Appunti di
Ricerca Operativa e Pianificazione delle Risorse

A cura di:
Francesco Refolli
Matricola 865955

Anno Accademico 2022-2023

Chapter 1

Note sul Corso

todo: segnare delle note

Part I

Teoria

Chapter 2

Modelli nella Ricerca Operativa

2.1 Introduzione

Problemi di Ottimizzazione Dato un problema di ottizzazione:

$$opt f(x)$$
$$s.a. x \in X$$

si danno le seguenti definizioni:

$f(x)$ La **funzione obiettivo** e' la funzione della quale cerchiamo un argmento $xinX$ ottimale. L'operatore di ottimizzazione *opt* trova argomenti ottimi o ottimali. Non potendo sempre disporre di ottimi assoluti, si indagano gli ottimali, i quali, come dice il nome, possono essere multipli.

opt Questo operatore e' un placeholder che sta per:

$$opt = \begin{cases} max \\ min \end{cases}$$

In particolare si nota che $max f(x) = -min(-f(x))$.
E' possibile ridursi a entrambe le situazioni per sfruttare i vantaggi di eventuali semplificazioni o riduzioni del problema iniziale!

X La **regione d'ammissibilita'** e' un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}^n$ che delimita' le possibili soluzioni al problema di ottimizzazione. Le soluzioni che non soddisfano questo requisito sono dette **soluzioni inammissibili**.

x La generica soluzione $x \in X$. In caso di funzione multivariabile, questa assume la forma di una n-upla, come si nota dal dominio della **funzione obiettivo**.

Ottimizzazione Vincolata o non Vincolata

Vincoli Se l'ottimizzazione cerca soluzioni in una regione di ammissibilita' X che sia un sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}^n$, ovvero nel caso in cui non coincida, si parla di **Ottimizzazione Vincolata**. Nel caso in cui $X = \mathbb{R}^n$ questa e' definita **Ottimizzazione non Vincolata**.

Esempi Alcuni esempi di ottimizzazione vincolata sono:

- Se $X = \mathbb{Z}^n$ si definisce **Ottimizzazione Intera**.
- Se $X = (0, 1)^n$ si definisce **Ottimizzazine Binaria**.
- Se le variabili appartengono a spazi differenti (es: $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$), si parla di **Ottimizzazione Mista**.

Programmazione Matematica Se la regione di ammissibilita' X e' espressa tramite vincoli aritmetici (equazioni e disequazioni), si tratta di **Programmazione Matematica**.

Ogni vincolo e' definito come segue:

$$v(x) = \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ g(x) = 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$$

Di consequenza la regione X e' esprimibile con:

$$X = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n \wedge g_i(x) \begin{cases} \geq \\ = & 0\} \\ \leq \end{cases}$$

Esiti di Problemi

- Si dice **Problema Inammissibile** se $X = \emptyset$. Si dice **Problema Illimitato** se non esise un ottimale, in particolare:
- Se *opt* $= min \wedge foreachc \in R, existsxin \in Xsothatf(x) \leq c$, e' illimitato inferiormente
- Se *opt* $= max \wedge foreachc \in R, existsxin \in Xsothatf(x) \geq c$, e' illimitato superiormente
- Si dice **Problema con Soluzioni Ottime Multiple** (o Infinite) se tutte le soluzioni ottimali hanno lo stesso grado di ottimizzazione, ovvero se non esiste una soluzione migliore delle altre.
- Si dice **Problema con Soluzione Ottima Unica** nel caso semplice in cui esiste una e una sola soluzione ottimale (= ottimo).

Localizzazione di Ottimi Un ottimo locale $y \in X$ si dice globale se:

$$\begin{cases} f(y) \geq f(x) & opt = max \\ f(y) \leq f(x) & opt = min \end{cases}$$

E' importante notare che un problema di ottimizzazione puo' avere sia piu' di un ottimo locale, che piu' di un ottimo globale. Un ottimo globale e' anche locale. Si mette in evidenza che i vincoli possono assumere caratteristiche non lineari se scomponibili in fattori lineari.

Linearita' Si ricorda che una funzione e' lineare se, per esempio e' nella forma $\Sigma a_i x_i + b$.

Programmazione Lineare I vincoli sono espressi tramite equazioni e disequzioni lineari, la funzione obiettivo e' lineare.

Programmazione Lineare Intera E' un problema di programmazione lineare con regione d'ammissione ristretta a $X = \mathbb{Z}^n$.

