随机过程

例题和作业题解析笔记

做笔记人 徐晨凯, xckxxy163@.com

老师 骆老师

随机过程只考上课讲过的例题和作业题,作业题有答案，但是有些我还是看不懂，通过做这个笔记，来锻炼我的 $\LaTeX$ 技术和对随机过程的理解，希望我可以在期中和期末取得好成绩。

Problem 1: 泊松过程例题 1：保险索赔问题

向某保险公司索赔的次数形成一个强度是 λ 的 Poisson 过程，第 i 次索赔金额为 $C_i(E(C_i = u))$，且独立于索赔次数和索赔到达时刻。已知银行存款年利率为 α 。求 [0, t] 内索赔总金额在 t = 0 处的贴现平均值。

解答:

设 $N(t)$ 为 [0, t] 内索赔次数，T_i 为第 i 次索赔到达时刻，C_i 为第 i 次索赔金额。则 $R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} C_i e^{-\alpha T_i}$, 下求 $R(t)$ 的期望

$$
\begin{aligned}
E[R(t)] &= E[E[R(t)|N(t)]] \\
&= E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} C_i e^{-\alpha T_i}\middle|N(t)\right]\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^{n} C_i e^{-\alpha T_i}\middle|N(t)=n\right] e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} uE[e^{-\alpha T_i}|N(t)=n]e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}
\end{aligned}
$$

问题转化为求 $E[e^{-\alpha T_i}|N(t)=n]$, 有下列引理：$T_i$ **的已知 N(t) 的条件分布为 [0,t] 上的均匀分布**, 即：

$$f_{T_i|N(t)} = \frac{1}{t}$$

推得:

$$\begin{aligned}
E[e^{-\alpha T_i}|N(t)=n] &= \int_0^t e^{-\alpha x} f_{T_i|N(t)} dx \\
&= \int_0^t e^{-\alpha x} \frac{1}{t} dx \\
&= \frac{1}{t}\int_0^t e^{-\alpha x} dx \\
&= \frac{1}{\alpha t}(1-e^{-\alpha t})
\end{aligned}$$

代入原式，得:

$$\begin{aligned}
E(R(t)) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} uE[e^{-\alpha T_i}|N(t)=n] e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} nu\frac{1}{\alpha t}\left(1-e^{-\alpha t}\right) e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \\
&= \frac{u(1-e^{-\alpha t})}{\alpha t}\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \\
&= \frac{\lambda u(1-e^{-\alpha t})}{\alpha}
\end{aligned}$$

注意到倒数第二步中 $\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$ 实际上是一个参数为 λt 的泊松分布的期望，因此容易知道其等于 λ

思路总结: 本题的关键在于利用全期望公式和条件期望，并运用泊松过程的性质。特别是利用到了条件于 $N(t)=n$ 时，到达时刻 T_i 在 $[0,t]$ 上均匀分布的性质，这是解决泊松过程时间问题的常用技巧。注意识别泊松分布的期望 λt 可以大大简化计算。

Problem 2: 泊松过程例题 2: 等车时间

乘客以强度是 Λ 的 Poisson 过程到达火车站，火车在时刻 t 开车且带走候车的所有乘客。求：[0, t] 内到达乘客等待时间总和的期望。

解答:

设 $N(t)$ 为 [0, t] 内到达乘客数，T_i 为第 i 个到达乘客的到达时刻。则 $R(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)$，下求 $R(t)$ 的期望

$$
\begin{aligned}
E[R(t)] &= E[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)] \\
&= E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)\middle|N(t)\right]\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^{n}(t-T_i)\middle|N(t)=n\right]P(N(t)=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[nt-\sum_{i=1}^{n}T_i\middle|N(t)=n\right]P(N(t)=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[(nt)P(N(t)=n)\right] - \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^{n}T_i\middle|N(t)=n\right]P(N(t)=n)
\end{aligned}
$$

注意到 $\sum_{n=0}^{\infty} E\left[(n)P(N(t)=n)\right]$ 实际上是一个参数为 λt 的泊松分布的期望乘上 t，因此容易知道其等于 λt^2, 而上文中第二个式子的难点主要在 $E\left[\sum_{i=1}^{n}T_i\middle|N(t)=n\right]$ 部分, 因为引理: **T_i 的已知 N(t) 的条件分布为 [0,t] 上的独立同分布，且为均匀分布**我们可以得到:

$$
E\left[\sum_{i=1}^{n}T_i\middle|N(t)=n\right] = nE[T_i|N(t)=n] = \frac{nt}{2}
$$

现在我们把第二个式子转化为了 $\frac{t}{2}\sum_{n=0}^{\infty} nP(N(t)=n)$, 也可以表示为一个泊松分布的期望乘上 t/2, 因此我们可以得到最后的结果为:

$$
\begin{aligned}
E(R(t)) &= \lambda t \cdot \frac{t}{2} \\
&= \frac{\lambda t^2}{2}
\end{aligned}
$$

思路总结：这道题与例题 1 类似，同样利用了全期望公式。关键是将等待时间表示为 $(t-T_i)$，然后利用到达时刻在 $[0,t]$ 上均匀分布的性质，得到平均到达时间为 $\frac{t}{2}$。最终结果 $\frac{\lambda t^2}{2}$ 有直观解释：平均到达 λt 人，每人平均等待 $\frac{t}{2}$ 时间。

Problem 3: 泊松过程例题 3: 先起飞的概率

达机场的乘客人数形成一个强度是 λ 的 Poisson 过程 (从 t = 0 开始)，假设每个到达乘客选择乘坐飞机 1 的概率为 q，乘坐飞机 2 的概率为 1 − q，且乘客间的选择互独。当飞机 1 有 n_1 个乘客时就起飞，飞机 2 有 n_2 个乘客时就起飞。求：飞机 1 先于飞机 2 起飞的概率（只列出算式）。**解答:**

设 $N_1(t)$ 为 [0, t] 内到达飞机 1 乘客数，$N_2(t)$ 为 [0, t] 内到达飞机 2 乘客数，思路是这样的，飞机 1 咸鱼飞机 2 起飞，可以等价于，当到达飞机 1 的人数达到 n_1 时，到达飞机 2 的人数小于 n_2：

$$\begin{aligned} P\left[\text{飞机1先于飞机2起飞}\right] &= P(N_1(t) = n_1, N_2(t) < n_2) \\ &= \sum_{n_2=0}^{n_2-1} P(N_1(t) = n_1 | N_2(t) = n_2) P(N_2(t) = n_2) \end{aligned}$$

注意到 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 是独立的 Poisson 过程，且参数分别为 λp 和 λq 因此我们可以得到：

$$P(N_1(t) = n_1 | N_2(t) = n_2) = P(N_1(t) = n_1)$$

原式变为：

$$\begin{aligned} P\left[\text{飞机1先于飞机2起飞}\right] &= \sum_{n=0}^{n_2-1} P(N_1(t) = n_1) P(N_2(t) = n_2) \\ &= \sum_{n=0}^{n_2-1} \frac{(\lambda pt)^{n_1}}{n_1!} e^{-\lambda pt} \cdot \frac{(\lambda qt)^{n}}{n!} e^{-\lambda qt} \end{aligned}$$

因为只需要列出等式即可，所以我们不做进一步处理:

思路总结: 这道题体现了泊松过程的” 分流” 性质——将总过程分解为两个独立的泊松过程。注意用 λp 和 λq 表示两个独立过程的强度，这是泊松过程的叠加与分解特性。解题关键在于理解” 飞机 1 先起飞” 等价于” 达到 n_1 人时，飞机 2 乘客数小于 n_2”。

Problem 4: 泊松过程例题 4: 有门槛的出售利润

购买某商品的订单数形成一个强度是 λ 的 Poisson 过程，店主在每个订单上的收益为 x，其 pdf 为 f(x) 。店主采用 y - policy, 即当 x > y 时接受订单，否则拒绝，然后等待下一个订单。假设店主的等待成本为 C/天。问在 y-policy 下，求店主在每一份订单上的平均利润（只考虑等待成本）。**解答:**

这里我们先确认一下题意，y-policy 是指当订单的收益大于 y 时接受订单，否则拒绝订单。而每一次是否拒绝订单的概率是相同的，即:

$$
\begin{aligned}
P(\text{接受订单的概率}) &= \int_y^{\infty} f(x)dx \\
&= 1 - F(y)
\end{aligned}
$$

因此我们可以把总订单数量分解成一个强度是 λP 的 Poisson 过程，所以接受一个订单的时间间 T_i 为独立同分布的满足参数为 λP 的指数分布随机变量，，平均等待时间即为 $E[T_i] = \frac{1}{\lambda P}$, 令 R(t) 为收益，那么每一份订单的平均收益可以表示为

$$
\begin{aligned}
E[R(t)] &= E[X|X > y] - cE[T] \\
&= \int_0^{+\infty} x f_{X|X>y}(x)\, dx - \frac{c}{\lambda p} \\
&= \int_y^{+\infty} x \frac{f(x)}{P}\, dx - \frac{c}{\lambda p} \\
&= \frac{1}{P} \int_y^{+\infty} x f(x)\, dx - \frac{c}{\lambda p}
\end{aligned}
$$

思路总结: 本题结合了泊松过程与条件期望。关键是理解”接受订单”实际上形成了一个稀疏化的泊松过程，其强度变为 λP，其中 $P = 1 - F(y)$ 是接受订单的概率。平均收益需要计算条件期望 $E[X|X > y]$ 并减去等待成本，等待时间服从参数为 λP 的指数分布。

Problem 5: 泊松过程例题 5: 潜伏艾滋病人的数量估计

若感染 HIV 病毒的个体数形成一个强度是 λ（未知）的 Poisson 过程，个体感染到出现症状的时长 Y（潜伏期）的 CDF 是 G(t)（已知）. 调查发现 t 时刻显性 AIDs 病人数量为 K（已知）. 问题：估计 t 时刻隐性 AIDs 病人的平均数量.

解答:

以 $N_1(t)$ 记直到时刻 t 为止显现疾病症状的人数。同样，以 $N_2(t)$ 记直到时刻 t 为止 HIV 为阳性，但是还没有显现任何疾病症状的人数。现在，由于在时刻 s 受到病毒感染的个体以概

率 $G(t-s)$ 在时刻 t 出现症状，而以概率 $\overline{G}(t-s)$ 在时刻 t 不出现症状，$N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 是独立的泊松随机变量，分别有均值。

$$E[N_1(t)] = \lambda \int_0^t G(t-s)\, ds = \lambda \int_0^t G(y)\, dy$$
$$E[N_2(t)] = \lambda \int_0^t \overline{G}(t-s)\, ds = \lambda \int_0^t \overline{G}(y)\, dy$$

如果我们知道 λ 那么我们可以通过均值 $\mathbb{E}[N_2(t)]$ 估计受到感染但是在时间 t 没有任何外部症状的人数 $N_2(t)$. 可是, 由于 λ 未知, 必须首先估计它. 我们现在知道 $N_1(t)$ 的值, 从而可以用此已知值作为其均值 $\mathbb{E}[N_1(t)]$ 的估计. 即如果直到时间 t 为止呈现症状的人数是 K, 那么我们可以估计:

$$K \approx \mathbb{E}[N_1(t)] = \lambda \int_0^t G(y)\, dy$$

推得 λ 的估计量记作 $\hat{\lambda}$

$$\hat{\lambda} = \frac{K}{\int_0^t G(y)\, dy}$$

给出的量 $\hat{\lambda}$ 来估计 λ. 利用 λ 的这个估计, 我们可以用

$$N_2(t) \text{ 的估计} = \hat{\lambda} \int_0^t \overline{G}(y) \mathrm{d}y = \frac{K \int_0^t \overline{G}(y) \mathrm{d}y}{\int_0^t G(y) \mathrm{d}y}$$

