

Appunti di Analisi e Progettazione di Algoritmi

A cura di:
Francesco Refolli
Matricola 865955

Anno Accademico 2022-2023

Chapter 1

Note sul Corso

todo: segnare delle note

Chapter 2

Problema LCS

2.1 Introduzione

Definizioni

Alfabeto Un alfabeto Σ e' un insieme finito e non vuoto di simboli.
Si usano le prime lettere dell'alfabeto minuscolo per identificare i simboli generici.

Stringa Una stringa (o parola) w e' una giustapposizione (o concatenazione) di simboli dell'Alfabeto Σ .

Si usano le ultime lettere dell'alfabeto minuscolo per identificare il nome di una stringa. Esempio: una stringa $X = a \cdot b \cdot c \cdot d$. Sempre sara' indicata in futuro senza l'operatore per semplicita'.

Sequenza Una sequenza S e' un concetto analogo alla stringa, ma e' generalmente concepita come una elencazione di simboli di un alfabeto. La principale differenza sta nel fatto che questa puo' avere elementi di altri alfabeti.

Si usano le ultime lettere dell'alfabeto maiuscolo per identificare il nome di una sequenza. Si indica con $X = \langle a, b, c, d \rangle$

L' i -esimo elemento si indica con x_i . La lunghezza puo' essere indicata tramite $|X|$.

Sottostringa Una sottostringa S di una stringa (o sequenza) e' una stringa che sia la concatenazione di elementi consecutivi della stringa o sequenza di partenza. Di solito prodotta tagliando un pezzo di lunghezza m dal capo, un pezzo di lunghezza n dalla coda.

Sottosequenza Una sottosequenza S di una stringa (o sequenza) e' una sequenza di elementi della stringa o sequenza di partenza che mantenga l'ordine degli stessi. (Non per forza la consecutivita'!). In questo senso una sottostringa e' analoga ad una sottosequenza che mantenga la consecutivita'. Di solito prodotta tramite la cancellazione di k elementi.

Prefisso Un prefisso di lunghezza i e' una sottosequenza composta dai primi i elementi consecutivi di una stringa o sequenza. Detta X una stringa, si indica con X_i .

Suffisso Un suffisso di indice i e' una sottosequenza composta da tutti gli elementi consecutivi a partire dall'indice i .

LCS

Introduzione Il problema LCS (Longest Common Subsequence) consiste nel cercare in tempo ragionevole la sottosequenza piu' lunga comune a due sequenze o stringhe.

Esempi

1. $X = \langle S, C, O, I, A, T, T, O, L, O \rangle$
 $Y = \langle B, A, R, A, T, T, O, L, O \rangle$
 La LCS e' $Z = \langle A, T, T, O, L, O \rangle$ **nota: puo' essere usata sia la prima che la seconda 'A' di Y.**
2. $X = \langle M, A, G, I, C, O \rangle$
 $Y = \langle M, A, N, T, E, N, E, R, E \rangle$
 La LCS e' $Z = \langle M, A \rangle$
3. $X = \langle M, A, I, A, L, E \rangle$
 $Y = \langle N, A, T, A, L, E \rangle$
 La LCS e' $Z = \langle A, A, L, E \rangle$

2.2 Algoritmo Banale

Ragionamento Detti X, Y due sequenze, i, j i rispettivi indici e n, m le rispettive lunghezze. Detti $Z = LCS(X, Y)$ e k il suo indice. Si inizializzano gli indici alle lunghezze. (si parte dal fondo!)

Si puo' ragionevolmente pensare che:

1. A) Se $x_i = y_j$ allora $z_k = x_i$ e $Z_{k-1} = LCS(X_{i-1}, Y_{j-1})$
2. B) Se $x_i \neq y_j$ e $z_k = x_i$ allora $Z_k = LCS(X_i, Y_{j-1})$
3. C) Se $x_i \neq y_j$ e $z_k = y_j$ allora $Z_k = LCS(X_{i-1}, Y_j)$
4. D) Se $z_k \neq y_j$ e $z_k \neq x_i$ allora $Z_k = LCS(X_{i-1}, Y_{j-1})$

Si nota che il caso D e' direttamente traducibile in codice, ma viene comunque compreso dai casi B e C, di conseguenza non avrebbe senso ripeterlo. In particolare si osserva che $D \Rightarrow (B \cdot C \Leftrightarrow C \cdot B)$.

