

ECUACIONES INTEGRALES LINEALES

*José Darío Sánchez Hernández
Bogotá –Colombia. Abril- 2008
danojuanos@hotmail.com
danojuanos@tutopia.com
danojuanos@yahoo.com*

Una vez más pongo en el ciberespacio, para compartir con mis amigos cibernautas mis notas de clase, con las cuales creo firmemente que cumplo con mi propósito de llevarles asignaturas que contribuyan en la formación del matemático virtual y con el contenido estoy siendo fiel a mi propósito inicial, de un aprendizaje por medios virtuales.

CONTENIDO

PROLOGO

§1. INTRODUCCIÓN Y PRELIMINARES

- 1.1. Ecuaciones integrales de primera especie.
- 1.2. Ecuación de Abel.
- 1.3. Ecuación integral de segunda especie.
- 1.4. Problema que lleva a ecuaciones integrales.
- 1.5. Reducción de ecuaciones diferenciales a ecuaciones integrales.
- 1.6. Ejercicios.

§2. TEORIA CUALITATIVA PARA LAS ECUACIONES INTEGRALES.

- 2.1. Método de los determinantes de Fredholm.
- 2.2. Núcleos iterados.
- 2.3. Ejercicios.

§3. TEORIA CUANTITATIVA.

ECUACIONES INTEGRALES CON NÚCLEO DEGENERADO.

- 3.1. Ecuaciones de Fredholm.
- 3.2. Ecuaciones de Hammerstein.
- 3.3. Raíces características y funciones propias.
- 3.4. Ejercicios.

§4. TEORIA CUALITATIVA PARA LAS FUNCIONES INTEGRALES.

- 4.1. Conceptos Fundamentales.
- 4.2. Operadores integrales de Fredholm.
- 4.3. Ecuaciones de núcleo simétrico.

§.5. ALTERNATIVA DE FREDHOLM

- 5.1. Caso de las ecuaciones integrales.
- 5.2. Teoremas de Fredholm. Caso de los núcleos degenerados.
- 5.3. Teoremas de Fredholm para ecuaciones de núcleo no degenerado.
- 5.4. Demostración de los Teoremas de Fredholm.
- 5.5. Ejercicios.

BIBLIOGRAFIA.

PRÓLOGO

Al igual que el estudio de la geometría, en nuestro país el estudio de las ecuaciones integrales presenta un gran desinterés dentro de nuestro medio matemático, no obstante su notable aplicación especialmente en el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales.

Alguna vez el Dr. Yu Takeuchi me invitó a estudiar algunos planteamientos sobre el problema de Dirichlet; entonces sentí una sensación que me llevaba a una ampliación sobre la teoría de integración y en especial sobre las ecuaciones integrales y me dije; en los distintos coloquios en los cuales he participado nunca mencionan esta gigantesca rama del análisis funcional, ésta es la razón que me lleva a presentar en un coloquio estas notas de clase, con el ánimo de extender lo que ya había hecho en otros coloquios, relativa a las ecuaciones diferenciales y en la misma dirección divulgativa.

Quiero enfocar estas notas como una herramienta para trabajar en dirección a los operadores de Fredholm y en particular mostrar la famosa Alternativa de Fredholm, tópico del cual tengo algunos resultados generalizados hacia operadores monótonos y de los cuales ya he hecho algunas notas divulgativas en el Boletín de Matemáticas del año 1987.

Estas notas constan de 5 párrafos; el primero está dedicado a la presentación de la teoría, con su motivación histórica; los dos párrafos siguientes los dedico al estudio cuantitativo de las ecuaciones integrales lineales y los dos últimos a la parte cualitativa de la teoría, finalizando con un breve estudio de los operadores integrales, punto de contacto con el análisis espectral.

Para el lenguaje he usado la palabra degenerado en lugar de separable y no degenerado en lugar de inseparable, pues históricamente Fredholm usaba este lenguaje.

§1. INTRODUCCIÓN Y PRELIMINARES.

Dada una función continua a tramos y de orden exponencial $f(x)$, entonces podemos hablar de su transformada de Laplace la cual está dada por

$$L(f) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s)$$

Ahora bien, si conocemos la transformada de Laplace $F(s)$ de una función y deseamos recuperar la función, la hallamos mediante la transformada inversa de Laplace, usando la fórmula de inversión

$$f(x) = \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} e^{sx} F(s) ds .$$

En el caso de transformada de Fourier para la función $f(x)$ está dada por

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{iw(x-v)} dv \right] dw$$

la cual puede escribirse en la forma

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} c(w) e^{iwx} dw$$

donde

$$c(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-i w v} dv.$$

llamada transformada inversa de Fourier de $f(x)$ y nos brinda una manera de recuperar a la función dada.

Estas fórmulas de inversión son exactamente ecuaciones integrales, y como en el álgebra, la resolución de una ecuación es un proceso de inversión. Por otra parte la fórmula integral de Poisson, muy conocida al estudiar el potencial, dada por

$$u(r, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} P_r(t - \theta) u(1, t) dt$$

donde

$$P_r(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-r}{1-2r\cos t+r^2}$$

es una de las ecuaciones integrales más conocidas.

1.1. Ecuaciones integrales de primera especie.

Una ecuación de la forma

$$\int_a^b K(x, t) \phi(t) dt = f(x) \quad (1.1.1)$$

es llamada *Ecuación integral lineal de primera especie*. Las funciones $K(x, t)$, $f(x)$ son conocidas, lo mismo que los límites a y b son números dados. El objeto del problema es la determinación de la función desconocida $\phi(t)$ la cual debe tener por dominio al intervalo cerrado $[a, b]$. La función $K(x, t)$ es universalmente conocida como el *núcleo* de la ecuación integral.

Un caso especial se presenta cuando el límite superior es la variable independiente x y el límite inferior a es cero, en ese caso la integral

$$\int_0^x K(x, t) \phi(t) dt = f(x), \quad f(0) = 0 \quad (1.1.2)$$

es conocida como ecuación *integral de Volterra*.

En el caso de esta ecuación de Volterra se obtienen hechos interesantes suponiendo que $K(x, t)$, $\frac{\partial K(x, t)}{\partial x}$, $f(x)$ y $f'(x)$, son funciones continuas en una región $\Omega = \{(x, t) / 0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq x\}$ y derivando la ecuación de Volterra con respecto a x , se obtiene

$$K(x, x) \phi(x) + \int_0^x \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} \phi(t) dt = f'(x) \quad (1.1.3)$$

Nótese que cualquier solución $\phi(x)$ de la ecuación (1.1.2) es solución de su ecuación derivada (1.1.3) y también se tiene la validez de la recíproca, esto es, cualquier solución $\phi(x)$ continua en $0 \leq x \leq a$ de la ecuación (1.1.3) satisface también a la ecuación de Volterra (1.1.2).

Esta nota nos brinda un método para la determinación de la solución $\phi(x)$ de la ecuación de Volterra (1.1.2), y a modo de ejemplo consideremos la ecuación integral siguiente:

$$\int_0^x e^{x-t} \phi(t) dt = \sin x.$$

Las funciones $f(x) = \sin x$, $K(x, t) = e^{x-t}$ son continuas y derivables, teniéndose las condiciones deseadas.

Derivando ambos miembros con respecto a x , se obtiene

$$e^{x-x}\phi(x) + \int_0^x \frac{\partial e^{x-t}}{\partial x} \phi(t) dt = \cos x$$

de donde

$$\phi(x) + \int_0^x e^{x-t} \phi(t) dt = \cos x$$

Aplicando la transformada de Laplace se tiene

$$L(\phi(x)) + L\left(\int_0^x e^{x-t} \phi(t) dt\right) = L(\cos x)$$

$$L(\phi(x)) + L(e^x)L(\phi(x)) = \frac{s}{1+s^2}$$

$$L(\phi(x)) + \frac{1}{s-1}L(\phi(x)) = \frac{s}{1+s^2}$$

$$L(\phi(x))\left(\frac{s-1+1}{s-1}\right) = \frac{s}{s^2+1} \Rightarrow L(\phi(x)) = \frac{s-1}{s^2+1}$$

$$\phi(x) = L^{-1}\left(\frac{s-1}{s^2+1}\right) = L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \cos x - \sin x$$

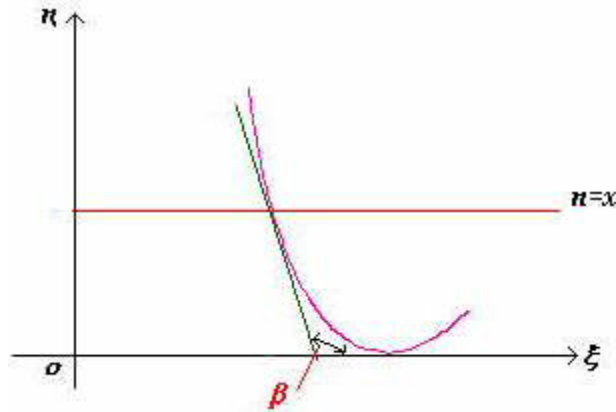
1.2. Ecuación de Abel.

Presentamos el planteamiento histórico de esta ecuación. Una partícula puntual se mueve bajo la acción de la fuerza de la gravedad y describe una curva suave en un plano vertical. Se pide determinar esta curva de modo que la partícula puntual que comienza su movimiento sin velocidad inicial en un punto de la curva cuya ordenada es x , luego alcance el eje ξ al cabo de un tiempo $t = f_1(x)$, donde $f_1(x)$ es una función dada.

La velocidad del punto en movimiento está dada por

$$v = \sqrt{2g(x - \eta)} \sin \beta$$

donde β es el ángulo de inclinación de la tangente respecto al eje ξ .



Entonces tenemos

$$\frac{d\eta}{dt} = -\sqrt{2g(x-\eta)}\sin\beta$$

De aquí que

$$dt = -\frac{d\eta}{\sqrt{2g(x-\eta)}\sin\beta}.$$

Integrando desde 0 hasta x y denotando con

$$\phi(\eta) = \frac{1}{\sin\beta}$$

Se obtiene la ecuación de *Abel*

$$\int_0^x \frac{\phi(\eta) d\eta}{\sqrt{x-\eta}} = -\sqrt{2g} f_1(x).$$

Designando con $f(x) \equiv -\sqrt{2g} f_1(x)$, se obtiene definitivamente

$$\int_0^x \frac{\phi(\eta) d\eta}{\sqrt{x-\eta}} = f(x)$$

donde $\phi(x)$ es la función incógnita, y $f(x)$ es una función dada. Hallando $\phi(\eta)$ se puede escribir la ecuación de la curva deseada.

En efecto,

$$\phi(\eta) = \frac{1}{\sin\beta} \Rightarrow \eta = \phi(\beta)$$

Ahora,

$$d\xi = \frac{d\eta}{\tan \beta} = \frac{\Phi'(\beta) d\beta}{\tan \beta}$$

de donde

$$\xi = \int \frac{\Phi'(\beta) d\beta}{\tan \beta} = \Phi_1(\beta)$$

y por consiguiente, la curva buscada se determina por la ecuación paramétrica

$$\begin{cases} \xi = \Phi_1(\beta) \\ \eta = \Phi(\beta) \end{cases}$$

De este modo, el problema de Abel se reduce a la resolución de una ecuación integral del tipo

$$f(x) = \int_0^x K(x, t) \phi(t) dt.$$

1.3. Ecuaciones integrales de segunda especie.

La ecuación integral

$$\phi(x) = \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt + f(x)$$

donde $f(x)$ y $K(x, t)$ son funciones dadas y $\phi(x)$ es la función que debemos encontrar, las variables x y t recorren aquí un intervalo prefijado $[a, b]$; es llamada *ecuación integral de segunda especie*.

La particularidad de la ecuación $\phi(x) = \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt + f(x)$ es la linealidad, en el sentido de que la función incógnita $\phi(x)$ entra en ella de modo lineal. Sin embargo, muchos problemas conducen a la necesidad de considerar también ecuaciones integrales no lineales como es el caso de la integral

$$\phi(x) = \int_a^b K(x, t) g(\phi(t), t) dt$$

conocida como ecuación de Hammertein, donde como de costumbre K y g son funciones dadas. No obstante ello, nos limitaremos en lo sucesivo a las ecuaciones integrales lineales.

Algunas ecuaciones integrales fueron estudiadas ya al principio del siglo XIX. Por ejemplo, Abel consideró en 1823 la ecuación que lleva ahora su nombre

$$f(x) = \int_0^x \frac{\phi(t)}{(x-t)^\alpha} dt \quad (0 < \alpha < 1, f(0) = 0)$$

donde f es una función dada y ϕ es la función incógnita, la teoría general de ecuaciones integrales lineales fue elaborada sólo en el límite de los siglos XIX y XX en las obras fundamentales de Volterra, de Fredholm y de Hilbert.

Justamente la ecuación

$$\phi(x) = \int_a^b K(x, t)\phi(t) dt + f(x)$$

es llamada *Ecuación de Fredholm* de segunda especie, mientras que la ecuación

$$\int_a^b K(x, t)\phi(t) dt + f(t) = 0$$

(donde la función incógnita figura solo bajo el signo integral) se llama ecuación de Fredholm de primera especie.

La ecuación de Abel mencionada anteriormente pertenece a las así llamadas *Ecuaciones de Volterra*, ya mencionadas en §1. La ecuación de Volterra puede ser considerada como una ecuación de Fredholm en la que la función K verifica la condición

$$"K(x, t) = 0 \text{ para } t > x"$$

Sin embargo, conviene destacar las ecuaciones de tipo Volterra como una clase especial ya que ellas poseen una serie de propiedades que no tienen lugar para ecuaciones arbitrarias de Fredholm. Si en las ecuaciones

$$\phi(x) = \int_a^b K(s, t)\phi(t) dt + f(x)$$

$$\int_a^b K(x, t)\phi(t) dt + f(x) = 0$$

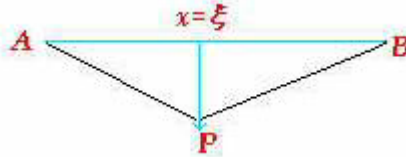
ó

$$\int_a^x K(x, t)\phi(t) dt = f(x)$$

la función $f(x)$ es igual a cero, entonces estas ecuaciones se llaman *homogéneas*. En el caso contrario la ecuación se llama *no homogénea*.

