微积分选题

微积分选题
- 基础公式例题管理：
  - 拉格朗日乘数法与拐点
  - 隐函数求导（多元、方程组）
  - 第一类曲线
  - 第二类曲线（不含格林）
  - 格林公式
  - 第一类曲面
  - 第二类曲面（不含高斯）
  - 高斯应用（第二类曲面）
  - 斯托克斯（第二类曲线）
  - 简单常数项级数的证明：（必要条件，柯西收敛，比较判别（放缩），达朗贝尔（n趋近正无穷的邻项比较），柯西根植判别法，积分法，莱布尼茨判别法，柯西定理（柯西乘积判别法），阿贝尔判别法（收+单调有界），迪利克莱判别法（有界+单减于0）
  - 函数项级数
  - 幂级数（达朗贝尔/根值判定收敛半径）
  - 泰勒级数及其应用
  - 广义积分的敛散性
  - 傅里叶级数
  - 全部的微分方程
- 一些证明和新技巧
- 公式总结

基础公式例题管理：

1．求过直线 $L:\begin{cases}10x+2y-2z=27,\\ x+y-z=0\end{cases}$ 且与曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 相切的平面方程.

解 设$F(x,y,z)=3x^2+y^2-z^2-27$，则曲面法向量为

$$\vec{n}_1=\{F_x,F_y,F_z\}=2\{3x,y,-z\}$$

过直线$\begin{cases}10x+2y-2z=27\\ x+y-z=0\end{cases}$的平面束方程为

$10x+2y-2z-27+\lambda(x+y-z)=0$，即$(10+\lambda)x+(2+\lambda)y-(2+\lambda)z-27=0$

其法向量为

$$\vec{n}_2=\{10+\lambda,2+\lambda,-(2+\lambda)\}$$

设所求切点为$P_0(x_0,y_0,z_0)$，则

$$\begin{cases}\dfrac{10+\lambda}{3x_0}=\dfrac{2+\lambda}{y_0}=\dfrac{2+\lambda}{z_0}\\ 3x_0^2+y_0^2-z_0^2=27\\ (10+\lambda)x_0+(2+\lambda)y_0-(2+\lambda)z_0-27=0\end{cases}$$

解得$x_0=3,y_0=1,z_0=1,\lambda=-1$，或$x_0=-3,y_0=-17,z_0=-17,\lambda=-19$

所求切平面方程为

$$9x+y-z-27=0\text{或}9x+17y-17z+27=0$$

拉格朗日乘数法与拐点

1．求函数$f(x,y)=(1+e^y)\cos x-ye^y$的极值，并讨论是极大还是极小.

一、1.　由$\begin{cases}f'_x=-(1+e^y)\sin x=0,\\ f'_y=e^y(\cos x-1-y)=0\end{cases}$得驻点$P_1(2k\pi,0)$，$P_2((2k-1)\pi,-2)$，$k\in\mathbb{Z}$.

$f''_{xx}=-(1+e^y)\cos x$，$f''_{xy}=-e^y\sin x$，$f''_{yy}=e^y(\cos x-y-2)$，

对于P_1，$A=-2,B=0,C=-1,B^2-AC<0,A<0$，所以$f(P_1)=2$是极大值；

对于P_2，$A=1+e^{-2},B=0,C=-e^{-2},B^2-AC>0$，所以$P_2$不是极值点.

隐函数求导（多元、方程组）

1，采取一般的方程方法，然后求解；采取公式，记得基本的F'x这种的求解办法。

2．设$u=u(x,y),v=v(x,y)$由方程组$\begin{cases}u^2-v+xy=0,\\ u+v^2+x-y=0\end{cases}$所确定，求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

2. 设 $F=u^2-v+xy, H=u+v^2+x-y$, 则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\frac{D(F,H)}{D(x,v)}}{\frac{D(F,H)}{D(u,v)}}=-\dfrac{2vy+1}{4uv+1}, \dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{\frac{D(F,H)}{D(u,y)}}{\frac{D(F,H)}{D(u,v)}}=\dfrac{2u+x}{4uv+1}$.

