

# Appunti di Analisi e Progettazione di Algoritmi

**A cura di:**  
Francesco Refolli  
Matricola 865955

**Anno Accademico 2022-2023**

# Chapter 1

## Note sul Corso

todo: segnare delle note

# Part I

## Teoria

# Chapter 2

## Problema LCS

### 2.1 Introduzione

#### Definizioni

**Alfabeto** Un alfabeto  $\Sigma$  e' un insieme finito e non vuoto di simboli.  
Si usano le prime lettere dell'alfabeto minuscolo per identificare i simboli generici.

**Stringa** Una stringa (o parola)  $w$  e' una giustapposizione (o concatenazione) di simboli dell'Alfabeto  $\Sigma$ .

Si usano le ultime lettere dell'alfabeto minuscolo per identificare il nome di una stringa. Esempio: una stringa  $X = a \cdot b \cdot c \cdot d$ . Sempre sara' indicata in futuro senza l'operatore per semplicita'.

**Sequenza** Una sequenza  $S$  e' un concetto analogo alla stringa, ma e' generalmente concepita come una elencazione di simboli di un alfabeto. La principale differenza sta nel fatto che questa puo' avere elementi di altri alfabeti.

Si usano le ultime lettere dell'alfabeto maiuscolo per identificare il nome di una sequenza. Si indica con  $X = \langle a, b, c, d \rangle$

L' $i$ -esimo elemento si indica con  $x_i$ . La lunghezza puo' essere indicata tramite  $|X|$ .

**Sottostringa** Una sottostringa  $S$  di una stringa (o sequenza) e' una stringa che sia la concatenazione di elementi consecutivi della stringa o sequenza di partenza. Di solito prodotta tagliando un pezzo di lunghezza  $m$  dal capo, un pezzo di lunghezza  $n$  dalla coda.

**Sottosequenza** Una sottosequenza  $S$  di una stringa (o sequenza) e' una sequenza di elementi della stringa o sequenza di partenza che mantenga l'ordine degli stessi. (Non per forza la consecutivita'!). In questo senso una sottostringa e' analoga ad una sottosequenza che mantenga la consecutivita'. Di solito prodotta tramite la cancellazione di  $k$  elementi.

**Prefisso** Un prefisso di lunghezza  $i$  e' una sottosequenza composta dai primi  $i$  elementi consecutivi di una stringa o sequenza. Detta  $X$  una stringa, si indica con  $X_i$ .

**Suffisso** Un suffisso di indice  $i$  e' una sottosequenza composta da tutti gli elementi consecutivi a partire dall'indice  $i$ .

## LCS

**Introduzione** Il problema LCS (Longest Common Subsequence) consiste nel cercare in tempo ragionevole la sottosequenza piu' lunga comune a due sequenze o stringhe.

### Esempi

1.  $X = \langle S, C, O, I, A, T, T, O, L, O \rangle$   
 $Y = \langle B, A, R, A, T, T, O, L, O \rangle$   
 La LCS e'  $Z = \langle A, T, T, O, L, O \rangle$  **nota:** puo' essere usata sia la prima che la seconda 'A' di  $Y$ .
2.  $X = \langle M, A, G, I, C, O \rangle$   
 $Y = \langle M, A, N, T, E, N, E, R, E \rangle$   
 La LCS e'  $Z = \langle M, A \rangle$
3.  $X = \langle M, A, I, A, L, E \rangle$   
 $Y = \langle N, A, T, A, L, E \rangle$   
 La LCS e'  $Z = \langle A, A, L, E \rangle$

Si mette in evidenza che l'operazione di estrazione della LCS gode delle seguenti proprieta':

$$\cdot : \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \mid A \cdot B = LCS(A, B) \quad (2.1)$$

$$A \cdot B = B \cdot A \quad (2.2)$$

$$A \cdot A = A \quad (2.3)$$

$$A \cdot B = A \cdot (A \cdot B) = B \cdot (A \cdot B) \quad (2.4)$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = B \cdot (A \cdot C) \quad (2.5)$$

## 2.2 Algoritmo TOP-DOWN

**Ragionamento** Detti  $X, Y$  due sequenze,  $i, j$  i rispettivi indici e  $n, m$  le rispettive lunghezze. Detti  $Z = LCS(X, Y)$  e  $k$  il suo indice. Si inizializzano gli indici alle lunghezze. (si parte dal fondo!)

Si puo' ragionevolmente pensare che:

1. A) Se  $x_i = y_j$  allora  $z_k = x_i$  e  $Z_{k-1} = LCS(X_{i-1}, Y_{j-1})$
2. B) Se  $x_i \neq y_j$  e  $z_k = x_i$  allora  $Z_k = LCS(X_i, Y_{j-1})$
3. C) Se  $x_i \neq y_j$  e  $z_k = y_j$  allora  $Z_k = LCS(X_{i-1}, Y_j)$
4. D) Se  $z_k \neq y_j$  e  $z_k \neq x_i$  allora  $Z_k = LCS(X_{i-1}, Y_{j-1})$

Si nota che il caso D e' direttamente traducibile in codice, ma viene comunque compreso dai casi B e C, di conseguenza non avrebbe senso ripeterlo. In particolare si osserva che  $D \Rightarrow (B \cdot C \Leftrightarrow C \cdot B)$ .

Possiamo quindi sviluppare uno pseudo-codice basato su questi teoremi. Non potendo sapere nei casi B) e C) quale sia tra i due il risultato, l'unico modo per verificarlo e' esplorare entrambi i casi. Gli indici delle sequenze appartengono all'insieme  $[1, length]$ .

