第二章 非线性方程的数值解法

§引　言

代数方程求根问题是一个古老的数学问题，早在16世纪就找到了三次、四次方程的求根公式。但直到19世纪才证明 $n \geq 5$ 次的一般代数方程式不能用代数公式求解。因此需要研究用数值方法求得满足一定精度的代数方程式的近似解。

在工程和科学技术中许多问题常常归结为求解非线性方程式问题，例如在控制系统的设计领域，研究人口增长率等。

例1　关于真实气体的状态方程（Van der waals方程）为

$$(P + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT \qquad \textbf{(1.1)}$$

其中，P是气体压力，V是气体提及，T是绝对温度，R是气体常数。

如果已知某气体的温度T及压力P，那么求体积V的方程为：

$$f(x) = (P + \frac{a}{V^2})(V - b) - RT = 0 \qquad \textbf{(1.2)}$$

或
$$V=\frac{RT}{\left(P+\frac{a}{V^2}\right)}+b\equiv g(V)$$

本章将介绍这种类型方程的近似解的数值方法。

设有一非线性方程

$$f(x)=0 \tag{1.3}$$

其中 $f(x)$为实变量 x 的非线性函数。

定义 1 （1）如果有 x^*使 $f(x^*)=0$ ，则称x^* 为方程（1.3）的根，或称为函数 $f(x)$ 的零点。

（2）当 $f(x)$ 为多项式时，即方程为

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0(a_n\neq 0)$$

称 $f(x)=0$为 n 次代数方程。当 $f(x)$ 包含指数函数或三角函数等特殊函数时，称 $f(x)=0$ 为超越方程。

（3）如果 $f(x)=(x-x^*)^m g(x)$，其中$g(x^*)\neq 0$，m 为正整数，则称 x^* 为 $f(x)=0$ 的 m 重根。当 m=1时称 x^*为 $f(x)=0$ 的单根。

先叙述两个基本定理。

定理 1 （代数基本定理）

设 $f(x)=0$ 为具有复系数的 n 次代数方程，则 $f(x)=0$ 于复数域上恰有 n 个根（r 重根计算 r 个）。如果 $f(x)=0$ 为实系数代数方程，则复数根成对出现，即当 $\alpha+i\beta(\beta\neq 0)$ 是 $f(x)=0$ 的复根，则 $\alpha-i\beta$ 亦是 $f(x)=0$ 的根。

定理2 （1）设 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 上连续；

（2）且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则存在有 $x^*\in(a,b)$ 使 $f(x^*)=0$

即 $f(x)$ 于 (a,b) 内存在实的零点。

设有非线性，实系数方程

$$f(x)=0$$

问题是：需要求出方程的所有实根（或复根）。

求方程 $f(x)=0$ 式近似根，一般说有这样两个问题。

（1）根的分离。找出有根的区间（或平面区域），使得在一些较小的区间（平面区域）只有一个根（或一对共轭根），这样可获得方程各根的近似值。

最简单的方法就是绘出 $y=f(x)$ 图形，方程 $f(x)=0$ 的实根就是曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴交点的横坐标；也可采用搜索的方法来确定根的范围，即从某 x_0 出发，选取步长 Δx，如果有

$$f(x)\cdot f(x+\Delta x)<0$$

则于 $(x, x+\Delta x)$ 内必有 $f(x)=0$ 的实根（由定理2知）。其中

$$x=x_0+i\cdot\Delta x,(i=0,1,\cdots,N_0)$$

（2）近似根的精确化。用求方程根的数值方法，使求得的近似根精确化，直到具有足够的精度。

搜索方法框图（图5-1）：

在 $[a,b]$ 内搜索方程 $f(x)=0$ 所有实根。取 $x_0=a$，步长为 Δx，f_{max} 为一大数。$\Delta x=(b-a)/N$。

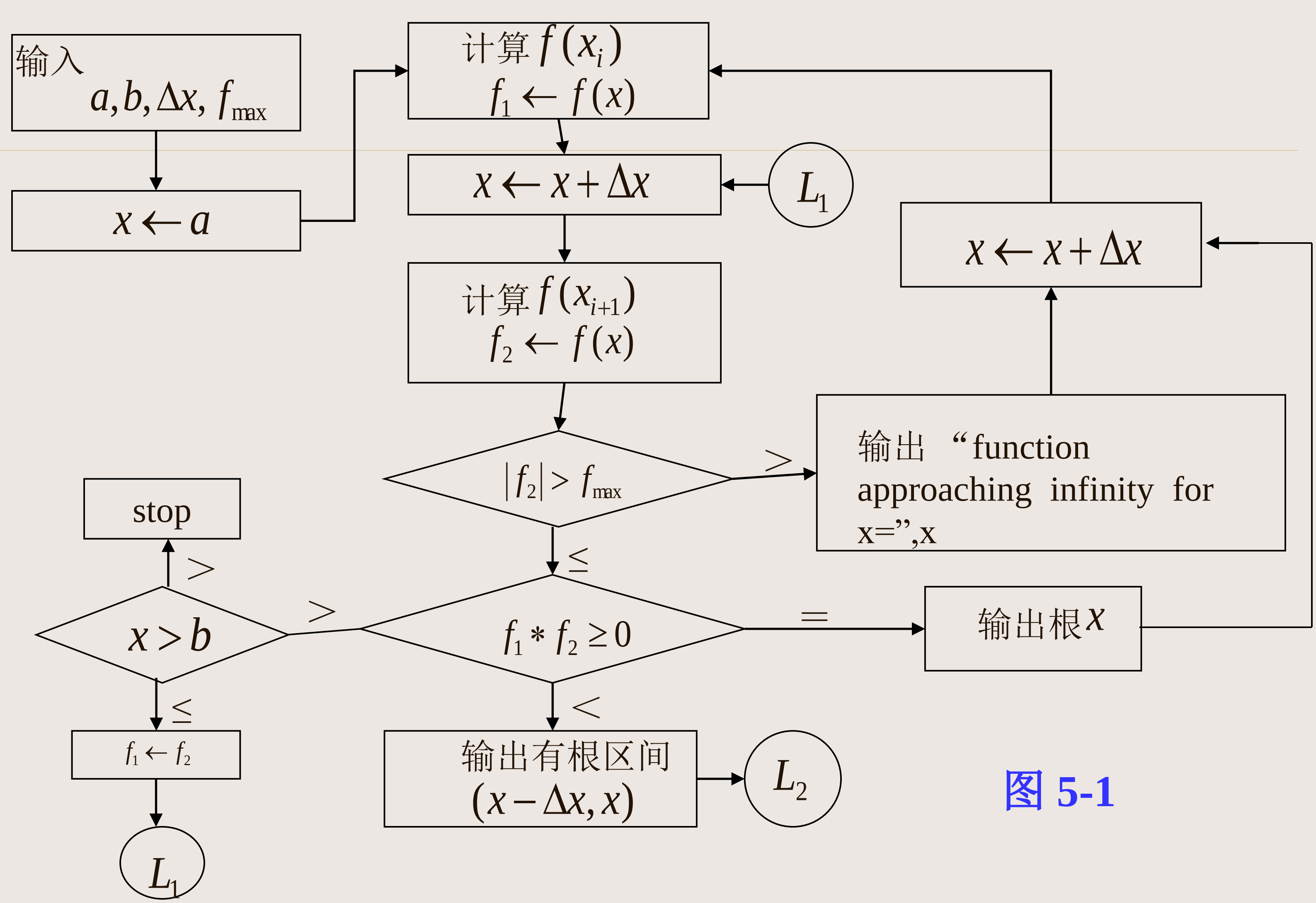
输入 $a, b, \Delta x, f_{max}$
$x \leftarrow a$
计算 $f(x_i)$ $f_1 \leftarrow f(x)$
$x \leftarrow x + \Delta x$
L_1
计算 $f(x_{i+1})$ $f_2 \leftarrow f(x)$
$|f_2| > f_{max}$
$>$
输出 “function approaching infinity for x=”,x
$x \leftarrow x + \Delta x$
$\leq$
$f_1 * f_2 \geq 0$
$=$
输出根 x
$>$
$x > b$
$>$
stop
$\leq$
$f_1 \leftarrow f_2$
L_1
$<$
输出有根区间 $(x - \Delta x, x)$
L_2

图 5-1

[注] 当 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 连续时，输出区间 $(x-\Delta x, x)$ 内一定有实根，若 $f(x)$ 于 $[a,\infty)$ 某点 x_s 分为两支曲线且 $x \to x_s^+$ 时 $f(x) \to +\infty$ 或 $-\infty$，当 $x \to x_s^-$ 时 $f(x) \to -\infty$ 或 $+\infty$ 时，输出的区间 $(x-\Delta x, x)$ 内可能没有实根，这种情况与 §2 二分法结合使用即可知此区间有无实根。L_2 代表判断 $x > b$ 框。

例 2 用搜索法确定下述方法在 $[0.1, 4.0]$ 实根范围。

$$f(x) = 1 + 5.25x - 1/\cos(\sqrt{0.68x} = 0$$

解 取 $a = 0.1, b = 4.0, \Delta x = 0.1, f_{max} = 10^4$。

输出：有根区间为（3.3，3. 4）且区间（3.6，3.7）内无实根 。

§2 二 分 法

设有非线性方程

$$f(x)=0 \tag{2.1}$$

其中，$f(x)$为$[a,b]$上连续函数且设$f(a)\cdot f(b)<0$（不妨设方程（2.1）于$[a,b]$内仅有一个实根。

求方程（2.1）实根 x^* 的二分法过程，就是将含根区间$[a,b]$逐步分半，检查函数符号的变化，以便确定含根的充分小区间。

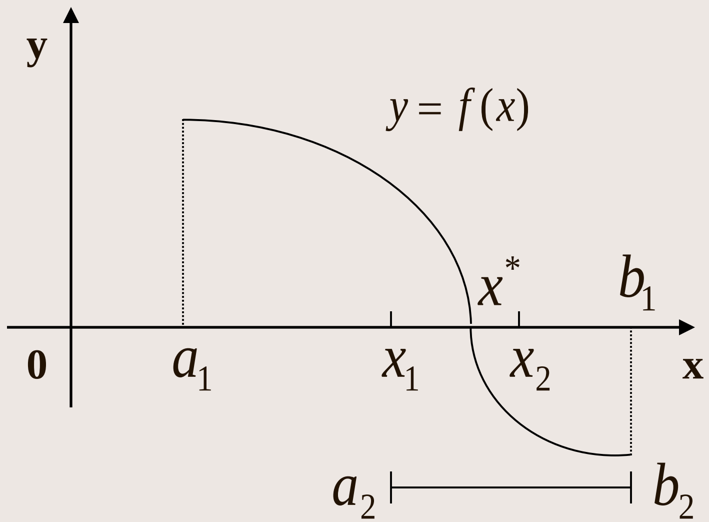

图 5-2

二分法叙述如下；记 $a_1 = a, b_1 = b$ （图5-2）

第一步分半计算（k=1）：

将 $[a_1, b_1]$ 分半，计算中点 $x_1 = (a_1 + b_1)/2$ 及 $f(x_1)$，如果 $f(a_1)\cdot f(x_1) < 0$ 则根一定在区间 $[a_1, x_1] \equiv [a_2, b_2]$ 内，否则根一定在区间 $[x_1, b_1] \equiv [a_2, b_2]$ 内（若 $f(x_1) = 0$，则 $x_1 = x^*$）。于是得到长度缩小一半的含根区间 $[a_2, b_2]$，即

$$f(a_2)\cdot f(b_2) < 0, \text{且} b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1)$$