Programmazione non Lineare I vincoli o la funzione obiettivo hanno caratteristiche non lineari.

Chapter 3

Introduzione alla Programmazione Lineare

Esempio La Wyndor Glass CO produce vetri di elevata qualita', incluso finestre e porte.

- Impianto 1: produce cornici in alluminio e le altre componenti
- Impiano 2: produce cornici di legno
- Impianto 3: produce i vetri e assembla i prodotti

Si vuole produrre:

- Prodotto 1 - una porta di vetro (impianti 1, 3)
- Prodotto 2 - finestra con doppia apertura (impianti 2, 3)

La domanda e' virtualmente infinita. I prodotti sono raggruppati in lotti da 20 unita'. I tassi sono *Lotti/Settimana*. Determinare i tassi di produzione per massimizzare la produzione e il profitto finale.

Dati

Impianto	Prodotto 1	Prodotto 2	Tempo Produttivo
Impianto 1	1	0	4
Impianto 2	0	2	12
Impianto 3	3	2	18
Profitto	3000	5000	

$$maxZ = 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \tag{3.1}$$
$$x_1 \leq 4 \tag{3.2}$$
$$2 \cdot x_2 \leq 12 \tag{3.3}$$
$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 18 \tag{3.4}$$
$$x_1 \geq 0 \tag{3.5}$$
$$x_2 \geq 0 \tag{3.6}$$

Considerazioni

- Z = valore di misura di prestazione.
- x_j = livello di attivita' j.
- c_j = incremento del valore della misura di prestazione Z corrispondente all'incremento di un'unita' del valore dell'attivita' x_j.
- b_i = quantita' di risorsa i allocabile alle attivita' x_j.
- a_{ij} = quantita' di risorsa i consumata da ogni attivita' x_j.

In Programmazione Lineare la regione ammissibile e' un Poliedro Convesso in R^n Se la regione e' limitata si dice Politopo.

$$optZ = \Sigma_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \tag{3.7}$$

$$vincoli \Rightarrow \Sigma_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \tag{3.8}$$

$$c_j \rightarrow coefficiente\ di\ costo \tag{3.9}$$

$$a_{ij} \rightarrow termine\ noto\ sinistro \tag{3.10}$$

$$b_i \rightarrow termine\ noto\ destro \tag{3.11}$$

Assunzioni Un problema PL si poggia su quattro assunzioni implicite.

Proporzionalita' Il contributo di ogni attivita' al valore della funzione obiettivo e del vincolo e' proporzionale al livello di attivita'.

Additivita' Il valore della funzione obiettivo e dei vincoli e' dato dalla somma dei contributi individuali delle rispettive attivita'.

Continuita' Qualunque valore delle variabili decisionali in R^n e' accettabile.

Certezza' I parametri di un problema di PL devono essere noti con certezza.

Divisibilita' Questa assunzione non e' sempre garantita, varia in base al problema. Le variabili decisionali possono assumere qualsiasi valore all'interno della Regione di Ammissibilita', inclusi i valori non interi che soddisfino i vincoli. Quindi le variabili decisionali sono variabili continue.
In certi problemi puo' essere necessario avere soluzioni intere perche' la logica non ci consente di spezzare unita' intrinsecamente e logicamente atomice: non si possono assumere 3.5 dipendenti!

Considerazioni Pratiche

Vincoli Prolissi Alcuni vincoli possono includerne altri, in quel caso e' inutile conservarli entrambi, si puo' lasciare quello piu' "forte".

Soluzioni Intere La soluzione del problema di PL non garantisce l'assunzione di divisibilità. In certi casi sono opportune o necessarie per senso logico soluzioni intere, ma non sempre le soluzione di un problema PL le possono garantire.

Se la soluzione ottimale del problema PL e' intera allora e' anche ottimale per il problema considerato. Altrimenti si presentano due strade:

Aggiungere vincoli che garantiscano che la variaibili di decisione siano interi, riducendo il problema PL in PLI (Programmazione Lineare Intera)

Arrotondare la soluzione (per eccesso o difetto, in modo opportuno), ma questo non garantisce l'ottimalita' della soluzione intera cosi' ottenuta.