## 2.3 Procedura TOP-DOWN

---

**Algorithm** Algoritmo Banale per LCS

---

```

procedure LCS( $X_i, Y_j$ )
  if  $X_i = \langle \rangle$  or  $Y_j = \langle \rangle$  then
    return  $\langle \rangle$ 
  else
    if  $x_i = y_j$  then
      return append(LCS( $X_{i-1}, Y_{j-1}$ ),  $x_i$ )
    else
       $B \leftarrow$  LCS( $X_i, Y_{j-1}$ )
       $C \leftarrow$  LCS( $X_{i-1}, Y_j$ )
      if len( $B$ )  $\geq$  len( $C$ ) then
        return  $B$ 
      else
        return  $C$ 
      end if
    end if
  end if
end procedure

```

---

**Complessita'** Abbiamo appurato che questo algoritmo (TOP-DOWN) puo' portare a problemi quando l'input e' troppo grande, tuttavia e' possibile porvi rimedio

Uno dei problemi e' per esempio la ripetizione di lavoro gia' svolto in ricorsioni "parallele". Si potrebbe immaginare di memorizzare i risultati delle chiamate e usare quelli memorizzati all'occorrenza.

Resta pero' l'alto numero di chiamate: tendenzialmente  $O(2^{n+m})$ . Per questo si usa la programmazione dinamica: si risolve iterativamente un procedimento ricorsivo.

## 2.4 Usare la Programmazione Dinamica

**Ragionamento** L'Approccio Bottom-Up si basa sul partire dal risultato piu' piccolo, caso base, e costruire progressivamente i risultati delle chiamate "precedenti". Questo significa in pratica calcolare tutte le chiamate per tutte le combinazioni possibili d'input attinte al problema. Potrebbe sembrare un procedimento dispendioso ma in alcuni casi puo' essere quello piu' efficiente.

Supponendo di avere a disposizione due matrici  $b, c$  di dimensione  $(n+1)(m+1)$ , queste possono essere usate per simulare l'algoritmo ricorsivo nei vari passi. Attenzione, gli indici della matrice partono con 0!

Caso base:

$$\begin{cases} c[0][j] = 0 & 0 \leq j \leq n \\ c[i][0] = 0 & 0 \leq i \leq m \end{cases}$$

Caso ricorsivo:

$$c[i][j] = \begin{cases} c[i][j] = c[i-1][j-1] + 1 & x_i = y_j \\ c[i][j] = c[i-1][j] & c[i-1][j] \geq c[i][j-1] \\ c[i][j] = c[i][j-1] & c[i-1][j] < c[i][j-1] \end{cases}$$

$$b[i][j] = \begin{cases} b[i][j] = " \nwarrow " & x_i = y_j \\ b[i][j] = " \uparrow " & c[i-1][j] \geq c[i][j-1] \\ b[i][j] = " \leftarrow " & c[i-1][j] < c[i][j-1] \end{cases}$$

Questo algoritmo riempie due matrici:

- $c$  contiene le lunghezze dei vari  $LCS(X_i, Y_j)$
- $b$  contiene il percorso da seguire per ottenere l'ottimale

Per ottenere  $LCS(X, Y)$  non resterà da fare che seguire il percorso indicato da  $b$  con l'accortezza di raccogliere in coda gli  $x_i$  tali che  $b[i][j] = Diagonal$ .

Avremo bisogno di tre algoritmi:

- una funzione che inizializza la matrice generando il caso base
- una funzione che riempie la matrice con i casi ricorsivi
- una funzione che legge il percorso della matrice  $b$
- una funzione che stampa la LCS



## 2.5 Procedura BOTTOM-UP

---

**Algorithm** Inizializza Matrice

---

```

procedure INIZIALIZZAMATRICE( $m, n$ )
  for  $i \leftarrow 0$  to  $m$  do
     $c[i][0] \leftarrow 0$ 
  end for
  for  $j \leftarrow 0$  to  $n$  do
     $c[0][j] \leftarrow 0$ 
  end for
end procedure

```

---



---

**Algorithm** Riempi Matrice

---

```

procedure RIEMPIMATRICE( $X, Y$ )
  for  $i \leftarrow 1$  to  $m$  do
    for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
      if  $x_i = y_j$  then
         $c[i][j] \leftarrow c[i-1][j-1] + 1$ 
         $b[i][j] \leftarrow "$  ↖  $"$ 
      else
        if  $c[i-1][j] \geq c[i][j-1]$  then
           $c[i][j] \leftarrow c[i-1][j]$ 
           $b[i][j] \leftarrow "$  ↑  $"$ 
        else
           $c[i][j] \leftarrow c[i][j-1]$ 
           $b[i][j] \leftarrow "$  ←  $"$ 
        end if
      end if
    end for
  end for
end procedure

```

---

### Complessita'

- La complessita' temporale di InizializzaMatrice e'  $O(n + m)$ .
- La complessita' temporale di RiempiMatrice e'  $O(n * m)$ .
- La complessita' temporale di LeggiLCS e'  $O(n + m)$ .

**LeggiLCS** La complessita' di questo algoritmo (analogo e identico a StampaLCS), e' data in termini di upper-bound rispetto al caso peggiore, ovvero quando le due sequenze hanno solo il primo simbolo in comune. In quel caso il percorso seguito dall'algoritmo seguira' una traiettoria angolata, facendo quindi tutti i "piccoli passi" (l'unico tassello obliquo e' il target  $b[1][1]$ ), per un totale di  $n + m$  iterazioni.

LeggiLCS non fa parte del programma d'esame, e' riportato qua per completezza.

