

Appunti di Analisi e Progettazione di Algoritmi

A cura di:
Francesco Refolli
Matricola 865955

Anno Accademico 2022-2023

Chapter 1

Note sul Corso

todo: segnare delle note

Part I

Teoria

Chapter 2

Problema LCS

2.1 Introduzione

Definizioni

Alfabeto Un alfabeto Σ e' un insieme finito e non vuoto di simboli.
Si usano le prime lettere dell'alfabeto minuscolo per identificare i simboli generici.

Stringa Una stringa (o parola) w e' una giustapposizione (o concatenazione) di simboli dell'Alfabeto Σ .

Si usano le ultime lettere dell'alfabeto minuscolo per identificare il nome di una stringa. Esempio: una stringa $X = a \cdot b \cdot c \cdot d$. Sempre sara' indicata in futuro senza l'operatore per semplicita'.

Sequenza Una sequenza S e' un concetto analogo alla stringa, ma e' generalmente concepita come una elencazione di simboli di un alfabeto. La principale differenza sta nel fatto che questa puo' avere elementi di altri alfabeti.

Si usano le ultime lettere dell'alfabeto maiuscolo per identificare il nome di una sequenza. Si indica con $X = \langle a, b, c, d \rangle$

L' i -esimo elemento si indica con x_i . La lunghezza puo' essere indicata tramite $|X|$.

Sottostringa Una sottostringa S di una stringa (o sequenza) e' una stringa che sia la concatenazione di elementi consecutivi della stringa o sequenza di partenza. Di solito prodotta tagliando un pezzo di lunghezza m dal capo, un pezzo di lunghezza n dalla coda.

Sottosequenza Una sottosequenza S di una stringa (o sequenza) e' una sequenza di elementi della stringa o sequenza di partenza che mantenga l'ordine degli stessi. (Non per forza la consecutivita'!). In questo senso una sottostringa e' analoga ad una sottosequenza che mantenga la consecutivita'. Di solito prodotta tramite la cancellazione di k elementi.

Prefisso Un prefisso di lunghezza i e' una sottosequenza composta dai primi i elementi consecutivi di una stringa o sequenza. Detta X una stringa, si indica con X_i .

Suffisso Un suffisso di indice i e' una sottosequenza composta da tutti gli elementi consecutivi a partire dall'indice i .

LCS

Introduzione Il problema LCS (Longest Common Subsequence) consiste nel cercare in tempo ragionevole la sottosequenza piu' lunga comune a due sequenze o stringhe.

Esempi

1. $X = \langle S, C, O, I, A, T, T, O, L, O \rangle$
 $Y = \langle B, A, R, A, T, T, O, L, O \rangle$
 La LCS e' $Z = \langle A, T, T, O, L, O \rangle$ **nota:** puo' essere usata sia la prima che la seconda 'A' di Y .
2. $X = \langle M, A, G, I, C, O \rangle$
 $Y = \langle M, A, N, T, E, N, E, R, E \rangle$
 La LCS e' $Z = \langle M, A \rangle$
3. $X = \langle M, A, I, A, L, E \rangle$
 $Y = \langle N, A, T, A, L, E \rangle$
 La LCS e' $Z = \langle A, A, L, E \rangle$

Si mette in evidenza che l'operazione di estrazione della LCS gode delle seguenti proprieta':

$$\cdot : \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \mid A \cdot B = LCS(A, B) \quad (2.1)$$

$$A \cdot B = B \cdot A \quad (2.2)$$

$$A \cdot A = A \quad (2.3)$$

$$A \cdot B = A \cdot (A \cdot B) = B \cdot (A \cdot B) \quad (2.4)$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = B \cdot (A \cdot C) \quad (2.5)$$

2.2 Algoritmo TOP-DOWN

Ragionamento Detti X, Y due sequenze, i, j i rispettivi indici e n, m le rispettive lunghezze. Detti $Z = LCS(X, Y)$ e k il suo indice. Si inizializzano gli indici alle lunghezze. (si parte dal fondo!)

Si puo' ragionevolmente pensare che:

1. A) Se $x_i = y_j$ allora $z_k = x_i$ e $Z_{k-1} = LCS(X_{i-1}, Y_{j-1})$
2. B) Se $x_i \neq y_j$ e $z_k = x_i$ allora $Z_k = LCS(X_i, Y_{j-1})$
3. C) Se $x_i \neq y_j$ e $z_k = y_j$ allora $Z_k = LCS(X_{i-1}, Y_j)$
4. D) Se $z_k \neq y_j$ e $z_k \neq x_i$ allora $Z_k = LCS(X_{i-1}, Y_{j-1})$

Si nota che il caso D e' direttamente traducibile in codice, ma viene comunque compreso dai casi B e C, di conseguenza non avrebbe senso ripeterlo. In particolare si osserva che $D \Rightarrow (B \cdot C \Leftrightarrow C \cdot B)$.

Possiamo quindi sviluppare uno pseudo-codice basato su questi teoremi. Non potendo sapere nei casi B) e C) quale sia tra i due il risultato, l'unico modo per verificarlo e' esplorare entrambi i casi. Gli indici delle sequenze appartengono all'insieme $[1, length]$.

2.3 Procedura TOP-DOWN

Algorithm Algoritmo Banale per LCS

```

procedure LCS( $X_i, Y_j$ )
  if  $X_i = \langle \rangle$  or  $Y_j = \langle \rangle$  then
    return  $\langle \rangle$ 
  else
    if  $x_i = y_j$  then
      return append(LCS( $X_{i-1}, Y_{j-1}$ ),  $x_i$ )
    else
       $B \leftarrow$  LCS( $X_i, Y_{j-1}$ )
       $C \leftarrow$  LCS( $X_{i-1}, Y_j$ )
      if len( $B$ )  $\geq$  len( $C$ ) then
        return  $B$ 
      else
        return  $C$ 
      end if
    end if
  end if
end procedure

```

Complessita' Abbiamo appurato che questo algoritmo (TOP-DOWN) puo' portare a problemi quando l'input e' troppo grande, tuttavia e' possibile porvi rimedio

Uno dei problemi e' per esempio la ripetizione di lavoro gia' svolto in ricorsioni "parallele". Si potrebbe immaginare di memorizzare i risultati delle chiamate e usare quelli memorizzati all'occorrenza.

Resta pero' l'alto numero di chiamate: tendenzialmente $O(2^{n+m})$. Per questo si usa la programmazione dinamica: si risolve iterativamente un procedimento ricorsivo.

2.4 Usare la Programmazione Dinamica

Ragionamento L'Approccio Bottom-Up si basa sul partire dal risultato piu' piccolo, caso base, e costruire pr>essivamente i risultati delle chiamate "precedenti". Questo significa in pratica calcolare tutte le chiamate per tutte le combinazioni possibili d'input attiente al problema. Potrebbe sembrare un procedimento dispendioso ma in alcuni casi puo' essere quello piu' efficiente.

Supponendo di avere a disposizione due matrici b, c di dimensione $(n+1)(m+1)$, queste possono essere usate per simulare l'algoritmo ricorsivo nei vari passi. Attenzione, gli indici della matrice partono con 0!

Caso base:

$$\begin{cases} c[0][j] = 0 & 0 \leq j \leq n \\ c[i][0] = 0 & 0 \leq i \leq m \end{cases}$$

Caso ricorsivo:

$$c[i][j] = \begin{cases} c[i][j] = c[i-1][j-1] + 1 & x_i = y_j \\ c[i][j] = c[i-1][j] & c[i-1][j] \geq c[i][j-1] \\ c[i][j] = c[i][j-1] & c[i-1][j] < c[i][j-1] \end{cases}$$

$$b[i][j] = \begin{cases} b[i][j] = " \nwarrow " & x_i = y_j \\ b[i][j] = " \uparrow " & c[i-1][j] \geq c[i][j-1] \\ b[i][j] = " \leftarrow " & c[i-1][j] < c[i][j-1] \end{cases}$$

Questo algoritmo riempie due matrici:

- c contiene le lunghezze dei vari $LCS(X_i, Y_j)$
- b contiene il percorso da seguire per ottenere l'ottimale

Per ottenere $LCS(X, Y)$ non resterà da fare che seguire il percorso indicato da b con l'accortezza di raccogliere in coda gli x_i tali che $b[i][j] = Diagonal$.

