第一章 插值法

§1 引　言

1. 1插值问题的提法

在生产和科研中出现的函数是多种多样的。常遇到这种情况：在某个实际问题中，虽然可以断定所考虑的函数$f(x)$在区间$[a,b]$上存在且连续，但却难以找到它的解析表达式，只能通过实验和观测得到在有限个点上的函数值（即一张函数表）。显然，要利用这张函数表来分析函数　的性态、甚至直接求出其

它一些点上的函数值是非常困难的。在有些情况下，虽然可以写出函数 $f(x)$ 的解析表达式，但由于结构相当复杂，使用起来很不方便。面对这些情况，总希望根据所得函数表（或结构复杂的解析表达式），构造某个简单函数$P(x)$作为 $f(x)$ 的近似。

插值法是解决此类问题的一种比较古老的、然而却是目前常用的方法，它不仅直接广泛地应用于生产实际和科学研究中，而且也是进一步学习数值计算方法的基础。

定义 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$上连续，且在n+1个不同的点 $a \le x_0, x_1, \cdots, x_n \le b$ 分别取值 $y_0, y_1, \cdots, y_n$ 在一个性质优良、便于计算的函数类φ 中，求一简单函数 $p(x)$，使

$$P(x_i) = y_i (i = 0,1, \cdots n) \qquad \textbf{(1.1)}$$

而在其它点 $x \ne x_i$ 上，作为 $f(x)$ 的近似。称区间为**插值区间**，点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$为**插值节点**，称（1.1）为 $f(x)$的**插值条件**，称函数类φ 为**插值函数类**，称 $p(x)$为函数在

节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 处的**插值函数**。求插值函数 $p(x)$ 的方法称为**插值法**。插值函数类 φ 的取法不同，所求得的插值函数 $p(x)$ 逼近 $f(x)$ 的效果就不同它的选择取决于使用上的需要。常用的有代数多项式、三角多项式和有理函数等。

当选用代数多项式作为插值函数时，相应的插值问题就称为**多项式插值。**

在多项式插值中，最常见、最基本的问题是：求一次数不超过 n 的代数多项式

$$P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \quad \textbf{(1.2)}$$

使

$$P_n(x_i)=y_i \left(i=0,1,,\cdots,n\right)$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 为实数。满足插值条件**(1.3)**的多项式**(1.2)**，称为函数$f(x)$ 在节点处的***n*次插值值多项式**。

***n*次插值多项式** $P_n(x)$**的几何意义**：过曲线$y=f(x)$ 上的$n+1$个点$(x_i,y_i)(i=0,1,\cdots;n)$作一条$n$次代数曲线 $y=P_n(x)$，作为曲线$y=f(x)$ 的近似，如**图2-1**。

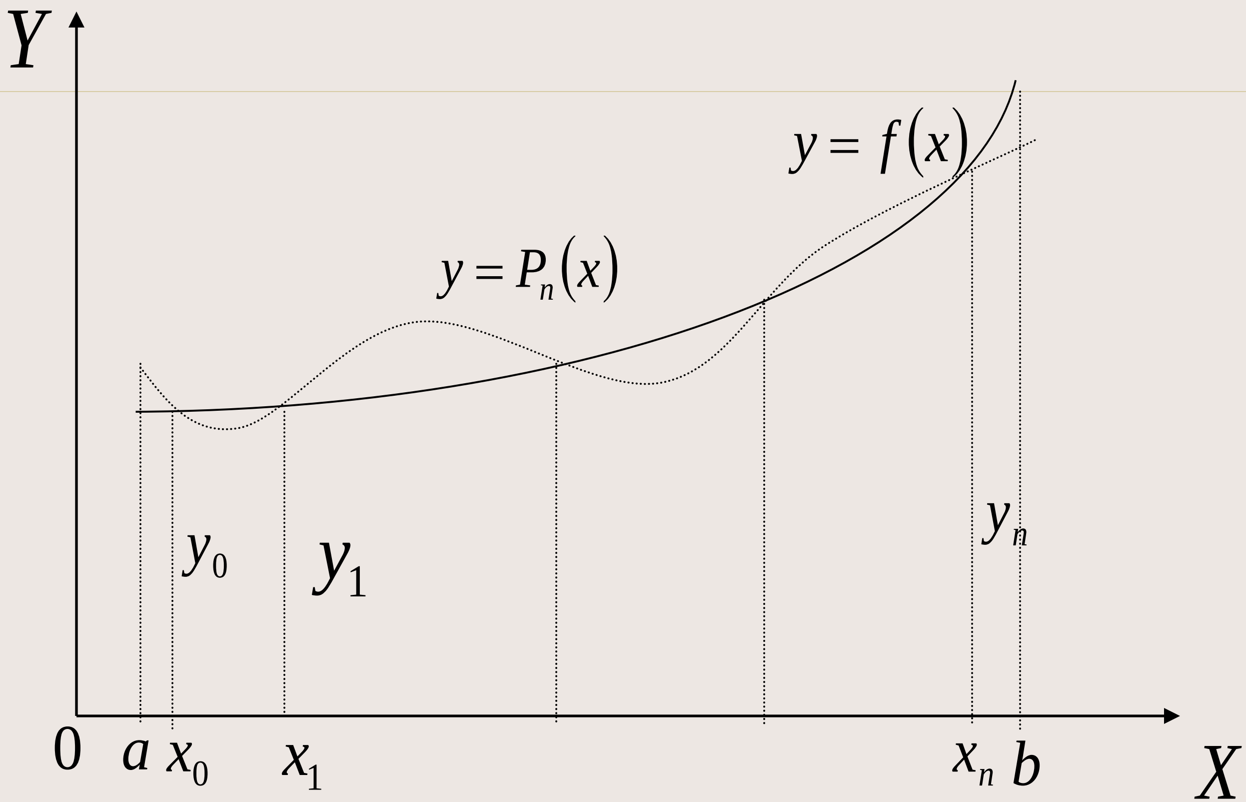

图5－1

1.2 插值多项式存在唯一性

由插值条件（1.3）知，插值多项式 $P_n(x)$ 的系数 $a_i(i=0,1,\cdots n)$ 满足线性方程组

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases} \quad (1.4)$$

由线性代数知，线性方程组的系数行列式（记为V）是$n+1$阶范德蒙（Vandermonde）行列式，且

$$V = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{i-1}(x_i - x_j)$$

因 $x_{0,}x_{1,}\cdots x_n$ 是区间 $[a,b]$上的不同点，上式右端乘积中的每一个因子 $x_i - x_j \neq 0$, 于是 $V \neq 0$，方程组**（1.4）**的解存在且唯一。故有下面的结论：

定理1 若节点 $x_{0,}x_{1,}\cdots x_n$互不相同，则满足插值条件**（1.3）**的次插值多项式**（1.2）**存在且唯一。

§2 拉格朗日插值多项式

在上一节里，我们不仅指出了插值多项式的存在唯一性，而且也提供了它的一种求法，即通过解线性方程组（1.4）来确定其系数a_i，但是，这种作法的计算工作量大，不便于实际应用，下面介绍几种简便的求法。

2.1 插值基函数

先考虑一下简单的插值问题：对节点 $x_i\left(i=0,1,\cdots n\right)$ 中任一点$x_k\left(0\le k\le n\right)$,作一$n$次多项式 $l_k(x)$，使它在该点上取值为1,而在其余点 $x_i\left(i=0,1,k-1,k+1,\cdots,n\right)$ 上取值为零，即

$$l_k(x_i)=\begin{cases}1 & i=k\\ 0 & i\neq k\end{cases} \qquad (2.1)$$

（2.1）表明n个点 $x_i\left(i=0,1,k-1,k+1,\cdots n\right)$ 都是n次多项式 $l_k(x)$ 的零点，故可设

$$l_k(x)=A_k(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)$$

其中 A_k 为待定系数，由条件 $l_k(x)=1$ 可得

$$A_k=\frac{1}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

故

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \qquad (2.2)$$

对应于每一节点 $x_k\left(0\le k\le n\right)$，都能求出一个满足插值条件（2.1）的*n*次插值多项式（2.2），这样，由（2.2）式可以求出*n+1*个*n*次插插多项式 $l_0(x),l_1(x),\cdots,l_n(x)$ 。容易看出，这组多项式仅与节点的取法有关，称它们为在n+1个节点上的**n次基本插值多项式**或**n次插值基函数。**

2.2 拉格朗日插值多项式

利用插值基函数立即可以写出满足插值条件（1.3）的n次插值多项式

$$y_0 l_0(x)+y_1 l_1(x)+\cdots+y_n l_n(x) \qquad (2.3)$$

事实上，由于每个插值基函数$l_k(x)(k=0,1,\cdots,n)$ 都是n次多项式，故其线性组合（2.3）必是不高于n次的多项式，同时，根据条件（2.1）容易验证多项式（2.3）在节点x_i 处的值 $y_i(i=0,1,\cdots,n)$ 因此，它就是待求的n次插值多项式$P_n(x)$。

形如(2.3)的插值多项式称为拉格朗日插值多项式，记为

$$L_n(x)= y_0 l_0(x)+y_1 l_1(x)+\cdots+y_n l_n(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{n} y_k \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \qquad (2.4)$$

作为的特例，令n=1，由（2.4）即得两点插值公式

$$L_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \qquad (2.5)$$

即

$$L_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \qquad (2.6)$$

这是一个线性函数，用线性函数$L_1(x)$近似代替函数$f(x)$，在几何上就是通过曲线$y=f(x)$上两点(x_0,y_0)，(x_1,y_1)作一直线$y=L_1(x)$近似代替曲线$y=f(x)$(见图2-2)，故两点插值又名线性插值。

