Assignment 1

19/10/2022

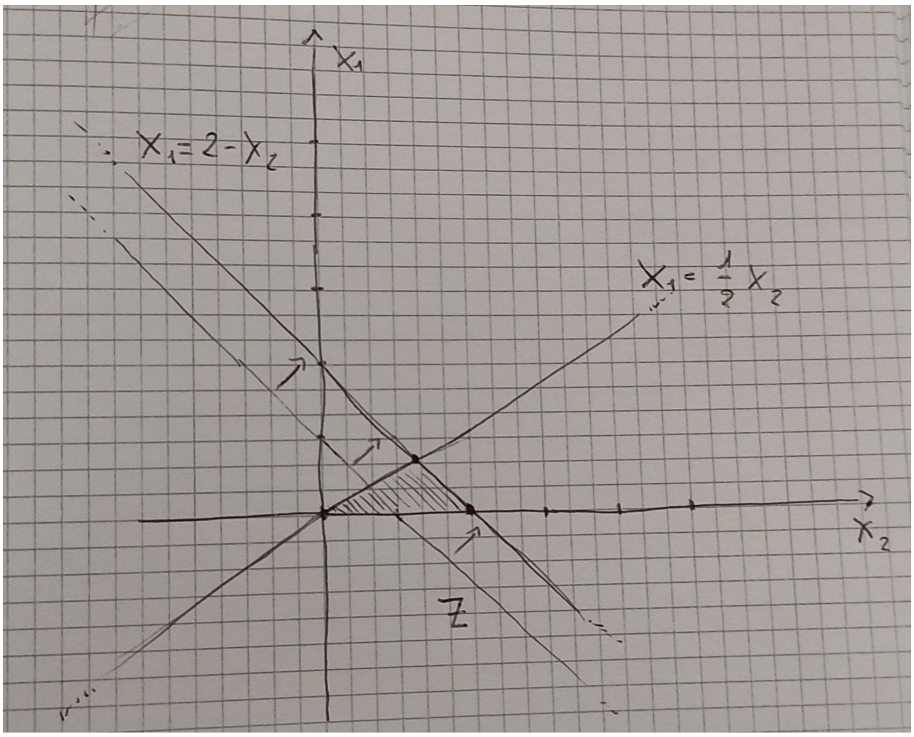
Francesco Refolli 865955

1 Esercizio 1

$$
\begin{aligned}
& max\ x_1 + x_2 && (1)\\
& x_1 + x_2 \leq 2 && (2)\\
& 2x_1 - x_2 \leq 0 && (3)\\
& x_1, x_2 \geq 0 && (4)
\end{aligned}
$$

Costruisco il grafico con le equazioni dei vincoli lungo l'asse $x_1 \times x_2$. Riscrivo per comodita' i primi due vincoli in forma equivalente:

$$
\begin{aligned}
& x_1 \leq 2 - x_2 && (5)\\
& x_1 \leq \frac{x_2}{2} && (6)
\end{aligned}
$$



La direzione di crescita della funzione obiettivo e' perpedincolare al vincolo $x_1 \leq 2 - x_2$, quindi il problema ha **Infinite Soluzioni Ottime**.
Le soluzioni sono tutte le coppie $<x_1, x_2>$ che risiedono nello spigolo della regione obiettivo su cui si poggia il vincolo $x_1 \leq 2 - x_2$.

2 Esercizio 2

$$max\ x_1 + x_2 \tag{7}$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 2 \tag{8}$$
$$2x_1 - x_2 \leq 0 \tag{9}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{10}$$
$$x_3 \leq 0 \tag{11}$$

Conversione in forma standard

1 La forma standard non prevede vincoli di non positivita', quindi inverto il segno di x_3 in tutti i vincoli:

$$max\ x_1 + x_2 \tag{12}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 \tag{13}$$
$$2x_1 - x_2 \leq 0 \tag{14}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \tag{15}$$

2 I vincoli devono essere esclusivamente in forma $\leq$. Quindi sostituisco il vincolo $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ con l'equivalente in termini di disuguaglianze e inverto il segno di quella con $\geq$.

$$max\ x_1 + x_2 \tag{16}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \tag{17}$$
$$-x_1 - x_2 - x_3 \leq -2 \tag{18}$$
$$2x_1 - x_2 \leq 0 \tag{19}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \tag{20}$$

Conversione in forma aumentata

1 Aggiungo tre variabili di slack per portare i tre vincoli $\leq$ in vincoli $=$.

$$max\ x_1 + x_2 \tag{21}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \tag{22}$$
$$-x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = -2 \tag{23}$$
$$2x_1 - x_2 + x_6 = 0 \tag{24}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \tag{25}$$
$$x_4, x_5, x_6 \geq 0 \tag{26}$$

2 Quindi esporto la funzione obiettivo $f(x)$ in un vincolo $Z - f(x) = 0$.

$$max\ Z \tag{27}$$
$$Z - x_1 - x_2 = 0 \tag{28}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \tag{29}$$
$$-x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = -2 \tag{30}$$
$$2x_1 - x_2 + x_6 = 0 \tag{31}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \tag{32}$$
$$x_4, x_5, x_6 \geq 0 \tag{33}$$

Risoluzione con tableau

Iterazione 0

base	riga	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	termine noto
Z	0	1	-1	-1	0	0	0	0	0
x_4	1	0	1	1	1	1	0	0	2
x_5	2	0	-1	-1	-1	0	1	0	-2
x_6	3	0	2	-1	0	0	0	1	0

Iterazione 1 Sono presenti nella prima riga coefficienti negativi. Seleziono arbitrariamente x_1, perche' tutti i coefficienti negativi hanno pari valore.