1.4. Problemas que llevan a ecuaciones integradas.

A. Equilibrio de una cuerda cargada. Consideremos una cuerda, esto es un hilo material de longitud l , que flexiona libremente, pero ofrece una resistencia a la dilatación, proporcional a la magnitud de ésta. Manteniendo fijos los extremos de la cuerda en los puntos $x = 0$ y $x = l$.



Entonces en la posición de equilibrio, la cuerda coincide con el segmento $0 < x < l$ del eje x . Supongamos ahora, que en el punto $x = \xi$ se ha aplicado una fuerza vertical $P = P_\xi$. Bajo el efecto de esta fuerza la cuerda tomaría evidentemente la forma quebrada indicada en la figura. Busquemos la magnitud δ de la flecha de la cuerda (máxima elongación de resistencia de la cuerda) en el punto ξ de su posición de equilibrio bajo la acción de la fuerza P_ξ aplicada en este punto. Si la magnitud de la fuerza P_ξ es pequeña en comparación con la tensión T_0 de la cuerda sin carga, podemos aceptar que la tensión de la cuerda cargada sigue siendo T_0 . Entonces, de la condición de equilibrio de la cuerda encontramos la igualdad siguiente:

$$T_0 \frac{\delta}{\xi} + T_0 \frac{\delta}{l-\xi} = P_\xi \quad \text{de donde, } \delta = \frac{P_\xi(l-\xi)\xi}{T_0 l}.$$

Sea ahora $u(x)$ la flecha de la cuerda en el punto x bajo la acción de la fuerza P_ξ . Tenemos $u(x) = P_\xi G(x, \xi)$ donde

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x(l-\xi)}{T_0 l} & \text{para } 0 \leq x \leq \xi \\ \frac{(l-x)\xi}{T_0 l} & \text{para } \xi \leq x \leq l \end{cases}$$

En particular, de estas fórmulas se ve inmediatamente que $G(x, \xi) = G(\xi, x)$.

Supongamos ahora que sobre la cuerda actúa una fuerza distribuida continuamente a lo largo de la cuerda con densidad $P(\xi)$. Si esta fuerza es pequeña, la deformación otra vez dependerá linealmente de la fuerza

entre ξ y $\xi + \Delta\xi$; es aproximadamente $P(\xi)\Delta(\xi)$ y la forma de la cuerda cargada de este modo, por el principio de superposición, será descrita mediante la función

$$u(x) = \int_0^l G(x, \xi) P(\xi) d\xi \quad (1.4.1)$$

Luego, si está dada la carga que actúa sobre la cuerda la fórmula (1.4.1) permite encontrar la forma que toma la cuerda bajo la acción de la carga.

Consideremos ahora el problema recíproco. Hallar la distribución de la carga P bajo la cual la cuerda toma la forma prefijada $u(x)$. Para encontrar la función P a partir de la función dada $u(x)$ obtenemos una ecuación que coincide, salvo notaciones, con la ecuación

$$\int_a^b K(x, t) \phi(t) dt + f(x) = 0$$

es decir, una ecuación de Fredholm de primera especie.

B. Oscilaciones libres y forzadas de una cuerda. Supongamos ahora que la cuerda no se encuentra en reposo y realiza ciertas oscilaciones. Sea $u(x, t)$ la posición en el momento t de aquel punto de la cuerda cuya abscisa es x y sea ρ la densidad lineal de la cuerda. Entonces, sobre un elemento de la cuerda de longitud dx actúa una fuerza de inercia igual a $-\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \rho dx$, de donde $P(\xi) = -\frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2} \rho$.

Tomando (1.4.1) y sustituyendo $P(\xi)$ se recibe que

$$u(x, t) = - \int_0^l G(x, \xi) \rho \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2} d\xi \quad (1.4.2)$$

Supongamos que la cuerda realiza oscilaciones armónicas de una frecuencia prefijada w y de una amplitud $u(x)$ que depende de x . En otras palabras, sea

$$u(x, t) = u(x) \sin wt.$$

Introduciendo esta expresión en (1.4.2) y dividiendo ambos miembros de la igualdad por $\sin wt$, obtenemos la siguiente ecuación integral para u :

$$u(x) = \rho w^2 \int_0^l G(x, \xi) u(\xi) d\xi.$$

Si la cuerda no oscila libremente sino bajo la acción de la fuerza exterior, se realizan oscilaciones forzadas, es fácil comprobar que la

correspondiente ecuación de las oscilaciones armónicas de la cuerda es de la forma

$$u(x) = \rho w^2 \int_0^l G(x, \xi) u(\xi) d\xi + f(x)$$

es decir, se representa una ecuación no homogénea de Fredholm de segunda especie.

1.5. Reducción de ecuaciones diferenciales a ecuaciones integrales.

La solución de una u otra ecuación diferencial conviene reducirla en varios casos, a la solución de una ecuación integral. Por ejemplo la demostración de la existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

por el método de Piccard se reduce a la ecuación integral no lineal siguiente

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y) d\xi.$$

Las ecuaciones de orden superior en principio, también pueden ser reducidas a una ecuación integral. Consideremos, por ejemplo la ecuación de segundo orden $y'' + f(x)y = 0$. Tomando en particular $f(x) = \rho^2 - \sigma(x)$, donde ρ es constante, podemos transformarla en la forma

$$y'' + \rho^2 y = \sigma(x) y \tag{1.5.1}$$

Como se sabe, la solución de la ecuación $y'' + \rho^2 y = g(x)$ puede ser representada en la forma

$$y(x) = \cos \rho(x - a) + \frac{1}{\rho} \int_a^x \sin \rho(x - \xi) g(\xi) d\xi.$$

Luego, la solución de ecuación (1.5.1) se reduce a la solución de la ecuación integral

$$y(x) - \frac{1}{\rho} \int_a^x \sigma(\xi) \sin \rho(x - \xi) y(\xi) d\xi = \cos \rho(x - a).$$

1.6. EJERCICIOS.

Resolver las siguientes ecuaciones integrales de primera especie, reduciéndolas previamente a ecuaciones integrales de segunda especie:

$$1. \quad \int_0^x 3^{x-t} \phi(t) dt = x$$

$$2. \quad \int_0^x a^{x-t} \phi(t) dt = f(x), \quad f(0) = 0$$

$$3. \quad \int_0^x (1 - x^2 + t^2) \phi(t) dt = \frac{x^2}{2}$$

$$4. \quad \int_0^x (2 + x^2 - t^2) \phi(t) dt = x^2$$

$$5. \quad \int_0^x \sin(x-t) \phi(t) dt = e^{x^2/2} - 1.$$

6. Demuestre que la solución de la ecuación $y'' + \rho^2 y = \sigma(x)y$ es

$$y(x) - \frac{1}{\rho} \int_0^x \sigma(\xi) \sin \rho(x-\xi) y(\xi) d\xi = \cos \rho(x-a).$$

§2. TEORIA CUANTITATIVA PARA LAS ECUACIONES INTEGRALES.

Dedicamos este parágrafo a indicar metodologías conducentes a la determinación de la solución de ecuaciones integrales según la forma que tenga su núcleo y esto lo iniciamos considerando técnicas dadas por Fredholm, las cuales consisten en transformar las ecuaciones integrales a ecuaciones del álgebra lineal.

2.1. Método de los determinantes de Fredholm.

La solución de la ecuación de Fredholm de segunda especie

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t) \phi(t) dt = f(x) \quad (2.1.1)$$

viene dada por la fórmula de inversión siguiente:

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t; \lambda) f(t) dt \quad (2.1.2)$$

donde la función $R(x,t; \lambda)$ es llamada *resolvente de Fredholm* de la ecuación (2.2.1) y viene dada por la igualdad

$$R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)} \quad (2.2.3)$$

con la condición de que $D(\lambda) \neq 0$. Aquí $D(x, t; \lambda)$ y $D(\lambda)$ son series de potencias de λ :

$$D(x, t; \lambda) = K(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x, t) \lambda^n \quad (2.2.4)$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n \lambda^n \quad (2.2.5)$$

cuyos coeficientes se determinan por las fórmulas

$$B_n(x, t) = \underbrace{\int_a^b \cdots \int_a^b}_{n\text{-veces}} \begin{vmatrix} K(x, t) & K(x, t_1) & \cdots & K(x, t_n) \\ K(t_1, t) & K(t_1, t_1) & \cdots & K(t_1, t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(t_n, t) & K(t_n, t_1) & \cdots & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \cdots dt_n \quad (2.2.6)$$

siendo $B_0(x, t) = K(x, t)$

$$C_n = \int_a^b \cdots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1, t_1) & K(t_1, t_2) & \cdots & K(t_1, t_n) \\ K(t_2, t_1) & K(t_2, t_2) & \cdots & K(t_2, t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(t_n, t_1) & K(t_n, t_2) & \cdots & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \cdots dt_n \quad (2.2.7)$$

La función $D(x, t; \lambda)$ se llama *menor de Fredholm* y $D(\lambda)$ *determinante de Fredholm*. En el caso en que el núcleo $K(x, t)$ sea acotado o que la integral $\int_a^b \int_a^b K^2(x, t) dx dt$ tenga un valor finito, las series (2.2.4) y (2.2.5) serán convergentes para todos los valores de λ y, por lo tanto, serán funciones analíticas enteras de λ . La resolvente

$$R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)}$$

es una función analítica de λ , a excepción de los valores de λ , que anulan la función $D(\lambda)$. Los últimos son polos de la resolvente $R(x, t; \lambda)$.

EJEMPLO. Hallar, mediante los determinantes de Fredholm, la resolvente del núcleo $K(x, t) = xe^t$; $a = 0$, $b = 1$.

Solución: Tenemos $B_0(x, t) = xe^t$. A continuación

$$B_1(x, t) = \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} \\ t_1 e^t & t_1 e^{t_1} \end{vmatrix} dt = 0$$

$$B_2(x, t) = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} & xe^{t_2} \\ t_1 e^t & t_1 e^{t_1} & t_1 e^{t_2} \\ t_2 e^t & t_2 e^{t_1} & t_2 e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1 dt_2 = 0$$

puesto que los determinantes bajo el signo integral son iguales a cero. Es evidente que también todas las ulteriores $B_n(x, t) = 0$. Hallamos los coeficientes C_n :

$$C_1 = \int_0^1 K(t_1, t_1) dt_1 = \int_0^1 t_1 e^{t_1} dt_1 = 1$$

$$C_2 = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} t_1 e^{t_1} & t_1 e^{t_2} \\ t_2 e^{t_1} & t_2 e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1 dt_2 = 0$$

Es evidente también que todos los siguientes $C_n = 0$. Según las fórmulas (2.2.4) y (2.2.5) en nuestro caso tenemos

$$D(x, t; \lambda) = K(x, t) = xe^t; \quad D(\lambda) = 1 - \lambda.$$

De este modo,

$$R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)} = \frac{xe^t}{1 - \lambda}.$$

Apliquemos el resultado obtenido a la solución de la ecuación integral

$$\phi(x) - \lambda \int_0^1 xe^t \phi(t) dt = f(x) \quad (\lambda \neq 1).$$

Según la fórmula (2.2.2)

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{xe^t}{1 - \lambda} f(t) dt.$$

En particular, para $f(x) = e^{-x}$ se obtiene

$$\phi(x) = e^{-x} + \frac{\lambda}{1 - \lambda} x$$

El cálculo de los coeficientes $B_n(x, t)$ y C_n de las ecuaciones (2.2.4) y (2.2.5) por las fórmulas (2.2.6) y (2.2.7) es prácticamente posible sólo en casos muy raros, pero de estas fórmulas se obtienen las siguientes relaciones de recurrencia

$$B_n(x, t) = C_n K(x, t) - n \int_a^b K(x, s) B_{n-1}(s, t) ds \quad (2.2.8)$$

$$C_n = \int_a^b B_{n-1}(s, s) ds \quad (2.2.9)$$

Sabiendo que los coeficientes $C_0 = 1$ y $B_0(x, t) = K(x, t)$ por las fórmulas (2.2.9) y (2.2.8) se hallan sucesivamente $C_1, B_1(x, t), C_2, B_2(x, t), C_3$, etc.

EJEMPLO. Hallar aplicando las fórmulas (2.2.8) y (2.2.9), la resolvente del núcleo $K(x, t) = x - 2t$ donde $0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1$.

Solución: Tenemos $C_0 = 1, B_0(x, t) = x - 2t$. Aplicando la fórmula (2.2.9) se halla

$$C_1 = \int_0^1 (-s) ds = -\frac{1}{2}.$$

Por la fórmula (2.2.8) se obtiene

$$B_1(x, t) = -\frac{x-2t}{2} - \int_0^1 (x-2s)(s-2t) ds = -x - t + 2xt + \frac{2}{3}.$$

Ahora tenemos

$$C_2 = \int_0^1 \left(-2s + 2s^2 + \frac{2}{3}\right) ds = \frac{1}{3}$$

$$B_2 = \frac{1}{3}(x-2t) - 2 \int_0^1 (x-2s) \left(-s-t+2st+\frac{2}{3}\right) ds = 0$$

$$C_3 = C_4 = \dots = 0, \quad B_3(x, t) = B_4(x, t) = \dots = 0$$

Por consiguiente:

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^2 \frac{(-1)^n}{n!} C_n \lambda^n = 1 - C_1 \lambda + \frac{C_2}{2} \lambda^2 = 1 + \frac{1}{2} \lambda + \frac{1}{6} \lambda^2$$

$$D(x, t; \lambda) = K(x, t) + \sum_{n=1}^1 \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x, t) \lambda^n = (x-2t) - B_1(x, t) \lambda$$

$$= x - 2t + \left(x + t - 2xt - \frac{2}{3}\right) \lambda.$$

La resolvente del núcleo dado será

$$R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)} = \frac{x-2t+(x+t-2xt-\frac{2}{3})\lambda}{1+\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{6}\lambda^2}$$

2.2. Núcleos iterados.

Sea dada la ecuación integral de Fredholm

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt = f(x) \quad (2.2.1)$$

Como en el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias, la ecuación integral (2.2.1) puede resolverse por el método de las aproximaciones sucesivas. Para esto, hagamos

$$\phi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \lambda^n \quad (2.2.2)$$

donde $\psi_n(x)$ se determina mediante las fórmulas

$$\psi_1(x) = \int_a^b K(x, t) f(t) dt$$

$$\psi_2(x) = \int_a^b K(x, t) \psi_1(t) dt = \int_a^b K_2(x, t) f(t) dt$$

$$\psi_3(x) = \int_a^b K(x, t) \psi_2(t) dt = \int_a^b K_3(x, t) f(t) dt$$

Aquí

$$K_2(x, t) = \int_a^b K(x, z) K_1(z, t) dz$$

$$K_3(x, t) = \int_a^b K(x, z) K_2(z, t) dz$$

y en general

$$K_n(x, t) = \int_a^b K(x, z) K_{n-1}(z, t) dz \quad (2.2.3)$$

$n = 2, 3, \dots$ siendo $K_1(x, t) \equiv K(x, t)$. Las funciones $K_n(x, t)$, que se determinan mediante las fórmulas (2.2.3), se llaman *núcleos iterados*. Para éstas, es válida la fórmula

$$K_n(x, t) = \int_a^b K_m(x, s) K_{n-m}(s, t) ds \quad (2.2.4)$$

donde m es un número natural cualquiera, menor que n .

