目录

1 什么是 slam

运动方程

机器人或者一个物体在空间中的运动都可以抽象为一个数学模型

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k) \tag{1.1}$$

其中，$\mathbf{u}_k$ 表示运动传感器的读书或者输入，$\mathbf{w}_k$ 表示该过程中加入的噪声，$\mathbf{x}_k$ 表示该时刻运动物体所在位置，函数 f 描述这一个过程，即使不清楚这个过程的具体数学表达。

观测方程

与运动方程相对应的还有一个观测方程，它描述的是运动机器人在 $textbfx_k$ 位置上观测到某些物体 $\mathbf{y}_k$ 产生的一个观测数据 $textbfz_{k,j}$，同样可以用一个抽象的函数 h 来表示这样一个关系：

$$\mathbf{z}_{k,j} = h(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_k, \mathbf{v}_{k,j}) \tag{1.2}$$

这里 $\mathbf{v}_{k,j}$ 是这一次的观测噪声。

上述两个方程描述了最基本的 SLAM 问题，当知道运动测量读书 u，以及传感器的读书 z 时，如何求解定位问题 (估计 $\mathbf{x}$) 和建图问题 (估计 $\mathbf{y}$)，这样就把 SLAM 问题建模成了一个状态估计问题：如何通过带有噪声的测量数据，估计内部的，隐藏着的状态变量。

2 刚体的三维运动

内积

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos < \mathbf{a}, \mathbf{b} > \tag{2.1}$$

外积

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left\| \begin{matrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \right\| = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{b} \overset{def}{=} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \tag{2.2}$$

外积的结果是一个向量，它的方向垂直于这两个向量，大小为 $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin < \mathbf{a}, \mathbf{b} >$，是两个向量张成的四边形的有向面积。

旋转矩阵

旋转矩阵各分量从定义推导上来看是两个坐标系基的内积，由于基向量的长度为 1，所以实际上是各个基向量的夹角的余弦值，因此也称作**方向余弦矩阵**, 它实际上是一个行列式为 1 的正交矩阵。

对于 n 维旋转矩阵集合定义如下：

$$SO(n) = \{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \boldsymbol{I}, det(\mathbf{R}) = 1\} \tag{2.3}$$

特别的 $SO(3)$ 指三维空间的旋转，通过旋转矩阵就可以直接讨论两个坐标系之间的转换，而不用再从基开始谈起。

由于旋转矩阵为正交矩阵，它的逆 (即转置) 描述了一个相反的旋转，即 $\mathbf{R}^{-1}, \mathbf{R}^T$ 刻画来了一个与 $\mathbf{R}$ 相反的旋转矩阵。

对于两个坐标系 1 和坐标系 2 来说，向量 $\mathbf{a}$ 在两个坐标系下的坐标为 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$，它们之间的关系应该为：

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{R}_{12}\mathbf{a}_2 + \mathbf{t}_{12} \tag{2.4}$$

这里的 $\mathbf{R}_{12}$ 是指把坐标系 2 的向量变换到坐标系 1 中，关于平移 $\mathbf{t}_{12}$，它实际意义上指的是坐标系 1 的原点指向坐标系 2 原点的向量。注意在两个坐标系的相互变换中，其中的 $\mathbf{t}_{12}$ 和 $\mathbf{t}_{21}$ 并**不存在** $\mathbf{t}_{12} = -\mathbf{t}_{21}$ 这样的关系，因为这两个坐标系之间还有旋转变换关系。**尽管从空间上看两个平移向量确实为相反方向，但在数值上并不是简单的取反操作**

上述坐标系之间的变换关系在实现多次变换时会显得十分繁琐，如进行了两次变换的表达式为 $\mathbf{c} = \mathbf{R}_2(\mathbf{R}_1\mathbf{a} + \mathbf{t}_1) + \mathbf{t}_2$。因此引入齐次坐标系 (齐次坐标系的由来是个巧妙的)：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ 1 \end{bmatrix} \stackrel{def}{=} \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

