

## Assignment 1

21/10/2022

Francesco Refolli 865955

### 1 Esercizio 1

$$\max x_1 + x_2 \quad (1)$$

$$x_1 + x_2 \leq 2 \quad (2)$$

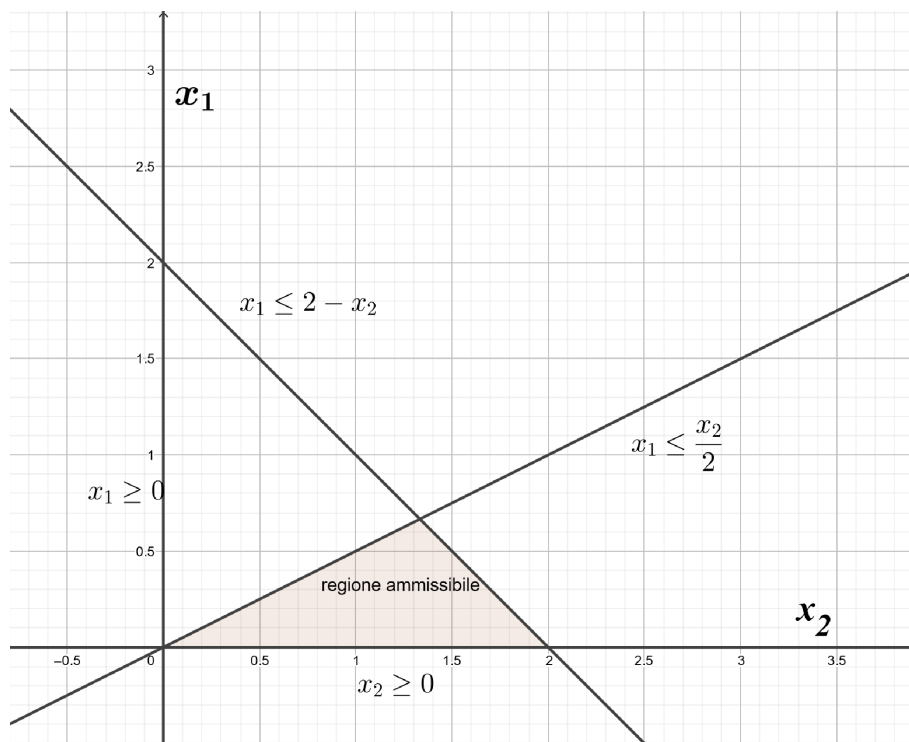
$$2x_1 - x_2 \leq 0 \quad (3)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (4)$$

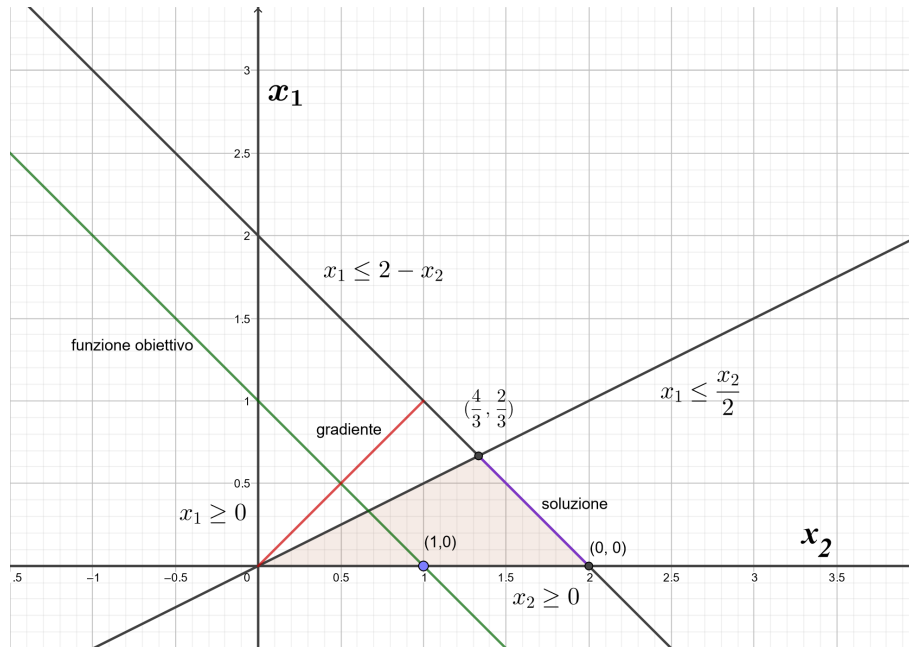
Costruisco il grafico con le equazioni dei vincoli lungo l'asse  $x_1 \times x_2$ .  
Riscrivo per comodita' i primi due vincoli in forma equivalente:

$$x_1 \leq 2 - x_2 \quad (5)$$

$$x_1 \leq \frac{x_2}{2} \quad (6)$$



Quindi disegno il gradiente della funzione obiettivo  $g$  e la funzione obiettivo.