Procedura Possiamo quindi sviluppare uno pseudo-codice basato su questi teoremi. Non potendo sapere nei casi B) e C) quale sia tra i due il risultato, l'unico modo per verificarlo e' esplorare entrambi i casi. Gli indici delle sequenze appartengono all'insieme $[1, length]$.

Algorithm Algoritmo Banale per LCS

```

procedure LCS( $X_i, Y_j$ )
  if  $X_i = \langle \rangle$  or  $Y_j = \langle \rangle$  then
    return  $\langle \rangle$ 
  else
    if  $x_i = y_j$  then
      return append(LCS( $X_{i-1}, Y_{j-1}$ ),  $x_i$ )
    else
       $B \leftarrow$  LCS( $X_i, Y_{j-1}$ )
       $C \leftarrow$  LCS( $X_{i-1}, Y_j$ )
      if len( $B$ )  $\geq$  len( $C$ ) then
        return  $B$ 
      else
        return  $C$ 
      end if
    end if
  end if
end procedure

```

Complessita' Abbiamo appurato che questo algoritmo (TOP-DOWN) puo' portare a problemi quando l'input e' troppo grande, tuttavia e' possibile porvi rimedio

Uno dei problemi e' per esempio la ripetizione di lavoro gia' svolto in ricorsioni "parallele". Si potrebbe immaginare di memorizzare i risultati delle chiamate e usare quelli memorizzati all'occorrenza.

Resta pero' l'alto numero di chiamate: tendenzialmente $O(2^{n+m})$. Per questo si usa la programmazione dinamica: si risolve iterativamente un procedimento ricorsivo.

2.3 Usare la Programmazione Dinamica

Ragionamento L'Approccio Bottom-Up si basa sul partire dal risultato piu' piccolo, caso base, e costruire progressivamente i risultati delle chiamate "precedenti". Questo significa in pratica calcolare tutte le chiamate per tutte le combinazioni possibili d'input attinte al problema. Potrebbe sembrare un procedimento dispendioso ma in alcuni casi puo' essere quello piu' efficiente.

Supponendo di avere a disposizione due matrici b, c di dimensione $(n+1)(m+1)$, queste possono essere usate per simulare l'algoritmo ricorsivo nei vari passi. Attenzione, gli indici della matrice partono con 0!

Caso base:

$$\begin{cases} c[0][j] = 0 & 0 \leq j \leq n \\ c[i][0] = 0 & 0 \leq i \leq m \end{cases}$$

Caso ricorsivo:

$$c[i][j] = \begin{cases} c[i][j] = c[i-1][j-1] + 1 & x_i = y_j \\ c[i][j] = c[i-1][j] & c[i-1][j] \geq c[i][j-1] \\ c[i][j] = c[i][j-1] & c[i-1][j] < c[i][j-1] \end{cases}$$

$$b[i][j] = \begin{cases} b[i][j] = " \nwarrow " & x_i = y_j \\ b[i][j] = " \uparrow " & c[i-1][j] \geq c[i][j-1] \\ b[i][j] = " \leftarrow " & c[i-1][j] < c[i][j-1] \end{cases}$$

Questo algoritmo riempie due matrici:

- c contiene le lunghezze dei vari $LCS(X_i, Y_j)$
- b contiene il percorso da seguire per ottenere l'ottimale

Per ottenere $LCS(X, Y)$ non resterà da fare che seguire il percorso indicato da b con l'accortezza di raccogliere in coda gli x_i tali che $b[i][j] = Diagonal$.

