

目录

1 什么是 slam	1
2 刚体的三维运动	1

1 什么是 slam

运动方程

机器人或者一个物体在空间中的运动都可以抽象为一个数学模型

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k) \quad (1.1)$$

其中, \mathbf{u}_k 表示运动传感器的读书或者输入, \mathbf{w}_k 表示该过程中加入的噪声, \mathbf{x}_k 表示该时刻运动物体所在位置, 函数 f 描述这一个过程, 即使不清楚这个过程的具体数学表达。

观测方程

与运动方程相对应的还有一个观测方程, 它描述的是运动机器人在 $\text{textrm{f}x}_k$ 位置上观测到某些物体 \mathbf{y}_k 产生的一个观测数据 $\text{textrm{f}z}_{k,j}$, 同样可以用一个抽象的函数 h 来表示这样一个关系:

$$\mathbf{z}_{k,j} = h(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_k, \mathbf{v}_{k,j}) \quad (1.2)$$

这里 $\mathbf{v}_{k,j}$ 是这一次的观测噪声。

上述两个方程描述了最基本的 SLAM 问题, 当知道运动测量读书 u , 以及传感器的读书 z 时, 如何求解定位问题 (估计 \mathbf{x}) 和建图问题 (估计 \mathbf{y}), 这样就把 SLAM 问题建模成了一个状态估计问题: 如何通过带有噪声的测量数据, 估计内部的, 隐藏着的状态变量。

2 刚体的三维运动

内积

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos < \mathbf{a}, \mathbf{b} > \quad (2.1)$$

外积

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad (2.2)$$

外积的结果是一个向量, 它的方向垂直于这两个向量, 大小为 $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin < \mathbf{a}, \mathbf{b} >$, 是两个向量张成的四边形的有向面积。

旋转矩阵

旋转矩阵各分量从定义推导上来看是两个坐标系基的内积, 由于基向量的长度为 1, 所以实际上是各个基向量的夹角的余弦值, 因此也称作**方向余弦矩阵**, 它实际上是一个行列式为 1 的正交矩阵。

对于 n 维旋转矩阵集合定义如下:

$$SO(n) = \{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n} | \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}, \det(\mathbf{R}) = 1\} \quad (2.3)$$

特别的 $SO(3)$ 指三维空间的旋转, 通过旋转矩阵就可以直接讨论两个坐标系之间的转换, 而不用再从基开始谈起。

由于旋转矩阵为正交矩阵, 它的逆 (即转置) 描述了一个相反的旋转, 即 $\mathbf{R}^{-1}, \mathbf{R}^T$ 刻画来了一个与 \mathbf{R} 相反的旋转矩阵。

对于两个坐标系 1 和坐标系 2 来说, 向量 \mathbf{a} 在两个坐标系下的坐标为 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, 它们之间的关系应该为:

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{R}_{12} \mathbf{a}_2 + \mathbf{t}_{12} \quad (2.4)$$

这里的 \mathbf{R}_{12} 是指把坐标系 2 的向量变换到坐标系 1 中，关于平移 \mathbf{t}_{12} ，它实际意义上指的是坐标系 1 的原点指向坐标系 2 原点的向量。注意在两个坐标系的相互变换中，其中的 \mathbf{t}_{12} 和 \mathbf{t}_{21} 并不存在 $\mathbf{t}_{12} = -\mathbf{t}_{21}$ 这样的关系，因为这两个坐标系之间还有旋转变换关系。尽管从空间上看两个平移向量确实为相反方向，但在数值上并不是简单的取反操作

上述坐标系之间的变换关系在实现多次变换时会显得十分繁琐，如进行了两次变换的表达式为 $\mathbf{c} = \mathbf{R}_2(\mathbf{R}_1\mathbf{a} + \mathbf{t}_1) + \mathbf{t}_2$ 。因此引入齐次坐标系（齐次坐标系的由来是个巧妙的）：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ 1 \end{bmatrix} \stackrel{def}{=} \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

矩阵 \mathbf{T} 称为**变换矩阵**，变换为齐次坐标系后可以将旋转和平移写在同一个矩阵中，使得整个变换关系变为线性关系，多次坐标系变换就可以直接右乘。

$$\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \tilde{\mathbf{a}} \quad (2.6)$$

像上述这种变换矩阵的形式，又称之为特殊欧氏群：

$$SE(3) = \left\{ \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \mid \mathbf{R} \in SO(3), \mathbf{t} \in \mathbb{R}^3 \right\} \quad (2.7)$$

同样的求解该矩阵的一个逆表示一个反向的变换：

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

旋转向量和欧拉角

对于旋转矩阵来说用了 9 个量来表示坐标系的旋转，变换矩阵更是用了 16 个量来表示刚体坐标系的变换，这种表达方式有些冗余但直观。算了直接给出旋转向量的定义（为了解决旋转矩阵的冗余表达），任何的旋转都可以用一个旋转轴和一个旋转角来表示，于是可以用一个三维向量来描述旋转，**三维向量方向与旋转轴一致，而长度等于旋转角**。这样的向量称为**旋转向量**，因此，对于变换矩阵可用一个旋转向量和一个平移向量表示，这时变量个数为 6 个。

假设旋转轴为一个单位长度的向量 \mathbf{n} ，旋转角为 θ ，那么向量 $\theta\mathbf{n}$ 也可以描述一个旋转过程，同旋转矩阵 \mathbf{R} 一样。两种表达方式可以由**罗德里格斯公式**表明，推导过程较复杂，直接给出结果：

$$\mathbf{R} = \cos \theta \mathbf{I} + (1 - \cos \theta) \mathbf{n} \mathbf{n}^T + \sin \theta \mathbf{n}^\wedge \quad (2.9)$$

符号 \wedge 是向量到反对称矩阵的转化符。

计算一个旋转矩阵到旋转向量的转换，对于旋转角，可以计算上面旋转向量到旋转矩阵等式两边的迹的到：

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{R}) &= \cos \theta \text{tr}(\mathbf{I}) + (1 - \cos \theta) \text{tr}(\mathbf{n} \mathbf{n}^T) + \sin \theta \text{tr}(\mathbf{n}^\wedge) \\ &= 3 \cos \theta + (1 - \cos \theta) \\ &= 1 + 2 \cos \theta \end{aligned} \quad (2.10)$$

因此：

$$\theta = \arccos \frac{\text{tr}(\mathbf{R}) - 1}{2} \quad (2.11)$$

关于旋转轴 \mathbf{n} ，在旋转轴上向量在旋转后不发生改变，说明：