---

**Algorithm** Leggi LCS

---

```

procedure LEGGILCS( $b, X, i, j$ )
  if  $i = 0 \vee j = 0$  then
    return  $\langle \rangle$ 
  end if
  if  $b[i][j] = "\nwarrow"$  then
    return append(LeggiLCS( $b, X, i - 1, j - 1$ ),  $x_i$ )
  else
    if  $b[i][j] = "\uparrow"$  then
      return LeggiLCS( $b, X, i - 1, j$ )
    else
      return LeggiLCS( $b, X, i, j - 1$ )
    end if
  end if
end procedure

```

---



---

**Algorithm** Stampa LCS

---

```

procedure STAMPALCS( $b, X, i, j$ )
  if  $i = 0 \vee j = 0$  then
    return  $\langle \rangle$ 
  end if
  if  $b[i][j] = "\nwarrow"$  then
    StampaLCS( $b, X, i - 1, j - 1$ )
    print( $x_i$ )
  else
    if  $b[i][j] = "\uparrow"$  then
      StampaLCS( $b, X, i - 1, j$ )
    else
      StampaLCS( $b, X, i, j - 1$ )
    end if
  end if
end procedure

```

---

**Conclusione** Quindi la complessita' temporale totale e'  $O(n * m)$ , molto migliore dell'algoritmo TOP-DOWN presentato nel paragrafo precedente. E' pero' da tenere in considerazione che questo richiede spazio in memoria con una complessita' di  $O(n * m)$ , visto che deve mantenere due matrici  $n * m$ . Certamente superiore al  $O(n + m)$  dell'algoritmo TOP-DOWN, ma resta pur sempre un costo che vale la pena pagare per usufruire della strategia Bottom-Up.

# Chapter 3

## Problema LIS

### 3.1 Introduzione

#### LIS

**Introduzione** Il problema LIS (Longest Increasing Subsequence) consiste nel cercare in tempo ragionevole la sottosequenza piu' lunga crescente all'interno di una stringa o sequenza. Si mette in evidenza che  $LIS(X) = LCS(X, SORTED(X))$ .

Inoltre il teorema di Erdos-Szekeres afferma:

$\forall X \mid interiDistinti(X) \wedge |X| = n^2 + 1 \Rightarrow |LIS(X)| = |LDS(X)| = n + 1$ .

Dove LDS e' il problema opposto a LIS, la Longest Decreasing Subsequence.

#### Esempi

- $X = \langle 0, 8, 4, 12, 2, 10, 6, 14, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15 \rangle$   
 $Z = \langle 0, 2, 6, 9, 11, 15 \rangle$

Ma non esiste solo quella soluzione, altri candidati sono

$Z = \langle 0, 4, 6, 9, 11, 15 \rangle$

$Z = \langle 0, 2, 6, 9, 13, 15 \rangle$

$Z = \langle 0, 4, 6, 9, 13, 15 \rangle$

### 3.2 Algoritmo

#### Ragionamento

#### Notazione

$$X_i = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots, x_i \rangle \quad (3.1)$$

$$Z_k = \langle z_1, z_2, z_3, \dots, z_k \rangle \quad (3.2)$$

$$Z = LIS(X) \quad (3.3)$$

**Caso 1** Sia  $x_i = z_k$ .

$Z_k = Z_{k-1} \cup \{x_i\}$ .

Dove  $Z_{k-1} = LIS(X_p)$ , con  $p \in [1, i)$ .

Data la definizione di LIS:  $\forall j \in [1, k) \ z_j < x_i$ .

Ricorsivamente e' sufficiente tenere a mente che  $z_{k-1} < x_i$ .

Definisco una funzione  $V : R \rightarrow R$  tale che:  $V(j) = |LIS(X_j)|$

Definisco una funzione  $P : R \rightarrow R$  tale che:

$P(i) = \max_{V(j)}(\{\forall j \in [1, i) \ z_k < x_i\})$ .

**Caso 2** Sia  $x_i \neq z_k$ .

Allora  $Z_k = LIS(X_{i-1})$ .

**Ricorsione** Da qui,  $Z_i = LIS(X_i)$

**Caso Base**

$$i = 0 \Rightarrow Z_i = \langle \rangle \quad (3.4)$$

$$i = 1 \Rightarrow Z_i = X_i \quad (3.5)$$

**Caso Ricorsivo**

$$Z_i = \begin{cases} Z_{P(i)} \cup \{x_i\} & |Z_{P(i)}| + 1 \geq |Z_{i-1}| \\ Z_{i-1} & |Z_{P(i)}| + 1 < |Z_{i-1}| \end{cases}$$

**Caso Generale**

$$Z_i = \begin{cases} X_i & i < 2 \\ Z_{P(i)} \cup \{x_i\} & |Z_{P(i)}| + 1 \geq |Z_{i-1}| \\ Z_{i-1} & |Z_{P(i)}| + 1 < |Z_{i-1}| \end{cases}$$

### 3.3 Procedura BOTTOM-UP

Il vettore  $C$ :  $C[i] = |LIS(X_i)|$ .

Il vettore  $L$ :  $L[i] = \text{LAST-ELEMENT}(LIS(X_i))$ .

Il vettore  $H$ :  $H[i] = P(i)$ .

---

```

procedure LIS( $X$ )
   $C[0] \leftarrow 0$ 
   $C[1] \leftarrow 1$ 
   $H[1] \leftarrow 0$ 
   $L[1] \leftarrow 1$ 
  for  $i = 2$  to  $n$  do
     $p \leftarrow 0$ 
    for  $j = 1$  to  $i - 1$  do
      if  $x_{L[j]} < x_i \wedge C[j] > C[p]$  then
         $p \leftarrow j$ 
      end if
    end for
     $H[i] \leftarrow p$ 
    if  $C[p] + 1 \geq C[i - 1]$  then
       $C[i] \leftarrow C[p] + 1$ 
       $L[i] \leftarrow i$ 
    else
       $C[i] \leftarrow C[i - 1]$ 
       $L[i] \leftarrow L[i - 1]$ 
    end if
  end for
end procedure

```

---



---

```

procedure LEGGI-LIS( $X, n$ )
   $i \leftarrow n$ 
   $Z \leftarrow \langle \rangle$ 
  while  $i \neq 0$  do
    if  $i = L[i]$  then
       $Z \leftarrow \text{prepend}(Z, x_i)$ 
       $i \leftarrow H[i]$ 
    else
       $i \leftarrow L[i]$ 
    end if
  end while
  return  $Z$ 
end procedure

```

---

**Complessita'**  $T(n) = O(n^2) + O(n) = O(n^2)$

### 3.4 Variante Rizzi

$LIS_V$  e' un sottoproblema di LIS, ovvero la LIS che termina con l'elemento  $i$ -esimo di  $X_i$ .

