

Assignment 1

19/10/2022

Francesco Refolli 865955

1 Esercizio 1

$$\max x_1 + x_2 \quad (1)$$

$$x_1 + x_2 \leq 2 \quad (2)$$

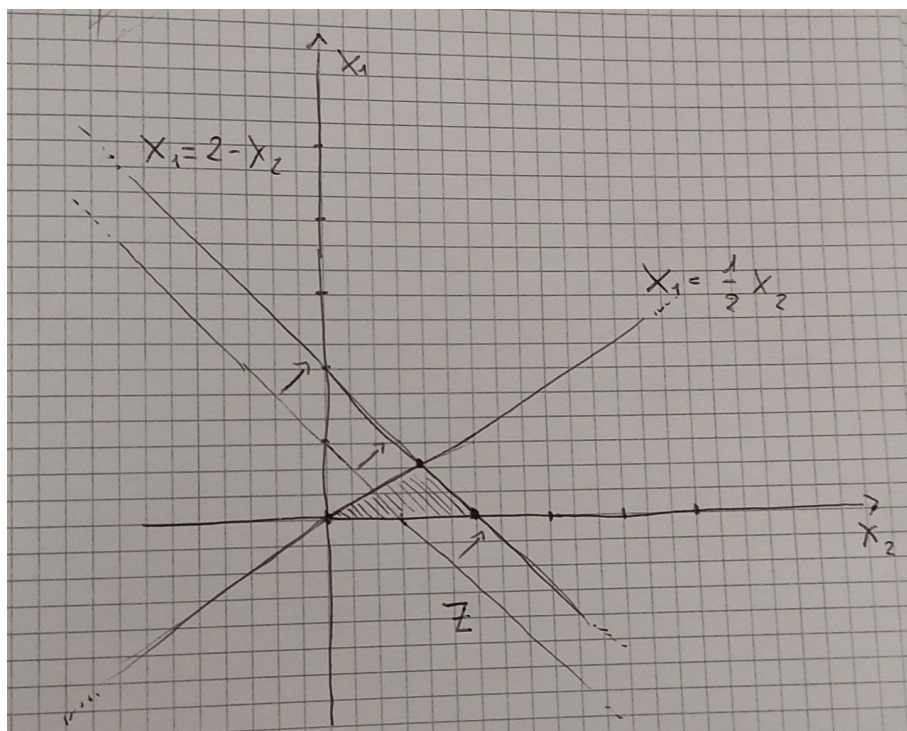
$$2x_1 - x_2 \leq 0 \quad (3)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (4)$$

Costruisco il grafico con le equazioni dei vincoli lungo l'asse $x_1 \times x_2$.
Riscrivo per comodita' i primi due vincoli in forma equivalente:

$$x_1 \leq 2 - x_2 \quad (5)$$

$$x_1 \leq \frac{x_2}{2} \quad (6)$$



La direzione di crescita della funzione obiettivo e' perpedincolare al vincolo $x_1 \leq 2 - x_2$, quindi il problema ha **Infinite Soluzioni Ottime**.
Le soluzioni sono tutte le coppie $\langle x_1, x_2 \rangle$ che risiedono nello spigolo della regione obiettivo su cui si poggia il vincolo $x_1 \leq 2 - x_2$.

2 Esercizio 2

$$\max x_1 + x_2 \quad (7)$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 2 \quad (8)$$

$$2x_1 - x_2 \leq 0 \quad (9)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (10)$$

$$x_3 \leq 0 \quad (11)$$

Conversione in forma standard

1 La forma standard non prevede vincoli di non positività', quindi inverto il segno di x_3 in tutti i vincoli:

$$\max x_1 + x_2 \quad (12)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 \quad (13)$$

$$2x_1 - x_2 \leq 0 \quad (14)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad (15)$$

2 I vincoli devono essere esclusivamente in forma \leq . Quindi sostituisco il vincolo $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ con l'equivalente in termini di disuguaglianze e inverto il segno di quella con \geq .