Avremo bisogno di tre algoritmi:

- una funzione che inizializza la matrice generando il caso base
- una funzione che riempie la matrice con i casi ricorsivi
- una funzione che legge il percorso della matrice b
- una funzione che stampa la LCS

2.5 Procedura BOTTOM-UP

Algorithm Inizializza Matrice

```

procedure INIZIALIZZAMATRICE( $m, n$ )
  for  $i \leftarrow 0$  to  $m$  do
     $c[i][0] \leftarrow 0$ 
  end for
  for  $j \leftarrow 0$  to  $n$  do
     $c[0][j] \leftarrow 0$ 
  end for
end procedure

```

Algorithm Riempi Matrice

```

procedure RIEMPIMATRICE( $X, Y$ )
  for  $i \leftarrow 1$  to  $m$  do
    for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
      if  $x_i = y_j$  then
         $c[i][j] \leftarrow c[i-1][j-1] + 1$ 
         $b[i][j] \leftarrow "$  ↖  $"$ 
      else
        if  $c[i-1][j] \geq c[i][j-1]$  then
           $c[i][j] \leftarrow c[i-1][j]$ 
           $b[i][j] \leftarrow "$  ↑  $"$ 
        else
           $c[i][j] \leftarrow c[i][j-1]$ 
           $b[i][j] \leftarrow "$  ←  $"$ 
        end if
      end if
    end for
  end for
end procedure

```

Complessita'

- La complessita' temporale di InizializzaMatrice e' $O(n + m)$.
- La complessita' temporale di RiempiMatrice e' $O(n * m)$.
- La complessita' temporale di LeggiLCS e' $O(n + m)$.

LeggiLCS La complessita' di questo algoritmo (analogo e identico a StampaLCS), e' data in termini di upper-bound rispetto al caso peggiore, ovvero quando le due sequenze hanno solo il primo simbolo in comune. In quel caso il percorso seguito dall'algoritmo seguira' una traiettoria angolata, facendo quindi tutti i "piccoli passi" (l'unico tassello obliquo e' il target $b[1][1]$), per un totale di $n + m$ iterazioni.

LeggiLCS non fa parte del programma d'esame, e' riportato qua per completezza.

Algorithm Leggi LCS

```

procedure LEGGILCS( $b, X, i, j$ )
  if  $i = 0 \vee j = 0$  then
    return  $\langle \rangle$ 
  end if
  if  $b[i][j] = \text{"} \nwarrow \text{"}$  then
    return append(LEGGILCS( $b, X, i - 1, j - 1$ ),  $x_i$ )
  else
    if  $b[i][j] = \text{"} \uparrow \text{"}$  then
      return LeggiLCS( $b, X, i - 1, j$ )
    else
      return LeggiLCS( $b, X, i, j - 1$ )
    end if
  end if
end procedure

```

Algorithm Stampa LCS

```

procedure STAMPALCS( $b, X, i, j$ )
  if  $i = 0 \vee j = 0$  then
    return  $\langle \rangle$ 
  end if
  if  $b[i][j] = \text{"} \nwarrow \text{"}$  then
    StampaLCS( $b, X, i - 1, j - 1$ )
    print( $x_i$ )
  else
    if  $b[i][j] = \text{"} \uparrow \text{"}$  then
      StampaLCS( $b, X, i - 1, j$ )
    else
      StampaLCS( $b, X, i, j - 1$ )
    end if
  end if
end procedure

```

Conclusione Quindi la complessita' temporale totale e' $O(n * m)$, molto migliore dell'algoritmo TOP-DOWN presentato nel paragrafo precedente. E' pero' da tenere in considerazione che questo richiede spazio in memoria con una complessita' di $O(n * m)$, visto che deve mantenere due matrici $n * m$. Certamente superiore al $O(n + m)$ dell'algoritmo TOP-DOWN, ma resta pur sempre un costo che vale la pena pagare per usufruire della strategia Bottom-Up.

Chapter 3

Problema LIS

3.1 Introduzione

LIS

Introduzione Il problema LIS (Longest Increasing Subsequence) consiste nel cercare in tempo ragionevole la sottosequenza piu' lunga crescente all'interno di una stringa o sequenza. Si mette in evidenza che $LIS(X) = LCS(X, SORTED(X))$.

Inoltre il teorema di Erdos-Szekeres afferma:

$\forall X \mid interiDistinti(X) \wedge |X| = n^2 + 1 \Rightarrow |LIS(X)| = |LDS(X)| = n + 1$.

Dove LDS e' il problema opposto a LIS, la Longest Decreasing Subsequence.

Esempi

- $X = \langle 0, 8, 4, 12, 2, 10, 6, 14, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15 \rangle$
 $Z = \langle 0, 2, 6, 9, 11, 15 \rangle$

Ma non esiste solo quella soluzione, altri candidati sono

$Z = \langle 0, 4, 6, 9, 11, 15 \rangle$

$Z = \langle 0, 2, 6, 9, 13, 15 \rangle$

$Z = \langle 0, 4, 6, 9, 13, 15 \rangle$

3.2 Algoritmo

Ragionamento

Notazione

$$X_i = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots, x_i \rangle \quad (3.1)$$

$$Z_k = \langle z_1, z_2, z_3, \dots, z_k \rangle \quad (3.2)$$

$$Z = LIS(X) \quad (3.3)$$

Caso 1 Sia $x_i = z_k$.

$Z_k = Z_{k-1} \cup \{x_i\}$.

Dove $Z_{k-1} = LIS(X_p)$, con $p \in [1, i]$.

Data la definizione di LIS: $\forall j \in [1, k) \ z_j < x_i$.

Ricorsivamente e' sufficiente tenere a mente che $z_{k-1} < x_i$.

Definisco una funzione $V : R \rightarrow R$ tale che: $V(j) = |LIS(X_j)|$

Definisco una funzione $P : R \rightarrow R$ tale che:

$P(i) = \max_{V(j)}(\{\forall j \in [1, i) \ z_k < x_i\})$.

Caso 2 Sia $x_i \neq z_k$.

Allora $Z_k = LIS(X_{i-1})$.

Ricorsione Da qui, $Z_i = LIS(X_i)$

Caso Base

$$i = 0 \Rightarrow Z_i = \langle \rangle \quad (3.4)$$

$$i = 1 \Rightarrow Z_i = X_i \quad (3.5)$$

Caso Ricorsivo

$$Z_i = \begin{cases} Z_{P(i)} \cup \{x_i\} & |Z_{P(i)}| + 1 \geq |Z_{i-1}| \\ Z_{i-1} & |Z_{P(i)}| + 1 < |Z_{i-1}| \end{cases}$$

Caso Generale

$$Z_i = \begin{cases} X_i & i < 2 \\ Z_{P(i)} \cup \{x_i\} & |Z_{P(i)}| + 1 \geq |Z_{i-1}| \\ Z_{i-1} & |Z_{P(i)}| + 1 < |Z_{i-1}| \end{cases}$$

3.3 Procedura BOTTOM-UP

Il vettore C : $C[i] = |LIS(X_i)|$.

Il vettore L : $L[i] = \text{LAST-ELEMENT}(LIS(X_i))$.

Il vettore H : $H[i] = P(i)$.

```

procedure LIS( $X$ )
   $C[0] \leftarrow 0$ 
   $C[1] \leftarrow 1$ 
   $H[1] \leftarrow 0$ 
   $L[1] \leftarrow 1$ 
  for  $i = 2$  to  $n$  do
     $p \leftarrow 0$ 
    for  $j = 1$  to  $i - 1$  do
      if  $x_{L[j]} < x_i \wedge C[j] > C[p]$  then
         $p \leftarrow j$ 
      end if
    end for
     $H[i] \leftarrow p$ 
    if  $C[p] + 1 \geq C[i - 1]$  then
       $C[i] \leftarrow C[p] + 1$ 
       $L[i] \leftarrow i$ 
    else
       $C[i] \leftarrow C[i - 1]$ 
       $L[i] \leftarrow L[i - 1]$ 
    end if
  end for
end procedure

```

```

procedure LEGGI-LIS( $X, n$ )
   $i \leftarrow n$ 
   $Z \leftarrow \langle \rangle$ 
  while  $i \neq 0$  do
    if  $i = L[i]$  then
       $Z \leftarrow \text{prepend}(Z, x_i)$ 
       $i \leftarrow H[i]$ 
    else
       $i \leftarrow L[i]$ 
    end if
  end while
  return  $Z$ 
end procedure

```

Complessita' $T(n) = O(n^2) + O(n) = O(n^2)$

3.4 Variante Rizzi

LIS_V e' un sottoproblema di LIS, ovvero la LIS che termina con l'elemento i -esimo di X_i .

Il vettore C : $C[i] = |LIS_V(X_i)|$.

Il vettore H : $H[i] = P(i)$.

```

procedure LIS(X)
   $C[1] \leftarrow 1$ 
   $H[1] \leftarrow 0$ 
   $Z \leftarrow C[1]$ 
  for  $i = 2$  to  $m$  do
     $max \leftarrow 0$ 
     $H[i] \leftarrow 0$ 
    for  $h = 1$  to  $i - 1$  do
      if  $x_h < x_i \wedge C[h] > max$  then
         $max \leftarrow C[h]$ 
         $H[i] \leftarrow h$ 
      end if
    end for
     $C[i] \leftarrow 1 + max$ 
    if  $C[i] > Z$  then
       $Z \leftarrow C[i]$ 
    end if
  end for
  return  $Z$ 
end procedure

```

```

procedure BUILD-LIS(X)
  if  $H[i] \neq 0$  then
    BUILD-LIS( $H[i]$ )
  end if
   $print(x_i)$ 
end procedure

```

Complessita' $T(n) = O(n^2) + O(n) = O(n^2)$

Chapter 4

Problema LICS

4.1 Introduzione

LICS

Introduzione Il problema LICS (Longest Increasing Common Subsequence) consiste nel cercare in tempo ragionevole la sottosequenza comune piu' lunga crescente all'interno di due stringhe o sequenze.

