第5章 线性规划算法

线性规划问题的特点：

(1) 目标函数和约束函数都是线性函数

(2) 可行域是封闭的凸多边形（多面体）

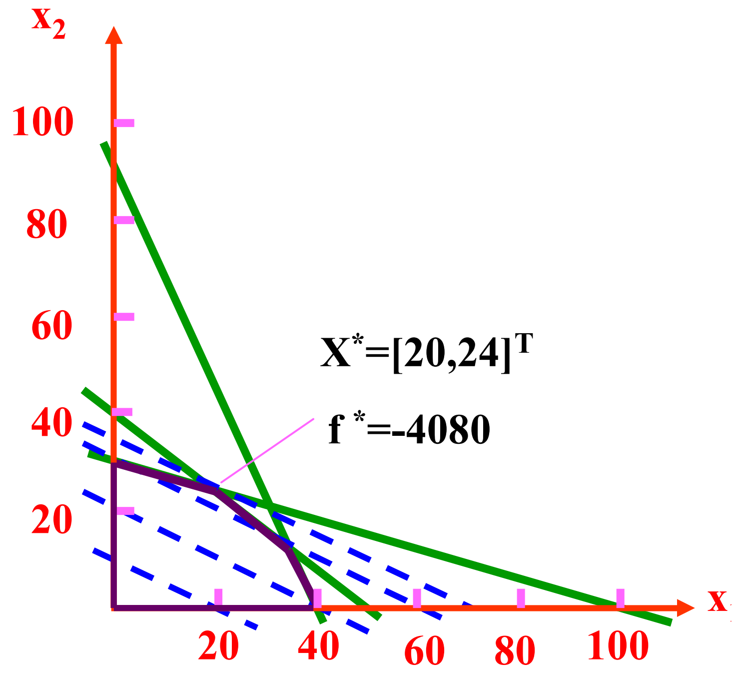
(3) 最优解位于可行域的某一顶点上;

(4) 问题相对比较简单，算法也最成熟；

(5) 生产计划、经济管理、系统工程等领域的问题一般属于线性规划问题；

$$\min\ f(X) = -60x_1 - 120x_2$$

$$s.t.\quad \begin{aligned} 9x_1 + 4x_2 &\le 360 \\ 3x_1 + 10x_2 &\le 300 \\ 4x_1 + 5x_2 &\le 200 \\ -x_1 &\le 0 \\ -x_2 &\le 0 \end{aligned}$$



线性规划算法也是构成非线性约束算法的基础算法(可行方向法和序列二次规划法等)；

5.1 线性规划问题的一般形式

约束条件有两部份组成：

一组等式约束;

一组设计变量的非负性约束。

一般形式

$$\min f(X)=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & g_1(X)=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ & g_2(X)=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ & \cdots\cdots \\ & g_m(X)=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \\ & x_1,x_2,\cdots,x_n\geq 0 \end{aligned}$$

求和形式

$$\min \quad f(X)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i \qquad (i=1,2,\cdots,m) \\ & x_j\geq 0 \qquad (j=1,2,\cdots,n) \end{aligned}$$

向量形式

$$\begin{aligned} \min \quad & f(X) = C^T X \\ s.t. \quad & AX = B \\ & x_i \ge 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \end{aligned} \qquad (5\text{-}3)$$

其中

$AX = B$ 称约束方程

$x_i \ge 0$ 称变量非负约束

$$X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$$

$$C = [c_1, c_2, \cdots, c_n]^T$$

$$B = [b_1, b_2, \cdots b_m]^T$$

B 称常数向量

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A 称系数矩阵

一般情况下 $m < n$

第 **1** 章的例 **1-2**，引入三个松弛变量 x_3, x_4 和 x_5 后，数学模型变为如下一般形式

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(X) = -60x_1 - 120x_2 \\
s.t. \quad & 9x_1 + 4x_2 + x_3 = 360 \\
& 3x_1 + 10x_2 + x_4 = 300 \\
& 4x_1 + 5x_2 + x_5 = 200 \\
& x_1, x_2, \cdots, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