思路总结： 这是非常典型的非齐次泊松过程应用，涉及到条件概率和参数估计。关键在于理解感染者会以概率 $G(t-s)$ 在时刻 t 显现症状，从而能够将总过程划分为显性和隐性两个独立泊松过程。注意公式中 $\hat{\lambda}$ 的计算方法，通过已知的显性患者数量反推过程强度，然后估计隐性患者数量。

Problem 6: 泊松过程例题 6: 估计维修频率

设备的使用期限为 10 年，前 5 年平均 2.5 年维修一次，后 5 年平均 2 年维修一次。假设维修次数是强度为 λ 的非齐次 Poisson 过程。求 10 年内只维修过 1 次的概率

解答：

因为维修改数与使用时间有关，故此过程是非齐次泊松过程，强度函数为

$$\lambda(t) = \begin{cases} 1/2.5 & 0 \leq t \leq 5 \\ 1/2 & 5 < t \leq 10 \end{cases}$$

因为 N(10)-N(0) $\sim$ Poisson($m(0,10)$), 下求:

$$m(0,10)=\int_0^{10}\lambda(t)\,dt=\int_0^{5}\frac{1}{2.5}\,dt+\int_5^{10}\frac{1}{2}\,dt=\frac{5}{2.5}+\frac{5}{2}=2+2.5=4.5$$

故在使用期限内只维修过一次的概率为

$$P\{N(10)-N(0)=1\}=\frac{e^{-4.5}\cdot 4.5^1}{1!}=4.5\cdot e^{-4.5}\approx 0.0494\approx 0.05$$

思路总结: 非齐次泊松过程的经典应用。关键是理解强度函数随时间变化，需要通过积分计算累积强度 $m(0,10)$。计算得到 $m(0,10)=4.5$ 后，应用泊松分布公式 $P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ 计算概率。注意分段积分的处理方法，这是处理非齐次泊松过程的标准技巧。

Problem 7: 泊松过程例题 7: 搬家

迁入某地区的家庭数量是强度为 2 户/周的 Poisson 过程，迁入的第 1 个家庭的成员数是

$$Y_1\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

问题：在接下来的 50 周内至少有 240 个人迁入该地区的概率.

解答:

设 $N(t)$ 为 t 周内迁入的家庭数，$\{Y_i\}$ 为各家庭的人数，$S(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$ 为 t 周内迁入的总人数。

首先计算 Y_1 的期望和方差:

$$E[Y_1]=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}+1+\frac{2}{3}=2.5$$
$$E[Y_1^2]=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{3}+3^2\cdot\frac{1}{3}+4^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}+\frac{4}{3}+3+\frac{16}{6}=\frac{43}{6}$$
$$Var(Y_1)=E[Y_1^2]-(E[Y_1])^2=\frac{43}{6}-(2.5)^2=\frac{43}{6}-\frac{25}{4}=\frac{43}{6}-\frac{75}{12}=\frac{86-75}{12}=\frac{11}{12}$$

由于 $N(t)$ 是强度为 2 户/周的 Poisson 过程，根据复合泊松过程的性质，有:

$$E[S(t)]=E[N(t)]\cdot E[Y_1]=2t\cdot 2.5=5t$$
$$Var(S(t))=E[N(t)]\cdot E[Y_1^2]=2t\cdot\frac{43}{6}=\frac{43t}{3}$$

当 $t=50$ 时,

$$E[S(50)]=5\cdot 50=250$$
$$Var(S(50))=\frac{43\cdot 50}{3}=\frac{2150}{3}\approx 716.67$$

根据中心极限定理，当 t 很大时，$S(t)$ 近似服从正态分布 $N(5t, \frac{43t}{3})$。因此，$S(50) \sim N(250, \frac{2150}{3})$，这里记标准正态分布为 Φ。
现在计算 $P(S(50) \geq 240)$：

$$\begin{aligned} P(S(50) \geq 240) &= P\left(\frac{S(50)-250}{\sqrt{\frac{2150}{3}}} \geq \frac{240-250}{\sqrt{\frac{2150}{3}}}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{-10}{\sqrt{\frac{2150}{3}}}\right) \\ &= 1 - \Phi(\frac{-10}{\sqrt{\frac{2150}{3}}}) \end{aligned}$$

因此，在接下来的 50 周内至少有 240 个人迁入该地区的概率可以用最后一个式子表示。

思路总结： 这是复合泊松过程的典型应用，涉及到中心极限定理。关键在于理解总人数 $S(t)$ 是一个随机和，其中项数 $N(t)$ 是泊松随机变量，每项 Y_i 是家庭人数。计算均值和方差时，需要应用复合泊松过程的公式 $E[S(t)] = E[N(t)]E[Y]$ 和 $Var[S(t)] = E[N(t)]E[Y^2]$。当 t 较大时，可以使用正态近似计算概率。我来为你的解答添加总结性文字，概括思路和注意事项：

Problem 8: 泊松过程例题 8: 事故概率

事故发生的次数为条件 Poisson 过程，强度为 $L \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$，已知在时刻 t 已经发生了 n 次事故，求下一次事故在 $t{+}s$ 前不会发生的概率。

解答：

$$\begin{aligned} P(N(s+t)-N(t)=0|N(t)=n) &= \frac{P(N(s+t)-N(t)=0, N(t)=n)}{P(N(t)=n)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{2} P(N(s+t)-N(t)=0, N(t)=n|L=\lambda_i)P(L=\lambda_i)}{\sum_{i=1}^{2} P(N(t)=n|L=\lambda_i)P(L=\lambda_i)} \end{aligned}$$

由于增量独立性:

$$\begin{aligned} P(N(s+t)-N(t)=0, N(t)=n|L=\lambda_i) &= P(N(s+t)-N(t)=0|L=\lambda_i) \cdot P(N(t)=n|L=\lambda_i) \\ &= e^{-\lambda_i s} \cdot \frac{e^{-\lambda_i t}(\lambda_i t)^n}{n!} \end{aligned}$$

代入原式:

$$P(N(s+t)-N(t)=0|N(t)=n)=\frac{\sum_{i=1}^{2} e^{-\lambda_i s}\cdot \frac{e^{-\lambda_i t}(\lambda_i t)^n}{n!}\cdot P(L=\lambda_i)}{\sum_{i=1}^{2} \frac{e^{-\lambda_i t}(\lambda_i t)^n}{n!}\cdot P(L=\lambda_i)}$$

将 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,P(L=\lambda_1)=0.3,P(L=\lambda_2)=0.7$ 代入:

$$\begin{aligned}P(N(s+t)-N(t)=0|N(t)=n)&=\frac{e^{-1\cdot s}\cdot\frac{e^{-1\cdot t}(1\cdot t)^n}{n!}\cdot 0.3+e^{-2\cdot s}\cdot\frac{e^{-2\cdot t}(2\cdot t)^n}{n!}\cdot 0.7}{\frac{e^{-1\cdot t}(1\cdot t)^n}{n!}\cdot 0.3+\frac{e^{-2\cdot t}(2\cdot t)^n}{n!}\cdot 0.7}\\&=\frac{e^{-1\cdot s}\cdot(1\cdot t)^n\cdot 0.3+e^{-2\cdot s}\cdot(2\cdot t)^n\cdot 0.7}{(1\cdot t)^n\cdot 0.3+(2\cdot t)^n\cdot 0.7}\end{aligned}$$

思路总结: 这道题目涉及条件泊松过程，其中到达率（强度）是一个随机变量。解题关键在于正确使用全概率公式和条件概率。首先，我们利用贝叶斯公式将所求概率表示为联合概率与边缘概率之比；然后利用泊松过程的增量独立性质，将条件概率分解；最后代入具体的参数值求解。

Problem 9: 更新过程例题 1: 寿命与余寿

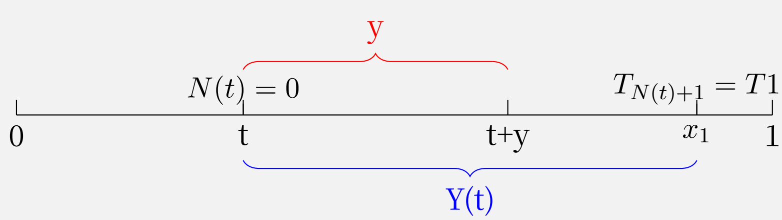
$N(t),t\geq 0$ 为更新过程. 更新间隔 $(X_i,\ i\geq 1)$ 的 CDF 为 $F(x)$，$M(t)$ 为更新函数，$A(t),Y(t)$ 分别表示系统在时刻的年龄和剩余寿命。求：$A(t),Y(t)$ 的 CDF。

解答:

我们先解决余寿的 CDF 问题，$Y(t)$ 可以表示为 $T_{N(t)+1}-t$，接下来的目标是求 $P(Y(t)<y)$，但这里求 $P(Y(t)>y)$ 会更加好做。

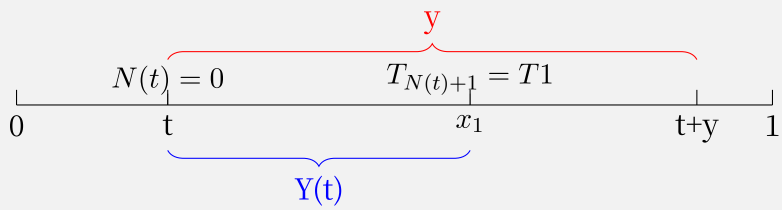
我们可以根据第一次更新发生的时刻进行分类讨论，我们老师把这叫做一步分析法，我觉得叫第一步分析法更容易理解。接下来，我们将第一次发生更新的时刻，也就是第 0 次和第一次更新之间的间隔记作 x_1：

1. 当 $x_1>t+y$ 时,



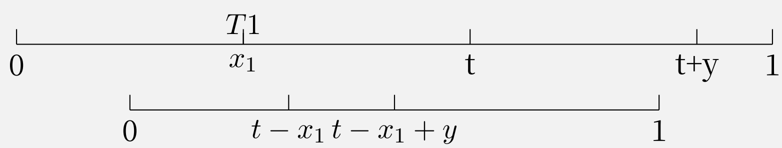
容易看出 $P(Y(t)>y)=1$

2. 当 $x_1 \in (t, t+y)$，



容易看出 $P(Y(t) > y) = 0$

3. 当 $x_1 \in (0, t]$，



因为 x_1 是第一个更新点，根据更新过程稳定增量的性质，

$$P(Y(t) > y \mid T_1 = x_1) = P(Y(t - x_1) > y)$$

因此有

$$P(Y(t) > y \mid X_1 = x) = \begin{cases} 1, & x > t + y, \\ 0, & t < x \le t + y, \\ P(Y(t - x) > y), & 0 < x \le t. \end{cases}$$

我们将 $P(Y(t) > y)$ 记作 $\bar{Y}_y(t)$。由全期望公式，有：

$$\begin{aligned} \bar{Y}_y(t) &= E\left[E\left(I[Y(t) > y] \mid X_1\right)\right] \\ &= \int_0^\infty P\left(Y(t) > y \mid X_1 = x\right)\, dF(x) \\ &= \int_{t+y}^\infty 1 \cdot dF(x) + \int_t^{t+y} 0 \cdot dF(x) + \int_0^t \bar{Y}_y(t - x)\, dF(x) \\ &= \bar{F}(t + y) + \int_0^t \bar{Y}_y(t - x)\, dF(x) \end{aligned}$$

它将一个求累积分布函数的问题，转化为了一个求更新方程解的问题。而我们利用更新方程解的存在定理可以得到 $\bar{Y}_y(t)$ 的表达式：
下面不加证明地给出更新方程解的存在定理：

若 $K(t) = H(t) + (K * F)(t)$ 是关于 $K(t)$ 的更新方程，其中 $H(t)$ 在区间 $[0, t]$ 上有界，且当 $t < 0$ 时，$H(t) = F(t) = 0$，其中 $F(t)$ 是一个累积分布函数（CDF），

