la recta está por debajo del eje X, e inclusive toca el eje X en el punto $x = 2$.

② Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{4x+1}{P(x)} < \frac{2x+3}{Q(x)}$

SOLUCIÓN :

$$\frac{4x+1}{P(x)} < \frac{2x+3}{Q(x)}$$

$$\Rightarrow 4x - 2x < 3 - 1$$

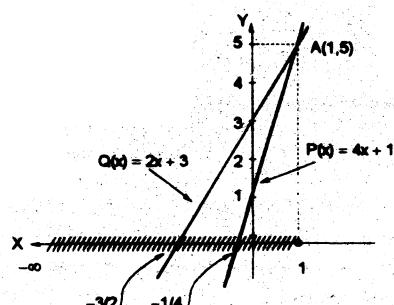
$$\Rightarrow 2x < 2$$

$$\Rightarrow x < 1$$

$$\Rightarrow x \in]-\infty, 1[$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA :

Para todo $x < 1$, se cumple que la recta $P(x) = 4x + 1$ está por debajo de la recta $Q(x) = 2x + 3$.



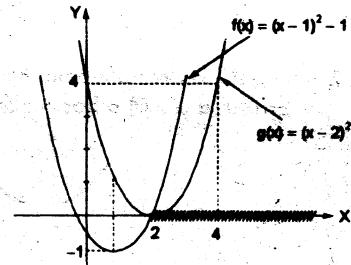
Dicho de otra manera : para todo $x < 1$, se cumple que $P(x) < Q(x)$

Por ejemplo : a) si $0 < 1 \Rightarrow \frac{P(0)}{4(0)+1} < \frac{Q(0)}{2(0)+3}$
 $1 < 3$
b) si $-2 < 1 \Rightarrow \frac{P(-2)}{4(-2)+1} < \frac{Q(-2)}{2(-2)+3}$
 $-7 < -1$

③ Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : (x-1)^2 - 1 > (x-2)^2$

SOLUCIÓN :

$$\begin{aligned} (x-1)^2 - 1 &> (x-2)^2 \\ \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 &> x^2 - 4x + 4 \\ \Rightarrow x^2 - x^2 - 2x + 4x &> 4 \\ \Rightarrow 2x &> 4 \\ \Rightarrow x &> 2 \\ \Rightarrow x \in]2, +\infty[\end{aligned}$$



Interpretación Geométrica : Las gráficas de $f(x) = (x-1)^2 - 1$ y $g(x) = (x-2)^2$ son parábolas y apreciamos que : para todo $x > 2$ se cumple que $f(x) > g(x)$

④ En la ecuación :

$$y = \pm \sqrt{1-2x}$$

¿ Qué valores reales debe tomar x para que $y \in \mathbb{R}$?

SOLUCIÓN :

$$\begin{aligned} y \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow 1-2x \geq 0 \\ \Rightarrow -2x &\geq -1 \\ \Rightarrow 2x &\leq 1 \\ \Rightarrow x &\leq 1/2 \\ \Rightarrow x \in]-\infty, 1/2[\end{aligned}$$

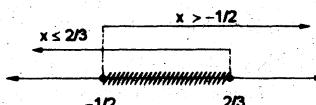
⑤ En la ecuación :

$$y = 3x \sqrt{2-3x} - \frac{2}{3} \ln(1+2x)$$

¿ Qué valores debe tomar x para que $y \in \mathbb{R}$?

SOLUCIÓN :

$$\begin{aligned} y \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow 2-3x \geq 0 \quad \wedge \quad 1+2x > 0 \\ \Leftrightarrow -3x &\geq -2 \quad \wedge \quad 2x > -1 \\ \Leftrightarrow 3x &\leq 2 \quad \wedge \quad x > -1/2 \\ \Leftrightarrow x &\leq 2/3 \\ \Leftrightarrow x \in]-\infty, 2/3] \cap x \in]-1/2, \infty[\end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow x \in]-1/2, 2/3]$$

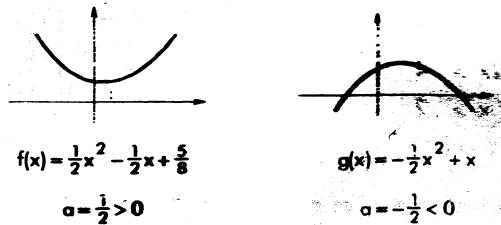
Capítulo 6 Inecuaciones de 2º Grado con una Incógnita

6.1 DEFINICIÓN :

Sea el polinomio (o función cuadrática) $P(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a, b, c \in \mathbb{R} / a \neq 0$. Una inecuación cuadrática es aquella relación que se expresa de cualesquiera de las siguientes formas :

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c < 0 \\ ax^2 + bx + c \leq 0 \\ ax^2 + bx + c > 0 \\ ax^2 + bx + c \geq 0 \end{cases}$$

6.2 El gráfico del polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola que se abre hacia arriba (si $a > 0$) o hacia abajo (si $a < 0$)



6.3 Haciendo $P(x) = y$ tenemos : $y = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \dots\right) + c$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$y = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Es una parábola con vértice en el punto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ y el eje de la parábola es paralelo al eje Y.

6.4 Al binomio : $b^2 - 4ab = \Delta$ se le llama DISCRIMINANTE DEL POLINOMIO $P(x) = ax^2 + bx + c$

PROPOSICIÓN 1 (La más importante)

$$ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a > 0 \wedge b^2 - 4ac < 0$$

Indica que la parábola se abre por encima del eje x.

Indica que la parábola no corta el eje x. abiéndose hacia arriba

Ejemplo : $x^2 + x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a = 1, \Delta = -3$

La parábola $y = x^2 + x + 1$ se abre hacia arriba sin cortar el eje x.

Una aplicación inmediata de la proposición 1 es el siguiente problema:

PROBLEMA : Hallar el valor de h para que se verifique : $\left| \frac{x^2 - hx + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3$

Solución:

$$\left| \frac{x^2 - hx + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3 \Leftrightarrow -3 < \frac{x^2 - hx + 1}{x^2 + x + 1} < 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - hx + 1}{x^2 + x + 1} > -3 \quad \wedge \quad \frac{x^2 - hx + 1}{x^2 + x + 1} < 3$$

$$\frac{x^2 - hx + 1}{x^2 + x + 1} + 3 > 0 \quad \wedge \quad \frac{x^2 - hx + 1}{x^2 + x + 1} - 3 < 0$$

$$\frac{x^2 - hx + 1 + 3x^2 + 3x + 3}{x^2 + x + 1} > 0 \quad \wedge \quad \frac{x^2 - hx + 1 - 3x^2 - 3x - 3}{x^2 + x + 1} < 0$$

$$\frac{4x^2 + (3-h)x + 4}{x^2 + x + 1} > 0 \quad \wedge \quad \frac{2x^2 + (h+3)x + 2}{x^2 + x + 1} < 0$$

ANALIZANDO

El denominador : $x^2 + x + 1$ es positivo $\forall x \in \mathbb{R}$, pues cumple la proposición 1:

$$a = 1 > 0 \wedge \Delta = b^2 - 4ac \\ = 1 - 4(1)(1) = -3 < 0$$

Como el denominador es positivo $\forall x \in \mathbb{R}$ y la fracción es positivo , necesariamente cada numerador será positivo. En $\frac{a}{b} > 0$, si $b > 0 \Rightarrow a > 0$

Por tanto, cada numerador se hace:

$$4x^2 + (3 - h)x + 4 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad 2x^2 + (h + 3)x + 2 > 0$$

1

Hacer cumplir la Prop. 1

$$\begin{aligned} a &= 4 > 0 \\ b^2 - 4ac &< 0 \end{aligned}$$

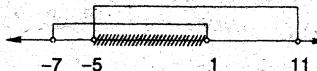
10

Hacer cumplir la Prop. 1

$$a = 2 > 0$$

$$b^2 - ac < 0$$

$$\begin{array}{lcl} (3-h)^2 - 4(4)(4) < 0 & \wedge & (h+3)^2 - 4(2)(2) < 0 \\ (h-3)^2 < 8^2 & \wedge & (h+3)^2 < 4^2 \\ -8 < h-3 < 8 & \wedge & -4 < h+3 < 4 \\ -5 < h < 11 & \wedge & -7 < h < 1 \end{array}$$



$$b \in (-5, 1)$$

PROPOSICIÓN 2

Su enunciado es :

$$ax^2 + bx + c < 0, \forall x \in \mathbb{R} \iff a < 0 \wedge b^2 - 4ac < 0$$

Indica que la parábola
está por debajo del eje
X y se abre hacia abajo.

Indica que la parábola
no corta al eje X
abriendose hacia abajo.

Ejemplo : Sea la parábola : $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$

$$\text{se cumple : } -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ \Delta = -1, \Delta = b^2 - 4ac \end{cases}$$

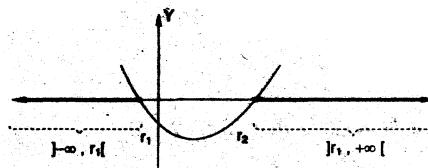
Nota : La PROPOSICIÓN 2 es equivalente a la proposición 1, si multiplicamos por -1 en la inecuación de la proposición 2.

PROPOSICIÓN 3

$$\text{Si } \begin{cases} ax^2 + bx + c > 0 \\ a > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$$

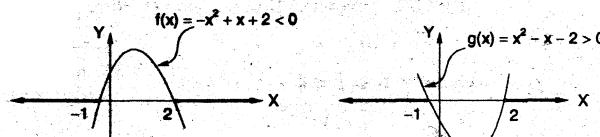
Entonces la solución de la inecuación $ax^2 + bx + c > 0$, es el intervalo

$I = x \in]-\infty, r_1[\cup]r_2, +\infty[$, donde $r_1 < r_2$, $r_i \in \mathbb{R}$ son las raíces de la ecuación : $ax^2 + bx + c = 0$

**COROLARIO 3.1**

$$\begin{aligned} -ax^2 - bx - c < 0 &\Leftrightarrow ax^2 + bx + c > 0 \\ \text{con } -a < 0, \Delta > 0 &\quad \text{con } a > 0, \Delta > 0 \end{aligned}$$

Ejemplo :



$$-x^2 + x + 2 < 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 > 0$$

Tienen igual solución

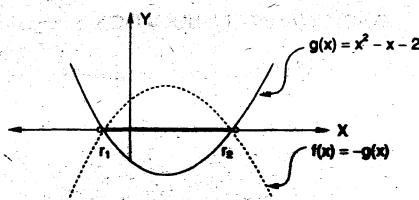
$$x \in -\infty, -1 \cup 2, +\infty$$

PROPOSICIÓN 4

Si $\begin{cases} ax^2 + bx + c < 0 \\ a > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

Entonces la solución de la inecuación $ax^2 + bx + c < 0$, es el intervalo :

$I =]r_1, r_2[$, donde $r_1 < r_2$, $r_i \in \mathbb{R}$ son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$



COROLARIO 4.1

$$\begin{aligned} -ax^2 - bx - c > 0 &\Leftrightarrow ax^2 + bx + c < 0 \\ -a < 0, \Delta > 0 &\quad a > 0, \Delta > 0 \end{aligned}$$

Ejemplo : Resolver $-x^2 + x + 2 > 0$

Solución :
$$\underbrace{-x^2 + x + 2 > 0}_{f(x)} \Leftrightarrow \underbrace{x^2 - x - 2 < 0}_{g(x)} \Leftrightarrow (x - 2)(x + 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-1, 2[$$

6.5 ECUACIONES DE 2^{DO} GRADO

Definición : Sea $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomio de 2^{do} grado en x (o función cuadrática) donde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$. A la relación $ax^2 + bx + c = 0$ se la llama ECUACIÓN POLINÓMICA DE 2^{DO} GRADO CON UNA INCÓGNITA.

6.6 DISCRIMINANTE DE UNA ECUACIÓN DE 2^{DO} GRADO CON UNA INCÓGNITA :

Al binomio $b^2 - 4ac = \Delta$ se le llama discriminante.

6.7 TÉOREMA Toda ecuación de 2^{do} grado tiene dos raíces o ceros :

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad y \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

6.8 r_1 y r_2 son raíces de $P(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow P(r_1) = 0$ y $P(r_2) = 0$

6.9 CLASES DE RAÍCES : Las raíces r_1 y r_2 pueden ser :

1) NÚMEROS REALES

- RACIONALES (enteros o fraccionarios) DIFERENTES : $r_1 \neq r_2$

- RACIONALES IGUALES : $r_1 = r_2$

- IRACIONALES CONJUGADOS : $m \pm n\sqrt{p}$

2) NÚMEROS COMPLEJOS CONJUGADOS : $m \pm ni$ donde :

$$i = \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$$

6.10 DISCUSIÓN DE LAS RAÍCES :

Las raíces se discuten a través del discriminante :

1) Si $\Delta > 0 \Rightarrow r_1 \neq r_2$, $r_1 \in \mathbb{IR}$, $r_2 \in \mathbb{IR}$

2) Si $\Delta = 0 \Rightarrow r_1 = r_2$, $r_1, r_2 \in \mathbb{IR}$

3) Si $\Delta < 0 \Rightarrow r_1$ y r_2 Son complejos conjugados :

6.11 RELACIONES ENTRE RAÍCES Y COEFICIENTES DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA.

Si r_1 y r_2 son las raíces de la ecuación :

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0, \quad a \neq 0$$

Entonces se cumplen :

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$$

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$$

$$|r_1 - r_2| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a}}$$

EJEMPLOS

1 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{4}x^2 + 1 < 0$

Solución : $-\frac{1}{4}x^2 + 1 < 0$

$$\Rightarrow x^2 - 4 > 0$$

$$\Rightarrow x^2 > 4$$

$$\Rightarrow x > 2 \vee x < -2$$

$$\Rightarrow x \in]2, +\infty[\cup]-\infty, -2[$$

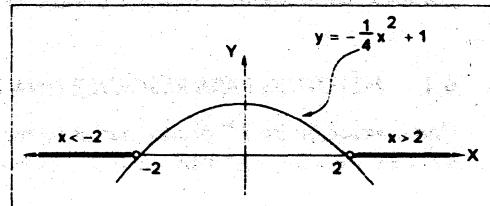


Fig. 1

2 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - x < 0$

Solución : $x^2 - x < 0$

$$\Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < x - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 0 < x < 1$$

$$\Rightarrow x \in]0, 1[$$

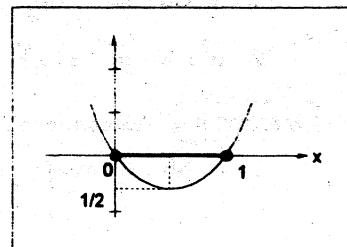


Fig. 2

Ver figura 2 : Parte del gráfico de la parábola $y = x^2 - x$ está por debajo del eje X.

$$\forall x \in]0, 1[$$

3 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} :$

$$\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2} > 0$$

Solución : $\Rightarrow x^2 - 2x + 5 > 0$
 $\Rightarrow x^2 - 2x > -5$
 $\Rightarrow x^2 - 2x + 1 > -5 + 1$
 $\Rightarrow (x - 1)^2 > -4$

esta proposición es
VERDADERO $\forall x \in \mathbb{R}$.

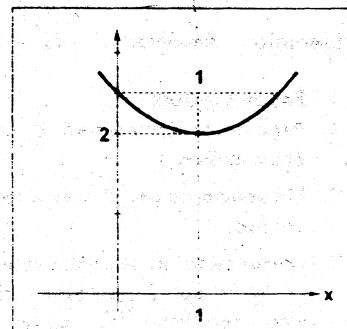


Fig. 3

Por tanto : La solución es $x \in \mathbb{R}$.

Ver figura 3 : El gráfico de toda la parábola

$$y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2} \text{ está por encima del eje X, } \forall x \in \mathbb{R}$$

4 Si fuera : $\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2} < 0$

La solución sería el conjunto vacío. Gráficamente, esto indicaría que es FALSO que la parábola de la figura 3 esté por debajo del eje x.

6.1 MÉTODOS PARA RESOLVER UNA INEQUACIÓN CUADRÁTICA.

Una inequación de 2^{do} grado, de las formas $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, se pueden resolver por los siguientes métodos :

MÉTODO I Complementando cuadrados con los términos $ax^2 + bx$ y aplicando según el caso, una de las siguientes proposiciones :

1. $a^2 < b \Leftrightarrow -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$, siempre que $b > 0$
2. $a^2 > b \Leftrightarrow a > \sqrt{b} \vee a < -\sqrt{b}$, siempre que $b \geq 0$

MÉTODO II Aplicando la regla de los signos para la multiplicación, según el caso:

1. si $ab > 0 \Leftrightarrow [a > 0 \wedge b > 0] \vee [a < 0 \wedge b < 0]$
2. si $ab < 0 \Leftrightarrow [a > 0 \wedge b < 0] \vee [a < 0 \wedge b > 0]$

MÉTODO III Por los puntos críticos (ver más adelante)

MÉTODO I : SOLUCIÓN DE INEQUACIONES CUADRÁTICAS POR EL MÉTODO DE COMPLETAR CUADRADOS.

Ejemplo : Resolver $-4x^2 + 4x + 3 > 0$

PASOS A SEGUIR :

1. Asociar los términos en x^2 y en x, si éstos existen.
2. El coeficiente de x^2 debe ser positivo y la unidad.
3. Luego se toma el coeficiente de "x" : se le divide por 2, se eleva al cuadrado y este resultado se suma en ambos miembros de la inequación, obteniéndose un trinomio cuadrado perfecto.

$$1. -4x^2 + 4x > -3$$

$$2. x^2 - x < \frac{3}{4}$$

$$3. x^2 - x + \frac{1}{4} < \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 < 1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Sumar $\frac{1}{4}$ en ambos miembros.

4. Aplicar según el caso la proposición :

$$a^2 < b \Leftrightarrow -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$$

$$4. -1 < x - \frac{1}{2} < 1$$

$$-1 + \frac{1}{2} < x < 1 + \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$$

CASOS ESPECIALES :

Algunas inecuaciones cuadráticas tienen formas similares a las siguientes :

1. La solución de la inecuación de la forma :

$$(x - 2)^2 > -9 \text{ es } x \in \mathbb{R} \quad \leftarrow \text{Significa "todo } \mathbb{R} \text{"}$$

Puesto que la proposición $(x - 2)^2 > -9$ es verdadero $\forall x \in \mathbb{R}$

2. La solución de $(x - 2)^2 < -9$ es el "Ø" \leftarrow conjunto vacío

puesto que el falso $\forall x \in \mathbb{R}$ que : $\underbrace{\text{NUMERO POSITIVO}}_{(x-2)^2} < \underbrace{\text{NUMERO NEGATIVO}}_{-9}$

3. La solución de $(x - 2)^2 > 0$ es $\mathbb{R} - \{2\}$

4. La solución de $(x - 2)^2 \geq 0$ es $x \in \mathbb{R}$.

5. La solución de $(x - 2)^2 < 0$ es "Ø"

6. La solución de $(x - 2)^2 \leq 0$ es $\{2\}$

MÉTODO II : REGLA DE LOS SIGNOS PARA LA MULTIPLICACIÓN

Para aplicar éste método, es necesario que el polinomio cuadrático sea de fácil factorización.

Ejemplos :**1 Resolver** $\forall x \in \mathbb{R} :$

$$-16x^2 + 64x \geq 55$$

SOLUCIÓN :

$$1. \Rightarrow 16x^2 - 64 \leq -55$$

$$\Rightarrow 16x^2 - 64x + 55 \leq 0$$

$$4x^2 - 16x - 5 \leq 0$$

$$4x^2 - 11x - 5 \leq 0$$

$$\Rightarrow (4x - 5)(4x - 11) \leq 0$$

2. Aplicaremos , ahora , la regla de los signos :

$$(4x - 5)(4x - 11) \leq 0$$

$$\begin{array}{cc} (+) & (-) \\ (-) & (+) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x - 5 \geq 0 \quad \wedge \quad 4x - 11 \leq 0 \\ \hline \end{array} \right\} \quad \vee$$

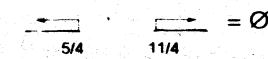
$$\left. \begin{array}{l} 4x - 5 \leq 0 \quad \wedge \quad 4x - 11 \geq 0 \\ \hline \end{array} \right\} \quad \vee$$

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 5/4 \quad \wedge \quad x \leq 11/4 \\ \hline \end{array} \right\} \quad \vee$$

$$\left. \begin{array}{l} x \leq 5/4 \quad \wedge \quad x \geq 11/4 \\ \hline \end{array} \right\} \quad \vee$$



$$\Leftrightarrow \quad \vee$$



$$\Leftrightarrow C_S = [5/4, 11/4] \cup \emptyset$$

$$C_S = [5/4, 11/4]$$

2 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} :$

$$x^4 - 2x^2 - 8 < 0$$

SOLUCIÓN :**1. Factorizar :**

$$(x^2 - 4)(x^2 + 2) < 0$$

$$(-) \quad (+) \quad (-)$$

2. Aplicar la regla de los signos : como $(x^2 + 2)$ es positivo $\forall x \in \mathbb{R}$, entonces, necesariamente, $(x^2 - 4)$ será NEGATIVO , para que la inecuación sea negativa.**3. si $x^2 - 4 < 0$, factorizando :**

$$(x - 2)(x + 2) < 0$$

4. Aplicando la regla de los signos :

$$\left. \begin{array}{l} x - 2 < 0 \quad \wedge \quad x + 2 > 0 \\ \hline \end{array} \right\} \quad \vee$$

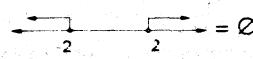
$$\left. \begin{array}{l} x - 2 > 0 \quad \wedge \quad x + 2 < 0 \\ \hline \end{array} \right\} \quad \vee$$

$$\left. \begin{array}{l} x < 2 \quad \wedge \quad x > -2 \\ \hline \end{array} \right\} \quad \vee$$

$$\left. \begin{array}{l} x > 2 \quad \wedge \quad x < -2 \\ \hline \end{array} \right\} \quad \vee$$



$$\Leftrightarrow \quad \vee$$



$$\Leftrightarrow C_S =]-2, 2[\cup \emptyset$$

$$C_S =]-2, 2[$$

Capítulo 7 Inecuaciones Polinómicas de Grado $n \geq 2$ que son Factorizables

MÉTODO DE LOS PUNTOS CRÍTICOS PARA RESOLVER INECUACIONES POLINÓMICAS Y RACIONALES.

PROPOSICIÓN

Si un polinomio :

$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$, $a_0 \neq 0$

puede factorizarse de la forma :

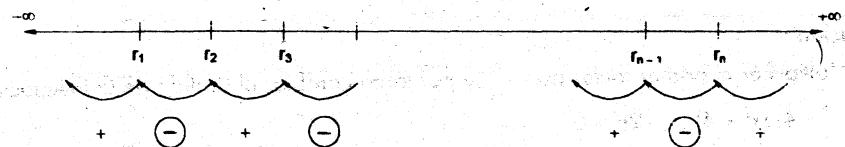
$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_{n-1})(x - r_n)$$

donde : r_i son las raíces reales (puntos críticos en la inecuación) de la ecuación $P(x) = 0$ tal que $r_1 < r_2 < r_3 < \dots < r_{n-1} < r_n$; entonces :

CASO I) La solución de la inecuación :

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_{n-1})(x - r_n) < 0$$

es la unión de los intervalos abiertos con signo "-"



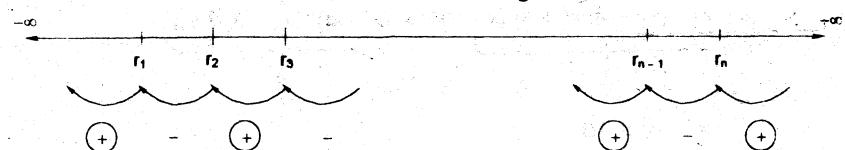
Es decir :

$$C_S = x \in]r_1, r_2[\cup]r_3, r_4[\cup \dots \cup]r_{n-1}, r_n[$$

CASO II) La solución de la inecuación :

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_{n-1})(x - r_n) > 0$$

es la unión de los intervalos abiertos de signo "+"



Es decir :

$$C_S = x \in]-\infty, r_1[\cup]r_2, r_3[\cup \dots \cup]r_{n-2}, r_{n-1}[\cup]r_n, +\infty[$$

Para ambos casos, tener en cuenta las siguientes observaciones :

- Al factorizarse el polinomio $P(x)$, los COEFICIENTES de los términos en "x" deben ser NECESARIAMENTE POSITIVOS.
- Si una raíz real r_i se repite un par de veces , digamos $2k$, entonces el factor $(x - r_i)^{2k}$ debe "DESAPARECER" de la INECUACIÓN , siempre que $x \neq r_i$.
Esto quiere decir que las raíces que se repiten un par de veces NO se dibujan en la recta real. Esto porque $(x - r_2)^{2k}$ es positivo $\forall x \in \mathbb{R}$, con $x \neq r_i$.
- Para ambos casos, se prueba por "INDUCCIÓN MATEMÁTICA" , que luego de dibujar los puntos críticos en la recta real, al primer intervalo de la derecha se le asigna el signo "+" continuando por la izquierda con los signos $-$, $+$, $-$, \dots , etc. hasta terminar con todos los intervalos en que ha quedado particionada la recta real.

Este mismo criterio se aplica a todas las inecuaciones polinómicas de las formas $P(x) < 0$ ó $P(x) \leq 0$ y $P(x) > 0$ ó $P(x) \geq 0$.

También es aplicable para la resolución de inecuaciones RACIONALES de las formas:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \quad \text{o} \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0 \quad \text{o} \quad \frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \quad \text{o} \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$$

donde $Q(x) \neq 0$ $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios enteros.

PROBLEMA 1

$$\text{Resolver } \forall x \in \mathbb{R}: \quad (4 - x^2)(x^2 + 4)(x - 2)^2 < 0$$

Solución :

- Multiplicar el primer factor por -1 y por tanto cambiar el sentido de la inecuación.

$$(x^2 - 4)(x^2 + 4)(x - 2)^2 > 0$$
- Como $x^2 + 4 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ y $(x - 2)^2 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 2$, entonces sus inversos multiplicativos $\frac{1}{x^2 + 4}$ y $\frac{1}{(x - 2)^2}$ son , respectivamente positivos :
- Multiplicar ambos miembros de la inecuación por $(x^2 + 4)^{-1}$ y $(x - 2)^{-2}$. Así tendremos :

$$\underbrace{(x^2 + 4)^{-1}}_1 \underbrace{(x - 2)^{-2}}_1 (x^2 - 4) (x^2 + 4) (x - 2)^2 > \underbrace{(x^2 + 4)^{-1}}_1 \underbrace{(x - 2)^{-2}}_0 (0)$$

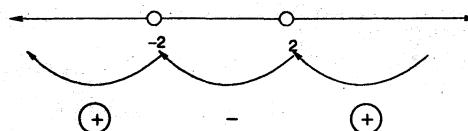
$$\Rightarrow x^2 - 4 > 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)(x + 2) > 0$$

Positivo

4. Los puntos críticos son : $\begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$

5. Graficar los puntos críticos , en la recta real :



6. El conjunto solución es, la UNIÓN de los intervalos con el signo "+"
 $C_s = x \in]-\infty, -2[\cup]2, \infty[$

PROBLEMA 2

Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : -3(2x - 1)(2 - 3x - 2x^2)(x^4 - x^2) \geq 0$

Solución :

1º) Cambio de signo en el primer factor y el 3º factor :

$$3(2x - 1)(2x^2 + 3x - 2)(x^4 - x^2) \geq 0$$

Nota : Multiplicar dos veces por -1 implica $(-1)(-1) = +1$. Por tanto no cambia de sentido la inecuación, cuando se multiplica por -1 un número PAR de veces.