第k步分半计算：重复上述过程，设已完成第1步，• • ，第k-1步分半计算得到含根区间

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_k, b_k]$$

且满足；（1）$f(a_k)\cdot f(b_k) < 0$, 即 $x^* \in [a_k, b_k]$；

（2）$b_k - a_k = \dfrac{1}{2^{k-1}}(b - a)$；

现在进行第k步分半计算；

（3）计算 $x_k = (a_k + b_k)/2$ 且有

$$\left|x^* - x_k\right| \le \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{1}{2^k}(b-a) \qquad (2.2)$$

（4）确定新的含根区间$\left[a_{kn}, b_{k+1}\right]$，即如果 $f(a_k)\cdot f(x_k)<0$，则根一定在 $\left[a_{k+1}, b_{k+1}\right]=\left[a_k, x_k\right]$内，否则根一定在区间$\left[a_{k+1}, b_{k+1}\right]=\left[x_k, b_k\right]$且有

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2^k}(b-a)$$

总之，由上述二分法得到一序列$\{x_k\}$，由（**2.2**），则有

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$$

可用二分法求方程 $f(x)=0$ 实根 x^*的近似值到任意指定的精度。事实上，设$\varepsilon>0$为给定精度要求，试确定分半次数 k使

$$\left|x_k - x^*\right| \le \frac{b-a}{2^k} < \varepsilon$$

由$2^{-k} < \varepsilon/(b-a)$两边取对数，即得

$$k > (\ln(b-a) - \ln e) / \ln 2 \qquad (2.3)$$

例3 用二分法求 $f(x) = x^6 - x - 1 = 0$ 于 $[1,2]$内一个实根，且要求精度到小数后第3位（即要求 $|x^* - x_k| < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$ ）。显然， $f(1) \cdot f(2) < 0$。

解 由 $\varepsilon = 0.5 \times 10^{-3}$ ，由公式（**2.3**）可确定所需分半次数 $k = 11$。计算结果如下表(**表 5-1**)。

表 5-1

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
1	1.0	2.0	1.5	8.890625
2	1.0	1.5	1.25	1.564697
3	1.0	1.25	1.125	-0.097713
4	1.125	1.25	1.1875	0.616653
5	1.125	1.1875	1.15625	0.233269
6	1.125	1.15625	1.140625	0.0615778
7	1.125	1.140625	1.132813	-0.0195756
8	1.132813	1.140625	1.136719	0.0206190
9	1.132813	1.136719	1.134766	4.307×10^{-4}
10	1.132813	1.134766	1.133789	-0.00959799
11	1.133789	1.134766	1.34277	-0.0045915

二分法优点是简单，且对 $f(x)$ 只要求连续即可。可用二分法求出 $f(x)=0$ 于 $[a,b]$ 内全部实根。但二分法不能求复数及偶数重根。

二分法框图（图5-3）：

二分法：设有方程 $f(x)=0$，其中 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 连续，且满足条件 $f(a)\cdot f(b)<0$（且设于 $[a,b]$ 内只有一个实根）。$k=1,2,\cdots,N_0$

（1）计算 $x_0=(a_k+b_k)/2, f(x_k), h=(b_k-a_k)/2;$

（2）如果 $|f(x_k)|<\varepsilon_1$ 或 $h<\varepsilon_2$ 则输出 $x_k, f(x_k), k;$

（3）如果 $f(a_k)\cdot f(x_k)<0$ 则 $a_{k+1}=a_k, b_{k+1}=x_k$ 否则

$$a_{k+1}=x_k, b_{k+1}=b_k$$

其中 N_0 表示给定的最大分半次数，当 $|f(x)|<\varepsilon_1$ 或 $h<\varepsilon_2$ 时分半终止，f_{max} 为一大数。

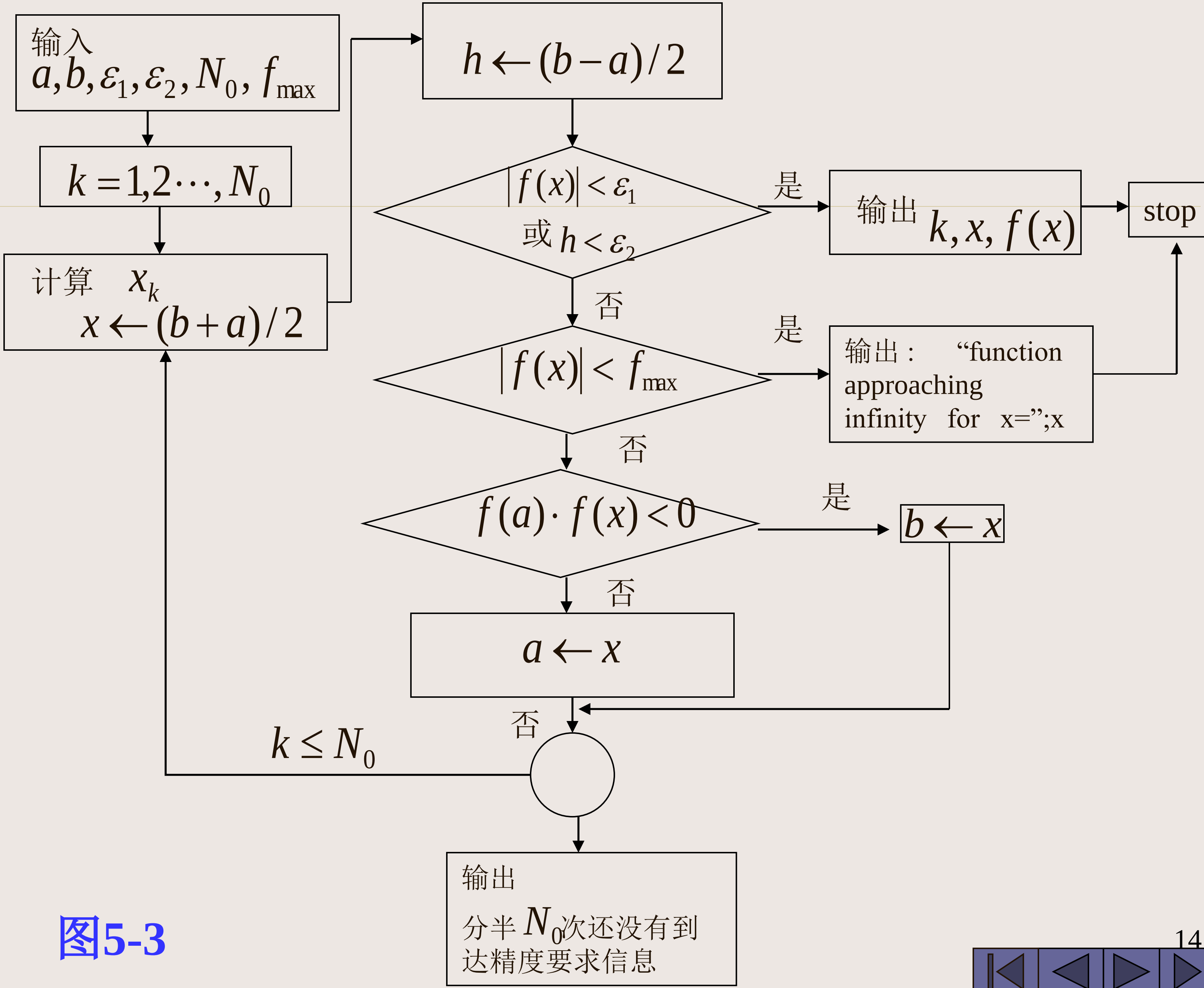
输入
$a, b, \varepsilon_1, \varepsilon_2, N_0, f_{max}$
$k = 1, 2 \cdots, N_0$
计算 x_k
$x \leftarrow (b+a)/2$
$h \leftarrow (b-a)/2$
$|f(x)| < \varepsilon_1$
或 $h < \varepsilon_2$
是
输出 $k, x, f(x)$
stop
否
$|f(x)| < f_{max}$
是
输出： “function approaching infinity for x=”;x
否
$f(a) \cdot f(x) < 0$
是
$b \leftarrow x$
否
$a \leftarrow x$
否
$k \le N_0$
输出
分半 N_0 次还没有到达精度要求信息

图5-3

§ 3 迭代法

迭代法是一种逐次逼近法。它是求解代数方法，超越方程及方程组的一种基本方法，但存在收敛性及收敛快慢问题。

为了用迭代法求非线性方程 $f(x)=0$ 的近似值，首先需要将此方程转化为等价的方程

$$x=g(x) \tag{3.1}$$

显然，将 $f(x)=0$ 转化为等价方程（3.1）的方法是很多的。

例4 方程 $f(x)=x-\sin x-0.5=0$ 可用不同方法转化为等价方程

（a） $x=\sin x+0.5\equiv g_1(x)$

（b） $x=\sin^{-1}(x-0.5)\equiv g_2(x)$

定义2 （迭代法）设方程为 $x=g(x)$

（1） 选取方程的一个初始近似 x_0 ，且按下述逐次代入法，

构造一近似解序列；

$$
\begin{cases}
x_1 = g(x_0) \\
x_2 = g(x_1) \\
\quad\vdots \\
x_{k+1} = g(x_k) \\
\quad\vdots
\end{cases}
\qquad (3.2)
$$