则该更新方程存在唯一有界解，且该解可表示为：

$$K(t) = H(t) + (H * M)(t),$$

其中 $M(t)$ 是由 $F(t)$ 所诱导的更新函数（renewal function）。
$F(0) = 0$，不必多言，再看到我们这里 $H(t) = \bar{F}(t + y)$，取值显然在 $[0, 1]$ 之间，所以有界；当 $t = 0$ 时，我们希望 $\bar{Y}_y(0) = 0$，计算得 $\bar{F}(y) = 0$（假设 F 连续，且 $F(y) = 1$ 当 $y \leq 0$），因此条件满足。
代入更新方程解的形式，得到：

$$\bar{Y}_y(t) = \bar{F}(t + y) + \int_0^t \bar{F}(t + y - x)\, dM(x).$$

我们已经解决余寿的 GDF 问题，再来看年龄的 CDF 问题，记年龄分布为 $A(t)$, 先进行分类讨论：
1.$x \in [t, \infty)$ 时，容易知道 $P(A(t) > x)$=0
2.$x \in [0, t)$ 时，我们先证明一个如下的等价关系:
A(t)>x ⇔ Y(t-x)>x:

由 $A(t) > x$ 得：

$$A(t) = t - T_{N(t)} > x \quad \Rightarrow \quad T_{N(t)} < t - x$$

由于更新过程是跳跃的，且 $T_{N(t)} < t - x < t$，所以在区间 $(T_{N(t)}, t]$ 内没有新的更新事件发生。因此，

$$N(t - x) = N(t)$$

从而得到：

$$\begin{aligned} Y(t - x) &= T_{N(t-x)+1} - (t - x) \\ &= T_{N(t)+1} - (t - x) \end{aligned}$$

由于 $T_{N(t)} < t - x$ 且 $T_{N(t)+1}$ 是紧跟其后的更新点，故 $T_{N(t)+1} > t$，于是：

$$Y(t - x) = T_{N(t)+1} - (t - x) > t - (t - x) = x$$

由 $Y(t - x) > x$ 得：

$$T_{N(t-x)+1} - (t - x) > x \quad \Rightarrow \quad T_{N(t-x)+1} > t$$

说明在 $(t - x, t]$ 区间内没有发生更新，因此：

$$N(t) = N(t - x)$$

而 $T_{N(t)} = T_{N(t-x)} \le t-x$，所以：

$$A(t) = t - T_{N(t)} \ge t - (t-x) = x$$

注意到 $T_{N(t)} < t-x$ 可由 $T_{N(t-x)+1} > t$ 推出（否则若 $T_{N(t)} = t-x$，则 $T_{N(t)+1} \le t$，与前提矛盾），从而有：

$$A(t) = t - T_{N(t)} > x$$

综上所述，有严格等价关系：

$$A(t) > x \iff Y(t-x) > x$$

我们把未知的 Y 的分布转化为了已知的 A 的分布，接下来只有代入工作了.

$$\begin{aligned} P(A(t) > x) &= P(\bar{Y}(t-x) > x) \\ &= \bar{F}(t-x+x) + \int_0^{t-x} \bar{F}(t-x+x-u)dM(u) \\ &= \bar{F}(t) + \int_0^{t-x} \bar{F}(t-u)dM(u) \end{aligned}$$

不要忘了这是在 x <t 情况下，我们接下来写出完整的表达式：

$$P(A(t) > x) = \begin{cases} 0, & x \in [t, \infty) \\ \bar{F}(t) + \int_0^{t-x} \bar{F}(t-u)dM(u), & x \in [0, t) \end{cases}$$

思路总结： 更新过程中年龄与余寿命分布的求解关键在于两个转化：首先对余寿命应用”第一步分析法”，根据第一次更新时刻分类讨论，将问题构造为更新方程并应用其解的存在定理；然后通过证明关键等价关系”A(t) > x ⇔ Y(t-x) > x”，巧妙地将年龄分布问题转换为已解决的余寿命问题，从而避开直接计算的复杂性。（这题好长）

Problem 10: 更新过程例题 2: 顾客与销售

顾客以强度 λ 的 Poisson 过程到达一个单服务台系统，若发现服务员正在服务则离开；若发现服务员空闲则进入并接受服务，对每个顾客的服务时间为 $Y, E[I] = u$，到达独立于服务。
问题：
（1）顾客进入系统的实际强度（单位时间内进入系统的顾客数）；
（2）实际进入系统的顾客比例。
解答：
由上述等价结果可知，为了求实际进入系统的顾客强度，我们考虑以下建模。记 $W_i = I_i + F_i$ 为第 i 个服务周期的总时长，其中 I_i 表示第 i 次服务的持续时间，F_i 表示服务完成后到下一

位顾客到达的间隔时间记 $N(t)$ 为时间区间 $[0,t]$ 内完成的服务次数，即进入系统并被成功服务的顾客数。假设 W_i 为一列独立同分布的随机变量，具有有界期望。

由题设，顾客到达服从 Poisson 过程，故服务间隔 $F_i \sim \exp(\lambda)$，即服从参数为 λ 的指数分布，满足：

$$\mathbb{E}[F_i] = \frac{1}{\lambda}$$

又设每次服务时间 $\mathbb{E}[I_i] = \mu$，则每个服务周期的平均长度为：

$$\mathbb{E}[W_i] = \mu + \frac{1}{\lambda}$$

根据更新过程的极限性质，有：

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}[W_i]} = \frac{1}{\mu + \frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda}{1+\lambda\mu}$$

这个就是顾客进入系统的实际强度

实际进入系统的顾客比例则可以表示为：实际进入系统的顾客人数/顾客来到系统面前的人数，这个记数过程是强度 λ 的 Poisson 过程, 即可以表示为：

$$\frac{\lambda + \frac{1}{\mu}}{\lambda} = \frac{1}{1+\lambda\mu}$$

思路总结： 这道题目涉及到更新过程的极限性质和泊松过程的性质。关键在于理解服务周期的构成以及如何利用更新过程的极限性质来求解实际进入系统的顾客强度和比例。注意到服务时间和到达时间是独立的，这使得我们可以将问题分解为两个部分来处理。

Problem 11: 更新过程例题 3：加工件数的正态近似

两台机器独立、持续加工一些部件。第一台机器加工一个部件的时间服从 $X \sim \text{Gamma}(4,2)$，第二台机器加工一个部件的时间服从 $Y \sim \text{Unif}(0,4)$。

估计两台机器在时间区间 $(0,100)$ 内一共加工的部件数不少于 90 件的概率。

（提示：近似为 $N_1 \sim \mathcal{N}(50, 25/2)$，$N_2 \sim \mathcal{N}(50, 50/3)$，概率约为 0.9741）

解答：

记 $N_1(t), N_2(t)$ 分别为两台机器在时间 t 内加工的部件数。根据更新过程的正态近似理论（中央极限定理），有：

$$N_1(t) \approx \mathcal{N}\left(\frac{t}{\mathbb{E}[X]}, \frac{t \cdot \text{Var}(X)}{(\mathbb{E}[X])^3}\right),$$
$$N_2(t) \approx \mathcal{N}\left(\frac{t}{\mathbb{E}[Y]}, \frac{t \cdot \text{Var}(Y)}{(\mathbb{E}[Y])^3}\right)$$

对第一台机器：

$$X \sim \text{Gamma}(4,2) \Rightarrow \mathbb{E}[X]=2, \quad \text{Var}(X)=1$$

代入得：$N_1 \sim \mathcal{N}(50, \frac{25}{2})$，
对第二台机器：

$$Y \sim \text{Unif}(0,4) \Rightarrow \mathbb{E}[Y]=2, \quad \text{Var}(Y)=\frac{4^2}{12}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$$

代入得 $N_2 \sim \mathcal{N}(50, \frac{50}{3})$
于是两台机器合计加工件数 $N(t)=N_1(t)+N_2(t)$ 满足：

$$N(t) \sim \mathcal{N}\left(100, \frac{25}{2}+\frac{50}{3}=\frac{175}{6}\right)$$

求得概率：

$$\mathbb{P}(N(t) \geq 90)=\mathbb{P}\left(Z \geq \frac{90-100}{\sqrt{175/6}}\right)=1-\Phi\left(\frac{-10}{\sqrt{175/6}}\right)$$

思路总结： 这道题目涉及到更新过程的正态近似，知道定理后就是简单的代入期望和方差。

Problem 12: 更新过程例题 4：机床故障与部件加工

一台机床持续加工部件，每个部件的加工时间为随机变量 S，其密度为 $f_S(s)$。机床故障发生为参数为 λ 的 Poisson 过程，且与 S 独立。
一旦发生故障，立即更换机床并开始新的部件加工（即使当前部件未完成也会被中止）。求：（1）建立更新过程模型；（2）计算平均更新间隔。

解答：
设 X 表示两次故障之间的间隔时间，则 $X \sim \text{Exp}(\lambda)$，且 S 表示一次加工时间，记每次成功完成一个部件的时间间隔为 W_i。
注意：只有在 $S \leq X$ 时，加工才会成功完成，系统才会产生一次“更新”（即成功完成一个部件）。若 $S > X$，则该次加工在耗费 x 时间后中止，重新开始一轮生产。
因此更新过程的间隔 W 满足递推关系：

$$W=\begin{cases} S, & S \leq X \\ X+W', & S > X \end{cases}$$

其中 W' 是一个与 W 同分布的独立拷贝。
于是根据全期望公式，有：

1. 计算 $\mathbb{E}[W]$：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[W] &= \mathbb{E}_{X,S}[\mathbb{E}[W \mid S=s, X=x]] \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}[W \mid S=s, X=x] f_S(s) f_X(x)\, ds\, dx \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^s \mathbb{E}[W \mid X=x, S=s] \lambda e^{-\lambda x} dx + \int_s^{+\infty} \mathbb{E}[W \mid S=s, X=x] \lambda e^{-\lambda x} dx \right) f_S(s) ds \\
&= \int_0^{+\infty} f_S(s) \left[\mathbb{E}[W](1-e^{-\lambda s}) + \int_0^s x\lambda e^{-\lambda x} dx + s\int_s^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \right] ds \\
&= \int_0^{+\infty} f_S(s) \left[\mathbb{E}[W](1-e^{-\lambda s}) + \frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda s}) \right] ds \\
&= \int_0^{+\infty} f_S(s) \left[\mathbb{E}[W](1-e^{-\lambda s}) + \frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda s}) \right] ds \\
&= \mathbb{E}[W] \cdot \int_0^{+\infty} (1-e^{-\lambda s}) f_S(s) dw + \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} (1-e^{-\lambda s}) f_S(s) ds \\
&= \mathbb{E}[W] \cdot \mathbb{E}[1-e^{-\lambda S}] + \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}[1-e^{-\lambda S}]
\end{aligned}
$$

解得：

$$
\mathbb{E}[W] = \frac{1-\mathbb{E}[e^{-\lambda S}]}{\lambda \cdot \mathbb{E}[e^{-\lambda S}]}
$$

思路总结： 我觉得最关键的其实是第一步，之后都只是计算而已。

Problem 13: 更新过程例题 5：买车问题

汽车寿命 $X \sim h(t)\,(pdf)$。其 CDF 是 H(t)。某人采用如下购车策略：当车自然损毁或工作 T 年后换新车。已知新车费用为 C_1，若自然损毁则额外产生费用 C_2 问题：建立 RP 模型，求长期的单位时间平均费用。

解答：

将每次购置新车的时间点看作一次更新发生，构成更新过程，每次更新时支付的费用作为一个随机变量 Y_1，这些 Y_1 独立同分布，到时刻为 1 购置新车化段的费用是一个更新回报过程 $\{R(t), t \geq 0\}$。