第一类曲线

投影到一维上，采用$\sqrt{1+f'(x)^2}$

第二类曲线（不含格林）

格林公式

（这是挖空格林）

8. 计算曲线积分 $\displaystyle\int_l \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中 l 为椭圆周 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$, 积分按逆时针方向进行.

8. $P=\dfrac{-y}{x^2+y^2}, Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$, 令 $c: x^2+y^2=1$, 取逆时针方向，则由格林公式可得 $\displaystyle\int_{l+c^-} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=0$, 所以 $\displaystyle\int_l \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_c \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi$.

第一类曲面

第二类曲面（不含高斯）

高斯应用（第二类曲面）

2. 计算曲面积分 $\displaystyle\iint_S (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(y-z)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 S 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0, z=3$ 所围成的空间闭区域 V 的整个边界曲面的外侧.

2. $P=(y-z)x,\ Q=0,\ R=x-y$, 由高斯公式，

$$\text{原式}=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\iiint_V(y-z)\,\mathrm{d}V=-\iiint_V z\,\mathrm{d}V=\int_0^3 z\,\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{9}{2}\pi.$$

四、(10分) 计算第二类曲面积分 $I_3=\displaystyle\iint_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是下半球面 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$, 取下侧.

四、 设曲面 $S: z=0, (x^2+y^2\le 1)$, 取上侧，则

$$\iint_{\Sigma+S_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_\Omega(2z+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 2r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r+3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$$

$$I_3=\frac{3\pi}{2}-\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3\pi}{2}-\iint_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3\pi}{2}-\pi=\frac{\pi}{2}.$$

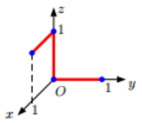
斯托克斯（第二类曲线）

三、(10分) 设函数 $f(x), g(x)$ 连续可微，$f(0) = g(0) = 0$，使得曲线积分

$$\int_{(0,1,0)}^{(1,0,1)} \left((x^2 - f(x))y + \frac{1}{2}g(x)y^2\right) \mathrm{d}x + \left(f(x)y - g(x)\right) \mathrm{d}y + \mathrm{d}z$$

与路径无关，求出 $f(x), g(x)$，并求出该曲线积分的值.

三、 $P = (x^2 - f(x))y + \frac{1}{2}g(x)y^2$，$Q = f(x)y - g(x)$，$R = 1$，积分与路径无关的充要条件是 $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$，$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$，$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$，即 $f'(x)y - g'(x) = x^2 - f(x) + g(x)y$，整理得 $(f'(x) - g(x))y = g'(x) - f(x) + x^2$ 此式对所有的 x, y 都成立，必有 $f'(x) - g(x) = 0, g'(x) - f(x) + x^2 = 0$.
整理得 $f''(x) - f(x) = -x^2$，这是二阶非齐次线性常系数微分方程，且有初始条件 $f(0) = 0, g(0) = f'(0) = 0$，解得 $f(x) = -e^{-x} - e^x + x^2 + 2, g(x) = f'(x) = e^{-x} - e^x + 2x$.



因为积分与路径无关，沿如图所示折线积分，可得

原式 $= \int_0^1 0\,\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}z + \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 1$.

三、(10分) 计算 $I_2 = \oint_C (y^2 - z^2)\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\mathrm{d}z$，其中 C 是立方体 $0 \le x \le a, 0 \le y \le a, 0 \le z \le a$ 的表面与平面 $x + y + z = \frac{3a}{2}$ 的交线，从 z 轴正向看去是逆时针方向.