矩阵 $\mathbf{T}$ 称为**变换矩阵**，变换为齐次坐标系后可以将旋转和平移写在同一个矩阵中，使得整个变换关系变为线性关系，多次坐标系变换就可以直接右乘。

$$\widetilde{\mathbf{c}} = \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1\widetilde{\mathbf{a}} \tag{2.6}$$

像上述这种变换矩阵的形式，又称之为特殊欧氏群：

$$SE(3) = \left\{ \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times4} | \mathbf{R} \in SO(3), \mathbf{t} \in \mathbb{R}^3 \right\} \tag{2.7}$$

同样的求解该矩阵的一个逆表示一个反向的变换：

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T\mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

旋转向量和欧拉角

对于旋转矩阵来说用了 9 个量来表示坐标系的旋转，变换矩阵更是用了 16 个量来表示刚体坐标系的变换，这种表达方式有些冗余但直观。算了直接给出旋转向量的定义 (为了解决旋转矩阵的冗余表达)，任何的旋转都可以用一个旋转轴和一个旋转角来表示，于是可以用一个三维向量来描述旋转，**三维向量方向与旋转轴一致，而长度等于旋转角**。这样的向量称为**旋转向量**，因此，对于变换矩阵可用一个旋转向量和一个平移向量表示，这时变量个数为 6 个。

假设旋转轴为一个单位长度的向量 $\mathbf{n}$，旋转角为 θ，那么向量 $\theta\mathbf{n}$ 也可以描述一个旋转过程，同旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 一样。两种表达方式可以由**罗德里格斯公式**表明，推导过程较复杂，直接给出结果：

$$\mathbf{R} = \cos\theta \boldsymbol{I} + (1-\cos\theta)\mathbf{n}\mathbf{n}^T + \sin\theta\mathbf{n}^\wedge \tag{2.9}$$

符号 $\wedge$ 是向量到反对称矩阵的转化符。

计算一个旋转矩阵到旋转向量的转换，对于旋转角，可以计算上面旋转向量到旋转矩阵等式两边的迹的到：

$$\begin{aligned} tr(\mathbf{R}) &= \cos\theta tr(\boldsymbol{I}) + (1-\cos\theta)tr(\mathbf{n}\mathbf{n}^T) + \sin\theta tr(\mathbf{n}^\wedge) \\ &= 3\cos\theta + (1-\cos\theta) \\ &= 1 + 2\cos\theta \end{aligned} \tag{2.10}$$

因此：

$$\theta = \arccos\frac{tr(\mathbf{R})-1}{2} \tag{2.11}$$

关于旋转轴 $\mathbf{n}$，在旋转轴上向量在旋转后不发生改变，说明：

$$\mathbf{R}\mathbf{n} = \mathbf{n} \tag{2.12}$$

因此，转轴 $\mathbf{n}$ 是矩阵 $\mathbf{R}$ 特征值 1 对应的特征向量，求解此方程再归一化就得到了旋转轴。

欧拉角

欧拉角有一个万向锁的问题，所以不经常用。

四元数

在复平面，一个复向量的旋转 θ 可以乘 $e^{i\theta}$ 来表示，这个是极坐标的表示，如果需要用到普通形式，用欧拉公式转换一下就好。在三维旋转也可用一个单位四元数来表示，四元数 $\mathbf{q}$ 拥有一个实部和三个虚部：$\mathbf{q} = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$，这三个虚部满足以下关系：

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = k, ji = -k \\ jk = i, kj = -i \\ ki = j, ik = -j \end{cases} \tag{2.13}$$

如果将 i，j，k 看成三个坐标轴，那么它们与自己的乘法和复数一样，相互之间的乘法和外积一样。四元数的另外一种表示方式：

$$\mathbf{q} = [\mathbf{s}, \mathbf{v}]^T, \qquad \mathbf{s} = q_0 \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{v} = [q_1, q_2, q_3]^T \in \mathbb{R}^3 \tag{2.14}$$

