工程最优化设计

绪论

1. 最优化问题

最优化：用最少的付出获得最大的受益。

对于工程设计问题，即寻求设计参数的一组最佳值，使其既满足各种设计标准和要求，又使一项或多项技术经济指标达到极值。分

直观最优化：没有明确的量化标准
数学最优化：即极值问题

2.工程最优化问题的求解的三个步骤

(1) 把实际问题进行数学描述,建立一组数学表达式，称数学模型

(2) 寻找一种数值计算方法和相应的计算机程序

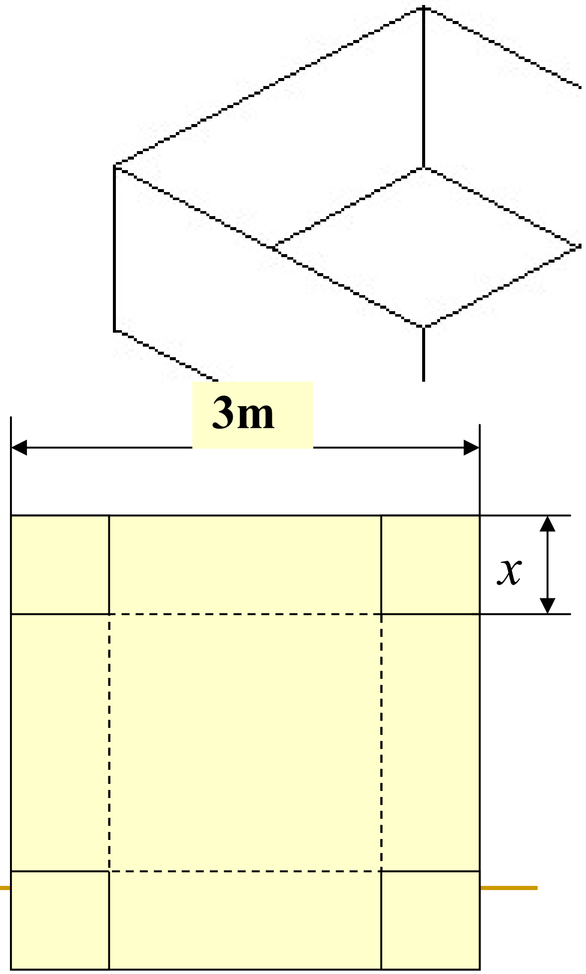
(3) 上机求解

第1章 数学模型

1.简例

例1-1 板金下料问题

用长3m的薄板做一无盖方形货箱，
- 要求容积最大。



解：设四角裁去的小方块的边长为 x

则货箱的容积为
$$V(x)=x(3-2x)^2$$

- 于是该问题可描述为
- 求变量： x
- 使函数 $V(x)=x(3-2x)^2$ 极大化

例1-2 生产计划问题

- 某厂生产甲乙两种产品
- 每件产品的消耗和利润，以及每天的生产条件如下表所示
- 要求给出每天的生产计划，使得利润最大化

产品	材料/kg	工时/h	用电/kw.h	利润/元
甲	9	3	4	60
乙	4	10	5	120
供应量	360	300	200	？

设每天生产甲产品 x_1 件， 乙产品 x_2 件，于是该生产计划问题可归结如下数学模型

求变量 x_1， x_2

使函数 $f(x_1, x_2) = 60x_1 + 120x_2$ 极大化

满足条件

$$g_1(x_1, x_2) = 9x_1 + 4x_2 \le 360$$

$$g_2(x_1, x_2) = 3x_1 + 10x_2 \le 300$$

$$g_3(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \le 200$$

$$g_4(x_1, x_2) = x_1 \ge 0$$

$$g_5(x_1, x_2) = x_2 \ge 0$$

例1-3 最佳下料问题

某厂生产同一种型号的机床，每台机床需要三种轴件， 每种轴件都用5.5m长的同一种圆钢下料。现计划生产这种机床100台，问最少需要多少根圆钢?