Il vettore  $C$ :  $C[i] = |LIS_V(X_i)|$ .

Il vettore  $H$ :  $H[i] = P(i)$ .

---

```

procedure LIS(X)
   $C[1] \leftarrow 1$ 
   $H[1] \leftarrow 0$ 
   $Z \leftarrow C[1]$ 
  for  $i = 2$  to  $m$  do
     $max \leftarrow 0$ 
     $H[i] \leftarrow 0$ 
    for  $h = 1$  to  $i - 1$  do
      if  $x_h < x_i \wedge C[h] > max$  then
         $max \leftarrow C[h]$ 
         $H[i] \leftarrow h$ 
      end if
    end for
     $C[i] \leftarrow 1 + max$ 
    if  $C[i] > Z$  then
       $Z \leftarrow C[i]$ 
    end if
  end for
  return  $Z$ 
end procedure

```

---



---

```

procedure BUILD-LIS(X)
  if  $H[i] \neq 0$  then
    BUILD-LIS( $H[i]$ )
  end if
   $print(x_i)$ 
end procedure

```

---

**Complessita'**  $T(n) = O(n^2) + O(n) = O(n^2)$

# Chapter 4

## Problema LICS

### 4.1 Introduzione

#### LICS

**Introduzione** Il problema LICS (Longest Increasing Common Subsequence) consiste nel cercare in tempo ragionevole la sottosequenza comune piu' lunga crescente all'interno di due stringhe o sequenze.

#### Esempi

- $X = \langle 3, 4, 9, 1 \rangle$   
 $Y = \langle 5, 3, 8, 9, 10, 2, 1 \rangle$

La soluzione sarebbe  $Z = \langle 3, 9 \rangle$

### 4.2 Algoritmo

#### Ragionamento

#### Notazione

$$X_i = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots, x_i \rangle \quad (4.1)$$

$$Y_i = \langle y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, \dots, y_j \rangle \quad (4.2)$$

$$Z_k = \langle z_1, z_2, z_3, \dots, z_k \rangle \quad (4.3)$$

$$Z = LIS(X, Y) \quad (4.4)$$

Definisco una funzione  $V : R \times R \rightarrow R$  tale che:  $V(i, j) = |LICS(X_i, Y_j)|$

E una funzione analoga alla  $P(i)$  di LIS:

Definisco una funzione  $P : R \times R \rightarrow R \times R$  tale che:  
 $P(i, j) = \max_{V(p, q)} (\{ \forall p, q \mid p \in [1, i) \wedge q \in [1, j) \mid z_k < x_i \wedge z_k < y_j \})$ .



**Caso 1**  $x_i = y_i \wedge x_i = z_k$

$$Z_k = Z_{k-1} \cup \{x_i\}$$

$$Z_{k-1} = LICS(X_p, Y_q) \text{ con } p \in [1, i) \wedge q \in [1, j)$$

Data la definizione di LICS:

$$\forall w \in [1, k) \quad z_w < x_i.$$

$$\forall w \in [1, k) \quad z_w < y_j.$$

In particolare:

$$z_{k-1} < x_i$$

$$z_{k-1} < y_j$$

Ora, visto che  $x_i = y_i$ , la  $P(i, j)$  si semplifica:

$$P(i, j) = \max_{V(p, q)}(\{\forall p, q \mid p \in [1, i) \wedge q \in [1, j) \mid z_k < x_i\}).$$

Quindi scrivo:

$$\exists p, q \mid P(i, j) = (p, q) \Rightarrow Z_{k-1} = LICS(X_p, Y_q)$$

**Caso 2**  $x_i = y_i \wedge x_i \neq z_k$

Logicamente, devo escludere questi valori:

$$Z_k = LICS(X_{i-1}, Y_{j-1})$$

**Caso 3**  $x_i \neq y_i \wedge x_i = z_k \Rightarrow y_j \neq z_k$

$$Z_k = LICS(X_i, Y_{j-1})$$

**Caso 4**  $x_i \neq y_i \wedge y_j = z_k \Rightarrow x_i \neq z_k$

$$Z_k = LICS(X_{i-1}, Y_j)$$

**Caso 5**  $x_i \neq y_i \wedge x_i \neq z_k \wedge y_j \neq z_k$

$$Z_k = LICS(X_{i-1}, Y_{j-1})$$

**Ricorrenza** Non conoscendo a priori il valore di  $Z$ , l'esplorazione binaria fara' si che si esplori il Caso 5 come sottocaso dei casi 3 e 4. Da qui,  $Z_{i,j} = LIS(X_i, Y_j)$

**Caso Base**

$$i = 0 \Rightarrow Z_{i,j} = <> \tag{4.5}$$

$$j = 0 \Rightarrow Z_{i,j} = <> \tag{4.6}$$

**Caso Ricorsivo**

$$Z_i = \begin{cases} Z_{P(i,j)} & (x_i = y_j) \wedge (|Z_{P(i,j)}| + 1 \geq |Z_{i-1,j-1}|) \\ Z_{i-1,j-1} & (x_i = y_j) \wedge (|Z_{P(i,j)}| + 1 < |Z_{i-1,j-1}|) \\ Z_{i,j-1} & (x_i \neq y_j) \wedge (|Z_{i,j-1}| \geq |Z_{i-1,j}|) \\ Z_{i-1,j} & (x_i \neq y_j) \wedge (|Z_{i,j-1}| < |Z_{i-1,j}|) \end{cases}$$

**Caso Generale**

$$Z_i = \begin{cases} <> & i = 0 \vee j = 0 \\ Z_{P(i,j)} & (x_i = y_j) \wedge (|Z_{P(i,j)}| + 1 \geq |Z_{i-1,j-1}|) \\ Z_{i-1,j-1} & (x_i = y_j) \wedge (|Z_{P(i,j)}| + 1 < |Z_{i-1,j-1}|) \\ Z_{i,j-1} & (x_i \neq y_j) \wedge (|Z_{i,j-1}| \geq |Z_{i-1,j}|) \\ Z_{i-1,j} & (x_i \neq y_j) \wedge (|Z_{i,j-1}| < |Z_{i-1,j}|) \end{cases}$$

### 4.3 Procedura BOTTOM-UP

La matrice  $C$ :  $C[i][j] = |LICS(X_i, Y_j)|$ .

