Assignment 3

12/11/2022

Francesco Refolli 865955

1 Esercizio 1

Consegna Una catena di supermercati deve decidere quali tra 5 dei suoi magazzini aprire per rifornire 10 nuovi punti vendita. Il costo per l'apertura e mantenimento del magazzino i e' di θ_i euro. In ciascun magazzino i possono essere stoccati α_i Kg di merce. Ciascun supermercato j si aspetta giornalmente di ricevere almeno β_j Kg di merce. Il costo di trasporto unitario di trasporto della merce dal magazzino i al punto vendita j è stimato a y_{ij} euro/Kg. Elaborare un modello di Programmazione Lineare Intera che aiuti la catena di supermercati a decidere quali magazzini aprire e a soddisfare le domande dei punti vendita, minimizzando i costi totali. Si tenga inoltre in considerazione che la catena:

1. vuole aprire al massimo 4 magazzini
2. per ragioni logistiche, vuole aprire il magazzino 5 solo se il magazzino 4 e il magazzino 3 non vengono aperti
3. impone che il magazzino 1 consegni la merce al supermercato 5 (il più distante) solo in pallet da k kg (si supponga che a_i sia multiplo di k)
4. vuole che almeno uno dei seguenti scenari sia verificato: scenario a) siano aperti almeno 3 magazzini scenario b) sia aperto almeno 1 tra i magazzini 1, 2 e 5.

Modello - funzione obiettivo d_{ij} e' la quantita' di prodotto intera mandata dal magazzino i al supermercato j.

$$\begin{array}{cc} min\Sigma_{i=1}^{5}\Sigma_{j=1}^{10}d_{ij}\cdot y_{ij} & funzione\ \ obiettivo \\ d_{ij}\geq 0\ e\ \ intera & \forall i,j\in[1,5]x[1,10] \end{array}$$

Modello - vincoli di coerenza del problema di trasporto

$$\begin{array}{cc} \Sigma_{j}^{10}d_{ij}\leq a_i & \forall i\in[1,5] \\ \Sigma_{i}^{5}d_{ij}=b_j & \forall j\in[1,10] \end{array}$$

Modello - condizione 1 Si vuole aprire al massimo 4 magazzini. Sfrutto la ricetta **Vincoli di tipo Either-Or**. Con M variabile con valore enorme di supporto per le variabili binarie v_i create e necessarie alla condizione 1.

$$\begin{aligned}
\Sigma_{j=1}^{10} d_{ij} &\leq 0 + M \cdot v_i && \forall i[1,5] \\
\Sigma_{j=1}^{10} d_{ij} &\geq 1 - M \cdot (1 - v_i) && \forall i[1,5] \\
\Sigma_{i=1}^{5} v_i &\leq 4 \ e \ \ intera && \\
v_i &\geq 0 \ e \ \ intera && \forall i \in [1,5] \\
v_i &\leq 1 \ e \ \ intera && \forall i \in [1,5]
\end{aligned}$$

Modello - condizione 2 Si vuole aprire il magazzino 5 solo se il magazzino 4 e il magazzino 3 non vengono aperti. Sfrutto la ricetta **Vincoli di tipo Either-Or**. Con M variabile con valore enorme di supporto per la variabile binaria u creata e necessaria alla condizione 2.

$$\begin{aligned}
\Sigma_{j=1}^{10} d_{5j} &\leq 0 + M \cdot u \\
\Sigma_{j=1}^{10} d_{3j} &\geq 0 - M \cdot u \\
\Sigma_{j=1}^{10} d_{4j} &\geq 0 - M \cdot u \\
\Sigma_{j=1}^{10} d_{5j} &\geq 1 - M \cdot (1 - u) \\
\Sigma_{j=1}^{10} d_{3j} &\leq 0 + M \cdot (1 - u) \\
\Sigma_{j=1}^{10} d_{4j} &\leq 0 + M \cdot (1 - u) \\
u &\geq 0 \ e \ \ intera \\
u &\leq 1 \ e \ \ intera
\end{aligned}$$

Modello - condizione 3 Si impone che il magazzino 1 consegni la merce al supermercato 5 (il più distante) solo in pallet da k kg. x e' la quantita' di pallet che il magazzino 1 spedisce al supermercato 5.

$$\begin{aligned}
d_{ij} - k \cdot x = 0 \\
x \geq 0 \ e \ \ intera
\end{aligned}$$

Modello - condizione 4 Si vuole che almeno uno dei seguenti scenari sia verificato: scenario a) siano aperti almeno 3 magazzini scenario b) sia aperto almeno 1 tra i magazzini 1, 2 e 5. Sfrutto la ricetta **K Vincoli su N**. Con M variabile dal valore enorme e $N = \ 2 \cdot M$.