Procedura Avremo bisogno di tre algoritmi:

- una funzione che inizializza la matrice generando il caso base
- una funzione che riempie la matrice con i casi ricorsivi
- una funzione che legge il percorso della matrice b
- una funzione che stampa la LCS

Algorithm Inizializza Matrice

```

procedure INIZIALIZZAMATRICE( $m, n$ )
  for  $i \leftarrow 0$  to  $m$  do
     $c[i][0] \leftarrow 0$ 
  end for
  for  $j \leftarrow 0$  to  $n$  do
     $c[0][j] \leftarrow 0$ 
  end for
end procedure

```

Algorithm Riempi Matrice

```

procedure RIEMPIMATRICE( $X, Y$ )
  for  $i \leftarrow 1$  to  $m$  do
    for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
      if  $x_i = y_j$  then
         $c[i][j] \leftarrow c[i-1][j-1] + 1$ 
         $b[i][j] \leftarrow "$   $\nwarrow$   $"$ 
      else
        if  $c[i-1][j] \geq c[i][j-1]$  then
           $c[i][j] \leftarrow c[i-1][j]$ 
           $b[i][j] \leftarrow "$   $\uparrow$   $"$ 
        else
           $c[i][j] \leftarrow c[i][j-1]$ 
           $b[i][j] \leftarrow "$   $\leftarrow$   $"$ 
        end if
      end if
    end for
  end for
end procedure

```

Algorithm Leggi LCS

```

procedure LEGGILCS( $b, X, i, j$ )
  if  $i = 0 \vee j = 0$  then
    return  $\langle \rangle$ 
  end if
  if  $b[i][j] = "$   $\nwarrow$   $"$  then
    return append(LeggiLCS( $b, X, i-1, j-1$ ),  $x_i$ )
  else
    if  $b[i][j] = "$   $\uparrow$   $"$  then
      return LeggiLCS( $b, X, i-1, j$ )
    else
      return LeggiLCS( $b, X, i, j-1$ )
    end if
  end if
end procedure

```

Algorithm Stampa LCS

```

procedure STAMPALCS( $b, X, i, j$ )
  if  $i = 0 \vee j = 0$  then
    return  $\langle \rangle$ 
  end if
  if  $b[i][j] = "\nwarrow"$  then
    StampaLCS( $b, X, i - 1, j - 1$ )
    print( $x_i$ )
  else
    if  $b[i][j] = "\uparrow"$  then
      StampaLCS( $b, X, i - 1, j$ )
    else
      StampaLCS( $b, X, i, j - 1$ )
    end if
  end if
end procedure

```

Complessita'

- La complessita' temporale di InizializzaMatrice e' $O(n + m)$.
- La complessita' temporale di RiempiMatrice e' $O(n * m)$.
- La complessita' temporale di LeggiLCS e' $O(n + m)$.

LeggiLCS La complessita' di questo algoritmo (analogo e identico a StampaLCS), e' data in termini di upper-bound rispetto al caso peggiore, ovvero quando le due sequenze hanno solo il primo simbolo in comune. In quel caso il percorso seguito dall'algoritmo seguira' una traiettoria angolata, facendo quindi tutti i "piccoli passi" (l'unico tassello obliquo e' il target $b[1][1]$), per un totale di $n + m$ iterazioni.

LeggiLCS non fa parte del programma d'esame, e' riportato qua per completezza.

Conclusione Quindi la complessita' temporale totale e' $O(n * m)$, molto migliore dell'algoritmo "banale" presentato nel paragrafo precedente.

* E' pero' da tenere in considerazione che questo richiede spazio in memoria con una complessita' di $O(n * m)$, visto che deve mantenere due matrici $n * m$.

Certamente superiore al $O(n + m)$ dell'algoritmo banale, ma resta pur sempre un costo che vale la pena pagare per usufruire della strategia Bottom-Up.

Chapter 3

Applicazione di PD

3.1 Distanza di Edit

Introduzione E' definita come numero minimo di **cancellazioni, sostituzioni, inserimenti** che trasformano una stringa X in una seconda stringa Y . E' un problema simmetrico. $D_{edit}(X, Y) = D_{edit}(Y, X)$.

Esempio $X = \langle 2, 4, 10, 3, 1 \rangle$ $Y = \langle 2, 4, 2, 1 \rangle$

- Cancellazione di 10.
- Sostituisco 3 con 2.