$$\max x_1 + x_2 \quad (16)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \quad (17)$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 \leq -2 \quad (18)$$

$$2x_1 - x_2 \leq 0 \quad (19)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad (20)$$

Conversione in forma aumentata

1 Aggiungo tre variabili di slack per portare i tre vincoli \leq in vincoli $=$.

$$\max x_1 + x_2 \quad (21)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \quad (22)$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = -2 \quad (23)$$

$$2x_1 - x_2 + x_6 = 0 \quad (24)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad (25)$$

$$x_4, x_5, x_6 \geq 0 \quad (26)$$

2 Quindi esporto la funzione obiettivo $f(x)$ in un vincolo $Z - f(x) = 0$.

$$\max Z \quad (27)$$

$$Z - x_1 - x_2 = 0 \quad (28)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \quad (29)$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = -2 \quad (30)$$

$$2x_1 - x_2 + x_6 = 0 \quad (31)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad (32)$$

$$x_4, x_5, x_6 \geq 0 \quad (33)$$

Risoluzione con tableau

Iterazione 0

base	riga	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	termine noto
Z	0	1	-1	-1	0	0	0	0	0
x_4	1	0	1	1	1	1	0	0	2
x_5	2	0	-1	-1	-1	0	1	0	-2
x_6	3	0	2	-1	0	0	0	1	0

Iterazione 1 Sono presenti nella prima riga coefficienti negativi. Seleziono arbitrariamente x_1 , perche' tutti i coefficienti negativi hanno pari valore.

Nella prima colonna considero i coefficienti delle righe 1, 3. Seleziono il minimo rapporto, ovvero 0 della riga 3.

Questo ha l'effetto di togliere dalla base x_6 e inserire x_1 .

base	riga	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	termine noto
Z	0	1	0	$-\frac{3}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0
x_4	1	0	0	$-\frac{3}{2}$	1	1	0	$-\frac{1}{2}$	2
x_5	2	0	0	$-\frac{3}{2}$	-1	0	1	$\frac{1}{2}$	-2
x_1	3	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0

Iterazione 2 A questo punto seleziono come variabile entrante x_2 , l'ultima variabile non di base con coefficiente negativo nella prima riga.

Seleziono l'unica riga con coefficiente strettamente positivo, ovvero la riga 1. Quindi x_4 esce dalla base.

base	riga	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	termine noto
Z	0	1	0	0	1	1	0	0	2
x_2	1	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
x_5	2	0	0	0	0	1	1	0	0
x_1	3	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Iterazione 3 Non sono piu' presenti coefficienti negativi nella riga 0, quindi l'algoritmo si arresta.

La soluzione ottimale e':
 $\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \rangle = \langle \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 0, 0, 0, 0 \rangle$

Visto che le variabili decisionali sono x_1, x_2 , la soluzione al problema PL e:
 $\langle x_1, x_2 \rangle = \langle \frac{2}{3}, \frac{4}{3} \rangle$

1

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
1	-1	-1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	2
0	-1	-1	-1	0	1	0	-2
0	2	-1	0	0	0	1	0

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
1.0	0.0	-1.5	0.0	0.0	0.0	0.5	0.0
0.0	0.0	1.5	1.0	1.0	0.0	-0.5	2.0
0.0	0.0	-1.5	-1.0	0.0	1.0	0.5	-2.0
0.0	1.0	-0.5	0.0	0.0	0.0	0.5	0.0

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
1.0	0.0	0.0	1.0	1.0	0.0	0.0	2.0
0.0	0.0	1.0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0.0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	1.0	0.0	0.0
0.0	1.0	0.0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0.0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

2

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	-1	-1	0	0	0
0	1	1	1	0	2
0	2	-1	0	1	0

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	b
1.0	0.0	-1.5	0.0	0.5	0.0
0.0	0.0	1.5	1.0	-0.5	2.0
0.0	1.0	-0.5	0.0	0.5	0.0

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	b
1.0	0.0	0.0	1.0	0.0	2.0
0.0	0.0	1.0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
0.0	1.0	0.0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$