Chapter 4

Algoritmo del Simplesso

4.1 Teoria

Introduzione Questo algoritmo di tipo greedy permette di risolvere problemi di Programmazione Lineare. E' uno degli algoritmi piu' efficienti che si conoscano. Il tempo nel caso medio e' $\Theta(n)$, lineare rispetto al numero di variabili. Il tempo nel caso peggiore e' $O(e^n)$, esponenziale rispetto al numero di variabili.

Definizioni

Frontiera La **Frontiera del Vincolo** e' un vincolo della regione ammissibile che abbia $\leq$ *oppure* $=$.

Vertice Un **Vertice** e' l'intersezione di due **Frontiere di Vincolo**. I **Vertici Ammissibili** sono quelli che stanno nella **Regione Ammissibile**. Due **Vertici** si dicono adiacenti se condividono $n-1$ **Frontiere di Vincolo**.

Spigolo Uno **Spigolo** e' il segmento che collega due **Vertici** adiacenti. Gli **Spigoli Ammissibili** sono quelli che stanno nella **Regione Ammissibile**.

Test di Ottimalita' Si consideri ogni problema PL tale da ammettere soluzioni ottimali, se una soluzione vertice non ammette soluzioni certice a lei adiacenti con valore della funzione obiettivo Z migliore, allora la soluzione in questione e' ottimale.

Algoritmo

Inizializzazione Scegliere il vertice $(0,0)$ come soluzione iniziale, (vantaggiosa senza complicazione) se questa fa parte della Regione Ammissibile.

Passo Si valuta lo spostamento nei vertici ammissibili adiacenti. Con il test di ottimalita' si valuta se ci si puo' fermare. Ci si sposta nel vertice che garantisce il valore della funzione obiettivo migliore.

Concetti Chiave

1 Il metodo del simplesso non esplora, ma ispeziona solo i vertici ammissibili adiacenti. Per ogni problema PL trovare una soluzione richiede di trovare il vertice ammissibile migliore. Si richiede che la Regione Ammissibile sia limitata. Il numero di vertici sale esponenzialmente.

2 E' un algoritmo iterativo con due passi, Inizializzazione e Test di Ottimalita'.

3 Quando possibile l'inizializzazione a $(0,0)$ e' preferibile e "ottimale". Si possono applicare algoritmi appositi per garantire l'ammissibilita' della soluzione iniziale.

4 E' piu' vantaggioso ascoltare gli adiacenti che tentare di verificare vertici piu' lontani perche' in minore quantita'.

5 A partire dal vertice corrente compara i risultati ma non calcola ogni volta i valori della funzione, ma i tassi di miglioramento della funzione obiettivo.

6 E' assicurato che si ottiene ad ogni passo una soluzione migliore perche' si cerca il migliore tasso di crescita.

4.2 Procedura Algebrica

La forma standard di un problema PL comprende: opt = max, vincoli in $\geq$ e vincoli di non negativita'.
La forma aumentata consiste in: opt = max, vincoli in = e vincoli di non negativita', introducendo nuove variabili.

La soluzione del problema PL in forma aumentanta (chiamata **soluzione aumentata**) giace sulla frontiera di vincolo. Questo e' utile per utilizzare l'algoritmo del simplesso.

Forma Aumentata Si definisce modello in forma aumentata un modello di programmazione lineare formato da:

- operazione *max Z*
- vincoli in forma $\Sigma_{i=1}^{m} a_{i,j} \cdot x_{i,j} = b_j$
- $\forall i \in [1, m] \mid x_i >= 0$
- $\forall j \in [1, n] \mid b_j >= 0$

E' possibile ricondursi alla forma aumentata a partire da quella standard, ma non e' strettamente necessario.
E' preferibile ricondursi alla forma aumentata direttamente se il modello e' in forma non standard e non e' vitale.

Ottenimento Forma Aumentata Si introduce una **variabile slack** per convertire un vincolo di disuguaglianza in uguaglianza.

$$x_1 \leq 4 \tag{4.1}$$
$$x_1 \geq 0 \tag{4.2}$$

Si trasforma introducendo la variabile x_s.

$$x_1 + x_s = 4 \tag{4.3}$$
$$x_s \geq 0 \tag{4.4}$$
$$x_1 \geq 0 \tag{4.5}$$

E' possibile riscrivere anche la funzione obiettivo in questo modo:

$$max\ Z = 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \tag{4.6}$$

Diventa:

$$max\ Z \tag{4.7}$$
$$Z - 3 \cdot x_1 - 5 \cdot x_2 = 0 \tag{4.8}$$
$$x_s1, x_2, Z \geq 0 \tag{4.9}$$

Variabili di Base Detto un modello con z variabili (x decisionali, y slack) e w equazioni. Ho $g = z - grado(matrice\ vincoli)$ gradi di liberta'
Quindi fisso g variabili uguali a zero per calcolare le altre. Queste g variabili vengono dette **non di base**. Il resto vengono dette **di base**.
L'insieme delle variabili di base costituiscono una **base**.
Se le variabili di base soddisfano i requisiti di non negativita', la soluzione viene detta **soluzione di base ammissibile**.

