第3章 一维搜索法

从点 X^k 出发，在方向 S^k上寻求极小点的方法称一维搜索

其数学式表达如下：

$$\min f(X^k + \alpha S^k) \quad \rightarrow \quad \alpha_k$$

$$X^{k+1} = X^k + \alpha_k S^k$$

可见，一维搜索是一元函数极小化的数值解法。可表示为

或

$$\min f(\alpha)$$

$$\min f(x)$$

一维搜索可分两步进行:

在方向 S^k 上确定一个包含极小点的初始区间，

采用缩小区间的方法求取最优步长和对应的一维极小点。

3.1 确定初始区间

在函数的一个单谷区间上，若已知三个点$x_1 < x_2 < x_3$及其函数值 可知：

(1) 若 $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$

则极小点位于右端点X_3的右侧；

(2) 若 $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$

则极小点位于左端点X_1的左侧；

(3) 若 $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$

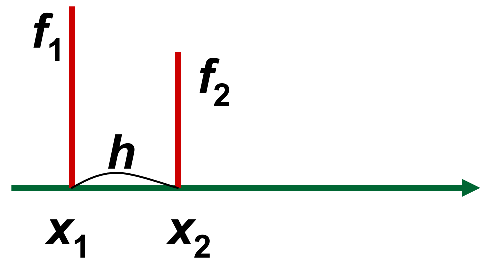
则极小点位于x_1和 x_3之间，

$[x_1, x_3]$ 就是一个包含极小点的区间，记作 $[a, b]$。

确定初始区间的步骤可归纳如下：

(1) 给定初始点x_0、初始步长 h，

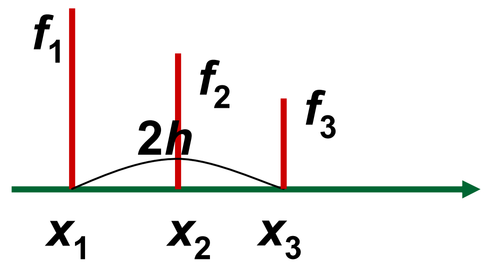
令$x_1=x_0$，记 $f_1=f(x_1)$；



(2) 产生新点 $x_2=x_0+h$，记 $f_2=f(x_2)$;

