离散数学选题

f(x)基于全部概率为1的设定构造出来，

2. (8 points) Suppose there are 10 persons and each of them flips a coin. We know that the probability of the 'HEAD' outcome of the *i*-th person is 1/(2i+1). What is probability that the number of 'HEAD' outcomes is even?

参考答案（其他解也可以，过程对结果错了可酌情给分）：

定义 f(x)=(2/3+1/3x) (4/5+1/5x) … (20/21+1/21x) （4'）

上式可以展开成 $f(x)=a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{10}x^{10}$ 形式。

显然，f(x)的展开式中 x 偶数次方（包括 0 次方）前的系数和即为所求。

于是，偶数次方前的系数和可以通过下式求得：

(f(1)+f(-1))/2 = 1/2 (1+ 1/3*3/5*…*19/21) = 11/21 （4'）

5. (10 points) Prove the following properties by mathematical induction.

   a) For any two elements a, b in a communitive group (S,*), and any positive integer n, $ab^n=b^na$.

   b) Using the above property to prove that $a^mb^n=b^na^m$ holds for any two elements a, b in S, and any two positive integers m, n.

参考答案：

a) BASE: 当n = 1时，因为S是communitive的，所以ab = ba

INDUCTION: 假设当n=k时，$ab^k=b^ka$。

那么当n = k + 1时，$ab^{k+1} == ab^kb = b^kab = b^kba = b^{k+1}a$

b) 可以对m使用数学归纳法证明。

BASE: 当m=1的时候，根据a的结论$ab^n = b^na$

INDUCTION: 假设当m=k时,$a^kb^n = b^na^k$.

那么当m = k + 1的时候，$a^{k+1}b^n = aa^kb^n = ab^na^k=b^naa^k = b^na^{k+1}$

但是也可以这么做：因为S是一个群，因此am仍然是S中的一个元素。直接使用a的结论，可得$a^mb^n=b^na^m$