这种方法称为**迭代法**（或称为**单点迭代法**）。 $g(x)$称为**迭代函数**。

（2） 如果由迭代法产生的序列$\{x_k\}$有极限存在，即 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$，则称 $\{x_k\}$为**收敛**或称迭代过程**（3.2）收敛**。否则称 $\{x_k\}$ **不收敛**。

x^*

设 $g(x)$为连续函数，且有 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$ ，则有$x^* = g(x^*)$即 x^*为方程**（3.1）**的**解**（称　为函数的**不动点**）。

事实上，由迭代过程**（3.2）**两边取极限，则有

$$
x^* = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} g(x_k) = g(\lim_{k\to\infty} x_k) = g(x^*)
$$

显然在由方程 $f(x)=0$ 转化为等价的方程 $x=g(x)$ 时，选择不同的迭代函数$g(x)$就会产生不同的序列$\{x_k\}$（即使初始值 x_0选择一样），且这些序列的收敛情况也不会相同。

例 5 对例4中方程，考查用迭代法求根

（a） $$x_{k+1}=\sin x_k+0.5,(k=0,1,\cdots)$$

（b） $$x_{k+1}=\sin^{-1}(x_k-0.5),(k=0,1,\cdots)$$

表 5-2

k	$(a)x_k$	$(b)x_k$	$(a)f(x_k)$
0	1.0	1.0	
1	1.341471	0.523599	
2	1.473820	0.023601	
3	1.495301	-0.496555	
4	1.497152	-1.487761	
5	1.497285		
6	1.497300		
7	1.497300		-3.6×10^{-7}

由计算看出，选取的两个迭代函数 $g_1(x), g_2(x)$ 分别构造序列 $\{x_k\}$ 收敛情况不一样（初始值都为1.0），在(a)种情况 $\{x_k\}$收敛且 $x^* \approx 1.497300$。在(b)种情况出现计算 $\arcsin(x_4 - 0.5) = \arcsin(-1.987761)$无定义。因此，对于用迭代法求方程 $f(x)=0$ 近似根需要研究下述问题：

（1）如何选取迭代函数 $g(x)$ 使迭代过程 $x_{k+1} = g(x_k)$ 收敛。

（2）若 $\{x_k\}$收敛较慢时，怎样加速 $\{x_k\}$收敛。

迭代法的几何意义：

从几何上解释，求方程 $x = g(x)$ 根的问题，是求曲线 $y = g(x)$与直线 $y = x$ 交点的横坐标 x^*。当迭代函数 $g(x)$ 的导数 $g'(x)$ 在根 x^* 处满足下述几种条件时，从几何上来考查迭代过程 $x_{k+1} = g(x_k)$ 的收敛情况如图5-4。

从曲线 $x = g(x)$ 上一点 $P_0(x_0, g(x_0))$ 出发，沿着平行于 x 轴方

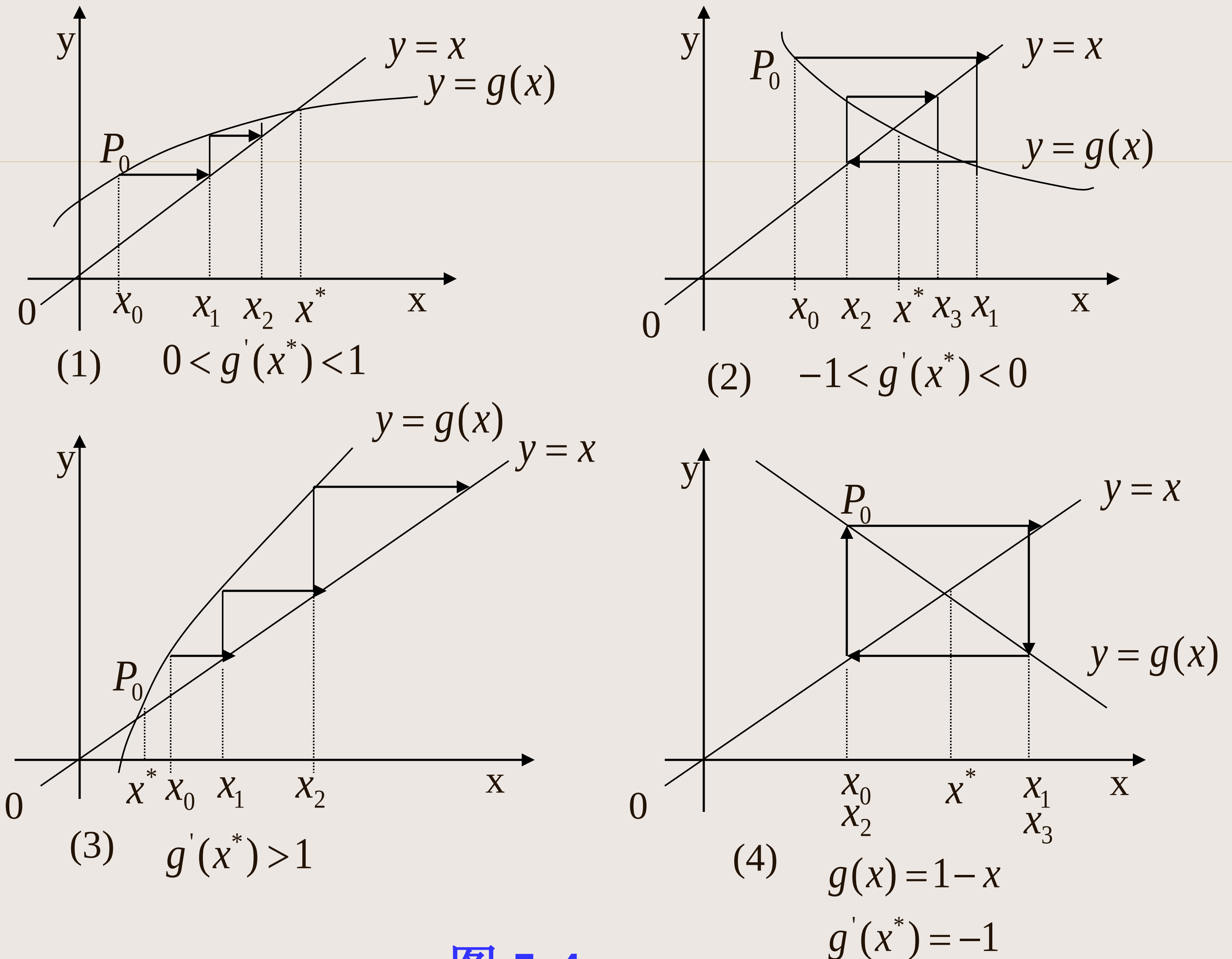
y
$y=x$
$y=g(x)$
P_0
0
x_0 x_1 x_2 x^*
x
(1) $0<g'(x^*)<1$
y
$y=x$
P_0
$y=g(x)$
0
x_0 x_2 x^* x_3 x_1
x
(2) $-1<g'(x^*)<0$
$y=g(x)$
$y=x$
y
P_0
0
x^* x_0 x_1 x_2
x
(3) $g'(x^*)>1$
y
$y=x$
P_0
$y=g(x)$
0
x_0 x_2 x^* x_1 x_3
x
(4) $g(x)=1-x$
$g'(x^*)=-1$

图 5-4

方向前进交 $y=x$ 于一点 Q_0，再从 Q_0 点沿平行于 y 轴方向前进交 $y=g(x)$ 于 P_1 点，显然，P_1 的横坐标就是 $x_1=g(x_0)$。继续这过程就得到序列 $\{x_k\}$，且从几何上观察知在（1）（2）情况下 $\{x_k\}$ 收敛于 x^*，在（3）（4）情况不收敛于 x^*。

由迭代法的几何意义可知，为了保证迭代过程收敛，应该要求迭代函数的导数满足条件 $|g'(x)|<1$，当 $x\in[a,b]$，否则方程于 $[a,b]$ 可能有几个根或迭代法不收敛，为此有下述关于迭代法收敛定理。

定理3 设有方程 $x=g(x)$

（1） 设 $g(x)$ 于 $[a,b]$ 一阶导数存在；

（2） 当 $x\in[a,b]$ 时有 $g(x)\in[a,b]$；

（3） $g'(x)$ 满足条件：$|g'(x)|\le L<1$，当 $x\in[a,b]$。

则

（a） $x=g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有唯一解 x^*；

（b） 对任意选取初始值 $x_0\in[a,b]$，迭代过程 $x_{k+1}=g(x_k)$ 收敛，即 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$；

(c) $$\left|x^*-x_k\right| \le \frac{1}{1-L}\left|x_{k+1}-x_k\right|; \qquad (3.3)$$

(d) 误差估计

$$\left|x^*-x_k\right| \le \frac{L^k}{1-L}\left|x_1-x_0\right| (k=1,2,\cdots) \qquad (3.4)$$

证明 只证明(b)，(c)，(d)（见**图5-5**）。

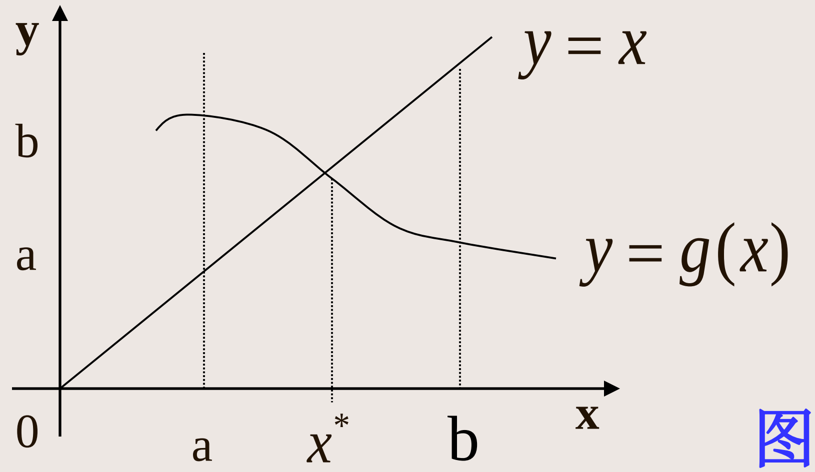

图 5-5

证 (b) 由定理假设条件(2), 当取 $x_0\in[a,b]$ 时，则有 $x_k\in[a,b]$ $(k=1,2\cdots)$。记误差 $e_k=x^*-x_k$，由中值公式有

$$x^* - x_{k+1} = g(x^*) - g(x_k) = g'(c)(x^* - x_k)$$

其中c在 x^*与 x_k之间，即 $c \in [a,b]$。 又利用假设条件（3）得到误差的递推关系

$$|x^* - x_{k+1}| \le |g'(c)||x^* - x_k| \le L|x^* - x_k| \qquad (3.5)$$

$$(k = 0,1,2\cdots)$$

反复利用(3.5)，得到

$$|x^* - x_k| \le L|x^* - x_{k-1}| \le L^2|x^* - x_{k-2}|$$

$$\le \cdots \le L^k|x^* - x_0| \to 0(\text{当}k \to \infty)$$

即

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$$

证 (c) 取迭代公式 $x_{k+1} = g(x_k)$，显然有

$$|x_{k+1} - x_k| = |g(x_k) - g(x_{k-1})| = |g'(c)(x_k - x_{k-1})|$$

$$\le L\left|x_k - x_{k-1}\right|,(k=1,2,\cdots)$$

其中 c 在x_{k-1}与 x_k 之间，于是

$$\left|x_{k+1}-x_k\right| = \left|x^* - x_k - \left(x^* - x_{k+1}\right)\right|$$

$$\ge \left|x^* - x_k\right| - \left|x^* - x_{k+1}\right|$$

$$\ge \left|x^* - x_k\right| - L\left|x^* - x_k\right| = (1-L)\left|x^* - x_k\right|$$