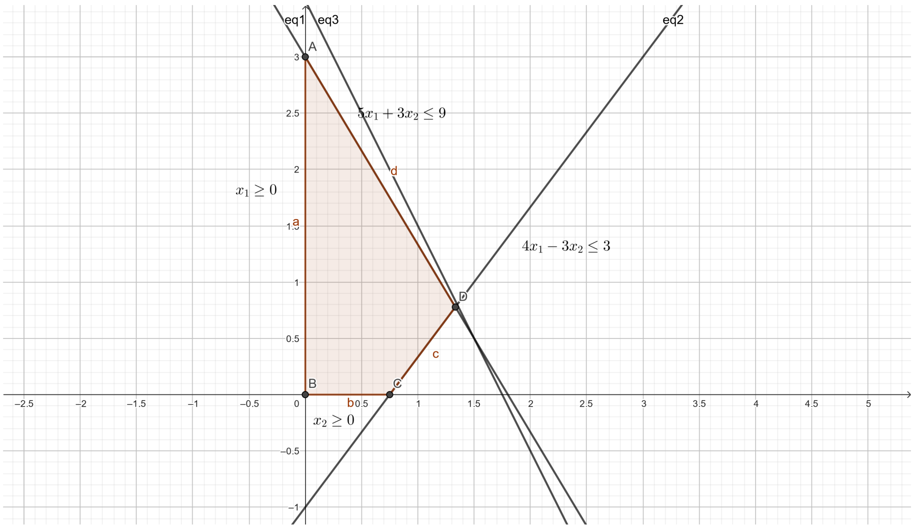
$$
\begin{aligned}
\Sigma_{j=1}^{10} d_{ij} &\leq 0 + M \cdot s_i + N \cdot t_1 && \forall i[1,5] \\
\Sigma_{j=1}^{10} d_{ij} &\geq 1 - M \cdot (1 - s_i) - N \cdot t_1 && \forall i[1,5] \\
\Sigma_{i=1}^{5} s_i &\geq 3 \\
\Sigma_{j=1}^{10} d_{1j} &\geq 1 - N \cdot t_2 \\
\Sigma_{j=1}^{10} d_{2j} &\geq 1 - N \cdot t_3 \\
\Sigma_{j=1}^{10} d_{5j} &\geq 1 - N \cdot t_4 \\
\Sigma_{l=1}^{4} t_l &\leq 3 \\
t_i &\geq 0 \ e \ \ intera && \forall i \in [1,4] \\
t_i &\leq 1 \ e \ \ intera && \forall i \in [1,4] \\
s_i &\geq 0 \ e \ \ intera && \forall i \in [1,5] \\
s_i &\leq 1 \ e \ \ intera && \forall i \in [1,5]
\end{aligned}
$$

2 Esercizio 2

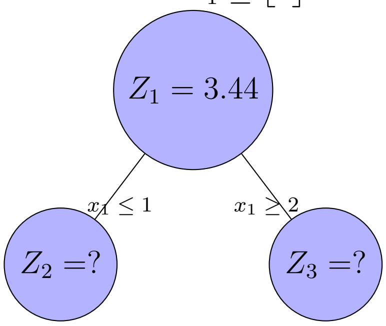
Trovare l'ottimo del seguente problema di Programmazione Lineare Intera applicando l'algoritmo di Branch & Bound, adottando una tecnica di esplorazione dell'albero Depth First (con navigazione a sinistra). Riportare l'albero di ricerca ottenuto, evidenziando chiaramente l'ordine di esplorazione dei nodi, i branching effettuali, i criteri di fathoming eventualmente applicati, la soluzione ottima e il valore ottimo del rilassamento continuo in ogni nodo. Risolvere tutti i rilassamenti continui per via grafica, mostrando la regione ammissibile iniziale e come essa cambi con l'aggiunta dei vincoli di branching.