这里 $\mathbf{s}$ 为四元数的实部，$\mathbf{v}$ 为虚部。

四元数的运算

1、加法和减法

$$\mathbf{q}_a \pm \mathbf{q}_b = [\mathbf{s}_a \pm \mathbf{s}_b, \mathbf{v}_a \pm \mathbf{v}_b]^T \tag{2.15}$$

2、乘法，就是将每一项相乘

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_a \mathbf{q}_b = & \mathbf{s}_a \mathbf{s}_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b \\ & + (s_a x_b + x_a s_b + y_a z_b - z_a y_b) i \\ & + (s_a y_b - x_a z_b + y_a s_b + z_a x_b) j \\ & + (s_a z_b + x_a y_b - y_a x_b + z_a s_b) k \end{aligned} \tag{2.16}$$

上式复杂但有规律，如果改写成向量形式并利用内外积运算，会更加简洁：

$$\mathbf{q}_a \mathbf{q}_b = [\mathbf{s}_a \mathbf{s}_b - \mathbf{v}_a^T \mathbf{v}_b, \mathbf{s}_a \mathbf{v}_b + \mathbf{s}_b \mathbf{v}_a + \mathbf{v}_a \times \mathbf{v}_b]^T \tag{2.17}$$

四元数的乘法通常是不可交换的，除非 $\mathbf{v}_a$ 和 $\mathbf{v}_b$ 是共线的，这时最后一项外积为零。

3、模长

四元数模场定义为：

$$||\mathbf{q}_a|| = \sqrt{\mathbf{s}_a^2 + x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \tag{2.18}$$

可以验证的是：$||\mathbf{q}_a \mathbf{q}_b|| = ||\mathbf{q}_q|| ||\mathbf{q}_b||$

4、共轭

四元数的共轭就是把虚部取成相反数，四元数共轭与其本身相乘会得到一个实四元数，实部为其模长的平方。

5、逆

$$\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^* / ||\mathbf{q}||^2 \tag{2.19}$$

按照定义四元数和自己的逆的乘积为实四元数 **1**

6、数乘

和向量矩阵的数乘一样。

用四元数表示旋转

有一个空间三维点 $\mathbf{p} = [x, y, z] \in \mathbb{R}^3$，以及一个单位四元数 $\mathbf{q}$ 指定的旋转，那么旋转后的点 $\mathbf{p}' = \mathbf{q}\mathbf{p}\mathbf{q}^{-1}$，其中把三维空间点 $\mathbf{p}$ 用一个虚四元数来表述 $\mathbf{p} = [0, x, y, z]^T = [0, \mathbf{v}]^T$，最后把 $\mathbf{p}'$ 的虚部取出即得旋转之后得坐标。

四元数到其它旋转表示的转换

四元数到其他旋转的推导过程比较复杂，直接给出四元数到旋转向量的转换公式如下：

$$\begin{cases} \theta = 2\arccos q_0 \\ [n_x, n_y, n_z]^T = [q_1, q_2, q_3]^T / \sin\dfrac{\theta}{2} \end{cases} \tag{2.20}$$

相似、仿射、射影变换

1、相似变换

相似变换比欧式变换多了一个自由度，它允许物体进行均匀缩放，其变换矩阵为

$$\mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} s\mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

其中旋转部分多了一个缩放因子 s，表示在对向量旋转过后，可以在 x, y, z 三个坐标上进行均匀缩放。

2、仿射变换

与欧式变换不同的是，仿射变换只要求 $\mathbf{A}$ 是一个可逆矩阵，而不必是正交矩阵，仿射变换也叫正交投影。

$$\mathbf{T}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

3、射影变换

射影变换是最一般最常见的变换，矩阵形式为

$$\mathbf{T}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{a}^T & v \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

左上角为可逆矩阵 $\mathbf{A}$，右上角为平移 $\mathbf{t}$，左下角为缩放 $\mathbf{a}^T$。由于采用了齐次坐标，所以可以对整个矩阵除以 v 得到右下角不是 1 就是 0 的矩阵，于是 2D 的射影变换有 8 个自由度，3D 的射影变换有 15 个自由度。