Assignment 1

19/10/2022

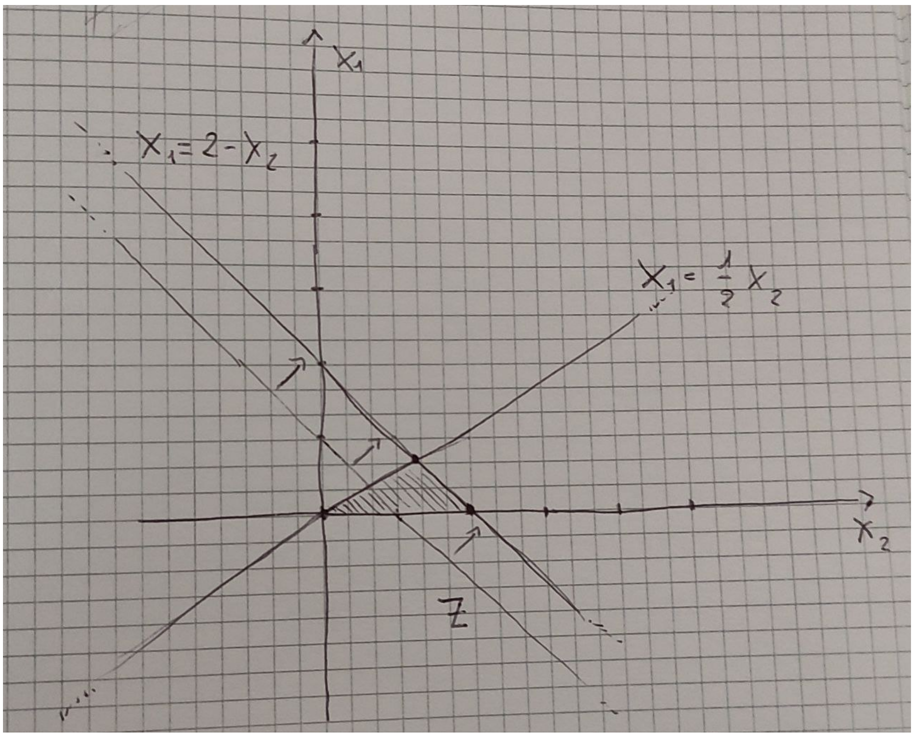
Francesco Refolli 865955

1 Esercizio 1

$$max\ x_1 + x_2 \quad (1)$$
$$x_1 + x_2 \leq 2 \quad (2)$$
$$2x_1 - x_2 \leq 0 \quad (3)$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (4)$$

Costruisco il grafico con le equazioni dei vincoli lungo l'asse $x_1 \times x_2$. Riscrivo per comodita' i primi due vincoli in forma equivalente:

$$x_1 \leq 2 - x_2 \quad (5)$$
$$x_1 \leq \frac{x_2}{2} \quad (6)$$



Il vetto del gradiente della funzione obiettivo $g = <1, 1>$, composto dalle derivate parziali delle componenti della funzione obiettivo, e' perpedincolare al vincolo $x_1 \leq 2 - x_2$, quindi il problema ha **Infinite Soluzioni Ottime**. Le soluzioni sono tutte le coppie $<x_1, x_2>$ che risiedono nello spigolo della regione obiettivo su cui si poggia il vincolo $x_1 \leq 2 - x_2$. Ovvero tutti i punti sul segmento delimitato dai punti: $(0, 2)$, $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$.

2 Esercizio 2

$$max\ x_1 + x_2 \tag{7}$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 2 \tag{8}$$
$$2x_1 - x_2 \leq 0 \tag{9}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{10}$$
$$x_3 \leq 0 \tag{11}$$

Conversione in forma aumentata

1 La forma standard non prevede vincoli di non positivita', quindi inverto il segno di x_3 in tutti i vincoli:

$$max\ x_1 + x_2 \tag{12}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 \tag{13}$$
$$2x_1 - x_2 \leq 0 \tag{14}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \tag{15}$$

2 Aggiungo tre variabili di slack per portare i tre vincoli $\leq$ in vincoli $=$.

$$max\ x_1 + x_2 \tag{16}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 \tag{17}$$
$$2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \tag{18}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \tag{19}$$

3 Quindi esporto la funzione obiettivo $f(x)$ in un vincolo $Z - f(x) = 0$.

$$max\ Z \tag{20}$$
$$Z - x_1 - x_2 = 0 \tag{21}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 \tag{22}$$
$$2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \tag{23}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \tag{24}$$

Risoluzione con tableau

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	-1	-1	0	0	0
0	1	1	1	0	2
0	2	-1	0	1	0

iteration 1 Scelgo la colonna 1 perche' non esiste un coefficiente in prima riga negativo piu' basso.
Scelgo la riga 2 che ha il rapporto minimo.
Ricalcolo la tabella. Questo ha l'effetto di scambiare x_2 della base con x_1.

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	b
1.0	0.0	-$\frac{3}{2}$	0.0	$\frac{1}{2}$	0.0
0.0	0.0	$\frac{3}{2}$	1.0	-$\frac{1}{2}$	2.0
0.0	1.0	-$\frac{1}{2}$	0.0	$\frac{1}{2}$	0.0

iteration 2 Scelgo la colonna 2 perche' non esiste un coefficiente in prima riga negativo piu' basso.
Scelgo la riga 1 che ha il rapporto minimo.
Ricalcolo la tabella. Questo ha l'effetto di scambiare x_1 della base con x_2.

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	b
1.0	0.0	0.0	1.0	0.0	2.0
0.0	0.0	1.0	$\frac{2}{3}$	-$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
0.0	1.0	0.0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

iteration 3 La prima riga non contiene piu' valori negativi, l'algoritmo del simplesso si arresta.
La soluzione di base corrente e' $<x_1,x_2,x_3,x_4> = <\frac{2}{3},\frac{4}{3},0,0>$ Quindi una soluzione al problema PL e' $<x_1,x_2> = <\frac{2}{3},\frac{4}{3}>$