三、 设 C 所围的正六边形为 $S : x + y + z = \frac{3a}{2}$，取上侧，则 S 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$. 由斯托克斯公式，

$$I_2 = -\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_S (x + y + z)\mathrm{d}S = -\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3a}{2}\iint_S \mathrm{d}S = -\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 = -\frac{9}{2}a^3.$$

简单常数项级数的证明：（必要条件，柯西收敛，比较判别（放缩），达朗贝尔（n趋近正无穷的邻项比较），柯西根植判别法，积分法，莱布尼茨判别法，柯西定理（柯西乘积判别法），阿贝尔判别法（收+单调有界），迪利克莱判别法（有界+单减于0）

3. 讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^p \ln\frac{n+2}{n+1}$ $(p \in \mathbb{R})$ 的敛散性.

3. $\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^p \ln\frac{n+2}{n+1} = \frac{\ln(1 + \frac{1}{n+1})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^p} \sim \frac{1}{2^p n^{\frac{p}{2}+1}}$，仅当 $\frac{p}{2} + 1 > 1$ 即 $p > 0$ 时原级数收敛.

五、(10分) 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$，判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性；若收敛，求其和.

五、(10分) 设$a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$, 判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$的敛散性；若收敛，求其和.

解：$x>0$时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)$, 令$x=\frac{1}{k}$, 则$\frac{1}{k+1}<\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$, 取$k=1,2,\cdots,n-1$,

再将各式相加可得$a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<\ln n+1<2\ln n\ (n\ge 3)$, 所以$\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}<\frac{2\ln n}{n^2}$.

而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\ln n}{n^2}\cdot n^{\frac{3}{2}}=0$, 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\ln n}{n^2}$收敛. 由比较判别法，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$收敛.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}a_k\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{a_1}{2}+\frac{a_2-a_1}{3}+\cdots+\frac{a_n-a_{n-1}}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}$$

$$=1-\frac{1}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}, \text{ 所以}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}S_n=1.$$

五、(10分) 设$a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$, 判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$的敛散性；若收敛，求其和.

五、(10分) 设$a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$, 判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$的敛散性；若收敛，求其和.

解：$x>0$时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)$, 令$x=\frac{1}{k}$, 则$\frac{1}{k+1}<\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$, 取$k=1,2,\cdots,n-1$,

再将各式相加可得$a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<\ln n+1<2\ln n\ (n\ge 3)$, 所以$\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}<\frac{2\ln n}{n^2}$.

而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\ln n}{n^2}\cdot n^{\frac{3}{2}}=0$, 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\ln n}{n^2}$收敛. 由比较判别法，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$收敛.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}a_k\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{a_1}{2}+\frac{a_2-a_1}{3}+\cdots+\frac{a_n-a_{n-1}}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}$$

$$=1-\frac{1}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}, \text{ 所以}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}S_n=1.$$

2. 讨论数项级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{6})}{\sqrt{n}}$的敛散性. 如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

2. 解：因为数列$\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$单调减少趋于零,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{6}\right|=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left|\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{k\pi}{6}\sin\frac{\pi}{12}\right|=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{12}-\cos\frac{(2k+1)\pi}{12}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left|\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{(2n+1)\pi}{12}\right|\le\frac{1}{\sin\frac{\pi}{12}},$$

故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{6}$的部分和有界. 由狄利克莱判别法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{6}}{\sqrt{n}}$收敛.

又$\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{6}}{\sqrt{n}}\right|\ge\frac{\sin^2\frac{n\pi}{6}}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2\sqrt{n}}-\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{2\sqrt{n}}$. 与上面的证明类似，可以知道级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{2\sqrt{n}}$收敛，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}$发散. 一个发散级数与一个收敛级数逐项相减所得的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{6}}{\sqrt{n}}$必发散，由比较判别法可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{6}}{\sqrt{n}}\right|$发散. 综上所述，原级数条件收敛.

函数项级数

幂级数（达朗贝尔/根值判定收敛半径）

泰勒级数及其应用

和拆项，差裂项，其他没啥子

五、(10分) 试将函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4x+14}{(x-3)^2(2x+5)}$ 展成马克劳林级数，并写出其收敛域.