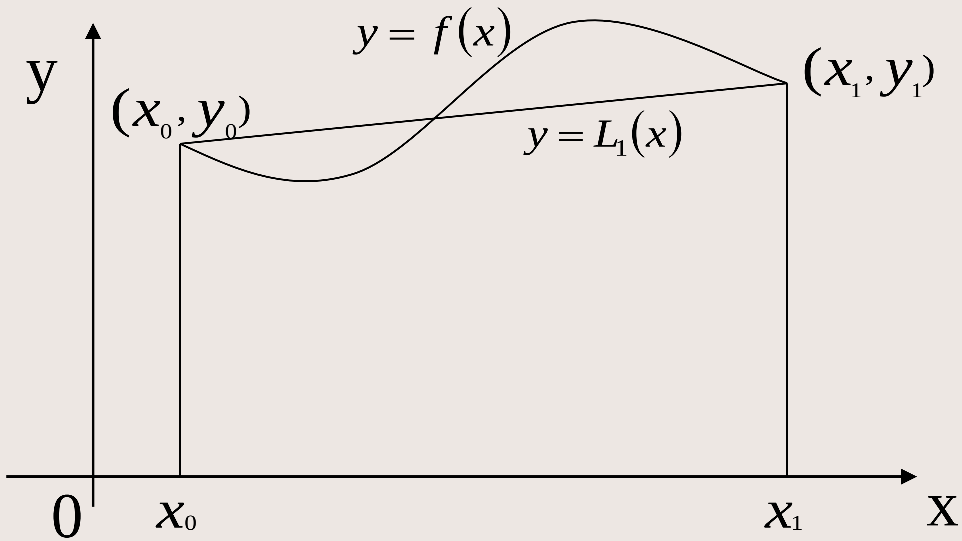

图2-2

- 若令n=2，由（2.4）又可得常用的三点插值公式

$$L_2(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \qquad （2.7）$$

这是一个二次函数，用二次函数$L_2(x)$近似代替函数 $f(x)$，在几何上就是通过曲线$y=f(x)$上的三点$(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，作一抛物线 $y=L_2(x)$近似地代替曲线$y=f(x)$（**图2-3**），故**三点插值(二次插值)**。

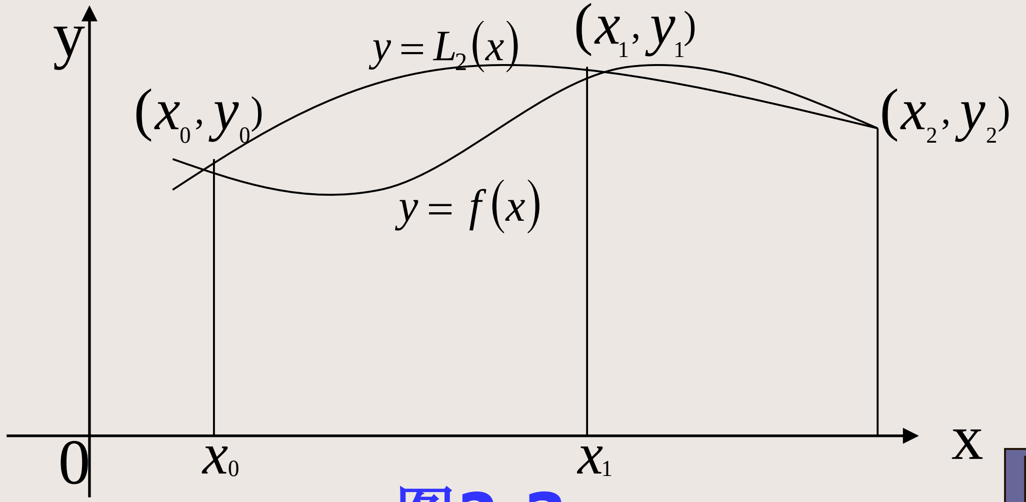

图2-3

例1 已知 $\sqrt{100}=10,\sqrt{121}=11,\sqrt{144}=12$ 分别用线性插值和抛物插值求 $\sqrt{115}$ 的值。

解 因为115在100和121之间，故取节点$x_0=100$，$x_1=121$相应地有$y_0=10$，$y_1=11$，于是，由线性插值公式（2.5）可得

$$L_1(x)=10*\frac{x-121}{100-121}+11*\frac{x-100}{121-100}$$

故用线性插值求得的近似值为

$$\sqrt{115}\approx L_1(115)=10*\frac{115-121}{100-121}+11*\frac{115-100}{121-100}\approx 10.714$$

仿上，用抛物插值公式（2.7）所求得的近似值为

$$\sqrt{115} \approx L_2(115) = 10 * \frac{(115-121)(115-144)}{(100-121)(100-144)} + 11 * \frac{(115-100)(115-144)}{(121-100)(121-144)}$$

$$+ 12 * \frac{(115-100)(115-121)}{(144-100)(144-121)} \approx 10.723$$

将所得结果与$\sqrt{115}$ 的精确值10.7328…相比较，可以看出抛物插值的精确度较好。

为了便于上机计算，我们常将拉格朗日插值多项式（2.4）改写成公式（2.8）的对称形式

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[y_k \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right) \right] \qquad (2.8)$$

编程框图如图2-4，可用二重循环来完成$L_n(x)$值的计算，先通过内循环，即先固定k，令j从0到 $n(j \neq k)$ 累乘求得

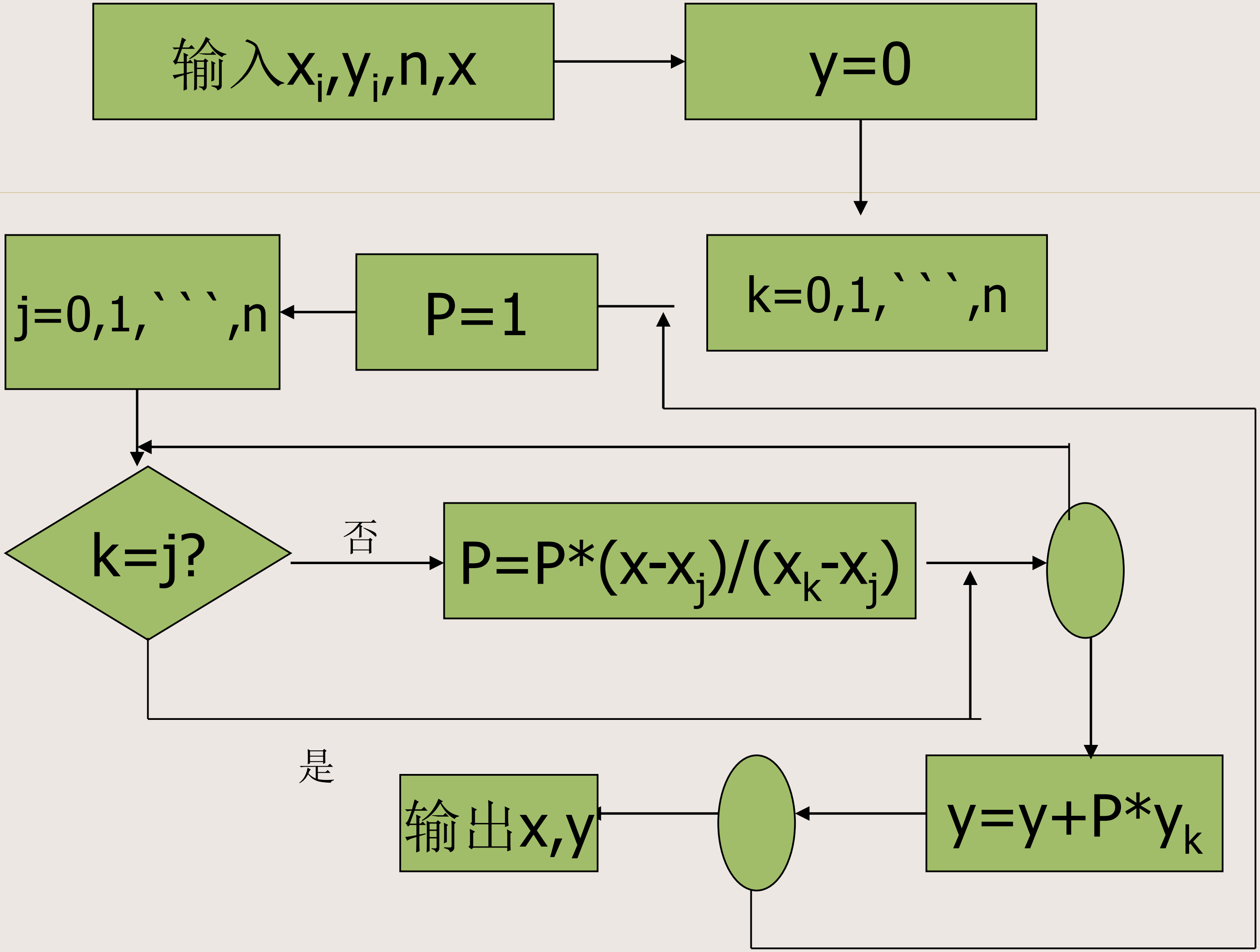

图2-4

$$l_k(x)=\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}\left(\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\right)$$

然后再通过外循环，即令k从0到n，累加得出插值结果$L_n(x)$。

2.3　插值余项

在插值区间[a,b]上用插值多项式 $P_n(x)$ 近似代替 $f(x)$，除了在插值节点x_i上没有误差外，在其它点上一般是存在有误差的。若记

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)$$

则$R_n(x)$ 就是用 $P_n(x)$ 近似代替 $f(x)$ 时所产生的截断误差，称为插值多项式$P_n(x)$ 的**余项**。

关于误差有如下定理2中的估计式。

定理2　设 $f(x)$在区间 $[a,b]$ 上有直到n+1阶导数，$x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为区间 $[a,b]$上n+1个互异的节点，$P_n(x)$ 为满足条件:

$$P_n(x_i)=f(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$$

的n次插值多项式，则对于任何 $x\in[a,b]$ 有

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \qquad \textbf{(2.9)}$$

其中 $\omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i),\zeta\in(\mathrm{a},\mathrm{b})$且依赖于 x。

