Assignment 1

21/10/2022

Francesco Refolli 865955

Il Problema

$$\begin{aligned} Max\ Z = x_1 - 2x_2 \\ x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

1 Risolvere il problema primale con l'algoritmo del simplesso

Conversione del problema in forma aumentata Per poter risolvere il problema primale usando l'algoritmo del simplesso devo convertire prima il problema in forma aumentata.
Voglio tutti i vincoli di segno al $\geq$, quindi creo la variabile $y = -x_2$, pongo il vincolo $y \geq 0$ e sostituisco $y = -x_2$ in tutti i vincoli e nella funzione obiettivo.

$$\begin{aligned} Max\ Z = x_1 + 2y \\ x_1 + y \geq 1 \\ x_1 + 2y \leq 6 \\ 2x_1 + y \leq 6 \\ x_1, y \geq 0 \end{aligned}$$

Quindi aggiungo una variabile surplus al vincolo 1: x_3.

$$\begin{aligned} Max\ Z = x_1 + 2y \\ x_1 + y - x_3 = 1 \\ x_1 + 2y \leq 6 \\ 2x_1 + y \leq 6 \\ x_1, y, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Quindi aggiungo due variabile slack ai vincolo 2 e 3: x_4, x_5.

$$\begin{aligned} Max\ Z = x_1 + 2y \\ x_1 + y - x_3 = 1 \\ x_1 + 2y + x_4 = 6 \\ 2x_1 + y + x_5 = 6 \\ x_1, y, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Forma tabellare

base	Z	x_1	y	x_3	x_4	x_5	b
	1	-1	-2	0	0	0	0
	0	1	1	-1	0	0	1
	0	1	2	0	1	0	6
	0	2	1	0	0	1	6

La soluzione di partenza (0, 0, -1, 6, 6) non e' ammissibile quindi introduco una variabile artificiale $A \geq 0$.

base	Z	x_1	y	x_3	x_4	x_5	A	b
Z	1	-1	-1	1	0	0	0	-1
A	0	1	1	-1	0	0	1	1
x_4	0	1	2	0	1	0	0	6
x_5	0	2	1	0	0	1	0	6

In questo modo ottengo la soluzione di base ammissibile (0,0,0,1,6,6).

Iterazione 0 x_1 e y hanno entrambe coefficiente -1 in prima riga, quindi scelgo arbitrariamente x_1. Calcolando i rapporti dei coefficienti in colonna strettamente positivi, la riga 1 con rapporto $\frac{1}{1} = 1$, ha rapporto minimo. Quindi la variabile di base uscente e' A, la variabile non di base entrante e' x_1. Ricalcolo le righe di conseguenza. Il risultato dell'iterazione e':

base	Z	x_1	y	x_3	x_4	x_5	A	b
Z	1	0	0	0	0	0	1	0
x_1	0	1	1	-1	0	0	1	1
x_4	0	0	1	1	1	0	-1	5
x_5	0	0	-1	2	0	1	-2	4

La variabile A e' uscita dalla base, non ci sono piu' variabili artificiali nella base, quindi trasformo il tableau per risolvere il problema originale. Sostituisco la riga 0 con la funzione obiettivo originale. Quindi annullo i coefficienti in riga 0 corrispondenti alle variabili in base sottraendo una combinazione lineare delle righe 1,2,3. Ottengo:

base	Z	x_1	y	x_3	x_4	x_5	b
Z	1	0	-1	-1	0	0	1
x_1	0	1	1	-1	0	0	1
x_4	0	0	1	1	1	0	5
x_5	0	0	-1	2	0	1	4

Iterazione 1 x_3 e y hanno entrambe coefficiente -1 in prima riga, quindi scelgo arbitrariamente y. Calcolando i rapporti dei coefficienti in colonna strettamente positivi, la riga 1 con rapporto $\frac{1}{1} = 1$, ha rapporto minimo. Quindi la variabile di base uscente e' x_1, la variabile non di base entrante e' y. Ricalcolo le righe di conseguenza. Il risultato dell'iterazione e':

base	Z	x_1	y	x_3	x_4	x_5	b
Z	1	1	0	-2	0	0	2
y	0	1	1	-1	0	0	1
x_4	0	-1	0	2	1	0	4
x_5	0	1	0	1	0	1	5