$$\begin{aligned} & max 2x_1 + x_2 \\ 5x_1 + 3x_2 &\leq 9 \\ 4x_1 - 3x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq \quad e \;\; intere \end{aligned}$$

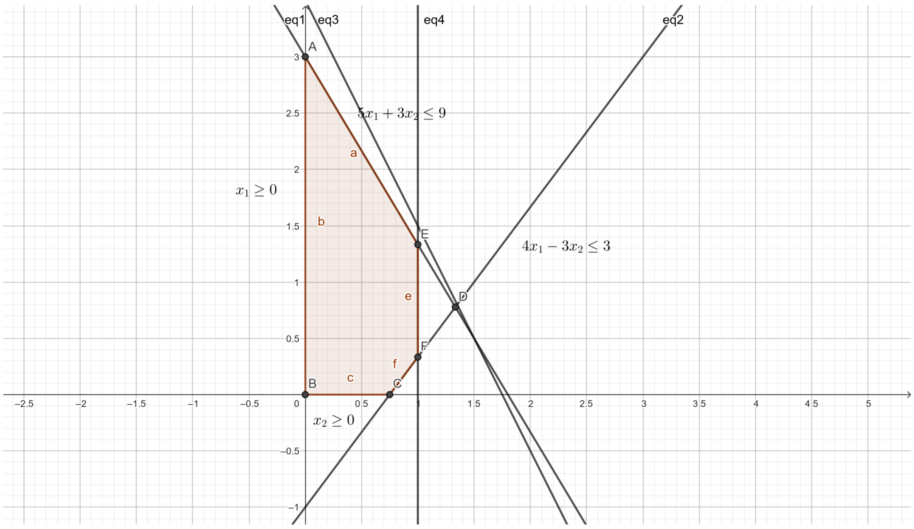
Passo 1



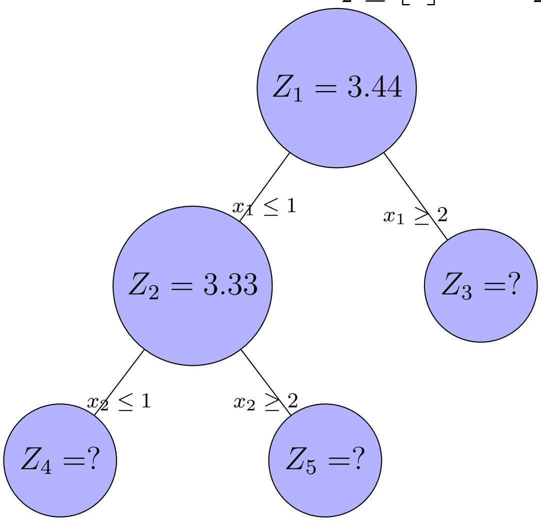
Dopo aver disegnato i vincoli sul grafico si ricava il valore ottimo del rilassamento continuo, coincidente con il punto D. Quindi il primo nodo avra' $x_1 = 1.33, x_2 = 0.78$ e $Z_1 = 3.44$. Seleziono arbitrariamente x_1 e applico il B&B su di esso: $x_1 \leq \lfloor 1 \rfloor.33$ e $x_1 \geq \lceil 1 \rceil.33$.