5.2 线性规划问题的解

线性规划问题的解分为

基本解：只满足约束方程的解

$$AX = B$$

基本可行解：同时满足约束方程和变量非负约束的解

$$AX = B$$

$$x_i \geq 0$$

最优解：使目标函数取得小值的基本可行解

$$\begin{aligned} \min \quad & f(X) = C^T X \\ s.t. \quad & AX = B \\ & x_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \end{aligned}$$

5.2.1 基本解的产生与转换

约束方程有 $AX=B$

n 个变量
m 个方程 → *多组解*
（ n > m ）

令 n - m 个变量等于零
求得另外 m 个变量的值
组成的解 → 称*基本解*

基本解的*个数*

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (5\text{-}4)$$

基本解由两部分构成

基本变量： m 个， 一般不等于零，

非基本变量：$n-m$ 个，均等于零；

系数矩阵 A 和常数向量 B 合并组成的矩阵，称*增广矩阵*

即

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

初等行变换

把矩阵的某一行同乘一个数，与另一行相加减。

消元变换

利用初等行变换，

把矩阵中的一个元素（主元）变为 **1**，

把该元素所在列的其他元素变为 **0** 。

初始基本解的产生

若对增广矩阵进行m次消元变换，
将前 **m** 行 **m** 列变成一个单位矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{消元变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a'_{1,m+1} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a'_{2,m+1} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a'_{m,m+1} & \cdots & a'_{mn} & b'_m \end{bmatrix}$$

并令其中从 x_{m+1} 到 x_n 的 $n-m$ 个变量为非基本变量。（5-5）

由

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a'_{1,m+1} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a'_{2,m+1} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a'_{m,m+1} & \cdots & a'_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_m \end{bmatrix} \qquad (5\text{-}6)$$

得到基本解 $X = \begin{bmatrix} b'_1 & b'_2 & \cdots & b'_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T$

消元变换的步骤如下：

① 选定变换主元 a_{lk} ；

② 把主元行 l 的各个元素分别除以主元 a_{lk} ，

将主元变为 **1**；

③ 把主元列 ***K***中除主元以外的其他元素变为零。

消元变换的计算公式：

$$a_{l,j}' = \frac{a_{l,j}}{a_{l,k}} \qquad (i = l)$$

$$a_{i,j}' = a_{i,j} - a_{i,k}\frac{a_{l,j}}{a_{l,k}} \qquad (i \neq l)$$

$$b_l' = \frac{b_l}{a_{l,k}} \qquad (i = l)$$

$$b_i' = b_i - a_{i,k}\frac{b_l}{a_{l,k}} \qquad (i \neq l)$$

$$(i = 1, 2, \cdots, m; \quad j = 1, 2, \cdots, n)$$

从一个基本解 → 另一个基本解的方法

①选定主元：非基本变量所对应的元素里的任一个

②进行一次消元变换：

在式（**5-5**）中，选取 $a_{2,m+1}$ 作主元，一次消元变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a'_{1,m+1} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a'_{2,m+1} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a'_{m,m+1} & \cdots & a'_{mn} & b'_m \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a''_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 & a''_{1,m+2} & \cdots & a''_{1n} & b''_1 \\ 0 & a''_{22} & 0 & \cdots & 0 & (1) & a''_{2,m+2} & \cdots & a''_{2n} & b''_2 \\ 0 & a''_{32} & 1 & \cdots & 0 & 0 & a''_{3,m+2} & \cdots & a''_{3n} & b''_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a''_{m2} & 0 & \cdots & 1 & 0 & a''_{m,m+2} & \cdots & a''_{mn} & b''_m \end{bmatrix}$$

对应的基本解变成

$$X^1 = \left[b''_1, 0, b''_3, \cdots, b''_m, b''_2, 0, \cdots 0\right]$$

变换的实质是

基本变量 x_2 和非基本变量x_{m+1}的一次交换

例**5-1** 求解线性规划问题

$$
\begin{aligned}
&\min f(X) = x_1 + x_2 \\
&s.t. \qquad 5x_1 + 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 = 30 \\
&\qquad\qquad x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 = 8 \\
&\qquad\qquad x_1, x_2, \cdots, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