La matrice  $L$ :  $L[i][j] = \text{LAST-ELEMENT}(LICS(X_i, Y_j))$ .

La matrice  $H$ :  $H[i][j] = P(i, j)$ .

---

```

procedure LICS( $X, Y$ )
  INIZIALIZZA( $|X|, |Y|$ )
  for  $i = 1$  to  $n$  do
    for  $j = 1$  to  $m$  do
      if  $x_i = y_i$  then
         $(p, q) \leftarrow P(i, j)$ 
         $H[i][j] \leftarrow (p, q)$ 
        if  $C[p][q] + 1 \geq C[i-1][j-1]$  then
           $C[i][j] \leftarrow C[p][q] + 1$ 
           $L[i][j] \leftarrow (i, j)$ 
        else
           $C[i][j] \leftarrow C[i-1][j-1]$ 
           $L[i][j] \leftarrow L[i-1][j-1]$ 
        end if
      else
        if  $C[i][j-1] \geq C[i-1][j]$  then
           $C[i][j] \leftarrow C[i][j-1]$ 
           $L[i][j] \leftarrow L[i][j-1]$ 
        else
           $C[i][j] \leftarrow C[i-1][j]$ 
           $L[i][j] \leftarrow L[i-1][j]$ 
        end if
      end if
    end for
  end for
end procedure

```

---

**Complessita'**  $T(n) = \Theta(n \cdot m) * O(n \cdot m) + O(n)$   
 $T(n) = O(n^2 \cdot m^2) + O(n) = O(n^2 \cdot m^2)$

---

```

procedure INIZIALIZZA( $n, m$ )
  for  $i = 0$  to  $n$  do
     $C[i][0] \leftarrow 0$ 
     $H[i][0] \leftarrow (0, 0)$ 
  end for
  for  $j = 0$  to  $m$  do
     $C[0][j] \leftarrow 0$ 
     $H[0][j] \leftarrow (0, 0)$ 
  end for
end procedure

```

---



---

```

procedure P( $i, j$ )
   $p \leftarrow 0$ 
   $q \leftarrow 0$ 
  for  $w = 1$  to  $i - 1$  do
    for  $z = 1$  to  $j - 1$  do
      if  $x_{L[w][z][0]} < x_i \wedge C[w][z] > C[p][q]$  then
         $p \leftarrow w$ 
         $q \leftarrow z$ 
      end if
    end for
  end for
  return  $(p, q)$ 
end procedure

```

---



---

```

procedure LEGGI-LICS( $X, n, m$ )
   $i \leftarrow n$ 
   $j \leftarrow m$ 
   $Z \leftarrow \langle \rangle$ 
  while  $(i, j) \neq (0, 0)$  do
    if  $(i, j) = L[i][j]$  then
       $Z \leftarrow \text{prepend}(Z, x_i)$ 
       $(i, j) \leftarrow H[i][j]$ 
    else
       $(i, j) \leftarrow L[i][j]$ 
    end if
  end while
  return  $Z$ 
end procedure

```

---

## 4.4 Variante Rizzi

$LICS_V$  e' un sottoproblema di LICS, ovvero la LICS che termina con l'elemento  $i$ -esimo di  $X_i$ .

La matrice  $C$ :  $C[i][j] = |LICS_V(X_i, Y_j)|$ .

La matrice  $H$ :  $H[i][j] = P(i, j)$ .

---

```

procedure LICS( $X, Y$ )
   $Z \leftarrow 0$ 
  for  $i = 1$  to  $m$  do
    for  $j = 1$  to  $n$  do
       $H[i][j] \leftarrow (0, 0)$ 
      if  $x_i \neq y_j$  then
         $C[i][j] \leftarrow 0$ 
      else
         $max \leftarrow 0$ 
        for  $h = 1$  to  $i - 1$  do
          for  $k = 1$  to  $j - 1$  do
            if  $C[h][k] > max \wedge x_h < x_i$  then
               $max \leftarrow C[h][k]$ 
               $H[i][j] \leftarrow (h, k)$ 
            end if
          end for
        end for
         $C[i][j] \leftarrow 1 + max$ 
        if  $C[i][j] > Z$  then
           $Z \leftarrow C[i][j]$ 
        end if
      end if
    end for
  end for
  return  $Z$ 
end procedure

```

---



---

```

procedure BUILD-LICS( $X$ )
  if  $H[i][j] \neq (0, 0)$  then
    BUILD-LICS( $H[i][j]$ )
  end if
   $print(x_i)$ 
end procedure

```

---

**Complessita'**  $T(n) = \Theta(n \cdot m) * O(n \cdot m) + O(n)$   
 $T(n) = O(n^2 \cdot m^2) + O(n) = O(n^2 \cdot m^2)$

# Part II

## Esercitazione

# Chapter 5

## Applicazione di PD

### 5.1 Distanza di Edit

**Introduzione** E' definita come numero minimo di **cancellazioni, sostituzioni, inserimenti** che trasformano una stringa  $X$  in una seconda stringa  $Y$ . E' un problema simmetrico.  $D_{edit}(X, Y) = D_{edit}(Y, X)$ .