的单位时间购置费用定义为

$$
\lim_{t\to\infty} \frac{ER(t)}{t}.
$$

由更新报酬定理，上式等于

$$
\frac{EY_1}{EX_1},
$$

其中 X_1 表示两次更新之间的间隔。由题意

$$X_1 = \begin{cases} T, & Z > T \\ Z, & Z \le T, \end{cases}$$

其中 Z 表示第一辆汽车的寿命，则

$$\begin{aligned} E(X_1) &= E\{TI[Z > T]\} + E\{ZI[Z \le T]\} \\ &= \int_T^\infty Th(z)\,dz + \int_0^T zh(z)\,dz \\ &= T[1 - H(T)] + \int_0^T zh(z)\,dz. \end{aligned}$$

而费用

$$Y_1 = \begin{cases} C_1, & Z > T, \\ C_1 + C_2, & Z \le T, \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} E(Y_1) &= C_1 P(Z > T) + (C_1 + C_2) P(Z \le T) \\ &= C_1 + C_2 H(T). \end{aligned}$$

于是，长期的单位时间购置费用为

$$\mu_C = \frac{EY_1}{EX_1} = \frac{C_1 + C_2 H(T)}{T[1 - H(T)] + \int_0^T zh(z)\,dz}.$$

Problem 14: 更新过程例题 7：两种费率

某保险公司向客户收取两种费率：r_0，$r_1 (r_0 < r_1)$。一开始收取 r_1，若在 s 长的时间内未发生索赔，则把费率降为 r_0，其后一旦有索赔发生，则恢复为 r_1，已知索赔次数是参数为λ的$Poisson$过程。问题：建立RP模型，求平均费率（$r_1 - (r_1 - r_0)e^{-r_0}$）

解答：

$ 如果当参保人按收费率 r_1 付费时，我们说系统处在“开”，而当参保人按收费率 r_0 付费时，说系统处在“关”，那么这个开一关系就是一个交替更新过程，以每作一次索赔开始一个新的循环。如果 X 是相继的索赔之间的时间，那么在这个循环中处于开的时间是 s 和 X 中小的

一个（注意若 $X < s$，则关的时间是 0）。由于 X 是速率为 λ 的指数随机变量，由上面可得

$$E[\text{循环中开的时间}] = E[min(X,s)] = \int_0^s x\lambda e^{-\lambda x}dx + se^{-\lambda s} = \frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda s})$$

因为 $E[X] = 1/\lambda$，我们有

$$P_1 = \frac{E[\text{一个循环中开的时间}]}{E[X]} = 1 - e^{-\lambda s}, \quad P_0 = 1 - P_1 = e^{-\lambda s}$$

单位时间所付的长程平均金额是

$$r_0P_0 + r_1P_1 = r_1 - (r_1 - r_0)e^{-\lambda s}$$

思路总结：这个保险费率问题的核心思路在于将不同费率状态视为一个交替更新系统，关键是识别出系统的循环特性。通过将高低费率状态定义为”开”和”关”，问题转化为分析系统在这两种状态下的时间占比。由于索赔遵循泊松过程，利用其指数间隔特性可以计算出系统在各状态的概率分布。

Problem 15: 离散过程马尔科夫链例题 1: 赌徒问题粗略

甲乙两个赌徒赌博，甲对乙的单局胜率是 0.3，败率是 0.7，每一局赌博输的一方付给对方 1 个单位财富，且各局赌博互独，直到某一方输光为止。假设甲乙的初始赌资都是 5。记 X_n 表示第 n 局赌博后甲的剩余赌资。

(1) 验证 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为 DIMC，计算 TPM P；

(2) 求第 10 局赌博后甲的财富分布；

(10.4928 0.1668 0.1906 0.1021 00.0350 00.0056 0.0071)

解答

令 $X_{n+1} = X_n + Y_n$, 其中

$$Y_{n+1} = \begin{cases} 1, & \text{甲第}n\text{次获胜}, \\ -1, & \text{甲第}n\text{次落败}, \end{cases}$$

容易看出在给定 X_n 情况下，X_{n+1} 的取值与 X_{n-1}，X_{n-2},....X_1 均是无关的，所以 $\{X_n, n \geq 0\}$ 实际上是 DTMC，其中状态空间 S=0,1,2,3.....10, 其 TPM 为:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0.3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0.3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

因为我们已经知道了甲初始的确定的状态分布，记作 $\alpha_0 = (0,0,0,0,0,1,0,0,0,0)$，第十次甲的财富分布则为 $\alpha_0 * P^{10}$, 用 matlab 求解即可!

Problem 16: 离散过程马尔科夫链例题 2: 汽车保费问题

汽车第 n 年的保费依赖于上一年的保费，并依据上一年的索赔次数作上下浮动，标准如下:

		Next State if			
Present State	Annual Premium	0 Claim	1 Claim	2 Claims	≥3 Claims
1	200	1	2	3	4
2	250	1	3	4	4
3	400	2	4	4	4
4	600	3	4	4	4

已知

每辆车每年向保险公司索赔的次数 $N \sim P(\lambda)$. X_n 表示某汽车第 n 年的状态

(1) 验证 $(X_n, n \geq 0)$ 为 DTMC;

(2) 建立 TPM P

解答: 因为汽车第 n 年的状态，其实只取决于两个因素:

1. 第 $n-1$ 年的索赔次数，它是一个参数为 λ 的、满足泊松分布的随机变量，且与所有 $\{X_k, k \geq 0\}$ 无关;

2. 第 $n-1$ 年的状态（决定了在特定索赔次数下的转移概率），它也与 $n-1$ 年之前的状态无关。

综上可知，$(X_n,\, n \geq 0)$ 构成一个离散时间马尔可夫链（DTMC）。

$$P = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 1-a_0-a_1-a_2 \\ a_0 & 0 & a_1 & 1-a_0-a_1 \\ 0 & a_0 & 0 & 1-a_0 \\ 0 & 0 & a_0 & 1-a_0 \end{bmatrix}$$

其中 $a_0 = p(N(1)=0) = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$, 其中$i$等于0, 其余的点我们愉快的代入即可。

Problem 17: 离散过程马尔科夫链例题 3: 天气问题

例题. 若明天下雨与否依赖于今天和昨天的下雨情况。记

$$X_n = \begin{cases} 0, & \text{第}n\text{天不下雨} \\ 1, & \text{第}n\text{天下雨} \end{cases}$$

$$P(X_{n+1}=1|X_n=X_{n-1}=1)=0.7, \quad P(X_{n+1}=1|X_n=1,X_{n-1}=0)=0.5$$

$$P(X_{n+1}=1|X_n=0,X_{n-1}=1)=0.4, \quad P(X_{n+1}=1|X_n=X_{n-1}=0)=0.2$$

问题:

1. SP $\{X_n, n \geq 0\}$ 为 DTMC 吗?
2. 构造一个 DTMC，并求出 TPM

解答

显而易见，X_n的取值不仅取决于X_{n-1}, 也取决于X_{n-2}, 所以他不是一个$DTMC$。
构造$r.v.Y_n = (X_n, X_{n-1})$

$$\begin{aligned} \because \quad P(X_{n+1}=1|X_n=X_{n-1}=1) &= P((X_{n+1},X_n)=(1,1)|(X_n,X_{n-1})=(1,1)) \\ &= P(Y_{n+1}=(1,1)|Y_n=(1,1))=0.7 \\ P(X_{n+1}=1|X_n=1,X_{n-1}=0) &= P(Y_{n+1}=(1,1)|Y_n=(1,0))=0.5 \\ P(X_{n+1}=1|X_n=0,X_{n-1}=1) &= P(Y_{n+1}=(1,0)|Y_n=(0,1))=0.4 \\ P(X_{n+1}=1|X_n=X_{n-1}=0) &= P(Y_{n+1}=(1,0)|Y_n=(0,0))=0.2 \\ \therefore \quad \{Y_n,\, n \geq 0\} \text{ 为 DTMC，状态空间} S &= \{(1,1),(1,0),(0,1),(0,0)\}, \\ \text{且 TPM 为} \end{aligned}$$

$$
P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} (1,1) & (1,0) & (0,1) & (0,0) \end{array} \\ \begin{array}{c} (1,1) \\ (1,0) \\ (0,1) \\ (0,0) \end{array} & \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \end{array}
$$

Problem 18: 离散过程马尔科夫链例题 4: 转移概率

例题. DTMC $\{X_n, n \geq 0\}$ 中，$S = \{1,2,3,4\} = A \cup (S - A)$，其中 $A = \{3,4\}$ 表示特殊状态集，TPM 是

$$
P = \begin{pmatrix} .3 & .3 & .2 & .2 \\ .1 & .2 & .3 & .4 \\ .2 & .3 & .3 & .2 \\ .1 & .4 & .4 & .1 \end{pmatrix}
$$

问题:

A. $p_1 = P(\text{在时刻 4 以前进入过}A|X_0 = 1)$;

B. $p_2 = P(X_4 = 2, X_1, X_2, X_3 \leq 2|X_0 = 1)$;

C. $p_3 = P(\text{在时刻 4 首次进入}A|X_0 = 1)$

解答:

分析：记 a 为 3,4 表示特殊状态集，记 $N = \min\{n : X_n \in A\}$。构造 $Y_n = \begin{cases} X_n, & n < N \\ a, & n \geq N \end{cases}$ 则 $\{Y_n, n \geq 0\}$ 为 DTMC，$S = \{1, 2, a\}$，TPM $Q = (\alpha_{ij})$。其中 $\alpha_{ij} = p_{ij}$，$i, j = 1, 2$

$$
\alpha_{ia} = p_{i3} + p_{i4},\ i = 1, 2, \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$
$$
\Rightarrow Q^k = \cdots
$$

A. 计算 $p_1 = P(N < 4 \mid X_0 = 1)$

由构造的吸收马尔科夫链 $\{Y_n\}$，其中吸收态为 a，有:

$$
p_1 = P(N < 4 \mid X_0 = 1) = P(Y_4 = a \mid Y_0 = 1)
$$

即转移矩阵 Q 的 4 次幂中，从状态 1 到吸收态 a 的概率：

$$p_1 = Q^4(1, a) = 0.9496$$

B. 计算 $p_2 = P(X_4 = 2, X_1, X_2, X_3 \le 2 \mid X_0 = 1)$
即：

$$p_2 = P(Y_1, Y_2, Y_3 \in \{1, 2\}, Y_4 = 2 \mid Y_0 = 1)$$

等价于转移矩阵 Q 的 4 次幂中，从 1 到 2 的概率，且中间不曾到达吸收态：

$$p_2 = Q^4(1, 2) = 0.0285$$

C. 计算 $p_3 = P(N = 4 \mid X_0 = 1)$
即首次在第 4 步进入集合 $A = \{3, 4\}$，等价于：

$$p_3 = P(Y_3 \in \{1, 2\}, Y_4 = a \mid Y_0 = 1)$$

展开计算为：

$$p_3 = Q^3(1,1) \cdot Q(1,a) + Q^3(1,2) \cdot Q(2,a)$$
$$= (\text{从 1 到 1 三步}) \times (\text{从 1 到 a 一步}) + (\text{从 1 到 2 三步}) \times (\text{从 2 到 a 一步})$$
$$= Q^3(1,1) \cdot 0.4 + Q^3(1,2) \cdot 0.7$$

Problem 19: 离散过程马尔科夫链例题 5: 判断状态

DTMC $\{X_n, n \ge 0\}$ 中，$S = \{0, 1, 2, 3\}$，TPM 是

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

问题：判别状态类型
解答:

$\because S$ 不可约.

$f_{00}^{(1)}=0,\ f_{00}^{(2)}=0,\ f_{00}^{(3)}=0.5\times1\times1+0.5\times1\times1=1$

$f_{00}^{(n)}=0,\ n\geq4$

$f_{00}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{00}^{(n)}=f_{00}^{(3)}=1,\ \therefore 0$ 为常返态.