La resolvente de la ecuación integral (2.2.1) se determina a partir de los núcleos iterados por la fórmula

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, t) \lambda^{n-1} \quad (2.2.5)$$

La serie del segundo miembro se llama *Serie de Neumann del núcleo*. Esta converge para

$$|\lambda| < \frac{1}{B} \quad \text{donde} \quad B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x, t) dx dt} . \quad (2.2.6)$$

La solución de la ecuación de Fredholm de segunda especie (2.2.1) se expresa por la fórmula de inversión

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t; \lambda) f(t) dt \quad (2.2.7)$$

La cota (2.2.6) es esencial para la convergencia de la serie (2.2.5). Sin embargo, la solución de la ecuación (2.2.1) puede también existir para valores de λ tales que $|\lambda| > \frac{1}{B}$. Veamos un ejemplo, consideremos

$$\phi(x) - \lambda \int_0^1 \phi(t) dt = 1 \quad (2.2.8)$$

Aquí $K(x, t) \equiv 1$ y, por lo tanto

$$B^2 = \int_0^1 \int_0^1 K^2(x, t) dx dt = \int_0^1 \int_0^1 dx dt = 1 .$$

De este modo, la condición (2.2.6) da que la serie (2.2.5) converge para $|\lambda| < 1$. Resolviendo la ecuación (2.2.8) como ecuación con núcleo degenerado o separable (ver §3), se obtiene $(1 - \lambda)C = 1$, donde $C = \int_0^1 \phi(t) dt$. Esta ecuación no es soluble para $\lambda = 1$, lo que significa que para $\lambda = 1$ la ecuación integral (2.2.8) no tiene solución. De aquí se deduce que en un círculo de radio mayor que la unidad las aproximaciones sucesivas para la ecuación (2.2.8) no pueden converger. Sin embargo, para $|\lambda| > 1$, la ecuación (2.2.8) es soluble. En efecto, si $\lambda \neq 1$, la ecuación $\phi(x) = \frac{1}{1-\lambda}$ es solución de la ecuación dada, lo cual es fácilmente comprobable por verificación directa.

Dados dos núcleos, $K(x, t)$ y $L(x, t)$, diremos que ellos son *ortogonales*, si se cumplen las dos condiciones siguientes:

$$\int_a^b K(x, z) L(z, t) dz = 0, \quad \int_a^b L(x, z) K(z, t) dz = 0 \quad (2.2.9)$$

para cualesquiera valores admisibles de x y de t .

EJEMPLO. Los núcleos $K(x, t) = xt$ y $L(x, t) = x^2 t^2$, son ortogonales en $[-1, 1]$.

En efecto,

$$\int_{-1}^1 (xz)(z^2 t^2) dz = xt^2 \int_{-1}^1 z^3 dz = 0$$

$$\int_{-1}^1 (x^2 z^2)(zt) dz = x^2 t \int_{-1}^1 z^3 dz = 0$$

Existen núcleos que son ortogonales a sí mismos. Para tales núcleos $K_2(x, t) = 0$, donde $K_2(x, t)$ es el segundo núcleo iterado. En este caso evidentemente, todos los núcleos iterados subsiguientes son también iguales a cero, y la resolvente coincide con el núcleo $K(x, t)$.

EJEMPLO. $K(x, t) = \sin(x - 2t)$; $0 \leq t \leq 2\pi$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(x - 2z) \sin(z - 2t) dz &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos(x + 2t - 3z) - \cos(x - 2t - z)] dz \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{3} \sin(x + 2t - 3z) + \sin(x - 2t - z) \right] \Big|_{z=0}^{z=2\pi} = 0. \end{aligned}$$

De este modo, en este caso la resolvente del núcleo es igual al propio núcleo

$$R(x, t; \lambda) \equiv \sin(x - 2t),$$

de manera que la serie de Neumann (2.2.5) está formada por un solo término y evidentemente, converge para cualquier λ .

Los núcleos iterados $K_n(x, t)$ pueden expresarse directamente del núcleo dado $K(x, t)$ por la fórmula

$$K_n(x, t) = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(x, s_1) K(s_1, s_2) \cdots K(s_{n-1}, t) ds_1 ds_2 \cdots ds_{n-1} \quad (2.2.10)$$

Todos los núcleos iterados $K_n(x, t)$, a partir de $K_2(x, t)$ serán funciones continuas en el cuadrado $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq b$, si el número inicial $K(x, t)$ es de cuadrado sumable en dicho cuadrado.

Damos algunos ejemplos para la determinación de núcleos iterados.

EJEMPLO 1. Hallar los núcleos iterados para $K(x, t) = x - t$ si $a = 0$, $b = 1$.

Solución. Aplicando la fórmula (2.2.2) se halla sucesivamente

$$K_1(x, t) = x - t, \quad K_2(x, t) = \int_0^1 (x - s)(s - t) ds = \frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3}$$

$$K_3(x, t) = \int_0^1 (x - s) \left(\frac{s+t}{2} - st - \frac{1}{3} \right) ds = -\frac{x-t}{12}$$

$$K_4(x, t) = \int_0^1 (x - s) \left[-\frac{s-t}{12} \right] ds = -\frac{1}{12} K_2(x, t) = -\frac{1}{12} \left(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3} \right)$$

$$K_5(x, t) = \frac{-1}{12} \int_0^1 (x - s) \left(\frac{s+t}{2} - st - \frac{1}{3} \right) ds = \frac{-1}{12} K_3(x, t) = \frac{x-t}{12^2}$$

$$K_6(x, t) = \frac{1}{12^2} \int_0^1 (x - s)(s - t) ds = \frac{K_2(x, t)}{12^2} = \frac{1}{12^2} \left(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3} \right)$$

De aquí se deduce que los núcleos iterados tienen la forma

$$(1) \text{ para } n = 2k - 1 \quad K_{2k-1}(x, t) = \frac{(-1)^k}{12^{k-1}} (x - t)$$

$$(2) \text{ para } n = 2k \quad K_{2k} = \frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}} \left(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3} \right)$$

donde $k = 1, 2, 3, \dots$

EJEMPLO 2. Hallar los núcleos iterados $K_1(x, t)$ y $K_2(x, t)$ si $a = 0$, $b = 1$ y

$$K(x, t) = \begin{cases} x + t, & \text{si } 0 \leq x < t \\ x - t, & \text{si } t < x \leq 1 \end{cases}$$

Solución. Tenemos que $K_1(x, t) = K(x, t)$

$$K_2(x, t) = \int_0^1 K(x, s) K(s, t) ds$$

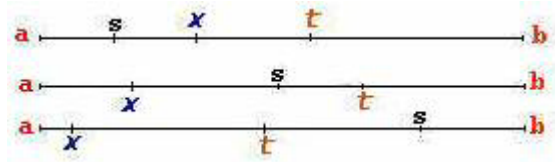
donde

$$K(x, s) = \begin{cases} x + s, & 0 \leq x < s \\ x - s, & s < x \leq 1 \end{cases} \quad K(s, t) = \begin{cases} s + t, & 0 \leq s < t \\ s - t, & t < s \leq 1 \end{cases}$$

Como el núcleo dado $K(x, t)$ no es simétrico, al hallar $K_2(x, t)$ consideramos dos casos: (1) $x < t$ y (2) $x > t$.

(1) Sea $x < t$. Entonces

$$K_2(x, t) = I_1 + I_2 + I_3$$



donde

$$I_1 = \int_0^x (x - s)(s + t) ds = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2 t}{2}$$

$$I_2 = \int_x^t (x + s)(s + t) ds = \frac{5t^3}{6} - \frac{5x^3}{6} + \frac{3}{2}xt^2 - \frac{3}{2}x^2t$$

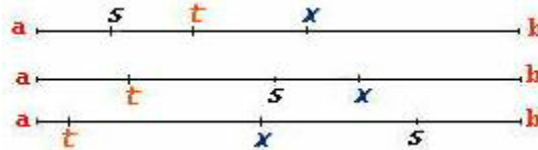
$$I_3 = \int_t^1 (x + s)(s - t) ds = \frac{t^3}{6} + \frac{xt^2}{2} - xt + \frac{x}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{3}$$

Sumando estas integrales, se obtiene

$$K_2(x, t) = t^3 - \frac{2}{3}x^3 - x^2t + 2xt^2 - xt + \frac{x-t}{2} + \frac{1}{3} \quad (x < t)$$

(2) Sea $x > t$. Entonces

$$K_2(x, t) = I_1 + I_2 + I_3$$



donde

$$I_1 = \int_0^t (x - s)(s + t) ds = \frac{3}{2}xt^2 - \frac{5t^3}{6}$$

$$I_2 = \int_t^x (x - s)(s - t) ds = \frac{x^3}{6} - \frac{t^3}{6} - \frac{x^2t}{2} + \frac{xt^2}{2}$$

$$I_3 = \int_x^1 (x + s)(s - t) ds = -\frac{5}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2t + \frac{x-t}{2} - xt + \frac{1}{3} \quad .$$

Sumando estas integrales, obtenemos

$$K_2(x, t) = -\frac{2}{3}x^3 - t^3 + x^2t + 2xt^2 - xt + \frac{x-t}{2} + \frac{1}{3}, \quad (x > t).$$

De este modo, el segundo núcleo iterado tiene la forma

$$K_2(x, t) = \begin{cases} -\frac{2}{3}x^3 + t^3 - x^2t + 2xt^2 - xt + \frac{x-t}{2} + \frac{1}{3}, & 0 < x < t \\ -\frac{2}{3}x^3 - t^3 + x^2t + 2xt^2 - xt + \frac{x-t}{2} + \frac{1}{3}, & t < x \leq 1 \end{cases}$$

Análogamente se hallan los núcleos iterados restantes $K_n(x, t)$ ($n = 3, 4, \dots$).

Citemos ahora un ejemplo de construcción de la resolvente de una ecuación integral mediante los núcleos iterados. Consideramos la ecuación integral

$$\phi(x) - \lambda \int_0^1 xt\phi(t) dt = f(x) \quad (2.2.11)$$

Aquí $K(x, t) = xt$; $a = 0$, $b = 1$ sucesivamente se halla:

$$\begin{aligned} K_1(x, t) &= xt \\ K_2(x, t) &= \int_0^1 (xz)(zt) dz = \frac{xt}{3} \\ K_3(x, t) &= \frac{1}{3} \int_0^1 (xz)(zt) dz = \frac{xt}{3^2} \\ &\dots\dots\dots \\ K_n(x, t) &= \frac{xt}{3^{n-1}} \end{aligned}$$

Según la fórmula (2.2.5) para la resultante se tiene

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, t) \lambda^{n-1} = xt \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{3}\right)^{n-1} = \frac{3xt}{3-\lambda}$$

donde $|\lambda| < 3$.

En virtud de la fórmula (2.2.7), la solución de la ecuación integral (2.2.11) se escribe en la forma

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{3xt}{3-\lambda} dt$$

En particular, para $f(x) = x$ se obtiene $\phi(x) = \frac{3x}{3-\lambda}$ donde $\lambda \neq 3$.

□

Si $M(x, t)$ y $N(x, t)$ son dos núcleos ortogonales, la resolvente $R(x, t; \lambda)$, correspondiente al núcleo $K(x, t) = M(x, t) + N(x, t)$ es igual a la suma de las resolventes $R_1(x, t; \lambda)$ y $R_2(x, t; \lambda)$ que corresponden a cada núcleo.

EJEMPLO. Hallar la resolvente del núcleo

$$K(x, t) = xt + x^2t^2, \quad a = -1, \quad b = 1.$$

Solución. Como ha sido demostrado anteriormente, los núcleos $M(x, t) = xt$ y $N(x, t) = x^2t^2$ son ortogonales en $[-1, 1]$. Por esto, la resolvente del núcleo $K(x, t)$ es igual a la suma de las resolventes de los núcleos $M(x, t)$ y $N(x, t)$. Aplicando resultados conocidos se halla

$$R_K(x, t; \lambda) = R_M(x, t; \lambda) + R_N(x, t; \lambda) = \frac{3xt}{3-2\lambda} + \frac{5x^2t^2}{5-2\lambda}$$

donde $|\lambda| < \frac{3}{2}$.

□

La propiedad que acabamos de indicar se puede generalizar a cualquier número finito de núcleos.

Si los núcleos $M^{(1)}(x, t), M^{(2)}(x, t), \dots, M^{(n)}(x, t)$ son ortogonales dos a dos, la resolvente que corresponde a su suma

$$K(x, t) = \sum_{m=1}^n M^{(m)}(x, t) \quad (2.2.12)$$

es igual a la suma de las resolventes correspondientes a cada sumando.

Llamaremos n -ésima *traza* del núcleo $K(x, t)$ a la magnitud

$$A_n = \int_a^b K_n(x, x) dx \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.2.13)$$

donde $K_n(x, t)$ es el n -ésimo núcleo iterado para el núcleo $K(x, t)$.

Para el determinante $D(\lambda)$ de Fredholm, tiene lugar la siguiente fórmula:

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda^{n-1} \quad (2.2.14)$$

El radio de convergencia de la serie de potencias (2.2.14) es igual al menor módulo de las raíces características (ver § 3.3) .