证明 由插值条件 $P_n(x_i)=f(x_i)$知 $R_n(x_i)=0(i=0,1,\cdots,n)$，即插值节点都是$R_n(x)$ 的零点，故可设

$$R_n(x)=K(x)\omega_{n+1}(x) \qquad \textbf{(2.10)}$$

其中 $K(x)$为待定函数。下面求$K(x)$，对区间 $[a,b]$上异于 x_i 的任意一点 $x\neq x_i$作辅助函数

$$F(t)=f(t)-P_n(t)-K(x)\omega_{n+1}(t)$$

不难看出$F(t)$具有如下特点:

（1） $F(x)=F(x_i)=0(i=0,1,\cdots,n)$ **(2.11)**

(2) 在 $[a,b]$ 上有直到n+1阶导数，且

$$F^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-K(x)(n+1)! \qquad \text{（2.12）}$$

等式（2.11）表明 $F(t)$ 在 $[a,b]$ 上至少有n+2个互异的零点，根据罗尔(**Rolle**)定理，在 $F(t)$ 的两个零点之间 $F'(t)$ 至少有一个零点，因此，$F'(t)$ 在 (a,b) 内至少有n+1个互异的零点，对 $F'(t)$ 再应用罗尔定理，推得 $F''(t)$ 在 (a,b) 内至少有n个互异的零点，继续上述讨论，可推得 $F^{(n+1)}(t)$ 在 (a,b) 内至少有一个零点，若记为 ξ，则

于是由（2.12）式得 $F^{(n+1)}(\xi)=0$

$$f^{(n+1)}(\xi)-K(x)(n+1)!=0$$

$$K(x)=f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!$$

将它代入(2.10)即得（2.9）. 对于 $x=x_i$，（2.9）显然成立。

例2 在例1中分别用线性插值和抛物插值计算了的$\sqrt{115}$近似值，试估计它们的截断误差。

解 用线性插值求$f(x)=\sqrt{x}$ 的近似值，其截断误差由插值余项公式（2.9）知

$$R_1(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)\omega_2(x)$$

$$=-\frac{1}{8}\xi^{-3/2}(x-x_0)(x-x_1)\zeta\in[x_0,x_1]$$

现在x_0=100，x_1=121，x=115，故

$$|R_1(115)|\le\frac{1}{8}*|(115-100)(115-121)|\max_{\xi\in[100,121]}\xi^{--3/2}$$

$$=\frac{1}{8}*15*6*10^{-3}=0.01125$$

当用抛物插值求 $f(x)=\sqrt{x}$ 的近似值时，其截断误差为

$$R_2(x)=\frac{1}{3!}f'''(\zeta)\omega_3(x)$$

$$=\frac{1}{16}\zeta^{-5/2}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),\zeta\in[x_0,x_2]$$

将 $x_0=100, x_1=121, x_2=144, x=115$ 代入，即得

$$|R_2(115)|\le\frac{1}{16}|(115-100)(115-121)(115-144)|$$

$$*10^{-5}<0.0017$$

2.4 插值误差的事后估计法

在许多情况下，要直接应用余项公式（2.9）来估计误差是很困难的，下面将以线性插值为例，介绍另一种估计误差的方法。

设 $x_0<x<x_1<x_2$ 且 $f(x_i)(i=0,1,2)$ 为已知。若将用 x_0,x_1 两点作线性插值求得 $y=f(x)$ 的近似值记为 y_1，用 x_0,x_2 两点作线性插值所求得 $y=f(x)$ 的近似值记为 y_2，则由余项公式（2.9）知

$$y-y_1=\frac{1}{2}f''(\xi_1)(x-x_0)(x-x_1),\xi_1\in[x_0,x_1]$$

$$y-y_2=\frac{1}{2}f''(\xi_2)(x-x_0)(x-x_2),\xi_2\in[x_0,x_2]$$

假设$f''(x)$在区间$[x_0,x_2]$中变化不大，将上面两式相除，即得近似式

$$\frac{y-y_1}{y-y_2}\approx\frac{x-x_1}{x-x_2}$$

即
$$y-y_1\approx\frac{x-x_1}{x_2-x_1}(y_2-y_1) \qquad \text{（2.13）}$$

近似式（**2.13**）表明，可以通过两个结果的偏差y_2-y_1来估计插值误差 $y-y_1$，这种直接利用计算结果来估计误差的方法，称为**事后估计法**。

例3　　在例1中，用$x_0=100,x_1=121$做节点，算得的$\sqrt{115}$ 近似值为 $y_1=10.714$，同样，用$x_0=100,x_2=144$做节点，可算得 $\sqrt{115}$ 的另一近似值$y_2=10.682$，（**2.13**）可以估计出插值结果 y_1 的误差为:

$$\sqrt{115}-y_1 \approx \frac{115-121}{144-121}(10.682-10.714)=0.00835$$

§3 牛顿插值多项式

由线性代数可知，任何一个不高于n次的多项式，都可表示成函数 $1, x-x_0, (x-x_0)(x-x_1), \cdots, (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$ 的线性组合，即可将满足插值条件 $P(x_i)=y_i(i=0,1,\cdots,n)$ 的n次多项式写成形式

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots$$
$$+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

其中 $a_k(k=0,1,\cdots,n)$ 为待定系数。这种形式的插值多项式称为**牛顿（Newton）插值多项式**，我们把它记成 $N_n(x)$,即

$$N_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_o)(x-x_1)$$
$$+\cdots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \qquad (3.1)$$

因此，牛顿插值多项式$N_n(x)$是插值多项式$P_n(x)$的另一种表示形式,与拉格朗日插值多项式相比较，不仅克服了“增加一个节点时整个计算机工作必须重新开始”（见例1）的缺点，而且可以节省乘、除法运算次数。同时，在牛顿插值多项式中用到的差分与差商等概念，又与数值计算的其它方面有着密切的关系.

3.1　向前差分与牛顿插值公式

设函数f（x）在等距节点 $x_k = x_0 + kh(k = 0,1,\cdots,n)$ 处的函数值$f(x_k) = y_k$为已知，其中h是正常数，称为**步长**，称两个相邻点x_k和x_{k+1}处函数值之差$y_{k+1} - y_k$为函数f（x）在点x_k处以h为步长的**一阶向前差分**（简称一阶差分），记作Δy_k，即

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$$

于是，函数f（x）在各节点处的一阶差分依次为

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \Delta y_1 = y_2 - y_1, \cdots \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}。$$

又称一阶差分的差分 $\Delta^2 y_k = \Delta(\Delta y_k) = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k$

为**二阶差分**。

一般地，定义函数 f（x）在点 x_k 处的**m阶差分**为

$$\Delta^m y_k = \Delta^{m-1} y_{k+1} - \Delta^{m-1} y_k$$

为了便于计算与应用，通常采用表格形式计算差分，如**表2-1**所示。

表2-1

x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$	$\Delta^4 y_k$
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		
		Δy_3			
x_4	y_4				

在等距节点$x_k = x_0 + kh(k = 0,1,\cdots,n)$情况下，可以利用差分表示牛顿插值多项式（3.1）的系数，并将所得公式加以简化。事实上，由插值条件 $N_n(x_0) = y_0$ 立即可得 $a_0 = y_0$

再由插值条件$N_n(x_1) = y_1$ 可得

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h}$$

由插值条件 $N_n(x_2) = y_2$ 可得

$$a_2 = \frac{y_2 - y_0 - \dfrac{\Delta y_0 (x_2 - x_0)}{h}}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2hh} = \frac{\Delta^2 y_0}{2! \cdot h^2}$$

一般地，由插值条件 $N_n(x_k) = y_k$ 可得

$$a_k=\frac{\Delta^k y_o}{k!\cdot h^k}(k=1,2,\cdots,n)$$

于是，满足插值条件 $N_n(x_i)=y_i$ 的插值多项式为

$$N_n(x)=y_0+\frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0)+\frac{\Delta^2 y_0}{2!\cdot h^2}(x-x_0)(x-x_1)$$

$$+\cdots+\frac{\Delta^n y_0}{n!\cdot h^n}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

令 $x=x_0+th(t>0)$,并注意到 $x_k=x_0+kh$，则可简化为

$$N_n(x_0+th)=y_0+t\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\cdots$$

$$+\frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \qquad （3．2）$$

这个用向前差分表示的插值多项式，称为**牛顿向前插值公式**，简称**前插公式**。它适用于计算表头 x_0 附近的函数值。

由插值余项公式（2.9），可得前插公式的余项为：

$$R_n(x_0+th)=\frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{n+1}(\xi),\xi\in(x_0,x_n) \qquad (3.3)$$

例4 从给定的正弦函数表（**表2-2**左边两列）出发计算$\sin(0.12)$，并估计截断误差。

表2—2

x	$\sin x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0.1	$\boxed{0.09983}$			
		$\boxed{0.09884}$		
0.2	0.19867		$\boxed{-0.00199}$	
		0.09685		$\boxed{-0.00096}$
0.3	0.29552		-0.00295	
		0.09390		-0.00094
0.4	0.38942		-0.00389	
		0.09001		-0.00091
0.5	0.47943		-0.00480	
		0.08521		
0.6	0.56464			

解　因为0.12介于0.1与0.2之间，故取 $x_0=0.1$，此时

$t=\frac{x-x_0}{h}=\frac{0.12-0.1}{0.1}=0.2$ 。为求 $\Delta y_0,\Delta^2 y_0,\Delta^3 y_0\cdots$，