Esempi

- $X = \langle 3, 4, 9, 1 \rangle$
 $Y = \langle 5, 3, 8, 9, 10, 2, 1 \rangle$

La soluzione sarebbe $Z = \langle 3, 9 \rangle$

4.2 Algoritmo

Ragionamento

Notazione

$$X_i = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots, x_i \rangle \quad (4.1)$$

$$Y_i = \langle y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, \dots, y_j \rangle \quad (4.2)$$

$$Z_k = \langle z_1, z_2, z_3, \dots, z_k \rangle \quad (4.3)$$

$$Z = LIS(X, Y) \quad (4.4)$$

Definisco una funzione $V : R \times R \rightarrow R$ tale che: $V(i, j) = |LICS(X_i, Y_j)|$

E una funzione analoga alla $P(i)$ di LIS:

Definisco una funzione $P : R \times R \rightarrow R \times R$ tale che:
 $P(i, j) = \max_{V(p, q)} (\{ \forall p, q \mid p \in [1, i) \wedge q \in [1, j) \mid z_k < x_i \wedge z_k < y_j \})$.

Caso 1 $x_i = y_i \wedge x_i = z_k$

$$Z_k = Z_{k-1} \cup \{x_i\}$$

$$Z_{k-1} = LICS(X_p, Y_q) \text{ con } p \in [1, i) \wedge q \in [1, j)$$

Data la definizione di LICS:

$$\forall w \in [1, k) \quad z_w < x_i.$$

$$\forall w \in [1, k) \quad z_w < y_j.$$

In particolare:

$$z_{k-1} < x_i$$

$$z_{k-1} < y_j$$

Ora, visto che $x_i = y_i$, la $P(i, j)$ si semplifica:

$$P(i, j) = \max_{V(p, q)}(\{\forall p, q \mid p \in [1, i) \wedge q \in [1, j) \mid z_k < x_i\}).$$

Quindi scrivo:

$$\exists p, q \mid P(i, j) = (p, q) \Rightarrow Z_{k-1} = LICS(X_p, Y_q)$$

Caso 2 $x_i = y_i \wedge x_i \neq z_k$

Logicamente, devo escludere questi valori:

$$Z_k = LICS(X_{i-1}, Y_{j-1})$$

Caso 3 $x_i \neq y_i \wedge x_i = z_k \Rightarrow y_j \neq z_k$

$$Z_k = LICS(X_i, Y_{j-1})$$

Caso 4 $x_i \neq y_i \wedge y_j = z_k \Rightarrow x_i \neq z_k$

$$Z_k = LICS(X_{i-1}, Y_j)$$

Caso 5 $x_i \neq y_i \wedge x_i \neq z_k \wedge y_j \neq z_k$

$$Z_k = LICS(X_{i-1}, Y_{j-1})$$

Ricorrenza Non conoscendo a priori il valore di Z , l'esplorazione binaria fara' si che si esplori il Caso 5 come sottocaso dei casi 3 e 4. Da qui, $Z_{i,j} = LIS(X_i, Y_j)$

Caso Base

$$i = 0 \Rightarrow Z_{i,j} = <> \tag{4.5}$$

$$j = 0 \Rightarrow Z_{i,j} = <> \tag{4.6}$$

Caso Ricorsivo

$$Z_i = \begin{cases} Z_{P(i,j)} & (x_i = y_j) \wedge (|Z_{P(i,j)}| + 1 \geq |Z_{i-1,j-1}|) \\ Z_{i-1,j-1} & (x_i = y_j) \wedge (|Z_{P(i,j)}| + 1 < |Z_{i-1,j-1}|) \\ Z_{i,j-1} & (x_i \neq y_j) \wedge (|Z_{i,j-1}| \geq |Z_{i-1,j}|) \\ Z_{i-1,j} & (x_i \neq y_j) \wedge (|Z_{i,j-1}| < |Z_{i-1,j}|) \end{cases}$$

Caso Generale

$$Z_i = \begin{cases} <> & i = 0 \vee j = 0 \\ Z_{P(i,j)} & (x_i = y_j) \wedge (|Z_{P(i,j)}| + 1 \geq |Z_{i-1,j-1}|) \\ Z_{i-1,j-1} & (x_i = y_j) \wedge (|Z_{P(i,j)}| + 1 < |Z_{i-1,j-1}|) \\ Z_{i,j-1} & (x_i \neq y_j) \wedge (|Z_{i,j-1}| \geq |Z_{i-1,j}|) \\ Z_{i-1,j} & (x_i \neq y_j) \wedge (|Z_{i,j-1}| < |Z_{i-1,j}|) \end{cases}$$

4.3 Procedura BOTTOM-UP

La matrice C : $C[i][j] = |LICS(X_i, Y_j)|$.

La matrice L : $L[i][j] = \text{LAST-ELEMENT}(LICS(X_i, Y_j))$.

La matrice H : $H[i][j] = P(i, j)$.

```

procedure LICS( $X, Y$ )
  INIZIALIZZA( $|X|, |Y|$ )
  for  $i = 1$  to  $n$  do
    for  $j = 1$  to  $m$  do
      if  $x_i = y_i$  then
         $(p, q) \leftarrow P(i, j)$ 
         $H[i][j] \leftarrow (p, q)$ 
        if  $C[p][q] + 1 \geq C[i-1][j-1]$  then
           $C[i][j] \leftarrow C[p][q] + 1$ 
           $L[i][j] \leftarrow (i, j)$ 
        else
           $C[i][j] \leftarrow C[i-1][j-1]$ 
           $L[i][j] \leftarrow L[i-1][j-1]$ 
        end if
      else
        if  $C[i][j-1] \geq C[i-1][j]$  then
           $C[i][j] \leftarrow C[i][j-1]$ 
           $L[i][j] \leftarrow L[i][j-1]$ 
        else
           $C[i][j] \leftarrow C[i-1][j]$ 
           $L[i][j] \leftarrow L[i-1][j]$ 
        end if
      end if
    end for
  end for
end procedure

```

Complessita' $T(n) = \Theta(n \cdot m) * O(n \cdot m) + O(n)$
 $T(n) = O(n^2 \cdot m^2) + O(n) = O(n^2 \cdot m^2)$

```

procedure INIZIALIZZA( $n, m$ )
  for  $i = 0$  to  $n$  do
     $C[i][0] \leftarrow 0$ 
     $H[i][0] \leftarrow (0, 0)$ 
  end for
  for  $j = 0$  to  $m$  do
     $C[0][j] \leftarrow 0$ 
     $H[0][j] \leftarrow (0, 0)$ 
  end for
end procedure

```

```

procedure P( $i, j$ )
   $p \leftarrow 0$ 
   $q \leftarrow 0$ 
  for  $w = 1$  to  $i - 1$  do
    for  $z = 1$  to  $j - 1$  do
      if  $L[w][z][0] = 0 \wedge C[w][z] = 0$  then
         $p \leftarrow w$ 
         $q \leftarrow z$ 
      else if  $x_{L[w][z][0]} < x_i \wedge C[w][z] > C[p][q]$  then
         $p \leftarrow w$ 
         $q \leftarrow z$ 
      end if
    end for
  end for
  return  $(p, q)$ 
end procedure

```

```

procedure LEGGI-LICS( $X, n, m$ )
   $i \leftarrow n$ 
   $j \leftarrow m$ 
   $Z \leftarrow \langle \rangle$ 
  while  $(i, j) \neq (0, 0)$  do
    if  $(i, j) = L[i][j]$  then
       $Z \leftarrow \text{prepend}(Z, x_i)$ 
       $(i, j) \leftarrow H[i][j]$ 
    else
       $(i, j) \leftarrow L[i][j]$ 
    end if
  end while
  return  $Z$ 
end procedure

```

4.4 Variante Rizzi

$LICS_V$ e' un sottoproblema di LICS, ovvero la LICS che termina con l'elemento i -esimo di X_i .

La matrice C : $C[i][j] = |LICS_V(X_i, Y_j)|$.