Iterazione 2 x_3 ha coefficiente -2 in prima riga, quindi lo scelgo come variabile entrante. Calcolando i rapporti dei coefficienti in colonna strettamente positivi, la riga 2 con rapporto $\frac{4}{2} = 2$, ha rapporto minimo. Quindi la variabile di base uscente e' x_4, la variabile non di base entrante e' x_3. Ricalcolo le righe di conseguenza. Il risultato dell'iterazione e':

base	Z	x_1	y	x_3	x_4	x_5	b
Z	1	0	0	0	1	0	6
y	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	3
x_3	0	-$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	2
x_5	0	$\frac{3}{2}$	0	0	-$\frac{1}{2}$	1	3

iterazione 3 La prima riga non contiene piu' valori negativi, l'algoritmo del simplesso si arresta.
La soluzione di base corrente e' (x_1,y,x_3,x_4,x_5) = (0,3,2,0,3)
Quindi una soluzione al problema PL e' (x_1,y) = (0,3).
Tuttavia ricordando $y = -x_2$, e' piu' significativo dire (x_1, x_2) = (0, -3).

Ad ogni modo, siccome una delle variabili non di base ha coefficiente 0 in prima posizione e' possibile continuare con le iterazioni per individuare una ulteriore soluzione ottimale al problema PL.

Seleziono quindi x_1 che ha coefficiente 0. Calcolando i rapporti dei coefficienti in colonna strettamente positivi, la riga 3 con rapporto $\frac{3}{\frac{3}{2}} = 2$, ha rapporto minimo. Quindi la variabile di base uscente e' x_5, la variabile non di base entrante e' x_1. Ricalcolo le righe di conseguenza. Il risultato dell'iterazione e':

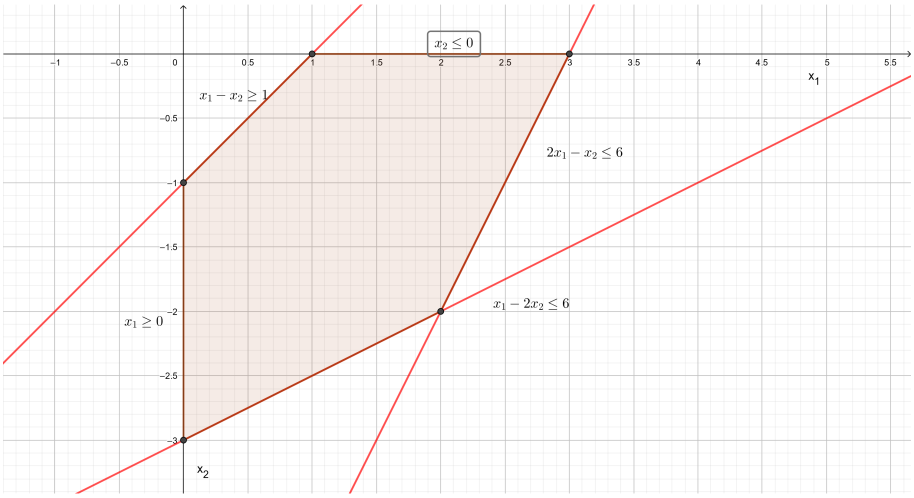
base	Z	x_1	y	x_3	x_4	x_5	b
Z	1	0	0	0	1	0	6
y	0	0	1	0	$\frac{2}{3}$	-$\frac{1}{3}$	2
x_3	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	3
x_1	0	1	0	0	-$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	2

iterazione 4 La prima riga non contiene valori negativi, l'algoritmo del simplesso si arresta.
La soluzione di base corrente e' (x_1,y,x_3,x_4,x_5) = (2,2,3,0,0)
Quindi un'altra soluzione al problema PL e' (x_1,y) = (2,2)
Tuttavia ricordando $y = -x_2$, e' piu' significativo dire (x_1, x_2) = (2, -2).

