Assignment 1

21/10/2022

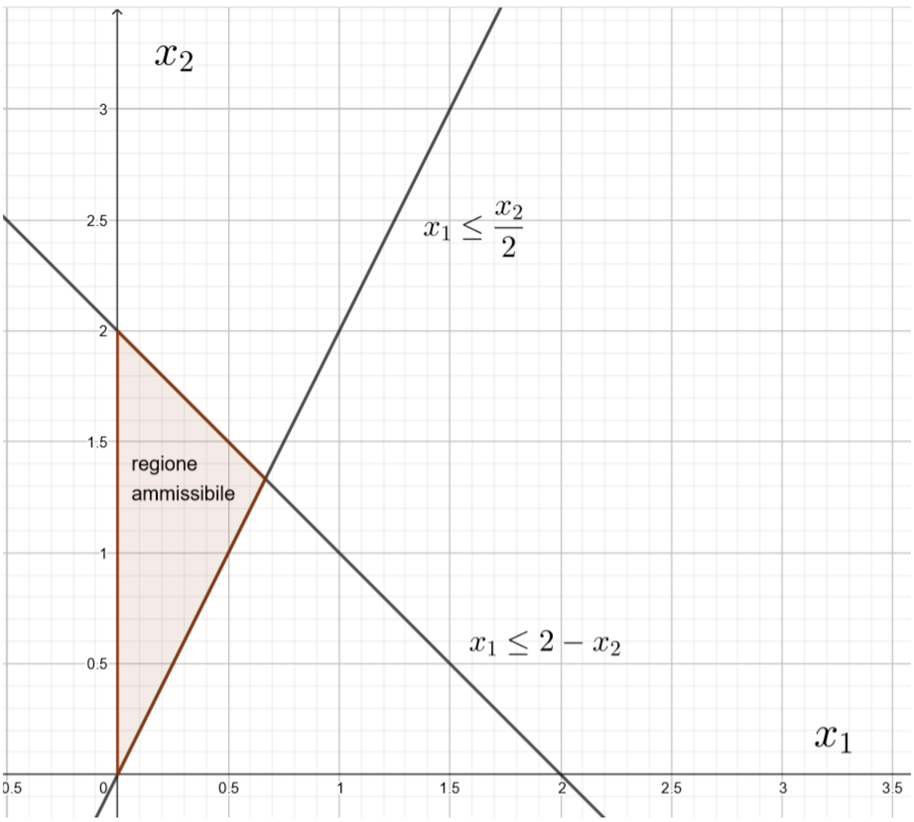
Francesco Refolli 865955

1 Esercizio 1

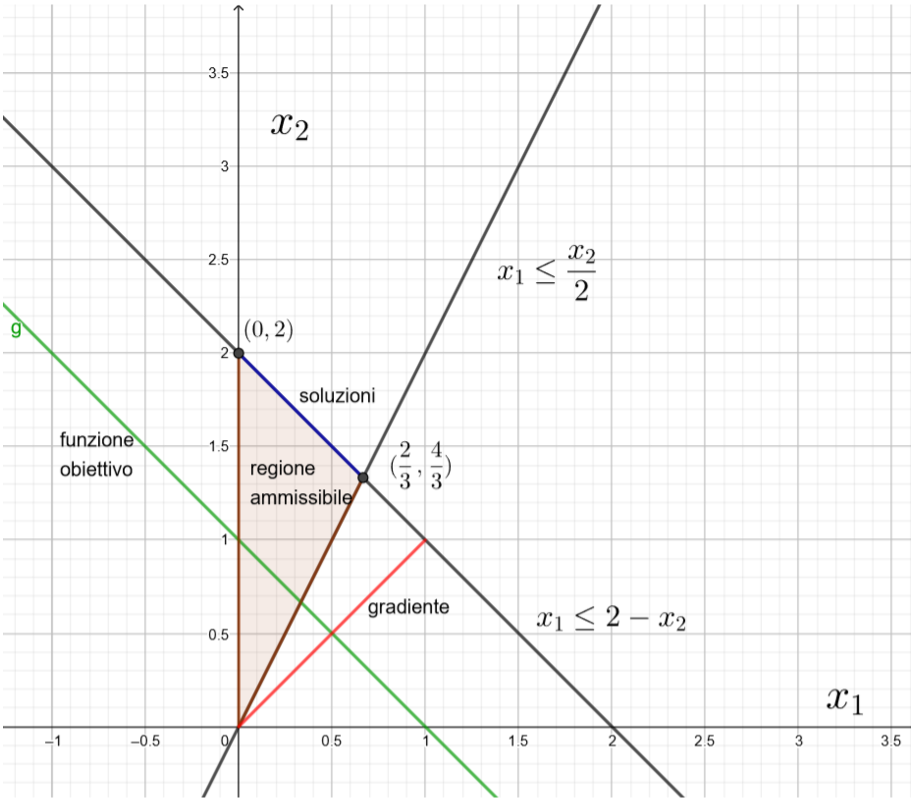
$$max\ x_1 + x_2 \tag{1}$$
$$x_1 + x_2 \leq 2 \tag{2}$$
$$2x_1 - x_2 \leq 0 \tag{3}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{4}$$

Costruisco il grafico con le equazioni dei vincoli lungo l'asse $x_1 \times x_2$. Riscrivo per comodita' i primi due vincoli in forma equivalente:

$$x_1 \leq 2 - x_2 \tag{5}$$
$$x_1 \leq \frac{x_2}{2} \tag{6}$$



Quindi disegno il gradiente della funzione obiettivo g e la funzione obiettivo.