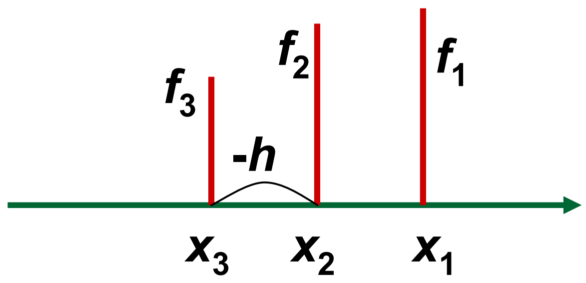
(3) 比较函数值 f_1和f_2的大小

若$f_1>f_2$，令 $h=2h$，转（4）；



若$f_1<f_2$，令x_1和 x_2对调，

$h=-h$，转（4）；



(4) 产生新点 $x_3=x_0+h$，令$f_3=f(x_3)$；

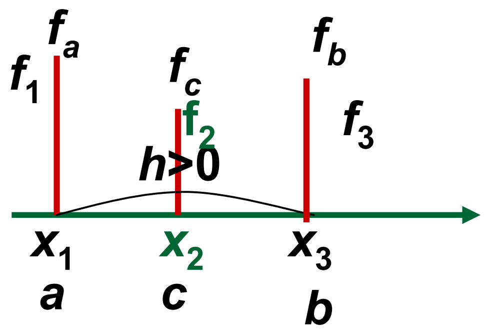
(5) 比较函数值 f_2和 f_3的大小

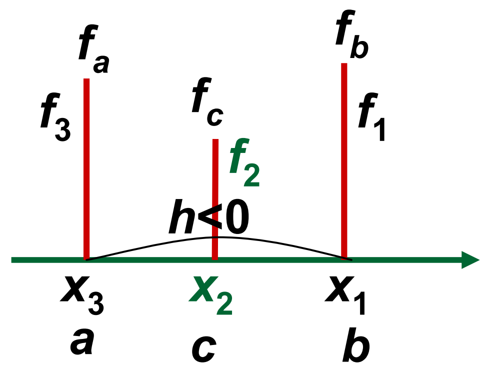
若 $f_2<f_3$， 则初始区间已经得到，

令$c=x_2$，$f_c=f_2$，

当$h>0$时，$[a,b]=[x_1,x_3]$，

当$h<0$时，$[a,b]=[x_3,x_1]$；

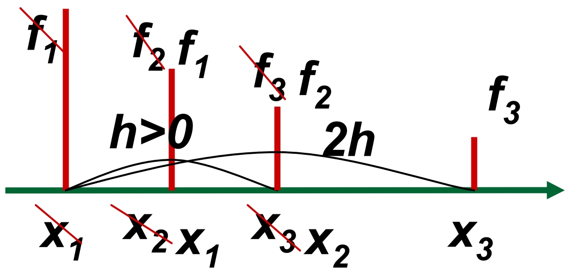


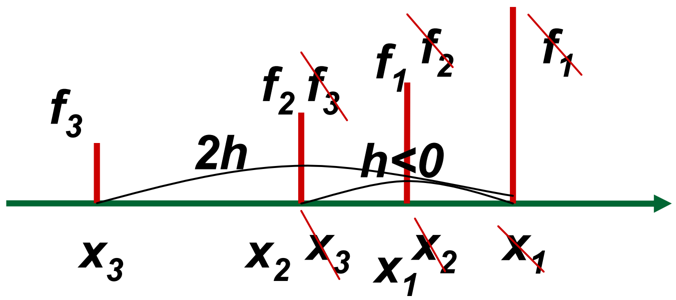


若 $f_2>f_3$，则继续加大步长，令$h=2h$，

$x_1=x_2$，$x_2=x_3$，

转（4）继续探测。





3.2 缩小区间

在得到初始区间以后，通过某种算法，不断缩小包含极小点的区间，就可得到一维极小点。

缩小区间的方法:

选取两个中间插入点，

计算并比较两点上的函数值。

不同的插入点的计算方法，产生了不同的一维搜索算法。

常用的一维搜索算法有黄金分割法和二次插值法等。

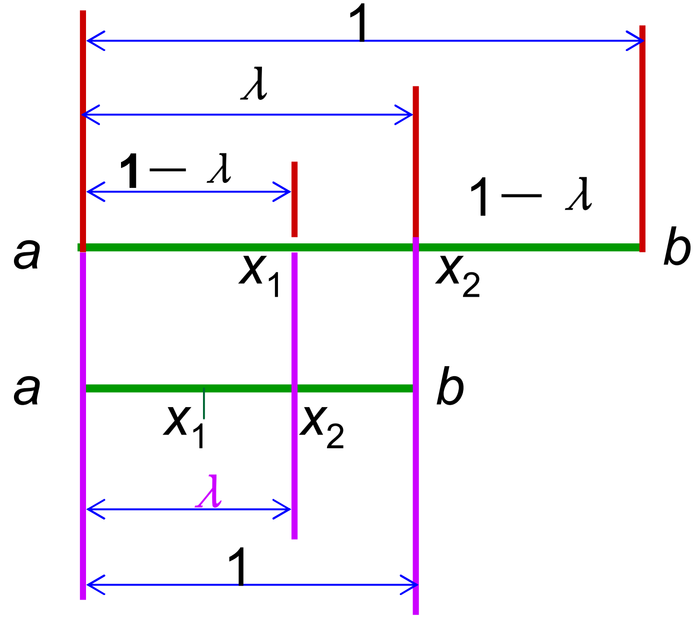
3.3 黄金分割法

选点的原则：对称一对称

在区间［a，b］内的两个对称点可由以下公式产生：

$$x_1=a+(1-\lambda)(b-a)$$
$$x_2=a+\lambda(b-a)$$

其中：λ为比例系数（$0<\lambda<1$）



若缩小一次后的新区间为[a，x_2]，如右图所示。

由图得 $\lambda^2=1-\lambda$

解得 $$\lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$$

代入上式有

$$x_1 = a + 0.382(b - a)$$

$$x_2 = a + 0.618(b - a)$$

这就是黄金分割法的计算公式，**0.618**法也因此而得名。

黄金分割法以区间长度是否充分小作为终止准则，并以收敛时区间的中间点作为一维搜索的极小点，即

当 $b-a \leqslant \varepsilon$ 时，取

$$x^* = (a+b)/2$$

不难看出，黄金分割法每次区间缩小的比率是完全相等的。

如果初始区间长度 **b-a**，给定收敛精度 ε，则所需缩小区间的次数 ***n*** 可以由下式求出：

$$0.618n(b-a) \leqslant \varepsilon$$

$$n \geq In\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right) \Big/ In\, 0.618$$