La matrice H : $H[i][j] = P(i, j)$.

```

procedure LICS( $X, Y$ )
   $Z \leftarrow 0$ 
  for  $i = 1$  to  $m$  do
    for  $j = 1$  to  $n$  do
      if  $x_i \neq y_j$  then
         $C[i][j] \leftarrow 0$ 
      else
         $max \leftarrow 0$ 
         $H[i][j] \leftarrow (0, 0)$ 
        for  $h = 1$  to  $i - 1$  do
          for  $k = 1$  to  $j - 1$  do
            if  $C[h][k] > max \wedge x_h < x_i$  then
               $max \leftarrow C[h][k]$ 
               $H[i][j] \leftarrow (h, k)$ 
            end if
          end for
        end for
         $C[i][j] \leftarrow 1 + max$ 
        if  $C[i][j] > Z$  then
           $Z \leftarrow C[i][j]$ 
        end if
      end if
    end for
  end for
  return  $Z$ 
end procedure

```

```

procedure BUILD-LICS( $X$ )
  if  $H[i][j] \neq (0, 0)$  then
    BUILD-LICS( $H[i][j]$ )
  end if
   $print(x_i)$ 
end procedure

```

Complessita' $T(n) = \Theta(n \cdot m) * O(n \cdot m) + O(n)$
 $T(n) = O(n^2 \cdot m^2) + O(n) = O(n^2 \cdot m^2)$

Chapter 5

Problema Knapsack

5.1 Introduzione

Il problema dello zaino o Knapsack, e' un problema di ottimizzazione combinatoria che prevede di trovare un'opportuna composizione di multiinsieme con peso inferiore o uguale alla capacita' fissata affinche' il valore (o premio) totale sia ottimale (il massimo possibile). Si hanno:

- N oggetti con un peso w_i e un valore c_i .
- il peso massimo W sopportabile dallo zaino.
- la quantita' di oggetto i -esimo x_i inserito nello zaino.

Di questo problema esistono varianti che fissano ulteriori vincoli sul multiinsieme.

Knapsack Senza Limiti In questa versione lo zaino puo' contenere un oggetto in una quantita' $x_i \geq 0$ a piacere e illimitata superiormente.

Knapsack Con Limiti Ad ogni elemento i -esimo e' associata una disponibilita' massima $d_i \geq 0$ tale che $x_i \leq d_i$.

Knapsack 0-1 I limiti di disponibilita' degli oggetti sono binari, ovvero $d_i = 1$.

Chapter 6

Knapsack Senza Limiti

6.1 Ragionamento

Intuizione Si riduce il problema al cercare il massimo valore della soluzione.

Quindi ragiono in termini di capacita' $k \leq W$ dello zaino con $A(k)$ la soluzione del problema ridotto con massimo peso k .

Si puo' quindi ragionevolmente pensare che se $k = 0$ allora $A(k) = 0$.

E' naturale pensare che $\forall j \leq k \mid A(k) \geq A(j)$.

D'altra parte se $A(k) > 0$ allora $\exists j \in [1, N]$ tale che $w_j \leq k \wedge A(k) = A(k - w_j) + c_j$.

Questo implica ovviamente anche che se $A(k) = A(k - w_j) + c_j$ allora $\forall i \in [1, N] \mid w_i \leq k \Rightarrow A(k - w_j) + c_j \geq A(k - w_i) + c_i$.

Di conseguenza posso impostare la soluzione $A(k)$ ricorsivamente rispetto a tutti i pesi $w_j \leq k$ e adoperare la sottosoluzione migliore.

Caso Base

$$\begin{cases} 0 & k = 0 \end{cases}$$

Caso Ricorsivo

$$\begin{cases} \max(\{\forall j \in [1, N] \wedge w_j \leq k \mid A(k - w_j) + c_j\}) & k > 0 \end{cases}$$

Caso Generale

$$\begin{cases} 0 & k = 0 \\ \max(\{\forall j \in [1, N] \wedge w_j \leq k \mid A(k - w_j) + c_j\}) & k > 0 \end{cases}$$

6.2 Procedura PD

Detti X i pesi, Y i valori, W la capacita' massima.

```
procedure KS( $X, Y, W$ )  
   $A[0] \leftarrow 0$   
  for  $k = 1$  to  $W$  do  
     $max \leftarrow 0$   
    for  $j = 0$  to  $N$  do  
      if  $x_j \leq k \wedge A[k - x_j] + y_j > max$  then  
         $max \leftarrow A[k - x_j] + y_j$   
      end if  
    end for  
     $A[k] \leftarrow max$   
  end for  
end procedure
```

Ricostruzione Per ricostruire il Knapsack e' sufficiente mantenere uno storico dei passi e seguire il percorso a partire da $A[W]$. In alternativa si puo' simulare la ricorsione top-down con $A[i]$ al posto della chiamata ricorsiva.

Complessita' La complessita' temporale e' $O(N \cdot W)$. Questa complessita' temporale e' pseudo-polinomiale perche' W e' proporzionale alla sua lunghezza in bit.

Chapter 7

Knapsack 0-1

7.1 Ragionamento

Oltre a iterare sul peso a disposizione e' utile iterare sulla variet  degli oggetti a disposizione.

Detti quindi $i \in [0, N]$, $j \in [0, k]$, $A(i, j)$ e' la soluzione con i oggetti e capacita' massima j .

Ovviamente $j = 0 \vee i = 0 \Rightarrow A(i, j) = 0$.

Naturalmente se $w_i > j$ allora $A(i, j) = A(i - 1, j)$.

Se invece $w_i \leq j$ le uniche opzioni possibili sono di prendere o non prendere l'oggetto.

Se $i \in \text{Knapsack}$ allora $A(i, j) = A(i - 1, j - w_i) + c_i$, altrimenti $A(i, j) = A(i - 1, j)$.

Per stabilirlo e' sufficiente prelevare la sottosoluzione migliore, ovvero il valore totale piu' grande.

Caso Base

$$\begin{cases} 0 & i = 0 \vee j = 0 \end{cases}$$

Caso Ricorsivo

$$\begin{cases} A(i - 1, j) & w_i > j \\ A(i - 1, j - w_i) + c_i & w_i \leq j \wedge A(i - 1, j - w_i) + c_i \geq A(i - 1, j) \\ A(i - 1, j) & w_i \leq j \wedge A(i - 1, j - w_i) + c_i < A(i - 1, j) \end{cases}$$

Caso Generale

$$\begin{cases} 0 & i = 0 \vee j = 0 \\ A(i - 1, j) & w_i > j \\ A(i - 1, j - w_i) + c_i & w_i \leq j \wedge A(i - 1, j - w_i) + c_i \geq A(i - 1, j) \\ A(i - 1, j) & w_i \leq j \wedge A(i - 1, j - w_i) + c_i < A(i - 1, j) \end{cases}$$

7.2 Procedura PD

Detti X i pesi, Y i valori, W la capacita' massima.

```

procedure INIZIALIZZA( $N, W$ )
  for  $i = 0$  to  $N$  do
     $M[i][0] \leftarrow 0$ 
  end for
  for  $j = 0$  to  $W$  do
     $M[0][j] \leftarrow 0$ 
  end for
end procedure

```

```

procedure KS( $X, Y, W$ )
  INIZIALIZZA( $N, W$ )
  for  $i = 0$  to  $N$  do
    for  $j = 0$  to  $W$  do
      if  $x_i \leq j$  then
        if  $M[i-1][j-x_i] + y_i \geq M[i-1][j]$  then
           $M[i][j] \leftarrow M[i-1][j-x_i] + y_i$ 
        else
           $M[i][j] \leftarrow M[i-1][j]$ 
        end if
      else
         $M[i][j] \leftarrow M[i-1][j]$ 
      end if
    end for
  end for
end procedure

```

Ricostruzione Per ricostruire il Knapsack e' sufficiente mantenere uno storico degli svincoli e seguire il percorso a partire da $M[N][W]$. In alternativa si puo' simulare la ricorsione top-down con $M[i][j]$ al posto della chiamata ricorsiva.

Complessita' La complessita' temporale e' $O(N \cdot W)$. Questa complessita' temporale e' pseudo-polinomiale perche' W e' proporzionale alla sua lunghezza in bit.

Chapter 8

Knapsack Con Limiti

8.1 Ragionamento

TODO

8.2 Procedura PD

TODO

Part II

Esercitazione

Chapter 9

Applicazione di PD

9.1 Distanza di Edit

Introduzione E' definita come numero minimo di **cancellazioni, sostituzioni, inserimenti** che trasformano una stringa X in una seconda stringa Y . E' un problema simmetrico. $D_{edit}(X, Y) = D_{edit}(Y, X)$.

Esempio $X = \langle 2, 4, 10, 3, 1 \rangle$ $Y = \langle 2, 4, 2, 1 \rangle$

- Cancellazione di 10.
- Sostituisco 3 con 2.

Quindi $D_{edit}(X, Y) = 2$.

- Inserimento di 10.
- Sostituisco 2 con 3.

Quindi $D_{edit}(Y, X) = 2$.

- Cancellazione di 3.
- Sostituisco 10 con 2.

Possono non esistere soluzioni uniche.

Problemi

PR Date due sequenze X, Y , trovare la distanza di edit di X in Y .

P Date due sequenze X, Y , trovare il minimo insieme di operazioni di cancellazione, inserimento, sostituzione che trasformano X in Y .