2º) Factorizar el 3º y 4º factor :

$$\underset{\uparrow}{3}(2x - 1)\underset{\uparrow}{(2x - 1)}\underset{\uparrow}{(x + 2)}\underset{\uparrow}{x^2}\underset{\uparrow}{(x^2 - 1)} \geq 0$$

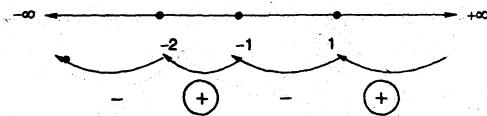
$$\Rightarrow \underset{\uparrow}{3}(2x - 1)^2\underset{\uparrow}{(x + 2)}\underset{\uparrow}{x^2}\underset{\uparrow}{(x - 1)}(x + 1) \geq 0$$

3º) Simplificar los términos : $\begin{cases} 3 & \\ (2x - 1)^2 & , \text{ si } x \neq 1/2 . \text{ Pero } x = 1/2 \text{ es solución} \\ x^2 & , \text{ si } x \neq 0 . \text{ Pero } x = 0 \text{ es solución} \end{cases}$

$$\Rightarrow (x + 2)(x - 1)(x + 1) \geq 0$$

4º) Puntos críticos

$$\begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$



5º) El conjunto solución es la unión de los intervalos con signo "+"

$$C_s = x \in [-2, -1] \cup [1, \infty[\cup \{0, \frac{1}{2}\}$$

PROBLEMA 3

Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{(1-x)(x+x^2)}{x^2+x-2} \geq 0$

Solución :

1º) Cambio de signo en el factor $(1-x)$. Factorizar el factor $x+x^2$ y el denominador x^2+x-2 :

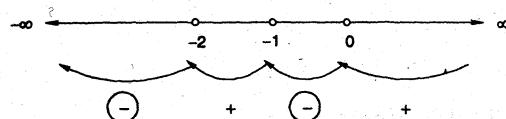
$$\frac{(x-1) \times (1+x)}{(x+2)(x-1)} \leq 0$$

2º) Simplificar el factor $x-1$, siempre que $x \neq 1$:

$$\Rightarrow \frac{x(x+1)}{x+2} \leq 0$$

3º) Puntos críticos :

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$



4º) El conjunto solución es la unión de los intervalos con signo "-".

$$C_s = x \in]-\infty, -2[\cup [-1, 0]$$

Note : En cambio la solución de la inecuación :

$$\frac{(x-1)x(x+1)}{(x-1)(x+2)} \geq 0, \text{ con } x \neq 1 \text{ sería :}$$

$$C_S = x \in]-2, -1] \cup [0, +\infty[- \{1\}$$

Graficando en la recta sería :



PROBLEMAS

Hallar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones :

1. $1 < \frac{1}{x^2}$

2. $4x < \frac{3}{x-1} < x+1$

3. $\frac{x^2+3}{x^4+2} > \frac{x^2+2}{x^4+3}$

4. $x + \frac{2}{x} < 3$

5. $x + \frac{ab}{x} < a+b, b < 0 < a$

6. $\frac{x^2+3x-4}{x} < \frac{x-1}{x+4}$

7. $-1 < \frac{x-1}{x} < 1$

8. $\frac{ax-1}{2-bx} < -2, b < 0 < a$

9. si $x > 1$, resolver $\frac{x}{x-1} \leq \frac{4}{x}$

10. si $-5 < x < -2$, resolver

$$\frac{x-1}{x+5} < \frac{2}{x+2}$$

11. $\frac{-2(x-1)^{20}(x^2+x+1)(x+2)^{41}}{(x+1)^{15}(x^2+8x+32)} \geq 0$

12. Sean $A = \{x \in \mathbb{R} / -x < x-1 < 2\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} / (2-3x) \in [-2, 5]\}$

Hallar $A \cap B$

13. $A = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x+2}{x-6} < 0 < \frac{x-5}{x-1} \right\}$

$B = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{6x}{x^2-16} < 1 \right\}$

Hallar $B - A$

14. $(x-1)^3(x+2) < (x-1)^2(x+2)^2$

15. $\frac{(x-3)^{20}(x+2)^{60}(5-x)^{200}}{(x^2+3)(x^2+4x+8)} > 0$

Capítulo 8

Ecuaciones e Inecuaciones con Valor Absoluto

A) ECUACIONES	B) INECUACIONES
1. $ a = 0 \Leftrightarrow a = 0$	1. $ a < b \Leftrightarrow [b > 0 \wedge (-b < a < b)]$
2. $ a = b \Leftrightarrow [b \geq 0 \wedge (a = b \vee a = -b)]$	2. $ a > b \Leftrightarrow [b \geq 0 \wedge (a > b \vee a < -b)]$
3. $ a = b \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$	3. $ a < b \Leftrightarrow a ^2 < b ^2 \Leftrightarrow a^2 < b^2$

A) ECUACIONES

8.1 Aplicaciones de $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

1) Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : |1 - 2x| = 0$

Solución:

$$\begin{aligned}|1 - 2x| = 0 &\Leftrightarrow 1 - 2x = 0 \\&\Leftrightarrow x = 1/2 \\&\Leftrightarrow C_2 = \{1/2\}\end{aligned}$$

2) Resolver $|x - x^2| = 0$

Solución:

$$\begin{aligned}|x - x^2| = 0 &\Leftrightarrow x - x^2 = 0 \\&\Leftrightarrow x(1 - x) = 0 \\&\Leftrightarrow x = 0 \vee 1 - x = 0 \\&\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \\&\Leftrightarrow C_3 = \{0, 1\}\end{aligned}$$

Resolver:

$$1. |x - 2| - 3 = 0$$

$$2. \left| \frac{1}{x} - \frac{2}{x-1} \right| = 0$$

$$3. ||x - 2| - |2x - 1|| = 0$$

$$4. ||2x - 1| - 2x + 1| = 0$$

$$5. |x - |x^2 - 1|| = 0$$

$$6. |x - 1 + |x - 2|| = 0$$

8.2 Aplicaciones de: $|a| = b \Leftrightarrow [b \geq 0 \wedge (a = b \vee a = -b)]$

3) Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : |3x - 2| = 4$

Solución:

$$\begin{aligned}|3x - 2| = 4 &\Leftrightarrow 3x - 2 = 4 \vee 3x - 2 = -4 \\&\Leftrightarrow 3x = 6 \vee 3x = -2 \\&\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2/3 \\&\Leftrightarrow C_4 = \{-2/3, 2\}\end{aligned}$$

4 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : |x^2 - 4| = x - 2$

Solución :

$$\begin{aligned}
 |x^2 - 4| = x - 2 &\Leftrightarrow x - 2 \geq 0 \quad \wedge \quad [x^2 - 4 = x - 2 \quad \vee \quad x^2 - 4 = -(x - 2)] \\
 &\Rightarrow x \geq 2 \quad \wedge \quad [x^2 - x - 2 = 0 \quad \vee \quad x^2 + x - 2 = 0] \\
 &\Rightarrow x \geq 2 \quad \wedge \quad [(x-2)(x+1) = 0 \quad \vee \quad (x+2)(x-1) = 0] \\
 &\Rightarrow x \geq 2 \quad \wedge \quad [x = 2 \quad \vee \quad x = -1 \quad \vee \quad x = -2 \quad \vee \quad x = 1] \\
 &\Rightarrow x \in [2, \infty) \cap \{2, -1, -2, 1\} \\
 &\Rightarrow C_5 = \{2\}
 \end{aligned}$$

5 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : |1 - 2x| = 2x - 1$

Solución :

$$\begin{aligned}
 |1 - 2x| = 1 - 2x &\Rightarrow 2x - 1 \geq 0 \wedge [1 - 2x = 2x - 1] \vee [1 - 2x = -2x + 1] \\
 &\Rightarrow x \geq 1/2 \wedge [2 = 4x] \vee [0 = 0] \\
 &\Rightarrow x \geq 1/2 \wedge [x = 1/2] \vee [x \in \mathbb{R}] \\
 &\Rightarrow x \in [1/2, \infty) \cap \{1/2\} \cup \mathbb{R} \\
 &\Rightarrow x \geq 1/2 \wedge x \in \mathbb{R} \\
 &\Rightarrow x \geq 1/2 \\
 C_s &= x \in [1/2, \infty)
 \end{aligned}$$

6 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : |x^2 - 3| = 1$

Solución :

$$\begin{aligned}|x^2 - 3| = 1 &\Leftrightarrow x^2 - 3 = 1 \vee x^2 - 3 = -1 \\&\Leftrightarrow x^2 = 4 \vee x^2 = 2 \\&\Rightarrow (x = 2 \vee x = -2) \vee (x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}) \\C_S &= \{2, -2, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}\end{aligned}$$

8.3 Aplicaciones de : $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$

7 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : |1 - 3x| = |x - 2|$

Solución :

$$\begin{aligned} |1 - 3x| = |x - 2| &\Rightarrow 1 - 3x = x - 2 \vee 1 - 3x = -(x - 2) \\ &\Rightarrow 3 = 4x \qquad \qquad \vee \quad 1 - 3x = -x + 2 \\ &\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad -1 = 2x \\ &\Rightarrow x = \frac{3}{4} \qquad \qquad \qquad \vee \quad x = -\frac{1}{2} \\ &\Rightarrow C_S = \left\{ \frac{3}{4}, -\frac{1}{2} \right\} \end{aligned}$$

8 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : |x^2 - 3| = |2x - 4|$

Solución :

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x^2 - 3 = 2x - 4 \quad \vee \quad x^2 - 3 = -2x + 4 \\ &\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \vee \quad x^2 + 2x - 7 = 0 \\ &\Rightarrow (x-1)^2 = 0 \quad \vee \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(-7)}}{2(1)} \\ &\Rightarrow x = 1 \quad \vee \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{32}}{2} \\ &\qquad\qquad\qquad x = \frac{-2 \pm 4\sqrt{2}}{2} \\ &\Rightarrow x = 1 \quad \vee \quad x = -1 \pm 2\sqrt{2} \\ &\Rightarrow C_3 = \{1, -1+2\sqrt{2}, -1-2\sqrt{2}\} \end{aligned}$$

9 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : ||x| - 3| = |3 - 2|x||$

Solución :

$$\begin{aligned} &\Rightarrow |x| - 3 = 3 - 2|x| \quad \vee \quad |x| - 3 = -3 + 2|x| \\ &\Rightarrow 3|x| = 6 \quad \vee \quad 0 = |x| \\ &\Rightarrow |x| = 2 \quad \vee \quad |x| = 0 \\ &\Rightarrow x = 2 \vee x = -2 \quad \vee \quad x = 0 \\ &\Rightarrow C_4 = \{2, -2, 0\} \end{aligned}$$

10 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : |5 - |x - 2|| = |3x - 2|$

Solución :

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 5 - |x - 2| = 3x - 2 \quad \vee \quad 5 - |x - 2| = -3x + 2 \\ &\Rightarrow -|x - 2| = 3x - 7 \quad \vee \quad -|x - 2| = -3x - 3 \\ &\Rightarrow \underbrace{|x - 2| = -3x + 7}_{A} \quad \vee \quad \underbrace{|x - 2| = 3x + 3}_{B} \end{aligned}$$

Solución de A:

$$\begin{aligned} |x - 2| = -3x + 7 &\Rightarrow -3x + 7 \geq 0 \quad \wedge \quad \{x - 2 = -3x + 7 \vee x - 2 = 3x - 7\} \\ &\Rightarrow 3x - 7 \leq 0 \quad \wedge \quad \{4x = 9 \vee 5 = 2x\} \\ &\Rightarrow x \leq 7/3 \quad \wedge \quad \{x = 9/4 \vee x = 5/2\} \\ &\Rightarrow A = \{9/4\} \end{aligned}$$

Solución de B :

$$\begin{aligned} |x - 2| = 3x + 3 &\Rightarrow 3x + 3 \geq 0 \wedge \{x - 2 = 3x + 3 \vee x - 2 = -3x - 3\} \\ &\Rightarrow x \geq -1 \quad \wedge \quad \{-5 = 2x \vee 4x = -1\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x \geq -1 \quad \wedge \quad \{x = -5/2 \vee x = -1/4\}$$

$$\Rightarrow B = \{-1/4\}$$

Luego: $C_S = A \cup B$

$$= \left\{ \frac{9}{4}, -\frac{1}{4} \right\}$$

B) INECUACIONES

8.4 Aplicaciones de : $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$, si $b > 0$

11 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : |x - 2| < 3$

Solución :

$$\begin{aligned} |x - 2| < 3 &\Leftrightarrow -3 < x - 2 < 3 \\ &\Leftrightarrow -3 + 2 < x < 3 + 2 \\ &\Leftrightarrow -1 < x < 5 \\ &\Leftrightarrow x \in]-1, 5[\end{aligned}$$

12 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : |1 - 2x| < 1/2$

Solución :

$$\begin{aligned} |1 - 2x| < \frac{1}{2} &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < 1 - 2x < \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} - 1 < -2x < \frac{1}{2} - 1 \\ &\Leftrightarrow -\frac{3}{2} < -2x < -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{2} > 2x > \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{4} > x > \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow x \in]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[\end{aligned}$$

13 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : |x^2 - 4| < 3$

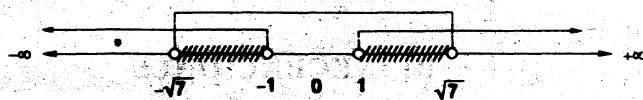
Solución :

$$\begin{aligned} |x^2 - 4| &< 3 \\ \Rightarrow -3 &< x^2 - 4 < 3 \\ \Rightarrow 4 - 3 &< x^2 < 3 + 4 \\ \Rightarrow 1 &< x^2 < 7 \end{aligned}$$

$$1 < x^2 \wedge x^2 < 7$$

$$x^2 > 1 \wedge -\sqrt{7} < x < \sqrt{7}$$

$$(x > 1 \vee x < -1) \wedge (-\sqrt{7} < x < \sqrt{7})$$



$$x \in]-\sqrt{7}, -1[\cup]1, \sqrt{7}[$$

14 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2x - 3| < 3$

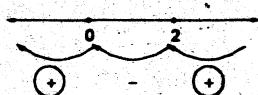
Solución: $|x^2 - 2x - 3| < 3$

$$\Leftrightarrow -3 < x^2 - 2x - 3 < 3$$

$$x^2 - 2x - 3 > -3$$

$$x^2 - 2x > 0$$

$$x(x-2) > 0$$



$$x \in]-\infty, 0[\cup]1, \infty[$$

$$x^2 - 2x - 3 < 3$$

$$x^2 - 2x - 3 - 3 < 0$$

$$x^2 - 2x - 6 < 0$$

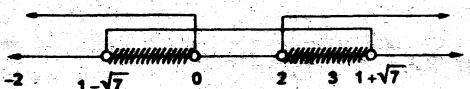
$$\underbrace{x^2 - 2x + 1 - 1 - 6 < 0}_{(x-1)^2 < 7}$$

$$(x-1)^2 < 7$$

$$-\sqrt{7} < x-1 < \sqrt{7}$$

$$1-\sqrt{7} < x < 1+\sqrt{7}$$

$$x \in]1-\sqrt{7}, 1+\sqrt{7}[$$



$$C_S = x \in]1-\sqrt{7}, 0[\cup]2, 1+\sqrt{7}[$$

15 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : |x^2 - 5x| < 4$

Solución :

$$\begin{aligned} |x^2 - 5x| &< 4 \\ \Rightarrow -4 &< x^2 - 5x < 4 \\ x^2 - 5x &> -4 \quad \wedge \quad x^2 - 5x < 4 \end{aligned}$$

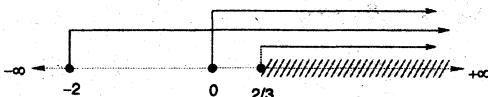
Prosiga

$$C_s = x \in [-0.7, 1[\cup]4, 5.7[$$

16 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : |x - 2| \leq 2x$

Solución :

$$\begin{aligned} |x - 2| &\leq 2x \\ \Leftrightarrow 2x &\geq 0 \quad \wedge \quad (-2x \leq x - 2 \leq 2x) \\ \Rightarrow x &\geq 0 \quad \wedge \quad (x - 2 \geq -2x \quad \wedge \quad x - 2 \leq 2x) \\ \Rightarrow x &\geq 0 \quad \wedge \quad (3x \geq 2 \quad \wedge \quad -x \leq 2) \\ \Rightarrow x &\geq 0 \quad \wedge \quad (x \geq 2/3 \quad \wedge \quad x \geq -2) \end{aligned}$$



$$C_s = x \in [2/3, +\infty[$$

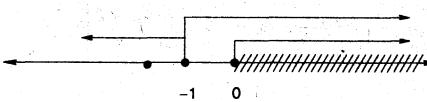
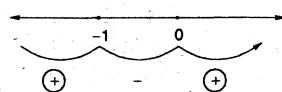
17 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| \leq (x + 1)^2$

Solución :

$$\text{Como } (x + 1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

directamente hacemos :

$$\begin{aligned} \Rightarrow -(x + 1)^2 &\leq x^2 - 1 \leq (x + 1)^2 \\ \Rightarrow -(x + 1)^2 &\leq x^2 - 1 \quad \wedge \quad x^2 - 1 \leq (x + 1)^2 \\ \Rightarrow -(x^2 + 2x + 1) &\leq x^2 - 1 \quad \wedge \quad x^2 - 1 \leq x^2 + 2x + 1 \\ \Rightarrow 0 &\leq 2x^2 + 2x \quad \wedge \quad 0 \leq 2x + 2 \\ \Rightarrow 0 &\leq x^2 + x \quad \wedge \quad 0 \leq x + 1 \\ \Rightarrow x(x + 1) &\geq 0 \quad \wedge \quad x \geq -1 \end{aligned}$$

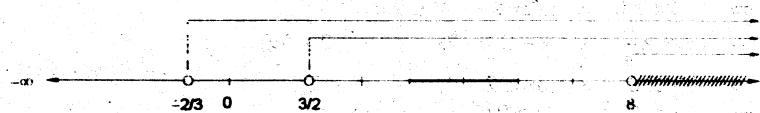


$$C_s = x \in [0, \infty[\cup \{-1\}$$

18 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : |x + 5| < 2x - 3$

Solución :

$$\begin{aligned}
 & |x + 5| < 2x - 3 \\
 \Rightarrow & 2x - 3 > 0 \quad \wedge \quad (-2x + 3) < x + 5 < 2x - 3 \\
 \Rightarrow & 2x > 3 \quad \wedge \quad (x + 5 > -2x + 3) \quad \wedge \quad x + 5 < 2x - 3 \\
 \Rightarrow & x > 3/2 \quad \wedge \quad (x + 5 > -2x + 3 \quad \wedge \quad x - 2x < -3 - 5) \\
 & \quad (x + 2x > 3 - 5 \quad \wedge \quad -x < -8) \\
 & \quad (3x > -2 \quad \wedge \quad x > 8) \\
 \Rightarrow & x > 3/2 \quad \wedge \quad (x > -2/3 \quad \wedge \quad x > 8)
 \end{aligned}$$

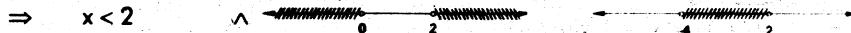


$$C_s = x \in]8, +\infty[$$

19 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : |x^2 - 4| < -2x + 4$

Solución :

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow & -2x + 4 > 0 \quad \wedge \quad (-(-2x + 4) < x^2 - 4 < -2x + 4) \\
 \Rightarrow & -2x > -4 \quad \wedge \quad x^2 - 4 > -(-2x + 4) \quad \wedge \quad x^2 - 4 < -2x + 4 \\
 \Rightarrow & 2x < 4 \quad \wedge \quad (x^2 - 4 > 2x - 4) \quad \wedge \quad x^2 + 2x - 8 < 0 \\
 \Rightarrow & x < 2 \quad \wedge \quad (x^2 - 2x > 0) \quad \wedge \quad (x + 4)(x - 2) < 0 \\
 \Rightarrow & (x(x - 2) > 0) \quad \wedge \quad B
 \end{aligned}$$



$$\Rightarrow x < 2 \quad \wedge \quad -4 < x < 0$$

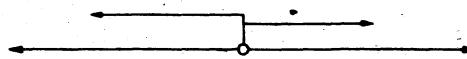
$$C_s = x \in]-4, 0[$$

20 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : \left| \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} \right| < 2$

Solución :

$$\Rightarrow -2 < \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} < 2$$

$$\begin{array}{l}
 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1} > -2 \\
 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1} + 2 > 0 \\
 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 2 + 2x - 2}{x-1} > 0 \\
 \Rightarrow \frac{x^2}{x-1} > 0, \quad x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0 \\
 \Rightarrow \frac{1}{x-1} > 0 \\
 \Rightarrow x-1 > 0 \\
 \Rightarrow x > 1
 \end{array}
 \quad \wedge \quad
 \begin{array}{l}
 \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1} < 2 \\
 \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1} - 2 < 0 \\
 \frac{x^2 - 2x + 2 - 2x + 2}{x-1} < 0 \\
 \frac{x^2 - 4x + 4}{x-1} < 0 \\
 \frac{(x-2)^2}{x-1} < 0, \quad x \neq 2, \quad x \neq 1 \\
 \frac{1}{x-1} < 0 \\
 x-1 < 0 \\
 x < 1
 \end{array}$$



$$C_s = \emptyset$$

8.5 APLICACIONES DE $|a| > b \Leftrightarrow a > b \vee a < -b$

21 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : |x-2| > 4$

Solución :

$$|x-2| > 4 \Leftrightarrow x-2 > 4 \vee x-2 < -4$$

$$\Rightarrow x > 6 \vee x < -2$$

$$\Rightarrow x \in]6, \infty[\cup]-\infty, -2[$$

22 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : |x^2 - 3| > 1$

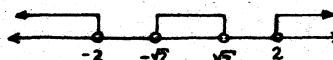
Solución :

$$|x^2 - 3| > 1 \Leftrightarrow x^2 - 3 > 1 \vee x^2 - 3 < -1$$

$$\Rightarrow x^2 > 4 \vee x^2 < 2$$

$$\Rightarrow (x > 2 \vee x < -2) \vee (-\sqrt{2} < x < \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow x \in]2, \infty[\cup]-\infty, -2[\cup]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$$



23 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : |x-2| \geq x-4$

Solución :

$$\begin{aligned} |x-2| &\geq x-4 \\ \Leftrightarrow x-2 &\geq x-4 \quad \vee \quad x-2 \leq -x+4 \\ \Rightarrow -2 &\geq -4 \quad \vee \quad 2x \leq 6 \\ \Rightarrow 2 &\leq 4 \quad \vee \quad x \leq 3 \\ \Rightarrow &\mathbb{R} \cup (-\infty, 3] \end{aligned}$$

$$C_s = x \in \mathbb{R}$$

24 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : |2-3x| \geq 4$

Solución :

$$\begin{aligned} |2-3x| \geq 4 &\Leftrightarrow 2-3x \geq 4 \quad \vee \quad 2-3x \leq -4 \\ &\Rightarrow -2 \geq 3x \quad \vee \quad 6 \leq 3x \\ &\Rightarrow x \leq -2/3 \quad \vee \quad x \geq 2 \end{aligned}$$

25 $\left| \frac{x-2}{x-5} \right| > -3$

Solución :

$$C_s = x \in \mathbb{R} - \{5\}$$

25.1 $|x-2| > x+2$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x-2 &> x+2 \quad \vee \quad x-2 < -x-2 \\ \Leftrightarrow -2 &> 2 \quad \vee \quad 2x < 0 \\ \Leftrightarrow \emptyset & \quad \vee \quad x < 0 \end{aligned}$$

$$C_s =]-\infty, 0[$$

25.2 $|x-2| > x-2$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x-2 &> x-2 \quad \vee \quad x-2 < -x+2 \\ &\quad \underbrace{0 > 0}_{\emptyset} \quad \vee \quad 2x < 4 \\ &\quad \emptyset \quad \vee \quad x < 2 \end{aligned}$$

$$C_s =]-\infty, 2[$$

EJERCICIOS

Resolver $\forall x \in \mathbb{R} :$

26 $|4x-3| > x+2$

$$Sol.: x \in (-\infty, 1/5) \cup (5/3, \infty)$$

27 $|x+5| > 2x-3$

$$Sol.: x \in (-\infty, 8)$$

28 $|2x+1| \geq 2x-3$

$$Sol.: x \in \mathbb{R}$$

29 $|3-5x| \geq 7$

$$Sol.: x \in (-\infty, -4/5) \cup [2, \infty)$$

33 $|x-1| \geq 2, x \in (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$

34 $||x|-2| > 1, x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 1) \cup (3, \infty)$

35 $|x-|x|| \geq 2, x \in (-\infty, -1]$

30 $|1-x| - x \geq 0$

$$Sol.: x \in (-\infty, 1/2]$$

31 $|9-x^2| - 3 \geq 0$

$$Sol.:$$

$$x \in [-\sqrt{6}, \sqrt{6}] \cup [\sqrt{12}, \infty) \cup (-\infty, -\sqrt{12}]$$

32 $|x^2 + 3x| + x^2 - 2 \geq 0$

$$Sol.: x \in (-\infty, -2/3) \cup [1/2, \infty)$$

8.6 APLICACIONES DE $|a| < |b| \Leftrightarrow a^2 < b^2$

36 Resolver $\forall x \in \mathbb{R}$:
 $|3x - 1| < |x + 2|$

Solución :

Elevando al cuadrado :

$$(3x - 1)^2 \leq (x + 2)^2$$

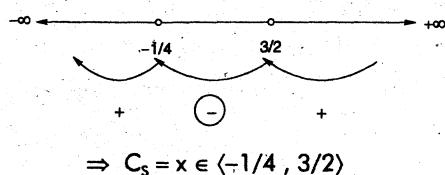
Transponer el segundo miembro al primer miembro :

$$(3x - 1)^2 - (x + 2)^2 < 0$$

factorizar

$$[(3x - 1) - (x + 2)][(3x - 1) + (x + 2)] < 0$$

$$(2x - 3)(4x + 1) < 0$$



37 Resolver $\forall x \in \mathbb{R}$:
 $|1 - 2x| \geq |5x - 3|$

Solución :

Elevando al cuadrado :

$$(1 - 2x)^2 \geq (5x - 3)^2$$

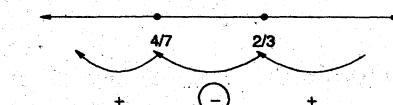
$$\Rightarrow (1 - 2x)^2 - (5x - 3)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow [(1 - 2x) - (5x - 3)][(1 - 2x) + (5x - 3)] \geq 0$$

$$\Rightarrow [-7x + 4][3x - 2] \geq 0$$

Cambio de signo que implica cambio de sentido

$$\Rightarrow (7x - 4)(3x - 2) \leq 0$$



$$\Rightarrow C_s = x \in [4/7, 2/3]$$

38 Resolver $\forall x \in \mathbb{R}$:
 $|x + 2| > |x|$

Solución :

Elevar al cuadrado :

$$(x + 3)^2 > x^2$$

$$\Rightarrow (x + 2)^2 - x^2 > 0$$

$$\Rightarrow (x + 2 - x)(x + 2 + x) > 0$$

$$\Rightarrow 2(2x + 2) > 0$$

$$\Rightarrow 4(x + 1) > 0$$

$$\Rightarrow x + 1 > 0$$

$$\Rightarrow x > -1$$

$$\Rightarrow C_s = x \in (-1, +\infty)$$

39 $|2x - 1| \leq |x - 2|$

Elevar al cuadrado :

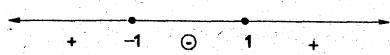
$$\Rightarrow (2x - 1)^2 \leq (x - 2)^2$$

$$\Rightarrow (2x - 1)^2 - (x - 2)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow (2x - 1 - x + 2)(2x - 1 + x - 2) \leq 0$$

$$\Rightarrow (x + 1)(3x - 3) \leq 0$$

$$\Rightarrow 3(x + 1)(x - 1) \leq 0$$



$$x \in [-1, 1]$$

Capítulo 9

Cotas de un Conjunto

Cota Superior, Cota Inferior Supremo, Ínfimo, Máximo y Mínimo de un Conjunto

9.1 DEFINICIÓN Un subconjunto S no vacío de números reales está ACOTADO SUPERIORMENTE si existe un número real M , tal que :

$$x \leq M, \forall x \in S$$

"se llama COTA superior de S "

Es decir :

$$M \text{ es cota superior } S \iff \exists M \in \mathbb{R} : x \leq M, \forall x \in S$$

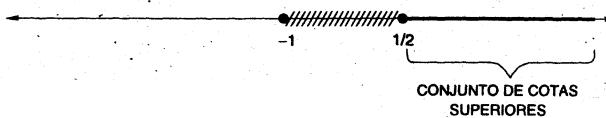
EJEMPLOS :

- 1) En el intervalo $A = (-2, 3)$, el extremo superior 3 o cualquier número mayor que 3 es una cota superior del intervalo A.

Ver el siguiente gráfico :



- i) El número 3 es una COTA SUPERIOR del intervalo $(-2, 3)$, porque $x < 3, \forall x \in (-2, 3)$
- ii) El número 3.002 es cota superior del intervalo $(-2, 3)$, porque $x < 3.002 \quad \forall x \in (-2, 3)$, etc. Todos los números mayores o iguales a 3. son COTAS SUPERIORES
- 2) En el intervalo $[-1, 1/2]$, el extremo superior $1/2$ o cualquier número mayor que $1/2$ es una COTA SUPERIOR del intervalo $[-1, 1/2]$



3) Sea el conjunto $S = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$= \left\{ 0, 1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}, \dots, \rightarrow 1 \right\}$$

$$= \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \rightarrow 1 \right\}$$

En este conjunto podemos apreciar que : el 1^{er} elemento de S es el "0" , y el 2^{do} elemento el 1/2 y así sucesivamente a medida que crece "n" , entonces $1 - \frac{1}{n}$ tiende a acercarse a "1"

Podemos afirmar que el número 1 o mayores que 1 son COTAS SUPERIORES de S.

Por tanto :

- i) 1 es COTA SUPERIOR de S, porque $1 - \frac{1}{n} \leq 1$, $\forall n = 1, 2, 3, \dots$
- ii) Son, también, cotas superiores los números : 1.003 , 1.2 , $\sqrt{2}$, 2 , etc. ; hay infinidad de cotas superiores de S. Más adelante veremos que de todas las cotas superiores nos interesará la MENOR DE LAS COTAS SUPERIORES de S.

9.2 DEFINICIÓN Un subconjunto S no vacío de números reales está ACOTADO INFERIORMENTE, si existe un número real m, tal que :

$$m \leq x , \quad \forall x \in S$$

Se llama COTA INFERIOR de S

Es decir :

$$m \text{ es cota inferior de } S \iff \exists m \in \mathbb{R} : m \leq x ; \quad \forall x \in S$$

Ejemplos :

- 1) En un intervalo $A = (-3, 2]$, son cotas inferiores los números -3 , -3.002 , -3.5 , -4 , etc. Todos los números mayores o iguales que -3 son COTAS INFERIORES.

Pues :

- i) $-3 \leq x , \quad \forall x \in (-3, 2]$
- ii) $-3.002 \leq x , \quad \forall x \in (-3, 2]$



CONJUNTO DE COTAS INFERIORES

- 2) En el conjunto $S = \left\{ \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \dots \right\}$

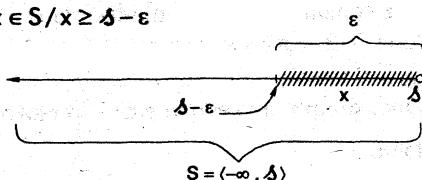
$$= \{0 \leftarrow, \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$$

Tenemos que, el número "0" y los números menores que "0" son COTAS INFERIORES de S.

9.3 DEFINICIÓN 1 : Un número " δ " se llama SUPREMO DE UN CONJUNTO S , lo que escribimos $\delta = \sup S$, Si " δ " es la menor de las COTAS SUPERIORES.

