目录

1 什么是 slam

运动方程

机器人或者一个物体在空间中的运动都可以抽象为一个数学模型

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k)$$

其中，$\mathbf{u}_k$ 表示运动传感器的读书或者输入，$\mathbf{w}_k$ 表示该过程中加入的噪声，$\mathbf{x}_k$ 表示该时刻运动物体所在位置，函数 f 描述这一个过程，即使不清楚这个过程的具体数学表达。

观测方程

与运动方程相对应的还有一个观测方程，它描述的是运动机器人在 $textbfx_k$ 位置上观测到某些物体 $\mathbf{y}_k$ 产生的一个观测数据 $textbfz_{k,j}$，同样可以用一个抽象的函数 h 来表示这样一个关系：

$$\mathbf{z}_{k,j} = h(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_k, \mathbf{v}_{k,j})$$

这里 $\mathbf{v}_{k,j}$ 是这一次的观测噪声。

上述两个方程描述了最基本的 SLAM 问题，当知道运动测量读书 u，以及传感器的读书 z 时，如何求解定位问题 (估计 $\mathbf{x}$) 和建图问题 (估计 $\mathbf{y}$)，这样就把 SLAM 问题建模成了一个状态估计问题：如何通过带有噪声的测量数据，估计内部的，隐藏着的状态变量。

2 刚体的三维运动

内积

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos < \mathbf{a}, \mathbf{b} >$$

外积

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left\| \begin{matrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \right\| = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{b} \overset{def}{=} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

外积的结果是一个向量，它的方向垂直于这两个向量，大小为 $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin < \mathbf{a}, \mathbf{b} >$，是两个向量张成的四边形的有向面积。

旋转矩阵

旋转矩阵各分量从定义推导上来看是两个坐标系基的内积，由于基向量的长度为 1，所以实际上是各个基向量的夹角的余弦值，因此也称作**方向余弦矩阵**, 它实际上是一个行列式为 1 的正交矩阵。

对于 n 维旋转矩阵集合定义如下：

$$SO(n) = \{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \boldsymbol{I}, det(\mathbf{R}) = 1\}$$

特别的 $SO(3)$ 指三维空间的旋转，通过旋转矩阵就可以直接讨论两个坐标系之间的转换，而不用再从基开始谈起。

由于旋转矩阵为正交矩阵，它的逆 (即转置) 描述了一个相反的旋转，即 $\mathbf{R}^{-1}, \mathbf{R}^T$ 刻画来了一个与 $\mathbf{R}$ 相反的旋转矩阵。

对于两个坐标系 1 和坐标系 2 来说，向量 $\mathbf{a}$ 在两个坐标系下的坐标为 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$，它们之间的关系应该为：

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{R}_{12}\mathbf{a}_2 + \mathbf{t}_{12}$$

这里的 $\mathbf{R}_{12}$ 是指把坐标系 2 的向量变换到坐标系 1 中，关于平移 $\mathbf{t}_{12}$，它实际意义上指的是坐标系 1 的原点指向坐标系 2 原点的向量。注意在两个坐标系的相互变换中，其中的 $\mathbf{t}_{12}$ 和 $\mathbf{t}_{21}$ 并**不存在** $\mathbf{t}_{12} = -\mathbf{t}_{21}$ 这样的

关系，因为这两个坐标系之间还有旋转变换关系。**尽管从空间上看两个平移向量确实为相反方向，但在数值上并不是简单的取反操作**

上述坐标系之间的变换关系在实现多次变换时会显得十分繁琐,如进行了两次变换的表达式为 $\mathbf{c} = \mathbf{R}_2(\mathbf{R}_1\mathbf{a} + \mathbf{t}_1) + \mathbf{t}_2$。因此引入齐次坐标系 (齐次坐标系的由来是个巧妙的)：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}^{'} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ 1 \end{bmatrix} \overset{def}{=} \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ 1 \end{bmatrix}$$

矩阵 $\mathbf{T}$ 称为**变换矩阵**，变换为齐次坐标系后可以将旋转和平移写在同一个矩阵中，使得整个变换关系变为线性关系，多次坐标系变换就可以直接右乘。

$$\widetilde{\mathbf{c}} = \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1\widetilde{\mathbf{a}}$$

像上述这种变换矩阵的形式，又称之为特殊欧氏群：

$$SE(3) = \left\{ \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times4} | \mathbf{R} \in SO(3), \mathbf{t} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

同样的求解该矩阵的一个逆表示一个反向的变换：

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T\mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

旋转向量和欧拉角

对于旋转矩阵来说用了 9 个量来表示坐标系的旋转，变换矩阵更是用了 16 个量来表示刚体坐标系的变换，这种表达方式有些冗余但直观。算了直接给出旋转向量的定义 (为了解决旋转矩阵的冗余表达)，任何的旋转都可以用一个旋转轴和一个旋转角来表示，于是可以用一个三维向量来描述旋转，**三维向量方向与旋转轴一致，而长度等于旋转角**。这样的向量称为**旋转向量**，因此，对于变换矩阵可用一个旋转向量和一个平移向量表示，这时变量个数为 6 个。