2.3. EJERCICIOS

En los siguientes núcleos aplicando los determinantes de Fredholm, halle las resolventes.

1. $K(x, t) = 2x - t; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1$
2. $K(x, t) = x^2t - xt^2; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1$
3. $K(x, t) = \sin x \cos t, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$
4. $K(x, t) = \sin x - \sin t; \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

Aplicando las fórmulas (2.2.8) y (2.2.9) halle las resolventes de los siguientes núcleos:

5. $K(x, t) = x + t + 1; \quad -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq t \leq 1$
6. $K(x, t) = 1 + 3xt; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1$
7. $K(x, t) = 4xt - x^2; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1$
8. $K(x, t) = e^{x-t}; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1$
9. $K(x, t) = \sin(x + t); \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$
10. $K(x, t) = x - \sinh t; \quad -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq t \leq 1.$

Aplicando la resolvente, resolver las siguientes ecuaciones integrales:

11. $\phi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin(x+t)\phi(t) dt = 1$
12. $\phi(x) - \lambda \int_0^1 (2x-t)\phi(t) dt = \frac{x}{6}$
13. $\phi(x) - \int_0^{2\pi} \sin x \cos t \phi(t) dt = \cos 2x$
14. $\phi(x) - \int_0^1 e^{x-t}\phi(t) dt = e^x$
15. $\phi(x) - \lambda \int_0^1 (4xt - x^2)\phi(t) dt = x.$

Hallar los núcleos iterados de los núcleos indicados a continuación para los valores de a y b dados:

$$16. \quad K(x, t) = x - t; \quad a = -1, \quad b = 1$$

$$17. \quad K(x, t) = \sin(x - t); \quad a = 0, \quad b = \frac{\pi}{2} \quad (n = 2, 3)$$

$$18. \quad K(x, t) = (x - t)^2; \quad a = -1, \quad b = 1 \quad (n = 2, 3)$$

$$19. \quad K(x, t) = xe^t; \quad a = 0, \quad b = 1$$

$$20. \quad K(x, t) = x + \sin t; \quad a = -\pi, \quad b = \pi$$

$$21. \quad K(x, t) = e^x \cos t; \quad a = 0, \quad b = \pi$$

En los problemas siguientes, halle $K_2(x, t)$

$$22. \quad K(x, t) = e^{|x-t|}; \quad a = 0, \quad b = 1$$

$$23. \quad K(x, t) = e^{|x|+t}; \quad a = -1, \quad b = 1$$

Usando núcleos iterados construir la resolvente de los siguientes núcleos:

$$24. \quad K(x, t) = e^{x+t}; \quad a = 0, \quad b = 1$$

$$25. \quad K(x, t) = \sin x \cos t; \quad a = 0, \quad b = \frac{\pi}{2}$$

$$26. \quad K(x, t) = xe^t; \quad a = -1, \quad b = 1$$

$$27. \quad K(x, t) = (1 + x)(1 - t); \quad a = -1, \quad b = 0$$

$$28. \quad K(x, t) = x^2 t^2; \quad a = -1, \quad b = 1$$

$$29. \quad K(x, t) = xt; \quad a = -1, \quad b = 1$$

$$30. \quad K(x, t) = \sin x \cos t + \cos 2x \sin 2t; \quad a = 0, \quad b = 2\pi$$

$$31. \quad K(x, t) = 1 + (2x - 1)(2t - 1); \quad a = 0, \quad b = 1.$$

§3. TEORÍA CUANTITATIVA. ECUACIONES INTEGRALES CON NÚCLEO DEGENERADO

3.1. Ecuaciones de Fredholm.

El núcleo $K(x, t)$ de la ecuación integral de Fredholm de segunda especie se llama *degenerado o separable*, si éste es la suma de un número finito de productos de una función sólo de x por una función sólo de t , es decir, si él tiene la forma

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(t) \quad (3.1.1)$$

las funciones $a_k(x)$ y $b_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) son funciones continuas del espacio $L_2([a, b])$ y linealmente independientes. La ecuación integral con núcleo degenerado (3.1.1)

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(t) \right] \phi(t) dt = f(x) \quad (3.1.2)$$

se resuelve del siguiente modo: Escribamos (3.1.2) del siguiente modo

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n a_k(x) \int_a^b b_k(t) \phi(t) dt \quad (3.1.3)$$

e introduzcamos las notaciones siguientes

$$\int_a^b b_k(t) \phi(t) dt = c_k \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.1.4)$$

Entonces (3.1.3) toman ahora la forma

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n c_k a_k(x) \quad (3.1.5)$$

donde c_k son constantes desconocidas (puesto que la función $\phi(x)$ no es conocida).

De este modo, la solución de una ecuación integral con núcleo degenerado se reduce a hallar las constantes c_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Sustituyendo la expresión (3.1.5) en la ecuación integral (3.1.2), y después de sencillas transformaciones, se obtiene

$$\sum_{m=1}^n \left\{ c_m - \int_a^b b_m(t) \left[f(t) + \lambda \sum_{k=1}^n c_k a_k(t) \right] dt \right\} a_m(x) = 0.$$

En virtud de la independencia lineal de las funciones $a_m(x)$ ($m = 1, 2, \dots, n$); de aquí se deduce que

$$c_m - \int_a^b b_m(t) \left[f(t) + \lambda \sum_{k=1}^n c_k a_k(t) \right] dt = 0$$

o bien

$$c_m - \lambda \sum_{k=1}^n c_k \int_a^b a_k(t) b_m(t) dt = \int_a^b b_m(t) f(t) dt \quad (m = 1, 2, \dots, n).$$

Introduciendo, para simplificar la escritura, las notaciones

$$a_{km} = \int_a^b a_k(t)b_m(t) dt, \quad f_m = \int_a^b b_m(t)f(t) dt ,$$

así se obtiene el siguiente sistema

$$c_m - \lambda \sum_{k=1}^n a_{km} c_k = f_m \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

o, en forma desarrollada:

[illegible]

Para hallar las incógnitas c_k tenemos un sistema lineal de n ecuaciones algebraicas con n incógnitas. El determinante de este sistema es igual a

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \cdots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.1.7)$$

Si $\Delta(\lambda) \neq 0$, el sistema (3.1.6) tiene solución única c_1, c_2, \dots, c_n que se obtienen por las fórmulas de Crammer.

$$c_k = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & \cdots & -\lambda a_{1k-1} & f_1 & -\lambda a_{1k+1} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & \cdots & -\lambda a_{2k-1} & f_2 & -\lambda a_{2k+1} & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda a_{n1} & \cdots & -\lambda a_{nk-1} & f_n & -\lambda a_{nk+1} & \cdots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (3.1.8)$$

La solución de la ecuación integral (3.1.2) será la función $\phi(x)$ determinada por la igualdad

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n c_k a_k(x)$$

donde los coeficientes c_k ($k = 1, 2, \dots, n$) se determinan por las fórmulas (3.1.8).

OBSERVACIÓN. El sistema (3.1.6) se puede obtener, si ambos miembros de la igualdad (3.1.5) se multiplican sucesivamente por $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$ y se integra desde a hasta b , o bien, si se sustituye la expresión (3.1.5) para $\phi(x)$ es la igualdad (3.1.4) cambiando x por t .

EJEMPLO. Resolver la ecuación integral

$$\phi(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \cos t + t^2 \sin x + \cos x \sin t) \phi(t) dt = x \quad (3.1.9)$$

Solución: Escribamos la ecuación en la siguiente forma:

$$\phi(x) = \lambda x \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \phi(t) dt + \lambda \sin x \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \phi(t) dt + \lambda \cos x \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \phi(t) dt + x$$

Introduzcamos las notaciones:

$$c_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) \cos t dt; \quad c_2 = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \phi(t) dt; \quad c_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) \sin t dt \quad (3.1.10)$$

donde c_1, c_2, c_3 son constantes desconocidas por determinar. Entonces la ecuación (3.1.9) toma la forma

$$\phi(x) = c_1 \lambda x + c_2 \lambda \sin x + c_3 \lambda \cos x + x \quad (3.1.11)$$

Sustituyendo la expresión (3.1.11) en las igualdades (3.1.10), se obtiene

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} (c_1 \lambda t + c_2 \lambda \sin t + c_3 \lambda \cos t + t) \cos t dt \\ c_2 &= \int_{-\pi}^{\pi} (c_1 \lambda t + c_2 \lambda \sin t + c_3 \lambda \cos t + t) t^2 dt \\ c_3 &= \int_{-\pi}^{\pi} (c_1 \lambda t + c_2 \lambda \sin t + c_3 \lambda \cos t + t) \sin t dt \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned}
c_1 \left(1 - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t \cos t \, dt \right) - c_2 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cos t \, dt - c_3 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \, dt &= \int_{-\pi}^{\pi} t \cos t \, dt \\
- c_1 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t^3 \, dt + c_2 \left(1 - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin t \, dt \right) - c_3 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos t \, dt &= \int_{-\pi}^{\pi} t^3 \, dt \\
- c_1 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t \, dt - c_2 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t \, dt + c_3 \left(1 - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \sin t \, dt \right) &= \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t \, dt
\end{aligned}$$

Calculando las integrales que figuran en estas ecuaciones, se obtiene el sistema de ecuaciones algebraicas para hallar las incógnitas c_1, c_2, c_3

$$\begin{aligned}
c_1 - c_3 \lambda \pi &= 0 \\
c_2 + c_3 \lambda 4\pi &= 0 \\
- 2\pi \lambda c_1 - c_2 \lambda \pi + c_3 &= 2\pi
\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

El determinante del sistema es

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\pi\lambda \\ 0 & 1 & 4\pi\lambda \\ -2\pi\lambda & -\pi\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 - (2\pi^2\lambda^2 - 4\pi^2\lambda^2) = 1 + 2\pi^2\lambda^2 \neq 0$$

El sistema (3.1.12) tiene solución única; dada por

$$c_1 = \frac{2\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2}; c_2 = \frac{8\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2}; c_3 = \frac{2\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}$$

sustituyendo los valores hallados c_1, c_2 y c_3 en (3.1.1) se obtiene la solución de la ecuación integral dada:

$$\phi(x) = \frac{2\lambda\pi}{1+2\lambda^2\pi^2} (\lambda\pi x - 4\lambda\pi \sin x + \cos x) + x.$$

3.2. Ecuación de Hammerstein

Muchos problemas de la física se reducen a ecuaciones integrales no lineales de Hammerstein.

La forma canónica de la *ecuación de Hammerstein* (ver §1, 1.3) es:

$$\phi(x) = \int_a^b K(x, t) f(t, \phi(t)) \, dt \tag{3.2.1}$$

donde $K(x, t)$, $f(t, u)$ son funciones dadas; $\phi(x)$ es la función incógnita. También las ecuaciones de la forma

$$\phi(x) = \int_a^b K(x, t) f(t, \phi(t)) dt + \psi(x) \quad (3.2.1')$$

donde $\psi(x)$ es una función conocida, pueden reducirse con facilidad a la ecuación del tipo (3.2.1) de modo que la diferencia entre las ecuaciones homogéneas y no homogéneas (de importancia en el caso lineal) en el caso no lineal no tiene casi ningún valor. La función $K(x, t)$ la llamaremos como siempre *núcleo de la ecuación* (3.2.1).

Sea $K(x, t)$ un núcleo degenerado, es decir

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^m a_i(x) b_i(t). \quad (3.2.2)$$

En este caso, la ecuación (3.2.1) toma la forma

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^m a_i(x) \int_a^b b_i(t) f(t, \phi(t)) dt \quad (3.2.3)$$

Hagamos

$$c_i = \int_a^b b_i(t) f(t, \phi(t)) dt \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3.2.4)$$

donde c_i son constantes desconocidas por ahora. Entonces en virtud de (3.2.3) tendremos

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^m c_i a_i(x) \quad (3.2.5)$$

Sustituyendo en las ecuaciones (3.2.4) la expresión (3.2.5) para $\phi(x)$, se obtienen m magnitudes desconocidas c_1, c_2, \dots, c_m :

$$c_i = \psi_i(c_1, c_2, \dots, c_m) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3.2.6)$$

En el caso en que $f(t, u)$ sea un polinomio con respecto a u , es decir

$$f(t, u) = p_0(t) + p_1(t)u + \dots + p_n(t)u^n \quad (3.2.7)$$

donde $p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t)$ son, por ejemplo, funciones continuas de en el segmento $[a, b]$, el sistema (3.2.6) se transforma en un sistema de ecuaciones algebraicas con respecto a c_1, c_2, \dots, c_m . Si existe una solución del sistema (3.2.6), es decir, si existen números

$$c_1^0, c_2^0, \dots, c_m^0,$$

tales que, al ser sustituidos en el sistema (3.2.6), reducen sus ecuaciones a identidades, entonces existe una solución de la ecuación integral (3.2.3), que se determina por la igualdad (3.2.5):

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^m c_i^0 a_i(x).$$

Es evidente que el número de soluciones (en general, complejas) de la ecuación integral (3.2.3) es igual al número de soluciones del sistema (3.2.6).

EJEMPLO. Resolver la ecuación integral

$$\phi(x) = \lambda \int_0^1 xt\phi^2(t) dt \quad (\lambda \text{ es un parámetro}) \quad (3.2.8)$$

Solución: Hagamos

$$c = \int_0^1 t\phi^2(t) dt \quad (3.2.9)$$

Entonces

$$\phi(x) = c\lambda x \quad (3.2.10)$$

Sustituyendo $\phi(x)$ por el segundo miembro de (3.2.10) en la relación (3.2.9), se tendrá

$$c = \int_0^1 t\lambda^2 c^2 t^2 dt$$

de donde

$$c = \frac{\lambda^2}{4} c^2. \quad (3.2.11)$$

La ecuación (3.2.11) tiene dos soluciones:

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{4}{\lambda^2}.$$

Por lo tanto, la ecuación integral (3.2.8) tiene también dos soluciones para cualquier $\lambda \neq 0$

$$\phi_1(x) = 0, \quad \phi_2(x) = \frac{4}{\lambda} x.$$

□

Existen ecuaciones integrales no lineales simples que no tienen soluciones reales.