DEFINICIÓN 2 : Sea S un subconjunto no vacío de \mathbb{R} acotado superiormente, entonces :

$$\delta = \sup S \Leftrightarrow \begin{cases} i) & x \leq \delta, \forall x \in S \\ ii)* & \forall \varepsilon > 0, \exists x \in S / x \geq \delta - \varepsilon \end{cases}$$



Ejemplos :

1) En el intervalo $A = (-1/2, 3]$, el número $3 = \sup A$

2) En el intervalo $B = (-\infty, 2)$, el número $2 = \sup B$

3) En el conjunto $S = \left\{ \frac{2n-1}{n} / n = 1, 2, 3, 4, \dots \right\}$
 $= \left\{ 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \dots \rightarrow 2 \right\}$

el número $2 = \sup S$. En este caso : $2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n}$

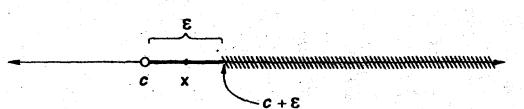
4) En el conjunto $T_n = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$

el número $1 = \sup T_n$, pues $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \frac{1}{n} \right\}$

9.4 DEFINICIÓN : Un número " c " se llama ínfimo de un conjunto S , lo que escribimos $c = \inf S$, si " x " es el mayor de las cotas inferiores. ($S \neq \emptyset, S \subset \mathbb{R}$)

otra manera de definir el ínfimo :

$$c = \inf S \Leftrightarrow \begin{cases} i) & c \leq x, \forall x \in S \\ ii) & \forall \varepsilon > 0, \exists x \in S / x \leq c + \varepsilon \end{cases}$$



Ejemplos :

1) En el intervalo $A = (-1/2, 3]$, el número $-1/2 = \inf A$, pero $-1/2 \notin A$.

2) En el intervalo $B = [2, +\infty)$, el número $2 = \inf B$, pero $2 \in B$.

3) En el conjunto $S = \left\{ \frac{1}{n} / n = 1, 2, 3, \dots \right\}$

$$= \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \rightarrow 0 \right\}$$

Tenemos que $0 = \inf S$ y $1 = \sup S$

notamos que $0 \notin S$, $1 \in S$

Observaciones : En general el supremo e ínfimo de un conjunto pueden ser o no un elemento del conjunto.

4) En el conjunto $T = \left\{ (-1)^n \frac{n+1}{n} / n = 1, 2, 3, \dots \right\}$

$$= \left\{ -1, -\frac{10}{9}, -\frac{8}{7}, -\frac{6}{5}, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \dots \right\}$$

Tenemos : $\inf T = -1 \notin T$

$\sup T = 1 \notin T$

En este caso $T = \left\{ -\frac{n+1}{n} \right\} \cup \left\{ \frac{n+1}{n} \right\}$, pues $(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{Si } n = \text{PAR} \\ -1, & \text{Si } n = \text{IMPAR} \end{cases}$

9.5 MÁXIMO Y MÍNIMO DE UN CONJUNTO

9.5.1 DEFINICIÓN : Si $\alpha = \sup S \wedge \alpha \in S$, entonces $\alpha = \text{máximo de } S$.

Es decir : si el supremo es un elemento del conjunto, entonces dicho supremo toma el nombre de máximo.

9.5.2 DEFINICIÓN : Si $c = \inf S \wedge c \in S$, entonces $c = \text{mínimo de } S$.

Es decir : Si el ínfimo es un elemento del conjunto, entonces dicho ínfimo recibe el nombre de mínimo.

Ejemplos :

1) En el intervalo $A = [-2, 5]$, tenemos que :

$-2 = \text{mínimo de } A$, porque $-2 = \inf A \wedge -2 \in A$

$5 = \text{máximo de } A$, porque $5 = \sup A \wedge 5 \in A$

2) En el intervalo $B = \left[-\frac{1}{2}, 3 \right]$, tiene máximo pero no tiene mínimo.

$$3 = \max B \quad -1/2 = \inf B$$

3) El conjunto $S = \left\{ \frac{2n-1}{n} / n \in \mathbb{Z}^+ \right\} = \{1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots \rightarrow 2\}$

Tiene mínimo pero no máximo.

Pues : $2 = \sup S$

$1 = \inf S$

4) En el conjunto $T = \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n / n = 1, 2, 3, \dots \right\}$

$$= \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \rightarrow 0\}$$

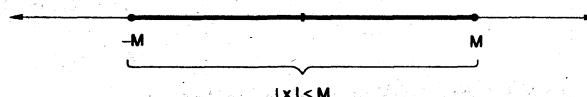
Tenemos : $\frac{1}{2} = \max T$

$0 = \inf T$

9.6 DEFINICIÓN : Un conjunto S de números reales está ACOTADO si, y sólo si está acotado superior e inferiormente. Esto es, existen números reales m y M tal que $m \leq x \leq M$, $\forall x \in S$.

Otra manera, más interesante de definir que un conjunto está ACOTADO, es de la siguiente manera :

S está acotado $\iff \exists M > 0$, tal que, $|x| \leq M$, $\forall x \in S$



Ejemplos :

1) El intervalo $A = (-1, 3)$ es ACOTADO porque está acotado SUPERIORMENTE por 3 e inferiormente por -1

2) El conjunto $B = (2, +\infty)$ no es ACOTADO

3) Si $x \in [-1, 2]$, hallar la cota M , tal que $|2x - 5| \leq M$

Solución :

Si $x \in [-1, 2] \Rightarrow -1 \leq x \leq 2$

Multiplicar por 2 $\Rightarrow -2 \leq 2x \leq 4$

Sumar -5 $\Rightarrow -7 \leq 2x - 5 \leq -1$

Aplicar valor absoluto $\Rightarrow |2x - 5| \leq 7$

donde el valor absoluto de $(2x - 5)$ es ≤ al máximo de |-7| y |-1|

Luego : $M = 7$

4) Si $x \in \langle -3, 1 \rangle \Rightarrow \frac{1}{|3x-1|} < \frac{1}{2}$

Nota:

" \Rightarrow " se lee "IMPlica"

Aquí tenemos que $M = \frac{1}{4}$ es la cota de la función $f(x) = \frac{1}{3x-1}$, siempre que $x \in \langle -3, 1 \rangle$.

Nota: Más adelante veremos las diferentes técnicas de ACOTAR.

9.7 TÉCNICAS PARA HALLAR EL SUPREMO e ÍNFIMO DE UN CONJUNTO.

CASOS :

A) CÁLCULO DEL SUPREMO E ÍNFIMO DE UNA SUCESIÓN DE NÚMEROS REALES.

DEFINICIÓN: Una sucesión (x_n) es una aplicación, tal que : a cada $n \in \mathbb{Z}^+$ corresponde el número real x_n .

Esta definición se denota por :

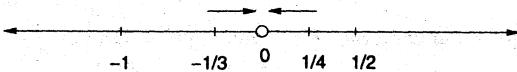
$$\begin{array}{ccc} x_n : \mathbb{Z}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longrightarrow & x_n \end{array}$$

Son sucesiones los siguientes conjuntos :

1) $A = \left\{ \frac{2n-1}{n} / n \in \mathbb{Z}^+ \right\}, \quad \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ← ES EL CONJUNTO DE NÚMEROS ENTEROS

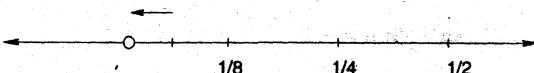
$= \{1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \dots, \rightarrow 2\}$. 1 ES EL MÍNIMO Y 2 ES EL SUPREMO DE A

2) $B = \left\{ (-1)^n \frac{1}{n} / n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$



$= \{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots, 0\}$. MÍNIMOS DE B ES -1, MÁXIMO DE B ES 1/2.

3) $C = \left\{ 2^{-n} / n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$



$= \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \rightarrow 0\}$. EL MÍNIMO DE C ES 1/2 Y EL ÍNFIMO DE C ES 0.

Para hallar el supremo o el ínfimo de una sucesión, es necesario conocer los siguientes resultados :

i) $\frac{a}{\infty} = 0$. En el límite " $\frac{a}{n} = 0$ cuando n es muy grande"

Indica que la división de cualquier número real "a" entre un número muy grande se acerca a cero.

ii) $a^\infty = 0$, si $|a| < 1$, $a \in \mathbb{R}$

Por ejemplo: $\frac{5}{\infty} = 0$, $\frac{-2}{\infty} = 0$, $\frac{5-\sqrt{5}}{\infty} = 0$, etc.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^\infty = 0, \quad \left(-\frac{5}{8}\right)^\infty = 0, \quad \left(\frac{20}{21}\right)^\infty = 0, \text{ etc.}$$

$$\text{pues: } \frac{1}{2} < 1 \quad \text{pues: } \left| -\frac{5}{8} \right| < 1 \quad \text{pues: } \frac{20}{21} < 1$$

Elijamos la sucesión (x_n) donde $x_n = \frac{2n-1}{4n+3}$ para explicar la técnica de hallar el supremo y el ínfimo de (x_n) :

PASO 1. Escribir los primeros elementos de la sucesión:

$$(x_n) = \left(\frac{1}{7}, \frac{3}{11}, \frac{5}{15}, \frac{7}{19}, \dots \right)$$

PASO 2. Calcular la división $\frac{2n-1}{4n+3}$ cuando "n" es grande.

Para ello, dividir numerador y denominador por "n", obteniéndose:

$$\frac{2 - \frac{1}{n}}{4 + \frac{3}{n}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ cuando } n \text{ es grande.}$$

$$\text{Es decir: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{4n+3} = \frac{1}{2}$$

Así, tenemos: $\frac{1}{7} = \text{mínimo de } (x_n)$ y $\frac{1}{2} = \text{supremo de } (x_n)$.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 1) \text{ En el conjunto A: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n} \right) \\ &= 2 - \frac{1}{\infty} \\ &= 2 - 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Luego: Sup A = 2

$$2) \text{ En el conjunto B: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (-1)^n \frac{1}{n} \right\} = ?$$

En este caso, cuando se tiene $(-1)^n$, siempre se considera dos casos:

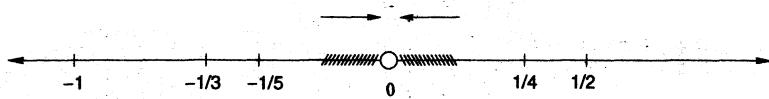
$$(-1)^n \frac{1}{n} = \begin{cases} -\frac{1}{n}, & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{1}{n}, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Ahora , hallemos los límites :

$$\text{Caso 1: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{n} \right\} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

$$\text{Caso 2: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Los términos $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ en la recta real se ven de la siguiente forma :



Como vemos, los términos positivos y negativos "CONVERGEN" hacia cero. Es decir , cuando n es cada vez más grande los términos de la sucesión se acercan a cero.

3) En el conjunto C : $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{\infty} = 0$

Luego : $0 = \inf C$

B) MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE PARÁBOLAS :

- 1] Encontrar el mínimo número M con la propiedad de que para todo $x \in \mathbb{R}$, se cumple $2x - x^2 \leq M$.

Solución : Este tipo de problemas se resuelve del siguiente modo :

1º Completar cuadrados en el polinomio:

$$\begin{aligned} 2x - x^2 \\ = -(x^2 - 2x + \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sumar y Restar 1:} \\ -(x^2 - 2x + 1 - 1) \\ -(x - 1)^2 + 1 \end{aligned}$$

2º Aplicar la proposición :

$$a^2 \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}$$

Así tenemos : $(x - 1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Por -1 : $-(x - 1)^2 \leq 0$

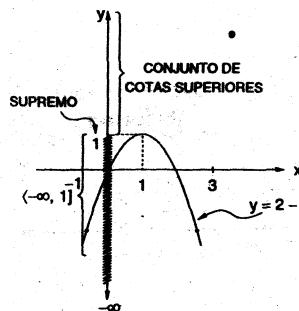
Sumar 1 : $1 - \underbrace{(x - 1)^2}_{2x - x^2} \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Conclusión : El mínimo número M tal que $2x - x^2 \leq M ; \forall x \in \mathbb{R}$, es $M = 1$.

Interpretación geométrica :

Si hacemos : $y = 2x - x^2$

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	-15	-8	-3	0	1	0	-3



Se cumple que : $2x - x^2 \leq 1$
 $\forall x \in \mathbb{R}$

- 2) Hallar el mayor "m" con la propiedad de que para todo $x \in \mathbb{R}$, se cumple que:

$$m \leq x^2 - 4x + 29$$

Solución :

1. Complementar cuadrados en :

$$\begin{aligned} &x^2 - 4x + 29 \\ &= \underbrace{x^2 - 4x + 4}_{(x-2)^2} + 25 \\ &= (x-2)^2 + 25 \end{aligned}$$

Pero : $(x-2)^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Sumar } 25 : (x-2)^2 + 25 \geq 25, \forall x \in \mathbb{R}$$

2. Si hacemos : $y = x^2 - 4x + 29$

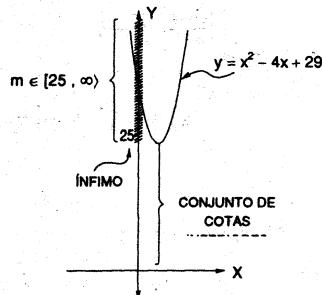
tenemos : $y \in [25, \infty]$

ES EL MAYOR DE LAS
COTAS INFERIORES.

$$\Rightarrow m = 25$$

3. Significado gráfico :

Haciendo : $y = x^2 - 4x + 29$
obtenemos la gráfica de la siguiente parábola :



TAREA

De manera similar, resolver los siguientes problemas :

- ① Hallar el menor número M con la propiedad de que

$$-19 + 12x - 2x^2 \leq M, \forall x \in \mathbb{R}$$

Sol. $M = -1$, $M \in (-\infty, 1]$

- ② Hallar M tal que

$$1 + 6x - x^2 \leq M, \forall x \in \mathbb{R}$$

Sol. $M = 10$, $M \in (-\infty, 10]$

- ③ Hallar el mayor número "m" con la propiedad de que

$$m \leq x^2 - 4x + 4, \forall x \in \mathbb{R}$$

Sol. $m = 0$, $m \in [0, +\infty)$

- ④ Hallar m, tal que cumpla :

$$m \leq 3 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$$

Sol. $m = \frac{23}{8}$, $m \in [23/8, +\infty)$

- 5] Encontrar el máximo número con la propiedad de que :

$$m \leq 5 + \frac{4}{x^2} - \frac{5}{x}, \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$$

Sol. $m = \frac{55}{16}, m \in [55/16, +\infty)$

- 6] Encontrar el máximo número "m" con la propiedad de que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumpla :

$$m \leq x^{2/3} - x^{1/3} - 2$$

Sol. $m = -\frac{9}{4}, m \in [-\frac{9}{4}, +\infty)$

- 7] Hallar el mínimo número "m" con la propiedad que se cumpla :

$$2x^{2/3} - x^{1/3} \leq M, \forall x \in \mathbb{R}$$

Sol. $M = \frac{9}{4}, M \in (-\infty, 9/4]$

- 8] Hallar "M", tal que :

$$2x^{2/3} - x^{1/3} \leq M, \forall x \in \mathbb{R}$$

Sol. $M = 1, M \in (-\infty, 1]$

C) CALCULO DEL SUPREMO E ÍNFIMO DE OTRAS FUNCIONES

- 1] Si $x \in [2, 4]$, probar que $(2x + 4) \in [7, 11]$

DEMOSTRACIÓN :

1. Si $x \in [2, 4] \Rightarrow 2 \leq x \leq 4$ por definición de intervalo cerrado.

2. A partir de la desigualdad $2 \leq x \leq 4$, debemos "construir" el término : $(2x + 4)$
Veamos :

Si : $2 \leq x \leq 4$

multiplicar por 2 : $4 \leq 2x \leq 8$

Sumar 3 : $4 + 3 \leq 2x + 3 \leq 8 + 3$

$7 \leq 2x + 3 \leq 11$

$\Rightarrow (2x + 3) \in [7, 11]$

OBS. El procedimiento que acabo de hacer, para este problema sencillo y elemental, es el mismo para cualquier otro problema de mayor grado de dificultad.

De modo, señor estudiante, te recomiendo que si procedes con la sencillez del presente problema acabarás resolviendo las "difíciles", diría mas bien las aparentemente difíciles.

Sólo necesitas : sumar dos desigualdades, multiplicar dos desigualdades, invertir desigualdades. Todo este proceso se llama ACOTAR una función.

- 4] Hallar el mayor "m" y en menor "M" tal que para todo $x \in [1/3, 1]$, entonces

$$m \leq \frac{x+2}{x+3} \leq M$$

Solución : Este problema se puede resolver de dos forma :

FORMA 1

- En primer lugar hacemos la división del siguiente modo :

$$\frac{x+2}{x+3} = \frac{x+3-3+2}{x+3} = \frac{x+3}{x+3} + \frac{-1}{x+3}$$

$$= 1 - \frac{1}{x+3}, x \neq -3$$

- De la hipótesis : $x \in [1/2, 1]$

$$\Rightarrow 1/2 \leq x \leq 1$$

Formemos , paso a paso, el término:

$$1 - \frac{1}{x+3}$$

Veamos :

$$\text{Si } 1/2 \leq x \leq 1$$

$$\begin{aligned} \text{Sumar 3} \Rightarrow & 1/2 + 3 \leq x + 3 \leq 1 + 3 \\ \Rightarrow & \frac{7}{2} \leq x + 3 \leq 4 \end{aligned}$$

$$\text{Invertir : } \Rightarrow \frac{2}{7} \geq \frac{1}{x+3} \geq \frac{1}{4}$$

$$\text{Multiplicar por -1} \Rightarrow -\frac{2}{7} \leq \frac{-1}{x+3} \leq -\frac{1}{4}$$

$$\text{Sumar 1} \Rightarrow 1 - \frac{2}{7} \leq 1 - \frac{1}{x+3} \leq 1 - \frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{7} \leq 1 - \frac{1}{x+3} \leq \frac{3}{4}$$

$$3. \text{ Por tanto : } m = \frac{5}{7}, M = \frac{3}{4}$$

Si comparamos la forma 1 con la forma 2, notaremos que obtenemos resultados diferentes, a pesar de que ambas maneras de "ACOTAR" son correctas.

¿Qué ha sucedido ? esta es una interrogante que debemos despejar para evitar implicaciones falsas.

En primer lugar, observemos la desigualdad (**): cuando $x \in [1/2, 1]$, la función $\frac{1}{x+3}$ es decreciente.

FORMA 2

- A partir de la hipótesis $x \in [1/2, 1]$ formemos el cociente :

$$\frac{x+2}{x+3}$$

Para ello, fórmemos en primer lugar al numerador, luego el denominador y al final multiplicamos miembro a miembro dos desigualdades.

Veamos :

$$\text{Si } x \in [\frac{1}{2}, 1]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

EL NUMERADOR

EL

Sumar 2 :

$$\frac{1}{2} + 2 \leq x + 2 \leq 1 + 2 \quad \frac{1}{2} + 3 \leq x + 3 \leq 1 + 3$$

$$\frac{5}{2} \leq x + 2 \leq 3 \quad (*)$$

$$\frac{7}{2} \leq x + 3 \leq 4$$

invertir

$$(**) \quad \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x+3} \leq \frac{2}{7}$$

MULTIPLICAMOS

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{4} \leq (x+2) \frac{1}{x+3} \leq 3 \cdot \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{8} \leq \frac{x+2}{x+3} \leq \frac{6}{7}$$

m

M

NOTA : Decimos que una función $f(x) = \frac{1}{x+3}$ es decreciente cuando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in I = \text{intervalo}$.

En nuestro caso : $0.6 < 0.8 \Rightarrow \frac{1}{0.6+3} > \frac{1}{0.8+3}$
 $0.6 \in [1/2, 1], 0.8 \in [1/2, 1] \quad \frac{1}{0.277} > \frac{1}{0.263}$

En segundo lugar , observamos la desigualdad (*) : Cuando $x \in [1/2, 1] \Rightarrow$ la función $f(x) = x + 2$ es creciente

NOTA : Decimos que una función $f(x)$ es creciente cuando :
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in I$

En nuestro caso : $0.6 < 0.8 \Rightarrow \frac{0.6+2}{2.6} < \frac{0.8+2}{2.8}$
 $0.6 \in [1/2, 1], 0.8 \in [1/2, 1]$

En tercer lugar, cuando se multiplican una desigualdad creciente con otra que es decreciente no se obtienen ni el ínfimo , ni el supremo.

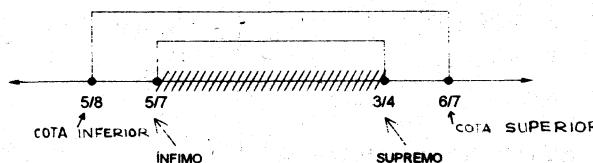
En cuarto lugar , para evitar esta errada inferencia , es preferible usar la forma 1.

Si operamos en la forma 2 , podemos evitar "INFERIR FALSAMENTE" multiplicando en cruz las desigualdades (*) y (**).

Así : Sí $\frac{5}{2} \leq x + 2 \leq 3$
 $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x+3} \leq \frac{2}{7}$
 $\frac{5}{7} \leq \frac{x+2}{x+3} \leq \frac{3}{4}$

De esta manera , se hallaría el ínfimo y el supremo.

Comparando gráficamente la forma 1 con la forma 2 tenemos :



- 5 Hallar la cota $M > 0$, tal que , si $|x| < 2$, entonces :

$$\left| \frac{x-3}{x-4} \right| < M$$

Solución : En este caso aplicar la propiedad $-b < a < b \Rightarrow |a| < b$.

1. Dividir : $\frac{x-3}{x-4} = \frac{x-4+4-3}{x-4} = 1 + \frac{1}{x-4}$

2. Formar el término : $1 + \frac{1}{x-4}$ a partir de la hipótesis .

Veamos : Si $|x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2$

Sumar $-4^o \Rightarrow -6 < x - 4 < -2$

invertir $\Rightarrow -\frac{1}{6} > \frac{1}{x-4} > -\frac{1}{2}$

Sumar 1 $\Rightarrow 1 - \frac{1}{6} > 1 - \frac{1}{x-4} > -\frac{1}{2} + 1$

$$\frac{5}{6} > 1 - \frac{1}{x-4} > \frac{1}{2}$$

Quieres lo mismo que : $\frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{x-4} < \frac{5}{6}$

$$-\frac{5}{6} < \frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{x-4} < \frac{5}{6}$$

$$\left| 1 - \frac{1}{x-4} \right| < \frac{5}{6}$$

3. Luego : $M = \frac{5}{6}$

[6] Si $|11 - 2x| \leq 3$, hallas $M > 0$ tal que $\left| \frac{x+3}{x-2} \right| \leq M$

Solución:

1. Por hipótesis , tenemos :

$$|11 - 2x| \leq 3$$

$$\Rightarrow -3 \leq 11 - 2x \leq 3$$

$$\Rightarrow -3 - 11 \leq -2x \leq 3 - 11$$

$$\Rightarrow -14 \leq -2x \leq -8$$

$$\Rightarrow 14 \geq 2x \geq 8$$

entre 2 $\Rightarrow 7 \geq x \geq 4$

$$\Rightarrow 4 \leq x \leq 7 \dots\dots (1^*)$$

2. A partir de (1*) debemos formar el término:

$$\frac{x+3}{x-2} = \frac{x-2+2+3}{x-2} = 1 + \frac{5}{x-2}$$

Veamos :

Si $4 \leq x \leq 7$

Sumar $-2 \Rightarrow 4 - 2 \leq x - 2 \leq 7 - 2$

$$2 \leq x - 2 \leq 5$$

invertir $\Rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{x-2} \geq \frac{1}{5}$

Por 5 $\Rightarrow \frac{5}{2} \geq \frac{5}{x-2} \geq 1$

Sumar 1 $\Rightarrow \frac{5}{2} + 1 \geq 1 + \frac{5}{x-2} \geq 1 + 1$

$$\Rightarrow \frac{7}{2} \geq 1 + \frac{5}{x-2} \geq 2$$

$$\Rightarrow 2 \leq 1 + \frac{5}{x-2} \leq \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \left| 1 + \frac{5}{x-2} \right| \leq \frac{7}{2} = M$$

7 Hallar el mayor "m" con la propiedad de que para todo $x \in \mathbb{R}$, se cumple que:

$$m \leq x^2 - 2|x-3| - 4$$

Solución :

Consideremos dos cosas :

Caso 1

$$\text{Si } x-3 \geq 0 \Rightarrow m \leq x^2 - 2(x-3) - 4$$

$$x \geq 3 \Rightarrow m \leq x^2 - 2x + 6 - 4$$

Completar cuadrados :

$$m \leq x^2 - 2x + 1 - 1 + 6 - 4$$

$$m \leq (x-1)^2 + 1$$

$$\text{Como } x \geq 3 \Rightarrow x-1 \geq 3-1$$

$$x-1 \geq 2$$

elevar al

$$\text{cuadrado : } \Rightarrow (x-1)^2 \geq 4$$

$$\text{Sumar 1 } \Rightarrow (x-1)^2 + 1 \geq 4 + 1$$

$$(x-1)^2 + 1 \geq 5$$

Luego : $m = 5$ y $m \in [5, \infty)$, $\forall x \geq 3$

Caso 2

$$\text{Si } x-3 < 0 \Rightarrow m \leq x^2 - 2(-x+3) - 4$$

$$x < 3 \Rightarrow m \leq x^2 + 2x - 6 - 4$$

$$\Rightarrow m \leq x^2 + 2x + 1 - 1 - 6 - 4$$

$$\Rightarrow m \leq (x+1)^2 - 11$$

$$\Rightarrow m + 11 \leq (x+1)^2$$

$$\text{hacer } m + 11 \geq 0 \Rightarrow m \geq -11$$

$$\Rightarrow m \in [-11, \infty)$$

El ínfimo es $m = -11$, $\forall x < 3$

De ambos ínfimos $\{5, -11\}$

escoger el menor : -11

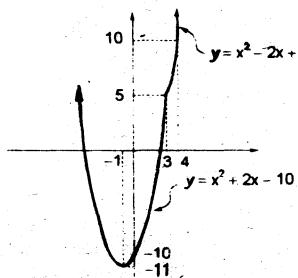
Por tanto :

$$m = -11 \leq x^2 - 2|x-3| - 4, \forall x \in \mathbb{R}$$

ILUSTRACIÓN GRÁFICA

$$\text{Hacemos : } y = x^2 - 2|x-3| - 4 = \begin{cases} x^2 - 2(x-3)-4, & \text{Si } x-3 \geq 0 \\ x^2 - 2(-x+3)-4, & \text{Si } x-3 < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 2, & \text{Si } x \geq 3 \\ x^2 + 2x - 10, & \text{Si } x < 3 \end{cases}$$



- 8** Hallar la mayor cota inferior y menor cota superior del conjunto :
 $A = \{ x \in \mathbb{R} / x^2 + 3x - 10, x \in (-2, 1) \}$

Solución :

1. A partir de $x \in (-2, 1)$

Acotemos : $x^2 + 3x - 10 =$
 $= x^2 + 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - 10$
 $= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$

Veamos :

2. Si $x \in (-2, 1)$

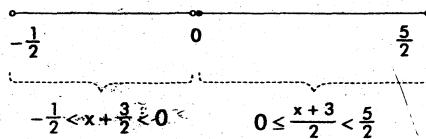
$$\Rightarrow -2 < x < 1$$

Sumar : $\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} - 2 < x + \frac{3}{2} < 1 + \frac{3}{2}$
 $\Rightarrow -\frac{1}{2} < x + \frac{3}{2} < \frac{5}{2}$

EN ESTA DESIGUALDAD NO
PODEMOS ELEVAR AL CUADRADO
PORQUE LOS EXTREMOS SON DE
SIGNO OPUESTO.

3. En este caso para poder acotar, debemos "partir" el intervalo $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ en la unión de dos intervalos : La parte negativa $(-\frac{1}{2}, 0)$ y la parte positiva $[0, \frac{5}{2}]$.

$$-\frac{1}{2} < x + \frac{3}{2} < 0 \vee 0 \leq x + \frac{3}{2} < \frac{5}{2}$$



Parte 1

Si : $-\frac{1}{2} < x + \frac{3}{2} < 0$

Elevar al cuadrado :

$$\Rightarrow \frac{1}{4} > \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 > 0$$

$$\text{Sumar } -\frac{49}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{49}{4} > \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} \geq -\frac{49}{4}$$

$$(*) \Rightarrow -12 > \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} \geq -\frac{49}{4}$$

Parte 2

$$0 \leq x + \frac{3}{2} < \frac{5}{2}$$

$$\text{Al cuadrado} \Rightarrow 0 \leq \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 < \frac{25}{4}$$

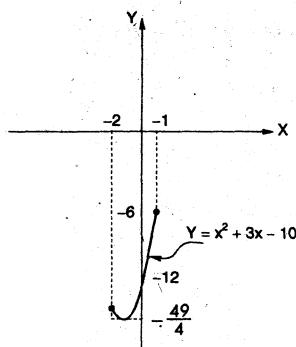
$$\text{Sumar } -\frac{49}{4} \Rightarrow -\frac{49}{4} \leq \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} < \frac{25}{4} - \frac{49}{4}$$

$$(**) \Rightarrow -\frac{49}{4} \leq \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} < -6$$

Unir : (*) con (**)

$$-\frac{49}{4} \leq \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} < -6$$

↓ ↑
infimo supremo



Observaciones : Si se trata de hallar el supremo o el ínfimo de un polinomio de 2º grado sobre un intervalo (x_1, x_2) . Sugiero aplicar la siguiente forma sencilla.

Veamos :

Sea el polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$
 $x \in (x_1, x_2)$

Paso 1 Completar cuadrados :

$$\begin{aligned} P(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \dots\right) + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &\quad \uparrow \\ &x = -\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

Paso 2 Evaluamos $p(x)$ en $x = x_1$, $x = x_2$ y $x = -\frac{b}{2a}$. Es decir hallamos $p(x_1)$, $p(x_2)$ y $p\left(-\frac{b}{2a}\right)$. De estos 3 valores escogemos el menor y el mayor valor.