Una soluzione di base e' una soluzione della forma aumentata dove le variabili possono essere di base o non di base.

Due soluzioni di base ammissibili sono adiacenti se condividono le stesse variaili non di base tranne una (non i valori, le variabili!).
Questo implica che una variabile non di base e una variabile di base si scambiano di posto.

4.3 Algoritmo

Inizializzazione Inizializzo le g variabili decisionali (e eventualmente slack) a 0.
Secondo il **concetto chiave 3**.
Quindi calcolo la soluzione di base ottimale.

Test di ottimalita' Uso il test di ottimalita' per verificare se la soluzione di base e' ottimale. Se la funzione obiettivo ha coefficienti positivi l'ottimizzazione non e' finita.

Ci si muove qunidi lungo uno degli spigoli, ovvero si scambia una variabile non di base con una di base. Si usano i tassi di crescita per individuare qual'e' lo spostamento piu' vantaggioso. Secondo i **concetti chiave 5 e 6**.

Poi bisogna determinare la quantita' di spostamento. Si usa il test del rapporto minimo.
In pratica si calcola la dipendenza delle variabili di base rispetto alla variabile non di base entrante. Si sceglie il minimo valore che manda a zero una variabile di base, quindi della variabile di base e' uscente. Quindi si ricalcolano i valori delle altre variabili di base risolvendo i vincoli con i nuovi valori delle variabili non di base, della variabile entrante e di quella uscente.
Questo si fa con la procedura di **eliminazione di Gauss-Jordan**.

Essendo la funzione obiettivo espressa tramite un vincolo, anch'essa viene modificata nella riassegnazione della soluzione di base. La variabile slack Z pero' rimane immutata. Z non e' una variabile di base.

4.4 Forma Tabellare

La forma migliore per rappresentare i vincoli della forma aumentata e' usare una matrice. Questa permette di rappresentare tutte le caratterische del problema.

Ho una tabella in cui ogni riga rappresenta un vincolo (esclusi quelli di non negativita') della forma aumentata. La prima riga e' Z - f(x) =0 .

Risoluzione con Deficit di Base La base e' formato da n variabili, dove n e' il numero di equazioni nei vincoli del modello.
Dette k il numero di variabili di slack, un modello necessita' di $m = n - k$ variabili "artificiali" per creare la soluzione di base ammissibile, ovvero creare il tableau iniziale.

Se $m > 0$ bisogna creare m variabili artificiali: $A_1, A_2...A_m$.
Una per ogni vincolo che non contiene variabili di slack.

Le variabili artificiali vengono quindi sommate dentro i vincoli. Quindi si riempiono le righe della tabella. La prima riga e' particolare, viene riempita con soli zero eccetto gli uni nelle colonne delle variabili artificiali.

Quindi alla prima riga della tabella si sottrae la somma delle righe contenenti variabili artificiali.

A questo punto si applica il normale algoritmo del simplesso. Nel momento in cui tutte le variabili artificiali saranno fuori dalla base, si procede a troncare la tabella, eliminando le colonne di tali variabili. Quindi si sostituisce la prima riga con una tradizionale $Z - f(x)$. Dopo la trasformazione, alla prima riga viene sottratta una combinazione lineare delle righe, quelle che avevano una variabile artificiale, che azzeri i coefficienti nella prima riga di tutte le variabili in base.

L'algoritmo del simplesso puo' riprendere normalmente. Questa operazione va effettuata nonappena si presenta l'occasione.

Passo 1 Se la prima riga ha almeno un coefficiente negativo, posso ottimizzare ulteriormente. Quindi selezione la colonna con il coefficiente strettamente negativo piu' piccolo. Dico che e' la **colonna pivot**.