$D_0=\{n:\ p_{00}^{(n)}>0\}=\{3,6,9,12,\cdots\}$

$\therefore d=3$

S 为常返，周期状态类且$d=3$.

又$M_0=E[X]=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{00}^{(n)}=3<+\infty$

$\therefore 0$ 为正常返.

因为 0,1,2,3 都是互通的，所以 0,1,2,3 都是正常返并且周期为 3. 所以 S 正常饭，周期为 3

Problem 20: 离散过程马尔科夫链例题 6: 游船

颐和园游船出租部门有三个租船点：知春亭、石舫、龙王庙。游人可在任意租船点租船或还船。由统计资料，游人在各点租船后，在不同点还船的概率如下。现决定对租船点进行扩建。问题：请为租船部门就扩建规模提供参考意见。(考虑某船在第 n 次租 - 还船后，船所在的位置，知春亭：0.556；石舫:0.222；龙王庙:0.222)

租还	知春亭（1）	石舫（2）	龙王庙（3）
知春亭 (1)	0.80	0.10	0.10
石舫（2）	0.20	0.70	0.10
龙王庙 (3)	0.30	0.05	0.65

解答:

记 r.v. X_n 为某船在第 n 次“租 - 还”后所在位置。则 $\{X_n,n\geq0\}$ 为 DTMC，$S=\{1,2,3\}$，TPM

$$P=\begin{pmatrix}0.8&0.1&0.1\\0.2&0.7&0.1\\0.3&0.05&0.65\end{pmatrix}$$

$\because S$ 是不可约，非周期且有限 $\therefore S$ 为正常返状态集 $\therefore$ 稳态概率分布 $\{\pi_j,j\in S\}$ 唯一存在且满足平衡方程组 $\begin{cases}\pi=\pi P\\ \pi e=1\end{cases}$ 其中 $\pi=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)$，$e=[1,1,1]^T\Longrightarrow\pi=(\cdots)$

也就是求解以下方程组:

$$\begin{cases}\pi_1 = 0.8\pi_1 + 0.2\pi_2 + 0.3\pi_3 \\ \pi_2 = 0.1\pi_1 + 0.7\pi_2 + 0.05\pi_3 \\ \pi_3 = 0.1\pi_1 + 0.1\pi_2 + 0.65\pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1\end{cases} \quad \text{代入即可}$$

Problem 21: 离散过程马尔科夫链例题 5: 判断状态

DTMC $\{X_n, n \geq 0\}$ 中，$S = \{1, 2, 3, 4\}$，TPM 是

$$P = \begin{pmatrix} .25 & .25 & .5 & 0 \\ 0 & .25 & .5 & .25 \\ .25 & .25 & .25 & .25 \\ .25 & .25 & 0 & .5 \end{pmatrix}$$

$A = \{3, 4\}$ 为故障态集，$S - A = \{1, 2\}$ 为工作态集
问题:

- 判断状态类型，并求状态的稳态概率分布 $\{\pi_j, j \in S\}$（3/16, 1/4, 7/24, 13/48）
- 求在稳态情况下，系统发生故障的概率（9/32）
- 求在一个 “工作 (W)-故障 (F)” 循环期内，平均工作期 $E[W]$、平均故障期 $E[F]$ 的长度（$E[W] = 14/9$, $E[F] = 2$）

解答:

画出状态转移分布图可知,$\because S$ 可归，非周期且有限 $\therefore S$ 为常返态集 $\therefore$ 稳态概率分布 $\{\pi_j, j \in S\}$ 唯一存在且满足平衡方程组

$$\begin{cases}\pi_1 = 0.25\pi_1 + 0\pi_2 + 0.25\pi_3 + 0.25\pi_4 \\ \pi_2 = 0.25\pi_1 + 0.25\pi_2 + 0.25\pi_3 + 0.25\pi_4 \\ \pi_3 = 0.5\pi_1 + 0.5\pi_2 + 0.25\pi_3 + 0\pi_4 \\ \pi_4 = 0\pi_1 + 0.25\pi_2 + 0.25\pi_3 + 0.5\pi_4 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1\end{cases}$$

解该方程组，得稳态概率分布为:

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = \left(\frac{3}{16}, \frac{1}{4}, \frac{7}{24}, \frac{13}{48}\right)$$

第二问：

$$\begin{aligned}
P(\text{发生故障}) &= \lim_{n\to\infty} P(\text{系统在}n\text{时刻发生故障}) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(X_n \in A, X_{n-1} \in S-A) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in A}\sum_{i\in S-A} P(X_n = j, X_{n-1} = i) \\
&= \sum_{j\in A}\sum_{i\in S-A} \lim_{n\to\infty} P(X_{n-1} = i)\cdot p_{ij} \\
&= \sum_{j\in A}\sum_{i\in S-A} \pi_i \cdot p_{ij} = (\pi_1\cdot p_{13} + \pi_2 \cdot p_{23}) + (\pi_1 \cdot p_{14} + \pi_2 \cdot p_{24}) \\
&= \cdots = 9/32
\end{aligned}$$

问题 3:

(3) 将每次发生故障视为一个循环。记 W_i 为第 i 个循环周期 $W_i = W + F$ $\{W_i, i \geq 1\}$ 为 iid r.v.s （独立同分布随机变量）$\{X_n, n \geq 0\}$ 的循环过程

$$P_W = \frac{E[W]}{E[W]+E[F]} = \pi_1 + \pi_2 = \frac{7}{16} \quad ①$$

又 $\lim_{n\to\infty} P(\text{在}n\text{时刻发生故障}) = \lim_{n\to\infty} P(\text{在}n\text{时刻故障}) = P(\text{发生故障}) = \frac{9}{32}$

$$= \frac{1}{E[W]+E[F]} = \frac{9}{32} \quad ②$$

联立 1 和 2 我们可以解出 E[W]=14/9，E[F]=2.

Problem 22: 离散过程马尔科夫链例题 5: 到达概率

在 DTMC $\{X_n, n \geq 0\}$ 中，$S = \{1,2,3,4,5\}$，$C_2 = \{4,5\}$，TPM 为

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .2 & .3 & .4 & .1 & 0 \\ 0 & .2 & 0 & .3 & .5 \\ 0 & 0 & 0 & .3 & .7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

问题：

(1) 求 $a_2(C_2) = \text{P}(\text{最终被}C_2\text{吸收} \mid X_0 = 2)$ （$\frac{21}{31}$）

(2) 求 $u_2 = \text{E}[\text{最终被吸收所需的转移步数} \mid X_0 = 2]$ （$\frac{70}{31}$）

(3) 求 $\lim_{n\to\infty} P_{24}^{(n)}$ （$\frac{21}{31}\cdot\frac{10}{17}$）

解答

由题知，状态空间 $S = D \cup G_1 \cup C_2 = \{2,3\} \cup \{1\} \cup \{4,5\}$，其中：- $D = \{2,3\}$ 为暂态工作状态；- $G_1 = \{1\}$ 为吸收工作态；- $C_2 = \{4,5\}$ 为吸收故障态。
构造吸收 DTMC $\{Y_n, n \geq 0\}$，其状态空间为 $\widetilde{S} = D \cup G_1 \cup \{k_*\}$，其中新引入吸收态 k_* 表示进入任一故障状态即故障吸收。
则转移概率矩阵 $Q = (\alpha_{ij})$ 的构造如下：

$$\alpha_{ij} = p_{ij}, \quad i, j \in D$$

$$\alpha_{i1} = p_{i1}, \quad \alpha_{ik_*} = p_{i4} + p_{i5}$$

$$\alpha_{11} = 1, \quad \alpha_{k_*k_*} = 1$$

—
第一问：求从状态 2 出发被故障吸收的概率 $a_2(C_{k_*})$：
列出吸收概率方程组：

$$\begin{cases} a_2 = 0.2a_2 + 0.3a_3 + 0.4a_3 + 0.1 \\ a_3 = 0.2a_2 + 0.8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 0.2a_2 + 0.7a_3 + 0.1 \\ a_3 = 0.2a_2 + 0.8 \end{cases}$$

联立解得：

$$a_2(C_{k_*}) = a_2 = \frac{21}{31}$$

—
第二问：求期望吸收时间 u_2（从状态 2 出发直到吸收所需的期望步数）：

$$\begin{cases} u_2 = 1 + 0.3u_2 + 0.4u_3 + 0 \\ u_3 = 1 + 0.2u_2 \end{cases}$$

联立解得：

$$u_2 = \frac{70}{31}$$

—
第三问：系统从状态 2 出发，长期来看进入故障态 4 的概率：

$$\lim_{n \to \infty} P_{24}^{(n)} = a_2(C_2) \cdot \pi_4$$

其中，$C_2=\{4,5\}$，考虑在 C_2 中的限制马尔科夫子链，其转移矩阵为：

$$\widetilde{P}=\begin{pmatrix}0.3 & 0.7\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

设其限制稳态分布为 $\pi=(\pi_4,\pi_5)$，则有：

$$\pi=\pi\widetilde{P},\quad \pi_4+\pi_5=1\Rightarrow\begin{cases}\pi_4=0.3\pi_4+1\cdot\pi_5\\ \pi_4+\pi_5=1\end{cases}\Rightarrow\pi_4=\frac{10}{17},\quad\pi_5=\frac{7}{17}$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}P_{24}^{(n)}=\frac{21}{31}\cdot\frac{10}{17}=\frac{210}{527}$$

Problem 23: 离散过程马尔科夫链例题 6: 药效

有治疗某疾病的 2 种药物 A, B，对疾病的治愈率分别是 θ_1，θ_2（大小未知），有一种测试 2 种药物优劣的方法如下：将病人以 2 人为一组分为若干组，对每组里面的 2 个病人分别用 A, B 两种药物治疗，记

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{组的1号病人被药物}A\text{治好}\\ 0, & \text{第}i\text{组的1号病人未被药物}A\text{治好}\end{cases},\quad Y_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{组的2号病人被药物}B\text{治好}\\ 0, & \text{第}i\text{组的2号病人未被药物}B\text{治好}\end{cases}$$

试验终止 $\iff\sum_{i=1}^{n}(X_i-Y_i)=\pm M\iff\tilde{\theta}_1>\tilde{\theta}_2$（$\tilde{\theta}_1<\tilde{\theta}_2$）
问题：建立赌徒破产模型，评价这种测试方法?
解答：

我们将该试验过程建模为一个赌徒破产问题（Gambler’s Ruin Model）。
设有 n 组病人，每组两人分别接受药物 A 与药物 B 的治疗，分别记第 i 组的治疗结果为：

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{若第}i\text{ 组的 1 号病人（服药物 A）治愈}\\ 0, & \text{否则}\end{cases},\quad Y_i=\begin{cases}1, & \text{若第}i\text{ 组的 2 号病人（服药物 B）治愈}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

定义随机变量：

$$W_n=\sum_{i=1}^{n}(X_i-Y_i)$$

表示前 n 组试验中，药物 A 的“净胜场数”。
为了简化模型，我们忽略 A、B 同时治愈或同时无效的情况，即只考虑 $X_i\neq Y_i$ 的情形。每轮试验的“胜负”即由 X_i-Y_i 的取值决定，其中：- 若 $X_i-Y_i=1$，则视为药物 A 在该组胜出；- 若 $X_i-Y_i=-1$，则视为药物 B 胜出。

定义一次“赌博”的胜率 p 为：

$$\begin{aligned}
p &= P(X_i - Y_i = 1 \mid X_i \neq Y_i) \\
&= \frac{P(X_i = 1, Y_i = 0)}{P(X_i = 1, Y_i = 0) + P(X_i = 0, Y_i = 1)} \\
&= \frac{\theta_1(1-\theta_2)}{\theta_1(1-\theta_2) + (1-\theta_1)\theta_2}
\end{aligned}$$