即

$$\left|x^* - x_k\right| \le \frac{1}{1-L}\left|x_{k+1}-x_k\right| = \frac{L}{1-L}\left|x_k - x_{k-1}\right| \qquad \textbf{(3.6)}$$

证(d)　反复利用**(3.6)**，可得

$$\left|x^* - x_k\right| \le \frac{1}{1-L}\left|x_{k+1}-x_k\right|$$

$$\cdots\cdots$$

$$\le \frac{L^K}{1-L}\left|x_1 - x_0\right|$$

由定理3结果(3.3)可知，当计算得到的相邻两次迭代满足条件

$$|x_{k+1}-x_k|<\varepsilon \tag{3.7}$$

时，则误差

$$|x^*-x_k|<\frac{1}{1-L}\varepsilon$$

所以在电算时可利用 $|x_{k+1}-x_k|<\varepsilon$ 来控制迭代中止，但是要注意，当 $L\approx 1$ 时，即使 $|x_{k+1}-x_k|$ 很小，但误差 $|x^*-x_k|$ 还可能较大。

当已知 $x_0, x_1, L(<1)$ 及给定精度要求 ε 时，利用(3.4)可确定使误差达到给定精度要求所需要迭代次数 k 。

事实上，由

$$|x^*-x_k|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|<\varepsilon$$

则

$$k>\left(\ln\varepsilon-\ln\frac{|x_1-x_0|}{1-L}\right)/\ln L \tag{3.8}$$

定理3中的假设条件 $|g'(x)| \le L < 1$, 当 $x \in [a,b]$ 。在一般情况下，可能对于大范围的含根区间不满足，而在根的邻近是进成立的，为此有下述迭代过程局部收敛性结果 。

定理4 （由迭代法**局部收敛性**）设给定方程 $x = g(x)$

(1) 设 x^* 为方 程的解;

(2) 设 $g(x)$ 在 x^* 的邻近连续可微且有 $|g'(x^*)| < 1$

（根据 $g'(x)$ 在 x^* 邻近连续性，此条件即为存在 x^* 的一个邻域

$S = \{x \mid |x - x^*| \le \delta\}$ 使 $|g'(x)| \le L < 1$, 当 $x \in S$ 时成立).

则对任意取初值 $x_0 \in S$, 迭代过程 $x_{k+1} = g(x_k)(k = 0,1,2,\cdots)$ 收敛于 x^*（称迭代过程具有**局部收敛性**）。

证明 取 $[a,b] = [x^* - \delta, x^* + \delta]$, 于是只要验证定理3中条件（2）成立，定理4即得证。 事实上，设 $x \in S$ ，则 $x' = g(x)$

$$|x' - x^*| = |g(x) - g(x^*)| = |g'(c)(x - x^*)|$$

$$\le L|x - x^*| < |x - x^*| \le \delta$$

其中，$c \in S$。说明 $x' \in S$。

例6 试用迭代法解方程：$f(x) = x - \ln(x+2) = 0$

解 （1）显然有（见图5-6）

$$f(0) \cdot f(2) < 0$$

$$f(-1.9) \cdot f(-1) < 0$$

即知，方程于[0，2]及[-1.9，-1]内有根，记为 x_1^* 及 x_2^*（参看图5-6）。

（2）考查取初值$x_0 \in [0,2]$迭代过程$x_{k+1} = \ln(x_k + 2)$的收敛性，其中迭代函数为 $g_1(x) = \ln(x+2)$。

显然，$g_1(0) = \ln 2 \approx 0.6931 > 0, g_1(2) = \ln 4 \approx 1.386 < 2$及$g_1(x)$为增函数，则有当$0 \le x \le 2$时,$0 \le g_1(x) \le 2$。又由

$$g_1'(x) = \frac{1}{x+2}$$

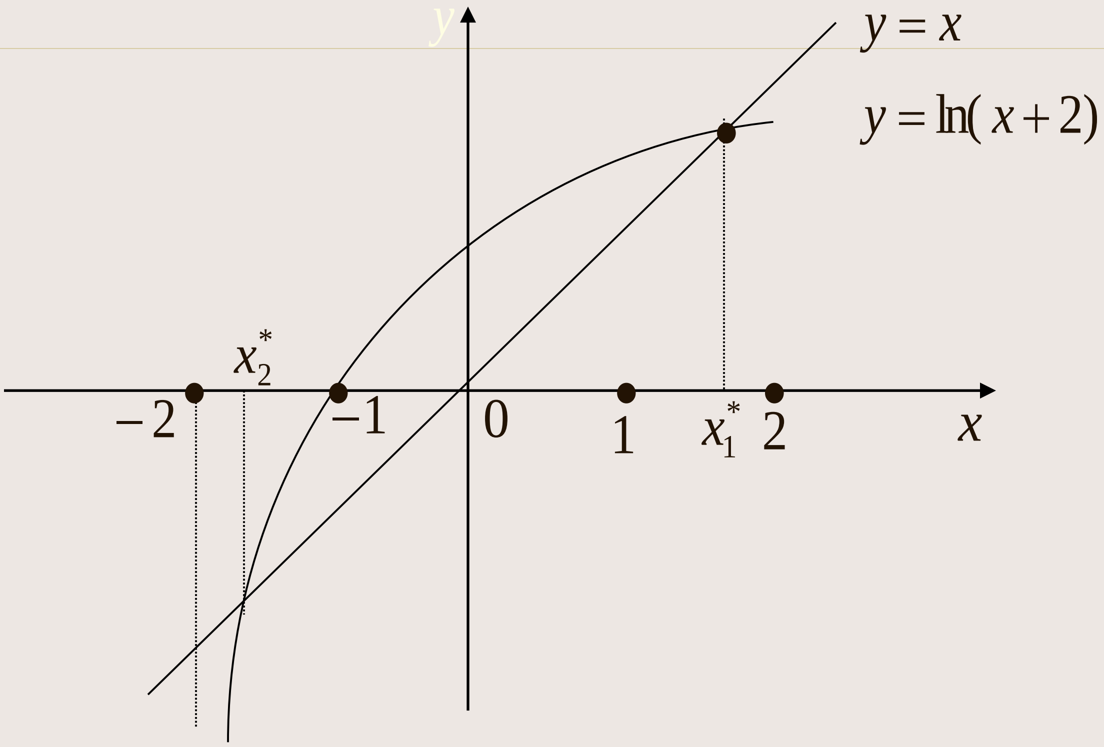

图 5-6

则有

$$\left|g_1'(x)\right| = \frac{1}{x+2} \le g_1'(0) = \frac{1}{2} < 1, \text{当} x \in [0,2]$$

于是，由**定理3**可知，当初值 $x_0 \in [0,2]$时迭代过程 $x_{k+1} = \ln(x_k + 2)$收敛。

如果要求 x_1^* 近似根准确到小数后第6位（即要求$\left|x_1^* - x_k\right| \le \frac{1}{2}\times 10^{-6}$）。

由表5-3可知

$$|\ x_{15} - x_{14}| \approx 10^{-7}, \text{且} L = \frac{1}{2}$$

所以

$$\left|x_1^* - x_{14}\right| \le \frac{1}{1-L}\left|x_{15} - x_{14}\right| \approx 2\times 10^{-7} < 0.5\times 10^{-6}$$

$$x_1^* \approx 1.461931$$

$$\left|f(x_{14})\right| \approx 0.8\times 10^{-7}$$

表 5-3

k	$x_{k+1}=\ln(x_k+2)$
0	0.0
1	0.69314718
2	0.99071046
$\vdots$	$\vdots$
14	1.1461931
15	1.1461932

（3）为了求 $[-1.9,-1]$内 方 程 的根，考察迭代过程

$$x_{k+1}=\ln(x_k+2) \qquad (3.9)$$

显然 $\left|g_1^{'}(x)\right|=\dfrac{1}{x+2}>g^{'}(-1)=1$，当$x\in[-1.9,-1]$

所以，迭代过程（3.9）（初值 $x_0\in[-1.9,-1]$, $x_0\neq x_2^*$）不收敛于x_2^* 。

（4）可将方程转化等价方程

$$e^x=x+2, \text{或} x=e^x-2\equiv g_2(x)$$

且有

$$g_2^{'}(x)=e^x$$

$$\left|g_2^{'}(x)\right|\le g_2^{'}(-1)\approx 0.368<1, \text{当} x\in[-1.9,-1]$$

所以，当选取 $x_0\in[-1.9,-1]$时迭代方程

$$x_{k+1}=e^{x_k}-2(k=0,1,\cdots)$$

收敛。如取 $x_0=-1$, 则迭代12次有 $x_2^*\approx x_{12}=-1.841405660$

且有 $$\left|f(x_{12})\right| \approx 0.2\times10^{-8}$$

由上例可见，对于方程 $f(x)=0$，迭代函数 $g(x)$ 选取不同，相应由迭代法产生的 $\{x_k\}$ 收敛情况也不一样。因此，我们应该选取迭代函数，使构造的迭代过程 $x_{k+1}=g(x_k)$ 收敛且收敛较快。

