Phân tích trong miền tần số

Chuỗi fourier rời rạc thời gian (DTFS)

- Tín hiệu x(n) tuần hoàn ở chu kỳ N được khai triển thành các thành phần tần số khác nhau

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j2\pi kn/N}$$

Các thành phần phổ a_k

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} \text{ với } 0 \leq k \leq N-1$$

- Tín hiệu tuần hoàn ở chu kỳ N thì phổ của nó cũng tuần hoàn ở cùng chu kỳ N
- Từ các thành phần phổ, ta có thể tổng hợp lại để ra tín hiệu ban đầu.
- Tín hiệu số tuần hoàn ở chu kỳ N mẫu trong miền thời gian được mô tả một cách đầy đủ bởi cùng số lượng thành phần tần số trong miền tần số.

- Tín hiệu tương tự tuần hoàn có tần phổ không tuần hoàn, còn tần phổ của tín hiệu số bao giờ cũng tuần hoàn dù tín hiệu có tuần hoàn hay không.
- Ví dụ: Tính phổ của chuỗi xung lực đơn vị, cho tín hiệu tuần hoàn với N=64

$$a_k = \frac{1}{64}$$

Áp dụng cho tín hiệu ∂(n-1)

Biến đổi fourier rời rạc thời gian (DTFT)

- Tín hiệu không tuần hoàn

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\Omega}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X\,(\Omega) e^{jn\Omega} \mathrm{d}\Omega \qquad \text{với } \Omega = \frac{2\pi k}{N}$$

- $X(\Omega)$ liên tục theo (Ω)
- Do kết quả của việc lấy mẫu, $X(\Omega)$ luôn tuần hoàn ở chu kỳ 2π nên tích phân trên thường lấy từ [-π, π], tức khi tính toán, ta tính từ 0 đến π rồi lấy đối xứng.

Biến đổi fourier của một số tín hiệu

- Xung lực đơn vị

  F[∂(n)]=1

- Xung lực đơn vị trì hoãn

  F[∂(n - n_0)]=$e^{-jn_0\Omega}$

  F[∂(n+n_0)]=$e^{jn_0\Omega}$

- Bậc đơn vị

  F[u(n)]=$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-jn\Omega}$

- Xung vuông chẵn đối xứng qua gốc

  X(Ω)=1+2$\sum_{n=1}^{N} cosn\Omega$

Một số tính chất của biến đổi fourier

- Tuyến tính
- Dịch chuyển thời gian

  x(n-n_0) $\longleftrightarrow$ X(Ω)$e^{-jn_0\Omega}$
- Đảo thời gian

  x(-n) $\longleftrightarrow$ X(- Ω)
- Dịch chuyển tần số

  x(n)$e^{jn\Omega}$ $\longleftrightarrow$ x(Ω - Ω_0)
- Nhân chập

  $x_1(n) * x_2(n) \longleftrightarrow X_1(\Omega).X_2(\Omega)$

Đáp ứng tần số của hệ thống LTI

- Biến đổi Fourier rời rạc thời gian của đáp ứng xung được gọi là đáp ứng tần số của hệ thống

$$\mathrm{H}(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jn\Omega}$$

Ngược lại

$$\mathrm{h}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} H\,(\Omega)e^{jn\Omega}\mathrm{d}\Omega$$

H(Ω) được gọi là đặc tính tần số của hệ thống, là đặc trưng của hệ thống về mặt tần số

H(Ω) thường phức

$\mathrm{H}(\Omega)=|\mathrm{H}(\Omega)|e^{-j\Phi_{H(\Omega)}}$

- Đáp ứng biên độ theo dB: để thu hẹp khoảng cách những khoảng biến thiên quá rộng, hoặc làm nổi những khoảng biến thiên nhỏ.

Hàm riêng và trị riêng

- Hàm riêng x(n) = $e^{jn\Omega}$

Thì y(n) = $\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$

= $\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j(n-k)\Omega}$

= $\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j(-k)\Omega}\right]e^{jn\Omega}$

= H(Ω).$e^{jn\Omega}$

Khi đó, H(Ω) được gọi là trị riêng.

Đáp ứng tần số theo các hệ số của lọc

- Phương trình lọc ĐQ

$$y(n) = \sum_{k=1}^{M} a_k y(n-k) + \sum_{k=-N}^{N} b_k x(n-k)$$

Nếu x(n) = $e^{jn\Omega}$ thì y(n) = H(Ω).$e^{jn\Omega}$

Thế vào phương trình lọc ĐQ, ta được:

$$H(\Omega)e^{jn\Omega} = \sum_{k=1}^{M} a_k H(\Omega) e^{j(n-k)\Omega} + \sum_{k=-N}^{N} b_k e^{j(n-k)\Omega}$$

$$\longrightarrow \quad H(\Omega) = \frac{\sum_{k=-N}^{N} b_k e^{j(-k)\Omega}}{1 - \sum_{k=1}^{M} a_k e^{j(-k)\Omega}}$$