构造差分表2—2。表中长方形框中各数依次为 $\sin x$ 在 $x_0=0.1$ 处的函数值和各阶差分。若用线性插值求sin（0.12）的近似值，则由前插公式（3.2）立即可得

$$\sin(0.12)\approx N_1(0.12)=0.09983+0.2\times0.09884=0.11960$$

用二次插值得

$$\sin(0.12)\approx N_2(0.12)$$

$$=0.09983+0.2\times0.09884+\frac{0.2\times(0.2-1)}{2}\times(-0.00199)$$

$$=N_1(0.12)+0.00016=0.11976$$

用三次插值得：

$$\sin(0.12) \approx N_3(0.12)$$

$$= N_2(0.12) + \frac{0.2\times(0.2-1)\times(0.2-2)}{6}\times(-0.00096)$$

$$= 0.11971$$

因$N_3(0.12)$与$N_2(0.12)$很接近，且由差分**表2—2**可以看出，三阶差分接近于常数（即 $\Delta^4 y_0$ 接近于零），故取$N_3(0.12)=0.11971$作为 $\sin(0.12)$ 的近似值，此时由余项公式**（3.3）**可知其截断误差

$$R_3(0.12) \le \left|\frac{0.2\times(0.2-1)\times(0.2-2)\times(0.2-3)}{24}\right| \times (0.1)^4 \times \sin(0.4) < 0.00000$$

3.2 向后差分与牛顿向后插值公式

在等距节点$x_k = x_0 + kh(k=0,1,\cdots,n)$ 下，　除了向前差分外，还可引入向后差分和中心差分，其定义和记号分别如下：

$y = f(x)$在点x_k 处以h为步长的一阶向后差分和**m阶向后差分**分别为

$$\nabla y_k = y_k - y_{k-1}$$

$$\nabla^m y_k = \nabla^{m-1} y_k - \nabla^{m-1} y_{k-1} (m = 2,3,\cdots)$$

$y = f(x)$在x_k 点处以为步长的一阶中心差分和m阶中心差分分别为

$$\delta y_k = y_{k+\frac{1}{2}} - y_{k-\frac{1}{2}}$$

$$\delta^m y_k = \delta^{m-1} y_{k+\frac{1}{2}} - \delta^{m-1} y_{k-\frac{1}{2}} (m = 2,3,\cdots)$$

其中

$$y_{k+\frac{1}{2}} = f\left(x_k + \frac{h}{2}\right), y_{k-\frac{1}{2}} = f\left(x_k - \frac{h}{2}\right).$$

各阶向后差分与中心差分的计算，可通过构造向后差分表与中心差分表来完成(参见表2－2)。

利用向后差分，可简化牛顿插值多项式（3.1），导出与牛顿前插公式(3.2)类似的公式，即，若将节点的排列次序看作$x_n, x_{n-1} \ldots x_0$，那么(3.1)可写成

$$N_n(x)=b_0+b_1(x-x_n)+b_2(x-x_n)(x-x_{n-1})$$
$$+\cdots+b_n(x-x_n)(x-x_{n-1})\cdots(x-x_1)$$

根据插值条件 $N_n(x_i)=y_i(i=n,n-1,\cdots,1,0)$，可得到一个用向后差分表示的插值多项式

$$N_n(x_n+th)=y_n+t\nabla y_n+\frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 y_n$$
$$+\cdots+\frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!}\nabla^n y_n \qquad (3.4)$$

其中t<0，插枝多项式**(3.4)**称为**牛顿向后插值公式**，简称后插公式。它适用于计算表尾 x_n 附近的函数值。由插值余项公式（2.9），可写出后插公式的余项

$$R_n(x_n+th)=\frac{t(t+1)\cdots(t+n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)\quad(\xi\in(x_0,x_n))$$

(3.5)

例 5 已知函数表同例 4，计算 $\sin(0.58)$，并估算截断误差。

解 因为 0 .58位于表尾 $x_5=0.6$ 附近，故用后插公式（3.4）计算 sin(0.58)的近似值。

一般地为了计算函数在 x_5 处的各阶向后差分，应构造向后差分表。但由向前差分与向后差分的定义可以看出，对同一函数表来说，构造出来的向后差分表与向前差分表在数据上完全相同。因此，表 2 - 2 用“——”线标出的各数依次给出了 $\sin x$ 在 $x_5=0.6$ 处的函数值和向后差分值。因三阶向后差分接近于常数，故用三次插值进行计算，且 $t=(x-x_5)/h=(0.58-0.6)/0.1=-0.2$ ，于是由后插公式（3.4）得

$$
\begin{aligned}
\sin(0.58) \approx N_3(0.58) &= 0.56464+(-0.2)\times 0.08521 \\
&+\frac{(-0.2)\times(-0.2+1)}{2}\times(-0.00480) \\
&+\frac{(-0.2)\times(-0.2+1)\times(-0.2+2)}{6} \\
&\times(-0.00091)=0.54802
\end{aligned}
$$

因为在整个计算中，只用到四个点$x=0.6,0.5,0.4,0.3$ 上的函数值，故由余项公式（3 .5）知其截断误差

$$
\begin{aligned}
|R_3(0.58)| \le \left|\frac{-0.2\times(-0.2+1)\times(-0.2+2)\times(-0.2+3)}{24}\right| \\
\times(0.1)^4\times\sin(0.6)<0.000002
\end{aligned}
$$

3.3 差商与牛顿基本插值多项式

当插只节点非等距分布是，就不能引入差分来简化牛顿插值多项式，此时可用差商这个新概念来解决。

设函数$f(x)$在一串互异的点 x_{i_0}、x_{i_1}、$x_{i_2}\cdots$ 上的值依次为

$$f(x_{i_0})、f(x_{i_1})、f(x_{i_2})\cdots$$

。我们称函数值之差 $f(x_{i_1})-f(x_{i_0})$ 与自变量之差 $x_{i_1}-x_{i_0}$ 的比值

$$\frac{f(x_{i_1})-f(x_{i_0})}{x_{i_1}-x_{i_0}}$$

为函数$f(x)$关于x_{i_1},x_{i_0} 点的一阶差商，记作 $f[x_{i_0},x_{i_1}]$

例如

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0},f[x_1,x_2]=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},\cdots$$

称一阶差商的差商

$$\frac{f[x_{i_1},x_{i_2}]-f[x_{i_0},x_{i_1}]}{x_{i_2}-x_{i_0}}$$

为函数$f(x)$关于点 x_{i_0}、x_{i_1}、x_{i_2} 的二阶差商（简称二阶差商），记作 $f[x_{i_0},x_{i_1},x_{i_2}]$，例如

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

一般地，可通过函数$f(x)$的m-1阶差商定义的m阶差商如下：

$$f[x_{i_0},x_{i_1},\cdots x_{i_m}]=\frac{f[x_{i_1},\cdots,x_{i_m}]-f[x_{i_0},\cdots,x_{i_{m-1}}]}{x_{i_m}-x_{i_0}}$$

差商计算也可采用表格形式（称为差商表），如表2—3所示，

表2—3

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
x_0	$f(x_0)$			
		$f[x_0,x_1]$		
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0,x_1,x_2]$	
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1,x_2,x_3]$	
		$f[x_2,x_3]$		
x_3	$f(x_3)$			

差商具有下列重要性质（证明略）：

（1） 函数 $f(x)$ 的m阶差商 $f[x_0,x_1,\cdots,x_m]$ 可由函数值 $f(x_0)$、$f(x_1)$、$\cdots$、$f(x_m)$ 的线性组合表示，且

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_m]=\sum_{i=0}^{m}\frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_m)}$$

（2） 差商具有对称性，即任意调换节点的次序，不影响差商的值。

例如

$$f[x_0,x_1,x_2]=f[x_1,x_0,x_2]=f[x_1,x_2,x_0]=\cdots.$$

（3）当 $f^{(m)}(x)$ 在包含节点 $x_{i_j}\ (j=0,1,\cdots,m)$ 的某个区间上存在时，在 $x_{i_0},x_{i_1},\cdots x_{i_m}$ 之间必有一点 ξ，使

$$f[x_{i_0},\ x_{i_1},\cdots,x_{i_m}]=\frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}$$

（4）在等距节点 $x_k = x_0 + kh(k=0,1,\cdots,n)$ 情况下，可同时引入 $m(m \le n)$ 阶差分与差商，且有下面关系：

$$f[x_0, x_1, \cdots x_m] = \frac{\Delta^m y_0}{m! \cdot h^m}$$

$$f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-m}] = \frac{\nabla^m y_n}{m! \cdot h^m}$$

引入差商的概念后，可利用差商表示牛顿插值多项式（3.1）的系数。事实上，从插值条件出发，可以象确定前插公式中的系数那样，逐步地确定（3.1）中的系数

$$\begin{cases} a_0 = f(x_0) \\ a_k = f[x_0, x_1, \cdots, x_k] \quad (k=1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

故满足插值条件 $N_n(x_i) = y_i (i=0,1,\cdots,n)$ 的n次插值多项式为

$$N_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$
$$+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \qquad (3.6)$$

（3.6）称为**牛顿基本插值多项式**，常用来计算非等距节点上的函数值。

例 6 试用牛顿基本插值多项式按例 1 要求重新计算$\sqrt{115}$的近似值。

解 先构造差商表。

x	$\sqrt{x}$	一阶商差	二阶商差
100	10		
		0.047619	
121	11		-0.000094
		0.043478	
144	12		

由上表可以看出牛顿基本插值多项式(3.6)中各系数依次为

$$f(x_0)=10$$

$$f[x_0,x_1]=0.047619$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=-0.000094$$

故用线性插值所得的近似值为

$$\sqrt{115}\approx N_1(115)=10+0.047619\times(115-100)=10.7143$$

用抛物插值所求得的近似值为

$$\sqrt{115}\approx N_2(115)$$

$$=N_1(115)+(-0.000094)\times(115-100)\times(115-121)$$

$$=10.7228$$

所得结果与例1相一致。比较例1和例6的计算过程可以看出，与拉格朗日插值多项式相比较，牛顿插值多项式的优点是明显的。

由插值多项式的存在唯一性定理知，满足同一组插值条件的拉格朗日插值多项式（2. 4）与牛顿基本插值多项式（3. 6）是同一多项式。因此，余项公式（2. 9）也适用于牛顿插值。但是在实际计算中，有时也用差商表示的余项公式

$$R_n(x) = f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x]\omega_{n+1}(x) \qquad (3.7)$$