Veamos por ejemplo, la ecuación

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{(x+t)/2} (1 + \phi^2(t)) dt \quad (3.2.12)$$

hagamos

$$c = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{t/2} (1 + \phi^2(t)) dt \quad (3.2.13)$$

Entonces

$$\phi(x) = ce^{x/2}. \quad (3.2.14)$$

Para determinar la constante c se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{t/2} (1 + c^2 e^t) dt \\ (c^{3/2} - 1)c^2 - 3c + 3(e^{1/2} - 1) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

No es difícil comprobar que la ecuación (3.2.15) no tiene raíces reales y que, por lo tanto, la ecuación integral (3.2.12) no tiene soluciones reales.

Por otro lado, consideremos la ecuación

$$\phi(x) = \int_0^1 a(x)a(t)\phi(t)\sin\left(\frac{\phi(t)}{a(t)}\right) dt \quad (3.2.16)$$

$$(a(t) > 0 \quad \text{para todo } t \in [0, 1]) .$$

Para la determinación de la constante c se obtiene la ecuación

$$1 = \int_0^1 a^2(t) dt \sin c \quad (3.2.17)$$

Si $\int_0^1 a^2(t) dt > 1$, entonces la ecuación (3.2.17) y, por consiguiente, también la ecuación integral inicial (3.2.16), tiene un número infinito de soluciones reales.

Δ▽Δ

3.3. Raíces características y funciones propias.

La ecuación integral homogénea de Fredholm de segunda especie

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt = 0 \quad (3.3.1)$$

tiene siempre la solución trivial $\phi(x) \equiv 0$, que se llama solución *nula*.

Los valores del parámetro λ , para los cuales esta ecuación tiene soluciones no nulas $\phi(x) \not\equiv 0$, se llaman *raíces características* de la ecuación (3.3.1), o del núcleo $K(x, t)$, y cada solución no nula de esta ecuación se llama *función propia*, correspondiente a la raíz característica λ .

El número $\lambda = 0$ no es raíz característica, puesto que para $\lambda = 0$ en (3.3.1) se sigue que $\phi(x) \equiv 0$.

Si el núcleo $K(x, t)$ es continuo en la región $\Omega = \{(x, t)/a \leq x, t \leq b\}$ o de cuadrado sumable en Ω , y además los números a y b son finitos, entonces a cada raíz característica λ le corresponde un número finito de funciones propias linealmente independientes; el número de estas funciones se denomina *rango* de la raíz característica. Distintas raíces características pueden tener diferente rango.

Para las ecuaciones con *núcleos degenerados separables*

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(t) \right] \phi(t) dt = 0 \quad (3.3.2)$$

las raíces características son las raíces de la ecuación algebraica

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \cdots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.3.3)$$

cuya potencia es $p \leq n$. Aquí $\Delta(\lambda)$ es el determinante del sistema lineal homogéneo

OBSERVACIÓN. Las funciones propias se determinan salvo un factor constante es decir, si $\phi(x)$ es una función propia que corresponde a cierta raíz característica λ , entonces $c\phi(x)$, donde c es una constante arbitraria, será también una función propia correspondiente a la misma raíz característica λ .

EJEMPLO. Hallar las raíces características y las funciones propias de la ecuación integral

$$\phi(x) - \lambda \int_0^\pi (\cos^2 x \cos 2t + \cos 3x \cos^3 t) \phi(t) dt = 0 \quad (3.3.5)$$

Solución: Se tiene

$$\phi(x) = \lambda \cos^2 x \int_0^\pi \cos 2t \phi(t) dt + \lambda \cos 3x \int_0^\pi \cos^3 t \phi(t) dt$$

Introduciendo las notaciones

$$c_1 = \int_0^\pi \phi(t) \cos 2t dt, \quad c_2 = \int_0^\pi \phi(t) \cos^3 t dt$$

tenemos

$$\phi(x) = c_1 \lambda \cos^2 x + c_2 \lambda \cos 3x \quad (3.3.6)$$

Sustituyendo (3.3.6) en (3.3.5) se obtiene un sistema lineal de ecuaciones homogéneas:

$$\begin{aligned} c_1 \left(1 - \lambda \int_0^\pi \cos^2 t \cos 2t dt \right) - c_2 \lambda \int_0^\pi \cos 3t \cos 2t dt &= 0 \\ -c_1 \lambda \int_0^\pi \cos^5 t dt + c_2 \left(1 - \lambda \int_0^\pi \cos^3 t \cos 3t dt \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Pero como

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos^2 t \cos 2t dt &= \frac{\pi}{4}, & \int_0^\pi \cos 3t \cos 2t dt &= 0 \\ \int_0^\pi \cos^5 t dt &= 0, & \int_0^\pi \cos^3 t \cos 3t dt &= \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

El sistema (3.3.7) toma la forma

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\lambda\pi}{4} \right) c_1 &= 0 \\ \left(1 - \frac{\lambda\pi}{8} \right) c_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

La ecuación para hallar las raíces características será

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda\pi}{4} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\lambda\pi}{8} \end{vmatrix} = 0$$

Las raíces características son $\lambda_1 = \frac{4}{\pi}$, $\lambda_2 = \frac{8}{\pi}$.

Para $\lambda_1 = \frac{4}{\pi}$, el sistema (3.3.8) toma la forma

$$\begin{aligned} 0 \ c_1 &= 0 \\ \frac{1}{2} \ c_2 &= 0 \end{aligned}$$

de donde $c_2 = 0$, c_1 es constante arbitraria. La función propia será $\phi_1(x) = c_1 \lambda \cos^2 x$, o bien, haciendo $c_1 \lambda = 1$, se obtiene $\phi_1(x) = \cos^2 x$.

Para $\lambda_2 = \frac{8}{\pi}$, el sistema (3.3, 8) toma la forma

$$\begin{aligned} (-1) c_1 &= 0 \\ 0 \ c_2 &= 0 \end{aligned}$$

de donde $c_1 = 0$, c_2 es arbitraria y, por consiguiente, la función propia será $\phi_2(x) = \lambda c_2 \cos 3x$, o bien haciendo $c_2 \lambda = 1$, se obtiene $\phi_2(x) = \cos 3x$.

De este modo, las raíces característericas son:

$$\lambda_1 = \frac{4}{\pi}, \quad \lambda_2 = \frac{8}{\pi}$$

las funciones propias correspondientes a estas son: $\phi_1(x) = \cos^2 x$, $\phi_2(x) = \cos 3x$.

□

Una ecuación integral homogénea de Fredholm puede no tener raíces características y funciones propias, o bien no tener raíces características reales y funciones propias.

EJEMPLO. La ecuación integral homogénea

$$\phi(x) - \lambda \int_0^1 (3x - 2) t \phi(t) dt = 0$$

no tiene raíces características y funciones propias. En efecto, tenemos

$$\phi(x) = \lambda (3x - 2) \int_0^1 t \phi(t) dt.$$

Haciendo

$$c = \int_0^1 t \phi(t) dt \tag{3.3.9}$$

se obtiene

$$\phi(x) = c\lambda(3x - 2). \quad (3.3.10)$$

Sustituyendo (3.3.10) en (3.3.9) obtenemos

$$\left[1 - \lambda \int_0^1 (3t^2 - 2t) dt\right] c = 0 \quad (3.3.11)$$

Pero, como $\int_0^1 (3t^2 - 2t) dt = 0$ la ecuación (3.3.11) da $c = 0$ y, por consiguiente $\phi(x) = 0$.

De este modo, la ecuación homogénea dada tiene sólo la solución nula $\phi(x) = 0$ para un λ cualquiera; por lo tanto, ésta no posee raíces características y funciones propias.

EJEMPLO. la ecuación $\phi(x) - \int_0^1 (\sqrt{x}t - \sqrt{t}x) \phi(t) dt = 0$ no tiene raíces características reales y funciones propias.

Tenemos que $\phi(x) = c_1\lambda\sqrt{x} - c_2\lambda x$ donde

$$c_1 = \int_0^1 t\phi(t) dt, \quad c_2 = \int_0^1 \sqrt{t}\phi(t) dt.$$

Haciendo la sustitución ϕ en c_1 y c_2 se tiene

$$c_1 = \int_0^1 t(c_1\lambda\sqrt{t} - c_2\lambda t) dt, \quad c_2 = \int_0^1 \sqrt{t}(c_1\lambda\sqrt{t} - c_2\lambda t) dt$$

de donde

$$c_1 = c_1\lambda \int_0^1 t^{\frac{3}{2}} dt - c_2\lambda \int_0^1 t^2 dt, \quad c_2 = c_1\lambda \int_0^1 t dt - c_2\lambda \int_0^1 t^{\frac{3}{2}} dt$$

obteniéndose el sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} (1 - \frac{2}{5}\lambda)c_1 + \frac{\lambda}{3}c_2 &= 0 \\ -\frac{\lambda}{2}c_1 + (1 + \frac{2}{5}\lambda)c_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

El determinante del sistema es

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{2}{5}\lambda & \frac{\lambda}{3} \\ -\frac{\lambda}{2} & 1 + \frac{2}{5}\lambda \end{vmatrix} = 1 + \frac{\lambda^2}{150}.$$

Para λ real, éste no se anula, por lo que (3.3.12) se obtiene $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$, por lo tanto, para todas las λ reales, la ecuación dada tiene sólo la solución trivial: $\phi(x) \equiv 0$. De esta manera, la ecuación dada $\phi(x) - \lambda \int_0^1 (\sqrt{xt} - \sqrt{tx}) \phi(t) dt = 0$ no posee raíces características reales y funciones propias.

□

Si el n -ésimo núcleo iterado $K_n(x, t)$ del núcleo $K(x, t)$ es simétrico, entonces se puede afirmar que $K(x, t)$ tiene por lo menos una raíz característica (real o compleja), y que las potencias n -ésimas de todas las raíces características son números reales. En particular, para un núcleo antisimétrico $K(x, t) = -K(t, x)$, todas las raíces características son imaginarias puras: $\lambda = \beta i$, donde $\beta \in \mathbb{R}$.

El núcleo $K(x, t)$ de una ecuación integral se llama *simétrica*, si se cumple la condición $K(x, t) = K(t, x)$ ($a \leq x, t \leq b$).

Para la ecuación integral de Fredholm

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt = 0 \quad (3.3.13)$$

con núcleo simétrico $K(x, t)$ tienen lugar los teoremas siguientes que son análogos del análisis espectral:

TEOREMA 1. *La ecuación $\phi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt = 0$ tiene por lo menos una raíz característica real.*

TEOREMA 2. *A cada raíz característica λ le corresponde un número finito q de funciones linealmente independiente de la ecuación $\phi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt = 0$ siendo*

$$\sup q \leq \lambda^2 B^2$$

donde

$$B^2 = \int_a^b \int_a^b K^2(x, t) dx dt$$

El número q se llama *rango* o multiplicidad de la raíz característica.

TEOREMA 3. *Cada par de funciones propias $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, que corresponde a raíces características diferentes $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son ortogonales, es decir,*

$$\int_a^b \phi_1(x)\phi_2(x) dx = 0.$$

TEOREMA 4. *En cada intervalo finito del eje λ hay un número finito de raíces características. La cota superior para el número m de raíces características situadas en el intervalo $-l < \lambda < l$ se determina por la desigualdad*

$$m < l^2 B^2 .$$

En el caso en donde el núcleo $K(x, t)$ de la ecuación (3.3.13) sea la función de Green de cierto problema homogéneo de Sturm–Liouville, la determinación de las raíces características y las funciones propias se reducen a la solución de dicho problema.

EJEMPLO. Hallar las raíces características y las funciones propias de la ecuación homogénea

$$\phi(x) - \lambda \int_0^\pi K(x, t) \phi(t) dt = 0$$

donde

$$K(x, t) = \begin{cases} \cos x \sin t, & 0 \leq x \leq t \\ \cos t \sin x, & t \leq x \leq \pi \end{cases} .$$

Solución. Escribamos la ecuación dada en la forma

$$\phi(x) = \lambda \int_0^x K(x, t) \phi(t) dt + \lambda \int_x^\pi K(x, t) \phi(t) dt$$

o bien

$$\phi(x) = \lambda \sin x \int_0^x \phi(t) \cos t dt + \lambda \cos x \int_x^\pi \phi(t) \sin t dt \quad (3.3.14)$$

con el fin de obtener el problema de Sturm–Liouville derivamos ambos miembros de (3.3.14), se halla

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \lambda \cos x \int_0^x \phi(t) \cos t dt + \lambda \sin x \cos x \phi(x) \\ &\quad - \lambda \sin x \int_x^\pi \phi(t) \sin t dt - \lambda \sin x \cos x \phi(x) , \end{aligned}$$

o sea

$$\phi'(x) = \lambda \cos x \int_0^x \phi(t) \cos t \, dt - \lambda \sin x \int_x^\pi \phi(t) \sin t \, dt. \quad (3.3.15)$$

Derivando una vez más, se obtiene

$$\begin{aligned} \phi''(x) &= -\lambda \sin x \int_0^x \phi(t) \cos t \, dt + \lambda \cos^2 x \phi(x) - \lambda \cos x \int_x^\pi \phi(t) \sin t \, dt + \lambda \sin^2 x \phi(x) \\ &= \lambda \phi(x) - \left[\lambda \sin x \int_0^x \phi(t) \cos t \, dt + \lambda \cos x \int_x^\pi \phi(t) \sin t \, dt \right]. \end{aligned}$$

La expresión entre corchetes es igual a $\phi(x)$, de forma que

$$\phi''(x) = \lambda \phi(x) - \phi(x).$$

De este modo la ecuación integral dada se reduce al siguiente problema de frontera:

$$\phi''(x) - (\lambda - 1)\phi(x) = 0 \quad (3.3.16)$$

$$\phi(\pi) = 0 \quad \phi'(0) = 0 \quad (3.3.17)$$

Aquí son posibles los tres casos siguientes:

$$(1) \quad \lambda - 1 = 0, \quad \text{ó, } \lambda = 1.$$

La ecuación (3.3.16) toma la forma $\phi''(x) = 0$ su solución general será $\phi(x) = c_1 x + c_2$. Usando las condiciones de frontera (3.3.17), para determinar las constantes c_1 y c_2 obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} c_1 \pi + c_2 &= 0 \\ c_1 &= 0 \end{aligned}$$

el cual tiene la única solución $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ y por consiguiente la ecuación integral tiene sólo la solución trivial $\phi(x) = 0$.

$$(2) \quad \lambda - 1 > 0, \quad \text{ó, } \lambda > 1.$$

La solución general de la ecuación (3.3.16) tiene la forma

$$\phi(x) = c_1 \cosh \sqrt{\lambda - 1} x + c_2 \sinh \sqrt{\lambda - 1} x.$$

Para determinar los valores de c_1 y c_2 , las condiciones de frontera dan el sistema

$$\begin{aligned} c_1 \cosh \pi \sqrt{\lambda - 1} + c_2 \sinh \pi \sqrt{\lambda - 1} &= 0 \\ c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Éste tiene la solución única $c_1 = 0, c_2 = 0$. La ecuación integral tiene la solución trivial $\phi(x) \equiv 0$. De este modo, para $\lambda \geq 1$ la ecuación integral no posee raíces características y, por lo tanto, tampoco tiene funciones propias.