Soluzione

Sottoproblema di PR Trovare la distanza di edit dei prefissi X_i e Y_j . Il numero di sottoproblemi e' $(m+1) \cdot (n+1)$. $d_{i,j} = \text{distanza di edit dei prefissi } X_i Y_j$. Soluzione 'e $d_{m,n}$

Casi base di PR

- $i = 0 \wedge j = 0 \Rightarrow d_{0,0} = 0$
- $i > 0 \wedge j = 0 \Rightarrow d_{i,0} = i$
- $i = 0 \wedge j > 0 \Rightarrow d_{0,j} = j$

Caso ricorsivo di PR Con $i > 0 \wedge j > 0$:

$$d_{i,j} = \begin{cases} d_{i-1,j-1} & x_i = y_j \\ \min(d_{i-1,j-1}, d_{i,j-1}, d_{i-1,j}) + 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il caso "altrimenti" si spiega in questo modo:

- $\text{Sostituzione}(x_i \rightarrow y_j) + d_{i-1,j-1}$
- $\text{Inserimento}(y_j) + d_{i,j-1}$
- $\text{Cancellazione}(x_i) + d_{i-1,j}$

9.2 Algoritmo TOP-DOWN

```
procedure ED-RIC( $X, Y$ )
  if  $j = 0$  then
    return  $i$ 
  else if  $i = 0$  then
    return  $j$ 
  else
     $A \leftarrow ED - RIC(X_{i-1}, Y_j) + 1$ 
     $B \leftarrow ED - RIC(X_i, Y_{j-1}) + 1$ 
     $C \leftarrow ED - RIC(X_{i-1}, Y_{j-1}) + 1$ 
    if  $A \leq B \wedge A \leq C$  then
      return  $A$ 
    else if  $B \leq A \wedge B \leq C$  then
      return  $B$ 
    else
      return  $C$ 
    end if
  end if
end procedure
```

Complessita' La complessita' dell'algoritmo ricorsivo e' (3^{n+m}) .

9.3 Algoritmo BOTTOM-UP

Preparo una Matrice $B[m][n]$ che contiene la ricostruzione del percorso iterativo. Ogni cella $B[i][j] = \langle Direction, Operation \rangle$

```

procedure ED-ITER-RM( $m, n$ )
  for  $i = 0$  to  $m$  do
     $M[i][0] \leftarrow i$ 
     $B[i][0] \leftarrow \langle " \uparrow ", Null \rangle$ 
  end for
  for  $j = 0$  to  $n$  do
     $M[0][j] \leftarrow j$ 
     $B[0][j] \leftarrow \langle " \leftarrow ", Null \rangle$ 
  end for
end procedure

```

```

procedure ED-ITER( $X, Y$ )
   $ED - ITER - RM(m, n)$ 
  for  $i = 1$  to  $m$  do
    for  $j = 0$  to  $n$  do
      if  $x_i = y_j$  then
         $M[i][j] \leftarrow M[i-1][j-1]$ 
         $B[i][j] \leftarrow \langle "", Null \rangle$ 
      else if  $M[i-1][j] \leq M[i][j-1] \wedge M[i-1][j] \leq M[i-1][j-1]$  then
         $M[i][j] \leftarrow M[i-1][j] + 1$ 
         $B[i][j] \leftarrow \langle " \uparrow ", Delete \rangle$ 
      else if  $M[i][j-1] \leq M[i-1][j] \wedge M[i][j-1] \leq M[i-1][j-1]$  then
         $M[i][j] \leftarrow M[i][j-1] + 1$ 
         $B[i][j] \leftarrow \langle " \leftarrow ", Insert \rangle$ 
      else
         $M[i][j] \leftarrow M[i-1][j-1] + 1$ 
         $B[i][j] \leftarrow \langle " \nwarrow ", Change \rangle$ 
      end if
    end for
  end for
  return  $M[m][n]$ 
end procedure

```

Complessita' di $ED - ITER(X, Y)$ L'algoritmo e' formato da due cicli innestati, quindi $T(n) = \Theta(n \cdot m)$.

Chapter 10

Problema LZS

10.1 Introduzione

Il problema Longest Zig-Zag Subsequence consiste nel trovare una sottosequenza piu' lunga tale che

$$\forall i \in [0, |LZS(X)|) \mid P : \begin{cases} z_i < z_{i+1} & \text{dispari}(i) \\ z_i > z_{i+1} & \text{pari}(i) \end{cases}$$

10.2 Ragionamento

Ragiono per prefissi. Sia X_i il prefisso i -esimo della sequenza di input. Sia $Z_k = LZS(X)$ e quindi $S_i = LZS(X_i)$.

Se $0 \leq i < 2$ allora $Z_k = X_i$ e $S_i = X_i = Z_k$.
Questo perche' banalmente $LZS(<>) = <>$ e $LZS(<\alpha>) = <\alpha>$.

Mi rifaccio ai due sotto problemi $LZS_{p:i}$, $LZS_{d:i}$ che risolvono rispettivamente la LZS pari vincolata a terminare con x_i e la LZS dispari vincolata a terminare con x_i .

Assegno $S_i = \max\{LZS_{p:i}, LZS_{d:i}\}$. Trovare $LZS_{p:i}$ e $LZS_{d:i}$ a questo punto coincide con il cercare il S_i compatibile piu' lungo.
Quindi, $Z_k = \max_{length}\{S_i \mid \forall i \in [1, n]\}$.

Caso Base

$$\begin{cases} <> & i = 0 \\ < x_1 > & i = 1 \end{cases}$$

Caso Ricorsivo

$$\begin{cases} LZS_{p:i} & i > 1 \wedge z_k < x_i \wedge |LZS_{p:i}| > |LZS_{d:i}| \\ LZS_{d:i} & i > 1 \wedge z_k > x_i \wedge |LZS_{p:i}| \leq |LZS_{d:i}| \end{cases}$$

10.3 Procedura

```

procedure LZS( $X$ )
   $C[1] \leftarrow 1$ 
   $H[1] \leftarrow 0$ 
   $lenLZS \leftarrow 1$ 
  for  $i = 2$  to  $n$  do
     $max_p, max_d, h_p, h_d \leftarrow 0$ 
    for  $h = 1$  to  $i - 1$  do
      if  $pari(C[h]) \wedge C[h] > max_p \wedge x_h > x_i$  then
         $max_p \leftarrow C[h]$ 
         $h_p \leftarrow h$ 
      else if  $dispari(C[h]) \wedge C[h] > max_d \wedge x_h < x_i$  then
         $max_d \leftarrow C[h]$ 
         $h_d \leftarrow h$ 
      end if
    end for
    if  $max_p > max_d$  then
       $C[i] \leftarrow max_p + 1$ 
       $H[i] \leftarrow h_p$ 
    else
       $C[i] \leftarrow max_d + 1$ 
       $H[i] \leftarrow h_d$ 
    end if
    if  $C[i] > lenLZS$  then
       $lenLZS \leftarrow C[i]$ 
    end if
  end for
  return  $lenLZS$ 
end procedure

```

```

procedure RICOSTRUISCI( $X, C, H$ )
   $i \leftarrow \text{trova-indice}(C, lenLZS)$ 
  while  $i > 0$  do
     $print(x_i)$ 
     $i \leftarrow H[i]$ 
  end while
end procedure

```

Complessita' La ricerca del massimo sottoproblema richiede $T_s(n) = (n)$. Quindi l'algoritmo ha complessita' totale $T(n) = (n^2)$.

Chapter 11

Problema LCZS

11.1 Introduzione

Il problema Longest Common Zig-Zag Subsequence consiste nel trovare una sottosequenza piu' lunga comune tale che:

$$\begin{cases} z_i < z_{i+1} & \text{dispari}(i) \\ z_i > z_{i+1} & \text{pari}(i) \end{cases}$$

11.2 Ragionamento

E' una sovrastruttura del concetto base di LCS e al tempo stesso di LZS. Di conseguenza si replica la sue basi per il ragionamento di LZCS.

Ragiono per prefissi. Siano X_i, Y_j i prefissi i, j -esimi della sequenze di input. Sia $Z_k = LCZS(X, Y)$ e quindi $S_{i,j} = LCZS(X_i, Y_j)$.

Se $i = 0 \vee j = 0$ allora $Z_k = X_i$ e $S_i = X_i = Z_k$.

Questo perche' banalmente:

$$LCZS(<\alpha>, <>) = <>$$

$$LCZS(<>, <\alpha>) = <>$$

$$LCZS(<>, <>) = <>.$$

Seguendo il ragionamento LCS e' vero che:

$$x_i \neq y_j \Rightarrow LCZS(X_i, Y_j) = \max\{LCZS(X_{i-1}, Y_j), LCZS(X_i, Y_{j-1})\}$$

Tuttavia sara' necessario sapere solo il suo opposto, ovvero quanto segue.

Allo stesso modo di prima si asserisce che $x_i = y_j$ implica che x_i sia un candidato per LCZS.

Mi rifaccio ai due sotto problemi $LCZS_{p:i,j}$, $LCZS_{d:i,j}$ che risolvono rispettivamente la LCZS pari vincolata a terminare con $x_i = y_j$ e la LCZS dispari vincolata a terminare con $x_i = y_j$.

Questo implica necessariamente che:

$$x_i \neq y_j \Rightarrow LCZS_{p:i,j} = LCZS_{d:i,j} = \langle \rangle$$

Quindi assegno $S_{i,j} = \max\{LCZS_{p:i,j}, LCZS_{d:i,j}\}$. Trovare $LCZS_{p:i,j}$ e $LCZS_{d:i,j}$ a questo punto coincide con il cercare il $S_{i,j}$ compatibile piu' lungo.