来估计截断误差（证明略）。

注意： 上式中的n+1阶商差 $f[x_0, x_1, \cdots x_m]$ 与 $f(x)$ 的值有关，故不能准确地计算出 $f[x_0, x_1, \cdots x_m]$ 的精确值，只能对它作一种估计。例，当四阶差商变化不大时，可用 $f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ 近似代替 $f[x_0, x_1, x_2, x_3, x]$。

§4　分段低次插值

例2、例4表明，适当地提高插值多项式的次数，有可能提高计算结果的准确程度。但是决不可由此提出结论，认为插值多项式的次数越高越好。例如，对函数

$$f(x)=\frac{1}{1+25x^2}\ (-1\le x\le 1)$$

先以 $x_i=-1+\frac{2}{5}i(i=0,1,\cdots 5)$ 为节点作五次插值多项式$P_5(x)$，再以

$x_i=-1+\frac{1}{5}i(i=0,1,\cdots 10)$ 为节点作十次插值多项式 $P_{10}(x)$，并将曲

线 $f(x)=\dfrac{1}{1+25x^2},y=P_5(x),y=P_{10}(x)(x\in[-1,1])$ 描

绘在同一坐标系中，如图2−5所示。

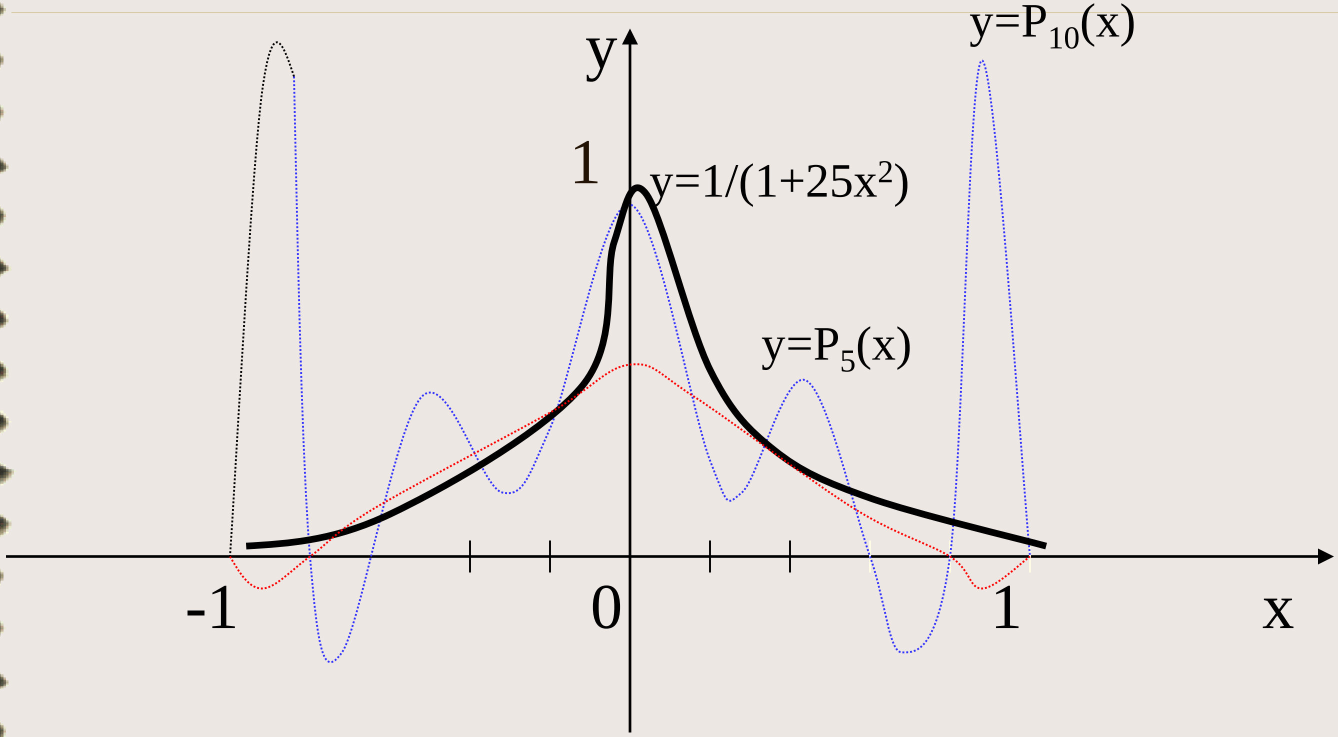

图2-5

由上图可看出，虽然在局部范围中，例如在区间[-0.2，0.2]中，比 $P_{10}(x)$ 较好地逼近 $f(x)$，但从整体上看，$P_{10}(x)$ 并非处处都比 $P_5(x)$ 较好地逼近 $f(x)$，尤其是在区间[-1，1]的端点附近。进一步的分析表明，当n增大时，该函数在等距接点下的高次插值多项式 $P_n(x)$，在[-1，1]两端会发生激烈的振荡。这种现象称为**龙格（Runge)现象**。这表明，**在大范围内使用高次插值，逼近的效果可能不理想的。**

另一方面，插值误差除来自截断误差外，还来自初始数据的误差和计算过程中的舍入误差。插值次数越高，计算工作越大，积累误差也可能越大。

因此，在实际计算中，常用分段低次插值进行计算，即把整个插值区间分成若干小区间，在每个小区间上进行低次插值。

例如，当给定n+1个点 $x_0<x_1<\cdots<x_n$ 上的函数值 $y_0<y_1<\cdots<y_n$ 后，若要计算点 $x\neq x_i$ 处函数值 $f(x)$ 的近似值，可先选取两个节点 x_{i-1},x_i 使 $x\in[x_{i-1},x_i]$ 然后在小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上作线性插值，即得

$$f(x) \approx P_1(x) = y_{i-1}\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + y_i\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \qquad (4.1)$$

这种分段低次插值叫**分段线性插值**。在几何上就是用折线代替曲线，如**图2-6**所示。故分段线性插值又称**折线插值**.

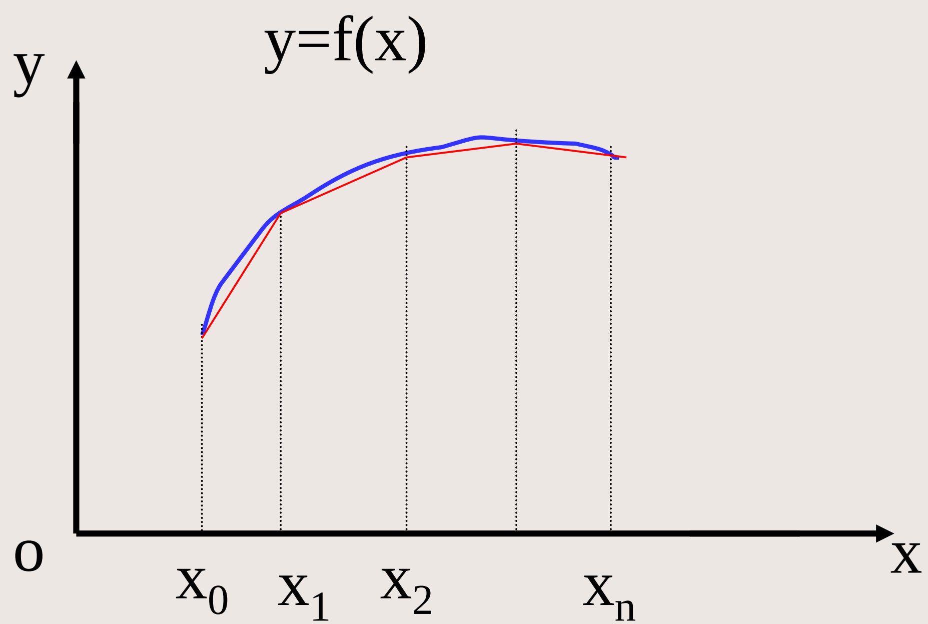

图2-6

类似地，为求$y=f(x)$的近似值，也可选取距点x最近的三个节点x_{i-1},x_i,x_{i+1}进行二次插值，即取

$$f(x)\approx P_2(x)=\sum_{k=i-1}^{i+1}[y_k\prod_{\substack{j=i-1\\ j\neq k}}^{i+1}(\frac{x-x_j}{x_k-x_j})] \qquad (4.2)$$

这种分段低次插值叫**分段二次插值**。在几何上就是用分段抛物线代替曲线，故分段二次插值又称**分段抛物插值**。为了保证x_{i-1},x_i,x_{i+1}是距点x最近的三个节点，**（4.2）**中的i可通过下面方法确定:

$$i=\begin{cases}1 & x_0\le x\le \frac{1}{2}(x_1+x_2)\\ j & \frac{1}{2}(x_{j-1}+x_j)\le x\le \frac{1}{2}(x_j+x_{j+1})\\ n-1 & \frac{1}{2}(x_{n-2}+x_{n-1})\le x\le x_n\end{cases}$$