三种轴件的规格和需求量如下

轴的类别	规格：长度/m	每台机床所需件数
A	3.1	1
B	2.1	2
C	1.2	4

分析可知，长5.5m的圆钢截成A、B、C三种坯料,有下表所列的五种下料方案

	一	二	三	四	五	需求量
A(3.1)	1	1	0	0	0	100
B(2.1)	1	0	2	1	0	200
C(1.2)	0	2	1	2	4	400
料头/m	0.3	0	0.1	1	0.7	

设按第i（i=1,2,…,5）种截法下料的圆钢根数为x_i，则该问题的数学模型如下：

求变量 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

极小化 $f=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$

满足条件 $x_1+x_2 \geqslant 100$

$x_1+2x_3+x_4 \geqslant 200$

$2x_2+x_3+2x_4+4x_5 \geqslant 400$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0$

2. 数学模型的一般形式

最优化设计的数学模型由设计变量、目标函数和约束条件三部分组成，其一般形式如下：

求设计变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$

极小化函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

满足约束条件 $g_u(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le 0 \quad (u = 1, 2, \cdots, p)$

$$h_v(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \quad (v = 1, 2, \cdots, m)$$

其中：$g_u(x_1, x_2, \cdots; x_n) \le 0$ 称不等式约束条件，简称不等式约束；

$h_v(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ 称等式约束条件，简称等式约束 。

用 $X=[x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ 表示 设计变量

min 表示极小化

s. t. 表示 满足于

数学模型可写为向量形式：

$$
\begin{aligned}
& \min\ f(X) \\
& s.t. \quad g_u(X) \le 0 \quad (u = 1, 2, \cdots, p) \\
& \qquad\quad h_v(X) = 0 \quad (v = 1, 2, \cdots, m)
\end{aligned}
$$

如例**1-2** 的一般形式为

$$
\begin{aligned}
\min\ & f(X) = -60x_1 - 120x_2 \\
s.t.\ & g_1(X) = 9x_1 + 4x_2 - 360 \le 0 \\
& g_2(X) = 3x_1 + 10x_2 - 300 \le 0 \\
& g_3(X) = 4x_1 + 5x_2 - 200 \le 0 \\
& g_4(X) = -x_1 \le 0 \\
& g_5(X) = -x_2 \le 0
\end{aligned}
$$

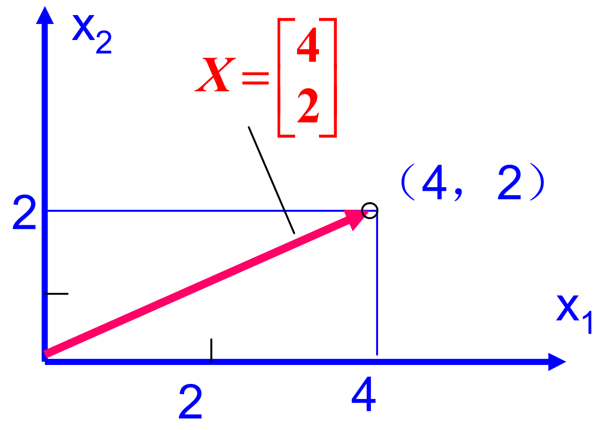
2.1 数学模型的组成

2.1.1 设计变量

- 设计变量是一组待定的未知数、或特征主参数
- 以设计变量为坐标轴所成空间称设计空间
- 设计空间中的点称设计点
- 一个设计点代表一个设计方案

用 $X=[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}}$ 代表一个设计点，同时它也代表一个向量（矢量），例