Quindi $D_{edit}(X, Y) = 2$.

- Inserimento di 10.
- Sostituisco 2 con 3.

Quindi $D_{edit}(Y, X) = 2$.

- Cancellazione di 3.
- Sostituisco 10 con 2.

Possono non esistere soluzioni uniche.

Problemi

PR Date due sequenze X, Y , trovare la distanza di edit di X in Y .

P Date due sequenze X, Y , trovare il minimo insieme di operazioni di cancellazione, inserimento, sostituzione che trasformano X in Y .

Soluzione

Sottoproblema di PR Trovare la distanza di edit dei prefissi X_i e Y_j . Il numero di sottoproblemi e' $(m+1) \cdot (n+1)$. $d_{i,j} = \text{distanza di edit dei prefissi } X_i Y_j$. Soluzione 'e' $d_{m,n}$

Casi base di PR

- $i = 0 \wedge j = 0 \Rightarrow d_{0,0} = 0$
- $i > 0 \wedge j = 0 \Rightarrow d_{i,0} = i$
- $i = 0 \wedge j > 0 \Rightarrow d_{0,j} = j$

Caso ricorsivo di PR Con $i > 0 \wedge j > 0$:

$$d_{i,j} = \begin{cases} d_{i-1,j-1} & x_i = y_j \\ \min(d_{i-1,j-1}, d_{i,j-1}, d_{i-1,j}) + 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il caso "altrimenti" si spiega in questo modo:

- *Sostituzione*($x_i \rightarrow y_j$) + $d_{i-1,j-1}$
- *Inserimento*(y_j) + $d_{i,j-1}$
- *Cancellazione*(x_i) + $d_{i-1,j}$

Complessita' La complessita' dell'algoritmo ricorsivo e' $(3(n+m))$.

```

procedure ED-RIC( $X, Y$ )
  if  $j = 0$  then
    return  $i$ 
  else if  $i = 0$  then
    return  $j$ 
  else
     $A \leftarrow ED - RIC(X_{i-1}, Y_j) + 1$ 
     $B \leftarrow ED - RIC(X_i, Y_{j-1}) + 1$ 
     $C \leftarrow ED - RIC(X_{i-1}, Y_{j-1}) + 1$ 
    if  $A \leq B \wedge A \leq C$  then
      return  $A$ 
    else if  $B \leq A \wedge B \leq C$  then
      return  $B$ 
    else
      return  $C$ 
    end if
  end if
end procedure

```

Algoritmo Ricorsivo

```

procedure ED-ITER-RM( $m, n$ )
  for  $i = 0$  to  $m$  do
     $M[i][0] \leftarrow i$ 
     $B[i][0] \leftarrow < " \uparrow ", Null >$ 
  end for
  for  $j = 0$  to  $n$  do
     $M[0][j] \leftarrow j$ 
     $B[0][j] \leftarrow < " \leftarrow ", Null >$ 
  end for
end procedure

```

```

procedure ED-ITER( $X, Y$ )
   $ED - ITER - RM(m, n)$ 
  for  $i = 1$  to  $m$  do
    for  $j = 0$  to  $n$  do
      if  $x_i = y_j$  then
         $M[i][j] \leftarrow M[i-1][j-1]$ 
         $B[i][j] \leftarrow < "", Null >$ 
      else if  $M[i-1][j] \leq M[i][j-1] \wedge M[i-1][j] \leq M[i-1][j-1]$  then
         $M[i][j] \leftarrow M[i-1][j] + 1$ 
         $B[i][j] \leftarrow < " \uparrow ", Delete >$ 
      else if  $M[i][j-1] \leq M[i-1][j] \wedge M[i][j-1] \leq M[i-1][j-1]$  then
         $M[i][j] \leftarrow M[i][j-1] + 1$ 
         $B[i][j] \leftarrow < " \leftarrow ", Insert >$ 
      else
         $M[i][j] \leftarrow M[i-1][j-1] + 1$ 
         $B[i][j] \leftarrow < " \nwarrow ", Change >$ 
      end if
    end for
  end for
  return  $M[m][n]$ 
end procedure

```

Algoritmo Iterativo PD Preparo una Matrice $B[m][n]$ che contiene la ricostruzione del percorso iterativo. Ogni cella $B[i][j] = \langle Direction, Operation \rangle$

Complessita' di $ED - ITER(X, Y)$ L'algoritmo e' formato da due cicli innestati, quindi $T(n) = \Theta(n \cdot m)$

Part I

Laboratorio

Chapter 4

11-10-2022

4.1 Scheduling di Attività'

Un esempio di Programmazione per Intervalli Pesati.