迭代法框图(**图5-7**)：

迭代法：求解方程 $x=g(x)$

（1） 选取解的初始估计 x_1；

（2） 对于 $k=1,2,\cdots,N_0$ 计算 $x_{k+1}=g(x_k)$ ，其中 N_0 为给定的最大迭代次数。当 $\left|x_{k+1}-x_k\right|<\varepsilon$ 时（或 $\frac{|x_{k+1}-x_k|}{|x_k|}<\varepsilon$ 或 $\left|f(x_k)\right|<\varepsilon$，其中 ε 为给定精度要求）迭代终止。

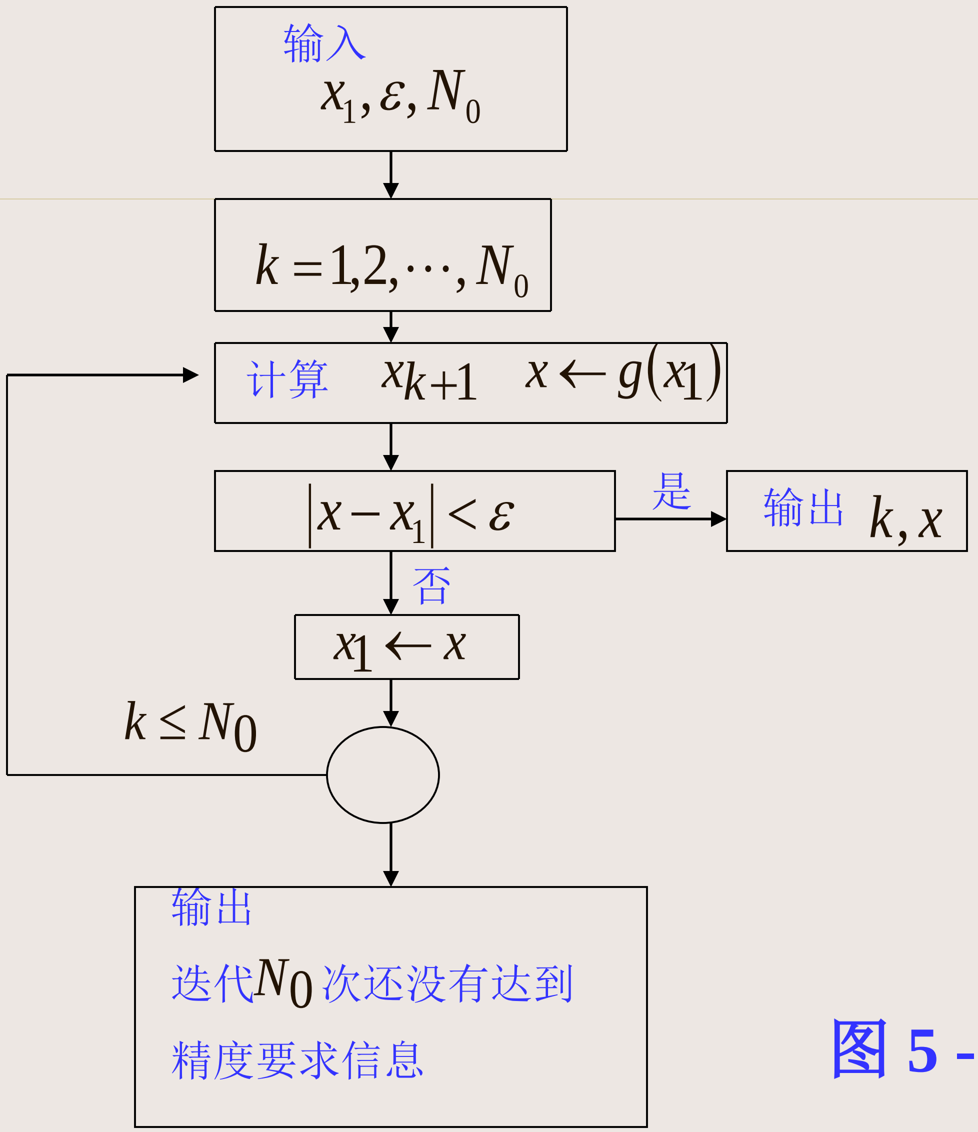
输入
x_1, ε, N_0
$k = 1,2,\cdots, N_0$
计算 x_{k+1} $x \leftarrow g(x_1)$
$|x - x_1| < \varepsilon$
是
输出 k, x
否
$x_1 \leftarrow x$
$k \le N_0$
输出
迭代N_0次还没有达到
精度要求信息

图 5 -7

§4 牛顿-雷扶生方法

解非线性方程 $f(x)=0$的牛顿方法是一种将非线性函数线性化的方法。 牛顿方法的最大优点是在方程单根附近具有较高的收敛速度。牛顿方法可用来计算 $f(x)=0$ 的实根，还可计算代数方程的复根。

4.1 牛顿法公式及误差分析

设有非线性方程

$$f(x)=0 \tag{4.1}$$

其中，设$f(x)$为$\lfloor a,b \rfloor$上一阶连续可微，且 $f(a)\cdot f(b)<0$;又设 x_0是 $f(x)$ 的 一个零点$x^*\in(a,b)$的近似值(设 $f'(x_0)\neq 0$，现考虑用过曲线 $y=f(x)$上点$P(x_0,f(x_0))$ 的切线近似代替函数 $f(x)$，即用线性函数（图5-8）

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

代替 $f(x)$。且用切线（即线性函数）的零点，记为 x_1，作为方程（4.1）的根 x^* 的近似值，即求解 $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0$

得到
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad \textbf{(4.2)}$$

一般，若已求得x_k，将（**4.2**）中x_0换为x_k，重复上述过程，即求得方程 $f(x)=0$ 根的牛顿方法的计算公式

$$\begin{cases} x_0\text{(初值)} \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k=0,1,2,\cdots) \end{cases} \qquad \textbf{(4.3)}$$

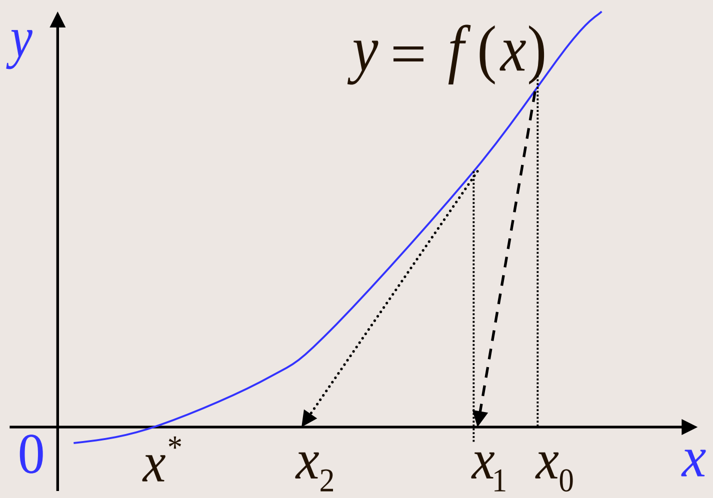

图 5-8

下面利用 $f(x)$ 的泰勒公式进行误差分析。设已知 $f(x)=0$ 根 x^* 的第 k 次近似 x_k ，于是 $f(x)$ 在 x_k 点泰勒公式为（设 $f(x)$ 二次连续可微）：

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{f''(c)}{2!}(x-x_k)^2 \qquad \textbf{(4.4)}$$

其中c在 x 与 x_k 之间。

如果用线性函数 $P(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)$ 近似代替 $f(x)$，其误差为 $\frac{f''(c)}{2!}(x-x_k)^2$。且用 $P(x)=0$ 根记为 x_{k+1} 作为 $f(x)=0$ 的根 x^* 的近似值又得到牛顿公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

现在（**4.4**）中取 $x=x^*$，则有

$$0=f(x^*)=f(x_k)+f'(x_k)(x^*-x_k)+\frac{f''(c)}{2!}(x^*-x_k)^2$$

于是 $x^*=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}-\frac{f''(c)}{2f'(x_k)}(x^*-x_k)^2$

（设 $f'(x_k)\neq 0$ ）。

利用牛顿公式**(4.3)** 即得误差关系式

$$x^* - x_{k+1} = [\frac{f''(c)}{2f'(x_k)}](x^* - x_k)^2 \qquad \textbf{(4.5)}$$

误差公式（**4.5**）说明 x_{k+1} 的误差是与 x_k 误差的平方成比例的。当初始误差（即 $x^* - x_0 \equiv \varepsilon_0$ ）是充分小时，以后迭代的误差将非常快的减少。由计算公式（**4.3**）可知，用牛顿法求方程 $f(x)=0$ 根，每计算一步需要计算一次函数值 $f(x_k)$ 以及一次导数 $f'(x_k)$ 。

例7 用牛顿法求 $f(x)=e^{-x/4}(2-x)-1=0$ 根。

解 显然，$f(0)\cdot f(2)<0$,方程于$[0,2]$内有一根.求导

$$f'(x)=e^{-x/4}(x-6)/4$$

牛顿法计算公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{e^{-x_k/4}(2-x_k)-1}{e^{-x_k/4}(x_k-6)/4},(k=0,1,2,\cdots)$$

求得近似值 $x^* \approx 0.783596, f(x_6) \approx -3.8\times10^{-8}$

说明当初值 x_0 选取靠近根 x^* 时牛顿法收敛且收敛较快，当初值不是选取接近方程根时，牛顿法可能会给出发散的结果。

表 5-4 (1) 取 $x_0 = 1.0$

k	x_k
0	1.0
1	-1.155999
2	0.189438
3	0.714043
4	0.782542
5	0.783595
6	0.783596

表 5-5 (2) 取 $x_0 = 8.0$

k	x_k
0	8.0
1	34.778107
2	869.1519
3	
$\vdots$	$\vdots$
	发散

4.2 牛顿法的局部收敛性

设有方程 $f(x)=0$，显然，牛顿法是一种迭代法，即

$$x_{k+1}=g(x_k) \qquad (4.6)$$

其中迭代函数为

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$ （设 $f'(x)\neq 0$ ）

于是，可用迭代法理论来考查牛顿方法的收敛性。

定理 5（牛顿法局部收敛性）设有方程 $f(x)=0$

（1）设 $f(x)$在根 x^* 邻近具有连续二阶导数；

（2） 且设 $f(x^*)=0$，但 $f'(x^*)\neq 0$，则存在 x^*的一个邻域 $S=\{x\,\|x^*-x|\leq\delta\}$ 使得对于任意选取初值 $x_0\in S$，由牛顿法产生的序列 $\{x_k\}$ 收敛于 x^* 且有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x^*-x_{k+1}}{(x^*-x_k)^2}=-\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \qquad (4.7)$$

