BIẾN ĐỔI Z VÀ ỨNG DỤNG VÀO HỆ THỐNG LTI RỜI RẠC

1 BIẾN ĐỔI Z

2 CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI Z

3 BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

4 HÀM TRUYỀN CỦA HỆ LTI RỜI RẠC

5 GIẢI PTSP DÙNG BIẾN ĐỔI Z 1 PHÍA

1 BIẾN ĐỔI Z

1.1 ĐỊNH NGHĨA BIẾN ĐỔI Z:

- **Biến đổi Z của dãy x(n):** $$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (*)$$

  Trong đó Z – biến số phức

  Biểu thức (*) còn gọi là biến đổi Z hai phía

  Biến đổi Z 1 phía dãy x(n): $$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (**)$$

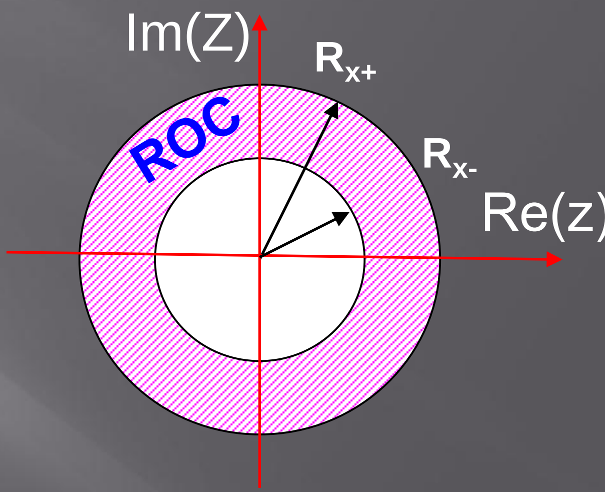
- Nếu x(n) nhân quả thì : (*) $\equiv$ (**)
- **Ký hiệu:**

  x(n) $\xleftrightarrow{Z}$ X(z) hay X(z) = Z{x(n)}

  X(z) $\xleftrightarrow{Z^{-1}}$ x(n) hay x(n) = Z^{-1}{X(z)}

1.2 MIỀN HỘI TỤ CỦA BIẾN ĐỔI Z (ROC)

- **Miền hội tụ của biến đổi Z** - ROC (Region Of Convergence) *là tập hợp tất cả các giá trị Z nằm trong mặt phẳng phức sao cho X(z) hội tụ.*



- Để tìm ROC của X(z) ta áp dụng tiêu chuẩn Cauchy

- **Tiêu chuẩn Cauchy:**

Một chuỗi có dạng:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(n) = x(0) + x(1) + x(2) + \cdots$$

hội tụ nếu:

$$\lim_{n\to\infty} |x(n)|^{\frac{1}{n}} < 1$$

Ví dụ 1.1: Tìm biến đổi Z & ROC của: $x(n) = a^n u(n)$

Giải:

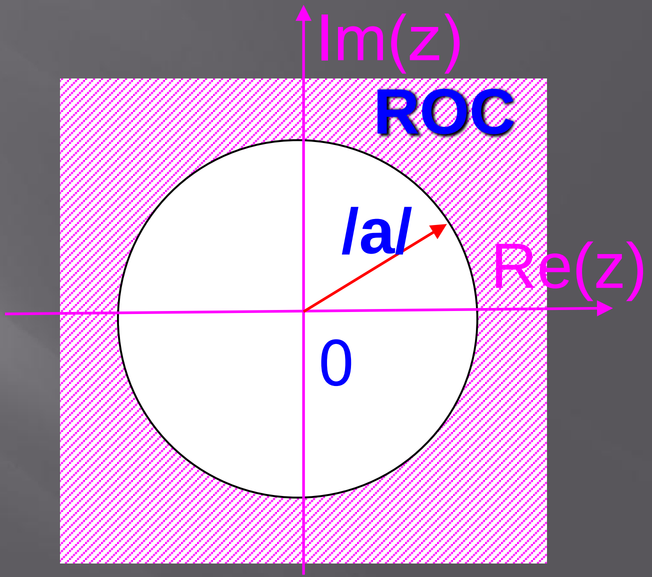
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[a^n u(n)\right] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n . z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a z^{-1}\right)^n$$

Theo tiêu chuẩn Cauchy,

X(z) sẽ hội tụ:

$$X(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}}$$

Nếu: $$\lim_{n\to\infty} \left(\left| a z^{-1} \right|^n \right)^{1/n} < 1 \Leftrightarrow |z| > |a|$$



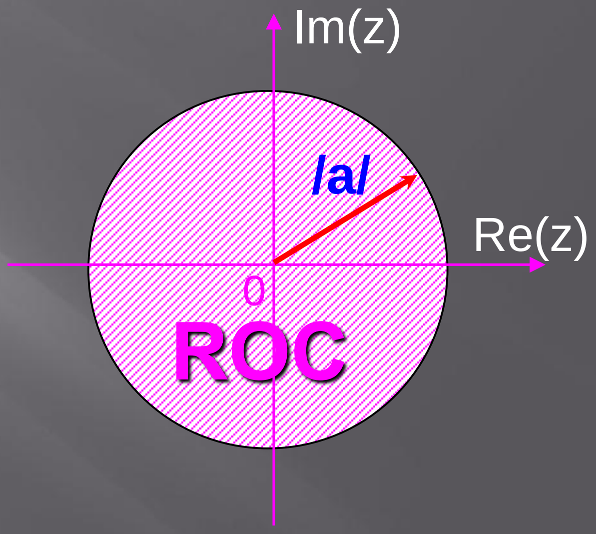
Vậy: $$\boxed{X(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}}; \text{ROC} : |Z| > |a|}$$

Ví dụ 1.1: Tìm biến đổi Z & ROC của: $x(n) = -a^n u(-n-1)$

Giải:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-a^n u(-n-1)\right] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n . z^{-n}$$

$$= -\sum_{m=1}^{\infty} \left(a^{-1} z\right)^m = -\sum_{m=0}^{\infty} \left(a^{-1} z\right)^m + 1$$



Theo tiêu chuẩn Cauchy,

X(z) sẽ hội tụ:

$$X(z) = -\sum_{m=0}^{\infty} \left(a^{-1} z\right)^m + 1 = \boxed{\frac{1}{1 - az^{-1}}}$$