$$X = [4 \quad 2]^T$$



最优化问题的目的：

在设计空间中无穷多个设计点中，找到一个既满足所有约束条件，又使目标函数取得极小值的点，称最优点。它所代表的解称最优解。

2.1.2 约束条件

将设计的要求和限制表示成设计变量的函数，构成的

$$g_u(X) \leqslant 0 \quad (u=1,2,\ldots,p)$$

$$h_v(X) = 0 \quad (v=1,2,\ldots,m)$$

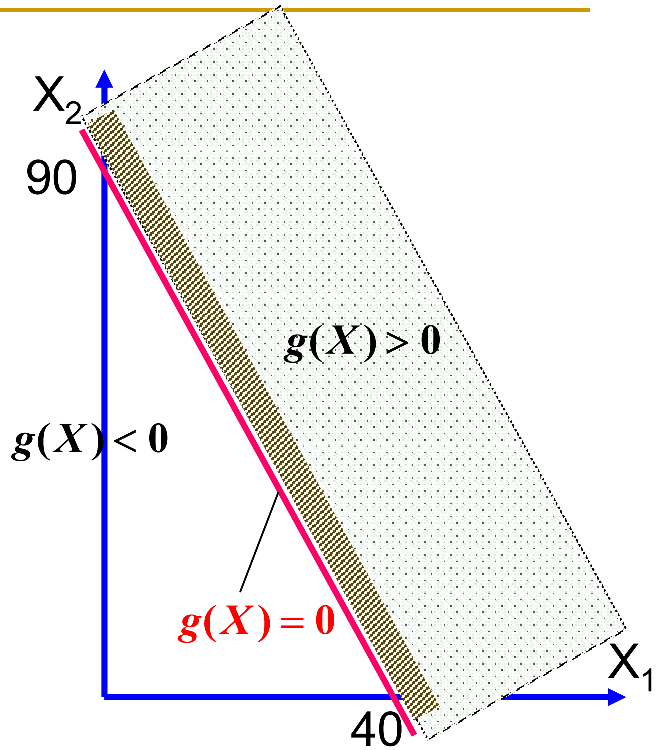
称约束条件，简称约束。

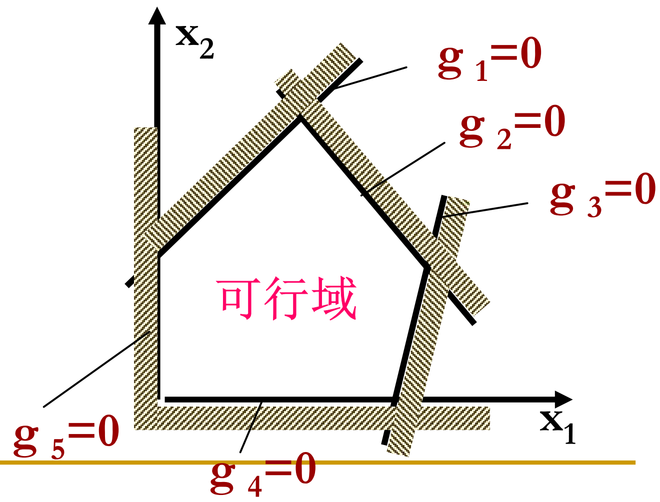
把不等式约束中的不等号改成等号后 得到的方程称约束方程（边界）

如 $$g_1(X)=9x_1+4x_2-360=0$$

其图形相当于一条约束边界，把设计空间一分为二，一部分满足约束，另一部分不满足约束。如右图所示。

由约束边界围成的满足所有约束的区域，称最优化问题的可行域.