五、 $f(x)=\dfrac{x^2-4x+14}{(x-3)^2(2x+5)}=\dfrac{1}{2x+5}+\dfrac{1}{(x-3)^2}=\dfrac{1}{5}(1+\dfrac{2}{5}x)^{-1}+\dfrac{1}{9}(1-\dfrac{x}{3})^{-2}$

$$(1+\frac{2}{5}x)^{-1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)(-2)\cdots(-n)}{n!}(\frac{2}{5}x)^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{5^n}x^n,\quad x\in(-\frac{5}{2},\frac{5}{2}),$$

$$(1-\frac{x}{3})^{-2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)(-3)\cdots(-n-1)}{n!}(-\frac{x}{3})^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}x^n,\quad x\in(-3,3),$$

所以 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{3^{n+2}}+(-1)^n\dfrac{2^n}{5^{n+1}}\right)x^n,\quad x\in\left(-\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{2}\right).$

广义积分的敛散性

1.x^p 判断法，通过乘上这个判断

2.等效法，等效于某某x^{-p}

6. 判别广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^2}\mathrm{d}x\ (p\in\mathbb{R})$ 的敛散性.

6. $x=0,x=+\infty$ 是两个奇点，原式$=\displaystyle\int_0^1\frac{x^p}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^2}\mathrm{d}x=I_1+I_2,$

对于 I_1, $x=0$ 是唯一奇点，$\dfrac{x^p}{1+x^2}\sim x^p=\dfrac{1}{x^{-p}}$, 所以 I_1 仅当 $-p<1$ 即 $p>-1$ 时收敛；

对于 I_2, $x=+\infty$ 是唯一奇点，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^{2-p}\cdot\frac{x^p}{1+x^2}=1$, 所以 I_2 仅当 $2-p>1$ 即 $p<1$ 时收敛；

综上，原广义积分仅当 $-1<p<1$ 时收敛.

3. 讨论广义积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

3. $x=1$ 是奇点. $\displaystyle\lim_{x\to1^-}\frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\cdot\sqrt{1-x}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^3}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}=\frac{1}{2}$, 所以广义积分收敛.

傅里叶级数

四、(10分) 1. 设函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，它在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=\pi^2-x^2$, $(-\pi\le x\le\pi)$, 求函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅立叶级数展开式；

2. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ 的和.

3. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

四、 1. 显然 $f(x)$ 是偶函数，且 $f(x)$ 连续. 所以 $b_n=0\ (n=1,2,\cdots)$, $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi^2$, $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\cos nx\,\mathrm{d}x=(-1)^{n+1}\frac{4}{n^2}$, 故 $f(x)=\pi^2-x^2=\frac{2\pi^2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4}{n^2}\cos nx$, $(-\pi\le x\le\pi)$.

在上式中分别令 $x=0$, $x=\pi$ 可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

全部的微分方程

1. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sin(1+x+y), y(0)=-1$ 的特解.

1. $\tan(1+x+y)-\sec(1+x+y)=x-1.$

三、(10分) 设函数 $f(x)$ 二阶连续可微，满足 $\int_0^x(x+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t=x^2+e^x-f(x)$, 求函数 $f(x)$.

三、(10分) 将 $x=0$ 代入 $\int_0^x(x+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t=x^2+e^x-f(x)$, 可得 $f(0)=1$.

$\int_0^x(x+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t=x^2+e^x-f(x)$ 化简得 $(x+1)\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x tf'(t)\,\mathrm{d}t=x^2+e^x-f(x)$,

两边对 x 求导数得 $\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t+(x+1)f'(x)-xf'(x)=2x+e^x-f'(x)$,

即 $f(x)-f(0)+f'(x)=2x+e^x-f'(x)$, 化简得 $f'(x)+\frac{1}{2}f(x)=x+\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}$,

这是一阶线性非齐次方程,解之得 $f(x)=e^{\int-\frac{1}{2}\mathrm{d}x}\left(C+\int(x+\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2})e^{\int\frac{1}{2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)=Ce^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{3}e^x+2x-3$

又因为 $f(0)=1$, 所以 $C=\frac{11}{3}$, 所以 $f(x)=\frac{11}{3}e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{3}e^x+2x-3$.