Quindi, $Z_k = \max_{length}\{S_{i,j} \mid \forall i \in [1, n], j \in [1, m]\}$.

Caso Base

$$\left\{ \langle \rangle \quad i = 0 \vee j = 0 \right.$$

Caso Ricorsivo

$$\begin{cases} LCZS_{p:i} & i, j \geq 1 \wedge x_i = y_j \wedge z_k < x_i \wedge |LCZS_{p:i}| > |LCZS_{d:i}| \\ LCZS_{d:i} & i, j \geq 1 \wedge x_i = y_j \wedge z_k > x_i \wedge |LCZS_{p:i}| \leq |LCZS_{d:i}| \end{cases}$$

11.3 Procedura

```

procedure LCZS( $X, Y$ )
   $lenLCZS \leftarrow 0$ 
  for  $i = 1$  to  $n$  do
    for  $j = 1$  to  $m$  do
       $H[i][j] \leftarrow (-1, -1)$ 
      if  $x_i \neq y_j$  then
         $C[i][j] \leftarrow 0$ 
      else
         $max_p, max_d \leftarrow 0$ 
         $head_p, head_d \leftarrow (0, 0)$ 
        for  $h = 1$  to  $i - 1$  do
          for  $k = 1$  to  $j - 1$  do
            if  $pari(C[h][k]) \wedge C[h][k] > max_p \wedge x_h > x_i$  then
               $max_p \leftarrow C[h][k]$ 
               $head_p \leftarrow (h, k)$ 
            else if  $dispari(C[h][k]) \wedge C[h][k] > max_d \wedge x_h < x_i$  then
               $max_d \leftarrow C[h][k]$ 
               $head_d \leftarrow (h, k)$ 
            end if
          end for
        end for
        if  $max_p > max_d$  then
           $C[i][j] \leftarrow max_p + 1$ 
           $H[i][j] \leftarrow head_p$ 
        else
           $C[i][j] \leftarrow max_d + 1$ 
           $H[i][j] \leftarrow head_d$ 
        end if
        if  $C[i][j] > lenLCZS$  then
           $lenLCZS \leftarrow C[i][j]$ 
        end if
      end if
    end for
  end for
  return  $lenLCZS$ 
end procedure

```

Complessita' La ricerca del massimo sottoproblema richiede $T_s(n, n) = (n \cdot m)$. Quindi l'algoritmo ha complessita' totale $T(n) = (n^2 \cdot m^2)$.

```
procedure RICOSTRUISCI( $X, C, H$ )  
   $(i, j) \leftarrow \text{trova-indici}(C, \text{len}LZS)$   
  while  $(i, j) \neq (0, 0)$  do  
     $\text{print}(x_i)$   
     $(i, j) \leftarrow H[i][j]$   
  end while  
end procedure
```

Part III

Laboratorio

Chapter 12

Weighted Interval Scheduling

Data: 11-10-2022

12.1 Scheduling di Attività

Un esempio di Programmazione per Intervalli Pesati.

Siano date n attività da svolgersi nello stesso spazio fisico. Determinare un sottoinsieme di attività che non si sovrappongono e che sia il massimo possibile.

i	p(i)	v
1	0	10
2	0	2
3	2	8
4	2	1
5	1	1
6	4	3

Ad occhio si ricava $\langle 1, 3, 6 \rangle$.

L'algoritmo naive è quello combinatorio, ma è estremamente inefficiente. Il tempo è $T(n) = \Omega(2^n)$.

12.2 Soluzione PD

- $n \leftrightarrow X = 1, \dots, n$
- $\forall i \in 1, \dots, n, s_i$ è il tempo di inizio dell'attività i
- $\forall i \in 1, \dots, n, f_i$ è il tempo di fine dell'attività i
- $\forall i \in 1, \dots, n, v_i$ è il valore dell'attività i

Definisco la funzione:

$COMP : \mathbb{P}(\{1, \dots, n\}) \rightarrow \{true, false\}$

$\forall i, j \in A \mid i = j \vee \text{attivit\`aCompatibili}(A_i, A_j) \Rightarrow COMP(A) = true$

Dette poi i, j due attivita' si dice:

$$attivit\grave{a}Compatibili(i, j) = \begin{cases} true & [s_i, f_i) \cap [s_j, f_j) = \emptyset \\ false & altrimenti \end{cases}$$

Quindi si definisce:

$$V : \mathbb{P}(\{1, \dots, n\}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$V(i, j) = \begin{cases} \sum_{i \in A} v_i & A \neq \emptyset \\ 0 & A = \emptyset \end{cases}$$

La Soluzione e' $(S \subseteq X \mid COMP(S) = true) \wedge (\forall A \subseteq X \mid V(S) \geq V(A))$

Processo Detto $S_n \Leftrightarrow sol(X_n)$, e quindi $S_{n-k} \Leftrightarrow sol(X_{n-k})$. Nella soluzione di S_n si assume di conoscere:

- $\forall k \in 1, \dots, n \ S_{n-k}$
- $\forall k \in 1, \dots, n \ sol(X_{n-k})$

Detto $OPT(i) = V(S_i)$. Dividendo in sottoproblemi e potendo disporre a piacimento di ognuno di questi, riesco facilmente a individuare il caso base. E' immediato sapere $sol(\emptyset)$ e $sol(1)$, quindi questi possono essere i casi base.

Ragionamento

Caso Base

$$S_0 \Leftrightarrow X_0 = \emptyset \wedge V(X_0) = 0 \tag{12.1}$$

$$S_1 \Leftrightarrow X_1 = x_1 \wedge V(X_1) = 1 \tag{12.2}$$

Caso Ricorsivo Voglio risolvere S_i e $OPT(i)$.

Assumo di avere gia' risolto $\forall j \in \{0, \dots, i-1\} \mid S_j$.

Se sapessi che $i \notin S_i$ allora dovrei risolvere S_{i-1} .

Se sapessi al contrario che $i \in S_i$ il sotto problema da considerare sarebbe:

$sol(\{j \mid \forall j \in X_{i-1} \mid attivitaCompatibile(i, j)\})$.

Questo si traduce nel risolvere S_j , dove j e' il massimo indice di una attivita' compatibile con i .

Detto $p(i) : X \rightarrow X$, la funzione che associa ad ogni attivita', l'indice dell'attivita' compatibile precedente piu' vicina. Potendo approssimare, per questioni di prestazione dei confronti, il problema S_j ad al problema leggermente piu' grande $S_{p(i)}$, mi riduco a:

$$V(p(i)) + v_i \geq V(i-1) \Rightarrow S_{p(i)} \cup \{x_i\} \tag{12.3}$$

$$V(p(i)) + v_i < V(i-1) \Rightarrow S_{i-1} \tag{12.4}$$

$$\tag{12.5}$$

Che verranno dimostrati successivamente. Il tutto si traduce in:

$$S_i = \begin{cases} \emptyset & i = 0 \\ \{x_1\} & i = 1 \\ S_{p(i)} \cup \{x_i\} & V(p(i)) + v_i \geq V(i-1) \\ S_{i-1} & V(p(i)) + v_i < V(i-1) \end{cases}$$

Ovvero, riprendo i casi base esattamente come scritti sopra, e in piu' vincolo la scelta della soluzione (e di fatto del sottoproblema S_{i-1} o $S_{p(i)}$) all'unico criterio che e' in grado di stabilire la buona riuscita dell'ottimizzazione.

Dimostrazione Per dimostrare il teorema mi avvalgo dei sottoproblemi di S.

Assumo quindi che $\forall j \in \{0, \dots, i-1\} \mid S_j$.

Inoltre assumo che il problema per X_i abbia almeno una soluzione.

1 Assumo che $i \in S_i$, devo mostrare che $S_i = S_{p(i)} \cup i$.

Si supponga per assurdo che $S_{p(i)} \cup i \neq \text{sol}(X_i)$.

Chiamo S^I la soluzione S_i .

Posso affermare con certezza che $V(S^I) > V(S_{p(i)}) + v_i$.

Visto che $i \in S_i$, deduco che allora $S^I = S^{II} \cup i$.

Ragionevolmente S^{II} contiene attivita' compatibili insieme a i .

Per la riduzione di qualche paragrafo precedente posso affermare che $S^{II} \subseteq \{1, \dots, p(i)\}$.

Ma allora $V(S^{II}) > V(S_{p(i)})$.

Il che e' impossibile, perche' sappiamo che $S_{p(i)} = \text{sol}(X_{p(i)})$.

Dovendo essere necessariamente $S_{p(i)} = \text{sol}(X_{p(i)})$, ne ricaviamo che $S^{II} = S_{p(i)}$. Quindi $S_i = S_{p(i)} \cup i$.

2 Assumo che $i \notin S_i$, devo mostrare che $S_i = S_{i-1}$.

Supponiamo per assurdo che $S_i \neq S_{i-1}$

Allora necessariamente $\exists S^I \neq S_{i-1} \mid V(S^I) > V(S_{i-1})$.