Nếu: $\lim_{n\to\infty} \left(\left|a^{-1} z\right|^n \right)^{1/n} < 1 \Leftrightarrow \boxed{|z| < |a|}$

2 CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI Z

a) Tuyến tính

- Nếu: $\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{Z} X_1(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}_1 \\ x_2(n) \xleftrightarrow{Z} X_2(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}_2 \end{cases}$
- Thì: $a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \xleftrightarrow{Z} a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$

ROC chứa $\mathbf{R_1} \cap \mathbf{R_2}$

Ví dụ 1: Tìm biến đổi Z & ROC của:

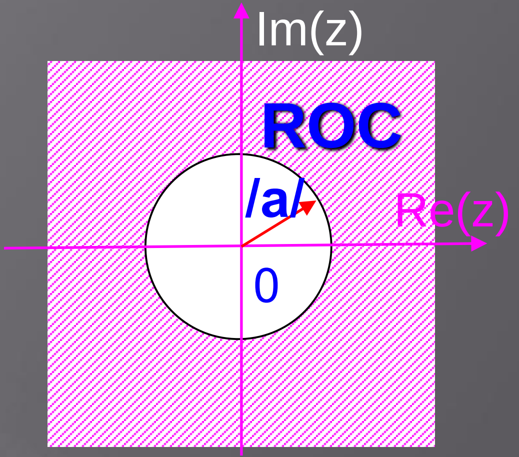
$$x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n-1)$$ với $|a| < |b|$

Giải:

Theo ví dụ 1.1 và 1.2, ta có:

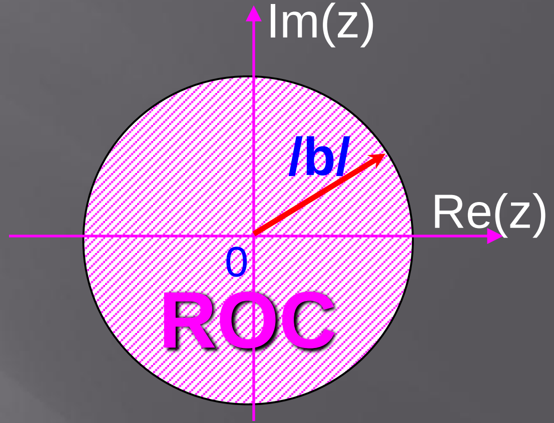
$$a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$R_1 : |z| > |a|$$



$$-b^n u(-n-1) \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-bz^{-1}}$$

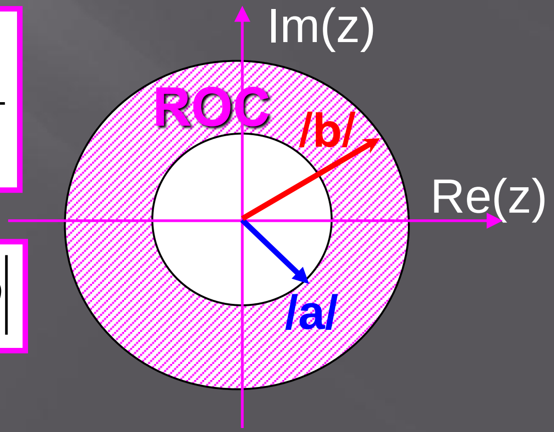
$$R_2 : |z| < |b|$$



Áp dụng tính chất tuyến tính, ta được:

$$a^n u(n) - b^n u(-n-1) \xleftrightarrow{Z} \boxed{\frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-bz^{-1}}}$$

$$\boxed{R = R_1 \cap R_2 : |a| < |z| < |b|}$$



b) Dịch theo thời gian

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}$

Thì: $x(n-n_0) \xleftrightarrow{Z} Z^{-n_0} X(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R'}$

Với: $\mathrm{R'} = \begin{cases} \mathrm{R} \text{ trừ giá trị } z=0, \text{ khi } n_0>0 \\ \mathrm{R} \text{ trừ giá trị } z=\infty, \text{ khi } n_0<0 \end{cases}$

Ví dụ 2: Tìm biến đổi Z & ROC của: $x(n) = a^n u(n-1)$

Giải:

Theo ví dụ 1: $a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} \dfrac{1}{1-az^{-1}} ; \mathrm{ROC} : |z| > |a|$

Vậy: $x(n) = a^n u(n-1) = a.a^{n-1} u(n-1) \xleftrightarrow{Z} \boxed{\dfrac{az^{-1}}{1-az^{-1}} : |z| > |a|}$

c) Nhân với hàm mũ a^n

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}$

Thì: $a^n x(n) \xleftrightarrow{Z} X(a^{-1}z) \quad : \mathrm{ROC} = |a|\mathrm{R}$

Ví dụ 3: Xét biến đổi Z & ROC của:

$x_1(n) = a^n u(n)$ và $x_2(n) = u(n)$

Giải:

$$\boldsymbol{x(n) = u(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n) z^{-1} = \frac{1}{1 - z^{-1}}; R : |\mathrm{z}| > 1}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a^n x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} X(az^{-1}) = \frac{1}{1 - az^{-1}}; R' : |\mathrm{z}| > |a|}$$

d) Đạo hàm X(z) theo z

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}$

Thì: $nx(n) \xleftrightarrow{Z} -z\dfrac{dX(z)}{dz} \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}$

Ví dụ 4: Tìm biến đổi Z & ROC của: $g(n) = na^n u(n)$

Giải:

Theo ví dụ 1:

$$x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}; \mathrm{ROC} : |z| > |a|$$

$$\Rightarrow \mathbf{g(n) = nx(n) \xleftrightarrow{Z} G(z) = -z\frac{dX(z)}{dz}} = \boxed{\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} : |z| > |a|}$$

e) Đảo biến số

Nếu $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}$

Thì: $x(-n) \xleftrightarrow{Z} X(\mathrm{z}^{-1}) \quad : \mathrm{ROC} = 1/R$

- **Ví dụ 5:** Tìm biến đổi Z & ROC của: $y(n) = (1/a)^n u(-n)$

- **Giải:** Theo ví dụ 1.1:

$$x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}; \mathrm{ROC} : |\mathrm{z}| > |a|$$

$$\Rightarrow y(n) = (1/a)^n u(-n) = a^{-n} u(-n) = x(-n)$$

Áp dụng tính chất đảo biến số:

$$\mathrm{Y(z)} = \mathrm{X(z^{-1})} = \frac{1}{1 - \mathrm{a}\left(\mathrm{z}^{-1}\right)^{-1}} = \boxed{\frac{1}{1 - \mathrm{az}}; \mathrm{ROC} : |\mathrm{z}| < 1/|\mathrm{a}|}$$

f) Liên hiệp phức

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) \ : ROC = R$

Thì: $x^*(n) \xleftrightarrow{Z} X^*(z^*) \ : ROC = R$

g) Tích 2 dãy

Nếu: $\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{Z} X_1(z) \ : ROC = R_1 \\ x_2(n) \xleftrightarrow{Z} X_2(z) \ : ROC = R_2 \end{cases}$