试验终止条件为：

$$W_n = M \quad 或 \quad W_n = -M$$

分别对应于我们有置信地判断 $\tilde{\theta}_1 > \tilde{\theta}_2$ 或 $\tilde{\theta}_1 < \tilde{\theta}_2$。
因此，$\{W_n, n \geq 0\}$ 构成了一个离散时间马尔科夫链（DTMC），其状态空间为：

$$S = \{-M, -M+1, \ldots, 0, \ldots, M-1, M\}$$

也可平移为非负整数状态空间：

$$S = \{0, 1, 2, \ldots, 2M\}, \quad 令初始状态W_0 = M$$

这正是经典的赌徒破产模型，其中：- “破产”状态 0 对应于 $W_n = -M$；- “目标”状态 $2M$ 对应于 $W_n = M$；- 每步向左走的概率为 $1-p$ 记作 q，向右走的概率为 p。则从状态 M 出发最终吸收到 0 的概率为：

$$G_M(C_0) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^M - \left(\frac{q}{p}\right)^{2M}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{2M}}$$

因此：(这是因为两个吸收态是互补事件，最终总会走向一端。)

$$\begin{aligned}
P(\hat{\theta}_1 > \theta_2 \mid \theta_1 > \theta_2) = a_M(C_{2M}) &= 1 - G_M(C_0) \\
&= 1 - \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^M - \left(\frac{q}{p}\right)^{2M}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{2M}}
\end{aligned}$$

Problem 24: 离散过程马尔科夫链例题 7: 排队模型

小明 (普通客户) 到达只有一个服务员的某银行时，发现其前面排有 i 个顾客（含正在接受服务的顾客），VIP 客户到达银行的间隔 $X \sim Exp(\lambda)$，且都排在小明的前面。服务员对每个顾客的服务时间是 $Y \sim Exp(u)$，X 与 Y 互独，当小明发现排在他前面的顾客数达到 N 个时，放弃等待。若接受了服务，则获得收益 R，已知小明的单位等待时间成本是 C。
（1）建立赌徒破产模型，求小明最终被服务的概率
（2）建立小明的期望效用函数

解答

建立赌徒破产模型，求小明最终被服务的概率

我们以小明前方排队人数作为状态，构建一个离散时间马尔可夫链（DTMC）$\{W_n\}$，状态空间为 $S = \{0, 1, \ldots, N\}$，其中：

- 状态 0：小明前方无人，马上获得服务；- 状态 N：小明发现前方已有 N 人，放弃等待；- 状态转移规则：每次根据 VIP 到达或服务完成而增加或减少排队人数。

转移概率计算：

由于 $X \sim \text{Exp}(\lambda)$，$Y \sim \text{Exp}(u)$ 且独立，有：

$$p = P(\text{服务先完成}) = P(Y < X) = \frac{u}{\lambda + u}, \quad q = P(X < Y) = \frac{\lambda}{\lambda + u}$$

这相当于经典赌徒破产模型，从初始状态 i 出发，以单位步变动，吸收态为 0 与 N。

小明最终获得服务 $\iff$ 最终吸收到状态 0。

根据赌徒破产模型公式，若 $p \neq q$，则从 i 出发最终吸收到 0 的概率为：$P(\text{小明最终被服务}) = a_i(C_0) = \frac{(\frac{q}{p})^i - (\frac{q}{p})^N}{1 - (\frac{q}{p})^N}$

最后的期望收益则为：

$$f(i) = R \cdot \frac{(\frac{q}{p})^i - (\frac{q}{p})^N}{1 - (\frac{q}{p})^N} - \frac{c}{\lambda + \mu} \cdot \left[\frac{i}{q - p} - \frac{N}{q - p} \cdot \frac{1 - (q/p)^i}{1 - (q/p)^N} \right], \quad p \neq q$$

其中的 $\frac{1}{\lambda + u}$ 表示$E[min(X, Y)]$, 表示一局赌博的平均耗时，长长的一串 $\left[\frac{i}{q-p} - \frac{N}{q-p} \cdot \frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N} \right]$ 表示期望的局数，c 则表示等待的时间成本，后面加起来就是预期总成本啦。

Problem 25: 连续时间马尔科夫链例题 1: 排队模型

（M/M/1 排队系统）顾客以参数为 λ 的 Poisson 过程到达只有一个服务员的服务系统，若发现服务员空闲则马上接受服务，否则按照 FCFS（First come first served）的规则等待服务。服务员对每个顾客的服务时间是 $Y \sim Exp(u)$，且独立于到达过程，$X(t)$ 表示 t 时刻系统中的顾客数。问题：

1. 判断 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是 CTMC
2. 求 $\{X(t), t \geq 0\}$ 在每个状态的转移速率，并画出状态转移速率图
3. 求 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的嵌入 DTMC 的 TPM
4. （3）求系统中顾客数的极限概率分布P_j，$j \in S$

解答：

(1) 是否为 CTMC：

系统中顾客数过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 满足：

$$X(s+t) = X(s) + A(t) - D(t)$$

其中：- $A(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$，即顾客以速率 λ 到达，独立增量；- $D(t)$ 表示服务完成数，服务时间 $Y \sim \text{Exp}(\mu)$，独立且具有无记忆性。
故该过程只依赖当前状态，与历史无关，是连续时间马尔可夫链（CTMC），状态空间为 $S = \{0, 1, 2, \dots\}$。
—

(2) 状态转移速率及速率图：
考虑从状态 i 出发的转移：
- 到达：$i \to i+1$

$$\begin{aligned} q_{i,i+1} &= \lim_{h\to 0} \frac{P(X(h) = i+1 \mid X(0) = i)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{P(A(h) = 1) \cdot P(D(h) = 0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(\lambda h + o(h))(1 - \mu h + o(h))}{h} = \lambda \end{aligned}$$

- 服务完成：$i \to i-1$，仅当 $i \geq 1$

$$\begin{aligned} q_{i,i-1} &= \lim_{h\to 0} \frac{P(X(h) = i-1 \mid X(0) = i)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{P(D(h) = 1) \cdot P(A(h) = 0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(\mu h + o(h))(1 - \lambda h + o(h))}{h} = \mu \end{aligned}$$

- 无跳变：

$$q_{ii} = -\sum_{j\neq i} q_{ij} = \begin{cases} -\lambda, & i = 0 \\ -(\lambda + \mu), & i \geq 1 \end{cases}$$

(3) 嵌入 DTMC 的转移概率矩阵 P：
嵌入链仅在跳变时记录状态，跳转概率为速率的归一化：
- 对于 $i \geq 1$：

$$p_{i,i+1} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad p_{i,i-1} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

- 对于 $i = 0$：

$$p_{0,1} = 1$$

转移矩阵前几行表示如下：

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

由于状态间互通，S 是不可约的，因此（我们可以）构造稳态分布，联立平衡方程组来求解

$$\begin{cases} \pi Q = 0, \\ \pi e = 1, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} P_0\lambda = P_1\mu, \\ P_1(\lambda+\mu) = \lambda P_0 + P_2\mu, \\ P_j(\lambda+\mu) = \lambda P_{j-1} + \mu P_{j+1}, \quad j \geq 2, \\ \sum_{j=0}^{\infty} P_j = 1, \end{cases}$$

得到

$$\begin{cases} P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0, \\ P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0, \\ P_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0, \\ \vdots \\ P_j = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j P_0, \end{cases}$$

进而有

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j P_0 = 1,$$

所以

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j} = \begin{cases} 1 - \frac{\lambda}{\mu}, & \lambda < \mu, \\ 0, & \lambda \geq \mu. \end{cases}$$

Problem 26: 连续过程马尔科夫链例题 2: 排队模型 2

(M/M/2 排队系统）顾客以参数为 λ 的 Poisson 过程到达有 2 个服务员的服务系统，若发现有服务员空闲则马上接受服务，否则按照 FCFS 的规则等待服务。两个服务员对单个顾客的服务时间是 $Y_1, Y_2 \sim \text{Exp}(\mu)$，相互独立且独立于到达过程，设 $X(t)$ 表示 t 时刻系统中的顾客数。

1. 判断 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是否为连续时间马尔可夫链（CTMC）；
2. 求 $\{X(t), t \geq 0\}$ 在每个状态的转移速率，并画出状态转移速率图；
3. 求 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的嵌入离散时间马尔可夫链（DTMC）的转移概率矩阵（TPM）。

解答:
这一题的思路与上一题如出一辙。我们只需将服务时间重新定义为 $Y_{\text{new}} = \min(Y_1, Y_2) \sim \text{Exp}(2\mu)$，然后在前文的基础上，将其中的 Y 替换为新的 Y_{new} 即可。
类似地，当我们遇到一般的 M/M/C 排队系统时，也可以采用同样的方法：将服务时间视为 $Y_* = \min(Y_1, Y_2, \ldots, Y_C) \sim \text{Exp}(C\mu)$，再代入原有框架中进行分析。

Problem 27: 连续过程马尔科夫链例题 3: 生灭过程引入

设 $X(t)$ 表示 t 时刻某地区 A 种群的数量。假设每个个体以指数率 λ 繁殖一个新个体，以指数率 μ 死亡，且该地区以指数率 θ 从其他地区迁入一个个体。繁殖、死亡与迁入过程彼此独立，且初始时 $X(0) = k$。记 $M(t) \triangleq \mathbb{E}[X(t)]$。

1. 判断 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是否为生灭过程，并画出状态转移速率图；
2. 建立关于 $M(t)$ 的微分方程，并求解 $M(t)$。

解答:
由于繁殖、死亡、迁入均为独立的指数过程，且指数分布具有无记忆性，因此 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是连续时间马尔可夫链（CTMC），状态空间为 $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$。
每个个体以速率 λ 繁殖、μ 死亡，系统整体以速率 θ 迁入，因此对于状态 i，转移速率为:

$$\begin{aligned} q_{i,i+1} &= \lambda i + \theta, \quad i \geq 0 \\ q_{i,i-1} &= \mu i, \quad i \geq 1 \\ q_{i,j} &= 0, \quad \text{其他情形} \end{aligned}$$

对应的状态转移概率在小时间 h 内可写为:

$$P_{ij}(h) = \mathbb{P}(X(t+h) = j \mid X(t) = i) = \begin{cases} (\lambda i + \theta)h + o(h), & j = i+1 \\ \mu i \cdot h + o(h), & j = i-1,\ i \geq 1 \\ 1 - [(\lambda i + \theta) + \mu i]h + o(h), & j = i \\ o(h), & \text{其他} \end{cases}$$

所以，该过程仅在相邻状态之间转移，是一个生灭过程.
建立并求解 $M(t) = \mathbb{E}[X(t)]$：

利用全期望公式：

$$M(t+h) = \mathbb{E}[X(t+h)] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X(t+h) \mid X(t)]\right]$$

设 $X(t) = i$，在时间 h 内发生变化的概率为：
- 增加一个人：概率 $(\lambda i + \theta)h + o(h)$，变为 $i+1$ - 减少一个人：概率 $\mu i h + o(h)$，变为 $i-1$ - 无变化：概率 $1 - [(\lambda i + \theta) + \mu i]h + o(h)$
因此：

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(t+h) \mid X(t) = i] &= (i+1)[(\lambda i + \theta)h] + (i-1)[\mu i h] + i \cdot [1 - (\lambda i + \theta + \mu i)h] + o(h) \\ &= i + [(\lambda - \mu)i + \theta]h + o(h) \end{aligned}$$

对上式两边取期望：

$$\begin{aligned} M(t+h) = \mathbb{E}[X(t+h)] &= \mathbb{E}[i + ((\lambda - \mu)i + \theta)h + o(h)] \\ &= M(t) + [(\lambda - \mu)M(t) + \theta]h + o(h) \end{aligned}$$