解 构造增广矩阵

$$
\begin{bmatrix} 5 & 4 & 13 & -2 & 1 & 30 \\ 1 & 1 & 5 & -1 & 1 & 8 \end{bmatrix}
$$

选 $a_{22}=1$和 $a_{11}=5$ 做主元，分别进行两次消元变换得

$$
\begin{bmatrix}
\cancel{5}\,1 & \cancel{4}\,0 & \cancel{13}\,-7 & \cancel{-2}\,2 & \cancel{1}\,-3 & \cancel{30}\,-2 \\
1 & 1 & 5 & -1 & 1 & 8
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & -7 & 2 & -3 & -2 \\
\cancel{1}\,0 & \cancel{1}\,1 & \cancel{5}\,12 & \cancel{-1}\,-3 & \cancel{1}\,4 & \cancel{8}\,10
\end{bmatrix}
$$

由此得到一个基本解

$$X^0=\begin{bmatrix}-2 & 10 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$$

$$f(X^0)=-2$$

选定 $a_{25}=4$ 作主元，进行一次消元变换，得

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/4 & 2 & -1/4 & 0 & 5.5 \\ 0 & 1/4 & 3 & -3/4 & (1) & 2.5 \end{bmatrix}$$

由此得另一个基本解

$$X^1=\begin{bmatrix}5.5 & 0 & 0 & 0 & 2.5\end{bmatrix}^T$$

$$f(X^1)=5.5$$

可以看出：

X^0 是基本解，不是基本可行解，

X^1 是基本解，又是基本可行解。

5.2.2 基本可行解的产生与转换

问题：如何产生第一个基本可行解？

如何实现基本可行解之间的变换？

基本可行解的产生

分以下两种情况：

情况1.

特征：除变量非负约束外全部是 $\le$ 的不等式约束对应的常数向量均为正数。

方法：引入松弛变量，并以松弛变量为基本变量。

例如，对于如下约束条件

$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 + x_3 \le 4 \\ &x_1 + 2x_2 - x_3 \le 8 \\ &x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

引入松弛变量 x_4 和 x_5 有

$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ &x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 8 \\ &x_1, x_2, \cdots, x_5 \ge 0 \end{aligned}$$

对应的增广矩阵是

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

由此得到的解

$$X^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}^T$$

显然此解就是一个基本可行解。

情况2.

特征：约束条件中还包含等式约束
或常数向量中有负数

方法：

① 在等式约束中引进人工变量；
② 建立一个辅助规划问题；
③ 求解此辅助规划问题。

辅助规划问题

① 目标函数取作各个人工变量之和；
② 约束方程为引入人工变量后的等式约束；
③ 变量非负约束包括人工变量在内。

例**5-1**，引入人工变量 x_6和 x_7后的辅助规划为

$$\begin{aligned}
&\min \phi(\overline{X}) = x_6 + x_7 \\
&s.t. \quad 5x_1 + 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 30 \\
&\qquad\quad x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 + x_7 = 8 \\
&\qquad\quad x_1, x_2, \cdots, x_7 \geq 0
\end{aligned} \qquad (5\text{-}8)$$

辅助规划问题的求解

求解方法：基本可行解的消元变换；
终止条件：辅助问题的目标函数的值等于零。

即当 $\phi(\overline{X^k}) = 0$ 时，对应的解 $\overline{X^k}$ 中，除去人工变量的其余部分就是原线性规划问题的一个基本可行解。