综上所述，黄金分割法的计算步骤如下：

（**1**） 确定初始区间[***a***，***b***]和收敛精度 ε；

（**2**） 产生中间插入点并计算其函数值：

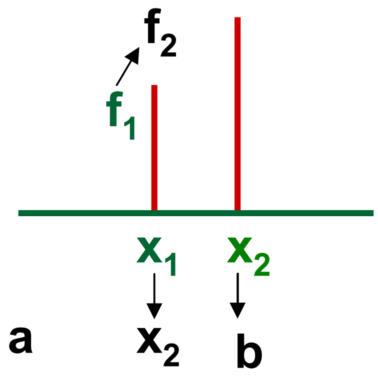
$x_1=a+0.382(b-a)$， $f_1=f(x_1)$

$x_2=a+0.618(b-a)$， $f_2=f(x_2)$

（**3**） 比较函数值 f_1和f_2，确定区间的取舍：

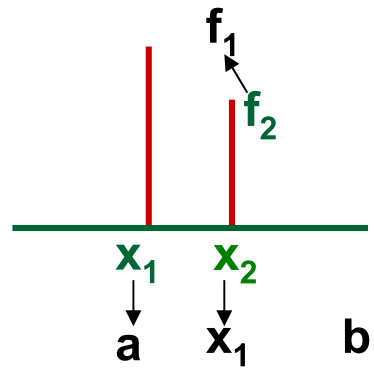
若 $f_1 < f_2$，新区间 $[a, b]=[a, x_2]$，

令 $b=x_2$，$x_2=x_1$，$f_2=f_1$，记$N_0=0$；



若 $f_1 > f_2$，新区间 $[a, b]=[x_1, b]$，

令 $a=x_1$，$x_1=x_2$，$f_1=f_2$，记 $N_0=1$。



（4）终止判断：若区间的长度足够小，

即满足 $b-a \leqslant \varepsilon$

则令 $x^*=(a+b)/2$，结束一维搜索；

否则，转（5）。

（5）产生新的插入点：

若$N_0=0$，令$x_1=a+0.382(b-a)$，$f_1=f(x_1)$；

若$N_0=1$，令$x_2=a+0.618(b-a)$，$f_2=f(x_2)$；

转 (3) 继续新区间的缩小。

3.4 二次插值法

(1) 取点的方法：

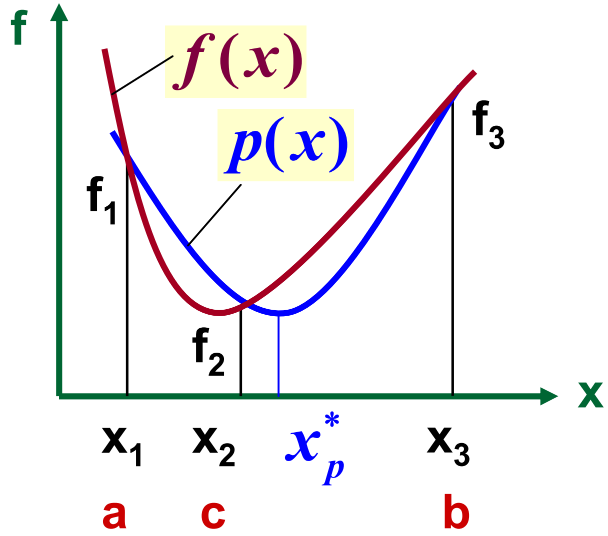
二次插值函数的极小点

(2) 二次插值函数

在初始区间内已知相邻的三个点

$a<c<b$ ， $f_a>f_c<f_b$

分别记作 x_1、x_2、x_3 和 f_1、f_2 和 f_3



在fox平面内，过已知三点构成二次插值函数

$$p(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2$$

其极小点是

$$x_p^*=-\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}$$

将区间内的三点及其函数值代入二次插值函数式

$$f_1 = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1^{\,2}$$
$$f_2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2^{\,2}$$
$$f_3 = \alpha_0 + \alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_3^{\,2}$$

联立求解，得系数 α_0, α_1 和 α_2，代入前式得

$$x_P = \frac{1}{2}\frac{\left(x_2^{\,2} - x_3^{\,2}\right) f_1 + \left(x_3^{\,2} - x_1^{\,2}\right) f_2 + \left(x_1^{\,2} - x_2^{\,2}\right) f_3}{\left(x_2 - x_3\right) f_1 + \left(x_3 - x_1\right) f_2 + \left(x_1 - x_2\right) f_3}$$