Visto che $S^I = S_i$ allora $i \notin S^I$, dato che $i \notin S_i$.

Ma quindi allora $S^I \subseteq \{1, \dots, i-1 \mid V(S^I) > V(S_{i-1})\}$. Il che e' impossibile, perche' sappiamo che $S_{i-1} = \text{sol}(X_{i-1})$.

Dovendo essere necessariamente $S_{i-1} = \text{sol}(X_{i-1})$, ne ricaviamo che $S^I = S_{i-1}$.

Quindi $S_i = S_{i-1}$.

12.3 Procedura TOP-DOWN

```
procedure WIS-OPT( $i$ )
  if  $i = 0$  then
    return 0
  else if  $i = 1$  then
    return 1
  else
     $Z1 \leftarrow \text{append}(WIS - OPT(p(i)), x_i)$ 
     $Z2 \leftarrow WIS - OPT(i - 1)$ 
    if  $OPT(Z1) \geq Z2$  then
      return  $Z1$ 
    else
      return  $Z2$ 
    end if
  end if
end procedure
```

Complessita' E' immediato intuire che l'esplorazione prolissa dei due casi paralleli porta $T(n) = O(2^n)$.

12.4 Procedura BOTTOM-UP

```
procedure INIZIALIZZA-VETTORI
```

```
     $OPT[0] \leftarrow 0$ 
```

```
     $OPT[1] \leftarrow 1$ 
```

```
     $WIS[0] \leftarrow X_0$ 
```

```
     $WIS[1] \leftarrow X_1$ 
```

```
end procedure
```

```
procedure WIS-OPT-ITER( $i$ )
```

```
    INIZIALIZZA – VETTORI()
```

```
    for  $i = 2$  to  $n$  do
```

```
         $Z1 \leftarrow \text{append}(WIS[p(i)], x_i)$ 
```

```
         $Z2 \leftarrow WIS[i - 1]$ 
```

```
        if  $OPT[p(i)] < OPT[i - 1]$  then
```

```
             $OPT[i] \leftarrow OPT[p(i)] + v_i$ 
```

```
             $WIS[i] \leftarrow Z1$ 
```

```
        else
```

```
             $OPT[i] \leftarrow OPT[i - 1]$ 
```

```
             $WIS[i] \leftarrow Z2$ 
```

```
        end if
```

```
    end for
```

```
    return  $WIS[n]$ 
```

```
end procedure
```

Il vettore WIS e' implementabile ragionevolmente con una matrice di booleani che caratterizzano la presenza di un elemento nell'insieme. Visto che questo richiederebbe una quantita' di spazio non indifferente, una cosa comoda potrebbe essere codificare le righe o le colonne in un numero intero decimale.

Complessita' La procedura WIS-OPT-ITER comprende un solo ciclo di $\Theta(n)$ iterazioni. Il calcolo di $p(i)$ richiede $O(n)$, perche' e' un ciclo inverso semplice che dipende dalla disposizione degli elementi in X . Quindi l'algoritmo e' $T(n) = (n^2)$ nel caso medio.

Osservazioni E' possibile scrivere una procedura che esplori linearmente l'array OPT per verificare i passi che sono stati effettuati per costruire OPT . Quindi si puo' risparmiare lo spazio occupato da WIS .

12.5 Consegna Esercizio

Da risolvere per 18-10-2022.

L'istanza e' simile ma con le case al posto delle attivita'. Ci sono n case adiacenti in linea retta. Ad ogni casa e' associato un valore d , la donazione che l'abitante e' disposto a fare. Trovare un sottoinsieme di case il cui valore totale sia massimo e in cui le case non siano adiacenti.

Ragionamento Definisco la funzione:

$COMP : \mathbb{P}(\{1, \dots, n\}) \rightarrow \{true, false\}$

$\forall i, j \in A \mid i = j \vee caseCompatibili(A_i, A_j) \Rightarrow COMP(A) = true$

Dette poi i, j due attivita' si dice:

$$caseCompatibili(i, j) = \begin{cases} true & |i - j| > 1 \\ false & altrimenti \end{cases}$$

Quindi si definisce:

$V : \mathbb{P}(\{1, \dots, n\}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$V(i, j) = \begin{cases} \sum_{i \in A} v_i & A \neq \emptyset \\ 0 & A = \emptyset \end{cases}$$

La Soluzione e' $(S \subseteq X \mid COMP(S) = true) \wedge (\forall A \subseteq X \mid V(S) \geq V(A))$

In questo caso $p(i)$ scorre l'array di case fino a individuare la prima non adiacente. Questa operazione e' logicamente a tempo $T(n) = \Theta(1)$, perche' si parla di spostarsi a sinistra di due case.

Dimostrazione Per dimostrare il teorema mi avvalgo dei sottoproblemi di S.

Assumo quindi che $\forall j \in \{0, \dots, i-1\} \mid S_j$.

Inoltre assumo che il problema per X_i abbia almeno una soluzione.

1 Assumo che $i \in S_i$, devo mostrare che $S_i = S_{p(i)} \cup i$.

Si supponga per assurdo che $S_{p(i)} \cup i \neq sol(X_i)$.

Chiamo S^I la soluzione S_i .

Posso affermare con certezza che $V(S^I) > V(S_{p(i)}) + v_i$.

Visto che $i \in S_i$, deduco che allora $S^I = S^{II} \cup i$.

Ragionevolmente S^{II} contiene attivita' compatibili insieme a i .

Per la riduzione di qualche paragrafo precedente posso affermare che $S^{II} \subseteq \{1, \dots, p(i)\}$.

Ma allora $V(S^{II}) > V(S_{p(i)})$.

Il che e' impossibile, perche' sappiamo che $S_{p(i)} = sol(X_{p(i)})$.

Dovendo essere necessariamente $S_{p(i)} = sol(X_{p(i)})$, ne ricaviamo che $S^{II} = S_{p(i)}$. Quindi $S_i = S_{p(i)} \cup i$.

2 Assumo che $i \notin S_i$, devo mostrare che $S_i = S_{i-1}$.

Supponiamo per assurdo che $S_i \neq S_{i-1}$

Allora necessariamente $\exists S^I \neq S_{i-1} \mid V(S^I) > V(S_{i-1})$.

Visto che $S^I = S_i$ allora $i \notin S^I$, dato che $i \notin S_i$.

Ma quindi allora $S^I \subseteq 1, \dots, i-1 \mid V(S^I) > V(S_{i-1})$. Il che e' impossibile, perche' sappiamo che $S_{i-1} = \text{sol}(X_{i-1})$.

Dovendo essere necessariamente $S_{i-1} = \text{sol}(X_{i-1})$, ne ricaviamo che $S^I = S_{i-1}$.

Quindi $S_i = S_{i-1}$.

Equazione di Ricorrenza

$$S_i = \begin{cases} \emptyset & i = 0 \\ \{x_1\} & i = 1 \\ S_{p(i)} \cup \{x_i\} & V(p(i)) + v_i \geq V(i-1) \\ S_{i-1} & V(p(i)) + v_i < V(i-1) \end{cases}$$

12.6 Procedura Esercizio

```

procedure INIZIALIZZA-VETTORI
   $OPT[0] \leftarrow 0$ 
   $OPT[1] \leftarrow 1$ 
   $WIS[0] \leftarrow X_0$ 
   $WIS[1] \leftarrow X_1$ 
end procedure

```

```

procedure ESERCIZIO( $i$ )
  INIZIALIZZA-VETTORI()
  for  $i = 2$  to  $n$  do
     $Z1 \leftarrow \text{append}(WIS[p(i)], x_i)$ 
     $Z2 \leftarrow WIS[i - 1]$ 
    if  $OPT[p(i)] < OPT[i - 1]$  then
       $OPT[i] \leftarrow OPT[p(i)] + v_i$ 
       $WIS[i] \leftarrow Z1$ 
    else
       $OPT[i] \leftarrow OPT[i - 1]$ 
       $WIS[i] \leftarrow Z2$ 
    end if
  end for
  return  $WIS[n]$ 
end procedure

```

Considerazioni Esercizio Valgono le considerazioni di WIS-OPT-ITER, ma questa volta $T(n) = \Theta(n)$, perche' la complessita' di $p(i)$ e' mutata. Inoltre si ricorda che entrambi gli esercizi godono di una proprieta' non scontata, ovvero la positivita' dei valori v_i . Se questa proprieta' non fosse stata garantita avremmo dovuto introdurre un'ulteriore caso di confronto. Quindi avremmo avuto $\max(V(p(i)) + v_i, V(i - 1), v_i)$.

Chapter 13

Interleaving

Data: 18-10-2022

13.1 Interleaving

Introduzione

Esempio $X = \langle C, I, A, O \rangle$

$Y = \langle M, A, M, M, A \rangle$

$W = \langle C, I, M, A, A, M, M, A, O \rangle$

W e' un interleaving. L'algoritmo deve decidere se W e' un interleaving. Nel problema si assume che $|W| = i + j$, perche' altrimenti la soluzione nel caso specifico $|W| \neq i + j$ sarebbe triviale.

