微积分选题

基础公式管理：

第一类曲线

第二类曲线（不含格林）

格林公式

(这是挖空格林)

8. 计算曲线积分 $\displaystyle\int_l \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中 l 为椭圆周 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$，积分按逆时针方向进行.

8. $P=\dfrac{-y}{x^2+y^2}, Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$，$(x,y)\neq(0,0)$, 令 $c: x^2+y^2=1$, 取逆时针方向，则由格林公式可得 $\displaystyle\int_{l+c^-} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=0$, 所以 $\displaystyle\int_l \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_c \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi.$

第一类曲面

第二类曲面（不含高斯）

高斯应用（第二类曲面）

2. 计算曲面积分 $\displaystyle\iint_S (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(y-z)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 S 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0, z=3$ 所围成的空间闭区域 V 的整个边界曲面的外侧.

2. $P=(y-z)x$, $Q=0$, $R=x-y$, 由高斯公式，

$$\text{原式}=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\iiint_V (y-z)\,\mathrm{d}V=-\iiint_V z\,\mathrm{d}V=\int_0^3 z\,\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{9}{2}\pi.$$

斯托克斯（第二类曲线）

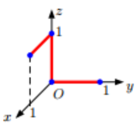
三、(10分) 设函数 $f(x), g(x)$ 连续可微，$f(0)=g(0)=0$, 使得曲线积分

$$\int_{(0,1,0)}^{(1,0,1)}\left((x^2-f(x))y+\frac{1}{2}g(x)y^2\right)\mathrm{d}x+\big(f(x)y-g(x)\big)\,\mathrm{d}y+\,\mathrm{d}z$$

与路径无关，求出 $f(x), g(x)$, 并求出该曲线积分的值.

三、 $P=(x^2-f(x))y+\dfrac{1}{2}g(x)y^2$, $Q=f(x)y-g(x)$, $R=1$, 积分与路径无关的充要条件是

$\dfrac{\partial R}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial z}$, $\dfrac{\partial P}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, 即 $f'(x)y-g'(x)=x^2-f(x)+g(x)y$, 整理得 $(f'(x)-g(x))y=g'(x)-f(x)+x^2$ 此式对所有的 x,y 都成立，必有 $f'(x)-g(x)=0, g'(x)-f(x)+x^2=0$. 整理得 $f''(x)-f(x)=-x^2$, 这是二阶非齐次线性常系数微分方程，且有初始条件 $f(0)=0, g(0)=f'(0)=0$, 解得 $f(x)=-e^{-x}-e^x+x^2+2, g(x)=f'(x)=e^{-x}-e^x+2x$.



因为积分与路径无关，沿如图所示折线积分，可得

原式 $=\displaystyle\int_0^1 0\,\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}z+\int_0^1 0\,\mathrm{d}x=1.$

简单常数项级数的证明：（必要条件，柯西收敛，比较判别（放缩），达朗贝尔（n趋近正无穷的邻项比较），柯西根植判别法，积分法，莱布尼茨判别法，柯西定理（柯西乘积判别法），阿贝尔判别法（收+单调有界），迪利克莱判别法（有界+单减于0）

函数项级数

幂级数（达朗贝尔/根值判定收敛半径）

泰勒级数及其应用

广义积分的敛散性

6. 判别广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\ (p\in\mathbb{R})$ 的敛散性.

6. $x=0,x=+\infty$ 是两个奇点，原式 $=\displaystyle\int_0^1\frac{x^p}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^2}\mathrm{d}x=I_1+I_2$,

对于 I_1, $x=0$ 是唯一奇点，$\dfrac{x^p}{1+x^2}\sim x^p=\dfrac{1}{x^{-p}}$, 所以 I_1 仅当 $-p<1$ 即 $p>-1$ 时收敛;

对于 I_2, $x=+\infty$ 是唯一奇点，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^{2-p}\cdot\frac{x^p}{1+x^2}=1$, 所以 I_2 仅当 $2-p>1$ 即 $p<1$ 时收敛;

综上，原广义积分仅当 $-1<p<1$ 时收敛.

傅里叶级数

四、(10分)　1. 设函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，它在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=\pi^2-x^2$, $(-\pi\le x\le\pi)$, 求函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅立叶级数展开式;

2. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ 的和.　　3. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

四、 1. 显然 $f(x)$ 是偶函数，且 $f(x)$ 连续. 所以 $b_n=0\ (n=1,2,\cdots)$, $a_0=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\dfrac{4}{3}\pi^2$,

$a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\cos nx\,\mathrm{d}x=(-1)^{n+1}\dfrac{4}{n^2}$, 故 $f(x)=\pi^2-x^2=\dfrac{2\pi^2}{3}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{4}{n^2}\cos nx$, $(-\pi\le x\le\pi)$.

在上式中分别令 $x=0$, $x=\pi$ 可得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

全部的微分方程

三、(10分) 设函数 $f(x)$ 二阶连续可微，满足 $\displaystyle\int_0^x(x+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t=x^2+e^x-f(x)$, 求函数 $f(x)$.

三、(10分) 将 $x=0$ 代入 $\displaystyle\int_0^x(x+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t=x^2+e^x-f(x)$, 可得 $f(0)=1$.