Il vettore del gradiente della funzione obiettivo $g = <1, 1>$, composto dalle derivate parziali delle componenti della funzione obiettivo, e' perpedincolare al vincolo $x_1 \leq 2 - x_2$. Il problema ha **Infinite Soluzioni Ottime**. Le soluzioni sono tutte le coppie $<x_1, x_2>$ che risiedono nello spigolo della regione obiettivo su cui si poggia il vincolo $x_1 \leq 2 - x_2$. Per calcolare il segmento e' sufficiente calcolare l'intersezione dei vincoli $x_1 \leq 2 - x_2$ e $x_1 \geq 0$. Il risultato sono i punti: $(0, 2)$, $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$. Le soluzioni sono tutti i punti compresi nel segmento delimitato da essi.

2 Esercizio 2

$$max\ x_1 + x_2 \tag{7}$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 2 \tag{8}$$
$$2x_1 - x_2 \leq 0 \tag{9}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{10}$$
$$x_3 \leq 0 \tag{11}$$

Conversione in forma aumentata

1 La forma aumentata non prevede vincoli di non positivita', quindi inverto il segno di x_3 in tutti i vincoli:

$$max\ x_1 + x_2 \tag{12}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 \tag{13}$$
$$2x_1 - x_2 \leq 0 \tag{14}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \tag{15}$$

2 Aggiungo una variabile di slack x_4 per portare il vincolo $\leq$ in vincolo $=$.

$$max\ x_1 + x_2 \tag{16}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 \tag{17}$$
$$2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \tag{18}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \tag{19}$$

3 Quindi esporto la funzione obiettivo $f(x)$ in un vincolo $Z - f(x) = 0$.

$$max\ Z \tag{20}$$
$$Z - x_1 - x_2 = 0 \tag{21}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 \tag{22}$$
$$2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \tag{23}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \tag{24}$$

Risoluzione con tableau Riempio la forma tabellare con i coefficienti delle variabili nei vincoli e nella funzione obiettivo. La tabella risulta:

base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	1	-1	-1	0	0	0
3	0	1	1	1	0	2
4	0	2	-1	0	1	0

La base e' formata da 2 variabili, perche' il numero di vincoli e' proprio 2. Inserisco nella base le variabili x_3, x_4. Fuori base rimangono x_1, x_2. La soluzione di base corrente $<x_1,x_2,x_3,x_4> = <0,0,2,0>$ e' ammissibile. Quindi procedo con l'algoritmo del simplesso.

iterazione 1 Non esiste un coefficiente in prima riga negativo piu' basso di tutti gli altri. Scelgo la colonna 1 con coefficiente -1. La riga 2 ha il rapporto minimo, diventa la riga pivot. Il valore pivot e' 2, moltiplico tutta la riga 2 per $\frac{1}{2}$ per ridurre il valore pivot a 1. Quindi applico l'algoritmo per ricalcolare la tabella. Questa iterazione ha l'effetto di scambiare x_4 della base con x_1.

base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	1	0	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
3	0	0	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	2
1	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0

iterazione 2 Scelgo la colonna 2 perche' possiede il coefficiente in prima riga negativo piu' basso, ovvero $-\frac{3}{2}$. La riga 1 ha il rapporto minimo, diventa la riga pivot. Il valore pivot e' $\frac{3}{2}$, moltiplico tutta la riga 2 per $\frac{2}{3}$ per ridurre il valore pivot a 1. Applico l'algoritmo per ricalcolare la tabella. Questo ha l'effetto di scambiare x_3 della base con x_2.

base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	1	0	0	1	0	2
2	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
1	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

iterazione 3 La prima riga non contiene piu' valori negativi, l'algoritmo del simplesso si arresta.
La soluzione di base corrente e' $<x_1,x_2,x_3,x_4> = <\frac{2}{3},\frac{4}{3},0,0>$
Quindi una soluzione al problema PL e' $<x_1,x_2> = <\frac{2}{3},\frac{4}{3}>$

Ad ogni modo, siccome una delle variabili non di base ha coefficiente 0 in prima posizione e' possibile continuare con le iterazioni per individuare una ulteriore soluzione ottimale al problema PL.

Selezionando la colonna x_4, l'unica riga con coefficiente positivo e' la riga 2. Quindi moltiplico la stessa per l'inverso del numero pivot: $(\frac{1}{3})^{-1} = 3$. Successivamente ricalcolo le altre righe di conseguenza.

Risulta:

base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	1	0	0	1	0	2
2	0	1	1	1	0	2
4	0	3	0	1	1	2

iterazione 4 La prima riga non contiene valori negativi, l'algoritmo del simplesso si arresta.
La soluzione di base corrente e' $<x_1,x_2,x_3,x_4> = <0,2,0,2>$
Quindi un'altra soluzione al problema PL e' $<x_1,x_2> = <0,2>$

Essendoci due soluzioni ottimali di base, tutte le soluzioni ottimali sono una combinazione convessa delle due precedentemente ottenute:
$<x_1, x_2, x_3, x_4> = w_1 \cdot <\frac{2}{3},\frac{4}{3},0,0> + w_2 \cdot <0, 2, 0, 2>$