Siano date n attività' da svolgersi nello stesso spazio fisico. Determinare un sottoinsieme di attività' che non si sovrappongono e che sia il massimo possibile.

i	p(i)	v
1	0	10
2	1	2
3	2	8
4	2	1
5	1	1
6	4	3

Ad occhio si ricava $\langle 1, 3, 6 \rangle$.

L'algoritmo naive e' quello combinatorio, ma e' estremamente inefficiente. Il tempo e' $T(n) = \Omega(2^n)$.

Soluzione PD

- $n \leftrightarrow X = 1, \dots, n$
- $\forall i \in 1, \dots, n, s_i$ e' il tempo di inizio dell'attività' i
- $\forall i \in 1, \dots, n, f_i$ e' il tempo di fine dell'attività' i
- $\forall i \in 1, \dots, n, v_i$ e' il valore dell'attività' i

Definisco la funzione:

$COMP : \mathbb{N}(1, \dots, n) \rightarrow \{true, false\}$

$\forall i, j \in A \mid i \neq j \vee \text{attivit\`aCompatibili}(A_i, A_j) \Rightarrow COMP(A) = true$

Dette poi i, j due attività' si dice:

$$\text{attivit\`aCompatibili}(i, j) = \begin{cases} true & [s_i, f_i) \cap [s_j, f_j) = \emptyset \\ false & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi si definisce:

$$V : \mathbb{P}(1, \dots, n) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$V(i, j) = \begin{cases} \sum_{i \in A} v_i & A \neq \emptyset \\ 0 & A = \emptyset \end{cases}$$

La Soluzione e' $S \subseteq X \mid COMP(S) = true \wedge \forall A \subset X V(S) \leq V(A)$

Processo Detto $S_n \Leftrightarrow sol(X_n)$, e quindi $S_{n-k} \Leftrightarrow sol(X_{n-k})$. Nella soluzione di S_n si assume di conoscere:

- $\forall k \in 1, \dots, n S_{n-k}$
- $\forall k \in 1, \dots, n sol(X_{n-k})$

Detto $OPT(i) = V(S_i)$. Dividendo in sottoproblemi e potendo disporre a piacimento di ognuno di questi, riesco facilmente a individuare il caso base. E' immediato sapere $sol(\emptyset)$ e $sol(1)$, quindi questi possono essere i casi base.

Ragionamento

Caso Base $S_0 \Leftrightarrow X_0 = \emptyset \wedge V(X_0) = 0$
 $S_1 \Leftrightarrow X_1 = 1 \wedge V(X_1) = 1$

Caso Ricorsivo Voglio risolvere S_i e $OPT(i)$, assumo di avere gia' risolto $\forall j \in X \mid j < i S_j$.

Se sapessi che $i \in S_i$ il sotto problema da considerare sarebbe $sol(\forall j \in X_{i-1} \mid \text{attivit\`a} \text{Compatibile}(i, j))$. Questo si traduce nel risolvere S_j , dove j e' il massimo indice di una attivita' compatibile con i . Se sapessi al contrario che $i \notin S_i$ allora dovrei risolvere S_{i-1} .