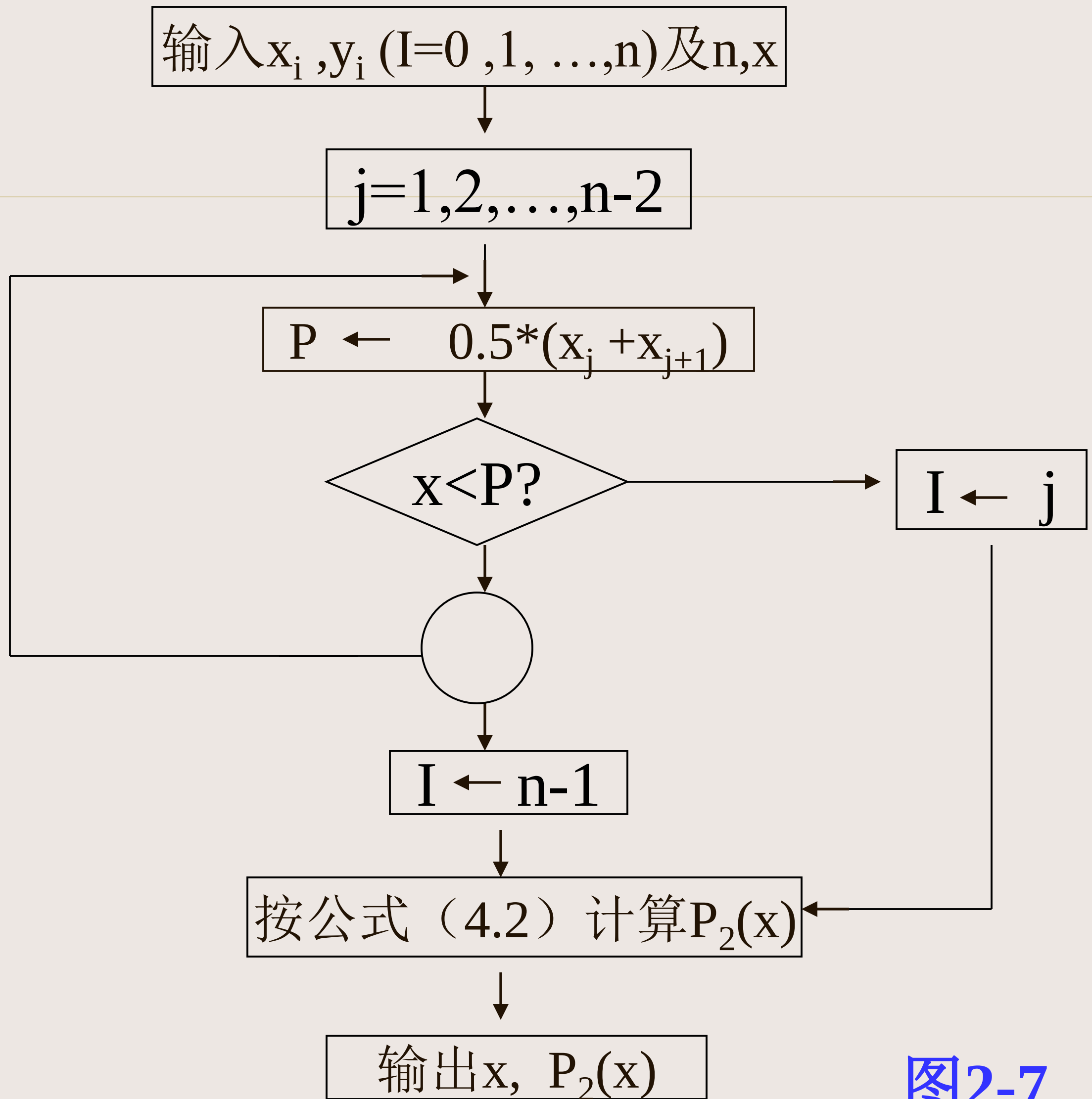

图2-7

§5 三次样条插值

分段低次插值虽然具有计算简单、稳定性好、收敛性有保证且易在电子计算机上实现等优点，但它只能保证各小段曲线在连接点上的连续性，却不能保证整条曲线的光滑性(如图2-6中的折线)，这就不能满足某些工程技术上的要求。从六十年代开始，首先由于航空、造船等工程设计的需要而发展起来的

所谓样条（Spline)的插值方法，既保留了分段低次插值多项式的各种优点，又提高了插值函数的光滑性。今天，样条插值方法已成为数值逼近的一个极其重要的分支，在许多领域里得到越来越广泛的应用。

本节介绍应用最广泛且具有二阶连续导数的三次样条插值函数。

5.1 三次样条插值函数的定义

对于给定的函数表

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

其中 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ ，若 函数

$S(x)$ 满足:

（1）$S(x)$ 在每个子区间 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$

上是不高于三次的多项式；

（2）$S(x),S'(x),S''(x)$ 在[a,b]上连续；

（3）满足插值条件 $S(x_i)=y_i(i=0,1,\cdots,n)$

则称 $S(x)$ 为函数 $f(x)$ 关于节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的三次样条插值。

5.2　边界条件问题的提出与类型

注：单靠一张函数表是不能完全确定一个三次样条插值函数的。

事实上，由条件（1）知，三次样条插值函数 $S(x)$是一个分段三次多项式，

若用 $S_i(x)$ 表示它在第 i 个子区间$[x_{i-1}, x_i]$ 上的表达式，则 $S_i(x)$ 形如：

$$S_i(x) = a_{i0} + a_{i1}x + a_{i2}x^2 + a_{i3}x^3, x \in [x_{i-1}, x_i]$$

这里有四个待定系数$a_{ij}(j=0,1,2,3)$。子区间共有n个，确定$S(x)$需要确定$4n$个待定系数。

另一方面，要求分段三次多项式$S(x)$及其导数$S'(x),S''(x)$在整个插值区间$[a,b]$上连续，只要在各子区间的端点

$x_i(i=1,2,\cdots,n-1)$连续即可。故由条件（2），（3）可得待定系数应满足的$4n-2$个方程为：

$$\begin{cases} S(x_i-0)=S(x_i+0) & (i=1,2,\dots,n-1) \\ S'(x_i-0)=S'(x_i+0) & (i=1,2,\dots,n-1) \\ S''(x_i-0)=S''(x_i+0) & (i=1,2,\dots,n-1) \\ S(x_i)=y_i & (i=0,1,\dots,n) \end{cases} \qquad \textbf{(5.1)}$$

由此可以看出，要确定4***n***个待定系数还缺少两个条件，这两个条件通常在插值区间$[a,b]$的边界点a,b处给出，称为边界条件。边界条件的类型很多，常见的有：

（1）给定一阶导数值 $S'(x_0)=y_0',S'(x_n)=y_n'$

（2）给定二阶导数值$S''(x_0)=y_0'',S''(x_n)=y_n''$

特别地，$S''(x_0)=S''(x_n)=0$ 称为**自然边界条件**，满足**自然边界条件**的三次样条插值函数称为**自然样条插值函数**。

（3）当 $f(x)$是周期为$b-a$的函数时，则要求 $S(x)$ 及其导数都是以$b-a$为周期的函数，相应的边界条件为

$$S'(x_0+0)=S'(x_n-0),$$
$$S''(x_0+0)=S''(x_n-0)$$

5.3 三次样条插值函数的求法

虽然可以利用方程组（5.1）和边界条件求出所有待定系数 a_{ij} 从而得到三次样条插值函数$S(x)$在各个子区间$[x_{i-1}, x_i]$的表达式$S_i(x)$。但是，这种做法的计算工作量大，不便于实际应用。下面介绍一种简便的方法。

设在节点x_i处$S(x)$的二阶导数为

$$S''(x_i) = M_i (i = 0, 1, \cdots, n)$$

因为在子区间$[x_{i-1},x_i]$上 $S(x)=S_i(x)$ 是不高于三次的多项式，其二阶导数必是线性函数（或常数）。于是，有

$$S_i''(x)=M_{i-1}\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}+M_i\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}},x\in[x_{i-1},x_i]$$

记 $h_i=x_i-x_{i-1}$ 则有

$$S_i''(x)=M_{i-1}\frac{x_i-x}{h_i}+M_i\frac{x-x_{i-1}}{h_i}$$

连续积分两次得：

$$S_i(x)=M_{i-1}\frac{(x_i-x)^3}{6h_i}+M_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i}$$
$$+A_i(x-x_{i-1})+B_i \qquad \textbf{(5.2)}$$

其中A_i, B_i为积分常数。利用插值条件

$$S_i(x_{i-1})=y_{i-1}, S_i(x_i)=y_i$$

易得

$$A_i(x)=\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}-\frac{1}{6}(M_i-M_{i-1})$$

$$B_i(x)=y_{i-1}-\frac{1}{6}M_{i-1}h_i^2$$

将它们代入（5.2），整理得

$$S_i(x)=M_{i-1}\frac{(x_i-x)^3}{6h_i}+M_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i}$$

$$+(y_{i-1}-\frac{M_{i-1}}{6}h_i^2)\frac{x_i-x}{h_i}+(y_i-\frac{M_i}{6}h_i^2)\frac{x-x_{i-1}}{h_i}$$

$$(x\in[x_{i-1},x_i],i=1,2,\cdots,n) \qquad (5.3)$$

综合以上讨论可知，只要确定

$$M_i(i=0,1,\cdots,n)$$

这n+1个值，就可定出三次样条插值函数。

为了求出 $M_i(i=0,1,\cdots,n)$ ，利用一阶函数在子区间连接点上连续的条件

即

$$S'(x_i-0)=S'(x_i+0) \quad \text{（5.4）}$$

由（5.3）可得 $S_i'(x_i-0)=S'_{i+1}(x_i+0)$

$$S_i'(x) = -M_{i-1}\frac{(x_i - x)^2}{2h} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i}$$

$$+\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{n_i}{6}(M_i - M_{i-1}) \qquad \textbf{(5.5)}$$

故

$$S_i'(x_i - 0) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + \frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i}{3}M_i \qquad \textbf{(5.6)}$$

将（**5.5**）中的 i 改为$i+1$，即得 $S'(x)$在子区间 $[x_i, x_{i+1}]$上的表达式$S_{i+1}'(x)$，并由此得：

$$S'_{i+1}(x_i+0)=\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{h_{i+1}}{3}M_i-\frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} \quad (5.7)$$