Thì: $x_1(n)x_2(n) \xleftrightarrow{Z} \dfrac{1}{2\pi} \oint_c X_1(\nu) X_1\left(\dfrac{z}{\nu}\right) \nu^{-1} \, d\nu : ROC = R_1 \cap R_2$

h) Định lý giá trị đầu

Nếu x(n) nhân quả thì: $x(0) = \lim_{Z \to \infty} X(z)$

- **Ví dụ:** Tìm **x(0)**, biết $\mathbf{X(z)=e^{1/z}}$ và x(n) nhân quả
- **Giải:**

Theo định lý giá trị đầu:

$$x(0)=\lim_{Z\to\infty} X(z)=\lim_{Z\to\infty} e^{1/z}=1$$

i) Tổng chập 2 dãy

Nếu: $$\begin{cases} x_1(n)\xleftrightarrow{Z} X_1(z) \quad :ROC=R_1 \\ x_2(n)\xleftrightarrow{Z} X_2(z) \quad :ROC=R_2 \end{cases}$$

Thì: $x_1(n)*x_2(n)\xleftrightarrow{Z} X_1(z)X_2(z)$;ROC có chứa $R_1 \cap R_2$

- **Ví dụ 6**: Tìm **y(n) = x(n)*h(n),** biết:

$$x(n)=(0.5)^n u(n) \qquad h(n)=-2^n u(-n-1)$$

- **Giải:**

$$x(n)=(0.5)^n u(n) \xleftrightarrow{Z} X(z)=\frac{1}{1-0.5z^{-1}};ROC:|z|>0.5$$

$$h(n)=-2^n u(-n-1) \xleftrightarrow{Z} H(z)=\frac{1}{1-2z^{-1}};ROC:|z|<2$$

$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{1}{(1-0.5z^{-1})}\cdot\frac{1}{(1-2z^{-1})};ROC:0,5<|z|<2$$

Z^{-1}

$$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1-0.5z^{-1})}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{(1-2z^{-1})};ROC:0,5<|z|<2$$

$$\boxed{y(n)=x(n)*h(n)=-\frac{1}{3}(0.5)^n u(n)-\frac{4}{3}2^n u(-n-1)}$$

TỔNG KẾT CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI Z

x(n)	X(z)	R
$a_1x_1(n)+a_2x_2(n)$	$a_1X_1(z)+a_2X_2(z)$	Chứa $\mathbf{R_1} \cap \mathbf{R_2}$
$x(n-n_0)$	$Z^{-n0}\,X(z)$	R’
$a^n\,x(n)$	$X(a^{-1}z)$	R
nx(n)	-z dX(z)/dz	R
x(-n)	$X(z^{-1})$	1/R
x*(n)	X*(z*)	R
$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$	$R_1 \cap R_2$
x(n) nhân quả	$x(0)=\lim X(z \to \infty)$	
$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$	Chứa $\mathbf{R_1} \cap \mathbf{R_2}$

BIẾN ĐỔI Z MỘT SỐ DÃY THÔNG DỤNG

x(n)	X(z)	ROC
$\delta(n)$	1	$\forall z$
$u(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	/z/ >1
$-u(-n-1)$		/z/ <1
$a^n u(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	/z/ > /a/
$-a^n u(-n-1)$		/z/ < /a/
$na^n u(n)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	/z/ > /a/
$-na^n u(-n-1)$		/z/ < /a/
$\cos(\omega_o n)u(n)$	$(1-z^{-1}\cos\omega_o)/(1-2z^{-1}\cos\omega_o+z^{-2})$	/z/ >1
$\sin(\omega_o n)u(n)$	$(z^{-1}\sin\omega_o)/(1-2z^{-1}\cos\omega_o+z^{-2})$	/z/ >1

3 BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

3.1 CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z) z^{n-1} dz} \quad (*)$$

Với **C** - đường cong khép kín bao quanh gốc tọa độ trong mặt phẳng phức, nằm trong miền hội tụ của X(z), theo chiều (+) ngược chiều kim đồng hồ

- ✓ Trên thực tế, biểu thức (*) ít được sử dụng do tính chất phức tạp của phép lấy tích phân vòng

- *<u>Các phương pháp biến đổi Z ngược:</u>*

- ➢ ***Thặng dư***
- ➢ ***Khai triển thành chuỗi luỹ thừa***
- ➢ ***Phân tích thành tổng các phân thức tối giản***

3.2 PHƯƠNG PHÁP THẶNG DƯ

a) Khái niệm thặng dư của 1 hàm tại điểm cực:

- Thặng dư tại điểm cực $\mathbf{Z_{ci}}$ bội **r** của **F(z)** được định nghĩa:

$$\operatorname{Re}s\left[F(z)\right]_{Z=Z_{ci}} = \frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{(r-1)}}{dz^{(r-1)}}\left[F(z)(z-z_{ci})^{r}\right]_{Z=Z_{ci}}$$

- Thặng dư tại điểm cực đơn $\mathbf{Z_{ci}}$ của **F(z)** được định nghĩa:

$$\operatorname{Re}s\left[F(z)\right]_{Z=Z_{ci}} = \left[F(z)(z-z_{ci})\right]_{Z=Z_{ci}}$$

b) Phương pháp:

- Theo lý thuyết thặng dư, biểu thức biến đổi Z ngược theo tích phân vòng (*) được xác định bằng tổng các thặng dư tại tất cả các điểm cực của hàm $\mathbf{X(z)z^{n-1}}$:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z) z^{n-1} dz = \sum_i \mathrm{Res}\left[X(z) z^{n-1}\right]_{Z=Z_{ci}} \quad (*)$$