两边同时除以 h，再令 $h \to 0$：

$$\frac{M(t+h) - M(t)}{h} \to M'(t) = (\lambda - \mu)M(t) + \theta$$

初始条件：$M(0) = \mathbb{E}[X(0)] = k$
因此，满足如下常微分方程：

$$\boxed{M'(t) = (\lambda - \mu)M(t) + \theta, \quad M(0) = k}$$

这是一个一阶线性非齐次常微分方程，其解为：

$$M(t) = \left(k + \frac{\theta}{\lambda - \mu}\right) e^{(\lambda - \mu)t} - \frac{\theta}{\lambda - \mu}, \quad \text{当}\lambda \neq \mu$$

当 $\lambda = \mu$ 时，方程变为：

$$M'(t) = \theta \Rightarrow M(t) = \theta t + k$$

Problem 28: 连续过程马尔科夫链例题 5: 维修模型

例题:
一台机器的工作寿命是 $L \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$，损坏以后立刻进行维修，维修时间是 $Y \sim \mathrm{Exp}(\mu)$，且 L 与 Y 互相独立。设 $X(t)$ 表示时刻 t 机器所处的状态，其中

$$0: \text{工作状态}, \quad 1: \text{维修状态},$$

假设一开始机器处于工作状态。
问题:
（1）建立该系统的连续时间马尔可夫链（CTMC）模型，并求 $P_{00}(10)$（两种方法）。（下为答案）

$$P_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

（2）求区间 $(0,t]$ 中处于工作状态 0 的平均时间 $E[W_0(t)]$。（下为答案）

$$E[W_0(t)] = \frac{\mu t}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{(\lambda+\mu)^2}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right).$$

解答:

设机器工作时间 $L \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$，维修时间 $Y \sim \mathrm{Exp}(\mu)$，且二者相互独立。由于指数分布具有无记忆性，故过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 构成一个连续时间马尔可夫链（CTMC），其状态空间为 $S = \{0, 1\}$，其中：
* 状态 0 表示机器处于工作状态；* 状态 1 表示机器正在维修。
状态转移速率为：

$$q_{01} = \lambda, \quad q_{10} = \mu, \quad q_{00} = -\lambda, \quad q_{11} = -\mu,$$

因此，其速率矩阵为：

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

设转移概率矩阵为：

$$P(t) = \begin{pmatrix} P_{00}(t) & P_{01}(t) \\ P_{10}(t) & P_{11}(t) \end{pmatrix},$$

根据 Kolmogorov 向前方程（前导方程）：

$$P'(t) = P(t)Q.$$

考虑第一个分量 $P_{00}(t)$，由矩阵乘法可得：

$$P_{00}'(t) = -\lambda P_{00}(t) + \mu P_{10}(t).$$

由于概率守恒关系 $P_{00}(t) + P_{10}(t) = 1$，可得：

$$P_{10}(t) = 1 - P_{00}(t),$$

代入上式得：

$$P_{00}'(t) = -\lambda P_{00}(t) + \mu(1 - P_{00}(t)) = -(\lambda + \mu)P_{00}(t) + \mu,$$

配初始条件：

$$P_{00}(0) = 1.$$

有了这些初始条件，我们能够解出 $P_{00}(t)$

算 $P_{00}(t)$ 方法二

$$\begin{aligned}
&q_0 = \lambda \neq q_1 = \mu,\\
&\text{构造 CTMC } \{\widetilde{X}(t), t \geq 0\}\text{，其中}\\
&q^* = \lambda + \mu \text{ 为每个状态的转移速率,}\\
&\forall i \in S, \quad T_i \sim \mathrm{Exp}(q^*),\\
&P_{01}^* = \frac{q_{01}}{q^*} P_{01} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot \frac{q_{01}}{q_0} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot \frac{\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu},\\
&P_{10}^* = \frac{q_{10}}{q^*} P_{10} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot \frac{q_{10}}{q_1} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot \frac{\mu}{\mu} = \frac{\mu}{\lambda + \mu},\\
&P_{00}^* = 1 - \frac{q_{01}}{q^*} = 1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{\mu}{\lambda + \mu},\\
&P_{11}^* = 1 - \frac{q_{10}}{q^*} = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu},\\
&P^* = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{pmatrix},\\
&(P^*)^n = P^*,\\
&\text{上面是因为这是一个幂等矩阵，接下来由一般化公式得}\\
&P_{00}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^* t)^n}{n!} e^{-q^* t} \, (P^*)_{00}^{(n)}\\
&\quad = e^{-(\lambda+\mu)t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(\lambda + \mu)t]^n}{n!} e^{-(\lambda+\mu)t} \cdot \frac{\mu}{\lambda + \mu}.
\end{aligned}$$

第二问

$$
\begin{aligned}
E[W_0(t)] &= E\left[\int_0^t I(s)ds\right]，\text{其中} I(s) = \begin{cases} 1, & X(s)=0 \\ 0, & X(s) \neq 0 \end{cases} \\
&= \int_0^t E[I(0)]ds = \int_0^t P(X(s)=0)ds = \int_0^t P(X(s)=0|X(0)=0)ds \\
&= \int_0^t P_{00}(s)ds = \int_0^t \left[\frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)s}\right] ds
\end{aligned}
$$

上面的 $P_{00}(s)$ 用到了第一题的结论.

Problem 29: 连续时间马尔科夫链例题 5: 故障模型

系统由 n 台同型机床构成, 其中一台工作, 其它 $n-1$ 台备用。机床的工作寿命是 $L \sim Exp(\lambda)$, 只有一条修理线，对每台故障机床的维修时间是 $R \sim Exp(u)$，L 与 R 互独。

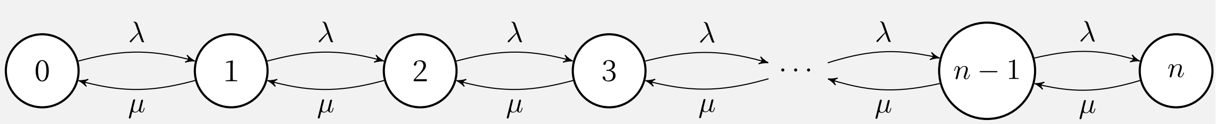
问题:

1. 建立 CTMC 模型，并求系统在稳态情况下的可用度；
2. 要保证可用度不低于 α，至少需要几台机床?

($P_k = \left(\frac{\lambda}{u}\right)^k \cdot \frac{1-\frac{\lambda}{u}}{1-\left(\frac{\lambda}{u}\right)^{n+1}}$ 和 $n \geq \frac{1}{\ln\frac{\lambda}{u}} \cdot \ln\frac{1-\alpha}{1-\frac{\lambda}{u}\alpha}$)

解答:

- 设定 $L \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$，$R \sim \mathrm{Exp}(\mu)$，基于指数分布的无记忆性。
- 状态空间 $S = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$，判断 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为连续时间马尔可夫链（CTMC）。



- 我们可以看到这是一个很典型的生灭过程，状态转移速率如下:

$$q_{01} = \lambda, \quad q_{n,n+1} = \lambda \quad (n \geq 0)$$

$$q_{10} = \mu, \quad q_{n,n-1} = \mu \quad (n \geq 1)$$

列出平衡方程组

$$
\begin{aligned}
P_0\lambda &= P_1\mu \\
P_1(\lambda+\mu) &= P_0\lambda + P_2\mu \\
P_j(\lambda+\mu) &= P_{j-1}\lambda + P_{j+1}\mu \quad (2 \leq j \leq n-1) \\
P_n\mu &= P_{n-1}\lambda \\
\sum_{j=0}^{n} P_j &= 1
\end{aligned}
$$

算出 Pn 的概率，那么系统在稳态情况下的可用率为 1-Pn（1 减去全部机器歇菜的概率），第二问的可信度，则可以通过建立 $P(\text{可用}) > \alpha \Rightarrow 1 - Pn > \alpha \Rightarrow n \geq \frac{1}{\ln\frac{\lambda}{u}} \cdot \ln\frac{1-\alpha}{1-\frac{\lambda}{u}\alpha}$)

Problem 30: 连续时间马尔科夫链例题 6: 多个服务员

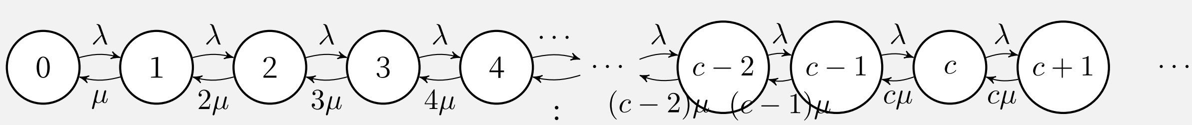
顾客以参数为 λ 的 Poisson 过程到达有 C 个服务员的服务系统，若发现有服务员空闲则马上接受服务，否则按照 FCFS 的规则等待服务。每个服务员独立服务顾客，对每个顾客的服务时间是 $Y \sim Exp(\mu)$，且独立于到达过程，$X(t)$ 表示 t 时刻系统中的顾客数。

问题

1. 判断 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是 CTMC；
2. 求 $\{X(t), t \geq 0\}$ 在每个状态的转移速率，并画出状态转移速率图；
3. 系统中顾客数的极限概率分布 $\{P_j, j \in S\}$（只建立平衡方程组）。

解答:
状态空间为:

$$S = \{0, 1, 2, \cdots\}$$



状态转移速率

- 从状态 0 转移到状态 1 的速率为 λ；从状态 1 转移到状态 0 的速率为 μ。
- 从状态 1 转移到状态 2 的速率为 λ；从状态 2 转移到状态 1 的速率为 2μ。

- 从状态 2 转移到状态 3 的速率为 λ；从状态 3 转移到状态 2 的速率为 3μ。
- 一般地，从状态 k 转移到状态 $k+1$ 的速率为 λ；从状态 k（$k \le C-1$）转移到状态 $k-1$ 的速率为 $k\mu$。
- 从状态 $C-1$ 转移到状态 C 的速率为 λ；从状态 C 转移到状态 $C-1$ 的速率为 $(C-1)\mu$。
- 从状态 C 转移到状态 $C+1$ 的速率为 λ；从状态 $C+1$ 转移到状态 C 的速率为 $C\mu$；

  当 $j \ge C$ 时：

$$\text{从状态}j\text{ 转移到}j+1\text{ 的速率为}\lambda,\quad \text{转移到}j-1\text{ 的速率为}C\mu\text{。}$$

平衡方程组

$$\begin{aligned}
&P_0\lambda = \mu P_1 \\
&P_j(\lambda + j\mu) = P_{j-1}\lambda + P_{j+1}(j+1)\mu, \quad 1 \le j \le C-1 \\
&P_C(\lambda + C\mu) = P_{C-1}\lambda + P_{C+1}C\mu \\
&P_j(\lambda + C\mu) = P_{j-1}\lambda + P_{j+1}C\mu, \quad j \ge C+1 \\
&\sum_{j=0}^{\infty} P_j = 1
\end{aligned}$$

这里不要求求解，我们就不用求出来了.