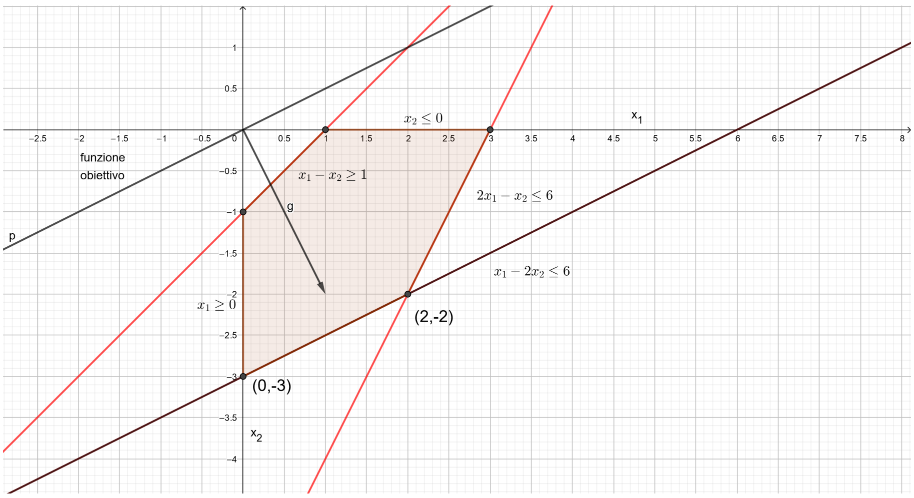
Essendoci due soluzioni ottimali di base, tutte le soluzioni ottimali sono una combinazione convessa delle due precedentemente ottenute:
$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = w_1\cdot$ (0,-3,2,0,3) + $w_2\cdot$ (2,-2,3,0,0)

2 Risolverlo il problema primale graficamente

Costruisco il grafico con le equazioni dei vincoli lungo l'asse $x_1 \times x_2$.



Quindi disegno il gradiente della funzione obiettivo g e la funzione obiettivo.



Il vettore del gradiente della funzione obiettivo $g = <1, -2>$, composto dalle derivate parziali delle componenti della funzione obiettivo, e' perpedincolare al vincolo $x_1 - 2x_2 \leq 6$. Il problema ha **Infinite Soluzioni Ottime**. Le soluzioni sono tutte le coppie $<x_1, x_2>$ che risiedono nello spigolo della regione obiettivo su cui si poggia il vincolo $x_1 - 2x_2 \leq 6$. Per calcolare il segmento e' sufficiente calcolare l'intersezione del vincolo $x_1 - 2x_2 \leq 6$ con i vincoli $2x_1 - x_2 \leq 6$ e $x_1 \geq 0$. Il risultato sono i punti: $(2, -2)$, $(0, -3)$. Le soluzioni sono tutti i punti compresi nel segmento delimitato da essi.

3 Costriuire il problema duale

Parto dal problema originale:

$$
\begin{aligned}
Max\ Z &= x_1 - 2x_2 \\
x_1 - x_2 &\geq 1 \\
x_1 - 2x_2 &\leq 6 \\
2x_1 - x_2 &\leq 6 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\leq 0
\end{aligned}
$$

Lo porto in forma standard invertendo il primo vincolo e creando la variabile $y = -x_2$

$$
\begin{aligned}
Max\ Z &= x_1 + 2y \\
-x_1 - y &\leq -1 \\
x_1 + 2y &\leq 6 \\
2x_1 + y &\leq 6 \\
x_1, y &\geq 0
\end{aligned}
$$

Si costruisce il problema duale. I coefficienti della funzione obiettivo del primale diventano i termini noti dei vincoli del duale. I termini noti dei vincoli del primale diventano i coefficienti della funzione obiettivo del duale. L'operazione di ottimizzazione diventa Min.

$$
\begin{aligned}
Min\ W &= -a + 6b + 6c \\
-a + b + 2c &\geq 1 \\
-a + 2b + c &\geq 2 \\
a, b, c &\geq 0
\end{aligned}
$$

Quello qua sopra e' il duale del problema primale.

4 Calcolare la soluzione ottima del duale utilizzando la teoria della dualita'.

Visto che il problema primale ha soluzione ed e' limitato, secondo il Teorema di Dualita' sia la proprieta' debole della dualita' che la proprietà forte della dualita' sono applicabili. Pertanto la soluzione del problema primale e' ricavabile dai coefficienti delle variabili slack in riga 0 del tableau risolto per il problema primale. In questo caso l'algoritmo del simplesso trova due righe 0 ottimali:

base	Z	x_1	y	x_3	x_4	x_5	b
Z	1	0	0	0	1	0	6

e

base	Z	x_1	y	x_3	x_4	x_5	b
Z	1	0	0	0	1	0	6

In entrambe le variabili slack hanno coefficienti (0, 1, 0) quindi si conclude che sono queste le soluzioni (l'unica essendo identiche) del problema duale. Queste sono anche i prezzi ombra per il problema primale.