5.2.3 基本可行解的变换条件

基本可行解是基本解的一部分，基本可行解的相互转换仍然采用消元变换。

必须解决以下三个问题：

① 变换后所得解的目标函数值必须下降，而且下降得最多，称最优性条件；

② 变换后的解仍然是一个基本可行解，即常数项的值大于或等于零，称非负性条件；

③ 最优解的判断。

（1）最优性条件

将线性规划问题的目标函数写成下面的形式

$$f(X)=\sum_{i=1}^{m}c_i x_i+\sum_{j=m+1}^{n}c_j x_j \qquad （5\text{-}10）$$

其中 x_i 基本变量，

x_j 非基本变量。

把每一个基本变量都用非基本变量表示，即

$$x_i=b_i-\sum_{j=m+1}^{n}a_{ij}x_j \qquad (i=1,2,\cdots,m) \qquad （5\text{-}11）$$

然后将上式代入式（**5－10**）得到

$$\begin{aligned} f(X) &= \sum_{i=1}^{m} c_i (b_i - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j) + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_i b_i + \sum_{j=m+1}^{n} (c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}) x_j \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_i b_i + \sum_{j=m+1}^{n} \sigma_j x_j \end{aligned} \qquad (5\text{-}12)$$

式中

$\sum_{i=1}^{m} c_i b_i$ 变换前目标函数值

$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$

称第 j 列的判别数。

由上式分析知：

变换后的目标函数值

＝变换前的目标函数值

＋ 非基本变量与

对应判别数的乘积之和

为使变换后得到的目标函数值有所下降，应有

$$\sigma_j < 0 \qquad (5\text{-}13)$$

变换中，$n-m$ 个非基本变量 x_j 中，只有一个要从零变为正数，故判别数负得越多，函数值下降越多。

故令

$$\sigma_k = \min\left\{\sigma_j \mid \sigma_j < 0 \qquad j = 1,2,\cdots,n\right\} \qquad (5\text{-}14)$$

（2）最优性判断

如果判别数全部成为非负数，即有

$$\sigma_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\cdots,n \qquad (5\text{-}15)$$

表明目标函数不可能继续下降，对应的基本可行解就是所要寻求的最优解。

例，例**5-1**建立的辅助规划问题所对应的增广矩阵是

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 13 & -2 & 1 & 1 & 0 & 30 \\ 1 & 1 & 5 & -1 & 1 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \qquad (5\text{-}16)$$

对应的解是

$$\overline{X^0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\phi(\overline{X^0}) = 38$$

其中 x_6 和 x_7 是基本变量，将对应的方程组展开，并用非基本变量表示基本变量时有

$$x_6 = 30 - 5x_1 - 4x_2 - 13x_3 + 2x_4 - x_5$$

$$x_7 = 8 - x_1 - x_2 - 5x_3 + x_4 - x_5$$

把它们代入目标函数得

$$\phi(\overline{X^0}) = x_6 + x_7$$
$$= 38 - 6x_1 - 5x_2 - 18x_3 + 3x_4 - 2x_5$$

由上式可知，对应的判别数

$$\sigma_1 = -6,\ \sigma_2 = -5,\ \sigma_3 = -18,\ \sigma_4 = 3,\ \sigma_5 = -2$$

其中，$\sigma_3 = -18$ 最小。当选 x_3 作为下一次的基本变量，将其由零变成正数时，目标函数 $\phi(\overline{X})$的值下降得最多。

即下一次变换的主元应在第三列的 $a_{13} = 13$ 和 $a_{23} = 5$ 中选取。

（3）非负性条件

欲经一次消元变换得到另一个基本可行解，变换后的常数项 b' 必须全部为非负数，即满足

$$b_l' = \frac{b_l}{a_{lk}} \ge 0 \quad 和 \quad b_i' = b_i - a_{ik}\frac{b_l}{a_{lk}} \ge 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, m; i \ne l)$$

为此，必须使 $a_{lk} > 0$

并且在 $a_{ik} > 0$ 时，使 $\dfrac{b_i}{a_{ik}} \ge \dfrac{b_l}{a_{lk}}$

由此可知，在主元列 k 确定时，可按下式选取主元行 l

$$\frac{b_l}{a_{lk}} = \min\left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, m) \right\} \tag{5-17}$$