八、(10分) (1) 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的收敛域;

(2) 设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$, 建立 $S(x)$ 所满足的微分方程，并求 $S(x)$.

八、 (1) $u_n(x)=\frac{x^{3n}}{(3n)!}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^{3n+1}(3n)!}{|x|^{3n}(3n+3)!}=0$, 所以收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

(2) $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$, $S'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}$, $S''(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$, 可得微分方程 $\begin{cases}S''+S'+S=e^x,\\ S(0)=1,\ S'(0)=0.\end{cases}$

特征方程为 $\lambda^2+\lambda+1=0$, $\lambda=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$. 设特解为 $y^*=Ae^x$, 代入原方程得 $y^*=\frac{1}{3}e^x$.

方程的通解为 $S=e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{1}{3}e^x$.

由初始条件 $S(0)=1, S'(0)=0$ 可得 $C_1=\frac{2}{3}, C_2=0$, 所以 $S(x)=\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}e^x$.

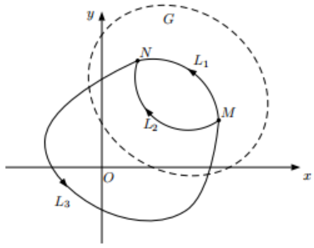
($S(x)$满足的微分方程也可以是 $S'''(x)-S(x)=0, S(0)=1, S'(0)=S''(0)=0$.)

一些证明和新技巧

五、(本题非商学院的学生必做题，10分) 已知曲线积分 $\int_L \frac{1}{f(x)+8y^2}(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)$ 恒等于常数 A，其中函数 $f(x)$ 连续可导，$f(1)=1$，L 为任意包围原点 $O(0,0)$ 的简单闭曲线，取正向，

(1) 设 G 为不包含原点的单连通区域，证明：G 内的曲线积分 $\int_C \frac{1}{f(x)+8y^2}(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)$ 与路径无关，其中 C 为完全位于 G 内的曲线；

五、 证明：(1) 如图所示，设 M,N 是 G 内任意两点，L_1,L_2 是 G 内连接 M,N 的任意两条曲线，只需要证明



$$\int_{L_1} \frac{1}{f(x)+8y^2}(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)=\int_{L_2} \frac{1}{f(x)+8y^2}(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)$$

取 L_3 为连接 M,N 的曲线，使得 L_1+L_3 为包围原点的简单闭曲线，则 L_2+L_3 也是包围原点的简单闭曲线，据题意可知

$$\int_{L_1+L_3} \frac{1}{f(x)+8y^2}(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)=\int_{L_2+L_3} \frac{1}{f(x)+8y^2}(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)=A,$$

所以 $$\int_{L_1} \frac{1}{f(x)+8y^2}(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)=\int_{L_2} \frac{1}{f(x)+8y^2}(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x).$$

六、(8分) 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的连续可微函数，使得广义积分 $\int_1^{+\infty}|f'(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛，证明：如果级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ 收敛，则广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

六、证明：因为 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_1^A f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\left(\int_1^{[A]} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{[A]}^A f(x)\,\mathrm{d}x\right)$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{[A]-1}\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{[A]}^A f(x)\,\mathrm{d}x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x+\lim_{A\to+\infty}\int_{[A]}^A f(x)\,\mathrm{d}x.$$

要证广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，只需证级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，极限 $\lim_{A\to+\infty}\int_{[A]}^A f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在.