证明　由于牛顿法是一个迭代法，其迭代函数为

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

计算

$$g'(x)=1-\frac{f'(x)^2-f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}=\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

由假设条件（2），则有

$$g'(x)=\frac{f(x^*)f''(x^*)}{(f'(x^*))^2}=0$$　即（$|g'(x^*)|<1$）

于是由**定理4**，迭代法（4.6）（即牛顿法）为局部收敛。且由（4.5）取极限即得（4.7）。

牛顿法误差估计：

设 x^* 为 $f(x)=0$ 的根，其中$f(x)$ 在x^* 邻近具有连续的一阶导数，且 $f'(x^*)\neq 0$，x_k 为由牛顿法得到的近似值，考虑 x_k 误差估计。

利用中值公式有

$$f(x_k)=f(x_k)-f(x^*)=f'(c_k)(x_k-x^*)$$

其中c_k 在 x_k和 x^*之间。

当 x_k 充分接近 x^*时，则有

$$x^*-x_k=-\frac{f(x_k)}{f'(c_k)},\ f'(c_k)\approx f'(x_k)$$

又由牛顿法公式，则

$$x^*-x_k=-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_{k+1}-x_k \qquad \textbf{(4.8)}$$

因此，在用牛顿法求 $f(x)=0$ 单根 x^*时，一般可用$|x_{k+1}-x_k|$ 来估计 x_k 的误差，即当 x_k 充分接近 x^* 时，若

$$|x_{k+1}-x_k|\le\varepsilon$$

意味着

$$\left|x^* - x_k\right| \le \varepsilon$$

电算时，对于牛顿法可用当 $\left|x_{k+1} - x_k\right| \le \varepsilon$ 时迭代终止。

例 8　对于例 3 使用牛顿法计算 $[0,2]$ 内一实根。

解

$$f(x) = x^6 - x - 1,\ f'(x) = 6x^5 - 1$$

由牛顿法计算公式有：

$$\begin{cases} x_0 = 1.5 \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k^6 - x_k - 1}{6x_k^5 - 1} \quad (k = 0,1,\cdots) \end{cases}$$

方程的真根 $x^* = 1.134724138$，求得的近似根 x_6 具有8位有效数字。且

$$x^* - x_3 = -4.72 \cdot 10^{-3}$$

$$x_4 - x_3 = -4.68 \cdot 10^{-3}$$

表 5-6

k	x_k	$f(x_k)$	$x_k - x_{k-1}$
0	1.5	8.89×10^{1}	
1	1.30049088	2.54×10^{1}	-2.00×10^{-1}
2	1.18148042	5.38×10^{-1}	-1.19×10^{-1}
3	1.13945559	4.92×10^{-2}	-4.20×10^{-2}
4	1.13477763	5.50×10^{-4}	-4.68×10^{-3}
5	1.13472415	6.08×10^{-8}	-5.35×10^{-5}
6	1.13472414	-4.00×10^{-9}	-1.00×10^{-8}

4.3牛顿法例子及框图

例9 设 $c>0$，试用牛顿法建立计算 $x=\sqrt{c}$ 的公式。

解 开方问题即为求解方程 $f(x)=x^2-c=0$ 。现用牛顿法解此方程，有（图 5-9）

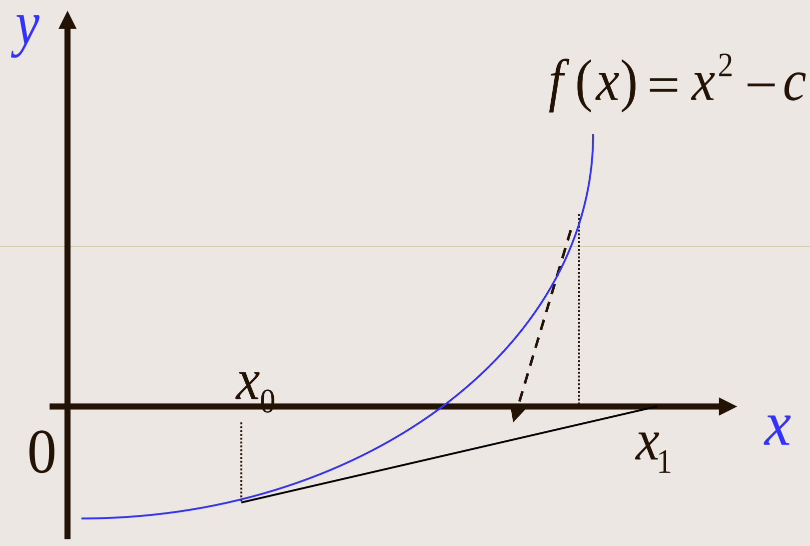

图 5-9

$$f(x)=x^2-c=0,\ f'(x)=2x$$

于是即得计算 $x=\sqrt{c}$ 的公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2-c}{2x_k}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{c}{x_k})(k=0,1,2,\cdots)$$

易知，上述迭代过程，对任意选取初值 $x_0>0$ 都是收敛的。

试计算 $x=\sqrt{10}$，要求$\left|x_{k+1}-x_k\right|<10^{-6}$ 时迭代终止。

表 5-7

k	x_k
0	1.0
1	5.5
2	3.65909091
3	3.19600508
4	3.16245562
5	3.16227767
6	3.16227766

所以 $\sqrt{10}\approx 3.16227766$

例 10 用牛顿法求方程

$$f(x)=(x-4.3)^2(x^2-54)=$$

$$x^4-8.6x^3-35.51x^2+464.4x-998.46=0$$ 的正实根。

解 方程在 $[7,8]$ 内有一实根，在 $[4,5]$ 内有二重根（**图 5-10**）。

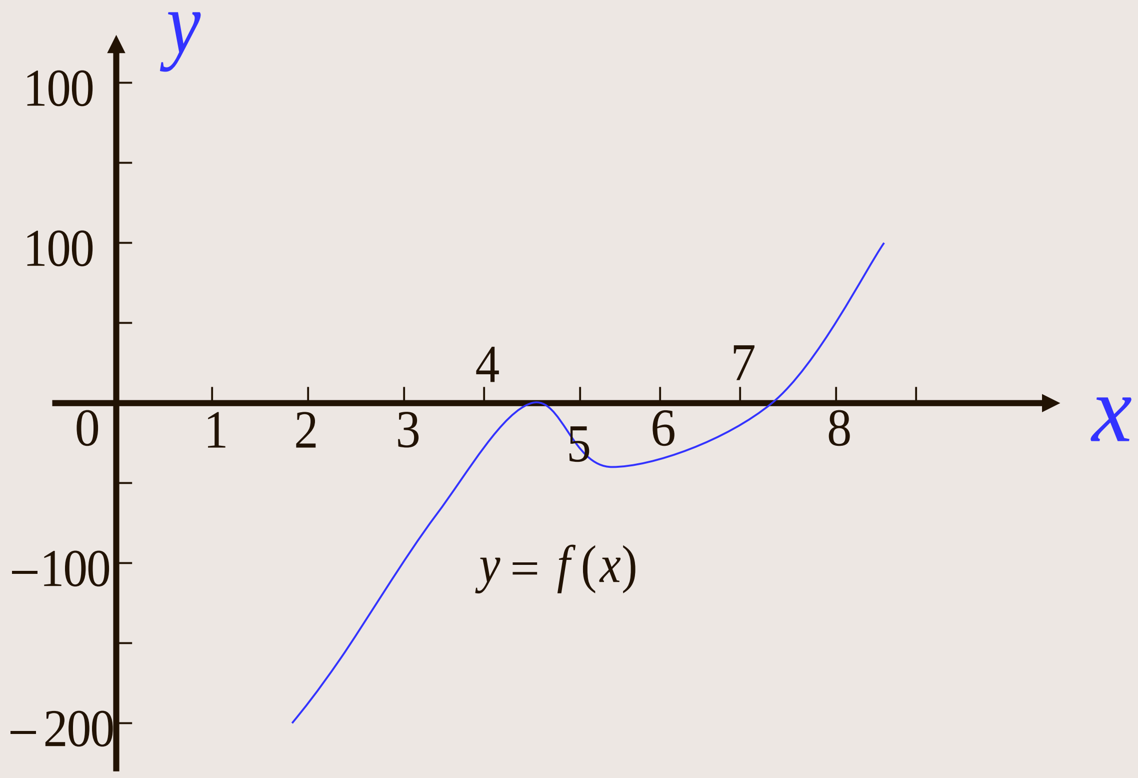

图 5-10

（1） 用牛顿法计算$[7,8]$内单根，要求$|x_{k+1}-x_k|<10^{-6}$ 。

表 5-8

k	x_k	$x_k - x_{k-1}$
0	7.0	
1	7.0485612	0.485612
2	7.36041	-0.125205
3	7.34857	-0.118×10^{-1}
4	7.34847	-0.102×10^{-3}
5	7.34847	-0.758×10^{-8}

$x_5 = 7.34847$ 即为所要求的近似根。

（2） 用牛顿法求 $[4,5]$ 内重根。

表 5-9

k	x_k	$x_k - x_{k-1}$
0	4.0	
1	4.145408	0.145408
2	4.22138	0.038952
3	4.26033	0.038952
4	4.28007	0.019740
5	4.29001	0.009939
⋮	⋮	⋮

需要迭代19次，则有 $x_{19} = 4.30000$，且 $|x_{19} - x_{18}| = 0.612 \times 10^{-6}$。

由此例可见，牛顿方法在单根附近具有较快的收敛速度（达到一定的精度所需要的迭代次数较少），而用一般牛顿法求$[4,5]$内二重根时收敛较慢。这种情况牛顿方法可改进如下：

设 x^* 为 $f(x)=0$ 二重根（即 $f(x)=(x-x^*)^2g(x)$ 且 $g(x^*)\neq 0$）。这种情况可定义一个函数

$$u(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$$

显然，x^*为其单根，于是可用牛顿求法解 $u(x)=0$

且计算公式为：

$$\begin{cases} x_{k+1}=x_k-\dfrac{u(x_k)}{u'(x_k)},(k=0,1,\cdots) \\ u'(x)=\dfrac{(f'(x))^2-f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \\ \qquad =1-\dfrac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \end{cases} \quad (4.9)$$

