지난시간정리.

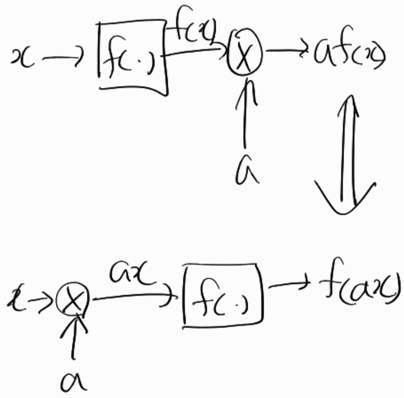
Linearity : $f(x)$, operation

1) Superposition.

$$f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2)$$

2) homogeniety

$$f(ax) = a\cdot f(x)$$



$$f(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1f(x_1)+a_2f(x_2)$$

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k)$$

이런걸 만족하는것은 → 원점을 지나는 직선/평면 (평면) (공간상)

→ Vector

⇓

Linearity를 거의 만족한다.

Vector (column notation)

$$V=\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \quad W=\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{x\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}}$$

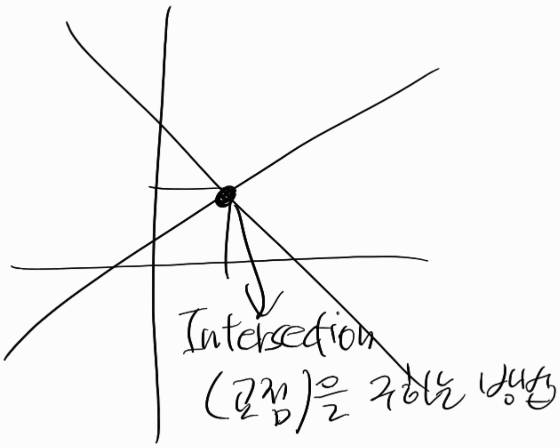
→ Linear combination of column vector

$\Rightarrow Ax$

Column Vector 연립방정식

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ 4x+5y=6 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$



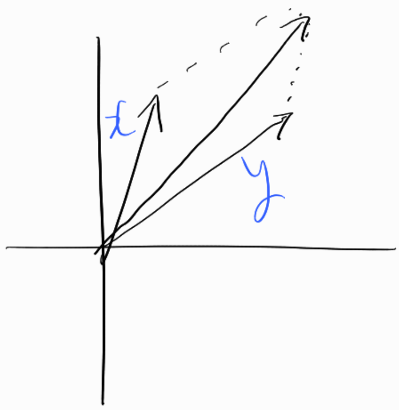
↓

① 행렬로 변경

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

② Vector column lotation

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$



∘ Singular Case

→ no solution (해가 없다)

→ infinite solutions (해가 무수히 많다)

(1) row form

⇒ parallel (평행) <방정식 자체가 평행하다는 의미)

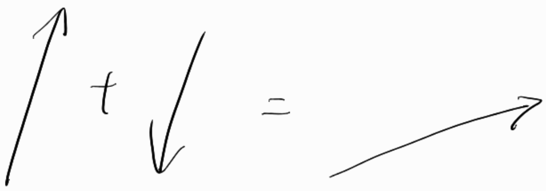
⇒ overlap (직선이나 평면이 겹침)

(2) column form

$x[\ \ ] + y[\ \ ] \Rightarrow [\ \ ]$

(열방향이 평행하다는 의미)

⇒ column parallel



↳ no solution

1.3 Gauss Elimination

Example)

pivot (non-zero)

$$\begin{cases} 2u+v+w=5 & -① \\ 4u-6v = -2 & -② \\ -2u+7v+2w=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ll} 2u+v+w=5 & \\ 0\ -8v-2w=-12 & \cdots ②-(①\times 2) \\ 0\ 8v+3w=14 & \cdots ③+① \end{array}$$

↳ 2^{nd} pivot

w값과 v값 대입 ⇒ u값이 나옴.