因为 $\int_1^{+\infty}|f'(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 所以 $\int_1^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 而 $\int_1^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x=\lim_{x\to+\infty}f(x)-f(1)$, 所以 $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. 若 $\lim_{x\to+\infty}f(x)\neq 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ 发散，所以 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

$$\min_{x\in[[A],A]} f(x)\cdot(A-[A])\le\int_{[A]}^A f(x)\,\mathrm{d}x\le\max_{x\in[[A],A]} f(x)\cdot(A-[A]),$$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$, 故 $\lim_{A\to+\infty}\min_{x\in[[A],A]}f(x)=\lim_{A\to+\infty}\min_{x\in[[A],A]}f(x)=0$. 而 $|A-[A]|\le 1$, 由夹逼准则可知 $\lim_{A\to+\infty}\int_{[A]}^A f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

令 $a_n=\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x-f(n)$,

$$|a_n|=\left|\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x-f(n)\right|=\left|\int_n^{n+1}(f(x)-f(n))\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_n^{n+1}\left(\int_n^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\right|$$

$$\le\int_n^{n+1}\left(\int_n^{n+1}|f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\int_n^{n+1}|f'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

所以 $\sum_{k=1}^{n}|a_k|=\sum_{k=1}^{n}\left|\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x-f(k)\right|\le\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}|f'(x)|\,\mathrm{d}x=\int_1^{n+1}|f'(x)|\,\mathrm{d}x$ 有上界，

部分和数列有上界，所以正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+f(n))=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

五、（本题10分）设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)}x^{2(n+1)}$，$x\in(-1,1)$. 求出 $f(x)$ 满足的微分方程，并求解之. 计算 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n+1)!!(n+1)}$.

五、解：$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$，$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}=xs(x)$,

$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}$, 两边积分得

$$\int_0^x s(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$$

$$=x\left(4x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}\right)=x(4x+f'(x))=4x^2+xf'(x),$$

所以 $s(x)=8x+f'(x)+xf''(x)$, 故 $f''(x)=xs(x)=8x^2+xf'(x)+x^2f''(x)$，

所以 $f(x)$ 满足的微分方程为 $f''(x)-\frac{x}{1-x^2}f'(x)=\frac{8x^2}{1-x^2}$,

这是关于 $f'(x)$ 的一阶线性微分方程，解得

所以 $f(x)$ 满足的微分方程为 $f''(x)-\frac{x}{1-x^2}f'(x)=\frac{8x^2}{1-x^2}$,

这是关于 $f'(x)$ 的一阶线性微分方程，解得

$$f'(x)=\mathrm{e}^{\int\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x}\left(C_1+\int\frac{8x^2}{1-x^2}\mathrm{e}^{-\int\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(C_1+8\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(C_1+4\arcsin x-4x\sqrt{1-x^2}\right)$$

由 $f'(0)=0$ 得 $C_1=0$, 所以 $f'(x)=4\left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-x\right)$, 两边再积分得 $f(x)=2(\arcsin x)^2-2x^2+C_2$,

由 $f(0)=0$ 得 $C_2=0$, 所以 $f(x)=2(\arcsin x)^2-2x^2$

公式总结

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=1+x+\frac{1}{2!}x^2+...+\frac{1}{n!}x^n+...,x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-...+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+...,x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-...+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+...,x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n+1}x^{n+1}=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-...+\frac{(-)^n}{n+1}x^{n+1}+...,x\in(-1,1]$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+...+x^n+...,x\in(-1,1)$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n x^n+...,x\in(-1,1)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+...,x\in(-1,1)$$

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{2n+1}x^{2n+1}=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+...+\frac{(-)^n}{2n+1}x^{2n+1}+...,x\in(-1,1)$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+...,x\in(-1,1)$$

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+\frac{1382}{155925}x^{11}+.....x\in(-1,1)$$

$$\sec x=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+...,x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$$

$$\csc x=\frac{1}{x}+\frac{1}{6}x+\frac{7}{360}x^3+\frac{31}{15120}x^5+...,x\in(0,\pi)$$

常见的傅里叶展开的积分

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \qquad (n=0,1,2,3,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin(x) - 2\int x\sin(x)\,dx$$

$\int x^2\sin x\,dx=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$