例，由前面的计算可知，例**5-1**建立的辅助规划问题的增广矩阵和对应的解是

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 13 & -2 & 1 & 1 & 0 & 30 \\ 1 & 1 & 5 & -1 & 1 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\overline{X^0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\phi(\overline{X^0}) = 38$$

并且，主元列 **k=3**

因 $\min \dfrac{b_i}{a_{ik}} = \min\{30/13, \quad 8/5\} = 8/5$ 知主元 $a_{lk} = a_{22} = 5$

以主元 $a_{22} = 5$ 作一次消元变换得

$$\begin{bmatrix} 12/5 & 7/5 & 0 & 3/5 & -8/5 & 1 & -13/5 & 46/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1 & -1/5 & 1/5 & 0 & 1/5 & 8/5 \end{bmatrix}$$

$$\overline{X^1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8/5 & 0 & 0 & 46/5 & 0 \end{bmatrix}, \ \phi(\overline{X^0}) = 46/5$$

此解仍然是一个基本可行解，且目标函数下降得很多。

5.3 单纯形算法

单纯形算法是根据基本可行解的变换原理构成的；
一般采用列表变换的形式进行；
所列表格称单纯形表；
对应的算法亦称单纯形表法。

5.3.1单纯形表

单纯形表是以增广矩阵为中心构造的一种变换表格，见下表。

表5-1 单纯形表

	变量	x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+1}	…	x_{n+m}	b_i
基本变量	系数	c_1	c_2	…	c_n	0	0	…	0	c_0
x_{n+1}	0	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	1	0	$\cdots$	0	b_1
x_{n+1}	0	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	0	1	$\cdots$	0	b_2
⋮	⋮	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	0	0	$\vdots$	0	⋮
x_{n+m}	0	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	0	0	$\cdots$	1	b_m
判别数 σ_j		σ_1	σ_2	…	σ_n	0	0	…	0	$f(X)$