En el ejemplo: $P(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$
 $x \in (-2, 1)$

Hallamos: $P(-2) = -12$, $P(1) = -6$
 $P\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{49}{4}$

Escogemos: $-\frac{49}{4}$ y -6

9 Hallar el mayor número M con la propiedad que :

$$\frac{|x^2 + 10x + 28|}{x^3 + 64} \geq M, \text{ si } x \in [-3, 3]$$

Solución :

1. A partir de $x \in [-3, 3]$, formemos cuidadosamente tanto el numerador como el denominador de la expresión :

$$\frac{|x^2 + 10x + 28|}{x^3 + 64}$$

Veamos :

2. El numerador :

$$\begin{aligned} \text{pero } |x^2 + 10x + 28| &= \\ &= |x^2 + 10x + 25 - 25 + 28| \\ &= |(x+5)^2 + 3| \\ &= (x+5)^2 + 3, \text{ pues } (x+5)^2 + 3 > 0 \end{aligned}$$

Ahora, es fácil de formar el numerador :

Si $x \in [-3, 3]$

$$\Rightarrow -3 \leq x \leq 3$$

$$\text{Sumar } 5 \Rightarrow 2 \leq x + 5 \leq 8$$

$$\text{Al cuadrado} \Rightarrow 4 \leq (x+5)^2 \leq 64$$

$$\text{Sumar } 3 \Rightarrow 7 \leq (x+5)^2 + 3 \leq 67 \quad ①$$

3. El Denominador :

$$\text{Si } -3 \leq x \leq 3$$

$$\text{elegir al cubo} \Rightarrow -27 \leq x^3 \leq 27$$

$$\text{Sumar } 64 \Rightarrow 37 \leq x^3 + 64 \leq 91$$

$$\text{invertir} \Rightarrow \frac{1}{91} \leq \frac{1}{x^3 + 64} \leq \frac{1}{27} \dots \dots ②$$

4. Multiplicar ① y ② en aspa, puesto que ② es decreciente :

$$7 \cdot \frac{1}{27} \leq \frac{(x+5)^2 + 3}{x^3 + 64} \leq 64 \cdot \frac{1}{91}$$

$$5. \text{ Luego : } M = 7 \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{3}$$

- 10** Determinar el menor número M tal que :

$$\left| \frac{x^3+14}{x^2-4x+11} \right| \leq M, \quad x \in [-1, 2]$$

Solución :

De $x \in [-1, 2]$
 $\Rightarrow -1 \leq x \leq 2$

EL NUMERADOR

eleva al cubo

$$-1 \leq x^3 \leq 8$$

Sumar 14 :

$$13 \leq x^3 + 14 \leq 22$$

EL DENOMINADOR

$$\text{es : } x^2 - 4x + 1 =$$

$$= x^2 - 4x + 4 - 4 + 11$$

$$= (x - 2)^2 + 7$$

$$\text{Si } -1 \leq x \leq 2$$

Suma -2

$$-3 \leq x - 2 \leq 0$$

$$3 \geq -(x - 2) \geq 0$$

al cuadrado

$$9 \geq (x - 2)^2 \geq 0$$

sumar 7 :

$$16 \geq (x - 2)^2 + 7 \geq 7$$

Invertir

$$\frac{1}{16} \leq \frac{1}{(x-2)^2+7} \leq \frac{1}{7}$$

multiplicar en "ASPA"

$$13 \cdot \frac{1}{7} \leq \frac{x^3+14}{(x-2)^2+7} \leq 22 \frac{1}{16}$$

$$\left| \frac{\frac{x^3+14}{(x-2)^2+7}}{22} \right| \leq \frac{1}{16}$$

Por tanto : $M = 22 \left(\frac{1}{16} \right) = \frac{11}{8}$

- 10.1** Diga Ud. si el conjunto

$A = \{2x^4 - 4x^2 - /x \in \mathbb{R}\}$ es acotado superior e inferiormente.

Solución :

En primer lugar completar cuadrados :

$$\begin{aligned} 2x^4 - 4x^2 - 1 &= 2(x^4 - 2x^2 + \dots) - 1 \\ &= 2(x^4 - 2x^2 + 1) - 2 - 1 \\ &= 2(x^2 - 1)^2 - 3 \end{aligned}$$

Ahora, analizar :

Se cumple : $(x^2 - 1)^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

Por 2 : $2(x^2 - 1)^2 \geq 0$

Sumar -3 : $2(x^2 - 1)^2 - 3 \geq -3$

$y \geq -3$ implica $y \in [-3, +\infty)$

Conclusión :

El conjunto A es acotado inferiormente y -3 es el ínfimo de A

- 11** Dado los conjuntos : $A = \left\{ \frac{(-1)^n n}{3n-1} \middle/ n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$

$$B = \left\{ \frac{(-1)^n + 1}{3} \middle/ n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

Determine si $A \cup B$ es un conjunto acotado. En caso afirmativo encontrar el supremo y el ínfimo.

Solución :

A:

1. Subdividir A en la unión de dos subconjuntos : cuando n es par y cuando n es impar :

Veamos :

a) Cuando n es par : $(-1)^n = 1$

$$\text{y } A_{2n} = \left\{ \frac{n}{3n-1} / n \text{ es par} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{2}{5}, \frac{4}{11}, \frac{6}{17}, \dots \rightarrow \frac{1}{3} \right\}$$

Así, obtenemos :

$$\text{Sup } A_{2n} = \frac{2}{5}$$

$$\inf A_{2n} = \frac{1}{3}$$

$$\text{pues } \frac{1}{3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n/n}{3n/n-1/n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3-1/n}$$

- b) Cuando n es impar : $(-1)^n = -1$ entonces :

$$A_{2n-1} = \left\{ \frac{-n}{3n-1} / n \text{ es impar} \right\}$$

$$= \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{3}{8}, -\frac{5}{14}, \dots \rightarrow -\frac{1}{3} \right\}$$

$$\text{Pues } -\frac{1}{3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{3n-1}$$

$$\text{Tenemos : Sup } A_{2n-1} = -\frac{1}{3}$$

$$\inf A_{2n-1} = -\frac{1}{2}$$

2. Como $A = A_{2n} \cup A_{2n-1}$, entonces :

$$\text{Sup } A = \text{Sup } \left\{ \frac{2}{5}, -\frac{1}{3} \right\} = \frac{2}{5}$$

$$\inf A = \inf \left\{ \frac{1}{3}, -\frac{1}{2} \right\} = -\frac{1}{2}$$

3. $\left| \frac{(-1)^n n}{3n-1} \right| \leq \frac{2}{5} = M$

B:

1. Subdividir B en la unión de dos subconjuntos : cuando n es par y cuando n es impar.

Veamos :

- a) Cuando n es par : $(-1)^n = 1$, el conjunto B se hace :

$$B_{2n} = \left\{ \frac{1+1}{3} / n \text{ es par} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{2}{3} \right\}$$

- b) Cuando n es impar : $(-1)^n = -1$, el conjunto B se hace :

$$B_{2n-1} = \left\{ \frac{-1+1}{3} / n \text{ es impar} \right\}$$

$$= \{ 0 \}$$

2. Luego $B = B_{2n} \cup B_{2n-1}$

$$= \left\{ \frac{2}{3}, 0 \right\}$$

Donde, observamos que :

$$\text{Sup } B = 2/3$$

$$\inf B = 0$$

3. Conclusión :

$$\text{Sup } A \cup B = 2/3$$

$$\inf A \cup B = -1/2$$

Capítulo 10 Ecuaciones e Inecuaciones que Tienen Dos o Más Valores Absolutos

(MÉTODO DE LOS PUNTOS CRÍTICOS)

Para resolver ecuaciones e inecuaciones que tienen dos o más valores absolutos se recurre necesariamente a la correcta aplicación de la definición del valor absoluto :

$$|a| = \begin{cases} a & , \text{ Si } a \geq 0 \\ -a & , \text{ Si } a < 0 \end{cases}$$

De acuerdo a esta definición, cada valor absoluto desdobló a una ecuación en la unión de dos ecuaciones y a una inecuación en la unión de dos inecuaciones.

Ejemplos :

1 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x - 2| - 3 = 0$

Solución :

$$\begin{aligned} |x - 2| - 3 = 0 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A) \begin{array}{l} (x - 2) - 3 = 0 & , \text{ Si } x - 2 \geq 0 \\ x - 5 = 0 & , \\ x = 5 & , \text{ Si } x \geq 2 \end{array} \\ \hline \{5\} \cap [2, \infty) = \{5\} \end{array} \right. \\ &\quad \left. \begin{array}{l} B) \begin{array}{l} -(x - 2) - 3 = 0 & , \text{ Si } x - 2 < 0 \\ -x + 2 - 3 = 0 & , \text{ Si } x < 2 \\ -1 = x & , \text{ Si } x < 2 \end{array} \\ \hline \{-1\} \cap (-\infty, 2) = \{-1\} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Conclusión : $C_s = \{5, -1\}$

2 Resolver : $|x - 2| + 3|x - 1| < 4$

Solución : En este caso, como tenemos dos valores absolutos y cada valor absoluto desdobló a la inecuación, obtenemos en total la unión de 4 inecuaciones :

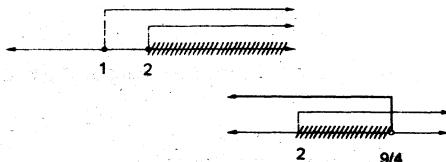
Veamos :

$$\begin{aligned} |x - 2| &= \begin{cases} A) \quad x - 2, & \text{Si } x - 2 \geq 0 \\ &\quad x \geq 2 \\ B) -(x - 2), & \text{Si } x - 2 < 0 \\ &\quad x < 2 \end{cases} \quad |x - 1| = \begin{cases} C) \quad x - 1, & \text{Si } x - 1 \geq 0 \\ &\quad x \geq 1 \\ D) -(x - 1), & \text{Si } x - 1 < 0 \\ &\quad x < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Combinando : A con C , A con D , B con C y B con D se obtiene la unión de 4 inecuaciones :

1º) A con C :

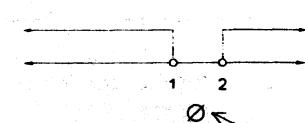
$$\text{Si } (x \geq 2 \wedge x \geq 1) \Rightarrow (x - 2) + 3(x - 1) < 4 \\ x < 9/4$$



$$S_1 = [2, 9/4)$$

2º) A con D :

$$\text{Si } x \geq 2 \wedge x < 1 \Rightarrow x - 2 + 3(-x + 1) < 4 \dots\dots (2^*)$$

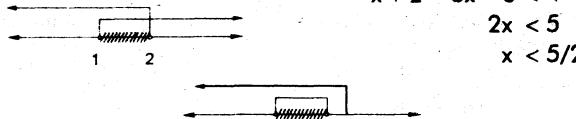


Por ser vacío esta intersección
ya no es necesario resolver la
inecuación (2*)

$$S_2 = \emptyset$$

3º) B con C :

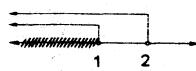
$$\text{Si } x < 2 \wedge x \geq 1 \Rightarrow -(x - 2) + 3(x - 1) < 4 \\ -x + 2 + 3x - 3 < 4$$



$$S_3 = [1, 2.5)$$

4º) B con D

$$\text{Si } x < 2 \wedge x < 1 \Rightarrow$$



$$-(x - 2) + 3(-x + 1) < 4$$

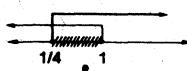
$$-x + 2 - 3x + 3 < 4$$

$$-4x + 5 < 4$$

$$-4x < -1$$

$$4x > 1$$

$$x > 1/4$$



$$S_4 = \langle 1/4, 1 \rangle$$

Conclusión : $C_S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$

$$= [2, 9/4] \cup \emptyset \cup [1, 2] \cup \langle 1/4, 1 \rangle$$

$$= \langle 1, 9/4 \rangle$$

Caso General

Si hay "n" valores absolutos, habrán 2^n posibles combinaciones.

Por tanto :

Si hay 2 valores absolutos, habrán $2^2 = 4$ combinaciones

Si hay 3 " " " " $2^3 = 8$ "

Si hay 4 " " " " $2^4 = 16$ "

OBSERVACIÓN IMPORTANTE

Si aplicamos el caso general para resolver ecuaciones e inecuaciones con dos o más valores absolutos, nos encontraremos con "muchas" ecuaciones e inecuaciones que resolver.

Felizmente, existe otro método que lo denominaremos "método de los puntos críticos" que nos va a abreviar el trabajo.

Por ejemplo, si tenemos 3 valores absolutos en una ecuación (inecuación), en lugar de resolver 8 ecuaciones (inecuaciones) sólo se reducirán a resolver 4 ecuaciones (inecuaciones).

A continuación explico el método de los puntos críticos.

10.1 MÉTODO DE LOS PUNTOS CRÍTICOS PARA RESOLVER ECUACIONES E INECUACIONES CON DOS O MÁS VALORES ABSOLUTOS.

Explicaré este método, tomando un ejemplo.

PROBLEMA 3

Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : |x - 1| - |x - 2| = |x - 3|$

Solución :

Pasos a seguir :

Paso 1 Obtención de los puntos críticos .

Los puntos críticos se obtienen igualando a cero cada valor absoluto.

Así :

$$\begin{aligned} |x - 1| = 0 &\Rightarrow x = 1 \\ |x - 2| = 0 &\Rightarrow x = 2 \\ |x - 3| = 0 &\Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Paso 2 Graficar los puntos críticos en la recta real :



De esta manera la recta se ha dividido en 4 intervalos , que son :

$$\langle -\infty, 1 \rangle, [1, 2], [2, 3], [3, \infty)$$

Con estos intervalos y en el orden que aparecen en la RECTA REAL , se construye una tabla que sintetiza todas las combinaciones entre los valores absolutos.

Paso 3 Hacer el siguiente cuadro :

		$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	
	valores absolutos	$ x - 1 $	$ x - 2 $	$ x - 3 $	
1	A	$\langle -\infty, 1 \rangle$	$-(x - 1)$	$-(x - 2)$	$-(x - 3)$
2	B	$[1, 2]$	$x - 1$	$-(x - 2)$	$-(x - 3)$
3	C	$[2, 3]$	$x - 1$	$x - 2$	$-(x - 3)$
4	D	$[3, \infty)$	$x - 1$	$x - 2$	$x - 3$

Paso 4 Así podemos formar la unión de 4 ecuaciones :

$$(1) \text{ Si } x \in \langle -\infty, 1 \rangle = A \Rightarrow -(x - 1) - (-(x - 2)) = -(x - 3) \\ -x + 1 + x - 2 = -x + 3 \\ x = 4 \notin A$$

Luego : $S_1 = \emptyset$

$$(2) \text{ Si } x \in [1, 2] = B \Rightarrow x - 1 - (-x + 2) = -x + 3 \\ x = 2 \notin B$$

Luego : $S_2 = \emptyset$

$$(3) \text{ Si } x \in [2, 3] = C \Rightarrow x - 1 - (x - 2) = -x + 3 \\ x = 2 \in C$$

Luego : $S_3 = \{2\}$

$$(4) \text{ Si } x \in [3, \infty) = D \Rightarrow x - 1 - (x - 2) = x - 3 \\ x = 4 \in D$$

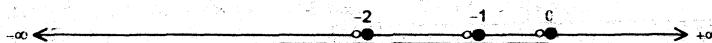
Luego : $S_4 = \{4\}$

$$\text{CONCLUSIÓN : } C_S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \\ = \emptyset \cup \emptyset \cup \{2\} \cup \{4\} \\ = \{2, 4\}$$

PROBLEMA 4 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : |x| - 2|x+1| + 3|x+2| = 0$

Solución :

- Los puntos críticos son : $x = 0, x = -1, x = -2$.
- Hacer el siguiente cuadro, que especifique la recta real con : los puntos críticos "BIEN-ORDENADOS", los intervalos en que se ha dividido la recta real y los signos (positivo y negativo) que adoptan cada valor absoluto.



		$ x+2 $	$ x+1 $	$ x $
A	$(-\infty, -2)$	$-x - 2$	$-x - 1$	$-x$
B	$[-2, -1]$	$x + 2$	$-x - 1$	$-x$
C	$[-1, 0)$	$x + 2$	$x + 1$	$-x$
D	$[0, \infty)$	$x + 2$	$x + 1$	x

- Ahora, debemos resolver cada una de las cuatro ecuaciones :

$$(1) \text{ Si } x \in (-\infty, -2) = A \Rightarrow -x - 2(-x - 1) + 3(-x - 2) = 0 \\ -x + 2x + 2 - 3x - 6 = 0 \\ -2x - 4 = 0 \\ 2x = -4 \\ x = -2 \notin A$$

Luego : $S_1 = \emptyset$

$$(2) \text{ Si } x \in [-2, -1] = B \Rightarrow -x - 2(-x - 1) + 3(x + 2) = 0 \\ -x + 2x + 2 + 3x + 6 = 0 \\ 4x + 8 = 0$$

$$x = -2 \in B$$

Luego : $S_2 = \{-2\}$

$$(3) \text{ Si } x \in [-1, 0) \Rightarrow -x - 2(x + 1) + 3(x + 2) = 0 \\ 4 = 0 \quad \leftarrow \text{Absurdo}$$

Luego : $S_3 = \emptyset$

$$(4) \text{ Si } x \in [0, +\infty) \Rightarrow x - 2(x + 1) + 3(x + 2) = 0 \\ x - 2x - 2 + 3x + 6 = 0 \\ 2x + 4 = 0$$

$$x = -2 \notin D$$

Luego : $S_4 = \emptyset$

$$\text{CONCLUSIÓN : } S_5 = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \\ = \emptyset \cup \{-2\} \cup \emptyset \cup \emptyset \\ = \{-2\}$$

PROBLEMA 5

$$\text{Resolver } \forall x \in \mathbb{R} : \frac{|x-1|-x}{|x+1|} < \frac{1+|x|}{2}$$

Solución :

1. Los puntos críticos son : $x = 1$, $x = -1$, $x = 0$

2. Hacer el siguiente cuadro :

	$ x+1 $	$ x $	$ x-1 $
A	$-(x+1)$	$-x$	$-(x-1)$
B	$x+1$	$-x$	$-(x-1)$
C	$x+1$	x	$-(x-1)$
D	$x+1$	x	$x-1$

3. Ahora resolvamos las 4 siguientes inequaciones :

$$(1) \text{ Si } x \in (-\infty, -1) = A \Rightarrow \frac{-(x-1)-x}{-(x+1)} < \frac{1-x}{2}$$

CAMBIO DE SIGNO
EN EL NUMERADOR Y
DENOMINADOR, NO
VARIA LA FRACCIÓN.

$$\frac{-2x+1}{-(x+1)} < \frac{1-x}{2}$$

$$\frac{2x-1}{x+1} < \frac{1-x}{2}$$

$$\frac{2x-1}{x+1} - \frac{1-x}{2} < 0$$

$$\frac{2(2x-1) - (x+1)(1-x)}{2(x+1)} < 0$$

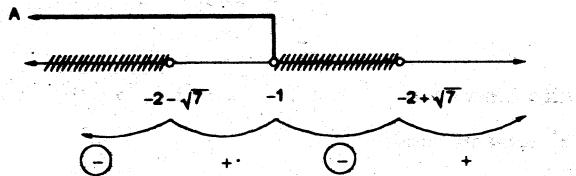
$$\frac{4x-2+x^2-1}{2(x+1)} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+4x-3}{2(x+1)} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+4x+4-4-3}{x+1} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x+2)^2-7}{x+1} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x+2-\sqrt{7})(x+2+\sqrt{7})}{x+1} < 0$$



$$A_1 = (-\infty, -2 - \sqrt{7}) \cup (-2 + \sqrt{7}, \infty)$$

Ahora interceptamos A con A₁:

$$S_1 = A \cap A_1$$

$$S_2 = (-\infty, -2 - \sqrt{7})$$

$$(2) \text{ Si } x \in [-1, 0] = B \Rightarrow \frac{-(x-1)-x}{x+1} < \frac{1-x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{-x+1-x}{x+1} < \frac{1-x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{-2x+1}{x+1} - \frac{1-x}{2} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-4x+2-(1-x)(x+1)}{2(x+1)} < 0$$

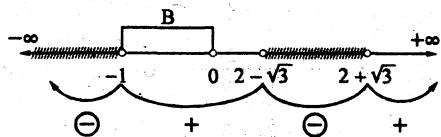
$$\Rightarrow \frac{-4x+2+x^2-1}{2(x+1)} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-4x+1}{x+1} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-4x+4-4+1}{x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2-3}{x+1} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})}{x+1} < 0$$



$$B_1 = (-\infty, -1) \cup (2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$$

Ahora interconectamos B con B_1 :

$$S_2 = B \cap B_1$$

$$S_2 = \emptyset$$

$$(3) \text{ Si } x \in [0, 1] = C \Rightarrow \frac{-(x-1)-x}{x+1} < \frac{1+x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{-2x+1}{x+1} - \frac{1+x}{2} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{2(-2x+1)-(1+x)(x+1)}{2(x+1)} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-4x+2-x^2-2x-1}{2(x+1)} < 0$$

Cambia de signo

$$\Rightarrow \frac{-x^2-6x+1}{2(x+1)} < 0$$

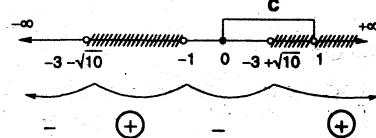
$$\frac{x^2+6x-1}{2(x+1)} > 0$$

Simplificar el 2

$$\Rightarrow \frac{x^2+6x+9-9-1}{x+1} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x+3)^2-10}{x+1} > 0$$

$$\frac{(x+3-\sqrt{10})(x+3+\sqrt{10})}{x+1} > 0$$



$$C_1 = (-3 - \sqrt{10}, -1) \cup (1, \infty)$$

Donde :

$$S_1 = C \cap C_1$$

$$= (-3 + \sqrt{10}, 1)$$

$$(4) \text{ Si } x \in [1, \infty) = D \Rightarrow \frac{x-1-x}{x+1} < \frac{1+x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x+1} < \frac{1+x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x+1} - \frac{1+x}{2} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2-x^2-2x-1}{2(x+1)} < 0$$

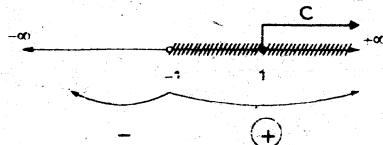
$$\Rightarrow \frac{x^2+2x+3}{2(x+1)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+2x+1-1+3}{2(x+1)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)^2+2}{2(x+1)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+1} > 0$$

SIMPLIFICAR EL
NUMERADOR Y EL
DENOMINADOR
2. POR SER
POSITIVOS



Donde : $D_1 = (-1, \infty)$

Luego : $S_4 = D \cap D_1$
 $= [1, \infty)$

Conclusión :

$$C_s = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$$

$$= (-\infty, -2-\sqrt{7}) \cup \emptyset \cup (-3+\sqrt{10}, 1) \cup [1, \infty)$$

$$= (-\infty, -2-\sqrt{7}) \cup (-3+\sqrt{10}, 1)$$

PROBLEMA 6

$$\text{Resolver } \forall x \in \mathbb{R}: \frac{2 - |x - x^2|}{2 - |x|} \leq 1$$

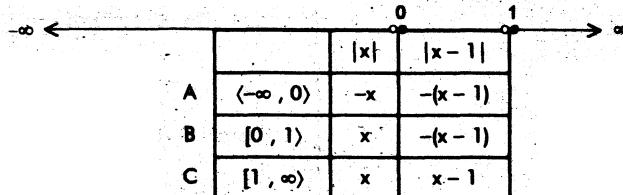
Solución :

$$\begin{aligned} 1. \text{ Factorizar: } |x - x^2| &= |x| |1 - x| \\ &= |x| |x - 1| \end{aligned}$$

$$\text{Luego la inecuación será: } \frac{2 - |x||x - 1|}{2 - |x|} \leq 1 \quad (1*)$$

$$2. \text{ Los puntos críticos son: De } |x| = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \text{De } |x - 1| = 0 \Rightarrow x = 1$$

3. Graficar los puntos críticos de la recta real y hacer el siguiente cuadro.



4. Luego, la inequación 1^* , se dividirá en la unión de tres inequaciones

1) Si :

$$x \in (-\infty, 0) = A \Rightarrow \frac{2 - (-x)(-x+1)}{2 - (-x)} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{2 + x(-x+1)}{2+x} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{2 - x^2 + x}{2+x} - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2 - x^2 + x - 2 - x}{2+x} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2}{2+x} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x+2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x+2} > 0 \quad \vee \quad \frac{x^2}{x+2} = 0$$

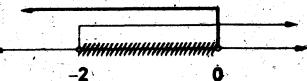
$$\Rightarrow \frac{1}{x+2} > 0 \quad \vee \quad x^2 = 0$$

$$\xrightarrow{-2} \quad \vee \quad x=0$$

$$A_1 = (-2, \infty) \cup \{0\}$$

$$A_1 = (-2, \infty)$$

Ahora interceptamos A con A_1



Luego : $S_1 = A \cap A_1 = (-2, 0)$

2) Si :

$$x \in [0, 1] = B \Rightarrow \frac{2 - x(-x+1)}{2 - x} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{2 + x^2 - x}{2-x} - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2 + x^2 - x - 2 + x}{2-x} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2-x} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x-2} \geq 0$$

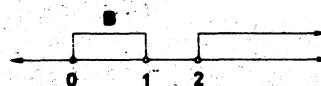
$$\Rightarrow \frac{x^2}{x-2} > 0 \quad \vee \quad x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x-2} > 0 \quad \vee \quad x = 0$$

$$\Rightarrow \xrightarrow{-2} \quad \vee \quad \{0\}$$

$$B_1 = (2, \infty) \cup \{0\}$$

Ahora interceptamos B con B_1



Por tanto :

$$S_2 = B \cap B_1 = [0, 1] \cap ((2, \infty) \cup \{0\})$$

$$S_2 = \{0\}$$

$$\Rightarrow \frac{2-x^2+x}{2-x} - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2-x^2+x-2+x}{2-x} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2+2x}{2-x} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-2x}{x-2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x(x-2)}{x-2} \leq 0$$

Si $x \neq 2 \Rightarrow x \leq 0$

Por tanto, el conjunto solución será :

$$C_1 = (-\infty, 0]$$

Ahora interceptamos C con C_1

$$S_3 = C \cap C_1$$

$$= [1, \infty) \cap (-\infty, 0]$$

$$S_3 = \emptyset$$

Conclusión :

$$\begin{aligned} C_S &= S_1 \cup S_2 \cup S_3 \\ &= (-2, 0) \cup \{0\} \cup \emptyset \\ &= (-2, 0] \end{aligned}$$

PROBLEMA 7

$$\text{Resolver : } \frac{|x^2 - 9|}{|x + 3|} = \frac{x^2}{|x - 1|}$$

Solución :

1. Necesariamente $x \neq 3, x \neq 1$

$$\Rightarrow \frac{|x^2 - 9||x - 1|}{|x + 3|} = x^2$$

$$\Rightarrow \left| \frac{(x+3)(x-3)(x-1)}{x+3} \right| = x^2$$

$$\Rightarrow |(x-3)(x-1)| = x^2$$

$$\Rightarrow x^2 \geq 0 \quad \wedge \quad [(x-3)(x-1) = x^2 \quad \vee \quad (x-3)(x-1) = -x^2]$$

$$\Rightarrow x^2 \geq 0 \quad \wedge \quad [x^2 - 4x + 3 = x^2 \quad \vee \quad x^2 - 4x + 3 = -x^2]$$

$$\Rightarrow x^2 \geq 0 \quad \wedge \quad [-4x + 3 = 0 \quad \vee \quad 2x^2 - 4x + 3 = 0]$$

$$\Rightarrow \mathbb{R} \cap \left[x = 3/4 \quad \vee \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 24}}{4} \right]$$

$$\Rightarrow \mathbb{R} \cap \{3/4\} \cup \emptyset$$

$$\Rightarrow C_S = \{3/4\}$$

Capítulo 11

Inecuaciones Irracionales

Teorema :

- I. $b \geq a \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{b} \geq \sqrt{a} \geq 0$
- II. Si $b \geq 0 \Rightarrow [\sqrt{a} > b \Leftrightarrow a > b^2]$
- III. Si $b < 0 \Rightarrow [\sqrt{a} > b \Leftrightarrow a \geq 0]$
- IV. $\sqrt{a} < b \Leftrightarrow [a \geq 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a < b^2]$

Nota :

Para la aplicación de estos teoremas, tener en cuenta dos cosas :

- 1º Que la subradical de una raíz cuadrada debe ser mayor o igual a cero.
- 2º Elevando al cuadrado una raíz cuadrada desaparece la raíz.