表 5-10

k	x_k	$x_k - x_{k-1}$
0	4.0	
1	4.308129	0.308129
2	4.300001	-0.812×10^{-2}
3	4.300000	-0.807×10^{-5}
4	4.300000	-0.660×10^{-9}

用**(4.9)** 公式计算 $[4,5]$内方程 $f(x)=0$二重根，只迭代**4 次**就得到满足精度要求$|x_{k+1}-x_k|<10^{-6}$的二重根，但这方法付出的代价是需要计算 $f''(x)$ 。

牛顿法框图图 5-11

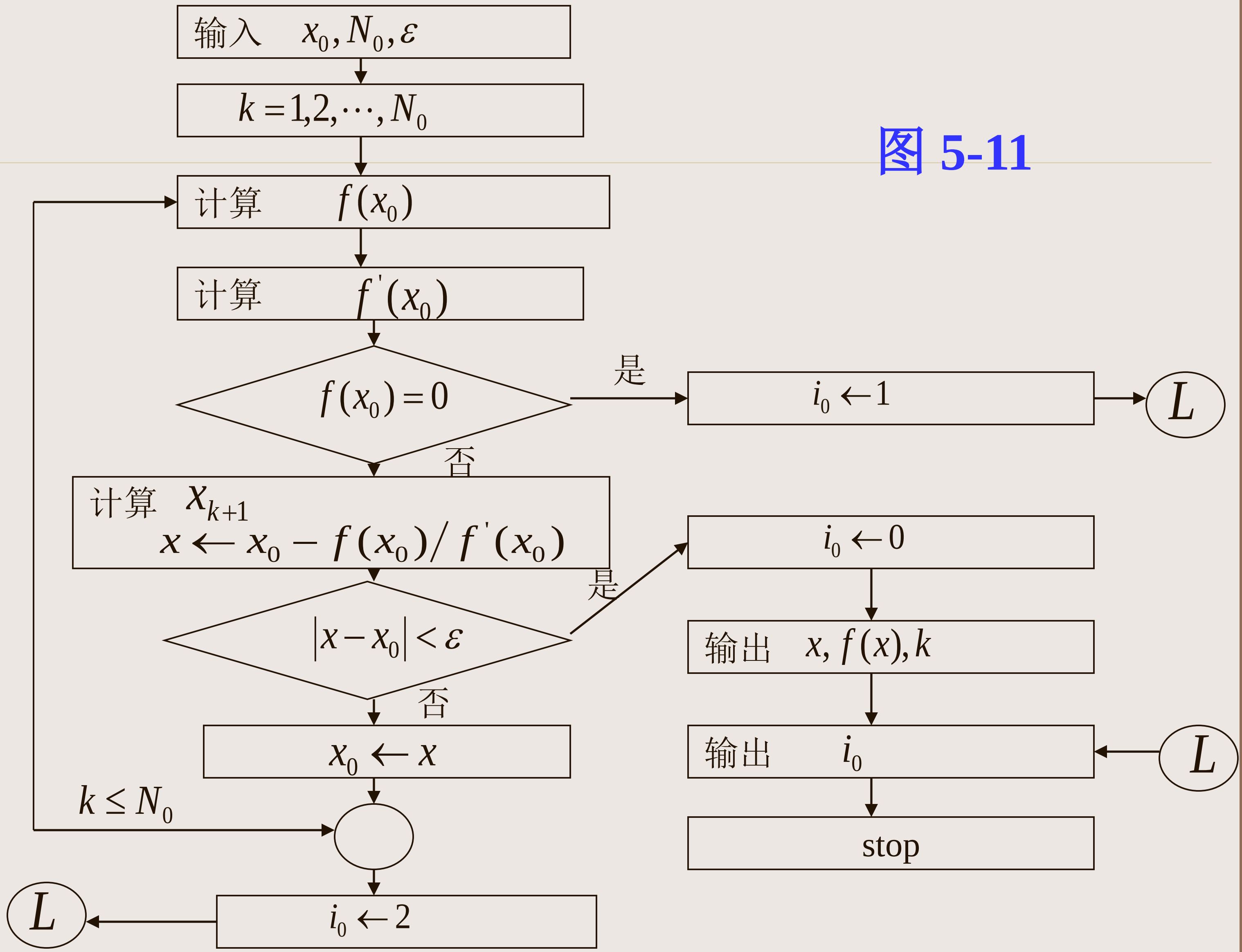
输入 x_0, N_0, ε
$k = 1, 2, \cdots, N_0$
计算 $f(x_0)$
计算 $f'(x_0)$
$f(x_0) = 0$
是
$i_0 \leftarrow 1$
L
否
计算 x_{k+1}
$x \leftarrow x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$
是
$i_0 \leftarrow 0$
$|x - x_0| < \varepsilon$
输出 $x, f(x), k$
否
$x_0 \leftarrow x$
输出 i_0
L
$k \le N_0$
stop
L
$i_0 \leftarrow 2$

图 5-11

牛顿法：设有方程 $f(x)=0$ ，

（1） 选择合适的初值 x_0 ；

（2） $k=1,2,\cdots,N_0$ ，计算

$$x_{k+1}=x_k-f(x_k)/f'(x_k)$$

其中 N_0 表最大迭代数，当 $|x_{k+1}-x_k|<\varepsilon$ 时，迭代终止。

$I_0=0$ 表示求得满足给定精度的近似根。

$I_0=1$ 表示 $f'(x_0)=0$ 计算中断。

$I_0=2$ 表示迭代 N_0 次后精度要求仍不满足。

§ 5 正 割 法

若函数 $f(x)$ 比较复杂，求导可能有困难，此时可将牛顿公式中 $f'(x)$ 近似用差商来代替，即

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

于是得到计算公式：

$$\begin{cases} \text{初值 } x_0, x_1 \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}) \\ (k=1,2,\cdots) \end{cases} \tag{5.1}$$

(5.1)就是正割法公式(图 5-12)。

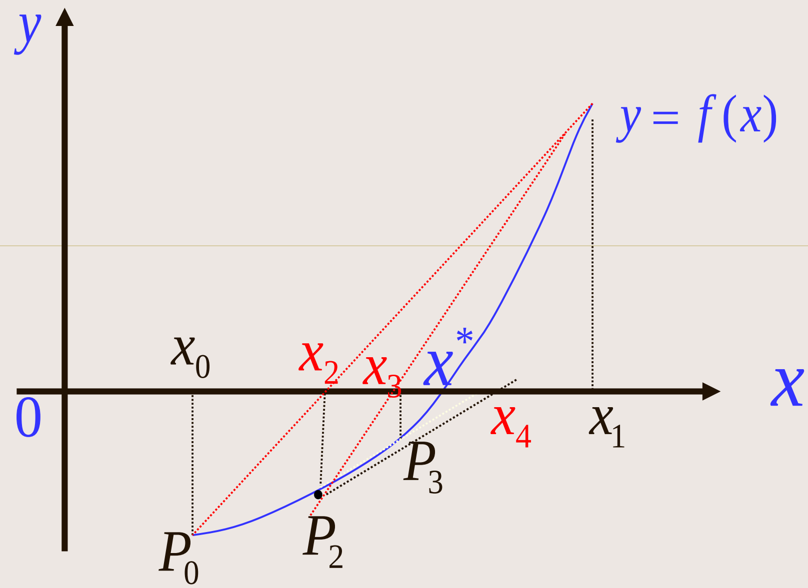

图 5-12

正割法公式（5.1）可从下述想法得到：

设方程 $f(x)=0$，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，于 $[a,b]$连续，如果已知 x_{k-1},x_k，则可用通过两点$P_1(x_{k-1},f(x_{k-1})),P_2(x_k,f(x_k))$ 的线性函数$P(x)$近似代替 $f(x)$，且求$P(x)=0$的根记为 x_{k+1} 作为 $f(x)=0$ 的近似根，其中$P(x)$ 为：

$$P(x)=f(x_k)+\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}(x-x_k)$$

x_{k+1}即为(5.1)，正割法与牛顿法相比，其收敛速度比较慢。

例 11　用正割法求方程 $f(x)=x^3-3x^2-x-9=0$于 $(-2,-1.5)$内的根。

解　取初值 $x_0=-2, x_1=-1$，计算结果见**表5-11**。

表 5-11

k	x_k	$f(x_k)$
0	-2	-9
1	-1	6
2	-1.4	1.776000
3	-1.499	0.389743
4	-1.526841	-0.026330
5	-1.525079	0.000348
6	-1.525102	0.000000

§ 6 迭代法的收敛阶和Aitken加速方法

在迭代法定理4的条件下，且 $g'(x^*)\neq 0$，由中值公式有

$$x^*-x_{k+1}=g(x^*)-g(x_k)=g'(c)(x^*-x_k) \qquad \textbf{(6.1)}$$

其中c在x^*与x_k之间，且由 $x_0\in S$，于是 $x_k\in S, c\in S$ 。又由 **(6.1)** 式及$g'(x)$的连续性，x_k 的误差 x^*-x_k 有关系

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x^*-x_{k+1}}{x^*-x_k}=g'(x^*) \qquad \textbf{(6.2)}$$

由定理5可知，求解方程 $f(x)=0$的牛顿法产生的x_k的误差 x^*-x_k 有关系

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x^*-x_{k+1}}{(x^*-x_k)^2}=-\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \qquad \textbf{(6.3)}$$

一般情况，设有方程 $x=g(x)$及迭代过程

$$\begin{cases} x_0 \text{（初值）} \\ x_{k+1} = g(x_k), (k = 0,1,2,\cdots) \end{cases} \quad (6.4)$$

且设 $\{x_k\}$ 收敛于 x^*。

如果误差有关系

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x^* - x_{k+1}|}{|x^* - x_k|^p} = c \neq 0 \quad (6.5)$$

其中 P 为实数且 $P \geq 1$，C 为正常数，称迭代过程为 P 阶收敛，当 $P = 1$ 时（且要求0<c<1）称迭代过程为**线性收敛**，当 $P > 1$ 时称迭代过程为**超线性收敛**，当 $P = 2$ 时称迭代过程为**二次收敛**（或为**平方收敛**）。

当一迭代过程为 P 阶收敛时，**(6.5)** 表示当 x_k 充分接近根 x^* 时有

$$|x^* - x_{k+1}| \approx c|x^* - x_k|^p \quad (6.6)$$

(6.6)反映了 x_k 在接近收敛于 x^* 过程中，每迭代一次近似解误差的缩减速度，当 C 数值不大时，近似解误差下降速度主要取决于**(6.6)**中的幂次 P 。