Ragionamento Definisco i prefissi X_i, Y_j, W_{i+j} . Vero sse W_{i+j} e' un interleaving.

Caso Base

$$\begin{cases} true & i = 0 \wedge j = 0 \\ false & i = 0 \wedge j > 0 \wedge y_j \neq w_{i+j} \\ false & j = 0 \wedge i > 0 \wedge x_i \neq w_{i+j} \\ false & i, j > 0 \wedge y_j \neq w_{i+j} \wedge x_i \neq w_{i+j} \end{cases}$$

Caso Ricorsivo

$$\begin{cases} IL(X_{i-1}, Y_j, W_{i+j-1}) & i > 0 \wedge (j = 0 \vee y_j \neq w_{i+j}) \wedge x_i = w_{i+j} \\ IL(X_i, Y_{j-1}, W_{i+j-1}) & j > 0 \wedge (i = 0 \vee x_i \neq w_{i+j}) \wedge y_j = w_{i+j} \\ IL(X_{i-1}, Y_j, W_{i+j-1}) \vee IL(X_i, Y_{j-1}, W_{i+j-1}) & i, j > 0 \wedge x_i = w_{i+j} \wedge y_j = w_{i+j} \end{cases}$$

Caso Generale

$$\begin{cases}
true & i = 0 \wedge j = 0 \\
false & i = 0 \wedge j > 0 \wedge y_j \neq w_{i+j} \\
false & j = 0 \wedge i > 0 \wedge x_i \neq w_{i+j} \\
false & i, j > 0 \wedge y_j \neq w_{i+j} \wedge x_i \neq w_{i+j} \\
IL(X_{i-1}, Y_j, W_{i+j-1}) & i > 0 \wedge (j = 0 \vee y_j \neq w_{i+j}) \wedge x_i = w_{i+j} \\
IL(X_i, Y_{j-1}, W_{i+j-1}) & j > 0 \wedge (i = 0 \vee x_i \neq w_{i+j}) \wedge y_j = w_{i+j} \\
IL(X_{i-1}, Y_j, W_{i+j-1}) \vee IL(X_i, Y_{j-1}, W_{i+j-1}) & i, j > 0 \wedge x_i = w_{i+j} \wedge y_j = w_{i+j}
\end{cases}$$

13.2 Procedura Bottom-Up

procedure INIZIALIZZA(n, m)

 $M[0][0] \leftarrow true$
for $i = 1$ to n **do**
 $M[i][0] \leftarrow x_i = w_i$
end for
for $j = 1$ to m **do**
 $M[0][j] \leftarrow y_j = w_j$
end for
end procedure

procedure IL(X, Y, W)

 INIZIALIZZA(n, m)

for $i = 1$ to n **do**
for $j = 1$ to m **do**
if $x_i = w_{i+j}$ **then**
if $y_j = w_{i+j}$ **then**
 $M[i][j] \leftarrow M[i-1][j] \vee M[i][j-1]$
else
 $M[i][j] \leftarrow M[i-1][j]$
end if
else
if $y_j = w_{i+j}$ **then**
 $M[i][j] \leftarrow M[i][j-1]$
else
 $M[i][j] \leftarrow false$
end if
end if
end for
end for
end procedure

Complessita' La complessita' computazionale e' banalmente $\Theta(n \cdot m)$.

Chapter 14

Stringhe Palindrome

Data 25-10-22

14.1 Introduzione

Data una stringa S voglio il numero minimo di caratteri da aggiungere per renderla palindroma. I caratteri possono essere aggiunti in qualsiasi posizione.

Esempio 1 $S = ""$
 $PAL(S) = 0$.
caso base

Esempio 2 $S = "ADDA"$
 $PAL(S) = 0$.
E' gia' palindroma

Esempio 3 $S = "ARDA"$
 $PAL(S) = 1$.
Non e' palindroma

14.2 Ragionamento

Un approccio banale e' accodare alla stringa di partenza l'inverso di se stessa. Ma cosi' si aggiungono n caratteri. Io voglio il minimo numero possibile.

Definisco una funzione $f : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$
 $\forall S \in \Sigma^*, f(S) = \text{minimo numero di caratteri da aggiungere per rendere la stringa palindroma.}$

$S = "" \Rightarrow f(S) = 0$
 $\forall \alpha \in \Sigma \mid S = \alpha \Rightarrow f(S) = 1$

Se $|S| > 1$ allora $S = \alpha \cdot S^I \cdot \beta$. Se $\alpha = \beta$ allora $f(S) = f(S^I)$. Se invece $\alpha \neq \beta$,
 $f(S) = \min(f(S^I \cdot \beta), f(\alpha \cdot S^I)) + 1$.

In questo problema quindi non bastera' mantenere un indice per il prefisso, ma trattandosi di sottostringhe avremo bisogno di due indici i, j .

14.3 Algoritmo

Caso Base

$$\begin{cases} 0 & i \geq j \end{cases}$$

Caso Ricorsivo

$$\begin{cases} f(S, i+1, j-1) & i < j \wedge s_i = s_j \\ f(S, i+1, j) + 1 & i < j \wedge s_i \neq s_j \wedge f(S, i+1, j) \leq f(S, i, j-1) \\ f(S, i, j-1) + 1 & i < j \wedge s_i \neq s_j \wedge f(S, i+1, j) > f(S, i, j-1) \end{cases}$$

Caso Generale

$$\begin{cases} 0 & i \geq j \\ f(S, i+1, j-1) & i < j \wedge s_i = s_j \\ f(S, i+1, j) + 1 & i < j \wedge s_i \neq s_j \wedge f(S, i+1, j) \leq f(S, i, j-1) \\ f(S, i, j-1) + 1 & i < j \wedge s_i \neq s_j \wedge f(S, i+1, j) > f(S, i, j-1) \end{cases}$$

14.4 Procedura

```

procedure PAL( $S$ )
  for  $i = n$  to 1 do
    for  $j = 1$  to  $n$  do
      if  $i \geq j$  then
         $M[i][j] \leftarrow 0$ 
      else if  $s_i = s_j$  then
         $M[i][j] \leftarrow M[i+1][j-1]$ 
      else if  $s_i \neq s_j$  then
        if  $M[i+1][j] \leq M[i][j-1]$  then
           $M[i][j] \leftarrow M[i+1][j] + 1$ 
        else
           $M[i][j] \leftarrow M[i][j-1] + 1$ 
        end if
      end if
    end for
  end for
  return  $M[|S|][|S|]$ 
end procedure

```

Complessita' $T(n) = \Theta(n^2)$

Chapter 15

Esercizio Genoa

Determinare la lunghezza di una piu' lunga sottosequenza comune di X e Y con al massimo R simboli colorati di rosso. $COL : \Sigma \rightarrow \{\text{rosso}, \text{blu}\}$. Chiamo la sottosequenza in questione $SEQ(X, Y)$.

15.1 Ragionamento

Caso Base

$$\begin{cases} 0 & i = 0 \vee j = 0 \end{cases}$$

Caso Ricorsivo Uso una funzione $ROS : \Sigma^* \cdot \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$, con $ROS(X, Y) = |\{\alpha \mid \forall \alpha \in SEQ(X, Y) \mid COL(\alpha) = \text{rosso}\}|$

$$\begin{cases} GEN(X_{i-1}, Y_{j-1}) + 1 & x_i = y_j \wedge (ROS(X_{i-1}, Y_{j-1}) < R \vee COL(x_i) \neq \text{rosso}) \\ GEN(X_{i-1}, Y_{j-1}) & x_i = y_j \wedge ROS(X_{i-1}, Y_{j-1}) = R \wedge COL(x_i) = \text{rosso} \\ GEN(X_{i-1}, Y_j) & x_i \neq y_j \wedge GEN(X_{i-1}, Y_j) \geq GEN(X_i, Y_{j-1}) \\ GEN(X_i, Y_{j-1}) & x_i \neq y_j \wedge GEN(X_{i-1}, Y_j) < GEN(X_i, Y_{j-1}) \end{cases}$$

Caso Generale

$$\begin{cases} 0 & i = 0 \vee j = 0 \\ GEN(X_{i-1}, Y_{j-1}) + 1 & x_i = y_j \wedge (ROS(X_{i-1}, Y_{j-1}) < R \vee COL(x_i) \neq \text{rosso}) \\ GEN(X_{i-1}, Y_{j-1}) & x_i = y_j \wedge ROS(X_{i-1}, Y_{j-1}) = R \wedge COL(x_i) = \text{rosso} \\ GEN(X_{i-1}, Y_j) & x_i \neq y_j \wedge GEN(X_{i-1}, Y_j) \geq GEN(X_i, Y_{j-1}) \\ GEN(X_i, Y_{j-1}) & x_i \neq y_j \wedge GEN(X_{i-1}, Y_j) < GEN(X_i, Y_{j-1}) \end{cases}$$

Chapter 16

Esercizio a Casa