1 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{5x - 2} \geq 3$

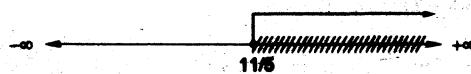
Solución : Aplicar II

Como $b = 3 > 0 \Rightarrow$ ELEVAR AL CUADRADO AMBOS MIEMBROS

$$(\sqrt{5x - 2})^2 > (3)^2$$

$$5x - 2 > 9$$

$$x > \frac{11}{5}$$



$$C_S = x \in \left(\frac{11}{5}, +\infty \right)$$

2 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{3x + 1} > -2$

Solución :

Como $b = 2 < 0$, hacer sólo : $3x + 1 \geq 0$

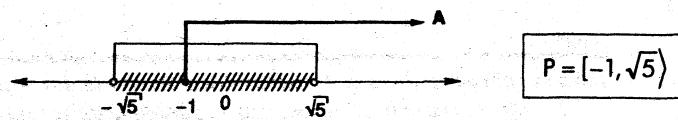
$$\Rightarrow x \geq -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{3}, +\infty \right)$$

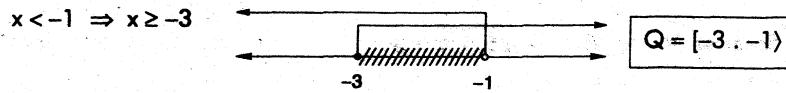
3] Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{2x+6} > x + 1$

Solución : Aplicar $\sqrt{a} \geq b \Leftrightarrow \underbrace{[b \geq 0 \Rightarrow a \geq b^2]}_P \vee \underbrace{[b < 0 \Rightarrow a \geq 0]}_Q$

$$\begin{aligned} P: \text{Si } x+1 \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{2x+6})^2 &> (x+1)^2 \\ x \geq -1 \Rightarrow 2x+6 &> x^2+2x+1 \\ 5 &> x^2 \\ x^2 &< 5 \\ \underbrace{x \geq -1}_{A} \Rightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5} \end{aligned}$$



$$Q: \text{Si } x+1 < 0 \Rightarrow 2x+6 \geq 0$$



Conclusión : $P \cup Q = [-3, \sqrt{5})$

4] Resolver : $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x+2} < 2x-1$

Solución : El universo solución es $x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$

$$\text{Si } 2x-1 > 0 \Rightarrow \left\{ (\sqrt{x+2})^2 < (2x-1)^2 \right\}$$

$$x > \frac{1}{2} \Rightarrow \left\{ x+2 < 4x^2 - 4x + 1 \right\}$$

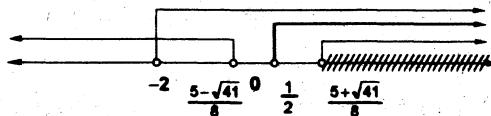
$$\therefore \Rightarrow \left\{ 0 < 4x^2 - 5x - 1 \right\}$$

$$\therefore \Rightarrow \left\{ 0 < x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{4} \right\}$$

$$\therefore \Rightarrow \left\{ 0 < x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{25}{64} - \frac{25}{64} - 1 \right\}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \left\{ 0 < \left(x - \frac{5}{8}\right)^2 - \frac{41}{64} \right\} \\ &\Rightarrow \left\{ \left(x - \frac{5}{8}\right)^2 > \frac{41}{64} \right\} \\ &\Rightarrow \left\{ \left(x - \frac{5}{8}\right) > \frac{\sqrt{41}}{8} \vee x - \frac{5}{8} < -\frac{\sqrt{41}}{8} \right\} \\ x > \frac{1}{2} \underset{A}{\Rightarrow} \left\{ \left(x > \frac{5 + \sqrt{41}}{8} \vee x < \frac{5 - \sqrt{41}}{8}\right) \right\} \end{aligned}$$

$$C_S = x \in \left(\frac{5 + \sqrt{41}}{8}, \infty \right)$$

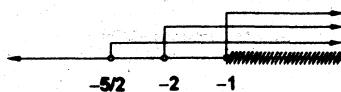


5] Resolver : $\sqrt{3x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x+5}$

Solución : El universo de la solución es la intersección de

$$3x+6 \geq 0 \wedge x+1 \geq 0 \wedge 2x+5 \geq 0$$

$$x \geq -2 \wedge x \geq -1 \wedge x \geq -5/2$$



$$U : x \geq -1$$

La inecuación es la negación de la propiedad : $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Es verdadero que : $\sqrt{3x+6} = \sqrt{(x+1)+(2x+5)} \leq \sqrt{x+1} + \sqrt{2x+5} , \forall x \in [-1, \infty)$

Pero $\sqrt{3x+6} = \sqrt{x+1+2x+5} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x+5}$ es FALSO $\forall x \in [-1, \infty)$, entonces el

$$C_S = \emptyset$$

6] Resolver : $\sqrt{\sqrt{x+1} - \sqrt{3-x}} > -5$

Solución : Aquí lo único que debe cumplirse es que : el 2º miembro sea positivo o cero, ya que el 1º miembro es negativo (APLICACIÓN DEL TEO. III)

$$\sqrt{x+10} - \sqrt{3-x} \geq 0$$

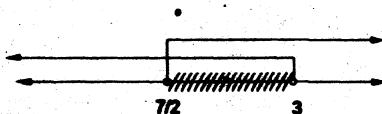
$$\sqrt{x+10} \geq \sqrt{3-x}$$

Hacer: $0 \leq \sqrt{3-x} \leq \sqrt{x+10}$ y elevar al cuadrado

$$0 \leq 3-x \leq x+10$$

$$0 \leq 3-x \wedge 3-x \leq x+10$$

$$x \leq 3 \wedge -\frac{7}{2} \leq x$$



$$C_s = x \in [-\frac{7}{2}, 3]$$

7 Resolver: $\sqrt{x+20} - \sqrt{1-x} \geq 2$

Solución: En este caso elevamos al cuadrado ambos miembros
(APLICACIÓN DEL TEO. II)

$$\sqrt{x+20} - \sqrt{1-x} \geq 4 \quad \leftarrow \text{Convertir a suma de RADICALES}$$

$$\sqrt{x+20} \geq 4 + \sqrt{1-x}$$

elevant al cuadrado ambos miembros , siempre que el universo de la solución es : $x+20 \geq 0 \wedge 1-x \geq 0 \Leftrightarrow [-20, 1] = U$

$$x+20 \geq 16 + 8\sqrt{1-x} + 1-x$$

$$x+20 - 16 - 1+x \geq 8\sqrt{1-x}$$

$$2x+3 \geq 8\sqrt{1-x} \Leftrightarrow 8\sqrt{1-x} \leq 2x+3 \Rightarrow 0 \leq 8\sqrt{1-x} \leq 2x+3$$

elevant al cuadrado

$$4x^2 + 12x + 9 \geq 64(1-x) \geq 0$$

$$4x^2 + 12x + 9 \geq 64 - 64x \quad \wedge \quad 64(1-x) \geq 0$$

$$4x^2 + 78x - 55 \geq 0 \quad \wedge \quad 1-x \geq 0$$

$$x^2 + \frac{78}{4}x - \frac{55}{4} \geq 0 \quad \wedge \quad x \geq 1$$

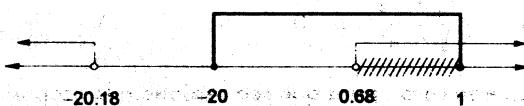
$$x^2 + \frac{39}{2}x + \frac{1521}{16} - \frac{1521}{16} - \frac{55}{4} \geq 0 \quad \wedge \quad x \leq 1$$

$$\left(x + \frac{39}{4}\right)^2 \geq \frac{1741}{16}$$

$$x + \frac{39}{4} \geq \frac{\sqrt{1741}}{4} \quad \vee \quad x + \frac{39}{4} \leq -\frac{\sqrt{1741}}{4}$$

$$x \geq \frac{-39 + \sqrt{1741}}{4} \quad \vee \quad x \leq \frac{-39 - \sqrt{1741}}{4}$$

$$x \geq 0.68 \quad \vee \quad x \leq -20.18 \quad \wedge \quad x \leq 1$$



conclusión : $C_S = x \in [0.68, 1] = \left[\frac{-39 + \sqrt{1741}}{4}, 1 \right]$

8 Resolver : $\sqrt{x-1} \leq \sqrt{x+2}$

Hacer : $0 \leq \sqrt{x-1} \leq \sqrt{x+2}$ y elevar al cuadrado :

$$0 \leq x-1 \leq x+2$$

$$0 \leq x-1 \wedge x-1 \leq x+2$$

$$1 \leq x \wedge x-x \leq 2+$$

$$x \geq 1 \wedge 0 \leq 3 <$$

$$\underline{[1, +\infty) \cap \mathbb{R}}$$

esta proposición es
VERDADERA para
todo $x \in \mathbb{R}$.

Por eso, se escribe :
 \mathbb{R} para indicar que
la solución es todos
los números reales.

Conclusión : $C_S = x \in [1, +\infty)$

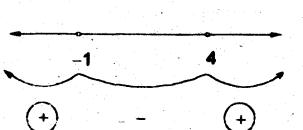
9 Resolver : $\sqrt{x^2 - 3x + 12} > 4$

Solución : Elevar al cuadrado (APLICACIÓN DEL TEO. II)

Veamos : $x^2 - 3x + 12 > 16$

$$x^2 - 3x - 4 > 0$$

$$(x-4)(x+1) > 0$$



$$x \in (-\infty, -1) \cup (4, \infty)$$

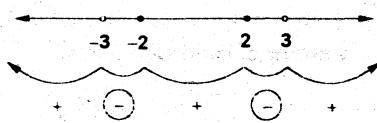
$$C_S = x \in (-\infty, -1) \cup (4, \infty)$$

10 Resolver : $\sqrt{\frac{x^2 - 4}{9 - x^2}} + 5 > 0$

Solución: En éste caso , para que sea verdadera la proposición , debe ser :

$$\frac{x^2 - 4}{9 - x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9} \leq 0$$

$$\frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 3)(x + 3)} \leq 0$$



$$C_S = x \in (-3, -2] \cup [2, 3)$$

11 Resolver : $\sqrt{x^2 - 8x + 30} > -2$

Solución:

En este caso, sólo se debe cumplir que la subradical sea positiva ó cero. Es la aplicación del Teo. III.

Es decir : $x^2 - 8x + 30 \geq 0$

Completar cuadrados :

$$x^2 - 8x + 16 - 16 + 30 \geq 0$$

$$(x - 4)^2 + 14 \geq 0$$

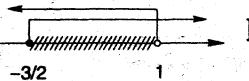
esta proposición es verdadera para todo $x \in \mathbb{R}$
por tal razón se concluye , escribiendo .

C_S = $x \in \mathbb{R}$

$$B : \sqrt{2x+3} > x - 1$$

$$\Leftrightarrow [\text{Si } x-1 \geq 0 \Rightarrow 2x+3 > (x-1)^2] \vee [\text{Si } x-1 < 0 \Rightarrow 2x+3 \geq 0]$$

$$\Leftrightarrow [\text{Si } x \geq 1 \Rightarrow 2x+3 > x^2 - 2x + 1] \vee [\text{Si } x < 1 \Rightarrow x \geq -3/2]$$

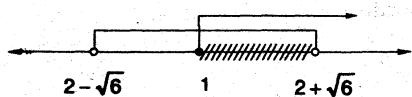
$$\Leftrightarrow [\text{Si } x \geq 1 \Rightarrow 0 > x^2 - 4x - 2] \vee [$$


$$\Leftrightarrow \{\text{Si } x \geq 1 \Rightarrow x^2 - 4x - 4 - 2 < 0\} \vee x \in [-3/2, 1)$$

$$\Leftrightarrow \{\text{Si } x \geq 1 \Rightarrow (x-2)^2 < 6\} \quad "$$

$$\Leftrightarrow \{\text{Si } x \geq 1 \Rightarrow -\sqrt{6} < x-2 < \sqrt{6}\} \quad "$$

$$\Leftrightarrow \{\text{Si } x \geq 1 \Rightarrow 2-\sqrt{6} < x < 2+\sqrt{6}\} \quad "$$

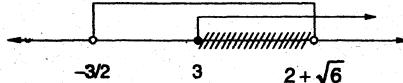


$$\Leftrightarrow [1, 2+\sqrt{6}) \cup [-3/2, 1) = [-3/2, +\sqrt{6})$$

Por tanto : $B = [-3/2, 2+\sqrt{6})$

Conclusión : Intersectamos A con B :

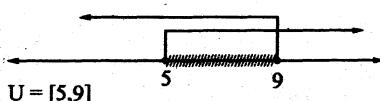
$$A \cap B = x \in [3, 2+\sqrt{6})$$



13 Resolver : $\sqrt{x-5} - \sqrt{9-x} \geq 1$

Solución :

El universo de solución es : $U : x-5 \geq 0 \wedge 9-x \geq 0$
 $x \geq 5 \wedge 9 \geq x$



Para elevar al cuadrado la inecuación : $\sqrt{x-5} - \sqrt{9-x} \geq 1$ es necesario garantizar que ambos miembros sean positivos, esto es :

$$\text{Si : } \sqrt{x-5} - \sqrt{9-x} > 0 \Rightarrow (\sqrt{x-5} - \sqrt{9-x})^2 \geq 1$$

$$x > 7 \Rightarrow \left(x \geq 7 + \frac{\sqrt{7}}{2} \vee x \leq 7 - \frac{\sqrt{7}}{2} \right)$$

El conjunto solución es : $C_S =]7 + \frac{\sqrt{7}}{2}, 9]$

Otra forma de resolver es del siguiente modo :

En $\sqrt{x-5} - \sqrt{9-x} \geq 1$ transponer el término $-\sqrt{9-x}$ al segundo miembro $\sqrt{x-5} \geq 1 + \sqrt{9-x}$. Por ser positivos ambos miembros, elevar al cuadrado.

$$x-5 \geq 1 + 2\sqrt{9-x} + 9-x$$

$$2x-15 \geq 2\sqrt{9-x}$$

$$2\sqrt{9-x} \leq 2x-15$$

$$\text{Si : } (9-x \geq 0 \wedge 2x-15 > 0) \Rightarrow 4(9-x) \leq (2x-15)^2$$

$$9 \geq x \wedge x > 15/2 \Rightarrow 36-4x \leq 4x^2-60x+225$$

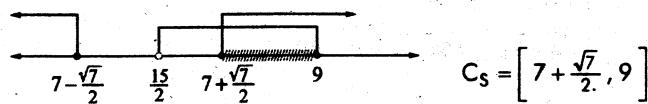
$$\text{Si : } \frac{15}{2} < x \leq 9 \Rightarrow x^2-14x+\frac{189}{4} \geq 0$$

$$\Rightarrow x^2-14x+49 \geq -\frac{189}{4} + 49$$

$$\Rightarrow (x-7)^2 \geq \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow x-7 \geq \frac{\sqrt{7}}{2} \vee x-7 \leq -\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\Rightarrow x \geq 7 + \frac{\sqrt{7}}{2} \vee x \leq 7 - \frac{\sqrt{7}}{2}$$



14 Resolver : $\sqrt{x^2 - 2x - 15} > x + 1$

APLICAR : $\sqrt{a} \geq b \Leftrightarrow [b \geq 0 \Rightarrow a \geq b^2] \quad \vee \quad [b < 0 \Rightarrow a \geq 0]$

Solución :

P : Si $x+1 > 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 > (x+1)^2 \quad \wedge \quad \overbrace{x^2 - 2x - 15 \geq 0}^{\text{UNIVERSO}}$

Si $x > -1 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 > x^2 + 2x + 1 \quad \wedge \quad (x-5)(x+3) \geq 0$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 15 = x^2 - 2x + 1 \geq 0 \quad \wedge$$

$$\Rightarrow -4x - 16 > 0$$

$$4x + 16 < 0$$

$$4x < -16$$

$$\text{Si} \quad \underbrace{x > -1}_{M}$$

$$\Rightarrow \quad \bullet \underbrace{x < -4}_{A}$$

Ahora, hagamos la intersección de A con B y M:



Como vemos , no hay intersección entre los tres conjuntos :

Por lo tanto escribimos : $P = \emptyset$

$$Q : \text{ Si } x+1 < 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x - 15 \geq 0$$

$$x < -1 \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty, -3] \cup [5, \infty)$$

$$Q = \langle -\infty, -3 \rangle$$

Conclusión : $P \cup Q = (-\infty, -3]$

15 Resolver el sistema :

$$\begin{cases} \sqrt{3x-1} + x > 4 & (I) \\ \sqrt{4+3x} - \sqrt{5x-6} < 0 & (II) \end{cases}$$

Solución :

En este caso, cuando se trata de resolver el sistema de inecuaciones, en primer lugar se resuelve cada inecuación en forma separada y al final intersectamos el conjunto solución de (I) con el conjunto solución de (II).

Resolver I

$$-\sqrt{3x-1} + x > 4$$

$$\frac{\sqrt{3x-1}}{\sqrt{a}} > \frac{4-x}{b}$$

$$\text{Aplicar: } \sqrt{a} > b \Leftrightarrow \underbrace{\{b \geq 0 \Rightarrow a > b^2\}}_P \vee \underbrace{\{b < 0 \Rightarrow a \geq 0\}}_Q$$

$$P: 4-x \geq 0 \Rightarrow 3x-1 > (4-x)^2$$

$$-x \geq -4 \Rightarrow 3x-1 > 16-8x+x^2$$

$$x \leq 4 \Rightarrow 0 > x^2 - 11x + 17$$

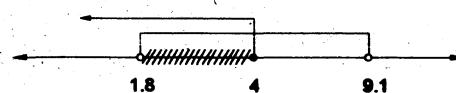
$$x \leq 4 \Rightarrow x^2 - 11x + \frac{121}{4} - \frac{121}{4} + 17 < 0$$

$$x \leq 4 \Rightarrow \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{53}{4} < 0$$

$$x \leq 4 \Rightarrow \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 < \frac{53}{4}$$

$$x \leq 4 \Rightarrow -\frac{\sqrt{53}}{2} < x - \frac{11}{2} < \frac{\sqrt{53}}{2}$$

$$x \leq 4 \Rightarrow \frac{11-\sqrt{53}}{2} < x < \frac{11+\sqrt{53}}{2}$$

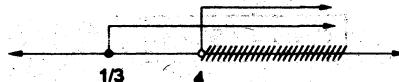


$$Q: 4-x < 0 \Rightarrow 3x-1 \geq 0$$

$$-x < -4 \Rightarrow 3x \geq 1$$

$$x > 4 \Rightarrow x \geq \frac{1}{3}$$

$$Q = x \in (4, \infty)$$



Conclusión:

$$P \cup Q = \left(\frac{11-\sqrt{53}}{2}, \infty \right) \quad \text{I}$$

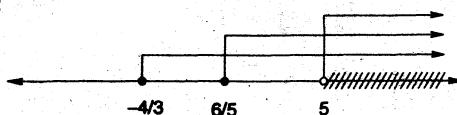
$$\text{Resolver II} \quad \sqrt{4+3x} - \sqrt{5x-6} < 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{4+3x} < \sqrt{5x-6}$$

Elevar al cuadrado ambos miembros, siempre y cuando las subradicales sean positivos o cero.

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow & (4 + 3x < 5x - 6) , \text{ si} & \overbrace{(4 + 3x \geq 0 \wedge 5x - 6 \geq 0)}^{\text{UNIVERSO}} \\
 \Rightarrow & (3x - 5x < -6 - 4) \wedge (3x \geq -4 \wedge 5x = 6) \\
 \Rightarrow & (-2x < -10) \wedge (x \geq -4/3 \wedge x \geq 6/5) \\
 \Rightarrow & (2x > 10) \wedge (x \geq -4/3 \wedge x \geq 6/5) \\
 \Rightarrow & (x > 5) \wedge (x \geq -4/3 \wedge x \geq 6/5)
 \end{aligned}$$

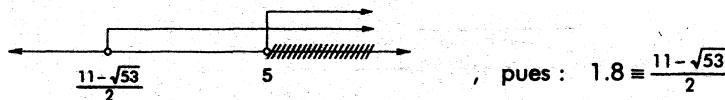
Ahora, intersectamos :



Por tanto, la solución de II, será :

$$x \in (5, \infty) \quad \text{II}$$

Conclusión : Intersectar (I) con (II)



$$\text{, pues : } 1.8 \equiv \frac{11 - \sqrt{53}}{2}$$

Luego, la solución será :

$$C_s = x \in (5, \infty)$$

$$16 \quad \text{Resolver : } \sqrt{\frac{x+2-2}{x+2+2}} \leq 2-x$$

Solución :

El universo de la solución es :

$$\sqrt{\frac{x+2-2}{x+2+2}} \geq 0 \wedge 2-x \geq 0$$

Al resolver, la intersección es :

$$[2, \infty) \cap (-\infty, 2] = \{2\}$$

$$\therefore C_s = \{2\}$$

$$17 \quad \text{Resolver : }$$

$$\sqrt{\frac{x^2-x-2}{3-\sqrt{4-x^2}}} \geq x^2 - 4x - 26$$

$$\text{El universo } U : \frac{x^2-x-2}{3-\sqrt{4-x^2}} \geq 0$$

$$: x \in [-2, -1] \cup \{2\}$$

Como el término $x^2 - 4x - 26$ es NEGATIVO $\forall x \in U$, entonces el conjunto solución es el universo :

Es decir :

$$C_s = x \in [-2, -1] \cup \{2\}$$

Capítulo 12

Inecuaciones Exponenciales

12.1 DEFINICIÓN : Si $b > 0$ y $b \neq 1$, definimos la función exponencial por $f(x) = b^x$, donde $x \in \mathbb{R}$.

12.2 PROPIEDADES : (Ley de los exponentes). Para todo $b \neq 0$ se tiene :

$$P1) \quad b^0 = 1$$

$$P5) \quad b^{-n} = \frac{1}{b^n}$$

$$P2) \quad (b^n)^m = b^{nm}$$

$$P4) \quad \frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$$

$$P3) \quad b^n \cdot b^m = b^{n+m}$$

$$P6) \quad b^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{b^n}$$

12.3 Para resolver inecuaciones exponenciales tener en cuenta las propiedades anteriores mencionadas y las siguientes proposiciones.

CASO I si $b > 1$, se cumplen :

$$T1) \quad \text{Si } b^x < b^y \Rightarrow x < y$$

$$T2) \quad \text{Si } b^x \leq b^y \Rightarrow x \leq y$$

CASO II si $0 < b < 1$, se cumplen :

$$T3) \quad \text{si } b^x < b^y \Rightarrow x > y$$

$$T4) \quad \text{si } b^x \leq b^y \Rightarrow x \geq y$$

Problemas

1 Resolver : $2^{x+2} \leq 2^{x^2}$

Solución :

$$\Rightarrow x + 2 \leq x^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq x^2 - x - 2$$

$$\Rightarrow (x - 2)(x + 1) \geq 0$$



$$\Rightarrow C_S = x \in (-\infty, -1] \cup [2, \infty)$$

2 Resolver : $\left(\frac{1}{27}\right)^{2x-1} > 9^{3-x}$

Solución : $\left(\frac{1}{3^3}\right)^{2x-1} > (3^2)^{3-x}$

$$\Rightarrow (3^{-3})^{2x-1} > 3^{2(3-x)}$$

$$\Rightarrow -3(2x-1) > 2(3-x)$$

$$\Rightarrow -6x + 3 > -6 + 2x$$

$$\Rightarrow 3 - 6 > -2x + 6x$$

$$\Rightarrow -3 > 4x$$

$$\Rightarrow 4x < -3$$

$$\Rightarrow -x < -3/4$$

$$C_S = x \in (-\infty, -3/4)$$

3] Resolver: $(4^{2x} \cdot 8^{x-3})^{2/5} > 2^5 \cdot 2^{\frac{x+1}{2}}$

Solución :

En primer lugar se tiene que :

$$4 = 2^2, \quad 8 = 2^3$$

Al sustituir en la inecuación, obtenemos :

$$\Rightarrow ((2^2)^{2x} \cdot (2^3)^{x-3})^{2/5} > 2^{5+\frac{x+1}{2}}$$

$$\Rightarrow (2^{4x} \cdot 2^{3(x-3)})^{2/5} > \cdot$$

$$\Rightarrow (2^{4x+3(x-3)})^{2/5} > \cdot$$

$$\Rightarrow (2^{\frac{2}{5}(4x+3(x-3))}) > 2^{5+\frac{x+1}{2}}$$

Como las bases ($b = 2$) son iguales entonces hacemos :

$$\frac{2}{5}(4x+3(x-3)) > 5 + \frac{x+1}{2}$$

El mínimo común múltiplo de 5 y 2 es 10, entonces :

$$4(4x+3(x-3)) > 50 + 5(x+1)$$

$$\Rightarrow 4(4x+3x-9) > 50 + 5x + 5$$

$$\Rightarrow 16x + 12x - 36 > 55 + 5x$$

$$\Rightarrow 16x + 12x - 5x > 55 + 36$$

$$\Rightarrow 25x > 91$$

$$\Rightarrow x > \frac{91}{23}$$

4] Resolver: $\left[(0.2)^{\frac{2x+1}{5}} \right]^2 > \left[(0.0016)^{\frac{2x-2}{5}} \right]^3$

Solución : $[0.2]^{\frac{1}{2} \cdot \frac{2x+1}{5}} > [0.0016]^{\frac{1}{3} \cdot \frac{2x-2}{5}}$

$$\Rightarrow \left[(0.2)^4 \right]^{\frac{1}{3} \cdot \frac{2x-2}{5}}$$

$$[0.2]^{\frac{1}{2} \cdot \frac{2x+1}{5}} > [0.2]^{\frac{4}{3} \cdot \frac{2x-2}{5}}$$

Como la base $b = 0.2$ es menor que la unidad , aplicamos la proposición.

T3. Si $b^y > b^x \Rightarrow y < x$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+1}{5} < \frac{4}{3} \cdot \frac{2x-2}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+1}{2} < \frac{8x-8}{3}$$

$$\Rightarrow 3(2x+1) < 2(8x-8)$$

$$\Rightarrow 6x+3 < 16x-16$$

$$\Rightarrow 3+16 < 16x-6x$$

$$\Rightarrow 19 < 13x$$

$$\Rightarrow 13x > 19$$

$$\Rightarrow x > \frac{19}{13}$$

$$\Rightarrow x \in \left(\frac{19}{13}, \infty \right)$$

5] Resolver :

$$\sqrt{9^{x(x+1)} \cdot 3^{-2x^2+x}} > \sqrt[4]{3}$$

Solución :

$$\Rightarrow \sqrt{(3^2)^{x(x+1)} \cdot 3^{-2x^2+x}} > 3^{1/4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3^{2x(x+1)} \cdot 3^{-2x^2+x}} > 3^{1/4}$$

$$\Rightarrow 3^{\frac{2x(x+1)-2x^2+x}{2}} > 3^{1/4}$$

$$\Rightarrow \frac{2x(x+1)-2x^2+x}{2} > \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2+2x-2x^2+x}{2} > \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{2} > \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 3x > \frac{1}{2} \Rightarrow 6x > 1$$

$$\Rightarrow x > \frac{1}{6}$$

6 Resolver : $x+2\sqrt{2^{x^2-4}} \geq x+2\sqrt{\frac{x-2}{4}}$

Solución :

$$\Rightarrow 2^{\frac{x^2-4}{x+2}} \geq 4^{\frac{(x-2)}{2(x+2)}}$$

$$\Rightarrow 2^{\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}} \geq (2^2)^{\frac{x-2}{2(x+2)}}$$

$$\text{Si } x \neq -2 \Rightarrow 2^{x-2} \geq 2^{\frac{2(x-2)}{2(x+2)}}$$

$$\Rightarrow 2^{x-2} \geq 2^{\frac{x-2}{x+2}}$$

$$\Rightarrow x-2 \geq \frac{x-2}{x+2}$$

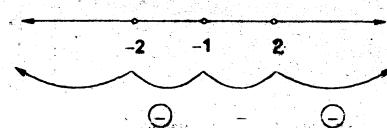
$$\Rightarrow x-2 - \frac{x-2}{x+2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)(x+2) - (x-2)}{x+2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 4 - x + 2}{x+2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - x - 2}{x+2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)(x+1)}{x+2} \geq 0$$



$$\Rightarrow x \in (-2, -1] \cup [2, \infty)$$

7 Resolver : $\left(\sqrt{\frac{0.000729}{0.00243}} \right)^{\frac{x^2-2ax}{|x+2|^2+4}} < \left(\frac{1}{\sqrt{0.3}} \right)^{\frac{2a^2-|2ax-2a^2|}{x^2+4x+8}}$

Siendo $a > 0$

Solución :

$$\Rightarrow \left(\sqrt{0.3} \right)^{\frac{x^2-2ax}{|x+2|^2+4}} < (0.3)^{-1/2} \cdot \frac{2a^2-|2ax-2a^2|}{x^2+4x+8}$$

$$\text{como } \sqrt{0.3} = (0.3)^{1/2} \quad y \quad \frac{1}{(0.3)^{1/2}} = (0.3)^{-1/2}, \text{ obtenemos}$$

$$\Rightarrow (0.3)^{\frac{1}{2} \frac{x^2-2ax}{|x+2|^2+4}} < (0.3)^{-\frac{1}{2} \frac{2a^2-|2ax-2a^2|}{x^2+4x+8}}$$

Como la base 0.3 es menor que la unidad, aplicaremos la proposición T3, lo que implica cambiar el sentido de la desigualdad.

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{x^2-2ax}{|x+2|^2+4} > -\frac{1}{2} \frac{2a^2-|2ax-2a^2|}{x^2+4x+8} \dots\dots\dots (\alpha)$$

Se pueden simplificar los denominadores : $2(|x+2|^2+4)$ y $2(x^2+4x+8)$, porque son iguales y positivos, ya que $|x+2|^2 = (x+2)^2$ y por tanto :

$$|x+2|^2 + 4 = x^2 + 4x + 4 + 4 = x^2 + 4x + 8$$

Por lo tanto la desigualdad (α), se reduce a :

$$\Rightarrow x^2 - 2ax > -(2a^2 - |2ax - 2a^2|)$$

$$\Rightarrow x^2 - 2ax > -2a^2 + 2a|x - a|$$

$$\Rightarrow x^2 - 2ax + 2a^2 > 2a|x - a| \quad \dots \dots \dots \quad (\beta)$$

Ahora definimos el valor absoluto :

$$|x - a| = \begin{cases} x - a, & \text{Si } x - a \geq 0 \\ - (x - a), & \text{Si } x - a < 0 \end{cases}$$

Por ésta razón, la desigualdad (β) se desdobra en la UNIÓN de dos inecuaciones A o B.
Así tendremos :

$$\begin{aligned} A : \text{ si } x \geq a &\Rightarrow x^2 - 2ax + 2a^2 > 2a(x - a) \\ &\Rightarrow x^2 - 2ax + 2a^2 > 2ax - 2a^2 \\ &\Rightarrow x^2 - 4ax + 4a^2 > 0 \\ &\Rightarrow \underline{(x - 2a)^2 > 0} \end{aligned}$$

Es verdadero para todo $x \in \mathbb{R}$,
excepto para $x = 2a$.