Il vettore del gradiente della funzione obiettivo  $g = \langle 1, 1 \rangle$ , composto dalle derivate parziali delle componenti della funzione obiettivo, e' perpendicolare al vincolo  $x_1 \leq 2 - x_2$ . Il problema ha **Infinite Soluzioni Ottime**. Le soluzioni sono tutte le coppie  $\langle x_1, x_2 \rangle$  che risiedono nello spigolo della regione obiettivo su cui si poggia il vincolo  $x_1 \leq 2 - x_2$ . Per calcolare il segmento e' sufficiente calcolare l'intersezione dei vincoli  $x_1 \leq 2 - x_2$  e  $x_2 \geq 0$ . Il risultato sono i punti:  $(0, 2)$ ,  $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ . Le soluzioni sono tutti i punti compresi nel segmento delimitato da essi.

## 2 Esercizio 2

$$\max x_1 + x_2 \quad (7)$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 2 \quad (8)$$

$$2x_1 - x_2 \leq 0 \quad (9)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (10)$$

$$x_3 \leq 0 \quad (11)$$

### Conversione in forma aumentata

1 La forma aumentata non prevede vincoli di non positività, quindi inverte il segno di  $x_3$  in tutti i vincoli:

$$\max x_1 + x_2 \quad (12)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 \quad (13)$$

$$2x_1 - x_2 \leq 0 \quad (14)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad (15)$$

2 Aggiungo una variabile di slack  $x_4$  per portare il vincolo  $\leq$  in vincolo  $=$ .

$$\max x_1 + x_2 \quad (16)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 \quad (17)$$

$$2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \quad (18)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \quad (19)$$

3 Quindi esporto la funzione obiettivo  $f(x)$  in un vincolo  $Z - f(x) = 0$ .

$$\max Z \quad (20)$$

$$Z - x_1 - x_2 = 0 \quad (21)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 \quad (22)$$

$$2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \quad (23)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \quad (24)$$

**Risoluzione con tableau** Riempio la forma tabellare con i coefficienti delle variabili nei vincoli e nella funzione obiettivo. La tabella risulta:

base	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	b
Z	1	-1	-1	0	0	0
3	0	1	1	1	0	2
4	0	2	-1	0	1	0

La base e' formata da 2 variabili, perche' il numero di vincoli e' proprio 2. Inserisco nella base le variabili  $x_3, x_4$ . Fuori base rimangono  $x_1, x_2$ . La soluzione di base corrente  $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle = \langle 0, 0, 2, 0 \rangle$  e' ammissibile. Quindi procedo con l'algoritmo del simplesso.

**iterazione 1** Non esiste un coefficiente in prima riga negativo piu' basso di tutti gli altri. Scelgo la colonna 1 con coefficiente  $-1$ . La riga 2 ha il rapporto minimo, diventa la riga pivot. Il valore pivot e' 2, multiplico tutta la riga 2 per  $\frac{1}{2}$  per ridurre il valore pivot a 1. Quindi applico l'algoritmo per ricalcolare la tabella. Questa iterazione ha l'effetto di scambiare  $x_4$  della base con  $x_1$ .

base	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	b
Z	1	0	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
3	0	0	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	2
1	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0

**iterazione 2** Scelgo la colonna 2 perche' possiede il coefficiente in prima riga negativo piu' basso, ovvero  $-\frac{3}{2}$ . La riga 1 ha il rapporto minimo, diventa la riga pivot. Il valore pivot e'  $\frac{3}{2}$ , multiplico tutta la riga 2 per  $\frac{2}{3}$  per ridurre il valore pivot a 1. Applico l'algoritmo per ricalcolare la tabella. Questo ha l'effetto di scambiare  $x_3$  della base con  $x_2$ .

base	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	b
Z	1	0	0	1	0	2
2	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
1	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

**iterazione 3** La prima riga non contiene piu' valori negativi, l'algoritmo del simplesso si arresta.

La soluzione di base corrente e'  $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle = \langle \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 0, 0 \rangle$   
 Quindi una soluzione al problema PL e'  $\langle x_1, x_2 \rangle = \langle \frac{2}{3}, \frac{4}{3} \rangle$

Ad ogni modo, siccome una delle variabili non di base ha coefficiente 0 in prima posizione e' possibile continuare con le iterazioni per individuare una ulteriore soluzione ottimale al problema PL.

Selezionando la colonna  $x_4$ , l'unica riga con coefficiente positivo e' la riga 2. Quindi moltiplico la stessa per l'inverso del numero pivot:  $(\frac{1}{3})^{-1} = 3$ . Successivamente ricalcolo le altre righe di conseguenza.

Risulta:

base	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	b
Z	1	0	0	1	0	2
2	0	1	1	1	0	2
4	0	3	0	1	1	2

**iterazione 3** La prima riga non contiene piu' valori negativi, l'algoritmo del simplesso si arresta.

La soluzione di base corrente e'  $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle = \langle 0, 2, 0, 2 \rangle$

Quindi un'altra soluzione al problema PL e'  $\langle x_1, x_2 \rangle = \langle 0, 2 \rangle$