Trong đó:

- **Z_{ci}** – các điểm cực của $X(z)z^{n-1}$ nằm trong đường cong C
- **$\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_{ci}}$** - thặng dư của $X(z)z^{n-1}$ tại điểm cực z_{ci}

➢ ***Tổng cộng các thặng dư tại tất cả các điểm cực, ta được* x(n)**

<u>Ví dụ</u>: Tìm biến đổi Z ngược của:

$$X(z) = \frac{z}{(z-2)}$$

<u>Giải:</u>

Thay X(z) vào (*), ta được

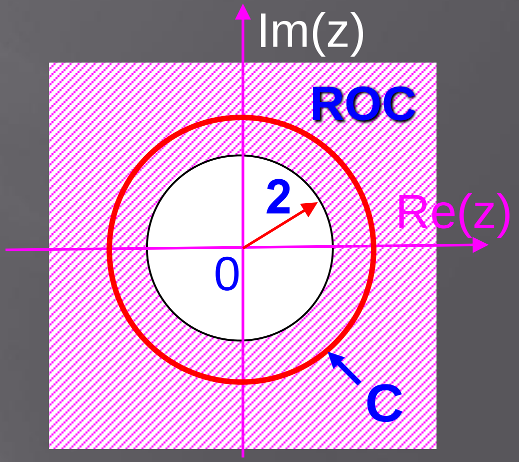
$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{z}{(z-2)} z^{n-1} dz = \sum \mathrm{Re}\, s\left[\frac{z^n}{(z-2)}\right]$$

- **Chọn C là đường cong khép kín nằm bên ngoài vòng tròn có bán kính là 2**

- **n≥0:** $X(z)z^{n-1} = \dfrac{z^n}{(z-2)}$ có 1 điểm cực đơn Z_{c1}=2

Thặng dư tại Z_{c1}=2:

$$\text{Res}\left[\frac{z^n}{(z-2)}\right]_{Z=2} = \left[\frac{z^n}{(z-2)}(z-2)\right]_{Z=2} = 2^n$$



- **n<0:** $X(z)z^{n-1} = \dfrac{1}{(z-2)z^{-n}} = \dfrac{1}{(z-2)z^m}$ Z_{c1}=2 đơn, Z_{c2}=0 bội m

Với: Z_{c1}=2 $\text{Res}\left[\dfrac{1}{(z-2)z^m}\right]_{Z=2} = \left[\dfrac{1}{(z-2)z^m}(z-2)\right]_{Z=2} = \dfrac{1}{2^m}$

Với: Z_{c2}=0 bội m:

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z-2)z^m}\right]_{Z=0} = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[\frac{1}{(z-2)z^m}z^m\right]_{Z=0}$$

$$= \frac{1}{(m-1)!}\left[\frac{(m-1)!(-1)^{m-1}}{(-2)^m}\right] = -\frac{1}{2^m}$$

Vậy, với **n<0:**

$$\sum \mathrm{Res}\left[\frac{z^n}{(z-2)}\right] = \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^m} = 0$$

suy ra $\boxed{x(n) = 2^n : n \geq 0}$ hay $\boxed{x(n) = 2^n u(n)}$

3.3 PHƯƠNG PHÁP KHAI TRIỂN THÀNH CHUỖI LUỸ THỪA

Giả thiết **X(z)** có thể khai triển: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n}$ (*)

Theo định nghĩa biến đổi Z $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$ (**)

Đồng nhất (*) & (**), rút ra: $\boxed{x(n) = a_n}$

<u>**Ví dụ**</u>**:** Tìm x(n) biết: $X(z) = (z^2 + 1)(1 - 2z^{-1} + 3z^{-2})$

<u>**Giải**</u>**:**

$ROC: 0 < |z| < \infty$

Khai triển X(z) ta được:

$$X(z) = z^2 - 2z + 4 - 2z^{-1} + 3z^{-2} = \sum_{n=-2}^{2} x(n) z^{-n}$$

Suy ra: $\boxed{x(n) = \{1, -2, \underset{\uparrow}{4}, -2, 3\}}$

Ví dụ: Tìm x(n) biết:

$$X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} : |z| > 2$$

Giải:

Do ROC của X(z) là ***/z/>2***, nên **x(n)** sẽ là dãy nhân quả và sẽ được khai triển thành chuỗi có dạng:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots \qquad (*)$$

Để có dạng (*), thực hiện phép chia đa thức dưới đây:

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1 - 2z^{-1} \\ \hline
-\;1 - 2z^{-1} & 1 + 2z^{-1} + 2^2 z^{-2} + \cdots \\
\quad 2z^{-1} & \\
\quad -\;2z^{-1} - 2^2 z^{-2} & \\
\qquad 2^2 z^{-2} & \\
\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots &
\end{array}$$

$$\boxed{\Rightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n}}$$

$$\boxed{\Rightarrow x(n) = 2^n : n \geq 0 \equiv 2^n u(n)}$$

Ví dụ: Tìm x(n) biết: $$X(z)=\frac{1}{1-2z^{-1}}:|z|<2$$

Giải:

Do ROC của X(z) là ***/z/<2***, nên **x(n)** sẽ là dãy phản nhân quả và sẽ được khai triển thành chuỗi có dạng:

$$X(z)=\sum_{n=-1}^{-\infty}a_n z^{-n}=a_{-1}z^1+a_{-2}z^2+a_{-3}z^3+\cdots \quad (**)$$

Để có dạng (**), thực hiện phép chia đa thức dưới đây:

$$\begin{array}{l|l}
-\,1 & -2^{1}z^{-1}+1 \\ \hline
\underline{\;1-2^{-1}z^{1}\;} & -2^{-1}z^{1}-2^{-2}z^{2}-2^{-3}z^{3}+\cdots \\
-\,2^{-1}z^{1} & \\
\underline{\;2^{-1}z^{1}-2^{-2}z^{2}\;} & \\
\quad 2^{-2}z^{2} & \\
\quad\cdots\cdots\cdots\cdots &
\end{array}$$

$$\boxed{\Rightarrow X(z)=\sum_{n=-1}^{-\infty}-2^{n}z^{-n}}$$

$$\boxed{\Rightarrow x(n)=-2^{n}:n<0\equiv-2^{n}u(-n-1)}$$

3.4 PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH THÀNH TỔNG CÁC PHÂN THỨC TỐI GIẢN

Xét **X(z)** là phân thức hữu tỉ có dạng:

$$X(z) = \frac{D(z)}{B(z)} = \frac{d_K z^K + d_{K-1} z^{K-1} + ... + d_1 z + d_0}{b_N z^N + b_{N-1} z^{N-1} + ... + b_1 z + b_0}$$

với: $K, N > 0$

- Nếu **K>N**, thực hiện phép chia đa thức, ta được:

$$X(z) = \frac{D(z)}{B(z)} = C(z) + \frac{A(z)}{B(z)} = C(z) + \frac{a_M z^M + a_{M-1} z^{M-1} ... + a_1 z + a_0}{b_N z^N + b_{N-1} z^{N-1} + ... + b_1 z + b_0}$$