5.3.2 单纯形表的变换规则

单纯形表的变换规则如下：

（1） 一张表对应一个基本可行解，这个解由 **m**个基本变量的非负值和**n-m**个非基本变量的零值共同组成。

（2）当表中最下一行的判别数全为非负数时，
对应的基本可行解就是所求最优解；
当判别数中有负数存在时，还需作下一次消元变换。

（3）下一次变换

主元列 k 就是判别数的值负得最多的那一列；

主元行 l 应选取用主元列中正的系数 a_{ik} 去除同行内的常数项 b_i 之商值中最小的那一行；

（4）表中对增广矩阵部分的消元变换分两步进行，

首先用主元 a_{lk} 去除主元行内的各个元素 $a_{l,j}$ ，把主元变为 **1**；

然后作 $m-1$ 次初等行变换，把主元列 k 中除主元之外的其它元素全部变为 **0**；

（5）基本变量所对应的各列的判别数始终等于 0；

非基本变量所对应的各列的判别数，等于该列顶端的系数值 c_j减去同列中的各个系数 a_{ij} 与左侧系数 c_i 乘积之和

即

$$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$$

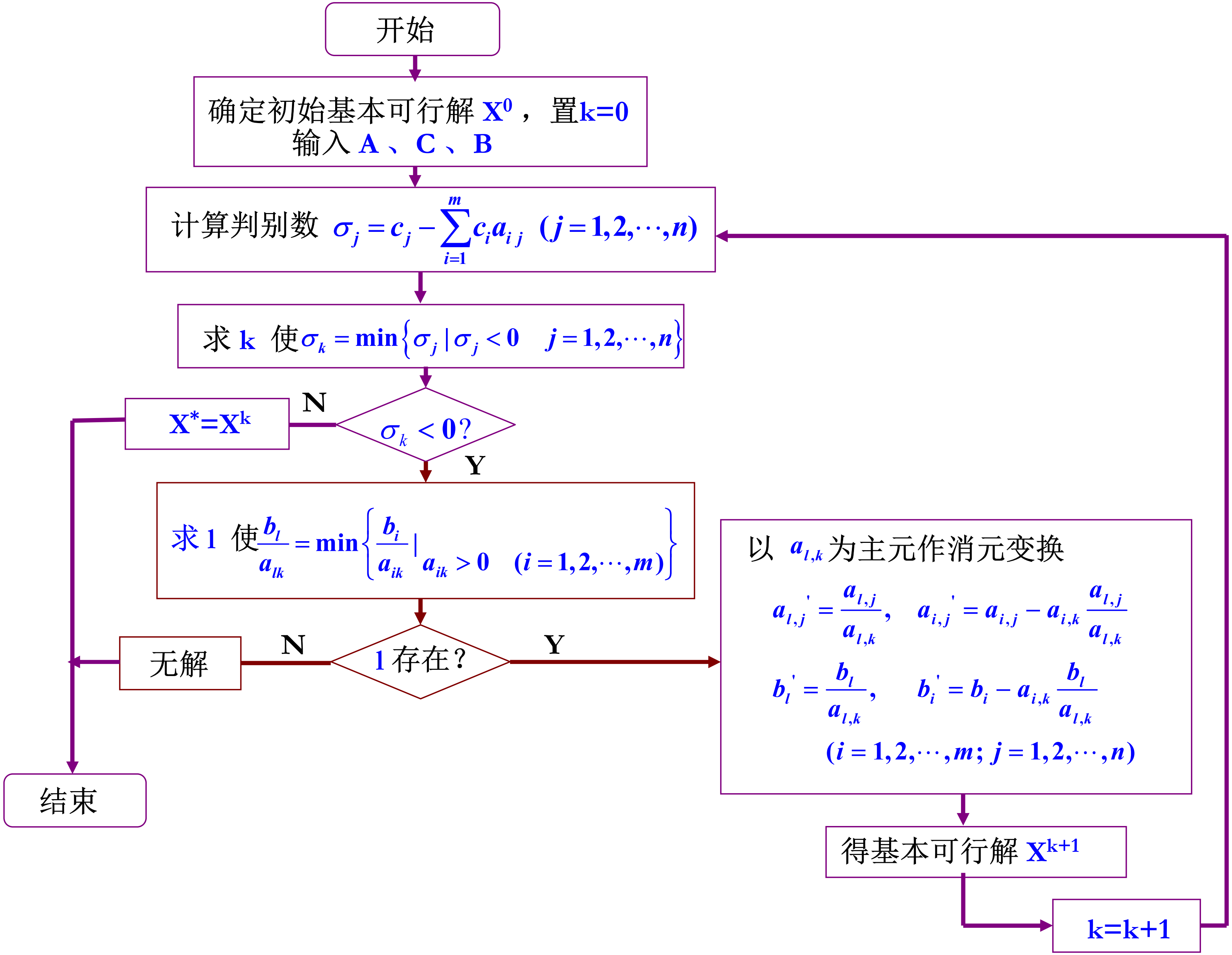
右下角的 $f(X)$ 等于最后一列顶端的 c_0 加上各行的 b_i 与左端系数 c_i 乘积之和，即

$$f(X) = c_0 + \sum_{i=1}^{m} c_i b_i$$

（6）当约束条件中有等式约束存在时，在这些约束中分别引入人工变量，并以人工变量之和作为目标函数，构造辅助规划问题和相应的单纯形表。

对此单纯形表进行变换，当右下角的 $f(X)$ 等于零时，表中原设计变量所对应的解就是原线性规划问题的一个初始基本可行解。

得到初始基本可行解后，重新建立原线性规划问题的单纯形表，继续变换，便可得到原问题的最优解。



开始
确定初始基本可行解 X^0， 置k=0
输入 A 、 C 、 B
计算判别数 $\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} \quad (j=1,2,\cdots,n)$
求 k 使$\sigma_k = \min\{\sigma_j \mid \sigma_j < 0 \quad j=1,2,\cdots,n\}$
$\sigma_k < 0$?
N
$X^* = X^k$
Y
求 1 使$\frac{b_l}{a_{lk}} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0 \quad (i=1,2,\cdots,m)\right\}$
1 存在？
N
无解
Y
以 $a_{l,k}$ 为主元作消元变换
$a_{l,j}' = \frac{a_{l,j}}{a_{l,k}}, \quad a_{i,j}' = a_{i,j} - a_{i,k}\frac{a_{l,j}}{a_{l,k}}$
$b_l' = \frac{b_l}{a_{l,k}}, \quad b_i' = b_i - a_{i,k}\frac{b_l}{a_{l,k}}$
$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$
得基本可行解 X^{k+1}
k=k+1
结束