将(5.6),(5.7)代入(5.4)整理后得

$$\frac{h_i}{6}M_{i-1}+\frac{h_i+h_{i+1}}{3}M_i+\frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1}=\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}$$

两边同乘以 $\frac{6}{h_i+h_{i+1}}$ ，即得方程组

$$\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}M_{i-1}+2M_i+\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}M_{i+1}$$

$$=\frac{6}{h_i+h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\right)(i=1,2,\cdots,n-1)$$

若记

$$\begin{cases} \mu_i = \dfrac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \lambda_i = \dfrac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} = 1 - \mu_i \\ g_i = \dfrac{6}{h_i + h_{i+1}}\left(f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]\right) \\ (i = 1, 2, \cdots, n-1) \end{cases} \quad \textbf{(5.8)}$$

则所得方程组可简写成

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = g_i (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

即

$$
\begin{cases}
\mu_1 M_0 + 2M_1 + \lambda_1 M_2 = g_1 \\
\mu_2 M_1 + 2M_2 + \lambda_2 M_3 = g_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mu_{n-1} M_{n-2} + 2M_{n-1} + \lambda_{n-1} M_n = g_{n-1}
\end{cases}
\qquad \textbf{(5.9)}
$$

这是一个含有 n+1个未知数、n-1 个方程的线性方程组。要确定M_i的值，还需用到边界条件。在第 (1) 种边界条件下，由于

$$S'(x_0) = y'_o \text{ 和 } S'(x_n) = y'_n$$

已知，可以得到包含M_i 另外两个线性方程。由(5.5)知，$S(x)$在子区间$[x_0, x_1]$上的导数为

$$S_1'(x) = -M_0 \frac{(x_1 - x)^2}{2h_1} + M_1 \frac{(x - x_0)^2}{2h_1} + \frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{h_1}{6}(M_1 - M_0)$$

故由条件 $S'(x_0) = y_o'$ 立即可得

$$y_0' = -M_0 \frac{h_1}{2} + \frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{h_1}{6}(M_1 - M_0)$$

即

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - y_0'\right) \qquad (5.10)$$

同理，由条件 $S'(x_n) = y_n'$ 可得

$$M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_n}\left(y_n' - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right) \qquad (5.11)$$

将(5.9)、(5.10)、(5.11)合在一起，即得确定 $M_0, M_1, \cdots, M_n$ 的线性方程组：

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix} \quad \textbf{(5.12)}$$

其中

$$\begin{cases} g_0 = \dfrac{6}{h_1}\left(f[x_0, x_1] - y_0'\right) \\ g_n = \dfrac{6}{h_n}\left(y_n' - f[x_{n-1}, x_n]\right) \end{cases} \quad \textbf{(5.13)}$$

在第(2) 种边界条件下，由

$$M_0 = S''(x_0) = y_0'' \quad M_n = S''(x_n) = y_n''$$

已知，在方程组**(5.13)**中实际上只包含有***n*-1**个未知数 $M_1, M_2, \cdots M_{n-1}$ ，并且可以改写成

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 - \mu_1 y_0'' \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-2} \\ g_{n-1} - \lambda_{n-1} y_n'' \end{bmatrix} \qquad \textbf{(5.14)}$$

在第(3)种边界条件下，由

$$S'(x_0+0)=S'(x_n-0)$$

直接可得

$$M_0 = M_n \qquad \textbf{(5.15)}$$

由条件 $S''(x_0+0)=S''(x_n-0)$ 可得

$$-M_0\frac{h_1}{2}+\frac{y_1-y_0}{h_1}-\frac{h_1}{6}(M_1-M_0)$$

$$=M_n\frac{h_n}{2}+\frac{y_n-y_{n-1}}{h_n}-\frac{h_n}{6}(M_n-M_{n-1})$$

注意到 $y_0=y_n$ 和 $M_0=M_n$，上式整理后得

$$\frac{h_1}{h_1+h_n}M_1+\frac{h_n}{h_1+h_n}M_{n-1}+2M_n$$

$$=\frac{6}{h_1+h_n}\left(\frac{y_1-y_0}{h_1}-\frac{y_n-y_{n-1}}{h_n}\right)$$

若记

$$\mu_n=\frac{h_n}{h_1+h_n},\lambda_n=\frac{h_1}{h_1+h_n}=1-\mu_n$$

$$g_n=\frac{6}{h_1+h_n}\left(f[x_0,x_n]-f[x_{n-1},x_n]\right)$$

则所得方程可简写成

$$\lambda_n M_1 + \mu_n M_{n-1} + 2M_n = g_n \quad \textbf{(5.16)}$$

将 **(5.9)**、**(5.15)** 、**(5.16)** 合在一起，即得确定

$M_1, M_2, \cdots M_n$ 的线形方程组：

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix} \quad \textbf{(5.17)}$$

利用线性代数知识，可以证明方程组 (5.12)、(5.14) 及(5.17)的系数矩阵都是非奇异的，从而都有唯一确定的解。

针对不同的边界条件，解相应的方程组(5.12)、 (5.14)或(5.17) ，求出

$$M_0, M_2, \cdots M_n$$

的值，将它们代入（5.3），就可以得到$S(x)$在各子区间上的表达式。综上分析，有

定理3 对于给定的函数表

x	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
$y=f(x)$	y_0	y_1	$\ldots$	y_n

$$\left(a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\right)$$

满足第（1）或第（2）或第（3）种边界条件的三次样条插值函数是**存在且唯一的**。

三次样条插值函数$s(x)$的具体求解过程，在下面例子中给出了详细说明。

例 7 已知函数 $y=f(x)$ 的函数值如下

x	-1.5	0	1	2
y	0.125	-1	1	9

在区间$[-1.5,2]$上求三次样条插值函数$S(x)$，使它满足边界条件：

$$S'(-1.5)=0.75, S'(2)=14$$

解 先根据给定数据和边界条件算出 μ_i,λ_i与g_i写出确定 M_i的线性方程组。

在本例中，给出的是第（1）种边界条件，确定 $M_i(i=0,1,2,3)$ 的线性方程组形如**（5.12）**。由所给函数表知

$$h_1=1.5 \qquad h_2=1 \qquad h_3=1$$

$$f[x_0,x_1]=-0.75 \qquad f[x_1,x_2]=2 \qquad f[x_2,x_3]=8$$

于是由 μ_i,λ_i 与 $g_i(i=1,2,\ldots,n-1)$ 的算式**(5.8)**知

$$\mu_1=0.6 \qquad \mu_2=0.5$$

$$\lambda_1=0.4 \qquad \lambda_2=0.5$$

$$g_1=6.6 \qquad g_2=18$$

由第（1）边界条件下g_0与g_n的计算公式

（5.13）知

$$g_0=\frac{6}{h_1}\left(f[x_0,x_1]-y_0'\right)=-6$$

$$g_3=\frac{6}{h_3}\left(y_3'-f[x_2,x_3]\right)=36$$

故确定 M_0,M_1,M_2与M_3 的方程组为

$$\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0.6&2&0.4&0\\0&0.5&2&0.5\\0&0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_0\\M_1\\M_2\\M_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\6.6\\18\\36\end{bmatrix} \qquad (5.18)$$

然后解所得方程组，得到$S''(x)$在各节点x_i上的值M_i。在本例中，解（5.18）得

$$M_0 = -5, M_1 = 4, M_2 = 4, M_3 = 16$$

最后将所得M_i代入（5.3），即得$S(x)$在各子区间上的表达式$S_i(x)(i = 1,2,\ldots,n)$。

由（5.3）知，$S(x)$在$[x_0, x_1]$上的表达式为

$$S_1(x) = M_0\frac{(x_1 - x)^3}{6h_1} + M_1\frac{(x - x_0)^3}{6h_1} + \left(y_0 - \frac{M_0}{6}h_1^2\right)\frac{x_1 - x}{h_1} + \left(y_1 - \frac{M_1}{6}h_1^2\right)\frac{x - x_0}{h_1}$$

在本例中，将

$$x_0=-1.5, x_1=0, y_0=0.125, y_1=-1,$$
$$M_0=-5, M_1=4$$

代入，整理后得

$$S_1(x)=x^3+2x^2-1 \qquad x\in[-1.5,0]$$

同理可得

$$S_2(x)=2x^2-1 \qquad x\in[0,1]$$
$$S_3(x)=2x^3-4x^2+6x-3 \qquad x\in[1,2]$$

故所求三次样条插值函数为

$$S(x)=\begin{cases} x^3+2x^2-1 & (-1.5\le x<0) \\ 2x^2-1 & (0\le x<1) \\ 2x^3-4x^2+6x-3 & (1\le x\le 2) \end{cases}$$

第（1）边界条件下计算三次样条插值函数 S（x）在 x 处函数值 的程序框图如图2-8

输入$x_i, y_i (i=0,1,\cdots n)$及$y_0', y_n', n, x$

↓

计算h_i与$f[x_{i-1}, x_i] (i=1,2,\cdots n)$

↓

按公式(5.13)计算g_0与g_n

↓

按公式(5.8)计算$\lambda_i, \mu_i, g_i (i=1,2,\cdots .n-1)$

↓

解方程组(5.12)得$M_i (i=0,1,\cdots n)$

↓

根据x确定(5.3)式中的i并按(5.3)式计算$s(x)$值

↓

输出$x, s(x)$

图2-8

上述求三次样条插值函数的方法，其基本思路和特点是:

先利用一阶导数 $S'(x)$ 在内节点

$$x_i(i=1,2,\cdots.n-1)$$

上的连续性以及边界条件，列出确定二阶导数 $M_i=S''(x_i)(i=0,1,\ldots,n)$ 的线性方程组（在力学上称为三弯矩方程组），并由此解出 M_i，然后用 M_i 来表达 $s(x)$。