Ta được C(z) là đa thức và phân thức A(z)/B(z) có bậc **M≤N**

- Nếu **K≤N**, thì X(z) có dạng giống phân thức A(z)/B(z)

Việc lấy biến đổi Z ngược đa thức C(z) là đơn giản, vấn đề phức tạp là tìm biến đổi Z ngược A(z)/B(z) có bậc M≤N

Xét **X(z)/z** là phân thức hữu tỉ có bậc **M≤N** :

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{a_M z^M + a_{M-1} z^{M-1} \ldots + a_1 z + a_0}{b_N z^N + b_{N-1} z^{N-1} + \ldots + b_1 z + b_0}$$

Xét đến các điểm cực của **X(z)/z**, hay nghiệm của B(z) là ***đơn, bội và phức liên hiệp***

a) Xét X(z)/z có các điểm cực đơn: Z_{c1}, Z_{c2}, Z_{c3},…. Z_{cN},

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{A(z)}{b_N (z - z_{c1})(z - z_{c2})\cdots(z - z_{cN})}$$

Theo lý thuyết hàm hữu tỉ, **X(z)/z** phân tích thành:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{K_1}{(z - z_{c1})} + \frac{K_2}{(z - z_{c2})} + \cdots + \frac{K_N}{(z - z_{cN})} = \sum_{i=1}^{N} \frac{K_i}{(z - z_{ci})}$$

Với hệ số **K_i** xác định bởi:

$$K_i = \frac{X(z)}{z}(z - z_{ci})\Big|_{Z=Z_{ci}}$$

hay

$$K_i = \frac{A(z)}{B'(z)}\Big|_{Z=Z_{ci}}$$

Suy ra **X(z)** có biểu thức:

$$X(z) = \frac{K_1}{(1 - z_{c1}z^{-1})} + \frac{K_2}{(1 - z_{c2}z^{-1})} + \cdots + \frac{K_N}{(1 - z_{cN}z^{-1})} = \sum_{i=1}^{N} \frac{K_i}{(1 - z_{ci}z^{-1})}$$

Xét: $$X_i(z) = \frac{K_i}{(1 - z_{ci}z^{-1})}$$

- Nếu ROC: ***/z/ > /z_ci/*** $$\Rightarrow x_i(n) = K_i(z_{ci})^n u(n)$$
- Nếu ROC: ***/z/ < /z_ci/*** $$\Rightarrow x_i(n) = -K_i(z_{ci})^n u(-n-1)$$
- **Vậy:** $$x(n) = \sum_{i=1}^{N} x_i(n)$$

Ví dụ: Tìm x(n) biết: $$X(z)=\frac{2z^2-5z}{z^2-5z+6}$$

với các miền hội tụ: **a) /z/>3, b) /z/<2, c) 2</z/<3**

Giải:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{2z-5}{z^2-5z+6}=\frac{2z-5}{(z-2)(z-3)}=\frac{K_1}{(z-2)}+\frac{K_2}{(z-3)}$$

Với các hệ số được tính bởi:

$$K_1=\frac{X(z)}{z}(z-2)\bigg|_{Z=2}=\frac{2z-5}{(z-3)}\bigg|_{Z=2}=1$$

$$K_2=\frac{X(z)}{z}(z-3)\bigg|_{Z=3}=\frac{2z-5}{(z-2)}\bigg|_{Z=3}=1$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{1}{(z-2)}+\frac{1}{(z-3)}\Rightarrow X(z)=\frac{1}{(1-2z^{-1})}+\frac{1}{(1-3z^{-1})}$$

$$X(z) = \frac{1}{(1-2z^{-1})} + \frac{1}{(1-3z^{-1})}$$

Với các miền hội tụ:

a) /z/ > 3 : $\boxed{x(n) = 2^n u(n) + 3^n u(n)}$

b) /z/ < 2 : $\boxed{x(n) = -2^n u(-n-1) - 3^n u(-n-1)}$

c) 2</z/<3 : $\boxed{x(n) = 2^n u(n) - 3^n u(-n-1)}$

b) Xét X(z)/z có điểm cực Z_{c1} bội r và các điểm cực đơn: $Z_{c(r+1)},\ldots,Z_{cN}$,

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A(z)}{B(z)}=\frac{A(z)}{b_N(z-z_{c1})^r(z-z_{c(r+1)})\cdots(z-z_{cN})}$$

Theo lý thuyết hàm hữu tỉ, **X(z)/z** phân tích thành:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{K_1}{(z-z_{c1})}+\frac{K_2}{(z-z_{c1})^2}+\cdots+\frac{K_r}{(z-z_{c1})^r}+$$

$$+\frac{K_{r+1}}{(z-z_{c(r+1)})}+\cdots+\frac{K_N}{(z-z_{cN})}=\sum_{i=1}^{r}\frac{K_i}{(z-z_1)^i}+\sum_{l=r+1}^{N}\frac{K_l}{(z-z_{cl})}$$

Với hệ số K_i xác định bởi:

$$K_i=\frac{1}{(r-i)!}\frac{d^{(r-i)}}{dz^{(r-i)}}\left[\frac{X(z)}{z}(z-z_{c1})^r\right]\Bigg|_{Z=Z_{c1}}$$

hay

$$K_l=\frac{X(z)}{z}(z-z_{cl})\Bigg|_{Z=Z_{cl}}$$

Với giả thiết ROC của X(z): **$|z| > \max\{ |z_{ci}| \}$: i=1÷N,**

biến đổi Z ngược của thành phần **$K_i/(z-z_{ci})^r$** sẽ là:

$$\frac{z}{(z-a)^i} \xleftrightarrow{Z^{-1}} \frac{n(n-1)\ldots(n-i+2)a^{n-i+1}}{(i-1)!}u(n)$$