当 P 越大，$\{x_k\}$收敛于 x^* 速度就越快，于是P可以作为衡量迭代法收敛速度的一种度量。因此，P 值的大小是衡量一个迭代过程优劣的标志之一。

于是，一般迭代法$x_{k+1}=g(x_k)$，当 $g'(x^*)\neq 0$ 时迭代过程为线性收敛（$P=1$，**(6.2)**式）。牛顿法具有二阶收敛（由**定理5**及**(6.3)**式，$P=2$）。牛顿法在接近收敛过程中，近似根x_k 的误差将是平方地下降，因此牛顿法在单根邻近具有 较快的收敛速度。但牛顿法对初值要求比较苛刻。初值选取不好，牛顿法可能发散（**图5-13**）。当 x^* 为 $f(x)=0$ 二重根时，则牛顿法为线性收敛。

对于收敛较慢数列$\{x_k\}$（例如，x_k 由迭代过程$x_{k+1}=g(x_k)$产生），一个补救的方法是采用加速度公式。

设有

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*,\text{且}\lim_{k\to\infty}\frac{x^*-x_{k+1}}{x^*-x_k}=c(0<c<1)$$

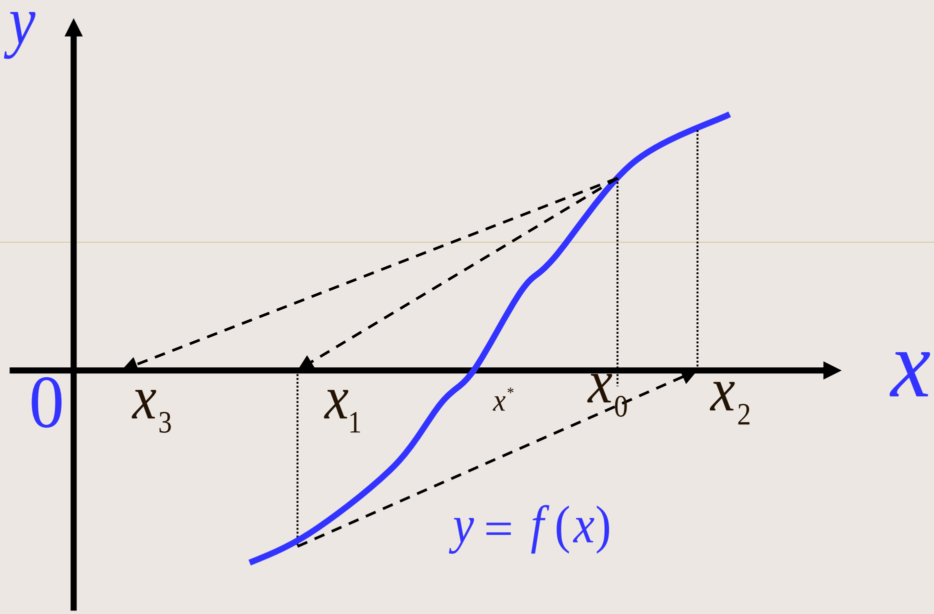

图5-13

于是

$$\frac{x^*-x_{k+1}}{x^*-x_k}\approx c \qquad \textbf{(6.7)}$$

则 x^* 能由 x_k, x_{k+1}, x_{k+2} 用下述方程确定，事实上，由**(6.7)**有

$$\frac{x_{k+2}-x^*}{x_{k+1}-x^*} \approx \frac{x_{k+1}-x^*}{x_k-x^*}$$

解出x^*，则得

$$x^* \approx \frac{x_k x_{k+2}-x_{k+1}^2}{x_{k+2}-2x_{k+1}+x_k}$$

$$\approx x_k-\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{x_{k+2}-2x_{k+1}+x_k} \equiv x' \qquad (6.8)$$

上式说明，当（6.7）得到较好的满足时，则 x' 是近似值 x_{k+2} 的很大的改进。于是，由数列$\{x_k\}$可定义一新的数列 $\{\hat{x}_k\}$

定义

$$\hat{x}_k = x_k - \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{x_{k+2}-2x_{k+1}+x_k},(k=0,1,2\cdots) \qquad \textbf{(6.9)}$$

且序列 $\{\hat{x}_k\}$ 可能比 $\{x_k\}$ 更快的收敛于 x^*。这种由给出的数列 $\{x_k\}$（收敛较慢）来计算新数列 $\{\hat{x}_k\}$ 的方法称为**Aitken加速方法**。

当迭代过程收敛较慢时，一般可用**Aitken**方法加速，但有时**Aitken**方法加速可能失败，如当 $g'(x)$ 起伏很大，初值 x_0 和根 x^* 有较大的距离时，**Aitken**加速就可能失败。

将 Aitken 加速方法用于迭代法： 设有方程 $x=g(x)$，x_0 为初值。

（1）迭代

$$y_k = g(x_k), z_k = g(y_k)\ (k=0,1,2,\cdots) \qquad \textbf{(6.10)}$$

（2）加速

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k}(k=0,1,2,\cdots) \qquad \textbf{(6.11)}$$

例 12 设有方程 $x=e^{-x}$，试用 Aitken 方法求 $[0.5,0.6]$内方程根的近似值。

解 迭代过程

$$\begin{cases} x_0=0.5 \\ x_{k+1}=e^{-x_k},(k=0,1,2\cdots) \end{cases}$$

计算到 $x_{23}=0.567143438$ 方程的精确解为

$$x^*=0.56714329\cdots$$

$$|x_{23}-x^*|\approx 0.15\times 10^{-6}$$

现用法加速（即(6.10)，(6.11)式）。结果如表5-12。且

$$|x_2-x^*|\approx 0.2\times 10^{-7}$$

加速效果较好。

表 5-12

k	x_k	y_k	z_k
0	0.5	0.60653066	0.5423921
1	0.56762388	0.56687079	0.56729786
2	0.56714331		

小　　结

本章讨论了计算机上常用的求解非线性方程一些数值方法。

二分法可用来计算 $f(x)=0$ 于[a,b]的所有实根，且方法简单，对函数 $f(x)$ 只要连续即可。但二分法收敛较慢。

解非线性方程的迭代法。是一种逐次逼近的方法。迭代法一般具有线性收敛速度。此时。可采用Aitken加速方法，使其收敛得到加速。

牛顿方法也是一种迭代法，牛顿法的特点是在单根邻近收敛快。具有2价收敛速度，但牛顿法初值选取要求比较可刻，即要求初值选取充分靠近方程的根，否则牛顿法可能不收敛。利用牛顿法求重根时收敛缓慢。

如果计算函数 $f(x)$ 的一介导数比较复杂，可采用正割法求根。正割法是利用线性内插或外插来改善初值 x_0, x_1的一种插值方法。公式中不需要计算 $f'(x)$，且正割法收敛阶为1.618，但初值一般要求充分靠近根。

习　题　五

1.设方程为 $x^4-3x+1=0$, 用二分法求方程在[0.3，0.4]内的一个实根，使精确到小数后第 5 位。

2.用二分法求方程 $x^3+x-4=0$,在.[1，2]内的根其误差满足 $\left|x^*-x_k\right|<10^{-4}$所需要分半次数。

3. 设有方程 $f(x)=e^x-\sin x=0$:

(1) $f(x)=0$于 $(-2\pi,\pi)$内有几个根；

(2) 试将 $f(x)=0$于 $(-2\pi,\pi)$转化为等价方程组 $x=g(x)$（可有几种）。

4. 设有方程 $x=\cos x$，试确定有根区间 $[a,b]$且使取 $x_0\in[a,b]$时迭代过程 $x_{k+1}=\cos x_k$ 收敛。

5. 设有方程$f(x)=e^x+10x-2=0$。试用迭代法

$$x_{k+1}=(2-e^{x}k)/10 \qquad \text{（取 } x_0=0.0, k=0,1\cdots \text{）}$$

求方程近似根，要求精确到小数后第 3 位。

6. 为求方程 $x^3-x^2-1=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近一根，现将方程转化为等价形式且建立迭代公式：

(1) $x=1+\dfrac{1}{x^2}$，迭代公式 $x_{k+1}=1+\dfrac{1}{x_k^2}\equiv g_1(x_k)$;

(2) $x^2=\dfrac{1}{x-1}$，迭代公式 $x_{k+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x_k-1}}\equiv g_2(x_k)$.

这两种迭代过程都收敛吗？

7. 设有方程 $f(x)=0$ ，其中设$f'(x)$存在，且对一切 x 值满足 $0<m\le f'(x)\le M$ ，构造迭代过程

$$x_{k+1}=x_k-\lambda f(x),(k=0,1,2,\cdots;\lambda\text{为常数.})$$

试证明当 λ 选取为满足 $0<\lambda<\frac{2}{M}$ 的任意数时，对任意选取的初值 x_0，上述迭代过程收敛。

8. 用牛顿访法求下述满足 $|x_{k+1}-x_k|<10^{-5}$ 的近似根。

(1) $x^2+10\cos x=0$;

(2) $f(x)=\arctan x=0$

9. 用牛顿法计算具有4 位有效数字的近似值。

10. 应用牛顿法于方程 $x^n-a=0(a>0)$，试导出一个求 $x=\sqrt[n]{a}$ 的迭代过程。

11. 设有方程 $f(x)=x^3+4x^2-10=0$

(1) 画出 $y=f(x)$的草图；

(2) 试分别取初值 $x_0=1.0,x_0=-5,$ 用牛顿法求 $f(x)=0$ 于 $[1,2]$ 实根且要求 $|x_{k+1}-x_k|<10^{-3}$ 。

12. 设 $f(x)$于$[a,b]$连续且 $f(a)\cdot f(b)<0, f(x)=0$于$[a,b]$内有一实根,试建立试位法计算公式。

(1) 每次搜索有根区间 $[a_k,b_k]$；

(2) 且于 $[a_k,b_k]$ 用过两点 $(a_k, f(a_k)),(b_k, f(b_k))$ 直线近似代替 $f(x)$ 建立求根公式且划出试位法计算框图。

13. 选取常数 λ 使得

$$x_{k+1}=(\lambda x_k+1-\sin x_k)/(1+\lambda)$$

成为求 $1-x-\sin x=0$ 的 $x_0=0.5$ 附近的根的快速收敛过程。且用初值 $x_0=0.5$ 计算迭代的前几步。