**Esempio**  $X = \langle 2, 4, 10, 3, 1 \rangle$   $Y = \langle 2, 4, 2, 1 \rangle$

- Cancellazione di 10.
- Sostituisco 3 con 2.

Quindi  $D_{edit}(X, Y) = 2$ .

- Inserimento di 10.
- Sostituisco 2 con 3.

Quindi  $D_{edit}(Y, X) = 2$ .

- Cancellazione di 3.
- Sostituisco 10 con 2.

Possono non esistere soluzioni uniche.

#### Problemi

**PR** Date due sequenze  $X, Y$ , trovare la distanza di edit di  $X$  in  $Y$ .

**P** Date due sequenze  $X, Y$ , trovare il minimo insieme di operazioni di cancellazione, inserimento, sostituzione che trasformano  $X$  in  $Y$ .

#### Soluzione

**Sottoproblema di PR** Trovare la distanza di edit dei prefissi  $X_i$  e  $Y_j$ . Il numero di sottoproblemi e'  $(m+1) \cdot (n+1)$ .  $d_{i,j} = \text{distanza di edit dei prefissi } X_i Y_j$ . Soluzione 'e  $d_{m,n}$

**Casi base di PR**

- $i = 0 \wedge j = 0 \Rightarrow d_{0,0} = 0$
- $i > 0 \wedge j = 0 \Rightarrow d_{i,0} = i$
- $i = 0 \wedge j > 0 \Rightarrow d_{0,j} = j$

**Caso ricorsivo di PR** Con  $i > 0 \wedge j > 0$ :

$$d_{i,j} = \begin{cases} d_{i-1,j-1} & x_i = y_j \\ \min(d_{i-1,j-1}, d_{i,j-1}, d_{i-1,j}) + 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il caso "altrimenti" si spiega in questo modo:

- $\text{Sostituzione}(x_i \rightarrow y_j) + d_{i-1,j-1}$
- $\text{Inserimento}(y_j) + d_{i,j-1}$
- $\text{Cancellazione}(x_i) + d_{i-1,j}$



## 5.2 Algoritmo TOP-DOWN

---

```

procedure ED-RIC( $X, Y$ )
  if  $j = 0$  then
    return  $i$ 
  else if  $i = 0$  then
    return  $j$ 
  else
     $A \leftarrow ED - RIC(X_{i-1}, Y_j) + 1$ 
     $B \leftarrow ED - RIC(X_i, Y_{j-1}) + 1$ 
     $C \leftarrow ED - RIC(X_{i-1}, Y_{j-1}) + 1$ 
    if  $A \leq B \wedge A \leq C$  then
      return  $A$ 
    else if  $B \leq A \wedge B \leq C$  then
      return  $B$ 
    else
      return  $C$ 
    end if
  end if
end procedure

```

---

**Complessita'** La complessita' dell'algoritmo ricorsivo e'  $(3^{n+m})$ .

### 5.3 Algoritmo BOTTOM-UP

Preparo una Matrice  $B[m][n]$  che contiene la ricostruzione del percorso iterativo. Ogni cella  $B[i][j] = \langle Direction, Operation \rangle$

---

```

procedure ED-ITER-RM( $m, n$ )
  for  $i = 0$  to  $m$  do
     $M[i][0] \leftarrow i$ 
     $B[i][0] \leftarrow \langle " \uparrow ", Null \rangle$ 
  end for
  for  $j = 0$  to  $n$  do
     $M[0][j] \leftarrow j$ 
     $B[0][j] \leftarrow \langle " \leftarrow ", Null \rangle$ 
  end for
end procedure

```

---



---

```

procedure ED-ITER( $X, Y$ )
   $ED - ITER - RM(m, n)$ 
  for  $i = 1$  to  $m$  do
    for  $j = 0$  to  $n$  do
      if  $x_i = y_j$  then
         $M[i][j] \leftarrow M[i-1][j-1]$ 
         $B[i][j] \leftarrow \langle "", Null \rangle$ 
      else if  $M[i-1][j] \leq M[i][j-1] \wedge M[i-1][j] \leq M[i-1][j-1]$  then
         $M[i][j] \leftarrow M[i-1][j] + 1$ 
         $B[i][j] \leftarrow \langle " \uparrow ", Delete \rangle$ 
      else if  $M[i][j-1] \leq M[i-1][j] \wedge M[i][j-1] \leq M[i-1][j-1]$  then
         $M[i][j] \leftarrow M[i][j-1] + 1$ 
         $B[i][j] \leftarrow \langle " \leftarrow ", Insert \rangle$ 
      else
         $M[i][j] \leftarrow M[i-1][j-1] + 1$ 
         $B[i][j] \leftarrow \langle " \nwarrow ", Change \rangle$ 
      end if
    end for
  end for
  return  $M[m][n]$ 
end procedure

```

---

**Complessita' di  $ED - ITER(X, Y)$**  L'algoritmo e' formato da due cicli innestati, quindi  $T(n) = \Theta(n \cdot m)$ .

# Part III

## Laboratorio

# Chapter 6

## Weighted Interval Scheduling

Data: 11-10-2022

### 6.1 Scheduling di Attività

Un esempio di Programmazione per Intervalli Pesati.

Siano date  $n$  attività da svolgersi nello stesso spazio fisico. Determinare un sottoinsieme di attività che non si sovrappongono e che sia il massimo possibile.

i	p(i)	v
1	0	10
2	0	2
3	2	8
4	2	1
5	1	1
6	4	3

Ad occhio si ricava  $\langle 1, 3, 6 \rangle$ .

L'algoritmo naive e' quello combinatorio, ma e' estremamente inefficiente. Il tempo e'  $T(n) = \Omega(2^n)$ .