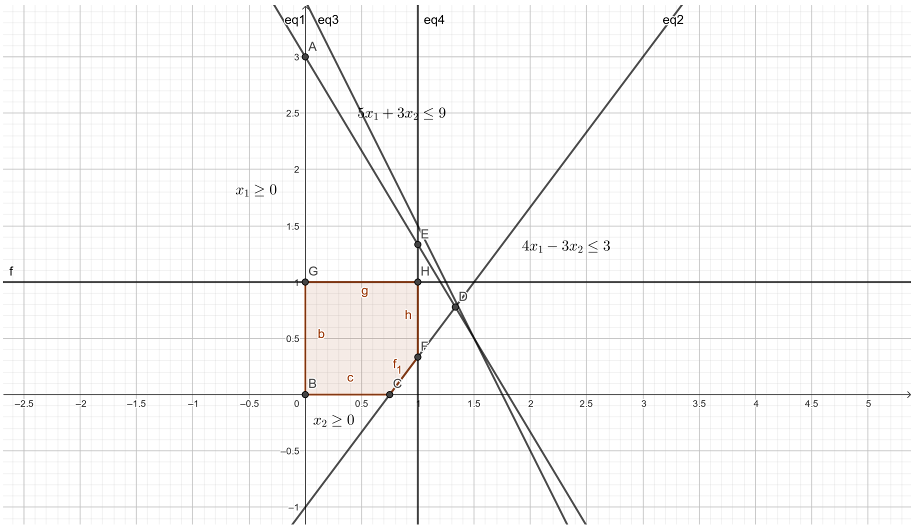
Passo 2



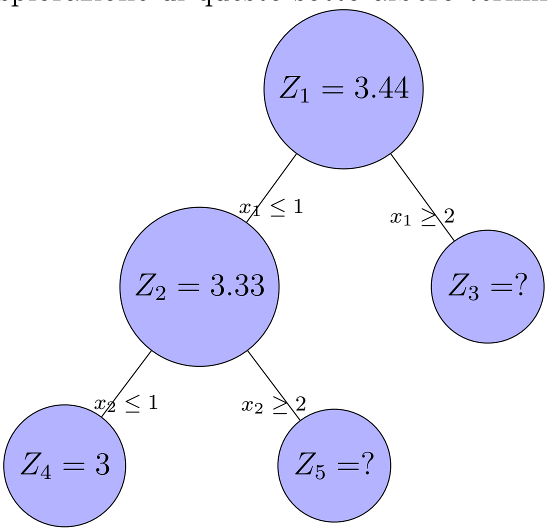
Quindi navigo a sinistra e uso $x_1 \leq 1$. Dopo aver ridisegnato la regione ammissibile ottengo che il valore ottimo coincide con il punto E. Quindi questo nodo avra' $x_1 = 1, x_2 = 1.33$ e $Z_2 = 3.33$. Seleziono quindi x_2 e applico il B&B su di esso: $x_2 \leq \lfloor 1 \rfloor.33$ e $x_2 \geq \lceil 1 \rceil.33$.



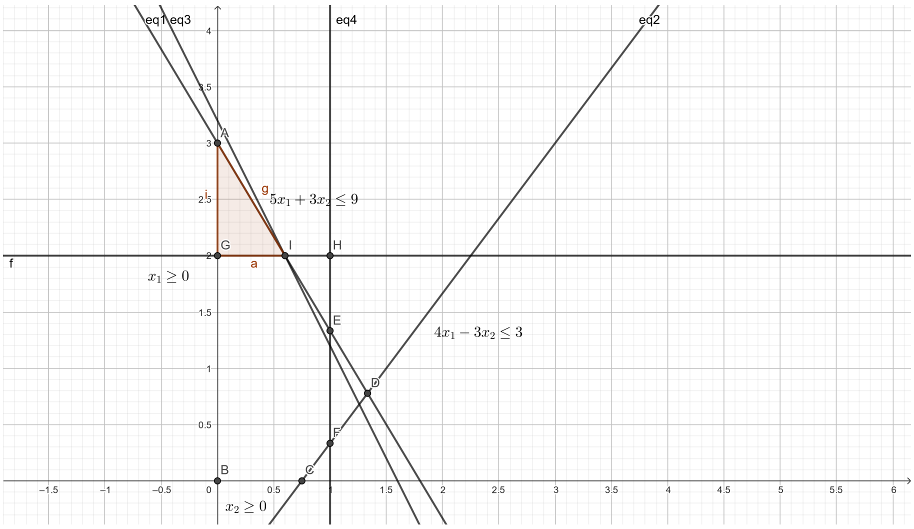
Passo 3



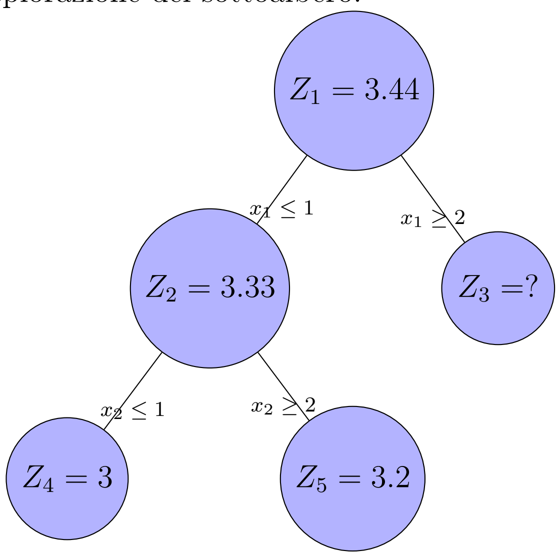
Navigo a sinistra e uso $x_2 \leq 1$. Dopo aver ridisegnato la regione ammissibile ottengo che il valore ottimo coincide con il punto H. Quindi questo nodo avra' $x_1 = 1, x_2 = 1$ e $Z_4 = 3$. E' una soluzione intera e ammissibile. L'esplorazione di questo sotto albero termina.