二次插值法以两个中间点的距离充分小为收敛准则，即当

$$\left| x_p - x_2 \right| \le \varepsilon$$

成立时，把 x_P 作为此次一维搜索的极小点。

黄金分割法和二次插值法的特点：

黄金分割法：计算精度高，
计算速度较慢；

二次插值法：计算速度快，
计算精度不可能无限提高。

例3-1 用黄金分割法求函数 $f(x)=3x^3-4x+2$ 的极小点，

给定 $x_0=0$，$h=1$，$\varepsilon=0.2$。

解

（1）确定初始区间

令 $x_1=x_0=0$ ，$f_1=f(x_1)=2$，

$x_2=x_0+h=0+1=1$，$f_2=f(x_2)=1$

由于 $f_1>f_2$，应加大步长继续向前探测，

即令 $x_3=x_0+2h=0+2=2$，$f_3=f(x_3)=18$

由于 $f_2<f_3$，可知初始区间已经找到，

即 $[a, b]=[x_1, x_3]=[0, 2]$

（2）用黄金分割法缩小区间

① 第一次缩小区间

令 $x_1 = 0 + 0.382 \times (2-0) = 0.764$，$f_1 = 0.282$

$x_2 = 0 + 0.618 \times (2-0) = 1.236$，$f_2 = 2.72$

由于 $f_1 < f_2$，故新区间 $[a, b] = [a, x_2] = [0, 1.236]$。

因为 $b - a = 1.236 > 0.2$，还应继续缩小区间。

② 第二次缩小区间

令 $x_2 = x_1 = 0.764$，$f_2 = f_1 = 0.282$

$x_1 = 0 + 0.382 \times (1.236 - 0) = 0.472$，$f_1 = 0.317$

由于 $f_1 > f_2$，故新区间 $[a, b] = [x_1, b] = [0.472, 1.236]$。

因为 $b - a = 1.236 - 0.472 = 0.764 > 0.2$，还应继续缩小区间。

③ 第三次缩小区间

令　$x_1= x_2= 0.764$，$f_1= f_2= 0.282$

$x_2= 0.472+ 0.618\times(1.236- 0.472) = 0.944$，$f_2=0.747$

由于 $f_1< f_2$，故新区间$[a, b]= [a, x_2]= [0.472, 0.944]$。

因为 $b- a= 0.944- 0.472= 0.472 > 0.2$，还应继续缩小区间。

④ 第四次缩小区间

令　$x_2= x_1= 0.764$，$f_2=f_1= 0.282$

$x_1= 0.472+ 0.382\times(0.944- 0.472)= 0.652$，$f_1= 0.223$

由于 $f_1<f_2$，故新区间$[a, b]=[a, x_2]= [0.472, 0.764]$。

因为 $b- a= 0.764-0.472= 0.292> 0.2$，还应继续缩小区间。

⑤ 第五次缩小区间

令 $x_2=x_1=0.652$，$f_2=f_1=0.223$

$x_1=0.472+0.382\times(0.764-0.472)=0.584$，$f_1=0.262$

由于 $f_1>f_2$，故新区间 $[\,a, b\,]=[\,x_1, b\,]=[\,0.584, 0.764\,]$。

因为 $b-a=0.764-0.584=0.18<0.2$，一维搜索结束

极小点和极小值是

$x^*=0.5\times(0.584+0.764)=0.674$，

$f^*=0.222$

例3-2 用二次插值法求解例3-1。

min f (x) =3x³- 4x+2
x_0=0，h=1, ε =0.2

解 （1）确定初始区间

初始区间的确定与上题相同，即[a, b]= [0, 2]，

另一中间点 c=1， fc= 1。

（2）用二次插值法逼近极小点

① 第一次插值

记此初始区间内的相邻三点及其函数依次为：

x_1=0， x_2=1， x_3=2， f_1=2， f_2=1， f_3=18，代入插值公式得

$$x_p=\frac{1}{2}\frac{\left(1^2-2^2\right)\times 2+\left(2^2-0\right)\times 1+\left(0-1^2\right)\times 18}{\left(1-2\right)\times 2+\left(2-0\right)\times 1+\left(0-1\right)\times 18}=0.555$$

$$f_p=0.292$$

由于$f_P<f_2$，$x_P<x_2$，故新区间[a，b]=[a，x_2]=[0，1]。

由于 $|x_2-x_P|$ =1-0.555 = 0.445 ＞0.2，故应继续插值计算。

② 第二次插值

在新的区间内，相邻三点为： $x_1 = 0$，$x_2 = 0.555$，$x_3 = 1$，$f_1 = 2$， $f_2 = 0.292$，$f_3 = 1$。代入插值公式得

$$x_P = \frac{1}{2}\frac{\left(0.555^2 - 1\right)\times 2 + (1-0)\times 0.292 + (0 - 0.555^2)\times 1}{\left(0.555 - 1\right)\times 2 + (1-0)\times 0.292 + (0 - 0.555)\times 1} = 0.607$$

$$f_p = 0.243$$

由于$f_P < f_2$，$x_P > x_2$，故新区间

$[a, b] = [x_2, b] = [0.555, 1]$

由于$| x_2 - x_P | = | 0.555 - 0.607 | = 0.052 < 0.2$，故一维搜索到此结束

极小点和极小值分别为

$x^* = x_P = 0.607$，$f^* = 0.243$

由极值条件解得的精确极小点是

$$x^* = 2/3 = 0.6667, \quad f^* = 2/9 = 0.2222$$

由以上计算可知，

二次插值法的收敛速度比黄金分割法快得多，

但计算精度较黄金分割法要低。