通过别的途径也可求三次样条插值函数。例如，可以先利用二阶导数在内节点上的连续性以及边界条件，列出确定一阶导数$m_i=S'(x_i)(i=0,1,\dots,n)$的线性方程组（在力学上称为三转角方程组），并由此解出m_i，然后用m_i来表达$S(x_i)$。在有些情况下，这种表达方法与前者相比较，使用起来更方便[1]。

§6　数值微分

作为多项式插值的应用，本节介绍两种求函数导数的近似值的方法。

6.1　利用插值多项式求导数

若函数 $f(x)$ 在节点 $x_i\left(i=0,1,\ldots,n\right)$ 处的函数值已知，就可作 $f(x)$ 的 n 次插值多项式 $P_n(x)$，并用 $P_n(x)$ 近似代替 $f(x)$，即

$$f(x)\approx P_n(x) \qquad \textbf{(6.1)}$$

由于 $P_n(x)$ 是多项式，容易求导数，故对应于 $f(x)$ 的每一个插值多项式 $P_n(x)$，就易建立一个数值微分公式

$$f'(x) \approx P'_n(x)$$

这样建立起来的数值微分公式，统称为**插值型微分公式**。

必须注意，即使 $P_n(x)$ 与 $f(x)$ 的近似程度非常好，导数 $f'(x)$ 与 $P_n'(x)$ 在某些点上的差别仍旧可能很大，因而，

在应用数值微分公式时，要重视对误差的分析。由插值余项公式（2.9）知

$$f'(x)-p_n'(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}'(x)+\frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!}\frac{d}{dx}\left[f^{(n+1)}(\xi)\right] \quad （6.2）$$

由于式中 ξ 是 x 的未知函数，故 $x \neq x_i$ 时，无法利用上式误差 $f'(x)-p_n'(x)$ 作出估计。但是，如果我们限定求某个节点 x_i 处的导数值，那么（6.2）右端第二项之值应为零，此时有

$$f'(x_i)-p_n'(x_i)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}'(x_i)$$

若将它写成带余项的数值微分公式，即

$$f'(x_i)=p_n'(x_i)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}'(x_i) \qquad \textbf{（6.3）}$$

其中ξ在 $x_0,x_1\cdots x_n$之间。该式右端由两部分，即导数的近似值和相应的截断误差组成。

由（6.3), 作为特例，当n=1时，插值节点为 x_0, x_1，记$h = x_1 - x_0$得带余式的两点公式

$$\begin{cases} f'(x_0) = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{h} - \dfrac{h}{2} f''(\xi) \\ f'(x_1) = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{\mathrm{h}} + \dfrac{h}{2} f''(\xi) \end{cases} \quad (6.4)$$

$$\xi \in [x_0, x_1]$$

前一公式的实质是用$f(x)$在x_0处的向前差商（分子是向前差分的差商）作为

$f'(x_0)$的近似值，后一公式则是用 $f(x)$ 在

x_1 处的向后差商作为 $f'(x_1)$ 的近似值。

当n=2且节点为 $x_k = x_0 + kh(k = 0,1,2)$时，

由**(6.3)**可得带余项的三点公式

$$\begin{cases} f'(x_0) = \dfrac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)] + \dfrac{h^2}{3} f'''(\xi) \\ f'(x_1) = \dfrac{1}{2h}[-f(x_0) + f(x_2)] - \dfrac{h^2}{6} f'''(\xi) \\ f'(x_2) = \dfrac{1}{2h}[f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)] + \dfrac{h^2}{3} f'''(\xi) \end{cases}$$

$$\xi \in [x_0, x_2] \qquad (6.5)$$

中间一个公式的实质是用 $f(x)$ 在 x_1 处的中心差商作为 $f'(x_1)$ 的近似值，它与前后两公式相比较，其优越性是显然的。

用插值多项式 $P_n(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似函数，还可用来建立高阶的的数值微分公式。例如带余式的二阶三点公式

$$
\begin{cases}
f''(x_0)=\dfrac{1}{h^2}\left[f(x_0)-2f(x_1)+f(x_2)\right]+\left[-hf'''(\xi_1)+\dfrac{h^2}{6}f^{(4)}(\xi_2)\right] \\
f''(x_1)=\dfrac{1}{h^2}\left[f(x_0)-2f(x_1)+f(x_2)\right]-\dfrac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi_2) \\
f''(x_2)=\dfrac{1}{h^2}\left[f(x_0)-2f(x_1)+f(x_2)\right]+\left[hf'''(\xi_1)-\dfrac{h^2}{6}f^{(4)}(\xi_2)\right]
\end{cases}
\qquad (6.6)
$$

6.2 利用三次样条插值函数求导

由§5知，对于给定函数表

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$y=f(x)$	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

$$\left(a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\right)$$

和适当的边界条件，可以写出三次样条插值公式 $S(x)$，并用 $S(x)$ 近似代替 $f(x)$，即

$$f(x)\approx S(x) \qquad x\in[a,b]$$

由于 $S(x)$ 是一个分段三次多项式，在各子区间 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$ 上容易求出导数，故可建立数值微分公式

$$f'(x)\approx S_i'(x)=\frac{1}{2h_i}\left[M_i(x-x_{i-1})^2-M_{i-1}(x_i-x)^2\right]$$

$$+f[x_{i-1},x_i]+\frac{h_i}{6}(M_{i-1}-M_i) \qquad \textbf{(6.7)}$$

$$f''(x)\approx S_i''(x)=\frac{1}{h_i}[M_i(x-x_{i-1})+M_{i-1}(x_i-x)]$$

$$x\in[x_{i-1},x_i],i=1,2,\cdots,n \qquad \textbf{(6.8)}$$

例3 利用函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+25x^2}$ 在节点 $x_i=-1+0.1i\,(i=0,1,\cdots,20)$ 上的函数值和边界条件

$$S'(-1)=0.0740,\quad S'(1)=-0.0740$$

构造三次样条插值公式 $S(x)$，并用它来计算 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 在下列点 $x_k=-1+0.02k$ $(k=0,1,2,\ldots,100)$ 处的近似值。计算结果如表2-4。

表2-4

x	近似值		准确值	
	S(x)	S'(x)	f(x)	f'(x)
−1. 00	0. 03846	0. 074	0. 03846	0. 07639
−0. 92	0. 04513	0. 09369	0. 04513	0. 09367
−0. 84	0. 05365	0. 1209	0. 05365	0. 1209
−0. 76	0. 06476	0. 1594	0. 06477	0. 1594
−0. 68	0. 07961	0. 2125	0. 07962	0. 2155
−0. 60	0. 1000	0. 3000	0. 1000	0. 3000
−0. 52	0. 1289	0. 4319	0. 1289	0. 4318
−0. 44	0. 1711	0. 6457	0. 1712	0. 6451
−0. 36	0. 2359	1.003	0.2358	1.001
−0. 28	0. 3375	1.579	0.3378	1.598
−0. 20	0. 5000	2.563	0.5000	2.500
−0. 12	0. 7372	3.157	0.1353	3.244
−0. 04	0. 9594	1.885	0.9615	1.849

由**表2—4**可以看出，利用三次样条插值函数 $S(x)$及其导数来逼近被插值函数f(x)及其导数，其效果是相当好的。

小　结

插值法是一个古老而又实用的数值方法。它不仅是数值微分、数值积分、函数逼近以及微分方程数值解等数值分析的基础，而且在许多实际问题中，也有直接的应用。

本章只简要介绍了有关插值法的一些基本概念、多项式插值的基础理论和几个常用的插值方法，例如拉格朗日插值公式

、牛顿基本插值公式和仅适用于等距离节点下的牛顿向前（后）插值公式，以及应用最广且有二阶连续导数的三次样条插值。作为一种直接应用，也可介绍了利用插值法求导数的基本原理和常用公式。

实际上，插值法的内容，包括插值函数类的选择，公式的构造与应用，误差的估计，以及收敛性、稳定性的讨论等，都是十分丰富的。需要进一步了解可参考[1]-[2]。

习 题 二

1 求经过下列已知点的最低次代数多项式

x	0	1.5	5.1
y	-1	4.25	35.21

2. 已知函数表如下

x	10	11	12	13
$\ln x$	2.3026	2.3979	2.4849	2.5649

试分别用线形插值与二次插值计算ln11.75的近似值，并估计截断误差。

3. 设x_0、x_1…、x_n为任意给定的n+1个互不相同的节点，证明：

1）若f（x）为不高于n次的多项式，则f（x）关于这组节点的n次插值多项式就是它自己；

2） 若$l_k(x)(k=0,1,\ldots,n)$是关于这组节点的n次基本插值多项式，则有恒等式

$$\sum_{k=0}^{n} x_k^m l_k(x) \equiv x^m, (m=0,1,\cdots,n)$$

4 已知函数表如下

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
e^x	1.0000	1.2214	1.4918	1.8221	2.2255

(1) 分别构造向前差分表与向后差分表;

(2) 分别用三点与四点前插公式计算$e^{0.13}$的近似值，并估计误差;

(3) 分别用三点与四点前插公式计算$e^{0.72}$的近似值，并估计误差;

(4) 构造差商表，并分别用三点与四点牛顿基本插值公式计算$e^{0.12}$的近似值.

5. 设f（x）为n次多项式，试证明当$k \le n$时差商

$$f\,[x,\ x_0,\ x_1,\ \ldots x_k]$$

(其中x_0、x_1、…、x_k互异)为$n-k$次多项式，而当kn时其值恒为零.

6. 今要在区间［-4,4］上构造f（x）＝e^x在等距节点下的函数表．问怎样选取函数表的步长，才能保证用二次插值求e^x 的近似值时，截断误差不超过10^{-6}.

7. 对于给定的插值条件

x	0	1	2	3
y	0	0	0	0

试分别求满足下列边界条件的三次样条插值函数:

(1) $S''(0)=1,\ S''(3)=0$;

(2) $S'(0)=1,\ S'(3)=0$