### 6.2 Soluzione PD

- $n \leftrightarrow X = 1, \dots, n$
- $\forall i \in 1, \dots, n, s_i$  e' il tempo di inizio dell'attività  $i$
- $\forall i \in 1, \dots, n, f_i$  e' il tempo di fine dell'attività  $i$
- $\forall i \in 1, \dots, n, v_i$  e' il valore dell'attività  $i$

Definisco la funzione:

$COMP : \mathbb{P}(\{1, \dots, n\}) \rightarrow \{true, false\}$

$\forall i, j \in A \mid i = j \vee \text{attivit\`aCompatibili}(A_i, A_j) \Rightarrow COMP(A) = true$

Dette poi  $i, j$  due attivita' si dice:

$$attivit\grave{a}Compatibili(i, j) = \begin{cases} true & [s_i, f_i) \cap [s_j, f_j) = \emptyset \\ false & altrimenti \end{cases}$$

Quindi si definisce:

$$V : \mathbb{P}(\{1, \dots, n\}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$V(i, j) = \begin{cases} \sum_{i \in A} v_i & A \neq \emptyset \\ 0 & A = \emptyset \end{cases}$$

La Soluzione e'  $(S \subseteq X \mid COMP(S) = true) \wedge (\forall A \subseteq X \mid V(S) \geq V(A))$

**Processo** Detto  $S_n \Leftrightarrow sol(X_n)$ , e quindi  $S_{n-k} \Leftrightarrow sol(X_{n-k})$ . Nella soluzione di  $S_n$  si assume di conoscere:

- $\forall k \in 1, \dots, n \ S_{n-k}$
- $\forall k \in 1, \dots, n \ sol(X_{n-k})$

Detto  $OPT(i) = V(S_i)$ . Dividendo in sottoproblemi e potendo disporre a piacimento di ognuno di questi, riesco facilmente a individuare il caso base. E' immediato sapere  $sol(\emptyset)$  e  $sol(1)$ , quindi questi possono essere i casi base.

## Ragionamento

### Caso Base

$$S_0 \Leftrightarrow X_0 = \emptyset \wedge V(X_0) = 0 \tag{6.1}$$

$$S_1 \Leftrightarrow X_1 = x_1 \wedge V(X_1) = 1 \tag{6.2}$$

**Caso Ricorsivo** Voglio risolvere  $S_i$  e  $OPT(i)$ .

Assumo di avere gia' risolto  $\forall j \in \{0, \dots, i-1\} \mid S_j$ .

Se sapessi che  $i \notin S_i$  allora dovrei risolvere  $S_{i-1}$ .

Se sapessi al contrario che  $i \in S_i$  il sotto problema da considerare sarebbe:

$sol(\{j \mid \forall j \in X_{i-1} \mid attivit\grave{a}Compatibile(i, j)\})$ .

Questo si traduce nel risolvere  $S_j$ , dove  $j$  e' il massimo indice di una attivita' compatibile con  $i$ .

Detto  $p(i) : X \rightarrow X$ , la funzione che associa ad ogni attivita', l'indice dell'attivita' compatibile precedente piu' vicina. Potendo approssimare, per questioni di prestazione dei confronti, il problema  $S_j$  ad al problema leggermente piu' grande  $S_{p(i)}$ , mi riduco a:

$$V(p(i)) + v_i \geq V(i-1) \Rightarrow S_{p(i)} \cup \{x_i\} \tag{6.3}$$

$$V(p(i)) + v_i < V(i-1) \Rightarrow S_{i-1} \tag{6.4}$$

$$\tag{6.5}$$

Che verranno dimostrati successivamente. Il tutto si traduce in:

$$S_i = \begin{cases} \emptyset & i = 0 \\ \{x_1\} & i = 1 \\ S_{p(i)} \cup \{x_i\} & V(p(i)) + v_i \geq V(i-1) \\ S_{i-1} & V(p(i)) + v_i < V(i-1) \end{cases}$$

Ovvero, riprendo i casi base esattamente come scritti sopra, e in piu' vincolo la scelta della soluzione (e di fatto del sottoproblema  $S_{i-1}$  o  $S_{p(i)}$ ) all'unico criterio che e' in grado di stabilire la buona riuscita dell'ottimizzazione.

**Dimostrazione** Per dimostrare il teorema mi avvalgo dei sottoproblemi di S.

Assumo quindi che  $\forall j \in \{0, \dots, i-1\} \mid S_j$ .

Inoltre assumo che il problema per  $X_i$  abbia almeno una soluzione.

**1** Assumo che  $i \in S_i$ , devo mostrare che  $S_i = S_{p(i)} \cup i$ .

Si supponga per assurdo che  $S_{p(i)} \cup i \neq \text{sol}(X_i)$ .

Chiamo  $S^I$  la soluzione  $S_i$ .

Posso affermare con certezza che  $V(S^I) > V(S_{p(i)}) + v_i$ .

Visto che  $i \in S_i$ , deduco che allora  $S^I = S^{II} \cup i$ .

Ragionevolmente  $S^{II}$  contiene attivita' compatibili insieme a  $i$ .

Per la riduzione di qualche paragrafo precedente posso affermare che  $S^{II} \subseteq \{1, \dots, p(i)\}$ .

Ma allora  $V(S^{II}) > V(S_{p(i)})$ .

Il che e' impossibile, perche' sappiamo che  $S_{p(i)} = \text{sol}(X_{p(i)})$ .

Dovendo essere necessariamente  $S_{p(i)} = \text{sol}(X_{p(i)})$ , ne ricaviamo che  $S^{II} = S_{p(i)}$ . Quindi  $S_i = S_{p(i)} \cup i$ .

**2** Assumo che  $i \notin S_i$ , devo mostrare che  $S_i = S_{i-1}$ .

Supponiamo per assurdo che  $S_i \neq S_{i-1}$

Allora necessariamente  $\exists S^I \neq S_{i-1} \mid V(S^I) > V(S_{i-1})$ .