Passo 2 Cerco le righe che hanno nella **colonna pivot** un coefficiente strettamente positivo. Quindi, detti n_i e c_i il termine noto e il coefficiente di quella riga, cerco la riga tale per cui il rapporto $\frac{n_i}{c_i}$ piu' piccolo.
Chiamo quella riga **riga pivot**.
Il valore nella cella che e' incrocio tra **riga pivot** e **colonna pivot** viene detto **valore pivot**.

Passo 3 Moltiplico la **riga pivot** per $\frac{1}{valore\ pivot}$.
Quindi per ogni riga non pivot:

- se il $c_i > 0$, sottraggo alla riga: $|c_i| * (riga\ pivot)$.
- se il $c_i < 0$, sommo alla riga: $|c_i| * (riga\ pivot)$.

Passo 4 Torno a 1).

Multiple Variabili Entrante Puo' capitare che non ci siano variabili con coefficiente in prima riga piu' piccolo di tutte le altre. In caso di pareggio e' possibile selezionarne una in modo arbitrario. La soluzione ottimare sara' comunque ottenuta tramite l'algoritmo. Non e' possibile sapere in anticipo quale sia la scelta migliore per minimizzare il tempo di soluzione.

Multiple Variabili Uscenti Nel momento in cui nel calcolare il rapporto minimo non esiste una riga sola migliore delle altre, si apre un bivio. Il problema qui e' che fa differenza quale si sceglie. A differenza del caso MVE, qui la soluzione non e' garantita a prescindere dalla scelta della variabile uscente. E' possibile che il metodo del simplesso, a causa di una scelta "errata" in questa situazione, si riconduca ad un loop perpetuo in cui la funzione obiettivo resta costante.

Nessuna Variabile Uscente Se non esistono coefficienti strettamente positivi in una colonna eletta a variabile entrante, il problema PL e' illimitato e non ha soluzioni ottimali.

Molteplici Soluzioni Ottimali Puo' capitare che dopo l'arresto dell'algoritmo dovuto al ritrovo di una soluzione ottimale, sia possibile procedere oltre con il metodo del simplesso trovando una ulteriore soluzione ottimale diversa dalla precedente. Visto che la regione obiettivo e' un poliedro convesso, se esistono almeno due soluzioni ottimali, le soluzioni ottimali esistono e sono infinite. Sono Tutte quelle comprese nel segmento delimitato dalle due trovate in precedenza.

Chapter 5

Teoria della Dualita' e Analisi di Sensitivita'

Instroduzione Ogni problema di programmazione lineare ha associato un altro problema di programmazione lineare chiamato **duale**. E' utile in programmazione lineare studiare il rapporto tra il problema duale e il problema originale (chiamato **primale**). I **prezzi ombra** sono forniti dalla soluzione ottimale del problema duale. Ma esistono ulteriori applicazioni della teoria della dualita'.

Analisi di Sensitivita' L'**analisi di sensitivita'** e' lo studio dell'effetto dei parametri del problema sulle soluzioni del problema stesso. Infatti molti dei parametri usati in un modello PL sono costruiti con stime di condizioni future o probabili. Dalla teoria del simplesso uno dei prerequisiti e' la conoscenza a priori con ragionevole certezza dei parametri del problema. Questo studio aiuta a verificare e affinare il modello. Inoltre alcuni parametri, come le risorse rese disponibili, sono scelte simil-arbitrarie che vengono gestite dal compartimento manageriale, quindi sono anch'esse perfettibili sotto ogni punto di vista.

Problema Duale Prima di tutto puo' essere utile un confronto visivo tra il **primale** e il relativo **duale**:

Primale	*Duale*
$max\ Z = \Sigma_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$	$min\ Z = \Sigma_{i=1}^{m} b_i \cdot y_i$
$\Sigma_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \ \ \forall i \in [1, m]$	$\Sigma_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i \leq c_j \ \ \forall j \in [1, n]$
$x_j \geq 0 \ \ \forall j \in [1, n]$	$y_i \geq 0 \ \ \forall i \in [1, m]$

Come si puo' notare, se il problema primale e' di massimo, il duale e' di minimo e vice versa. I coefficienti del primale sono i termini noti del duale e i termini noti del primale sono i coefficienti del duale. I coefficienti di ogni variabile nei vincoli del primale corrisponde a un coefficiente del vincolo del duale. Da notare l'uso di simboli uguali per indicare lo spostamento di variabili.