(3) $\lambda - 1 < 0$, ó sea $\lambda < 1$. La solución general de la ecuación (3.3.16) será

$$\phi(x) = c_1 \cos \sqrt{1 - \lambda} x + c_2 \sin \sqrt{1 - \lambda} x.$$

De aquí hallamos que

$$\phi'(x) = \sqrt{1 - \lambda} \left(-c_1 \sin \sqrt{1 - \lambda} x + c_2 \cos \sqrt{1 - \lambda} x \right).$$

En este caso, para la determinación de c_1 y c_2 , las condiciones de fronteras (3.3.17) dan el sistema

$$\begin{aligned} c_1 \cos \pi \sqrt{1 - \lambda} + c_2 \sin \pi \sqrt{1 - \lambda} &= 0 \\ \sqrt{1 - \lambda} c_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

el determinante de este sistema es

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos \pi \sqrt{1 - \lambda} & \sin \pi \sqrt{1 - \lambda} \\ 0 & \sqrt{1 - \lambda} \end{vmatrix}$$

Igualando a cero, obtenemos la ecuación para la determinación de las raíces características

$$\begin{vmatrix} \cos \pi \sqrt{1 - \lambda} & \sin \pi \sqrt{1 - \lambda} \\ 0 & \sqrt{1 - \lambda} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.3.19)$$

o sea $\sqrt{1 - \lambda} \cos \pi \sqrt{1 - \lambda} = 0$. Por hipótesis $\sqrt{1 - \lambda} \neq 0$, por lo tanto $\cos \pi \sqrt{1 - \lambda} = 0$. De aquí se halla que $\pi \sqrt{1 - \lambda} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, donde $n \in \mathbb{Z}$. Todas las raíces de la ecuación (3.3.19) vienen dadas por la fórmula

$$\lambda_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Para valores de $\lambda = \lambda_n$, el sistema (3.3.18) toma la forma

$$\begin{aligned} c_1 \cdot 0 + c_2(-1)^n &= 0 \\ c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Éste tiene un conjunto infinito de soluciones no nulas

$$c_1 = c, \quad c_2 = 0$$

donde c es una constante arbitraria. Esto significa que también la ecuación integral original tiene un conjunto infinito de soluciones de la forma

$$\phi(x) = c \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x$$

las cuales son funciones propias de dicha ecuación.

De este modo, las raíces características y las funciones propias de la ecuación dada, serán

$$\lambda_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2, \quad \phi_n(x) = \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x$$

donde n es un entero cualquiera.

3.4. EJERCICIOS.

Resolver las siguientes ecuaciones integrales con núcleos degenerados:

1. $\phi(x) - 4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \phi(t) dt = 2x - \pi$
2. $\phi(x) - \int_{-1}^1 e^{\arcsin x} \phi(t) dt = \tan x$
3. $\phi(x) - \lambda \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan t \phi(t) dt = \cot x$
4. $\phi(x) - \lambda \int_0^1 \cos(q \ln t) \phi(t) dt = 1$
5. $\phi(x) - \lambda \int_0^1 \arccos t \phi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $\phi(x) - \lambda \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{t}\right)^p \phi(t) dt = 1 \quad (p > -1)$

Resolver las siguientes ecuaciones integrales:

$$7. \quad \phi(x) = 2 \int_0^1 xt \phi^3(t) dt$$

$$8. \quad \phi(x) = \int_{-1}^1 (xt + x^2 t^2) \phi^2(t) dt$$

$$9. \quad \phi(x) = \int_{-1}^1 x^2 t^2 \phi^3(t) dt$$

$$10. \quad \phi(x) = \int_{-1}^1 \frac{xt}{1+\phi^2(t)} dt$$

$$11. \quad \phi(x) = \int_0^1 (1 + \phi^2(t)) dt.$$

12. Demostrar que la ecuación integral $\phi(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 a(x)a(t)(1 + \phi^2(t))dt$ ($a(x) > 0$ para todo $x \in [0, 1]$) no tiene soluciones reales, si $\int_0^1 a^2(x) dx > 1$.

Hallar las raíces características y las funciones propias de las siguientes ecuaciones integrales homogéneas con núcleo degenerado:

$$13. \quad \phi(x) - \lambda \int_0^{\pi/4} \sin^2 x \phi(t) dt = 0$$

$$14. \quad \phi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \cos t \phi(t) dt = 0$$

$$15. \quad \phi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \sin t \phi(t) dt = 0$$

$$16. \quad \phi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+t) \phi(t) dt = 0$$

$$17. \quad \phi(x) - \lambda \int_{-1}^1 (5xt^3 + 4x^2t) \phi(t) dt = 0$$

$$18. \quad \phi(x) - \lambda \int_{-1}^1 (5xt^3 + 4x^2t + 3xt) \phi(t) dt = 0$$

$$19. \quad \phi(x) - \lambda \int_{-1}^1 (x \cosh t - t \cosh x) \phi(t) dt = 0$$

Hallar las raíces características y las funciones propias de las ecuaciones integrales homogéneas, si sus núcleos tienen la forma

$$20. \quad K(x, t) = \begin{cases} x(t-1), & 0 \leq x \leq t \\ t(x-1), & t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$21. \quad K(x, t) = \begin{cases} (x+1)(t-2), & 0 \leq x \leq t \\ (t+1)(x-2), & t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$22. \quad K(x, t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & 0 \leq x \leq t \\ \sin t \cos x, & t \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$23. \quad K(x, t) = \begin{cases} \sin x \sin(t-1), & -\pi \leq x \leq t \\ \sin t \sin(x-1), & t \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$24. \quad K(x, t) = \begin{cases} -e^{-t} \sinh x, & 0 \leq x \leq t \\ -e^{-t} \sinh t, & t \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

25. Demostrar que, si $K(x, t)$ es núcleo simétrico, entonces el segundo núcleo iterado $K_2(x, t)$ tiene sólo raíces características positivas.

§4. TEORÍA CUALITATIVA PARA LAS ECUACIONES INTEGRALES

4.1. Conceptos Fundamentales

Se llama ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie a una ecuación del tipo

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt = f(x) \quad (4.1.1)$$

donde $\phi(x)$ es la función incógnita; $K(x, t)$ y $f(x)$ son funciones conocidas; x y t son variables reales, que varían en un intervalo $[a, b]$; λ es un factor numérico.

La función $K(x, t)$ se denomina *núcleo de la ecuación integral*, se supone que está definida en la región cuadrada

$$\Omega = \{(x, t) / a \leq x \leq b, \text{ y } a \leq t \leq b\}$$

en el plano (x, t) , y es continua en Ω , o bien sus discontinuidades son tales que la integral doble $\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt$ tiene un valor finito.

Si $f(x) \not\equiv 0$, la ecuación (4.1.1) se llama no homogénea; si en cambio $f(x) \equiv 0$ la ecuación (4.1.1) toma la forma

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt = 0 \quad (4.1.2)$$

y se denomina homogénea.

Los límites de integración a y b en las ecuaciones (4.1.1) y (4.1.2) pueden ser finitos o infinitos.

Se llama *solución* de las ecuaciones (4.1.1) y (4.1.2) a cualquier función $\phi(x)$ que, al ser sustituida en dicha ecuación, la reduce a identidades con respecto a $x \in (a, b)$, esto se pudo observar en la parte cuantitativa de los parágrafos 2 y 3.

4.2. Operador integral de Fredholm.

En este numeral estudiaremos las ecuaciones de Fredholm de segunda especie, esto es, las ecuaciones del tipo

$$\phi(x) = \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt + f(x) \quad (4.2.3)$$

Respecto a la función K , llamada como se ha dicho en muchísimas ocasiones *núcleo* de esta ecuación, la supondremos que es medible y verifica la condición

$$\int_a^b \int_a^b |K^2(x, t)| dx dt < \infty \quad (4.2.4)$$

El término independiente $f(x)$ de esta ecuación es una función dada de $L_2([a, b])$ y ϕ es la función incógnita perteneciente también a $L_2([a, b])$.

Pongamos en correspondencia a la ecuación (4.2.3) con el operador $A : L_2([a, b]) \longrightarrow L_2([a, b])$, definido del modo siguiente:

$$A\phi = \psi \quad \text{donde} \quad (A\phi)(x) = \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt = \psi(x) \quad (4.2.5)$$

El estudio de la ecuación (4.2.3) se reduce, por supuesto, al estudio de las propiedades de este operador A llamado operador de Fredholm de núcleo K . Se sabe del análisis funcional que un operador entre espacios de Hilbert es *totalmente continuo* si transforma conjuntos débilmente compactos en conjuntos relativamente compactos según la topología fuerte, pero esto es completamente equivalente a demostrar que el operador transforma toda sucesión débilmente convergente en una sucesión fuertemente convergente (entendiendo fuertemente como la topología definida por la norma del espacio). Tenemos a continuación el siguiente resultado fundamental en la teoría cualitativa de las ecuaciones integrales.

TEOREMA 1. *La igualdad $\psi(x) = \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt$, donde $K(x, t)$ es una función de cuadrado integrable, es decir en el espacio $L_2([a, b])$ un operador lineal totalmente continuo A , cuya norma satisface la desigualdad*

$$\|A\| < \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K^2(x, t)| dx dt} \quad (4.2.6)$$

Demostración: Observemos, ante todo, que la integral $\int_a^b |K^2(x, t)| dt$ existe, debido al teorema de Fubini y a la condición (4.2.4) (vea el numeral 74 del fascículo de resultados de mi trabajo [6] sobre teoría de Integración en el ciberespacio) para casi todo x . En otras palabras $K(x, t)$ pertenece como función de t a $L_2([a, b])$ para casi todo x . Como el producto de dos funciones de cuadrado sumable es sumable, la integral que figura en el miembro derecho de (4.2.5) existe para casi todo x , es decir la función ψ está definida en casi todos los puntos. Probemos que $\psi \in L_2([a, b])$, en virtud de la desigualdad de Cauchy tenemos para casi todo x

$$\begin{aligned} |\psi^2(x)| &= \left| \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt \right|^2 \leq \int_a^b |K^2(x, t)| dt \int_a^b |\phi^2(t)| dt \\ &= \|\phi\|^2 \int_a^b |K^2(x, t)| dt. \end{aligned}$$

Integrando respecto a x y sustituyendo la integral iterada de $|K^2(x, t)|$ por una integral doble obtenemos la desigualdad

$$\|A\phi\|^2 = \int_a^b |\psi^2(x)| dx \leq \|\phi\|^2 \int_a^b \int_a^b |K^2(x, t)| dx dt$$

que además de probar la integrabilidad de $|\psi^2(x)|$ se demuestra la estimativa (4.2.6) para la norma del operador A . Resta probar que el operador A es totalmenmte continuo. Sea $\{\psi_n\}$ un sistema ortogonal completo de $L_2([a, b])$. Entonces todos los productos del tipo $\psi_m(x)\psi_n(t)$ forman un sistema completo en el espacio $L_2([a, b] \times [a, b])$ y por consiguiente

$$K(x, t) = \sum_m \sum_n a_{mn} \psi_m(x) \psi_n(t)$$

Demostremos ahora

$$K_N(x, t) = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N a_{mn} \psi_m(x) \psi_n(t)$$

y sea A_N el operador correspondiente al núcleo K_N . Este operador es totalmente continuo ya que transforma todo el espacio $L_2([a, b])$ en un subespacio de dimensión finita (los operadores de este tipo han sido llamados degenerados o separables). En efecto, si $\phi \in L_2([a, b])$ se tiene

$$\begin{aligned} A_N \phi &= \int_a^b K_N(x, t) \phi(t) dt = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N a_{mn} \psi_m(x) \int_a^b \phi(t) \psi_n(t) dt \\ &= \sum_{m=1}^N \psi_m(x) \sum_{n=1}^N a_{mn} b_n \end{aligned}$$

donde

$$b_n = \int_a^b \phi(t) \psi_n(t) dt$$

es decir, todo elemento $\phi \in L_2([a, b])$ es transformado por el operador A_N en un elemento del subespacio de dimensión finita generado por los vectores $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N$.

Ahora bien, como K_N es la suma parcial de la serie de Fourier de la función K , tenemos

$$\int_a^b \int_a^b (K(x, t) - K_N(x, t))^2 dx dt \rightarrow 0 \quad \text{para } N \rightarrow \infty.$$

Aplicando la estimativa (4.2.6) al operador $A - A_N$ encontramos de aquí $\|A - A_N\| \rightarrow 0$ para $N \rightarrow \infty$.

Empleando ahora un teorema que afirma que el límite de una sucesión convergente de operadores totalmente continuos es un operador totalmente continuo, obtenemos la continuidad total del operador A . El teorema queda probado.

OBSERVACIONES.

1) Al demostrar el teorema 1 hemos probado que todo operador de Fredholm puede ser representado como límite (en el sentido de la convergencia según la norma) de una sucesión de operadores integrales degenerados (ver § 3 No 3.1).