Visto che  $S^I = S_i$  allora  $i \notin S^I$ , dato che  $i \notin S_i$ .

Ma quindi allora  $S^I \subseteq \{1, \dots, i-1 \mid V(S^I) > V(S_{i-1})\}$ . Il che e' impossibile, perche' sappiamo che  $S_{i-1} = \text{sol}(X_{i-1})$ .

Dovendo essere necessariamente  $S_{i-1} = \text{sol}(X_{i-1})$ , ne ricaviamo che  $S^I = S_{i-1}$ .

Quindi  $S_i = S_{i-1}$ .

## 6.3 Procedura TOP-DOWN

---

```
procedure WIS-OPT( $i$ )
  if  $i = 0$  then
    return 0
  else if  $i = 1$  then
    return 1
  else
     $Z1 \leftarrow \text{append}(WIS - OPT(p(i)), x_i)$ 
     $Z2 \leftarrow WIS - OPT(i - 1)$ 
    if  $OPT(Z1) \geq Z2$  then
      return  $Z1$ 
    else
      return  $Z2$ 
    end if
  end if
end procedure
```

---

**Complessita'** E' immediato intuire che l'esplorazione prolissa dei due casi paralleli porta  $T(n) = O(2^n)$ .

## 6.4 Procedura BOTTOM-UP

---

```
procedure INIZIALIZZA-VETTORI
```

```
   $OPT[0] \leftarrow 0$ 
```

```
   $OPT[1] \leftarrow 1$ 
```

```
   $WIS[0] \leftarrow X_0$ 
```

```
   $WIS[1] \leftarrow X_1$ 
```

```
end procedure
```

---



---

```
procedure WIS-OPT-ITER( $i$ )
```

```
  INIZIALIZZA – VETTORI()
```

```
  for  $i = 2$  to  $n$  do
```

```
     $Z1 \leftarrow \text{append}(WIS[p(i)], x_i)$ 
```

```
     $Z2 \leftarrow WIS[i - 1]$ 
```

```
    if  $OPT[p(i)] < OPT[i - 1]$  then
```

```
       $OPT[i] \leftarrow OPT[p(i)] + v_i$ 
```

```
       $WIS[i] \leftarrow Z1$ 
```

```
    else
```

```
       $OPT[i] \leftarrow OPT[i - 1]$ 
```

```
       $WIS[i] \leftarrow Z2$ 
```

```
    end if
```

```
  end for
```

```
  return  $WIS[n]$ 
```

```
end procedure
```

---

Il vettore  $WIS$  e' implementabile ragionevolmente con una matrice di booleani che caratterizzano la presenza di un elemento nell'insieme. Visto che questo richiederebbe una quantita' di spazio non indifferente, una cosa comoda potrebbe essere codificare le righe o le colonne in un numero intero decimale.

**Complessita'** La procedura WIS-OPT-ITER comprende un solo ciclo di  $\Theta(n)$  iterazioni. Il calcolo di  $p(i)$  richiede  $O(n)$ , perche' e' un ciclo inverso semplice che dipende dalla disposizione degli elementi in  $X$ . Quindi l'algoritmo e'  $T(n) = (n^2)$  nel caso medio.

**Osservazioni** E' possibile scrivere una procedura che esplori linearmente l'array  $OPT$  per verificare i passi che sono stati effettuati per costruire  $OPT$ . Quindi si puo' risparmiare lo spazio occupato da  $WIS$ .

## 6.5 Consegna Esercizio

Da risolvere per 18-10-2022.

L'istanza e' simile ma con le case al posto delle attivita'. Ci sono  $n$  case adiacenti in linea retta. Ad ogni casa e' associato un valore  $d$ , la donazione che l'abitante e' disposto a fare. Trovare un sottoinsieme di case il cui valore totale sia massimo e in cui le case non siano adiacenti.



$$S_i = \begin{cases} \emptyset & i = 0 \\ \{x_1\} & i = 1 \\ S_{p(i)} \cup \{x_i\} & V(p(i)) + v_i \geq V(i-1) \\ S_{i-1} & V(p(i)) + v_i < V(i-1) \end{cases}$$

In questo caso  $p(i)$  scorre l'array di case fino a individuare la prima non adiacente. Questa operazione e' logicamente a tempo  $T(n) = \Theta(1)$ , perche' si parla di spostarsi a sinistra di due case.

## 6.6 Procedura Esercizio

---

```

procedure INIZIALIZZA-VETTORI
   $OPT[0] \leftarrow 0$ 
   $OPT[1] \leftarrow 1$ 
   $WIS[0] \leftarrow X_0$ 
   $WIS[1] \leftarrow X_1$ 
end procedure

```

---



---

```

procedure ESERCIZIO( $i$ )
  INIZIALIZZA-VETTORI()
  for  $i = 2$  to  $n$  do
     $Z1 \leftarrow \text{append}(WIS[p(i)], x_i)$ 
     $Z2 \leftarrow WIS[i - 1]$ 
    if  $OPT[p(i)] < OPT[i - 1]$  then
       $OPT[i] \leftarrow OPT[p(i)] + v_i$ 
       $WIS[i] \leftarrow Z1$ 
    else
       $OPT[i] \leftarrow OPT[i - 1]$ 
       $WIS[i] \leftarrow Z2$ 
    end if
  end for
  return  $WIS[n]$ 
end procedure

```

---

**Considerazioni Esercizio** Valgono le considerazioni di WIS-OPT-ITER, ma questa volta  $T(n) = \Theta(n)$ , perche' la complessita' di  $p(i)$  e' mutata. Inoltre si ricorda che entrambi gli esercizi godono di una proprieta' non scontata, ovvero la positivita' dei valori  $v_i$ . Se questa proprieta' non fosse stata garantita avremmo dovuto introdurre un'ulteriore caso di confronto. Quindi avremmo avuto  $\max(V(p(i)) + v_i, V(i - 1), v_i)$ .