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} 2u+v+w=5 & \\ -8v-2w=-12 & \\ 1w=2 & \cdots ③+② \end{array}$$

w값 대입

3^{rd} pivot (last)

back-substitution

(역치환방법)

↳ 가우스소거법의 제일 간단한 방법.

⇒ ~~All pivots are non-zero : GE has a unique sol~~

⇓ 행렬식으로.

pivot의 위치가 nonzero ⇒ 해가 1개다.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

upper triangular matrix = U

Breakdown ⇒ when a zero appears in a pivot position

→ pivot이 0이 될수도 있는데 방정식의 순서를 변경하기.

- G.E has to stop

⇒ the order of eqns has to be changed

↳ pivoting.

Ex 1)

$$\begin{aligned} u+v+w&=a \\ 2u+2v+5w&=b \\ 4u+6v+8w&=c \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} u+v+w&=a \\ 0\ 0\ 3w&=b-2a \cdots ② - ① \times 2 \\ 0\ 2v+4w&=c-4a \cdots ③ - ① \times 4 \end{aligned}$$

2nd pivot이 0이됨.

바꾸기.

$$\begin{aligned} u+v+w&=a \\ 2v+4w&=c-4a \\ w&=b-2a \end{aligned}$$

⇒ 유니크한 해를 구할수 있음

(가우스소거법을 해도 해를 구할수없는)

Ex 2)

$$\begin{cases} u+v+w=a \\ 2u+2v+5w=b \\ 4u+4v+8w=c \end{cases} \xRightarrow{GE} \begin{aligned} u+v+w&=a \\ 3w&=b-2a \\ 4w&=c-4a \end{aligned} \Rightarrow$$

2번째식 $w = \frac{b-2a}{3} \cdots ①$

3번째식 $w = \frac{c-4a}{4} \cdots ②$

- ① = ②를 만족하는 값이 있으면

해가 무수히 많다

eg) $a=0,\ b=3,\ C=4 \Rightarrow w=1$

- ① ≠ ②

w가 존재하지 않으므로 평면이 만나지 않는다.

동시에

eg) $a=0,\ b=3,\ C=8$

1.4 Matrix multiplication

Square system → 선형대수를 G.E로 풀이 가능.

미지수개수 = 방정식 개수


⇒ chapter 1

미지수개수 ≠ 방정식개수

$$\begin{cases} 2u+v+w=5 \\ 4u-6v \qquad = -2 \\ -2u+7v+2w=9 \end{cases}$$

not-square system.

↳ G.E로 풀지만 컬럼 벡터를 이용해서 풀게 된다.

$$u\begin{bmatrix}2\\4\\-2\end{bmatrix}+v\begin{bmatrix}1\\-6\\7\end{bmatrix}+w\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-2\\9\end{bmatrix}$$

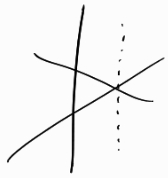

⇒ 미지수 > 방정식개수

Chapter 2.


⇒ 미지수 < 방정식 개수
개수

해가 없다!

Chapter3



Chaper 1, chapter 2 ⇒ G.E

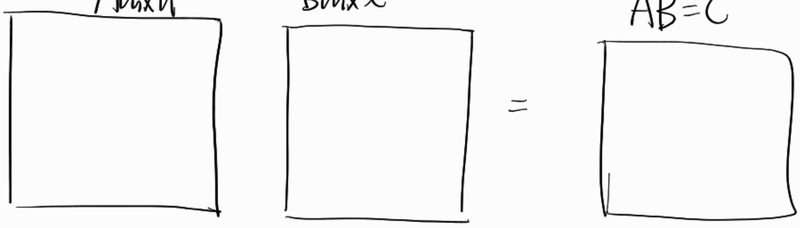
Chapter3 ⇒ inner prod (projection)

↳ 해가 없지만 제일 best 해를 찾는 챕터

행렬곱셈 주의점

①

$A_{m\times n}$ $\quad$ $B_{m\times l}$ $\quad$ $AB=C$



$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj}$$

② $AB \neq BA$

$$AB = A\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_l \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_l \end{bmatrix}$$