Problem 31: 连续时间马尔可夫链例题 7：FCFS

顾客以参数为 λ 的 Poisson 过程到达只有 1 个服务员的服务系统，只有当系统中顾客数累积达到 N 个时服务员才开始服务。服务一旦开始就会持续到系统中没有顾客为止（**空竭服务**），顾客按照 FCFS 的规则接受服务。每个顾客的服务时间为 $Y \sim \text{Exp}(\mu)$，且独立于到达过程。设 $X(t)$ 表示 t 时刻系统中的顾客数。

1. 构造一个连续时间马尔可夫链（CTMC），并画出状态转移速率图；
2. 求稳态情况下，系统中顾客数的分布（**只建立平衡方程组**）。

解答：

1. **变量定义**
   - 记 $X(t)$ 表示 t 时刻系统中的顾客数；

- 记 $Z(t)$ 表示服务员的状态（取值为 0 或 1）。

2. **随机过程性质**

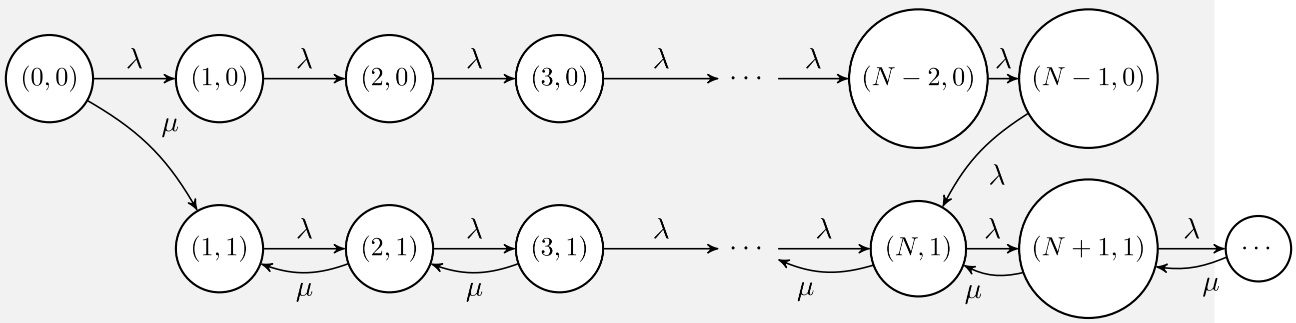
   已知条件表明，$\{(X(t), Z(t)), t \geq 0\}$ 构成一个二维的连续时间马尔可夫链（CTMC）。

3. **状态空间**

   状态空间定义为：

$$S = \begin{cases} (i, 0) \mid i = 0, 1, 2, \ldots, N-1, \\ (i, 1) \mid i = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

状态转移图如下：



平衡转移方程如下所示：

$$\begin{cases} P_{(0,0)}\lambda = \mu P_{(0,1)} \\ P_{(j,0)}\lambda = \lambda P_{(j-1,0)}, \quad 1 \leq j \leq N-1 \\ P_{(1,1)}(\lambda + \mu) = \mu P_{(2,1)} \\ P_{(j,1)}(\lambda + \mu) = \lambda P_{(j-1,1)} + \mu P_{(j+1,1)}, \quad 2 \leq j \leq N-1 \\ P_{(N,1)}(\lambda + \mu) = \lambda P_{(N-1,1)} + \mu P_{(N+1,1)} + \lambda P_{(N-1,0)} \\ P_{(j,1)}(\lambda + \mu) = \lambda P_{(j-1,1)} + \mu P_{(j+1,1)}, \quad j \geq N+1 \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} P_{(j,0)} + \sum_{j=1}^{\infty} P_{(j,1)} = 1 \end{cases}$$

Problem 32: 连续时间马尔可夫链例题 9：可用度测度

系统由两台设备构成，其中一台为工作设备，寿命服从指数分布 $L_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1)$，另一台为备用设备，寿命服从 $L_2 \sim \mathrm{Exp}(\lambda_2)$，且 $\lambda_2 > \lambda_1$。两台设备的维修时间分别服从指数分布 $R_i \sim \mathrm{Exp}(\mu_i)$，其中 $i = 1, 2$，所有随机变量相互独立。系统运行规则如下：正常情况下由工作设备运行，备用设备处于待命状态；当工作设备发生故障时，若备用设备完好，则立即接替运行；若备用设备正在维修，则中断其维修，转而优先修复工作设备；任一设备维修完成后，若另一台设备故障，则其立即投入运行。

问题:

1. 建立该系统的连续时间马尔可夫链（CTMC）模型；
2. 求系统的稳态可用度；
3. 分析备用设备对系统可用度的提升作用。

解答:

分析：设 $X(t)$、$Y(t)$ 分别表示时间 t 时刻工作设备和备用设备的状态，其中取值为 0 表示设备完好，取值为 1 表示设备正在维修。则过程 $\{(X(t), Y(t)), t \geq 0\}$ 构成一个二维连续时间马尔可夫链（CTMC）。

其状态空间为：

$$S = \{(0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (1,1)\}$$

其中，$(X, Y) = (0,0)$ 表示两台设备均正常，$(0,1)$ 表示工作设备正常、备用设备维修，$(1,0)$ 表示工作设备维修、备用设备正常，$(1,1)$ 表示两台设备均在维修。由于系统状态是二维的，它并不属于传统的一维线性生灭过程。因此，在构建马尔可夫链模型时，我们不能仅考虑每次只改变一个分量的相邻状态转移。理论上，系统可能存在同时发生两个事件的跳跃，例如从状态 $(0,0)$ 同时转移到 $(1,1)$ 的双跳跃。尽管我们在后续推导中证明了此类跳跃的转移速率为零，但在建模过程中仍需对所有可能的状态转移路径加以考虑.

1. 转移速率定义：

转移速率 $q_{(0,0)(1,1)}$（从状态 $(0,0)$ 到状态 $(1,1)$ 的转移速率）定义为

$$q_{(0,0)(1,1)} = P'_{(0,0)(1,1)}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{P_{(0,0)(1,1)}(h) - P_{(0,0)(1,1)}(0)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{P((X(h), Y(h)) = (1,1) \mid (X(0), Y(0)) = (0,0))}{h}.$$

首先将概率表示转化为

$$\lim_{h \to 0} \frac{P(L_1 \leq h,\ L_2 \leq h - L_1,\ R_1 > h - L_1) + o(h)}{h}.$$

利用全概率公式并对 L_1 积分，得

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_0^{+\infty} P(L_1\le h,\ L_2\le h-L_1,\ R_1>h-L_1 \mid L_1=x)\ \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\,dx}{h}.$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_0^{+\infty} P(x\le h,\ L_2\le h-x,\ R_1>h-x)\ \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\,dx}{h}.$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_0^{h} P(L_2\le h-x)\ P(R_1>h-x)\ \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\,dx}{h}.$$

代入指数分布的分布函数表示，得到：

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_0^{h} \left(1-e^{-\lambda_2(h-x)}\right)\cdot e^{-u_1(h-x)}\cdot \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\,dx}{h}.$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{\int_0^{h} \left(1-e^{-\lambda_2(h-x)}\right) e^{-u_1(h-x)}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}dx}{h}\\
&\approx \lim_{h\to 0}\frac{\int_0^{h} \lambda_2(h-x)\cdot 1\cdot \lambda_1\,dx}{h}\quad (\text{利用}1-e^{-y}\approx y\ \text{当}y\to 0)\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1\lambda_2\int_0^{h}(h-x)dx}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1\lambda_2\frac{h^2}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1\lambda_2}{2}h=0.
\end{aligned}$$

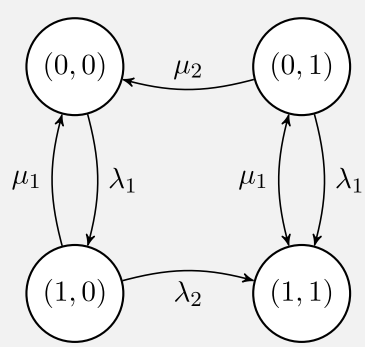
由此可知，该极限结果为 0。

1. 已知 $q_{(0,0)(1,1)}=0$。
2. 同理推导得

$$q_{(1,1)(0,0)}=q_{(0,1)(1,0)}=q_{(1,0)(0,1)}=0.$$

3. 基于上述转移速率结果，得到 S 不可约，因此 S 为正常返态，存在唯一的极限概率.

图中节点对应四种状态，边上标注的速率包括设备故障速率 λ_1、λ_2 及维修速率 μ_1、μ_2，用于表示状态之间的转移关系，**我们上面所做的事情，就是排除了对角线的大跳跃！**。相邻的部分，即只有一维的变化，当然满足我们传统的生灭过程，可以直接写出其转移速率，如下



下面是平衡方程式子:

$$
\begin{aligned}
P_{10}u_1 + P_{01}u_2 &= P_{00}\lambda_1, \\
P_{00}u_2 + P_{11}u_1 &= P_{01}(u_2 + \lambda_1), \\
P_{00}\lambda_1 &= P_{10}(u_1 + \lambda_2), \\
P_{01}\lambda_1 + P_{10}\lambda_2 &= P_{11}u_1, \\
P_{00} + P_{01} + P_{10} + P_{11} &= 1.
\end{aligned}
$$

Problem 33: 连续时间马尔可夫链例题 10：卖货

生产系统产品存储容量为 $S\,(S \geq 1)$，当库存量低于 S 时，系统开启生产，直至库存量恢复到 S 停止生产。潜在订单以参数为 λ 的泊松过程到达，若有库存则立即完成交易（交易时间为 0）；若无库存，订单以概率 p 按先到先服务（FCFS）规则进入排队。
等待订单数不超过 N 时，生产一个产品的时间服从指数分布 $Exp(\mu_l)$；当等待订单数超过 N 时，生产时间调整为服从 $Exp(\mu_h)$，且调整时间服从指数分布 $Exp(\theta)$，调整期间系统停止生产。生产过程与订单到达过程相互独立。

问题:

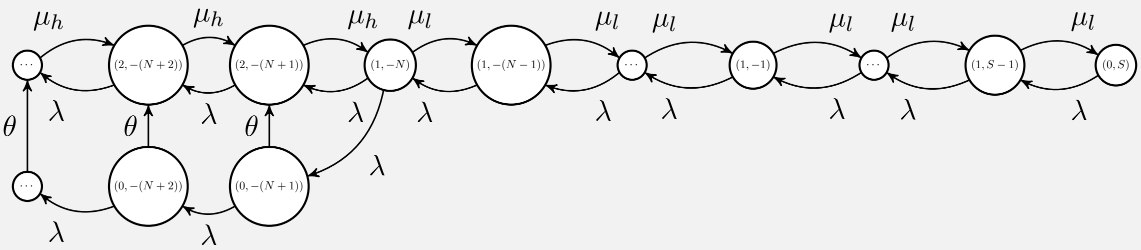
1. 构造该系统的连续时间马尔可夫链（CTMC）模型，并画出状态转移速率图；
2. 建立等待订单数与产品库存数的稳态平衡方程组；
3. 写出稳态条件下缺货概率及缺货状态下等待订单平均队长的表达式。

解答:

分析：记随机变量 $I(t) = \begin{cases} 0, & \text{系统处于停产状态} \\ 1, & \text{系统处于生产率为}\mu_l\text{ 的状态} \\ 2, & \text{系统处于生产率为}\mu_h\text{ 的状态} \end{cases}$，记随机变量 $N(t)$ 表示 t 时刻产品的库存数量，若 $N(t) \geq 0$，则 $N(t)$ 表示该产品的库存数；当 $N(t) < 0$ 时，则 $N(t)$ 表示 t 时刻的订单排队数量。
由条件知二维随机过程 $\{(I(t), N(t)), t \geq 0\}$ 为一个连续时间马尔可夫链（CTMC），其状态空间为:

$$
M = \begin{cases}
(0, S), (0, -(N+1)), (0, -(N+2)), \cdots \\
(1, -N), (1, -(N-1)), \cdots, (1, -1), (1, 0), (1, 1), \cdots, (1, S-1) \\
(2, -(N+1)), (2, -(N+2)), (2, -(N+3)), \cdots
\end{cases}
$$

状态转移图如下



缺货概率为:

$$P(\text{缺货}) = \sum_{j=-N}^{0} P_{(1,j)} + \sum_{j=-\infty}^{-(N+1)} P_{(2,j)} + \sum_{j=-\infty}^{-(N+1)} P_{(0,j)}$$

缺货条件下订单平均排队长度为:

$$E[\text{订单排队长} \mid \text{缺货}] = \frac{\sum_{j=0}^{N} j \cdot P_{(1,-j)}}{P(\text{缺货})} + \frac{\sum_{j=N+1}^{\infty} j \cdot P_{(2,-j)}}{P(\text{缺货})} + \frac{\sum_{j=N+1}^{\infty} j \cdot P_{(0,-j)}}{P(\text{缺货})}$$