Vậy ta có biểu thức biến đổi Z ngược là:

$$x(n)=\sum_{i=1}^{r} K_i \frac{n(n-1)\ldots(n-i+2)a^{n-i+1}}{(i-1)!}u(n)+\sum_{l=r+1}^{N} K_l (z_{cl})^n u(n)$$

Ví dụ: Tìm x(n) biết:

$$X(z)=\frac{2z^3-5z^2+4z}{(z-2)^2(z-1)} \qquad ROC: |z|>2$$

Giải:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{2z^2-5z+4}{(z-2)^2(z-1)}=\frac{K_1}{(z-2)}+\frac{K_2}{(z-2)^2}+\frac{K_3}{(z-1)}$$

Với các hệ số được tính bởi:

$$K_1 = \frac{1}{(2-1)!}\frac{d^{(2-1)}}{dz^{(2-1)}}\left[\frac{X(z)}{z}(z-2)^2\right]\Bigg|_{Z=2} = \frac{d}{dz}\left[\frac{2z^2-5z+4}{(z-1)}\right]\Bigg|_{Z=2} = 1$$

$$K_2 = \frac{1}{(2-2)!}\frac{d^{(2-2)}}{dz^{(2-2)}}\left[\frac{X(z)}{z}(z-2)^2\right]\Bigg|_{Z=2} = \frac{2z^2-5z+4}{(z-1)}\Bigg|_{Z=2} = 2$$

$$K_3 = \frac{X(z)}{z}(z-1)\Bigg|_{Z=1} = \frac{2z^2-5z+4}{(z-2)^2}\Bigg|_{Z=1} = 1$$

Vậy **X(z)/z** có biểu thức là:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-2)} + \frac{2}{(z-2)^2} + \frac{1}{(z-1)}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{(1-2z^{-1})} + \frac{2z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2} + \frac{1}{(1-z^{-1})}$$

$ROC: |z| > 2$

$$\boxed{\Rightarrow x(n) = 2^n u(n) + n2^n u(n) + u(n)}$$

c) Xét X(z)/z có cặp điểm cực Z_{c1} và Z^*_{c1} phức liên hiệp, các điểm cực còn lại đơn: $Z_{c3},\ldots,Z_{cN}$,

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A(z)}{B(z)}=\frac{A(z)}{b_N(z-z_{c1})(z-z_{c1}^*)(z-z_{c3})\cdots(z-z_{cN})}$$

X(z)/z được phân tích thành:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{K_1}{(z-z_{c1})}+\frac{K_2}{(z-z_{c1}^*)}+\frac{K_3}{(z-z_{c3})}+\cdots+\frac{K_N}{(z-z_{cN})}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{K_1}{(z-z_{c1})}+\frac{K_2}{(z-z_{c1}^*)}+\sum_{i=3}^{N}\frac{K_i}{(z-z_{ci})}$$

Với các hệ số **K_1, K_i** được tính giống điểm cực đơn:

$$K_i=\frac{X(z)}{z}(z-z_{ci})\bigg|_{Z=Z_{ci}}\quad : i=1\div N$$

Do các hệ số **A(z), B(z)** là thực, nên **$K_2=K_1^*$**

Xét : $$\frac{X_1(z)}{z}=\frac{K_1}{(z-z_{c1})}+\frac{K_1^*}{(z-z_{c1}^*)}$$

$$\Rightarrow X_1(z)=\frac{K_1}{(1-z_{c1}z^{-1})}+\frac{K_1^*}{(1-z_{c1}^*z^{-1})}$$

Nếu gọi: $$\begin{cases} K_1=|K_1|e^{j\beta} \\ z_{c1}=|z_{c1}|e^{j\alpha} \end{cases}$$

Và giả thiết ROC: **$|z|>\max\{|z_{ci}|\}$**:

$$\Rightarrow x_1(n)=\left[K_1(z_{c1})^n+K_1^*(z_{c1}^*)^n\right]u(n)$$

$$=2|K_1||z_{c1}|^n\cos(n\alpha+\beta)u(n)$$

Vậy: $$x(n)=\left\{2|K_1||z_{c1}|^n\cos(n\alpha+\beta)+\sum_{i=3}^{N}K_i(z_{ci})^n\right\}u(n)$$

Ví dụ: Tìm x(n) biết:

$$X(z)=\frac{-z}{(z^2-2z+2)(z-1)}:|z|>\sqrt{2}$$

Giải:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{-1}{(z^2-2z+2)(z-1)}=\frac{-1}{[z-(1+j)][z-(1-j)](z-1)}$$

$$=\frac{K_1}{[z-(1+j)]}+\frac{K_1^*}{[z-(1-j)]}+\frac{K_3}{(z-1)}$$

$$K_1=\left.\frac{-1}{[z-(1-j)](z-1)}\right|_{Z=1+j}=\frac{1}{2}$$

$$K_3=\left.\frac{-1}{(z^2-2z+2)}\right|_{Z=1}=-1$$

$$\Rightarrow X(z)=\frac{1/2}{[1-(1+j)z^{-1}]}+\frac{1/2}{[1-(1-j)z^{-1}]}+\frac{-1}{(1-z^{-1})}$$

$$|z|>\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x(n)=(\sqrt{2})^n\cos(n\frac{\pi}{4})u(n)-u(n)$$

4 HÀM TRUYỀN CỦA HỆ THỐNG LTI

4.1 Định nghĩa hàm truyền

Miền n: *x(n)* → **h(n)** → *y(n)=x(n)*h(n)*

$\updownarrow Z$

Miền Z: *X(z)* → **H(z)** → *Y(z)=X(z)H(z)*

$h(n) \xrightarrow{Z}$ ***H(z):*** gọi là hàm truyền ***H(z)=Y(z)/X(z)***

4.2 Hàm truyền được biểu diễn theo các hệ số của lọc

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_k x(n-r) \xleftrightarrow{Z} Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{r=0}^{M} b_k z^{-r}$$

$$\boxed{\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{r=0}^{M} \mathbf{b_r z^{-r}} \Big/ \sum_{k=0}^{N} \mathbf{a_k z^{-k}}}$$