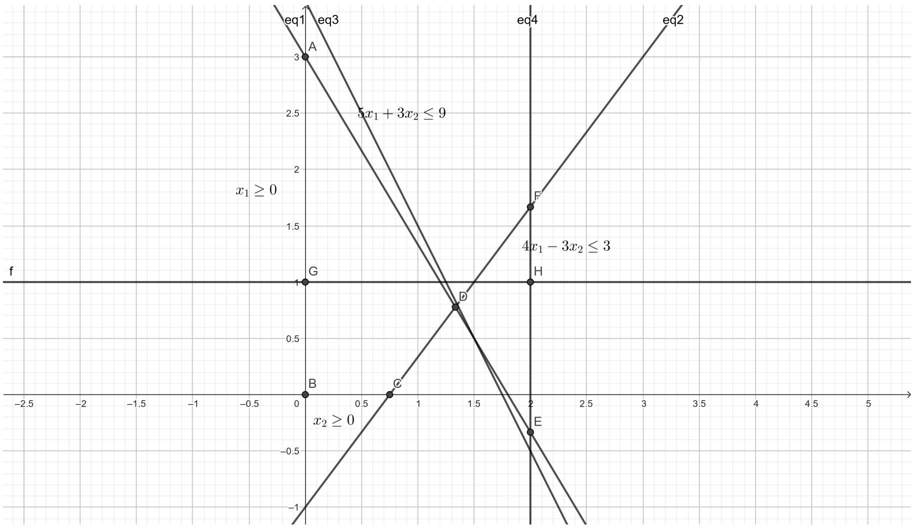
Passo 4



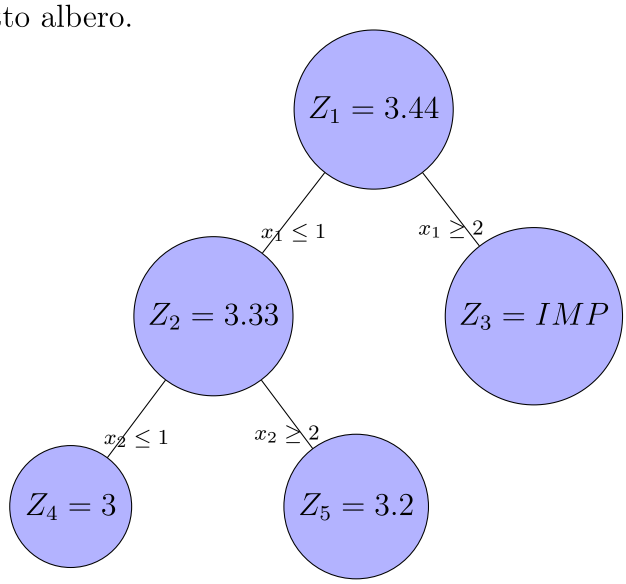
Tornato al problema padre, navigo a destra in $x_2 \geq 2$. Dopo aver ridisegnato la regione ammissibile ottengo che il valore ottimo coincide con il punto I. Quindi questo nodo avra' $x_1 = 0.6, x_2 = 2$ e $Z_5 = 3.2$. Tuttavia, esiste una soluzione intera e ammissibile Z_4 tale che $Z_4 \geq \lfloor Z \rfloor_5$. Per bounding termino l'esplorazione del sottoalbero.



Passo 5



Tornato al problema padre del problema padre, navigo a destra in $x_1 \geq 2$. Dopo aver ridisegnato la regione ammissibile ottengo la regione ammissibile e' vuota. Il problema corrente e' impossibile. Termino l'esplorazione del sotto albero.



Concludo che la soluzione ottimale intera per il problema dato e' $x_1 = 1, x_2 = 1$ con $Z = 3$.