Luego : $A = x \in \mathbb{R} - \{2a\}$

$$\begin{aligned} B : \text{ si } x < a &\Rightarrow x^2 - 2ax + 2a^2 > 2a(-x - a) \\ &\Rightarrow x^2 - 2ax + 2a^2 > -2ax + 2a^2 \\ &\Rightarrow \underline{x^2 > 0} \end{aligned}$$

Es verdadero para todo
 $x \in \mathbb{R}$, excepto para $x = 0$.

Entonces : $B = x \in \mathbb{R} - \{0\}$

Conclusión : El conjunto solución será :

$$A \cup B = x \in \mathbb{R} - \{2a, 0\}$$

8] Resolver : $\left(-\frac{1}{(a-1)^3}\right)^{(x+1)(x+2)} > \left(\frac{1}{(1-a)^5}\right)^{x+2}, \quad \forall a \in (0, 1)$

Solución :

$$\begin{aligned} 1^{\text{o}} \quad & \text{si } a \in (0, 1) \Rightarrow 0 < a < 1 \\ & \text{cambio de signo} \Rightarrow 0 > -a > -1 \\ & \text{sumar 1} \Rightarrow 1 > 1 - a > 0 \end{aligned}$$

2º) Como $(1 - a)$ es positivo entonces $(1 - a)^5$ también será positivo.

$$\text{Además : } (a - 1)^3 = ((-1)(1 - a))^3 = (-1)^3 (1 - a)^3 = -(1 - a)^3$$

3º) Luego, la inecuación de la pregunta se hace :

$$\left(-\frac{1}{-(1-a)^3} \right)^{(x+1)(x+2)} > \left((1-a)^{-5} \right)^{x+2}$$

$$\left((1-a)^{-3} \right)^{(x+1)(x+2)} > (1-a)^{-5(x+2)}$$

$$(1-a)^{-3(x+1)(x+2)} > (1-a)^{-5(x+2)}$$

4º) Como la base : $(1 - a)$ es menor que la unidad (demostrado en el 1º paso), entonces el sentido de la inecuación cambiará y quedará del siguiente modo :

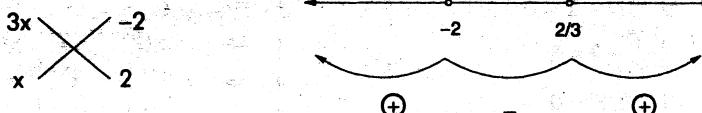
$$\Rightarrow -3(x+1)(x+2) < -5(x+2)$$

$$\text{Multiplicar por } (-1) \Rightarrow 3(x+1)(x+2) > 5(x+2)$$

$$\text{Transponer} \Rightarrow 3(x+1)(x+2) - 5(x+2) > 0$$

$$\text{Factorizar } (x+2) \Rightarrow (x+2)[3(x+1) - 5] > 0$$

$$(3x - 2)(x+2) > 0$$



$$\Rightarrow C_s = x \in (-\infty, -2) \cup (2/3, \infty)$$

9) Resolver : $2^{|x+2|} - |2^{x+1} - 1| = 2^{x+1} + 1$

Solución :

1º) Los puntos críticos que se obtienen de los valores absolutos son :

$$\text{De } |x+2| = 0, \text{ se obtiene } x = -2$$

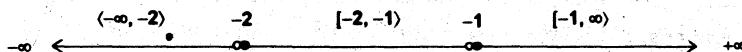
De $|2^{x+1} - 1| = 0$, se obtiene : $2^{x+1} - 1 = 0$

$$\Rightarrow 2^{x+1} = 1$$

$$\Rightarrow x + 1 = 0, \text{ pues } 2^0 = 1$$

$$\Rightarrow x = -1$$

2º Particionar la recta real con los puntos críticos :



3º Los 3 intervalos dividen a la ecuación original en la unión de 3 ecuaciones :

Las restricciones (intervalos) y la definición de los valores absolutos , la expresamos en el siguiente cuadro :

	intervalos	$ x+2 $	$ 2^{x+1} - 1 $
I	$(-\infty, -2)$	$-(x+2)$	$-(2^{x+1} - 1)$
II	$[-2, -1)$	$x+2$	$-(2^{x+1} - 1)$
III	$[-1, \infty)$	$x+2$	$2^{x+1} - 1$

4º Observando, en este cuadro los intervalos y los signos de los valores absolutos (positivos o negativos), obtenemos de la ecuación original la unión de las 3 siguientes ecuaciones.

(I) si $x \in (-\infty, -2)$

$$\Rightarrow 2^{-(x+2)} + |2^{x+1} - 1| = 2^{x+1} + 1$$

$$\Rightarrow 2^{-(x+2)} + 2^{x+1} - 1 = 2^{x+1} + 1$$

$$\Rightarrow 2^{-x} \cdot 2^{-2} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^x} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 1 - 8 \cdot 2^x = 0$$

$$\Rightarrow 2^x = \frac{1}{8} \Rightarrow 2^x = 2^{-3}$$

$$\Rightarrow x = -3 \in (-\infty, -2)$$

Luego, la solución es : $S_1 = \{-3\}$

(II) si $x \in [-2, -1)$

$$\Rightarrow 2^{x+2} + |2^{x+1} - 1| = 2^{x+1} + 1$$

$$\Rightarrow 2^{x+2} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2^{x+2} = 2$$

$$\Rightarrow x+2=1 \Rightarrow x=-1 \notin [-2, -1)$$

Luego la solución es : $S_2 = \emptyset$

(III) si $x \in [-1, \infty)$

$$\Rightarrow 2^{x+2} - |2^{x+1} - 1| = 2^{x+1} + 1$$

$$\Rightarrow 2^{x+2} - 2^{x+1} + 1 = 2^{x+1} + 1$$

$$\Rightarrow 2^{x+2} - 2 \cdot 2^{x+1} = 0$$

$$\Rightarrow 2(2^{x+1} - 2^{x+1}) = 0$$

$$\Rightarrow 2^{x+1} - 2^{x+1} = 0$$

$$\Rightarrow 2^{x+1} = 2^{x+1}$$

es una identidad que se cumple para todo $x \in [-1, \infty)$

Entonces afirmamos que el conjunto solución será :

$$S_3 = x \in [-1, \infty)$$

Conclusión :

$$C_S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

$$= \{-3\} \cup \emptyset \cup [-1, \infty)$$

$$C_S = \{-3\} \cup [-1, \infty)$$

Capítulo 13

Ecuaciones E Inecuaciones con Máximo Entero

13.1 DEFINICIÓN : Si x es un número real, definimos "el máximo entero no mayor de x " ($\lfloor x \rfloor$) al número entero K , tal que, $K \leq x < K + 1$.

Notación :

$\lfloor x \rfloor = K \Leftrightarrow K \leq x < K + 1$ o $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$	$K = \lfloor x \rfloor$ es un número entero
--	---

- Ejemplos :
- 1) $\lfloor 3.1 \rfloor = 3$, porque $3 \leq 3.1 < 4$
 - 2) $\lfloor 5.84 \rfloor = 5$, porque $5 \leq 5.84 < 6$
 - 3) $\lfloor -2.97 \rfloor = -3$, porque $-3 \leq -2.97 < -2$
 - 4) $\lfloor -8.23 \rfloor = -9$, porque $-9 \leq -8.23 < -8$
 - 5) $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, porque $-1 \leq \sqrt{2} < 2$
 - 6) $\lfloor 2 \rfloor = 2$
 - 7) $\lfloor -5 \rfloor = -5$

13.2 ECUACIONES

Usando la definición de máximo entero, hallar todos los valores $x \in \mathbb{R}$, que satisfacen las siguientes ecuaciones.

1) $\lfloor 8x \rfloor = -4$

Solución :

$$\begin{aligned}\lfloor 8x \rfloor = -4 &\Leftrightarrow -4 \leq 8x < -3 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x < -\frac{3}{8}\end{aligned}$$

Por tanto, el conjunto solución será :

$$x \in [-1/2, -3/8)$$

2) $\left\lfloor \frac{2x - 1}{3} \right\rfloor = -3$

Solución :

$$\begin{aligned}\left\lfloor \frac{2x - 1}{3} \right\rfloor = -3 &\Leftrightarrow -3 \leq \frac{2x - 1}{3} < -2 \\ &\Leftrightarrow -9 \leq 2x - 1 < -6 \\ &\Leftrightarrow -8 \leq 2x < -5 \\ &\Leftrightarrow -4 \leq x < -5/2\end{aligned}$$

Por tanto, el conjunto solución será :

$$x \in [-4, -5/2)$$

3) Resolver : $\lfloor -4x \rfloor = 2$

Solución :

$$[-4x] = 2 \Leftrightarrow 2 \leq -4x < 3$$

$$\Leftrightarrow -2 \geq 4x > -3$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \geq x > -\frac{3}{4}$$

Luego, el conjunto solución será :

$$x \in (-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$$

(4) Resolver : $[x^2 - 2x] = -1$
Solución :

$$\Leftrightarrow -1 \leq x^2 - 2x < 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x^2 - 2x \wedge x^2 - 2x < 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 2x + 1 \wedge x(x-2) < 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (x-1)^2 \wedge \begin{array}{c} \leftarrow \circ \circ \rightarrow \\ + 0 \ominus 2 + \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{R} \cap x \in (0, 2)$$

Por tanto, el conjunto solución será :

$$x \in (0, 2)$$

(5) Resolver : $[x^2 - x + 3] = 5$
Solución :

$$\Leftrightarrow 5 \leq x^2 - x + 3 < 6$$

$$\Leftrightarrow 5 \leq x^2 - x + 3 \wedge x^2 - x + 3 < 6$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 - x - 2 \wedge x^2 - x - 3 < 0$$

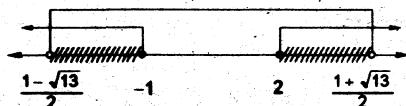
$$\Leftrightarrow 0 \leq (x-2)(x+1) \wedge x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \leftarrow \bullet \quad \bullet \rightarrow \\ \oplus \quad - \end{array} \oplus \wedge \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{13}{4} < 0$$

$$\Leftrightarrow \{x \in (-\infty, 1] \cup [2, \infty) \cap \left(\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 < \frac{13}{4} \right)\}$$

$$\Leftrightarrow \cap -\frac{\sqrt{13}}{2} < x - \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cap \frac{1-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$


Luego, el conjunto solución será :

$$x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, 1 \right) \cup \left(2, \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)$$

(6) Resolver : $\left[\frac{x-2}{x+5} \right] = 2$
Solución :

$$\Leftrightarrow 2 \leq \frac{x-2}{x+5} < 3$$

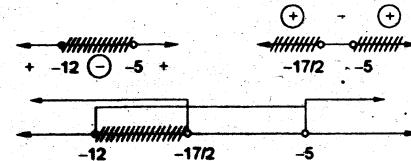
$$\Leftrightarrow 2 \leq \frac{x-2}{x+5} \wedge \frac{x-2}{x+5} < 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x+5} - 2 \geq 0 \wedge \frac{x-2}{x+5} - 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2-2x-10}{x+5} \geq 0 \wedge \frac{x-2-3x-15}{x+5} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x-12}{x+5} \geq 0 \wedge \frac{-2x-17}{x+5} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+12}{x+5} \leq 0 \wedge \frac{2x+17}{x+5} > 0$$



Luego, el conjunto solución será :

$$x \in [-12, -17/12)$$

⑦ Resolver : $\left\lfloor \frac{|x-2|-5}{2} \right\rfloor = 4$

Solución :

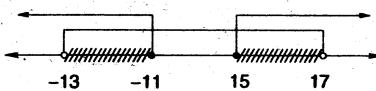
$$\Leftrightarrow 4 \leq \frac{|x-2|-5}{2} < 5$$

$$\Leftrightarrow 8 \leq |x-2| - 5 < 10$$

$$\Leftrightarrow 13 \leq |x-2| < 15$$

$$\Leftrightarrow 13 \leq |x-2| \wedge |x-2| < 15$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow |x-2| \geq 13 \wedge -15 < x-2 < 15 \\ &\Leftrightarrow \{x-2 \geq 13 \vee x-2 \leq -13\} \wedge \{-13 < x < 17\} \\ &\Leftrightarrow \{x \geq 15 \vee x \leq -11\} \wedge \{-13 < x < 17\} \end{aligned}$$



Por tanto, el conjunto solución será :

$$C_s = x \in (-13, -11] \cup [15, 17)$$

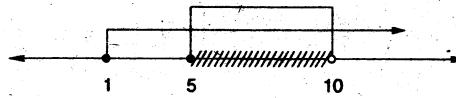
⑧ Resolver : $\left\lfloor \sqrt{x-1} \right\rfloor = 2$

Solución : $2 \leq \sqrt{x-1} < 3$

\Leftrightarrow Elevar al cuadrado , siempre que $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

$$\Leftrightarrow 4 \leq x-1 < 9$$

$$\Leftrightarrow 5 \leq x < 10 \quad \wedge \quad x \geq 1$$



Luego , el conjunto solución será :

$$x \in [5, 10)$$

⑨ Resolver : $|4 - \lfloor x^2 - x \rfloor| = 0$

Solución :

Aplicando $|a| = 0 \iff a = 0$, obtenemos :

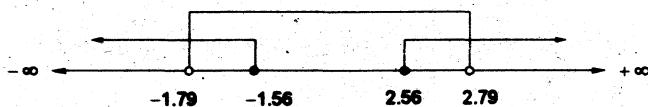
$$\Leftrightarrow 4 - \lfloor x^2 - x \rfloor = 0$$

$$\Leftrightarrow \lfloor x^2 - x \rfloor = 4$$

Aplicando la definición : $[f(x)] = K \iff K \leq f(x) < K+1$

Obtenemos :

$$\begin{aligned}
 & \Rightarrow 4 \leq x^2 - x < 5 \\
 & \quad \swarrow \quad \searrow \\
 & 4 \leq x^2 - x \quad \wedge \quad x^2 - x < 5 \\
 & 0 \leq x^2 - x - 4 \quad \wedge \quad x^2 - x - 5 < 0 \\
 & 0 \leq x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 4 \quad \wedge \quad x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 5 < 0 \\
 & 0 \leq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{17}{4} \quad \wedge \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{21}{4} < 0 \\
 & \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{17}{4} \quad \wedge \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{21}{4} \\
 & x - \frac{1}{2} \geq \frac{\sqrt{17}}{2} \vee x - \frac{1}{2} \leq -\frac{\sqrt{17}}{2} \quad \wedge \quad -\frac{\sqrt{21}}{2} < x - \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{21}}{2} \\
 & x \geq \frac{1+\sqrt{17}}{2} \vee x \leq \frac{1-\sqrt{17}}{2} \quad \wedge \quad \frac{1-\sqrt{21}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{21}}{2} \\
 & x \geq 2.56 \vee x \leq -1.56 \quad \wedge \quad -1.79 < x < 2.79
 \end{aligned}$$



Por tanto , el conjunto solución será :

$$C_S = x \in \left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}, \frac{1-\sqrt{17}}{2} \right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{21}}{2} \right)$$

⑩ Resolver : $\lceil 5x \rceil = 3x + 2$

Solución :

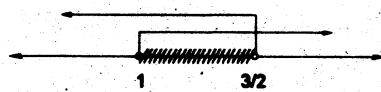
(1) Por definición del máximo entero , podemos escribir directamente del siguiente modo.

$$\Leftrightarrow (3x+2) = n \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad (3x+2) \leq 5x < (3x+2)+1$$

$$\Leftrightarrow 3x = n-2 \quad \wedge \quad 3x+2 \leq 5x \wedge 5x < 3x+2+1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{n-2}{3} \quad \wedge \quad 2 \leq 2x \wedge 2x < 3$$

$$1 \leq x \quad \wedge \quad x < 3/2$$



$$\Leftrightarrow n \in \mathbb{Z} \wedge x = \frac{n-2}{3} \wedge 1 \leq x < \frac{3}{2}$$

$$\wedge 1 \leq \frac{n-2}{3} < \frac{3}{2}$$

$$n \in \mathbb{Z} \wedge 3 \leq n-2 < \frac{9}{2}$$

$$5 \leq n < \frac{9}{2} + 2$$

$$n \in \mathbb{Z} \wedge 5 \leq n < \frac{13}{2}$$

Luego : $n = 5$ ó $n = 6$

$$(2) \text{ Como : } x = \frac{n-2}{3}, \text{ entonces } x = \frac{5-2}{3} = 1 \quad \text{ ó } \quad x = \frac{6-2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$(3) \text{ En consecuencia el conjunto solución será : } C_S = \left\{ 1, \frac{4}{3} \right\}$$

(11) Resolver : $\forall x \in \mathbb{R} \quad [3x - |x|] = x + 1$

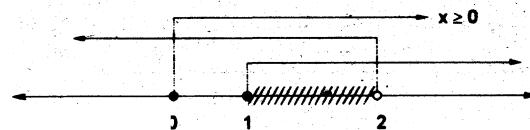
Solución :

(1) Por definición de "máximo entero", obtenemos :

$$\begin{aligned} [3x - |x|] = x + 1 \Leftrightarrow (x+1) \leq 3x - |x| < (x+1) + 1, \text{ siempre que } (x+1) \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow (x+1) \leq 3x - |x| \wedge 3x - |x| < x + 1 + 1 \end{aligned}$$

(2) Ahora, definiendo el valor absoluto $|x|$, obtenemos A ó B :

$$\begin{aligned} A) \text{ si } x \geq 0 \Rightarrow x + 1 \leq 3x - x \wedge 3x - x < x + 2 \\ \Rightarrow 1 \leq x \wedge x < 2 \end{aligned}$$



Por tanto : si $x \geq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2$, siempre que $(x+1) = n$ sea un entero.

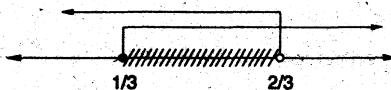
$$(3) \text{ Como } : 1 \leq x < 2 \wedge x + 1 = n \\ \text{ entonces } : 1 \leq n - 1 < 2 \\ \Rightarrow : 2 \leq n < 3, n \in \mathbb{Z}$$

(4) En consecuencia, $n = 2$

Como : $x = n - 1$, entonces $x = 2 - 1 = 1$

Luego : $A = \{1\}$

$$\text{B) si } x < 0 \Rightarrow (x + 1) \leq 3x - (-x) \wedge 3x - (-x) < x + 1 + 1 \\ \Rightarrow x + 1 \leq 4x \wedge 4x < x + 2 \\ \Rightarrow 1 \leq 3x \wedge 3x < 2 \\ \Rightarrow x \geq 1/3 \wedge x < 2/3$$



$$(5) \text{ si } x < 0 \Rightarrow 1/3 \leq x < 2/3$$

Implica que el conjunto solución
se reduce al vacío

Es decir : $B = \emptyset$

(6) Conclusión : El conjunto solución será :

$$A \cup B = \{1\} \cup \emptyset = \{1\}$$

$$(12) \text{ Resolver : } [x^2 - |x| - 1] = |x|$$

Solución :

(1) Siempre que $|x|$ sea un entero, se cumplirá :

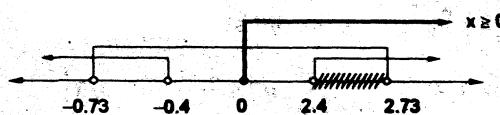
$$|x| \leq x^2 - |x| - 1 < |x| + 1$$

$$(2) \iff \boxed{|x| \leq x^2 - |x| - 1 \wedge x^2 - |x| - 1 < |x| + 1} \quad (*)$$

(3) Definimos el VALOR ABSOLUTO en (*) y obtenemos A o B.

$$\text{A)} x \geq 0 \Rightarrow x \leq x^2 - x - 1 \wedge x^2 - x - 1 < x + 1 \\ \Rightarrow 0 \leq x^2 - 2x - 1 \wedge x^2 - 2x - 2 < 0$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow 0 \leq x^2 - 2x + 1 - 1 - 1 \quad \wedge \quad x^2 - 2x + 1 - 1 - 2 < 0 \\
 &\Rightarrow 0 \leq (x-1)^2 - 2 \quad \wedge \quad (x-1)^2 - 3 < 0 \\
 &\Rightarrow (x-1)^2 \geq 2 \quad \wedge \quad (x-1)^2 < 3 \\
 &\Rightarrow (x-1 \geq \sqrt{2} \vee x-1 \leq -\sqrt{2}) \quad \wedge \quad -\sqrt{3} < x-1 < \sqrt{3} \\
 &\Rightarrow (x \geq 1+\sqrt{2} \vee x \leq 1-\sqrt{2}) \quad \wedge \quad 1-\sqrt{3} < x < 1+\sqrt{3} \\
 &\Rightarrow (x \geq 2.4 \vee x \leq -0.4) \quad \wedge \quad -0.73 < x < 2.73
 \end{aligned}$$

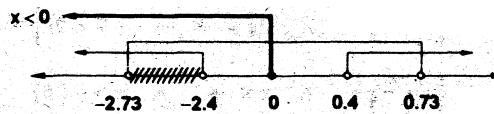


Por tanto, el conjunto solución será todo entero x , tal que, $2.4 \leq x < 2.73$

Es decir :

$$A = \emptyset$$

$$\begin{aligned}
 B) \text{ si } x < 0 \quad &\Rightarrow -x \leq x^2 + x - 1 \quad \wedge \quad x^2 + x - 1 < -x - 1 \\
 &\Rightarrow 0 \leq x^2 + 2x - 1 \quad \wedge \quad x^2 + 2x - 2 < 0 \\
 &\Rightarrow 0 \leq x^2 + 2x + 1 - 1 - 1 \quad \wedge \quad x^2 + 2x + 1 - 1 - 2 < 0 \\
 &\Rightarrow 0 \leq (x+1)^2 - 2 \quad \wedge \quad (x+1)^2 - 3 < 0 \\
 &\Rightarrow (x+1)^2 \geq 2 \quad \wedge \quad (x+1)^2 < 3 \\
 &\Rightarrow (x+1 \geq \sqrt{2} \vee x+1 \leq -\sqrt{2}) \quad \wedge \quad -\sqrt{3} < x+1 < \sqrt{3} \\
 &\Rightarrow (x \geq \sqrt{2}-1 \vee x \leq -\sqrt{2}-1) \quad \wedge \quad (-\sqrt{3}-1 < x < \sqrt{3}-1) \\
 &\Rightarrow (x \geq 0.4 \vee x \leq -2.4) \quad \wedge \quad (2.73 < x < 0.73)
 \end{aligned}$$



Por tanto, el conjunto solución será todo entero x , tal que : $-2.73 < x \leq -2.4$

Es decir :

$$B = \emptyset$$

(4) Conclusión : El conjunto solución será : $A \cup B = \emptyset$

⑬ Resolver: $\forall x \in \mathbb{R} : [5x] = 2x + 1$

Solución:

$$\begin{aligned}
 [5x] = 2x + 1 &\Leftrightarrow [(2x+1) \in \mathbb{Z}] \quad \wedge \quad 2x+1 \leq 5x < 2x+1+1 \\
 &\Leftrightarrow [2x+1 = n \in \mathbb{Z}] \quad \wedge \quad 2x+1 \leq 5x \quad \wedge \quad 5x < 2x+2 \\
 &\Leftrightarrow \left[x = \frac{n-1}{2} \quad \wedge \quad 1 \leq 3x \quad \wedge \quad 3x < 2 \right] \\
 &\quad 1/3 \leq x \quad \wedge \quad x < 2/3 \\
 &\Leftrightarrow \left[x = \frac{n-1}{2} \quad \wedge \quad 1/3 \leq x < 2/3 \right] \\
 &\Leftrightarrow \left[n \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad 1/3 \leq \frac{n-1}{2} < 2/3 \right] \\
 &\Leftrightarrow \left[n \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad \frac{2}{3} + 1 \leq n < \frac{4}{3} + 1 \right] \\
 &\Leftrightarrow \left[n \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad 1.66 \leq n < 2.33 \right] \\
 &\Leftrightarrow n = 2
 \end{aligned}$$

$$\text{Como } x = \frac{n-1}{2}, \text{ entonces } x = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, el conjunto solución será: $C_S = \{\frac{1}{2}\}$

⑭ Resolver: $\forall x \in \mathbb{R} : [3x-1] = 5x+7$

Solución:

$$\begin{aligned}
 [3x-1] = 5x+7 &\Leftrightarrow \{(5x+7) = n \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad 5x+7 \leq 3x-1 < 5x+7+1\} \\
 &\Leftrightarrow \{5x = n-7 \quad \wedge \quad 5x+7 \leq 3x-1 \quad \wedge \quad 3x-1 < 5x+8\} \\
 &\Leftrightarrow \left\{ x = \frac{n-7}{5} \quad \wedge \quad 2x \leq -8 \quad \wedge \quad -9 < 2x \right\} \\
 &\Leftrightarrow \left\{ x = \frac{n-7}{5} \quad \wedge \quad x \leq -4 \quad \wedge \quad x > -4.5 \right\} \\
 &\Leftrightarrow \left\{ x = \frac{n-7}{5} \quad \wedge \quad -4.5 < x \leq -4 \right\} \\
 &\Leftrightarrow \left\{ n \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad -4.5 < \frac{n-7}{5} \leq -4 \right\} \\
 &\Leftrightarrow \left\{ n \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad -22.5 < n-7 \leq -20 \right\} \\
 &\Leftrightarrow \left\{ n \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad -15.5 < n \leq -13 \right\} \\
 &\Leftrightarrow n = -13, n = -14, n = -15
 \end{aligned}$$

INECUACIONES

13.3 TEOREMAS SOBRE EL MÁXIMO ENTERO

TEOREMA 1

Sea "a" un número entero, entonces :

$$[x] \geq a \Leftrightarrow x \geq a$$

DEMOSTRACIÓN.

La doble implicación " \Leftrightarrow " se demuestra en ambos sentidos.

Probaremos la implicación (\Rightarrow) "de derecha a izquierda".

si $\underline{[x] \geq a}$, entonces $x \geq a$, siendo "a" un entero.

HIPÓTESIS

Paso 1 Por definición de máximo entero, tenemos que :

$$\underline{[x] \leq x < [x]+1}, \text{ siendo } [x] \text{ un entero.}$$

Paso 2 Por hipótesis tenemos que : $a \leq [x]$ y por definición :

$$[x] \leq x, \text{ luego :}$$

$$a \leq [x] \leq x$$

Paso 3 Por transitividad, deducimos que : $a \leq x$ o lo que es lo mismo escribir $x \geq a$

Ahora probaremos la otra implicación (\Leftarrow) "de izquierda a derecha".

$$\text{si } \underline{x \geq a} \Rightarrow [x] \geq a, \text{ siendo "a" un entero.}$$

Paso 4 Por hipótesis tenemos que : $x \geq a$

Paso 5 Como "a" es un entero y $a \leq x$, entonces :

$$[a] \leq [x]$$

$$\Rightarrow a \leq [x], \text{ puesto que } [a] = a$$

(lqqd)

APLICACIONES DEL TEOREMA 1 : $[f(x)] \geq a \Leftrightarrow f(x) \geq a$, si $a \in \mathbb{Z}$

1] Resolver : $[7 - x^2] \geq -2$

Solución :

$$[7 - x^2] \geq -2 \Leftrightarrow 7 - x^2 \geq -2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 \leq 9$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$$

$$\Leftrightarrow x \in [-3, 3]$$

2] Resolver : $\left[\frac{|x| - 2}{3} \right] \geq 5$

Solución :

$$\Leftrightarrow \frac{|x| - 2}{3} \geq 5$$

$$\Leftrightarrow |x| - 2 \geq 15$$

$$\Leftrightarrow |x| \geq 17$$

$$\Leftrightarrow x \geq 17 \vee x \leq -17$$

$$\Leftrightarrow x \in [17, \infty) \cup (-\infty, -17]$$

3] Resolver : $\left[\frac{5 - |x|}{x - 2} \right] \geq 3$

Solución :

$$\Leftrightarrow \frac{5 - |x|}{x - 2} \geq 3$$

Ahora, definimos el valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Aplicando esta definición obtenemos dos inecuaciones.

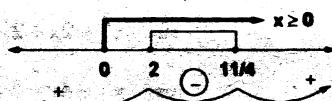
$$S_1 : \text{si } x \geq 0 \Rightarrow \frac{5 - x}{x - 2} \geq 3$$

$$\Rightarrow \frac{5 - x}{x - 2} - 3 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{5 - x - 3x + 6}{x - 2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{-4x + 11}{x - 2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{4x - 11}{x - 2} \leq 0$$



Por tanto, el conjunto solución será :

$$S_1 = x \in (2, 11/4]$$

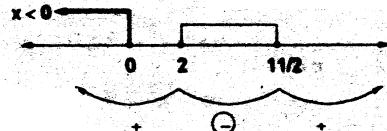
$$S_2 : \text{si } x < 0 \Rightarrow \frac{5 + x}{x - 2} \geq 3$$

$$\Rightarrow \frac{5 + x}{x - 2} - 3 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{5 + x - 3x + 6}{x - 2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2x + 11}{x - 2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x - 11}{x - 2} \leq 0$$



Luego, el conjunto solución será :

$$S_2 = \emptyset$$

Conclusión :

$$S = S_1 \cup S_2$$

$$S = (2, 11/4] \cup \emptyset$$

$$S = (2, 11/4]$$

4] Resolver: $[x^2 - 2|x-1| - 2x - 5] \geq 2$

Solución:

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 2|x-1| - 2x - 5 \geq 2$$

(2) Ahora, definimos el valor absoluto:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{si } x-1 \geq 0 \\ x \geq 1 \\ -(x-1), & \text{si } x-1 < 0 \\ x < 1 \end{cases}$$

Así, obtenemos la unión de dos inecuaciones $S_1 \cup S_2$

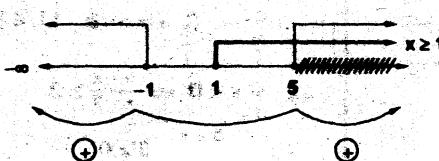
Veamos:

$$S_1 : \text{ si } x \geq 1 \Rightarrow x^2 - 2(x-1) - 2x - 5 \geq 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 2 - 2x - 5 \geq 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 5 \geq 0$$

$$\text{si } x \geq 1 \Rightarrow (x-5)(x+1) \geq 0$$



Por tanto, el conjunto solución será:

$$S_1 = x \in [5, \infty)$$

$$S_2 : \text{ si } x < 1 \Rightarrow x^2 - 2(-x+1) - 2x - 5 \geq 2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 2 - 2x - 5 \geq 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 9 \geq 0$$

$$\Rightarrow x^2 \geq 9$$

$$\text{si } x < 1 \Rightarrow x \geq 3 \vee x \leq -3$$



Luego, el conjunto solución, es

$$S_2 = (-\infty, -3]$$

(3) Conclusión :

$$S_1 \cup S_2 = S_2 \cup S_1 = x \in (-\infty, -3] \cup [5, \infty)$$

5 Resolver : $\left[\frac{|x|+2}{|x|} \right] \geq 3$

Solución :

$$(1) \iff \frac{|x|-2}{|x|} = 3$$

(2) Pero, $|x|$ es un número entero.