2.2.3 目标函数

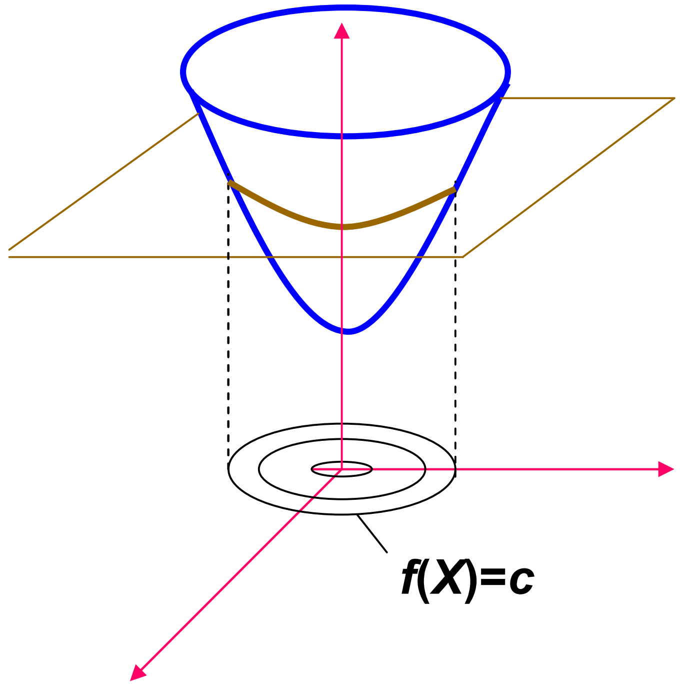
目标函数是衡量设计方案好坏、优劣的定量标准。

一般选择设计问题的某项技术经济指标作为目标函数。如利润、成本、功率、重量等。

令函数 $f(X)$ 等于任意常数 c

$$f(X) = c$$

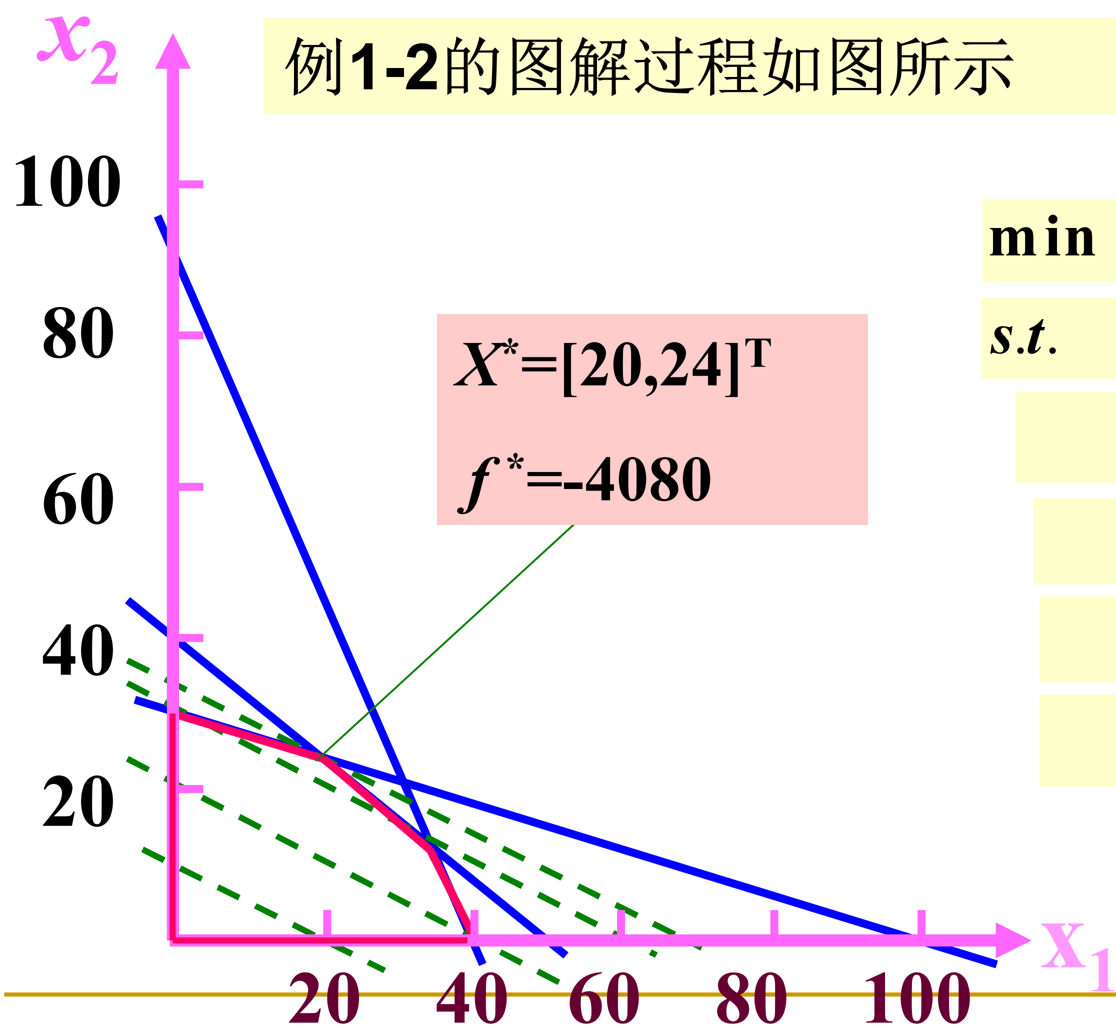
由此得到的图形称目标函数的等值线（面）。



2.3 最优化问题的图解法

对简单的最优化问题，可以用作图法，得到近似最优点。

例1-2的图解过程如图所示



$$\min\ f(X)=-60x_1-120x_2$$

$$s.t.\quad g_1(X)=9x_1+4x_2-360\le 0$$

$$g_2(X)=3x_1+10x_2-300\le 0$$

$$g_3(X)=4x_1+5x_2-200\le 0$$

$$g_4(X)=-x_1\le 0$$

$$g_5(X)=-x_2\le 0$$

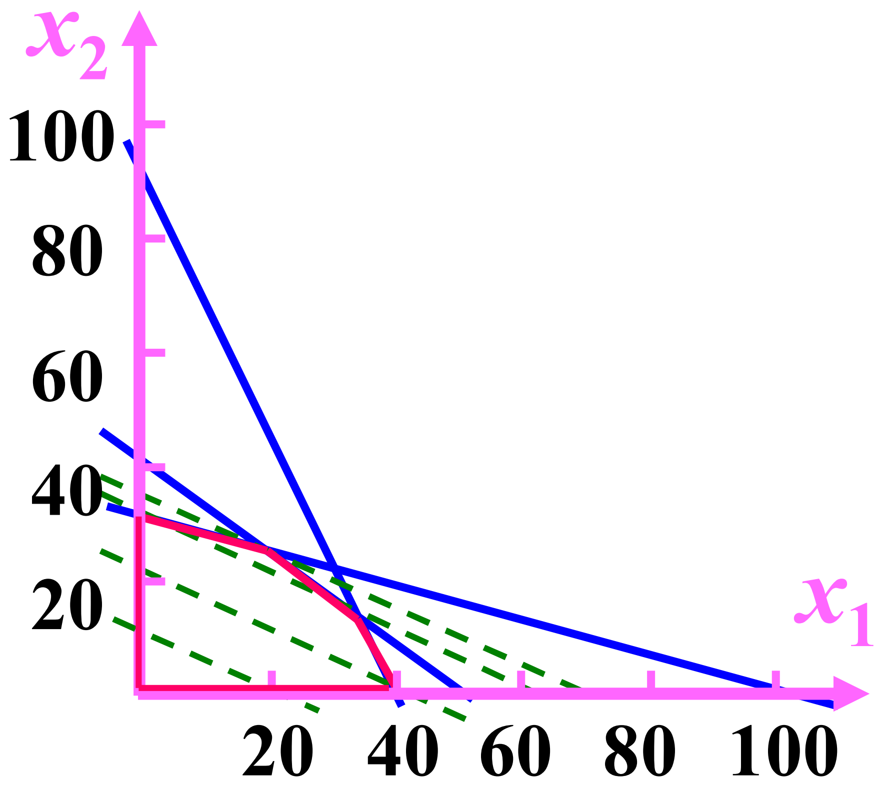
图解法的步骤是：

1）确定设计空间；

2）画出由约束边界围成的 约束可行域；

3）作出两条目标函数的等值线；

4） 判断并确定最优点。



最优点的判断方法：

最优点：位于目标函数的下降方向上，等值线与可行域的最 后一个交点或切点上。

2.4 下降迭代解法

按照某一迭代算式，从任意一个初始点X^0开始，按某一递推的格式产生出如下点列

$X^0, X^1, X^2, \ldots, X^k, X^{k+1}, \ldots$

若对应的函数值有如下的关系

$$f(X^0) > f(X^1) > f(X^2) > \cdots f(X^k) > f(X^{k+1}) > \cdots\cdots$$

必有 $$\lim_{k\to\infty} X^k = X^*$$

则构成此点列的算式和递推迭代格式就成为一种下降迭代算法。

2.4. 1 下降迭代算法的基本格式

上述点的产生一般采用如下迭代算式

$$X^{k+1} = X^k + \alpha_k S^k$$

其中 S^k 称搜索方向

α_k 称最优步长因子

用以求最优步长因子的数值算法称一维搜索法

下降迭代算法的基本迭代格式可归纳如下：

（1）给定初始点 X^0和收敛精度 ε，并置计数单元 $k=0$；

（2） 选取搜索方向 S^k ；

（3） 确定最优步长因子，计算得到新的迭代点;