Detto $p(i) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la funzione che associa ad ogni attivita' l'attivita' compatibile precedente piu' vicina. Quindi mi riduco a:

$$S_i = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ 1 & i = 1 \\ S_{p(i)} \cup i & V(p(i)) + v_i \geq V(i-1) \\ S_{i-1} & V(p(i)) + v_i < V(i-1) \end{cases}$$

```
procedure WIS-OPT( $i$ )
  if  $i = 0$  then
    return 0
  else if  $i = 1$  then
    return 1
  else
     $Z1 \leftarrow \text{append}(WIS - OPT(p(i)), x_i)$ 
     $Z2 \leftarrow WIS - OPT(i - 1)$ 
    if  $OPT(Z1) \geq Z2$  then
      return  $Z1$ 
    else
      return  $Z2$ 
    end if
  end if
end procedure
```

Procedura TOP-DOWN

```

procedure INIZIALIZZA-VETTORI
   $OPT[0] \leftarrow 0$ 
   $OPT[1] \leftarrow 1$ 
   $WIS[0] \leftarrow X_0$ 
   $WIS[1] \leftarrow X_1$ 
end procedure

```

```

procedure WIS-OPT-ITER( $i$ )
  INIZIALIZZA – VETTORI()
  for  $i = 2$  to  $n$  do
     $Z1 \leftarrow \text{append}(WIS[p(i)], x_i)$ 
     $Z2 \leftarrow WIS[i - 1]$ 
    if  $OPT[p(i)] < OPT[i - 1]$  then
       $OPT[i] \leftarrow OPT[p(i)] + v_i$ 
       $WIS[i] \leftarrow Z1$ 
    else
       $OPT[i] \leftarrow OPT[i - 1]$ 
       $WIS[i] \leftarrow Z2$ 
    end if
  end for
  return  $WIS[n]$ 
end procedure

```

Procedura BOTTOM-UP Il vettore WIS e' implementabile ragionevolmente con una matrice di booleani che caratterizzano la presenza di un elemento nell'insieme. Visto che questo richiederebbe una quantita' di spazio non indifferente, una cosa comoda potrebbe essere codificare le righe o le colonne in un numero intero decimale.

Complessita' La procedura $WIS - OPT - ITER$ comprende un solo ciclo di $\Theta(n)$ iterazioni. Il calcolo di $p(i)$ richiede $O(n)$, perche' e' un ciclo inverso semplice che dipende dalla disposizione degli elementi in X . Quindi l'algoritmo e' $T(n) = (n^2)$ nel caso medio.

Osservazioni E' possibile scrivere una procedura che esplori linearmente l'array OPT per verificare i passi che sono stati effettuati per costruire OPT . Quindi si puo' risparmiare lo spazio occupato da WIS .

Dimostrazione

$i \in S_i$ Assumo che $i \in S_i$, devo mostrare che $S_i = S_{p(i)} \cup i$.
 Se per assurdo $S_{p(i)} \cup i \neq sol(X_i)$.
 S^I e' la soluzione e quindi $V(S^I) > V(S_{p(i)})$ e $S^I = S^{II} \cup i$.
 Allora S^{II} contiene attivita' compatibili insieme a i .
 $S^{II} \subseteq 1, \dots, p(i)$ ma allora $V(S^{II}) > V(S_{p(i)})$.
 Il che e' impossibile, perche' sappiamo che $S_{p(i)} = sol(X_{p(i)})$.

Quindi $S_i = S_{p(i)} \cup i$.

$i \notin S_i$ Assumo che $i \notin S_i$, devo mostrare che $S_i = S_{i-1}$.
 Supponiamo per assurdo che $S_i \neq S_{i-1}$, allora $\exists S^I \neq S_{i-1}$ take che $V(S^I) > V(S_{i-1})$.
 Quindi $i \notin S^I$ e S^I e' fatto da attivita' compatibili ($COMP(S^I) = true$).
 $S^I \subseteq 1, \dots, i-1 \mid V(S^I) > V(S_{i-1})$, quindi S_{i-1} non puo' essere $sol(X_{i-1})$.
 Ma sappiamo che $S_{i-1} = sol(X_{i-1})$, quindi $S_i = S_{i-1}$.

Esercizio Da risolvere per 18-10-2022.

L'istanza e' simile ma con le case al posto delle attivita'. Ci sono n case adiacenti in linea retta. Ad ogni casa e' associato un valore d , la donazione che l'abitante e' disposto a fare. Trovare un sottoinsieme di abitanti massimo tale che le case non siano adiacenti.