Supongamos que $|x|=K \iff K \leq x < K+1, K \in \mathbb{Z}$

Luego, la inecuación del paso (1) quedará definida del siguiente modo :

$$\frac{|x|-2}{K} \geq 3, \text{ siempre que } K \leq x < K+1, K \in \mathbb{Z}$$

(3) Ahora, debemos condicionar el número entero K (si es positivo o negativo, no puede ser cero).

De este modo obtendremos la unión de dos inecuaciones A \cup B, que son las siguientes :

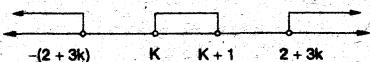
A

si $(k > 0 \wedge k \leq x < k+1)$ entonces

$$|x|-2 \geq 3k$$

$$\Rightarrow |x| \geq 2 + 3k$$

$$\Rightarrow x \geq 2 + 3k \vee x \leq -(2 + 3k)$$



En este caso, el conjunto solución será :

$$A = \emptyset \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots$$

B

si $(k < 0 \wedge k \leq x < k+1)$ entonces

$$|x|-2 \leq 3k$$

$$\Rightarrow |x| \leq 2 + 3k$$

esta inecuación tiene solución vacía, puesto que $2 + 3k$ es NEGATIVO para $k = -1, -2, -3, -4, \dots$ etc.

Por tanto, el conjunto solución será :

$$B = \emptyset \quad \forall k = -1, -2, -3, \dots$$

(4) Conclusión :

$$A \cup B = \emptyset$$

TEOREMA 2 si $n \in \mathbb{Z}$, entonces $[x] \leq n \Leftrightarrow x < n + 1$

Demostración :

(\Rightarrow) Por demostrar que si $[x] \leq n \Rightarrow x < n + 1$

Veamos :

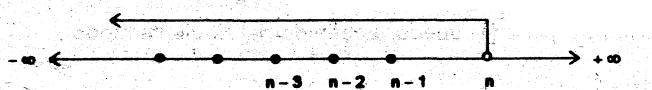
(1) Por hipótesis se tiene que : $[x] \leq n \Leftrightarrow [x] = n \vee [x] < n$

(2) si $[x] = n$, tal que $n \in \mathbb{Z}$, entonces $n \leq x < n + 1$

Todo esto se cumple por definición de máximo entero.

(3) si $[x] < n$, entonces $[x] = n - 1, n - 2, n - 3, \dots$ etc. $n \in \mathbb{Z}$

Vista en la recta real sería :



(4) si $[x] = n - 1 \Leftrightarrow n - 1 \leq x < n - 1 + 1$

$$\Leftrightarrow n - 1 \leq x < n$$

$[x] = n - 2 \Leftrightarrow n - 2 \leq x < n - 2 + 1$

$$\Leftrightarrow n - 2 \leq x < n - 1$$

$$\xrightarrow{x < n}$$

$$\xleftarrow{n-2 \leq x < n-1}$$

(5) Luego, si $x < n \wedge n < n + 1 \Rightarrow x < n + 1$

(6) En consecuencia, por los pasos (2) y (5) se deduce que

$$x < n + 1$$

Iqqd.

(\Leftarrow) Por demostrar : si $x < n + 1 \Rightarrow [x] \leq n$

(7) Por hipótesis tenemos que $x < n + 1, n \in \mathbb{Z}$

(8) Por definición de máximo entero, se tiene que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces

$$[x] = n \Leftrightarrow n \leq x < n + 1$$

$$\Leftrightarrow [x] \leq x < n + 1, \text{ puesto que } n = [x]$$

(9) $\Leftrightarrow [x] < n+1$, (por transitividad y por hipótesis)

(10) Luego, si $[x] < n+1 \Rightarrow [x] = n, n-1, n-2, \dots$ etc. ó lo que es equivalente escribir así:

$$[x] \leq n$$

Iguald

(11) Por los pasos (5) y (10) concluimos que :

$$[x] \leq n \Leftrightarrow x < n+1, \forall n \in \mathbb{Z}$$

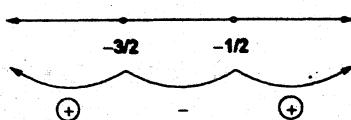
APLICACIONES

PROBLEMA 1

$$\text{Resolver } \forall x \in \mathbb{R} \left[\frac{2x-1}{2x+1} \right] \leq 1$$

Solución :

$$\begin{aligned} \left[\frac{2x-1}{2x+1} \right] \leq 1 &\Leftrightarrow \frac{2x-1}{2x+1} < 1+1 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x-1}{2x+1} - 2 < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x-1-4x-2}{2x+1} \\ &\Leftrightarrow \frac{-2x-3}{2x+1} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x+3}{2x+1} > 0 \end{aligned}$$



$$C_S : x \in (-\infty, -3/2) \cup (-1/2, \infty)$$

PROBLEMA 2

$$\text{Resolver: } x - 3[x] \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Solución :

$$\begin{aligned} x - 3[x] \geq 1 &\Leftrightarrow -3[x] \geq 1 - x \\ &\Leftrightarrow 3[x] \leq x - 1 \\ &\Leftrightarrow [x] \leq \frac{x-1}{3} \\ &\Leftrightarrow x < \frac{x-1}{3} + 1 \quad \wedge \quad \frac{x-1}{3} = n \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow 3x < x - 1 + 3 \quad \wedge \quad x - 1 = 3n \\ &\Leftrightarrow 2x < 2 \quad \wedge \quad x = 1 + 3n \\ &\Leftrightarrow x < 1 \quad \wedge \quad x = 1 + 3n \\ &\Leftrightarrow 1 + 3n < 1 \\ &\Leftrightarrow 3n < 0 \\ &\Leftrightarrow n < 0, n \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad x = 1 + 3n \end{aligned}$$

Por tanto, el conjunto solución será :

$$C_S = \{x = 1 + 3n / n < 0, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$C_S = \{-2, -5, -8, \dots\}$$

PROBLEMA 3 Resolver: $\left[\frac{x - |x|}{|x| - 4} \right] \leq 0$

Solución:

$$\left[\frac{x - |x|}{|x| - 4} \right] \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x - |x|}{|x| - 4} < 0 + 1$$

Definamos el valor absoluto $|x|$:

A

\Leftrightarrow si $x \geq 0$, entonces:

$$\frac{x - x}{x - 4} < 1$$

$$\frac{0}{x - 4} < 1, \quad x \neq 4$$

$$0 < 1 \quad \begin{array}{l} \text{se cumple para todo} \\ x \geq 0, \text{ excepto } x = 4 \end{array}$$

Luego, el conjunto solución será:

$$A = [0, \infty) - \{4\}$$

B

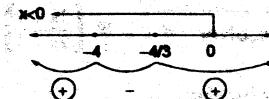
si $x < 0$, entonces:

$$\frac{x - (-x)}{-x - 4} < 1$$

$$\frac{2x}{-x - 4} - 1 < 0$$

$$\frac{2x + x + 4}{-x - 4} < 0$$

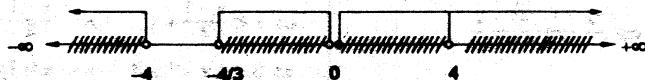
$$\frac{3x + 4}{x + 4} > 0$$



Luego el conjunto solución será:

$$B = x \in (-\infty, -4) \cup (-4/3, 0)$$

Conclusión: Unimos A con B, obtenemos $B \cup A = (-\infty, -4) \cup (-4/3, \infty)$



PROBLEMA 4 Resolver: $[x^2 + 2x - 4] \leq 4$

Solución:

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 \leq 4 + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x \leq 5 + 4$$

Completar cuadrados:

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \leq 9 + 1$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 \leq 10$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{10} \leq x + 1 \leq \sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow -1 - \sqrt{10} \leq x \leq -1 + \sqrt{10}$$

El conjunto solución será:

$$\Leftrightarrow x \in \langle -1 - \sqrt{10}, -1 + \sqrt{10} \rangle$$

PROBLEMA 5

Resolver : $\left[\frac{x}{|x|-1} \right] \leq 2$

Solución : $\Leftrightarrow \frac{x}{|x|-1} < 2+1$

Ahora definimos el valor absoluto $|x|$, y obtenemos la unión de dos inecuaciones con sus respectivas restricciones.

(A)

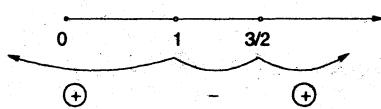
$$x \geq 0 \wedge \frac{x}{x-1} < 3$$

$$\frac{x}{x-1} - 3 < 0$$

$$\frac{x-3x+3}{x-1} < 0$$

$$\frac{-2x+3}{x-1} < 0$$

$$x \geq 0 \wedge \frac{2x-3}{x-1} > 0$$



El conjunto solución será :

$$A = x \in [0, 1) \cup (3/2, \infty)$$

Conclusión :

$$A \cup B = B \cup A = x \in (-\infty, -1) \cup (-3/4, 1) \cup (3/2, \infty)$$

PROBLEMA 6

$$[x^2 - 2|x-1|] \leq 3$$

Solución :

$$\Leftrightarrow x^2 - 2|x-1| < 3 + 1$$

Ahora definimos el valor absoluto $|x-1|$ y obtenemos la unión de dos inecuaciones $A \cup B$.

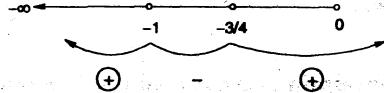
(B)

$$x < 0 \wedge \frac{x}{-x-1} < 3$$

$$\frac{x}{-x-1} - 3 < 0$$

$$\frac{x+3x+3}{-x-1} < 0$$

$$x < 0 \wedge \frac{4x+3}{x+1} > 0$$



El conjunto solución será :

$$B = x \in (-\infty, -1) \cup (-3/4, 0)$$

Veamos:

(A)

$$x-1 \geq 0 \wedge x^2 - 2(x-1) < 4$$

$$x \geq 1 \wedge x^2 - 2x + 2 < 4$$

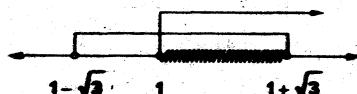
$$\wedge x^2 - 2x < 2$$

$$x^2 - 2x + 1 < 2 + 1$$

$$x \geq 1 \wedge (x-1)^2 < 3$$

$$-\sqrt{3} < x-1 < \sqrt{3}$$

$$(x \geq 1) \wedge (-\sqrt{3} < x-1 < \sqrt{3})$$



$$\text{Luego: } A = x \in [1, 1 + \sqrt{3})$$

v

(B)

$$x-1 < 0 \wedge x^2 - 2(-x+1) < 4$$

$$x < 1 \wedge x^2 + 2x - 2 < 4$$

$$\wedge x^2 + 2x < 6$$

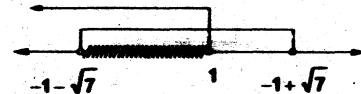
$$x^2 + 2x + 1 < 6 + 1$$

$$x < 1 \wedge (x+1)^2 < 7$$

$$-\sqrt{7} < x+1 < \sqrt{7}$$

$$(x < 1) \wedge (-1 - \sqrt{7} < x < -1 + \sqrt{7})$$

U



$$\text{Luego: } B = x \in (-1 - \sqrt{7}, 1)$$

Conclusión: El conjunto solución será: $A \cup B = B \cup A = x \in (-1 - \sqrt{7}, 1 + \sqrt{3})$

PROBLEMA 7

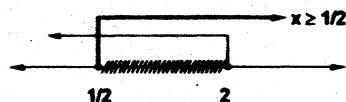
Resolver: $|3x - |2x-1|| \leq 2$ Solución: $\Leftrightarrow 3x - |2x-1| < 2 + 1$ Ahora definimos el valor absoluto $|2x-1|$, obtenemos la unión de dos inecuaciones:

(A)

$$2x-1 \geq 0 \wedge 3x - (2x-1) < 3$$

$$x \geq \frac{1}{2} \wedge 3x - 2x + 1 < 3$$

$$x \geq \frac{1}{2} \wedge x < 2$$



$$\text{Luego: } A = x \in [1/2, 2)$$

v

(B)

$$2x-1 < 0 \wedge 3x - (-2x+1) < 3$$

$$x < \frac{1}{2} \wedge 3x + 2x - 1 < 3$$

$$5x < 4$$

$$x < \frac{1}{2} \wedge x < \frac{4}{5}$$



$$\text{Luego: } x \in (-\infty, 1/2)$$

U

Conclusión : El conjunto solución será $A \cup B = B \cup A = (-\infty, 2)$

TEOREMA 3

$\forall n \in \mathbb{Z}$, se cumple

$$[x] < n \Leftrightarrow x < n$$

Demostración

(\Rightarrow) Por demostrar : si $[x] < n \Rightarrow x < n, n \in \mathbb{Z}$

Veamos :

(1) si $[x] < n$, donde $[x]$ y n son enteros, entonces

$$[x] \leq n - 1, \text{ puesto que} : \dots < n - 2 < n - 1 < n$$

(2) Por el TEOREMA 2, podemos deducir del paso 1, que :

$$\begin{aligned} \text{si } [x] \leq n - 1 &\Rightarrow x < n - 1 + 1 \\ &\Rightarrow x < n \quad (\text{lqqd}) \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Por demostrar : si $x < n \Rightarrow [x] < n$

Veamos :

(3) Por definición de máximo entero, tenemos que :

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

(4) Tomando la primera desigualdad y la hipótesis, deducimos :

$$\begin{aligned} \text{si } ([x] \leq x \wedge x < n) &\Rightarrow [x] < n \\ &\quad (\text{lqqd}) \end{aligned}$$

(5) Por los pasos (2) y (4) hemos probado la equivalencia :

$$[x] < n \Leftrightarrow x < n, \forall n \in \mathbb{Z}$$

APLICACIONES

1) Resolver : $\forall x \in \mathbb{R} : \left[\frac{1}{2x-5} \right] < 1$

Solución :

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2x-5} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2x-5} - 1 < 0$$

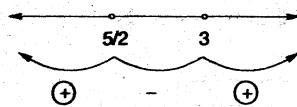
$$\Leftrightarrow \frac{1-2x+5}{2x-5} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x+6}{2x-5} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2(x-3)}{2x-5} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-3)}{2x-5} > 0$$

122



El conjunto solución será :

$$x \in (-\infty, 5/2) \cup (3, \infty)$$

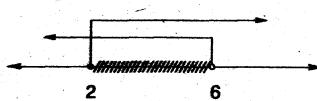
(2) Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : [\sqrt{x-2}] < 2$

Solución :

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2} < 2$$

$$\Leftrightarrow x-2 \geq 0 \wedge x-2 < 4$$

$$\Leftrightarrow x \geq 2 \wedge x < 6$$



Luego, el conjunto solución será :

$$x \in [2, 6)$$

(3) Resolver $\left[x - \frac{2}{x} \right] < 1$

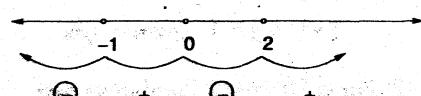
$$\text{Solución : } \Leftrightarrow x - \frac{2}{x} < 1$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{2}{x} - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2 - x}{x} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 2}{x} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1)}{x} < 0$$



$$C_s = x \in (-\infty, -1) \cup (0, 2)$$

(4) Resolver : $\left[\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 4 \right] < 5$

Solución :

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 4} - 4 < 5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2} < 5 + 4$$

$$\Leftrightarrow |x-2| < 9, \text{ pues } \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$$

$$\Leftrightarrow -9 < x-2 < 9$$

$$\Leftrightarrow -7 < x < 11$$

Luego, el conjunto solución es :

$$C_s = x \in (-7, 11)$$

(5) Resolver : $[2|x-1| - x] < 4$

Solución :

$$\Leftrightarrow 2|x-1| - x < 4$$

Ahora defino el valor absoluto y obtengo la unión de dos inecuaciones $A \cup B$.

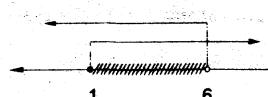
Veamos :

$$\text{A} \quad A$$

$$x - 1 \geq 0 \wedge 2(x - 1) - x < 4$$

$$x \geq 1 \wedge 2x - 2 - x < 4$$

$$x \geq 1 \wedge x < 6$$



$$\text{Luego : } A = x \in [1, 6)$$

$$\text{B}$$

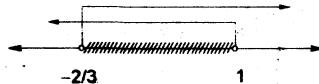
$$x - 1 < 0 \wedge 2(-x + 1) - x < 4$$

$$x < 1 \wedge -2x + 2 - x < 4$$

$$-3x < 2$$

$$3x > -2$$

$$x < 1 \wedge x > -2/3$$



$$\text{Luego : } B = x \in (-2/3, 1)$$

Conclusión :

$$\text{El conjunto solución será : } A \cup B = B \cup A = x \in (-2/3, 6)$$

6 Resolver : $\llbracket x - 1 \rrbracket - 2 < 7$

Solución :

$$\Leftrightarrow \llbracket x - 1 \rrbracket - 2 < 7$$

$$\Leftrightarrow \llbracket x - 1 \rrbracket < 9$$

$$\Leftrightarrow x - 1 < 9 \Leftrightarrow x < 10$$

$$\text{El conjunto solución será : } C_s = x \in (-\infty, 10)$$

TEOREMA $\forall x, y \in \mathbb{R}, \text{ si } (x \leq y) \Rightarrow (\llbracket x \rrbracket \leq \llbracket y \rrbracket)$

Demostración :

(1) Por definición de máximo entero tenemos que :

$$\llbracket x \rrbracket \leq x < \llbracket x \rrbracket + 1, \text{ donde } \llbracket x \rrbracket \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$$

$$(2) \Leftrightarrow \llbracket x \rrbracket \leq x \wedge x < \llbracket x \rrbracket + 1$$

$$\Leftrightarrow \llbracket x \rrbracket \leq x \wedge -\llbracket x \rrbracket < 1 - x$$

$$\Leftrightarrow \llbracket x \rrbracket \leq x \wedge \llbracket x \rrbracket > x - 1$$

$$(3) \Leftrightarrow x - 1 < \llbracket x \rrbracket \leq x$$

(4) Por hipótesis , tenemos que $x \leq y$

(5) Luego , por (3) y (4) deducimos por transitividad que :

$$\text{si } [x] \leq x \leq y \Rightarrow [x] \leq y$$

(6) Nuevamente por definición de máximo entero , tenemos ;

$$[y] \leq y < [y] + 1 , \quad [y] \in \mathbb{Z}$$

(7) Por (5) y (6) y la propiedad de transitividad obtenemos :

$$\Leftrightarrow [x] \leq y < [y] + 1$$

$$\Rightarrow [x] < [y] + 1$$

(8) Pero $[y] \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] \leq [y] + 1 - 1$

$$\Rightarrow [x] \leq [y]$$

(lqqd)

TEOREMA 5

$$\forall n \in \mathbb{Z} \wedge x \in \mathbb{R} , \text{ si } (n > x) \Rightarrow (n \geq [x] + 1 > [x])$$

DEMOSTRACIÓN :

Para probar que $[x] < [x] + 1 \leq n , \quad x \in \mathbb{R} , \quad n \in \mathbb{Z}$

Sabiendo que $x < n$, debo probar por separado dos proposiciones :

$$\text{a) } [x] < [x] + 1 \quad \text{y} \quad \text{b) } [x] + 1 \leq n$$

Veamos :

(1) Por definición de máximo entero , tenemos que :

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

(2) Teniendo en cuenta los extremos , por transitividad tenemos :

$$\text{(a) } [x] < [x] + 1 , \text{ pues } [x] \in \mathbb{Z}$$

Así queda probada la parte (a)

(3) Por otro lado , según el paso (3) del TEOREMA 4 , tenemos :

$$x - 1 < [x] \leq x$$

(4) Por hipótesis , se tiene que $x < n , \quad n \in \mathbb{Z} , \quad x \in \mathbb{R}$

(5) Por transitividad y por los pasos (3) y (4), obtenemos :

$$\begin{aligned} \llbracket x \rrbracket &\leq x < n \\ \Rightarrow \llbracket x \rrbracket &< n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(6) $\Rightarrow \llbracket x \rrbracket \leq n - 1$, puesto que $\llbracket x \rrbracket$ y "n" son enteros.

(7) Sumar 1 a ambos miembros : $\Rightarrow \llbracket x \rrbracket + 1 \leq n$ (b)

(8) Por los pasos (2) y (7), queda demostrado que :

$$\llbracket x \rrbracket < \llbracket x \rrbracket + 1 \leq n$$

TEOREMA 6 Si $\alpha = x - \llbracket x \rrbracket$, entonces $0 \leq \alpha < 1$.

DEMOSTRACIÓN

(1) Partimos de la definición de máximo entero :

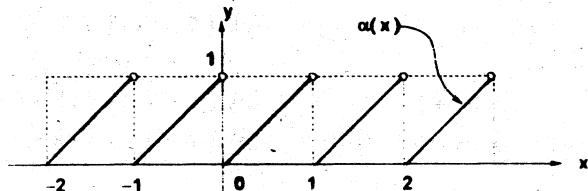
$$\llbracket x \rrbracket \leq x < \llbracket x \rrbracket + 1, \text{ siendo } x \in \mathbb{R} \text{ y } \llbracket x \rrbracket \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} (2) \Leftrightarrow \llbracket x \rrbracket &\leq x \quad \wedge \quad x < \llbracket x \rrbracket + 1 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq x - \llbracket x \rrbracket \quad \wedge \quad x - \llbracket x \rrbracket < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \Leftrightarrow 0 &\leq x - \llbracket x \rrbracket < 1 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \alpha < 1, \text{ pues } x - \llbracket x \rrbracket = \alpha \end{aligned}$$

Considerando la función $\alpha(x) = x - \llbracket x \rrbracket$, $x \in \mathbb{R}$

El gráfico de $\alpha(x)$ son rectas paralelas de la siguiente forma :



TEOREMA 7 Si $x \in \mathbb{R}$, tal que, $x = y + \alpha$, con $0 \leq \alpha < 1$, entonces : $y = \llbracket x \rrbracket$

Demostración :

(1) Por hipótesis, tenemos que :

$$0 \leq \alpha < 1$$

$$(2) \text{ sumo } y : y \leq y + \alpha < y + 1$$

$$(3) \text{ pero } y + \alpha = x \Rightarrow y \leq x < y + 1$$

$$(4) \text{ si } y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \llbracket x \rrbracket = y \\ \text{o lo que es equivalente escribir } y = \llbracket x \rrbracket$$

TEOREMA 8

$\forall x \in \mathbb{R} \wedge \text{ cualquier } n \in \mathbb{Z}, n > 0 \text{ se cumple que}$

$$\left\llbracket \frac{\llbracket x \rrbracket}{n} \right\rrbracket = \left\llbracket \frac{x}{n} \right\rrbracket$$

Demostración :

$$(1) \text{ Partimos de: } \left\llbracket \frac{\llbracket x \rrbracket}{n} \right\rrbracket, n > 0, n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$$

(2) Supongamos que :

$$\left\llbracket \frac{\llbracket x \rrbracket}{n} \right\rrbracket = k \Leftrightarrow k \leq \frac{\llbracket x \rrbracket}{n} < k + 1$$

$$\Leftrightarrow kn \leq \llbracket x \rrbracket < n(k+1), \text{ pues } n > 0, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow kn \leq \llbracket x \rrbracket < nk + n$$

(3) Como $\llbracket x \rrbracket$ es un número entero entre los enteros "kn" y "kn + n", entonces $\llbracket x \rrbracket$ puede tomar los siguientes valores :

$$\llbracket x \rrbracket = nk \Leftrightarrow nk \leq x < nk + 1$$

$$\circ \quad \llbracket x \rrbracket = nk + 1 \Leftrightarrow nk + 1 \leq x < nk + 2$$

$$\circ \quad \llbracket x \rrbracket = nk + 2 \Leftrightarrow nk + 2 \leq x < nk + 3$$

$$\circ \quad \llbracket x \rrbracket = nk + (n - 2) \Leftrightarrow nk + n - 2 \leq x < nk + n - 1$$

$$\circ \quad \llbracket x \rrbracket = nk + (n - 1) \Leftrightarrow nk + n - 1 \leq x < nk + n$$

(4) Uniendo estos intervalos :

$$nk \leq x < nk + n$$

$$\text{como } n > 0 \Leftrightarrow k \leq \frac{x}{n} < k + 1$$

$$\Leftrightarrow \left\llbracket \frac{x}{n} \right\rrbracket = k$$

(5) Comparando los resultados de (2) y (4), hemos probado que :

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = k \quad (\text{lqqd})$$

TEOREMA 9 $\forall x \in \mathbb{R}$, se cumple : $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$

Demostración :

(1) Por definición de máximo entero, se cumple :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1, \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} (2) \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor &\leq x & \wedge & x < \lfloor x \rfloor + 1 \\ \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor &\leq x & \wedge & x - 1 < \lfloor x \rfloor \end{aligned}$$

$$(3) \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \quad (\text{lqqd})$$

TEOREMA 10 $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}$

Demostración :

(\Rightarrow) Por demostrarse que si $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

Veamos :

$$\begin{aligned} (1) \text{ Supongamos que } \lfloor x+n \rfloor &= k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow k \leq x+n &< k+1 \\ \text{sumar } -n \quad \Leftrightarrow \quad k-n \leq x &< k+1-n \\ \Leftrightarrow k-n \leq x &< k-n+1 \\ \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor &= k-n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$(2) \text{ Sumar } n \quad \Leftrightarrow \quad \lfloor x \rfloor + n = k$$

(3) Comparando (1) con (2), hemos probado que :

$$\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n = k$$

(lqqd)

MISCELÁNEA

1 Resolver $\llbracket (x-1) \llbracket x \rrbracket \rrbracket = x$

Solución :

(1) Necesariamente $x \in \mathbb{Z}$, para que se cumpla que :

$$\llbracket (x-1) \llbracket x \rrbracket \rrbracket = x \Leftrightarrow x \leq (x-1) \llbracket x \rrbracket < x+1 \quad (2^*)$$

(2) Como $x \in \mathbb{Z}$, entonces $\llbracket x \rrbracket = x$, por tanto en (2*) tendremos :

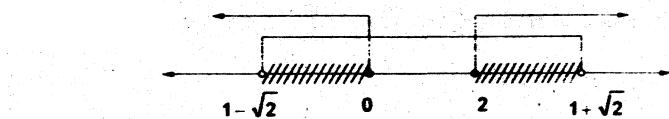
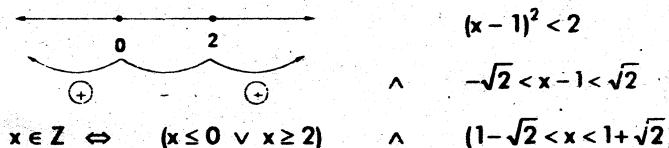
$$x \leq (x-1)x < x+1$$

$$\Leftrightarrow x \leq (x-1)x \quad \wedge \quad (x-1)x < x+1$$

$$\Leftrightarrow x \leq x^2 - x \quad \wedge \quad x^2 - x < x+1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 2x \quad \wedge \quad x^2 - 2x < 1$$

$$x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 0 \leq x(x-2) \quad \wedge \quad x^2 - 2x + 1 < 1 + 1$$



Luego el conjunto solución será :

$$C_S = \{x \in \mathbb{Z} / 1-\sqrt{2} < x \leq 0 \quad \text{o} \quad 2 \leq x < 1+\sqrt{2}\} = \{0, 2\}$$

2 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : \llbracket x+n \rrbracket < x+n$, $n \in \mathbb{Z}$

Solución :

(1) Tenemos que : $\llbracket x+n \rrbracket = \llbracket x \rrbracket + n$ (Por el TEOREMA 10)

(2) Luego, la inecuación $\llbracket x+n \rrbracket < x+n$

se transforma en : $\llbracket x \rrbracket + n < x+n$

$$\Leftrightarrow \llbracket x \rrbracket < x, \quad x \in \mathbb{R}$$

(3) Por definición de máximo entero , se cumple que

$$[x] \leq x < [x] + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(4) Luego la solución de la inecuación : $[x] \leq x$ es todo \mathbb{R}

(5) Pero , la solución de la ecuación $[x] = x$ es todo los enteros

(6) Por tanto la solución de la inecuación es :

$$\begin{aligned} [x] < x &\Leftrightarrow [x] \leq x \wedge [x] \neq x \\ &\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

3 Resolver $0 \leq \sqrt{x-[x]} < 1$

Solución :

(1) Elevar al cuadrado : $0 \leq x - [x] < 1$

$$(2) \Leftrightarrow [x] \leq x < [x] + 1$$

(3) Esta desigualdad se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$, según el TEOREMA 6

(4) Por tanto , el conjunto solución será : $C_3 = x \in \mathbb{R}$

4 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : [\sqrt{3-\sqrt{3-x}}] < 3$

Solución :

(1) Aplicando , el TEOREMA 3 , obtenemos.