Nella prima colonna considero i coefficienti delle righe 1, 3.
Seleziono il minimo rapporto, ovvero 0 della riga 3.

Questo ha l'effetto di togliere dalla base x_6 e inserire x_1.

base	riga	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	termine noto
Z	0	1	0	-$\frac{3}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0
x_4	1	0	0	$\frac{3}{2}$	1	1	0	-$\frac{1}{2}$	2
x_5	2	0	0	-$\frac{3}{2}$	-1	0	1	$\frac{1}{2}$	-2
x_1	3	0	1	-$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0

Iterazione 2 A questo punto seleziono come variabile entrante x_2, l'ultima variabile non di base con coefficiente negativo nella prima riga.

Seleziono l'unica riga con coefficiente strettamente positivo, ovvero la riga 1. Quindi x_4 esce dalla base.

base	riga	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	termine noto
Z	0	1	0	0	1	1	0	0	2
x_2	1	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	-$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
x_5	2	0	0	0	0	1	1	0	0
x_1	3	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Iterazione 3 Non sono piu' presenti coefficienti negativi nella riga 0, quindi l'algoritmo si arresta.

La soluzione ottimale e':
$<x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6> = <\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 0, 0, 0, 0>$

Visto che le variabili decisionali sono x_1, x_2, la soluzione al problema PL e:
$<x_1, x_2> = <\frac{2}{3}, \frac{4}{3}>$

3 Grosser Autobahn

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
1	-1	-1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	2
0	-1	-1	-1	0	1	0	-2
0	2	-1	0	0	0	1	0

iteration 1 Scelgo la colonna 1 perche' non esiste un coefficiente in prima riga negativo piu' basso.
Scelgo la riga 3 che ha il rapporto minimo.
Ricalcolo la tabella. Questo ha l'effetto di scambiare x_3 della base con x_1.

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
1.0	0.0	$-\frac{3}{2}$	0.0	0.0	0.0	$\frac{1}{2}$	0.0
0.0	0.0	$\frac{3}{2}$	1.0	1.0	0.0	$-\frac{1}{2}$	2.0
0.0	0.0	$-\frac{3}{2}$	-1.0	0.0	1.0	$\frac{1}{2}$	-2.0
0.0	1.0	$-\frac{1}{2}$	0.0	0.0	0.0	$\frac{1}{2}$	0.0

iteration 2 Scelgo la colonna 2 perche' non esiste un coefficiente in prima riga negativo piu' basso.
Scelgo la riga 1 che ha il rapporto minimo.
Ricalcolo la tabella. Questo ha l'effetto di scambiare x_1 della base con x_2.

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
1.0	0.0	0.0	1.0	1.0	0.0	0.0	2.0
0.0	0.0	1.0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0.0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	1.0	0.0	0.0
0.0	1.0	0.0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0.0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

iteration 3 La prima riga non contiene piu' valori negativi, l'algoritmo del simplesso si arresta.
La soluzione di base e' $<x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6> = <\frac{2}{3},\frac{4}{3},0,0,0.0,0>$ La soluzione al problema PL e' $<x_1,x_2> = <\frac{2}{3},\frac{4}{3}>$

4 Kleiner Autobahn

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	-1	-1	0	0	0
0	1	1	1	0	2
0	2	-1	0	1	0

iteration 1 Scelgo la colonna 1 perche' non esiste un coefficiente in prima riga negativo piu' basso.
Scelgo la riga 2 che ha il rapporto minimo.
Ricalcolo la tabella. Questo ha l'effetto di scambiare x_2 della base con x_1.

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	b
1.0	0.0	-$\frac{3}{2}$	0.0	$\frac{1}{2}$	0.0
0.0	0.0	$\frac{3}{2}$	1.0	-$\frac{1}{2}$	2.0
0.0	1.0	-$\frac{1}{2}$	0.0	$\frac{1}{2}$	0.0

iteration 2 Scelgo la colonna 2 perche' non esiste un coefficiente in prima riga negativo piu' basso.
Scelgo la riga 1 che ha il rapporto minimo.
Ricalcolo la tabella. Questo ha l'effetto di scambiare x_1 della base con x_2.

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	b
1.0	0.0	0.0	1.0	0.0	2.0
0.0	0.0	1.0	$\frac{2}{3}$	-$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
0.0	1.0	0.0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

iteration 3 La prima riga non contiene piu' valori negativi, l'algoritmo del simplesso si arresta.
La soluzione di base e' $<x_1,x_2,x_3,x_4> = <\frac{2}{3},\frac{4}{3},0,0>$ La soluzione al problema PL e' $<x_1,x_2> = <\frac{2}{3},\frac{4}{3}>$