例**5-2** 求解例**1－2**的线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(X) = -60x_1 - 120x_2 \\
s.t. \quad & 9x_1 + 4x_2 \le 360 \\
& 3x_1 + 10x_2 \le 300 \\
& 4x_1 + 5x_2 \le 200 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

解

①引入松弛变量 x_1、x_2和 x_3， 将问题变为一般形式

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(X) = -60x_1 - 120x_2 \\
s.t. \quad & 9x_1 + 4x_2 + x_3 = 360 \\
& 3x_1 + 10x_2 + x_4 = 300 \\
& 4x_1 + 5x_2 + x_5 = 200 \\
& x_1, x_2, \cdots, x_5 \ge 0
\end{aligned}
$$

① 建立初始单纯形表

	变量	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
基本变量	系数	−60	−120	0	0	0	0
x_3	0	9	4	1	0	0	360
x_4	0	3	(10)	0	1	0	300
x_5	0	4	5	0	0	1	200
判别数	σ_j	−60	−120	0	0	0	0

得到初始基本可行解

$$X^0 = [0, \quad 0, \quad 360, \quad 300, \quad 200]^T, \quad f(X^0) = 0$$

由于判别数 σ_1 和 σ_2 均小于零，故 X^0不是最优解。

又因

$$\min\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\} = \sigma_2 = -120$$

$$\min\left\{\frac{b_i}{a_{i,2}} \middle| a_{i,2} > 0 \quad (i = 1, 2, 3)\right\} = \frac{b_2}{a_{2,2}} = \frac{300}{10}$$

$$k = 2, \quad l = 2$$

所以选 $a_{2,2} = 10$ 作下一次变换的主元。

② 以 $a_{2,2}=10$作主元进行消元变换得新的单纯形表

	变量	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
基本变量	系数	—60	—120	0	0	0	0
x_3	0	7.8	0	1	-0.4	0	240
x_2	—120	0.3	**1**	0	0.1	0	30
x_5	0	(2.5)	**0**	0	-0.5	1	50
判别数	σ_j	—24	0	0	12	0	-3600

对应的解是

$$X^1=[0,\quad 30,\quad 240,\quad 0,\quad 50]^T, f(X^1)=-3600$$

由于 $\sigma_1=-24<0$ ，此解不是最优解，还需要继续变换。

又因 $$\min\left\{\frac{b_i}{a_{i,1}}\middle| a_{i,1}>0 \qquad (i=1,2,3)\right\}=\frac{b_3}{a_{3,1}}=\frac{50}{2.5}$$

下一次变换的主元选

$$a_{1,3}=2.5$$

③以 $a_{1,3}=2.5$ 作主元进行消元变换得新的单纯形表

基本变量	变量	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	系数	－60	－120	0	0	0	0
x_3	0	0	0	1	**1.16**	-3. 12	84
x_2	－120	0	**1**	0	0. 16	-0. 12	**24**
x_1	-60	**1**	**0**	0	-0. 2	**0.4**	200
判别数	σ_j	0	0	0	7. 2	9. 60	-4080

对应的解是 $X^2=[20,\quad 24,\quad 84,\quad 0,\quad 0]^T,f(X^2)=-4080$

由于此解对应的判别数均为非负数，故此解是引入松弛变量后所成问题的最优解。原生产计划问题的最优解是

$$X^*=[20,\quad 24]^T,f(X^*)=-4080$$

即每天生产甲产品20件，乙产品24件，可以获得最大利润4080元。