2) Sean A_1 y A_2 dos operadores del tipo (4.2.5) y sean K_1 y K_2 sus núcleos correspondientes. Si los operadores A_1 y A_2 son iguales, es decir $A_1 \phi = A_2 \phi$ para todo $\phi \in L_2([a, b])$, entonces $K_1(x, t) = K_2(x, t)$ casi en todos los puntos. Veamos esta afirmación, si

$$A_1 \phi - A_2 \phi = \int_a^b (K_1(x, t) - K_2(x, t)) \phi(t) dt = 0$$

para todo $\phi \in L_2([a, b])$, entonces para casi todo $x \in [a, b]$ se tiene

$$\int_a^b |K_1(x, t) - K_2(x, t)|^2 dt = 0$$

es decir

$$\int_a^b \int_a^b |K_1(x, t) - K_2(x, t)|^2 dx dt = 0$$

de donde se desprende nuestra afirmación. Luego podemos decir que la correspondencia entre los operadores integrales y los núcleos es biunívoca.

En la teoría cualitativa de las ecuaciones integrales, una vez establecido el operador asociado, inmediatamente se establecen los operadores conjugados los cuales permiten la solución de ecuaciones mediante procedimientos de inversión.

TEOREMA 2. *Sea A un operador de Fredholm con núcleo $K(x, t)$. Entonces el operador conjugado A^* se define por el núcleo **conjugado** $\overline{K(x, t)}$.*

Demostración. Empleando el teorema de Fubini, tenemos

$$\begin{aligned} (Af, g) &= \int_a^b \left\{ \int_a^b K(x, t) f(t) dt \right\} \overline{g(x)} dx = \int_a^b \int_a^b K(x, t) f(t) \overline{g(x)} dt dx \\ &= \int_a^b \left\{ \int_a^b K(x, t) \overline{g(x)} dx \right\} f(t) dt = \int_a^b f(t) \overline{\left\{ \int_a^b \overline{K(x, t)} g(x) dx \right\}} dt \\ &= (f, A^*g), \end{aligned}$$

de donde

$$A^*g = \int_a^b \overline{K(x, t)} g(x) dx,$$

y de aquí se deduce la afirmación del teorema.

En particular, un operador A de tipo $\psi(x) = \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt$ es autoconjugado en $L_2([a, b])$, es decir, $A^* = A$ si y sólo si $\overline{K(x, t)} = K(t, x)$.

En el caso en que se considere el espacio de Hilbert real (y, por lo tanto, núcleos reales K) la condición de autoconjugación está dada por la igualdad

$$K(x, t) = K(t, x).$$

OBSERVACIÓN. Hemos considerado operadores integrales que actúan en el espacio $L_2([a, b])$. No obstante, todo lo expuesto se extiende sin modificaciones al caso en que se considere, en lugar del segmento $[a, b]$, un espacio cualquiera provisto de medida.

4.3. Ecuaciones de núcleo simétrico.

Consideremos una ecuación integral de Fredholm de segunda especie

$$\phi(x) = \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt + f(x) \quad (4.3.1)$$

cuyo núcleo verifica las condiciones

$$(i) \int_a^b \int_a^b |K^2(x, t)| dx dt < \infty$$

$$(ii) K(x, t) = \overline{K(t, x)}$$

Estas ecuaciones serán llamadas de núcleo *simétrico*. En virtud de los teoremas 1 y 2 del numeral 4.2 anterior, el operador de Fredholm correspondiente

$$A\phi = \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt \quad (4.3.2)$$

es totalmente continuo y autoconjugado. Luego es válido para él, el teorema de Hilbert–Schmidt que dice: *Para cualquier operador lineal A autoconjugado y totalmente continuo en un espacio de Hilbert H , existe un sistema ortonormal $\{\phi_n\}$ de vectores propios correspondientes a valores propios $\{\lambda_n\}$ tal que cada elemento $\xi \in H$ se puede escribir de manera única en la forma*

$$\xi = \sum_k c_k \phi_k + \xi' \quad \text{donde} \quad A\xi' = 0.$$

Aplicando este teorema a la solución de la ecuación (4.3.1), como lo que importa no es la forma integral del operador (4.3.2) sino el hecho de que este operador es totalmente continuo y autoconjugado, es natural escribir la ecuación (4.3.1) en la forma

$$\phi = A\phi + f. \quad (4.3.3)$$

De acuerdo con el teorema de Hilbert–Schmidt existe para el operador A un sistema ortogonal $\{\phi_n\}$ de funciones propias correspondientes a los valores propios $\{\lambda_n\}$ para los cuales tenemos

$$f = \sum_n b_n \psi_n + f' \quad (Af' = 0) \quad (4.3.4)$$

y busquemos la solución ϕ de la ecuación (4.3.3) en la forma

$$\phi = \sum_n \chi_n \psi_n + \phi' \quad (A\phi' = 0) \quad (4.3.5)$$

Introduciendo los desarrollos (4.3.4) y (4.3.5) en (4.3.3), obtenemos

$$\sum_n \chi_n \psi_n + \phi' = \sum_n \chi_n \lambda_n \psi_n + \sum_n b_n \psi_n + f'.$$

Esta igualdad se cumple si y sólo si

$$f' = \phi', \text{ y, } \chi_n(1 - \lambda_n) = b_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

es decir, cuando

$$\begin{aligned} f' &= \phi' \\ \chi_n &= \frac{b_n}{1 - \lambda_n} \quad \text{para } \lambda_n \neq 1 \\ b_n &= 0 \quad \text{para } \lambda_n = 1. \end{aligned}$$

La última igualdad es una condición necesaria y suficiente para que la ecuación (4.3.3) tenga solución.

Teniéndose así el siguiente resultado:

Si 1 no es valor propio del operador A , la ecuación $\phi = A\phi + f$ tiene una solución y sólo una cualquiera que sea f ; en cambio, si 1 es valor propio del operador A , la ecuación $\phi = A\phi + f$ tiene solución si y sólo si, el término independiente f es ortogonal a todas las funciones propias del operador A correspondiente al valor propio 1; si esta última condición se cumple la ecuación $\phi = A\phi + f$ tiene un conjunto infinito de soluciones.

§5. ALTERNATIVA DE FREDHOLM.

5.1. Caso de las ecuaciones integrales.

De la última afirmación del §4 se sigue: los teoremas de Fredholm tratan, de hecho, sobre la posibilidad de invertir el operador $A - I$ y significa que $\lambda = 1$ es, o bien un punto regular del operador A o bien un valor

propio de multiplicidad finita. Por supuesto todo lo que se afirma en estos teoremas sigue siendo válido también para operadores $A - \lambda I$, donde $\lambda \neq 0$. Luego *todo punto distinto de 0 del espectro de un operador totalmente continuo es un valor propio suyo de multiplicidad finita*. Además como se sabe el conjunto de estos valores propios es a lo sumo numerable. Recordemos de paso, que el punto 0 siempre pertenece al espectro de un operador totalmente continuo en un espacio de dimensión infinita; pero en general, no es necesariamente un valor propio. Los operadores totalmente continuos para los cuales 0 es el *único* punto del espectro, son llamados *operadores de Volterra*, u operadores abstractos.

Los teoremas de Fredholm fueron originalmente presentados para ecuaciones integrales y bajo este aspecto los presentamos a continuación; sus demostraciones no las damos, pues, las daremos después cuando presentemos estos mismos teoremas para operadores totalmente continuos.

TEOREMA 1. (Alternativa de Fredholm) *O bien la ecuación integral no homogénea de segunda especie*

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt = f(x)$$

tiene una única solución para cualquier función $f(x)$, o la ecuación homogénea correspondiente

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt = 0$$

tiene por lo menos una solución no trivial.

TEOREMA 2. *Si para la ecuación $\phi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt = f(x)$ tiene lugar el primer caso de la alternativa, éste tiene lugar también para la ecuación conjugada*

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K(t, x) \psi(t) dt = g(x)$$

La ecuación integral homogénea $\phi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt = 0$ y su ecuación conjugada

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K(t, x) \psi(t) dt = 0$$

tienen el mismo número finito de soluciones linealmente independientes.

TEOREMA 3. *La condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución $\phi(x)$ de la ecuación no homogénea*

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt = f(x)$$

es que

$$\int_a^b f(x) z(x) dx = 0$$

donde $z(x)$ es cualquier solución de la ecuación homogénea

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt = 0.$$

Es justamente el Teorema 3 el que nos permite calcular soluciones de las ecuaciones integrales mediante las funciones propias en el §3.

5.2. Teoremas de Fredholm.

Caso de los núcleos degenerados.

Pasamos ahora a estudiar las ecuaciones de Fredholm de segunda especie con núcleos que verifican la condición

$$\int_a^b \int_a^b |K^2(x, t)| dx dt < \infty$$

(lo cual garantiza la continuidad total del operador correspondiente) pero que no son simétricos, supongamos primero que se considera la ecuación

$$\phi(x) = \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt + f(x) \quad (5.2.1)$$

cuyo núcleo es degenerado, es decir, de la forma

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^n P_i(x) Q_i(t) \quad (5.2.2)$$

donde P_i, Q_i son funciones de $L_2([a, b])$. El operador con núcleo (5.2.2) transforma toda función $\phi \in L_2([a, b])$ en la suma

$$\sum_{i=1}^n P_i(x) \int_a^b Q_i(t) \phi(t) dt$$

es decir, es un elemento del subespacio de dimensión finita generado por las funciones $P_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Notemos que en la expresión (5.2.2) las funciones P_1, P_2, \dots, P_n pueden ser consideradas linealmente independientes. En efecto, si esto no fuese así podríamos, expresar cada una de las funciones P_i como combinación lineal de las funciones independientes y representar este mismo núcleo $K(x, t)$ como suma de un número menor de sumandos de tipo $\tilde{P}_j(x) \tilde{Q}_j(t)$ de manera que las funciones \tilde{P}_j sean linealmente independientes.

Busquemos, pues, la solución de la ecuación (5.2.1) con núcleo degenerado (5.2.2) en el que las funciones P_1, P_2, \dots, P_n son linealmente independientes. Tomando en la ecuación (5.2.1) en lugar de $K(x, t)$ la suma correspondiente, obtenemos

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n P_i(x) \int_a^b Q_i(t) dt + f(x) \quad (5.2.3)$$

Denotando por $q_i = \int_a^b Q_i(t) \phi(t) dt$, podemos escribir

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n q_i P_i(x) + f(x).$$

Tomando en la ecuación (5.2.1) esta expresión para ϕ , obtenemos

$$\sum_{i=1}^n q_i P_i(x) + f(x) = \sum_{i=1}^n P_i(x) \int_a^b Q_i(t) \left[\sum_{j=1}^n q_j P_j(t) + f(t) \right] dt + f(x).$$

Haciendo (ver §3 No.3.1)

$$\int_a^b Q_i(t) P_j(t) dt = a_{ij}, \quad \int_a^b Q_i(t) f(t) dt = b_i$$

La igualdad anterior resulta

$$\sum_{i=1}^n q_i P_i(x) = \sum_{i=1}^n P_i(x) \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j + b_i \right].$$

Como las funciones P_i son, por hipótesis, linealmente independientes, esta igualdad implica la igualdad de los respectivos coeficientes de $P_i(x)$

$$q_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j + b_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.2.4)$$

Hemos obtenido para los coeficientes q_i un sistema de ecuaciones lineales. Resolviéndolo, obtenemos la función deseada

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n q_i P_i(x) + f(x)$$

esta función satisface la ecuación integral (5.2.1) ya que todos los razonamientos, mediante los cuales hemos pasado de la ecuación (5.2.1) al sistema (5.2.4), pueden ser reemplazados en orden contrario. Luego, *la solución de una ecuación integral de núcleo degenerado se reduce a la solución del correspondiente sistema (5.2.4) de ecuaciones lineales algebraicas.*

Para sistemas de ecuaciones lineales son conocidas las condiciones de existencia y de unicidad de la solución, los teoremas de Fredholm se enunciarán así:

I. Un sistema de ecuaciones lineales algebraicas $Tx = y$ ($T = (a_{ik})$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$) tiene solución si y sólo si el vector y es ortogonal a toda solución del sistema homogéneo conjugado

$$T^*z = 0 \quad (T^* = (\bar{a}_{ij})).$$

II. Si el determinante de una matriz T es diferente de cero, la ecuación $Tx = y$ tiene solución única para cualquier y . En cambio, si el determinante de la matriz T es igual a cero, la ecuación $Tx = 0$ tiene solución no nula.

III. Como la matriz T y la matriz conjugada T^* son del mismo rango, los sistemas homogéneos $Tx = 0$ y $T^*z = 0$ tienen el mismo número de soluciones linealmente independientes.

Debido a la relación que, como hemos visto, existe entre ecuaciones integrales de núcleo degenerado y sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, estas proposiciones pueden ser consideradas como teoremas referentes a las soluciones y, de hecho, estos mismos teoremas tienen lugar también para ecuaciones de núcleo arbitrario (no degenerados). Sin embargo, puesto que para operadores integrales con núcleos no degenerados no tienen sentido conceptos como "*rango*" y "*determinante*" de una matriz, los teoremas correspondientes deben ser enunciados de manera que en ellos no figuren estos conceptos.

5.3. Teoremas de Fredholm para ecuaciones integrales de núcleo no degenerado.

Volvamos a considerar la ecuación

$$\phi(x) = \int_a^b K(x, t)\phi(t) dt + f(x) \quad (5.3.1)$$

suponiendo ahora que su núcleo verifica sólo la condición

$$\int_a^b \int_a^b |K^2(x, t)| dx dt < \infty ,$$

(esta desigualdad garantiza la continuidad total del operador correspondiente), es decir, no suponemos ahora el núcleo ni degenerado ni simétrico. Nos interesan las condiciones en las que la ecuación (5.3.1) tiene solución y las propiedades de sus soluciones. Además, para nosotros será esencial sólo la propiedad de continuidad total del operador correspondiente a la ecuación (5.3.1) y no su forma integral. Por lo tanto, realizaremos todas las consideraciones sucesivas, para la ecuación con operadores

$$\phi = A\phi + f \quad (5.3.2)$$

donde A es un operador arbitrario totalmente continuo definido en un espacio de Hilbert H .

Tomando $T = I - A$ (donde I es el operador unidad), escribamos la ecuación $\phi = A\phi + f$ en la forma

$$T\phi = f. \quad (5.3.3)$$

Además de esta ecuación, consideraremos la ecuación homogénea

$$T\phi_0 = 0 \quad (5.3.4)$$

y las ecuaciones conjugadas

$$T^*\psi = g \quad (5.3.5)$$

$$T^*\psi_0 = 0 \quad (5.3.6)$$

($T^* = I - A^*$). La relación que existe entre las soluciones de estas cuatro ecuaciones viene expresada en los siguientes teoremas de Fredholm.