$\displaystyle\int_0^x(x+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t=x^2+e^x-f(x)$ 化简得 $(x+1)\displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x tf'(t)\,\mathrm{d}t=x^2+e^x-f(x)$,

两边对 x 求导数得 $\displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t+(x+1)f'(x)-xf'(x)=2x+e^x-f'(x)$,

即 $f(x)-f(0)+f'(x)=2x+e^x-f'(x)$, 化简得 $f'(x)+\dfrac{1}{2}f(x)=x+\dfrac{1}{2}e^x+\dfrac{1}{2}$,

这是一阶线性非齐次方程，解之得 $f(x)=e^{\int-\frac{1}{2}\mathrm{d}x}\left(C+\displaystyle\int(x+\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2})e^{\int\frac{1}{2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)=Ce^{-\frac{1}{2}x}+\dfrac{1}{3}e^x+2x-3$

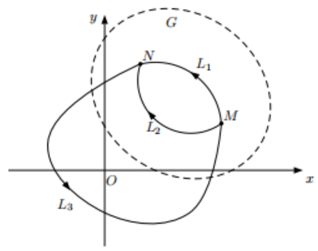
又因为 $f(0)=1$, 所以 $C=\dfrac{11}{3}$, 所以 $f(x)=\dfrac{11}{3}e^{-\frac{1}{2}x}+\dfrac{1}{3}e^x+2x-3$.

一些证明和新技巧

五、(本题非商学院的学生必做题，10分) 已知曲线积分 $\displaystyle\int_L\frac{1}{f(x)+8y^2}(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)$ 恒等于常数 A，其中函数 $f(x)$ 连续可导，$f(1)=1$，L 为任意包围原点 $O(0,0)$ 的简单闭曲线，取正向，

(1) 设 G 为不包含原点的单连通区域，证明：G 内的曲线积分 $\displaystyle\int_C\frac{1}{f(x)+8y^2}(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)$ 与路径无关，其中 C 为完全位于 G 内的曲线；

五、 证明：(1) 如图所示，设 M,N 是 G 内任意两点，L_1,L_2 是 G 内连接 M,N 的任意两条曲线，只需要证明



$$\int_{L_1}\frac{1}{f(x)+8y^2}(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)=\int_{L_2}\frac{1}{f(x)+8y^2}(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)$$

取 L_3 为连接 M,N 的曲线，使得 L_1+L_3 为包围原点的简单闭曲线，则 L_2+L_3 也是包围原点的简单闭曲线，据题意可知

$$\int_{L_1+L_3}\frac{1}{f(x)+8y^2}(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)=\int_{L_2+L_3}\frac{1}{f(x)+8y^2}(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)=A,$$

所以 $$\int_{L_1}\frac{1}{f(x)+8y^2}(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)=\int_{L_2}\frac{1}{f(x)+8y^2}(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x).$$

六、(8分) 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的连续可微函数，使得广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}|f'(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛，证明：如果级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}f(n)$ 收敛，则广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

六、证明：因为 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{A\to+\infty}\int_1^{A} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{A\to+\infty}\Big(\int_1^{[A]} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{[A]}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x\Big)$

$$= \lim_{A\to+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{[A]-1}\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{[A]}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{A\to+\infty}\int_{[A]}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

要证广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，只需证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，极限 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{[A]}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在.

因为 $\int_1^{+\infty}|f'(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 所以 $\int_1^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 而 $\int_1^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - f(1)$, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

$$\min_{x\in[[A],A]} f(x)\cdot(A-[A]) \le \int_{[A]}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x \le \max_{x\in[[A],A]} f(x)\cdot(A-[A]),$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, 故 $\lim\limits_{A\to+\infty}\min\limits_{x\in[[A],A]} f(x) = \lim\limits_{A\to+\infty}\min\limits_{x\in[[A],A]} f(x) = 0$. 而 $|A-[A]| \le 1$, 由夹逼准则可知 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{[A]}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

令 $a_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - f(n)$,

$$|a_n| = \Big|\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - f(n)\Big| = \Big|\int_n^{n+1}(f(x)-f(n))\,\mathrm{d}x\Big| = \Big|\int_n^{n+1}\Big(\int_n^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}x\Big|$$
$$\le \int_n^{n+1}\Big(\int_n^{n+1}|f'(t)|\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}x = \int_n^{n+1}|f'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

所以 $\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k| = \sum\limits_{k=1}^{n}\Big|\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x - f(k)\Big| \le \sum\limits_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}|f'(x)|\,\mathrm{d}x = \int_1^{n+1}|f'(x)|\,\mathrm{d}x$ 有上界，部分和数列有上界，所以正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + f(n)) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

公式总结

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\ldots,x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\ldots,x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\ldots,x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n+1}x^{n+1}=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\ldots+\frac{(-)^n}{n+1}x^{n+1}+\ldots,x\in(-1,1]$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots,x\in(-1,1)$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots,x\in(-1,1)$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots,x\in(-1,1)$$

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{2n+1}x^{2n+1}=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\ldots+\frac{(-)^n}{2n+1}x^{2n+1}+\ldots,x\in(-1,1)$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\ldots,x\in(-1,1)$$

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+\frac{1382}{155925}x^{11}+\ldots.x\in(-1,1)$$

$$\sec x=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+\ldots,x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$$

$$\csc x=\frac{1}{x}+\frac{1}{6}x+\frac{7}{360}x^3+\frac{31}{15120}x^5+\ldots,x\in(0,\pi)$$