$$X^{k+1} = X^k + \alpha_k S^k$$

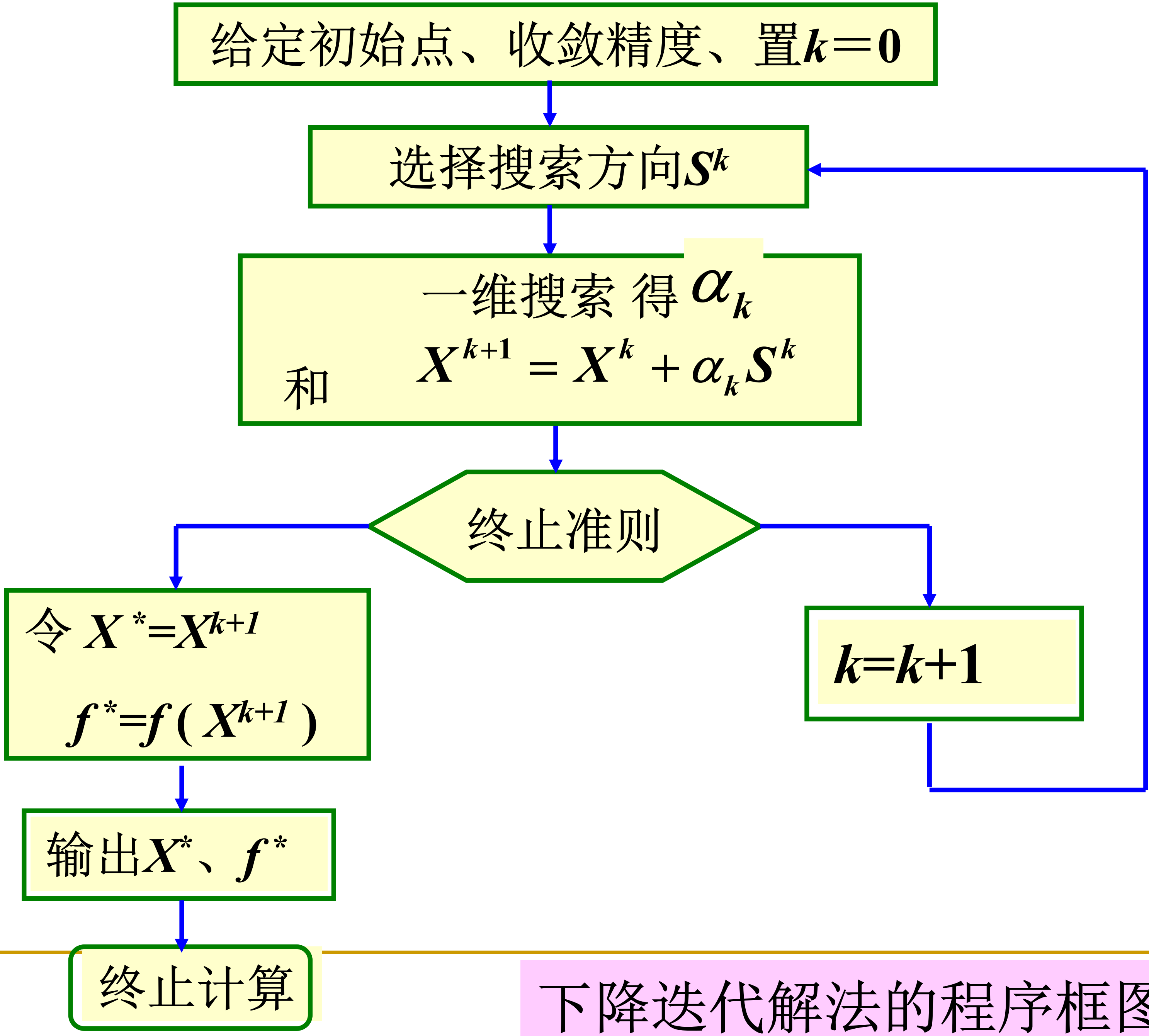
（4） 终止判断:

若点 X^{k+1} 满足收敛精度，则以它为最优点，输出

$X^*=X^{k+1}$，并终止迭代；

否则，以它作为新的起点，即令 $k=k+1$ 转（2）进行下一轮迭代。

下降迭代算法的计算框图如下：



下降迭代解法的程序框图

不难看出，要构成一个下降迭代算法必须解决以下三个问题：

（1）选择合适的搜索方向。

（2）确定最优步长因子。

（3）给定适当的终止判断准则。

2.4.2 终止准则

（1） 点距准则

迭代点向极小点的逼近速度是逐渐变慢的，越接近极小点，相邻迭代点间的距离越近。

当 $\| X^{k+1} - X^{k} \| \le \varepsilon$

时，令 $X^{*} = X^{k+1}$，输出 X^{*} 和 $f(X^{*})$，终止迭代。

一般取收敛精度 $\varepsilon = 10^{-4} \sim 10^{-6}$ 。

（2）值差准则

在迭代点向极小点逼近的过程中，不仅相邻迭代点间的距离逐 渐缩短，它们的函数值也越来越接近。

因此，也可将相邻迭代点的函数值之差作为判断近似最优解的准则，这就是值差准则。即如果有

$$|f(X^k)-f(X^{k+1})|\le\varepsilon$$

或

$$\left|\frac{f(X^k)-f(X^{k+1})}{f(X^k)}\right|\le\varepsilon$$

则令 $X^*=X^{k+1}$,输出 X^* 和 $f(X^*)$ 终止迭代。

（3）梯度准则

多元函数在某点取得极值的必要条件是函数在 该点的梯度等于 零。由此构成如下梯度终止准则。

$$\left\|\nabla f(X^{(k+1)})\right\| \le \varepsilon$$

令 $X^* = X^{k+1}$ ，输出 X^* 和 $f(X^*)$，终止迭代。