Ví dụ: Tìm H(z) và h(n) của hệ thống nhân quả cho bởi:

y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = 2x(n) - 5x(n-1)

Giải:

Lấy biến đổi Z hai vế PTSP và áp dụng tính chất dịch theo t/g:

$$Y(z)\left[1-5z^{-1}+6z^{-2}\right]=X(z)\left[2-5z^{-1}\right]$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{2-5z^{-1}}{1-5z^{-1}+6z^{-2}}=\frac{2z^2-5z}{z^2-5z+6}$$

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{2z-5}{(z-2)(z-3)}=\frac{K_1}{(z-2)}+\frac{K_2}{(z-3)}$$

$$K_1=\left.\frac{2z-5}{(z-3)}\right|_{z=2}=1 \qquad K_2=\left.\frac{2z-5}{(z-2)}\right|_{z=3}=1$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{1}{(1-2z^{-1})}+\frac{1}{(1-3z^{-1})}$$

Do hệ thống nhân quả nên: $\boxed{h(n) = (2^n + 3^n)\, u(n)}$

4.3 Hàm truyền của các hệ thống ghép nối

a. Ghép nối tiếp

- Miền n:

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h_1(n)} \longrightarrow \boxed{h_2(n)} \longrightarrow y(n)$$

$$\equiv$$

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)=h_1(n)*h_2(n)} \longrightarrow y(n)$$

Theo tính chất tổng chập: $\boxed{h_1(n)*h_2(n) \xleftrightarrow{Z} H_1(z)H_2(z)}$

- Miền Z:

$$X(z) \longrightarrow \boxed{H_1(z)} \longrightarrow \boxed{H_2(z)} \longrightarrow Y(z)$$

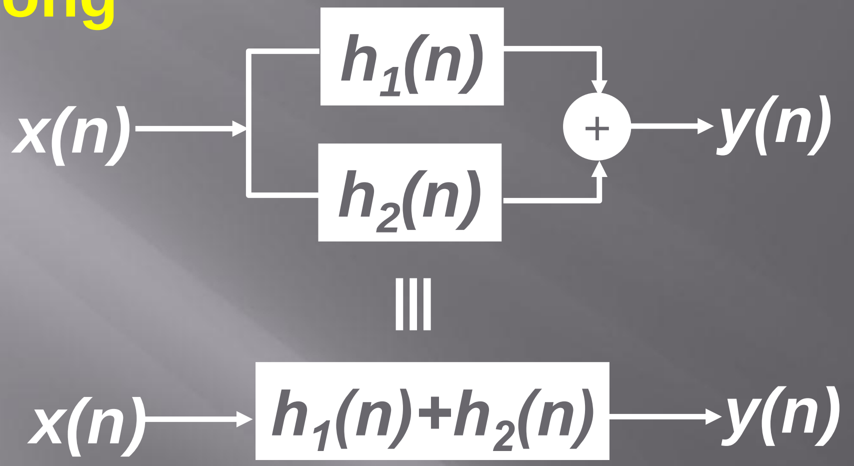
$$\equiv$$

$$X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)=H_1(z)H_2(z)} \longrightarrow Y(z)$$

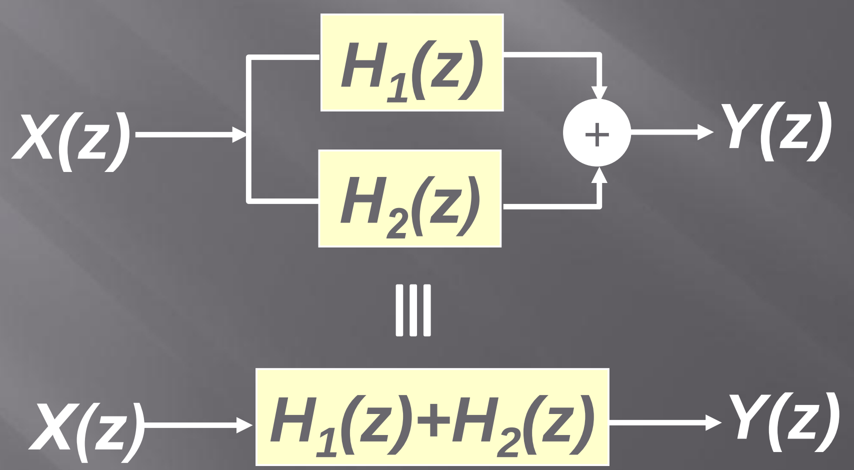
4.3 Hàm truyền của các hệ thống ghép nối (tt)

b. Ghép song song

- Miền n:



- Miền Z:



4.4 Tính nhân quả và ổn định của hệ LTI rời rạc

a. Tính nhân quả

- Miền n: **Hệ thống LTI là nhân quả ⟺ h(n) = 0 : n<0**
- Miền Z:

$$H(z) = \frac{A(z)}{b_N(z - z_{c1})(z - z_{c2})\cdots(z - z_{cN})}$$

Do **h(n)** là tín hiệu nhân quả, nên miền hội tụ **H(z)** sẽ là:

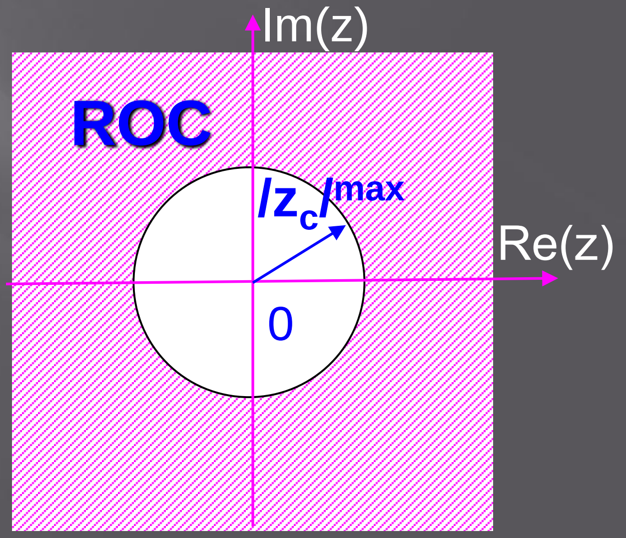
$$|z| > |z_c|^{\max} = \max\{|z_{c1}|, |z_{c2}|, \cdots, |z_{cN}|\}$$