I. La ecuación no homogénea $T\phi = f$ tiene solución para aquellas f y sólo para aquellas que son ortogonales a todas solución de la ecuación homogénea conjugada $T^\psi_0 = 0$.*

II. (Alternativa de Fredholm). O bien la ecuación $T\phi = f$ tiene una solución y sólo una, cualquiera sea $f \in H$, o bien la ecuación homogénea $T\phi_0 = 0$ tiene solución no nula.

III. Las ecuaciones homogéneas de $T\phi = f$ y $T^\psi = g$ tienen el mismo número, además finito, de soluciones linealmente independientes.*

Antes de pasar a demostrar estos teoremas, observemos que son válidos (en virtud de lo dicho en el §4. No.3) para ecuaciones con núcleo simétrico. Además como A y A^* coinciden en este caso, el Teorema III resulta trivial.

Por otro lado, si A es un operador integral degenerado, las ecuaciones correspondientes se reducen, como hemos visto a sistemas de ecuaciones lineales algebraicas; los teoremas de Fredholm se convierten, evidentemente, en este caso a los teoremas sobre sistemas lineales que hemos enunciado en el punto anterior y que hemos estudiado en la alternativa de Roche–Frobenius (ver [7]).

Aprovechando que todo operador integral es límite de una sucesión convergente de operadores degenerados, podríamos demostrar los teoremas de Fredholm mediante el correspondiente paso al límite (de núcleos degenerados a núcleos no degenerados). Sin embargo, escogemos otro camino y daremos una demostración de estos teoremas que no está relacionada con la consideración de ecuaciones con núcleo degenerado.

5.4 Demostración de los Teoremas de Fredholm.

Sea $N(B)$ el conjunto de los ceros de un operador $B: H \longrightarrow H$ lineal continuo (el núcleo de B), es decir, el conjunto de aquellos $x \in H$ para los cuales $Bx = 0$. Es conocido que $N(B)$ es un subespacio lineal cerrado. Sea $R(B) = \{y = Bx/x \in H\}$ el recorrido del operador B , $R(B)$ como es sabido es un subespacio vectorial o variedad lineal pero en general no es cerrado.

Sea $A: H \longrightarrow H$ un operador lineal continuo, consideremos el operador $T = I - A$ y sea $R(T)$ su recorrido, en este caso se tiene que $R(T)$ es cerrado, esto lo veremos en el siguiente Lema 1.

La demostración de los teoremas de Fredholm sigue los siguientes lemas:

LEMA 1. *El subespacio $R(T)$ es cerrado.*

Demostración. Sea $y_n \in R(T)$ una sucesión tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Por hipótesis, existen vectores $x_n \in H$ tales que

$$y_n = Tx_n = x_n - Ax_n \quad (5.4.1)$$

Podemos suponer sin perder generalidad que estos vectores son ortogonales al núcleo $N(T)$. Además podemos aceptar que $\|x_n\|$ es una sucesión acotada, pues de lo contrario tendríamos que $\|x_n\| \rightarrow \infty$, y dividiendo por $\|x_n\|$ deduciremos de (5.4.1) que

$$\frac{x_n}{\|x_n\|} - A \frac{x_n}{\|x_n\|} \rightarrow 0$$

Pero como el operador A es totalmente continuo podríamos encontrar una subsucesión $\left\{ A \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\}$ convergente. Por lo tanto, también $\frac{x_n}{\|x_n\|}$ convergerá, digamos a un vector $z \in H$. Es claro que $\|z\| = 1$ y $T(z) = 0$ es decir $z \in N(T)$. Hemos supuesto sin embargo que los vectores x_n son ortogonales a $N(T)$; luego también z debe ser ortogonal a $N(T)$, esto es imposible puesto que si $z \perp N(T)$ y $z \in N(T)$ entonces $\langle z, z \rangle = 0$ y $\|z\| = 1$ una clara contradicción.

Esta contradicción nos permite suponer que $\|x_n\|$ es una sucesión acotada. Al mismo tiempo la sucesión $\{Ax_n\}$ puede suponerse en este caso convergente, entonces como $y_n = Tx_n = x_n - Ax_n$, se sigue que la sucesión $\{y_n\}$ es también convergente. Si x es el límite de esta sucesión, se desprende que $y = Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n$. El lema queda demostrado.

LEMA 2. *El espacio H es la suma directa ortogonal de los subespacios cerrados $N(T)$ y $R(T^*)$, es decir*

$$N(T) \oplus R(T^*) = H \quad (5.4.2)$$

y por analogía

$$N(T^*) \oplus R(T) = H \quad (5.4.3)$$

Demostración. Sabemos que $N(T)$ y $R(T^*)$ son subespacios cerrados. Además son ortogonales ya que, si $h \in N(T)$ se tiene

$$(h, T^*x) = (Th, x) = 0 \quad \text{para todo } x \in H.$$

Falta por demostrar que no existe ningún vector no nulo ortogonal simultáneamente a $R(T^*)$ y $N(T)$. Pero, si el vector z es ortogonal a $R(T^*)$ entonces para cualquier $x \in H$ tenemos $(Tz, x) = (z, T^*x) = 0$ es decir $z \in N(T)$. En esta forma el lema queda demostrado.

Del Lema 2 se desprende inmediatamente el primer teorema de Fredholm. En efecto, $f \perp N(T^*)$ si y sólo si $f \in R(T)$, es decir existe un ϕ tal que $T\phi = f$.

Pongamos ahora $H^k = R(T^k)$ para cada k entero, de manera que en particular $H^1 = R(T)$. Está claro que los subespacios forman una cadena de subespacios encajados.

$$H \supseteq H^1 \supseteq H^2 \supseteq \dots \quad (5.4.4)$$

y en virtud del Lema 1, todos estos subespacios son cerrados. Además $T(H^k) = H^{k+1}$.

LEMA 3. *Existe un j tal que $H^{k+1} = H^k$ para todo $k \geq j$.*

Demostración. Si no existiera tal j , es evidente que todos los H^k son distintos. En este caso podemos construir una sucesión ortogonal $\{x_k\}$ tal que $x_k \in H^k$ y son ortogonales a H^{k+1} . Sea $l > k$, entonces

$$Ax_l - Ax_k = -x_k + (x_l + Tx_k - Tx_l)$$

y por lo tanto $\|Ax_l - Ax_k\| \geq 1$ ya que $x_l + Tx_k - Tx_l \in H^{k+1}$.

Luego, de la sucesión $\{Ax_k\}$ no se puede extraer ninguna subsucesión convergente, lo que contradice a la continuidad total del operador A . Con esto queda demostrado el lema.

LEMA 4. *Si $N(T) = \{0\}$ se tiene $R(T) = H$.*

Demostración. Si $N(T) = \{0\}$, entonces el operador T es uno a uno; de manera que suponiendo $R(T) \neq H$, la cadena (5.4.4) no sería estacionaria (o sea constaría de infinitud de subespacios) y esto contradice el lema 3. Luego $R(T) = H$.

Análogamente, $R(T^*) = H$, si se tiene $N(T^*) = \{0\}$.

LEMA 5. Si $R(T) = H$, se tiene $N(T) = \{0\}$.

Demostración. Como $R(T) = H$, tenemos en virtud del Lema 2, $N(T^*) = \{0\}$; pero entonces, en virtud del Lema 4, $R(T^*) = H$ y por consiguiente del lema 2 se sigue $N(T) = \{0\}$.

Los lemas 4 y 5 constituyen en conjunto el contenido del segundo teorema (la alternativa) de Fredholm. Con esto queda demostrado el Teorema II.

Demostremos finalmente, el tercer teorema de Fredholm.

Supongamos que el subespacio $N(T)$ es de dimensión infinita. Entonces, existe en este subespacio un sistema ortonormal infinito $\{x_k\}$. Además $Ax_k = x_k$ de manera que para $k \neq l$ tenemos $\|Ax_k - Ax_l\| = \sqrt{2}$. Pero, esto significa que de la sucesión $\{Ax_k\}$ no se puede extraer ninguna subsucesión convergente, lo que contradice a la continuidad total del operador A .

Sea μ la dimensión de $N(T)$ y sea ν la dimensión de $N(T^*)$. Supongamos que $\mu < \nu$. Sea $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_\mu\}$ una base ortonormal en $N(T)$ y sea $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_\nu$ una base ortonormal de $N(T^*)$. Tomemos

$$Sx = Tx + \sum_{j=1}^{\mu} (x, \phi_j) \psi_j .$$

Como el operador S se obtiene del operador T agregándole un operador degenerado, todos los resultados demostrados más arriba para el operador T son válidos también para el operador S .

Probemos que la ecuación $Sx = 0$ tienen solamente solución trivial. En efecto; supongamos que

$$Tx + \sum_{j=1}^{\mu} (x, \phi_j) \psi_j = 0 \tag{5.4.5}$$

Como los vectores ψ_j son ortogonales en virtud del Lema 2, a todos los vectores del tipo Tx , de (5.4.5) se deduce que $Tx = 0$ y $(x, \phi_j) = 0$ para $1 \leq j \leq \mu$.

Luego, el vector x debe ser, por un lado, una combinación lineal de los vectores ϕ_j y, por otro lado, debe ser ortogonal a ellos. Por consiguiente $x = 0$. De modo que la ecuación $Sx = 0$ tiene solamente la solución trivial. Existe entonces, de acuerdo con el teorema II, un vector y tal que

$$Ty + \sum_{j=1}^{\mu} (y, \phi_j) \psi_j = \psi_{\mu+1}.$$

Está claro que multiplicando esta igualdad escalarmente por $\psi_{\mu+1}$, obtenemos 0 en el lado izquierdo y 1 en el lado derecho. Esta contradicción ha surgido por que hemos supuesto $\mu < \nu$. Luego $\mu \geq \nu$, por lo tanto $\mu = \nu$. El Teorema III queda demostrado completamente.

OBSERVACIÓN. Hemos demostrado los teoremas de Fredholm para ecuaciones del tipo $\phi = A\phi + f$, donde A es un operador totalmente continuo en un espacio de Hilbert H . Estos teoremas pueden ser extendidos sin modificaciones sustanciales al caso de un espacio de Banach arbitrario \mathbb{E} . En este caso es claro que la ecuación conjugada $\psi = A^*\psi + g$ será una ecuación en el espacio \mathbb{E}^* , la condición de ortogonalidad $(f, \psi_0) = 0$ debe comprenderse en el sentido de que toda función del subespacio $N^* \subset \mathbb{E}^*$ de soluciones de la ecuación $A^*\psi_0 = 0$ se anula en el elemento $f \in \mathbb{E}$, etc.

Una exposición de los teoremas de Fredholm para el caso de ecuaciones en espacios de Banach se puede ver en artículos como los de L. A. Lusternik y otros, y en las notas de clase de Luis Ortega sobre elementos de Análisis Funcional.

□

5.5. EJERCICIOS

1. Consideremos en un segmento (o un intervalo) una ecuación integral de Fredholm de segunda especie con núcleo continuo. Demuestre para esta ecuación los teoremas de Fredholm en el *espacio de funciones continuas*. Este es el caso, el papel de "ecuaciones conjugadas" lo desempeña la ecuación integral de núcleo transpuesto y la ortogonalidad se comprende en el sentido de L_2 .

2. Sean λ_1 y λ_2 raíces características distintas constantes del núcleo $K(x, t)$. Pruebe que las funciones propias de las ecuaciones

$$\begin{aligned}\phi(x) - \lambda_1 \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt &= 0 \\ \psi(x) - \bar{\lambda}_2 \int_a^b \overline{K(x, t)} \psi(t) dt &= 0\end{aligned}$$

son acotadas y que $(\phi, \psi) = 0$.

3. Pruebe que el operador integral

$$T\phi = \int_a^b \frac{A(x,t)\phi(t) dt}{|x-t| |\ln|x-s||^{1+\alpha}}$$

donde $|A(x,t)| \leq C = \text{constan}$, $\alpha > 0$, $b - a < 1$, es completamente continuo.

4. Pruebe que un operador completamente continuo transforma cualquier conjunto acotado en un conjunto compacto.

5. Sea A un operador acotado y supongamos que la ecuación $A\phi = f(x)$ es soluble. Pruebe que las ecuaciones $A\phi = f$ y $A^*A\phi = A^*f$ son equivalentes.

6. Sea A un operador acotado cualquiera. Pruebe que los operadores AA^* y A^*A son simétricos.

7. Sea T un operador completamente continuo. Pruebe que las ecuaciones $\phi = \lambda T^*T\phi$ y $\psi = \lambda TT^*\psi$ tienen una y la misma raíz característica constante.

$$\Delta \nabla \Delta$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] V. Volterra, *Theory of functionals and of integral and Integro-differential equations*. Dover Publications, INC. New York (1959).
- [2] W.V.Lovitt, *Linear Integral Equations*. Dover Publications, INC. New York (1950).
- [3] S.G.Mikhlin, *Linear Integral Equations*. Hindustan Publishong Corp. (India) Delhi (1960).
- [4] S.G.Mikhlin, *Integral Equations and their applications to Certain Problems in Mechanic, Mathematical Physics and Technology*. The MacMillan Company, New York (1964).
- [5] I.G.Petrovskii. *Lectures on the Theory of Integral Equations*. Graylock Press Rochester, New York (1957)

- [6] J.D.Sánchez H, *Teoría de la Medida e Integración*. Curso para cibernautas 2004.
- [7] J.D.Sánchez H, *Alternativa de Rouche–Frobenius*. Aportes para cibernautas junio del 2006.

$\Delta \nabla \Delta$

Espero que el lector haya obtenido algún provecho de este trabajo en el aprendizaje de las Ecuaciones Integrales

Quiero agradecer a mi hijo Juan Armando quien ha sido un animador permanente de este proyecto de aprendizaje en matemática y que sin él habría sido imposible realizarlo. También a mi esposa Nohora y a Esperanza, quienes leyeron los originales y cuidaron del buen manejo del lenguaje español.

Exitos y bienvenidos a la investigación por internet. Cualquier comentario favor hacerlo llegar a:

danojuanos@hotmail.com,
danojuanos@tutopia.com
danojuanos@yahoo.com

Copyright© Darío Sánchez Hernández