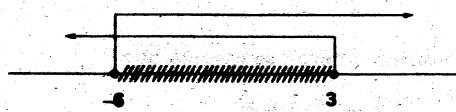
$$[\sqrt{3-\sqrt{3-x}}] < 3 \Leftrightarrow \sqrt{3-\sqrt{3-x}} < 3$$

$$(2) \Leftrightarrow (3-\sqrt{3-x} \geq 0 \wedge 3-x \geq 0) \wedge (3-\sqrt{3-x} < 9)$$

$$(3) \Leftrightarrow (3 \geq \sqrt{3-x} \wedge 3 \geq x) \wedge (-6 < \sqrt{3-x})$$

$$(4) \Leftrightarrow (9 \geq 3-x \wedge x \leq 3) \wedge (3-x \geq 0)$$

$$(5) \Leftrightarrow (x \geq -6 \wedge x \leq 3) \wedge (x \leq 3)$$



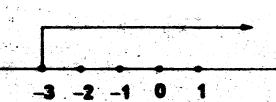
(6) Luego, el conjunto solución, será $x \in [-6, 3]$

[5] Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : [x^2 - 3x] > -3$

Solución :

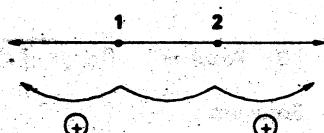
(1) Como $[x^2 - 3x]$ es un entero mayor -3 , luego

$$\begin{aligned}[x^2 - 3x] > -3 &\Leftrightarrow [x^2 - 3x] \geq -3 + 1 \\ &\Leftrightarrow [x^2 - 3x] \geq -2\end{aligned}$$



(2) Aplicando el TEOREMA 1 $\Leftrightarrow x^2 - 3x \geq -2$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)(x-1) \geq 0\end{aligned}$$



(3) El conjunto solución será : $x \in (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$

[6] Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : [3x-2] = x-2$

Solución : Sólo definimos el máximo entero :

$$\begin{aligned}x-2 = n \in \mathbb{Z} &\wedge (x-2 \leq 3x-2 < x-2+1) \\ x = n+2 &\wedge (x-2 \leq 3x-2 \wedge 3x-2 < x-1) \\ &\quad (0 \leq 2x \wedge 2x < 1) \\ &\quad (0 \leq x \wedge x < \frac{1}{2}) \\ x = n+2 &\wedge (0 \leq x < \frac{1}{2}) \\ &\wedge (0 \leq n+2 < \frac{1}{2}), n \in \mathbb{Z} \\ &\quad (-2 \leq n < \frac{1}{2}-2) \\ x = n+2 &\wedge (-2 \leq n < -\frac{3}{2}) \\ x = n+2 &\wedge n = -2\end{aligned}$$

Como : $x = n+2 \wedge n = -2$

entonces $x = -2+2 \Rightarrow \boxed{x=0}$

7 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : ||x^2 - 4| - x| = x$

Solución : Aplicar el TEOREMA : $|a| = b \Leftrightarrow b \geq 0 \wedge \{a = b \vee a = -b\}$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \wedge |x^2 - 4| - x = x \vee |x^2 - 4| - x = -x$$

$$\Leftrightarrow " \wedge |x^2 - 4| = 2x \vee |x^2 - 4| = 0$$

$$\wedge [2x \geq 0 \wedge (x^2 - 4 = 2x \vee x^2 - 4 = -2x)] \vee [x^2 - 4 = 0]$$

$$\wedge [x \geq 0 \wedge (x^2 - 2x = 4 \vee x^2 + 2x = 4)] \vee [x = \pm 2]$$

$$[x \geq 0 \wedge (x^2 - 2x + 1 = 5 \vee x^2 + 2x + 1 = 5)] \vee ["]$$

$$x \geq 0 \wedge ((x - 1)^2 = 5 \vee (x + 1)^2 = 5) \vee "$$

$$x \geq 0 \wedge (x - 1 = \pm \sqrt{5} \vee x + 1 = \pm \sqrt{5}) \vee "$$

$$\Leftrightarrow [x \geq 0 \wedge (x = 1 \pm \sqrt{5} \vee x = -1 \pm \sqrt{5})] \vee "$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \wedge \{1 + \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5}\} \cup \{2, -2\}$$

Conclusión : El conjunto solución será : $C_S = \{1 + \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5}, 2\}$

8 Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{\frac{x^2 - 4}{1 - x^2}} + 5 > 0$

Solución : En este caso, ésta desigualdad se resuelve analizando los términos de la suma.

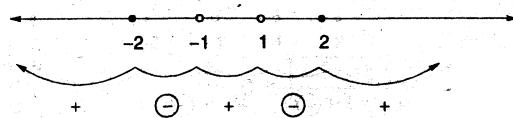
Como el número 5 es positivo, entonces necesariamente la raíz cuadrada debe ser positiva o cero para que la suma :

$$\sqrt{\frac{x^2 - 4}{1 - x^2}} + 5 \text{ sea positivo}$$

Por tanto, sólo hacemos :

$$\frac{x^2 - 4}{1 - x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 1)(x + 1)} \leq 0$$



\Leftrightarrow El conjunto solución será : $S_S = x \in [-2, -1] \cup (1, 2]$

9) Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{\frac{x-2}{4-x}} < 2$

Solución : Hacer el subradical mayor o igual a cero y luego elevar al cuadrado ambos miembros.

Así :

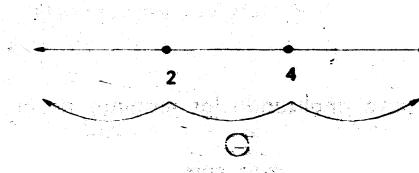
$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{4-x} \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{x-2}{4-x} < 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x-4} \leq 0 \quad \wedge \quad \frac{x-2}{4-x} - 4 < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \wedge \quad \frac{x-2-16+4x}{4-x} < 0$$

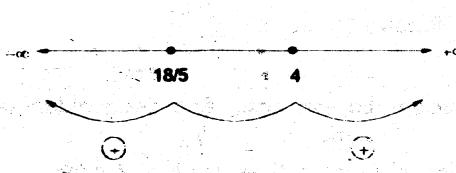
$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x-4} \leq 0 \quad \wedge \quad \frac{5x-18}{4-x} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x-4} \leq 0 \quad \wedge \quad \frac{5x-18}{x-4} > 0$$



$$A = x \in [2, 4]$$

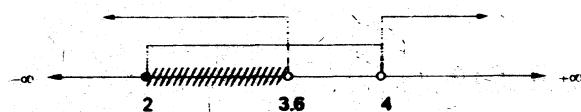
es el universo de la solución



$$B = x \in (-\infty, 18/5] \cup (4, \infty)$$

$$18/5 \approx 3.6$$

Ahora, intersectar A con B :



Por tanto la solución será : $C_S = x \in [2, 3.6]$

10) Resolver $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{\sqrt{x-[x]}}{(x-1)(x+2)} \geq 0$

Solución :

(1) En primer lugar , aplicamos la regla de los signos :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\sqrt{x - [x]}] \geq 0 \\ (x - 1)(x + 2) > 0 \end{array} \right\} \vee \left\{ \begin{array}{l} [\sqrt{x - [x]}] \leq 0 \\ (x - 1)(x + 2) < 0 \end{array} \right\}$$

$$[\sqrt{x - [x]}] \geq 0 \quad \wedge \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ -2 \quad 1 \end{array} \quad \vee$$

(+) (+) (+) (+) (+)

POR TEO. 1

$$\sqrt{x - [x]} < 1 \quad \wedge \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ -2 \quad 1 \end{array} \quad \vee$$

(+) (+) (+) (+) (+)

POR TEO. 2

$$\{ \textcircled{A} \quad \wedge \quad B = (-\infty, -2) \cup (1, \infty) \} \vee \{ \textcircled{C} \quad \wedge \quad D = (-2, 1) \}$$

$$(2) \text{ Resolver } \textcircled{A} : \quad [\sqrt{x - [x]}] \geq 0 \Leftrightarrow x - [x] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq [x]$$

$$\Leftrightarrow [x] \leq x$$

Se cumple $\forall x \in \mathbb{R}$
(Ver la definición de máximo entero)

Luego : $A = \mathbb{R}$

$$(3) \text{ Resolver } \textcircled{C} : \quad \sqrt{x - [x]} < 1$$

En este caso ; hacer la subradical mayor o igual a cero y elevar al cuadrado..

$$\Leftrightarrow x - [x] \geq 0 \quad \wedge \quad x - [x] < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x - [x] < 1$$

esta inecuación se cumple $\forall x \in \mathbb{R}$
(Ver el Teo. 6)

Por tanto : $C = x \in \mathbb{R}$

(4) Ahora intersectamos :

$$A \cap B = \mathbb{R} \cap ((-\infty, -2) \cup (1, \infty)) = (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$$

$$C \cap D = \mathbb{R} \cap (-2, 1) = (-2, 1)$$

(5) El conjunto solución será :

$$(A \cap B) \cup (C \cap D) = \mathbb{R} - \{1, -2\}$$



**PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN CON RESTRICCIONES Y
APLICANDO PROPIEDADES TALES COMO :**

P_{1.} $[x]$ es un entero

P_{2.} $[x] \leq x$ es verdadero $\forall x \in \mathbb{R}$

P_{3.} $x < [x] + 1$ es verdadero $\forall x \in \mathbb{R}$

Si $n \in \mathbb{Z}$, se cumplen :

P_{4.} $[x] = n \Leftrightarrow n \leq x \leq n + 1$

P_{5.} $[x] \geq n \Leftrightarrow x \geq n$

P_{6.} $[x] > n \Leftrightarrow x \geq n + 1$

P_{7.} $[x] \leq n \Leftrightarrow x < n + 1$

P_{8.} $[x] < n \Leftrightarrow x < n$

P_{9.} $[\mu(x) + n] = [\mu(x)] + n$

P_{10.} $|x| \geq 0$ es verdadero $\forall x \in \mathbb{R}$.

Problemas

① Resolver :

$$[4x - 4] > [x + 5]$$

$$\Rightarrow [4x] - 4 > [x] + 5$$

$$\Rightarrow [4x] > \underbrace{[x] + 9}_{\text{ENTERO}}$$

Aplicar P_{6.} $4x \geq [x] + 10$

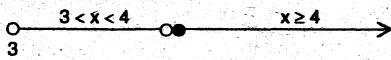
$$4x - 9 \geq [x] + 1 \quad \text{.....(E)}$$

Por P_{3.} $[x] + 1 > x$ Entonces

$$4x - 9 > x \quad \text{Transitividad}$$

$$x > 3 \quad \text{Es la restricción} \\ (\text{UNIVERSO DE} \\ \text{LA SOLUCIÓN})$$

Analizar en $x > 3$



a) Si $3 < x < 4 \quad \text{.....A}_1$

\Downarrow

$$[x] = 3$$

y la inecuación E se reduce :

$$4x - 9 \geq 3 + 1$$

$$x \geq \frac{13}{4} \quad \text{.....A}_2$$

El conjunto solución para a) es la intersección de A₁ con A₂ :

$$A = A_1 \cap A_2 = \left[\frac{13}{4}, 4 \right)$$

b) Si $x \geq 4$, la inecuación se cumple,
 $\forall x \in \mathbb{R}$, en particular se cumple para :
 $x \geq 4 \quad \text{.....B}$

Probaremos esta afirmación :

Se sabe que : $x \geq [x]$ es verdadero $\forall x \in \mathbb{R}$,
en particular es verdadero para $x \geq 4$.

Además : $3x \geq 10$, si $x \geq 4$

Sumar las desigualdades :

$$x \geq [x]$$

$$3x \geq 10$$

$$4x \geq [x] + 10 \quad \text{es verdadero } \forall x \geq 4$$

Por tanto, la solución para la parte b) es
 $B = [4, \infty)$

Conclusión :

$$C_S = A \cup B = \left[\frac{13}{4}, +\infty \right)$$

② Resolver : $\left[\frac{x-3}{[x]} \right] \geq 4$

Aplicar P₅. $\frac{x-3}{[x]} \geq 4 \dots \text{E}$

Ahora, analizar el denominador :

$[x] \neq 0 \Leftrightarrow x \notin [0, 1)$

$$\Leftrightarrow x \in \underbrace{(-\infty, 0)}_{A} \cup \underbrace{[1, \infty)}_{B}$$

Analizar en cada intervalo :

A) Si $x < 0 \Rightarrow [x] < 0$
 A_1

y la inecuación E se convierte en :

$$x - 3 \leq 4[x] \dots F$$

Restringir la solución de F, acotando :

Por P₂ : $[x] \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$

Por 4 : $4[x] \leq 4x \dots G$

Por transitividad entre F y G :

$$\begin{aligned} x - 3 &\leq 4x \\ x &\geq -1 \dots A_2 \end{aligned}$$

Intersectando A₁ con A₂ obtenemos :

$$A_3 = [-1, 0)$$

Con esta restricción se cumple $[x] = -1$ y la inecuación E es :

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{1} &\geq 4 \\ -x+3 &\geq 4 \end{aligned}$$

$$x \leq -1 \dots A_4$$

La solución es :

$$A = A_3 \cap A_4 = \{-1\}$$

b) Si $x \geq 1 \Rightarrow [x] \geq 1$
 B_1

Entonces el denominador de E es positivo y por eso se puede hacer :

$$\begin{aligned} x - 3 &\geq 4[x] \dots P \\ \text{ES FALSO } \forall x \geq 1 \\ \text{ES DECIR EL CONJUNTO} \\ \text{SOLUCIÓN DE P ES } \emptyset \end{aligned}$$

Probemos esta afirmación :

Se cumple : $[x] + 1 > x, \forall x \in \mathbb{R}$
 $[x] > x - 1$

Por 4 : $4[x] > 4(x - 1) \dots Q$

Por transitividad en P y Q :

$$\begin{aligned} x - 3 &> 4(x - 1) \\ x &< 1/3 \dots B_2 \end{aligned}$$

Intersectar B₁ con B₂ :

$$B = B_1 \cap B_2 = \emptyset$$

Probemos esta afirmación :

Se cumple : $[x] + 1 > x, \forall x \in \mathbb{R}$
 $[x] > x - 1$

Por 4 : $4[x] > 4(x - 1) \dots Q$

Por transitividad en P y Q :

$$\begin{aligned} x - 3 &> 4(x - 1) \\ x &< 1/3 \dots B_2 \end{aligned}$$

Intersectar B₁ con B₂ :

$$B = B_1 \cap B_2 = \emptyset$$

Conclusión : C_S = A ∪ B
 $= \{-1\}$

3 Resolver :

$$\left[\frac{x + |x - 3|}{[x + 3] \cdot 2} \right] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+|x+3|}{[x+3]-2} < 1 \quad \dots \dots \dots P_7$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+|x-3|}{[x]+3-2} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+|x-3|}{[x]+1} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+|x-3|-|x|-1}{[x]+1} < 0 \quad \dots \dots \dots E$$

El denominador no puede ser cero. Es decir:

$$[x]+1 \neq 0$$

$$\Rightarrow [x] \neq -1$$

$$\Rightarrow x \notin [-1, 0)$$

$$\Rightarrow x \in \underbrace{(-\infty, 1)}_{A} \cup \underbrace{[0, +\infty)}_{B}$$

a) Analizar en A

$$\begin{aligned} \text{Si } x < -1 &\Rightarrow [x] < -1 \\ A_1 &\Rightarrow [x] + 1 < 0 \end{aligned}$$

entonces el numerador en E es :

$$x + |x - 3| - |x| - 1 > 0$$

$$x - (x - 3) - |x| - 1 > 0$$

$$-|x| + 2 > 0$$

$$|x| < 2$$

$$x < 2$$

$$A_2$$

Intersección de A_1 con A_2 : $A = (-\infty, -1)$

b) Analizar en B

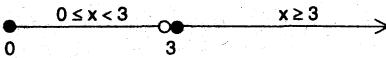
$$\begin{aligned} \text{Si } x \geq 0 &\Rightarrow [x] \geq 0 \\ &\Leftrightarrow [x] + 1 \geq 1 \end{aligned}$$

o sea el denominador de E es positivo, por tanto el numerador en E es :

$$x + |x - 3| - |x| - 1 < 0 \quad \dots \dots \dots F$$

↑

PUNTO CRÍTICO ES $x=3$



CASOS :

b) Si $\underbrace{0 \leq x < 3}_{M}$, la inecuación F, es :

$$x - x + 3 - |x| - 1 < 0$$

$$|x| > 2$$

$$\boxed{x \geq 3}$$

N

Intersección M con N obtenemos : $B_1 = \emptyset$

b) Si $\underbrace{x \geq 3}_{P}$, la inecuación F es :

$$x + x - 3 - |x| - 1 < 0$$

$$2x - 4 < |x| \quad \dots \dots \dots G$$

Ahora debemos acotar aprovechando la propiedad P_2 .

Por P_2 , es verdadera la proposición :

$$|x| \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

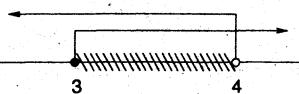
En particular es verdadero para $x \geq 3$, entonces por transitividad en G obtenemos:

$$2x - 4 < x$$

$$\boxed{x < 4}$$

Q

Intersección P y Q :



$$R = P \cap Q = [3, 4)$$

$$\text{Si : } x \in [3, 4) \Rightarrow |x| = 3$$

y la inecuación G es :

$$2x - 4 < 3 \Rightarrow x < \frac{7}{3} \quad \dots \dots \dots S$$

$$\text{Intersección R con S : } B_2 = \left[3, \frac{7}{2} \right)$$

Luego $B = B_1 \cup B_2$

$$= \left[3, \frac{7}{2} \right)$$

Conclusión :

$$C_S = A \cup B$$

$$= (-\infty, -1) \cup \left[3, \frac{7}{2} \right)$$

(4) Resolver :

$$| |x - 2| - [x] + 1 | < x - 1$$

Solución :

$$\text{Porque } [x - 1] = [x] - 1$$

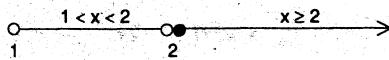
la inecuación es :

$$E : | |x - 2| - [x] + 1 | < x - 1$$

Necesariamente debe ser : $x - 1 > 0$, es decir el universo correspondiente a la inecuación E es :

$$U : x > 1$$

Como el punto crítico de $|x - 2|$ es $x = 2$, entonces observando a la recta universo tendremos :



Ahora, analicemos :

$$a) \text{ Si } \underbrace{1 < x < 2}_{A_1} \Rightarrow [x] = 1$$

y la inecuación E es :

$$| -x + 2 - 1 + 1 | < x - 1$$

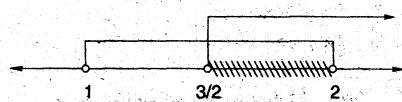
$$| -x + 2 | < x - 1$$

$$| x - 2 | < x - 1$$

$$-x + 2 < x - 1$$

$$\underbrace{x > \frac{3}{2}}_{A_2}$$

Intersección A_1 con A_2 :



$$A = \left(\frac{3}{2}, 2 \right)$$

b) Si $\underbrace{x \geq 2}_{B_1}$ la inecuación E es :

$$| x - 2 - [x] + 1 | < x - 1$$

$$| x - ([x] + 1) | < x - 1$$

$$\text{Pero : } x < [x] + 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x - ([x] + 1) < 0$$

El valor absoluto es :

$$-x + [x] + 1 < x - 1$$

$$[x] < 2x - 2 \quad \text{F}$$

Según B_1 : $x \geq 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ b_1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x > 2 \\ b_2 \end{cases}$$

b₁) Por b_1 la inecuación F es :

$2 < 2$ que es FALSO luego, el conjunto solución es :

$$B_1 = \emptyset$$

b₂) Por b_2 : Si $x > 2$ analizar la inecuación

$$F : [x] + 2 \leq 2x$$

$$\text{Por } P_2 : [x] \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Por } b_2 : \frac{2 < x}{[x] + 2 < 2x}$$

$$\text{Sumar } [x] + 2 < 2x$$

Es decir la inecuación F se cumple para $x > 2$ y por tanto, la solución, es $B_2 = (2, \infty)$

Por tanto la solución respecto a b) es :

$$\begin{aligned} B &= B_1 \cup B_2 \\ &= \langle 2, +\infty \rangle \end{aligned}$$

Conclusión : El conjunto solución es :

$$S = A \cup B$$

$$= \left(\frac{3}{2}, \infty \right) - \{2\}$$

5) Resolver :

$$(x-4)^4 \left| \left[\frac{|x|}{x} \right] - 1 \right| \leq 0$$

Solución : No puede ser negativo, pero si puede ser cero.

$$x-2=0 \quad \vee \quad \left[\frac{|x|}{x} \right] - 1 = 0$$

$$x=2 \quad \vee \quad \left[\frac{|x|}{x} \right] = 1$$

$$1 \leq \frac{|x|}{x} < 2$$

Resolver E analizando $|x|$:

$$|x| \neq 0 \iff x \in [0, 1)$$

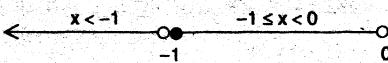
$$\iff x \in \underbrace{\langle -\infty, 0 \rangle}_{a)} \cup \underbrace{\langle 1, \infty \rangle}_{b)}$$

a) Si $x < 0$, entonces la inecuación E es :

$$x \geq |x| > 2x$$

$$\iff \underbrace{x \geq |x|}_{\text{la solución es } R = A_1} \wedge \underbrace{2x < |x|}_{A_2}$$

Analizar A_2 dentro de $x < 0$



a₂) Si $-1 \leq x < 0 \Rightarrow |x| = -1$ y la inecuación A₂ es :

$$2x < -1$$

$$\boxed{x < -\frac{1}{2}}$$

N

Intersección : M con N :

$$A'_2 = M \cap N = \left[-1, -\frac{1}{2} \right)$$

c₂) Si $x < -1$ aplicar propiedades en A₂ :

$$\text{Se cumple : } x < |x| + 1$$

$$\text{Como : } x < -1$$

$$\text{Sumar : } 2x < |x|$$

Lo cual es verdadero para $x < -1$, entonces la solución es :

$$A''_2 = (-\infty, -1)$$

Ahora, unimos A'₁ con A''₂ y obtenemos :

$$A = \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right)$$

b) Si $x \geq 1$, la inecuación E se convierte en:

$$x \leq |x| < 2x$$

$$\iff \underbrace{x \leq |x|}_{B_1} \wedge \underbrace{|x| < 2x}_{B_2}$$

Resolver B₁

$$x = |x| \quad \vee \quad x < |x|$$

↑

LA SOLUCIÓN ES
LOS ENTEROS = Z

NO TIENE
SOLUCIÓN ES DECÍ
ES Ø

$$Z \cup \emptyset = Z$$

Es decir $B_1 = Z$

Resolver B₂

Por P₂ se cumple : $\|x\| < x$

Para $x \geq 1$ cumple : $x \leq 2x$

Por transitividad : $\|x\| < 2x$

se cumple $\forall x \geq 1$. Por tanto la solución es :

$$B_2 = [1, \infty)$$

La solución de b) es :

$$\begin{aligned} B &= B_1 \cap B_2 \\ &= \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

Conclusión :

$$C_S = A \cup B = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \mathbb{Z}^+$$

⑥ Resolver $\frac{3 - |x|}{|3 + x|} \leq \frac{2}{|x| - 2}$

⑦

$$\text{Si } A = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{3}{x} \notin \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right) \right.$$

$$\text{si } |x - 2| > \frac{4}{|x - 2|} \quad \left. \right\}$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} / \underbrace{\frac{|x - 1|}{|-x + 2|} \leq 0}_{P} \quad \text{si y solo} \right.$$

$$\underbrace{\|x\|^2 < 2}_{q} \quad \left. \right\}$$

Hallar A ∩ B.

Solución :

El conjunto A se puede expresar como :

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} / \underbrace{\frac{3}{x} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]}_{q} \quad \text{si } \underbrace{|x - 2| > \frac{4}{|x - 2|}}_{P} \right\}$$

El conjunto A está definido por la tautología :

$$P \Rightarrow q \equiv \neg P \vee q.$$

1º Tenemos p : $|x - 2| > \frac{4}{|x + 2|}$

$$\neg P : \quad |x - 2| \leq \frac{4}{|x + 2|}$$

Si $x \neq -2$ entonces

$$|x - 2| |x + 2| \leq 4$$

$$|x^2 - 4| \leq 4$$

$$-4 \leq x^2 - 4 \leq 4$$

$$0 \leq x^2 \leq 8$$

$$x^2 \geq 0 \quad \wedge \quad x^2 \leq 8$$

$$\mathbb{R} \quad \wedge \quad -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$$

$$[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$$

Entonces la solución de $\neg P$ es :

$$\neg P = [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}] - \{-2\}$$

2º Resolver q :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{3}{x} < \frac{5}{2}$$

$$2 \geq \frac{x}{3} > \frac{2}{5}$$

$$6 \geq x > \frac{6}{5}$$

Conclusión :

$$A = \neg P \vee q$$

$$= ([-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}] - \{-2\}) \cup \left(\frac{6}{5}, 6\right]$$

$$= [-2\sqrt{2}, 6] - \{-2\}$$

Resolver el conjunto B.

$$P \Leftrightarrow q \equiv \neg(P \vee q) \vee (P \wedge q)$$

Para esto resolver p y q

Solución de p

$$\frac{|x - 1|}{|-x + 2|} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow |x-1|=0 \vee \frac{|x-1|}{[-x]+2} < 0$$

$$x=1 \vee [-x]+2 < 0$$

$$[-x] < -2$$

$$-x < -2$$

$$x = 1 \vee x > 2$$

$$P = \{1\} \cup (2, \infty)$$

Resolver q :

$$|x|^2 < 9$$

$$-3 < |x| < 3$$

$$|x| > -3 \quad \wedge \quad |x| < 3$$

$$x \geq -2 \quad \wedge \quad x < 3$$



$$\text{Luego : } q = [-2, 3]$$

$$\begin{aligned} \text{Por tanto : } & \sim(p \vee q) \vee (p \wedge q) = \\ & = (-\infty, -2) \cup (2, 3) \end{aligned}$$

8) **Resolver :**

$$|2x + |x-2|| > \sqrt{9-x^2}$$

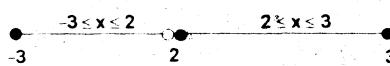
Solución :

El universo de la solución es :

$$9-x^2 \geq 0$$

$$-3 \leq x \leq 3$$

El punto crítico de $|x-2|$ es $x=1$, ver la recta real :



Casos :

a) Si $-3 \leq x < 2$

entonces la

inecuación se convierte en :

$$|2x - x + 2| > \sqrt{9-x^2}$$

$$|x+2| > \sqrt{9-x^2}$$

Elegir al cuadrado :

$$x^2 + 4x + 4 > 9 - x^2$$

$$2x^2 + 4x > 5$$

$$x^2 + 2x > \frac{5}{2}$$

$$(x+1)^2 > \frac{7}{2}$$

$$x+1 > \sqrt{\frac{7}{2}} \quad \vee \quad x+1 < -\sqrt{\frac{7}{2}}$$

$$x > \sqrt{\frac{7}{2}} - 1 \quad \vee \quad x < -1 - \sqrt{\frac{7}{2}}$$

A₂

Intersección A₁ y A₂ :

$$A = A_1 \cap A_2$$

$$= \left[-3, -1 - \sqrt{\frac{7}{2}} \right) \cup \left(-1 + \sqrt{\frac{7}{2}}, 2 \right)$$

b) Si $2 \leq x \leq 3$

la inecuación se

convierte en :

$$|2x + x - 2| > \sqrt{9-x^2}$$

$$|3x - 2| > \sqrt{9-x^2}$$

es verdadero
 $\forall x \in [2, 3]$

Por tanto la solución es :

$$B = [2, 3]$$

Conclusión :

$$C_S = A \cup B$$

$$= \left[-3, -1 - \sqrt{\frac{7}{2}} \right) \cup \left(-1 + \sqrt{\frac{7}{2}}, 3 \right]$$

⑨ Resolver :

$$\frac{|x-2|+x}{x-4} \geq \frac{|x+2|-||x|-3||}{||x|-1|+|x+4|}$$

Solución :

Cuando hay muchos valores absolutos no conviene resolver por el método de los puntos críticos.

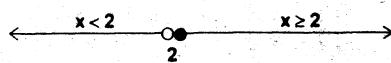
Lo que conviene es aplicar propiedades del valor absoluto.

También porque el segundo miembro es valor absoluto en el numerador y suma de valores absolutos en el denominador, es positivo o cero.

Por Tanto :

$$\frac{|x-2|+x}{x-4} \geq 0$$

El valor crítico $x = 2$ de $|x-2|$ partitiona a la recta real en dos semirectas :



a) Si $\underbrace{x < 2}_{A_1}$, la inecuación se convierte

en :

$$\frac{-x+2+x}{x-4} \geq 0$$

$$\frac{2}{x-4} \geq 0$$

$$x-4 > 0$$

$$\boxed{x > 4}$$

$$A_2$$

Intersección A_1 con A_2 :

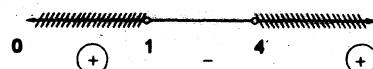
$$A = A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

b) Si $\boxed{x \geq 2}$, la inecuación es :

$$B_1$$

$$\frac{x-2+x}{x-4} \geq 0$$

$$\frac{2x-2}{x-4} \geq 0$$



$$B_2 = (-\infty, 1] \cup (4, \infty)$$

Intersección B_1 con B_2 :

$$B = B_1 \cap B_2 = (4, \infty)$$

Por tanto, la solución de la inecuación estará restringida a la unión :

$$A \cup B = (4, \infty)$$

Ahora, analicemos los valores absolutos del segundo miembro para la restricción.

$$x \in (4, \infty)$$

Al definir los valores absolutos la inecuación se reduce a :

$$\frac{x-2+x}{x-4} \geq \frac{|x+2|-|x-3|}{||x-1|+|x+4|}$$

$$\frac{2x-2}{x-4} \geq \frac{|x+2-(x-3)|}{x-1+x+4}$$

$$\frac{2x-2}{x-4} \geq \frac{5}{2x+3}$$

Para $x > 4$, los denominadores son positivos, por eso podemos escribir el producto en cruz sin alterarse el signo :