Da un punto di vista puramente matematico, la matrice del duale e' composta in modo tale da fare supporre che se si sia calcolata la trasposta della matrice del problema primale, infatti:

	x_1	x_2	...	x_n		
y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	$\leq$	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	$\leq$	b_2
...	...	...	...	...	...	...
y_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	$\leq$	b_m
	VI	VI	...	VI		
	c_1	c_2	...	c_n		

Nella risoluzione con forma tabellare i valori delle variabili slack in riga 0 nel problema primale equivale alla soluzione del problema duale e vice versa.

Proprieta' di Dualita' Debole fonte: Teoria della Dualita' - slide prof Stella

se x è una soluzione ammissibile per il problema primale, e y è una soluzione ammissibile per il corrispondente problema duale, allora vale la seguente diseguaglianza:

$$cx \leq yb$$

Proprieta' di Dualita' Forte se x^* è una soluzione ottimale per il problema primale, e y^* è una soluzione ottimale per il corrispondente problema duale, allora vale la seguente eguaglianza:

$$cx^* = y^*b$$

Considerazioni Queste due proprietà, se considerate insieme, implicano che la diseguaglianza vale per soluzioni ammissibili se una o entrambe non sono ottimali per i corrispondenti problemi, l'uguaglianza vale solo se entrambe le soluzioni sono ottimali.

$$cx < yb$$

Ad ogni iterazione, il metodo del simplesso trova una specifica coppia di soluzioni per i due problemi, dove la soluzione del primale è ammissibile mentre quella del duale non è ammissibile, fatta eccezione per l'ultima iterazione, quella che vede l'arresto del metodo del simplesso.

Prolog Time Pericolo fallacia logica!

Per comodita' chiamo:
ammissibile(x) = f(x)
ottimale(x) = g(x)

$$f(x) \wedge f(y) \Leftrightarrow cx < yb \vee cx = yb$$

$$f(x) \wedge g(x) \wedge f(y) \wedge g(y) \Leftrightarrow cx = yb$$

$$A = \{f(x), f(y), \neg g(x), \neg g(y)\}$$

$$B = \{f(x), f(y), \neg g(x), g(y)\}$$

$$C = \{f(x), f(y), g(x), \neg g(y)\}$$

Definisco Modus Ponens = MP = $[(p \to q) \wedge p] \vdash q$

A Per A, applico MP:

$$(f(x) \wedge f(y) \Leftrightarrow cx < yb \vee cx = yb) \wedge (f(x) \wedge f(y) \wedge \neg g(x) \wedge \neg g(y)) \vdash cx < yb \vee cx = yb$$

$$(f(x) \wedge g(x) \wedge f(y) \wedge g(y) \Leftrightarrow cx = yb) \wedge (f(x) \wedge f(y) \wedge \neg g(x) \wedge \neg g(y)) \vdash \neg(cx = yb)$$

Quindi una semplice risoluzione:

$$((cx < yb) \vee (cx = yb)) \wedge \neg(cx = yb) \vdash (cx < yb)$$

B Per A, applico MP:

$$(f(x) \wedge f(y) \Leftrightarrow cx < yb \vee cx = yb) \wedge (f(x) \wedge f(y) \wedge \neg g(x) \wedge g(y)) \vdash cx < yb \vee cx = yb$$

$$(f(x) \wedge g(x) \wedge f(y) \wedge g(y) \Leftrightarrow cx = yb) \wedge (f(x) \wedge f(y) \wedge \neg g(x) \wedge g(y)) \vdash \neg(cx = yb)$$

Quindi una semplice risoluzione:

$$((cx < yb) \vee (cx = yb)) \wedge \neg(cx = yb) \vdash (cx < yb)$$

A Per A, applico MP:

$$(f(x) \wedge f(y) \Leftrightarrow cx < yb \vee cx = yb) \wedge (f(x) \wedge f(y) \wedge g(x) \wedge \neg g(y)) \vdash cx < yb \vee cx = yb$$

$$(f(x) \wedge g(x) \wedge f(y) \wedge g(y) \Leftrightarrow cx = yb) \wedge (f(x) \wedge f(y) \wedge g(x) \wedge \neg g(y)) \vdash \neg(cx = yb)$$