Hệ thống LTI là nhân quả

⇕

ROC của H(z) là:

$$|z| > |z_c|^{\max} = \max\{|z_{c1}|, |z_{c2}|, \cdots, |z_{cN}|\}$$



4.4 Tính nhân quả và ổn định của hệ LTI rời rạc (tt)

b. Tính ổn định

- Miền n: **Hệ thống LTI là ổn định** $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$ (*)
- Miền Z:

$$|H(z)| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}\right| \le \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\right| \left|z^{-n}\right|$$

$$\Rightarrow |H(z)| \le \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\right| \text{ : khi } |z| = 1$$

Theo đ/k ổn định (*), nhận thấy **H(z)** cũng sẽ hội tụ với **/z/=1**

Hệ thống LTI là ổn định	$\Leftrightarrow$	**ROC của H(z) có chứa /z/=1**

c. Tính nhân quả và ổn định

Hệ thống LTI là nhân quả ⇔ ROC của H(z) là:

$$|z| > |z_c|^{\max} = \max\{|z_{c1}|, |z_{c2}|, \cdots, |z_{cN}|\}$$

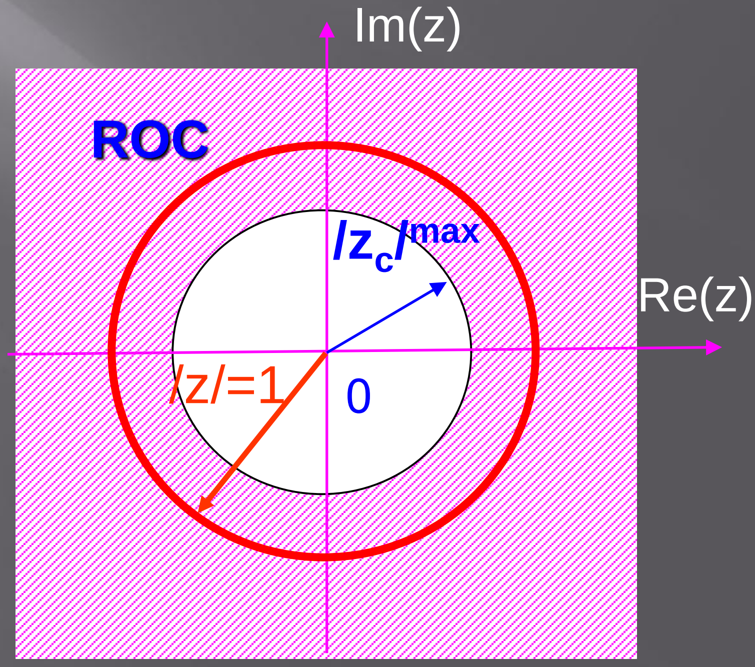
Hệ thống LTI là ổn định ⇔ ROC của H(z) có chứa /z/=1

Hệ thống LTI là nhân quả và ổn định

⇕

ROC của H(z) là:

$$|z| > |z_c|^{\max} \quad \text{và} \quad |z_c|^{\max} < 1$$



Ví dụ: Tìm h(n) của hệ thống, biết:

$$H(z) = \frac{4z^2 - 5z}{2z^2 - 5z + 2}$$

a. Để hệ thống là nhân quả

b. Để hệ thống là ổn định

c. Để hệ thống là nhân quả và ổn định

Giải:

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{4z-5}{2(z-1/2)(z-2)} = \frac{K_1}{(z-1/2)} + \frac{K_2}{(z-2)} = \frac{1}{(z-1/2)} + \frac{1}{(z-2)}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1}{\left[1-(1/2)z^{-1}\right]} + \frac{1}{(1-2z^{-1})}$$

a. Hệ thống nhân quả (/z/>2): h(n)=[(1/2)^n + 2^n] u(n)

b. Hệ thống ổn định (1/2</z/<2): h(n)=(1/2)^n u(n) - 2^n u(-n-1)

c. Hệ thống nhân quả và ổn định:

ROC: /z/>2 không thể chứa /z/=1 $\Rightarrow$ không tồn tại h(n)

5 GIẢI PTSP DÙNG BIẾN ĐỔI Z 1 PHÍA

$$y(n-1) \xleftrightarrow[\text{1 phía}]{Z} \sum_{n=0}^{\infty} y(n-1)z^{-n} = y(-1) + y(0)z^{-1} + y(1)z^{-2} + \cdots$$

$$= y(-1) + z^{-1}\left[y(0) + y(1)z^{-1} + \cdots\right]$$

$$= y(-1) + z^{-1}Y(z)$$

$$y(n-2) \xleftrightarrow[\text{1 phía}]{Z} \sum_{n=0}^{\infty} y(n-2)z^{-n} = y(-2) + y(-1)z^{-1} + y(0)z^{-2} + \cdots$$

$$= y(-2) + y(-1)z^{-1} + z^{-2}\left[y(0) + y(1)z^{-1} + \cdots\right]$$

$$= y(-2) + y(-1)z^{-1} + z^{-2}Y(z)$$

Tổng quát, biến đổi Z 1 phía của y(n-k):

$$y(n-k) \xleftrightarrow[\text{1 phía}]{Z} z^{-k}Y(z) + \sum_{r=1}^{k} y(-r)z^{r-k}$$

Ví dụ: Hãy giải PTSP dùng biến đổi Z 1 phía

$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n) : n \geq 0$

biết: $x(n)=3^{n-2}u(n)$ và $y(-1)=-1/3$; $y(-2)= -4/9$

Giải:

Lấy biến đổi Z 1 phía hai vế PTSP:

$Y(z) - 3[y(-1)+z^{-1}Y(z)] + 2[y(-2)+y(-1)z^{-1}+z^{-2}Y(z)] = X(z) \quad (*)$

Thay $y(-1)=-1/3$; $y(-2)= -4/9$ và $X(z)=3^{-2}/(1-3z^{-1})$ vào (*), rút ra:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{2}.\frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{2}.\frac{1}{(z-3)}$$

$$\Rightarrow Y(z) = -\frac{1}{2}.\frac{1}{(1-z^{-1})} + \frac{1}{2}.\frac{1}{(1-3z^{-1})}$$

$$\Rightarrow y(n) = \frac{1}{2}\left[3^n - 1\right]u(n)$$