Quindi una semplice risoluzione:

$$((cx < yb) \vee (cx = yb)) \wedge \neg(cx = yb) \vdash (cx < yb)$$

Part II

Esercitazione

Part III

Laboratorio

Chapter 6

11-10-2022

6.1

Outlet	Boys	Women	Men	Cost
TV	5	1	3	600
Mag	2	6	3	500
Target	24	18	24	

$$5x + 2y \geq 24 \tag{6.1}$$
$$x + 6y \geq 18 \tag{6.2}$$
$$3x + 3y \geq 24 \tag{6.3}$$
$$C(x, y) = 600x + 500y \tag{6.4}$$

6.2

Gasoline	Vapor	Octane	Price
Regular	≤ 7	≥ 80	9.80
Premium	≤ 6	≥ 100	12

Stock	Vapor	Octane	Barrels
A	8	83	2700
B	20	109	1350
C	4	74	4100

$$\frac{A_i * V_A + B_i * V_B + C_i * V_C}{A_i + B_i + C_i} \leq V_i \tag{6.5}$$
$$\frac{A_i * O_A + B_i * O_B + C_i * O_C}{A_i + B_i + C_i} \geq O_i \tag{6.6}$$
$$\Sigma_{i=0}^{n} A_i \leq Q_A \tag{6.7}$$
$$\Sigma_{i=0}^{n} B_i \leq Q_B \tag{6.8}$$
$$\Sigma_{i=0}^{n} C_i \leq Q_C \tag{6.9}$$
$$C_{scarto} = P_{scarto} * (Q_A - \Sigma_{i=0}^{n} A_i + Q_B - \Sigma_{i=0}^{n} B_i + Q_C - \Sigma_{i=0}^{n} C_i) \tag{6.10}$$
$$C_i = P_i * (A_i + B_i + C_i) \tag{6.11}$$
$$max\ C = C_{scarto} + \Sigma_{i=0}^{n} C_i \tag{6.12}$$

6.3

Zone

1	2	3	4	5	6
12	11	10	9	8	7
13	14	15	16	17	18
24	23	22	21	20	19
25	26	27	28	29	30
36	35	34	33	32	31

Ogni ripetitore copre anche le zone adiacenti.

Chapter 7

18-10-2022

$$Z - 40x - 50y = 0 \tag{7.1}$$
$$x + 2y + s1 = 40 \tag{7.2}$$
$$4x + 3y + s2 = 120 \tag{7.3}$$

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c} -40 & -50 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 40 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 120 \end{array}\right|$$

1

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c} -40 & -50 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 20 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 120 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c} -15 & 0 & 50 & 0 & 1000 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 20 \\ \frac{5}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 60 \end{array}\right|$$

2

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c} -15 & 0 & 50 & 0 & 1000 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 20 \\ 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 24 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & 59 & 6 & 1360 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 32 \\ 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 24 \end{array}\right|$$

7.1 Esercizio 2

max 3x + 5y x - y <= 1 2x - y <= 4 -2x + y <= 1

Chapter 8

25-10-2022

$$max 3x + 5y \tag{8.1}$$
$$x - y \leq 1 \tag{8.2}$$
$$2x - y \geq 4 \tag{8.3}$$
$$-2x + y = 1 \tag{8.4}$$
$$x, y \geq 0 \tag{8.5}$$

$$min a + 4b + 3c \tag{8.6}$$
$$a - 2b - 2c \geq 3 \tag{8.7}$$
$$-a - b + c \geq 5 \tag{8.8}$$
$$a \geq 0 \tag{8.9}$$
$$b \leq 0 \tag{8.10}$$

2

$$Min : x_1 + 2x_2 - 9x_3 + 5x_4 + 6x_5 \tag{8.11}$$
$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 30 \tag{8.12}$$
$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 - x_5 <= 10 \tag{8.13}$$
$$x_1, x_2, x_4, x_5 \geq 0, x_3 \leq 0 \tag{8.14}$$

$$Min : x_1 + 2x_2 + 9x_3 + 5x_4 + 6x_5 \tag{8.15}$$
$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 30 \tag{8.16}$$
$$x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 - x_5 <= 10 \tag{8.17}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \tag{8.18}$$

$$Max : 30y_1 + 10y_2 \tag{8.19}$$
$$y_1 + y_2 \geq 1 \tag{8.20}$$
$$-2y_1 + 3y_2 \geq 2 \tag{8.21}$$
$$-3y_1 - 5y_2 \geq 9 \tag{8.22}$$
$$-y_1 + 2y_2 \geq 5 \tag{8.23}$$
$$2y_1 - y_2 \geq 6 \tag{8.24}$$
$$y_2 \geq 0 \tag{8.25}$$